UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“Gavillas de diferenciales y hessianos que se anulan”

T E S I S

Que para obtener el título de:

Maestro en Ciencias

P R E S E N T A:

DAN SILVA LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. Israel Moreno Mejía

MÉXICO, D.F. 2010

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
Dan
Silva
López
57 91 94 57
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Maestría en Ciencias Matemáticas
098600762

2. Datos del tutor
Dr
Israel
Moreno
Mejía

3. Datos del sinodal 1
Dr
Javier Enrique
Elizondo
Huerta

4. Datos del sinodal 2
Dr
Mustapha
Lahyane

5. Datos del sinodal 3
Dra
Laura
Hidalgo
Solis

6. Datos del sinodal 4
Dr
Rolando
Jiménez
Benítez

6. Datos del trabajo escrito
Gavillas de diferenciales y hessianos que se anulan
91 p
2010

AGRADECIMIENTOS

Agradezco sinceramente a los que con su apoyo contribuyeron en este trabajo de tesis.

Al **Dr. Israel Moreno Mejía** por su disposición constante por ayudarme y por brindarme su conocimiento, gran paciencia y dirección en este trabajo.

Al **Dr. Alberto León Kushner Schnur** por sus valiosos consejos y dirección a lo largo de los más de dos años que duró este posgrado.

A los miembros del jurado: **Dr. Javier Enrique Elizondo Huerta**, **Dr. Mustapha Lahyane**, **Dra. Laura Hidalgo Solis** y **Dr. Rolando Jiménez Benítez** por revisar este trabajo de tesis.

A los miembros de la coordinación del posgrado: **Dr. Manuel Falconi**, **Laurita**, **Socorro** y **Mary** por su permanente apoyo y oportuna ayuda.

A mis **padres** y **hermanos** por su ayuda y cariño, a mi **familia** y **amigos** por su respeto.

A los **"miaus"** y demás **amigos** de la facultad y del posgrado.

Dedicada a los **Soles** que mueren al nacer el alba y a aquellos otros que se van perdiendo en el ocaso.

Índice general

Introducción

En geometría algebraica el tema de gavillas de diferenciales es fundamental y se ha estudiado ampliamente para diferentes tipos de esquemas y variedades, especialmente para variedades no singulares. El presente trabajo pretende ser un trabajo no exaustivo, pero si formativo y básico de algunas propiedades importantes de las gavillas de diferenciales que es nuestro tema principal, de esta manera se pretende presentar algunas aplicaciones como la definición de genero de variedades proyectivas y el criterio (teorema 2.3.20) para que una subvariedad de una variedad no singular sea no singular. También se presenta un resultado sobre dependencia algebraica (teorema 4.1.1) de polinomios, que es más bien una consecuencia indirecta de las gavillas de diferenciales a través de la teoría de morfismos suaves, aquí nos referimos a que para probar tal resultado usamos la proposición 3.3.7 y el lema 3.3.8 del capítulo tres (concerniente a morfismos planos y morfismos suaves). Dicho resultado es clave para probar un criterio (teorema 4.1.4) sobre la no anulación de Hessianos.

Dividimos la tesis en cuatro capítulos, a continuación describiremos cada uno en forma general.
El capítulo 1 se concentra en definir brevemente los esquemas como espacios localmente anillados mostrando algunas de sus propiedades y de los morfismo entre estos, también abarca una revisión de gavillas inducidas, por ejemplo, se recuerda qué es la imagen directa e imagen inversa de una gavilla, la propiedad adjunta de f^{-1} y de f_*, etc. Por otro lado, hay una parte sobre gavillas de módulos donde se definen algunos tipos de gavillas como las localmente libres o las gavillas de ideales, luego se presentan varias propiedades del functor tilde $\sim$ de la categoría de A-módulos a la categoría de gavillas de $\mathscr{O}_X$-módulos sobre $\mathrm{Spec} A$.
En este capítulo damos pruebas a detalle de algunos resultados, pero no de todos.

El capítulo 2 es el capítulo principal, la primera parte se ocupa de los módulos de diferenciales, de su definición y algunas de sus propiedades, en esta parte se hace énfasis en dos sucesiones exactas de módulos de diferenciales (ecuaciones 2.2 y 2.6) que serán cruciales para demostrar algunos resultados, luego se da un ligero repaso de extensiones de campos para considerar el módulo de diferenciales en el caso de extensiones de campos y de anillos locales. La segunda parte comienza definiendo la gavilla de diferenciales a

partir de una gavilla de ideales de un esquema, por otro lado, se recuerda la construcción de la misma gavilla de diferenciales a partir del functor tilde $\sim$ de un módulo de diferenciales. Como aplicación se presenta el cálculo de una gavilla de diferenciales de un producto fibrado, luego se muestran algunos resultados respecto a sucesiones exactas de gavillas de diferenciales, y se construye la gavilla de diferenciales de un espacio proyectivo.
En la tercera parte se estudian las variedades no singulares en términos de sus gavillas de diferenciales que resultan ser gavillas localmente libres, finalmente se llega a las definiciones de gavilla tangente, gavilla normal y género geométrico.
En este capítulo se trató de presentar la mayor cantidad de pruebas explícitas y clarificar lo más posible el contenido.

El capítulo 3 se refiere primeramente a los módulos planos, se recuerdan algunas propiedades de exactitud del producto tensorial y se muestran criterios para saber cuando un A-módulo es plano y así definir un morfismo plano entre esquemas, se define el functor Tor y se recuerda también un criterio de planitud en términos de este. Luego se define un morfismo suave y se muestran algunas propiedades alrededor de estos morfismos, finalmente se define para un punto x de un esquema X el espacio tangente T_x, además se llega a enunciar la proposición 3.3.7 (referente a cuándo un morfismo entre variedades no singulares es suave) y el lema 3.3.8 (sobre la existencia de un conjunto abierto donde un morfismo de esquemas es suave), resultados importantes para el capítulo final.
Aunque en este capítulo 3 se enuncian sin prueba dos resultados principales, hay algunos otros resultados y ejercicios que si se prueban, aunque no tan completamente como en el capítulo dos.

El capítulo 4 es el capítulo final, principia probando un teorema (referente a cuándo polinomios homogeneos sobre un campo algebraicamente cerrado cumplen o no relaciones polinomiales) usando los resultados que se enuncian al final del capítulo 3. Se presentan algunos ejemplos de polinomios cuyos hessianos se anulan y finalmente se concluye el capítulo mostrando porque el hessiano de una forma no singular de grado $d \geq 2$ en $n+1$ variables no se hace cero.

Capítulo 1

Esquemas y gavillas de módulos

1.1. Esquemas

En esta primera sección se recordará la noción de esquema mediante el concepto de espacio anillado, primero se verá la definición de esquemas afines; para cada anillo A se asociará un espacio topológico junto con una gavilla de anillos sobre este, dicho espacio es llamado Spec$A$. También repasaremos la noción de morfismos separados y de esquemas separados.

1.1.1. Gavillas inducidas

Definición 1.1.1 Sea $f : X \to Y$ un mapeo continuo de espacios topológicos. Para cada gavilla $\mathscr{F}$ sobre X, se define la ***gavilla imagen directa*** $f_*\mathscr{F}$sobre Y como $(f_*\mathscr{F})(V) = \mathscr{F}(f^{-1}(V))$ para cada abierto $V \subseteq Y$. Para cada gavilla $\mathscr{G}$ sobre Y, se define la ***gavilla imagen inversa*** $f^{-1}\mathscr{G}$ sobre X como la gavilla asociada a la pregavilla

$$U \mapsto \lim_{V \supseteq f(U)} \mathscr{G}(V),$$

donde U es un conjunto abierto de X y el límite esta considerado sobre todos los abiertos V de Y que contienen a $f(U)$.

Proposición 1.1.2 (Propiedad adjunta de f^{-1} y f_*) Sea $f : X \to Y$ un mapeo continuo de espacios topológicos, para cada gavilla $\mathscr{F}$ sobre X y para cada gavilla $\mathscr{G}$ sobre Y existe una biyección natural de conjuntos,

$$\mathrm{Hom}_X(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_Y(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}). \tag{1.1}$$

Se dice que f^{-1} es el adjunto izquierdo de f_*, y que f_* es el adjunto derecho de f^{-1}.

Prueba.
Consideremos la siguiente pregavilla sobre X

$$f^{\bullet}\mathscr{G}(U) = \varinjlim_{f(U)\subseteq V} \mathscr{G}(V),$$

donde U, V son abiertos de X y Y respectivamente, por otro lado $f^{-1}\mathscr{G}$ es por definición la gavilla asociada a la pregavilla $f^{\bullet}\mathscr{G}$, entonces el resultado se sigue del lema 1.1.3 y del lema 1.1.4.□

Lema 1.1.3 $\mathrm{Hom}_X(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_{pre-X}(f^{\bullet}\mathscr{G}, \mathscr{F})$.

Lema 1.1.4 $\mathrm{Hom}_{pre-X}(f^{\bullet}\mathscr{G}, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_Y(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$.

Prueba del lema 1.1.3.
Este inciso se deduce de las propiedades de gavillificación y del hecho de que $f^{\bullet}\mathscr{G}$ es decente.□

Antes de comenzar la prueba del lema 1.1.4 introduciremos alguna notación y haremos algunas observaciones que se requerirán para definir primero una aplicación μ :$\mathrm{Hom}_{pre-X}(f^{\bullet}\mathscr{G}, \mathscr{F}) \to \mathrm{Hom}_Y(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$.
Las observaciones son las siguientes:

Observación 1.1.5 Como

$$f^{\bullet}\mathscr{G}(U) = \varinjlim_{V} \mathscr{G}(V) \text{ tal que } f(U) \subset V,$$

entonces dado un abierto $W \subseteq U$ la restricción $r_W^U : f^{\bullet}\mathscr{G}(U) \to f^{\bullet}\mathscr{G}(W)$ se define como sigue: dada $\bar{\sigma} \in f^{\bullet}\mathscr{G}(U)$ existe un abierto $V \subseteq Y$ tal que $f(U) \in V$ y una sección $\sigma \in \mathscr{G}(V)$ que representa a $\bar{\sigma}$. Como $f(W) \subset f(U) \subset V$ se toma $r_W^U(\bar{\sigma})$ igual a la clase σ en $f^{\bullet}\mathscr{G}(W)$.

Observación 1.1.6 Sea $\psi : f^{\bullet}\mathscr{G} \to \mathscr{F}$ un morfismo de pregavillas, definir este morfismo es lo mismo que dar una colección de morfismos, digamos que ψ es el conjunto de morfismos $\psi_U : f^{\bullet}\mathscr{G}(U) \to \mathscr{F}(U)$ tales que si $U \subset X$ y $W \subset U$ son abiertos, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
f^{\bullet}\mathscr{G}(U) \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[d, "r_W^U"'] & \mathscr{F}(U) \arrow[d, "\rho_W^U"] \\
f^{\bullet}\mathscr{G}(W) \arrow[r, "\psi_W"'] & \mathscr{F}(W),
\end{tikzcd}$$

donde r_W^U y ρ_W^U son las respectivas restricciones.
Nótese por la propiedad universal del límite directo, que dar un morfismo ψ_U es equivalente a dar una colección de morfismos C, donde C es el conjunto de morfismos $\psi_{U,V} : \mathscr{G}(V) \to \mathscr{F}(U)$ para cada V tal que $f(U) \subset V$, tal que si $f(U) \subset V' \subset V$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}(V) \arrow[r, "\psi_{U,V}"] \arrow[d, "\delta_{V'}^V"'] & \mathscr{F}(U). \\
\mathscr{G}(V') \arrow[ur, "\psi_{U,V'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Abusando de la notación escribiremos $\psi_U = C$. Ahora consideraremos el siguiente lema.

Lema 1.1.7 Sean W, U abiertos de X, donde $W \subset U \subset X$, si $f(U) \subset V$ para $V \subset Y$ abierto, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}(V) \arrow[r, "\psi_{U,V}"] \arrow[dr, "\psi_{W,V}"'] & \mathscr{F}(U) \arrow[d, "\rho_W^U"] \\
& \mathscr{F}(W).
\end{tikzcd}$$

Prueba.

Como ψ es un morfismo, el cuadrado siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
f^\bullet \mathscr{G}(U) \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[d, "r_W^U"'] & \mathscr{F}(U) \arrow[d, "\rho_W^U"] \\
f^\bullet \mathscr{G}(W) \arrow[r, "\psi_W"'] & \mathscr{F}(W),
\end{tikzcd}$$

y podemos completar un nuevo diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}(V) \arrow[d, "q_{V,U}"'] \arrow[dr, "\psi_{U,V}"] \arrow[dd, bend right=60, "q_{V,W}"'] & \\
f^\bullet \mathscr{G}(U) \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[d, "r_W^U"'] & \mathscr{F}(U) \arrow[d, "\rho_W^U"] \\
f^\bullet \mathscr{G}(W) \arrow[r, "\psi_W"'] & \mathscr{F}(W).
\end{tikzcd}$$

Aquí, $q_{V,U}$ es el cociente natural al límite directo.
Nótese que el triángulo superior es conmutativo por como se definió $\psi_{U,V}$.
También conmuta el diagrama izquierdo, esto es, $r_V^U \circ q_{V,U} = q_{V,W}$ por la definición de r_W^U (Ver observación 1.1.5).

Entonces tenemos que: $\rho_W^U \circ \psi_{U,V} = \psi_W \circ r_W^U \circ q_{V,U} = \psi_W \circ q_{V,W} = \psi_{W,V}$.$\square$
En particular tenemos el siguiente:

Corolario 1.1.8 Sea W un abierto de X. Sea $V \subset Y$ otro abierto tal que $f(W) \subset V$, y sea $U = f^{-1}(V)$, entonces $W \subset U$ y $f(W) \subset f(U) \subset V$, en particular $\rho_W^U \circ \psi_{U,V} = \psi_{W,V}$ (esto por el lema 1.1.7) y

$$\varinjlim_{\substack{\forall\ V \text{tal que} f(W)\subset V \\ \text{y } U=f^{-1}(V)}} (\rho_W^U \circ \psi_{U,V}) = \varinjlim_{\forall\ V \text{tal que} f(W)\subset V} (\psi_{W,V}),$$

esto último es por definición de ψ_W.

Prueba del lema 1.1.4

Definimos una aplicación μ:Hom$(f^\bullet \mathscr{G}, \mathscr{F}) \to$ Hom$(\mathscr{G}, f_* \mathscr{F})$ como sigue.

Dado $\psi : f^{\bullet}\mathscr{G} \to \mathscr{F}$, sea

$$\mu(\psi) = \{\mu(\psi)_V | V \subset Y \text{ abierto y } \mu(\psi)_V = \psi_{f^{-1}(V),V}\},$$

note que $\psi_{f^{-1}(V),V}$ satisface compatibilidad con restricciones, entonces $\mu(\psi)$ es un elemento de $\mathrm{Hom}_Y(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$.

Ahora definiremos un morfismo η:$\mathrm{Hom}_Y(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}) \to \mathrm{Hom}_{pre-X}(f^{\bullet}\mathscr{G}, \mathscr{F})$.

Dado $\varphi : \mathscr{G} \to f_*\mathscr{F}$, sabemos que φ es el conjunto de morfismos $\varphi_V : \mathscr{G}(V) \to \mathscr{F}(f^{-1}(V))$ tales que si $V \subset Y$ y $V' \subset V$ son abiertos, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "\delta^V_{V'}"'] & \mathscr{F}(f^{-1}(V)) \arrow[d, "\rho^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V')}"] \\
\mathscr{G}(V') \arrow[r, "\varphi_{V'}"'] & \mathscr{F}(f^{-1}(V')).
\end{tikzcd}$$

Dado un abierto $U \subset X$, sea

$$\eta(\varphi)_U = \{\eta(\varphi)_{U,V} | V \subset Y \text{es abierto}, f(U) \subset V \text{ y } \eta(\varphi)_{U,V} = \rho_U^{f^{-1}(V)} \circ \varphi_V\},$$

entonces definimos $\eta(\varphi) = \{\eta(\varphi)_U | U \subset X \text{es abierto}\}$.

Ahora se verificará que η y μ son inversas una de la otra:

Veamos que $\eta \circ \mu = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(f^{\bullet}\mathscr{G},\mathscr{F})}$.
Sea $\psi \in \mathrm{Hom}(f^{\bullet}\mathscr{G}, \mathscr{F})$, entonces $\mu(\psi) \in \mathrm{Hom}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$, aplicando ahora η tenemos que
$\eta(\mu(\psi)) = \{\eta(\mu(\psi))_U\}$,
$\eta(\mu(\psi))_U = \{\eta(\mu(\psi))_{U,V}\}$,
$\eta(\mu(\psi))_{U,V} = \rho_U^{f^{-1}(V)} \circ (\mu(\psi)_V)$ y $\mu(\psi)_V = \psi_{f^{-1}(V),V}$ entonces
$\rho_U^{f^{-1}(V)} \circ (\mu(\psi)_V) = \rho_U^{f^{-1}(V)} \circ \psi_{f^{-1}(V),V}$
y por el Corolario 1.1.8, lo anterior es igual a $\psi_{U,V}$,
por lo tanto $\eta(\mu(\psi))_U = \{\psi_{U,V}\} = \psi_U$ y
$\eta(\mu(\psi)) = \{\psi_U\} = \psi$.

Veamos también que $\mu \circ \eta = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})}$.
Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$, entonces $\eta(\varphi) \in \mathrm{Hom}(f^\bullet\mathscr{G}, \mathscr{F})$, aplicando ahora μ se tiene
$\mu(\eta(\varphi)) = \{\mu(\eta(\varphi))_V\}$,
$\mu(\eta(\varphi))_V = \eta(\varphi)_{f^{-1}(V),V} = \rho^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V)} \circ \varphi_V$ (tomando $U = f^{-1}(V)$ en la definición de $\eta(\varphi)_{U,V}$), así
$\rho^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V)} = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}(f^{-1}(V))}$, por tanto $\mu(\eta(\varphi))_V = \varphi_V$ y
$\mu(\eta(\varphi)) = \{\varphi_V\} = \varphi$.□

1.1.2. Espacios anillados

Definición 1.1.9 Un ***espacio anillado*** es un par $(X, \mathscr{O}_X)$ consistente de un espacio topológico X y una gavilla de anillos $\mathscr{O}_X$ sobre X. Un ***morfismo de espacios anillados*** de $(X, \mathscr{O}_X)$ a $(Y, \mathscr{O}_Y)$ es un par $(f, f^\#)$, donde $f : X \to Y$ es un mapeo continuo y $f^\# : \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ es un morfismo de gavillas de anillos sobre Y. El espacio anillado $(X, \mathscr{O}_X)$ es un ***espacio localmente anillado*** si para cada punto $P \in X$, el tallo $\mathscr{O}_{X,P}$ es un anillo local.
Un ***morfismo de espacios localmente anillados*** es un morfismo $(f, f^\#)$ de espacios anillados, tal que para cada punto $P \in X$, el mapeo inducido de anillos locales $f^\#_P : \mathscr{O}_{Y,f(P)} \to \mathscr{O}_{X,P}$ es un homomorfismo local de anillos locales. Para ser más precisos, dado un punto $P \in X$, el morfismo de gavillas $f^\# : \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ induce un homomorfismo de anillos $\mathscr{O}_Y(V) \to \mathscr{O}_X(f^{-1}V)$, para cada conjunto abierto V en Y. Como V fluctúa sobre todas la vecindades abiertas de $f(P)$, $f^{-1}(V)$ fluctúa sobre un subconjunto de vecindades de P. Entonces tomando límites directos, se puede obtener un mapeo

$$\mathscr{O}_{Y,f(P)} = \lim_{\vec{V}} \mathscr{O}_Y(V) \to \lim_{\vec{V}} \mathscr{O}_X(f^{-1}V),$$

y de los mapeos de límites al tallo $\mathscr{O}_{X,P}$. De esta manera se tiene un homomorfismo inducido $f^\#_P : \mathscr{O}_{Y,f(P)} \to \mathscr{O}_{X,P}$, se requiere que este sea un homomorfismo local: si A y B son anillos locales con ideales maximales $\mathfrak{m}_A$ y $\mathfrak{m}_B$ respectivamente, un homomorfismo $\varphi : A \to B$ es llamado un homomorfismo local si $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$.
Un morfismo $(f, f^\#)$ es un isomorfismo si y sólo si f es un homeomorfismo de espacios topológicos y $f^\#$ es un isomorfismo de gavillas.

1.1.3. Espectro de un anillo, esquemas algebraicos y morfismos

El primer ejemplo de espacio anillado que veremos es el espectro de un anillo.
Se construirá el espacio Spec$A$ asociado al anillo A. Como un conjunto se define ***Spec***A como el conjunto de todos los ideales primos de A. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal de A, se define el subconjunto $V(\mathfrak{a}) \subseteq \text{Spec}A$ como el conjunto de todos los ideales primos que contienen a $\mathfrak{a}$.

