



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**MÉTODOS DE PROBABILIDAD EN ANÁLISIS  
ARMÓNICO**

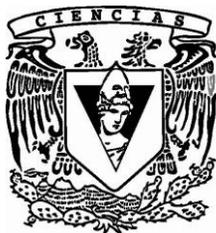
**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**MATEMÁTICO**

**P R E S E N T A:**

**MARCO DAVID BLANCO SANDOVAL**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DRA. MAGALI LOUISE MARIE FOLCH  
GABAYET  
2010**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del jurado

### Datos del alumno

Blanco  
Sandoval  
Marco David  
Teléfono: 56185163  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Carrera: Matemático  
Número de cuenta: 30350002-7

### Datos del tutor

Dra.  
Magali Louise Marie  
Folch  
Gabayet

### Datos del sinodal 1

Dra.  
Ana  
Meda  
Guardiola

### Datos del sinodal 2

M. en C.  
Gerardo  
Rubio  
Hernández

### Datos del sinodal 3

Dra.  
María de la Asunción Begoña  
Fernández  
Fernández

### Datos del sinodal 4

Dr.  
Francisco Marcos  
López  
García

### Datos del trabajo escrito

Métodos de probabilidad en análisis armónico  
60 p.  
2010

# Agradecimientos

En primer lugar, muchísimas gracias a Magali por su tiempo, su paciencia y sus sabios consejos. Gracias a mis asesores, Ana, Begoña, Marcos y Gerardo, por su amabilidad y sus observaciones. Muchas gracias a mis maestros; Ana, Ángel, Begoña, Carmen, Emma, Gerardo, Nelson, Roli, Sergio y varios más, por haber contribuido tanto en mi formación y haber reforzado en mí el gusto por las Matemáticas. Gracias a mis amigos por haber vuelto tan agradable mi experiencia en la Facultad, y por el ejemplo que me dieron. Gracias a mis alumnos por haberme enseñado tanto. Gracias a mi familia por sus constantes presiones para que terminara la tesis, y por su apoyo en general. Gracias al pueblo de México por haberme permitido tener acceso a educación de primer nivel.

# Índice general

Agradecimientos . . . . .	2
Introducción . . . . .	3
Notación . . . . .	4
<b>1. El problema de Dirichlet</b>	<b>5</b>
1.1. Funciones armónicas . . . . .	5
1.2. Puntos Regulares . . . . .	11
1.3. El problema de Dirichlet . . . . .	13
<b>2. La función maximal de Hardy-Littlewood</b>	<b>19</b>
2.1. La función maximal de Hardy-Littlewood . . . . .	19
2.2. Aproximaciones a la identidad . . . . .	28
<b>3. La transformada de Hilbert</b>	<b>33</b>
<b>4. Apéndice</b>	<b>44</b>
4.1. La transformada de Fourier . . . . .	44
4.2. La identidad de Plancherel . . . . .	46
4.3. Las desigualdades de Doob . . . . .	52
4.4. La fórmula de Itô . . . . .	56
Conclusiones . . . . .	59
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>

# Introducción

Desde hace ya muchísimos años, la probabilidad ha estado indiscutiblemente ligada al análisis. Para muchas personas, esta relación podría parecer mucho más provechosa para la probabilidad que para el análisis. En efecto, es imposible pensar en comprender temas de probabilidad avanzada sin elementos como la teoría de la medida, por dar un ejemplo. La motivación inicial de esta tesis era hacer un trabajo que incluyera ambas áreas. El tema escogido finalmente superó mis expectativas, ya que no solamente cumplió con el requisito de tener elementos tanto de probabilidad como de análisis, sino que me introdujo en un mundo que yo no conocía. Descubrí que no solamente la probabilidad se apoya en el análisis, sino que existe una fuerte corriente que demuestra resultados de análisis utilizando teoría de probabilidad. En este trabajo, nos enfocamos en resultados de análisis armónico, área que resultó nueva para mí y que despertó en mí un gran interés.

En el primer capítulo, planteamos el Problema de Dirichlet y hacemos lo necesario para resolverlo. En el segundo capítulo, definimos la Función Maximal de Hardy-Littlewood, demostramos las desigualdades débil  $(1,1)$  y fuerte  $(\infty, \infty)$  que cumple, y terminamos demostrando algunos resultados sobre aproximaciones a la identidad. En el tercer capítulo, definimos la Transformada de Hilbert y demostramos lo análogo a lo hecho en el capítulo 2, aunque la técnica es muy diferente. En el cuarto capítulo, (apéndice), profundizamos un poco en la teoría del Análisis de Fourier, y demostramos las desigualdades de Doob, las cuales me parece que son ilustrativas, dada su importancia en el trabajo. Por último, damos una muy breve e intuitiva introducción a la fórmula de Itô. Todo esto lo hacemos usando herramientas tanto de análisis armónico clásico, tales como la Transformada de Fourier; como herramientas avanzadas de probabilidad, por ejemplo la Propiedad Fuerte de Markov o la fórmula de Itô.

# Notación

Ahora, aclaramos cuestiones de notación que usaremos en el trabajo. Dado un proceso estocástico  $X_t$ , representamos la probabilidad condicional  $\mathbb{P}[A|X_0 = x]$  como  $\mathbb{P}^x[A]$ .  $\mathbb{P}^x[X_t \in dt]$  puede parecer extraño para quien no esté familiarizado con esta notación, pero es simplemente la función de densidad de la posición de  $X_t$ . Es decir,  $\int_E \mathbb{P}^x[X_t \in dt] = \mathbb{P}^x[X_t \in E]$ . En general, aunque no se especifique,  $X_t$  será un movimiento Browniano en  $\mathbb{R}^d$ , y  $\tau_D$  o  $\tau(D)$  será el tiempo de salida de un cierto dominio  $D$ , donde con dominio nos referimos simplemente a una región o subconjunto del espacio en el cual trabajemos. De igual forma,  $T_A$  es la primera vez que el Browniano entra al conjunto  $A$ . A la esperanza tomada sobre un conjunto  $A$  la escribimos de la siguiente forma:  $\int_A x \mathbb{P}[X \in dx] = \mathbb{E}[X; A]$ .

$|\cdot|$  denotará la medida de Lebesgue. A lo largo del trabajo,  $c$  significará una constante. Para la mayoría de nuestros resultados no nos importa en realidad cuál es la constante sino sólo el hecho de que lo es, así que serán comunes expresiones del tipo  $2c = c$  o  $2 + c = c$ . En general,  $\int$  significará  $\int_{\mathbb{R}^d}$ .  $\Omega$  será el espacio de funciones continuas de  $[0, \infty)$  en  $\mathbb{R}^d$  o en  $\mathbb{R}^{d+1}$ , y hará el papel de espacio muestral para nosotros.  $\omega$  será un elemento de  $\Omega$ .  $C_K^1$  es el conjunto de funciones continuas, con derivada continua y soporte compacto de  $\mathbb{R}^d$  en  $\mathbb{R}$ .  $\mathbb{I}_A(x)$  es la función que vale 1 en el dominio  $A$  y 0 en cualquier otro lugar, en análisis se conoce como función característica, y en probabilidad como función indicadora.

# Capítulo 1

## El problema de Dirichlet

El problema de Dirichlet consiste en, dada una función  $f$  continua en la frontera de un dominio  $D$ , encontrar una función  $u$ , armónica en  $D$ , continua en  $\bar{D}$  y que coincida con  $f$  en  $\partial D$ . El problema fue resuelto por el mismo Dirichlet en el siglo XIX, usando argumentos físicos. Algunos años después se encontró un error en la prueba, y en 1900 Hilbert dio la primera demostración rigurosa. En el análisis clásico, la solución al problema de Dirichlet es la convolución de  $f$  con el núcleo de Poisson. Aquí, daremos primero una solución en la cual vemos a  $u$  como una esperanza, y después veremos la equivalencia entre ambas soluciones.

### 1.1. Funciones armónicas

**Definición 1.1.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{R}^2$ . Una función  $h$  es armónica en  $D$  si  $h$  es localmente integrable y para todo  $x \in D$  y todo  $r < \text{dist}(x, \partial D)$  se cumple

$$h(x) = \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(x, r)} h(y) dy. \quad (1.1)$$

A esta propiedad se le llama propiedad del promedio.

**Definición 1.2.** Sean  $v, u$  funciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$ . Decimos que  $v(x, y)$  es conjugada armónica de  $u(x, y)$  si  $v$  es armónica y se satisfacen las ecuaciones

de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

En realidad, usaremos las conjugadas armónicas en el Capítulo 3, pero la definición queda bien aquí.

**Proposición 1.1.** *Sea  $h$  localmente acotada, localmente integrable y  $\sigma_r$ -medible.  $h$  es armónica si y sólo si para todo  $x \in D$  y todo  $r < \text{dist}(x, \partial D)$*

$$h(x) = \int_{\partial B(0,r)} h(x+y)\sigma_r(dy), \quad (1.2)$$

donde  $\sigma_r$  es la medida normalizada de superficie en  $\partial B(0,r)$ .

*Demostración.* Supongamos primero (1.2). Sin pérdida de generalidad, supongamos  $x = 0$ . Cambiando a coordenadas polares,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} h(y)dy \\ &= \frac{1}{r^d |B(0,1)|} \int_0^r \int_{\partial B(0,s)} h(y)\sigma_s(dy) |\partial B(0,s)| ds \\ &= dr^{-d} \int_0^r \int_{\partial B(0,s)} h(y)\sigma_s(dy) s^{d-1} ds. \end{aligned} \quad (1.3)$$

La última igualdad se sigue de la siguiente relación conocida:  $V_d = rA_{d-1}/d$ , donde  $V_d$  y  $A_{d-1}$  son, respectivamente, el volumen y el área de la superficie de la esfera en  $\mathbb{R}^d$  de radio  $r$ .

Por hipótesis,

$$\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} h(y)dy = dr^{-d} \int_0^r h(0)s^{d-1} ds = h(0),$$

y entonces  $h$  es armónica.

Por otra parte, si  $h$  es armónica, entonces por (1.3) tenemos

$$r^d h(0) = d \int_0^r \int_{\partial B(0,s)} h(y) \sigma_s(dy) s^{d-1} ds. \quad (1.4)$$

La integrabilidad local, junto con (1.1), nos dice que  $h$  es acotada en subconjuntos compactos de  $D$ . Veamos esto con más detalle. Sea  $K \subset D$  compacto, sea  $\epsilon > 0$  y sea  $K' = K \cup \{x \in D : d(x, K) < \epsilon\}$ . Claramente  $K'$  es compacto, y como  $h$  es localmente integrable, tenemos  $c = \int_{K'} |h(y)| dy < \infty$ . Ahora, sea  $x \in K$ , y  $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$ . Por definición de función armónica,

$$\begin{aligned} |h(x)| &= \frac{1}{|B(0, \delta)|} \left| \int_{B(x, \delta)} h(y) dy \right| \leq \frac{1}{|B(0, \delta)|} \int_{B(x, \delta)} |h(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{|B(0, \delta)|} \int_{K'} |h(y)| dy \leq \text{diam}(K') c, \end{aligned}$$

y esto último es independiente de la elección de  $x$ , por lo que  $h$  es acotada en compactos. Por el Teorema de Convergencia Dominada, dada una sucesión  $x_n \rightarrow x$  en  $D$ , tenemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(x, r)} h(y) dy$ , es decir,  $h$  es continua en subconjuntos compactos de  $D$ , y por lo tanto continua en  $D$ . Si definimos  $\sigma$  como la medida de superficie usual en  $\mathbb{R}^d$ , tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(0,s)} h(y) \sigma_s(dy) &= \frac{1}{s^{d-1} \sigma(\partial B(0, 1))} \int_{\partial B(0,s)} h(y) \sigma(dy) \\ &= \frac{1}{s^{d-1} \sigma(\partial B(0, 1))} \int_{\mathbb{R}^d} h(y) \mathbb{I}_{\partial B(0,s)}(y) \sigma(dy). \end{aligned}$$

Sea  $(s_n) \subset D$  una sucesión que converge a  $s$ . La continuidad de  $h$  nos permite usar el Teorema de Convergencia Dominada, por lo que

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^{d-1} \sigma(\partial B(0, 1))} \int_{\mathbb{R}^d} h(y) \mathbb{I}_{\partial B(0,s_n)}(y) \sigma(dy) \\ &= \frac{1}{s^{d-1} \sigma(\partial B(0, 1))} \int_{\mathbb{R}^d} h(y) \mathbb{I}_{\partial B(0,s)}(y) \sigma(dy), \end{aligned}$$

lo que nos dice que la integral interior en (1.4) es una función continua de  $s$ . Derivando en ambos lados con respecto a  $r$ ,

$$dr^{d-1} h(0) = d \int_{\partial B(0,r)} h(y) \sigma_r(dy) r^{d-1},$$

de donde se sigue (1.2). □

**Proposición 1.2.** *Si  $h$  es armónica en  $D$ , entonces  $h$  es  $C^\infty$  en  $D$ .*

*Demostración.* Sean  $x \in D$ , y  $r < \text{dist}(x, \partial D)/4$ . Además, sea  $y \in D$  tal que  $|x - y| < r/4$ . Primero notamos que  $B(y, r) \subset B(x, r + |x - y|)$  y  $B(x, r - |x - y|) \subset B(y, r)$ . De ahí se concluye que  $B(y, r) \Delta B(x, r) \subset B(x, r + |x - y|) \setminus B(x, r - |x - y|)$ , donde  $\Delta$  es la diferencia simétrica entre dos conjuntos. Por lo tanto,

$$|B(y, r) \Delta B(x, r)| \leq c((r + |x - y|)^d - (r - |x - y|)^d) \leq cr^{d-1}|x - y|.$$

La última desigualdad se debe a que  $|x - y| < r$ .

$$\begin{aligned} |h(y) - h(x)| &= \frac{1}{|B(0, r)|} \left| \int_{B(y, r)} h(z) dz - \int_{B(x, r)} h(z) dz \right| \\ &\leq \frac{1}{|B(0, r)|} \left| \int_{B(y, r) \Delta B(x, r)} h(z) dz \right| \\ &\leq c \frac{|x - y|}{r} \sup_{z \in B(x, 5r/4)} |h(z)|. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Esto nos dice que  $h$  es una función localmente Lipschitz. Es conocido que esta propiedad implica que  $f$  es absolutamente continua. Luego, el Teorema Fundamental del Cálculo para integrales de Lebesgue nos dice que las derivadas parciales de  $h$  existen casi en todas partes. Además, la propiedad de ser Lipschitz nos dice que para toda  $x \in D$  existe  $c > 0$  tal que para  $y$  suficientemente cercana,  $\frac{|h(y) - h(x)|}{|x - y|} \leq c$ . De esto último se sigue que las derivadas son acotadas.

