



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

---

POSGRADO EN CIENCIAS FISICAS

"DINAMICA CAOTICA Y SINCRONIZACION EN EL  
TRANSPORTE DE MOTORES BROWNIANOS"

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTOR EN CIENCIAS**

P R E S E N T A :

**FERNANDO RAMIREZ ALATRISTE**

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSE LUIS MATEOS TRIGOS

MIEMBRO DE COMITE TUTORAL: DR. OCTAVIO MIRAMONTES VIDAL

MIEMBRO DE COMITE TUTORAL: DR. GERMINAL COCHO GIL



MEXICO, D. F.

2007.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **AGRADECIMIENTOS**

### **APOYO FINANCIERO**

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca otorgada durante 5 años (No. de becario 167189).

### **ACADÉMICOS**

Al Dr. José Luis Mateos Trigos por invertir su tiempo en mi formación y en la realización de este trabajo de tesis.

A mi comité tutorial: Dr. Octavio Miramontes Vidal y Dr. Germinal Cocho Gil por su apoyo en mi formación.

A los miembros del jurado: Dr. Denis Pierre Boyer, Dr. Hernán Larralde Ridaura, Dr. Emilio Cortés Reyna y Dr. Álvaro Salas Brito, por su valiosa ayuda para mejorar este trabajo.

### **INSTITUCIONALES**

A la Universidad Nacional Autónoma de México por todas las facilidades brindadas para mi formación.

Al Instituto de Física de la UNAM, por brindarme los espacios académicos necesarios para el desarrollo de mis estudios.

*Le dedico este trabajo a mi esposa Cony Moreno Zenteno,  
a mi madre Margarita Alatraste Papaqui y a mi hermano  
Gabriel Ramírez Alatraste.*

# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Introducción</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2. Movimiento browniano</b>  | <b>5</b>  |
| 2.1. Comentarios históricos . . . . .   | 5         |
| 2.2. Ecuación de Langevin para el movimiento browniano . . . . .              | 6         |
| 2.3. Desplazamiento cuadrático medio . . . . .                                | 11        |
| <b>3. Ecuaciones de Langevin y Fokker-Planck</b>                              | <b>13</b> |
| 3.1. Solución estacionaria de la ecuación de Fokker Planck . . . . .          | 15        |
| 3.2. Procesos de Wiener . . . . .   | 17        |
| 3.3. Algoritmo para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas . . . . .  | 19        |
| <b>4. Movimiento browniano en potenciales periódicos</b>                      | <b>23</b> |
| 4.1. Normalización de las ecuaciones de Fokker Planck y de Langevin . . . . . | 24        |
| 4.2. Solución estacionaria . . . . .  | 25        |
| <b>5. Motores brownianos</b>  | <b>29</b> |
| 5.1. Máquinas de movimiento perpetuo . . . . .                                | 29        |
| 5.2. Ratchet de Feynman . . . . .   | 30        |
| 5.3. Modelo simplificado estocástico . . . . .                                | 32        |
| 5.3.1. Solución estacionaria . . . . .  | 35        |
| 5.4. Efecto ratchet . . . . .   | 38        |
| <b>6. Sincronización</b>  | <b>41</b> |
| 6.1. Osciladores auto sostenidos: un modelo de objetos oscilantes . . . . .   | 42        |
| 6.1.1. Caracterización del ritmo: periodo y frecuencia . . . . .              | 43        |
| 6.1.2. Acoplamiento de objetos oscilantes . . . . .                           | 43        |

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| 6.1.3.     | Ajuste del ritmo: enganche de frecuencia y de fase . . .                                       | 44         |
| 6.2.       | Sincronización de un oscilador por una fuerza externa . . . . .                                | 49         |
| 6.2.1.     | Dinámica de la fase . . . . .  | 49         |
| 6.2.2.     | Pequeñas perturbaciones e isócronas . . . . .  | 50         |
| 6.2.3.     | La ecuación para la dinámica de la fase . . . . .  | 51         |
| 6.2.4.     | Dinámica lenta de la fase . . . . .  | 52         |
| 6.2.5.     | Enganche de fase y región de sincronización . . . . .  | 54         |
| 6.2.6.     | Rotores forzados como osciladores autosostenidos . . .   | 57         |
| 6.3.       | Sincronización de frecuencia y fase en sistemas estocásticos . .                               | 58         |
| 6.3.1.     | Fase lineal interpolada $\phi^L$ . . . . .   | 58         |
| 6.4.       | Fase discreta $\phi^D$ y fase de Hilbert $\phi^H$ . . . . .                                    | 62         |
| <b>7.</b>  | <b>Sincronización del ratchet Sobreamortiguado</b>   | <b>65</b>  |
| 7.1.       | Definición de la fase . . . . .  | 66         |
| 7.2.       | Ratchet sobreamortiguado . . . . .   | 68         |
| 7.2.1.     | Resultados numéricos . . . . .   | 69         |
| <b>8.</b>  | <b>Sincronización del Ratchet inercial</b>   | <b>83</b>  |
| 8.1.       | Inversión de corriente y diagrama de bifurcación . . . . .                                     | 86         |
| 8.2.       | Resultados numéricos . . . . .   | 89         |
| 8.2.1.     | Ratchet inclinado inercial como un rotor . . . . .   | 90         |
| 8.2.2.     | Sincronización del ratchet inclinado con inercia con una<br>fuerza externa periódica . . . . . | 91         |
| <b>9.</b>  | <b>Sincronización de dos motores brownianos</b>  | <b>105</b> |
| 9.1.       | El modelo del caminante . . . . .  | 106        |
| 9.2.       | Definición de las fases . . . . .  | 107        |
| 9.3.       | Resultados numéricos . . . . .   | 108        |
| <b>10.</b> | <b>Conclusión y perspectivas</b>   | <b>119</b> |

## Resumen

El propósito del presente trabajo es estudiar la sincronización de fase y la dinámica caótica en motores brownianos también llamados “ratchets”. Consideramos tres casos: una partícula sobreamortiguada, una partícula inercial y dos partículas sobreamortiguadas acopladas a través de un potencial bistable. Estas partículas están sujetas a una fuerza periódica, a una fuerza constante y a una fuerza debida a un potencial periódico y asimétrico, llamado potencial ratchet. La fuerza constante es necesaria para obtener un rotor forzado en ausencia de la fuerza periódica. Este rotor tiene una frecuencia característica que puede ser enganchada con la frecuencia de la fuerza periódica. Introducimos una fase lineal a través de un conjunto de tiempos determinados por la ocurrencia de saltos entre pozos del potencial ratchet. Mostramos que la frecuencia promedio asociada a la fase lineal puede ser sincronizada con la frecuencia del forzamiento periódico. De esta forma, podemos formalmente caracterizar la sincronización a través de las lenguas de Arnold, las cuales representan regiones de sincronización en el espacio de parámetros del forzamiento. Discutimos en todos los casos las implicaciones de la sincronización en el transporte de ratchets.

## Abstract

In this work we study phase synchronization and the chaotic dynamics in Brownian motors also called “ratchets”. We consider three cases: one overdamped particle, one underdamped particle and two overdamped particles coupled through a bistable potential. These particles are subject to a periodic force, a constant force and a force due to a periodic and asymmetric potential called “ratchet potential”. The constant force is necessary in order to tilt the ratchet and obtain a forced rotor in the absence of the periodic force. This forced rotor has a characteristic frequency that can be locked with the frequency of the external driving. We introduced a linear phase through a set of times based on the occurrence of jumps between the wells of the ratchet potential. We show that the average frequency associated to the linear phase can be locked with the frequency of the external driving. In this way, we can properly characterize the phenomenon of synchronization through Arnold tongues, which represents regions of synchronization in the parameter space. We discuss the implications of the synchronization for the transport in ratchets.

# Capítulo 1

## Introducción

La física estadística fuera del equilibrio ha mostrado avances sorprendentes en la última década. Estos avances han revelado fenómenos de suma importancia sobre el orden inducido por el ruido. Los cuales se deben principalmente al papel constructivo del ruido en sistemas no lineales. La resonancia estocástica [1, 2, 3, 4] y los motores brownianos [5, 6, 7] son ejemplos claros de que el ruido induce orden. La resonancia estocástica es un fenómeno a través del cual una señal débil puede ser amplificada y optimizada con la ayuda del ruido, de la misma forma los motores brownianos utilizan las fluctuaciones para generar un transporte directo (velocidad promedio diferente de cero).

El transporte directo inducido por el ruido térmico en sistemas espacialmente periódicos está descartado por la segunda ley de la termodinámica. Entonces, para generar transporte directo, el sistema debe ser llevado fuera del equilibrio térmico ya sea por una fuerza determinista o estocástica. El caso más interesante aparece cuando estas fuerzas son de promedio cero y con esto nos referimos a que el promedio temporal, espacial o de ensamble de las fuerzas asociadas es cero. Además de tener al sistema fuera del equilibrio térmico, se requiere que el sistema tenga una asimetría espacial.

Los motores brownianos pueden ser modelados por una partícula browniana sujeta a una fuerza determinista o estocástica externa dependiente del tiempo de promedio cero y a la fuerza debida a un potencial periódico y asimétrico llamado potencial ratchet.

Los avances en el área de investigación sobre motores brownianos, también llamados ratchets” (o motores moleculares en el ámbito biológico), han sido motivados en parte, por el reto de explicar el transporte unidireccional de

proteínas en el interior de las células. En particular, la cinesina es uno de estos motores moleculares que han atraído especial interés debido a que los detalles de su dinámica ya han sido medidos [8, 9]. Otros avances que han impulsado el estudio de los motores brownianos se deben a razones científicas y tecnológicas enfocadas al entendimiento de las técnicas de separación y bombeo inducidas por ruido [10].

Los motores brownianos han sido utilizados en una gran variedad de áreas como: Uniones Josephson [11, 12, 13], ratchet cuánticos [14], reduciendo la densidad de vórtices en superconductores [15, 16], suspensiones coloidales de partículas ferromagnéticas [17], solo por mencionar algunas. Para una revisión extensa sobre los motores brownianos consultar [7]. A pesar de que la mayoría de la literatura en este campo considera la presencia de ruido, ha habido trabajos que modelan las propiedades de transporte de ratchets deterministas [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26], mostrando que existe una gran variedad de fenómenos no lineales relacionados.

Por otro lado, existen otros fenómenos relacionados con los sistemas no lineales como la sincronización. La sincronización en términos generales significa la correlación o la concordancia en el tiempo de dos procesos. Esta es muy común en sistemas complejos, no sólo en las ciencias físicas, sino también en las ciencias de la vida [12, 27, 28, 29].

La sincronización ha sido estudiada desde los primeros días de la física. Empezó desde el siglo XVII cuando Huygens encontró que dos péndulos débilmente acoplados (colgando del mismo soporte) se sincronizaban en fase. Actualmente las investigaciones en sincronización se han enfocado en sistemas caóticos y estocásticos, para una revisión ver [12, 28]. En el primer caso, la aparición de una dinámica sincronizada es en general no trivial. Un sistema caótico se caracteriza por que su evolución depende sensiblemente de las condiciones iniciales. Esto quiere decir que dos condiciones iniciales muy cercanas se separan exponencialmente con el tiempo. Por lo que un sistema caótico desafía intrínsecamente la definición de sincronización.

Recientemente han habido trabajos donde se estudia la sincronización en motores brownianos, pero sólo abarcan la sincronización completa entre dos ratchets acoplados [30, 31, 32, 33], y con sincronización anticipada entre dos ratchets acoplados con un retraso temporal [34]. Sin embargo todavía queda por estudiar muchos aspectos interesantes, por lo que en esta tesis nos enfocaremos en la sincronización de frecuencias en ratchets.

El esquema de la tesis es el siguiente: en el capítulo 2 revisamos los conceptos básicos sobre el movimiento browniano, que serán fundamentales para

la discusión de los siguientes capítulos. En el capítulo 3 revisamos de forma general la ecuación de Langevin, la cual describe la dinámica de una partícula browniana sujeta a fuerzas externas. También revisamos en este mismo capítulo la ecuación de Fokker-Planck, la cual describe la evolución temporal de la densidad de probabilidad asociada a la ecuación de Langevin. En el capítulo 4 revisamos los resultados analíticos sobre el movimiento browniano en potenciales periódicos. En el capítulo 5 revisamos el tema de los motores brownianos y el efecto ratchet. En el capítulo 6 introducimos los conceptos básicos sobre sincronización y definimos la fase de un sistemas caótico o estocástico. En el capítulo 7 presentamos los resultados obtenidos para la sincronización en el ratchet sobreamortiguado. En el capítulo 8 revisamos algunos conceptos básicos sobre sistemas caóticos y presentamos los resultados para el caso de la sincronización en el ratchet inercial. En el capítulo 9 presentamos los resultados de la sincronización para dos partículas acopladas sobre un ratchet, este modelo está motivado por la dinámica de la cinesina. Finalmente en el capítulo 10 presentamos las conclusiones de este trabajo de tesis.

# Capítulo 2

## Movimiento browniano

En este capítulo presentamos los conceptos básicos asociados al movimiento browniano. Estos conceptos van a ser útiles para el desarrollo de los capítulos posteriores.

### 2.1. Comentarios históricos

En 1827 un famoso botánico llamado Robert Brown observó que, cuando suspendía unos pequeños granos de polen en agua, éstos presentaban un movimiento irregular. Este fenómeno fue llamado Movimiento browniano en honor a su trabajo pionero. Brown demostró que el movimiento estaba presente en cualquier suspensión de partículas finas de vidrio y minerales, por lo que descartó cualquier origen orgánico de este movimiento.

EL problema del movimiento browniano no fue resuelto hasta que Einstein en 1905 dio una explicación satisfactoria [35]. Otra explicación alternativa la dio independientemente Smoluchowski [36].

Los dos puntos principales en la explicación de Einstein al problema del movimiento browniano son:

- El movimiento es causado por los impactos frecuentes en el grano de polen de las moléculas del líquido, las cuales están en un movimiento incesante.

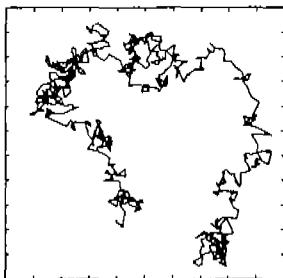


Figura 2.1: Movimiento browniano en un plano

- El movimiento de estas moléculas es tan complicado, que su efecto en el grano de polen puede describirse sólo probabilísticamente, en términos de los impactos frecuentes estadísticamente independientes.

La explicación de Einstein puede ser considerada para propósitos prácticos, como el primer modelo estocástico de un fenómeno natural. De los resultados de Einstein sobre la constante de difusión del movimiento browniano, Perrin, un físico francés, determinó el número de Avogadro.

## 2.2. Ecuación de Langevin para el movimiento browniano

El movimiento browniano revela claramente las fluctuaciones estadísticas que ocurren en un sistema en equilibrio térmico [37].

Por simplicidad tratemos el problema en una dimensión. Consideremos una partícula de masa  $m$  cuya coordenada del centro de masa al tiempo  $t$  está designada por  $x(t)$  y cuya velocidad es  $v = dx/dt$ . Esta partícula está inmersa en un líquido a temperatura absoluta  $T$ . Tratar de describir la interacción de la partícula con los grados de libertad del líquido que la rodea es una tarea muy complicada. Pero el efecto de todos estos grados de libertad se puede considerar como una fuerza neta efectiva  $F(t)$  sobre la partícula. Si además la partícula interactúa con otras fuerza externas, tales como la gravedad o campos electromagnéticos, a través de una fuerza denotada por  $\mathcal{F}(t)$ , entonces la segunda ley de Newton puede ser escrita como

$$m \frac{dv}{dt} = \mathcal{F}(t) + F(t). \quad (2.1)$$

A partir de aquí poco se puede decir de la fuerza  $F(t)$ , la cual describe la interacción de  $x(t)$  con los demás grados de libertad del sistema. Básicamente  $F(t)$  debe depender de las posiciones de muchos átomos en constante movimiento. Entonces  $F(t)$  es una función que fluctúa rápidamente en el tiempo y varía de una forma irregular, de hecho no podemos especificar la dependencia explícita de  $F$  en  $t$ . Para progresar formulemos el problema en términos estadísticos. Entonces consideremos un ensamble de muchos sistemas similares, cada uno consiste de una partícula y el medio que la rodea. Para cada uno de estos sistemas la fuerza  $F(t)$  es alguna función aleatoria de  $t$ . Entonces uno puede hacer consideraciones estadísticas del ensamble.

Los siguientes comentarios descriptivos se pueden hacer acerca de  $F(t)$ : la razón a la cual varía  $F(t)$  puede ser caracterizada por un "tiempo de correlación"  $\tau^*$ , el cual mide el tiempo promedio entre dos máximos (o mínimos) sucesivos de la función fluctuante  $F(t)$ . Este tiempo es muy pequeño macroscópicamente hablando (generalmente es del orden de la separación intermolecular media dividida por la velocidad molecular media, esto es el tiempo de colisión). La fuerza  $F(t)$  no tiene una dirección preferencial en el espacio; entonces  $F(t)$  debe ser tanto positiva como negativa de tal forma que su promedio de ensamble es cero.

La ecuación (2.1) es válida para cada miembro del ensamble y nuestro objetivo es hacer predicciones estadísticas acerca de  $v$ . Como  $F(t)$  es una función que fluctúa rápidamente, por (2.1) se sigue que  $v$  también es una función fluctuante en el tiempo. La función  $v$  tiene una parte que varía lentamente (su promedio) y otra que fluctúa rápidamente ( $v'$ ), cuyo promedio es cero, por lo que podemos escribir

$$v = \bar{v} + v'. \quad (2.2)$$

La parte de variación lenta  $\bar{v}$ , es crucial para determinar el comportamiento de la partícula en grandes periodos de tiempo. Para investigar su dependencia integremos la ecuación (2.1) sobre un intervalo  $\tau$ , el cual es pequeño a escala macroscópica, pero es grande en el sentido de que se cumple  $\tau \gg \tau^*$ . Por lo que se obtiene

$$m[v(t + \tau) - v(t)] = \mathcal{F}(t)\tau + \int_t^{t+\tau} F(t')dt'. \quad (2.3)$$

Donde suponemos que  $\mathcal{F}(t)$  es una función que varía lentamente, de tal forma que cambia por una cantidad despreciable durante el tiempo  $\tau$ . La integral en (2.3) debería ser muy pequeña (del orden de  $\sqrt{\tau} \ll \tau$ ) ya que cambia

muchas veces de signo en el tiempo  $\tau$ . Por lo que podríamos despreciarla y escribir

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \mathcal{F}. \quad (2.4)$$

Pero este orden de aproximación es muy burdo para describir la situación física. La interacción con el ambiente expresada por  $F$ , debe ser tal que siempre tienda a restablecer a la partícula a la situación de equilibrio. Esta situación de equilibrio está caracterizada por  $\bar{v} = 0$ , si suponemos que la fuerza externa  $\mathcal{F} = 0$ . La interacción expresada por  $F$  es tal que, si al tiempo inicial  $\bar{v} \neq 0$ , provoca que  $\bar{v}$  se aproxime gradualmente a su posición de equilibrio  $\bar{v} = 0$ . Claramente (2.4) es incapaz de predecir este comportamiento. La razón es que la fuerza  $F$  es afectada por el movimiento de la partícula de tal forma que,  $F$  contiene una parte que varía lentamente  $\bar{F}$ , tal que tienda a restablecer a la partícula al equilibrio. Por lo que análogamente a (2.2) podemos escribir

$$F = \bar{F} + F', \quad (2.5)$$

donde  $F'$  es la parte de  $F$  que fluctúa rápidamente cuyo promedio es cero. La parte que varía lentamente  $\bar{F}$ , debe ser alguna función de  $\bar{v}$  tal que  $\bar{F}(\bar{v}) = 0$  cuando  $\bar{v} = 0$ . Si  $\bar{v}$  no es muy grande,  $\bar{F}(\bar{v})$  puede ser desarrollada en una serie de potencias de  $\bar{v}$ , cuyo primer miembro diferente de cero es lineal en  $\bar{v}$ . Entonces  $\bar{F}$  tiene la forma general de

$$\bar{F} = -\alpha\bar{v}, \quad (2.6)$$

donde  $\alpha$  es una constante positiva (llamada "coeficiente de fricción"), el signo menos indica explícitamente que la fuerza  $\bar{F}$  tiende a reducir  $\bar{v}$  a cero mientras el tiempo transcurre. El presente argumento no permite decir ninguna propiedad de  $\alpha$  ni su magnitud. Pero podemos decir que  $\alpha$  debe ser expresable de alguna forma en términos de  $F$ , ya que la fuerza de fricción es también causada por la interacción descrita por  $F(t)$ .

Por lo que (2.3) se puede escribir como

$$m \frac{dv}{dt} = \mathcal{F} - \alpha v + F'(t), \quad (2.7)$$

donde se ha hecho la aproximación  $\alpha\bar{v} \approx \alpha v$  con error despreciable (ya que  $\alpha v'$  puede ser despreciado comparado con  $F'(t)$ ).

Introduciendo  $\gamma \equiv \alpha/m$  y la fuerza fluctuante por unidad de masa  $\xi(t) \equiv F'(t)/m$  (llamada también fuerza de Langevin) en (2.7) tenemos

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v = \frac{\mathcal{F}}{m} + \xi(t). \quad (2.8)$$

La ecuación (2.8) es la llamada "ecuación de Langevin". Difiere de la ecuación original (2.3) por la descomposición explícita de  $F(t)/m$ , en su parte que varía lentamente  $-\gamma v$  y la parte fluctuante  $\xi(t)$ , la cual es una función aleatoria pura, esto es, que su promedio es cero independientemente de la velocidad o la posición de la partícula.

En adelante consideraremos el caso en que la fuerza externa sea cero ( $\mathcal{F} = 0$ ) en (2.8), por lo que tenemos

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v = \xi(t). \quad (2.9)$$

Como ya habíamos mencionado antes, es razonable suponer que el promedio sobre el ensamble de la fuerza de Langevin, y por lo tanto de  $\xi$ , es cero<sup>1</sup>

$$\langle \xi(t) \rangle = 0. \quad (2.10)$$

Si multiplicamos dos funciones  $\xi(t)$  a tiempos diferentes  $t$  y  $t'$ , suponemos que el valor promedio es cero si la diferencia de tiempo  $t - t'$  es más grande que el tiempo de colisión  $\tau^*$ , i.e.,

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 0 \quad \text{para} \quad |t - t'| \geq \tau^*.$$

Esta suposición parece razonable, ya que las colisiones de las moléculas del fluido con la pequeña partícula son aproximadamente independientes. Usualmente, el tiempo de una colisión  $\tau^*$  es mucho más pequeño que el tiempo de relajación  $\tau = 1/\gamma$  de la velocidad de la partícula. Podemos entonces tomar el límite  $\tau^* \rightarrow 0$  como una aproximación razonable, dando

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = q\delta(t - t'), \quad (2.11)$$

donde  $\delta(t)$  es la función delta de Dirac y  $q$  es la intensidad del ruido.

Una posible representación de esta función es

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t), \quad (2.12)$$

---

<sup>1</sup>En lo siguiente denotaremos al promedio de ensamble por  $\langle \cdot \rangle$

con

$$\delta_\epsilon = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & -\frac{\epsilon}{2} < t < \frac{\epsilon}{2} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si suponemos que el ruido  $\xi(t)$  tiene una distribución gaussiana, entonces a este ruido se le llama ruido blanco gaussiano, ya que su densidad espectral  $S(\omega)$  (que es la transformada de Fourier de la función de correlación (2.11)) es independiente de la frecuencia, esto es

$$S(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} q\delta(\tau) d\tau = 2q.$$

En general la densidad espectral dependerá de  $\omega$  y en este caso se dice que el ruido es coloreado.

Queremos ahora una solución de (2.9) con  $\mathcal{F} = 0$  y con la condición inicial de que al tiempo  $t = 0$  la variable estocástica  $v$  tiene un valor dado  $v_0$ . Para esta condición inicial la solución de (2.9) es [13]

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \xi(t') dt'. \quad (2.13)$$

Usando (2.11) obtenemos la función de correlación de la velocidad

$$\langle v(t_1)v(t_2) \rangle = v_0^2 e^{-\gamma(t_1+t_2)} + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{-\gamma(t_1+t_2-t'_1-t'_2)} q\delta(t'_1 - t'_2) dt'_1 dt'_2.$$

Para calcular la doble integral, integramos primero sobre  $t'_2$ . La integración sobre  $t'_1$  es de 0 a  $t_2$  o  $t_1$ , cualquiera que sea menor. Tenemos entonces

$$\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots dt'_1 dt'_2 = q \int_0^{\min(t_1, t_2)} e^{-\gamma(t_1+t_2-2t'_1)} dt'_1 = \frac{q}{2\gamma} (e^{-\gamma|t_1-t_2|} - e^{-\gamma(t_1+t_2)}).$$

Por lo que el resultado de la función de correlación de la velocidad es

$$\langle v(t_1)v(t_2) \rangle = v_0^2 e^{-\gamma(t_1+t_2)} + \frac{q}{2\gamma} (e^{-\gamma|t_1-t_2|} - e^{-\gamma(t_1+t_2)}). \quad (2.14)$$

Para  $t_1$  y  $t_2$  grandes, i.e.,  $\gamma t_1 \gg 1, \gamma t_2 \gg 1$ , la función de correlación de la velocidad es independiente de la velocidad inicial  $v_0$  y solamente es función de la diferencia de tiempos  $t_1 - t_2$ , esto es

$$\langle v(t_1)v(t_2) \rangle = \frac{q}{2\gamma} e^{-\gamma|t_1-t_2|}. \quad (2.15)$$

Entonces en el estado estacionario la energía promedio de una partícula browniana está dada por

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}m\langle [v(t)]^2 \rangle = \frac{1}{2}m\frac{q}{2\gamma}. \quad (2.16)$$

La constante  $q$  está dada por la ley de equipartición de la energía de la mecánica estadística clásica,

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}k_B T,$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $T$  es la temperatura absoluta. Por lo que la constante  $q$  es

$$q = 2\gamma k_B T / m. \quad (2.17)$$

## 2.3. Desplazamiento cuadrático medio

Para el movimiento browniano es muy difícil medir la función de correlación de la velocidad (2.15). Es más fácil medir el desplazamiento cuadrático medio. Si suponemos que la partícula empieza en el tiempo  $t = 0$  en  $x = x_0$  con la velocidad inicial  $v_0$ , podemos calcular el desplazamiento cuadrático medio al tiempo  $t$  por

$$\begin{aligned} \langle (x(t) - x_0)^2 \rangle &= \left\langle \left[ \int_0^t v(t_1) dt_1 \right]^2 \right\rangle = \left\langle \int_0^t v(t_1) dt_1 \int_0^t v(t_2) dt_2 \right\rangle \\ &= \int_0^t \int_0^t \langle v(t_1) v(t_2) \rangle dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Aquí  $\langle v(t_1) v(t_2) \rangle$  es la función de correlación de la velocidad (2.14). Como

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^t e^{-\gamma(t_1+t_2)} dt_1 dt_2 &= \left( \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} \right)^2, \\ \int_0^t \int_0^t e^{-\gamma|t_1-t_2|} dt_1 dt_2 &= 2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-t_2)} dt_2 \\ &= \frac{2}{\gamma} t - \frac{2}{\gamma^2} (1 - e^{-\gamma t}), \end{aligned}$$

entonces obtenemos

$$\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle = \left( v_0^2 - \frac{q}{2\gamma} \right) \frac{(1 - e^{-\gamma t})^2}{\gamma^2} + \frac{q}{\gamma^2} t - \frac{q}{\gamma^3} (1 - e^{-\gamma t}). \quad (2.18)$$

Si empezamos no con una velocidad dada  $v_0$ , sino con una distribución de velocidades inicial para el caso estacionario, el promedio de la velocidad al cuadrado es igual a  $\langle v_0^2 \rangle = q/(2\gamma)$ , ver (2.16). Entonces el primer término del lado derecho de (2.18) es cero. Para grandes  $t$  ( $\gamma t \gg 1$ ) el término dominante es

$$\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle = 2Dt, \quad (2.19)$$

con

$$D = \frac{q}{2\gamma^2} = \frac{k_B T}{m\gamma}. \quad (2.20)$$

El último resultado es la bien conocida relación de Einstein para la constante de difusión  $D$ .

Si estamos interesados solamente en el límite de tiempos grandes, podemos derivar (2.19) en una forma más corta. Si despreciamos la derivada temporal en (2.9) obtenemos

$$\langle v(t_1)v(t_2) \rangle \approx \frac{1}{\gamma^2} \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = \frac{q}{\gamma^2} \delta(t_1 - t_2),$$

por lo que tenemos

$$\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle \approx \frac{q}{\gamma^2} \int_0^t \int_0^t \delta(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = \frac{q}{\gamma^2} t.$$

Si pensamos en la fuerza de Langevin como funciones pico sucesivas de ancho casi cero y altura casi infinita, entonces la velocidad consiste en funciones pico sucesivas con ancho  $\sim \gamma$  y altura  $\sim \gamma^{-1}$ . Al despreciar la derivada temporal en (2.9), es equivalente a replazar funciones pico de ancho  $\gamma$  por funciones pico de ancho casi cero en la velocidad.

# Capítulo 3

## Ecuaciones de Langevin y Fokker-Planck

Sea  $x$  una variable estocástica para la cual la ecuación de Langevin general tiene la forma <sup>1</sup> [13]

$$\dot{x} = A(x, t) + B(x, t)\Gamma(t), \quad (3.1)$$

donde el punto denota la derivada temporal,  $A$  y  $B$  son funciones arbitrarias y  $\Gamma(t)$  es la fuerza de Langevin, la cual supondremos que es una variable aleatoria Gaussiana con promedio cero y función de correlación  $\delta$ , esto es

$$\langle \Gamma(t) \rangle = 0; \quad \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (3.2)$$

En general el término fluctuante se llama ruido multiplicativo y cuando  $B(t)$  es una constante, se le llama ruido aditivo.

La variable  $x(t)$  puede ser vista por motivos descriptivos como la posición de una partícula sujeta a una fuerza macroscópica  $A(x, t)$  y a una fuerza microscópica  $B(x, t)\Gamma(t)$ .

Como la variable  $x(t)$  es aleatoria, no podemos simplemente resolver (3.1), en vez de eso debemos considerar propiedades estadísticas de  $\Gamma(t)$ , como la densidad de probabilidad, promedios temporales o de ensamble, funciones de autocorrelación, etc.. En particular, consideremos la densidad de probabilidad  $W(x, t)$  para el proceso  $x(t)$ . Para un ensamble de partículas  $W(x, t)dx$

---

<sup>1</sup>Entendida en la forma de Stratonovich, esto es, la ecuación discreta correspondiente a 3.1 es  $x(t + \delta t) - x(t) = A(x((t_f + t_i)/2)) + B(x((t_f + t_i)/2))\Gamma(x((t_f + t_i)/2))$ , donde  $\delta t = t_f - t_i$ .

denota la probabilidad de encontrar a la partícula entre  $x$  y  $x + dx$  al tiempo  $t$ . Específicamente, estamos interesados en la probabilidad condicional  $W(x, t | x_0, t_0)$ , que es la densidad de probabilidad de  $x$  al tiempo  $t$  para una colección de partículas, las cuales estaban en  $x_0$  al tiempo  $t_0$ . Esto es, la función  $W(x, t | x_0, t_0)$  tiene una condición inicial

$$W(x, t = 0 | x_0, t_0) = \delta(x - x_0), \quad (3.3)$$

donde  $\delta(x)$  es la función delta de Dirac. Con una densidad de probabilidad inicial  $W(x_0, t_0)$  al tiempo  $t_0$ , la densidad de probabilidad a cualquier tiempo  $t$  (posterior a  $t_0$ ), puede ser obtenida por

$$W(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, t | x_0, t_0) W(x_0, t_0) dx_0. \quad (3.4)$$

Si el proceso  $x(t)$  está gobernado por la ecuación de Langevin (3.1), entonces, la densidad de probabilidad  $W(x, t)$  está gobernada por la ecuación de Fokker-Planck [38, 39, 13]

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [A(x, t)W(x, t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x, t)W(x, t)]. \quad (3.5)$$

Notamos que esta ecuación puede ser escrita como una ecuación de continuidad

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} = 0, \quad (3.6)$$

donde hemos definido a la corriente de probabilidad

$$J(x, t) \equiv A(x, t)W(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} [B(x, t)W(x, t)]. \quad (3.7)$$

Enfoquémonos ahora en una partícula en una dimensión sujeta a un potencial  $V(x)$  y a un ruido aditivo, debido a que estamos considerando un sistema microscópico, el número de Reynolds es muy pequeño <sup>2</sup>, la dinámica se puede aproximar por una dinámica sobreamortiguada gobernada por la ecuación

$$\dot{x} = -\frac{1}{m\gamma} \frac{d}{dx} V(x(t)) + \sqrt{D} \xi(t), \quad (3.8)$$

---

<sup>2</sup>Para más detalles ver la sección 5.3

donde  $\xi(t)$  es un ruido blanco Gaussiano delta correlacionado

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t').$$

Para esta partícula tenemos que  $A(x, t) = -(1/m\gamma)(d/dx)V(x)$  y  $B(x, t) = \sqrt{D} = \sqrt{k_B T/m\gamma}$ . Por lo que la ecuación de Fokker-Planck (también llamada ecuación de Smoluchowski) queda como

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{V'(x)}{m\gamma} + \frac{k_B T}{m\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \right] W(x, t). \quad (3.9)$$

Por último, cabe hacer notar que la ecuación de Fokker-Planck puede ser generalizada para varias variables.

### 3.1. Solución estacionaria de la ecuación de Fokker Planck

Consideremos la ecuación de Fokker Planck en un proceso estacionario ( $\partial_t W(x) = 0$ )

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 0,$$

lo que implica que la corriente de probabilidad  $J$  debe ser una constante.

Si esta constante es cero (sistema aislado) entonces de (3.7) se sigue que

$$J = 0 = \left[ A(x) - \frac{\partial}{\partial x} B(x) \right] W_{st}(x).$$

Podemos poner esta ecuación de la forma

$$A(x)W_{st} = \frac{A(x)B(x)}{B(x)}W_{st}(x) = \frac{\partial}{\partial x} B(x)W_{st}(x),$$

integrando obtenemos

$$W_{st}(x) = \frac{N}{B(x)} \exp \left( \int^x \frac{A(x')}{B(x')} dx' \right) = N e^{-\Phi(x)}, \quad (3.10)$$

donde  $N$  es una constante de normalización, que debe ser elegida tal que

$$\int W_{st}(x) = 1.$$

En (3.10) se introdujo el potencial

$$\Phi(x) = \ln B(x) - \int^x \frac{A(x')}{B(x')} dx', \quad (3.11)$$

el cual es válido para cualquier  $J$ .

Ahora podemos obtener una solución para cualquier  $J$  notando que

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = \frac{1}{B(x)} \frac{\partial}{\partial x} B(x) - \frac{A(x)}{B(x)},$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x} [e^{\Phi(x)} W(x, t)] = e^{\Phi(x)} \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} W(x, t) e^{\Phi(x)},$$

sustituyendo la expresión para  $(\partial/\partial x)\Phi(x)$  resulta

$$\frac{\partial}{\partial x} [e^{\Phi(x)} W(x, t)] = \frac{e^{\Phi(x)}}{B(x)} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (B(x)W(x, t)) - A(x)W(x, t) \right],$$

el término en corchetes del lado derecho de la ecuación es el negativo de la corriente de probabilidad  $J(x)$ , por lo que despejando obtenemos que la corriente de probabilidad se puede expresar como

$$J(x) = -B(x)e^{-\Phi(x)} \frac{\partial}{\partial x} [e^{\Phi(x)} W(x, t)]. \quad (3.12)$$

En el estado estacionario, donde  $J(x)$  es una constante arbitraria  $J$  podemos integrar (3.12) obteniendo

$$W_{st}(x) = Ne^{-\Phi(x)} - Je^{-\Phi(x)} \int^x \frac{e^{\Phi(x')}}{B(x')} dx'. \quad (3.13)$$

Existen dos constantes de normalización en 3.13, una constante de integración está determinada por la condición de normalización

$$\int W_{st}(x) dx = 1, \quad (3.14)$$

la otra constante debe ser determinada por las condiciones de frontera del problema.

## 3.2. Procesos de Wiener

Obtener soluciones analíticas explícitas para la ecuación de Fokker-Planck no estacionaria es muy difícil, y sólo pueden ser encontradas para coeficientes de arrastre  $A(x, t)$  y difusión  $B(x, t)$  especiales. Por ejemplo, cuando el coeficiente de arrastre es igual a cero ( $A(x, t) = 0$ ) y el coeficiente de difusión es constante  $B(x, t) = D$ . Para estos valores el proceso se llama de Wiener, y la ecuación para la probabilidad de transición  $W = W(x, t|x', t')$  es la ecuación de difusión.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (3.15)$$

con la condición inicial

$$W(x, t|x', t') = \delta(x - x'). \quad (3.16)$$

Para resolver (3.15) usamos la transformada de Fourier de  $W(x, t|x', t')$

$$\phi(s, t) = \int dx W(x, t|x', t') \exp(isx), \quad (3.17)$$

la cual obedece la ecuación

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -Ds^2 \phi, \quad (3.18)$$

por lo que

$$\phi(s, t) = \exp(-Ds^2(t - t')) \phi(s, t'). \quad (3.19)$$

de (3.16), la condición inicial es

$$\phi(s, t) = \exp(isx'), \quad (3.20)$$

entonces

$$\phi(s, t) = \exp(isx' - Ds^2(t - t')). \quad (3.21)$$

Realizando una transformada de Fourier inversa tenemos que

$$W(x, t|x', t') = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t - t')}} \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{4D(t - t')}\right). \quad (3.22)$$

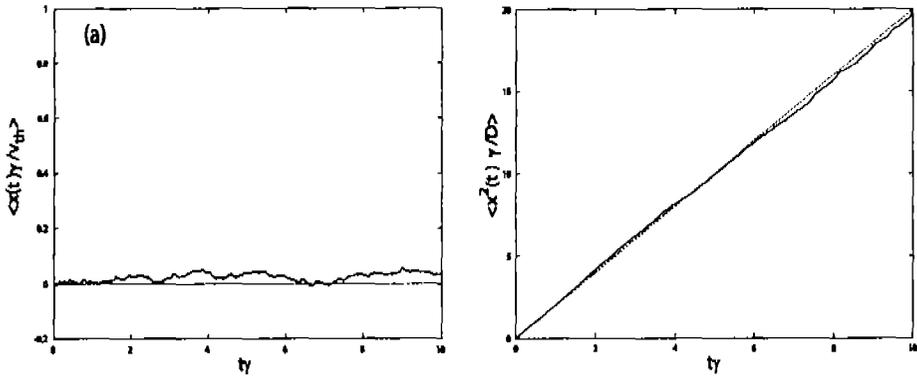


Figura 3.1: (a) Posición promedio escalada con  $\sqrt{D/\gamma}$ , (b) Posición cuadrática media escalada con  $D/\gamma$ , para un ensamble de 1000 partículas brownianas, la línea continua muestra los resultados de la simulación y la línea punteada el resultado analítico.

Podemos realizar simulaciones numéricas a partir de la ecuación de Langevin correspondiente al proceso de Wiener para compararlas con la solución analítica (3.22).

La ecuación diferencial estocástica a simular <sup>3</sup> es

$$\dot{x} = \sqrt{D}\xi(t), \quad \langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(s) \rangle = \delta(t-s). \quad (3.23)$$

Las simulaciones se hacen para un ensamble de 1000 partículas brownianas con una posición inicial  $x_0 = 0$ .

Calculemos el promedio de  $x(t)$  y su desviación estándar:

$$\langle x(t) \rangle = \sqrt{D} \int_0^t \langle \xi(t') \rangle dt' = 0.$$

$$\langle x(t)x(t) \rangle = D \int_0^t \int_0^t \langle \xi(t'')\xi(t''') \rangle dt'' dt''' = Dt.$$

En la figura 3.1 se muestra la comparación de las simulación con los resultados analíticos. En (a) se muestra la posición escalada con  $\sqrt{D/\gamma}$  y en

<sup>3</sup>En la siguiente sección se explica con detalle el método numérico empleado para simular numéricamente una ecuación estocástica como (3.23).

(b) se muestra la posición cuadrática media escalada con  $D/\gamma$ . Se observa que la posición cuadrática media es proporcional al tiempo y el coeficiente de proporcionalidad es el coeficiente de difusión  $D$ .

En general para un proceso que no sea de Winer se suele definir al coeficiente de difusión efectivo como  $D_{eff} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle (x(t) - x_0)^2 \rangle / t$ . Cuando  $D_{eff}$  es constante se llama difusión normal; cuando depende del tiempo se le llama difusión anómala.

La distribución de probabilidad asociada a la ecuación diferencial estocástica (3.23) está dada por (3.22)

$$W(x, t|x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}\right),$$

con la condición inicial

$$W(x, t_0|x_0, t_0) = \delta(x - x_0).$$

Esta probabilidad se muestra en la figura 3.2 para un tiempo  $t\gamma = 2$  y una posición inicial  $(\sqrt{\gamma/D})x_0 = 3$ .

Se realizaron otros chequeos para el algoritmo con tiempos de primer paso y resonancia estocástica, dando resultados satisfactorios.

### 3.3. Algoritmo para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas

Una ecuación diferencial estocástica tiene la forma general [40]

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}) + g_i(\mathbf{x})\xi_i(t), \quad \langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t)\xi_j(s) \rangle = \delta_{ij}\delta(t-s), \quad (3.24)$$

donde suponemos que el proceso estocástico es un ruido Gaussiano blanco. Denotaremos como  $h$  el tamaño del paso del tiempo. Una aproximación simple para resolver (3.24) es expresarla en forma integral, después usar un desarrollo de Taylor alrededor del punto  $t = 0$ , para encontrar recursivamente varias contribuciones.

Para el caso unidimensional la ecuación toma la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi(t). \quad (3.25)$$

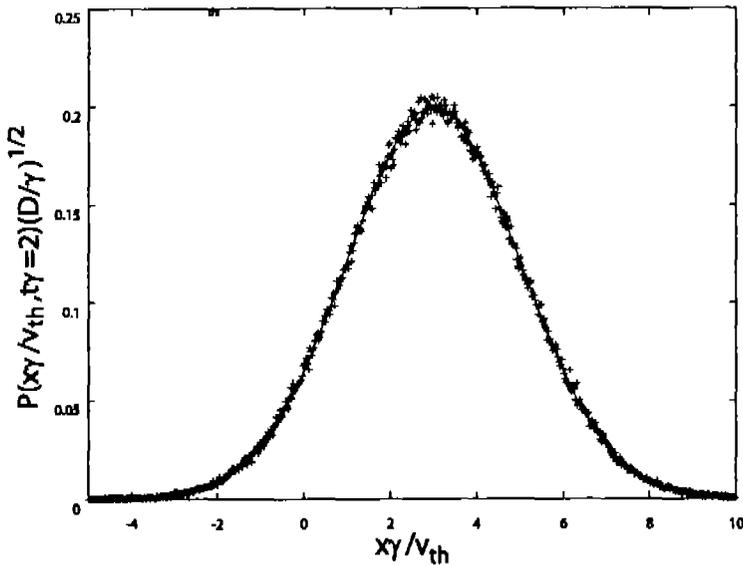


Figura 3.2: Probabilidad para un ensemble de 500,000 partículas brownianas, las cruces muestran los resultados de la simulación, con una condición inicial  $(\sqrt{\gamma/D})x_0 = 3$  a un tiempo  $t\gamma = 2$

Una integración formal da

$$x(h) - x(0) = \int_0^h (f(x(t)) + g(x(t))\xi(t))dt. \quad (3.26)$$

definiendo

$$f_0 \equiv f(x(0)), \quad f'_0 \equiv \left. \frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)} \right|_{x=x(0)},$$

y algo equivalente para  $g(x)$ . Desarrollando en serie de Taylor tenemos que  $f(t) = f_0 + (x - x_0)f'_0 + \dots$ . A simple vista el término de orden  $h$  parece ser

$$x(h) - x(0) = \int_0^h (f(x(t)) + g(x(t))\xi(t))dt \simeq hf_0 + g_0 \int_0^h \xi(t)dt. \quad (3.27)$$

veremos que este no es el término correcto de orden  $h$ . Mientras tanto nótese que en el lado derecho de la ecuación hay lo que se llama una “integral estocástica”

$$Z(h) \equiv \int_0^h \xi(t)dt, \quad (3.28)$$

la cual es la integral sobre el rango  $(0, h)$  del proceso estocástico  $\xi(t)$ . Esta integral es una variable aleatoria, la integración es similar a la suma de variables Gaussianas, entonces,  $Z(h)$  es una variable gaussiana. Lo cual implica que la distribución de probabilidad de  $Z(h)$  ésta determinada una vez que el promedio y la desviación estándar son conocidas. Un algoritmo simple sería

- generar una variable aleatoria Gaussiana, con el promedio y desviación estándar apropiados para simular la integral estocástica;
- sustituir la integral estocástica en (3.27) con esta variable aleatoria;
- integrar la ecuación usando cualquier integrador válido para la ecuación diferencial determinista.