Lema 1.1.10 (a) Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son dos ideales de A, entonces $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.
(b) Si $\{\mathfrak{a}_i\}$ es algún conjunto de ideales en A, entonces $V(\sum \mathfrak{a}_i) = \cap V(\mathfrak{a}_\mathrm{i})$.
(c) Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son dos ideales, $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$ si y sólo si $\sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$.

Prueba. Se obtiene directamente de las definiciones.

Ahora se definirá una topología sobre Spec$A$ tomando los subconjuntos de la forma $V(\mathfrak{a})$ como los subconjuntos cerrados. Note que $V(A) = \emptyset; V((0)) = \text{Spec}A$; y el lema 1.1.10 muestra que uniones finitas asi como intersecciones arbitrarias de conjuntos de la forma $V(\mathfrak{a})$ son otra vez de la misma forma. Estos forman el conjunto de conjuntos cerrados para una topología sobre Spec$A$.
Ahora se definirá una gavilla de anillos $\mathscr{O}$ sobre Spec$A$. Para cada ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq A$, sea $A_\mathfrak{p}$ la localización de A en $\mathfrak{p}$. Para un conjunto abierto $U \subseteq \text{Spec}A$, se define $\mathscr{O}(U)$ como el conjunto de funciones $s : U \to \coprod_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p}$ tales que $s(\mathfrak{p}) \in A_\mathfrak{p}$ para cada $\mathfrak{p}$ y tales que s es localmente un cociente de elementos de A: siendo precisos, se requiere que para cada $\mathfrak{p} \in U$, haya una vecindad V de $\mathfrak{p}$ contenida en U, y elementos $a, f \in A$, tales que para cada $\mathfrak{q} \in V$, $f \notin \mathfrak{q}$, y $s(\mathfrak{q}) = a/f$ en $A_\mathfrak{q}$.

Note que sumas y productos de tales funciones s son nuevamente del mismo tipo y que el elemento 1 el cual da 1 en cada $A_\mathfrak{p}$ es la identidad. De esta manera $\mathscr{O}(U)$ es un anillo conmutativo con identidad. Si $V \subseteq U$ son dos conjuntos abiertos, el mapeo restricción natural $\mathscr{O}(U) \to \mathscr{O}(V)$ es un homomorfismo de anillos. Note que $\mathscr{O}$ es una pregavilla y por la naturaleza local de la definición, $\mathscr{O}$ es gavilla.

Definición 1.1.11 Sea A un anillo. El ***espectro de*** A es el par consistente del espacio topológico Spec$A$ junto con la gavilla de anillos $\mathscr{O}$ definida enteriormente, una manera de denotarla es $\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}A}$.

Para cada elemento $f \in A$, se denota por $D(f)$ el complemento abierto de $V((f))$. Note que los conjuntos abiertos de la forma $D((f))$ forman una base para la topología de Spec$A$. Claro que si $V(\mathfrak{a})$ es un conjunto cerrado, y $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$, entonces $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$, así hay un $f \in \mathfrak{a}$, $f \notin \mathfrak{p}$. Entonces $\mathfrak{p} \in D(f)$ y $D(f) \cap V(\mathfrak{a}) = \emptyset$.

Proposición 1.1.12 Sea A un anillo, y $(\mathrm{Spec}A, \mathscr{O})$ su espectro.
(a) Para cada $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}A$, el tallo $\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}$ de la gavilla $\mathscr{O}$ es isomorfo al anillo local $A_{\mathfrak{p}}$.
(b) Para cada elemento $f \in A$, el anillo $\mathscr{O}(D(f))$ es isomorfo al anillo localizado A_f.
(c) En particular, $\Gamma(\ \mathrm{Spec}A, \mathscr{O}) \cong A$.

Prueba. La demostración es idéntica a la que se dará para la proposición 1.2.5 referente a gavillas de módulos.

Proposición 1.1.13 (a) Si A es un anillo, entonces $(\mathrm{Spec}A, \mathscr{O})$ es un espacio localmente anillado.
(b) Si $\varphi : A \to B$ es un homomorfismo de anillos, entonces φ induce un morfismo natural de espacios localmente anillados

$$(f, f^{\#}) : (\mathrm{Spec}B, \mathscr{O}_{\mathrm{Spec}B}) \to (\mathrm{Spec}A, \mathscr{O}_{\mathrm{Spec}A}).$$

(b) Si A y B son anillos, entonces cada morfismo de espacios localmente anillados de Spec$B$ a Spec$A$ es inducido por un homomorfismo de anillos $\varphi : A \to B$ como en inciso (b).

Prueba. Hartshorne[6,p.73].

Definición 1.1.14 Un ***esquema afín*** es un espacio localmente anillado $(X, \mathscr{O}_X)$ el cual es isomorfo al espectro de algún anillo. Un ***esquema*** es un espacio localmente anillado $(X, \mathscr{O}_X)$ en el que cada punto tiene una vecindad

abierta U tal que el espacio topológico U, junto con la gavilla restringida $\mathscr{O}_{X|U}$, es un esquema afín. Se llama a X el **espacio topológico subyacente** del esquema $(X, \mathscr{O}_X)$, y a $\mathscr{O}_X$ su gavilla estructural. En adelante se podrá escribir $\mathrm{sp}(X)$ como el espacio X.
Un ***morfismo de esquemas*** es un morfismo de espacios localmente anillados.

Ejemplo 1.1.15 Si k es un campo, $\mathrm{Spec}(k)$ es un esquema afín cuyo espacio topológico consiste de un punto, y cuya estructura de gavilla consiste de el campo k.

Ejemplo 1.1.16 Si k es un campo, se define la linea afín sobre k, $\mathbf{A}^1_k$, como $\mathrm{Spec}(k[x])$. Esta tiene un punto ξ, correspondiente al ideal cero, cuya cerradura es el espacio completo. Este es llamado un punto genérico. Los otros puntos, los cuales corresponden a ideales maximales en $k[x]$, son todos puntos cerrados. Ellos estan en correspondencia uno a uno con polinomios irreducibles mónicos no constantes en x.

Afirmación 1.1.17 Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas y $\mathscr{F}$ una gavilla sobre Y, si $U_j \subset X$ es un abierto, entonces $f^*_{|U_j}(\mathscr{F}) = (f^*(\mathscr{F}))|_{U_j}$.

Prueba. Tomemos la restricción $f|_{U_j} : U_j \to Y$, entonces tenemos que

$$f^*_{|U_j}(\mathscr{F}) = f^{-1}_{|U_j}(\mathscr{F}) \otimes_{(f^{-1}_{|U_j}\mathscr{O}_Y)} \mathscr{O}_{U_j} \quad \text{y}$$

$$(f^*(\mathscr{F}))|_{U_j} = (f^{-1}(\mathscr{F}) \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X)|_{U_j} = (f^{-1}(\mathscr{F}))|_{U_j} \otimes_{(f^{-1}\mathscr{O}_Y)|_{U_j}} \mathscr{O}_{X|_{U_j}}.$$

Se mostrará que para cualquier gavilla $\mathscr{F}$ sobre Y se cumple que $f^{-1}_{|U_j}(\mathscr{F}) = (f^{-1}(\mathscr{F}))|_{U_j}$, recordando que la gavilla $f^{-1}(\mathscr{F})$ es la gavilla asociada a la pregavilla $f^\bullet(\mathscr{F})$, entonces para un abierto W de U_j tenemos que

$$f^\bullet_{|U_j}(\mathscr{F})(W) = \lim_{f_{|U_j}(W) \subset V'} \mathscr{F}(V'),$$

y por otro lado, para un abierto W' de X se tiene que

$$f^\bullet(\mathscr{F})(W') = \lim_{f(W') \subset V''} \mathscr{F}(V'').$$

Ahora, restringiendo esta última pregavilla a U_j tenemos

$$[f^{\bullet}(\mathscr{F})(W')]_{|U_j} = \lim_{f(W')\subset V''} \mathscr{F}(V'') \;\; \forall \;\; W' \subset U_j,$$

pero $f_{|U_j}(W') = f(W')$ para todo $W' \subset U_j$, de esta manera $f^{\bullet}_{|U_j}(\mathscr{F})) = (f^{\bullet}(\mathscr{F}))|_{U_j}$ y así $f^{-1}_{|U_j}(\mathscr{F}) = (f^{-1}(\mathscr{F}))|_{U_j}$.
De forma análoga se puede verificar que $f^{-1}_{|U_j}\mathscr{O}_Y = (f^{-1}\mathscr{O}_Y)_{|U_j}$, por lo tanto se tiene que $f^{*}_{|U_j}(\mathscr{F}) = (f^{*}(\mathscr{F}))|_{U_j}$.□

Definición 1.1.18 Sea X un esquema. Para cada $x \in X$, sea $\mathscr{O}_x$ el anillo local en x, y $\mathfrak{m}_x$ su ideal maximal. Se define el ***campo residual*** de x sobre X como el campo $k(x) = \mathscr{O}_x/\mathfrak{m}_x$.

Definición 1.1.19 Sea S un esquema fijo. Un ***esquema sobre*** S es un esquema X, junto con un morfismo de esquemas $X \to S$. Si X y Y son esquemas sobre S, un morfismo de X a Y como esquemas sobre S, es un morfismo $f : X \to Y$ el cual es compatible con los morfismos dados sobre S.

Definición 1.1.20 Un morfismo $f : X \to Y$ de esquemas es ***localmente de tipo finito*** si existe una cubierta de Y dada por subconjuntos abiertos afines V_i =Spec B_i, tal que para cada i, $f^{-1}(V_i)$ puede ser cubierto por subconjuntos abiertos afines U_{ij} =Spec A_{ij}, donde cada A_{ij} es una B_i-álgebra finitamente generada. Se dice que f es un morfismo de ***tipo finito***, si además cada $f^{-1}(V_i)$ puede ser cubierto por un número finito de U_{ij}.

Definición 1.1.21 Un morfismo $f : X \to Y$ es un ***morfismo finito*** si existe una cubierta de Y dada por subconjuntos abiertos afines V_i =Spec B_i, tal que para cada i, $f^{-1}(V_i)$ es afín e igual a SpecA_i, donde A_i es una B_i-álgebra la cual es un B_i-módulo finitamente generado.

1.1.4. Morfismos separados y morfismos propios

Existen dos propiedades acerca de los morfismos entre esquemas las cuales corresponden a propiedades conocidas de espacios topológicos ordinarios, esto es, la característica de ser separable corresponde al axioma de Hausdorff para un espacio topológico, y la característica de ser propio corresponde a la noción usual de propiedad, es decir que la imagen inversa de un subconjunto compacto es nuevamente un compacto.

Definición 1.1.22 Un ***subesquema cerrado*** de un esquema X es un subesquema Y, junto con un morfismo $i : Y \to X$, tal que sp(Y) (el espacio topológico Y) es un subconjunto cerrado de sp$X$, i es el mapeo inclusión, y además el mapeo inducido $i^{\#} : \mathscr{O}_X \to i_*\mathscr{O}_Y$ de gavillas es suprayectivo.
Una ***inmersión cerrada*** es un morfismo $f : Y \to X$ el cual induce un isomorfismo de Y dentro de un subesquema cerrado de X.

Teorema 1.1.23 Para cada dos esquemas X y Y sobre otro esquema S, el producto fibrado $X \times_S Y$ existe y es único salvo isomorfismo.

Prueba. Hartshorne [6.p.87].

Definición 1.1.24 Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas, y sea $y \in Y$ un punto. Sea $k(y)$ el campo residual de y, y sea Spec$(k(y)) \to Y$ el morfismo natural. Entonces se define la ***fibra*** del morfismo f sobre el punto y como el esquema

$$X_y = X \times_Y \mathrm{Spec}(k(y)).$$

La fibra X_y es un esquema sobre $k(y)$ y su espacio topológico es homeomorfo al subconjunto $f^{-1}(y) \subset X$.

Definición 1.1.25 Sea S un esquema fijo el cual podemos tomar como un ***esquema base***, ahora considere la categoría de los esquemas sobre S. Si S' es otro esquema base, y si $S' \to S$ es un morfismo, entonces para cada esquema X sobre S, se tiene $X' = X \times_S S'$, el cual será un esquema sobre S', se dice que X' es obtenido de X, haciendo una ***extensión de base*** $S' \to S$. Por ejemplo, suponga $S' =$Spec(k'), donde k' es una extensión de campos de k.

Observación 1.1.26 La extensión de base es una operación transitiva: si $S'' \to S' \to S$ son dos morfismos, entonces $(X \times_S S') \times_{S'} S'' \cong X \times_S S''$.

Definición 1.1.27 Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas. El ***morfismo diagonal*** es el único morfismo $\Delta : X \to X \times_Y X$ cuya composición con ambos mapeos proyección $p_1, p_2 : X \times_Y X$ es el mapeo identidad $X \to X$. Se dice que el morfismo f esta ***separado*** si el morfismo diagonal Δ es una inmersión cerrada. En tal caso se dice que X ***esta separado*** sobre Y. Un esquema esta separado, si este esta separado sobre Spec$\mathbb{Z}$.

Proposición 1.1.28 Si $f : X \to Y$ es un morfismo de esquemas afines, entonces f es separado.

Prueba Sea X =Spec$A$, y Y =Spec$B$. Entonces A es una B-álgebra, y $X \times_Y X$ es también afín, y esta dado por Spec$(A \otimes_B A)$. El morfismo diagonal Δ viene del homomorfismo diagonal $A \otimes_B A \to A$ definido por $a \otimes a^{'} \to aa^{'}$. Este es un homomorfismo suprayectivo de anillos, de esta manera Δ es una inmersión cerrada.

Corolario 1.1.29 Un morfismo arbitrario $f : X \to Y$ esta separado si y sólo si la imagen del morfismo diagonal es un subconjunto cerrado de $X \times_Y X$.

Prueba. Hartshorne [6,p.96].

Definición 1.1.30 Un morfismo $f : X \to Y$ es ***propio***, si este esta separado, es de tipo finito y es universalmente cerrado. Aquí se dice que un morfismo es ***cerrado*** si la imagen de cada subconjunto cerrado es cerrada. Un morfismo $f : X \to Y$ es ***universalmente cerrado***, si este es cerrado, y para cada morfismo $Y^{'} \to Y$, el correspondiente morfismo $f^{'} : X^{'} \to Y^{'}$ obtenido por extensión de base es también cerrado.

Definición 1.1.31 Un esquema X es ***reducido*** si para cada conjunto abierto U de X, el anillo $\mathscr{O}_X(U)$ no tiene elementos nilpotentes.

Definición 1.1.32 Un esquema X es ***entero*** si para cada subconjunto abierto $U \subseteq X$, el anillo $\mathscr{O}_X(U)$ es un dominio entero.

Definición 1.1.33 Un esquema es ***irreducible*** si su espacio topológico es irreducible.

1.2. Gavillas de módulos

En esta sección se analizará una propiedad adjunta de f^{-1} y estudiaremos algunas características de las gavillas de módulos sobre espacios anillados, se recordará la definición del functor tilde $\sim$ y algunas de sus propiedades, también se mostrará la propiedad adjunta del functor f^* y finalmente se verá la gavilla tautológica.

Definición 1.2.1 *Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado. Una gavilla de $\mathscr{O}_X$***-módulos** *o simplemente un $\mathscr{O}_X$***-módulo***, es una gavilla $\mathscr{F}$ sobre X, tal que para cada conjunto abierto $U \subseteq X$, el grupo $\mathscr{F}(U)$ es un $\mathscr{O}_X(U)$-módulo, y para cada inclusión de conjuntos abiertos $V \subseteq U$, el homomorfismo restricción $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ es compatible con las estructuras de módulo por medio del homomorfismo de anillos $\mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_X(V)$, esto es, tenemos un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \times \mathscr{O}_X(U) \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[d, "{(\rho_V^U, r_V^U)}"'] & \mathscr{F}(U) \arrow[d, "\rho_V^U"] \\
\mathscr{F}(V) \times \mathscr{O}_X(V) \arrow[r, "\psi_W"'] & \mathscr{F}(V).
\end{tikzcd}$$

Definición 1.2.2 *Un* ***morfismo $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de gavillas de $\mathscr{O}_X$-módulos*** *es un morfismo de gavillas tal que para cada conjunto abierto $U \subseteq X$, el mapeo $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ es un homomorfismo de $\mathscr{O}_X(U)$-módulos.*

Se observa que el kernel, cokernel, y la imagen de un morfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos es otra vez un $\mathscr{O}_X$-módulo.Si $\mathscr{F}'$ es una subgavilla de $\mathscr{O}_X$-módulos de un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$, entonces la gavilla cociente $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$ (esto es la gavilla asociada a la pregavilla $U \to \mathscr{F}(U)/\mathscr{F}'(U)$) es un $\mathscr{O}_X$-módulo. Cada suma directa, producto directo, límite directo de $\mathscr{O}_X$-módulos es un $\mathscr{O}_X$-módulo.

La gavilla Hom.

Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son dos $\mathscr{O}_X$-módulos, se denota el grupo de morfismos de $\mathscr{O}_X$-módulos de $\mathscr{F}$ a $\mathscr{G}$ por $\boldsymbol{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$, o a veces $\mathrm{Hom}_X(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ o por $\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$. Si U es un subconjunto abierto de X, y si $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo, entonces $\mathscr{F}|_U$ es un $\mathscr{O}_X|_U$-módulo. Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son dos $\mathscr{O}_X$-módulos, la pregavilla

$$U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X|U}}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$$

es una gavilla, la cual es llamada gavilla $\mathscr{H}om$, y es denotada por $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$, esta gavilla es también un $\mathscr{O}_X$-módulo.

Sucesiones exactas de $\mathscr{O}_X$-módulos.

Una sucesión de $\mathscr{O}_X$-módulos y morfismos es exacta si esta es exacta como una sucesión de gavillas de grupos abelianos, es decir, una sucesión de $\mathscr{O}_X$-módulos

$$0 \to \mathscr{F}_1 \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F}_2 \xrightarrow{\beta} \mathscr{F}_3 \to 0$$

es exacta si para todo abierto $U \subset X$ la sucesión

$$0 \to \mathscr{F}_1(U) \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F}_2(U) \xrightarrow{\beta} \mathscr{F}_3(U) \tag{1.2}$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos y $\mathscr{F}_3$, es la gavilla asociada a la pregavilla $\mathrm{im}(\beta)$, dada por $\mathrm{im}(\beta)(U) = \beta(U)$ para todo U. Esto es equivalente a decir que para todo $x \in X$, la sucesión inducida en los tallos

$$0 \to \mathscr{F}_{1_x} \to \mathscr{F}_{2_x} \to \mathscr{F}_{3_x} \to 0$$

es exacta.

Producto tensorial de $\mathscr{O}_X$-módulos.
Se define el ***producto tensorial $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}$ de dos $\mathscr{O}_X$-módulos*** como la gavilla asociada a la pregavilla $U \mapsto \mathscr{F}(U) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}(U)$, esta gavilla se escribirá como $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$, con $\mathscr{O}_X$ entendido.

Gavillas localmente libres.
Un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ es ***libre*** si este es isomorfo a una suma directa de copias de $\mathscr{O}_X$. Se dice que un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ es ***localmente libre*** si X puede ser cubierto por conjuntos abiertos U para los cuales $\mathscr{F}|_U$ es un $\mathscr{O}_X|_U$-módulo libre. En tal caso, el ***rango*** de $\mathscr{F}$ sobre un conjunto abierto es el número de copias de la gavilla estructural necesaria. Si X es conexo, el rango de una gavilla localmente libre es el mismo siempre. Una gavilla localmente libre de rango 1 es también llamada una ***gavilla invertible***.

Gavillas de ideales.
Una ***gavilla de ideales*** sobre X es una gavilla de módulos $\mathscr{I}$ la cual es una subgavilla de $\mathscr{O}_X$, en otras palabras, para cada conjunto abierto U, $\mathscr{I}(U)$ es un ideal en $\mathscr{O}_X(U)$. Sea $f : (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ un morfismo de espacios anillados. Si $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo, entonces $f_*\mathscr{F}$ es un $f_*\mathscr{O}_X$-módulo.Debido a que se tiene el morfismo $f^\# : \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ de gavillas de anillos sobre Y, este proporciona a $f_*\mathscr{F}$ una estructura natural de $\mathscr{O}_Y$-módulo.