Sea  $e_i$  el vector unitario en la  $i$ -ésima dirección. Definimos

$k_\epsilon(x) = \frac{h(x - \epsilon e_i) - h(x)}{\epsilon}$ . Como  $h$  es armónica, un sencillo cambio de variable nos lleva a que

$$\frac{h(x - \epsilon e_i) - h(x)}{\epsilon} = \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(x, r)} \frac{h(z - \epsilon e_i) - h(z)}{\epsilon} dz, \quad (1.6)$$

es decir las funciones  $k_\epsilon$  son armónicas. Por (1.5),

$$|k_\epsilon(x) - k_\epsilon(y)| \leq c \frac{|x - y|}{r} \sup_{z \in B(x, 5r/4)} |k_\epsilon(z)|. \quad (1.7)$$

Para  $\epsilon$  suficientemente pequeña, podemos volver a usar (1.5), y el lado derecho de (1.7) queda acotado por  $c \frac{|x-y|}{r^2} \sup_{z \in B(x, 10r/4)} |h(z)|$ , que no depende de  $\epsilon$ . Eso significa que la familia de funciones  $\{k_\epsilon\}$  es equicontinua en  $x$ . Como  $x$  era un punto arbitrario de  $D$ , la familia  $\{k_\epsilon\}$  es equicontinua en  $D$ . Como  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} k_\epsilon(x) = (\partial h / \partial x_i)(x)$  casi para toda  $x$ , por el teorema de Arzelà-Ascoli, tenemos que el límite existe para toda  $x$ , que es continuo en  $x$  y que la convergencia es uniforme. Cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , (1.6) se convierte en

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(x, r)} \frac{\partial h}{\partial x_i}(z) dz,$$

de donde podemos ver que las derivadas parciales de  $h$  también son armónicas (y por lo tanto continuas) en  $B(x, \text{dist}(x, \partial D)/4)$  para toda  $x \in D$ . El resultado se obtiene por inducción.  $\square$

**Proposición 1.3.**  $\mathbb{P}^x(X_{\tau_{B(x, r)}} \in dy)$  es una medida de superficie normalizada en  $\partial B(x, r)$

*Demostración.* Sea  $C$  un subconjunto de Borel de  $\partial B(0, r)$ , y sea  $A$  una matriz ortogonal. Por la invarianza bajo rotaciones y traslaciones del movimiento Browniano, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^x(X_{\tau_{B(x, r)}} \in C) &= \mathbb{P}^0(X_{\tau_{B(0, r)}} \in (C - x)) = \mathbb{P}^0(AX_{\tau_{B(0, r)}} \in (C - x)) \\ &= \mathbb{P}^0(X_{\tau_{B(0, r)}} \in A^{-1}(C - x)) = \mathbb{P}^x(X_{\tau_{B(x, r)}} \in A^{-1}C), \end{aligned}$$

de donde concluimos lo que queremos, puesto que la probabilidad de que el Browniano salga de la bola por primera vez pasando por algún punto de  $C$  o por algún punto de  $A^{-1}C$ , es decir, un conjunto “igual” a  $C$  es la misma.  $\square$

**Proposición 1.4.** Si  $h$  es armónica en  $D$ , entonces  $\Delta h = 0$  en  $D$ .

*Demostración.* Supongamos  $\Delta h(x_0) > 0$  para alguna  $x_0 \in D$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos  $x_0 = 0$ . Como  $h$  es  $C^\infty$ , existe  $r < \text{dist}(0, \partial D)/2$  tal que  $\Delta h > 0$  en  $B(0, r)$ . Por la fórmula de Itô<sup>1</sup>,

$$h(X_{t \wedge \tau(B(0, r))}) - h(X_0) = \text{martingala} + \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge \tau(B(0, r))} \Delta h(X_s) ds.$$

---

<sup>1</sup>ver apéndice

Calculando la esperanza con respecto a  $\mathbb{P}^0$ , y haciendo  $t \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$\mathbb{E}^0 h(X_{\tau(B(0,r))}) - h(0) = \frac{1}{2} \mathbb{E}^0 \int_0^{\tau(B(0,r))} \Delta h(X_s) ds > 0.$$

Por la Proposición 1.3, el lado izquierdo es  $\int_{\partial B(0,r)} h(y) \sigma_r(dy) - h(0)$ . Como  $h$  es armónica, la Proposición 1.1 nos dice que eso vale 0, que es una contradicción. Análogamente,  $\Delta h(0) < 0$  nos lleva a una contradicción, por lo que  $\Delta h = 0$ .  $\square$

El resultado inverso es el siguiente.

**Proposición 1.5.** *Si  $h$  es  $C^2$  y  $\Delta h = 0$  en  $D$ , entonces  $h$  es armónica.*

*Demostración.* Por la fórmula de Itô,  $h(X_{t \wedge \tau(B(0,r))}) - h(X_0)$  es una martingala. Calculamos la esperanza con respecto a  $\mathbb{P}^x$  y dejamos  $t \rightarrow \infty$ . Nos queda  $\mathbb{E}^x h(X_{\tau(B(0,r))}) - h(x) = 0$ . Por la Proposición 1.1 y la Proposición 1.3,  $h$  es armónica.  $\square$

Enunciamos la propiedad que acabamos de encontrar como corolario.

**Corolario 1.1.** *Si  $h$  es armónica, entonces  $h(X_{t \wedge \tau})$  es una martingala.*

*Demostración.* Por la fórmula de Itô,  $h(X_{t \wedge \tau_D}) - h(X_0)$  es una martingala, y es fácil ver que su esperanza es 0. Si definimos  $M_t = h(X_{t \wedge \tau_D})$ , tenemos que  $\mathbb{E}^x M_t = \mathbb{E}^x M_0$ , por lo que  $M_t$  es martingala.  $\square$

**Teorema 1.1** (Principio del Máximo). *Si  $D$  es un dominio acotado,  $h$  es armónica en  $D$  y continua en  $\bar{D}$ , entonces*

$$\sup_{\bar{D}} h = \sup_{\partial D} h.$$

*Demostración.* Sea  $x \in D$ . Como  $h$  es continua en  $\bar{D}$  y  $\bar{D}$  es compacto,  $h$  es acotada en  $\bar{D}$ . De nuevo por la fórmula de Itô,  $h(X_{t \wedge \tau_D}) - h(X_0)$  es una martingala. Calculando la esperanza con respecto a  $\mathbb{P}^x$ , dejando  $t \rightarrow \infty$  y usando el Teorema de Convergencia Dominada (aquí usamos que  $h$  es acotada), vemos que

$$h(x) = \mathbb{E}^x h(X_{\tau_D}).$$

Como  $X_{\tau_D} \in \partial D$ , entonces  $h(X_{\tau_D}) \leq \sup_{\partial D} h$ , de donde se sigue  $h(x) \leq \sup_{\partial D} h$  para toda  $x \in D$ , por lo que  $\sup_{\overline{D}} h \leq \sup_{\partial D} h$ . La otra desigualdad es trivial.  $\square$

## 1.2. Puntos Regulares

**Definición 1.3.** Un punto  $y$  es regular para un conjunto  $A$  si  $\mathbb{P}^y(T_A = 0) = 1$ .

Recordemos que  $T_A$  es el tiempo de llegada del Browniano al conjunto  $A$ .

**Definición 1.4.** Una función  $f$  es semicontinua por abajo si el conjunto  $\{x : f(x) > a\}$  es abierto para toda  $a \in \mathbb{R}$ .

Observemos que si  $f$  es continua, entonces es semicontinua por abajo; y que si tenemos una sucesión creciente de semicontinuas que convergen a una función, entonces esta función también es semicontinua. Ambas afirmaciones se demuestran fácilmente usando el hecho de que una unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

**Proposición 1.6.** La función  $x \rightarrow \mathbb{P}^x(\tau_D \leq t)$  es semicontinua por abajo.

*Demostración.* Sea  $0 < s < t$ , y sea  $\varphi(x) = \mathbb{P}^x(\tau_D \leq t - s)$ .

$$\begin{aligned} w_s(x) &:= \mathbb{P}^x(X_u \in D^c, u \in [s, t]) = \mathbb{E}^x[\mathbb{I}(\omega)_{\{\omega: X_u \in D^c, u \in [s, t]\}}] \\ &= \mathbb{E}^x[\mathbb{E}^{X_s}[\mathbb{I}(\omega)_{\{\omega: X_u \in D^c, u \in [s, t]\}}]] = \mathbb{E}^x[\mathbb{E}^{X_s}[\mathbb{I}(\omega)_{\{\omega: \tau_D \leq t-s\}}]] \\ &= \mathbb{E}^x[\mathbb{P}^{X_s}(\tau_D \leq t-s)] = \mathbb{E}^x \varphi(X_s) \\ &= \int \varphi(y) (2\pi s)^{-d/2} \exp\{(x-y)^2/2s\} dy. \end{aligned}$$

Sabemos que el argumento dentro de la integral es una función acotada y continua en  $x$ , por lo que el Teorema de Convergencia Dominada nos dice que  $w_s(x)$  es continua. Además,  $w_s(x) \uparrow \mathbb{P}^x(\tau_D \leq t)$  cuando  $s \rightarrow 0$ , y por la observación anterior, esta última función es semicontinua por abajo.  $\square$

**Corolario 1.2.** *Sea  $y \in D$  regular para  $D^c$ . Si  $(x_n) \subset D$  converge a  $y$ , entonces para toda  $t > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}^{x_n}(\tau_D \leq t) = 1.$$

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$ . Por la proposición anterior,  $\{x : \mathbb{P}^x(\tau_D \leq t) > 1 - \epsilon\}$  es abierto. Como  $y$  es regular,  $\mathbb{P}^y(\tau_D \leq t) = 1$ , por lo que  $y$  pertenece a ese conjunto abierto. Entonces, para  $n$  suficientemente grande,  $\mathbb{P}^{x_n}(\tau_D \leq t) \geq 1 - \epsilon$ . Y como  $\epsilon$  es arbitraria, eso prueba el resultado.  $\square$

**Proposición 1.7.** *Sea  $f$  acotada y continua en  $\partial D$ . Sea  $y \in \partial D$  regular para  $D^c$ , y sea  $\{x_n\}$  una sucesión en  $D$  que converge a  $y$ . Entonces,  $\mathbb{E}^{x_n} f(X_{\tau_D}) \rightarrow f(y)$*

*Demostración.* Primero, demostraremos que para toda  $\delta > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}^{x_n}(X_{\tau_D} \in B(y, \delta)) = 1. \quad (1.8)$$

Sea  $\epsilon > 0$ . Sea  $t > 0$  suficientemente pequeño tal que  $\mathbb{P}^0(\sup_{s \leq t} |X_s| > \delta/2) < \epsilon$ . Para  $n$  suficientemente grande, tenemos  $|x_n - y| < \delta/2$ . Por el Corolario 2,  $\mathbb{P}^{x_n}(\tau_D \leq t) \geq 1 - \epsilon$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{x_n}(X_{\tau_D} \in B(y, \delta)) &\geq \mathbb{P}^{x_n}(\tau_D \leq t, \sup_{s \leq t} |X_s - x_n| \leq \delta/2) \\ &\geq \mathbb{P}^{x_n}(\tau_D \leq t) - \mathbb{P}^0(\sup_{s \leq t} |X_s| > \delta/2) \\ &\geq (1 - \epsilon) - \epsilon. \end{aligned}$$

La penúltima desigualdad se sigue de recordar que  $\mathbb{P}(A, B) = \mathbb{P}(A \setminus B^c) \geq \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B^c)$ , y por la invarianza bajo traslaciones del Browniano. Eso implica (1.8). Ahora, como  $f$  es continua, existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(z) - f(y)| < \epsilon$  si  $|z - y| < \delta, z \in \partial D$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{x_n} f(X_{\tau_D}) &= \mathbb{E}^{x_n}[f(X_{\tau_D}); X_{\tau_D} \in B(y, \delta)] \\ &\quad + \mathbb{E}^{x_n}[f(X_{\tau_D}); X_{\tau_D} \notin B(y, \delta)].^2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

El segundo sumando está acotado por  $\|f\|_\infty \mathbb{P}^{x_n}(X_{\tau_D} \notin B(y, \delta))$ , y ya que  $f$  es acotada, esto último tiende a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$  por (1.8). Por otra parte, gracias

---

<sup>2</sup>Ver definición de  $\mathbb{E}[X; A]$  en Preliminares.

a la continuidad de  $f$ ,

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}^{x_n}[f(X_{\tau_D}); X_{\tau_D} \in B(y, \delta)] - f(y)\mathbb{P}^{x_n}(X_{\tau_D} \in B(y, \delta))| \\ & \leq \epsilon \mathbb{P}^{x_n}(X_{\tau_D} \in B(y, \delta)). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Por (1.8), (1.9) y (1.10), tenemos el resultado. □

### 1.3. El problema de Dirichlet

Ahora, veremos que la regularidad juega un papel fundamental en la resolución del problema de Dirichlet.

Antes de demostrar el teorema, necesitamos unas últimas observaciones. Primero, vamos a definir los operadores *shift*. Si  $\Omega$  es el conjunto de trayectorias continuas de  $[0, \infty)$  en  $\mathbb{R}^d$ , definimos  $\theta_t : \Omega \rightarrow \Omega$  como  $\theta_t(\omega)(s) = \omega(t + s)$  para  $\omega \in \Omega$ . Nos podemos imaginar que lo que hace un operador shift es tomar una trayectoria, eliminar la imagen del intervalo  $[0, t)$  y “pegar” el resto de forma que la nueva trayectoria comience en donde se encontraba la original al tiempo  $t$  y después siga el mismo recorrido. En particular, nos va a interesar que  $X_s \circ \theta_t = X_{s+t}$ . Veamos por qué es cierto esto.

$$X_s \circ \theta_t(\omega) = X_s(\theta_t(\omega)) = \theta_t(\omega(s)) = \omega(s + t) = X_{s+t}(\omega).$$

Acabamos de usar dos veces el hecho de que  $X_t(\omega) = \omega(t)$ . Si  $T$  es un tiempo de paro, definimos  $\theta_T(\omega)(s) = \omega(T(\omega) + s)$ . Análogamente a lo que hicimos arriba,  $X_t \circ \theta_T(\omega) = X_{T(\omega)+t}(\omega)$ .

Dado un dominio abierto  $D$ ,  $f$  una función continua en su frontera, y  $u(x) = \mathbb{E}^x f(X_{\tau_D})$ , sean  $x \in D$ ,  $\delta < \text{dist}(x, \partial D)$ , y  $S = \inf\{t : X_t \notin B(x, \delta)\}$ . Sea  $\omega$  una trayectoria continua que empieza en  $x$  y sigue hasta llegar a la frontera de  $D$ .  $\theta_S(\omega)$  es el segmento de esa trayectoria desde que sale por primera vez de la bola con radio  $\delta$  hasta que sale de  $D$ . Es claro que la trayectoria corta y la larga salen de  $D$  en el mismo lugar, eso nos dice que  $X_{\tau_D} \circ \theta_S = X_{\tau_D}$ , y por lo tanto también es cierto  $f(X_{\tau_D}) \circ \theta_S = f(X_{\tau_D})$ . Ahora, hacemos un paréntesis para enunciar la propiedad fuerte de Markov.

**Teorema 1.2** (Propiedad Fuerte de Markov). *Sean  $Y$  una variable aleatoria acotada y  $\mathcal{F}_\infty$ -medible; y  $X_t$  un movimiento Browniano, entonces*

$$\mathbb{E}^x [Y \circ \theta_T | \mathcal{F}_T] = \mathbb{E}^{X_T} [Y]$$

*casi seguramente en  $(T < \infty)$ .*

Entonces, usando el Teorema 1.2 y la observación que acabamos de hacer,

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{E}^x f(X_{\tau_D}) = \mathbb{E}^x [\mathbb{E}^x [f(X_{\tau_D}) | \mathcal{F}_S]] \\ &= \mathbb{E}^x [\mathbb{E}^x [f(X_{\tau_D}) \circ \theta_S | \mathcal{F}_S]] = \mathbb{E}^x [\mathbb{E}^{X_S} f(X_{\tau_D})] \\ &= \mathbb{E}^x u(X_S). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Sabemos que la distribución de  $X_S$  es uniforme, y la igualdad anterior nos dice que  $u(x)$  es el promedio de sus valores sobre las bolas centradas en  $x$ . Es decir que intuitivamente podemos decir que  $u$  es armónica. En la siguiente proposición lo veremos formalmente.

**Teorema 1.3.** *Sea  $D$  un dominio acotado tal que cada punto de su frontera es regular para  $D^c$ . Sea  $f$  continua en  $\partial D$ . Existe una única función  $u$  armónica en  $D$ , continua en  $\bar{D}$  y que coincide con  $f$  en  $\partial D$ .  $u$  está dada por la siguiente fórmula:*

$$u(x) = \mathbb{E}^x f(X(\tau_D)). \tag{1.12}$$

*Demostración.* Para probar la unicidad, supongamos que hay dos soluciones  $u_1$  y  $u_2$ . Como ambas son armónicas, su diferencia  $u_1 - u_2$  también es armónica en  $D$ , y vale 0 en la frontera. Por el Principio del Máximo (Teorema 1.1),  $u_1 - u_2 \leq 0$  en  $D$ , y análogamente  $u_2 - u_1 \leq 0$  en  $D$ . De ahí concluimos la unicidad. Sea  $u(x) = \mathbb{E}^x f(X(\tau_D))$ . Por (1.11),  $u(x) = \mathbb{E}^x u(X_{\tau(B(x,r))})$  si  $r < \text{dist}(x, \partial D)$ . Por la Proposición 1.3,  $u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y) \sigma(dy)$ , y por la Proposición 1.1,  $u$  es armónica en  $D$ . Por último, sea  $x_n$  una sucesión en  $D$  que converge a  $y \in \partial D$ . Por la Proposición 1.7,  $u(x_n) \rightarrow f(y)$ , y esto concluye la demostración.  $\square$

Ahora, probaremos un resultado conocido que vamos a necesitar.