Calculemos las propiedades estadísticas de  $Z(h)$

$$\langle Z(h) \rangle = \int_0^h \langle \xi(t) \rangle dt = 0, \quad (3.29)$$

$$\langle Z(h)^2 \rangle = \int_0^h \int_0^h \langle \xi(t)\xi(s) \rangle dt ds = \int_0^h \int_0^h \delta(t-s) ds dt = \int_0^h ds = h. \quad (3.30)$$

Si introducimos una variable aleatoria de promedio cero y desviación estándar 1,  $Y$ , podemos representar a  $Z(h)$  como

$$Z(h) = \sqrt{h}Y, \quad (3.31)$$

por lo que podemos rescribir (3.27) como

$$x(h) - x(0) = hf_0 + \sqrt{h}g_0Y. \quad (3.32)$$

Podemos notar que el primer término del lado derecho de la ecuación es de orden  $h$ , mientras que el segundo término es de orden  $\sqrt{h}$ , por lo que debemos tomar otro término del desarrollo de Taylor para  $g(x)$

$$x(h) - x(0) = hf_0 + g_0Z(h) + g'_0 \int_0^h (x(t) - x_0)\xi(t)dt, \quad (3.33)$$

utilizando (3.27) en la integral y tomando sólo los términos de orden  $h$  tenemos

$$x(h) - x(0) = hf_0 + g_0Z(h) + g'_0g_0 \int_0^h Z(t)\xi(t)dt, \quad (3.34)$$

como  $\xi(t)dt = dZ$  nos queda

$$x(h) - x(0) = hf_0 + g_0Z(h) + \frac{1}{2}g'_0g_0[Z(h)]^2. \quad (3.35)$$

Finalmente para la ecuación de difusión  $g(x) = \sqrt{2D}$  constante, tenemos varios algoritmos:

### Euler

$$x(h) = x(0) + hf_0 + g_0Z(h). \quad (3.36)$$

Precisión  $O(h)$ .

### Heun

$$\begin{aligned} x_1 &= x(0) + hf_0 + \sqrt{2D}Z(h), \\ x(h) &= x(0) + \sqrt{2D}Z(h) + \frac{h}{2}(f_0 + f(x_1)). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Precisión  $O(h^2)$ .

### “Propagador exacto”

Resolver exactamente  $\dot{x} = f(x)$  y después sumar  $Z(h)$  para tomar en cuenta el ruido. Sin error numérico por definición. En la práctica este algoritmo es obtenido usando un algoritmo de integración de alto orden para la parte determinista (por ejemplo un Runge-Kutta de cuarto orden).

# Capítulo 4

## Movimiento browniano en potenciales periódicos

En el capítulo anterior se obtuvo la solución general para la densidad de probabilidad. En este capítulo nos vamos a enfocar a la solución general para potenciales periódicos. En particular nos interesa calcular la corriente promedio.

Como vimos en el capítulo anterior, un proceso de Wiener está gobernado por la ecuación de difusión (3.15). Este proceso representa a una partícula browniana en ausencia de potenciales. Esta partícula se difunde libremente y su posición cuadrática media es proporcional al tiempo y al coeficiente de difusión  $D$ . Cuando existe un potencial, las partículas ya no pueden difundirse libremente, pero, debido a las fuerzas de Langevin las partículas pueden saltar de un pozo del potencial a otro contiguo, e incluso después de un tiempo pueden estar en pozos más alejados. Para tiempos suficientemente grandes las partículas se habrán difundido en ambas direcciones del eje  $x$ . Esta difusión puede ser descrita por un coeficiente de difusión efectivo  $D_{eff}$ , que cumple con la relación

$$\langle [x(t) - \langle x(t) \rangle]^2 \rangle = 2D_{eff}t. \quad (4.1)$$

Sin embargo, aunque exista una difusión efectiva de las partículas, en promedio no van ninguna parte, esto es, su velocidad promedio sigue siendo cero. Si aplicamos ahora una fuerza adicional  $F$  constante, las partículas se difundirán en promedio en la dirección de la fuerza y la velocidad promedio será diferente de cero (llamada velocidad de arrastre), la cual dependerá en

general de  $F$ . Para fuerzas pequeñas podemos definir a la movilidad  $\mu$  como

$$\langle v \rangle = \mu F. \quad (4.2)$$

Como ya hemos visto, la ecuación de movimiento de la partícula está dada por la ecuación de Langevin

$$m\gamma\dot{x} + V'(x) = F + m\gamma\sqrt{2D}\xi(t), \quad (4.3)$$

donde  $V(x) = V(x + L)$  es un potencial periódico de periodo  $L$ ,  $V'(x)$  denota la derivada de  $V(x)$  con respecto a  $x$ ,  $\gamma$  es el coeficiente de fricción dividido por la masa  $m$  de la partícula,  $F$  es una fuerza constante y  $\xi(t)$  representa un ruido blanco Gaussiano de promedio cero y con función de correlación dada por

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t'), \quad (4.4)$$

donde  $\delta(t)$  es la función delta de Dirac y  $D$  es el coeficiente de difusión

$$D = \frac{k_B T}{m\gamma}, \quad (4.5)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $T$  es la temperatura.

Podemos escribir un potencial efectivo  $V(x) = V(x) - xF$ , el cual se puede representar como un “potencial inclinado”.

## 4.1. Normalización de las ecuaciones de Fokker Planck y de Langevin

Para tratamientos posteriores es conveniente trabajar con cantidades adimensionales usando las siguientes variables, parámetros y potenciales

$$x_n = x/L; \quad t_n = v_0 t/L;$$

$$\gamma_n = \gamma L/v_0; \quad D_n = \gamma D/v_0^2; \quad (4.6)$$

$$F_n = LF/mv_0^2; \quad V_n = V/mv_0^2 \quad ;$$

$$\frac{dV_n}{dx_n} = \frac{L}{mv_0^2} \frac{dV}{dx}; \quad \xi_n(t_n) = \sqrt{\frac{L}{v_0}} \xi(t),$$

donde el parámetro  $v_0$  es una velocidad característica del sistema, la cual puede ser la velocidad térmica  $v_{th} = \sqrt{k_B T/m}$  u otra velocidad en función de los parámetros del sistema, por ejemplo  $v_0 = \gamma L$ .

Bajo esta normalización la ecuación de Langevin (4.3) se transforma en

$$\gamma_n \frac{dx_n}{dt_n} + \frac{dV_n}{dx_n} = F_n + \sqrt{2D_n \gamma_n} \xi_n(t_n); \quad V_n(x_n + 1) = V_n(x_n),$$

$$\langle \xi_n(t_n) \xi_n(t'_n) \rangle = \delta(t_n - t'_n).$$

En los desarrollos posteriores omitiremos el índice  $n$ , esto es, trabajaremos con la ecuación

$$\gamma \frac{dx}{dt} + \frac{dV(x)}{dx} = F + \sqrt{2D\gamma} \xi(t); \quad V(x+1) = V(x), \quad (4.7)$$

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (4.8)$$

Como ya hemos visto la ecuación de Fokker Planck correspondiente a (4.7) es

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left( V'(x) - F + D \frac{\partial}{\partial x} \right) W(x, t) = -\frac{\partial J(x, t)}{\partial x}, \quad (4.9)$$

donde  $J(x, t)$  es la densidad de corriente definida por

$$J(x, t) = \frac{1}{\gamma} \left( F - V'(x) - D \frac{\partial}{\partial x} \right) W(x, t). \quad (4.10)$$

## 4.2. Solución estacionaria

Es conveniente para cálculos posteriores considerar el potencial efectivo  $U(x)$ , al cual está sujeta la partícula browniana, esto es

$$U(x) = V(x) - Fx. \quad (4.11)$$

Este potencial tiene la propiedad

$$U(x+n) = U(x) - nF, \quad (4.12)$$

donde  $n$  es un número entero y se ha usado el hecho de que  $V(x)$  es periódico.

Como ya hemos visto, en el estado estacionario la corriente de probabilidad es una constante  $J$  y la solución para  $W(x)$  está dada por (3.13), donde  $\Phi(x)$  está dado por (3.11). Calculando  $\Phi$  obtenemos que

$$\Phi(x) = \frac{U(x)}{D} + \text{cte.}$$

Como el potencial  $V(x)$  está indeterminado hasta una constante, podemos omitir sin pérdida de generalidad a la constante de la ecuación anterior, obteniendo

$$\Phi(x) = \frac{U(x)}{D}. \quad (4.13)$$

La densidad de corriente puede escribirse como

$$\gamma J = [F - V'(x)]W(x) - D \frac{\partial W(x)}{\partial x}, \quad (4.14)$$

y la función de distribución como

$$W(x) = e^{-U(x)/D} [N - \gamma(J/D) \int_0^x e^{U(x')/D} dx']. \quad (4.15)$$

Veamos que la distribución es periódica. Para hacer esto, consideremos primero la integral ( $0 \leq x < 1$ )

$$\int_0^{n+x} e^{U(x')/D} dx' = \int_0^1 e^{U(x')/D} dx' + \dots + \int_{n-1}^n e^{U(x')/D} dx' + \int_n^{n+x} e^{U(x')/D} dx'.$$

Haciendo un cambio de variable para la  $j$ -ésima integral ( $j = 0, \dots, n$ ), de la forma  $u = x' - j$ , tomando en cuenta la propiedad (4.12) y definiendo a  $I$  como

$$I = \int_0^1 e^{U(x')/D} dx', \quad (4.16)$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_0^{n+x} e^{U(x')/D} dx' &= I + Ie^{-F/D} + \dots + Ie^{-(n-1)F/D} + \int_0^x e^{U(x')/D} dx' \\ &= I[1 + e^{-F/D} + \dots + (e^{-F/D})^{n-1}] + \int_0^x e^{U(x')/D} dx', \end{aligned}$$

el término del corchete es una suma geométrica y puede calcularse fácilmente, por lo que la integral puede escribirse como

$$\int_0^{n+x} e^{U(x')/D} dx' = I \left( \frac{1 - e^{-nF/D}}{1 - e^{-F/D}} \right) + \int_0^x e^{U(x')/D} dx'.$$

Por lo tanto

$$W(x+n) = e^{-U(x+n)/D} [N - \gamma(J/D) \int_0^{x+n} e^{U(x')/D} dx'],$$

utilizando (4.12), reemplazando la integral y factorizando los términos que tengan dependencia en  $n$  tenemos

$$\begin{aligned} W(x+n) &= e^{-U(x)/D} \left[ N - \frac{\gamma J I}{D(1 - e^{-F/D})} \right] e^{nF/D} \\ &+ e^{-U(x)/D} \left[ \frac{\gamma J I}{D(1 - e^{-F/D})} - \gamma \frac{J}{D} \int_0^x e^{U(x')/D} dx' \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Para  $F > 0$  ( $F < 0$ ), esta expresión está acotada para  $n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow -\infty$ ) si el primer corchete del lado derecho es cero, esto es

$$\gamma J I = DN(1 - e^{-F/D}). \quad (4.18)$$

Por lo tanto tomando en cuenta esta última ecuación y comparando (4.17) con (4.15) obtenemos la relación buscada

$$W(x+1) = W(x). \quad (4.19)$$

Como  $W(x)$  es periódica, podemos normalizarla en el intervalo de periodicidad, esto es

$$\begin{aligned} \int_0^1 W(x) dx &= N \int_0^1 e^{-U(x)/D} dx - \gamma(J/D) \int_0^1 e^{-U(x)/D} \left( \int_0^x e^{U(x')/D} dx' \right) dx \\ &= 1. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Calculemos ahora la velocidad promedio

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \langle \dot{x} \rangle = \gamma^{-1} \langle F - V'(x) + \sqrt{2\gamma D} \xi(t) \rangle \\ &= \gamma^{-1} \langle F - V'(x) \rangle = \gamma^{-1} \int_0^1 [F - V'(x)] W(x) dx \\ &= \gamma^{-1} \int_0^1 (\gamma J + D \partial W / \partial x) dx = J. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Para derivar este resultado hemos tomado en cuenta (4.7,4.14,4.19).

Las dos ecuaciones (4.20,4.18) determinan las constantes de integración  $N$  y  $J$ . Despejando  $N$  de (4.20) y sustituyendo en (4.18) obtenemos una expresión para  $J$ , la cual puede ser sustituida en (4.21) obteniendo

$$\gamma\langle v \rangle = \frac{D(1 - e^{-F/D})}{\int_0^1 e^{U(x)/D} dx \int_0^1 e^{-U(x)/D} dx - (1 - e^{-F/D}) \int_0^1 e^{-U(x)/D} \int_0^x e^{U(x')/D} dx dx'}. \quad (4.22)$$

Es importante notar que si la fuerza externa  $F$  es cero, la velocidad promedio también es cero independientemente de la forma del potencial.

# Capítulo 5

## Motores brownianos

En el capítulo anterior observamos que la velocidad promedio es diferente de cero sólo se aplica una fuerza constante que inclina al potencial. En este capítulo discutiremos la forma de obtener una velocidad promedio diferente de cero si sólo actúan fuerzas de promedio cero.

### 5.1. Máquinas de movimiento perpetuo

Las máquinas de movimiento perpetuo son máquinas hipotéticas que pueden producir energía útil de la “nada”. La existencia de dicha máquina viola las leyes de la física.

Las máquinas de movimiento perpetuo se clasifican en dos categorías, definidas según la ley que deben violar para ser una legítima máquina de movimiento perpetuo. Estas categorías son llamadas “máquinas de movimiento perpetuo del primer tipo” o “máquinas de movimiento perpetuo del segundo tipo”.

La primera ley de la termodinámica es en esencia un enunciado de conservación de la energía. La segunda ley de la termodinámica tiene varios enunciados, el más intuitivo tal vez sea que el calor siempre fluye del lugar más caliente al lugar más frío; el más conocido es que la entropía siempre incrementa en el tiempo en sistemas aislados; otro enunciado es que ninguna máquina trabajando en ciclos es más eficiente que la máquina de Carnot.

Las máquinas de movimiento perpetuo del primer tipo producen más energía de la que consumen, por lo que la máquina puede continuar trabajando por siempre. Esta acción viola la primera ley de la termodinámica.

Las máquinas de movimiento perpetuo del segundo tipo son aquellas que convierten *completamente* el calor en otras formas de energía. Estas máquinas violan la segunda ley de la termodinámica.

Se han realizado trabajos teóricos serios que involucra experimentos pensados, para probar los límites del entendimiento de las leyes de la física, por ejemplo: El demonio de Maxwell [41] y el ratchet browniano de Feynman [42].

El demonio de Maxwell, un ser hipotético de tamaño molecular que está sentado al lado de una puerta que separa a dos contenedores denotados por A y B. En estos contenedores se encuentra un gas en equilibrio térmico. Este demonio posee la información para todo tiempo de la posición y velocidad de las partículas de ambos contenedores. El demonio abre y cierra la puerta de manera que sólo deja pasar a las partículas más rápidas de B a A, y sólo las más lentas de A a B. El objetivo es coleccionar las partículas que tienen una velocidad mayor a la velocidad promedio en el contenedor A y a las que tienen una velocidad menor que la velocidad promedio en el contenedor B.

Al final obtenemos un gas caliente de alta presión en un extremo, y un gas menos caliente de baja presión en el otro extremo. La primera ley de la termodinámica no se ha violado, pero se ha redistribuido la energía cinética al azar de las moléculas (calor), de tal manera que la energía puede ser extraída del contenedor B.

En el experimento pensado de Maxwell, el demonio administra al sistema, de tal forma que la entropía disminuye incrementando su conocimiento del movimiento de las partículas. La segunda ley de la termodinámica dice que en sistema de energía constante es imposible: Sólo se puede incrementar la entropía (o disminuirla en algún lugar siempre que al menos esté balanceada con el incremento en algún otro lugar). Para una discusión detallada del demonio de Maxwell ver [41].

El ratchet browniano de Feynman se discute en la siguiente sección.

## 5.2. Ratchet de Feynman

El ratchet de Feynman es un aparato con una hélice de paletas simétricas unida por un rodillo a un engranaje con dientes asimétricos (Figura 5.1). Atascado en los dientes está una lengüeta, que sirve para evitar que el engranaje dé vueltas libremente; esta lengüeta es empujada con un resorte para mantenerla en su lugar. Si ahora lo rodeamos con un gas en equilibrio térmico,

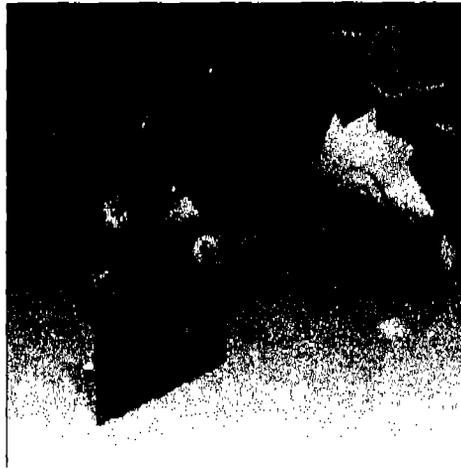


Figura 5.1: Representación pictórica de un Motor browniano.

las moléculas al azar de este gas impartirán su energía cinética a las paletas, provocando que giren rápidamente hacia atrás y hacia adelante, dando lugar a una especie de movimiento browniano rotatorio. El truco es que la lengüeta se detenga en los dientes asimétricos, permitiendo el movimiento en una dirección (llamada “adelante”) y evitando que gire el engranaje en la dirección opuesta (“atrás”). Parece convincente que este sistema realice sistemáticamente en promedio una rotación en una dirección e incluso si un pequeño peso en dirección opuesta es aplicado.

A pesar de la asimetría construida el sistema no tiene una dirección preferencial de rotación, de otra forma violaría la segunda ley de la termodinámica por ser una máquina de movimiento perpetuo del segundo tipo. Este sistema ya había sido discutido por Smoluchowski en 1912 y popularizado después por Feynman [42]. El error está en la suposición del funcionamiento de la lengüeta: como los impactos de las moléculas son considerados a escala microscópica, la lengüeta necesita ser de escala microscópica también, por lo que las fluctuaciones térmicas no son despreciables. Entonces, debido a los impactos de las moléculas del gas, la lengüeta se levanta eventualmente, permitiendo así que el engranaje gire libremente. El resultado neto es que no hay un movimiento promedio rotacional preferencial, estando de acuerdo con la segunda ley de la termodinámica.

Para obtener una máquina que funcione como se espera, necesitamos apli-

car una fuente externa de energía para sacar del equilibrio al sistema. Feynman propuso sacar del equilibrio al sistema poniendo al resorte más frío que las paletas, asegurándose así que el resorte sea menos susceptible a los impactos que las paletas, obteniendo de esta manera un movimiento unidireccional en promedio. En este caso el aparato ya no viola la segunda ley de la termodinámica, ya que el sistema está fuera del equilibrio térmico, por lo que la segunda ley de la termodinámica ya no es válida.

A pesar de que hubo contribuciones en el área de los ratchets después de Feynman [6], no fue hasta que Ajdari y Prost [43] en 1992, Magnasco [44] en 1993 y los artículos seminales de 1994 [18, 19, 45, 46, 47, 48, 49], que hubo una creciente actividad de trabajos teóricos y experimentales sobre los motores brownianos. En parte, el crecimiento del área de los motores brownianos es motivado por la investigación del transporte intracelular, específicamente por los motores moleculares [45, 48, 49, 50] y las bombas moleculares [51]. Investigaciones posteriores incluyen los ratchet cuánticos [14, 52], potenciales ratchet para fluxones en arreglos de uniones Josephson [53, 54], efecto ratchet en átomos fríos usando una red óptica asimétrica [55], efecto ratchet para reducir la densidad de vórtices en superconductores [15]. Ejemplos típicos de ratchet son: ratchet mecidos (rocking ratchet)[44], ratchet destellantes (flashing ratchet)[20], ratchet de difusión (diffusion ratchet) [56], ratchet de correlación (correlation ratchet) [46, 57] y ratchet de tiro de ruido blanco (white-shot-noise ratchet) [58]. Para una revisión sobre motores brownianos ver [4, 5, 7, 10, 59].

### 5.3. Modelo simplificado estocástico

En vez de modelar la maquinaria del ratchet de Feynman, trabajaremos con un modelo simple [6], pero que mantiene los elementos esenciales del ratchet de Feynman. Consideremos una partícula browniana de masa  $m$  en una dimensión con coordenada  $x(t)$ . La ecuación de movimiento es

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + \frac{dV(x)}{dx} = F + m\gamma\sqrt{2D}\xi(t), \quad (5.1)$$

donde  $V(x)$  es el potencial periódico y asimétrico

$$V(x) = V_1 - V_0 \left[ \sin \left( 2\pi \left( \frac{x - x_0}{L} \right) \right) + \frac{1}{4} \sin \left( 4\pi \left( \frac{x - x_0}{L} \right) \right) \right], \quad (5.2)$$

llamado potencial ratchet. Aquí  $L$  es el periodo del ratchet, esto es  $V(x+L) = V(x)$ .  $\xi(t)$  representa un ruido blanco Gaussiano delta-correlacionado

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t').$$

El ambiente donde están los motores moleculares es un ambiente donde las fuerza asociadas a la viscosidad son predominantes. Para ver esto utilizamos el número de Reynolds. El número de Reynolds es un parámetro adimensional que compara el efecto de la fuerza inercial con la fuerza debido a la viscosidad<sup>1</sup>, y se puede escribir como

$$R = \frac{av\rho}{\eta} = \frac{F_{\text{ine}}}{F_{\text{vis}}}, \quad (5.3)$$

donde  $a$  y  $v$  son una distancia y una velocidad característica del sistema,  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\eta$  es la viscosidad del fluido,  $F_{\text{ine}}$  es la fuerza asociada a la inercia y  $F_{\text{vis}}$  es la fuerza asociada a la viscosidad.

Por ejemplo [5], para el agua  $\rho \sim 1\text{gr}/\text{cm}^3$  y  $\eta \sim 10^{-2}\text{gr}/(\text{cm} \cdot \text{seg})$ . Para un molusco en el agua de 10 cm de longitud y a una velocidad de 10 cm/seg, el número de Reynolds es  $R = 100$ . Sin embargo, para una bacteria de  $10^{-3}\text{cm}$  de longitud y a una velocidad de  $v = 10^{-3}\text{cm}/\text{seg}$ , el número de Reynolds es  $R = 10^{-4}$ . Entonces para esta bacteria, la fuerza de inercia  $F_{\text{ine}}$  es  $10^{-4}$  veces más pequeña que la fuerza asociada a la fricción  $F_{\text{vis}}$ , por lo que la dinámica se puede aproximar por una dinámica sobreamortiguada sin problemas.

Para los sistemas en los que estamos interesados la escala característica es  $\sim 10^{-8}\text{m}$ , por lo que los sistemas que estamos tratando tienen números de Reynolds muy pequeños. Por lo tanto podemos aproximar la dinámica, a una dinámica sobre amortiguada. Esto es, la ecuación de movimiento es

$$m\gamma\dot{x} = F - \frac{dV(x)}{dx} + m\gamma\sqrt{2D}\xi(t). \quad (5.4)$$

Es conveniente trabajar con variables adimensionales. Para ello tomemos como tiempo característico a  $\gamma^{-1}$  y como longitud característica  $L$ . Definiendo las variables adimensionales:

---

<sup>1</sup>Este parámetro se obtiene a partir de la forma adimensional de la ecuación de Navier-Stokes.

$$x_n = x/L, \quad t_n = t\gamma,$$

$$F_n = F/m\gamma^2 L, \quad D_n = D/\gamma L^2, \quad (5.5)$$

$$x_{0_n} = x_0/L. \quad V_{0_n} = V_0/m\gamma^2 L^2.$$

Tenemos que la ecuación de movimiento para  $x_n$  es

$$\dot{x}_n = F_n - \frac{dV(x_n)}{dx_n} + \sqrt{2D_n}\xi(t_n), \quad (5.6)$$

donde  $V(x_n)$  es el potencial ratchet adimensional

$$V(x_n) = -V_{0_n}[C + \sin(2\pi(x_n - x_{0_n})) + \frac{1}{4}\sin(4\pi(x_n - x_{0_n}))]. \quad (5.7)$$

Quitando el subíndice  $n$  a las variables tenemos

$$\dot{x} = F - V'(x) + \sqrt{2D}\xi(t), \quad (5.8)$$

donde la prima denota la derivada con respecto a  $x$  y el potencial ratchet adimensional es

$$V(x) = -V_0[C + \sin(2\pi(x - x_0)) + \frac{1}{4}\sin(4\pi(x - x_0))], \quad (5.9)$$

donde  $C \simeq -1.1$  y  $x_0 \simeq -0.19$ , son dos constantes tal que el mínimo del potencial está localizado en el origen (ver figura 5.2). El ruido blanco Gaussiano tiene la función de correlación

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (5.10)$$

Como vimos en el capítulo anterior, la ecuación de Langevin (5.8) tiene asociada una ecuación de Fokker-Planck (EFP). Para nuestro caso la EFP está dada por (4.9)

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( V'(x) - F + D \frac{\partial}{\partial x} \right) W(x, t) = -\frac{\partial J(x, t)}{\partial x}, \quad (5.11)$$

donde  $J(x, t)$  es la densidad de corriente definida por

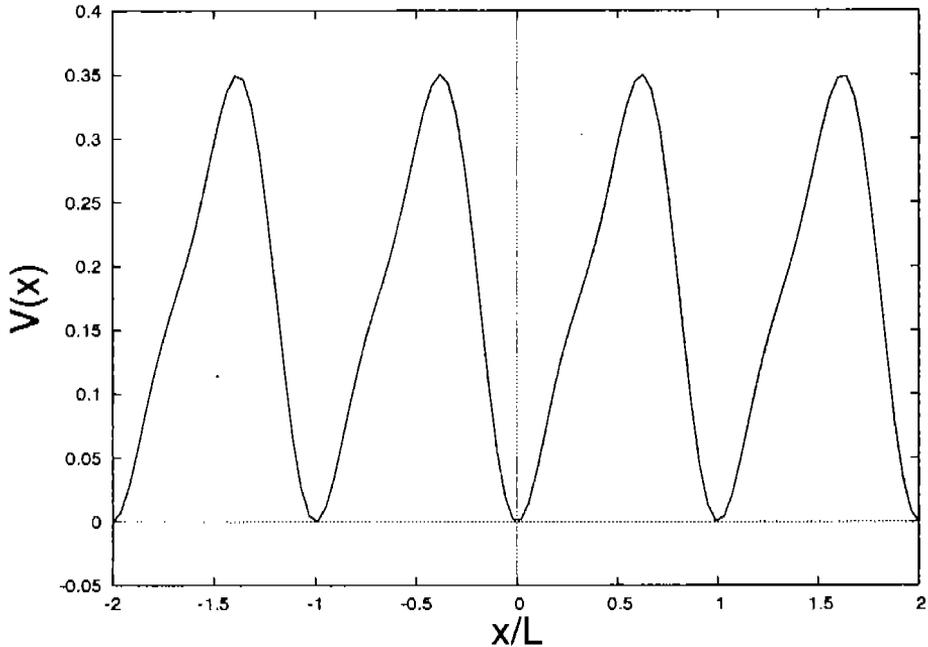


Figura 5.2: Potencial ratchet adimensional (5.9) para  $V_0 = 1/2\pi$ .

$$J(x, t) = \left( F - V'(x) - D \frac{\partial}{\partial x} \right) W(x, t), \quad (5.12)$$

La cantidad de más importancia en el transporte de partículas es la corriente de la partícula definida como el promedio de ensamble de la velocidad  $\langle v \rangle = \langle \dot{x} \rangle$ . En la siguiente sección veremos la expresión analítica de esta cantidad tan importante.

### 5.3.1. Solución estacionaria

La solución general se obtuvo en el capítulo anterior, llegando a la ecuación (4.22).

$$\langle v \rangle = \frac{D(1 - e^{-F/D})}{\int_0^1 e^{U(x)/D} dx \int_0^1 e^{-U(x)/D} dx - (1 - e^{-F/D}) \int_0^1 e^{-U(x)/d} \int_0^x e^{U(x')/D} dx dx'}, \quad (5.13)$$

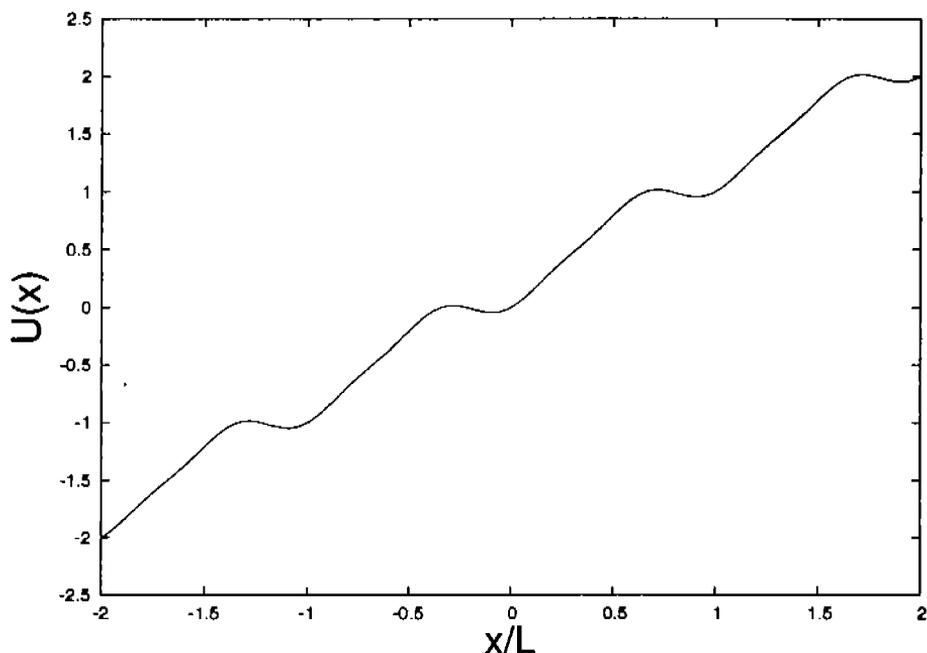


Figura 5.3: Potencial ratchet inclinado  $U(x) = V(x) - Fx$ , para  $F = -1$  y  $V_0 = 1/2\pi$ .

donde  $F$  es una fuerza constante,  $D$  es el coeficiente de difusión,  $U(x) = V(x) - Fx$  (ver figura 5.3) y  $V(x)$  es el potencial ratchet (5.9). Es importante notar que independientemente de la forma del potencial, si la fuerza constante  $F$  es cero, la velocidad promedio es cero. Esto es una consecuencia de la segunda ley de la termodinámica. No se puede obtener transporte directo a partir de las fluctuaciones térmicas de un solo baño térmico. A pesar de la asimetría del espacio debido al potencial ratchet, el efecto del baño térmico hacia la partícula es simétrico.

La densidad de probabilidad para el caso estacionario con  $F = 0$  está dada por la distribución de Maxwell

$$W(x) = Ne^{-V(x)/D}, \quad (5.14)$$

donde  $N$  es una constante de normalización dada por

$$N = \left( \int_0^1 e^{-V(x)/D} dx \right)^{-1}.$$

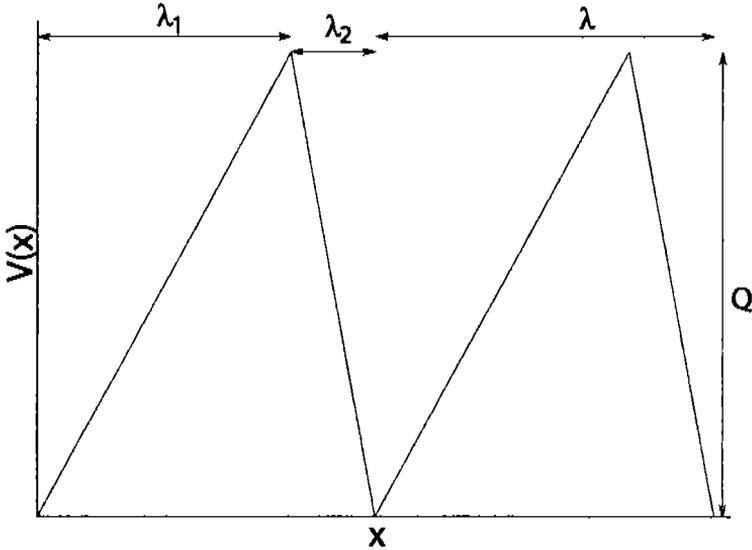


Figura 5.4: Potencial ratchet  $f(x)$  lineal a trozos,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son el ancho de cada segmento; el periodo del potencial es  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ ; el ancho de simetría rota es  $\Delta = \lambda_1 - \lambda_2$ .

Para el caso de  $F \neq 0$ , esperamos que la velocidad promedio sea diferente de cero y que tenga el mismo signo que  $F$ . Esto es debido a que la partícula siente un potencial efectivo  $U(x) = V(x) - Fx$ , que se puede visualizar como el ratchet inclinado, por ejemplo para  $F < 0$ , el ratchet está inclinado hacia la izquierda (ver figura 5.3), empujando a las partículas en promedio hacia la izquierda, por lo que la  $\langle \dot{x} \rangle < 0$ . Cerca de  $F = 0$  podemos desarrollar la exponencial en (5.13) y quedarnos hasta primer orden, en este caso es claro que la velocidad promedio es proporcional a  $F$ .

El problema ahora es resolver las integrales que se encuentran en (5.13). Debido a la forma del potencial, no es posible resolverlas analíticamente. En estos casos se puede recurrir a otra representación para el potencial ratchet, una representación lineal a trozos [60], (ver figura 5.4). Sin embargo, esta representación no es práctica para implementarla en un algoritmo que resuelva las integrales numéricamente, ya que la fuerza (derivada del potencial) no es continua, por lo que no usaremos esta representación.

Una forma de visualizar el comportamiento de (5.13) para el potencial

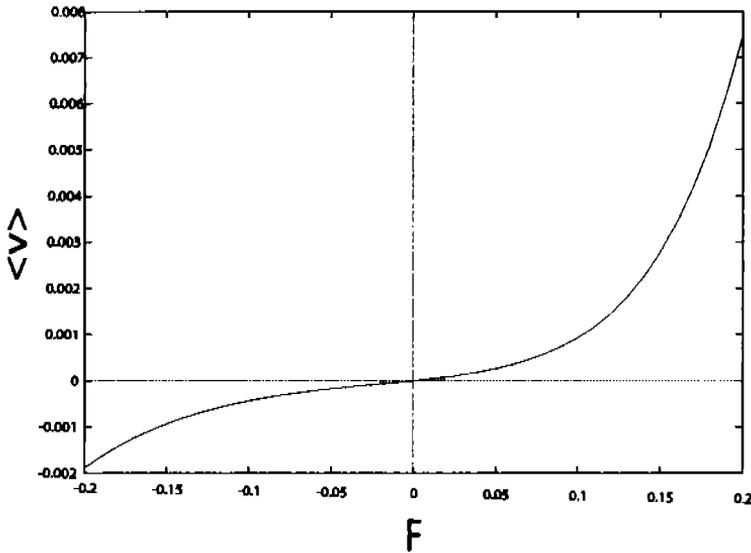


Figura 5.5: Velocidad promedio estacionaria vs. la fuerza de inclinación, obtenida a partir de (5.13),  $V_0 = 1/2\pi$  y  $D=0.1$ .

ratchet suave (5.9) es realizar las integrales numéricamente, también podemos partir desde la ecuación de Langevin (5.8), y realizar promedios temporales y de ensamble para obtener la velocidad promedio en el estado estacionario.

En la figura 5.5 se muestra la velocidad promedio estacionaria contra la fuerza de inclinación, la curva fue obtenida de la integración numérica de (5.13). Como se esperaba el signo de la corriente coincide con el signo de  $F$ . La curva es simétrica para el orden dominante (respuesta lineal), pero no las contribuciones siguientes.

## 5.4. Efecto ratchet

Como ya hemos visto en la sección anterior, para un sistema en equilibrio la velocidad promedio es cero, a pesar de la asimetría debida al potencial ratchet. Lo cual resulta congruente con la segunda ley de la termodinámica. También vimos que si aplicamos una fuerza constante  $F$  para sacar al sistema del equilibrio, obtenemos una velocidad promedio diferente de cero, que concuerda en dirección con la fuerza  $F$ . Este resultado es de esperarse y no

resulta sorprendente ya que aplicamos una fuerza constante en magnitud y dirección.

Ahora consideremos una fuerza  $F_D(t)$  cuyo promedio temporal y de ensamble sea cero. Apliquémosla al sistema para llevarlo fuera del equilibrio. Esta fuerza puede ser determinista o estocástica.

$$\dot{x} = F - f'(x) + F_D(t) + \sqrt{2D}\xi(t). \quad (5.15)$$

Lo que obtenemos es un motor browniano capaz de realizar trabajo. La velocidad promedio estacionaria en función de  $F$  se muestra en la figura 5.6, la curva fue obtenida a partir de realizar promedios de ensamble en la simulación numérica de la ecuación (5.15). Como podemos observar la velocidad promedio es diferente de cero para  $F = 0$ , e incluso su dirección es opuesta para un intervalo de  $F$ . Esto es, realizamos trabajo en contra de la fuerza  $F$  llevando a la partícula en dirección opuesta a  $F$ . Este fenómeno se llama “efecto ratchet”.

La forma más común de explicar el efecto ratchet es con el ratchet de encendido-apagado. El ratchet de la figura 5.4 se prende y apaga con periodo  $\tau_*$  (Figura 5.7). Cuando el ratchet está encendido y la energía térmica  $k_B T$  es menor que la altura del potencial, la distribución de probabilidad está centrada en un mínimo del potencial. Después de medio periodo se apaga el ratchet, por lo que ahora la partícula se puede difundir libremente (con coeficiente de difusión  $D = k_B T / m\gamma$ ) con la misma probabilidad para ambas direcciones. Después se vuelve a prender el ratchet, obligando a la partícula a moverse hacia un mínimo del potencial. Como el potencial ratchet es asimétrico la partícula se desplaza en promedio hacia una dirección.

La energía para mover la partícula no viene del baño térmico, sino que se obtiene al encender el potencial, sin embargo el baño térmico juega un papel importante, sin él, la partícula se quedaría en el origen.

Otro fenómeno importante asociado a los ratchet son las inversiones de corriente y pueden ser generadas variando un parámetro del sistema [47, 61, 62, 63]. Las inversiones de corriente son muy importantes para la creación de nuevos aparatos para la separación de partículas [64].

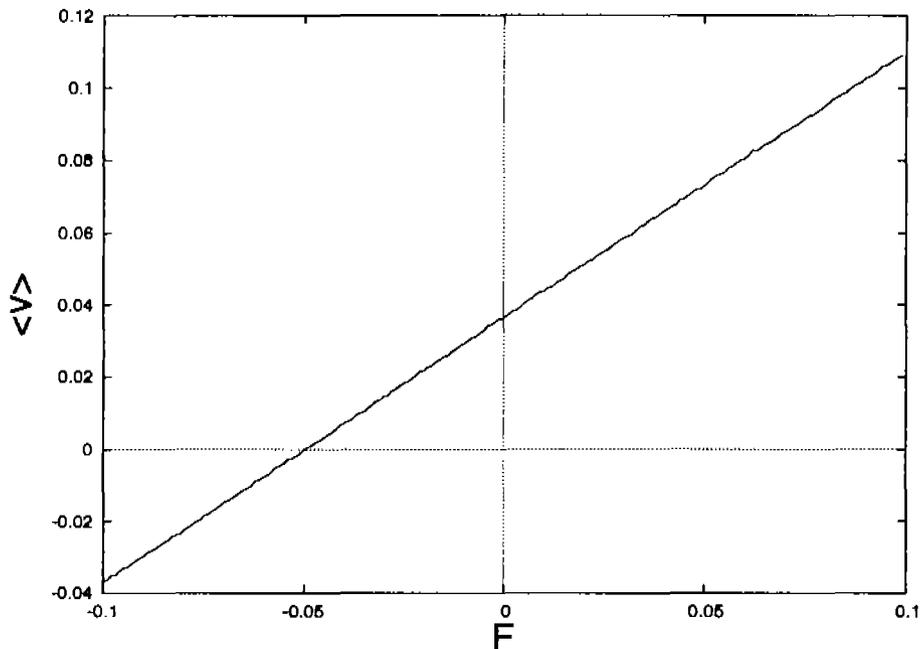


Figura 5.6: Velocidad promedio estacionaria vs. la fuerza de inclinación, se muestra que la velocidad promedio es diferente de cero para  $F = 0$ .  $F_D(t) = F_D \sin(\omega_D t)$ , con  $F_D = 1$ ,  $\omega_D = .6$ ,  $V_0 = 1/2\pi$  y  $D=0.1$ .

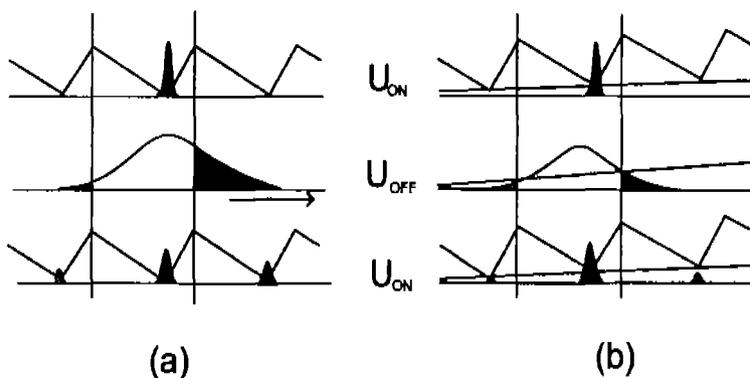


Figura 5.7: Esquema del efecto ratchet donde se muestra un periodo de encendido apagado, (a)  $F = 0$ , (b)  $F \neq 0$ .

# Capítulo 6

## Sincronización

Dado que nos interesa abordar el problema de la sincronización en ratchets, en este capítulo revisaremos los conceptos básicos sobre sincronización [12, 28], así como también definiremos la fase de un oscilador caótico o estocástico.

El origen de la palabra sincronización es de raíz griega, que significa “ocurrir en el mismo tiempo”. El significado original de esta palabra se ha mantenido hasta hoy en el uso coloquial, como un acuerdo o correlación en el tiempo de diferentes procesos.

Históricamente, el análisis del fenómeno de sincronización en la evolución de sistemas dinámicos ha sido estudiado desde los principios de la física. Empezó en el siglo XVII, donde Huygens encontró que dos relojes de péndulo acoplados débilmente (colgados de la misma viga), se vuelven sincronizados en fase.

Inicialmente el fenómeno de sincronización fue investigado en aparatos hechos por el hombre, desde el reloj péndulo hasta instrumentos musicales, generadores eléctricos, sistemas de poder eléctricos y láser. Donde se encontró numerosas aplicaciones en ingeniería eléctrica y mecánica. Ahora el foco de atención de la investigación se ha movido hacia los sistemas biológicos, donde la sincronización se ha encontrado en diferentes niveles. Sincronización del pulso de neuronas, ajuste entre el ritmo del corazón con el respiratorio y/o locomotor, diferentes formas de comportamiento cooperativo entre insectos, animales e incluso entre humanos, estos son sólo ejemplos de un sólo fenómeno natural fundamental: sincronización.

Estamos rodeados por objetos oscilantes, no sólo en física, si no también en las ciencias de la vida [27, 29]. Algunos ejemplos de sincronización son:

radio comunicaciones y equipo eléctrico, luciérnagas que emiten secuencias de pulsos de luz, pájaros que aletean sus alas, sistemas químicos que exhiben variaciones oscilatorias de la concentración de reactantes. Todos estos sistemas y muchos otros tienen una característica en común: producen un ritmo. Usualmente estos objetos no están aislados de su ambiente, si no que interactúan con otros objetos, esto es, que forman un sistema abierto, en el sentido de que el sistema puede intercambiar energía e información con su alrededor. Relojes biológicos que regulan los ciclos diarios, están sujetos al día y la noche, a las variaciones de temporadas en iluminación y temperatura, una luciérnaga es influenciada por la emisión de luz de toda la población etc. Esta interacción puede ser muy débil, en ocasiones imperceptible, pero a menudo causa una transición cualitativa: un objeto ajusta su ritmo de acuerdo al ritmo de otros objetos. Como resultado, insectos en la población emiten pulsos acústicos o luminosos con un ritmo común, pájaros en una parvada aletean sus alas simultáneamente, el corazón de un caballo galopando se contrae una vez por un ciclo locomotor. **Este ajuste de ritmos debido a una interacción es la esencia de la sincronización.** En la siguiente sección ilustraremos esta definición general de sincronización con el clásico ejemplo de un reloj péndulo.