Propiedad adjunta de f^* y f^{-1}.
Sea $f : X \to Y$ un morfismo de espacios anillados, además $\mathscr{G}$ y $\mathscr{F}$ las gavillas de $\mathscr{O}_Y$-módulos y $\mathscr{O}_X$-módulos respectivamente, entonces $f^{-1}\mathscr{G}$ es un

$f^{-1}\mathscr{O}_Y$-módulo. Debido a la propiedad adjunta de f^{-1} (ver fórmula 1.1) se tiene un morfismo único $f^{-1}\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_X$ (que corresponde a $f^{\#} : \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$) de gavillas de anillos sobre X, se define una gavilla $f^*\mathscr{G}$ sobre X por

$$f^*\mathscr{G} = f^{-1}\mathscr{G} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X, \tag{1.3}$$

que es un $\mathscr{O}_X$-módulo, este es llamado el **"pull-back"** de $\mathscr{G}$ por el morfismo f.
Se puede mostrar que f_* y f^* son functores adjuntos entre la categoría de $\mathscr{O}_X$-módulos y la categoría de $\mathscr{O}_Y$-módulos, es decir, para cada $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ y cada $\mathscr{O}_Y$-módulo $\mathscr{G}$ existe un isomorfismo natural de grupos

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(f^*\mathscr{G}, \mathscr{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}). \tag{1.4}$$

Prueba
Por definición $f^*\mathscr{G} = f^{-1}\mathscr{G} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X$ y por otro lado para abiertos $U \subset X$ y $V \subset Y$, sea $f^\bullet\mathscr{G}$ la pregavilla sobre X definida como

$$\varinjlim_{f(U)\subset V} \mathscr{G}(V), \tag{1.5}$$

además $f^\bullet\mathscr{G}$ es pregavilla de $f^\bullet\mathscr{O}_Y$-módulos, pues $\mathscr{G}$ es $\mathscr{O}_Y$-módulo.
Considere el producto tensorial de pregavillas $f^\bullet\mathscr{G} \otimes_{f^\bullet\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X$ y note que $\mathscr{O}_X$ es también pregavilla de $f^\bullet\mathscr{O}_Y$-módulos debido a los lemas 1.1.3 y 1.1.4.
Recordando que para gavillas arbitrarias $\mathscr{T}$ y $\mathscr{H}$ sobre X y Y respectivamente y para abiertos $U \subset X$ y $V \subset Y$, la gavilla $f^{-1}\mathscr{H}$ es la gavillificación de la pregavilla

$$f^\bullet\mathscr{H}(U) = \varinjlim_{f(U)\subset V} \mathscr{H}(V),$$

entonces del mismo modo se tiene que $f^*\mathscr{G} = f^{-1}\mathscr{G} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X$ es la gavillificación de $f^\bullet\mathscr{G} \otimes_{f^\bullet\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X$, y la prueba de la propiedad adjunta en cuestión es similar a la prueba de la Proposición 1.1.2, (Ver Kenji Ueno [12.p.43].).

Lema 1.2.3 Si $i : Y \to X$ es inmersión cerrada, entonces $i^*i_*\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_Y$.

Prueba. Primero note que

$$i^*i_*\mathscr{O}_Y = i^{-1}(i_*\mathscr{O}_Y) \otimes_{i^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y,$$

ahora veamos que $i^{-1}(i_*\mathscr{O}_Y) = \mathscr{O}_Y$.
Sea $U \subset Y$ una abierto, $i^{-1}(i_*\mathscr{O}_Y)$ es la gavillificación de la pregavilla $i^\bullet(i_*\mathscr{O}_Y)(U) = \lim_{i(U)\subset V} i_*\mathscr{O}_Y(V)$. Como i es inmersión cerrada, identificamos a Y con un cerrado de X, como U es abierto, entonces podemos escribir $U = Y \cap V_0$ con V_0 un abierto de X, esto es $i^{-1}(V_0) = U$, así

$$\lim_{i(U)\subset V}(i_*\mathscr{O}_Y)(V) = \lim_{i(U)\subset V}\mathscr{O}_Y(i^{-1}V) = \lim_{i(U)\subset V}\mathscr{O}_Y(Y \cap V),$$

pero como $i(U) \subset V_0 \cap V$, tenemos que

$$\lim_{i(U)\subset V}\mathscr{O}_Y(Y \cap V) = \lim_{i(U)\subset V}\mathscr{O}_Y(Y \cap V_0 \cap V) = \mathscr{O}_Y(U),$$

entonces $i^\bullet(i_*\mathscr{O}_Y)$ es una gavilla, por lo tanto $i^{-1}(i_*\mathscr{O}_Y) = \mathscr{O}_Y$, de esta manera

$$i^{-1}(i_*\mathscr{O}_Y) \otimes_{i^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_Y \otimes_{i^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y.$$

Ahora, veamos que existe un isomorfismo

$$\mathscr{O}_Y \otimes_{i^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_Y.$$

Primero, sea $\psi : \mathscr{O}_Y \otimes_{i^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_Y$ el morfismo de gavillas inducido por el morfismo de pregavillas

$$\mathscr{O}_Y(U) \otimes_{i^{-1}\mathscr{O}_X(U)} \mathscr{O}_Y(U) \to \mathscr{O}_Y(U),$$

dado por $a \otimes b \mapsto ab$. Para ver que ψ es isomorfismo, veamos que es isomorfismo en los tallos

$$\psi_p : \mathscr{O}_{Y,p} \otimes_{(i^{-1}\mathscr{O}_X)_p} \mathscr{O}_{Y,p} \to \mathscr{O}_{Y,p},$$

donde ψ_p esta dado por $s' \otimes s \mapsto s's$ y $p \in Y$, note que $(i^{-1}\mathscr{O}_X)_p = \mathscr{O}_{X,i(p)}$, y el morfismo $h : i^{-1}\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_Y$, que corresponde a $i^\#$ por la propiedad adjunta (ver proposición 1.1.2), coincide en los tallos con el morfismo local $\mathscr{O}_{X,i(p)} \to \mathscr{O}_{Y,p}$.
Así, como el homomorfismo local $\mathscr{O}_{X,i(p)} \to \mathscr{O}_{Y,p}$ es suprayectivo, entonces se ve que $s \mapsto 1 \otimes s$ es un inverso por ambos lados de ψ_p, pues $1 \otimes s = s \otimes 1$.
De esta manera $i^*i_*\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_Y$.□

Definición 1.2.4 Sea A un anillo y sea M un A-módulo, se define la gavilla asociada a M sobre Spec$A$, denotada por $\tilde{M}$, como sigue. Para cada ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq A$, sea $M_\mathfrak{p}$ la localización de M en $\mathfrak{p}$. Para cada conjunto abierto

$U \subseteq \mathrm{Spec}A$ se define el grupo $\tilde{M}(U)$ como el conjunto de funciones $s{:}U \to \coprod_{\mathfrak{p}\in U} M_{\mathfrak{p}}$ tal que para cada $\mathfrak{p} \in U$, $s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$, y tal que s es localmente una fracción, esto es; se requiere que para cada $\mathfrak{p} \in U$, exista una vecindad V de $\mathfrak{p}$ en U, y existan elementos $m \in M$ y $f \in A$, tal que para cada $\mathfrak{q} \in V$, $f \notin \mathfrak{q}$, y $s(\mathfrak{q}) = m/f$ en $M_{\mathfrak{q}}$.

Proposición 1.2.5 Sea A un anillo, M un A-módulo, y sea $\tilde{M}$ la correspondiente gavilla sobre $X = \mathrm{Spec}A$ asociada a M. Entonces:
(a) $\tilde{M}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo;
(b) para cada $\mathfrak{p} \in X$, el tallo $(\tilde{M})_{\mathfrak{p}}$ de la gavilla $\tilde{M}$ en $\mathfrak{p}$ es isomorfo al módulo localizado $M_{\mathfrak{p}}$;
(c) para cada $f \in A$, el A_f-módulo $\tilde{M}(D(f))$ es isomorfo al módulo localizado M_f;
(d) en particular, $\Gamma(X, \tilde{M}) = M$.

Prueba
(a)
Se tiene que para un abierto $U \subset \mathrm{Spec}A$, $\tilde{M}(U) = \{\mu : U \to \coprod_{\mathfrak{p}\in U} M_{\mathfrak{p}} | \mu(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$, y μ es localmente una fracción$\}$, por otro lado $\mathscr{O}_X(U) = \{s : U \to \coprod_{\mathfrak{p}\in U} A_{\mathfrak{p}} | s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$, y s es localmente una fracción $\}$, donde $M_{\mathfrak{p}}$ y $A_{\mathfrak{p}}$ son las respectivas localizaciones en $\mathfrak{p}$.
Dados $s \in \mathscr{O}_X(U)$ y $\mu \in \tilde{M}(U)$, definimos el producto $(s\mu) \in \tilde{M}(U)$ tal que $(s\mu)(\mathfrak{p}) = s(\mathfrak{p})\mu(\mathfrak{p})$, notese que dicho producto es localmente una fracción puesto que si $a/b \in A_{\mathfrak{p}}$ con $a, b \in A$, $b \notin \mathfrak{p}$ y $c/d \in M_{\mathfrak{p}}$ con $c \in M$, $d \in A$, $d \notin \mathfrak{p}$, entonces $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, donde $bd \notin \mathfrak{p}$, de esta manera la estructura de $\mathscr{O}_{X|U}$-módulo de $\tilde{M}(U)$ la da el producto $(s\mu)$, por tanto, $\tilde{M}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo.

(b)
Vamos a definir un homomorfismo $\varphi : (\tilde{M})_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}}$ y ver que es un isomorfismo.
Como

$$\tilde{M}_{\mathfrak{p}} = \varinjlim_{\mathfrak{p}\in U} \tilde{M}(U),$$

entonces por la propiedad universal del límite directo definir $\varphi : (\tilde{M})_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}}$ es equivalente a definir para todo abierto $U \in X$ tal que $\mathfrak{p} \in U$, morfismos $\varphi_U : \tilde{M}(U) \to M_{\mathfrak{p}}$ tal que si $\mathfrak{p} \in V \subset U$ entonces $\varphi_U = \varphi_V \circ \rho^U_V$, donde ρ^U_V es la restricción de la gavilla $\tilde{M}$.
Se define entonces $\varphi_U(s) = s(\mathfrak{p})$, como $s \in \tilde{M}(U)$ y $\mathfrak{p} \in U$, entonces

$s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$. Así tenemos $\varphi : (\tilde{M})_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}}$, donde φ es suprayectiva porque cada elemento $x \in M_{\mathfrak{p}}$ puede representarse como $m/f, m \in M, f \in A$, donde $f \notin \mathfrak{p}$. Entonces $D(f)$ es vecindad abierta de $\mathfrak{p}$ y m/f define una sección constante $s \in \tilde{M}(D(f))$ cuyo valor en $\mathfrak{q}$ es $s(\mathfrak{q}) = m/f$ para todo $\mathfrak{q} \in D(f)$, en particular $s(\mathfrak{p}) = m/f$.

Inyectividad; sea U vecindad abierta de $\mathfrak{p}$, y $s \in \tilde{M}(U)$ tal que $s(\mathfrak{p}) = 0$, podemos suponer a U como una vecindad de $\mathfrak{p}$ donde s es una fracción, $s = a/f$, donde $a \in M$, $f \in A$ y $f \notin \mathfrak{p}$. Como a/f es 0 en $M_{\mathfrak{p}}$, se sigue por la definición de localización que existe $h \notin \mathfrak{p}$ tal que $ha = 0$ en M, además $a/f = 0$ en cada anillo local $M_{\mathfrak{q}}$ con $f, h \notin \mathfrak{q}$, pero tal conjunto es el abierto $D(f) \cap D(h)$, por tanto $s(\mathfrak{p}) = 0 \in (\tilde{M})_{\mathfrak{p}}$ $\forall$ $\mathfrak{p} \in D(f) \cap D(h) \cap U \Rightarrow s|_{D(f) \cap D(h) \cap U} = 0$. Así φ es un isomorfismo.

(c)
Se define un homomorfismo $\psi : M_f \to \tilde{M}(D(f))$ enviando a/f^n a la sección $s \in \tilde{M}(D(f))$ la cual asigna a cada ideal $\mathfrak{p}$ la imagen de a/f^n en $M_{\mathfrak{p}}$, este homomorfismo esta bien definido debido a que $\mathfrak{p} \in D(f)$ y por tanto $f \notin \mathfrak{p}$ y $f^n \notin \mathfrak{p}$, así que podemos hablar del elemento m/f^n dentro de $M_{\mathfrak{p}}$.

Se mostrará primero que ψ es inyectivo; si $\psi(a/f^n) = 0$, entonces para cada $\mathfrak{p} \in D(f)$, a/f^n es cero en $M_{\mathfrak{p}}$, por tanto existe $h_{\mathfrak{p}} \notin \mathfrak{p}$ tal que $h_{\mathfrak{p}} a = 0$ en M. Sea $\mathfrak{a}$ el anulador de a, entonces $h_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{a}$ y $h_{\mathfrak{p}} \notin \mathfrak{p}$, por tanto $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$. Esto se cumple para cada $\mathfrak{p} \in D(f)$, y se puede concluir que $V(\mathfrak{a}) \cap D(f) = \emptyset$, esto es $V(\mathfrak{a}) \subset V((f))$, entonces por lema 1.1.10, se tiene que $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, así para alguna potencia de f, $f^l \in \mathfrak{a}$, y de esta manera se puede concluir que $f^l a = 0$, esto muestra que $a/f^n = 0$ en M_f.
Por tanto ψ es inyectivo.

Ahora se mostrará que ψ es suprayectivo.
Para esto vamos a necesitar la siguiente:
Afirmación. Suponga que $D(f) = \cup_{i=1}^{k} D(h_i)$ es tal que para cierto $n > 0, f^n = \sum_{i=1}^{k} b_i h_i$, donde $f, h_i, b_i \in A$, si se tienen $a_i/h_i \in M_{h_i}$ tales que $h_i a_j = h_j a_i$ en A para $i = 1, ..., k$, entonces existe $a \in M$ tal que $\frac{a}{f^n} = \frac{a_i}{h_i}$ en M_{h_i} para todo $i = 1, ..., k$.
Prueba
Sea $a = \sum b_i a_i$, entonces

$$h_j a = \sum_{i=1}^{k} b_i a_i h_j = \sum_{i=1}^{k} b_i a_j h_i = a_j f^n$$

esto nos dice que $\frac{a}{f^n} = \frac{a_j}{h_j}$ en M_{h_j} probando la afirmación.

Ahora vamos a verificar que se cumplen las hipótesis de la afirmación anterior:
Sea $s \in \tilde{M}(D(f))$, por definición podemos cubrir $D(f)$ con abiertos V_i, sobre los cuales s esta representado por el cociente a_i/g_i, con $g_i \notin \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in V_i$, es decir $V_i \subseteq D(g_i)$. Ahora los abiertos de la forma $D(h)$ forman una base para la topología en Spec$A = X$, entonces podemos asumir que $V_i = D(h_i)$ para alguna h_i.
Como $D(h_i) \subseteq D(g_i)$ entonces $V((g_i)) \subseteq V((h_i))$ y como consecuencia del lema 1.1.10 $\sqrt{(h_i)} \subseteq \sqrt{(g_i)}$, en particular, $h_i^n \in (g_i)$ para algún n, entonces si $h_i^n = cg_i$, $a_i/g_i = ca_i/h_i^n$. Reemplazando h_i por h_i^n (pues $D(h_i) = D(h_i^n)$) y a_i por ca_i, podemos asumir que $D(f)$ esta cubierto por subconjuntos abiertos $D(h_i)$, note que s esta representado por a_i/h_i en $D(h_i)$. Se observa que $D(f)$ puede ser cubierto por un número finito de $D(h_i)$, entonces se tiene que $D(f) = \cup D(h_i)$ si y sólo si $V((f)) = \cap V((h_i)) = V(\sum(h_i))$. Por lema 1.1.10, lo anterior equivale a decir que $f \in \sqrt{\sum(h_i)}$, o $f^n \in \sum(h_i)$ para algún n. Esto significa que f^n puede expresarse como un suma finita $f^n = \sum b_i h_i$, $b_i \in M$. Por lo tanto hay un subconjunto finito de h_i fijos $h_1, ..., h_r$ tales que $D(f) \subseteq D(h_1) \cup ... \cup D(h_r)$.
Para lo siguiente, note que en $D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_i h_j)$ se tienen dos elementos de $M_{h_i h_j}$, a_i/h_i y a_j/h_j que representan a s. De esta manera y acorde con la inyectividad de ψ aplicada a $D(h_i h_j)$ tenemos que $a_i/h_i = a_j/h_j$ en $M_{h_i h_j}$. Así, para alguna n

$$(h_i h_j)^n (h_j a_i - h_i a_j) = 0, \tag{1.6}$$

como sólo hay un conjunto finito de índices en juego, tomamos a n tan grande como se quiera y este sirve para todo i, j. Luego se reescribe la ecuación(1.6) como:

$$h_j^{n+1}(h_i^n a_i) - h_i^{n+1}(h_j^n a_j) = 0.$$

Entonces reemplazando cada h_i por h_i^{n+1}, y a_i por $h_i^n a_i$, podemos ver que s esta representado aún en $D(h_i)$ por a_i/h_i, y además se tiene que $h_j a_i = h_i a_j$ para todo i, j. Por tanto se cumplen las hipótesis de la afirmación.
Como nuestro resultado es válido, se tiene que $a/f^n = a_j/h_j$ en $D(h_j)$.

Así que $\varphi(a/f^n) = s$ en cualquier lugar, lo cual muestra que ψ es suprayectivo.
De esta manera como ψ es inyectivo y suprayectivo, entonces ψ es un isomorfismo.

(d)
Note que (d) es un caso especial de (c) si $f = 1$ y $D(f)$ es el espacio completo.

Proposición 1.2.6 Sea A una anillo y sea $X = \mathrm{Spec}A$. También sea $A \to B$ un homomorfismo de anillos, y sea f :Spec$B$ →Spec$A$ el correspondiente morfismo de espectros. Entonces:

(a) el mapeo $M \to \tilde{M}$ da un functor pleno y fiel de la categoría de A-módulos a la categoría de $\mathscr{O}_X$-módulos;
(b) si M y N son dos A-módulos, entonces $(M \otimes_A N)^\sim \cong \tilde{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \tilde{N}$;
(c) $\{M_i\}$ es una familia de A-módulos, entonces $(\oplus M_i)^\sim \cong \oplus \tilde{M}_i$;
(d) para cada B-módulo N se tiene $f_*(\tilde{N}) \cong ({}_AN)^\sim$, donde ${}_AN$ significa N considerado como un A-módulo;
(e) para cada A-módulo M se tiene $f^*(\tilde{M}) \cong (M \otimes_A B)^\sim$.

Prueba.
El mapeo $M \to \tilde{M}$ es functorial. Este es exacto, debido a que la localización es exacta, y la exactitud de gavillas puede ser medida en los tallos (debido a que una sucesión $...\mathscr{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathscr{F}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathscr{F}^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}}$...de gavillas y morfismos es exacta si y sólo si para cada $P \in X$ la correspondiente sucesión de tallos es exacta como un sucesión de grupos abelianos, y debido a la Proposición 1.2.5 b)). Tal functor conmuta con la suma directa y el producto tensorial, debido a que estos conmutan con la localización, por tanto c) es válido. Decir que este es pleno fiel significa que para cada par de A-módulos M y N, se tiene una biyección $\mathrm{Hom}_A(M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\tilde{M}, \tilde{N})$.
El functor $\sim$ da un mapeo natural ψ:$\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\tilde{M}, \tilde{N})$ como sigue, dado $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ definimos $\psi(\varphi) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\tilde{M}, \tilde{N})$, tal que para cada abierto $U \subset X$, $\psi(\varphi)[U] : \tilde{M}(U) \to \tilde{N}(U)$, manda $s \in \tilde{M}(U)$ a la función $\psi(\varphi)[U](s) \in \tilde{N}(U)$ dada por la regla $\psi(\varphi)[U](s)(p) = \varphi_p(s(p))$ para todo $p \in U$, donde $\varphi_p : M_p \to N_p$ es la localización de φ.
Nótese que $\psi(\varphi)(U)(s)$ es localmente un fracción, pues s es localmente una fracción y φ_p manda fracciones en fracciones, esto es $\varphi_p(a/b) = \varphi(a)/b$.
Ahora se definirá un morfismo ψ^{-1} :$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\tilde{M}, \tilde{N}) \to \mathrm{Hom}_A(M, N)$. Dado

$\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\tilde{M}, \tilde{N})$, obtenemos $\psi^{-1}(\rho) \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ tomando secciones globales, es decir; $\psi^{-1}(\rho) = \rho[X] : \tilde{M}[X] \to \tilde{N}[X]$, tenemos por proposición 1.2.5 que $\tilde{M}[X] = M$ y $\tilde{N}[X] = N$, por tanto $\rho[X] \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$.
Estos dos mapeos son inversos uno del otro, y por tanto isomorfismos. La afirmación última acerca de f_* y f^* se sigue directamente de las definiciones.$\square$

Las gavillas de la forma $\tilde{M}$ sobre esquemas afines son los modelos para gavillas casi-coherentes. Una gavilla casi-coherente sobre un esquema X será un $\mathscr{O}_X$-módulo el cual es localmente de la forma $\tilde{M}$.

Definición 1.2.7 Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un esquema. Una gavilla de $\mathscr{O}_X$-módulos $\mathscr{F}$ es ***casi-coherente*** si X puede ser cubierta por subconjuntos abiertos afines $U_i = \mathrm{Spec} A_i$, tal que para cada i existe un A_i-módulo M_i con $\mathscr{F}|_{U_i} \cong \tilde{M}_i$. Se dice que $\mathscr{F}$ es ***coherente*** si además cada M_i puede ser tomado como un A_i-módulo finitamente generado.