**Proposición 1.8.** *Sea  $X_t$  un movimiento Browniano. Entonces,  $M_t = \exp\{-\beta X_t - \beta^2 t/2\}$  es una martingala para todo  $\beta > 0$ .*

*Demostración.* Sea  $0 < s < t$ . Por las propiedades básicas del Browniano,  $X_t - X_s$  se distribuye igual que  $X_{t-s}$ , y esto último es una variable aleatoria normal  $(0, t - s)$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[e^{-\beta X_t - \beta^2 t/2} | \mathcal{F}_s] \\ &= e^{-\beta X_s - \beta^2 s/2} e^{-\beta^2 (t-s)/2} \mathbb{E}[e^{-\beta X_{t-s}} | \mathcal{F}_s] \\ &= e^{-\beta X_s - \beta^2 s/2} e^{-\beta^2 (t-s)/2} e^{\beta^2 (t-s)/2} \\ &= M_s. \end{aligned}$$

La penúltima igualdad se obtiene usando la función generadora de momentos de la normal. □

En la siguiente prueba y en el siguiente capítulo usaremos la transformada de Fourier. A continuación daremos una breve introducción con lo absolutamente necesario para ilustrar su uso.

**Definición 1.5.** Sea  $f$  una función integrable de  $\mathbb{R}^d$  en  $\mathbb{C}$ . La transformada de Fourier de  $f$  es

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Cabe mencionar que hay diferentes definiciones de la transformada de Fourier. Las más comunes en el análisis armónico son la recién mencionada y  $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$ . Por otra parte, en probabilidad se usa la función característica de una variable aleatoria  $X$ ,  $\mathbb{E}[e^{itX}]$ , que es la transformada de Fourier de la función de densidad de  $X$  si definimos a la transformada de Fourier como  $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\xi} dx$ . Todas las propiedades importantes de la transformada se preservan al hacer el cambio entre las diferentes

definiciones, ya que sólo difieren en una constante. Esto hará que los resultados también difieran por constantes, pero que para nuestro propósito son lo mismo. En el futuro, nos referiremos a las definiciones como primera, segunda y tercera definición, respectivamente.

**Proposición 1.9.** Sean  $f, g \in L^1$ . Sus transformadas de Fourier  $\widehat{f}$  (según la primera definición) cumplen las siguientes propiedades.

$$(a) \widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}.$$

$$(b) \text{ Si } \xi_j \widehat{f}, \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^1 \text{ para toda } j, \text{ entonces } \widehat{\left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)}(\xi) = i \xi_j \widehat{f}(\xi_j).$$

$$(c) \text{ Si } \widehat{f} \in L^1, \text{ entonces } f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

El último inciso se conoce como fórmula de inversión. Las demostraciones de estas propiedades las daremos en el Apéndice.

En la siguiente proposición usamos la transformada de Fourier en  $L^2$ . La construcción de ésta y la demostración de la proposición las daremos en el Apéndice.

**Proposición 1.10** (Identidad de Plancherel). La transformada de Fourier es una isometría en  $L^2$ . Es decir, dada  $f \in L^2$ , entonces

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2.$$

En realidad, la igualdad se da sólo si escogemos la segunda definición de la transformada de Fourier, usando cualquiera de las dos restantes tenemos una constante de alguno de los dos lados. Más adelante, cuando usemos la identidad de Plancherel, escribiremos la constante, pero la propiedad de ser isometría es algo interesante que vale la pena mencionar. ' .

El siguiente lema también lo demostramos en el Apéndice:

**Lema 1.1.** Para toda  $\alpha > 0$  tenemos

$$\int e^{-2\pi|y|^\alpha} e^{-2\pi i t \cdot y} dy = c_d \frac{\alpha}{(\alpha^2 + |t|^2)^{(d+1)/2}}.$$

Ahora, enunciaremos otro teorema clásico de procesos estocásticos, cuya demostración se puede encontrar en muchos lugares, por ejemplo en [Bass].

**Teorema 1.4** (Teorema de Paro Opcional de Doob). *Sea  $M_t$  una martingala continua por la derecha, y sea  $T$  un tiempo de paro acotado por  $K$ , entonces  $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_K] = \mathbb{E}[M_0]$ .*

Por fin estamos en condiciones de demostrar la última proposición del capítulo. Ésta es especialmente importante, ya que va a ser uno de los principales puentes entre la parte probabilística y la parte analítica de este trabajo.

**Proposición 1.11.** *Sea  $D$  el semiespacio superior en  $\mathbb{R}^d$ . Sea  $P(x, \tilde{y}) = c_d \frac{x_d}{(|\tilde{x} - \tilde{y}|^2 + x_d^2)^{\frac{d}{2}}}$ , donde  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{d-1})$ ,  $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_{d-1})$  y  $c_d$  es una constante tal que  $\int_{\partial D} P(x, y) dy = 1$ . Entonces,*

$$\mathbb{P}^x(X_{\tau_D} \in dy) = P(x, y) dy. \quad (1.13)$$

$P(x, y)$  es conocido como el núcleo de Poisson para el semiespacio  $D$ .

*Demostración.* La invarianza bajo traslaciones del Movimiento Browniano nos permite suponer  $\tilde{x} = 0$ . Queremos calcular la función característica (transformada de Fourier) de  $X_{\tau_D}$ . Sea  $u \in \mathbb{R}^{d-1}$ . Notemos que  $\tau_D$  depende únicamente de  $X_{t_d}$ , la última coordenada de  $X_t$ , que a su vez es independiente de  $\tilde{X}_t = (X_{t_1}, \dots, X_{t_{d-1}})$ , y recordemos que la función característica de la normal  $(0,1)$  es  $e^{-u^2/2}$ , lo que implica  $\mathbb{E}^0 [e^{iu \cdot \tilde{X}_t}] = e^{-|u|^2 t/2}$ . Con todo esto en mente,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x [e^{iu \cdot \tilde{X}_{\tau_D}}] &= \mathbb{E}^x [\mathbb{E}[e^{iu \cdot \tilde{X}_t} | \tau_D \in dt]] = \mathbb{E}^x \left[ \int_0^\infty e^{iu \cdot \tilde{X}_t}; \tau_D \in dt \right] \quad (1.14) \\ &= \int_0^\infty \mathbb{E}^x [e^{iu \cdot \tilde{X}_t}] \mathbb{P}^x(X_{\tau_D} \in dt) = \int_0^\infty e^{-|u|^2 t/2} \mathbb{P}^{x_d}(X_{\tau_{D_d}} \in dt) \\ &= \mathbb{E}^{x_d} \left[ e^{-\frac{|u|^2}{2} \tau_D} \right]. \end{aligned}$$

Por la Proposición 1.8, sabemos que para todo  $\beta \geq 0$ ,  $M_t = \exp\{-\beta X_{t_d} - \beta^2 t/2\}$  es una martingala. De este hecho, y usando el Teorema de Paro Opcional (por definición,  $t \wedge \tau_D$  está acotado por  $t$ ), se sigue que  $\mathbb{E}^{x_d} [M_{t \wedge \tau_D}] =$

$e^{-\beta x_d}$ . Es claro que  $M_{t \wedge \tau_D}$  está acotada por abajo por 0 y por arriba por 1, por lo que, usando el Teorema de Convergencia Dominada, y notando que  $X_{\tau_{D_d}} = 0$ , cuando  $t \rightarrow \infty$  tenemos

$$\begin{aligned} e^{-\beta x_d} &= \mathbb{E}^{x_d} [M_{t_D}] = \mathbb{E}^{x_d} \left[ \exp\{-\beta X_{\tau_{D_d}} - \beta^2 \tau_D / 2\} \right] \\ &= \mathbb{E}^{x_d} \left[ \exp\{-\beta^2 \tau_D / 2\} \right]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Sustituyendo  $\beta = |u|$ , obtenemos  $e^{-|u|x_d} = \mathbb{E}^{x_d} \left[ e^{-\frac{|u|^2}{2} \tau_D} \right]$ .

En resumen,  $\widehat{P}(x, y) = e^{-|u|x_d}$ . Usando el Lema 1.1 y la fórmula de inversión, y haciendo un cambio de variable, obtenemos nuestro resultado de forma inmediata. Cabe notar que en la demostración del Lema 1.1  $y \in \mathbb{R}^d$ , pero en esta demostración  $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{d-1}$ , por lo que el exponente del denominador del núcleo de Poisson es  $d/2$ .  $\square$

# Capítulo 2

## La función maximal de Hardy-Littlewood

### 2.1. La función maximal de Hardy-Littlewood

Sean  $D = \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ ,  $X_t$  un movimiento Browniano  $d$ -dimensional y  $Y_t$  un movimiento Browniano 1-dimensional. Definimos  $Z_t = (X_t, Y_t)$ , y sea  $\tau$  el tiempo de salida de  $D$  de  $Z_t$ . Sea  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una función en  $\mathcal{L}^p$ .

Definimos la extensión armónica de  $f$  como  $u(z) = \mathbb{E}^z [f(X_\tau)]$ . Como vimos en el capítulo anterior,  $u$  es la solución al problema de Dirichlet en  $D$ , y por la Proposición 1.11, podemos escribir a  $u$  de la siguiente forma:

$$u(z) = u(x, y) = P_y * f(x) = \int f(v) P_y(x - v) dv,$$

$$\text{donde } P_y(x) = P((x_1, x_2, \dots, x_d, y), \bar{0}) = \frac{c_d y}{(y^2 + |x|^2)^{\frac{d+1}{2}}}.$$

Notemos que acabamos de escribir al núcleo de Poisson diferente a como habíamos hecho antes, usaremos ambas formas dependiendo de qué queramos enfatizar.

A continuación enunciamos la Desigualdad de Harnack, la demostración se puede revisar en [Bass].

**Teorema 2.1** (Desigualdad de Harnack). *Sean  $0 < r < R$ . Existe  $c > 0$*

tal que si  $u$  es una función armónica no negativa en  $B(0, R)$ , para todos  $x, y \in B(0, r)$  se cumple  $u(x) \leq cu(y)$ .

Sea  $D$  un dominio y sea  $X_t$  un movimiento Browniano que se detiene al salir de  $D$ . Sea  $h$  una función armónica positiva en  $D$ . Ya vimos que  $h(X_{t \wedge \tau_D})$  es una martingala. Definimos  $M_t = h(X_{t \wedge \tau_D})/h(X_0)$ , que también es una martingala positiva y continua.

**Definición 2.1.** Sea  $A \in \mathcal{F}_t$ . La transformada de  $h$ -trayectoria del movimiento Browniano es

$$\mathbb{P}_h^x(A) = \mathbb{E}^x [M_t; A]. \quad (2.1)$$

Es claro que  $M_0 = 1$ , esto implica que  $\mathbb{P}_h^x(\Omega) = \mathbb{E}^x[M_t] = \mathbb{E}^x[M_0] = 1$ . Además, el hecho de que  $M_t$  sea positiva y de que calculemos  $\mathbb{P}_h^x$  integrando sobre  $A$  nos dice que  $\mathbb{P}_h^x$  es  $\sigma$ -aditiva. También es claro que  $\mathbb{P}_z^x(\emptyset) = 0$ . En resumen,  $\mathbb{P}_h^x$  es una medida de probabilidad.

En particular, para  $z$  fijo,  $P((t_1, t_2, \dots, t_d, y), z) = P_y(t - z)$  es una función armónica, que va a hacer el papel de  $h$  para nosotros. Para ver que es armónica, lo más fácil es calcular el laplaciano. Por ejemplo, para  $w = 0$  y dimensión 2, tenemos  $P((t, y), 0) = c \frac{y}{t^2 + y^2}$ . Entonces,  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} P((t, y), 0) = c \frac{6t^2 y - 2y^3}{(t^2 + y^2)^3}$ , y  $\frac{\partial^2}{\partial y^2} P((t, y), 0) = c \frac{-6t^2 y + 2y^3}{(t^2 + y^2)^3}$ , y la suma es claramente 0. El caso general no es difícil pero sí más laborioso, y no aporta mucho al trabajo, así que no lo haremos aquí. Por simplicidad, en vez de  $\mathbb{P}_{P(\cdot, z)}^x$  escribiremos  $\mathbb{P}_z^x$ . También por conveniencia de notación, usaremos  $h_x(t, y) = P_y(t - x)$ .

La demostración de la siguiente proposición tampoco la haremos aquí, se puede encontrar en [Bass].

**Proposición 2.1.** Si  $A \in \mathcal{F}_\tau$ , entonces

$$\int_B \mathbb{P}_z^{x_0}(A) \mathbb{P}^{x_0}(X_\tau \in dz) = \mathbb{P}^{x_0}(X_\tau \in B; A). \quad (2.2)$$

Aquí,  $\mathbb{P}(E; F)$  significa  $\mathbb{P}(E \cap F)$ . Por lo tanto, si del lado derecho escribimos  $\mathbb{P}^{x_0}(X_\tau \in B)$ , podemos cambiar el  $=$  por un  $\leq$ . Haremos uso de esto en la siguiente proposición, cuando nos referamos a la Proposición 2.1.

Y, por último, introducimos las siguientes definiciones para  $x \in D$ . Sea  $b > 0$ .

Sean

$$C_b(x) = \{(w, y) \in D : |w - x| < by\},$$

$$N_b(f)(x) = \sup_{z \in C_b(x)} |u(z)|,$$

$$N_b^A(f)(x) = \sup\{|u(w, y)| : (w, y) \in C_b(x), y < A\}, \quad (2.3)$$

$$U_t = u(Z_{t \wedge \tau}),$$

$$U^* = \sup_{t < \tau} |U_t|.$$

El conjunto  $C_b(x)$  es un cono con vértice en  $x$  y apertura  $b$ . A  $N_b(f)(x)$  se le conoce como la función maximal no tangencial sobre el cono  $C_b(x)$ .

**Proposición 2.2.** *Dados  $A, R > 0$ ,  $y f \geq 0$ , existen  $c$ , que no depende de  $A$  ni de  $R$ ;  $y s_0$ , que depende de  $A$  y  $R$ , tales que si  $\lambda > 0$  y  $s > s_0$ , entonces*

$$|\{x : N_b^A(f)(x) > \lambda\} \cap B(0, R)| \leq cs^d \mathbb{P}^{(0,s)}(U^* > \frac{\lambda}{2}). \quad (2.4)$$

*Demostración.* Primero, mostraremos que, para  $s$  suficientemente grande,

$$N_b^A(f)(x) > \lambda, |x| < R \Rightarrow \mathbb{P}_x^{(0,s)}(U^* > \frac{\lambda}{2}) \geq c. \quad (2.5)$$

Supongamos  $N_b^A(f)(x) > \lambda$  para algún  $|x| < R$ . Entonces, existe  $(w, y) \in C_b(x)$  tal que  $u(w, y) > \lambda$  y  $y \leq A$ . Como  $u$  es armónica, también es continua, y existe  $B'$ , una bola alrededor de  $(w, y)$  tal que  $B' \subset C_b(x)$  y  $u >$

$\frac{\lambda}{2}$  en  $B'$  (Es fácil ver de la definición de  $C_b(x)$  que es un conjunto abierto). Luego, la desigualdad de Harnack nos dice que existe una segunda bola  $B_y \subset B'$  de radio  $cy$  alrededor de  $(w, y)$  tal que para todo  $v \in B_y, u(v) \leq cu(w, y)$ , usando que  $u$  es no negativa y armónica.

Sea  $S_y = \inf\{t : Y_t \leq y\}$ . Como  $S_y \leq \tau$ , tenemos

$$\mathbb{P}_x^{(0,s)}(T_{B_y} < \tau) \geq \mathbb{P}_x^{(0,s)}(Z_{S_y} \in B_y). \quad (2.6)$$

Es decir, si la primera vez que la última coordenada del Browniano es menor o igual a  $y$  ocurre cuando el Browniano se encuentra dentro de la bola  $B_y$ , entonces cuando entró a la bola aún no había salido de  $D$ . Por definición de  $\mathbb{P}_z^{(0,s)}$ , el lado derecho es

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{E}^{(0,s)}[h_x(Z_{S_y}); Z_{S_y} \in B_y]}{h_x((0, s))} \\ &= \frac{\int_{B_y \cap \partial H_y} h_x(z) \mathbb{P}^{(0,s)}(Z_{S_y} \in dz)}{h_x((0, s))} \\ &= \frac{\int_{B_y \cap \partial H_y} h_x(z) \mathbb{P}^{(0,s-y)}(Z_\tau \in dz)}{h_x((0, s))} \\ &\geq \frac{ch_x((w, y))}{h_x((0, s))} \int_{B_y \cap \partial H_y} \frac{s-y}{(|z|^2 + |s-y|^2)^{\frac{d+1}{2}}} dv, \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde  $H_y = \mathbb{R}^d \times [y, \infty)$ . Para obtener la desigualdad, usamos la desigualdad de Harnack, y el hecho de que la distribución de  $Z_\tau$  está dada por el núcleo de Poisson (Proposición 1.11).