## 6.1. Osciladores auto sostenidos: un modelo de objetos oscilantes

Discutamos como funciona un reloj. Su mecanismo transforma la energía potencial de un peso en altura (o de un resorte comprimido o de una batería), en el movimiento oscilatorio del péndulo. En su recorrido, esta oscilación es transferida en la rotación de las manecillas del reloj. No estamos interesados en el diseño particular del reloj. Lo que es importante es que este toma energía de una fuente y mantiene una oscilación estable del péndulo. El cual continúa sin ningún cambio hasta que se agota la fuente de energía. La siguiente propiedad importante es que la forma exacta del movimiento oscilatorio depende sólo de factores internos del reloj y no de cómo el péndulo fue puesto en movimiento. Es más, después de una pequeña perturbación, seguido de un transiente, el péndulo restablece su ritmo interno.

Estas características son típicas no sólo de relojes, también de muchos sistemas oscilatorios de diversa naturaleza. En física tales osciladores son

llamados osciladores auto sostenidos. Sus propiedades son las siguientes:

- Este oscilador es un sistema activo. Contiene una fuente interna de energía que es transformada en un movimiento oscilatorio. Si lo aislamos, el oscilador continúa generando el mismo ritmo hasta que se agote su fuente de energía.
- La forma de la oscilación está determinada por los parámetros del sistema y no depende de como el sistema fue “prendido”, esto es, después de un transiente regresa a la oscilación estacionaria.
- La oscilación es estable a pequeñas perturbaciones, esto es, siendo perturbado, la oscilación regresa a su forma original.

### 6.1.1. Caracterización del ritmo: periodo y frecuencia

Los osciladores auto sostenidos pueden presentar ritmos de varias formas, desde formas simples sinusoidales, hasta una secuencia de pulsos cortos. Ahora cuantificamos ese ritmo usando el ejemplo del reloj péndulo. La oscilación del péndulo es periódica, y el periodo  $T$  es la característica principal del reloj. De hecho, el mecanismo de rotación de las manecillas cuenta el número de oscilaciones del péndulo, así es que su periodo constituye la unidad básica de tiempo. Usualmente se caracteriza el ritmo por el número de oscilaciones por unidad de tiempo, definida como la *frecuencia cíclica*

$$f = \frac{1}{T}. \quad (6.1)$$

En el tratamiento teórico de la sincronización, la *frecuencia angular*  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$  es a menudo más conveniente. Llamaremos a la frecuencia angular del sistema autónomo (aislado), frecuencia natural o característica.

### 6.1.2. Acoplamiento de objetos oscilantes

Ahora supongamos que tenemos dos relojes, incluso si son del mismo tipo o hechos por el mismo fabricante, debido a que algunos parámetros mecánicos finos difieren el periodo de los relojes no es el mismo. Entonces estos dos relojes muestran una diferencia pequeña en el tiempo, de tal forma que si los miramos en un instante de tiempo, estos péndulos típicamente muestran diferentes posiciones.

Supongamos que estos péndulos no idénticos no son independientes, si no que interactúan débilmente. Puede haber varias formas de interacción, o *acoplamiento* entre estos dos osciladores. Supóngase que estos dos relojes están fijados a un mismo soporte, que no sea una barra absolutamente rígida, entonces esta barra puede doblarse, o puede vibrar muy poco, moviendo de la derecha a la izquierda, esto no importa mucho, lo que importa es que el movimiento de cada péndulo es transmitido a través de la estructura que los soporta al otro péndulo, y como resultado los dos péndulos se “sienten”: interactúan por medio de las vibraciones del soporte. Esta vibración puede ser perceptible sólo con aparatos de medición de alta precisión. Sin embargo, a pesar de su debilidad, puede alterar el ritmo de los dos relojes.

### 6.1.3. Ajuste del ritmo: enganche de frecuencia y de fase

Los experimentos muestran que incluso una interacción débil puede sincronizar dos relojes. Esto es, dos relojes no idénticos, los cuales, si se separan, tienen diferentes periodos de oscilación, cuando son acoplados, ajustan sus ritmos y empiezan a oscilar con periodo común. Este fenómeno usualmente es descrito en términos de la coincidencia de frecuencias como *enganche de frecuencias*. Si dos osciladores no idénticos tienen sus propias frecuencias  $f_1$  y  $f_2$ , y son acoplados, pueden comenzar a oscilar con una frecuencia común. Si se sincronizan o no depende de los siguientes dos factores

#### 1. Fuerza del acoplamiento

Esto describe que tan débil (o fuerte) es la interacción. En una situación experimental no siempre es claro como medir esta cantidad. En el experimento descrito anteriormente, depende de una manera complicada de la habilidad del soporte para moverse, de hecho, si la barra es totalmente rígida, entonces el movimiento del péndulo no afecta al soporte, y entonces no hay forma de que los dos relojes interactúen, la fuerza de acoplamiento es cero. Si la barra no es rígida, sino que puede vibrar o doblarse, entonces la interacción aparece.

#### 2. Diferencia de frecuencias

La diferencia de frecuencias  $\Delta f = f_1 - f_2$ , cuantifica qué tan diferentes son los osciladores no acoplados. En contraste con la fuerza del acoplamiento, en los experimentos la diferencia de frecuencias puede ser

fácilmente medida y variada. En el caso de los relojes, las frecuencias se pueden ajustar a un valor dado cambiando la longitud del péndulo. Entonces podemos averiguar cómo el resultado de la interacción (esto es, si se sincronizan o no) depende de la diferencia de frecuencias. Supóngase que realizamos el siguiente experimento. Primero separamos los dos relojes (por ejemplo, poniéndolos en diferentes cuartos) y medimos sus frecuencias  $f_1$  y  $f_2$ . Habiendo hecho esto, ponemos a los relojes en un soporte común, y medimos sus frecuencias  $F_1$  y  $F_2$  del sistema *acoplado*. Podemos llevar acabo estas mediciones para diferentes valores de  $\Delta f$ , para encontrar la dependencia de  $\Delta F$  con  $\Delta f$ . Graficando esta dependencia obtenemos una curva que se muestra en la figura 6.1, la cual es *típica para osciladores interactuantes*, independiente de su naturaleza (mecánica, química, eléctrica, etc.). Analizando esta curva, vemos que si la diferencia de frecuencias en el sistema sin acoplamiento no es muy grande, la frecuencias de los dos relojes es idéntica ( $\Delta F = 0$ ) o enganchadas, esto es, la sincronización aparece. Remarcamos el hecho de que las frecuencias  $f_{1,2}$  y  $F_{1,2}$  deben ser medidas para los mismos objetos, pero para diferentes condiciones experimentales:  $f_{1,2}$  caracterizan oscilaciones libres (sin acoplamiento), mientras que las frecuencias  $F_{1,2}$  son obtenidas en presencia del acoplamiento. Generalmente esperamos que la región de sincronización crezca cuando se aumenta la fuerza de acoplamiento.

Una inspección más detallada de los estados sincronizados revela que la sincronización de dos relojes puede aparecer de diferentes formas. Puede pasar que los dos péndulos oscilen de manera similar, por ejemplo, que los dos lleguen casi simultáneamente a la esquina izquierda y que crucen casi simultáneamente la línea vertical. Las posiciones de los péndulos evolucionan en el tiempo como se muestra en la figura 6.2. Alternativamente, podemos encontrar que los péndulos siempre se mueven en direcciones opuestas: cuando el primer péndulo, digamos, está en el tope izquierdo de su trayectoria, y el segundo péndulo está en el tope derecho de su trayectoria; cuando cruzan la línea vertical, los péndulos se mueven en sentido opuesto. Para describir estos dos distintos comportamientos, introducimos el concepto clave de *fase* de un oscilador.

Entenderemos como fase a una cantidad que crece  $2\pi$  con cada ciclo oscilatorio. La fase determina sin ambigüedad el estado de un oscilador periódico. En este caso la fase crece linealmente en el tiempo, ver figura 6.3 . La fase no

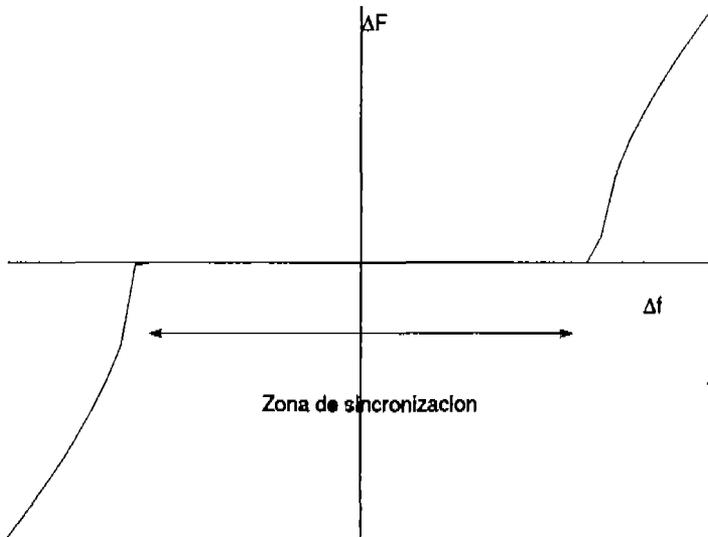


Figura 6.1: Diferencia de frecuencias con acoplamiento vs. diferencia de frecuencias naturales, a una fuerza de interacción fija. Para cierto rango de la diferencia de frecuencias naturales  $\Delta f$ , las diferencia de frecuencias  $\Delta F = 0$ , indicando sincronización

parece dar nueva información del sistema, pero su utilidad se hace evidente cuando consideramos la diferencia de fase de los dos péndulos. Esto nos ayuda a diferenciar entre dos diferentes regímenes de sincronización.

Si los dos péndulos se mueven en la misma dirección y casi simultáneamente, entonces sus fases  $\phi_1$  y  $\phi_2$  se parecen y su estado es llamado *sincronización de fase*<sup>1</sup>. Si miramos más de cerca las fases de los péndulos, podemos detectar que los movimientos no son exactamente simultáneos. Un reloj que inicialmente era más rápido, estará ligeramente adelantado al segundo péndulo, en ese caso hablamos de un desplazamiento de fase.

Si los dos péndulos se mueven en direcciones opuestas, el estado de sincronización se llama en *antifase*, esto es la diferencia de fase es  $\pi$ . Otra vez, los péndulos no están exactamente en antifase, si no que existe un desplazamiento de fase entre ellos.

La relación entre las fases de dos osciladores auto sostenidos sincronizados se llama *enganche de fase*.

<sup>1</sup>La forma general de la sincronización de fase se establece por  $|\phi_2 - \phi_1| \leq \epsilon$

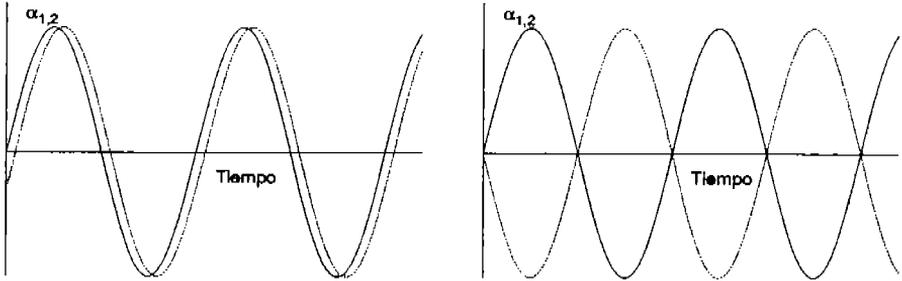


Figura 6.2: Posibles estados de sincronización de dos reloj péndulos casi idénticos, pueden estar casi sincronizados en fase  $\phi_1 = \phi_2 \approx 0$ , o en anti-fase  $\phi_1 = \phi_2 \approx \pi$ .

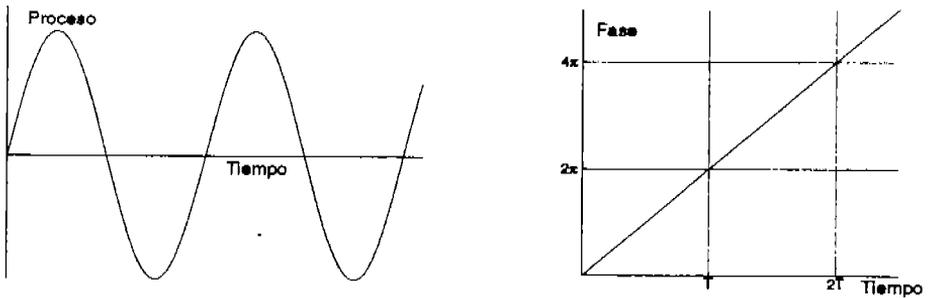


Figura 6.3: La definición de la fase. La fase de un oscilador periódico crece uniformemente en el tiempo y gana  $2\pi$  cada periodo.

Este experimento pensado demuestra el sello de la sincronización, esto es, dos osciladores que inicialmente tienen diferentes frecuencias y fases propias, al ser acoplados (débilmente) ajustan sus ritmos y empiezan a oscilar con una frecuencia común, cabe destacar que la identidad de frecuencias se mantiene para un cierto rango de la diferencia de frecuencias naturales.

Como ya hemos mencionado la sincronización es debida al acoplamiento de dos osciladores autosostenidos. Se pueden distinguir dos clases principales de sincronización según su acoplamiento: acoplamiento unidireccional y acoplamiento bidireccional. En el primer caso el sistema global formado por dos subsistemas, tiene una configuración conducción-respuesta (o amo-esclavo)<sup>2</sup>. Esto implica que un subsistema evoluciona libremente y llevando la evolución del otro. En el segundo caso los dos subsistemas están acoplados uno al otro, este acoplamiento induce una modificación del ritmo a una sincronización común, esta situación ocurre en fisiología, entre el sistema cardiaco y el respiratorio o entre neuronas interactuantes.

En el contexto de osciladores acoplados, muchos estados sincronizados han sido estudiados, entre ellos están la sincronización completa o idéntica (CS), sincronización de fase (PS) y de retraso (LS), sincronización generalizada (GS), sincronización intermitente revestida (ILS), sincronización de fase imperfecta (IPS) y sincronización aproximada (AS) [28].

La sincronización más simple es la CS, consiste en una perfecta coincidencia en las trayectorias de los dos subsistemas, llevada a cabo por una señal que los acopla, de tal manera que una sigue a la otra en el transcurso del tiempo. Este mecanismo es encontrado cuando dos sistemas idénticos son acoplados unidireccionalmente.

La GS va más allá utilizando sistemas completamente diferentes y asociando la salida de un sistema a una función dada del otro sistema.

Osciladores diferentes acoplados o sistemas rotatorios pueden alcanzar un régimen intermedio, cuando se produce una sincronización de fase (PS), mientras que la correlación de las amplitudes permanece baja.

La LS es intermedia entre PS y GS. Implica límites asintóticos de la diferencia de la salida de un sistema al tiempo  $t$  y la salida del otro sistema a un tiempo diferente de retraso  $\tau_{ag}$ . Esto implica que las dos salidas enganchan sus fases y amplitudes en un tiempo de retraso.

---

<sup>2</sup>El caso típico es un oscilador autosostenido sometido a una fuerza temporalmente periódica.

La ILS implica que los subsistemas en la mayor parte del tiempo están en LS, pero estallidos intermitentes en el comportamiento local pueden ocurrir, rompiendo la LS.

Análogamente la IPS ocurre cuando se rompe la PS. Finalmente la AS resulta cuando hay un límite asintótico en la diferencia entre un subconjunto de variables de un sistema y su correspondiente subconjunto de variables del otro sistema.

Es importante notar que la sincronización de fase implica una sincronización de frecuencia, pero, una sincronización de frecuencia no implica una sincronización de fase.

## 6.2. Sincronización de un oscilador por una fuerza externa

Consideremos el caso de un oscilador autosostenible, el cual está sujeto a una fuerza externa periódica. Este esquema representa el caso de dos osciladores autosostenibles, donde el acoplamiento es unidireccional. Un ejemplo de este tipo de sistema son los relojes biológicos, el ritmo de los organismos está controlado por el ritmo de la rotación de la tierra alrededor de su eje y del sol. Definitivamente esta acción es unidireccional.

### 6.2.1. Dinámica de la fase

Describiremos el efecto de una fuerza externa débil en un oscilador periódico autosostenido. La idea principal es que la fuerza débil sólo influye en la fase, no en la amplitud, entonces podemos describir la dinámica sólo con una ecuación para la fase.

Considere un sistema ordinario de ecuaciones diferenciales  $M$ -dimensional ( $M \geq 2$ ), disipativo y autónomo

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M), \quad (6.2)$$

y supongamos que el sistema tiene una solución estable periódica (con periodo  $T_0$ )  $x_0(t) = x_0(t + T_0)$ . En el espacio fase (el espacio de todas las variables  $\mathbf{x}$ ), esta solución es una trayectoria cerrada atractiva, llamada *ciclo límite*. Un punto moviéndose a lo largo del ciclo límite representa oscilaciones autosostenidas. El ejemplo clásico de un oscilador autosostenido es el de Van der

Pol

$$\ddot{x} - 2\mu\dot{x}(1 - \beta x^2) + \omega_0^2 x = 0. \quad (6.3)$$

Introducimos la fase  $\phi$  como una coordenada a lo largo del ciclo límite, tal que crece monótonicamente en la dirección del movimiento y gana  $2\pi$  durante cada rotación. Más aún, pedimos que la fase crezca uniformemente en el tiempo tal que obedezca la ecuación

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0, \quad (6.4)$$

donde  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  es la frecuencia de la oscilación autosostenida. Cuando el periodo de las oscilaciones sea influenciado (por un acoplamiento), necesitaremos referirnos a la frecuencia del oscilador aislado; por lo que llamaremos a  $\omega_0$  la *frecuencia natural* o característica.

De la ecuación (6.4) podemos ver una propiedad muy importante de la fase: es una variable neutral estable. Una perturbación en la fase permanece constante, esto es, no decrece ni aumenta en el tiempo. En términos de la estabilidad de la trayectoria significa que un ciclo límite tiene un exponente de Lyapunov que es cero, que corresponde a las perturbaciones alrededor del ciclo (los otros exponentes corresponden a las perturbaciones transversales y son negativos). Esto refleja la propiedad del sistema dinámico autónomo es invariante ante desplazamientos temporales:  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + \Delta t)$  es una solución también. En el ciclo límite, el desplazamiento temporal  $\Delta t$  es equivalente al desplazamiento de fase  $\Delta\phi$ .

### 6.2.2. Pequeñas perturbaciones e isócronas

Consideremos ahora el efecto de una fuerza externa débil periódica sobre el oscilador autosostenido. Describimos el sistema por las ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon\mathbf{p}(\mathbf{x}, t), \quad (6.5)$$

donde la fuerza  $\varepsilon\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon\mathbf{p}(\mathbf{x}, t + T)$  tiene periodo  $T$ , el cual es en general diferente de  $T_0$ . La fuerza es proporcional a un parámetro pequeño  $\varepsilon$ .

La fuerza externa lleva a la trayectoria fuera del ciclo límite, pero debido a que es pequeña y el ciclo es estable, la trayectoria sólo se desvía poco de la original  $\mathbf{x}_0$ , esto es, cae en la vecindad del ciclo límite. Entonces, las perturbaciones transversales al ciclo límite son pequeñas. Este esquema cualitativo sugiere una descripción de la dinámica perturbada solamente con la

fase. Para esto debemos introducir la fase del sistema no sólo sobre el ciclo límite, si no también en la vecindad.

La idea clave es definir la fase de tal forma que rote uniformemente de acuerdo con la ecuación (6.4) no sólo en el ciclo, si no también en su vecindad. Para lograr esto definimos las llamadas *isócronas*. Observemos al sistema (6.2) estroboscópicamente con el intervalo de tiempo exactamente igual al periodo del ciclo límite  $T_0$ . De esta manera obtenemos de (6.2) un mapeo

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t + T_0) \equiv \Phi(\mathbf{x}).$$

Este mapeo tiene a todos los puntos del ciclo límite como puntos fijos, y todos los puntos de la vecindad son atraídos a él. Escojamos un punto  $\mathbf{x}^*$  en el ciclo y consideremos todos los puntos de la vecindad que son atraídos a  $\mathbf{x}^*$  bajo la acción de  $\Phi(\mathbf{x})$ . Estos forman una hipersuperficie  $I$  de dimensión  $(M - 1)$ , llamada *isócrona*, que cruza el ciclo límite en  $\mathbf{x}^*$ . Una hipersuperficie puede ser dibujada para cada punto en el ciclo límite. A partir de esto, podemos parametrizar todas las hipersuperficies con la fase  $\phi$ . Ahora extendemos la definición de fase para puntos de la vecindad del ciclo límite, demandando que la fase sea constante para cada isócrona  $I(\phi)$ . De esta forma definimos la fase en la vecindad del ciclo límite, o al menos donde la isócrona existe.

### 6.2.3. La ecuación para la dinámica de la fase

Habiendo definido la fase en la vecindad del ciclo límite, podemos escribir la ecuación para la fase en la vecindad como

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \omega_0. \quad (6.6)$$

Como la fase es una función suave de las coordenadas, podemos escribir su derivada temporal como (regla de la cadena)

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}. \quad (6.7)$$

La cual da junto con la ecuación (6.2), la relación

$$\sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} f_k(\mathbf{x}) = \omega_0.$$

Consideremos ahora el sistema perturbado (6.5). Usando la definición de fase para el sistema sin perturbar y sustituyendo (6.5) en (6.7) obtenemos

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} (f_k(\mathbf{x}) + \varepsilon p_k(\mathbf{x}, t)) = \omega_0 + \varepsilon \sum_k \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k} p_k(\mathbf{x}, t).$$

El segundo término de lado derecho es pequeño (proporcional a  $\varepsilon$ ), y las desviaciones de  $\mathbf{x}$  del ciclo límite  $\mathbf{x}_0$  son pequeñas también. Entonces, en primera aproximación podemos despreciar estas desviaciones y calcular el lado derecho en el ciclo límite:

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \sum_k \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_0)}{\partial x_k} p_k(\mathbf{x}_0, t). \quad (6.8)$$

Debido a que los puntos en el ciclo límite tiene correspondencia uno a uno con la fase  $\phi$ , obtenemos una ecuación cerrada para la fase

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \omega_0 + \varepsilon Q(\phi, t), \quad (6.9)$$

donde

$$Q(\phi, t) = \sum_k \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_0(\phi))}{\partial x_k} p_k(\mathbf{x}_0(\phi), t).$$

$Q$  es una función de periodo  $2\pi$  en  $\phi$  y de periodo  $T$  en  $t$ .

#### 6.2.4. Dinámica lenta de la fase

En la aproximación de orden cero", cuando despreciamos el efecto de la fuerza externa ( $\varepsilon = 0$ ), la ecuación (6.9) tiene la solución

$$\phi = \omega_0 t + \phi_0. \quad (6.10)$$

Sustituimos esta solución en la función  $Q$ . Como  $Q$  es una función de periodo  $2\pi$  en  $\phi$  y  $T$  periódica en  $t$ , podemos representarla como una doble serie de Fourier

$$Q(\phi, t) = \sum_{l,k} a_{l,k} e^{ik\phi + il\omega t}, \quad (6.11)$$

donde  $\omega = 2\pi/T$  es la frecuencia de la fuerza externa. Substituyendo (6.10) en (6.11)

$$Q(\phi, t) = \sum_{l,k} a_{l,k} e^{ik\phi_0} e^{(ik\omega_0 + il\omega)t}. \quad (6.12)$$

Observamos que la función  $Q$  contiene términos oscilantes rápidos (comparados con la escala de tiempo  $1/\varepsilon$ ), como también términos que varían lentamente. Estos términos satisfacen la *condición de resonancia*

$$k\omega_0 + l\omega \approx 0. \quad (6.13)$$

Sustituyendo en (6.9), los términos resonantes en la suma (6.12) son los más importantes para la dinámica. Entonces, para mantener sólo la dinámica esencial, promediamos la fuerza (6.12) dejando solamente los términos resonantes. Los términos resonantes dependen de la relación entre la frecuencia externa  $\omega$  y la frecuencia natural  $\omega_0$ . El caso más simple es cuando son casi iguales  $\omega \approx \omega_0$ . Entonces, sólo los términos con  $k = -l$  son resonantes. La suma de estos términos da una nueva fuerza promedio

$$\sum_{l=-\infty, \infty; k=-l} a_{l,k} e^{ik\phi + il\omega t} = \sum_k a_{-k,k} e^{ik(\phi - \omega t)} = q(\phi - \omega t). \quad (6.14)$$

La fuerza promedio  $q$  es una función de periodo  $2\pi$  y contiene todos los términos resonantes. Substituyendo en (6.9) obtenemos

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon q(\phi - \omega t). \quad (6.15)$$

Ahora definimos una nueva variable. la diferencia de fase entre la fase del oscilador y la fase de la fuerza externa

$$\psi = \phi - \omega t. \quad (6.16)$$

También introducimos la diferencia de frecuencias como

$$\nu = \omega - \omega_0, \quad (6.17)$$

para obtener finalmente

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu + \varepsilon q(\psi). \quad (6.18)$$

La condición de resonancia puede tomar una forma más general

$$\omega \approx \frac{m}{n} \omega_0, \quad (6.19)$$

donde  $n, m$  son enteros sin un común divisor. Esta condición de resonancia lleva a una ecuación de la forma (6.18), con  $\psi = m\phi - m\omega t$  y  $\nu = n\omega - m\omega_0$ . La función de periodo  $2\pi$  más simple es la función seno, entonces la forma más simple de la ecuación de la fase promedio es

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu + \varepsilon \sin(\psi). \quad (6.20)$$

Usualmente llamada ecuación de Adler.

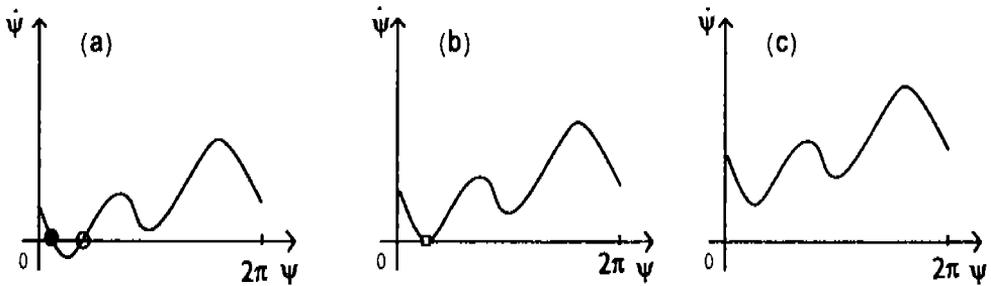


Figura 6.4: El lado derecho de la ecuación (6.18), (a) adentro, (b) en el borde y (c) afuera de la región de sincronización. Los puntos estables e inestables se muestran con círculos llenos y vacíos. En (b) se muestra la transición de la sincronización, aquí, los puntos estables e inestables colisionan para formar un punto semiestable(caja).

### 6.2.5. Enganche de fase y región de sincronización

Consideremos las soluciones de la ecuación (6.18), la cual es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no lineal. Hay dos formas de introducir el espacio fase: la fase  $\psi$  puede variar ya sea de  $-\infty$  a  $\infty$  (esquema extendido), o usando la periodicidad de la función  $g$ , podemos tomar el círculo  $0 \leq \psi < 2\pi$  como el espacio fase (esquema reducido). La ecuación (6.18) depende de dos parámetros, de acuerdo a la ecuación inicial (6.5),  $\varepsilon$  puede ser interpretado como la amplitud de la fuerza externa. El parámetro  $\nu$  de acuerdo con (6.17), es la diferencia de fase entre la fase natural y la fase de la fuerza externa.

De acuerdo a la ecuación (6.18), existen dos casos en la dinámica de la fase  $\psi$ , como se muestra en la figura 6.4. La función  $g(\psi)$  es una función de  $\psi$  con periodo  $2\pi$  y por tanto tiene en el intervalo  $[0, 2\pi)$  un máximo  $q_{max}$  y un mínimo  $q_{min}$ ; típicamente estos dos extremos no son degenerados. Entonces, si la diferencia de frecuencias  $\nu$  está en el intervalo

$$\varepsilon q_{min} < \nu < \varepsilon q_{max}, \quad (6.21)$$

entonces hay al menos un par de puntos fijos de la ecuación (6.18), esto es, un par de soluciones estacionarias para  $\psi$ . Uno de estos puntos es estable y el otro inestable; generalmente puede haber varios pares de puntos estable-inestable si la función  $g$  tiene más de dos valores extremos. Entonces si (6.21) se satisface, el sistema evolucionara a uno de los puntos estables y permane-

cerá ahí, de tal forma que la fase  $\psi$  es constante. Para la fase  $\phi$  esto significa una rotación constante con la frecuencia de la fuerza constante:

$$\phi = \omega t + \psi_s, \quad (6.22)$$

y este es el *régimen de sincronización* o *lengua de Arnold*. Este régimen existe adentro del dominio (6.21), en el plano de parámetros  $(\nu, \varepsilon)$ . Usualmente se dice que la fase del oscilador está enganchada por la fase de la fuerza externa  $\omega t$ , y este régimen es llamado *enganche de fase*, lo cual significa que la fase del oscilador coincide con la fase de la fuerza externa.

Otra situación se observa si la diferencia de frecuencias  $\nu$  cae fuera del rango (6.21). Entonces la derivada de la fase  $\psi$  es permanente positiva (o negativa) y la frecuencia de oscilación difiere de la frecuencia de la fuerza externa  $\omega$ . La solución de (6.18) puede ser escrita formalmente en cuadraturas como

$$\int^{\psi} \frac{d\psi}{\varepsilon q(\psi) - \nu} = t, \quad (6.23)$$

la cual define la fase lenta  $\psi$  en función del tiempo  $\psi = \psi(t)$ . Esta función tiene periodo  $T_\psi$ <sup>3</sup> definido por la ecuación

$$T_\psi = \left| \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\varepsilon q(\psi) - \nu} \right|. \quad (6.24)$$

La fase  $\phi$  rota de forma no uniforme,

$$\phi = \omega t + \psi(t). \quad (6.25)$$

Una característica importante de la dinámica fuera de la región de sincronización es la velocidad promedio de la rotación de la fase, llamada *frecuencia observada*. Cuando la fase  $\psi$  gana  $\pm 2\pi$  durante el tiempo  $T_\psi$ , la frecuencia promedio de las rotaciones de la fase lenta  $\psi$  es

$$\Omega_\psi = 2\pi \left( \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\varepsilon q(\psi) - \nu} \right)^{-1}. \quad (6.26)$$

La frecuencia observada  $\Omega$  de la fase original  $\phi$  es

$$\langle \dot{\phi} \rangle = \Omega = \omega + \Omega_\psi. \quad (6.27)$$

---

<sup>3</sup>la fase  $\psi$  crece de 0 a  $2\pi$  en  $T_\psi$

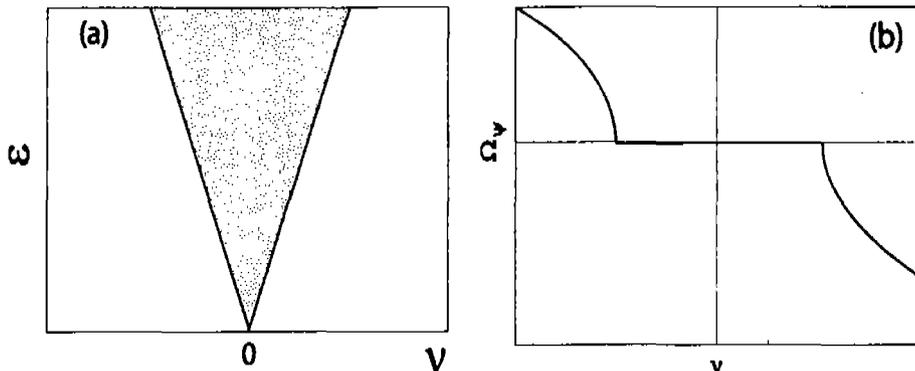


Figura 6.5: (a) Región de sincronización en el espacio de parámetros  $\nu, \epsilon$ . (b) Dependencia de la frecuencia observada contra la diferencia de frecuencias  $\nu$ , para un valor fijo de  $\epsilon$ .

Podemos ver que la frecuencia  $\Omega_\psi$  depende monotónicamente de la diferencias de frecuencias  $\nu$ . Más aún, en la vecindad de la región de transición podemos estimar su dependencia analíticamente. Cuando el parámetro  $\nu$  cambia hasta la región de sincronización en  $\nu = \epsilon q_{max}$ , donde los puntos fijos estable e inestable se colapsan y desaparecen a través de una bifurcación silla-nodo. Consideremos la transición en  $\nu_{max} = \epsilon q_{max}$ . Si  $\nu - \nu_{max}$  es pequeña, la expresión  $|\epsilon q(\psi) - \nu|$  es muy pequeña en la vecindad del punto  $\psi_{max}$ , entonces esta vecindad domina la integral (6.26). Desarrollando la función  $q(\psi)$  en serie de Taylor en  $\psi_{max}$  y poniendo los límites de integración a infinito nos lleva a un comportamiento de una raíz cuadrada

$$\begin{aligned}
 |\Omega_\psi| &\approx 2\pi \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{\frac{1}{2}\epsilon q''(\psi_{max})\psi^2 - (\nu - \nu_{max})} \right|^{-1} \\
 &= \sqrt{\epsilon |q''(\psi_{max})| \cdot (\nu - \nu_{max})} \sim \sqrt{\nu - \nu_{max}}. \quad (6.28)
 \end{aligned}$$

Mostramos una dependencia típica de  $\Omega_\psi$  contra la diferencia de frecuencias  $\nu$  en la figura 6.5.

Cabe mencionar que la dinámica en la vecindad del punto de transición de la fase  $\psi$  es altamente no uniforme en el tiempo (ver figura 6.6). De hecho, cerca de la bifurcación la trayectoria gasta un tiempo grande (proporcional a  $(\nu - \nu_{max})^{-1/2}$ ) en la vecindad de  $\psi_{max}$ , el lado derecho de (6.18) es casi cero. Estos tiempos de fase casi constante  $\psi \approx \psi_{max}$  se entremezclan regularmente

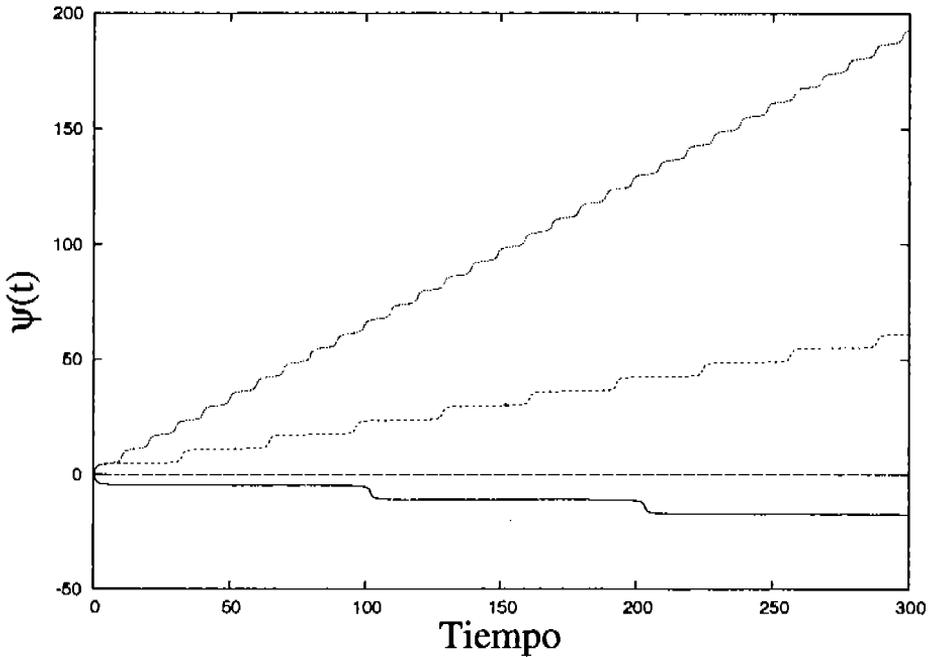


Figura 6.6: LA dinámica de la fase descrita por (6.18), para  $q(\psi) = \sin(\psi)$ ,  $\epsilon = 1$  y diferentes valores de la diferencia de frecuencias  $\nu$ : de abajo hacia arriba  $\nu = 1.001, 0.0, -1.01, 1.1$ .

en intervalos donde la fase  $\psi$  se incrementa (o decrece) por  $2\pi$ ; estos eventos son llamados *resbalones de fase*. La rotación de la fase entonces puede representarse como una secuencia periódica (de periodo  $T_\psi$ ) de resbalones de fase. Entre estos resbalones de fase, el oscilador está casi enganchado a la fase de la fuerza externa. Durante el resbalón la fase realiza una rotación más (o una menos) con respecto a la de la fuerza externa.

### 6.2.6. Rotores forzados como osciladores autosostenidos

En este capítulo hemos considerado oscilaciones autosostenidas, y el efecto de una fuerza externa sobre estas. Los osciladores autosostenidos tienen una frecuencia característica fija y están oscilando desde antes de interactuar con cualquier fuerza externa.

Los rotores son osciladores que si los forzamos con una fuerza externa constante, empiezan a oscilar a una frecuencia fija (dependiente de la fuerza constante). A primera vista, los rotores forzados no pertenecen a los osciladores autosostenidos, debido a que necesitan una fuerza constante para oscilar. Sin embargo, estos tienen las mismas propiedades de un oscilador autosostenido: en el espacio fase hay un ciclo límite y uno de los exponentes de Lyapunov es cero [12]. Entonces las rotaciones forzadas son similares a las oscilaciones autosostenidas: pueden ser sincronizadas por una fuerza externa periódica [65].

### 6.3. Sincronización de frecuencia y fase en sistemas estocásticos

Esta sección está basada en el artículo [66]. El estudio de la sincronización en sistemas estocásticos necesita una revisión de los conceptos fundamentales. Es obvio que cuando estamos hablando de un sistema estocástico, este se refiere a la existencia de un ruido, por ejemplo ruido blanco. Cuando consideramos el fenómeno de enganche de fases, el ruido va a prohibir la existencia estricta de un límite para las diferencia de fase de dos sistemas. Sin embargo, la reformulación del fenómeno de sincronización en presencia de ruido es posible calculando el promedio de la duración de los episodios de enganche  $\langle T_{eng} \rangle$ . En el caso de que  $\langle T_{eng} \rangle \gg T_0$ , donde  $T_0$  es un tiempo característico de la dinámica, por ejemplo, el periodo de una fuerza externa o el inverso de una frecuencia intrínseca natural del sistema, en este caso es justificado hablar de sincronización efectiva.

Dado un conjunto de datos o alguna dinámica, existe una variedad de métodos para definir la fase instantánea  $\phi(t)$  de una señal o una dinámica.

#### 6.3.1. Fase lineal interpolada $\phi^L$

Podemos utilizar cualquier punto de cruce como referencia para decir que un ciclo es completado. Sin embargo toda la dinámica debe ser conocida en detalle. En muchos casos no tenemos acceso a todos los datos sobre la dinámica, si no a una serie de datos que muestran una repetición de un evento característico, como por ejemplo, los picos pronunciados de la actividad neural, los picos de un electrocardiograma, o los máximos pronunciados en la dinámica de poblaciones. Estos eventos pueden servir como marca cuando un

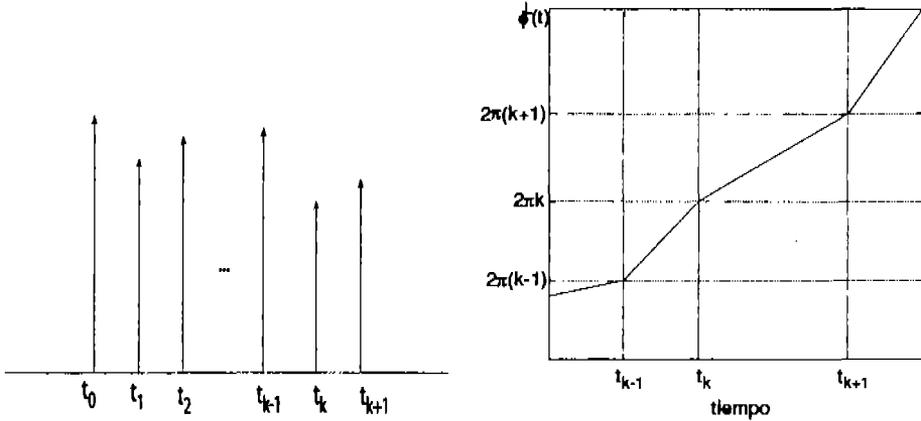


Figura 6.7: En la primera figura se muestra un ejemplo de una serie de tiempos tomados en un evento que sirve como marca para completar un ciclo. En la siguiente figura se muestra como crece la fase  $2\pi$  veces por cada evento

ciclo  $k$  (o medio ciclo) es completado, y comienza otro ciclo  $k + 1$ . Entonces es posible definir una fase instantánea  $\phi^L(t)$  por interpolación lineal, esto es

$$\phi^L(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} 2\pi + k2\pi, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (6.29)$$

donde los tiempos  $t_k$  están fijados por los eventos marca. Cabe notar que en general se supone que tenemos una gran colección de datos ( $k \rightarrow \infty$ ).

También cabe notar (a partir de la definición 6.29) que, cuando ocurre un evento la fase aumenta por  $2\pi$  (o  $\pi$  si es la mitad del ciclo) con respecto a la fase del evento anterior. Otra propiedad importante es que cuando la serie de tiempo representa un oscilador con una frecuencia fija (oscilador armónico) la definición de fase lineal coincide con la fase del oscilador armónico  $\phi^L(t) = \phi(t) = \omega_a t$ , donde  $\omega_a = 2\pi/T$ , con  $T$  siendo el tiempo entre dos eventos (periodo).

Estamos interesados en calcular la frecuencia característica de nuestro sistema, definida como la derivada temporal de la fase lineal  $\phi^L(t)$ . Como la fase es lineal a trozos, su derivada es discontinua, y es constante en cada intervalo  $[t_k, t_{k+1})$ . Podemos representar una función constante en un intervalo

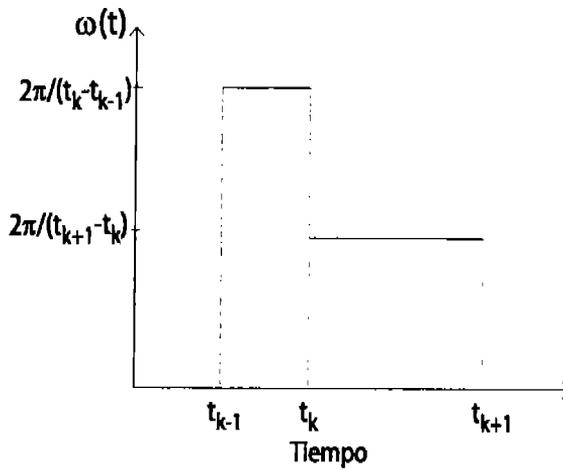


Figura 6.8: La frecuencia (6.30) definida como la derivada de la fase.

con ayuda de la función escalón  $\Theta(x)$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

con esto una función que tiene un valor constante de  $f_0$ , en el intervalo  $[a, b]$  se puede escribir como  $f(x) = f_0[\Theta(x - a) - \Theta(x - b)]$ .