Definición 1.2.8 Sea Y un subesquema cerrado de un esquema X, y sea $i : Y \to X$ el morfismo inclusión. Se define la ***gavilla ideal*** de Y, denotada por $\mathscr{I}_Y$, como el kernel del morfismo $i^\# : \mathscr{O}_X \to i_*\mathscr{O}_Y$.

Proposición 1.2.9 Sea X un esquema. Para cada subesquema cerrado Y de X, la gavilla ideal correspondiente $\mathscr{I}_Y$ es una gavilla de ideales casi-coherente sobre X. Si X es noetheriano, la gavilla $\mathscr{I}_Y$ es coherente. Recíprocamente, cada gavilla de ideales casi-coherente sobre X es la gavilla ideal de un subesquema cerrado unívocamente determinado de X.

Prueba. Hartshorne [5,p.116].

Gavilla tautológica de $proj(S)$.
Ahora veremos un ejemplo de gavilla casi-coherente sobre el *proj* de un anillo graduado S. Antes extenderemos la definición del functor $\sim$ de la definición 1.2.4 a esquemas que son el *proj* de algún anillo.
Para un anillo graduado $S = \oplus_{m=0}^{\infty} S_m$, un S-módulo $M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ se dice que es un S-módulo graduado si para m y n arbitrarios $S_m \cdot M_n \subset M_{m+n}$.
Para un elemento homogéneo $f \in S_d$, se definen

$$D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in projS | f \notin \mathfrak{p}\} \text{ y}$$

$$M_{(f)} = \left\{ \frac{\alpha}{f^l} \mid l \geq 0, \alpha \in M_{ld} \right\}. \quad (1.7)$$

Entonces $M_{(f)}$ es un $S_{(f)}$-módulo, y $D_+(f)$ es un subesquema abierto de $projS$ que es isomorfo a $\mathrm{Spec}(S_{(f)})$, vea Hartshorne [6,p.76, Capítulo II, Proposición 2.5 b)]. Entonces se tiene una gavilla casi-coherente $\widetilde{M_{(f)}}$ sobre $D_+(f) \cong \mathrm{Spec}S_{(f)}$. Las gavillas $\widetilde{M_{(g)}}$ sobre $\mathrm{Spec}S_{(g)}$ con $g \in S_e$ se pueden pegar para dar una gavilla casi-coherente sobre $proj(S)$, que también denotaremos con $\widetilde{M}$. Esto es, uno puede identificar $D_+(fg) = D_+(f) \cap D_+(g)$ con el conjunto abierto $D(\frac{g^d}{f^e})$ de $\mathrm{Spec}S_{(f)}$. Note también que $M_{(fg)}$ puede ser identificado con la localización $(M_{(f)})_h$ de $M_{(f)}$ en $h = \frac{g^d}{f^e}$.

Por supuesto, debido a que para $\frac{\alpha}{(fg)^l}$ con $\alpha \in M_{l(d+e)}$, se tiene que

$$\frac{\alpha}{(fg)^l} = \frac{\alpha(fg)^{l(d-1)}}{(fg)^{ld}},$$

de esta manera se consigue un isomorfismo de $M_{(fg)}$ a $(M_{(f)})_h$ asignando $\frac{\alpha}{(fg)^l} \in M_{(fg)}$ a $\frac{\alpha(fg)^{l(d-1)}}{f^{l(d+e)}}/h^l \in (M_{(f)})_h$. Por tanto, se obtiene

$$\widetilde{M_{(f)}}|_{D_+(fg)} = \widetilde{M_{(fg)}}.$$

Note que $\tilde{S} = \mathscr{O}_X$, con $X = projS$, pues podemos ver a S como S-módulo graduado.

Para un S-módulo graduado $M = \oplus_{m\in\mathbb{Z}} M_m$ y para un entero l, uno puede definir otro S-módulo graduado $M(l)$, donde

$$M(l) = \oplus_{m\in\mathbb{Z}} M(l)_m, \qquad M(l)_m = M_{m+l} \quad (1.8)$$

Note que $M(0) = M$. Además, para enteros l_1 y l_2, se tiene que $M(l_1 + l_2) = (M(l_1))(l_2)$.
A la gavilla casi-coherente $\widetilde{M(l)}$ sobre $proj(S)$ obtenida de $M(l)$, la denotaremos por $\tilde{M}(l)$. Nosotros también escribimos $\mathscr{O}_X(l)$ por $\widetilde{S(l)}$. Entonces el S-módulo $S(l)$ es un S-módulo libre generado por $1 \in S(l)_{-l} = S_{-l+l} = S_0$ (que es un S-módulo) como un S-módulo, y de hecho resulta que $\mathscr{O}_X(l)$ es una gavilla localmente libre de rango 1. Si $X = \mathbb{P}^n$, entonces $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ se conoce como la ***gavilla tautológica*** de $\mathbb{P}^n$.

Capítulo 2

Gavillas de diferenciales

2.1. Módulos de diferenciales

En esta sección se recordará la definición y algunas características de la gavilla de formas diferenciales relativas de un esquema sobre otro. La construcción se basa en propiedades del módulo de diferenciales de un anillo sobre otro.

Diferenciales de Kähler

Sea A un anillo conmutativo con identidad, sea B una A-álgebra, y M un B-módulo.

Definición 2.1.1 Una A-***derivación*** de B dentro de M es un mapeo $d : B \to M$ tal que:
(1) d es aditivo,
(2) $d(bb^{'}) = bdb^{'} + b^{'}db$, y
(3) $da = 0$ para todo $a \in A$.

Definición 2.1.2 Se define el ***Módulo de formas diferenciales relativas*** de B sobre A como un B-módulo $\Omega_{B/A}$ junto con una A-derivación $d : B \to \Omega_{B/A}$, el cual satisface la siguiente propiedad universal: para cada B-módulo M, y para cada A-derivación $d^{'} : B \to M$, existe un único homomorfismo de B-módulos $f : \Omega_{B/A} \to M$ tal que $d^{'} = f \circ d$.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "f \circ d"'] & \Omega_{B/A} \arrow[d, "f"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

Figura 2.1: Propiedad universal del módulo de formas diferenciales relativas

Una forma de construir tal módulo $\Omega_{B/A}$ es tomar el B-módulo libre F generado por los simbolos $\{db | b \in B\}$, y dividir por el submódulo generado por todas las expresiones de la forma (1) $d(b + b^{'}) - db - db^{'}$ para $b, b^{'} \in B$, (2) $d(bb^{'}) - bdb^{'} - b'db$ para $b, b^{'} \in B$, y (3) da para $a \in A$.
La derivación $d : B \to \Omega_{B/A}$ esta definida enviando b a db. De esta manera, se puede ver que $\Omega_{B/A}$ existe, esto se sigue de la definición de que el par $\langle \Omega_{B/A}, d \rangle$ es único salvo isomorfismo. Como un corolario de esta construcción, se puede ver que $\Omega_{B/A}$ es generado como un B-módulo por $\{db | b \in B\}$.

Proposición 2.1.3 Sea B una A-álgebra. Sea $f : B \otimes_A B \to B$ el homomorfismo diagonal definido por $f(b \otimes b^{'}) = bb^{'}$, y sea $I = \ker f$. Considere $B \otimes_A B$ como un B-módulo por multiplicación por izquierda. Entonces I/I^2 hereda una estructura de B-módulo. Se define un mapeo $d : B \to I/I^2$ por $db = 1 \otimes b - b \otimes 1$ (módulo I^2). Entonces $\langle I/I^2, d \rangle$ es un módulo de diferenciales relativas para B sobre A.

Antes de la prueba necesitaremos algunos resultados.

Lema 2.1.4 El núcleo I de f es el ideal de $B \otimes_A B$ generado por los elementos $(1 \otimes b - b \otimes 1), b \in B$.

Prueba.
Se tiene que $f(1 \otimes b - b \otimes 1) = 0$. Por otra parte, si $\sum_i b_i \otimes b_i'$ esta en I, podemos escribir:

$$\sum_i b_i \otimes b_i' = \sum_i (b_i \otimes b_i') - \sum_i (b_i b_i') \otimes 1 = \sum_i (b_i \otimes 1)(1 \otimes b_i' - b_i' \otimes 1)$$

pues $\sum_i b_i b_i' = 0$.$\square$

Lema 2.1.5 I/I^2 esta generado como un B-módulo por los elementos $(1 \otimes b - b \otimes 1)$ (mod-I^2).

Prueba.
Como $(B \otimes_A B)$-módulo, I esta generado por los elementos de la forma $1 \otimes b - b \otimes 1$, notemos que siendo I/I^2 un $(B \otimes_A B)$-módulo, hereda una estructura de B-módulo con multiplicación inducida por $b \cdot (b_1 \otimes b_2) = (b \otimes 1) \cdot (b_1 \otimes b_2) = (bb_1 \otimes b_2)$. Ahora como B-módulo, I esta generado por elementos de la forma: $(b'' \otimes b')(1 \otimes b - b \otimes 1)$. Así, I/I^2 esta generado como B-módulo por los elementos

$$\begin{aligned}
&(b'' \otimes b')(1 \otimes b - b \otimes 1)(\text{mod } I^2) \\
= &[(b''b' \otimes 1) + (b'' \otimes 1)(1 \otimes b' - b' \otimes 1)](1 \otimes b - b \otimes 1)(\text{mod } I^2) \\
= &(b'b'' \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1)(\text{mod } I^2) \\
= &b'b'' \cdot (1 \otimes b - b \otimes 1)(\text{mod } I^2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto I/I^2 esta generado por elementos de la forma $(1 \otimes b - b \otimes 1)$ mod I^2.$\square$

Prueba de proposición 2.1.3.

Ahora probaremos que d es una A-derivación de B en I/I^2 y que cumple la propiedad universal.
Observaciones.
Como B es una A-álgebra consideremos al homomorfismo estructural $\rho : A \to B$ y sea M un B-módulo. Podemos dar al conjunto $D_B(M) = B \oplus M$ una estructura de anillo definiendo la suma y producto como sigue:

$$(b, m) + (b', m') = (b + b', m + m')$$

$$(b, m)(b', m') = (bb', bm' + b'm)$$

si $b, b' \in B$ y $m, m' \in M$, el elemento uno en $D_B(M)$ es $(1, 0)$, también se puede dar a $D_B(M)$ estructura de B-álgebra con homomorfismo estructural la inyección $i : b \mapsto (b, 0)$ de B en $D_B(M)$. Por otro lado, $D_B(M)$ tiene estructura de A-álgebra por medio de $i \circ \rho$.
Si p es la proyección $(b, m) \mapsto b$ de $D_B(M)$ sobre B, entonces existe una sucesión exacta de B-módulos

$$0 \to M \xrightarrow{i} D_B(M) \xrightarrow{p} B \to 0.$$

Sean i_1 e i_2 los homomorfismos de A-álgebras de B en $B \otimes_A B$ definidos por: $i_1(b) = b \otimes 1$ y $i_2(b) = 1 \otimes b$.
Damos a $B \otimes_A B$ estructura de B-álgebra con morfismo estructural i_1, de esta forma $B \otimes_A B$ se convierte en una A-álgebra con morfismo estructural $i_1 \circ \rho$, también se observa que el morfismo diagonal $f : B \otimes_A B \to B$ es homomorfismo de B-álgebras suprayectivo y también es homomorfismo de A-álgebras.

Ahora se mostrará que d es A-derivación.
Se tiene que $d(b_1 + b_2) = 1 \otimes (b_1 + b_2) - (b_1 + b_2) \otimes 1$ (mód-I^2)$= 1 \otimes b_1 + 1 \otimes b_2 - b_1 \otimes 1 - b_2 \otimes 1$ (mód-I^2)$= d(b_1) + d(b_2)$.
Para $a \in A$, $d(a \cdot 1) = 1 \otimes (a \cdot 1) - (a \cdot 1) \otimes 1$ (mód-I^2)$= a \cdot 1 \otimes 1 - a \cdot 1 \otimes 1$ (mód-I^2)$=0$.
Denotemos $f_2 = d(b_1 b_2)$, $f_1 = b_1 db_2 + b_2 db_1$, $d_1 = b_1 \otimes b_2 - b_1 b_2 \otimes 1 + b_2 \otimes b_1 - b_2 b_1 \otimes 1$ y $d_2 = 1 \otimes b_1 b_2 - b_1 b_2 \otimes 1$, entonces $f_1 = d_1$ mód-I^2 y $f_2 = d_2$ mód-I^2, entonces debemos verificar que $d_1 - d_2$ debe estar en I^2. Tenemos que

$$d_1 - d_2 = b_1 \otimes b_2 + b_2 \otimes b_1 - b_2 b_1 \otimes 1 - b_1 b_2 \otimes 1 = (b_1 \otimes 1)(1 \otimes b_2) + (b_2 \otimes 1)(1 \otimes b_1) - (b_2 \otimes 1)(b_1 \otimes 1) - (b_1 \otimes 1)(b_2 \otimes 1) = -(-b_1 \otimes 1 + 1 \otimes b_1)(1 \otimes b_2) + (1 \otimes b_1 - b_1 \otimes 1)(b_2 \otimes 1) = (b_2 \otimes 1 - 1 \otimes b_2)(1 \otimes b_1 - b_1 \otimes 1) \in I^2,$$

de esta manera d es una A-derivación.

Ahora se mostrará que $(d, I/I^2)$ cumple la propiedad universal de módulos de diferenciales.

Sea $D \in \mathrm{Der}_A(B, M)$, definimos $\varphi : B \otimes_A B \to D_B(M)$ por $\varphi(b \otimes b') = (bb', bD(b'))$, entonces φ es homomorfismo de A-álgebras, y si $\sum b_i \otimes b'_i \in I$ entonces $f(\sum b_i \otimes b'_i) = \sum b_i b'_i = 0$, por tanto $\varphi(\sum b_i \otimes b'_i) = (0, \sum b_i Db'_i)$ y así $\varphi|_I : I \to M$, de esta forma φ mapea I en $M \subset D_B(M)$. Entonces $\varphi|_I : I \to M$ induce un homomorfismo de B-módulos $\tau : I/I^2 \to M$, pues si $\beta \in I^2, \varphi(\beta) = (0, 0)$. Sea $\pi_M : D_B(M) \to M$ la proyección natural, se puede ver que

$$\tau(d(b')) = \pi_M \circ \varphi(1 \otimes b' - b' \otimes 1) = \pi_M \circ \varphi(1 \otimes b') - \pi_M \circ \varphi(b' \otimes 1)$$

$$= D(b') - b'D(1) = D(b'),$$

pues $D(1) = 0$. Entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "D"'] & I/I^2 \arrow[d, "\tau"] \\ & M \end{tikzcd}$$

donde $D = \tau \circ d$.

Unicidad.
Por el lema 2.1.5 sabemos que I/I^2 esta generado por el conjunto $\{d(b) \text{ mod-}I^2 | b \in B\}$, entonces τ esta determinada de forma única por los elementos $D(b') = \tau(d(b'))$.

De esta manera I/I^2 es módulo de diferenciales de B sobre A.$\square$

Proposición 2.1.6 Si $A^{'}$ y B son A-álgebras y $B^{'} = B \otimes_A A^{'}$, entonces
a) $\Omega_{B^{'}/A^{'}} \cong \Omega_{B/A} \otimes_A A' \cong \Omega_{B/A} \otimes_B B^{'}$,
b) Si S es un sistema multiplicativo en B, entonces $\Omega_{S^{-1}B/A} \cong S^{-1}\Omega_{B/A}$.

Prueba: a).Primero probaremos que $\Omega_{B'/A'} \cong \Omega_{B/A} \otimes_A A'$ y después que $\Omega_{B/A} \otimes_A A' = \Omega_{B/A} \otimes_B B^{'}$.
Entonces se mostrará primero que para cualesquiera A-álgebras A' y B con homomorfismos estructurales α y β respectivamente y con d la A-derivación natural de B en $\Omega_{B/A}$ y d' la A'-derivación natural de B' en $\Omega_{B'/A'}$ existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & A' \otimes_A \Omega_{B/A} \\ B' = A' \otimes_A B \arrow[ur, "Id_{A'} \otimes d"] \arrow[dr, "d'"'] & \\ & \Omega_{B'/A'}, \arrow[uu, "\eta"'] \end{tikzcd}$$

con η homomorfismo de B'-módulos.
Se usarán las propiedades universales de módulos de diferenciales para ver que η es isomorfismo.
Primero note que $A' \otimes_A B$ es una A'-álgebra mediante el morfismo inclusión

$i : A' \to A' \otimes_A B$, donde para $a' \in A'$, $i(a') = a' \otimes 1$, ahora sea $Id_{A'} \otimes d : A' \otimes_A B \to A' \otimes_A \Omega_{B/A}$ tal que $(Id_{A'} \otimes d)(a' \otimes b) = a' \otimes d(b)$, note que $Id_{A'} \otimes d$ es una A'-derivación pues $(Id_{A'} \otimes d)(a' \otimes 1) = 0$, así que hay un mapeo $\eta : \Omega_{B'/A'} \to A' \otimes_A \Omega_{B/A}$ tal que

$$\eta(d'(a' \otimes b)) = a' \otimes d(b). \tag{2.1}$$

Para construir la inversa de η considere la siguiente composición:

$$\tau : B \xrightarrow{i} A \otimes_A B \xrightarrow{\alpha \otimes 1} A' \otimes_A B \xrightarrow{d'} \Omega_{B'/A'},$$

note que $\tau(b) = d'(1 \otimes b)$, entonces τ es una A-derivación puesto que d' es una A'-derivación y A' es una A-álgebra, esto es

$$\tau(b_1 + b_2) = d'(1 \otimes (b_1 + b_2)) = d'(1 \otimes b_1 + 1 \otimes b_2) = d'(1 \otimes b_1) + d'(1 \otimes b_2),$$

$$\begin{gathered}\tau(b_1 b_2) = d'(1 \otimes b_1 b_2) = d'((1 \otimes b_1)(1 \otimes b_2)) = \\ (1 \otimes b_1)d'(1 \otimes b_2) + (1 \otimes b_2)d'(1 \otimes b_1) = b_1 \cdot \tau(b_2) + b_2 \cdot \tau(b_1).\end{gathered}$$

Para toda $a \in A$,

$$\tau(a \cdot 1) = \tau(\beta(a)) = d'(1 \otimes \beta(a)) = d'(1 \otimes a \cdot 1) = d'(a \cdot 1 \otimes 1) = 0$$

por ser d' una A-derivación.
Entonces por la propiedad universal de $\Omega_{B/A}$ existe un mapeo de B-módulos $\Omega_{B/A} \xrightarrow{h'} \Omega_{B'/A'}$ tal que $h'(db) = d'(1 \otimes b)$, esto es, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "d"'] & & \Omega_{B'/A'}. \\ & \Omega_{B/A} \arrow[ur, "h'"'] & \end{tikzcd}$$

Note que $A' \otimes_A \Omega_{B/A}$ es un $(A' \otimes_A B)$-módulo definiendo el producto
$(a' \otimes b)(c' \otimes db') = a'c' \otimes bdb' \in A' \otimes_A \Omega_{B/A}$.

Ahora, por la propiedad universal del producto tensorial podemos construir un morfismo de B-módulos $\varphi : A' \otimes \Omega_{B/A} \to \Omega_{B'/A'}$ tal que $\varphi(a' \otimes d(b)) = a' \cdot h'(d(b))$.

Por otro lado considere el morfismo $\eta : \Omega_{B'/A'} \to A' \otimes \Omega_{B/A}$ definido en la ecuación 2.1, entonces se afirma que φ y η son mapeos inversos.

$\eta \circ \varphi = Id_{A' \otimes \Omega_{B/A}}$.
$\eta \circ \varphi(a' \otimes db) = \eta(a' \cdot h'(db)) = \eta[(a' \otimes 1)d'(1 \otimes b)] = (a' \otimes 1)\eta(d'(1 \otimes b)) = (a' \otimes 1)(1 \otimes db) = a' \otimes db.$

$\varphi \circ \eta = Id_{\Omega_{B'/A'}}$.
$\varphi \circ \eta(d'(a' \otimes b)) = \varphi(a' \otimes db) = a' \cdot h'(db) = (a' \otimes 1)d'(1 \otimes b) + (1 \otimes b)d'(a' \otimes 1) = (a' \otimes 1)d'(1 \otimes b) + 0 = d'((a' \otimes 1)(1 \otimes b)) = d'(a' \otimes b).$

Ahora se mostrará que $\Omega_{B/A} \otimes_A A' = \Omega_{B/A} \otimes_B B'$.
Primero observe que como $\Omega_{B/A}$ es un B-módulo entonces $\Omega_{B/A} \otimes_B B \cong \Omega_{B/A}$, de esta manera tenemos que

$$(\Omega_{B/A} \otimes_B B') = (\Omega_{B/A} \otimes_B (A' \otimes_A B)) =$$

$$\Omega_{B/A} \otimes_B (B \otimes_A A') = (\Omega_{B/A} \otimes_B B) \otimes_A A' = \Omega_{B/A} \otimes_A A',$$

esto completa la prueba de a).