Recordamos que  $h_x(0, s) = P_s(0-x) = \frac{c_d s}{(s^2 + |x|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$ , que tiende a  $\frac{c}{s^d}$  cuando  $s \rightarrow \infty$ . Además,  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s-y}{(|z|^2 + |s-y|^2)^{\frac{d+1}{2}}} = \frac{c}{s^d}$ .

Como  $(w, y) \in C_b(x)$ , entonces  $0 \leq |w-x| \leq by$ , y por lo tanto,

$$h_x((w, y)) = P_y(w-x) = \frac{c_d y}{(y^2 + |w-x|^2)^{\frac{d+1}{2}}} \geq \frac{c_d y}{y^{d+1}} = \frac{c}{y^d}. \quad (2.8)$$

Y como el volumen de  $B_y \cap \partial H_y$  es  $cy^d$ , tenemos finalmente

$$\mathbb{P}_x^{(0,s)}(T_{B_y} < \tau) \geq \frac{cy^{-d}}{cs^{-d}} cs^{-d} cy^d = c \quad (2.9)$$

para  $s$  suficientemente grande. Luego, como  $u > \lambda/2$  en  $B_y$ ,  $T_{B_y} < \tau$ , entonces  $U^* > \lambda/2$ , y combinando con (2.9) obtenemos (2.5).

Por último, sea  $E = \{x : N_b^A(f)(x) > \lambda\}$ . Por la Proposición 2.1,

$$\begin{aligned}
s^d \mathbb{P}^{(0,s)}(U^* > \lambda/2) &\geq \int_{B(0,R) \cap E} s^d \mathbb{P}_x^{(0,s)}(U^* > \lambda/2) \mathbb{P}^{(0,s)}(X_\tau \in dx) \\
&\geq c \int_{B(0,R) \cap E} s^d \mathbb{P}^{(0,s)}(X_\tau \in dx) \\
&= c \int_{B(0,R) \cap E} s^{d+1} / (s^2 + y^2)^{\frac{d+1}{2}} dy \\
&\geq c \int_{B(0,R) \cap E} s^{d+1} / s^{d+1} dy \\
&= c |B(0, R) \cap E|,
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. La segunda desigualdad se debe a (2.5), y en la primera igualdad usamos nuevamente el núcleo de Poisson. Antes habíamos pedido un  $s$  “suficientemente grande”. Si lo pedimos en particular mayor que  $R$ , podemos usar  $s \geq y$  en la última desigualdad.  $\square$

Ahora estamos listos para definir la función maximal de Hardy-Littlewood y demostrar el teorema principal de esta sección.

**Definición 2.2.** Sea  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  localmente integrable. La función

$$Mf(x) = \sup_{r \in \mathbb{R}} \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(0, r)} |f(x + v)| dv.$$

es llamada la función maximal de Hardy-Littlewood.

Observemos que, si  $|t| < y$ , entonces  $P_y(t) \geq cy^{-d}$ , y como el volumen de  $B(0, y)$  es  $cy^{-d}$ , tenemos

$$P_y(t) \geq \frac{c}{|B(0, y)|} \mathbb{1}_{B(0, y)}(t). \quad (2.10)$$

**Definición 2.3.** Sean  $(X, \mu)$  y  $(Y, \nu)$  espacios de medida, y sea  $T$  un operador de  $L^p(X, \mu)$  en el espacio de funciones medibles de  $Y$  en  $\mathbb{C}$ . Decimos que  $T$  es débil  $(p, q)$ ,  $q < \infty$ , si existe  $c > 0$  tal que

$$\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left( \frac{c \|f\|_p}{\lambda} \right)^q,$$

y es fuerte  $(p, q)$  si es acotada de  $L^p(X, \mu)$  en  $L^q(Y, \nu)$ , es decir, si existe  $c > 0$  tal que

$$\|Tf\|_q \leq c\|f\|_p.$$

Las siguientes dos desigualdades serán demostradas en el apéndice.

**Teorema 2.2** (Primera Desigualdad de Doob). *Si  $M_t$  es una martingala, entonces*

$$\mathbb{P}(M_t^* \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}|M_t|}{a},$$

donde  $M_t^* = \sup_{s \leq t} |M_s|$  y  $a > 0$ .

**Teorema 2.3** (Segunda Desigualdad de Doob). *Usando la misma notación de arriba, si  $p > 1$ , existe  $c$  que depende únicamente de  $p$ , tal que*

$$\mathbb{E}(M_t^*)^p \leq c\mathbb{E}|M_t|^p.$$

**Teorema 2.4.** *Sea  $f$  localmente integrable, y sea  $Mf$  como arriba. Entonces*

$$(a) |\{x : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{c\|f\|_1}{\lambda}.$$

$$(b) \text{ Si } 1 < p \leq \infty, \text{ entonces } \|Mf\|_p \leq c_p\|f\|_p.$$

Es decir,  $M$  es débil  $(1,1)$  y fuerte  $(p,p)$ .

*Demostración.* Escribiendo  $f = f^+ - f^-$ , podemos suponer  $f \geq 0$ . Por el Corolario 1.1,  $U_t$  es martingala. Usando la primera desigualdad de Doob, tenemos

$$\mathbb{P}^{(0,s)}(U^* < \frac{\lambda}{2}) \leq \frac{2\mathbb{E}^{(0,s)}U_\tau}{\lambda}.$$

Combinando con (2.4),

$$|\{x : N_b^A(f)(x) > \lambda\} \cap B(0, R)| \leq \frac{cs^d \mathbb{E}^{(0,s)}U_\tau}{\lambda}$$

para  $s$  suficientemente grande. Como  $u$  es solución del problema de Dirichlet, tenemos  $U_\tau = f(X_\tau)$

Usando una vez más el núcleo de Poisson,

$$\mathbb{E}^{(0,s)}U_\tau = \mathbb{E}^{(0,s)}f(X_\tau) = \int f(v)P_s(0-v)dv = \int f(v)\frac{cs}{(s^2 + |0-v|^2)^{\frac{d+1}{2}}}dv.$$

Si  $s \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{cs^d \mathbb{E}^{(0,s)}U_\tau}{\lambda} \rightarrow \frac{cs^d \|f\|_1}{\lambda s^d} = \frac{c\|f\|_1}{\lambda}.$$

Por lo tanto,

$$|\{x : N_b^A(f)(x) > \lambda\} \cap B(0, R)| \leq \frac{c\|f\|_1}{\lambda}.$$

Si  $A, R \rightarrow \infty$ , tenemos

$$|\{x : N_b(f)(x) > \lambda\}| \leq \frac{c\|f\|_1}{\lambda}.$$

Por (2.10), tenemos  $Mf(x) \leq cN_b(f)(x)$  (multiplicando por  $f$  e integrando en ambos lados), y de ahí se sigue (a).

Para demostrar (b), primero multiplicamos (2.4) por  $p\lambda^{p-1}$  de ambos lados e integramos sobre  $\lambda$  de 0 a  $\infty$ . Entonces,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty p\lambda^{p-1} |\{x : N_b^A(f)(x) > \lambda\} \cap B(0, R)| d\lambda \\ & \leq \int_0^\infty p\lambda^{p-1} cs^d \mathbb{P}^{(0,s)}(U^* < \frac{\lambda}{2}) d\lambda. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Del lado izquierdo, usando el teorema de Fubini tenemos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty p\lambda^{p-1} |\{x : N_b^A(f)(x) > \lambda\} \cap B(0, R)| d\lambda \\
&= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \int_{B(0, R)} \mathbb{I}_{\{x: N_b^A(f)(x) > \lambda\}} dx d\lambda \\
&= \int_{B(0, R)} \int_0^{N_b^A(f)(x)} p\lambda^{p-1} d\lambda dx \\
&= \int_{B(0, R)} [N_b^A(f)(x)]^p dx.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Por otra parte, del lado derecho:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty p\lambda^{p-1} c_s^d \mathbb{P}^{(0, s)}(U^* < \frac{\lambda}{2}) d\lambda &= c_s^d \int_0^\infty \mathbb{E}^{(0, s)} \mathbb{I}_{\{U^* > \lambda/2\}} p\lambda^{p-1} d\lambda \\
&= c_s^d \mathbb{E}^{(0, s)} \int_0^{2U^*} p\lambda^{p-1} d\lambda \\
&= c_s^d \mathbb{E}^{(0, s)} (U^*)^p.
\end{aligned}$$

Resumiendo, tenemos

$$\int_{B(0, R)} [N_b^A(f)(x)]^p dx \leq c_s^d \mathbb{E}^{(0, s)} (U^*)^p.$$

Por la segunda desigualdad de Doob, el lado derecho está acotado por  $c_s^d \mathbb{E}^{(0, s)} |U_\tau|^p$ . Análogamente a lo que hicimos para demostrar (a), esto último converge a  $c\|f\|_p^p$  cuando  $s$  tiende a  $\infty$ . Luego, si  $R \rightarrow \infty$  y  $A \rightarrow \infty$ , tenemos  $\|N_b(f)\|_p^p \leq c\|f\|_p^p$ . Por lo tanto,  $\|N_b(f)\|_p \leq c\|f\|_p$ , y usando una vez más que  $Mf(x) \leq cN_b(f)(x)$  llegamos a (b).  $\square$

A continuación, demostraremos rápidamente la conocida desigualdad de Chebyshev.

**Proposición 2.3** (Desigualdad de Chebyshev). *Si  $\mathbb{P}[X > 0] = 1$ , entonces para toda  $a > 0$  tenemos*

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathbb{E}[X/a]. \tag{2.13}$$

*Demostración.*  $\mathbb{P}[X \geq a] = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X \geq a\}}] \leq \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X \geq a\}}X/a] \leq \mathbb{E}[X/a]$ .  $\square$

Ahora demostraremos un teorema que surge como corolario del Teorema 2.4. Primero, definimos

$$A_r f(x) = \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(0, r)} f(x + h) dh$$

para  $f$  localmente integrable. Es decir,  $A_r f$  es el promedio de  $f$  sobre la bola con centro en  $x$  y radio  $r$ . Y el teorema es el siguiente,

**Teorema 2.5.**

(a) Si  $1 < p < \infty$  y  $f \in L^p$ , entonces  $\|A_r f - f\|_p \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ .

(b) Si  $1 \leq p \leq \infty$  y  $f \in L^p$ , entonces  $\lim_{r \rightarrow \infty} A_r f = f$  casi en todas partes.

*Demostración.* Una vez más, escribimos  $f = f^+ - f^-$  y podemos suponer  $f \geq 0$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Escribimos  $f = g + h$ , donde  $g$  es continua con soporte compacto, y  $h$  tiene norma  $p$  menor que  $\epsilon$ . Esta descomposición existe porque  $C_K^1$  es denso en  $L^p$ . Primero, veamos que  $A_r g$  converge a  $g$  uniformemente.

$$\begin{aligned} A_r g(x) - g(x) &= \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(0, r)} g(x + y) dy - g(x) \\ &= \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(0, r)} [g(x + y) - g(x)] dy, \end{aligned}$$

ya que como estamos integrando respecto a  $y$ ,  $g(x)$  es constante, y la integral se cancela con la fracción. Como  $g$  es continua, es claro que esto último converge puntualmente a 0 cuando  $y \rightarrow 0$ . Y, como el dominio es compacto, entonces la convergencia es uniforme.

Ya sabiendo eso,

$$\begin{aligned} &\limsup_{r \rightarrow 0} \|A_r f - f\|_p \\ &\leq \limsup_{r \rightarrow 0} \|A_r f - A_r g\|_p + \|A_r g - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &= \limsup_{r \rightarrow 0} \|A_r h\|_p + \|h\|_p \\ &\leq \|Mh\|_p + \|h\|_p \\ &\leq c\epsilon + \epsilon. \end{aligned}$$

En la última desigualdad usamos el Teorema 2.4(b), por lo que la afirmación es cierta sólo si  $p > 1$ . Y como  $\epsilon$  es arbitrario, tenemos (a).

La prueba de (b) es parecida. Primero, notemos que si probamos el resultado para casi toda  $x$  en  $B(0, R)$  para un  $R$  arbitrario, entonces se cumple para casi toda  $x$  en el dominio. Entonces, lo demostraremos para  $f\mathbb{I}_{B(0,R)}$ . Primero, sabemos que  $f \in L^p$ . Veamos que  $f\mathbb{I}_{B(0,R)} \in L^1$ . Claramente, si  $p = 1$ , entonces  $f \in L^1$  y por lo tanto  $f \in L^1$ , así que supongamos  $p > 1$ . Sea  $q$  tal que  $1/p + 1/q = 1$ . Por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} \|f\mathbb{I}_{B(0,R)}\|_1 &= \|f\mathbb{I}_{B(0,R)}\mathbb{I}_{B(0,R)}\|_1 \leq \|f\mathbb{I}_{B(0,R)}\|_p \|\mathbb{I}_{B(0,R)}\|_q \\ &\leq \|f\|_p \left( \int_{B(0,R)} 1^q \right)^{1/q} < \infty. \end{aligned}$$

Ahora, sean  $g$  y  $h$  como antes, y sea  $\delta > 0$ .

$$\{x : \limsup |A_r f(x) - f(x)| > \delta\} \subseteq \{x : Mh(x) > \delta/2\} \cup \{x : |h(x)| > \delta/2\}.$$

Esto se debe a que  $|A_r f(x) - f(x)| \leq |Mh(x)| + |h(x)|$ , y si esto último es mayor a  $\delta$ , entonces al menos uno de los sumandos es mayor a  $\delta/2$ . Usando el inciso (a) del teorema anterior y la desigualdad de Chebyshev,

$$\begin{aligned} &|\{x : \limsup |A_r f(x) - f(x)| > \delta\}| \\ &\leq |\{x : Mh(x) > \delta/2\}| + |\{x : |h(x)| > \delta/2\}| \\ &\leq c\|h\|_1/\delta + 2\|h\|_1/\delta \\ &\leq c\epsilon/\delta. \end{aligned}$$

Como  $\epsilon$  es arbitrario, el lado izquierdo es igual a 0. Y como  $\delta$  es arbitrario,  $\limsup |A_r f(x) - f(x)| = 0$  casi en todas partes.  $\square$

## 2.2. Aproximaciones a la identidad

Por último, generalizamos el Teorema 2.5. Primero, sea  $\phi$  una función radialmente simétrica (es decir, dados  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$  tales que  $|x_1| = |x_2|$ , entonces  $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ ), decreciente como función de  $|x|$  y con  $k = \int |\phi(x)| dx < \infty$ . Ejemplos de funciones así pueden ser  $e^{-x^2}$  o  $\frac{1}{1+x^2}$ . Otro ejemplo es el núcleo de Poisson. Definimos  $\phi_r(x) = r^{-d}\phi(x/r)$ .

**Teorema 2.6.**

(a) Si  $f \in L^p$  y  $1 \leq p \leq \infty$ , entonces  $\sup_{r>0} |f * \phi_r(x)| \leq kMf(x)$ .

(b) Si  $f \in L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$  y  $\int \phi(x)dx = 1$ , entonces  $\|f * \phi_r - f\|_p \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow 0$ .

(c) Si  $f \in L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  y  $\int \phi(x)dx = 1$ , entonces  $\lim_{r \rightarrow 0}(f * \phi_r)(x) = f(x)$  casi en todas partes.

*Demostración.* Para probar (a), primero demostraremos  $|f * \phi(0)| \leq kMf(0)$ . Como  $\phi$  es radial, podemos suponer que es constante en anillos, es decir, que existen  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  y  $A_1 \geq A_2 \geq \dots \geq A_n$  tales que  $\phi(x) = A_1$  en  $|x| \leq a_1$ ,  $\phi(x) = A_i$  si  $a_{i-1} \leq |x| \leq a_i$  y  $\phi(x) = 0$  si  $|x| > a_n$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
 & |f * \phi(0)| \\
 = & \left| \int f(x)\phi(x)dx \right| \\
 = & \left| A_1 \int_{B(0,a_1)} f + A_2 \int_{B(0,a_2)-B(0,a_1)} f + \dots + A_n \int_{B(0,a_n)-B(0,a_{n-1})} f \right| \\
 = & \left| (A_1 - A_2) \int_{B(0,a_1)} f + (A_2 - A_3) \int_{B(0,a_2)} f + \dots + A_n \int_{B(0,a_n)} f \right| \\
 \leq & \left[ (A_1 - A_2)|B(0, a_1)| + \dots + A_n|B(0, a_n)| \right] Mf(0) \\
 = & \left[ A_1|B(0, a_1)| + A_2|B(0, a_2) - B(0, a_1)| + \dots \right. \\
 & \left. + A_n|B(0, a_n) - B(0, a_{n-1})| \right] Mf(0).
 \end{aligned}$$

Notamos que la última expresión es precisamente  $\int \phi(x)dx Mf(0)$ . Para el caso general, aproximamos  $\phi$  por funciones  $\phi_n$  como la de arriba y usamos convergencia dominada para obtener

$$|f * \phi(0)| < cMf(0). \tag{2.14}$$

Ahora,

$$f * \phi_r(0) = \int f(-y)\phi_r(y)dy = \int f(-y)\frac{1}{r^d}\phi\left(\frac{y}{r}\right)dy = \int f(-zr)\phi(z)dz,$$

la última igualdad se obtiene después del cambio de variable  $y = zr$ . Definimos  $f_r(z) = f(zr)$ . Entonces, la última expresión es  $f_r * \phi(0)$ , y por (2.14), esto último es menor o igual que  $cMf_r(0)$ .