Por lo tanto, la frecuencia al tiempo  $t$  se puede escribir como una suma de funciones constantes en el intervalo  $[t_k, t_{k+1})$ , esto es

$$\omega(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2\pi}{t_{k+1} - t_k} [\Theta(t - t_k) - \Theta(t - t_{k+1})], \quad (6.30)$$

donde  $N$  es el número de eventos ocurridos al tiempo  $t_N$ . Obviamente el valor de  $\omega$  depende del tiempo, por lo que podemos definir su promedio temporal como

$$\langle \omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \omega(t) dt. \quad (6.31)$$

Hay dos formas de realizar esta integral, la más fácil es notar que la frecuencia esta definida como la derivada temporal de la fase  $\omega(t) = \dot{\phi}(t)$ , entonces

$$\int_0^T \omega(t) dt = \int_0^T \frac{d\phi^L}{dt} dt = \phi^L(T) - \phi^L(0).$$

Debido a la definición de  $\phi^L(t)$ , tenemos un conjunto de tiempos  $\{t_k\}$ , por lo que en el límite en (6.31), se puede reemplazar por un límite en  $k$ .

$$\langle \omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\phi^L(T) - \phi^L(0)}{T} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\phi^L(t_k) - \phi^L(0)}{t_k}, \quad (6.32)$$

podemos tomar sin pérdida de generalidad que  $\phi(0) = 0$ , por la definición de la fase (6.29), tenemos que  $\phi(t_k) = k2\pi$ , por lo tanto el promedio lo podemos escribir como

$$\langle \omega \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} 2\pi \frac{k}{t_k}. \quad (6.33)$$

En la práctica el límite hacia infinito no se puede alcanzar, por lo que quitaremos la parte del límite, sobrentendiendo que cuando nos refiramos a promedios temporales,  $t_k$  es un tiempo muy grande comparando con tiempos característicos de la dinámica del sistema.

$$\langle \omega \rangle = 2\pi \frac{k}{t_k}. \quad (6.34)$$

Otra forma de obtener (6.33), es integrando directamente (6.30)

$$\begin{aligned} \int_0^T \omega(t) dt &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2\pi}{t_{k+1} - t_k} \int_0^T [\Theta(t - t_k) - \Theta(t - t_{k+1})] dt, \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2\pi}{t_{k+1} - t_k} (t_{k+1} - t_k), \\ &= 2\pi N, \end{aligned}$$

donde  $N$  es el número de elementos en  $\{t_k\}$  para el tiempo  $T$  ( $t_N \leq T$ ). Por lo que sustituyendo en (6.31) y sustituyendo el límite sobre  $T$  por un límite sobre  $k$ , llegamos a (6.33)

Otra propiedad de la definición de  $\phi^L(t)$  es que la frecuencia asociada al promedio aritmético del tiempo entre eventos es igual al promedio temporal de la frecuencia  $\omega(t) = \dot{\phi}(t)$ . En efecto, el tiempo entre el evento  $k$  y  $k + 1$

es  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$  y el promedio aritmético de  $\tau_k$  es sumar sobre todos los eventos y dividir entre el número de eventos totales, esto es

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tau_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (t_{k+1} - t_k),$$

pero la suma de todos los tiempos  $\tau_k$  es igual al tiempo total  $t_N$ , por lo que

$$\langle \tau \rangle = \frac{t_N}{N}.$$

La frecuencia asociada al tiempo promedio entre eventos es

$$\langle \omega \rangle = \frac{2\pi}{\langle \tau \rangle} = 2\pi \frac{k}{t_k}, \quad (6.35)$$

la cual corresponde con (6.34) para  $k$  muy grandes. Entonces la fase  $\phi^L(t)$  nos sirve para definir la frecuencia promedio asociada al tiempo promedio entre eventos. Más adelante podremos relacionar este tiempo con el tiempo promedio de primer paso cuando estemos tratando sistemas estocásticos visto anteriormente.

## 6.4. Fase discreta $\phi^D$ y fase de Hilbert $\phi^H$

Existen otras opciones para definir una fase de un proceso irregular, por ejemplo la fase discreta  $\phi^D$ . Su definición es similar a la de la fase lineal  $\phi^L$ , la diferencia radica en que al lugar de crecer linealmente en el tiempo en el intervalo  $(t_{k-1}, t_k)$ , se mantiene constante y crece  $2\pi$  cada vez que ocurre un evento, esto es, crece discontinuamente en el tiempo

$$\phi^D(t) = 2\pi k(t), \quad (6.36)$$

donde  $k(t)$  es el número de eventos ocurridos al tiempo  $t$ . Esta descripción es muy usual cuando se quieren hacer cálculos teóricos en procesos dicótomos, ya que se ajusta a la teoría de renovaciones [67].

Otra opción es la fase de Hilbert  $\phi^H$ , utilizada en procesamiento de señales llamada también señal analítica. Este concepto basado en la transformada de Hilbert da sin ambigüedad la fase instantánea y la amplitud para una señal

arbitraria  $s(t)$  vía la construcción de la señal analítica  $\zeta(t)$ , la cual es una función compleja del tiempo definida como

$$\zeta(t) = s(t) + is^H(t) = A(t) \exp^{i\phi^H(t)}. \quad (6.37)$$

Aquí la función  $s^H(t)$  es la transformada de Hilbert de  $s(t)$

$$s^H(t) = \pi^{-1} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (6.38)$$

donde P.V. significa que la integral es tomada en el sentido del valor principal de Cauchy. Enfatizamos que la transformada de Hilbert es libre de parámetros y que el cálculo de la fase instantánea requiere el conocimiento de todo el proceso en el tiempo.

El hecho de que la fase

$$\phi^H(t) = \arctan \left[ \frac{s^H(t)}{s(t)} \right], \quad (6.39)$$

sea obtenida como el resultado de la convolución de las funciones  $s(t)$  y  $1/\pi t$ , al lugar de la diferenciación, hace que esta sea menos sensitiva a pequeñas fluctuaciones de corta duración, actuando como un filtro sobre la dinámica.

En el artículo [66], se muestra que para un proceso dicótomo, la fase lineal, discreta y de Hilbert coinciden bajo cierto rango.

Por la facilidad de cálculo e interpretación, así como sus propiedades en relacionar una frecuencia a el tiempo promedio entre eventos, utilizaremos en este trabajo la fase lineal  $\phi^L(t)$  para describir los procesos relacionados con sincronización, por lo que en lo posterior quitaremos el subíndice  $L$  a la fase para representarla sólo como  $\phi(t)$ .

# Capítulo 7

## Sincronización del ratchet Sobreamortiguado

En el capítulo 5 hablamos del efecto ratchet y de la necesidad de llevar al sistema fuera del equilibrio con una fuerza externa estocástica o determinista para obtener este efecto. Sin embargo ha habido interés en investigar las propiedades de transporte en ratchets deterministas [18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 68], es decir ratchet en ausencia de ruido. Cabe mencionar que la dinámica de potenciales inclinados ha sido estudiada en distintos contextos físicos, como: potenciales ópticos [69], conductores superiónicos [13], sistemas excitables [70], difusión en superficies [71, 72, 73, 74, 75, 76], ondas de densidad cargadas [77] y uniones Josephson [13, 11, 12]. Cuando el potencial ratchet inclinado es forzado periódicamente, exhibe una gran variedad de fenómenos físicos, incluyendo enganche de fase, histéresis [78] y caos [79].

Primero nos enfocaremos en la dinámica determinista sobreamortiguada del potencial ratchet sujeto a una fuerza constante (ratchet inclinado) y definiremos una frecuencia característica<sup>1</sup> para cada valor de la inclinación, tomándolo formalmente como un oscilador autosostenido. Veremos la sincronización entre la frecuencia promedio del ratchet inclinado con la frecuencia de un forzamiento externo temporalmente periódico.

---

<sup>1</sup>Partiendo de la definición de fase introducida en el capítulo anterior.

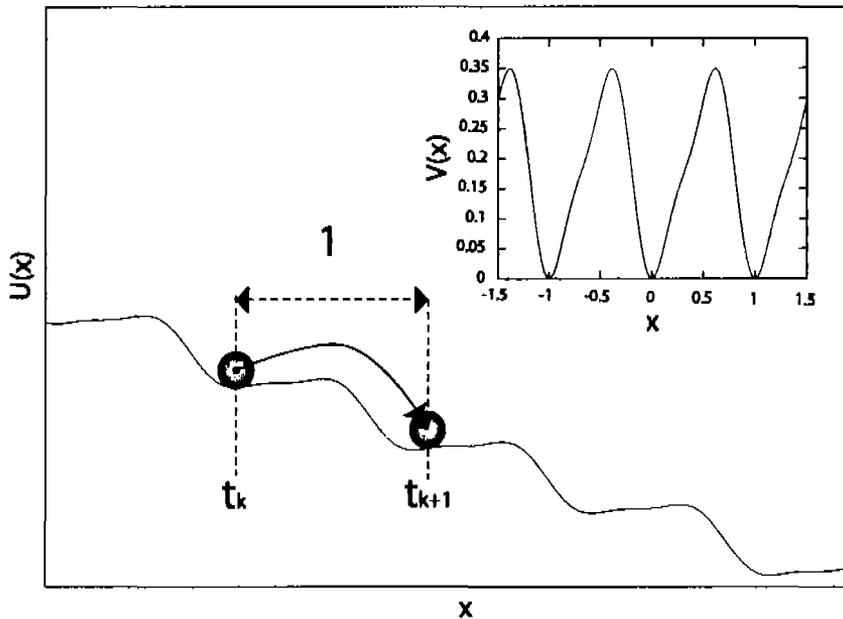


Figura 7.1: Potencial ratchet inclinado mostrando la dinámica que define los eventos a los tiempos  $\{t_k\}$ . El potencial ratchet sin inclinación se muestra en el cuadro superior de la figura.

## 7.1. Definición de la fase

Definamos los tiempos  $\{t_k\}$  como el conjunto de tiempos cuando la partícula avanza (o retrocede) a las posiciones discretas  $x_{\pm i} = \pm i$ , la cual corresponden a los mínimos del potencial sin inclinación (ver fig. 7.1), donde  $k, i$  toma valores enteros no negativos ( $k, i = 0, 1, 2, \dots$ ).

Además de los tiempos discretos, definamos las variables discretas  $N_k^R$  y  $N_k^L$ :

- $N_k^R$  - número de pozos avanzados hacia la derecha al tiempo  $t_k$ .
- $N_k^L$  - número de pozos retrocedidos hacia la izquierda al tiempo  $t_k$ .

Se considera que la partícula avanzó o retrocedió un pozo si estando en el pozo  $x = i$  al tiempo  $t_k$ , llega al pozo  $x = i + 1$  (avanzar) o al  $x = i - 1$  (retroceder) al tiempo  $t_{k+1}$ . El evento de avanzar o retroceder un pozo será nuestro evento marca.

Es conveniente definir otras dos variables que están relacionadas con las cantidades promedio de interés: la frecuencia y la velocidad promedio.

Estas variables son el número total de saltos  $N_k^T$  y el número de pozo en el cual se encuentra la partícula al tiempo  $t_k$

$$\begin{aligned} N_k^T &= N_k^R + N_k^L = k, \\ N_k &= N_k^R - N_k^L. \end{aligned} \quad (7.1)$$

$N_k^T = k$  nos dice cuántos saltos o eventos han ocurrido al tiempo  $t_k$  y  $N_k$  nos dice el número del pozo en el que se encuentra la partícula al tiempo  $t_k$ . Cabe mencionar que esta representación discreta de la dinámica filtra la información de tal forma que se obtiene la dinámica entre pozos (dinámica lenta) y se elimina la dinámica intrapozos (dinámica rápida).

Podemos expresar la fase lineal interpolada como

$$\phi(t) = 2\pi \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} + 2\pi k, \quad t_k < t \leq t_{k+1}. \quad (7.2)$$

La frecuencia es la derivada temporal de la fase  $\phi(t)$ , dada por la ecuación (6.30), y su promedio temporal está dado por la ecuación (6.34)

$$\langle \omega \rangle = 2\pi \frac{k}{t_k}, \quad (7.3)$$

donde  $k$  es un número muy grande, de tal forma que  $t_k$  sea muy grande con respecto a un tiempo característico de la dinámica, usualmente el periodo de la fuerza externa periódica  $T_D$ .

También estamos interesados en calcular el promedio temporal de la velocidad

$$\langle v \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T v(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{x(T)}{T}. \quad (7.4)$$

o términos del proceso discreto  $N_k$

$$\langle v \rangle = \frac{N_k}{t_k}. \quad (7.5)$$

Cabe recalcar que la posición y el tiempo son cantidades adimensionales (con dimensiones  $x(t_k) = LN_k$ ) y  $t_k \gg T_D$ .

Hasta ahora no hemos metido los detalles de la dinámica (si es sobreamortiguada, inercial o estocástica). Por lo que la definición de fase es muy general y sirve para cualquier sistema donde se puedan definir el conjunto  $\{t_k\}$ . Por lo tanto, esta definición de fase se va a utilizar en los siguientes capítulos cuando abordemos el caso sobreamortiguado, inercial, estocástico e incluso cuando tengamos dos o más partículas (definiendo un conjunto de tiempos para cada partícula).

## 7.2. Ratchet sobreamortiguado

Para empezar consideremos la dinámica sobreamortiguada (5.15) para el caso determinista ( $D = 0$ )<sup>2</sup>, esto es, una partícula en una dimensión gobernada por la ecuación de movimiento adimensional (con  $L$  y  $\gamma^{-1}$  como la distancia y el tiempo característico)

$$\dot{x} + \frac{d}{dx}V(x) = F + F_D \cos(\omega_D t), \quad (7.6)$$

donde  $V(x)$  es el potencial periódico y asimétrico ratchet,  $F$  es una fuerza constante,  $F_D$  y  $\omega_D$  son la amplitud y la frecuencia de la fuerza externa periódica respectivamente. El potencial periódico y asimétrico ratchet  $V(x)$  está dado por

$$V(x) = -V_0 \left[ \sin(2\pi(x - x_0)) + \frac{1}{4} \sin(4\pi(x - x_0)) - C \right], \quad (7.7)$$

donde  $x_0 \simeq -0.19$  y  $C = -\sin(2\pi(x_0)) - \frac{1}{4} \sin(4\pi(x_0)) \simeq 1.1$ , son dos constantes tal que el mínimo del potencial está en el origen.

Podemos reescribir la ecuación de movimiento (7.6) como

$$\dot{x} + \frac{\partial}{\partial x}U(x, t) = 0, \quad (7.8)$$

donde  $U(x, t)$  es el potencial efectivo

$$U(x, t) = V(x) + x(F + F_D \cos(\omega_D t)). \quad (7.9)$$

---

<sup>2</sup>La dinámica sobreamortiguada del ratchet presenta un rango de rectificación de corriente mostrada en la figura 7.5 para  $F = 0$ , la cual ya ha sido reportada y estudiada [78, 11, 68, 19, 20].

Para  $F_D = 0$  el potencial se llama “ratchet inclinado” o “potencial de lavadero”, para  $F = 0$  el potencial se llama “ratchet mecido” (del inglés rocking ratchet), cuando los dos términos son diferentes de cero decimos que es un “ratchet mecido e inclinado”.

Para el ratchet inclinado, la dinámica de la partícula se puede representar como un rotor, esto es, existe un tiempo característico (dependiente de la inclinación) para el cual la partícula recorre un periodo espacial del ratchet. En la siguiente sección presentaremos con detalle a este rotor.

### 7.2.1. Resultados numéricos

Aun que existen resultados analíticos estos se basan en lo que se llama el “límite adiabático”, lo cual significa que se toma el límite cuando la frecuencia de oscilación tiende a cero o infinito. Nosotros estamos interesados en el régimen intermedio para la frecuencia de oscilación, para el cual no hay resultados analíticos, por lo que los resultados que presentamos son numéricos. Los resultados de esta sección fueron obtenidos resolviendo numéricamente la ecuación de movimiento (7.6). Usamos el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden y la condición inicial de que al tiempo  $t = 0$  la partícula está en  $x = 0$ . Una vez obtenida la trayectoria completa, identificamos el conjunto de tiempos  $\{t_k\}$  cuando la partícula cruza la posición  $x = N_k$ . Con estos eventos marca calculamos directamente la frecuencia promedio usando (7.3), y después de calcular  $N_k$ , obtenemos la corriente usando (7.5). En todo este trabajo fijamos la amplitud del potencial ratchet a  $V_0 = 1/2\pi$ .

#### Ratchet inclinado como un rotor

Consideremos la dinámica del ratchet inclinado ( $F_D = 0$ )

$$\dot{x} + \frac{d}{dx}V(x) = F, \quad (7.10)$$

donde  $V(x)$  es el potencial ratchet (7.7) y  $F$  es una fuerza constante.

La ecuación de movimiento se puede escribir como  $\dot{x} + dU(x)/dx = 0$ , donde  $U(x) = V(x) - Fx$  es el potencial efectivo, que se muestra en la figura 7.1 como el potencial ratchet inclinado.

En la figura 7.2, se muestran la frecuencia y velocidad promedio, calculadas a partir de (7.3) y (7.5) respectivamente para el ratchet inclinado (7.10). Podemos ver que existen 2 umbrales para los cuales la velocidad y la

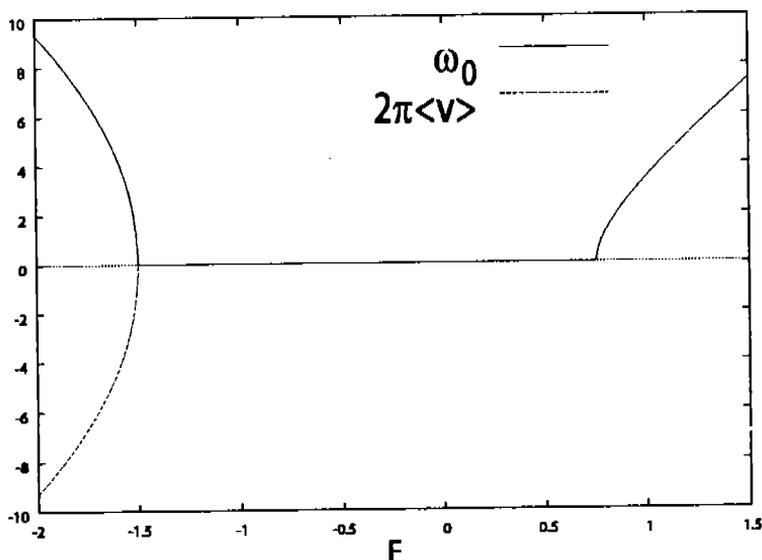


Figura 7.2: Frecuencia y velocidad promedio en función de la fuerza constante  $F$ , para el rotor (7.10). Podemos observar que  $2\pi\langle v \rangle = \langle \omega \rangle$  debido a que no hay pasos hacia atrás.

frecuencia promedio es diferente de cero, esto es, dos inclinaciones críticas  $F_c^L = -3/2$  y  $F_c^R = 3/4$ . Para valores mayores que la inclinación crítica la velocidad y la frecuencia son diferentes de cero. La velocidad crece monótonicamente con  $F$  y en la misma dirección mientras que la frecuencia siempre es positiva. Las gráficas no están centradas en el origen debido a la asimetría del ratchet. Para una  $F$  fija mayor que  $F_c^R$ , digamos  $F = 1$ , la partícula recorre cada periodo del ratchet en un tiempo constante  $\tau_0$ , al cual le corresponde una frecuencia "característica"  $\omega_0 = 2\pi/\tau_0 \simeq 3.4131$ . En este sentido el rotor forzado con una fuerza constante  $F$  se comporta como un oscilador auto-sostenido, en el sentido de que comparten las mismas propiedades: tienen un periodo bien definido, y en su espacio fase existe un ciclo límite. Entonces, el rotor al igual que un oscilador auto-sostenido puede ser sincronizado con una fuerza externa periódica.

También podemos observar que la frecuencia promedio coincide con 2 $\pi$  veces la velocidad promedio para inclinaciones positivas y mayores que  $F_c^L$ , esto es por que no existen pasos hacia atrás y las definiciones de 2 $\pi$  veces la

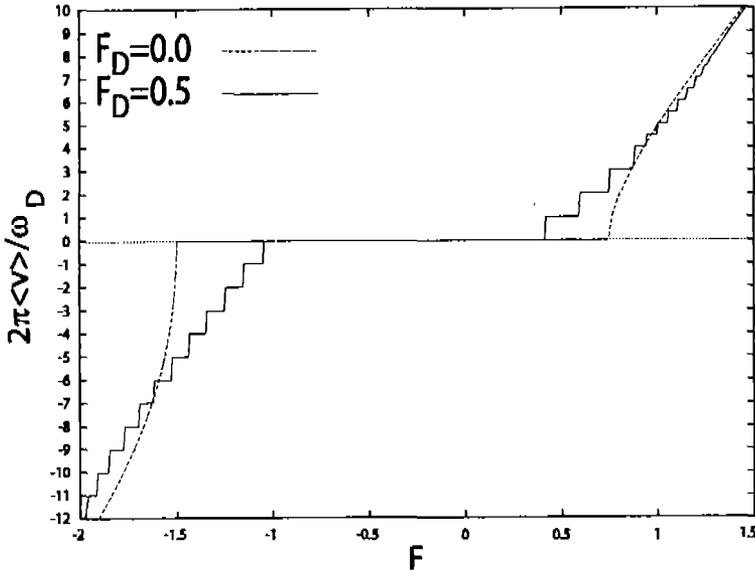


Figura 7.3: velocidad promedio en función de la fuerza constante  $F$ , la línea punteada muestra el caso cuando la fuerza periódica está ausente ( $F_D = 0$ ) y la línea constante muestra el caso cuando la fuerza periódica está actuando sobre la partícula con amplitud  $F_D = 0.5$ , en ambos casos la frecuencia de forzamiento es  $\omega_D = 0.7$

velocidad y frecuencia promedio coinciden.

### Sincronización con una fuerza externa periódica

Como ya hemos visto en el capítulo 6, podemos hablar de sincronización si tenemos a dos osciladores autosostenidos (cada uno con una frecuencia característica bien definida) interactuando. En nuestro caso un oscilador es la fuerza externa periódica  $F_D(t)$  y el otro oscilador es el ratchet inclinado. Por lo tanto, la dinámica del sistema está gobernada por

$$\dot{x} + \frac{d}{dx}V(x) = F + F_D \cos(\omega_D t), \quad (7.11)$$

donde  $F_D$  y  $\omega_D$  son la amplitud y la frecuencia de la fuerza externa respectivamente.

En la figura (7.3) se muestra la velocidad promedio escalada con la frecuencia de forzamiento,  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D$  como función de  $F$ , la línea punteada

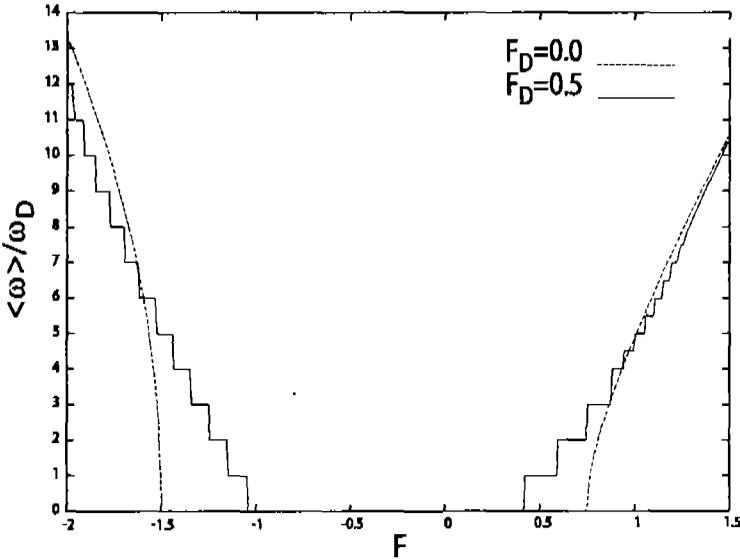


Figura 7.4: Frecuencia promedio en función de la fuerza constante  $F$ , la línea punteada muestra el caso cuando la fuerza periódica está ausente ( $F_D = 0$ ) y la línea constante muestra el caso cuando la fuerza periódica está actuando sobre la partícula con amplitud  $F_D = 0.5$ , en ambos casos la frecuencia de forzamiento es  $\omega_D = 0.7$ .

indica el caso sin forzamiento  $F_D = 0$ , previamente mostrado (figura 7.2), en comparación con el caso con forzamiento  $F_D = 0.5$ . Cuando está presente el forzamiento periódico la corriente normalizada muestra claramente escalones para  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D$ , con valores dados por  $p/q$ , donde  $p$  y  $q$  son números enteros. En muchos casos  $q = 1$  y la corriente promedio normalizada es un entero. En el contexto de uniones Josephson, estos son los escalones de Shapiro [79]. También cabe notar que los umbrales de la inclinación  $F$  para una corriente diferente de cero se recorrieron con respecto al ratchet inclinado. Ahora se necesita una inclinación menor para que existan saltos.

En la figura 7.4 mostramos la frecuencia promedio escalonada con la frecuencia de forzamiento  $\omega_D$ , al igual que la figura anterior podemos ver el enganche de las frecuencias cuando la fuerza externa periódica es diferente de cero  $F_D = 0.5$ , y la línea punteada nos muestra el caso sin forzamiento externo periódico  $F_D = 0$ . Al igual que la corriente, la frecuencia promedio

se escala con la frecuencia de forzamiento  $\omega_D$ , esto es,  $\langle \omega \rangle / \omega_D = p/q$ , donde  $p$  y  $q$  son enteros. Aun que en esta figura queda patente un enganche de frecuencias con  $q = 1$ , no queda claro cuál es el papel de la frecuencia característica  $\omega_0$ , ya que el parámetro que estamos variando es precisamente la inclinación  $F$  que define la  $\omega_0$ , e incluso existe un rango de la inclinación  $F$ , donde hay enganches de frecuencia para  $F_D \neq 0$  y para ese mismo valor de la inclinación  $F$ , la frecuencia característica  $\omega_0$  es cero, por lo que no tiene sentido la sincronización. Para evitar esto, en los siguientes cálculos mantendremos fija la inclinación  $F = 1$ , la cual le corresponde una frecuencia característica  $\omega_0 \simeq 3.41$ . De esta manera tenemos los ingredientes básicos para poder hablar de sincronización del ratchet inclinado con la fuerza periódica.

En la figura 7.5 mostramos la velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D$  en función de la amplitud de la fuerza externa periódica  $F_D$ . En (a) la línea punteada nos muestra el caso sin inclinación  $F = 0$ , y coincide con los cálculos hechos en [18, 19, 20], mostrando una estructura de escalones de una unidad de alto. La línea punteada muestra el ratchet inclinado con  $F = 1$ , el cual también tiene escalones de una unidad de alto. En (b), (c) y (d) mostramos magnificaciones sucesivas de la velocidad promedio escalada la cual exhibe una estructura de escalones autosimilar, típica de una escalera del diablo [80, 81]. Esta estructura detallada ha sido reportada anteriormente [19, 20] para el ratchet sobreamortiguado *sin* inclinación, en este trabajo mostramos esta estructura fractal en la corriente con una escalera del diablo también para el ratchet inclinado y la podemos asociar al fenómeno de sincronización.

Ahora fijémonos en las definiciones de la velocidad y frecuencia promedio

$$\langle v \rangle = \frac{N_k}{t_k},$$

$$\langle \omega \rangle = 2\pi \frac{k}{t_k},$$

donde  $N_k$  y  $k$  están dadas por las definiciones 7.1, de las cuales se puede ver que para  $F > 0$  y  $F_D$  menores que una fuerza crítica  $F_D^c$ , no hay saltos hacia la izquierda, esto es  $N_k^L = 0$ . Para este caso la velocidad promedio y la frecuencia promedio escaladas coinciden, esto es

$$2\pi\langle v \rangle = \langle \omega \rangle. \quad (7.12)$$

En la figura 7.6 mostramos cómo la velocidad y frecuencia promedio escaladas en función de la amplitud de forzamiento  $F_D$  coinciden para un valor de

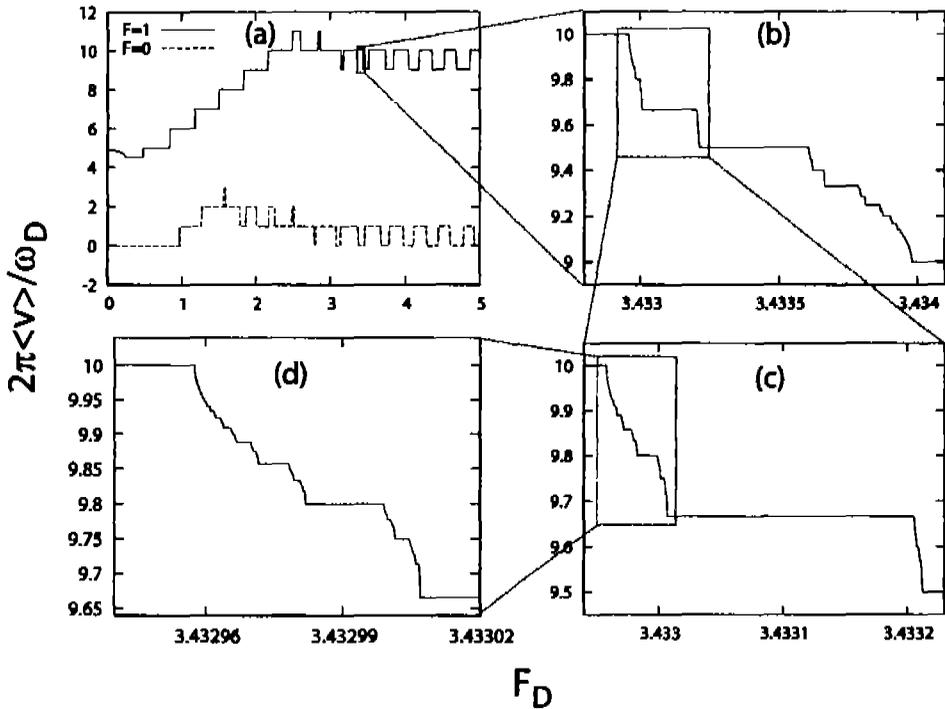


Figura 7.5: Velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D$  en función de la amplitud del forzamiento periódico  $F_D$ . (a) La línea punteada indica el caso cuando la inclinación está ausente  $F = 0$  y la línea continua es el caso con una inclinación  $F = 1$ . (b), (c) y (d) corresponden a magnificaciones sucesivas de la corriente para el ratchet inclinado, mostrando una estructura de escalones autosimilar, típica de una escalera del diablo. En ambos casos usamos  $\omega_D = 0.7$

$F_D < F_D^c$ . Desde luego que esta  $F_D^c$  tiene que ver con la amplitud necesaria para que haya saltos a la izquierda y depende de la frecuencia del forzamiento  $\omega_D$  [68] y de la inclinación  $F$ .

En las siguientes figuras vamos a restringirnos en el régimen  $F_D < F_D^c$ , de tal forma que la frecuencia promedio coincida con  $2\pi$  veces la velocidad promedio, por lo que hablaremos indistintamente de estas dos cantidades según nos convenga y hasta que no se especifique lo contrario.

En la figura 7.7 mostramos en el espacio de parámetros  $F_D$  contra  $\omega_D / \omega_0$

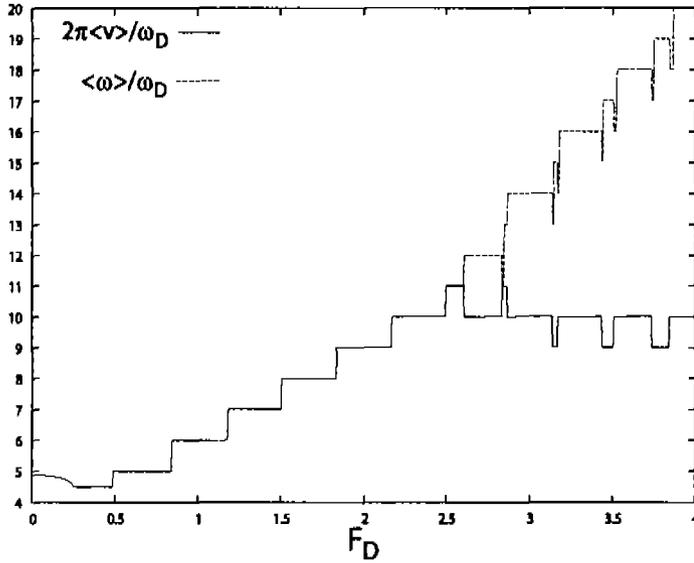


Figura 7.6: La línea continua muestra la velocidad promedio escalada y la línea punteada muestra la frecuencia promedio escalada, en ambos casos contra la amplitud del forzamiento periódico  $F_D$ . Note que estas dos líneas coinciden para un rango de  $F_D$ , debido a que todos los saltos son hacia la derecha.

las zonas de sincronización, llamadas lenguas de Arnold<sup>3</sup>, para los valores de la inclinación  $F = 1$  la cual le corresponde una frecuencia natural del rotor  $\omega_0 \simeq 3.41$ . En estas zonas o regiones, la razón  $\langle \omega \rangle / \omega_D$  (ó  $2\pi \langle v \rangle / \omega_D$ ) es una constante formada por la razón de dos números enteros  $p/q$  (sincronización  $p : q$ ) y localizadas en los valores de  $\omega_D / \omega_0 = q/p$ . De esta forma mostramos el enganche de frecuencias entre la frecuencia promedio del ratchet inclinado y forzado  $\langle \omega \rangle$  con la frecuencia del forzamiento  $\omega_D$  propiamente como un fenómeno de sincronización.

En la figura 7.8 mostramos una gráfica tridimensional de la velocidad promedio escalada en función de  $F_D$  y  $\omega_D / \omega_0$ , para los valores de  $F = 1$  y  $\omega_0 \simeq 3.41$ . Una proyección de esta gráfica en el espacio de parámetros nos da las lenguas de Arnold de la figura 7.7. Cabe aclarar que en esta figura y la anterior sólo están representadas las lenguas de Arnold más anchas, ya que como vimos anteriormente, estas presentan una estructura fina, que por

<sup>3</sup>Sólo mostramos las lenguas de Arnold más notorias.

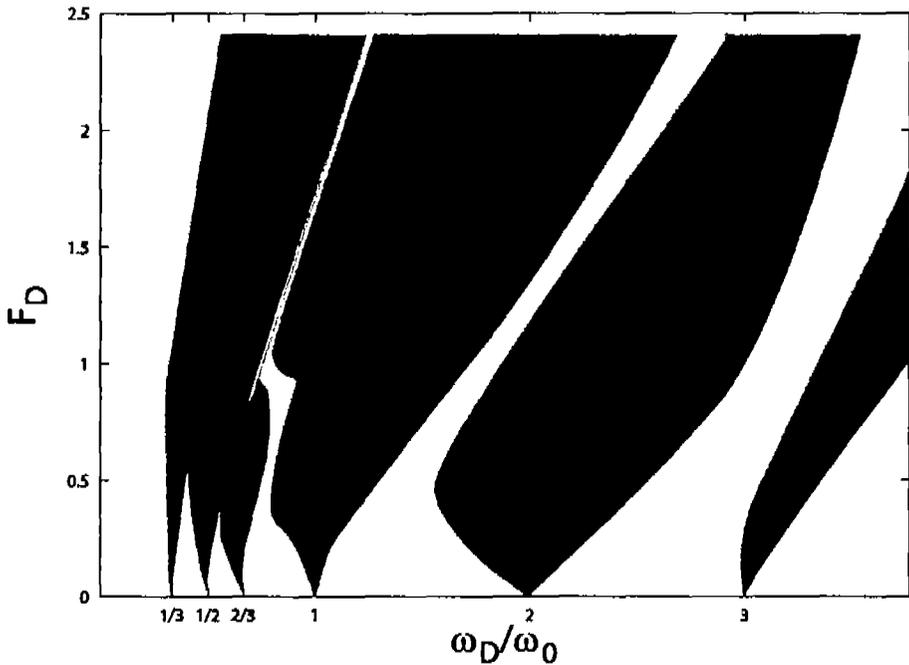


Figura 7.7: Lenguas de Arnold en el espacio de parámetros  $F_D$  contra  $\omega_D/\omega_0$ . Las lenguas de Arnold están localizadas justamente en los valores racionales  $\omega_D/\omega_0 = q/p$ , donde  $p$  y  $q$  son números enteros. Para esta figura se utilizaron los valores de la inclinación  $F = 1$  y su correspondiente frecuencia natural  $\omega_0 \simeq 3.41$ .

cuestión de resolución, no es posible observarlas en estas gráficas.

Además de la proyección de esta gráfica, podemos hacer cortes sobre los ejes. Un corte ya lo hemos mostramos en la figura 7.5, la cual la obtuvimos manteniendo a  $\omega_D$  constante  $\omega_D = 0.7$ . Ahora en la figura 7.9 mostramos un corte de la gráfica tridimensional 7.8 manteniendo a  $F_D$  constante  $F_D = 0.5$ . En esta figura es explícito que la lengua  $p : q$  le corresponde el valor de la velocidad promedio escalada  $p/q$  y las lenguas están localizadas en su origen en los valores  $\omega_D/\omega_0 = q/p$ .

Desde luego que queremos conectar claramente las propiedades de transporte con la sincronización. La propiedad más importante es la corriente o la velocidad promedio, la cual como ya aclaramos, coincide con la frecuencia promedio propiamente escalada. En la figura 7.10 tenemos a la velocidad

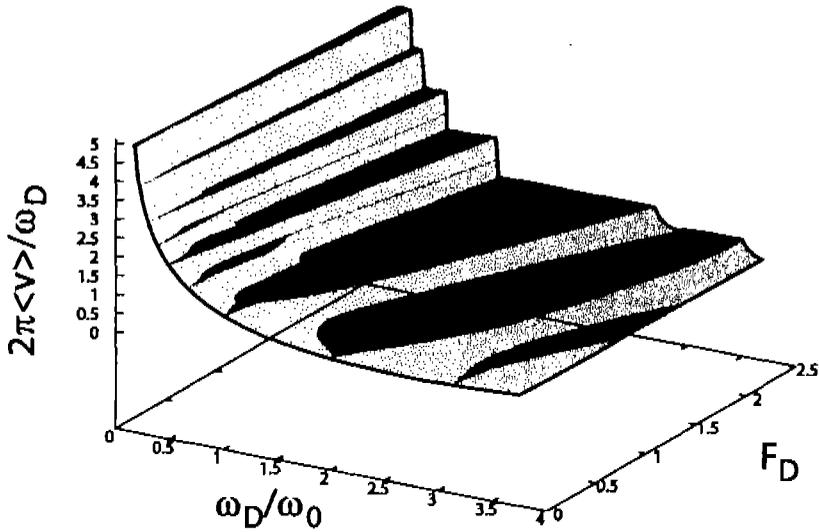


Figura 7.8: Gráfica tridimensional de la velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D$  como función de  $F_D$  y  $\omega_D / \omega_0$ . Una proyección de esta gráfica 3D muestra las lenguas de Arnold en el espacio de parámetros de la figura 7.7. Aquí  $F = 1$  y  $\omega_0 \simeq 3.41$

promedio escalada ahora con  $\omega_0$  la cual coincide con la frecuencia promedio escalada con la misma  $\omega_0$ . Ahora tenemos segmentos rectos en lugar de escalones por que estamos escalando con  $\omega_0$  (el cual es un parámetro fijo para una inclinación  $F$  fija), al lugar de escalar con el parámetro  $\omega_D$  que corre en el eje  $x$ . Note que los picos de la velocidad promedio corresponden a los bordes de las lenguas de Arnold, de tal forma que cuando estamos cruzando una lengua de Arnold (región de sincronización) la corriente incrementa linealmente con  $\omega_D / \omega_0$ ; en el borde derecho la corriente es un maximal y afuera de la lengua la corriente decrece repentinamente hasta que llegamos a la siguiente lengua, en la cual empieza a incrementar otra vez, y así se sigue. En el borde derecho de la lengua de Arnold 1:1 ( $q/p = 1$ ), la corriente tiene su máximo, seguido por el segundo pico más grande en el borde derecho de la lengua 1:2 ( $q/p = 2$ ). Los picos de la corriente dependen tanto del ancho de las lenguas de Arnold como de la pendiente de los segmentos lineales. La pendiente de los segmentos lineales es precisamente el valor  $q/p$  que etiqueta a la lengua de Arnold  $p : q$ . Entonces los picos de la corriente están asociados al fenómeno de la

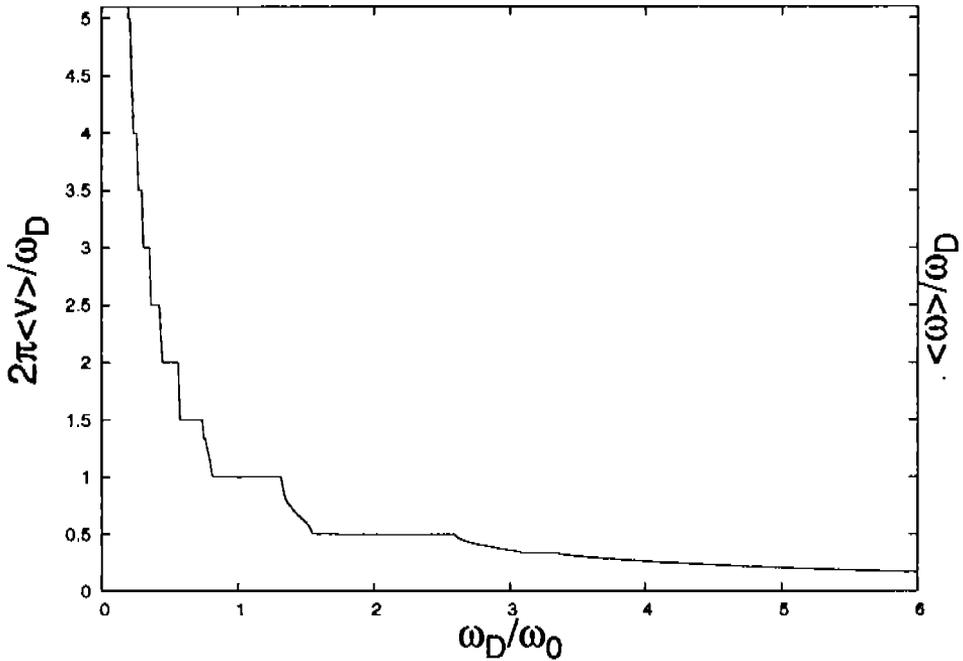


Figura 7.9: Corte de la gráfica 3D 7.8 manteniendo a  $F_D$  constante. Aquí vemos explícitamente que la lengua de Arnold  $p : q$ , corresponde al valor de la velocidad promedio escalada  $p/q$ . Aquí  $F = 1$ ,  $\omega_0 \simeq 3.41$  y  $F_D = 0.5$ .

sincronización, esto es a la salida de las zonas de sincronización.

Cabe hacer notar que en la figura 7.10 para  $\omega_D$  grandes la frecuencia promedio tiende a la frecuencia natural  $\omega_0$ . Si estamos en lengua  $p : q$ , esto es,  $\langle \omega \rangle = (p/q)\omega_D$ , y para los valores del forzamiento externo  $\omega_D = (q/p)\omega_0$ , obtenemos que  $\langle \omega \rangle / \omega_0 = 1$ . Esto es, si la lengua  $p : q$  sigue centrada en  $\omega_D / \omega_0 = q/p$ , entonces en la gráfica 7.10 la corriente escalonada con  $\omega_0$  cruza la línea  $\langle \omega \rangle / \omega_0 = 1$  justamente en  $\omega_D / \omega_0 = q/p$ .

En la figura 7.11 mostramos en (a) la lengua de Arnold 1:1 y tres puntos: 1 ( $\omega_D / \omega_0 = 1.0$ ) centrado en la lengua, 2 ( $\omega_D / \omega_0 = 3.3251$ ) en el borde derecho de la Lengua y 3 ( $\omega_D / \omega_0 = 3.328$ ) afuera de la lengua cerca del borde. En (b) graficamos la diferencia de la fase lineal (7.2) con la fase del forzamiento  $\phi_D = \omega_D t$ , en función del tiempo  $t / \tau_D$ , donde  $\tau_D = 2\pi / \omega_D$  es el periodo del forzamiento. Podemos ver que para los puntos 1 y 2 que están dentro de la región de sincronización la diferencia de fase es constante, siendo cero sólo

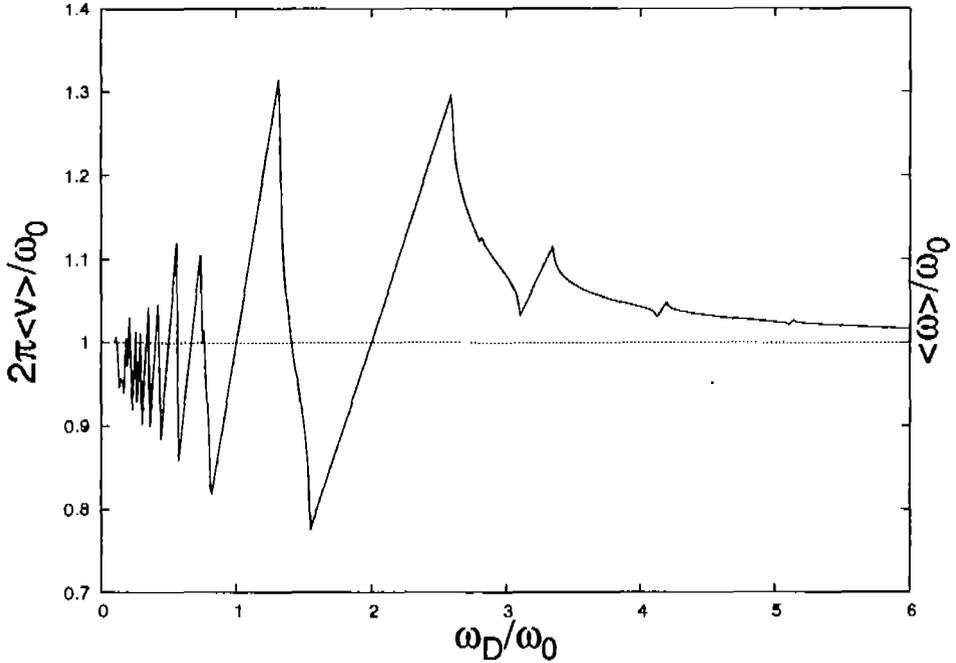


Figura 7.10: Velocidad promedio escalada ahora con  $\omega_0$  y la frecuencia promedio escalada con  $\omega_0$  también, como función de  $\omega_D/\omega_0$ . Los segmentos rectos corresponden a los escalones en la figura 7.9, debido a la sincronización, los máximos de la velocidad promedio están localizados en los bordes derechos de las lenguas de Arnold. Aquí otra vez  $F = 1$ ,  $\omega_0 \simeq 3.41$  y  $F_D=0.5$ .

para el punto 1 que está justamente en el centro, para el punto 3 la dinámica de la diferencia de fase es intermitente: la dinámica aparece con saltos repentinos de  $2\pi$  intercalados con épocas de un comportamiento casi sincronizado. Cabe mencionar que este comportamiento cualitativo de la dinámica de la diferencia de fase para los puntos de adentro y afuera de la lengua de Arnold es general para el fenómeno de sincronización [12].