Prueba de b).Eisenbud [4,p.394].

Ejemplo 2.1.7 Si $B = A[x_1, ..., x_n]$ es un anillo de polinomios sobre A, entonces $\Omega_{B/A}$ es el B-módulo libre de rango n generado por $dx_1, ..., dx_n$.

Prueba. Sea la aplicación $d : B \to Bdx_1 \oplus \cdots \oplus Bdx_n$ definida por $d(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i$, de esta forma es claro que d es una A-derivación.
Si además $f : B \to M$ es una A-derivación, entonces $f(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial x_i} f(x_i)$, de esta manera existe un mapeo $\mu : Bdx_1 \oplus \cdots \oplus Bdx_n \to M$ tal que $\mu(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial x_i} f(x_i)$, así $f = \mu \circ d.\Box$

Proposición 2.1.8 *(Primera sucesión exacta)*
Sean $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ homomorfismos de anillos. Entonces existe una sucesión exacta natural de C-módulos

$$\Omega_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{V} \Omega_{C/A} \xrightarrow{U} \Omega_{C/B} \to 0. \qquad (2.2)$$

Prueba. Para definir V, considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Omega_{B/A}\otimes_B C \arrow[r, dashed, "V"] & \Omega_{C/A} & \\
 & & C, \arrow[ul, "d_{C/A}"'] \\
\Omega_{B/A} \arrow[uu, "i"] \arrow[uur, dashed, "V'"] & B \arrow[uu, "\tau"'] \arrow[l, "d_{B/A}"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $d_{B/A}, d_{C/A}$ son las derivaciones naturales y $\tau = d_{C/A} \circ \psi$ es una A-derivación, entonces por la propiedad universal de $\Omega_{B/A}$ existe el morfismo V' tal que para $b \in B$, $V'(d_{B/A}(b)) = d_{C/A}(\psi(b))$, por lo anterior podemos construir un morfismo B-bilineal $l : \Omega_{B/A} \times C \to \Omega_{C/A}$ tal que $(x, c) \mapsto c \cdot V'(x)$ y con esto inducir un mapeo $V : \Omega_{B/A} \otimes_B C \to \Omega_{C/A}$ en el que para generadores tenemos

$$V(d_{B/A}(b) \otimes c) = c \cdot d_{C/A}(\psi(b)) \tag{2.3}$$

si $b \in B$ y $c \in C$.

Para definir U, considere ahora el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Omega_{C/A} \arrow[rr, dashed, "U"] & & \Omega_{C/B}, \\
 & C \arrow[ul, "d_{C/A}"] \arrow[ur, "d_{C/B}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $d_{C/B}$ es la B-derivación natural, pero como B es una A-álgebra y $d_{C/B}(a) = 0$ si $a \in A$, entonces $d_{C/B}$ es también una A-derivación, así, por la propiedad universal de $\Omega_{C/A}$ existe el morfismo U tal que si $c' \in C$ entonces $U(d_{C/A}(c')) = d_{C/B}(c')$.
Note que U es suprayectiva, pues si $\sum_{i=1}^n \alpha_i d_{C/B}(b'_i) \in \Omega_{C/B}$ con $\alpha_i, b'_i \in C$, entonces

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i d_{C/B}(b'_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i U(d_{C/A}(b'_i)) = U(\sum_{i=1}^n \alpha_i (d_{C/A}(b'_i))),$$

con $\sum_{i=1}^n \alpha_i d_{C/A}(b'_i) \in \Omega_{C/A}$.

Para ver que la sucesión 2.2 es exacta y debido a las propiedades del functor Hom, bastará probar la exactitud de la siguiente sucesión inducida por 2.2,

$$\mathrm{Hom}_C(\Omega_{B/A} \otimes C, T) \xleftarrow{V^*} \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/A}, T) \xleftarrow{U^*} \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/B}, T), \tag{2.4}$$

donde T es un C-módulo arbitrario.

Necesitamos probar dos cosas:
1) $Im(U^*) \subset ker(V^*)$ y
2) $Im(U^*) \supset ker(V^*)$,
esto se demostrará indirectamente, esto es, mostrando que la sucesión inferior en el diagrama 2.5 es exacta.

Note que U^* :$\mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/B}, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/A}, T)$ esta definida por $U^*(\alpha) = \alpha \circ U$ si $\alpha \in \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/B}, T)$ y $V^* : \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/A}, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, T)$ esta dada por $V^*(\beta) = \beta \circ V$ si $\beta \in \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/A}, T)$.
Por otro lado tenemos

$$\mathrm{Hom}_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_A(B, T),$$

entonces podemos construir el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, T) \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/A}, T) \arrow[l, "V^*"'] \arrow[d, "\cong"', "h_2"] & \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/B}, T) \arrow[l, "U^*"'] \arrow[d, "\cong"', "h_1"] \\
\mathrm{Der}_A(B, T) & \mathrm{Der}_A(C, T) \arrow[l, "V_T^*"'] & \mathrm{Der}_B(C, T), \arrow[l, "U_T^*"']
\end{tikzcd} \tag{2.5}$$

para $\alpha \in \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/B}, T)$, $h_1(\alpha) = \alpha \circ d_{C/B}$, y para $\beta \in \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/A}, T)$, $h_2(\beta) = \beta \circ d_{C/A}$.

Por otro lado, los mapeos inducidos U_T^* y V_T^* estan dados por $U_T^*(\alpha \circ d_{C/B}) = \alpha \circ U \circ d_{C/A} = h_2(\alpha \circ U)$ y $V_T^*(\beta \circ d_{C/A}) = \beta \circ V \circ i \circ d_{B/A}$, y se puede verificar que esta última igualdad es lo mismo que $\beta \circ d_{C/A} \circ \psi$, esto es, para $D \in \mathrm{Der}_A(C, T)$, $V_T^*(D) = D \circ \psi$.

Para ver la exactitud en la sucesión inferior del diagrama 2.5, veamos primero que $V_T^* \circ U_T^* = 0$.
Sea $D \in \mathrm{Der}_B(C,T)$, por la propiedad universal de $\Omega_{C/B}$, D se puede escribir de manera única como $D = \alpha \circ d_{C/B}$ con $\alpha \in \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/B}, T)$, entonces para todo $b \in B$

$$V_T^*(U_T^*(D))(b) = V_T^*(\alpha \circ U \circ d_{C/A})(b) = \alpha \circ U \circ d_{C/A} \circ \psi(b) = \alpha \circ d_{C/B}(\psi(b)) = 0$$

por ser $d_{C/B}$ una B-derivación, de ahí que $V_T^* \circ U_T^* = 0$.

Ahora, sea $D' \in \mathrm{Der}_A(C,T)$ tal que $V_T^*(D') = 0$, veamos que existe $D \in \mathrm{Der}_B(C,T)$ tal que $D' = U_T^*(D)$.
Se tiene que $V_T^*(D') = D' \circ \psi = 0$, y como $\psi : B \to C$ vemos que $D' \in \mathrm{Der}_B(C,T)$.
Ahora veamos que $U_T^*(D') = D'$, como $D' \in \mathrm{Der}_B(C,T)$, si $D' = h_1(\alpha)$ para alguna α, $D' = \alpha \circ d_{C/B}$, evaluando vemos que

$$U_T^*(\alpha \circ d_{C/B}) = \alpha \circ U \circ d_{C/A} = \alpha \circ d_{C/B} = D'.\square$$

Proposición 2.1.9 *(Segunda sucesión exacta)*
Sea B una A-álgebra, sea I un ideal de B, y sea $C = B/I$. Entonces existe una sucesión exacta natural de C-módulos

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{V} \Omega_{C/A} \to 0, \tag{2.6}$$

donde para cada $b \in I$, si $\bar{b}$ es su imagen en I/I^2 entonces $\delta\bar{b} = d_{B/A}(b) \otimes 1$, donde $d_{B/A} : B \to \Omega_{B/A}$ es la derivación natural. Se observa que en particular I/I^2 tiene una estructura natural de C-módulo, y que δ es un mapeo C-lineal, incluso este esta definido vía la derivación $d_{B/A}$.

Prueba. Primero note que I/I^2 es un C-módulo, pues por propiedad universal del cociente podemos construir el morfismo $\delta' : I/I^2 \to (B/I) \otimes_B I$ que resulta ser un isomorfismo. Alternativamente podemos verificar que explícitamente el producto por escalares de C esta dado por, $c \cdot \bar{i} = \overline{j \cdot i}$, donde $c = \bar{j}$.
Considere el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
I/I^2 \arrow[r, dashed, "\delta"] & \Omega_{B/A} \otimes_B C, \\
I \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "\tau"'] &
\end{tikzcd}
\tag{2.7}
$$

con α el morfismo canónico tal que $\alpha(b) = \bar{b}$, definimos τ como un homomorfismo de C-módulos donde $\tau(b) = d_{B/A}(b) \otimes 1$.

Probaremos primero que τ induce el mapeo C-lineal $\delta : I/I^2 \to \Omega_{B/A} \otimes_B C$. Para esto debemos verificar que $\tau(I^2) = 0$, tomemos $b_1, b_2 \in I$, entonces

$$\tau(b_1 b_2) = b_1 d_{B/A}(b_2) \otimes 1 + b_2 d_{B/A}(b_1) \otimes 1 = d_{B/A}(b_2) \otimes \bar{b_1} + d_{B/A}(b_1) \otimes \bar{b_2} = 0$$

pues $C = B/I$, de esta manera por la propiedad universal del cociente, se tiene que δ esta bien definida como homomorfismo de B-módulos, y el diagrama 2.7 conmuta, sólo resta checar que δ es C-lineal:
sea $c \in C$, entonces $c = \bar{b}'$ para algún $b' \in B$, y si $b \in I$, entonces

$$\delta(\bar{b}'\bar{b}) = \delta(\overline{b'b}) = d_{B/A}(b'b) \otimes 1 = d_{B/A}(b) \otimes \bar{b}' + d_{B/A}(b') \otimes \bar{b} = \bar{b}' \cdot \delta(b),$$

pues $d_{B/A}(b') \otimes \bar{b} = 0$, por lo tanto δ es C-lineal.

El morfismo V es el mismo de la proposición 2.1.8, es decir si $b'' \in B$ y $c \in C$ tenemos que $V(d_{B/A}(b'') \otimes c) = c d_{C/A}(\psi(b''))$, donde $d_{C/A}$ es la derivación natural y $\psi : B \to C$.
Note que ψ es suprayectivo y por la proposición 2.1.8 la sucesión 2.2 es exacta, además como $C = B/I$ entonces $\Omega_{C/B} = 0$ y por lo tanto V es suprayectiva.
También $V \circ \delta = 0$, pues para $b \in I$

$$V \circ \delta(\bar{b})) = V(d_{B/A}(b) \otimes 1) = d_{C/A}(\psi(b)) = 0$$

por ser ψ el cociente natural.
Probaremos la exactitud de la sucesión 2.6 usando propiedades del functor Hom. Para un C-módulo T arbitrario es suficiente probar la exactitud de la sucesión

$$\mathrm{Hom}_C(I/I^2, T) \xleftarrow{\delta^*} \mathrm{Hom}_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, T) \xleftarrow{V^*} \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/A}, T), \tag{2.8}$$

inducida por la sucesión 2.6.
Note que V^* esta dado, para $\beta \in$Hom$_C(\Omega_{C/A}, T)$, $V^*(\beta) = \beta \circ V$, y si $\gamma \in$Hom$_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, T)$ tenemos que $\delta^*(\gamma) = \gamma \circ \delta$.
Por otro lado tenemos que siendo $C = B/I$, el mapeo natural

$$\mathrm{Hom}_B(I, T) \to \mathrm{Hom}_C(I/I^2, T)$$

es un isomorfismo.
Primero notemos que como T es un C-módulo, T admite estructura de B-módulo. Esto es, $(\bar{b}) \cdot (t)$ esta bien definido para todo $\bar{b} \in C$ y para todo $t \in T$, entonces se define $b \cdot t = (\bar{b}) \cdot (t)$.
Ahora, si $\epsilon \in$Hom$_B(I, T)$ se tiene que para todo $a, a' \in I, \epsilon(a \cdot a') = a \cdot \epsilon(a') = (\bar{a}) \cdot \epsilon(a') = \bar{0} \cdot \epsilon(a') = 0$, esto es $\epsilon(I^2) = 0$, así que existe un único β que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\alpha"'] & T, \\ I/I^2 \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

donde α es el cociente natural. En principio β es un homomorfismo de B-módulos, pero se verifica facilmente que también es un homomorfismo de C-módulos.
Recíprocamente, dado $\beta \in \mathrm{Hom}_C(I/I^2, T)$ se define $\epsilon = \beta \circ \alpha$. Esto nos da la biyección buscada.
Ahora consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_C(I/I^2, T) \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, T) \arrow[l, "\delta^*"'] \arrow[d, "\cong"', "h_3"] & \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/A}, T) \arrow[l, "V^*"'] \arrow[d, "\cong"', "h_2"] \\ \mathrm{Hom}_B(I, T) & \mathrm{Der}_A(B, T) \arrow[l, "\delta_T^*"'] & \mathrm{Der}_A(C, T), \arrow[l, "V_T^*"'] \end{tikzcd} \tag{2.10}$$

Donde $h_2(\beta) = \beta \circ d_{C/A}$ y $h_3(\eta) = \eta \circ i \circ d_{B/A}$, donde $i : \Omega_{B/A} \to \Omega_{B/A} \otimes_B C$ es el mapeo inclusión.
Los mapeo inducidos V_T^* y δ_T^* estan dados por $V_T^*(\beta \circ d_{C/A}) = \beta \circ V \circ i \circ d_{B/A} = \beta \circ d_{C/A} \circ \psi$ (como en la proposición 2.1.8) y para $D \in$Der $_A(B,T)$, $\delta_T^*(D) = D|_I$, note que $D|_I$ es homomorfismo de B-módulos, pues por ser T un C-módulo si $b \in I$ y $b' \in B$ entonces $\delta_T^*(D)(b \cdot b') = bD(b') + b'D(b) = b'D(b)$.

Ahora por la functorialidad de Hom, como $V \circ \delta = 0$ entonces $\delta_T^* \circ V_T^* = 0$. Finalmente, sea $D' \in \mathrm{Der}_A(B,T)$ tal que $\delta_T^*(D') = 0$, veamos que existe un $D'' \in \mathrm{Der}_A(C,T)$ tal que $D' = V_T^*(D'')$.
Como $\delta_T^*(D') = D'|_I = 0$ entonces existe D'' tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "D'"] \arrow[d, "\psi"'] & T, \\ B/I \arrow[ur, dashed, "D''"'] & \end{tikzcd} \tag{2.11}$$

de esta manera $D' = D'' \circ \psi = V_T^*(D'')$, por lo tanto la sucesión inferior en el diagrama 2.10 es exacta, consecuentemente la sucesión 2.6 es exacta.$\square$

Corolario 2.1.10 Si C es una A-álgebra finitamente generada, o si C es una localización de una A-álgebra finitamente generada, entonces $\Omega_{C/A}$ es un C-módulo finitamente generado.

Prueba
Caso I. Sea C una A-álgebra finitamente generada.
Como C es una A-álgebra finitamente generada, entonces existe la sucesión exacta

$$0 \to I \to B \to C \to 0,$$

donde I es un ideal del anillo polinomial $B = A[x_1, ..., x_n]$, así, podemos escribir $C = B/I$. Entonces se tiene una sucesión de morfismos de anillos

$A \to B \to C$, y por la proposición 2.1.9 tenemos la siguiente sucesión exacta de C-módulos

$$I/I^2 \to \Omega_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{V} \Omega_{C/A} \to 0. \tag{2.12}$$

Ahora se mostrará que $\Omega_{C/A}$ es finitamente generado. Bastará mostrar que $\Omega_{B/A} \otimes_B C$ es finitamente generado, pues las imagenes de los generadores de $\Omega_{B/A} \otimes_B C$ bajo V generan $\Omega_{C/A}$, esto debido a que V es suprayectivo. Por el ejemplo 2.1.7, $\Omega_{B/A} = \oplus_{i=1}^{n} dx_i B$, entonces $\Omega_{B/A} \otimes_B C$ es finitamente generado como C-módulo como se quería.

Caso II. Sea C una localización de una A-álgebra finitamente generada. Podemos escribir a C como $C = S^{-1}C'$, donde C' es una A-álgebra finitamente generada y $S \subset C'$ es un sistema multiplicativo. Por la proposición 2.1.6, $\Omega_{C/A} = \Omega_{S^{-1}C'/A} = S^{-1}\Omega_{C'/A}$, y por el Caso I, $\Omega_{C'/A}$ es finitamente generado como C'-módulo, entonces $S^{-1}\Omega_{C'/A}$ es un $S^{-1}C'$-módulo finitamente generado, pues si $< g_1, ..., g_n >$ son generadores de $\Omega_{C'/A}$, entonces $< \frac{g_1}{1}, ..., \frac{g_n}{1} >$ son generadores de $S^{-1}\Omega_{C'/A}$. $\Box$

Ahora se considerará el módulo de diferenciales en el caso de extensiones de campos y de anillos locales. Para una mayor claridad se recordarán algunas definiciones.

Definición 2.1.11 Sea A un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}$, el campo $k = A/\mathfrak{m}$ es llamado ***campo residual*** de A.

Definición 2.1.12 Sea k un campo, un polinomio irreducible $f(x) \in k[x]$ se llama ***separable sobre*** k si no tiene raíces múltiples (en su campo de descomposición).

Definición 2.1.13 Un polinomio arbitrario $f(x) \in k[x]$ se llama ***separable sobre*** k, si todos sus factores irreducibles son separables sobre k.

Definición 2.1.14 Sea K/k una extensión de campos. Un elemento $\alpha \in K$ es separable sobre k si α es algebraico sobre k y si ***Irr***$(\alpha, k) \in k[x]$ es separable, donde $\mathrm{Irr}(\alpha, k)$ es el polinomio mínimo de α.

Definición 2.1.15 Una extensión algebraica K/k es ***separable*** si todo $\alpha \in K$ es separable sobre k.

Ejemplo 2.1.16 Si L/K es una extensión algebraica separable tal que M es un campo intermedio, entonces L/M y M/K son separables.

Prueba. La extensión M/K es separable ya que $M \subseteq L$, por tanto cada elemento de M es separable sobre K.
Para la extensión L/M, sea $\alpha \in L$ un elemento arbitrario, y sean $m_K = \mathrm{Irr}(\alpha, K)$ y $m_M = \mathrm{Irr}(\alpha, M)$. Entonces en $M[x]$ vemos que m_K es igual o es un múltiplo de m_M, así m_M divide a m_K. Pero como α es separable sobre K, m_K es separable sobre K, esto es, no tiene raíces múltiples, por lo tanto tampoco m_M ya que es factor de m_K. Entonces se tiene que α es separable sobre M, entonces L/M es separable.$\square$

Definición 2.1.17 Sea $\{x_b\}_{b\in B}$ un conjunto de indeterminadas. El campo $k(\{x_b\}_{b\in B})$ de funciones racionales en las indeterminadas x_b se conoce como extensión ***trascendental pura*** de k.
Si $k \subset K$ son campos, y $B \subset K$ es un conjunto de elementos, entonces B es ***algebraicamente independiente sobre k*** si hay un homomorfismo $k(\{x_b\}_{b\in B}) \to K$ que envía x_b a $b \in B$. Equivalentemente dado cualquier subconjunto finito de B, digamos $\{b_1, ..., b_r\}$, no existe un polinomio $p(x_{b_1}, ..., x_{b_r}) \in k[x_{b_1}, ..., x_{b_r}]$ tal que $p(b_1, ..., b_r) = 0$.

Definición 2.1.18 Sea K/k una extensión de campos, sea $\mathscr{I}$ la colección de todos los subconjuntos de K que son algebraicamente independientes sobre k, ordenando $\mathscr{I}$ mediante inclusión, un elemento $S \in \mathscr{I}$ el cual es maximal en este ordenamiento es llamado una ***base trascendente*** para K sobre k, y la cardinalidad de S denotada como **tr.d.**(K/k) se le conoce como el ***grado de trascendencia*** de K sobre k. Todas las bases trascendentes tienen la misma cardinalidad (ver Lang [8,p.254,Capítulo X,Teorema 1]).

Observación 2.1.19 Si L/k es una extensión de campos finitamente generada, entonces existe un campo intermedio $k \subseteq K \subseteq L$ tal que:
(1) $K = k(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ donde los α_i son elementos trascendentes algebraicamente independientes sobre k.
(2) L/K es una extensión finita.
(3) En este caso, el grado de trascendencia de L/k es r.

Prueba. Zaldívar [14,p.69].

Definición 2.1.20 Sea K una extensión finitamente generada de k, se dice que K es ***separablemente generada*** si existe una base trascendente $\{x_\lambda\}$ de K/k tal que K es una extensión algebraica separable sobre $k(\{x_\lambda\})$. En general, una extensión arbitraria K/k es ***separable*** sobre k si cada subcampo de K que es finitamente generado sobre k es separablemente generado sobre k.