Haciendo el mismo cambio de variable que antes,

$$\begin{aligned}
Mf_r(0) &= \sup_{t>0} \frac{1}{|B(0,t)|} \int_{B(0,t)} |f_r(z)| dz \\
&= \sup_{t>0} \frac{1}{|B(0,t)|} \int_{B(0,t)} |f(rz)| dz \\
&= \sup_{t>0} \frac{1}{r^d |B(0,t)|} \int_{B(0,tr)} |f(y)| dy \\
&= \sup_{tr>0} \frac{1}{|B(0,tr)|} \int_{B(0,tr)} |f_r(z)| dz \\
&= Mf(0).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|f * \phi_r(0)| \leq cMf(0). \quad (2.15)$$

Ahora, definimos  $f^r(y) = f(r+y)$ .

$$\begin{aligned}
|f * \phi_r(x)| &= \left| \int f(x-y)\phi_r(y) dy \right| = \left| \int f^x(-y)\phi_r(y) dy \right| \\
&= |f^x * \phi_r(0)| \leq cMf^x(0),
\end{aligned}$$

esto último por (2.15). Igual que antes,

$$\begin{aligned}
Mf^x(0) &= \sup_{t>0} \frac{1}{|B(0,t)|} \int_{B(0,t)} |f^x(y)| dy \\
&= \sup_{t>0} \frac{1}{|B(0,t)|} \int_{B(0,t)} |f(x+y)| dy \\
&= \sup_{t>0} \frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} |f(z)| dz \\
&= Mf(x),
\end{aligned}$$

la última igualdad haciendo el cambio de variable  $x+y = z$ .

Resumiendo, tenemos  $f * \phi_r(x) \leq cMf(x)$ , que es lo que queríamos.

Para (b), recordemos que  $\phi$  integra 1, lo que nos permite escribir

$$f * \phi_r(x) - f(x) = \int [f(x-y) - f(x)]\phi_r dy.$$

Luego, usando la igualdad de arriba y la desigualdad de Jensen,

$$\begin{aligned} \|f * \phi_r - f\|_p^p &\leq \int \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p^p \phi_r(y) dy \\ &= \int \|f(\cdot - rz) - f(\cdot)\|_p^p \phi(z) dz. \end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene después de los cambios de variable  $y = rz$  (recordemos que  $y \in \mathbb{R}^n$ ).

Luego, dado  $\epsilon > 0$ , una vez más escribimos  $f = g + h$ , donde  $g$  es continua de soporte compacto y  $\|h\|_p < \epsilon$ . Por la continuidad de  $g$ ,  $\lim_{r \rightarrow 0} \|f(\cdot - rz) - f(\cdot)\|_p = 0$ , y  $\|h(\cdot - rz) - h(\cdot)\|_p \leq 2\epsilon$ .

Por lo tanto,  $\limsup \|f * \phi_r - f\|_p \leq \epsilon$ , y como epsilon es arbitrario,  $\limsup \|f * \phi_r - f\|_p = 0$ , por lo que tenemos (b).

Por último, la prueba de (c) cuando  $1 \leq p < \infty$  es análoga a la del Teorema 2.5 (b). Antes usábamos  $|A_r f| \leq Mf$  por definición de  $Mf$ , ahora tenemos  $\limsup |f * \phi_r(x)| \leq kMf(x)$  por el inciso (a). Escribimos entonces a  $f$  como  $g - h$ , usamos la asociatividad de la convolución y usamos la desigualdad de Chebyshev exactamente como hicimos arriba para obtener el resultado deseado. Ahora hagamos el caso  $p = \infty$ . Igual que arriba, sea  $R$  arbitrario. Queremos ver que  $f * \phi_r(x) \rightarrow f(x)$  casi en todas partes dentro de  $B(0, R)$ . Escribimos  $f = f\mathbb{1}_{B(0,2R)} + f\mathbb{1}_{B(0,2R)^c}$ . Como  $f$  es acotada casi en todas partes (recordemos que  $f \in L^\infty$ ),  $f\mathbb{1}_{B(0,2R)} \in L^1$ , y ya lo habíamos demostrado para  $p < \infty$ , en particular para  $p = 1$ . Ahora, sea  $h = f\mathbb{1}_{B(0,2R)^c}$ . Si  $x \in B(0, R)$  entonces  $h(x) = 0$ , y por lo tanto  $x \in B(0, R)$  y  $|y| < R$  implican  $h(x-y) = 0$ . Por lo tanto, usando este hecho y la desigualdad de Jensen,

$$|h * \phi_r(x)| = \left| \int h(x-y)\phi_r(y) dy \right| \leq \int_{|y| \geq R} \phi_r(y) dy \|h\|_\infty.$$

Es claro que  $\|f\|_\infty \geq \|g\|_\infty$ , por lo que el lado derecho es menor o igual a

$$\int_{|y| \geq R} \phi_r(y) dy \|f\|_\infty \leq \int_{|y| \geq R/r} \phi(y) dy \|f\|_\infty,$$

y esa integral converge a 0 cuando  $r \rightarrow 0$ . La última igualdad se sigue del mismo cambio de variable que hicimos más arriba.  $\square$

Se dice que  $\phi$  es una aproximación a la identidad debido a que su convolución con  $f$  converge a  $f$  de diversas formas. La importancia de las aproximaciones a la identidad radica en que las convoluciones con las que trabajamos son funciones suaves, y en el análisis es muy útil poder aproximar una función cualquiera en  $L^p$  con funciones suaves. Una prueba de esto se puede encontrar en [Hörmander].

# Capítulo 3

## La transformada de Hilbert

En este capítulo, trabajemos con  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Para empezar, definimos la transformada de Hilbert como sigue, por supuesto, cuando el límite existe.

$$Hf(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|y| > \epsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy.$$

Como todos sabemos,  $1/y$  no es integrable, por lo que incluso para funciones sencillas como  $f \equiv 1$ , la integral  $\int_{\epsilon < y} \frac{1}{y} dy$  no converge cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Sin embargo, si aprovechamos el hecho de que  $\frac{1}{y}$  es una función impar en  $\mathbb{R} - \{0\}$ , tenemos  $\int_{|y| > \epsilon} \frac{dy}{y} = 0$  para toda  $\epsilon > 0$ . La siguiente proposición ilustra esta idea.

**Proposición 3.1.** *Si  $f \in C_K^1$ , entonces para toda  $x$  el siguiente límite existe,*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|y| > \epsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy$$

*Demostración.* Primero fijemos  $x$ . Como  $f$  es de soporte compacto, para  $|y|$  suficientemente grande,  $f(x-y)$  valdrá 0. Veamos que pasa cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Si  $\epsilon_2 > \epsilon_1 > 0$ , claramente

$$\int_{\epsilon_2 > |y| > \epsilon_1} \frac{f(x-y)}{y} dy = \int_{\epsilon_2 > |y| > \epsilon_1} \frac{f(x-y) - f(x)}{y} dy.$$

Por el teorema del valor medio,  $|f(x-y) - f(x)| \leq \|f'\|_\infty |y|$ , y por lo tanto

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{|y|>\epsilon_1} \frac{f(x-y)}{y} dy - \int_{|y|>\epsilon_2} \frac{f(x-y)}{y} dy \right| \\
&= \left| \int_{\epsilon_2 > |y| > \epsilon_1} \frac{f(x-y)}{y} dy \right| \\
&\leq \int_{\epsilon_2 > |y| > \epsilon_1} \frac{|f(x-y) - f(x)|}{|y|} dy \\
&\leq \|f'\|_\infty \int_{\epsilon_2 > |y| > \epsilon_1} dy \\
&\leq 2(\epsilon_2 - \epsilon_1) \|f'\|_\infty.
\end{aligned}$$

La igualdad anterior implica que si  $\epsilon_n \rightarrow 0$ , con  $\epsilon_n > 0$ , entonces

$\left( \int_{|y|>\epsilon_n} f(x-y) \frac{dy}{y} \right)$  es una sucesión de Cauchy, de donde se sigue la existencia de  $Hf(x)$ .  $\square$

El siguiente teorema es el análogo al de la función maximal de Hardy-Littlewood, y nuestra meta principal en esta sección.

**Teorema 3.1** (Riesz).

(a) Si  $1 < p < \infty$  y  $f \in C_K^1 \cap L^p$ , entonces  $\|Hf\|_p \leq c_p \|f\|_p$ .

(b) Si  $f \in C_K^1$ , entonces  $|\{x : |Hf(x)| > \lambda\}| \leq c \|f\|_1 / \lambda$ .

Es decir,  $H$  es fuerte  $(p, p)$  y débil  $(1, 1)$ .

Antes de poder demostrar el teorema, necesitamos un par de proposiciones.

**Proposición 3.2.** Sea  $f \in C_K^1$ , entonces  $|Hf(x)| < c/(1 + |x|)$ , donde  $c$  depende de  $f$ .

*Demostración.* Consideremos  $f \in C_1^K$  y  $a > 0$ .

$$Hf(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |y| < a} \frac{f(x-y)}{y} dy + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{a < |y| < N} \frac{f(x-y)}{y} dy. \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
& \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |y| < a} \frac{f(x-y)}{y} dy \right| = \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |y| < a} \frac{f(x-y)}{y} - \frac{f(x)}{y} dy \right| \\
&= \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |y| < a} \frac{f'(\xi) \cdot y}{y} dy \right| = \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |y| < a} f'(\xi) dy \right| \leq 2 \|f'\|_{\infty} a,
\end{aligned}$$

donde  $\xi$  es el punto que nos da el teorema del valor medio. Por otra parte, es claro que el valor absoluto del segundo sumando de (3.1) es acotado, ya que  $f$  es acotada. Además, lejos del 0 la función  $1/y$  es acotada. En resumen, existe  $c_1 > 0$  tal que  $|Hf(x)| < c_1$  para toda  $x$ .

Ahora, haciendo un cambio de variable, vemos que

$$\int_{|y| > \epsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy = \int_{|x-y| > \epsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy.$$

Podemos suponer que existe  $K > 0$  tal que el soporte de  $f$  es subconjunto de  $B(0, K)$ . Ahora, si  $|x| > 2K$  y  $|y| < K$ , entonces  $|x-y| \geq |x| - |y| > |x| - K > |x| - |x|/2 = |x|/2$ , por lo que

$$\begin{aligned}
|Hf(x)| &= \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y| > \epsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy \right| \\
&\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y| < \epsilon} \left| f(y) \right| dy \frac{2}{|x|} \leq 4K \|f\|_{\infty} / |x| = c_3 / |x|.
\end{aligned}$$

Si  $|x| \leq 2K$ , entonces  $\frac{2K}{|x|} \geq 1$ . Por lo que vimos arriba,  $|Hf(x)| < c_1 \leq c_1 \frac{2K}{|x|} = c_4 / |x|$ .

Sea  $c_2 = \max\{c_3, c_4\}$ . Entonces, para toda  $x$ ,  $|Hf(x)| < c_2 / |x|$ .

Ahora, es inmediato que si  $|x| < c_2 / c_1$ , entonces  $\frac{c_2 + c_1}{1 + |x|} > c_1$ ; y si  $|x| \geq c_2 / c_1$ , entonces  $\frac{c_1 + c_2}{1 + |x|} > \frac{c_2}{|x|}$ . En resumen, para toda  $x$  tenemos que  $|Hf(x)| < \frac{c_1 + c_2}{1 + |x|}$ , que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

**Corolario 3.1.**  $Hf \in L^q$  para toda  $q > 1$  si  $f \in C_K^1$ .

*Demostración.* Es claro que  $\frac{1}{1 + |x|}$  es integrable en el dominio compacto, así como cualquiera de sus potencias.  $\square$

**Proposición 3.3.** Sean  $f \in C_K^1$ ,  $u$  la extensión armónica de  $f$  y  $v$  la extensión armónica de  $Hf$ . Entonces,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s(v(0, s))^2 = 0$$

y

$$s|u(0, s)| \leq c\|f\|_1.$$

*Demostración.* Sean  $r > 1$  y  $s > 0$ .

$$\int |P_s(y)|^r dy = c \int \left| \left( \frac{s}{s^2 + y^2} \right) \right|^r dy = cs^{1-r} \int \left| \left( \frac{1}{1 + y^2} \right) \right|^r dy \leq cs^{1-r}, \quad (3.2)$$

por lo que  $\|P_s\|_r \leq (cs^{1-r})^{\frac{1}{r}} = cs^{\frac{1}{r}-1}$ . La segunda igualdad de (3.2) se sigue del cambio de variable  $y = sx$ , y la desigualdad se da porque la integral existe para  $r > 1$ . Sea  $q < 2$ , y sea  $r$  tal que  $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$ . Por la desigualdad de Hölder,  $|V_0| = |v(0, s)| = |P_s * Hf(0)| \leq \|P_s\|_r \|Hf\|_q$ . Por el Corolario 3.1,  $Hf \in L^q$  para toda  $q > 1$ . Por lo tanto,

$$|sv(0, s)|^2 \leq s|v(0, s)|^2 \leq cs(s^{\frac{1}{r}-1})^2 = cs(s^{-(1-\frac{1}{r})})^2.$$

Como  $q < 2$ , entonces  $1 - 1/r > 1/2$ , por lo que el exponente de  $s$  en la última expresión es negativo. Entonces, el lado derecho tiende a 0 cuando  $s \rightarrow \infty$ , con lo que termina la demostración.

Veamos ahora la segunda parte:

$$\begin{aligned} s|u(0, s)| &= s \left| \int f(z)P_s(-z)dz \right| = \left| \int \frac{s^2 c f(z)}{(s^2 + z^2)^{\frac{d+1}{2}}} \right| \leq c \left| \int f(z)dz \right| \\ &\leq c \int |f(z)|dz = c\|f\|_1. \end{aligned}$$

□

Para la siguiente proposición, definimos  $H_\epsilon(x) = 1/(\pi x)\mathbb{I}_{\{\epsilon < |x|\}}$ . El objetivo de la siguiente proposición es calcular la transformada de Fourier de  $Hf$ .

**Proposición 3.4.** Si  $f \in C_K^1$ , entonces  $\widehat{Hf}(\xi) = i \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{f}(\xi)$  casi en todas partes.

*Demostración.* Primero calculemos  $\widehat{H}_\epsilon$ . Como  $1/x$  es impar, entonces

$$\widehat{H}_\epsilon(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon < |x|} \frac{e^{i\xi x}}{x} dx = \frac{2i}{\pi} \int_{\epsilon < x} \frac{\text{sen}(\xi x)}{x} dx.$$

Para  $\xi = 0$ , esto último vale 0; y si  $\xi < 0$ , es igual a  $-\frac{2i}{\pi} \int_{\epsilon < x} \sin(|\xi|x)/x dx$ . Y haciendo un sencillo cambio de variable, obtenemos finalmente que

$$\widehat{H}_\epsilon(\xi) = \text{sgn}(\xi) \frac{2i}{\pi} \int_{|\xi|\epsilon < x} \frac{\text{sen } x}{x} dx.$$

Es un hecho conocido <sup>3</sup> que esta última integral converge de forma acotada a  $\pi/2$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Por lo tanto,  $\widehat{H}_\epsilon(\xi) \rightarrow i \text{sgn}(\xi)$  puntualmente y acotadamente.

Por la identidad de Plancherel, y usando el inciso (a) de la Proposición 1.9,

$$\|H_{\epsilon_1} * f - H_{\epsilon_2} * f\|_2^2 = c \int |\widehat{H}_{\epsilon_1}(\xi) - \widehat{H}_{\epsilon_2}(\xi)|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Por lo que acabamos de ver,  $|\widehat{H}_{\epsilon_1}(\xi) - \widehat{H}_{\epsilon_2}(\xi)|^2$  converge a 0 cuando  $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ . Como  $f \in L^2$  y otra vez por la identidad de Plancherel,  $\|\widehat{f}\|_2 < \infty$ , así que lo que está dentro de la integral converge a 0. También vimos que esa convergencia es acotada, así que por el Teorema de Convergencia Dominada podemos asegurar que el lado derecho converge a 0.