Hasta ahora hemos estudiado la sincronización en el ratchet determinista, sin embargo, se sabe [12] que este fenómeno está presente incluso si el sistema tiene una componente ruidosa pequeña (comparado con la altura del potencial  $m\gamma D/U_r \ll 1$ ). Para ver este fenómeno adicionamos una componente ruidosa  $\sqrt{2D}\xi(t)$  a la ecuación de movimiento (7.10), donde  $\xi(t)$  representa un ruido blanco Gaussiano delta correlacionado y  $D$  es el coeficiente de di-

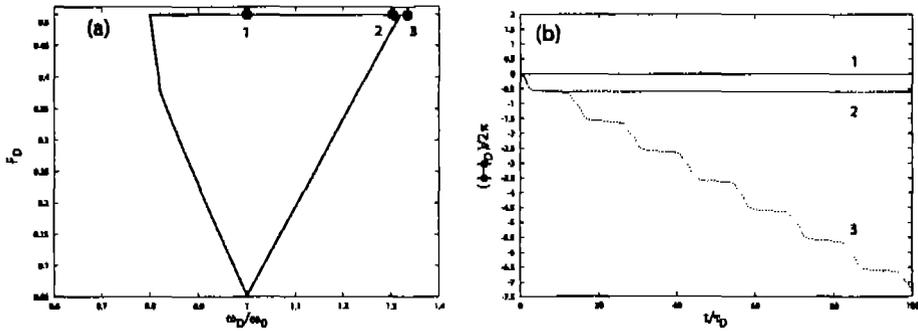


Figura 7.11: En la figura (a) mostramos la lengua de Arnold 1:1 resaltando 3 puntos en el espacio de parámetros: 1 ( $\omega_D/\omega_0=1.0$ ), 2 ( $\omega_D/\omega_0=1.3251$ ) y 3 ( $\omega_D/\omega_0=3.328$ ), todos con  $F_D=0.5$ . En la figura (b) mostramos la diferencia entre la fase lineal (7.2) y la fase de la fuerza externa periódica  $\phi_D = \omega_D t$  en función del tiempo  $t/\tau_D$ , con  $\tau_D = 2\pi/\omega_D$ , para los puntos 1, 2 y 3.

fusión adimensional. Luego podemos resolver la ecuación de Langevin con el algoritmo de la sección 3.3.

En la figura 7.12 se muestra la velocidad promedio (ahora es un promedio temporal mas un promedio sobre un ensamble de 400 partículas) escalada en función de la frecuencia del forzamiento escalada  $\omega_D/\omega_0$ , con una inclinación de  $F = 1$  y una amplitud del forzamiento  $F_D = 1.0$ . En la línea punteada se muestra el caso determinista ( $D = 0$ ). En la línea continua se muestra el caso con  $D = 0.01$ . Podemos observar que el fenómeno de sincronización se mantiene en las lenguas 1:1 y 1:2, incluso en la presencia de ruido.

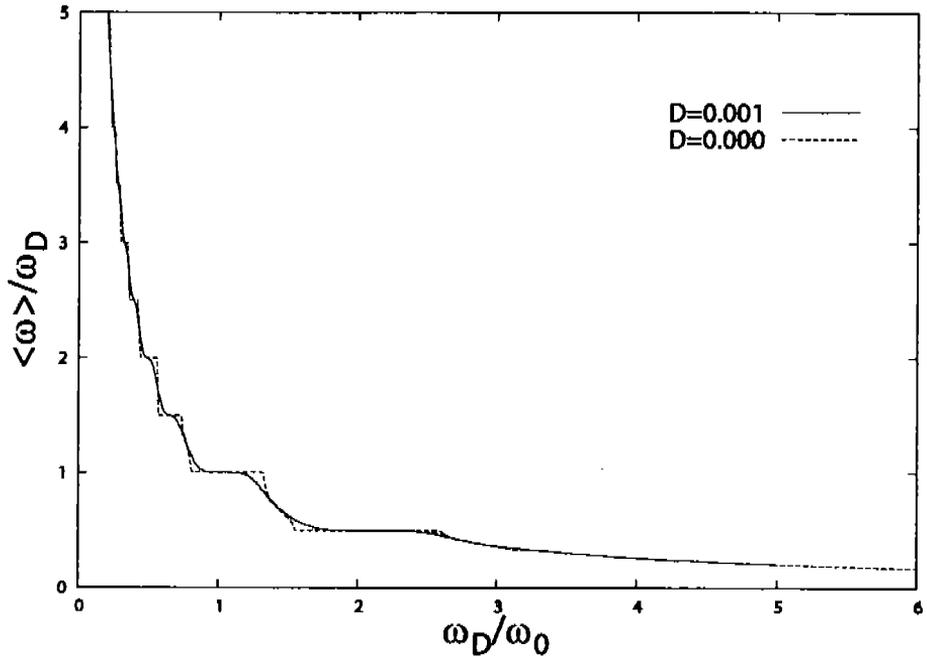


Figura 7.12: Velocidad promedio escalada en función de la frecuencia del forzamiento escalada  $\omega_D/\omega_0$ , con una inclinación  $F = 1.0$  y una amplitud de forzamiento  $F_D = 1.0$ . En la línea punteada se muestra el caso determinista ( $D = 0.0$ ). En la línea continua se muestra el caso con ruido  $D = 0.001$ .

# Capítulo 8

## Sincronización del Ratchet inercial

En la mayoría de los trabajos sobre motores brownianos se estudia sólo la dinámica sobreamortiguada, sin embargo, existe interés por el efecto de la inercia en los ratchets, en particular en el caso determinista [16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 68, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96]. Estos ratchet tienen en general una dinámica caótica que altera sus propiedades de transporte.

La dinámica inercial y determinista (temperatura cero) de una partícula de masa  $m$  en presencia del potencial ratchet y de una fuerza externa  $f(t)$  es

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} = -\frac{dV(x)}{dx} + F(t), \quad (8.1)$$

donde  $\gamma$  es el coeficiente de fricción dividido por la masa,  $F(t)$  es una función periódica del tiempo, de periodo  $T_D = 2\pi/\omega_D$ , dada por

$$F(t) = F_D \cos(\omega_D t). \quad (8.2)$$

El potencial ratchet  $V(x)$  está dado por

$$V(x) = -V_0 \left[ \sin \left( 2\pi \frac{x - x_0}{L} \right) + \frac{1}{4} \sin \left( 4\pi \frac{x - x_0}{L} \right) \right] + V_1, \quad (8.3)$$

donde  $L$  es el periodo del potencial  $V(x + L) = V(x)$ ,  $V_1$  y  $x_0$  son dos constantes tal que el mínimo del potencial se encuentra en el origen. Cuyos valores son  $V_1/V_0 \approx 1.1$  y  $x_0/L \approx -.19$ .

Es conveniente hacer un cambio de variable para trabajar con una ecuación adimensional. Definamos las siguientes cantidades adimensionales

$$x' = x/L, \quad t' = \gamma t, \quad (8.4)$$

$$(8.5)$$

$$\omega'_D = \frac{\omega_D}{\gamma}, \quad F'_D = \frac{F_D}{mL\gamma^2}.$$

$$V'_0 = \frac{V_0}{mL^2\gamma^2}, \quad V'_1 = \frac{V_1}{mL^2\gamma^2}. \quad (8.6)$$

Entonces, la ecuación de movimiento adimensional, después de quitar las primas a las variables queda como

$$\ddot{x} + \dot{x} = -\frac{dV(x)}{dx} + F_D \cos(\omega_D t), \quad (8.7)$$

donde el potencial adimensional es

$$V(x) = -V_0 \left[ \sin(2\pi(x - x_0)) + \frac{1}{4} \sin(4\pi(x - x_0) - C) \right], \quad (8.8)$$

con  $C \approx 1.1$ . En la fig. 8.1 se muestra una gráfica del potencial ratchet.

Queremos saber si existe la posibilidad de una dinámica caótica. Para esto revisaremos algunos conceptos generales de sistemas dinámicos caóticos [97].

En general es usual llamar “caos” a la evolución temporal irregular e impredecible de un sistema no lineal determinista, a tiempos arbitrariamente largos. Una característica importante es que el sistema no repita su comportamiento; a pesar de esta falta de regularidad los sistemas caóticos siguen ecuaciones determinista como las de la segunda ley de Newton.

Un fenómeno importante de la dinámica caótica es la sensibilidad a condiciones iniciales, como, por ejemplo, dos sistemas idénticos, cada uno con condiciones iniciales ligeramente diferentes, debido a errores asociados a la medición. En un sistema caótico el error crecerá exponencialmente en el tiempo, por lo que el estado del sistema se volverá prácticamente impredecible después de un tiempo relativamente corto. El hecho de que la capacidad de predicción se vea limitada en sistemas caóticos nos recuerda a los sistemas estocásticos (un sistema sujeto a fuerzas externas azarosas), sin embargo, el

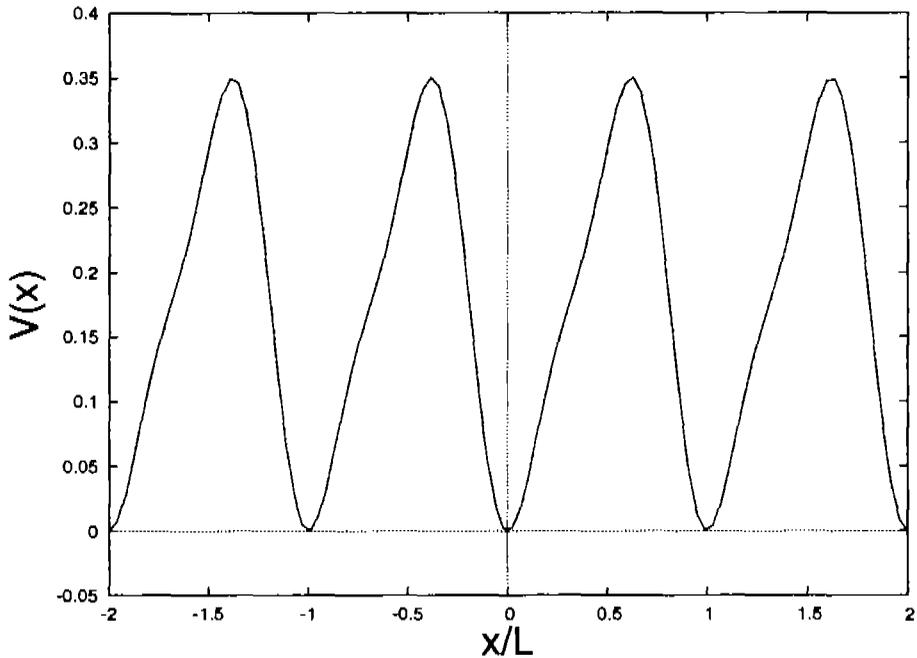


Figura 8.1: Potencial ratchet adimensional (8.8)

origen de la irregularidad es totalmente diferente. Para el caos la irregularidad es parte de la dinámica intrínseca del sistema, no de influencias externas azarosas.

Consideremos un sistema dinámico determinista, para el cual las condiciones necesarias para la existencia de un movimiento caótico son:

- Sensibilidad ante condiciones iniciales (divergencia exponencial de trayectorias) a tiempos cortos.
- Confinamiento del movimiento a una región finita del espacio fase de  $x$  y  $\dot{x}$ .
- Movimiento no periódico a largo plazo.

Para cumplir con estas tres condiciones en un sistema dinámico gobernado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en el continuo, y teniendo en cuenta las limitaciones que impone el teorema de existencia y unicidad necesitamos al menos 3 variables. Ya que en un espacio de tres

dimensiones podemos “estirar” y “doblar” las órbitas sin que se intercepten en un punto. Es como si el caos mezclara las orbitas en el espacio fase de la misma manera que un panadero mezcla la masa al cortarla, primero estira la masa (divergencia) y luego la dobla (confinamiento).

A pesar de que en algunas ocasiones es posible utilizar aproximaciones linealizadas, generalmente las ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden son muy difíciles o incluso imposibles de resolver analíticamente, por lo que su solución requiere métodos numéricos cuya implementación práctica demanda el uso de una computadora.

Podemos observar que la ecuación (8.7) cumple con las condiciones antes mencionadas, ya que esta ecuación es equivalente a tres ecuaciones diferenciales de primer orden debido a la presencia explícita de la función  $F(t)$ , y como el potencial ratchet es no lineal es posible la existencia de una dinámica caótica. Si el término de inercia estuviera ausente, entonces el sistema dinámico no puede ser caótico.

## 8.1. Inversión de corriente y diagrama de bifurcación

Consideremos el sistema dinámico (8.7), este sistema está descrito por una ecuación diferencial no lineal de segundo orden, y no es posible obtener una solución analítica, por lo que se usará el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden para obtener una solución numérica del sistema [98].

Existen varias herramientas para analizar la dinámica caótica de un sistema, entre ellas están la gráfica de recurrencia y el diagrama de bifurcación.

La gráfica de recurrencia se construye viendo el espacio fase estroboscópicamente. Para sistemas con un forzamiento externo periódico, la frecuencia estroboscópica coincide con la frecuencia del forzamiento.

La gráfica de recurrencia puede proporcionar información de la razón entre la frecuencia estroboscópica  $\omega_s$ , y la frecuencia natural de la dinámica  $\omega_0$ . Por ejemplo, si un movimiento tiene una frecuencia natural  $\omega_0 = 2\omega_s$ , la gráfica de recurrencia tendrá sólo dos puntos. En general si la relación es  $\omega_0/\omega_s = p/q$ , donde  $p/q$  es racional, entonces hay  $q$  puntos, y el orden de su aparición es tal que, cuando un punto dado aparece en el diagrama, los siguientes  $q - (p + 1)$  son saltados. Con ayuda de la gráfica de recurrencia podemos diferenciar entre orbitas periódicas y caóticas, y podemos obtener

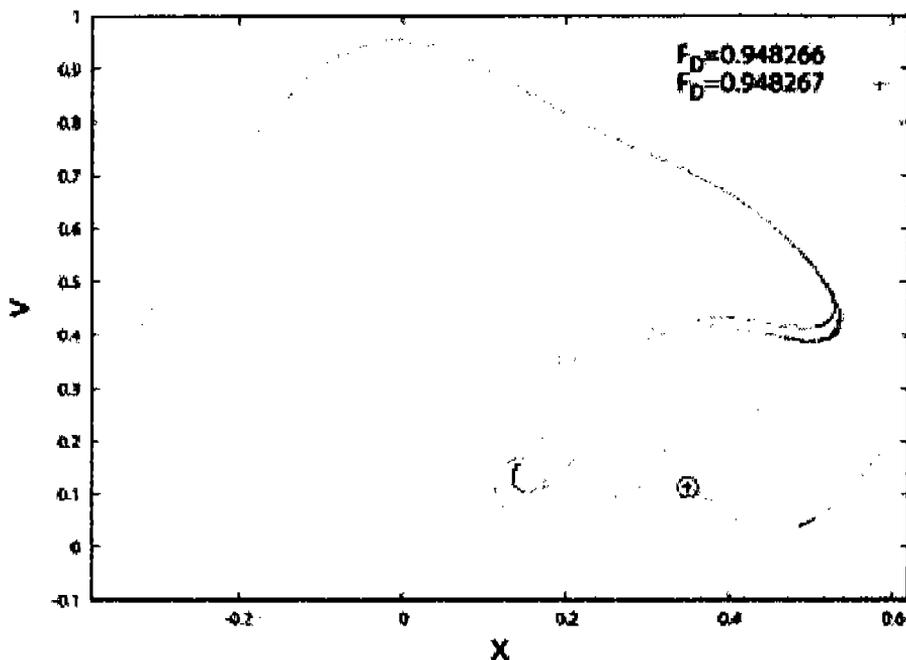


Figura 8.2: Sección de Poincaré de la ecuación (8.7) para  $\omega_D=0.895$ . En puntos podemos observar un atractor caótico para  $F_D=0.948266$ , con cruces vemos un atractor periódico (de periodo 1) para  $F_D=0.948267$ .

el diagrama de bifurcación en función de la amplitud  $F_D$ .

En la figura 8.2 se muestra la grafica de recurrencia representada en el plano  $(x, v)$ , de la ecuación (8.7) después de un transiente, para el valor de  $\omega_D=0.895$  y con condiciones iniciales de  $x(0) = 0, v(0) = 0$ . Para  $F_D=0.948266$ , la gráfica de recurrencia nos muestra un atractor caótico y para un valor ligeramente diferente de  $F_D$  ( $F_D=0.948267$ ) el atractor es periódico. Para obtener un panorama más general de la dinámica sobre un rango de uno de los parámetros es necesario el diagrama de bifurcación. Con el diagrama de bifurcación podemos comparar simultáneamente el comportamiento periódico o caótico del sistema.

Como ya lo indicamos anteriormente, cuando el valor de un parámetro cambia ligeramente, puede cambiar la dinámica. Este cambio depende de las condiciones iniciales. En dinámica cuando el número de soluciones de una ecuación diferencial cambia (de una a dos o varias soluciones estables) cuando

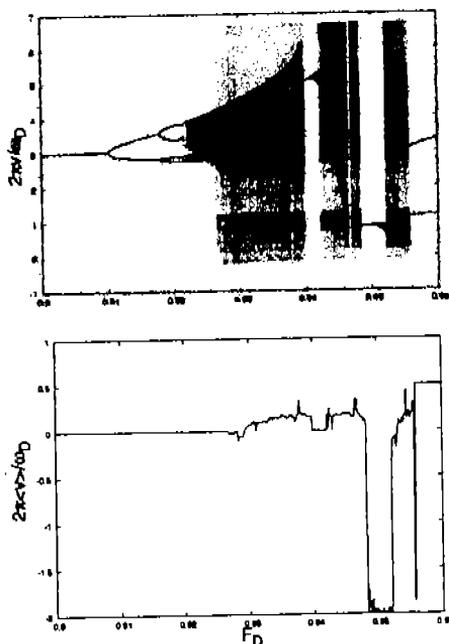


Figura 8.3: Para  $\omega_D=0.895$ . se muestra en la figura superior el diagrama de bifurcación, en la figura inferior vemos el promedio temporal de la velocidad normalizado por la frecuencia externa.

variarnos un parámetro del sistema se llama *bifurcación*. Para nuestro caso podemos detectar bifurcaciones graficando los valores de  $v$  de la gráfica de recurrencia contra la amplitud de forzamiento  $F_D$ . Este tipo de gráficas se llaman *diagramas de bifurcación*.

En el ratchet inercial se observa un fenómeno interesante: inversiones de corriente [21, 22, 24, 25, 85, 87, 84, 99, 100, 101, 102], estas inversiones de corrientes fueron explicadas en [22]. Actualmente el ratchet inercial tiene mucha importancia por cuenta propia debido a experimentos recientes en vortices y SQUID ratchets [92, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110].

En el artículo [22], se estudia la relación entre el diagrama de bifurcación y la velocidad promedio y se identifica el origen de las inversiones de corriente como una bifurcación del régimen caótico a uno periódico. En la figura superior 8.3 se muestra el diagrama de bifurcación para  $\omega_D = 0.895$  para un rango de  $F_D$ . Podemos observar una ruta al caos por doblamiento de periodo y después de esta región caótica hay una bifurcación que toma

lugar al valor crítico  $F_D^c \approx 0.9482665$ , es en este punto de bifurcación donde ocurre la inversión de corriente. Después de este punto de bifurcación una ventana periódica emerge, con una órbita de periodo 1. En la figura inferior 8.3 se muestra el promedio temporal de la velocidad (7.5), normalizado con la frecuencia externa dividida por  $2\pi$  (que es el número de oscilaciones de la fuerza externa por unidad de tiempo), con el mismo rango que el diagrama de bifurcación. Podemos observar una transición abrupta justamente en el punto de bifurcación que da origen a una inversión de corriente.

Aunque ya se ha abordado el enganche de fase en ratchets en otros trabajos [85, 86], no es clara la definición de fase y su relación con la sincronización. Por lo que en la siguiente sección abordaremos la sincronización en ratchets propiamente caracterizada por las lenguas de Arnold.

## 8.2. Resultados numéricos

Siguiendo la misma línea que en el caso sobreamortiguado, utilizamos la misma definición de fase de la sección 7.1 (ecuación (7.2)). En esta sección resolveremos numéricamente la ecuación de movimiento del ratchet inclinado y mecido

$$\ddot{x} + \dot{x} = -\frac{dV(x)}{dx} + F + F_D \cos(\omega_D t), \quad (8.9)$$

donde  $V(x)$  es el potencial ratchet,  $F$  es una fuerza constante,  $F_D$  es la amplitud del forzamiento periódico y  $\omega_D$  es la frecuencia del forzamiento.

Usamos un algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden [98] para resolver la ecuación diferencial (8.9). Tomaremos como condiciones iniciales que al tiempo  $t = 0$  la posición  $x(t = 0) = 0$  y la velocidad  $v(t = 0) = 0$ . Una vez que obtenemos la trayectoria completa, identificamos al conjunto de tiempos discretos  $\{t_k\}$  cuando la partícula cruza las posiciones  $x_i$  por primera vez. Con estos eventos marca, podemos utilizar las definiciones de la sección 7.1. Calculamos la frecuencia promedio a partir de (7.3) y la velocidad promedio de (7.5). Otra vez fijaremos la amplitud del potencial  $V_0 = 1/2\pi$ . Como ya se ha mencionado antes, esta definición es muy general y puede ser usada en sistemas caóticos o incluso con sistemas que contienen ruido.

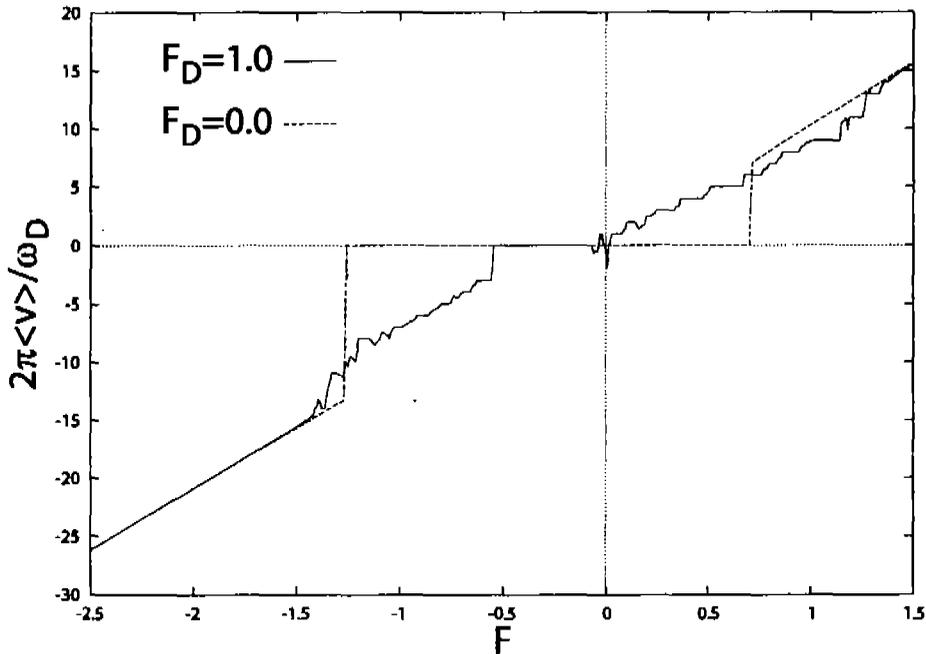


Figura 8.4: Velocidad promedio como función de la inclinación  $F$ . La línea punteada muestra el caso sin forzamiento periódico  $F_D = 0$  (rotor). La línea continua muestra el caso con forzamiento periódico  $F_D=1.0$  y  $\omega_D=0.6$ .

### 8.2.1. Ratchet inclinado inercial como un rotor

Consideremos ahora la dinámica determinista inercial del ratchet inclinado

$$\ddot{x} + \dot{x} = -\frac{dV(x)}{dx} + F, \quad (8.10)$$

donde  $V(x)$  es el potencial ratchet (8.8) y  $F$  es una fuerza constante.

En la figura 8.4 se muestra en la línea punteada la dinámica (8.10). Al igual que el caso sobreamortiguado existen valores críticos  $F_c^R \simeq 0.72$  y  $F_c^L \simeq -1.27$ , para valores de  $F$  entre estos dos valores críticos la velocidad es cero, sin embargo a diferencia del caso sobreamortiguado, la curva tiene una discontinuidad en estos valores críticos debido a la inercia.

En la figura 8.5 se muestra en la línea punteada la frecuencia promedio escalada en función de la inclinación  $F$ , esto es, la frecuencia “natural” o

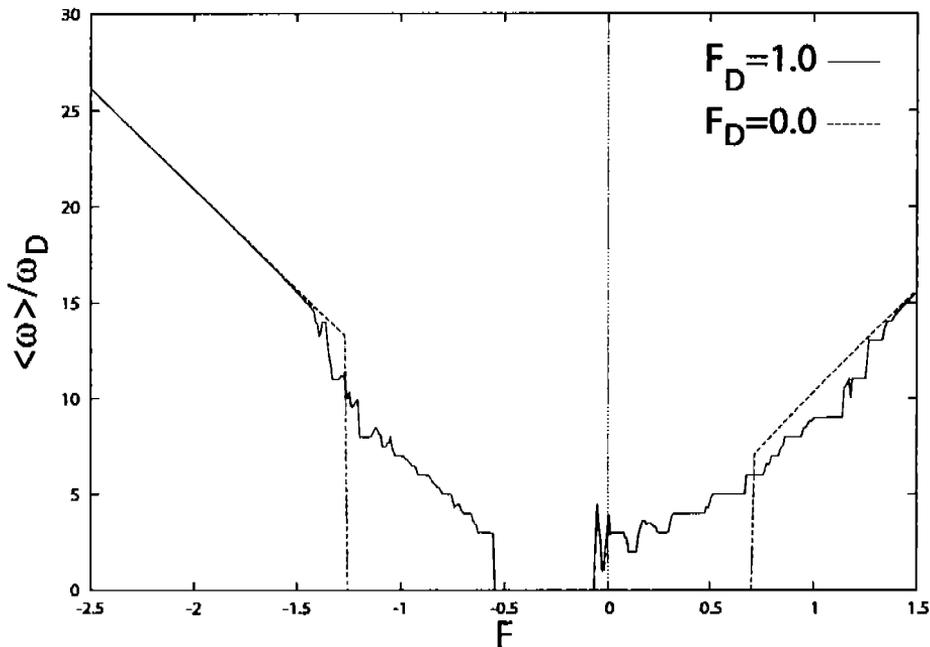


Figura 8.5: frecuencia promedio como función de la inclinación  $F$ . La línea punteada muestra el caso sin forzamiento periódico  $F_D = 0$  (rotor), la cual da el valor de la frecuencia “natural” o característica del rotor para una  $F$  fija. La línea continua muestra el caso con forzamiento periódico  $F_D = 1.0$  y  $\omega_D = 0.6$ .

característica del rotor  $\omega_0$ . Por ejemplo, para una inclinación de  $F = 1$ , le corresponde una frecuencia característica  $\omega_0 \simeq 6.19974321$ .

### 8.2.2. Sincronización del ratchet inclinado con inercia con una fuerza externa periódica.

Teniendo nuestro rotor forzado (ratchet inclinado) con una frecuencia característica  $\omega_0$ , podemos sincronizarlo con una fuerza externa periódica. Lo que implica que los valores de la frecuencia y velocidad propiamente escalada con la frecuencia de forzamiento  $\omega_D$ , pueden tomar valores  $p/q$ , donde  $p$  y  $q$  son dos enteros.

En la figura 8.5 se muestra en la línea continua la frecuencia promedio

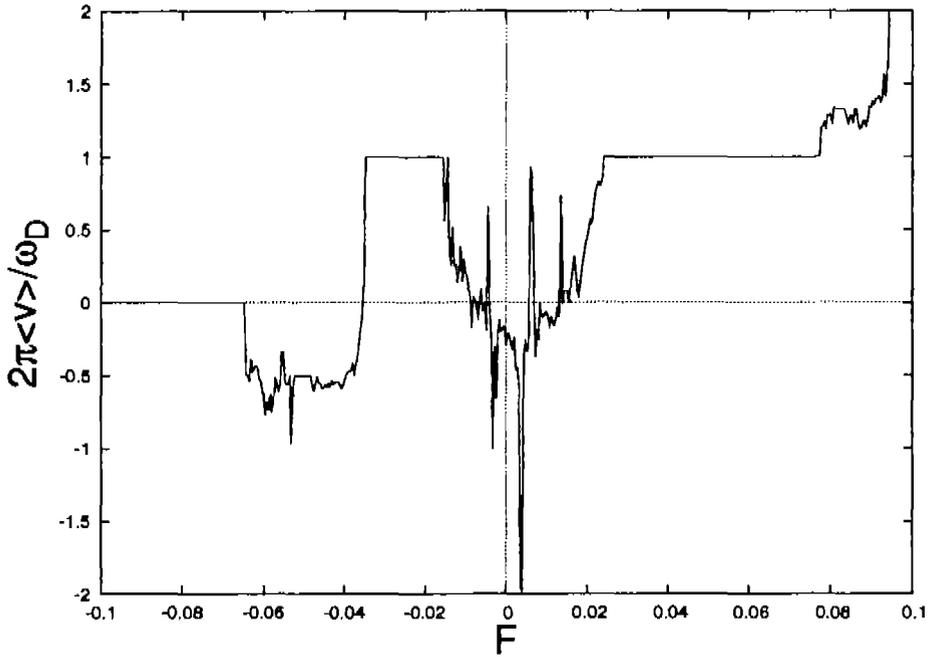


Figura 8.6: Acercamiento de la figura 8.4. La velocidad promedio es positiva para valores de la inclinación  $F$  negativos.

escalada  $\langle \omega \rangle / \omega_D$  en función de la inclinación  $F$ , para valores de la amplitud de forzamiento  $F_D = 1$  y la frecuencia de forzamiento  $\omega_D = 0.6$ . Al igual que la velocidad promedio, la frecuencia promedio escalada muestra escalones donde  $\langle \omega \rangle / \omega_D = p/q$ , con  $p$  y  $q$  enteros. Mostrando claramente un enganchamiento de frecuencias. Sin embargo, como estamos variando la inclinación  $F$ , no queda claro la relación con la frecuencia característica  $\omega_0$  de rotor con la sincronización. Por lo que en los siguientes cálculos fijaremos la inclinación  $F = 1$  con su correspondiente frecuencia  $\omega_0 \simeq 6.19974321$ .

En los siguientes cálculos nos enfocaremos en la velocidad promedio por ser una cantidad directamente relacionada con el transporte al contrario de la frecuencia promedio, recordando que en general  $2\pi\langle v \rangle \neq \langle \omega \rangle$ . En la figura 8.4 se muestra en la línea continua la velocidad escalada  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D$  en función de la inclinación  $F$ , para una amplitud del forzamiento  $F_D = 1$  y  $\omega_D = 0.6$ . Se puede observar claramente escalones donde  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D = p/q$ , donde  $p$  y  $q$  son enteros. Sin embargo, a diferencia del caso sobreamortiguado, estos escalones

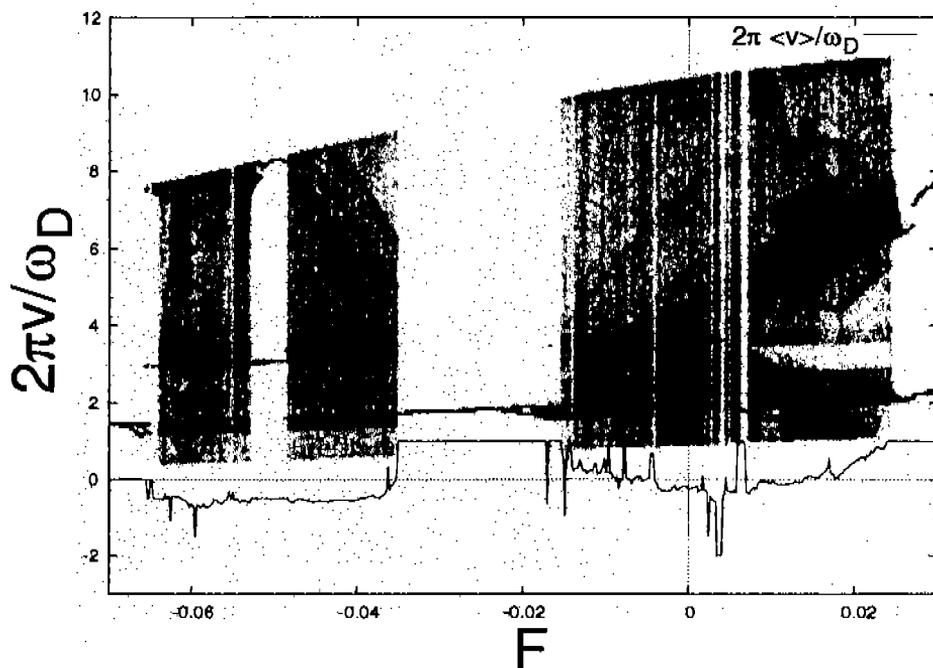


Figura 8.7: Diagrama de bifurcación como función de la inclinación  $F$ . La línea representa a la fig. 8.6.

no se mantienen en todo el rango de  $F$ . Podemos observar que cerca de  $F = 0$ , para  $F$  negativas la velocidad promedio es positiva, a este fenómeno se le llama movilidad negativa. En la figura 8.6 se muestra un acercamiento de esta zona, este efecto ya ha sido estudiado para partículas brownianas interactuantes [111, 112, 113, 114] y para una partícula browniana [115, 116, 117, 118, 119, 74, 120, 121, 122] y para el caso inercial [95, 123].

En la figura 8.7 se muestra el diagrama de bifurcación en función de la inclinación  $F$ , en el mismo rango que 8.6. Podemos observar que alrededor del valor  $F = -0.035$  existe una bifurcación de una órbita caótica a una periódica que es la responsable de la inversión de corriente de negativa a positiva. La corriente es constante y positiva por un rango de  $-0.035 \leq F \leq -0.0175$  dando origen al fenómeno de movilidad negativa. También se observa movilidad negativa para  $F \approx 0.005$ . Sin embargo este fenómeno no es completamente general, por ejemplo en  $F = -0.05$  no hay inversión de corriente aun que hay

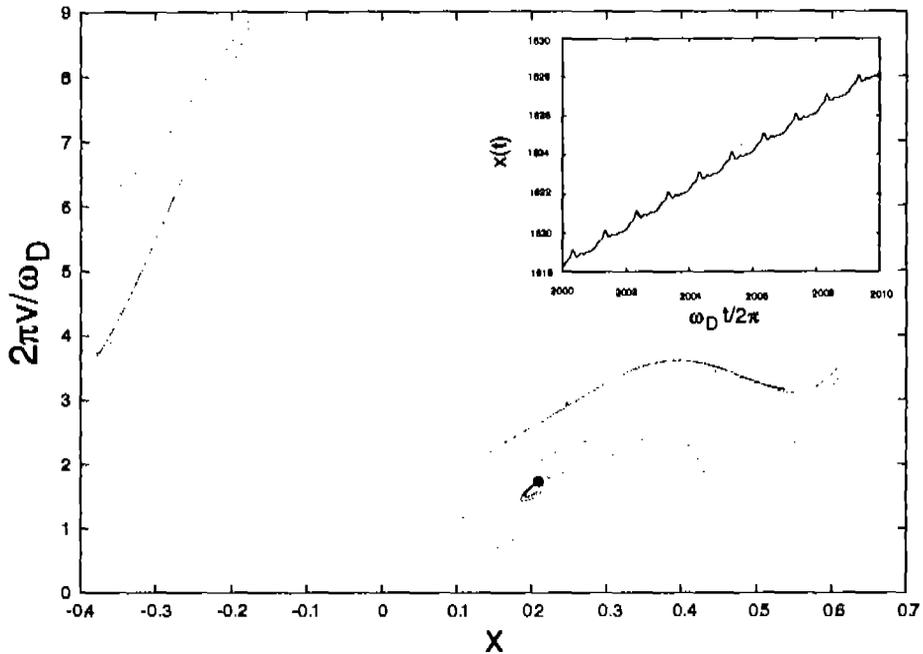


Figura 8.8: Atractor caótico alrededor del punto de bifurcación  $F = -0.035$  y el círculo representa el atractor periódico para  $F = -0.035122$ . En el recuadro se muestra una trayectoria típica subiendo el ratchet inclinado, aunque la inclinación es negativa, la corriente es positiva.

una bifurcación de una órbita caótica a una periódica.

En la fig. 8.8 se muestra el atractor caótico en el punto de bifurcación  $F = -0.035$  y el atractor periódico se muestra en un círculo para  $F = -0.035122$ . El recuadro muestra una trayectoria típica de la partícula subiendo (corriente positiva) para la inclinación negativa de  $F = -0.035122$ , característico de la movilidad negativa. Estos resultados fueron presentados en el artículo [124].

En la figura 8.9, se muestra en la gráfica inferior a la velocidad promedio escalada en función de la amplitud de forzamiento  $F_D$ , para una frecuencia de forzamiento  $\omega_D/\omega_0 = 0.1$  y una inclinación de  $F = 1$  (que le corresponde una  $\omega_0 \simeq 6.19974321$ ). Al igual que en el caso anterior existen escalones para valores de la velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v \rangle/\omega_D$  en  $p/q$ , con  $p, q$  enteros. Sin embargo hay intervalos para los cuales la corriente varía mucho, lo cual puede indicar la existencia de caos.

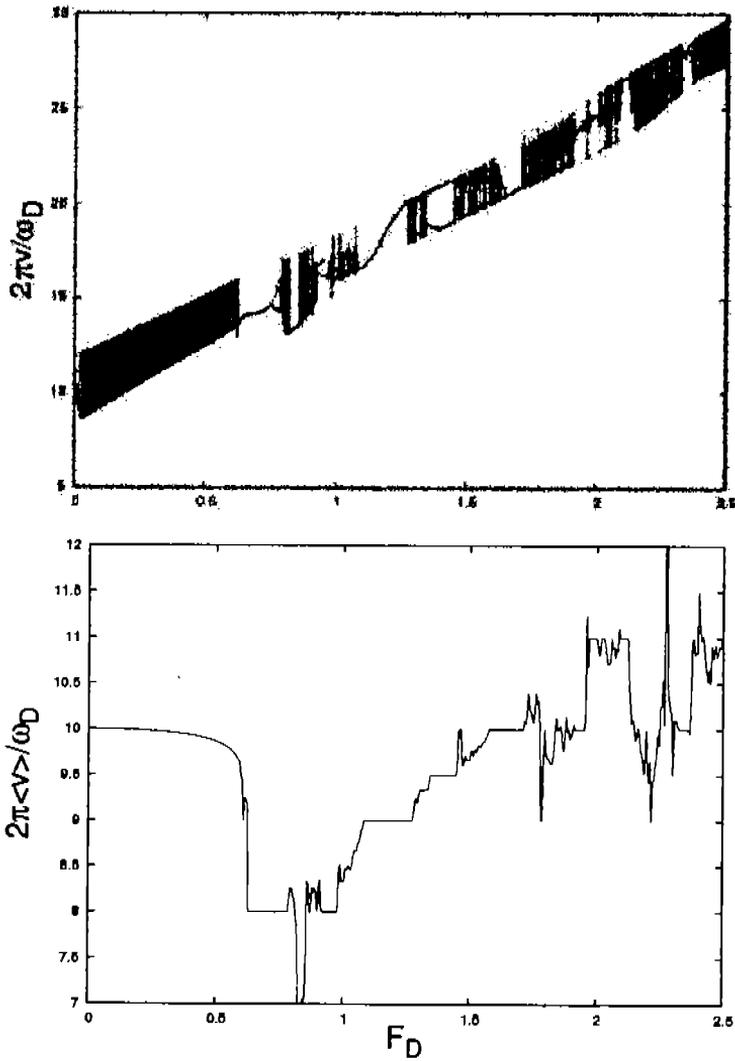


Figura 8.9: Se muestra en la figura superior el diagrama de bifurcación y en la figura inferior vemos el promedio temporal de la velocidad escalada con la frecuencia externa en función de la amplitud de forzamiento  $F_D$ , para una frecuencia  $\omega_D/\omega_0=0.1$ , para una inclinación  $F=1$ .

Seguendo el artículo [22], se calcula el diagrama de bifurcación y se muestra en la gráfica superior de la figura 8.9. Podemos observar que las regiones donde hay caos, la velocidad promedio escalada no está enganchada a  $p/q$ . Y en las regiones del diagrama de bifurcación donde la órbita es periódica, la velocidad promedio escalada está enganchada.

En el diagrama de bifurcación de la figura 8.9, para  $F_D < 0.5859$  pareciera que existe caos, sin embargo, si observamos la misma región en la figura de abajo, el comportamiento de la velocidad promedio escalada es más bien constante, debido a que los atractores en ese intervalo no son caóticos. En la figura 8.10, mostramos la gráfica de recurrencia para dos valores de  $F_D$ . En la figura superior se muestra la gráfica de recurrencia para  $F_D = 0.5$ , podemos ver que el atractor es cuasiperiódico<sup>1</sup>. En la figura inferior se muestra la gráfica de recurrencia para  $F_D = 1.75$ , en este caso el atractor es caótico. Por lo tanto podemos diferenciar tres zonas en el diagrama de bifurcación de la figura 8.9, la primera ( $F_D < 0.5859$ ) corresponde a una serie de atractores cuasiperiódicos, después de esta zona se intercalan zonas de atractores caóticos con atractores periódicos. El cambio entre estos atractores corresponde a un cambio abrupto en la corriente promedio, se puede observar que para atractores periódicos la corriente promedio escalada está enganchada con valores  $p/q$ , con  $p, q$  enteros.

En la figura 8.11 se muestra la velocidad promedio escalada en función de la amplitud  $F_D$ . En (b), (c) y (d) se muestran sucesivas ampliaciones de (a). Podemos observar que aunque existe caos, hay regiones dentro de las ampliaciones donde la velocidad promedio escalada está enganchada. Debido al caos, ya no hay una estructura detallada como en el caso sobreamortiguado, sin embargo, existe una estructura autosimilar.

En la figura 8.12 se muestra el espacio de parámetros  $F_D$  contra  $\omega_D/\omega_0$  que muestra las regiones de sincronización, llamadas lenguas de Arnold, localizadas en valores racionales  $q/p$ , con  $p, q$  enteros. Cada lengua de Arnold está etiquetada por estos valores enteros  $p : q$ , implicando que las lenguas de Arnold para  $F_D = 0$  empiezan en los valores de  $\omega_D/\omega_0 = q/p$  y toda la lengua  $p : q$  corresponde al valor de la velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v \rangle/\omega_D = p/q$ . Esta gráfica es una proyección de la gráfica tridimensional 8.13. Para el rango de  $F_D$  no hay pasos hacia atrás, es decir  $2\pi\langle v \rangle = \langle \omega \rangle$ .