Ejemplo 2.1.21 En característica 0 se observa que toda extensión algebraica es separable porque un polinomio irreducible no puede tener raíces múltiples, y por tanto cualquier extensión finitamente generada es separablemente generada, de esta manera toda extensión K/k es separable por la observación 2.1.19.

Teorema 2.1.22 Sea K/k una extensión de campos finitamente generada. Entonces $\dim_K \Omega_{K/k} \geq$tr.d.K/k, y la igualdad se cumple si y sólo si K es separablemente generada sobre k. (Aquí $\dim_K$ denota la dimensión como un K-espacio vectorial.)

Prueba. Matsumura [9,p.191].$\square$

Se observa en particular que si K/k es una extensión de campos finita, entonces $\Omega_{K/k} = 0$ si y sólo si K/k es separable.

Proposición 2.1.23 Sea B un anillo local el cual contiene un campo k isomorfo a su campo residual $B/\mathfrak{m}$. Entonces el mapeo $\delta : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \Omega_{B/k} \otimes_B k$ de Proposición 2.1.9 es un isomorfismo.

Prueba.
Considere la siguiente sucesión:

$$k \xrightarrow{i} B \to B/\mathfrak{m} \cong k.$$

Acorde con Proposición 2.1.9, tenemos la siguiente sucesión

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{B/k} \otimes_B B/\mathfrak{m} \to \Omega_{(B/\mathfrak{m})/k} \to 0.$$

Note que $\Omega_{(B/\mathfrak{m})/k} = 0$, pues $B/\mathfrak{m} \cong k$, $d_{k/k}(x) = 0$ para $d_{k/k}$ la derivación natural $d_{k/k} : B/\mathfrak{m} \to \Omega_{(B/\mathfrak{m})/k}$ y $\Omega_{(B/\mathfrak{m})/k}$ está generado por $d_{k/k}(x)$ con $x \in k$. Así, el cokernel de δ es $0 = \Omega_{k/k}$. De esta manera δ es suprayectiva.

Para mostrar que δ es inyectiva, es suficiente mostrar que el mapeo dual de $\delta^{'}$,

$$\delta^{'} : \mathrm{Hom}_k(\Omega_{B/k} \otimes_B k, k) \to \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k), \tag{2.13}$$

es suprayectivo, note que si $f \in \mathrm{Hom}_k(\Omega_{B/k} \otimes_B k, k)$, entonces $f \mapsto \delta^{'}(f) = f \circ \delta$.

El término en la parte izquierda es isomorfo a $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/k}, k)$, por ejemplo mandando $\alpha : \Omega_{B/k} \otimes_B k \to k$ a $\alpha \circ i$ donde $i : \Omega_{B/k} \to \Omega_{B/k} \otimes_B k$ es la inclusión natural tenemos la identificación de $\mathrm{Hom}_k(\Omega_{B/k} \otimes_B k, k)$ con $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/k}, k)$, este último por la definición de diferenciales, puede ser identificado con el conjunto $\mathrm{Der}_k(B, k)$ de k-derivaciones de B a k. Si $d : B \to k$ es una derivación, entonces $\delta^{'}(d)$ es obtenido por restricción a $\mathfrak{m}$, además $d(\mathfrak{m}^2) = 0$, pues si $m_1, m_2 \in \mathfrak{m}$ entonces $m_1 \cdot dm_2 + m_2 \cdot dm_1 = \bar{m_1} dm_2 + \bar{m_2} dm_1 = 0 + 0$, de esta manera d induce el mapeo $\bar{d} : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to k$.

Ahora, para mostrar que $\delta^{'}$ es suprayectiva, sea $h \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$. Para cada $b \in B$ se puede escribir $b = \lambda + c$, $\lambda \in k$, $c \in \mathfrak{m}$, en una única forma, tomando $\lambda = \pi(b)$ con $\pi : B \to B/\mathfrak{m} = k$ el cociente natural, $c = b - \pi(b)$. Definiendo $db = h(\overline{c})$ donde $\overline{c} \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ es la imagen de c entonces uno puede verificar que d es una k-derivación de B a k, y que $\delta^{'}(d) = h$. De esta manera $\delta^{'}$ es suprayectiva como se requería.$\square$

Definición 2.1.24 Un campo k se llama ***perfecto*** si todas sus extensiones finitas son separables.

Ejemplo 2.1.25 Todo campo algebraicamente cerrado k es perfecto, pues su única extensión finita es el mismo k, y este es separable sobre si mismo.

Lema 2.1.26 Si k es un campo perfecto y K es algún campo que contiene a k, entonces K es separable sobre k.

Prueba. Eisenbud [4,p.562, Corolario A1.7.].

Definición 2.1.27 Sea A un anillo local noetheriano con ideal maximal $\mathfrak{m}$ y campo residual $k = A/\mathfrak{m}$. A es un ***anillo local regular*** si $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A$.

Teorema 2.1.28 Sea B un anillo local que contiene un campo k isomorfo a su campo residual. Supóngase además que k es perfecto, y que B es una localización de una k-álgebra finitamente generada. Entonces $\Omega_{B/k}$ es un B-módulo libre de rango igual a la dimensión de B si y sólo si B es una anillo local regular.

Prueba.
Primero supóngase que $\Omega_{B/k}$ es libre de rango igual a dim$B$. Entonces por Proposición 2.1.23 se tiene que dim$_k\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ =dim$B$, lo cual dice por definición que B es un anillo local regular. Note que en particular esto implica que B es dominio entero (ver corolario 10.14 de Eisenbud [4,p.240]).
Recíprocamente, suponga que B es local regular de dimensión r. Entonces dim$_k\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = r$, así por Proposición 2.1.23 se tiene que dim$_k\Omega_{B/k} \otimes_B k = r$. Por otro lado, sea K el campo de fracciones de B, veamos a K como B_p, donde p es el ideal (0). Entonces por Proposición 2.1.6 b) y por propiedades de localización se tiene que

$$\Omega_{B/k} \otimes_B K = \Omega_{B/k} \otimes_B B_p = (\Omega_{B/k})_p = \Omega_{B_p/k} = \Omega_{K/k}.$$

Ahora debido a que k es perfecto, por el lema 2.1.26, K es separable, y como B es localización de una k-álgebra finitamente generada, entonces K/k es finitamente generada, y por ser K separable, K es separablemente generada de k. De esta manera dim$_K\Omega_{K/k}$ =tr.d.K/k por Teorema 2.1.22. Pero también se tiene que dim$B$ =tr.d.K/k (ver teorema 1.8A a) de Hartshorne [6,p.6]).
Finalmente, note que por Corolario 2.1.10, $\Omega_{B/k}$ es un B-módulo finitamente generado. Se concluye que, usando el lema 2.1.31, $\Omega_{B/k}$ es un B-módulo libre de rango r.□

Definición 2.1.29 El ***radical de Jacobson*** de un anillo R es la intersección de todos los ideales maximales de R.

Lema 2.1.30 ***Lema de Nakayama***. Sea I un ideal contenido en el radical de Jacobson de un anillo R, y sea M un R-módulo finitamente generado.
a) Si $IM = M$, entonces $M = 0$.
b) Si las imagenes de $m_1, ..., m_n \in M$ en M/IM generan a M/IM como un R-módulo, entonces $m_1, ..., m_n$ generan a M como un R-módulo.

Prueba. Eisenbud [4,p.124, Corolario 4.8].

Lema 2.1.31 Sea A un dominio entero local noetheriano, con campo residual k y campo de fracciones K. Si M es un A-módulo finitamente generado y si dim$_kM \otimes_A k$ =dim$_KM \otimes_A K = r$, entonces M es libre de rango r.

Prueba.

Debido a que dim$_kM \otimes_A k = r$ y que $M \otimes_A k = M \otimes_A A/\mathfrak{m} \cong M/\mathfrak{m}M$, por el lema de Nakayama 2.1.30, se tiene que M puede ser generado por r elementos. De esta manera hay un mapeo suprayectivo $\phi : A^r \to M \to 0$. Sea R el kernel de tal mapeo. Entonces de la sucesión exacta

$$0 \to R \to A^r \to M \to 0,$$

se obtiene otra sucesión exacta haciendo producto tensorial con K

$$0 \to R \otimes_A K \to K^r \to M \otimes_A K \to 0, \tag{2.14}$$

ya que podemos ver a K como una localización $K = A_p$, con $p = (0)$, y el functor localización $(\_\otimes_A A[S^{-1}])$ siempre es plano (ver Eisenbud [4,p.99, Proposición 2.5]). Por propiedades del producto tensorial, $A^r \otimes_A K \cong (A \otimes_A K)^r = K^r$. Como $\dim_K M \otimes_A K = r$, se tiene que $R \otimes_A K = 0$. Pero R es libre de torsión puesto que R esta contenido en A^r y A es dominio entero, así $R = 0$ y M es isomorfo a A^r. De otra forma, $R \otimes_A K = R \otimes_A A_p = R_p = 0$, pero el anulador $\mathrm{Ann}(R) = 0 = p$, entonces p esta en el soporte de R (ver Eisenbud [4,p.67, Corolario 2.7]), si $R \neq 0$, tenemos que $R_p \neq 0$, pero como $R_p = 0$, se debe tener que $R = 0$, así M es isomorfo a A^r.$\square$

2.2. Gavillas de diferenciales

Ahora se recordará la definición de la gavilla de diferenciales en función de la gavilla de ideales, pero antes se observará lo siguiente relacionado al morfismo diagonal.

Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas. Considere el morfismo diagonal $\Delta : X \to X \times_Y X$ (vea definición 1.1.27). Entonces Δ induce un isomorfismo de X con su imagen $\Delta(X)$, la cual resulta ser un subesquema localmente cerrado de $X \times_Y X$, es decir es un subesquema cerrado de un subconjunto abierto W de $X \times_Y X$ (observe que si $X = \bigcup U_i$ es una cubierta afín de X, por propiedades de producto fibrado $U_i \times U_i = \pi_1^{-1}(U_i) \bigcap \pi_2^{-1}(U_i) = U_i \times_Y X \bigcap X \times_Y U_i$ es un abierto de $X \times_Y X$, por lo tanto $\bigcup (U_i \times U_i)$ también es abierto de $X \times_Y X$, además $\Delta(X) = \Delta(\bigcup U_i) = \bigcup \Delta(U_i) \subset \bigcup (U_i \times U_i)$, así que podemos hacer $W = \bigcup (U_i \times U_i)$).
Entonces $\Delta : X \to W$ es una inmersión cerrada (vea observación 2.2.3),

entonces el morfismo inducido $\Delta^{\#}$ es suprayectivo, $\Delta^{\#} : \mathscr{O}_W \to \Delta_*\mathscr{O}_X \cong \mathscr{O}_W/ker\Delta^{\#}$ y podemos hablar de la gavilla de ideales $\mathscr{I}$ de X en W, es decir, $\mathscr{I} = \ker\Delta^{\#}$.

Definición 2.2.1 Sea $\mathscr{I}$ la gavilla de ideales de X en W. Entonces se define la ***gavilla de diferenciales relativas*** de X sobre Y como la gavilla $\Omega_{X/Y} = \Delta^*(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)$ en X.

Observación 2.2.2 Primero note que $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \cong \mathscr{I} \otimes (\mathscr{O}_W/\mathscr{I})$ tiene una estructura natural de $\Delta_*\mathscr{O}_X$-módulo, entonces $\Omega_{X/Y}$ tiene estructura natural de $\mathscr{O}_X$-módulo, pues $\Delta^*\Delta_*\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_X$ (ver lema 1.2.3). Además se sabe que $\Omega_{X/Y}$ es casi-coherente, pues debido a la proposición 1.2.9, para cada subesquema cerrado H de un esquema T, la correspondiente gavilla ideal $\mathscr{I}_H$ es una gavilla de ideales casi-coherente en T. Si Y es noetheriano y f es un morfismo de tipo finito, entonces $X \times_Y X$ es también noetheriano, y de esta manera, $\Omega_{X/Y}$ es coherente.

Observación 2.2.3 Ahora si $U = \mathrm{Spec}A$ es un subconjunto abierto afín de Y y $V = \mathrm{Spec}B$ es un subconjunto abierto afín de X tal que $f(V) \subseteq U$, entonces $V \times_U V$ es un subconjunto abierto afín de $X \times_Y X$ isomorfo a $\mathrm{Spec}(B \otimes_A B)$, y $\Delta(X) \bigcap (V \times_U V)$ es el subesquema cerrado definido por el homomorfismo diagonal $B \otimes_A B \to B$. De esta manera $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ es la gavilla asociada al módulo I/I^2 de Proposición 2.1.3. De lo anterior se sigue que $\Omega_{V/U} \cong (\Omega_{B/A})^{\sim}$. Así la definición de gavilla de diferenciales de X/Y es compatible, en el caso afín, con el módulo de diferenciales definido anteriormente, vía el functor tilde $\sim$ de la definición 1.2.4. Esto también muestra que se pudo haber definido $\Omega_{X/Y}$ cubriendo X y Y con subconjuntos abiertos afines V y U como arriba, y pegando las correspondientes gavillas $(\Omega_{B/A})^{\sim}$.
Los pegados de estas gavillas estan inducidos por los pegados de la cubierta afín correspondiente.

Las derivaciones $d : B \to \Omega_{B/A}$ se pegan para dar un mapeo $d : \mathscr{O}_X \to \Omega_{X/Y}$ de gavillas de grupos abelianos sobre X, el cual es una derivación de los anillos locales en cada punto.

Proposición 2.2.4 Sea $f : X \to Y$ un morfismo, sea $g : Y^{'} \to Y$ otro morfismo y $f^{'} : X^{'} = X \times_Y Y^{'} \to Y^{'}$ el obtenido por extensión de base. Entonces $\Omega_{X^{'}/Y^{'}} \cong g^{'*}(\Omega_{X/Y})$ donde $g^{'} : X^{'} \to X$ es la primera proyección.

Prueba. La demostración se hará en el caso afín, que se puede extender pegando gavillas.
Recordemos que el producto fibrado $X \times_Y Y'$ dado por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X \times_Y Y' \arrow[dl, "g'"'] \arrow[dr, "f'"] & \\
X \arrow[dr, "g"'] & & Y' \arrow[dl, "f"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

se puede construir pegando los productos fibrados $X_i \times_{Y_i} Y_i'$ de morfismos de esquemas afines $X_i \to Y_i$ y $Y_i' \to Y_i$, donde X_i, Y_i', Y_i son abiertos afines de X, Y', Y tales que $g(X_i) \subset Y_i$ y $f(Y_i') \subset Y_i$.
Entonces como $X_i \times_{Y_i} Y_i'$ es abierto afín, por la observación 2.2.3 sabemos que $\Omega_{(X \times_Y Y')/Y'}$ se construye pegando los $\Omega_{(X_i \times_{Y_i} Y_i')/Y_i'}$. Supongamos que $X_i =$SpecA_i, $Y_i' =$SpecB_i y $Y_i =$SpecC_i, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X_i \times_{Y_i} Y_i' \arrow[dl, "g_i'"'] \arrow[dr, "f_i'"] & \\
X_i \arrow[dr, "g_i"'] & & Y_i' \arrow[dl, "f_i"] \\
 & Y_i &
\end{tikzcd}$$

corresponde al diagrama de morfismos de anillos

$$\begin{tikzcd}
 & A_i \otimes_{C_i} B_i & \\
A_i \arrow[ur, "g_i'^{\#}(X_i)"] & & B_i, \arrow[ul, "f_i'^{\#}(Y_i')"'] \\
 & C_i \arrow[ul, "g_i^{\#}(Y_i)"] \arrow[ur, "f_i^{\#}(Y_i)"'] &
\end{tikzcd}$$

entonces $X_i \times_{Y_i} Y_i' =$Spec$(A_i \otimes_{C_i} B_i)$. Por lo tanto $\Omega_{(X_i \times_{Y_i} Y_i')/Y_i'} = \widetilde{\Omega}_{(A_i \otimes_{C_i} B_i)/B_i}$.

Ahora, por la proposición 2.1.6 a),

$$\Omega_{(A_i \otimes_{C_i} B_i)/B_i} = \Omega_{A_i/C_i} \otimes_{A_i} (A_i \otimes_{C_i} B_i),$$

de esta manera

$$\Omega_{(X_i \times_{Y_i} Y_i')/Y_i'} = \widetilde{\Omega}_{(A_i \otimes_{C_i} B_i)/B_i} = \{\Omega_{A_i/C_i} \otimes_{A_i} (A_i \otimes_{C_i} B_i)\}^{\sim},$$

y por proposición 1.2.6 e)

$$\{\Omega_{A_i/C_i} \otimes_{A_i} (A_i \otimes_{C_i} B_i)\}^{\sim} = g_i^{'*}\widetilde{\Omega}_{A_i/C_i} = g_i^{'*}\Omega_{X_i/Y_i}.$$

El resultado se sigue de pegar nuestras gavillas obtenidas. □

Proposición 2.2.5 Sea $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ morfismos de esquemas. Entonces existe una sucesión exacta de gavillas sobre X,

$$f^*\Omega_{Y/Z} \to \Omega_{X/Z} \to \Omega_{X/Y} \to 0. \tag{2.15}$$

Prueba. Se sigue de Proposición 2.1.8.

Proposición 2.2.6 Sea $f : X \to Y$ un morfismo, y sea Z un subesquema cerrado de X, con gavilla ideal $\mathscr{I}$. Entonces existe una sucesión exacta de gavillas sobre Z,

$$\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{X/Y} \otimes_{i^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z \to \Omega_{Z/Y} \to 0. \tag{2.16}$$

Prueba. Se sigue de Proposición 2.1.9 y de Proposición 2.2.5.

Definición 2.2.7 Si Y es un esquema, se define $\mathbf{A}^n_Y$ como el ***n-espacio afín sobre*** Y dado por $\mathbf{A}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}} Y$, donde $\mathbf{A}^n_{\mathbb{Z}}$ =Spec$\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]$.

Ejemplo 2.2.8 Si X =$\mathbf{A}^n_Y$, entonces $\Omega_{X/Y}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo libre de rango n, generado por las secciones globales $dx_1, ..., dx_n$, donde $x_1, ..., x_n$ son coordenadas afines para $\mathbf{A}^n$.

Prueba. Primero note que si tomamos una abierto afín $U \subset Y$, digamos $U =$ Spec$B$ y consideramos la segunda proyección π_2 en Y del producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
 & A^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}} Y \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n] \arrow[dr, "g"'] & & Y, \arrow[dl, "g'"] \\
 & \mathrm{Spec}\mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

tenemos que por propiedades del producto fibrado

$$\pi_2^{-1}(U) = A^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}} U = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n] \otimes_{\mathbb{Z}} B),$$

note que en esta situación $\Omega_{A^n_Y/Y}|_{\pi_2^{-1}(U)} = \Omega_{\pi_2^{-1}(U)/U} = \widetilde{\Omega}_{(\mathbb{Z}[x_1,...,x_n]\otimes_{\mathbb{Z}} B)/B}$, y así

$$(\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n] \otimes_{\mathbb{Z}} B) = B[x_1, ..., x_n] \Rightarrow \Omega_{\pi_2^{-1}(U)/U} = \widetilde{\Omega}_{B[x_1,...,x_n]/B},$$

de esta manera por el ejemplo 2.1.7 se tiene que $\Omega_{B[x_1,...,x_n]/B}$ es un $B[x_1, ..., x_n]$-módulo libre de rango n generado por los $dx_1, ..., dx_n$, como el functor $\sim$ preserva módulos libres, $\widetilde{\Omega}_{B[x_1,...,x_n]/B}$ es libre.
Note que $dx_1, ..., dx_n \in \Gamma(\pi_2^{-1}(U), \Omega_{A^n_Y/Y}|_{\pi_2^{-1}(U)})$ para cualquier abierto afín U, entonces $dx_1, ..., dx_n$ son secciones globales de $\Omega_{A^n_Y/Y}$, y se puede checar que son base libre usando la condición de pegado de gavillas.□

2.2.1. Gavilla de Diferenciales de $\mathbb{P}^n_A$

Enseguida se verá una sucesión exacta que involucra la gavilla de diferenciales de un espacio proyectivo, su gavilla tautológica y la gavilla estructural.

Teorema 2.2.9 Sea A un anillo, sea $Y = \mathrm{Spec}A$, y sea $X = \mathbf{P}^n_A$. Entonces existe una sucesión exacta de gavillas sobre X,

$$0 \to \Omega_{X/Y} \to \mathscr{O}_X(-1)^{n+1} \to \mathscr{O}_X \to 0. \tag{2.17}$$

(El exponente $n + 1$ en el centro significa una suma directa de $n + 1$ copias de $\mathscr{O}_X(-1)$.)