Lo que esto nos dice es que  $H_\epsilon * f$  es una sucesión de Cauchy en  $L^2$ , y por lo tanto converge. Por la Proposición 3.1, el límite puntual es  $Hf$ , así que en  $L^2$  el límite es el mismo. Otra vez por la identidad de Plancherel, la transformada de Fourier de  $H_\epsilon * f$  converge en  $L^2$  a  $\widehat{Hf}$ . Por otra parte, la transformada de Fourier de  $H_\epsilon * f$  es  $\widehat{H}_\epsilon(\xi)\widehat{f}(\xi)$ , que converge puntualmente a  $i \text{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi)$  como vimos antes. Y como los dos límites deben ser el mismo, obtenemos el resultado deseado.  $\square$

**Proposición 3.5.** *Sea  $f \in C_K^1$ . Sea  $u$  la extensión armónica de  $f$  y sea  $v$  la extensión armónica de  $Hf$  (ver teoremas 1.3 y 1.11). Entonces,  $u$  y  $v$  son funciones conjugadas armónicas.*

<sup>3</sup>Para una demostración, ver [Courant] p. 251.

*Demostración.* Queremos ver que  $u$  y  $v$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Para esto, veremos que las transformadas de Fourier de las derivadas parciales cumplen las ecuaciones. Después, usando la fórmula de inversión obtenemos el resultado para  $u$  y  $v$ . En la demostración del Teorema 1.11 vimos que la transformada de Fourier del núcleo de Poisson con  $y$  fija es  $\widehat{P}_y(\xi) = e^{-y|\xi|}$ .

Recordemos que  $u(x, y) = (P_y(\cdot) * f)(x)$ . Entonces, si fijamos  $y$ , la transformada de Fourier en  $x$  es

$$\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{P}_y(\xi)\widehat{f}(\xi) = e^{-y|\xi|}\widehat{f}(\xi). \quad (3.3)$$

Usando el inciso (b) de la Proposición 1.9, obtenemos

$$\widehat{\partial_x u}(\xi, y) = i\xi\widehat{u}(\xi, y) = i\xi e^{-y|\xi|}\widehat{f}(\xi). \quad (3.4)$$

Derivando (3.3) con respecto a  $y$ ,

$$\widehat{\partial_y u}(\xi, y) = -|\xi|e^{-y|\xi|}\widehat{f}(\xi). \quad (3.5)$$

Notemos que en el paso anterior podemos cambiar libremente de lugar la derivada con la transformada, ya que  $y$  es una constante para la transformada de Fourier, que hicimos en  $x$ . Análogamente,

$$\widehat{v}(\xi, y) = e^{-y|\xi|}\widehat{Hf}(\xi) = e^{-y|\xi|}i \operatorname{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi), \quad (3.6)$$

$$\widehat{\partial_x v}(\xi, y) = i\xi e^{-y|\xi|}i \operatorname{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi) = -|\xi|e^{-y|\xi|}\widehat{f}(\xi), \quad (3.7)$$

$$\widehat{\partial_y v}(\xi, y) = -|\xi|e^{-y|\xi|}i \operatorname{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi) = -i\xi e^{-y|\xi|}\widehat{f}(\xi). \quad (3.8)$$

Comparando estas ecuaciones, vemos que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen casi para todas las parejas  $(x, y)$ . Y como  $u$  y  $v$  son armónicas, son continuas y el resultado es válido en todo  $D$ .

□

A continuación damos algunos resultados de cálculo estocástico que necesitaremos para demostrar el teorema de Riesz. Sea  $M_t$  una martingala continua cuadrado-integrable. Es un resultado conocido que  $M_t^2$  es una submartingala. Definimos la variación cuadrática de  $M$  como el proceso estocástico continuo creciente  $\langle M \rangle_t$  que hace que  $M_t^2 - \langle M \rangle_t^2$  sea una martingala. La existencia de este proceso es difícil de probar y no lo haremos aquí, una prueba se puede consultar en [Bass], así como la demostración de los siguientes dos teoremas<sup>1</sup>. En realidad, en general al proceso que acabamos de definir se le llama compensador, y se define el proceso de variación cuadrática de un proceso como  $[M]_t = \lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2$  cuando el límite existe en probabilidad. En el caso del movimiento Browniano, el compensador es igual al proceso de variación cuadrática, por lo que en el futuro diremos simplemente variación cuadrática refiriéndonos a ambos. La prueba de que ambos procesos son iguales se puede consultar en [Kuo].

Veamos ahora una forma de calcular la variación cuadrática de un proceso  $N_t$ .

**Teorema 3.2.** *Sea  $H_s$  un proceso, y sea  $N_t = \int_0^t H_s dZ_t$ . Entonces,  $\langle N \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$ , donde  $Z_t$  es una vez más un movimiento Browniano.*

**Teorema 3.3** (Desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy). *Sea  $M_t$  una martingala continua con  $M_0 \equiv 0, 0 < p < \infty$ . Entonces, existen constantes  $c_1$  y  $c_2$  tales que para cualquier tiempo de paro  $T$  se cumplen las siguientes desigualdades*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_T^*)^p &\leq c_1 \mathbb{E} \langle M \rangle_T^{p/2} \\ \mathbb{E} \langle M \rangle_T^{p/2} &\leq c_2 \mathbb{E}(M_T^*)^p. \end{aligned}$$

Ahora, ya podemos demostrar el Teorema de Riesz.

*Demostración del Teorema 3.1 (a).* Primero que nada, sea  $Z_t$  un movimiento Browniano 2-dimensional, y sean  $u$  y  $v$  como en la Proposición 3.5.

---

<sup>1</sup>En realidad, el Teorema 3.3 aparece mal enunciado en el libro, en la página 62. En la página del autor se puede encontrar la fe de erratas con el enunciado correcto: [www.math.uconn.edu/~bass/pta-errata.pdf](http://www.math.uconn.edu/~bass/pta-errata.pdf)

En esa misma proposición vimos que  $u$  y  $v$  son conjugadas armónicas. Es fácil ver que si se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces  $|\nabla u| = |\nabla v|$ . Definimos  $U_t = u(Z_{t \wedge \tau})$  y  $V_t = v(Z_{t \wedge \tau})$ . La fórmula de Itô<sup>2</sup> nos dice que  $U_t - U_0 = u(Z_{t \wedge \tau}) - u(Z_0) = \int_0^{t \wedge \tau} \nabla u(Z_r) dZ_r$ , usando una vez más que  $u$  es armónica y que por lo tanto la última integral vale 0. Por el Teorema 3.2,  $\langle U_t - U_0 \rangle = \int_0^{t \wedge \tau} (\nabla u(Z_r))^2 dr$ . Y, por último, es claro por la definición del compensador que el compensador de un proceso más una constante es el compensador del proceso, por lo que en resumen tenemos

$$\langle U_t \rangle = \int_0^{t \wedge \tau} (\nabla u(Z_r))^2 dr, \quad (3.9)$$

y lo mismo para  $v$ .

Como  $|\nabla u| = |\nabla v|$ , y usando (3.9)

$$\langle U \rangle_t = \int_0^{t \wedge \tau} |\nabla u|^2(Z_r) dr = \int_0^{t \wedge \tau} |\nabla v|^2(Z_r) dr = \langle V \rangle_t.$$

Por el Teorema 3.3

$$\begin{aligned} s\mathbb{E}^{(0,s)}|V_\tau|^p &\leq cs\mathbb{E}^{(0,s)}|V_0|^p + cs\mathbb{E}^{(0,s)}\langle V \rangle_\tau^{p/2} \\ &= cs\mathbb{E}^{(0,s)}|V_0|^p + cs\mathbb{E}^{(0,s)}\langle U \rangle_\tau^{p/2} \\ &\leq cs\mathbb{E}^{(0,s)}|V_0|^p + cs\mathbb{E}^{(0,s)}|U_\tau|^p + cs\mathbb{E}^{(0,s)}|U_0|^p. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Los términos  $cs\mathbb{E}^{(0,s)}|V_0|^p$  y  $cs\mathbb{E}^{(0,s)}|U_0|^p$  los sumamos porque el Teorema 3.3 nos pide  $M_0 \equiv 0$ . Ahora, hagamos  $s \rightarrow \infty$ . Si demostramos

$$s\mathbb{E}^{(0,s)}|U_0|^p \rightarrow 0 \quad (3.11)$$

y

$$s\mathbb{E}^{(0,s)}|V_0|^p \rightarrow 0, \quad (3.12)$$

(3.10) se convierte en

$$\int |Hf(x)|^p dx \leq c \int |f(x)|^p dx, \quad (3.13)$$

---

<sup>2</sup>Ver Apéndice.

usando el mismo argumento que en la demostración del Teorema 2.4, es decir, usando la expresión analítica del núcleo de Poisson. Para ver que efectivamente es lo mismo:

$$s\mathbb{E}^{(0,s)}|U_\tau|^p = s\mathbb{E}^{(0,s)}|u(Z_\tau)|^p = s\mathbb{E}^{(0,s)}|f(Z_\tau)|^p,$$

esto último porque  $u$  es conjugada armónica de  $f$ , y por (1.3) valen lo mismo en la frontera del dominio. Entonces, recordando que la dimensión es 2,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s\mathbb{E}^{(0,s)}|f(Z_\tau)|^p = \lim_{s \rightarrow \infty} \int |f(z)|^p \frac{cs^2}{(z^2 + s^2)} dz = c \int |f(z)|^p dz.$$

Y (3.13) es precisamente lo que queremos demostrar.

Veamos entonces cómo probar (3.11). Dado que el Browniano comenzó en  $(0, s)$ ,

$$|U_0| = |u(0, s)| = c \left| \int \frac{s}{z^2 + s^2} f(z) dz \right| \leq c \left| \int \frac{1}{s} f(z) dz \right| \leq \frac{c}{s} \|f\|_1.$$

Como  $f$  es continua y de soporte compacto, está en  $L^1$ , por lo que para  $p > 1$  tenemos que  $s\mathbb{E}^{(0,s)}|U_0|^p \leq cs(s^{-p}\|f\|_1^p) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \infty$ . Ya sólo nos falta probar (3.12), pero la prueba es análoga a la que hicimos en la primera parte de la Proposición 3.3, sólo sustituimos  $p$  en lugar de 2.  $\square$

*Demostración del Teorema 3.1 (b).* Por la fórmula de Itô, tenemos

$$U_t = u(Z_{t \wedge \tau}) = u(Z_0) + \int_0^{\tau \wedge t} \nabla u(Z_s) \cdot dZ_s,$$

y podemos escribir a  $V_t$  de la misma forma. Otra vez usamos el hecho de que al ser  $u$  y  $v$  conjugadas armónicas, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos  $\partial_x v = -\partial_y u$  y  $\partial_x u = \partial_y v$ . Por lo tanto, si  $B$  es la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

podemos escribir

$$V_t = v(Z_{t \wedge \tau}) = v(Z_0) + \int_0^{\tau \wedge t} (B \nabla u)(Z_r) \cdot dZ_r.$$

Sean  $\lambda > 0$  y  $S = \inf\{t : |U_t| > \lambda\}$ . Entonces,

$$s\mathbb{P}^{(0,s)}(|V_\tau| > \lambda) \leq s\mathbb{P}^{(0,s)}(|U_\tau^*| \geq \lambda) + s\mathbb{P}^{(0,s)}(|V_\tau| > \lambda, U_\tau^* < \lambda).$$

Es claro que si  $U_\tau^* < \lambda$ , entonces  $S \geq \tau$ . Si  $U_t^\lambda = U_{t \wedge S}$  y  $V_t^\lambda = V_{t \wedge S}$ , entonces

$$\begin{aligned} s\mathbb{P}^{(0,s)}(|V_\tau| > \lambda, U_\tau^* < \lambda) &= < s\mathbb{P}^{(0,s)}(|V_\tau^\lambda| > \lambda) \\ &= s\mathbb{P}^{(0,s)}((V_\tau^\lambda)^2 > \lambda^2) \\ &\leq \frac{s\mathbb{E}^{(0,s)}(V_\tau^\lambda)^2}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

esto último usando la desigualdad de Chebyshev. De forma análoga a lo que hicimos en (a),

$$s\mathbb{E}^{(0,s)}(V_\tau^\lambda)^2 \leq cs\mathbb{E}^{(0,s)}(V_0^\lambda)^2 + cs\mathbb{E}^{(0,s)}\langle V^\lambda \rangle_\tau,$$

y por la observación que hicimos más arriba,

$$\langle V^\lambda \rangle_\tau = \int_0^{\tau \wedge S} |B \nabla u(Z_r)|^2 dr = \int_0^{\tau \wedge S} |\nabla u(Z_r)|^2 dr = \langle U^\lambda \rangle_\tau.$$

Otra vez por el Teorema 3.3, tenemos que

$$s\mathbb{E}^{(0,s)}\langle U^\lambda \rangle_\tau \leq cs\mathbb{E}^{(0,s)}(U_\tau^\lambda - U_0^\lambda)^2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} s\mathbb{P}^{(0,s)}(|V_\tau| > \lambda, U_\tau^* < \lambda) &\leq \frac{c\mathbb{E}^{(0,s)}|U_\tau^\lambda - U_0^\lambda|^2}{\lambda^2} + cs\mathbb{E}^{(0,s)}|V_0|^2/\lambda^2 \\ &\leq \frac{c\lambda}{\lambda^2} s\mathbb{E}^{(0,s)}|U_\tau^\lambda| + cs\mathbb{E}^{(0,s)}|V_0|^2/\lambda^2 \\ &\quad + cs\mathbb{E}^{(0,s)}|U_0|/\lambda. \end{aligned}$$

Como  $U_t$  es martingala,  $\mathbb{E}[|U_t| | \mathcal{F}_s] \geq |\mathbb{E}[U_t | \mathcal{F}_s]| = |U_s|$  para  $s < t$ , es decir,  $|U_t|$  es una submartingala. Entonces, el primer término en la desigualdad

anterior puede ser acotado por  $cs\mathbb{E}^{(0,s)}|U_\tau|/\lambda$ . Por la primera desigualdad de Doob,  $s\mathbb{P}^{(0,s)}(U_\tau^* \geq \lambda) \leq s\mathbb{E}^{(0,s)}|U_\tau|/\lambda$ .

En resumen, tenemos

$$s\mathbb{P}^{(0,s)}(|V_\tau| > \lambda) \leq \frac{s\mathbb{E}^{(0,s)}|U_\tau|}{\lambda} + \frac{cs\mathbb{E}^{(0,s)}|U_\tau|}{\lambda} + \frac{cs\mathbb{E}^{(0,s)}|V_0|^2}{\lambda} + \frac{cs\mathbb{E}^{(0,s)}|U_0|}{\lambda}.$$

Veamos que pasa cuando  $s \rightarrow \infty$ . Recordemos primero que  $\mathbb{E}^{(0,s)}U_0 = u(0, s)$ , y análogamente con  $V_0$ . Entonces, el lado derecho (ya habiendo tomado el límite) es menor a  $\frac{c\|f\|_1}{\lambda} + \frac{c\|f\|_1}{\lambda} + \frac{c\|f\|_1}{\lambda} = \frac{c\|f\|_1}{\lambda}$ , donde con los dos primeros términos hicimos lo mismo que en el inciso anterior y en los dos últimos usamos la Proposición 3.3. Veamos que pasa del lado izquierdo. Como  $v$  es solución del problema de Dirichlet para  $Hf$ , sabemos que en la frontera valen lo mismo, es decir,  $V_\tau = Hf(X_\tau)$ . Luego, usando la Proposición 1.11, vemos que el lado izquierdo es

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathbb{P}^{(0,s)}(|V_\tau| > \lambda) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \int_{\{x: |Hf(x)| > \lambda\}} \mathbb{P}^{(0,s)}(X_{\tau_D} \in dy) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \int_{\{x: |Hf(x)| > \lambda\}} \frac{c_d s}{(y^2 + s^2)^{(1+1)/2}} dy \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\{x: |Hf(x)| > \lambda\}} \frac{c_d}{((y/s)^2 + 1)} dy \\ &= c_d |\{x : |Hf(x)| > \lambda\}|, \end{aligned}$$

pasamos la constante al lado derecho y obtenemos lo que queremos. □

# Capítulo 4

## Apéndice

Por último, profundizaremos un poco más en propiedades de la transformada de Fourier, como la identidad de Plancherel y la existencia de la transformada inversa. Además, demostraremos las desigualdades de Doob. Todo esto es con el fin de darle completez al trabajo, así como de incluir demostraciones tradicionales tanto de análisis como de probabilidad, esta vez sin mezclar ambas áreas. Escogimos estos temas porque la transformada de Fourier es la base del análisis armónico, y para el lector sin experiencia en el área este apéndice puede ser de gran utilidad e interés. Por otra parte, las desigualdades de Doob son importantes, ya que son el equivalente de las desigualdades débiles (1,1) de las que se trató el trabajo.