<sup>1</sup>En general tenemos 3 atractores en el espacio fase: periódico (un punto), caótico y cuasiperiódico, cuando el atractor es cuasiperiódico no llega exactamente a la misma posición después de un periodo, de tal forma que barre todo el atractor de manera continua.

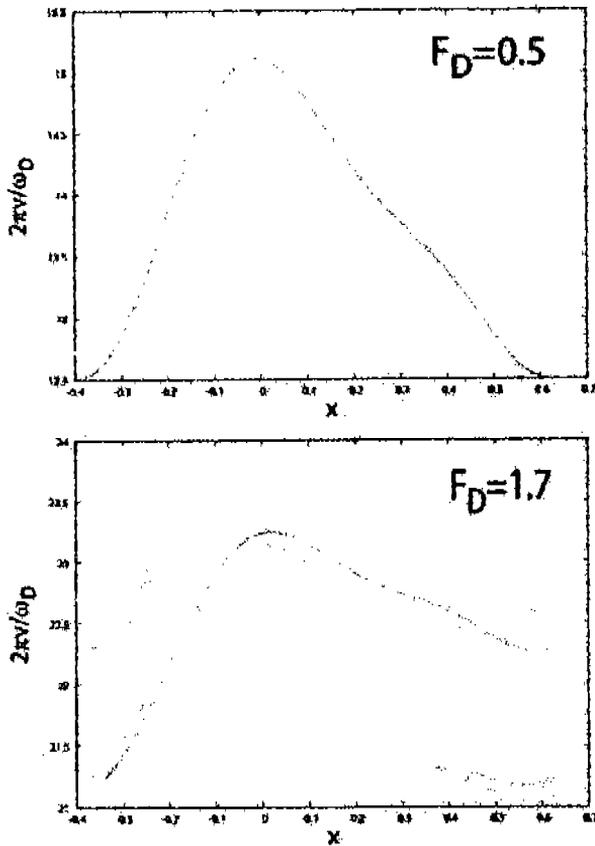


Figura 8.10: Gráfica de recurrencia para el ratchet inercial con una inclinación  $F = 1$ . En la figura superior se muestra un atractor cuasiperiódico para una amplitud de forzamiento  $F_D = 0.5$ . En la figura inferior se muestra un atractor caótico para una amplitud de forzamiento  $F_D = 1.75$ . En ambos casos se utilizó una frecuencia de forzamiento  $\omega_D/\omega_0 = 0.1$ .

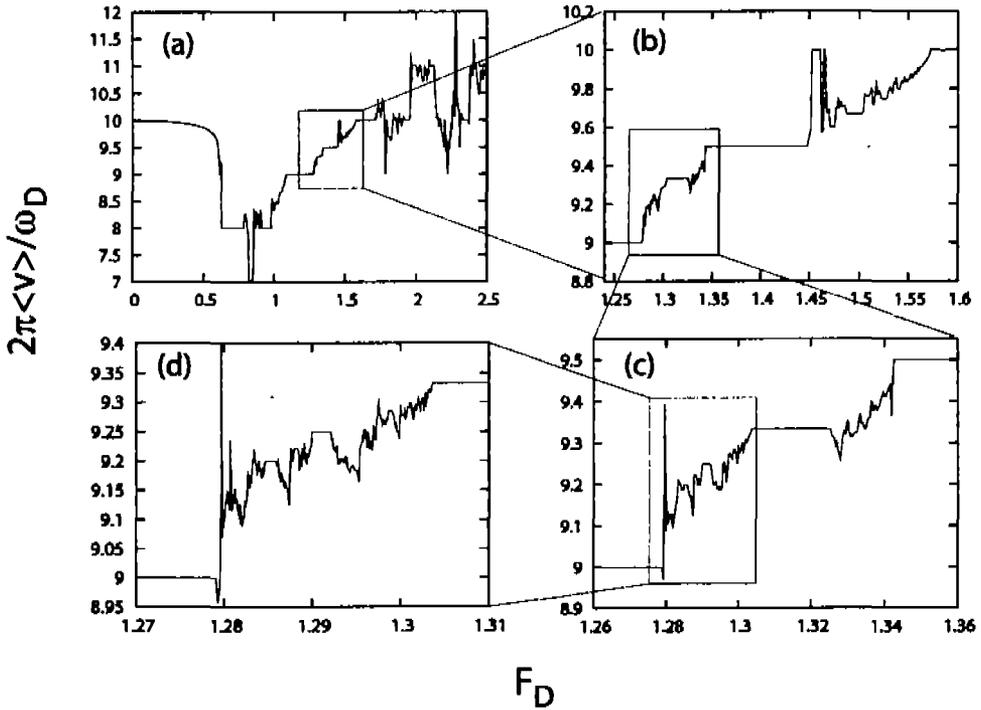


Figura 8.11: (a) Velocidad promedio escalada para el ratchet inercial en función de la amplitud del forzamiento  $F_D$ , con una inclinación de  $F = 1$  y una frecuencia del forzamiento  $\omega_D/\omega_0 = 0.1$ . (b), (c) y (d) se muestran sucesivas ampliaciones de (a).

En la figura 8.13 mostramos a la velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v \rangle/\omega_D$  en función de de la amplitud de forzamiento  $F_D$  y la frecuencia del forzamiento escalada  $\omega_D/\omega_0$ . Con esta gráfica podemos obtener con una proyección a las Lenguas de Arnold de la figura 8.12. Con un corte manteniendo a  $\omega_D/\omega_0$  y variando a  $F_D$ , obtenemos la gráfica 8.11. La gráfica 8.14 es un corte de 8.13, ahora manteniendo a  $F_D$  fijo y variando a  $\omega_D/\omega_0$ .

En la figura 8.14 se muestra la velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v \rangle/\omega_D$  en función de la frecuencia del forzamiento escalada  $\omega_D/\omega_0$ . Podemos ver claramente en esta figura los escalones para  $2\pi\langle v \rangle/\omega_D = p/q$ , con  $p, q$  enteros. Esta figura es un corte de la gráfica tridimensional 8.13, con  $F_D = 1.0$ . Cada escalón corresponde a una lengua de Arnold  $p : q$  localizada para  $F_D = 0$  en

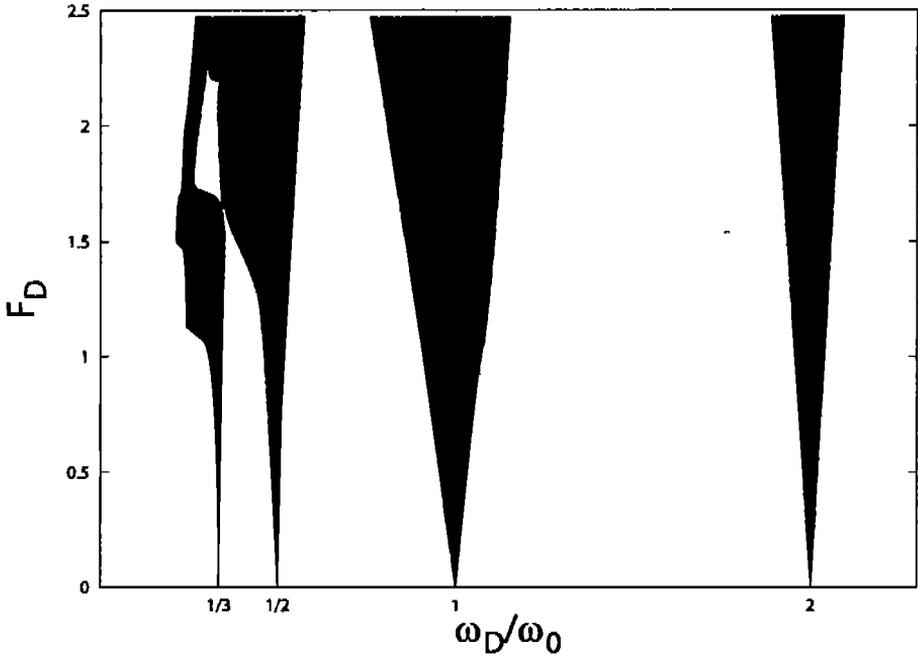


Figura 8.12: Lenguas de Arnold en el espacio de parámetros  $F_D$  contra  $\omega_D/\omega_0$ , para el ratchet inercial con una inclinación de  $F = 1$  ( $\omega_0 \simeq 6,19774321$ ).

$$\omega_D/\omega_0 = q/p.$$

En la figura 8.15 se muestra al velocidad promedio escalada ahora con la frecuencia característica  $\omega_0$  en lugar del parámetro que corre  $\omega_D$ . Las líneas rectas corresponden a los escalones de la figura 8.14, cuya pendiente es precisamente el valor del enganchamiento de  $2\pi\langle v \rangle/\omega_D = p/q$ . Podemos ver que los máximos de la corriente están en los bordes derechos de las lenguas de Arnold, lo que implica que, al igual que el caso sobreamortiguado, la corriente máxima promedio se debe a un efecto conjunto entre el ancho de la lengua y el valor de la pendiente (el valor del enganchamiento).

Al igual que en el caso sobreamortiguado, queremos investigar la sincronización en presencia de ruido. Para ello podemos adicionar una componente ruidosa  $\sqrt{2D}\xi(t)$  a la ecuación de movimiento (8.7), donde  $\xi(t)$  representa un ruido blanco Gaussiano delta correlacionado y  $D$  es el coeficiente de difusión adimensional ( $D/L^2\gamma$ ).

En la figura 8.16 se muestra la velocidad promedio (ahora es un promedio

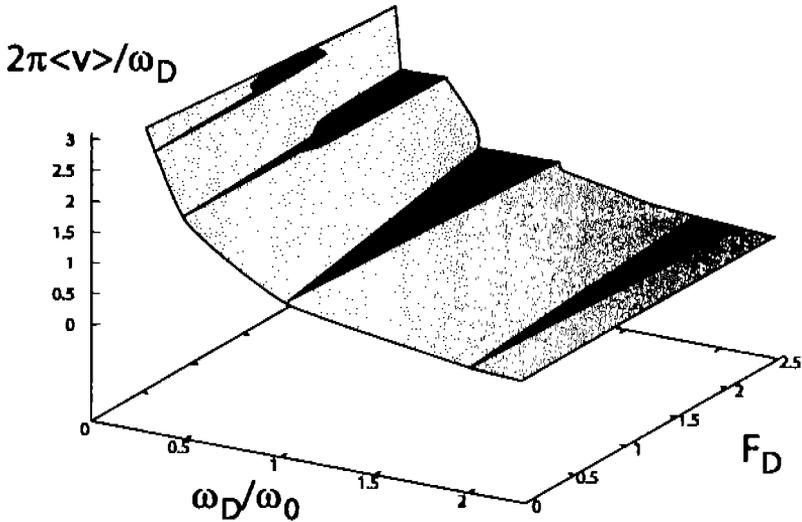


Figura 8.13: Gráfica tridimensional de la velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D$  en función de la amplitud de forzamiento  $F_D$  y la frecuencia del forzamiento escalada  $\omega_D / \omega_0$ , para una inclinación  $F = 1$  ( $\omega_0 \simeq 6.19774321$ ). Una proyección de esta gráfica muestra las lenguas de Arnold de la figura 8.12.

temporal mas un promedio sobre un ensamble de 400 partículas) escalada en función de la frecuencia del forzamiento escalada  $\omega_D / \omega_0$ , con una inclinación de  $F = 1$  y una amplitud del forzamiento  $F_D = 1.0$ . En la línea continua se muestra el caso determinista ( $D = 0$ ). En la línea punteada se muestra el caso con  $D = 0.005$ . Podemos observar que el fenómeno de sincronización al igual que en el caso sobreamortiguado, se mantiene en la lengua 1:1, incluso en la presencia de ruido.

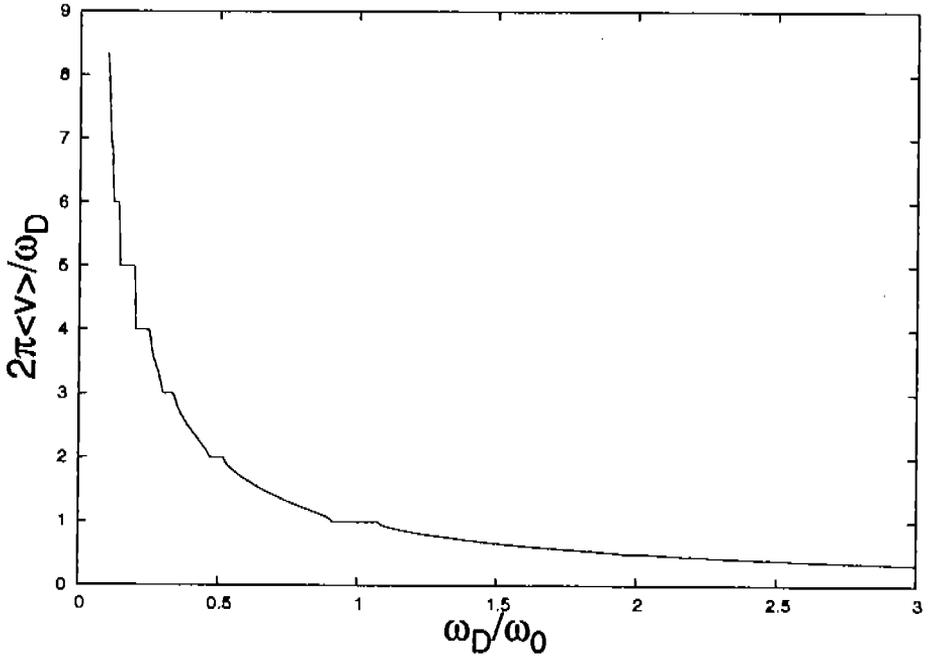


Figura 8.14: velocidad promedio escalada en función de la frecuencia escalada del forzamiento  $\omega_D / \omega_0$ , para el ratchet inercial con una inclinación de  $F = 1$  y una amplitud de forzamiento  $F_D = 1.0$ . Aquí se muestra claramente los escalones donde  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D = p/q$ , con  $p, q$  enteros.

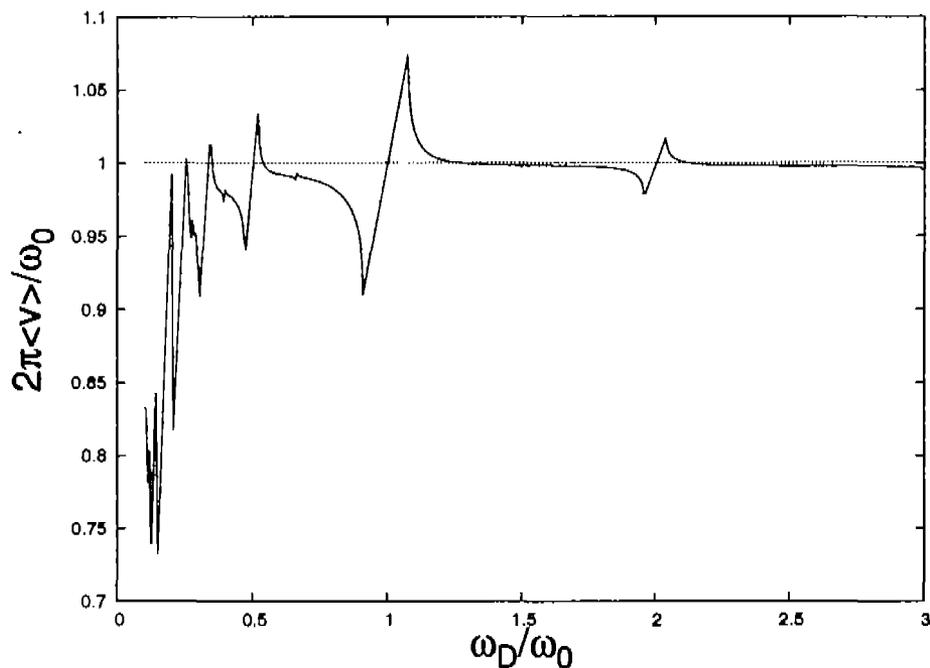


Figura 8.15: Velocidad promedio escalada ahora como  $2\pi\langle v \rangle / \omega_0$  como función de la frecuencia del forzamiento escalada  $\omega_D / \omega_0$ , para una inclinación de  $F = 1$  y una amplitud de forzamiento  $F_D = 1.0$ . Las líneas rectas corresponden a los escalones de la figura 8.14. Los picos de la corriente están localizados en el borde derecho de las lenguas de Arnold.

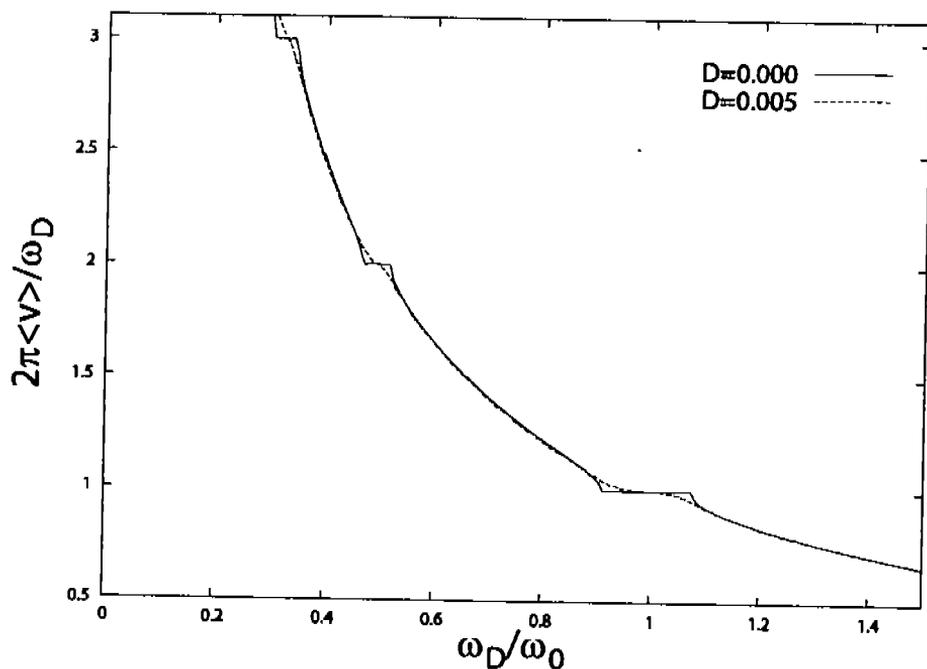


Figura 8.16: Velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D$  en función de la frecuencia del forzamiento escalada  $\omega_D / \omega_0$ , para una inclinación de  $F = 1.0$  ( $\omega_0 \simeq 6.19774321$ ) y una amplitud de forzamiento  $F_D = 1.0$ . En la línea continua se muestra el caso determinista ( $D = 0,0$ ) y en la línea punteada se muestra el caso con ruido  $D = 0.005$ .

## Capítulo 9

# Sincronización de dos motores brownianos

Existen proteínas motoras en el interior de la célula capaces de realizar un transporte unidireccional. Una de estas proteínas motoras o motores moleculares es la cinesina. Esta proteína motora ha atraído considerable atención, motivada por los resultados experimentales, en los cuales detalles dinámicos de su movimiento han sido medidos [125, 8, 9]. Las cinecinas son proteínas con dos cabezas que realizan una caminata sobre microtubulos adentro de la célula. Motivados por estos resultados experimentales, varios autores [126, 127, 128, 129, 130, 131] han introducido diversos modelos para entender la forma de caminar de la cinesina. Usualmente, estos modelos consideran dos partículas acopladas sujetas al potencial ratchet, que modela la estructura periódica de los microtubulos. En las referencias [126, 127], los autores consideran dos partículas puntuales en un potencial ratchet y acopladas elásticamente (linealmente).

En [132, 133, 134, 135] se estudia un modelo motivado en la caminata de la cinesina. El modelo considera a dos partículas sobre un ratchet acopladas a través de un potencial no lineal biestable y sujetas a ruidos blancos independientes.

A pesar de que la gran mayoría de los trabajos consideran ruido, en esta sección vamos a considerar la dinámica determinista de este caminante y vamos a aplicar los conceptos relacionados a la sincronización de estos caminantes con una fuerza externa periódica.

## 9.1. El modelo del caminante

El modelo que vamos a utilizar es el usado por [132, 133, 134, 135], el modelo considera a un caminante sobre un potencial ratchet. Este caminante tiene dos pies que son representados por dos partículas puntuales de masa  $m$  en una dimensión acopladas por un potencial no lineal biestable. Adicionalmente estas partículas están sujetas en nuestro caso a una fuerza constante  $F$  y a una fuerza periódica  $F_D \sin(\omega_D t)$ . La dinámica de las partículas es sobreamortiguada y esta dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} m\gamma\dot{x} &= -\frac{dV(x)}{dx} - \frac{\partial V_b(x-y)}{\partial x} + F + F_D \sin(\omega_D t), \\ m\gamma\dot{y} &= -\frac{dV(y)}{dy} - \frac{\partial V_b(x-y)}{\partial y} + F + F_D \sin(\omega_D t), \end{aligned} \quad (9.1)$$

donde  $\gamma$  es el coeficiente de fricción dividido por la masa,  $-\partial_x V(x)$  es la fuerza debido al ratchet,  $-\partial_x V_b(x-y)$  es la fuerza del acoplamiento debida al potencial biestable,  $F$  es una fuerza constante,  $F_D$  y  $\omega_D$  son la amplitud y la frecuencia de la fuerza periódica respectivamente.

Estas ecuaciones representan a dos partículas sobre el potencial ratchet

$$V(x) = -V_R \left[ \sin\left(\frac{2\pi(x-x_0)}{L}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{4\pi(x-x_0)}{L}\right) \right] + V_1, \quad (9.2)$$

donde  $L$  es el periodo del potencial  $V(x+L) = V(x)$ ; las constantes  $x_0/L \simeq .19$  y  $V_1/V_0 \simeq 1.1$  se utilizan para que el mínimo del potencial este en el origen.

El potencial biestable esta dado por

$$V_b(x-y) = V_b + V_b \left[ \left(\frac{x-y}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x-y}{l}\right)^2 \right], \quad (9.3)$$

donde  $V_b$  es la amplitud del potencial y representa la fuerza del acoplamiento entre las dos partículas, y  $2l$  es la distancia entre los dos mínimos.

Sigamos con la misma convención que en las secciones anteriores para derivar las ecuaciones adimensionales. Esto es, tomemos como longitud característica a el periodo del ratchet  $L$  y como tiempo característico al inverso de  $\gamma$ . Definamos las siguientes cantidades adimensionales:  $x' = x/L$ ,  $x'_0 =$

$x'_0/L, y' = y/L, y_0 = y'_0/L, t' = t\gamma, l' = l/L, \omega'_D = \omega_D/\gamma, F' = F/mL\gamma^2, F'_D = F_D/mL\gamma^2, V'_R = V_R/mL^2\gamma^2, V'_1 = V_1/mL^2\gamma^2, V'_b = V_b/mL^2\gamma^2$ . Sustituyendo estas definiciones en las ecuaciones de movimiento (9.1), después quitando las primas, obtenemos las ecuaciones de movimiento adimensionales

$$\dot{x} = -\frac{dV(x)}{dx} - \frac{\partial V_b(x-y)}{\partial x} + F + F_D \sin(\omega_D t), \quad (9.4)$$

$$\dot{y} = -\frac{dV(y)}{dy} - \frac{\partial V_b(x-y)}{\partial y} + F + F_D \sin(\omega_D t),$$

con el potencial ratchet adimensional

$$V(x) = -V_R[\sin(2\pi(x-x_0)) + \frac{1}{4}\sin(4\pi(x-x_0))] + V_1, \quad (9.5)$$

y el potencial biestable adimensional

$$V_b(x-y) = V_b \left[ \left( \frac{x-y}{l} \right)^4 - 2 \left( \frac{x-y}{l} \right)^2 + 1 \right]. \quad (9.6)$$

Este modelo es diferente a los modelos previos [126, 127], debido a que el acoplamiento es no lineal a través de un potencial biestable. Es importante hacer notar que el acoplamiento entre las dos partículas involucra a la variable  $x-y$ . Esta variable puede ser positiva, negativa o cero. Cuando  $x-y > 0$  implica que la partícula  $x$  está adelante de la partícula  $y$ . Cuando  $x-y < 0$ , ahora la partícula  $y$  está adelante de la  $x$  (ver fig 9.1). Entonces, las transiciones entre los dos estados estables en el potencial biestable, corresponde al cambio de orden entre las partículas. Los mínimos del potencial biestable están localizados en  $x-y = \pm l$ , donde  $l$  es la distancia de relajación entre las dos partículas. Este acoplamiento no lineal nos permite considerar un aspecto de la verdadera caminata: la posibilidad de alternar los dos pies.

## 9.2. Definición de las fases

Al igual que en los casos anteriores utilizaremos las definiciones de la fase, la velocidad promedio y la frecuencia promedio introducidas en la sección 7.1. Como ya se mencionó estas definiciones son muy generales y pueden ser utilizadas en nuestro caso (ver fig. 9.2); desde luego, cada partícula tendrá su

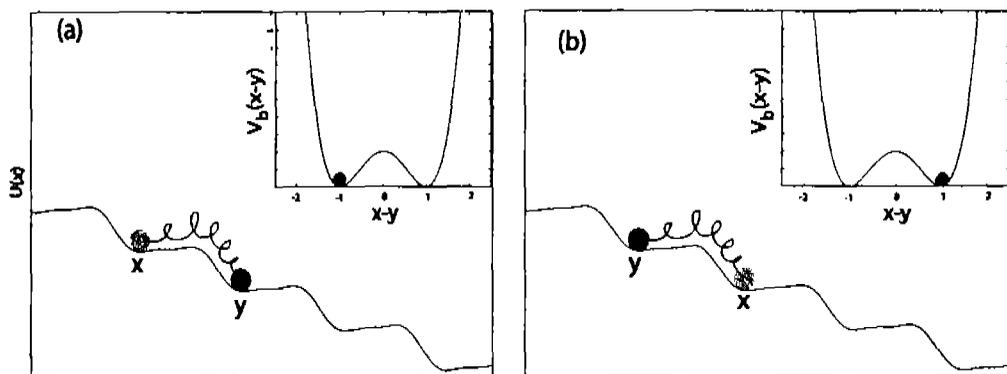


Figura 9.1: El caminante sobre el ratchet, en el recuadro se muestra el potencial biestable. (a) Si  $x - y < 0$ , implica que la partícula  $y$  está adelante de la  $x$ . (b) Si  $x - y > 0$  implica que la partícula  $x$  está adelante de la  $y$ . Cuando el caminante da un paso hay una transición entre los estados estables del potencial biestable.

propia fase, velocidad promedio y frecuencia promedio. Sin embargo estamos interesados en el comportamiento global del caminante, por lo que nos centraremos en el promedio de las posiciones, esto es, en la dinámica del centro de masa  $z = (x+y)/2$ . Por lo que en los cálculos siguientes cuando reportemos la velocidad promedio y la frecuencia promedio, nos estaremos refiriendo a la velocidad y frecuencia promedio del centro de masa  $z$ <sup>1</sup>.

### 9.3. Resultados numéricos

En esta sección resolvemos las ecuaciones 9.4 del caminante en un ratchet inclinado y mecido por una fuerza periódica. Usamos el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver las ecuaciones 9.4. Utilizaremos las condiciones iniciales  $x(t = 0) = 0$  y  $y(t = 0) = 1$ . Una vez que obtenemos las trayectorias completas, identificamos el conjunto de los tiempos discretos  $\{t_k^x\}$  y  $\{t_k^y\}$  cuando las partículas  $x$  y  $y$  cruzan las posiciones  $x_k$  y  $y_k$  respectivamente, con  $k$  entero. Con estos eventos marca calculamos para cada partícula la frecuencia promedio a partir de (7.3), y después de calcu-

<sup>1</sup>Como en las secciones anteriores el punto de referencia es el cruce con los mínimos del potencial sin inclinar.

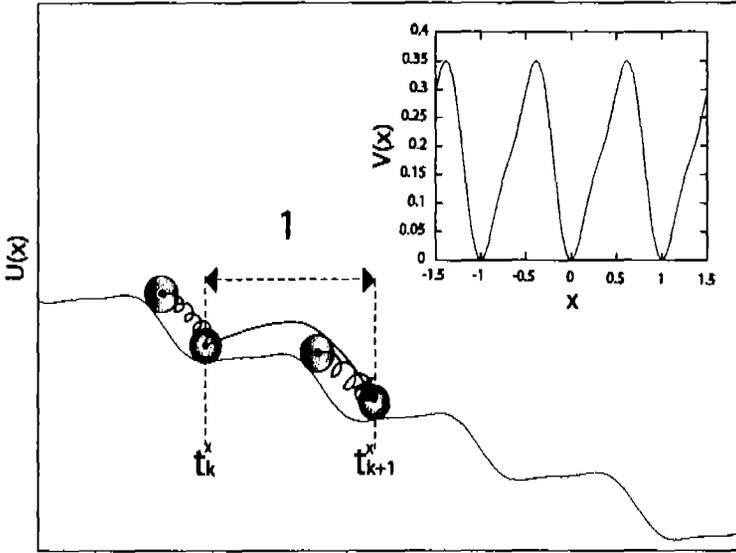


Figura 9.2: Caminante sobre el ratchet inclinado indicando la dinámica que define los eventos temporales discretos  $t_k^x$  para la partícula  $x$ . El acoplamiento se representa por un resorte sólo por motivos ilustrativos, ya que la interacción no es lineal. El potencial ratchet sin inclinación se ilustra en el recuadro.

lar  $N_k^x$  y  $N_k^y$ , obtenemos la corriente usando (7.5) para cada partícula. Con esto obtenemos la velocidad y frecuencia promedio como un promedio entre las velocidades y frecuencias de las partículas respectivamente. Fijaremos el valor de la amplitud del potencial ratchet a  $U_r = 1/2\pi$ .

A diferencia de los casos anteriores, el acoplamiento entre las partículas da una dinámica dependiente de la distancia de relajación entre los pies  $l$  y la amplitud del potencial biestable  $V_b$ . Los valores importantes de estos parámetros son con respecto al periodo del ratchet (que el caso adimensional es 1)  $l/1$  y la razón entre las alturas de los potenciales  $V_b/U_r$ . Para simplificar, usaremos en todos los cálculos posteriores el valor de  $V_b = 2U_r$  (esto es, las alturas de los potenciales similares).

En la figura 9.3 se muestra la inclinación crítica  $F_c$  para la existencia de saltos en función de la distancia de relajación entre los pies  $l$  sin forzamiento externo ( $F_D = 0$ ). Podemos observar que la  $F_c$  mínima se encuentra en  $l = 1/2$  y para  $l = 1$  esta coincide con la fuerza crítica para una sola partícula

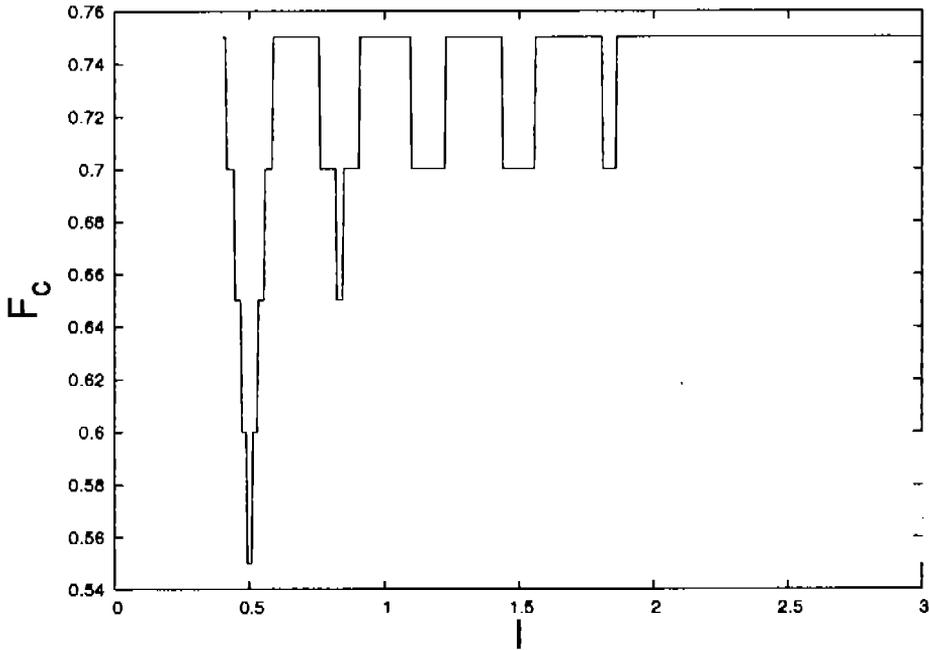


Figura 9.3: Inclinación crítica  $F_c$  para la existencia de saltos en función de la distancia de relajación de los pies  $l$ . Sin forzamiento externo ( $F_D = 0.0$ ) y con una amplitud del potencial biestable de  $V_b = 2U_R$ .

$F_c = 0.75$ , esto es, cuando  $l = 1$  (la distancia de relajación entre las partículas es igual al periodo del ratchet), es como si no existiera acoplamiento entre las partículas (ya que siempre mantienen su distancia igual a la distancia de relajación) y para  $l = 1/2$ , existe un comportamiento cooperativo entre las dos partículas, tal que se necesita una menor inclinación del ratchet para que existan saltos.

En la figura 9.4 se muestra la frecuencia “característica”  $\omega_0$  en función de la distancia de relajación de los dos pies  $l$ , para una inclinación fija  $F = 1$ . La  $\omega_0$  presenta un máximo en  $l = 1/2$ , congruente con la figura 9.3. En este caso, todos los saltos son a la derecha, ya que sólo actúa la fuerza constante  $F = 1$  sobre el caminante en el ratchet, por lo que  $\omega_0 = 2\pi\langle v \rangle$ , esto es, la velocidad promedio tiene un máximo en  $l = 1/2$ . Debido a esto utilizaremos en los siguientes cálculos el valor  $l = 1/2$  y una inclinación de  $F = 1.0$ , para estos parámetros de  $l$  y  $F$  les corresponde una frecuencia “característica”

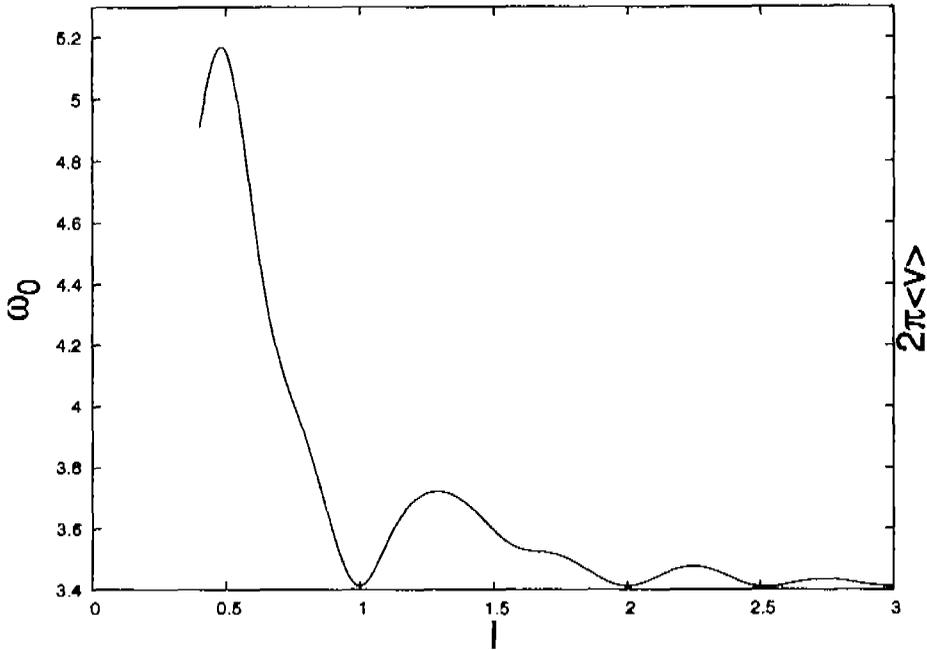


Figura 9.4: Frecuencia “característica”  $\omega_0$  en función de la distancia de relajación de los dos pies  $l$ , para una inclinación  $F=1.0$ , sin forzamiento periódico ( $F_D=0.0$ ). En este caso, todos los saltos son hacia la derecha y  $\omega_0 = 2\pi\langle v \rangle$ .

$$\omega_0 \simeq 5.14980744.$$

En lo próximos resultados consideraremos solamente a la velocidad promedio debido a que está directamente relacionado con las propiedades de transporte y recordando que en general  $2\pi\langle v \rangle \neq \langle \omega \rangle$  esto solo es válido cuando no hay saltos hacia atrás (para  $F_D$  y  $F$  menores que un cierto valor crítico).

En la figura 9.5 mostramos la velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v \rangle/\omega_D$  en función de la inclinación  $F$ . La línea continua indica el caso sin forzamiento periódico ( $F_D = 0$ ). La línea punteada muestra el caso con un forzamiento periódico con amplitud  $F_D = 1.0$  y con frecuencia  $\omega_D = 0.6$ . Podemos ver que hay un enganche de la velocidad escalada, pero como en los casos anteriores de una sola partícula, no es claro como está relacionada la sincronización con  $\omega_0$ , de hecho, existe una velocidad promedio escalada enganchada en  $p/q$ , con  $p, q$  enteros, para valores de  $F$  en donde la frecuencia característica  $\omega_0$

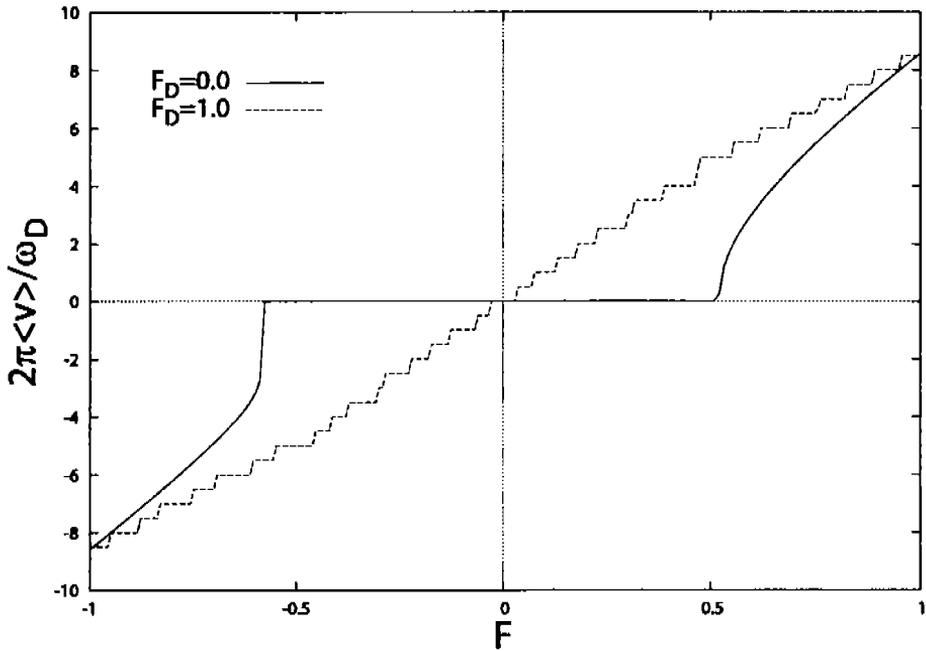


Figura 9.5: Velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D$  en función de la inclinación  $F$ . La línea continua muestra el caso sin forzamiento periódico  $F_D = 0$ . La línea punteada muestra el caso con un forzamiento periódico con una frecuencia  $\omega_D = 0.6$  y una amplitud  $F_D = 1.0$ , para una altura del potencial biestable  $V_b = 2U_R$  y una distancia de relajación entre los pies  $l = 0.5$ .

es cero. Por lo que no podemos hablar de sincronización para todo el rango de  $F$ .

En la figura 9.6 se muestra la velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D$  en función de la amplitud del forzamiento  $F_D$ . En (b), (c) y (d) se muestran ampliaciones sucesivas de (a). Podemos observar claramente el fenómeno de sincronización con el enganche de la velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D$  en los valores  $p/q$ , con  $p, q$  enteros. Al igual que en el caso de una sola partícula, la velocidad promedio muestra una estructura autosimilar de escalones, típica de una escalera del diablo.

En la figura 9.7 se muestra el espacio de parámetros  $F_D$  contra  $\omega_D / \omega_0$ . que muestran las regiones de sincronización, también llamadas Lenguas de Arnold, localizadas en los valores racionales  $\omega_D / \omega_0 = q/p$ , con  $p, q$  enteros.

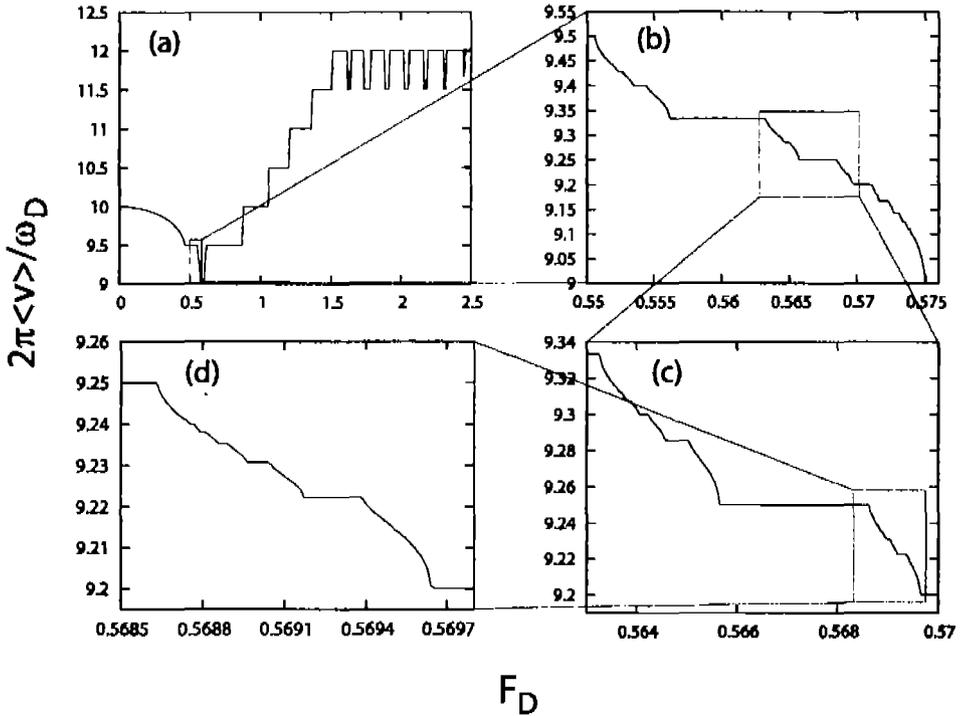


Figura 9.6: (a) Velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v\rangle/\omega_D$  en función de la amplitud del forzamiento  $F_D$ . (b), (c) y (d) ampliaciones sucesivas de (a). La frecuencia del forzamiento es  $\omega_D/\omega_0 = 0.1$ , la inclinación es  $F = 1.0$  ( $\omega_0 \simeq 5.14980744$ ), una altura del potencial biestable  $V_b = 2U_R$  y una distancia de relajación entre los pies  $l = 0.5$

Cada lengua corresponde a un valor de  $q/p$  y están etiquetadas por estos valores. A la lengua  $p : q$  le corresponde el valor de la velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v\rangle/\omega_D = p/q$ , localizadas en  $\omega_D/\omega_0 = q/p$ .

En la figura 9.8 se muestra una gráfica tridimensional de la velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v\rangle/\omega_D$  en función de la amplitud de forzamiento  $F_D$  y la frecuencia de forzamiento  $\omega_D/\omega_0$ . Una proyección sobre el espacio de parámetros  $F_D$  y  $\omega_D/\omega_0$  nos da la gráfica 9.7. Podemos obtener la gráfica 9.6 a partir de un corte de la gráfica 9.8, manteniendo a  $\omega_D$  constante, también podemos obtener a 9.9 manteniendo a  $F_D$  constante y variando a  $\omega_D$ .