Prueba.
Sea $S = A[x_0, ..., x_n]$ el anillo coordenado homogéneo de X. Sea E el S-módulo graduado $S(-1)^{n+1}$, con base $e_0, ..., e_n$ en grado 1.
Se define un (grado 0) homomorfismo de S-módulos graduados $E \to S$ enviando $e_i \mapsto x_i$, y sea M el kernel. Entonces la sucesión exacta

$$0 \to M \to E \to S$$

de S-módulos graduados da una sucesión exacta de gavillas sobre X,

$$0 \to \tilde{M} \to \mathscr{O}_X(-1)^{n+1} \to \mathscr{O}_X \to 0.$$

Note que $E \to S$ no es suprayectivo, pero si lo es en todos los grados ≥ 1, de esta manera, el correspondiente mapeo de gavillas es suprayectivo.
Ahora se procederá a mostrar que $\tilde{M} \cong \Omega_{X/Y}$. Primero note que si se localiza en x_i, entonces $E_{x_i} \to S_{x_i}$ es un homomorfismo de S_{x_i}-módulos libres, así M_{x_i} es libre de rango n, generado por $\{e_j - (x_j/x_i)e_i | j \neq i\}$.
Se sigue que si U_i es el conjunto abierto estandar de X definido por x_i, entonces $\tilde{M}|_{U_i}$ es un $\mathscr{O}_{U_i}$-módulo libre generado por las secciones $(1/x_i)e_j - (x_j/x_i^2)e_i$ para $j \neq i$. (Aquí se necesitará el factor adicional $1/x_i$ para conseguir elementos de grado 0 en el módulo M_{x_i}.)
Se define un mapeo $\phi_i : \Omega_{X/Y}|_{U_i} \to \tilde{M}|_{U_i}$ como sigue. Recordando que $U_i \cong \mathrm{Spec}A[x_0/x_i, ..., x_n/x_i]$, de esta manera $\Omega_{X/Y}|_{U_i}$ es un $\mathscr{O}_{U_i}$-módulo libre generado por $d(x_0/x_i), ..., d(x_n/x_i)$. Entonces se define ϕ_i por

$$\phi_i(d(x_j/x_i)) = (1/x_i^2)(x_i e_j - x_j e_i).$$

De esta manera ϕ_i es un isomorfismo. Se exige ahora que los isomorfismos ϕ_i se peguen sucesivamente para dar un isomorfismo $\phi : \Omega_{X/Y} \to \tilde{M}$ sobre todo X. Este cálculo no debe ser dificil. Sobre $U_i \bigcap U_j$, se tiene que para cada k, $(x_k/x_i) = (x_k/x_j) \cdot (x_j/x_i)$.
Por lo tanto en $\Omega_{X/Y}|_{U_i \bigcap U_j}$ se tiene

$$d\left(\tfrac{x_k}{x_i}\right) - \tfrac{x_k}{x_j} d\left(\tfrac{x_j}{x_i}\right) = \tfrac{x_j}{x_i} d\left(\tfrac{x_k}{x_j}\right).$$

Ahora aplicando ϕ_i a la parte izquierda y ϕ_j a la parte derecha, se consigue el mismo resultado en ambas formas, es decir; $(1/x_i x_j)(x_j e_k - x_k e_j)$. De esta manera los isomorfismos ϕ_i se pegan, lo cual completa la prueba.$\square$

2.3. Variedades no singulares

Sea k un campo algebraicamente cerrado. Recordamos algunas propiedades de variedades clásicas sobre k, esto es, localmente son los ceros de polinomios en un espacio afín.

Definición 2.3.1 Sea $Y \subseteq \mathbf{A}_k^n \cong k^n$ una variedad afín (en el sentido clásico), y sea $f_1, ..., f_t \in A = k[x_1, ..., x_n]$ el conjunto de generadores para el ideal de Y. Se dice que Y ***es no singular en un punto*** $P \in Y$ si el rango de la matriz jacobiana evaluada en el punto P, denotada como $J(P) = ((\partial f_i/\partial x_j)(P))$, es $n - r$, donde r es la dimensión de Y. También se dice que Y es ***no singular*** si es no singular en cada punto.

Lema 2.3.2 Sea $m < R$ un ideal maximal de R, entonces

$$R/m \cong (R/m)_m \cong R_m/m_m.$$

Prueba. Matsumura [10,Teorema 4.2,p.23].

Corolario 2.3.3 Sea $m < R$ un ideal maximal de R, entonces

$$m/m^2 = m_m/m_m^2.$$

Prueba. Se tiene que por propiedades de localización y producto tensorial:

$$m/m^2 = m \otimes_R (R/m) \cong m \otimes_R (R/m)_m \cong m_m \otimes_{R_m} (R_m/m_m) = m_m/m_m^2.\square$$

Lema 2.3.4 Sea Y una variedad irreducible sobre k, de dimensión r, si $p \in Y$ es un punto, entonces $\dim \mathscr{O}_p = r$.

Prueba. Como Y es irreducible, cada abierto U de Y es también irreducible y $\dim U$=$\dim Y$, entonces podemos suponer que $p \in U$, tomemos a Y como variedad afín $Y \subseteq \mathbf{A}^n$. Primero note que $\mathscr{O}_p \cong A(Y)_{\mathfrak{m}_p}$, donde $A(Y)$ es el anillo coordenado de Y y $\mathfrak{m}_p$ es el ideal en $A(Y)$ generado por las funciones que se anulan en p, entonces $\mathfrak{m}_p$ es ideal maximal, ahora $\dim \mathscr{O}_p$ =altura $\mathfrak{m}_p$. Note que $A(Y)$ es k-álgebra finitamente generada y $A(Y)$ es dominio entero por ser Y irreducible y reducida, entonces tenemos(ver Hartshorne [6,Teorema 1.8 b), p.6])

$$\text{altura } \mathfrak{m}_p + \dim(A(Y)/\mathfrak{m}_p) = \dim A(Y),$$

donde $\dim(A(Y)/\mathfrak{m}_p) = 0$ ya que $A(Y)/\mathfrak{m}_p$ es campo, también $\dim A(Y)$ =$\dim Y$ (ver Hartshorne [6,Proposición 1.7,p.6]) pues Y es conjunto algebraico, entonces $\dim \mathscr{O}_p = r.\square$

Teorema 2.3.5 Sea $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ una variedad afín. Sea $p \in Y$ un punto. Entonces Y es no singular en p si y sólo si el anillo local $\mathscr{O}_{p,Y}$ es un anillo local regular.

Prueba. Sea p el punto $(a_1, ..., a_n)$ en $\mathbf{A}^n$, y sea $\mathfrak{a}_p = (x_1 - a_1, ..., x_n - a_n)$ el correspondiente ideal maximal en $A = k[x_1, ..., x_n]$.
Se define un mapeo lineal $\theta : A \to k^n$ dado por

$$\theta(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right\rangle$$

para cada $f \in A$. Ahora, es claro que $\theta(x_i - a_i)$ para $i = 1, ..., n$ forma una base de k^n, pues $\theta(x_i - a_i) = e_i$ es el i-ésimo vector unitario. Por otro lado $\theta(\mathfrak{a}_p^2) = 0$, y $\ker\theta = \mathfrak{a}_p^2$ pues θ induce un isomorfismo $\theta' : \mathfrak{a}_p/\mathfrak{a}_p^2 \to k^n$, esto es, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{a}_p \arrow[r, "\theta|_{\mathfrak{a}_p}"] \arrow[d, "\pi"'] & k^n, \\ \mathfrak{a}_p/\mathfrak{a}_p^2 \arrow[ur, "\theta'"'] & \end{tikzcd}$$

y como θ' es suprayectiva y la $\dim_k \mathfrak{a}_p/\mathfrak{a}_p^2$ es n por tener base $< x_i - a_i >$ (aquí nos referimos a las clases de cada $x_i - a_i$ como generadores), θ' es biyectiva, así que $\ker\theta|_{\mathfrak{a}_p} = \mathfrak{a}_p^2$.
Sea $\mathfrak{b}$ el ideal de Y en A, y sea $f_1, ..., f_t$ el conjunto de generadores de $\mathfrak{b}$, entonces el rango de la matriz jacobiana $J(p) = ((\partial f_i/\partial x_j)(p))$ es justo la dimensión de $\theta(\mathfrak{b})$ como un subespacio de k^n, pues si $b_0 \in \mathfrak{b}, b_0 = \sum_{i=1}^t \alpha_i f_i$, con $\alpha_i \in k[x_1, ..., x_n]$, entonces

$$\theta(b_0) = (\alpha_1(p), ..., \alpha_t(p)) \cdot \mathrm{J}(f_1, ..., f_t)(p),$$

así, $\theta(\mathfrak{b})$ resulta ser la matriz $J(p)$ multiplicada por un vector no cero con entradas escalares. Usando el isomorfismo θ', tal dimensión es la misma que la dimensión del subespacio $(\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_p^2)/\mathfrak{a}_p^2$ de $\mathfrak{a}_p/\mathfrak{a}_p^2$, pues $\pi(\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_p^2)/\mathfrak{a}_p^2$.
Por otro lado, el anillo local $\mathscr{O}_p$ de p sobre Y es obtenido de A por dividir por $\mathfrak{b}$ y localizando en el ideal maximal $\mathfrak{a}_p$.
Note que la imagen $m = \mathfrak{a}_p/\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{a}_p$ en $A/\mathfrak{b}$ es un ideal maximal, por otro lado, si $\mathfrak{n}$ es el ideal maximal de $(A/\mathfrak{b})_{\mathfrak{a}_p} \cong \mathscr{O}_p$ entonces $\mathfrak{n}$ tiene forma $\mathfrak{n} = (\mathfrak{a}_p/\mathfrak{b})_{\mathfrak{a}_p}$, por lo tanto $\mathfrak{n} = m_m$ y aplicando el corolario 2.3.3 obtenemos $m/m^2 = m_m/m_m^2$.
De esta manera como $\mathfrak{n}$ es el ideal maximal de $\mathscr{O}_p$, entonces se tiene

$$\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \cong \mathfrak{a}_p/(\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_p^2).$$

Ahora consideremos la sucesión exacta

$$0 \to \pi(\mathfrak{b}) \to \mathfrak{a}_p/\mathfrak{a}_p^2 \to \frac{\mathfrak{a}_p/\mathfrak{a}_p^2}{\pi(\mathfrak{b})} \to 0,$$

note que

$$\frac{\mathfrak{a}_p/\mathfrak{a}_p^2}{\pi(\mathfrak{b})} = \mathfrak{a}_p/(\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_p^2),$$

es claro por la sucesión que

$$\dim(\mathfrak{a}_p/\mathfrak{a}_p^2) = \dim\pi(\mathfrak{b}) + \dim\ \mathfrak{a}_p/(\mathfrak{b}+\mathfrak{a}_p^2).$$

Contando las dimensiones de los espacios vectoriales tenemos

$$\text{n}=\text{rango}J+\dim(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2).$$

Ahora, sea $\dim Y = r$. Entonces por el lema 2.3.4, $\mathscr{O}_p$ es un anillo local de dimensión r, de esta manera $\mathscr{O}_p$ es regular si y sólo si $\dim_k(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2) = r$.□

Definición 2.3.6 Una ***variedad abstracta*** es un esquema entero, separado y de tipo finito sobre un campo algebraicamente cerrado k. Si este es propio sobre k, se dice que la variedad es ***completa***.

Observación 2.3.7 El lema 2.3.4 es válido para puntos cerrados de variedades abstractas.

Observación 2.3.8 Hay un functor fiel y pleno de la categoría de variedades clásicas sobre k a la categoría de esquemas sobre k, la imagen de tal functor es siempre una variedad abstracta (ver Hartshorne [6,proposición 2.6 y proposición 4.10]).

Definición 2.3.9 En una variedad abstracta, el ***campo de funciones*** asociado a esta es el anillo local del punto genérico, tal anillo es un campo, y es también el campo de funciones del anillo local de cualquier punto.

A partir de ahora por una variedad nos referiremos a una variedad abstracta sobre un campo algebraicamente cerrado k.

Teorema 2.3.10 Cada localización de un anillo regular en un ideal primo es otra vez un anillo regular.

Prueba. Matsumura [9, p.139].
La definición de no singularidad para variedades abstractas es la siguiente.

Definición 2.3.11 Sea Y una variedad sobre un campo algebraicamente cerrado k. Y es ***no singular*** en un punto $P \in Y$ si el anillo local $\mathscr{O}_{P,Y}$ es un anillo local regular. Y es ***no singular*** si esta es no singular en cada punto. Y es ***singular*** si no es no singular.

Observación 2.3.12 Note que por el teorema 2.3.10, Y es no singular $\Longleftrightarrow$ todo punto cerrado es regular ($\mathscr{O}_{p,Y}$ es local regular).

Definición 2.3.13 Sea X un espacio topológico, y Z un conjunto cerrado irreducible de X, un ***punto genérico*** para Z es un punto p tal que Z es su cerradura $Z = \{p\}^{-}$.

Observación 2.3.14 Sea A un anillo, si Spec$A$ es irreducible, entonces Nilrad(A) es primo, y se puede ver que este es el único punto genérico de Spec$A$, pues si $\eta \in$ Spec$A$,

$$\{\eta\}^{-} = \cap_{\eta \in V(I)} V(I) \ \text{ para } \ I < A,$$

como $\eta \in V(I)$ tenemos que $I \subset \eta$, entonces $\eta \in V(\eta) \subset V(I)$, de esta manera $\{\eta\}^{-} = V(\eta)$.
Si η es punto genérico, entonces $V(\eta)$ =Spec$A$ $\Rightarrow \sqrt{(0)} = \sqrt{\eta}$, como η es primo, entonces $\eta = \sqrt{0}$.

Sea Y un esquema irreducible, entonces todo abierto ahí es denso e irreducible. Entonces un abierto afín V_1 de Y es irreducible y tiene un punto genérico η_1, que resulta ser punto genérico de Y (pues V_1 es denso en Y). Entonces Y tiene un único punto genérico, esto se sigue de que al tomar otra vecindad V_2 que contenga otro punto genérico η_2, entonces $V_1 \cap V_2 \neq \phi$ y hay un abierto afín $V_3 \subset V_1 \cap V_2$, donde $\eta_1, \eta_2 \in V_3$, tomando la cerradura de cada uno es estos puntos en V_3 tenemos $\{\eta_1\}^{-} = V_3$ y $\{\eta_2\}^{-} = V_3$ entonces $\eta_1 = \eta_2$.

En particular si X es un esquema, cada subconjunto cerrado irreducible no vacío de X tiene un único punto genérico.
Note que si el anillo A es un dominio entero, el ideal (0) es un ideal primo y es el punto genérico de Spec$A$.

Ahora se dará una caracterización de puntos no singulares en términos de la gavilla de formas diferenciales sobre Y.

Teorema 2.3.15 Sea X una variedad abstracta sobre un campo algebraicamente cerrado k. Entonces $\Omega_{X/k}$ es una gavilla localmente libre de rango $n = \dim X$ si y sólo si X es una variedad no singular sobre k.

Prueba.
Hay que probar que $\forall\ p \in X$ hay una vecindad V de p tal que $\Omega_{X/k}|_V$ es

libre. Entonces consideremos una vecindad afín U de p, podemos suponer que $X' = U$ y por tanto $\Omega_{X'/k} = \Omega_{X/k}|_U$. Entonces podemos suponer que X' es un cerrado de $\mathbb{A}^n$ (por ser X un esquema entero y de tipo finito sobre k). Consideremos primero un punto cerrado $p = (a_1, ..., a_n) \in X'$ y el ideal maximal correspondiente $\mathfrak{a}(p) < k[x_1, ..., x_n]$, entonces el anillo local $\mathscr{O}_{p,X'}$, es localización de $A(X')$ con respecto a $\mathfrak{a}(p)$, esto es

$$\mathscr{O}_{p,X'} = (\tfrac{k[x_1,...,x_n]}{I(X')})_{\mathfrak{a}(p)} = A(X')_{\mathfrak{a}(p)},$$

y por el lema 2.3.4 tiene dimensión n. Sea $m(p) < A(X')$ el ideal maximal correspondiente de p en $A(X')$, esto es $m(p) = \frac{\mathfrak{a}(p)}{I(X')}$, entonces el ideal maximal m de $\mathscr{O}_{p,X'}$ es $m = (m(p))_{m(p)}$, ahora por el lema 2.3.2

$$\tfrac{A(X')_{m(p)}}{(m(p))_{m(p)}} = \tfrac{A(X')}{m(p)} = \tfrac{k[x_1,...,x_n]}{\mathfrak{a}(p)},$$

y como k es algebraicamente cerrado,

$$\frac{k[x_1, ..., x_n]}{\mathfrak{a}(p)} = k. \tag{2.18}$$

Como X' =Spec$R$ con $R = k[x_1, ..., x_n]/I(X')$, el módulo $\Omega_{(\mathscr{O}_{p,X'})/k}$ de diferenciales de $\mathscr{O}_{p,X'}$ sobre k es igual al tallo $(\Omega_{X'/k})_p$ de la gavilla $\Omega_{X'/k}$, pues tenemos

$$(\Omega_{X'/k})_p = (\widetilde{\Omega_{R/k}})_p = (\Omega_{R/k})_{m(p)} = \Omega_{(R_{m(p)})/k},$$

y como $\mathscr{O}_{p,X'} = (\tilde{R})_p = R_{m(p)}$, entonces $\Omega_{(R_{m(p)})/k} = \Omega_{(\mathscr{O}_{p,X'})/k}$. Por otro lado, k es perfecto por ser algebraicamente cerrado, $\mathscr{O}_{p,X'}$ es una localización de una $k-$álgebra finitamente generada y por la fórmula 2.18, k es el campo residual de $\mathscr{O}_{p,X'}$, entonces podemos aplicar el teorema 2.1.28 y ver que $(\Omega_{X'/k})_p$ es libre de rango n si y sólo si $\mathscr{O}_{p,X'}$ es un anillo local regular.

Entonces X' es no singular $\iff$ $(\Omega_{X'/k})_p$ es libre de rango n $\forall$ p punto cerrado $\iff$ $(\Omega_{X'/k})_{p'}$ es libre de rango n $\forall$ $p' \in X'$, ya que $(\Omega_{X'/k})_{p'} = ((\Omega_{X'/k})_{p^0})_{p'}$ con p^0 ideal maximal, $p' \subset p^0$ (vistos los puntos como ideales de R). La igualdad anterior se cumple porque si $p^0 \in D(f)$ para algún $f \in R$, entonces $p' \in D(f)$, entonces

$$(\Omega_{X'/k})_{p'} = (\Omega_{R_f/k})_{p'} = \Omega_{R_{p'}/k} \text{ y } (\Omega_{X'/k})_{p^0} = (\Omega_{R_f/k})_{p^0} = \Omega_{(R_{p^0})/k},$$

de esta manera como $p' \subset p^0$, $(R_{p^0})_{p'} = R_{p'}$ y entonces

$$(\Omega_{(R_{p^0})/k})_{p'} = \Omega_{(R_{p^0})p'/k} = \Omega_{R_{p'}/k}.$$

Ahora supongamos que X' es una variedad no singular, entonces el anillo local $\mathscr{O}_{p,X'}$ es anillo local regular, de esta manera $(\Omega_{X'/k})_p$ es libre de rango n (note que $\Omega_{X'/k}$ es gavilla coherente (ver observación 2.2.2)), entonces por la afirmación 2.3.16 b), $\Omega_{X'/k}$ es localmente libre de rango n.
Finalmente, supongamos que $\Omega_{X'/k}$ es localmente libre de rango n, entonces por la afirmación 2.3.16 b) tenemos que los tallos $(\Omega_{X'/k})_p$ son $\mathscr{O}_p$-módulos libres de rango n para todo $p \in X'$, esto implica que $\mathscr{O}_{p,X'}$ es anillo local regular, luego, por definición, X' es no singular. Así, como el teorema se ha demostrado para cualquier punto de X', entonces el teorema queda demostrado para todo punto de X.$\square$

Afirmación 2.3.16 Sea X un esquema noetheriano, y sea $\mathscr{F}$ una gavilla coherente.
a) Si el tallo $\mathscr{F}_p$ es un $\mathscr{O}_p$-módulo libre para algún punto $p \in X$, entonces hay una vecindad U de p tal que $\mathscr{F}|_U$ es libre.
b) $\mathscr{F}$ es localmente libre si y sólo si sus tallos $\mathscr{F}_x$ son $\mathscr{O}_x$-módulos libres para todo $x \in X$.