### 4.1. La transformada de Fourier

En esta sección, trabajaremos con la segunda definición de la transformada de Fourier, es decir,  $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx$ .

**Proposición 4.1.** Sean  $f, g \in L^1$ . La transformada de Fourier cumple las siguientes propiedades:

(a)  $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$ .

(b) Si  $\xi_j \widehat{f}(\xi), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , entonces  $\widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}(\xi) = 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi)$ .

(c) Si  $x_j f$  pertenece a  $L^1$ . Entonces,  $(-2\pi i x_j f)^\wedge(\xi) = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_j}(\xi)$ .

(d)  $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ .

(e) Si  $g(x) = \lambda^{-n} f(\lambda^{-1}x)$ , entonces  $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\lambda\xi)$ .

(f)  $(\widehat{\tau_h f})(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i h \xi}$ , donde  $\tau_h f(x) = f(x + h)$ .

*Demostración.* (a) Es fácil ver que si  $f$  y  $g$  pertenecen a  $L^1$ , entonces su convolución también, así como su convolución multiplicada por  $e^{-2\pi i \xi x}$ , dado que esto último tiene módulo 1. Usando el teorema de Fubini, y haciendo el cambio de variable  $z = x - y$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int e^{-2\pi i \xi x} \int f(x - y)g(y)dydx \\ &= \int \int e^{-2\pi i \xi x} f(x - y)g(y)dydx \\ &= \int g(y) \int e^{-2\pi i \xi x} f(x - y)dx dy \\ &= \int g(y) \int e^{-2\pi i \xi (z + y)} f(z)dz dy \\ &= \int e^{-2\pi i \xi y} g(y) \int e^{-2\pi i \xi z} f(z)dz dy \\ &= \widehat{g}(\xi)\widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

(b) Usando el Teorema de Fubini e integrando por partes:

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}\right)(\xi) &= \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i w} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x_j \xi_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} d\tilde{x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i w} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi i \xi_j e^{-2\pi i x_j \xi_j} f(x) d\tilde{x} \\ &= 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi), \end{aligned}$$

donde  $w = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \dots + x_{j-1} \xi_{j-1} + x_{j+1} \xi_{j+1} + \dots + x_n \xi_n$  y  $d\tilde{x} = dx_j dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n$ .

(c) Como  $x_j f \in L^1$ , podemos intercambiar la derivada con la integral en la expresión de la derecha y obtenemos el resultado de forma inmediata.

(d)

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi)| &= \left| \int e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx \right| \leq \int |e^{-2\pi i x \xi} f(x)| dx \\ &= \int |e^{-2\pi i x \xi}| |f(x)| dx \leq \int |f(x)| dx = \|f\|_1. \end{aligned} \quad (4.1)$$

(e) Haciendo el cambio de variable  $\lambda^{-1}x = z$ , tenemos

$$\widehat{g}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \xi} \lambda^{-n} f(\lambda^{-1}x) dx = \int e^{-2\pi i \lambda z \xi} f(z) dz = \widehat{f}(\lambda \xi).$$

(f)

$$\begin{aligned} (\widehat{\tau_h f})(\xi) &= \int e^{-2\pi i x \xi} f(x+h) dx = \int e^{-2\pi i (z-h)\xi} f(z) dz \\ &= e^{2\pi i h \xi} \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

□

## 4.2. La identidad de Plancherel

**Definición 4.1.** Decimos que una función  $f$  pertenece a la clase de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si es infinitamente diferenciable y todas sus derivadas decrecen más rápidamente de lo que crece cualquier polinomio. Es decir, para toda  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ ,

$$\sup_x |x^\alpha D^\beta f(x)| = p_{\alpha, \beta}(f) < \infty,$$

donde  $D^\beta f = \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial^{\beta_1} x_1 \dots \partial^{\beta_n} x_n}$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  y  $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$ .

La familia numerable de seminormas  $p_{\alpha, \beta}$  induce una topología localmente convexa y metrizable en  $\mathcal{S}$ .<sup>1</sup> Es posible demostrar que bajo esta

---

<sup>1</sup>Ver [Rudin] p. 26.

topología  $\mathcal{S}$  es denso en  $L^p$  para  $1 \leq p < \infty$ , una demostración se puede encontrar en [Stein, Weiss] o en [Rudin].

Para demostrar el siguiente teorema, necesitamos el siguiente lema:

**Lema 4.1.** Si  $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$ , entonces  $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$ .

*Demostración.* Una vez más, demostraremos el resultado en una dimensión, ya que en este caso, la transformada de Fourier en  $\mathbb{R}^n$  es el producto de  $n$  integrales idénticas:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} \prod_{i=1}^n e^{-\pi x_i^2} dx \\ &= \int \cdots \int \prod_{i=1}^n e^{-2\pi i x_i \xi_i} e^{-\pi x_i^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \prod_{i=1}^n \int e^{-2\pi i x_i \xi_i} e^{-\pi x_i^2} dx_i.\end{aligned}$$

Es muy fácil ver que  $f$  es solución de la ecuación diferencial

$$u' + 2\pi x u = 0$$

con valor inicial  $u(0) = 0$ . Veamos que  $\widehat{f}$  también es solución. Queremos probar  $(\widehat{f}(\xi))' = -2\pi\xi\widehat{f}(\xi)$ , que es equivalente a

$$-i(\widehat{f}(\xi))' = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi). \quad (4.2)$$

Por la Proposición 4.1(b), el lado izquierdo es igual a

$$-i(\widehat{f}(\xi))' = -i(-2\pi i x f(x))\widehat{(\xi)} = (-2\pi x f(x))\widehat{(\xi)}.$$

Por otra parte, aplicando el inciso (b) de la Proposición 4.1, en el lado derecho de (4.2) tenemos

$$2\pi i \xi \widehat{f}(\xi) = \widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}(\xi) = \widehat{(-2\pi x f(x))}(\xi),$$

esto último por definición de  $f$ . Es decir, la ecuación (4.2) se satisface, y por lo tanto  $\widehat{f}$  es solución de la ecuación diferencial. Falta ver que la condición inicial se cumple:

$$\widehat{f}(0) = \int f(x) dx = \int e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

Entonces, tanto  $f$  como  $\widehat{f}$  son soluciones de la ecuación diferencial. Por unicidad,  $\widehat{f} = f$ , por lo que  $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$ .  $\square$

Notemos que al hacer dos cambios de variable en el enunciado del teorema anterior, obtenemos para  $\alpha > 0$ :

$$\int e^{\pi\alpha|y|^2} e^{-2\pi it \cdot y} dy = \alpha^{-d/2} e^{-\pi|t|^2/\alpha}. \quad (4.3)$$

**Teorema 4.1.** *La transformada de Fourier es un mapeo continuo de  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{S}$  tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\widehat{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}g \quad (4.4)$$

y

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi. \quad (4.5)$$

La segunda igualdad se conoce como fórmula de inversión, ya que nos permite recuperar  $f$  a partir de su transformada.

*Demostración.* Aplicando el inciso (b) de la Proposición 4.1  $|\beta|$  veces y después el inciso (c)  $|\alpha|$  veces, obtenemos lo siguiente:

$$\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}(\xi) = C(\widehat{D^\alpha x^\beta f})(\xi).$$

De esta igualdad obtenemos

$$|\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}(\xi)| = |C(\widehat{D^\alpha x^\beta f})(\xi)| \leq C\|(D^\alpha x^\beta f)\|_1,$$

esto último por el inciso (d) de la Proposición 4.1. La norma 1 se puede acotar por seminormas de  $f$ , y de esta forma vemos que la transformada de Fourier es un mapeo continuo de  $\mathcal{S}$  en sí mismo.

Ahora, sabemos que  $f(x)g(y)$  es integrable en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , puesto que ambas funciones están en  $\mathcal{S}$ . Entonces, podemos aplicar el teorema de Fubini. Usando la definición de la transformada de Fourier e intercambiando el orden de integración, llegamos de forma inmediata a (4.4).

Por el inciso (e) de la Proposición 4.1 y (4.4), tenemos

$$\int f(x)\widehat{g}(\lambda x)dx = \int \widehat{f}(x)\lambda^{-n}g(\lambda^{-1}x)dx.$$

En el lado izquierdo hacemos el cambio de variable  $\lambda x = y$  y llegamos a

$$\int f(\lambda^{-1}x)\widehat{g}(x)dx = \int \widehat{f}(x)g(\lambda^{-1}x)dx.$$

Luego, tomamos el límite cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ ;

$$f(0) \int \widehat{g}(x)dx = g(0) \int \widehat{f}(x)dx.$$

Sea  $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$ . Por el Lema 4.1,

$$f(0) = \int \widehat{f}(\xi)d\xi,$$

que es (4.5) evaluado en  $x = 0$ . Falta hacerlo para  $x$  en general. Y eso lo conseguimos con ayuda del inciso (f) de la Proposición 4.1. Cambiando a  $f$  por  $\tau_x f$ , tenemos

$$(\tau_x f)(0) = \int \widehat{(\tau_x f)}(\xi)d\xi = \int \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x \cdot \xi}d\xi,$$

y así obtenemos nuestra fórmula de inversión. □

**Teorema 4.2** (Identidad de Plancherel). *Existe una extensión lineal  $\mathcal{F}$  de la transformada de Fourier que es una isometría en  $L^2$ , es decir, para toda  $f \in L^2$ ,*

$$\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2,$$

y para  $f \in L^1 \cap L^2$  tenemos  $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ .

*Demostración.* Dados  $f, h \in \mathcal{S}$ , sea  $g = \overline{\widehat{h}}$ , por lo que  $\widehat{g} = \overline{h}$ . Esto pasa porque

$$\widehat{g} = \widehat{\overline{\widehat{h}}} = \overline{\widehat{\widehat{h}}} = \overline{\int h(x)e^{-2\pi i x \xi}dx} = \int \overline{h(x)}e^{2\pi i x \xi}dx = \overline{h}.$$

En la última igualdad usamos la fórmula de inversión de la transformada de Fourier. Por (4.4) y por lo que acabamos de ver, tenemos

$$\int f\bar{h} = \int f\widehat{g} = \int \widehat{f}g = \int \widehat{\widehat{f}h}.$$

Ahora, sea  $h = f$ . Recordando que  $f\bar{f} = |f|^2$ , tenemos  $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$  para  $f \in \mathcal{S}$ .

Para extender el resultado a  $L^2$ , escojamos una función  $g \in L^2$ . Como  $\mathcal{S}$  es denso en  $L^2$ , existe una sucesión  $(f_n)$  en  $\mathcal{S}$  que converge a  $g$  en  $L^2$ . Eso implica que  $(f_n)$  es una sucesión de Cauchy en  $L^2$ . Por lo que vimos antes,  $(\widehat{f}_n)$  también es de Cauchy en  $L^2$ . Como  $L^2$  es completo, existe una única  $\mathcal{F}g$  en  $L^2$  tal que  $\widehat{f}$  converge a  $\mathcal{F}g$  en  $L^2$ . Así podemos definir un operador  $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$  que claramente es lineal y es una extensión de la transformada de Fourier.

Veamos que la identidad se da también usando el operador  $\mathcal{F}$ . Dada  $g \in L^2$ ,

$$\|\mathcal{F}g\|_2 = \|\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{f}_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = \|\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\|_2 = \|g\|.$$

□

En general, usaremos el símbolo  $\widehat{\phantom{x}}$  para representar a  $\mathcal{F}$ .

Como última parte de esta sección, daremos la demostración del lema que usamos para demostrar la Proposición 1.11.

**Lema 4.2.** *Para toda  $\alpha > 0$  tenemos*

$$\int e^{-2\pi|y|^\alpha} e^{-2\pi it \cdot y} dy = c_d \frac{\alpha}{(\alpha^2 + |t|^2)^{(d+1)/2}}.$$

*Demostración.* Primero, mostraremos

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\beta^2/4u} du \quad (4.6)$$

para  $\beta > 0$ . Para esto, usaremos las siguientes dos identidades,

$$e^{-\beta} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{1+x^2} dx \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-(1+x^2)u} du. \quad (4.8)$$

Obtenemos (4.6) calculando la integral de línea de la función  $e^{i\beta z}/(1+z^2)$  sobre el semicírculo con diámetro  $[-a, a]$  que está en el semiplano superior, usando el Teorema del Residuo y tomando el límite cuando  $a \rightarrow \infty$ . (4.8) es trivial.

$$\begin{aligned} e^{-\beta} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \beta x \left\{ \int_0^\infty e^{-u} e^{-ux^2} du \right\} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left\{ \int_0^\infty e^{-ux^2} \cos \beta x dx \right\} du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-ux^2} e^{i\beta x} \right\} du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left\{ \pi \int_{-\infty}^\infty e^{-4\pi^2 uy^2} e^{-2\pi i \beta y} dy \right\} du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{u}} e^{-\beta^2/4u} \right\} du, \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado (4.6).

Ahora, usando (4.6) en la primera igualdad y (4.3) en la tercera,

$$\begin{aligned} \int e^{-2\pi|y|} e^{-\epsilon\pi it \cdot y} dy &= \int \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-4\pi^2|y|^2/4u} du \right\} e^{-2\pi it \cdot y} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left\{ \int e^{-4\pi^2|y|^2/4u} e^{-2\pi it \cdot y} dy \right\} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left\{ \left( \sqrt{\frac{u}{\pi}} \right)^{-d/2} e^{-u|t|^2} \right\} du \\ &= \frac{1}{\pi^{(d+1)/2}} \int_0^\infty e^{-u} u^{(n-1)/2} e^{-u|t|^2} du \\ &= \frac{1}{\pi^{(d+1)/2}} \frac{1}{(1+|t|^2)^{(d+1)/2}} \int_0^\infty e^{-s} s^{(n-1)/2} ds \end{aligned}$$

$$= c_d \frac{1}{(1 + |t|^2)^{(n+1)/2}}.$$

□

### 4.3. Las desigualdades de Doob

**Teorema 4.3** (Primera Desigualdad de Doob). *Si  $M_t$  es una martingala, entonces*

$$\mathbb{P}[M_t^* \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}|M_t|}{a},$$

donde  $M_t^* = \sup_{s \leq t} |M_s|$  y  $a > 0$ .

*Demostración.* Sea  $T = \inf\{j : |M_j| \geq a\}$ . Por definición,  $|M_T| \geq a$  en  $(M_T < \infty)$ , así que  $|M_T|/a \geq 1$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[M_t^* \geq a] &= \mathbb{P}[T \leq t] = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{T \leq t\}}] \leq \mathbb{E}[a^{-1}|M_T| \mathbb{I}_{\{T \leq t\}}] \\ &= \mathbb{E}[a^{-1}|M_T|; T \leq t] \leq \mathbb{E}[a^{-1}|M_T|; T \leq t] + \mathbb{E}[a^{-1}|M_t|; T \geq t] \\ &= \frac{\mathbb{E}[|M_{T \wedge t}|]}{a} \leq \frac{\mathbb{E}|M_t|}{a}. \end{aligned}$$

□

Antes de demostrar la segunda desigualdad, enunciamos un resultado clásico del análisis, que de hecho es la clave para demostrar el teorema de la Función Maximal sin usar probabilidad.

**Definición 4.2.** Un operador  $T : A \rightarrow B$  es subaditivo si para cualesquiera  $f, g \in A$ , se cumple  $T(f + g) \leq T(f) + T(g)$ .

**Teorema 4.4** (Teorema de interpolación de Marcinkiewicz). *Sean  $(X, \mu)$ ,  $(Y, \nu)$  espacios de medida,  $1 \leq p_0 < \infty$ , y sea  $T$  un operador subaditivo de  $L^{p_0}(X, \mu) \cup L^\infty(X, \mu)$  en las funciones medibles de  $Y$  que es débil  $(p_0, p_0)$  y fuerte  $(\infty, \infty)$ . Entonces, para toda  $p_0 < p < \infty$ ,  $T$  es fuerte  $(p, p)$ .*

La prueba de este teorema no es difícil, pero sí algo laboriosa. Por eso, y para no perder el hilo, demostraremos primero la segunda desigualdad de Doob y después daremos la prueba de éste.