En la figura 9.9 se muestra la velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v\rangle/\omega_D$  en función de la frecuencia del forzamiento escalada  $\omega_D/\omega_0$ . Aquí se ve explícitamente

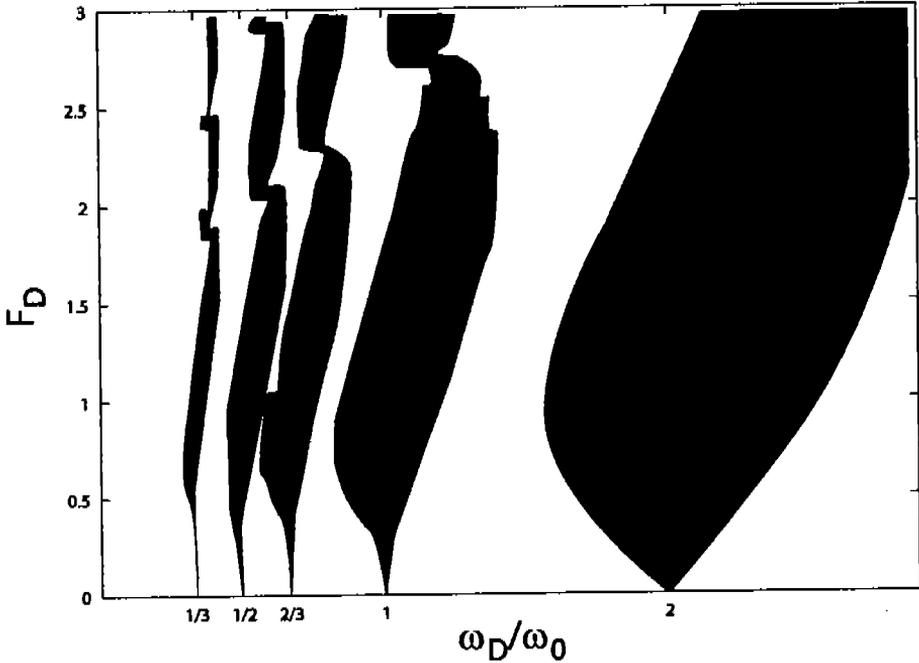


Figura 9.7: Lenguas de Arnold en el espacio de parámetros  $F_D$  contra  $\omega_D/\omega_0$ . Para un inclinación de  $F = 1$  ( $\omega_0 \simeq 5.14980744$ ), con una altura del potencial biestable  $V_b = 2U_R$  y una distancia de relajación entre los pies  $l = 0.5$ . Las lenguas de Arnold están localizadas en los valores racionales  $q/p$  (con  $p, q$  enteros), de la frecuencia del forzamiento escalada  $\omega_D/\omega_0$ .

tamente los escalones donde hay enganche de la velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v \rangle/\omega_D$  con  $p/q$ , para  $p, q$  enteros. Esta figura se puede obtener a partir de un corte de la figura tridimensional 9.8 manteniendo a  $F_D = 1.0$ .

En la figura 9.10 se muestra la velocidad promedio escalada ahora como  $2\pi\langle v \rangle/\omega_0$  (en vez del parámetro que corre  $\omega_D$ ) en función de la frecuencia del forzamiento escalada  $\omega_D/\omega_0$ . Al lugar de escalones ahora tenemos líneas rectas cuyas pendientes corresponde al valor del enganchamiento de la velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v \rangle/\omega_D = p/q$ , cuyo inverso da la localización de la lengua a la que corresponde ( $\omega_D/\omega_0 = q/p$ ). Los máximos de la velocidad promedio escalada, al igual que en los casos anteriores, están en el borde derecho de las lenguas de Arnold. Esto es cuando la velocidad promedio escalada está en una lengua, esta incrementa linealmente con  $\omega_D$ . Entonces, al

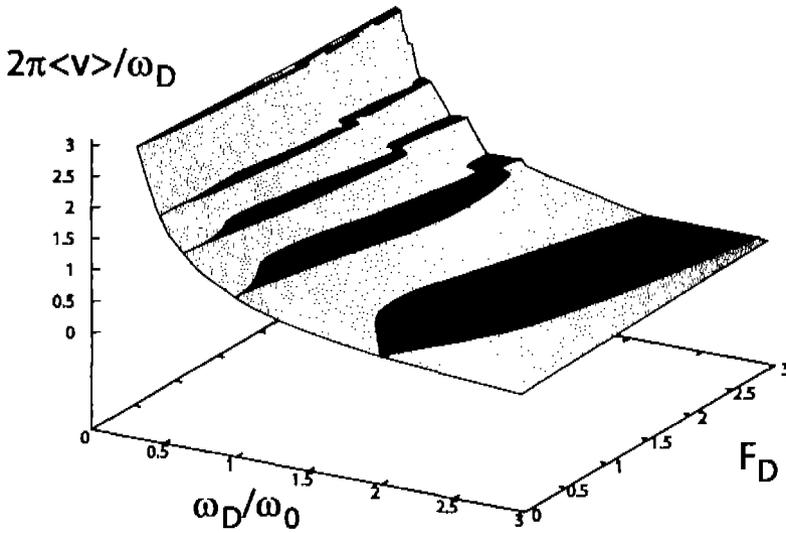


Figura 9.8: Gráfica tridimensional de la velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D$  en función de la amplitud de forzamiento  $F_D$  y la frecuencia de forzamiento  $\omega_D / \omega_0$ , para una inclinación de  $F = 1$ , una altura del potencial biestable  $V_b = 2U_R$  y una distancia de relajación entre los pies  $l = 0.5$ .

igual que en los casos anteriores, los máximos de la velocidad promedio están asociados al fenómeno de sincronización.

Al igual que en los casos anteriores, queremos investigar la sincronización del caminante en presencia de ruido. Para ello podemos adicionar a cada ecuación de movimiento en (9.4) una componente ruidosa  $\sqrt{2D}\xi^x(t)$  y  $\sqrt{2D}\xi^y(t)$  respectivamente, donde  $\xi^x(t)$  y  $\xi^y(t)$  representan dos ruidos blancos Gaussianos delta correlacionados independientes y  $D$  es el coeficiente de difusión adimensional ( $D/L^2\gamma$ ).

En la figura 9.11 se muestra la velocidad promedio (ahora es un promedio temporal mas un promedio sobre un ensamble de 400 partículas) escalada  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D$  en función de la frecuencia del forzamiento escalada  $\omega_D / \omega_0$ . En la línea continua se muestra el caso determinista ( $D = 0$ ). En la línea punteada se muestra el caso con ruido  $D = 0.01$ . Podemos observar que el fenómeno de sincronización al igual que en los casos anteriores, se mantiene en la lengua 1:2, incluso en la presencia de ruido.

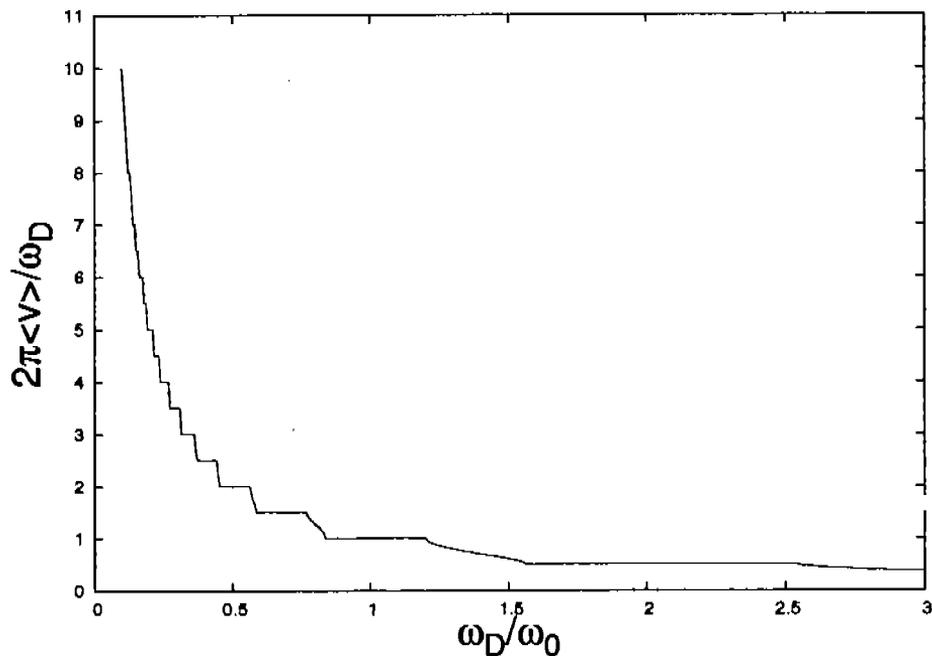


Figura 9.9: Velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v \rangle/\omega_D$  en función de la frecuencia del forzamiento escalada  $\omega_D/\omega_0$  con una amplitud del forzamiento  $F_D = 1.0$ , una inclinación de  $F = 1$  ( $\omega_0 \simeq 5.14980744$ ), una altura del potencial biestable  $V_b = 2U_R$  y una distancia de relajación entre los pies  $l = 0.5$ .

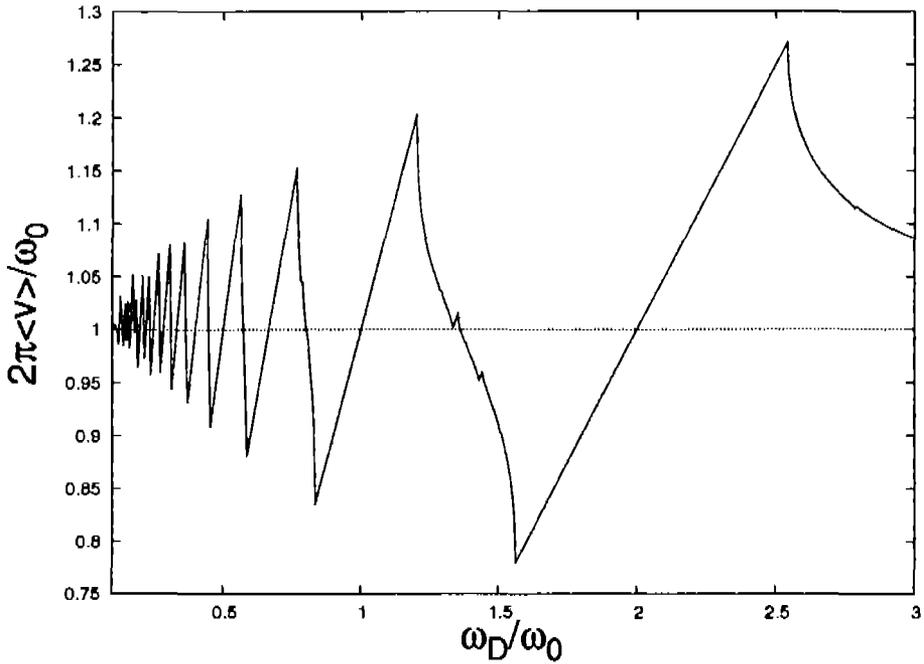


Figura 9.10: Velocidad promedio escalada ahora como  $2\pi\langle v \rangle / \omega_0$  en función de la frecuencia del forzamiento escalada  $\omega_D / \omega_0$  con una amplitud del forzamiento  $F_D = 1.0$ . Las líneas rectas corresponde a los escalones de 9.9, para un inclinación de  $F = 1$  ( $\omega_0 \simeq 5.14980744$ ), con una altura del potencial biestable  $V_b = 2U_R$  y una distancia de relajación entre los pies  $l = 1/2$ .

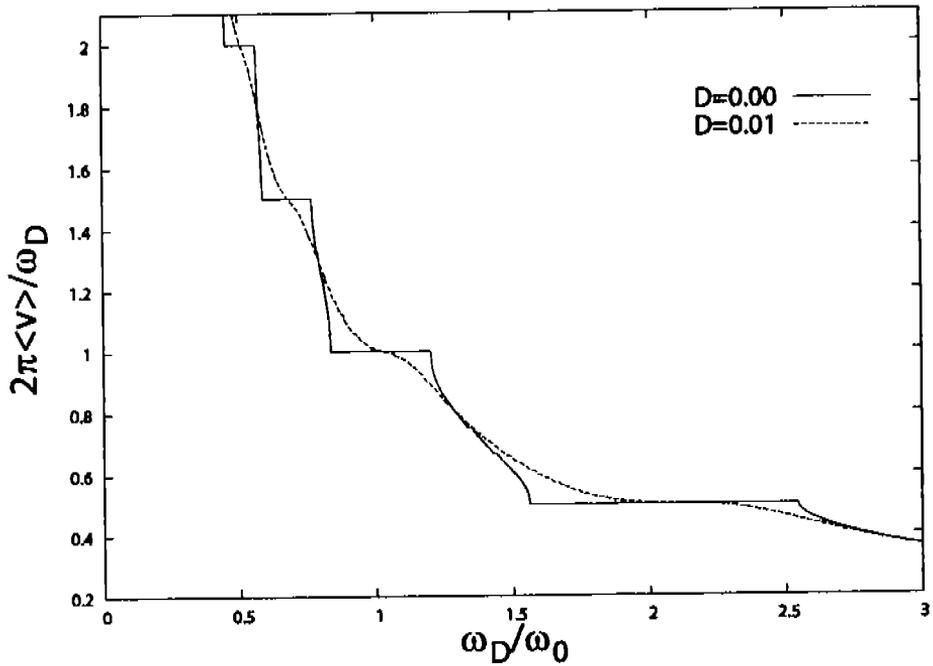


Figura 9.11: Velocidad promedio escalada  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D$  en función de la frecuencia del forzamiento escalada  $\omega_D / \omega_0$  con una amplitud del forzamiento  $F_D = 1.0$ . La línea continua muestra el caso determinista  $D=0.0$ . La línea punteada muestra el caso con ruido  $D=0.01$ . En ambos casos la inclinación es  $F = 1$  ( $\omega_0 \simeq 5.14980744$ ), con una altura del potencial biestable  $V_b = 2U_R$  y una distancia de relajación entre los pies  $l=1/2$ .

# Capítulo 10

## Conclusión y perspectivas

La investigación en motores brownianos creció enormemente en la última década, debido a la gamma de sistemas físicos y biológicos en los que estos motores brownianos se encuentran, por ejemplo: proteínas motoras, uniones Josephson , densidad de vórtices en superconductores y sólo por mencionar algunos. Recientemente el caso determinista (temperatura cero) ha atraído una gran atención, en particular el caso inercial, ya que en general tiene una dinámica caótica que puede afectar las propiedades de transporte del ratchet.

En este trabajo hemos analizado el fenómeno de sincronización en tres casos:

- Una partícula sobreamortiguada sobre un ratchet inclinado con forzamiento periódico.
- Una partícula inercial sobre un ratchet inclinado con forzamiento periódico.
- Dos partículas acopladas a través de un potencial biestable, sobre un ratchet inclinado y forzado periódicamente, la dinámica en este caso se caracterizó por el centro de masa de las partículas.

En los tres casos, las partículas están sujetas a la fuerza debida al ratchet, a una fuerza periódica y a una fuerza constante. La fuerza constante es necesaria para que el ratchet esté inclinado, de tal forma que en ausencia de la fuerza periódica el ratchet inclinado tenga una frecuencia característica.

Introducimos una fase lineal a través de un conjunto de tiempos determinados por la ocurrencia de saltos entre pozos del potencial ratchet, y muestra-

mos que la frecuencia promedio asociada a la fase lineal del ratchet inclinado puede ser sincronizada con la frecuencia del forzamiento periódico.

En todos los casos se obtuvieron lenguas de Arnold bien definidas en el espacio de parámetros bidimensional, dado por la amplitud y la frecuencia del forzamiento periódico. Cada lengua de Arnold está etiquetada por un número racional  $p/q$  (sincronización  $p:q$ ), donde  $p$  y  $q$  son dos números enteros, cuyo valor da la velocidad promedio normalizada  $2\pi \langle v \rangle / \omega_D$  y su inverso nos dice la posición de las lenguas.

Se obtuvo una estructura autosimilar para la velocidad promedio en función de la amplitud del forzamiento. Pero sólo para los casos sobre amortiguados (a) y (c) se obtuvo una estructura fractal tipo escalera del diablo.

Se mostró que los máximos de la velocidad promedio escalada corresponden a los bordes de las lenguas Arnold, con lo cual se estableció una conexión entre el transporte óptimo en ratchets inclinados y el fenómeno de sincronización.

Se estudió brevemente el efecto del ruido sobre la sincronización del ratchet inclinado y se obtuvo que para ruidos pequeños comparados con la altura del potencial, el fenómeno de sincronización se mantiene para las lenguas de Arnold más anchas.

Se mostró que el fenómeno de movilidad negativa está relacionado con las inversiones de corriente debida a una bifurcación de una trayectoria caótica a una periódica.

Para un trabajo futuro se podría explorar con más detalle el espacio de parámetros y considerar rangos más amplios. Investigar más a fondo la dinámica inercial del ratchet. La relación del enganche de la velocidad promedio con la frecuencia de forzamiento y tratar de relacionarla con la sincronización para el fenómeno de la movilidad negativa.

# Bibliografía

- [1] Luca Gammaitoni, Peter Hänggi, Peter Jung, Fabio Marchesoni. *Rev. Mod. Phys.*, **70** (1998), 223.
- [2] R. D. Astumian, F. Moss. *Chaos*, **8** (1998), 533.
- [3] P. Hänggi. *Chem. Phys. Chem.*, **3** (2002), 285.
- [4] H. Linke. *Appl. Phys. A*, **75** (2002), 167.
- [5] R. D. Astumian, P. Hänggi. *Physics Today*, **55** (2002), 33.
- [6] P. Reimann, P. Hänggi. *Appl. Phys. A*, **75** (2002), 169.
- [7] P. Reimann. *Phys. Rep*, **361** (2002), 57.
- [8] R. D. Vale, R. A. Milligan. *Science*, **288** (2000), 88.
- [9] J. Howard. *Mechanics of Motor Proteins and the Cytoskeleton*. Sinauer Press, 2001.
- [10] J. Klafter, M. Urbakh. *J. Phys.:Condens. Matter*, **17** (2005).
- [11] M. Borromeo, F. Marchesoni. *Chaos*, **15** (2005), 026110.
- [12] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths. *Synchronization, A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, 2001.
- [13] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation*. Springer-Verlag, 1989.
- [14] P. Reimann, M. Grifoni, P. Hänggi. *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997), 10.
- [15] C. S. Lee, et al. *Nature*, **400** (1999), 337.

- [16] Clécio C. de Souza Silva, J. Van de Vondel, B. Y. Zhu, M. Morelle, V. V. Moshchalcov. *Phys. Rev. B*, **73** (2006), 014507.
- [17] T. Hugel, N. B. Holland, A. Cattani, L. Moroder, M. Seitz, H. E. Gaub. *Science*, **296** (2002), 1103.
- [18] R. Bartussek, P. Hänggi, J. G. Kissner. *Europhys. Lett.*, **28** (1994), 459.
- [19] A. Ajdari, L. Peliti D. Mukamel, J. Prost. *J. Phys. I France*, **4** (1994), 1551.
- [20] P. Hänggi, R. Bartussek. *Non Linear Physics of Complex Systems*, vol. 476. Springer, 1996.
- [21] P. Jung, J. G. Kissner, P. Hänggi. *Phys. Rev. Lett.*, **76** (1996), 3436.
- [22] J. L. Mateos. *Phys. Rev. Lett.*, **84** (2000), 258.
- [23] J. L. Mateos. *Acta Phys. Polonica*, **32** (2001), 307.
- [24] J. L. Mateos. *Physica D*, **168** (2002), 205.
- [25] J. L. Mateos. *Physica A*, **325** (2003), 92.
- [26] Clécio C. de Souza Silva, Joris Van de Vondel, Mathieu Morelle, Victor V. Moshchalcov. *Nature*, **440** (2006), 651.
- [27] L. Glass. *Nature*, **410** (2001), 277.
- [28] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares, C. S. Zhou. *Phys. Rep.*, **366** (2002), 1.
- [29] J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. Pérez Vicente, F. Ritort, R. Spigler. *Rev. Mod. Phys.*, **77** (2005), 137.
- [30] U. E. Vincent, Njah A., O. Akimalde, A. R. T. Solarin. *Chaos*, **14** (2004), 1018.
- [31] U. E. Vincent, A. Kenfack, Njah A., O. Akimalde. *Phys. Rev. E*, **72** (2005), 056213.

- [32] U. E. Vincent, Njah A., O. Akimalde, A. R. T. Solarin. *Physica A*, **360** (2006), 186.
- [33] D. G. Zarlenga, H. A. Larrondo, C. M. Arizmendi, F. Family. *Physica A*, **352** (2005), 282.
- [34] M. Kostur, P. Hänggi, P. Talkner, J. L. Mateos. *Phys. Rev. E*, **72** (2005), 036210.
- [35] A. Einstein. *Ann. Phys. (Leipzig)*, **17** (1905), 549.
- [36] M. von Smoluchowsky. *Ann. Phys. (Leipzig)*, **21** (1906), 756.
- [37] F. Reif. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. McGraw-Hill, 1976.
- [38] A. E. Siegman. *Am. J. Phys.*, **47** (1978), 545.
- [39] C.W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods*. Springer, 2nd edn., 1985.
- [40] Riccardo Mannella. *International Journal of Modern Physics C*, **13** (2002), 1177.
- [41] H. S. Leff, A. F. Rex. *Maxwell's Demon, Entropy, Information, Computing*. Bristol, 1990.
- [42] R.P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics*. Addison-Wesley, 1963.
- [43] A. Ajdari, J. Prost. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **35** (1992), 1635.
- [44] M. O. Magnasco. *Phys. Rev. Lett.*, **71** (1993), 1477.
- [45] M. O. Magnasco. *Phys. Rev. Lett.*, **72** (1994), 2656.
- [46] C. R. Doering, W. Horsthemke, J. Riordan. *Phys. Rev. Lett.*, **72** (1994), 3436.
- [47] M. M. Millonas, M. I. Dykman. *Phys. Lett. A*, **185** (1994), 65.
- [48] J. Prost, J. F. Chauwin, L. Peliti, A. Ajdari. *Phys. Rev. Lett.*, **72** (1994), 2652.

- [49] R. D. Astumian, M. Bier. *Phys. Rev. Lett.*, **72** (1994), 1766.
- [50] C. S. Peskin, G. Oster. *Biophys. J.*, **68** (1995), 202.
- [51] J. Rousselet, L. Salome, A. Ajadari, J. Prost. *Nature (London)*, **79** (1997), 10.
- [52] H. Linke, et al. *Europhys. Lett.*, **44** (1998), 343.
- [53] I. Zapata, et al. *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996), 2292.
- [54] F. Falo, et al. *Europhys. Lett*, **45** (1999), 700.
- [55] C. Mennerat-Robilliard, et al. *Phys. Rev. Lett.*, **82** (1999), 851.
- [56] P. Reimann, R. Bartussek, R. Haussler, P. Hänggi. *Phys. Lett. A*, **215** (1996), 26.
- [57] Emilio Cortés. *Physica A*, **275** (2000), 78.
- [58] J. Luczka, R. Bartussek, P. Hänggi. *Europhys. Lett.*, **31** (1995), 431.
- [59] P. Hänggi, Fabio Marchesoni, Nori F. *Ann. Phys. (Leipzig)*, **14** (2005), 51.
- [60] M. O. Magnasco. *Phys. Rev. Lett.*, **71** (1993), 1551.
- [61] J. F. Chauwin, A. Ajdari, J. Prost. *Europhys. Lett.*, **32** (1995), 373.
- [62] R. Bartussek, P. Reimann, P. Hänggi. *Phys. Rev. Lett*, **76** (1996), 1166.
- [63] Baoquan Ai, et al. *Phys. Rev. E*, **72** (2005), 031101.
- [64] C. Kettner, P. Reimann, P. Hänggi, F. Müller. *Phys. Rev. E*, **61** (2000), 312.
- [65] Grigory V. Osipov, Arkady S. Pikovsky, Jürgen Kurths. *Phys. Rev. Lett.*, **88** (2002), 054102.
- [66] Jan A. Freund, Lutz Schimansky-Geier, Peter Hänggi. *Chaos*, **13** (2002), 225.
- [67] Jesús Casado-Pascual, José Gómez-Ordoñez, Manuel Morillo, Jörg Lehmann, Igor Goychuck, Peter Hänggi. *Phys. Rev. E*, **71** (2005), 011101.

- [68] M. Borromeo, G. Constantini, F. Marchesoni. *Phys. Rev. E*, **65** (2002), 041110.
- [69] S. A. Tatarkova, W. Sibbett, K. Dholakia. *Phys. Rev. Lett.*, **91** (2003), 038101.
- [70] B. Lindner, J. Garía-Ojalvo, A.Ñeiman, L. Schimansky-Geier. *Phys. Rep.*, **392** (2004), 321.
- [71] K. Lindenberg, A. M. Lacasta, J. M. Sancho, A. H. Romero. *New J. Phys.*, **7** (2005), 29.
- [72] A. M. Lacasta, J. M. Sancho, A. H. Romero, K. Lindenberg. *Phys. Rev. Lett.*, **94** (2005), 160601.
- [73] R. Guantes, S. Miret-Artés. *Phys. Rev. E*, **67** (2003), 046212.
- [74] S. Sengupta, R. Guantes, S. Miret-Artés, P. Hänggi. *Physica A*, **338** (2004), 406.
- [75] C. Reichhardt, C. J. Olson Reichhardt, M. B. Hastings. *Phys. Rev. E*, **69** (2004), 056115.
- [76] S. Savelév, V. Misko, F. Marchesoni, Nori F. *Phys. Rev. B*, **71** (2005), 214303.
- [77] T. Bohr., P. Bak, M. H. Jensen. *Phys. Rev. A*, **30** (1984), 1970.
- [78] M. Borromeo, G. Constantini, F. Marchesoni. *Phys. Rev. Lett.*, **82** (1999), 2820.
- [79] R. L. Kautz. *Re. Prog. Phys.*, **59** (1996), 935.
- [80] M. H. Jensen, P. Bak, T. Bohr. *Phys. Rev. A*, **30** (1984), 1960.
- [81] C. Reichhardt, Nori F. *Phys. Rev. Lett.*, **82** (1999), 414.
- [82] S. Flach, O. Yevtushenko, Y. Zolotaryuk. *Phys. Rev. Lett.*, **84** (2000), 2358.
- [83] S. Denisov, S. Flach. *Phys. Rev. E*, **64** (2001), 056236.
- [84] S. Denisov. *Phys. Lett. A*, **296** (2002), 197.

- [85] M. Barbi, M. Salerno. *Phys. Rev. E*, **62** (2000), 1988.
- [86] M. Barbi, M. Salerno. *Phys. Rev. E*, **63** (2001), 066212.
- [87] H. A. Larrondo, Fereydoon Family, C.M. Arizmendi. *Physica A*, **303** (2002), 67.
- [88] S. Cilla, F. Falo, L. M. Floría. *Phys. Rev. E*, **63** (2001), 031110.
- [89] G. Carapella. *Phys. Rev. B*, **63** (2001), 054515.
- [90] G. Carapella, G. Costabile. *Phys. Rev. Lett.*, **87** (2001), 077002.
- [91] E. Goldobin, A. Sterck, D. Koelle. *Phys. Rev. E*, **63** (2001), 031111.
- [92] G. Carapella, G. Costabile, N. Martucciello, M. Cirillo, R. Latempa, A. Polcari, G. Filatrella. *Physica C*, **382** (2002), 337.
- [93] Franco Nori. *Nature Phys.*, **2** (2006), 227.
- [94] R. Salgado-García, M. Aldana, G. Matínez-Mekler. *Phys. Rev. Lett.*, **96** (2006), 134101.
- [95] M. Kostur, Lukasz Manchura, P. Hänggi, Jerzy Luczka, P. Talkner. *Physica A*, **371** (2006), 928.
- [96] Hongbin Chen, et al. *Phys. Rev. E*, **71** (2005), 031102.
- [97] G. L. Baker, J. P. Gollub. *Chaotic Dynamics, an Introduction*. Cambridge University Press, 2nd edn., 1996.
- [98] William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling. *Numerical Recipes in FORTRAN 77*. Cambridge University Press, 1992.
- [99] L. Morales-Molina, N. R. Quintero, F. G. Mertens, A. Sánchez. *Phys. Rev. Lett.*, **91** (2003), 234102.
- [100] Woo-Sik Son, Inbo Kim, Young-Jai Park, Chil-Min Kim. *Phys. Rev. E*, **68** (2003), 067201.
- [101] Fereydoon Family, H. A. Larrondo, D. G. Zarlenga, C. M. Arizmendi. *J. Phys.:Condensed Matter*, **17** (2005), 3719.

- [102] S. Denisov. *Physica A*, **377** (2007), 429.
- [103] J. E. Villegas, S. Savelev, F.Ñori, E. M. González, J. V. Anguita, R. García, J. L. Vincent. *Science*, **302** (2003), 1188.
- [104] S. Al-Khawaja. *Physica C*, **420** (2005), 30.
- [105] C. C. de Souza Silva, J. Van de Vondel, M. Morelle, V. V. Moshchalkov. *Nature*, **440** (2006), 651.
- [106] J. Van Vondel, C. C. de Souza Silva, B. Y. Zhu, M. Morelle, V. V. Moshchalkov. *Phys. Rev. Lett.*, **94** (2005), 057003.
- [107] C. C. de Souza Silva, J. Van de Vondel, B. Y. Zhu, M. Morelle, V. V. Moshchalkov. *Phys. Rev. B*, **73** (2006), 014507.
- [108] A. Sterck, S. Weiss, D. Koelle. *Appl. Phys. A*, **75** (2005), 253.
- [109] A. Sterck, R. Kleiner, D. Koelle. *Phys. Rev. Lett.*, **95** (2005), 177006.
- [110] M. Beck, E. Goldobin, M.Ñeuhaus, M. Siegel, R. Klainer, D. Koelle. *Phys. Rev. Lett*, **95** (2005), 090603.
- [111] P. Reimann, C. Van den Broeck, R. Kawai. *Appl. Phys. Rev. E*, **60** (1999), 6402.
- [112] J. Buceta, J. M. Parrondo, C. Van den Broeck, F. J. de la Rubia. *Phys. Rev. E*, **61** (2000), 6287.
- [113] S. E. Mangioni, R. R. Deza, H. S. Wio. *Phys. Rev. E.*, **63** (2001), 041115.
- [114] B. Cleuren, C. Van den Broeck. *Europhys. Lett.*, **54** (2001), 1.
- [115] R. Eichhorn, P. Reimann, P. Hänggi. *Phys. Rev. Lett.*, **88** (2002), 190601.
- [116] B. Cleuren, C. Van den Broeck. *Phys. Rev. E*, **66** (2002), 130101.
- [117] B. Cleuren, C. Van den Broeck. *Phys. Rev.E*, **67** (2003), 055101.
- [118] B. Jiménez de Cisneros, P. Reimann, J. M. Parrondo. *Europhys. Lett.*, **64** (2003), 599.

- [119] A. Haljas, R. Mankin, A. Sauga, E. Reiter. *Phys. Rev. E*, **70** (2004), 041107.
- [120] R. Eichhorn, P. Reimann, B. Cleuren, C. Van den Broeck. *Chaos*, **15** (2005), 026113.
- [121] A. Ros, R. Eichhorn, J. Regtmeier, T. T. Duong, P. Reimann, D. Anselmetti. *Nature*, **436** (2005), 928.
- [122] R. Eichhorn, P. Reimann. *Europhys. Lett.*, **69** (2005), 517.
- [123] L. Manchura, M. Kostur, P. Talker, J. Luczka, P. Hänggi. *Phys. Rev. Lett.*, **98** (2007), 040601.
- [124] F. R. Alatríste, J. L. Mateos. *Physica A*, doi:10.1016/j.physa.2007.05.063, (2007).
- [125] R. D. Astumian. *Science*, **276** (1997), 917.
- [126] I. Derényi, T. Vicsek. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **93** (1996), 6776.
- [127] G. Stratopoulos, T. E. Dialynas, G. P. Tsironis. *Phys. Rev. A*, **252** (1999), 151.
- [128] S. Klumpp, A. Mielke, C. Wald. *Phys. Rev. E*, **63** (2001), 031914.
- [129] T. C. Elston, d. You, C. S. Peskin. *SIAM J. Appl. Math.*, **61** (2000), 776.
- [130] M. Bier. *Phys. Rev. Lett.*, **91** (2003), 148104.
- [131] R. Kanada, K. Sasaki. *Phys. Rev. E*, **67** (2003), 061917.
- [132] J. L. Mateos, Neiman, F. Moss, J. A. Freund, L. Schimansky-Geier, I. M. sokolov. In «Proc. of SPIE», , (eds.) Schimansky-Geier, D. Abbot, Neiman, C. Van de Broeck. 2003, vol. 5114, 20.
- [133] J. L. Mateos, Neiman, F. Moss. In «AIP Conference Proceedings», , (ed.) S. M. Bezrukov. 2003, 569.
- [134] J. L. Mateos. *Fluctuation and Noise Letters*, **4** (2004), L161.
- [135] J. L. Mateos. *Physica A*, **351** (2005), 79.



## Phase synchronization in tilted deterministic ratchets

Fernando R. Alatríste, José L. Mateos\*

*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 20-364, 01000 México, D.F., México*

Available online 11 September 2006

### Abstract

We study phase synchronization for a ratchet system. We consider the deterministic dynamics of a particle in a tilted ratchet potential with an external periodic forcing, in the overdamped case. The ratchet potential has to be tilted in order to obtain a rotator or self-sustained nonlinear oscillator in the absence of external periodic forcing. This oscillator has an intrinsic frequency that can be entrained with the frequency of the external driving. We introduced a linear phase through a set of discrete time events and the associated average frequency, and show that this frequency can be synchronized with the frequency of the external driving. In this way, we can properly characterize the phenomenon of synchronization through Arnold tongues, which represent regions of synchronization in parameter space, and discuss their implications for transport in ratchets.

© 2006 Elsevier B.V. All rights reserved.

**Keywords:** Synchronization; Ratchets; Brownian motors; Classical transport

### 1. Introduction

The phenomenon of synchronization is widespread in Nature. We witness its manifestations in many different places and contexts. Synchronization is essentially a nonlinear phenomenon and is very common in many complex systems, not only in the physical sciences, but in the life sciences as well [1–4]. In particular, the case of phase synchronization establishes a common formalism to treat both nonlinear periodic oscillators, as well as chaotic and noisy oscillators [1,5].

In a different context, there has been an increasing interest during recent years in the study of transport phenomena of nonlinear systems that can extract usable work from unbiased non-equilibrium fluctuations. These, so-called Brownian motors (or thermal ratchets) can be modeled by a Brownian particle undergoing a random walk in a periodic asymmetric potential, and being acted upon by an external time-dependent force of zero average. The recent burst of work is motivated by both: (i) the challenge to model unidirectional transport of molecular motors within the biological realm and; (ii) the potential for novel technological applications that enables an efficient scheme to shuttle, separate and pump particles on the micro- and even nanometer scale [6–11].

Although the vast majority of the literature in this field considers the presence of noise, there have been attempts to model the transport properties of classical deterministic ratchets as well [12–19]. In this paper we

\*Corresponding author. Tel.: +52 55 5622 5130; fax: +52 55 5622 5015.

E-mail address: [mateos@fisica.unam.mx](mailto:mateos@fisica.unam.mx) (J.L. Mateos).

will be dealing with a deterministic tilted ratchet in the overdamped regime that acts as a rotator or self-sustained oscillator with a characteristic frequency, even in the absence of an external periodic forcing. The dynamics can be represented by a particle in a washboard potential that has been studied in many different contexts, like phase dynamics in synchronization [1,5], pendulum dynamics [20], rotators [1], superionic conductors [21], optical potentials [22], excitable systems [23], diffusion on surfaces [24–29], charge density waves [30] and Josephson junctions dynamics [1,21,31]. When the washboard potential is periodically driven it exhibits a great variety of nonlinear phenomena including phase locking, hysteresis [32] and chaos [33].

Here we will study the synchronization properties of an overdamped particle moving on a tilted ratchet potential that is rocked by a periodic external force. Throughout this paper we will consider a constant force above the critical value, in such a way that the particle slides down the washboard potential, even though it is in the overdamped regime. When the periodic forcing is absent, the particle experiences only a fixed washboard potential, and moves through each period of the ratchet in a given constant time that defines the period  $\tau_0$  of this rotator. The associated frequency  $\omega_0 = 2\pi/\tau_0$  is its characteristic frequency. In this sense, this rotator is effectively acting as a self-sustained oscillator, with its own characteristic frequency. That is, if the rotator is driven by a constant force, it acquires the same features of a self-sustained oscillator, having a limit cycle in phase space. Thus, forced rotators are similar to self-sustained oscillators and can be synchronized by a periodic external force. We will drive this rotator with an external periodic force of period  $\omega_D$ . In this way we can define properly the synchronization of the rotator and the external forcing. The current or average velocity, which is the important quantifier for this system, displays steps as a function of a control parameter. This last result has been found previously by other authors that have studied overdamped deterministic ratchets [12–14,34]. On the experimental side, these so-called Shapiro steps have been found recently for deterministic Josephson vortex ratchets and three-junction SQUID rocking ratchets [35,36].

More recent studies consider the problem of synchronization of deterministic ratchets, but they deal with complete synchronization between two coupled ratchets [37–40], and with anticipated synchronization between two unidirectional coupled ratchets with time delay [41]. In this work, instead, we are dealing with phase synchronization through a linear phase, properly defined through a set of discrete time events.

As a way of characterizing the synchronization phenomenon, we will calculate, for the first time, the so-called Arnold tongues for the tilted deterministic ratchet. For a description of Arnold tongues in circle maps and pendulum dynamics see Refs. [20,30,42]. Arnold tongues are regions of synchronization in a parameter space. Here, we will calculate these regions in a two-dimensional parameter space defined by the ratio  $\omega_D/\omega_0$  and the amplitude of the driving periodic force  $F_D$ . The tips of the tongues are located on rational values of the ratio  $\omega_D/\omega_0 = p/q$ , where  $p$  and  $q$  are integer numbers. Each tongue is therefore labeled by a rational  $p/q$  whose inverse is precisely the value of the current in the driven washboard potential; the widths of these Arnold tongues correspond to the size of the steps of the current as a function of  $F_D$ .

## 2. Tilted ratchets as nonlinear rotators

To start out, let us consider now the one-dimensional problem of a particle driven by a periodic time-dependent external force in an asymmetric periodic ratchet potential. Here, we do not take into account any sort of noise, meaning that the dynamics is deterministic. Two additional forces act on the particle: a dissipative force proportional to velocity, and an external constant force. We thus deal with a rocked deterministic tilted ratchet [12,14] in the overdamped limit that obeys the following equation of motion:

$$m\gamma\dot{x} + \frac{dV(x)}{dx} = F + F_D \cos(\omega_D t), \quad (1)$$

where  $m$  is the mass of the particle,  $\gamma$  is the friction coefficient,  $V(x)$  is the asymmetric periodic ratchet potential,  $F$  is a constant force,  $F_D$  and  $\omega_D$  represent the amplitude and the frequency of the external driving force, respectively. The ratchet potential is given by

$$V(x) = V_0 \left[ C - \sin \frac{2\pi(x - x_0)}{L} - \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi(x - x_0)}{L} \right], \quad (2)$$

where  $L$  is the periodicity of the potential,  $V_0$  is the amplitude, and  $C$  is an arbitrary constant. The potential is shifted by an amount  $x_0$  in order that the minimum of the potential is located at the origin [16].

Let us define the following dimensionless units:  $x' = x/L$ ,  $x'_0 = x_0/L$ ,  $t' = \gamma t$ ,  $\omega'_D = \omega_D/\gamma$ ,  $F' = F/mL\gamma^2$ ,  $F'_D = F_D/mL\gamma^2$ ,  $V' = V/mL^2\gamma^2$  and  $V'_0 = V_0/mL^2\gamma^2$ . Thus, we are using the periodicity of the potential  $L$  as the natural length scale and the inverse of the friction coefficient  $\gamma$  defines the natural time scale. With these two quantities, the natural force is given by  $mL\gamma^2$  and the associated energy by  $mL^2\gamma^2$ .

The dimensionless equation of motion, after renaming the variables again without the primes, becomes

$$\dot{x} + \frac{dV(x)}{dx} = F + F_D \cos(\omega_D t), \tag{3}$$

where the dimensionless potential can be written as

$$V(x) = V_0 [C - \sin 2\pi(x - x_0) - \frac{1}{2} \sin 4\pi(x - x_0)] \tag{4}$$

and is depicted in the inset of Fig. 1. The constant  $C$  is such that  $V(0) = 0$ , and is given by  $C = -(\sin 2\pi x_0 + 0.25 \sin 4\pi x_0)$ . We choose,  $x_0 \simeq -0.19$ .

We can rewrite the equation of motion Eq. (3) as

$$\dot{x} + \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

where  $U(x, t) = V(x) - [F + F_D \cos(\omega_D t)]x$ . The important point to stress here is that we need to add a constant force  $F$  to the ratchet in order to tilt the ratchet potential and, in this way, obtain a rotator (that acts as a self-sustained oscillator), even without the external periodic forcing [1,44]. In this way, we can properly synchronize the characteristic frequency of the rotator with the driving frequency  $\omega_D$ .

When  $F_D = 0$ , we have a tilted ratchet that obeys the equation of motion:  $\dot{x} + dV(x)/dx = F$ . The tilted (time-independent) washboard potential is, in this case,  $U(x) = V(x) - Fx$ , see Fig. 1. Thus, this ratchet becomes a rotator that has a characteristic frequency  $\omega_0$ . The associated period of the rotator  $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$  can be obtained directly by integrating this equation of motion. However, there is another way to obtain  $\omega_0$  for this tilted ratchet that relies on the introduction of a phase variable for this rotator. So, in what follows we will introduce this general concept that we will use in the rest of the paper.

In order to define a phase variable we need first to obtain a discrete process from the continuous dynamics by introducing discrete time events. These discrete times can be defined as the times when the particle arrives at the discrete position  $x_k = \pm k$ , which correspond to the minima of the ratchet potential without tilt. Here,

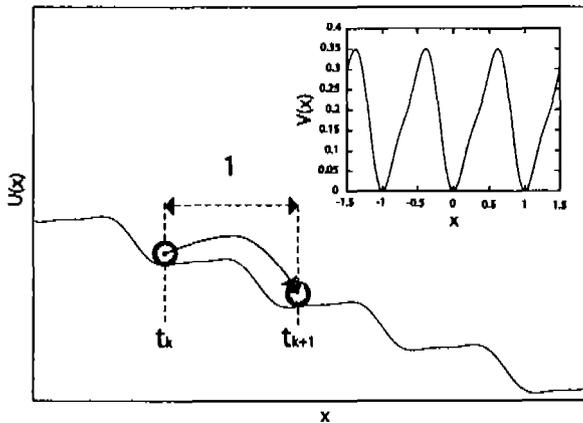


Fig. 1. The tilted washboard potential indicating the dynamics that defines the discrete time events  $t_k$ . The ratchet potential without tilt is illustrated in the inset.

$k = 0, 1, 2, \dots$ . Remember that the period of the ratchet is one:  $V(x + 1) = V(x)$ . This defines the set of times  $t_k$ , where  $k$  is a nonnegative integer. In Fig. 1 we show the washboard potential illustrating these discrete times. Once we obtain these set of markers, we can define an instantaneous linear phase for the rotator as [1,5]

$$\phi(t) = 2\pi \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} + 2\pi k, \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (6)$$

This linear phase is valid in the indicated interval and defines a piecewise linear function of time that increases by  $2\pi$  each time the particle crosses the dimensionless position  $x_k = \pm k$ .

Given this phase, we can define the instantaneous frequency of the rotator as  $\omega(t) = \dot{\phi}(t)$ , and the average frequency as

$$\langle \omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \omega(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [\phi(T) - \phi(0)]. \quad (7)$$

Without loss of generality, we choose  $t_0 = 0$ , and thus  $\phi(0) = 0$ . The limit above can be written as

$$\langle \omega \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\phi(t_k)}{t_k} = 2\pi \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{t_k}. \quad (8)$$

This is the simplest way to calculate the average frequency; we simply count the number of jumps (given by  $k$ ) and divide by the total time span  $t_k$ .

The other quantity of importance is the average velocity or current in the tilted ratchet. In order to evaluate this current we have to calculate the number  $k$  of unit periods that the particle crosses to the right, denoted by  $N_k^R$ , and the number of crossings to the left, given by  $N_k^L$ . The total number of periods traversed on the ratchet is given by  $N_k^T = N_k^R + N_k^L$ . The difference

$$N_k = N_k^R - N_k^L \quad (9)$$

indicates that during the time  $t_k$  the particle has covered the distance  $x_k = N_k$ .

Therefore, the average velocity (current) is given by

$$\langle v \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k}{t_k}. \quad (10)$$

In the particular case when  $N_k^L = 0$ , that is, when there are no jumps to the left, we have  $N_k = N_k^R = k$ . Thus,

$$\langle v \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{t_k} = \frac{1}{2\pi} \langle \omega \rangle. \quad (11)$$

In the simple case of a tilted ratchet without external forcing,  $F_D = 0$ , the average frequency defined above coincides with the natural frequency of the rotator, that is,  $\langle \omega \rangle = \omega_0$ .

The above treatment is quite general and can be used in the case of a tilted ratchet with an inertial term, even though this inertial ratchet can display a chaotic dynamics [15–19], and also in the case of a tilted ratchet with noise. We have used the concept of a linear phase due to its broad-range applications to the cases of periodic and chaotic oscillators [1], chaotic rotators [44], and oscillators in the presence of noise [5]. Additionally, the introduction of the discrete events that define the linear phase allow us to simplify the dynamics and have a more clear picture of the synchronization involved.

### 3. Numerical results

In this section we will solve numerically the equation of motion for the rocking tilted ratchet. We use the fourth-order Runge–Kutta algorithm to solve the differential equation (3). Once we obtain the full trajectory, we identify the set of discrete times  $t_k$  when the particle crosses the positions  $x_k$ . With this marker events we calculate directly the average frequency using Eq. (8) and, after calculating the quantity  $N_k$ , we obtain the current, using Eq. (10). We will fix throughout the paper the amplitude of the ratchet potential as  $V_0 = \frac{1}{2}\pi$ . With this value, the critical tilt to the right is  $F_c^R = 0.75$  and to the left  $F_c^L = -1.5$ .

In Fig. 2, we depict the average velocity, scaled with the driving frequency,  $2\pi\langle v \rangle/\omega_D$  as a function of the tilt  $F$ . The dashed line shows the case without periodic driving ( $F_D = 0$ ) and corresponds to the fixed washboard

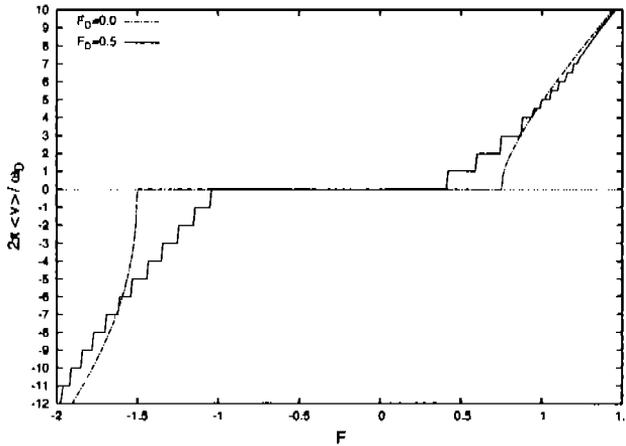


Fig. 2. The average velocity as a function of the external force  $F$ . The dashed line indicates the case when the periodic driving is absent ( $F_D = 0$ ) and the continuous line is the case when the periodic driving is acting on the particle with an amplitude  $F_D = 0.5$ . In both cases we used  $\omega_D = 0.7$ .

potential  $U(x) = V(x) - Fx$ . Note that the current is zero until we arrive at the critical tilt  $F_c^R = 0.75$  to the right or to the critical tilt  $F_c^L = -1.5$  to the left. This step of zero current is not centered around the origin, due to the asymmetry of the ratchet potential. For values greater than  $F_c^R$  we have a finite current that increases monotonically with  $F$ . Of course, for values less than  $F_c^L$  we obtain a negative average current that decreases for negative values of the tilt. When the periodic driving is present, this scaled current acquires a series of clearly defined steps for values of the current given by the ratio  $p/q$ , where  $p$  and  $q$  are integer numbers. In many cases,  $q = 1$  and the average scaled current is an integer. In the context of Josephson junctions, these are the celebrated Shapiro steps [33].

Remember that in the case where all the jumps are to the right, that is,  $N_k^L = 0$ , we show that  $2\pi \langle v \rangle = \langle \omega \rangle$ . Therefore, a rational value of  $2\pi \langle v \rangle / \omega_D = p/q$  means that  $\langle \omega \rangle = (p/q)\omega_D$  for a whole range of values of the tilt. This phenomenon is called frequency locking.

In Fig. 3, we show the scaled average velocity  $2\pi \langle v \rangle / \omega_D$  as a function of the amplitude of the periodic driving  $F_D$ . In (a), the dashed line depicts the current for the ratchet without tilt ( $F = 0$ ) and coincide with previous calculations [12–14] showing a structure of steps of unit height. The solid line shows the current for a tilted ratchet with  $F = 1$  that also has well defined steps for rational values. In (b)–(d) we show successive magnifications of the current that clearly exhibits a self-similar structure of steps, typical of a devil’s staircase [42,43]. This detailed structure has been reported before [13,14] for an overdamped ratchet without tilt, but here we obtained this fractal current with a devil’s staircase also for the tilted ratchet.

In Fig. 4, we depict the parameter space  $F_D$  against  $\omega_D / \omega_0$  that shows regions of synchronization, called Arnold tongues, located at rational values  $p/q$ , where  $p$  and  $q$  are integer numbers. We choose a tilt  $F = 1$ , which corresponds to  $\omega_0 \simeq 3.41$ . Note that the tongues start, for small values of  $F_D$ , precisely at these rational values, as indicated in the figure. Each Arnold tongue corresponds to one particular rational  $p/q$  whose inverse gives the value of the scaled average velocity  $2\pi \langle v \rangle / \omega_D$  in that region of the parameter space. This is depicted in a three-dimensional plot in Fig. 5. Therefore, the average velocity, properly scaled, acquires rational values  $q/p$ , which correspond to the phenomenon of phase synchronization in this forced tilted ratchet, acting as a rotator [44].

Finally, in Fig. 6, we plot the average velocity, scaled now as  $2\pi \langle v \rangle / \omega_0$ , as a function of the ratio  $\omega_D / \omega_0$ . Here,  $\omega_0$  is a fixed value that correspond to the characteristic frequency of the tilted ratchet in the absence of

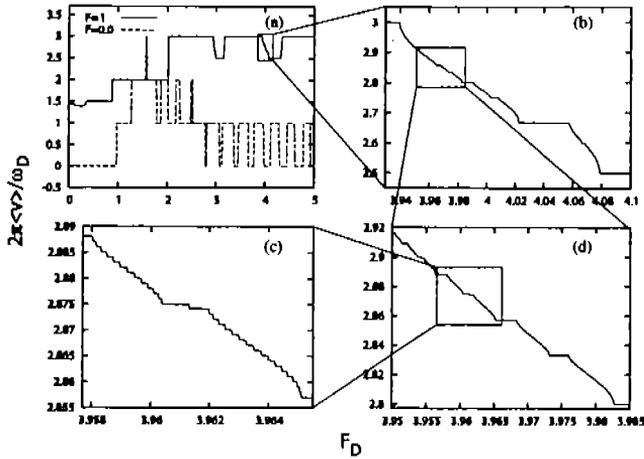


Fig. 3. The scaled average velocity  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D$  as a function of the amplitude of the periodic driving  $F_D$ . (a) The dashed line indicates the case when the tilt is absent ( $F = 0$ ) and the continuous line is the case when the tilt is  $F = 1$ . (b)–(d) correspond to successive magnifications of the current for the tilted ratchet, showing a self-similar structure of steps, typical of a devil's staircase. In the dashed line in (a), we used  $\omega_D = 0.7$ , since in this case  $\omega_0$  is not defined. In the other cases we used  $\omega_D = 0.7\omega_0$ .

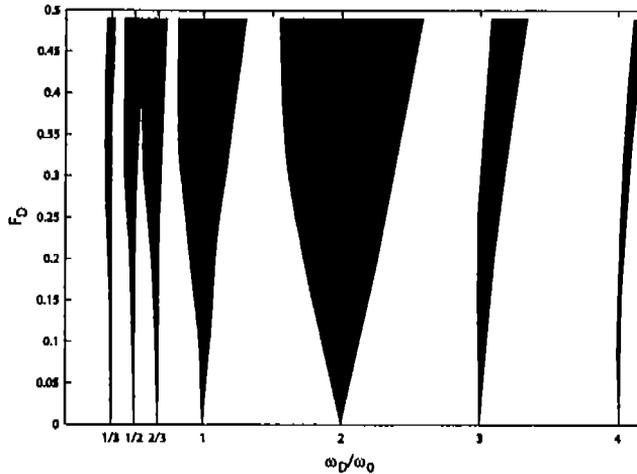


Fig. 4. Arnold tongues in the parameter space  $F_D$  against  $\omega_D/\omega_0$ . Note that the tongues are located precisely at the rational values  $p/q$ , for  $p$  and  $q$  integer numbers, of the ratio between the driving frequency and the natural frequency of the rotor. Here, the tilt is  $F = 1$  and the corresponding frequency is  $\omega_0 \simeq 3.41$ . Each tongue is labeled by the inverse  $q/p$  that gives the value of the scaled average velocity  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D$  in that region of the parameter space.

periodic driving. In the same figure, we plot the average frequency of the rotator, scaled as  $\langle \omega \rangle / \omega_0$ , calculated using the discrete dynamics explained in the previous section. Instead of plateaus, we have now straight lines, since we are scaling the current with a fixed parameter  $\omega_0$ , instead of the running parameter  $\omega_D$ . In this case,

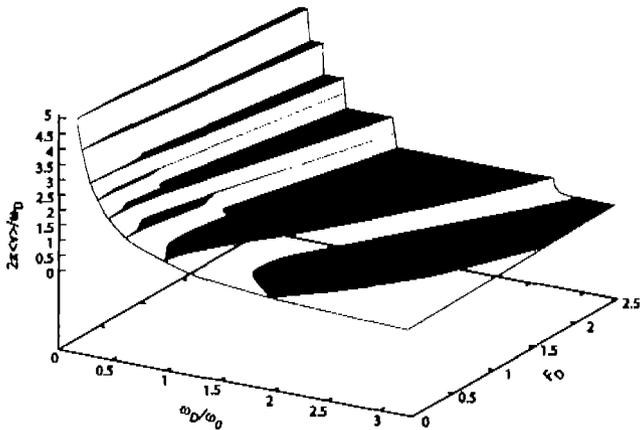


Fig. 5. Three-dimensional plot of the scaled average velocity  $2\pi\langle v \rangle/\omega_D$  as a function of  $F_D$  and  $\omega_D/\omega_0$ . A projection of this three-dimensional plot shows the Arnold tongues in the parameter space of Fig. 4. Here the tilt is  $F = 1$  and  $\omega_0 \simeq 3.41$ .

all the jumps are to the right direction and therefore  $2\pi\langle v \rangle = \langle \omega \rangle$ , that is, the average velocity is proportional to the average frequency of the rotator.

Note that the peak values of the average velocity correspond to the borders of the Arnold tongues in Fig. 4. Thus, when we are crossing an Arnold tongue (synchronization region) the current increases linearly with  $\omega_D/\omega_0$ ; at the right border of the tongue the current is maximal and outside the tongue starts to decrease until we arrive at the next tongue to increase linearly again, and so forth. At the right border of the Arnold tongue, labeled by  $p/q = 1$ , the current has a maximum, followed by the second largest peak at the right border of the tongue with  $p/q = 2$ . The heights of the peaks in the current arise due to the combined effect of both the width of the tongues and the slope of the linear segments. The slopes of each of the segments correspond precisely to the inverse values  $q/p$  that label the tongues. Therefore, the peaks in the current are associated with the phenomenon of synchronization.

#### 4. Concluding remarks

In summary, we have analyzed the phenomenon of phase synchronization in tilted deterministic ratchets in the overdamped regime and with an external periodic forcing. The dynamics in this rocked washboard potential corresponds precisely with the dynamics of a rotator that, acting as a self-sustained oscillator, can be capable of being synchronized with the external periodic drive. We can clearly identify three frequencies for this system: the characteristic frequency of the rotator without driving, the driving frequency itself, and the average frequency of the rotator with driving. This average frequency is the derivative of a time-dependent phase, that can be obtained through a set of discrete time events and is a piecewise linear function of time between these markers. We calculated the average frequency and the average velocity as a function of the tilt and obtained the well-known Shapiro steps that characterize the phenomenon of frequency locking. We also exhibit the self-similar structure of steps in the current, typical of a devil's staircase. We obtained well-defined Arnold tongues in the two-dimensional parameter space given by the amplitude and the frequency of the periodic forcing. Each Arnold tongue is labeled by a rational number  $p/q$ , where  $p$  and  $q$  are integer numbers, whose inverse gives precisely the rational value of the average scaled velocity of the particle. Finally, we show that the local maxima in the average velocity correspond to the borders of these Arnold tongues and, in this way, we established a connection between optimal transport in ratchets and the phenomenon of phase synchronization.

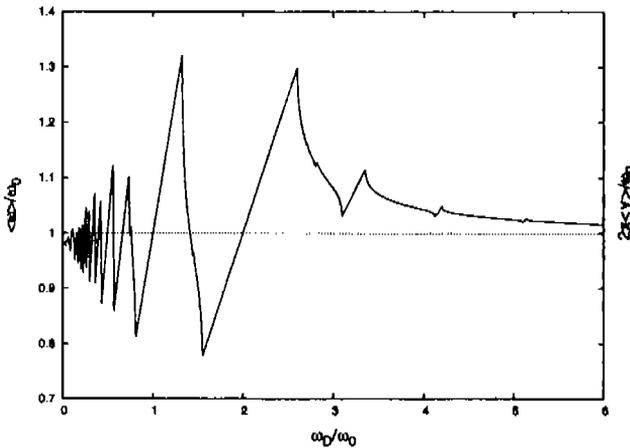


Fig. 6. Average velocity; scaled now as  $2\pi\langle v \rangle/\omega_0$ , and the average frequency of the rotator, scaled as  $\langle \omega \rangle/\omega_0$  as a function of the ratio  $\omega_D/\omega_0$ . The straight line segments correspond to the steps observed due to phase synchronization in Fig. 4. The peaks in the current are located at the right borders of the Arnold tongues in Fig. 4. Here, the tilt is  $F = 1$ ,  $\omega_0 \simeq 3.41$ , and  $F_D = 0.5$ .

## Acknowledgements

FRA gratefully acknowledges financial support from CONACYT scholarship. JLM also wants to thank the Alexander von Humboldt Foundation for support.

## References

- [1] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Science, Cambridge University Press, Cambridge, MA, 2001.
- [2] L. Glass, *Nature* 410 (2001) 277.
- [3] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D.L. Valladares, C.S. Zhou, *Phys. Rep.* 366 (2002) 1.
- [4] J.A. Acebrón, L.L. Bonilla, C.J. Pérez Vicente, F. Ritort, R. Spigler, *Rev. Mod. Phys.* 77 (2005) 137.
- [5] V.S. Anishchenko, V.V. Astakhov, A.B. Neiman, T.E. Vadivasova, L. Schimansky-Geler, *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems*, Springer, Berlin, 2002.
- [6] R.D. Astumian, P. Hänggi, *Phys. Today* 55 (11) (2002) 33.
- [7] P. Reimann, *Phys. Rep.* 361 (2002) 57.
- [8] P. Reimann, P. Hänggi, *Appl. Phys. A* 75 (2002) 169.
- [9] H. Linke, *Appl. Phys. A* 75 (2002) 167 (Special issue on Brownian motors).
- [10] P. Hänggi, F. Marchesoni, F. Nori, *Ann. Physik (Leipzig)* 14 (2005) 51.
- [11] J. Klafter, M. Urbakh, *J. Phys. Condens. Matter* 17 (47) (2005) (Special issue on molecular motors).
- [12] R. Bartussek, P. Hänggi, J.G. Kilsner, *Europhys. Lett.* 28 (1994) 459.
- [13] A. Ajdari, D. Mukamel, L. Peliti, J. Prost, *J. Phys. I France* 4 (1994) 1551.
- [14] P. Hänggi, R. Bartussek, in: J. Parisi, S.C. Müller, W. Zimmermann (Eds.), *Nonlinear Physics of Complex Systems*, Lecture Notes in Physics, vol. 476, Springer, Berlin, 1996, pp. 294–308.
- [15] P. Jung, J.G. Kilsner, P. Hänggi, *Phys. Rev. Lett.* 76 (1996) 3436.
- [16] J.L. Mateos, *Phys. Rev. Lett.* 84 (2000) 258.
- [17] J.L. Mateos, *Physica D* 168–169 (2002) 205.
- [18] J.L. Mateos, *Physica A* 325 (2003) 92 and references therein.
- [19] M. Borromeo, G. Costantini, F. Marchesoni, *Phys. Rev. E* 65 (2002) 041110.
- [20] G.L. Baker, J.P. Gollub, *Chaotic Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1990.
- [21] H. Risken, *The Fokker–Planck Equation*, Springer, Berlin, 1996.

- [22] S.A. Tutarkova, W. Sibbett, K. Dholakia, *Phys. Rev. Lett.* 91 (2003) 038101.
- [23] B. Lindner, J. Garcia-Ojalvo, A. Neiman, L. Schimansky-Geier, *Phys. Rep.* 392 (2004) 321.
- [24] A.M. Lacasta, J.M. Sancho, A.H. Romero, K. Lindenberg, *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005) 160601.
- [25] K. Lindenberg, A.M. Lacasta, J.M. Sancho, A.H. Romero, *New J. Phys.* 7 (2005) 29.
- [26] R. Gauntes, S. Miret-Artés, *Phys. Rev. E* 67 (2003) 046212.
- [27] S. Sengupta, R. Gauntes, S. Miret-Artés, P. Hänggi, *Physica A* 338 (2004) 406.
- [28] C. Reichhardt, C.J. Olson Reichhardt, M.B. Hastings, *Phys. Rev. E* 69 (2004) 056115.
- [29] S. Savel'ev, V. Misko, F. Marchesoni, F. Nori, *Phys. Rev. B* 71 (2005) 214303.
- [30] T. Bohr, P. Buk, M.H. Jensen, *Phys. Rev. A* 30 (1984) 1970.
- [31] M. Borromeo, F. Marchesoni, *Chaos* 15 (2005) 026110.
- [32] M. Borromeo, G. Costantini, F. Marchesoni, *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999) 2820.
- [33] R.L. Kautz, *Rep. Prog. Phys.* 59 (1996) 935.
- [34] D. Reguera, P. Reimann, P. Hänggi, M. Rubi, *Europhys. Lett.* 57 (2002) 644.
- [35] M. Beck, E. Goldobin, M. Neuhaus, M. Siegel, R. Kleiner, D. Koelle, *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005) 090603.
- [36] A. Sterck, R. Kleiner, D. Koelle, *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005) 177006.
- [37] U.E. Vincent, A.N. Njah, O. Akinalde, A.R.T. Solarin, *Chaos* 14 (2004) 1018.
- [38] U.E. Vincent, A. Kenfack, A.N. Njah, O. Akinalde, *Phys. Rev. E* 72 (2005) 056213.
- [39] U.E. Vincent, A.N. Njah, O. Akinalde, A.R.T. Solarin, *Physica A* 360 (2006) 186.
- [40] D.G. Zarlenga, H.A. Larrondo, C.M. Arizmendi, F. Family, *Physica A* 352 (2005) 282.
- [41] M. Kostur, P. Hänggi, P. Talkner, J.L. Mateos, *Phys. Rev. E* 72 (2005) 036210.
- [42] M.H. Jensen, P. Buk, T. Bohr, *Phys. Rev. A* 30 (1984) 1960.
- [43] C. Reichhardt, F. Nori, *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999) 414.
- [44] G.V. Osipov, A.S. Pikovsky, J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* 88 (2002) 054102.



R00116187\_PHY&A\_10055



# Anomalous mobility and current reversals in inertial deterministic ratchets

Fernando R. Alatríste, José L. Mateos\*

*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 20-364, 01000 México, D.F., México*

Received 12 March 2007; received in revised form 24 May 2007

## Abstract

We analyze the transport properties of inertial deterministic rocking ratchets in the presence of an external constant force. For small values of this load, we can obtain a positive current for a negative load, and vice versa. This phenomenon, in which the direction of the current is opposed to the sign of the external force, is a signature of anomalous negative mobility. We show that this anomalous mobility is possible in the deterministic case, and explain this phenomenon as current reversals associated to bifurcations in an inertial deterministic rocking ratchet in the presence of an external load. © 2007 Elsevier B.V. All rights reserved.

*PACS:* 05.45.Ac; 05.40.Fb; 05.45.Pq; 05.60.Cd

*Keywords:* Ratchets; Brownian motors; Classical transport

## 1. Introduction

A ratchet is a system in which an asymmetry is built in to rectify a signal of zero average [1–4]. Among the many kinds of ratchets studied recently, an important class refers to classical deterministic inertial ratchets in which the dynamics does not have any randomness or stochastic elements [5–7]. Since a ratchet is a non linear system, in some cases its deterministic dynamics can exhibit chaotic motion. This is indeed the case when we consider inertial effects, for instance, in a one-dimensional rocking ratchet [8–11]. This kind of ratchet can be modeled by a particle with inertia and friction on a one-dimensional asymmetric ratchet potential and acted by a harmonic time-dependent force of zero average. For this case, a surprising phenomenon appears: current reversals [8–20]. These reversals of the average velocity were explained in Ref. [9], by establishing a connection of the current with the bifurcation diagram as a function of a control parameter. It has been found that even in the case of bifurcations from periodic to periodic orbits it is possible to found current reversals, or that in some other cases a tangent bifurcation is not associated with a current reversal. However, we can say that, in general, there is a strong connection between the current in a deterministic ratchet and its bifurcation diagram. Usually, the different types of bifurcations are linked with sudden changes in the current: either

\*Corresponding author. Tel.: +52 55 5622 5130; fax: +5 55 5622 5015.  
E-mail address: [mateos@fisica.unam.mx](mailto:mateos@fisica.unam.mx) (J.L. Mateos).

current reversals, abrupt changes from a finite current (positive or negative) to a zero current, or just sudden changes in the absolute value of the current.

In Ref. [9], a deterministic rocking inertial ratchet was studied and it was established that current reversals can be associated with tangent bifurcations from chaotic to periodic orbits, that lead to intermittency and anomalous diffusion. In this case, the control parameter of the bifurcation diagram was the amplitude of the harmonic forcing. As in many other nonlinear dynamical systems, the dynamics of a deterministic ratchet can be even more complex. For other values of the amplitude of forcing, we notice in the bifurcation diagram signatures that indicate the possibility of coexisting attractors in phase space. In Ref. [11], the effect of current reversals in inertial chaotic ratchets, without changing a control parameter, was studied. This situation, which was termed the battle of the attractors, can occur when we have multiple coexisting attractors that transport particles in opposite directions. Each attractor has its own basin of attraction that is selected through initial conditions.

The study of inertial deterministic ratchets is nowadays an important subfield in its own, due to recent experiments on vortex and SQUID ratchets, where the importance of inertial deterministic ratchets has been stressed [21–29]:

We will be dealing with a deterministic inertial ratchet, but with an additional external constant force that provides a fixed tilt in the ratchet potential, and thus the dynamics can be represented by an inertial particle in a washboard potential. In this paper, we will show that a deterministic particle is able to exhibit anomalous mobility in a one-dimensional periodic ratchet potential. That is, the current has the opposite sign of the external constant force, for small values of the latter. Previous studies of anomalous and absolute negative mobility considered nonequilibrium systems with stochastic forces or thermal noise, in the case of interacting Brownian particles [30–34] and single particle stochastic models [35–45]. More recently, the case of absolute negative mobility in a one-dimensional periodic and symmetric potential, including the deterministic case, was studied [46,47]. Therefore, this one-dimensional deterministic model can be considered the simplest case exhibiting anomalous mobility in a ratchet system.

## 2. Anomalous mobility in inertial tilted ratchets

Let us consider the one-dimensional problem of a particle driven by a periodic time-dependent external force in an asymmetric periodic ratchet potential. Here, we do not take into account any sort of noise, meaning that the dynamics is deterministic. Two additional forces act on the particle: a dissipative force proportional to the velocity, and an external constant force. We thus deal with a rocked deterministic tilted ratchet in the underdamped case that obeys the dimensionless equation of motion:

$$\ddot{x} + \dot{x} + \frac{dV(x)}{dx} = F + F_D \cos(\omega_D t), \quad (1)$$

where  $V(x)$  is the asymmetric periodic ratchet potential,  $F$  is a constant force,  $F_D$  and  $\omega_D$  represent the amplitude and the frequency of the external driving force, respectively. The dimensionless ratchet potential is given by

$$V(x) = V_0 \left[ C - \sin 2\pi(x - x_0) - \frac{1}{4} \sin 4\pi(x - x_0) \right], \quad (2)$$

where  $V_0$  is the amplitude, and  $C$  is an arbitrary constant. The potential is shifted by an amount  $x_0$  in order that the minimum of the potential is located at the origin, and is depicted in the inset of Fig. 1. The constant  $C$  is such that  $V(0) = 0$ , and is given by  $C = -(\sin 2\pi x_0 + 0.25 \sin 4\pi x_0)$ . We choose,  $x_0 \simeq -0.19$ , see [9].

When  $F_D = 0$ , we have a tilted ratchet that obeys the equation of motion:  $\ddot{x} + \dot{x} + dV(x)/dx = F$ . The tilted (time-independent) washboard potential is, in this case,  $U(x) = V(x) - Fx$ , see Fig. 1.

## 3. Numerical results

In this section we will solve numerically the equation of motion for the rocking tilted inertial ratchet. We use the fourth-order Runge-Kutta algorithm to solve the differential equation (1). We will fix throughout the

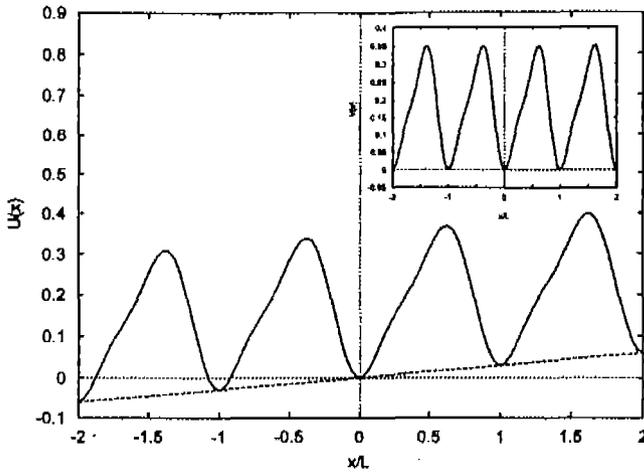


Fig. 1. The tilted washboard ratchet potential for small values of the tilt where the effect of anomalous mobility is observed in the deterministic dynamics.

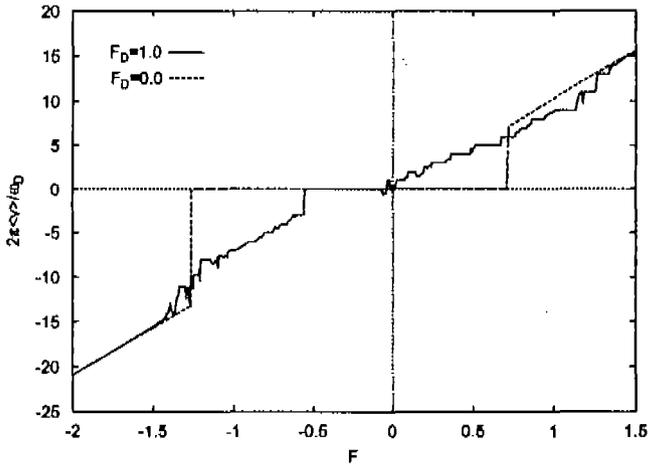


Fig. 2. The scaled average velocity  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D$  as a function of the amplitude of the external force  $F$ . The dashed line indicates the case when the driving harmonic force is absent ( $F_D = 0$ ) and the continuous line is the case when this force is  $F_D = 1.0$ . In both cases we used  $\omega_D = 0.6$ .

paper the amplitude of the ratchet potential as  $V_0 = 1/2\pi$ . With this value, the critical tilt to the right is  $F_c^R \simeq 0.71$  and to the left  $F_c^L \simeq -1.26$ .

In Fig. 2, we depict the time average velocity, scaled with the driving frequency,  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D$  as a function of the tilt  $F$ . The dashed line shows the case without periodic driving ( $F_D = 0$ ) and corresponds to the fixed washboard potential  $U(x) = V(x) - Fx$ . Notice that the current is zero until we arrive at the critical tilt  $F_c^R$  to the right or to the critical tilt  $F_c^L$  to the left. This step of zero current is not centered around the origin, due to

the asymmetry of the ratchet potential. For values greater than  $F_c^R$  we have a finite current that increases monotonically with  $F$ . Of course, for values less than  $F_c^R$  we obtain a negative average velocity that decreases for negative values of the tilt. When the periodic driving is present, the current acquires a series of clearly defined steps for values of the current given by the ratio  $p/q$ , where  $p$  and  $q$  are integer numbers. In many cases,  $q = 1$  and the average current is an integer. Therefore, a rational value of  $2\pi(v)/\omega_D = p/q$  means that  $(\omega) = (p/q)\omega_D$  for a whole range of values of the tilt, since the average frequency  $(\omega) = 2\pi(v)$ . This well-known phenomenon of frequency locking and synchronization has been explored recently for deterministic overdamped ratchets [48], and coupled inertial ratchets with time delay [49].

In Fig. 3, we show in detail the behavior of the current for small values of the tilt  $F$  around the origin. We notice that the current is positive even though the tilt is negative, and vice versa; a clear signature of anomalous negative mobility. For  $F \simeq -0.03$ , we notice that the current is constant in a whole range of values of  $F$ , indicating frequency locking; in this case  $2\pi(v)/\omega_D = 1$ . That is, for negative values of the tilt, the current is positive and large. On the other hand, in a narrow range around  $F \simeq 0.005$ , the current is negative with  $2\pi(v)/\omega_D = -2$ . Therefore, this figure clearly shows the effect of negative mobility in the case of a deterministic inertial ratchet. This figure also shows a very rich structure of other narrower steps revealing other instances of anomalous negative mobility, and a subtle structure of current reversals. Additionally, we also observe positive mobility for other values of the tilt  $F$ . Outside the range  $-0.07 < F < 0.03$ , we recover the usual situation in which the mobility is zero or has the same sign as the external tilt. Thus, it is only in a limited range of small values of  $F$  around zero that we expect to find the effect of negative mobility. To elucidate the richness of information in this figure, in what follows we will make a comparison of this response with the associated bifurcation diagram.

In order to understand the origin of the anomalous negative mobility in this deterministic ratchet, we will calculate the bifurcation diagram using the tilt  $F$  as the control parameter. To calculate this diagram we solve numerically Eq. (1) and obtain the velocity as a function of time  $\dot{x}(t)$  and then plot the asymptotic value of this velocity as a function of  $F$ . In Fig. 4, we show the bifurcation diagram as a function of  $F$ . Notice the rich structure of the dynamics, showing periodic and chaotic orbits, as is usually the case for inertial deterministic ratchets [9]. In particular, for a critical value around  $F = -0.035$ , we notice a tangent bifurcation from a chaotic to a period orbit, that is responsible for current reversal from negative to positive current. This current is positive and constant for a whole range between  $-0.035 < F < -0.0175$  leading to the phenomenon of

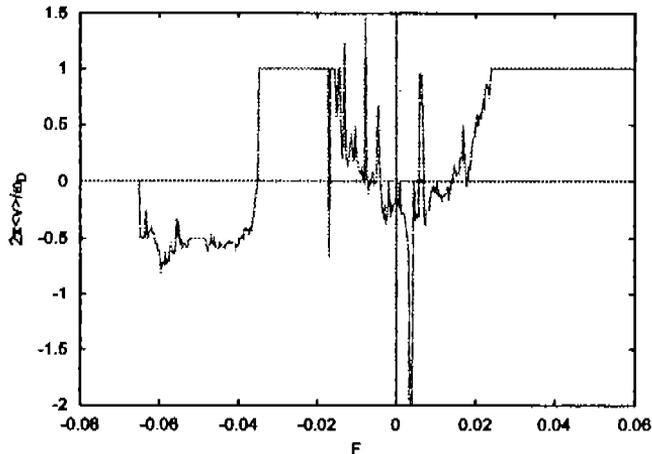


Fig. 3. The detailed structure of the scaled average velocity  $2\pi(v)/\omega_D$  as a function of the amplitude of the external force  $F$ , around  $F = 0$ , for  $F_D = 1.0$  and  $\omega_D = 0.6$ . Notice the step at  $2\pi(v)/\omega_D = 1$  in the interval  $-0.035 < F < -0.0175$ , indicating anomalous negative mobility.

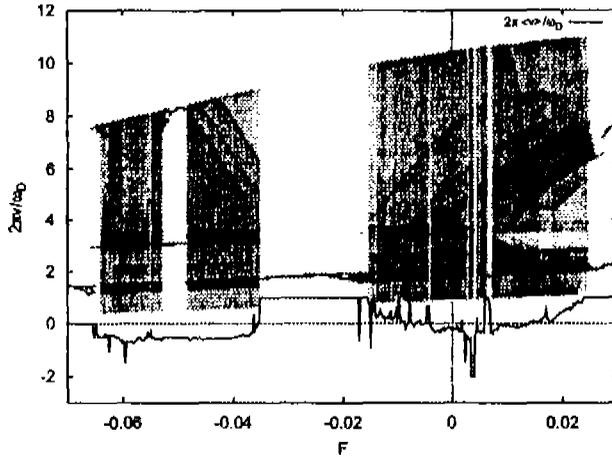


Fig. 4. Bifurcation diagram as a function of the amplitude of the tilt  $F$ , in the same range as Fig. 3, around  $F = 0$ , for  $F_D = 1.0$  and  $\omega_D = 0.6$ .

anomalous negative mobility. Another instance of current reversals associated with bifurcations leading to negative mobility can be observed for positive tilt around  $F \simeq 0.005$ . Notice however that in some other cases, for instance around  $F \simeq -0.05$ , we have another periodic window in the borders of which we have bifurcations from chaotic to period orbits that does not lead to current reversals and anomalous mobility. Additionally, it might be possible that some other kind of bifurcations may induce this anomalous mobility.

Therefore, the negative mobility can be interpreted as a current reversal from the expected direction of motion, and this reversal is associated with a tangent bifurcation from a chaotic to a periodic orbit in the bifurcation diagram, as has been shown in Ref. [9].

It is natural to wonder about the generality of this result for this model. Therefore, we have explored other values in the parameter space and found that the phenomenon of anomalous negative mobility appears only for small values of the tilt  $F$ . We have encountered the same dynamics of current reversals leading to anomalous mobility through bifurcations, for driving amplitudes in the interval  $1 < F_D < 2$ , and driving frequencies in the interval  $0.5 < \omega_D < 1.0$ . This allows us to infer that this effect might be robust, although it would be desirable to explore also other values of the parameters and even other forms for the ratchet potential.

In Fig. 5, we illustrate the chaotic and periodic attractors around the bifurcation point  $F = -0.035$ . For the chaotic attractor,  $F = -0.035123$ , and for the periodic attractor,  $F = -0.035122$ . The inset shows a typical trajectory climbing the tilted ratchet potential (positive current), for the negative value of the tilt  $F = -0.035122$ , characteristic of anomalous negative mobility. In this trajectory we notice that the particle moves one well to the right during exactly one period of the external forcing. This corresponds to a frequency locking where  $p/q = 1/1$ . Due to this 1:1 resonance, the scaled average velocity  $2\pi\langle v \rangle / \omega_D = 1$ , in a whole range of values of the tilt ( $-0.035 < F < -0.0175$ ), as depicted in Fig. 3. We show in Fig. 5 a chaotic and a periodic attractor. The periodic attractor corresponds to a period one orbit and is illustrated as a thick dot near the point  $(0.2, 1.8)$  in phase space. This occurs since we are plotting a Poincaré section using the period of the external forcing as the stroboscopic time. The phase space represented here has the topology of a cylinder, meaning that the velocity is not bounded, but the coordinate  $x$  is bounded due to the periodicity of the ratchet potential; in this representation we used  $x$  modulo one. In an extended (or unfolded) representation, we would see an unbounded coordinate  $x$  that corresponds to an open trajectory that transports particles, as shown in the inset. The chaotic attractor is represented as a set of dots that span through phase space. Since this attractor corresponds to a value of the tilt  $F$  very close to the bifurcation point, the density of points in the attractor tends to increase in the vicinity of the periodic attractor. We have here a typical tangent bifurcation where the

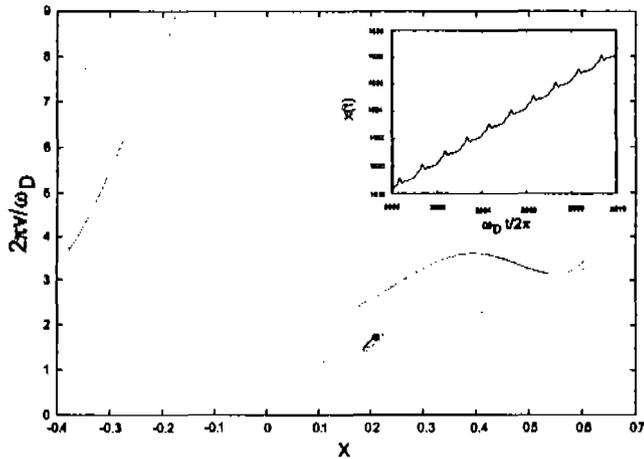


Fig. 5. Phase space illustrating the chaotic and periodic attractors around the bifurcation point  $F = -0.035$ , for  $F_D = 1.0$  and  $\omega_D = 0.6$ . In the inset, we show a typical trajectory climbing the tilted ratchet potential; even though the tilt is negative, the current is positive.

chaotic attractor suddenly collapses to a single point (the periodic attractor) at the critical value of the tilt  $F$ . The dynamics corresponding to the chaotic attractor shown in Fig. 5 has an intermittent character, as discussed in detail in Ref. [9,10]. As mentioned before, at this bifurcation point, we have a current reversal that leads to a positive current for a negative tilt, and therefore to anomalous negative mobility.

#### 4. Concluding remarks

In summary, we have analyzed the deterministic dynamics of a tilted inertial rocking ratchet as a function of the external constant force. We obtained the remarkable phenomenon of anomalous negative mobility in this deterministic case, that is, the direction of the current (average velocity) is opposed to the sign of the applied force. After analyzing the relationship between the current and the bifurcation diagram, taking the tilt as the control parameter, we established that this negative mobility can be interpreted as a current reversal from the expected direction of motion, associated with bifurcations between chaotic and period orbits. We found this connection in a whole range of values of the parameters of the model, such as the driving frequency of the periodic forcing and the driving amplitude. This fact allows us to infer that the phenomenon of anomalous negative mobility might be obtained not only for this particular model but also for other forms of the ratchet potentials.

Finally, it is worth mentioning that this effect is amenable to be explored experimentally using Josephson Junctions or vortex ratchets, where the equations of motion and the associated dynamics is similar to the nonlinear dynamics of inertial deterministic ratchets.

#### Acknowledgments

FRA gratefully acknowledges financial support from CONACYT scholarship.

#### References

- [1] R.D. Astumian, P. Hänggi, *Phys. Today* 55 (11) (2002) 33.
- [2] P. Reimann, P. Hänggi, *Appl. Phys. A* 75 (2002) 169.

- [3] H. Linke, *Appl. Phys. A* 75 (2002) 167 (Special issue on Brownian motors).
- [4] P. Hänggi, F. Marchesoni, F. Nori, *Ann. Physik (Leipzig)* 14 (2005) 51.
- [5] R. Bartussek, P. Hänggi, J.G. Kissner, *Europhys. Lett.* 28 (1994) 459.
- [6] S. Savell'ev, F. Marchesoni, P. Hänggi, F. Nori, *Phys. Rev. E* 70 (2004) 066109.
- [7] D. Cubero, J. Casado-Pascual, A. Alvarez, M. Morillo, P. Hänggi, *Acta Phys. Polonica B* 37 (2006) 1467.
- [8] P. Jung, J.G. Kissner, P. Hänggi, *Phys. Rev. Lett.* 76 (1996) 3436.
- [9] J.L. Mateos, *Phys. Rev. Lett.* 84 (2000) 258.
- [10] J.L. Mateos, *Physica D* 168–169 (2002) 205.
- [11] J.L. Mateos, *Physica A* 325 (2003) 92 and references therein.
- [12] M. Barbi, M. Salerno, *Phys. Rev. E* 62 (2000) 1988.
- [13] H. A. Larrondo, Perydoon Family, C. M. Artzmeidi, *Physica A* 303 (2002) 67.
- [14] S. Denisov, *Phys. Lett. A* 296 (2002) 197.
- [15] L. Morales-Molina, N.R. Quintero, F.G. Mertens, A. Sánchez, *Phys. Rev. Lett.* 91 (2003) 234102.
- [16] W.-S. Son, I. Kim, Y.-J. Park, C.-M. Kim, *Phys. Rev. E* 68 (2003) 067201.
- [17] Perydoon Family, H. A. Larrondo, D. G. Zaricnga, C. M. Artzmeidi, *J. Phys.: Condens. Matter* 17 (2005) S3719.
- [18] S. Denisov, *Physica A* 377 (2007) 429.
- [19] V.I. Marconi, *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007) 047006.
- [20] T. Emig, *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007) 160801.
- [21] G. Carapella, G. Costabile, N. Martucciello, M. Cirillo, R. Latempa, A. Polcari, G. Filatrella, *Physica C* 382 (2002) 337.
- [22] J.E. Villegas, S. Savell'ev, F. Nori, E.M. Gonzalez, J.V. Anguita, R. Garcia, J.L. Vicent, *Science* 302 (2003) 1188.
- [23] S. Al-Khawaja, *Physica C* 420 (2005) 30.
- [24] C.C. de Souza Silva, J. Van de Vondel, M. Morelle, V.V. Moshchalkov, *Nature* 440 (2006) 651.
- [25] J. Van de Vondel, C.C. de Souza Silva, B.Y. Zhu, M. Morelle, V.V. Moshchalkov, *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005) 057003.
- [26] C.C. de Souza Silva, J. Van de Vondel, B.Y. Zhu, M. Morelle, V.V. Moshchalkov, *Phys. Rev. B* 73 (2006) 014507.
- [27] A. Sterck, S. Weiss, D. Koelle, *Appl. Phys. A* 75 (2005) 253.
- [28] M. Beck, E. Goldobin, M. Neuhaus, M. Siegel, R. Kleiner, D. Koelle, *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005) 090603.
- [29] A. Sterck, R. Kleiner, D. Koelle, *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005) 177006.
- [30] P. Reimann, R. Kawai, C. Van den Broeck, P. Hänggi, *Europhys. Lett.* 45 (1999) 545.
- [31] P. Reimann, C. Van den Broeck, R. Kawai, *Phys. Rev. E* 60 (1999) 6402.
- [32] J. Buceta, J.M.R. Parrondo, C. Van den Broeck, F.J. de la Rubia, *Phys. Rev. E* 61 (2000) 6287.
- [33] S.E. Mangioni, R.R. Deza, H.S. Wlo, *Phys. Rev. E* 63 (2001) 041115.
- [34] B. Cleuren, C. Van den Broeck, *Europhys. Lett.* 54 (2001) 1.
- [35] R. Eichhorn, P. Reimann, P. Hänggi, *Phys. Rev. Lett.* 88 (2002) 190601.
- [36] B. Cleuren, C. Van den Broeck, *Phys. Rev. E* 65 (2002) 030101 (R).
- [37] R. Eichhorn, P. Reimann, P. Hänggi, *Phys. Rev. E* 66 (2002) 066132.
- [38] B. Cleuren, C. Van den Broeck, *Phys. Rev. E* 67 (2003) 055101 (R).
- [39] B. Jiménez de Cisneros, P. Reimann, J.M.R. Parrondo, *Europhys. Lett.* 64 (2003) 599.
- [40] A. Haljas, R. Mankin, A. Sauga, E. Reiter, *Phys. Rev. E* 70 (2004) 041107.
- [41] S. Sengupta, R. Guantes, S. Mircet-Artés, P. Hänggi, *Physica A* 338 (2004) 406.
- [42] R. Eichhorn, P. Reimann, *Europhys. Lett.* 69 (2005) 517.
- [43] R. Eichhorn, P. Reimann, B. Cleuren, C. Van den Broeck, *CHAOS* 15 (2005) 026113.
- [44] M. Kostur, L. Machura, P. Hänggi, J. Luczka, P. Talkner, *Physica A* 371 (2006) 20.
- [45] A. Ros, R. Eichhorn, J. Regtmeier, T.T. Duong, P. Reimann, D. Anselmetti, *Nature* 436 (2005) 928.
- [46] L. Machura, M. Kostur, P. Talkner, J. Luczka, P. Hänggi, *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007) 040601.
- [47] D. Speer, R. Eichhorn, P. Reimann, *Europhys. Lett.* 79 (2007) 10005.
- [48] F.R. Alatríste, J.L. Mateos, *Physica A* 372 (2006) 263.
- [49] M. Kostur, P. Hänggi, P. Talkner, J.L. Mateos, *Phys. Rev. E* 72 (2005) 036210.