**Teorema 4.5** (Segunda Desigualdad de Doob). *Usando la misma notación de arriba, si  $p > 1$ , existe  $c$  que depende únicamente de  $p$ , tal que*

$$\mathbb{E}(M_t^*)^p \leq c\mathbb{E}|M_t|^p.$$

*Otra forma de decirlo es que el operador  $*$  es fuerte  $(p, p)$ .*

*Demostración.* Sea  $j > 0$ . Sabemos que  $|M_j|$  es una submartingala, así que  $|M_j| \leq \mathbb{E}[|M_t| | \mathcal{F}_j] \leq \|M_t\|_\infty$ , esto último por definición de  $\|\cdot\|_\infty$ . Como eso pasa para toda  $j$ ,  $\|M_t^*\|_\infty \leq \|M_t\|_\infty$ , es decir, tenemos el resultado para  $p = \infty$ . Luego, como el Teorema 4.3 nos da una desigualdad débil (1,1), podemos aplicar el Teorema 4.4 y obtenemos inmediatamente la desigualdad que queremos para  $1 < p < \infty$ .  $\square$

**Lema 4.3.** *Sea  $f \in L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Entonces, para  $y > 0$ ,*

$$m_f(y) \leq \frac{\|f\|_p^p}{y^p} \tag{4.9}$$

*y*

$$\|f\|_p^p = p \int_0^\infty t^{p-1} m_f(t) dt, \tag{4.10}$$

donde  $m_f(y) = \mu\{x \in X : |f(x)| > y\}$ .

*Demostración.* Sea  $E_y = \{x \in X : |f(x)| > y\}$ .

$$\|f\|_p^p = \int_X |f(x)|^p d\mu \geq \int_{E_y} |f(x)|^p d\mu \geq y^p \mu(E_y) = y^p m_f(y),$$

de donde se sigue (4.9). Ahora, sea  $A = \{(x, s) \in X \times (0, \infty) : |f(x)|^p > s\}$ .

Usando el teorema de Fubini, y haciendo el cambio de variable  $s = t^p$ ,

$$\begin{aligned} \int_X |f(x)|^p d\mu &= \int_X \int_0^{|f(x)|^p} 1 ds d\mu = \int_X \int_0^\infty \mathbb{I}_A(x, s) ds d\mu \\ &= \int_0^\infty \int_X \mathbb{I}_A(x, s) ds d\mu = \int_0^\infty \mu\{x : |f(x)|^p > s\} ds \\ &= p \int_0^\infty t^{p-1} \mu\{x : |f(x)| > t\} dt = p \int_0^\infty t^{p-1} m_f(t) dt. \end{aligned}$$

$\square$

**Lema 4.4.** Sea  $f \in L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Entonces,

$$\int_{\{x \in X: |f(x)| > y\}} |f(x)|^p d\mu = m_f(y)y^p + p \int_y^\infty t^{p-1} m_f(t) dt \quad (4.11)$$

y

$$\int_{\{x \in X: |f(x)| \leq y\}} |f(x)|^p d\mu = -m_f(y)y^p + p \int_0^y t^{p-1} m_f(t) dt. \quad (4.12)$$

*Demostración.* Primero, veamos que (4.10) menos (4.11) nos da (4.12), así que basta con demostrar (4.11). Parecido a lo que hicimos en la prueba anterior, sea  $A = \{(x, s) \in X \times (0, \infty) : y^p \leq s \leq |f(x)|^p\}$ , y sea  $E_y$  como en el lema anterior. Usando Fubini y haciendo el cambio de variable  $t^p = s$ ,

$$\begin{aligned} \int_{E_y} |f|^p d\mu &= \int_E \int_0^{|f(x)|^p} 1 d\mu = \int_E \int_0^{y^p} 1 ds d\mu + \int_E \int_{y^p}^{|f(x)|^p} 1 ds d\mu \\ &= y^p \int_E 1 d\mu + \int_E \int_{y^p}^\infty \mathbb{I}_A(x, s) ds d\mu \\ &= y^p m_f(y) + \int_{y^p}^\infty \int_E \mathbb{I}_A(x, s) d\mu ds \\ &= y^p m_f(y) + \int_{y^p}^\infty \int_X \mathbb{I}_A(x, s) d\mu ds \\ &= y^p m_f(y) + \int_{y^p}^\infty \mu\{x : |f(x)|^p > s\} ds \\ &= y^p m_f(y) + p \int_y^\infty t^{p-1} \mu\{x : |f(x)|^p > t^p\} dt \\ &= y^p m_f(y) + p \int_y^\infty t^{p-1} m_f(t) dt. \end{aligned}$$

□

*Demostración del Teorema (4.4).* Para un  $y$  dado, sea

$$g_y(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq \frac{y}{2c_1} \\ \frac{y}{2c_1} \operatorname{sgn}(f(x)), & |f(x)| > \frac{y}{2c_1}, \end{cases}$$

donde  $c_1$  es la constante que nos da la desigualdad fuerte  $(p_1, p_1)$  de  $T$ . Sea  $h_y(x) = f(x) - g_y(x)$ . Por definición de  $g_y$ ,

$$\|Tg_y\|_\infty \leq c_1 \|g_y\|_\infty \leq \frac{y}{2}.$$

Entonces,  $\{x : |Tg_y(x) > \frac{y}{2}\} = \emptyset$ . Como  $T$  es subaditiva,

$$\begin{aligned} \{x : |Tf(x)| > y\} &\subset \{x : |Tg_y(x)| + |Th_y(x)| > y\} \\ &\subset \{x : |Tg_y(x)| > \frac{y}{2}\} \cup \{x : |Th_y(x)| > \frac{y}{2}\} \\ &= \{x : |Th_y(x)| > \frac{y}{2}\}, \end{aligned}$$

así que  $m_{Tf}(y) \leq m_{Th}(\frac{y}{2})$ . Sea  $E_y = \{x \in X : |f(x)| > \frac{y}{2c_1}\}$ . Como  $T$  es débil  $(p_0, p_0)$ ,

$$\begin{aligned} m_{Tf}(y) &\leq \mu\{x \in X : |Th_y| > \frac{y}{2}\} \leq c_0 \left(\frac{2}{y}\right)^{p_0} \|h_y\|_{p_0}^{p_0} \\ &= c_0 2^{p_0} y^{-p_0} \int_{E_y} |f(x) - \operatorname{sgn}(f(x))|^{p_0} d\mu \\ &\leq c_0 2^{p_0} y^{-p_0} \left( \int_{E_y} |f(x)|^{p_0} d\mu + \int_{E_y} \left|\frac{y}{2c_1}\right|^{p_0} d\mu \right) \\ &= c_0 2^{p_0} \left( y^{-p_0} \int_{E_y} |f(x)|^{p_0} d\mu + \left(\frac{1}{2c_1}\right)^{p_0} m_f\left(\frac{y}{2c_1}\right) \right). \end{aligned}$$

Ahora, usando (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), la última desigualdad, y haciendo el cambio de variable  $t = \frac{y}{2c_1}$ ,

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &= p \int_0^\infty y^{p-1} m_{Tf}(y) dy \\ &\leq pc_0 2^{p_0} \left[ \int_0^\infty y^{p-1} y^{-p_0} \int_{E_y} |f(x)|^{p_0} d\mu dy + \left(\frac{1}{2c_1}\right)^{p_0} \int_0^\infty y^{p-1} m_f\left(\frac{y}{2c_1}\right) dy \right] \\ &\leq pc_0 2^{p_0} \left[ \int_0^\infty (2c_1 t)^{p-p_0-1} 2c_1 \int_{\{x:|f(x)|>t\}} |f(x)|^{p_0} d\mu dt \right. \\ &\quad \left. + (2c_1)^{-p_0} \int_0^\infty (2c_1)^{p-1} 2c_1 m_f(t) dt \right] \\ &\leq pc_0 2^{p_0} \left[ (2c_1)^{p-p_0} \int_0^\infty t^{p-p_0-1} \left( m_f(t) t^{p_0} + p_0 \int_t^\infty r^{p_0-1} m_f(r) dr \right) dt \right. \\ &\quad \left. + (2c_1)^{p-p_0} \int_0^\infty t^{p-1} m_f(t) dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= pc_0 2^{p_0} c_1^{p-p_0} \left[ \int_0^\infty t^{p-1} m_f(t) dt + p_0 \int_0^\infty t^{p-p_0-1} \int_t^\infty r^{p_0-1} m_f(r) dr dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty t^{p-1} m_f(t) dt \right] \\
&= pc_0 2^{p_0} c^{p-p_0} \left[ 2 \frac{\|f\|_p^p}{p} + p_0 \int_0^\infty r^{p_0-1} m_f(r) \int_0^r t^{p-p_0-1} dt dr \right] \\
&= pc_0 2^{p_0} c^{p-p_0} \left[ 2 \frac{\|f\|_p^p}{p} + p_0 \int_0^\infty r^{p_0-1} m_f(r) \frac{1}{p-p_0} r^{p-p_0} dr \right] \\
&= pc_0 2^{p_0} c^{p-p_0} \left[ 2 \frac{\|f\|_p^p}{p} + \frac{p_0}{p-p_0} \int_0^\infty r^{p-1} m_f(r) dr \right] \\
&= c_0 2^{p_0} c^{p-p_0} \left[ 2 \|f\|_p^p + \frac{p_0}{p-p_0} \|f\|_p^p \right] \\
&= c_p \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

□

## 4.4. La fórmula de Itô

La fórmula de Itô es la base del cálculo estocástico, y su demostración partiendo de conocimientos elementales de probabilidad y procesos estocásticos sería material suficiente para una tesis de licenciatura completa. Es por eso que no haremos eso aquí, pero trataremos de dar una idea intuitiva de lo que dice. La fórmula para el movimiento Browniano dice lo siguiente:

**Teorema 4.6** (Fórmula de Itô). *Sea  $X_t$  un movimiento Browniano  $d$ -dimensional, y sea  $f \in C^2$ . Entonces, con probabilidad 1,*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \nabla f(X_s) \cdot dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(X_s) ds.$$

Se puede demostrar que  $\int_0^t \nabla f(X_s) \cdot dX_s$  es una martingala que en el tiempo 0 vale  $X_0$ . Como esta va a ser la propiedad de la fórmula que más nos interese, no nos vamos a preocupar por el significado de la integral estocástica, y escribiremos simplemente

$$f(X_t) = f(X_0) + \text{martingala} + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(X_s) ds.$$

Notemos que la segunda integral no es estocástica; aunque el integrando sea un proceso estocástico, le podemos dar una interpretación trayectorial. Es decir, cada  $\omega \in \Omega$  nos define una trayectoria  $X_t$  en función de  $t$ , que sabemos que se puede integrar, al igual que cualquier función suya, siempre y cuando la función sea adecuada. Este hecho es la maravilla de la fórmula de Itô, que convierte la integral estocástica en cosas que podemos calcular. Escribamos la fórmula cuando la dimensión es 1, para poder entender mejor la estructura, pero esta vez para el caso general, sin que  $X_t$  sea necesariamente un Browniano (En realidad la fórmula es para  $X_t$  semimartingala, pero definitivamente no vamos a hablar de eso aquí).

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s.$$

Notamos que la única diferencia con la fórmula que habíamos dado es el integrador de la última integral. En efecto, la variación cuadrática del movimiento Browniano es  $s$ : Es un hecho conocido que  $X_s^2 - s^2$  es una martingala, y claramente  $s$  es una función continua y creciente. Si definimos  $X_t = t$ , tenemos

$$f(t) - f(0) = \int_0^t f'(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t f''(s) d\langle s \rangle.$$

La variación cuadrática de  $s$  es claramente 0, por lo que obtenemos

$$f(t) - f(0) = \int_0^t f'(s) ds,$$

que es el Teorema Fundamental del Cálculo. Más en general, sea  $X_t = g(t)$ , una función determinista derivable. La variación cuadrática de  $g$  también es 0, así que tenemos

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t f'(g(s)) dg(s) = \int_0^t f'(g(s)) g'(s) ds.$$

Si derivamos con respecto a  $t$ , llegamos a

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = f'(g(t)) g'(t),$$

que es la famosa regla de la cadena. Es decir que la fórmula de Itô es una generalización de la regla de la cadena, y la segunda integral que se suma se debe a que los procesos estocásticos respecto a los cuales integraremos no necesariamente tienen variación cuadrática igual a 0.

## Conclusiones

En matemáticas es común buscar soluciones nuevas a problemas ya resueltos. Muchas veces se buscan soluciones más fáciles, aunque el hecho de encontrar un camino nuevo ya es satisfactorio en sí. En este caso, ya habiendo terminado el trabajo, no creo que el camino tomado haya sido realmente más fácil que el tradicional, aunque en realidad la simpleza de una demostración es algo relativo. En ocasiones, las demostraciones que dimos fueron más cortas que las tradicionales, aunque usamos herramientas más pesadas. Creo que desde el punto de vista de un estudiante de licenciatura, que no está familiarizado con cosas como la fórmula de Itô o la propiedad fuerte de Markov, este camino puede resultar más difícil, sobre todo si quiere entender a fondo todos los pasos. En algún lugar que no recuerdo leí que la probabilidad tiene una particularidad que la distingue del resto de las ramas de las matemáticas, y es que sus principios más básicos necesitan teoría muy fuerte para poder ser planteados (En la primera clase de Probabilidad I, a un alumno le hablan de una  $\sigma$ -álgebra, concepto que muchas veces no entenderá completamente hasta un par de años después.), y por otra parte sus teoremas más importantes son comprensibles para casi todo el mundo (A la cabeza nos vienen inmediatamente la ley fuerte de los grandes números y el teorema del límite central; que son usados por biólogos, psicólogos, sociólogos, y gente en general que no tiene una formación matemática profunda. En nuestro caso, es la fórmula de Itô principalmente algo que para nuestros fines es muy fácil de comprender, pero que necesita mucha teoría adicional para poder ser comprendida completamente.). En cambio, para un probabilista experimentado posiblemente sea más fácil seguir estas demostraciones que las que usan únicamente análisis.

La ventaja que me parece muy clara de esta forma de abordar los problemas es la facilidad para visualizar las cosas. Por ejemplo, comparemos las dos expresiones que conocemos de la función que resuelve el problema de Dirichlet. La definición analítica es clara, y como vimos, es en ocasiones más amigable para hacer cuentas; pero la segunda me parece mucho más fácil de imaginar. Puede ser que haya analistas que a primera vista puedan dar-

le una interpretación geométrica a  $u(x, y) = \int f(v) \frac{c_d y}{(y^2 + |x - v|^2)^{\frac{d+1}{2}}} dv$ , pero por lo menos a mí me parece más fácil visualizar  $u(z) = \mathbb{E}^z [f(X_\tau)]$ .

Otro ejemplo es la definición de puntos regulares. La definición analítica nos dice que un punto  $y \in \partial D$  es regular para  $D^c$  si existe una función continua  $w$  en  $\bar{D}$  tal que  $w$  es superarmónica en cada punto de  $D$ ,  $w > 0$  en  $\bar{D} - y$  y  $w(y) = 0$ . Para comprender eso hay que definir las funciones superarmónicas, que no es difícil; pero aún así es mucho más intuitiva la definición que dimos,  $y$  es regular para  $A$  si  $\mathbb{P}^y(T_A) = 0$ .

Y, dejando de lado las ventajas y desventajas de cada método, como ya dije en la introducción, la idea de usar herramientas probabilísticas para obtener resultados de otras áreas me parece muy interesante y con mucho potencial.

# Bibliografía

- [Bass] **R. Bass**, *Probabilistic Techniques in Analysis*. Probability and its Applications, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [Courant] **R. Courant**, *Differential and Integral Calculus*. London: Blackie & Son, 1956, Vol. 1, pp.251-253 y 444-450.
- [Duoandikoetxea] **J. Duoandikoetxea**, *Fourier Analysis*, traducción de D. Cruz-Uribe. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 29. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.
- [Erdélyi] **A. Erdélyi**, *Bateman Manuscript Project: Tables of Integral Transforms*, Vol. 1. McGraw-Hill, New York, 1954.
- [Hörmander] **L. Hörmander**, *The analysis of linear partial differential operators*, Vol. I., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaft, 256, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1990.
- [Kuo] **H.H. Kuo**, *Introduction to Stochastic Integration*, Universitext, Springer, New York, 2006.
- [Rudin] **W. Rudin**, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1973.
- [Stein, Weiss] **E.M. Stein y G. Weiss**, *Introduction to Fourier Analysis in Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1971.