Prueba.
a) Sea $p \in X$ y suponga que $\mathscr{F}_p$ tiene rango n, consideremos el isomorfismo $\psi_p : \oplus_{i=1}^n \mathscr{O}_{X,p} \to \mathscr{F}_p$ dado por

$$((e_1)_p, ..., (e_n)_p) \mapsto ((s_1)_p, ..., (s_n)_p),$$

por la definición de tallo sabemos que para un abierto $U_i \subset X$, con $p \in U_i$, $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ y así $(s_i)_p \in \mathscr{F}_p$, de esta manera $p \in \cap_{i=1}^n U_i$, entonces existe un abierto afín U en X tal que $p \in U \subset \cap_{i=1}^n U_i$, digamos $U = \text{Spec}A$. Ahora como $\mathscr{F}$ es coherente $\mathscr{F}|_U = \tilde{M}$, con M un A-módulo finitamente generado, note que como U es el total (en Spec$A$),

$$s_i|_U \in \mathscr{F}(U) = \tilde{M}(U) = M,$$

entonces podemos construir el morfismo $\psi_U : \oplus_{i=1}^n \mathscr{O}_{X|U} \to \tilde{M}$ dado por el morfismo de A-módulos $\varphi : \oplus_{i=1}^n A \to M$ tal que $e_i \mapsto s_i|_U$.
Ahora se mostrará que ψ_U es isomorfismo en un abierto V tal que $p \in V \subset U$. Considere la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \ker(\psi_U)_p \to (\oplus_{i=1}^n \mathscr{O}_{X|U})_p \xrightarrow{(\psi_U)_p} \tilde{M}(U)_p \to \text{coker}(\psi_U)_p \to 0,$$

sea ker$\varphi = < y_1, ..., y_m >$ y note que ker$\psi_U = \widetilde{\text{ker}\varphi}$ y que $(\psi_U)_p$ es el isomorfismo ψ_p, por lo tanto $(y_j)_p = 0$, de esta manera sabemos que existe un abierto tal que $p \in W_j \subset U$ y $y_j|_{W_j} = 0$, así ψ_U es inyectivo en $W = \cap W_j$. Similarmente sea coker$\varphi = < z_1, ..., z_t >$ y note que coker$\psi_U = \widetilde{\text{coker}\varphi}$ y que $(z_i)_p = 0$, así existe un abierto tal que $p \in W'_k \subset U$ y $z_k|_{W'_k} = 0$, así φ_U es suprayectivo en $\cap W'_k$, si tomamos a $N = \cap W'_k$ y a $V = W \cap N$, entonces φ_U es isomorfismo en la vecindad abierta V de p.

b) Supongamos que $\mathscr{F}$ es gavilla localmente libre de rango n, entonces existe una cubierta $\{U_i\}$ de X tal que para cada U_i tenemos un isomorfismo

$$\psi_{U_i} : \oplus_{i=1}^n \mathscr{O}_{X|U_i} \to \mathscr{F}_{|U_i}.$$

Sea un punto $p \in U_i$, entonces por propiedades de tallo, del isomorfismo anterior conseguimos un isomorfismo en tallos

$$(\psi_{U_i})_p : \oplus_{i=1}^n (\mathscr{O}_{X|U_i})_p \to (\mathscr{F}_{|U_i})_p,$$

y como $(\mathscr{O}_{X|U_i})_p \cong (\mathscr{O}_X)_p$ y $(\mathscr{F}_{|U_i})_p \cong \mathscr{F}_p$, entonces $\mathscr{F}_p$ es libre, además como cada $p \in X$ esta en algún elemento de la cubierta de X, entonces $\mathscr{F}_p$ es libre para todo $p \in X$.
Recíprocamente, si los tallos $\mathscr{F}_p$ son libres $\forall\ p \in X$, entonces por el inciso **a)**, para cada punto $p \in X$ existe una vecindad U_j de p tal que $\mathscr{F}_{|U_j}$ es libre, entonces existe una cubierta $\{U_j\}$ de X tal que para cada U_j, $\mathscr{F}_{|U_j}$ es libre, por lo tanto $\mathscr{F}$ es localmente libre.$\square$

Corolario 2.3.17 Si X es una variedad sobre k, entonces existe un subconjunto abierto y denso U de X el cual es no singular.

Prueba. Si $n = \dim X$, entonces el campo de funciones $K(X)$ de X tiene grado de trascendencia n sobre k, y esta es una extensión de campo finitamente generada, la cual es una extensión del campo perfecto k, y debido al lema 2.1.26 es separable, note que para cualquier abierto afín $U \subset X$, el campo de funciones de U es $K(U) = K(X)$, tomando $U = \text{Spec}A$ vemos que para algún ideal $I < k[x_1, ..., x_m]$, $A = \frac{k[x_1,...,x_m]}{I} = k[\bar{x_1}, ..., \bar{x_m}]$, así $K(U)$ es igual al campo de cocientes de A, pues por ser A dominio entero, (0) es el punto genérico de U, y $K(U) = A_{(0)}$, así podemos escribir $K(U) = k(\bar{x_1}, ..., \bar{x_m})$, y para alguna base trascendente $\{\bar{y}_i | 1 \leq i \leq n\}$ (la cual tiene n elementos, ver Hartshorne [6,Teorema 3.2 d),p.17]), tenemos $k \subset k(\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n) \subset K(U)$, por tanto por el ejemplo 2.1.16, $K(U)$ es separable sobre $k(\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n)$, por lo

tanto $K(U)$ es separablemente generada. Entonces podemos usar el teorema 2.1.22 para concluir que $\Omega_{K(X)/k}$ es un $K(X)$-espacio vectorial de dimensión n.
Ahora $\Omega_{K(X)/k}$ es justo el tallo de la gavilla $\Omega_{X/k}$ en el punto genérico de X, pues $K(X)$ es el anillo local del punto genérico. De esta manera por la afirmación 2.3.16, $\Omega_{X/k}$ es localmente libre de rango n en alguna vecindad del punto genérico, es decir, sobre un conjunto abierto $U \neq \phi$. Entonces U es no singular por el teorema 2.3.15.□

Proposición 2.3.18 Si A es un anillo local noetheriano con ideal maximal $\mathfrak{m}$ y campo residual k, entonces $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq \dim A$

Prueba.Atiyah-Macdonald[1,cor.11.15,p.121].

Lema 2.3.19 Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas, si $\mathscr{F}$ es una gavilla localmente libre sobre Y, entonces el pull-back $f^*\mathscr{F}$ es localmente libre del mismo rango que $\mathscr{F}$.

Prueba. Supongamos que $\mathscr{F}$ es localmente libre de rango n, entonces Y puede cubrirse con abiertos $\{V_i\}$ tales que

$$\mathscr{F}|_{Vi} \cong \oplus_{i=1}^n \mathscr{O}_{Y|V_i},$$

tomemos a V_i como un abierto afín, digamos $V_i = \mathrm{Spec} B_i$, ahora tomemos una cubierta afín $\{U_j\}$ de $f^{-1}(V_i)$, sea $U_j = \mathrm{Spec} A_j$.
Note que $\mathscr{O}_{Y|V_i} = \tilde{B}_i$, por lo tanto

$$\mathscr{F}|_{V_i} \cong \oplus_{i=1}^n \tilde{B}_i = (\widetilde{\oplus_{i=1}^n B_i}).$$

Ahora veamos a f como una función de $U_j \to V_i$, es decir, $f|_{U_j} : U_j \to V_i$, entonces por la proposición 1.2.6 inciso e) tenemos

$$f^*_{|_{U_j}}(\widetilde{\oplus_{i=1}^n B_i}) = ((\oplus_{i=1}^n B_i) \otimes_{B_i} A_j)\tilde{} = ((B_i \otimes_{B_i} A_j) \oplus \cdots \quad \cdots \oplus (B_i \otimes_{B_i} A_j))\tilde{}$$

$$= (\widetilde{\oplus_{i=1}^n A_j}) = \oplus_{i=1}^n \tilde{A}_j$$

$$= \oplus_{i=1}^n \mathscr{O}_{\mathrm{Spec} A_j} = \oplus_{i=1}^n \mathscr{O}_{U_j} = f^*_{|_{U_j}}(\mathscr{F}|_{V_i}) = (f^*\mathscr{F}|_{V_i})|_{U_j},$$

(la última igualdad se tiene por ser un caso particular de la afirmación 1.1.17) entonces como los $f^{-1}(V_i)$ cubren a X, se sigue que $f^*\mathscr{F}$ es localmente libre en X de rango n.□

Teorema 2.3.20 Sea X una variedad no singular sobre k. Sea $Y \subseteq X$ un subesquema cerrado irreducible definido por una gavilla de ideales $\mathscr{I}$. Entonces Y es no singular si y sólo si
(1) $\Omega_{Y/k}$ es localmente libre, y
(2) la sucesión de la proposición 2.2.6 también es exacta por la izquierda:

$$0 \to \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \to \Omega_{X/k} \otimes_{i^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y \to \Omega_{Y/k} \to 0. \tag{2.19}$$

Además, en este caso, $\mathscr{I}$ es localmente generado por $r = \text{codim}(Y, X)$ elementos, y $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ es una gavilla localmente libre de rango r sobre Y.

Prueba. Primero suponga que (1) y (2) se cumplen. Entonces $\Omega_{Y/k}$ es localmente libre, así por el teorema 2.3.15 sólo es necesario mostrar que el rango $\Omega_{Y/k}$ =dim$Y$.
Sea rango $\Omega_{Y/k} = q$, y se sabe que $\Omega_{X/k}$ es localmente libre de rango n, se mostrará que $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ es localmente libre sobre Y de rango $n - q$.
Considere el morfismo inclusión $i : Y \to X$, el término medio de la sucesión en 2.19 es el pull-back de $\Omega_{X/k}$, esto es,

$$i^*\Omega_{X/k} = \Omega_{X/k} \otimes_{i^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y,$$

la cual por el lema 2.3.19 es una gavilla localmente libre de rango n. Ahora para ver que $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ es localmente libre, veremos que los tallos son libres en todos los puntos de Y, esto implica por la afirmación 2.3.16 que $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ es localmente libre. Sea $p \in Y$, como la sucesión 2.19 es exacta, la sucesión en los tallos

$$0 \to (\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p \to (i^*\Omega_{X/k})_p \to (\Omega_{Y/k})_p \to 0,$$

es exacta. Ahora, como $(\Omega_{Y/k})_p$ es libre, entonces es un módulo proyectivo y se tiene que la sucesión anterior se escinde, esto es

$$(i^*\Omega_{X/k})_p = (\Omega_{Y/k})_p \oplus (\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p, \tag{2.20}$$

también note que $(\mathscr{O}_{Y,p})^n \cong (i^*\Omega_{X/k})_p$, pues $i^*\Omega_{X/k}$ es localmente libre de rango n, y $(\Omega_{Y/k})_p \cong (\mathscr{O}_{Y,p})^q$, entonces tenemos lo siguiente

$$(\mathscr{O}_{Y,p})^n \cong (i^*\Omega_{X/k})_p = (\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p \oplus (\Omega_{Y/k})_p \cong (\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p \oplus (\mathscr{O}_{Y,p})^q, \tag{2.21}$$

queremos usar el lema 2.1.31, así, tensoreando con k, el campo residual de $\mathscr{O}_{X,p}$, tenemos

$$k^n \cong (i^*\Omega_{X/k})_p \otimes_{\mathscr{O}_{X,p}} k = ((\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p \otimes_{\mathscr{O}_{X,p}} k) \oplus ((\Omega_{Y/k})_p \otimes_{\mathscr{O}_{X,p}} k) \cong$$
$$((\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p \otimes_{\mathscr{O}_{X,p}} k) \oplus k^q,$$

$$\text{entonces } ((\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p \otimes_{\mathscr{O}_{X,p}} k) \cong k^{n-q}.$$

Veamos a p como un ideal primo en A, donde Spec$A$ es una vecindad afín de p, entonces $(0) \in p$, y (0) es el punto genérico de Y. Recordando que para un A-módulo M sucede que $M_{(0)} = (M_p)_{(0)}$ (ver Matsumura [10,corolario 4,p.24]).
Para el punto genérico (0), tenemos de 2.20 que

$$(\mathscr{O}_{Y,0})^n \cong (\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_{(0)} \oplus (\mathscr{O}_{Y,0})^q, \tag{2.22}$$

y como las gavillas son coherentes, podemos suponer que

$$\mathscr{O}_{Y,p}\ ,\ (\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p\ ,\ \mathscr{O}_{Y,0} \quad \text{y} \quad (\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_{(0)}$$

son de la forma $M_p, N_p, M_{(0)}$ y $N_{(0)}$, con M, N A-módulos, entonces

$$(\mathscr{O}_{Y,0}) = (\mathscr{O}_{Y,p})_{(0)} \quad \text{y} \quad (\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_{(0)} = ((\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p)_{(0)},$$

así, de 2.22 tenemos que

$$((\mathscr{O}_{Y,p})_{(0)})^n \cong ((\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p)_{(0)} \oplus ((\mathscr{O}_{Y,p})_{(0)})^q,$$

pero localizar respecto al cero es hacer producto tensorial con el campo de funciones $K(X)$, de esta manera

$$(\mathscr{O}_{Y,p} \otimes_{\mathscr{O}_{Y,p}} K(X))^n = K(X)^n \cong ((\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p \otimes_{\mathscr{O}_{Y,p}} K(X)) \oplus K(X)^q$$

$$\text{entonces } ((\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p \otimes_{\mathscr{O}_{Y,p}} K(X)) = K(X)^{n-q},$$

así, por el lema 2.1.31, $(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p$ es libre de rango $n-q$, con lo que $(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)$ es localmente libre sobre Y de rango $n-q$.

Note que $\mathscr{I}_p < \mathscr{O}_{X,p}$ es finitamente generado, pues es ideal de un anillo noetheriano, esto es, $\mathscr{O}_{X,p} \cong A_p$, donde A es un anillo noetheriano por ser una k-álgebra finitamente generada. El ideal maximal m_p de $\mathscr{O}_{X,p}$ es el radical de Jacobson Jac$(\mathscr{O}_{X,p})$ de $\mathscr{O}_{X,p}$, y $\mathscr{I}_p \subset m_p$, de esta manera, usando el lemma de Nakayama, $\mathscr{I}_p$ esta generado por $n-q$ elementos y consecuentemente $\mathscr{I}$ puede ser generado localmente por $n-q$ elementos.

Ahora considere a Y como una de las componentes irreducibles del cerrado $Z(\mathscr{I})$, de esto se sigue que (ver Hartshorne [6,Ex.1.9,p.8])

$$\text{dim}Y \geq n - (n-q) = q. \tag{2.23}$$

Por otro lado, para el punto p, note que k es el campo residual de $\mathscr{O}_{Y,p}$, entonces se tiene por proposición 2.1.23 que

$$\text{dim}_k(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2) = \text{dim}(\Omega_{(\mathscr{O}_{Y,p})/k} \otimes_{\mathscr{O}_{Y,p}} k) = \text{rango}\Omega_{Y/k} = q,$$

pues $(\Omega_{Y/k})_p = \Omega_{\mathscr{O}_{Y,p}/k}$, y $\Omega_{\mathscr{O}_{Y,p}/k} \otimes k \cong (\mathscr{O}_{Y,p})^q \otimes k = k^q$.
Ahora note que $\mathscr{O}_{Y,p}$ es anillo local noetheriano, así, aplicando al anillo local de p la proposición 2.3.18, tenemos que $q = \text{dim}_k(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2) \geq \text{dim}\mathscr{O}_{Y,p} = \text{dim}Y$ entonces por la fórmula 2.23 $q = \text{dim}Y$. Esto muestra que Y es no singular, y al mismo tiempo establece la última parte del teorema, pues viendo a X como esquema entero, afín y de tipo finito sobre k y como Y es cerrado irreducible de X, entonces $\text{codim}(Y,X) = \text{dim}X\text{-dim}Y = n-q$ (debido a Hartshorne [6,teorema 1.8A,p.6]).

Recíprocamente, supongamos que Y es no singular. Entonces por el teorema 2.3.15, $\Omega_{Y/k}$ es localmente libre de rango $q = \text{dim}Y$, de esta manera la parte (1) del teorema se cumple. De la proposición 2.2.6 se tiene la sucesión exacta

$$\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{X/k} \otimes_{i^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y \xrightarrow{\varphi} \Omega_{Y/k} \to 0. \tag{2.24}$$

Vamos a ver que $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ es una gavilla localmente libre de rango $n-q$, para esto será suficiente verificar que $(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p$ es libre $\forall\ p \in Y$.
La sucesión 2.24 induce una sucesión exacta en los tallos

$$(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p \xrightarrow{\delta} (\Omega_{X/k})_p \otimes_{(i^{-1}\mathscr{O}_X)_p} \mathscr{O}_{Y,p} \xrightarrow{\varphi} (\Omega_{Y/k})_p \to 0. \tag{2.25}$$

Por otro lado, $i : Y \hookrightarrow X$ es inmersión cerrada y así $i^{\#}$ es suprayectiva con $\mathscr{I} = \text{ker}(i^{\#})$, entonces en tallos también se induce la sucesión exacta

$$0 \to \mathscr{I}_p \to \mathscr{O}_{X,p} \xrightarrow{\psi'} \mathscr{O}_{Y,p} \to 0, \tag{2.26}$$

más aún, la sucesión 2.25 es la sucesión inducida por la sucesión

$$k \hookrightarrow \mathscr{O}_{X,p} \to \mathscr{O}_{Y,p},$$

según la proposición 2.1.9.
Observación I. Sea m_p el ideal maximal de $\mathscr{O}_{X,p}$, note que m_p se puede generar con $n = \dim X$ elementos, pues p es regular, esto es, $\mathscr{O}_{X,p}$ es regular y así por proposición 2.1.23 $\dim_k(\frac{m_p}{m_p^2}) = \dim\mathscr{O}_{X,p}$, donde $\dim\mathscr{O}_{X,p} = \dim X$, ahora debido al lema de Nakayama, m_p se puede generar con n elementos.

Observación II. Considere la k-derivación natural

$$d : \mathscr{O}_{X,p} \to \Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k}.$$

Si $J < \mathscr{O}_{X,p}$ es un ideal y $R_J = \mathscr{O}_{X,p}/J$, se tiene la siguiente composición de morfismos de anillos

$$k \hookrightarrow \mathscr{O}_{X,p} \xrightarrow{\pi_J} R_J,$$

que induce la sucesión exacta

$$J/J^2 \xrightarrow{\delta'} \Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k} \otimes_{\mathscr{O}_{X,p}} R_J \to \Omega_{R_J/k} \to 0,$$

donde para $\bar{x} \in J/J^2$, $\delta'(\bar{x}) = d(x) \otimes 1$. Ahora, si $J = m_p$, por proposición 2.1.23 tenemos

$$\frac{m_p}{m_p^2} \overset{\delta'}{\cong} \Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k} \otimes_{\mathscr{O}_{X,p}} (\frac{\mathscr{O}_{X,p}}{m_p}) \cong \frac{\Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k}}{m_p\Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k}}.$$

Si m_p/m_p^2 esta generado por $\bar{x_1}, ..., \bar{x_n}$ elementos, entonces $\frac{\Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k}}{m_p\Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k}}$ esta generado por los $\delta'(\bar{x_i}) = d(x_i) \otimes 1, i = 1, .., n$, ahora por el lema de Nakayama, $\Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k}$ esta generado por $dx_1, ..., dx_n$, y como $\Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k}$ es libre de rango n, entonces por Eisenbud [4,corolario 4.4 b)], $\{dx_1, ..., dx_n\}$ forma una base libre de $\Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k}$, de esta manera $\forall\ J < \mathscr{O}_{X,p}$ sucede lo mismo, es decir, $\Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k} \otimes_{\mathscr{O}_{X,p}} R_J$ es libre (como R-módulo) de rango n, y $\{dx_i \otimes 1\}$ es base libre de $\Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k} \otimes_{\mathscr{O}_{X,p}} R_J$.

Observación III. Sea n_p el ideal maximal de $\mathscr{O}_{Y,p}$. Como el homomorfismo $\mathscr{O}_{X,p} \to \mathscr{O}_{Y,p}$ es local, la imagen de m_p en $\mathscr{O}_{Y,p}$ es n_p. Si identificamos a $\mathscr{O}_{Y,p}$ con $\mathscr{O}_{X,p}/\mathscr{I}_p$ en la sucesión 2.26, entonces el ideal maximal de $\mathscr{O}_{Y,p}$ es $m_p/\mathscr{I}_p = n_p$, y tenemos una sucesión exacta

$$0 \to \mathscr{I}_p \to m_p \xrightarrow{\psi} m_p/\mathscr{I}_p \to 0. \tag{2.27}$$

Como p es regular en Y, sabemos que n_p se puede generar por $q =$dim$Y$ elementos $w_1, ..., w_q \in n_p$. Así, se pueden escoger n generadores $\{x_1, ..., x_q, x_{q+1}, ..., x_n\}$ de m_p tales que $\psi(x_i) = w_i, i = 1, ..., q$. Esto es, tensoreando con $k = \mathscr{O}_{X,p}/m_p$, se tiene una suprayección (pues producto tensorial es exacto por la derecha)

$$m_p \otimes (\mathscr{O}_{X,p}/m_p) \xrightarrow{\psi\otimes 1} (m_p/\mathscr{I}_p) \otimes (\mathscr{O}_{X,p}/m_p),$$

pero note que $m_p \otimes (\mathscr{O}_{X,p}/m_p) \cong m_p/m_p^2$ y $(m_p/\mathscr{I}_p) \otimes (\mathscr{O}_{X,p}/m_p) \cong \frac{m_p/\mathscr{I}_p}{(m_p/\mathscr{I}_p)^2}$, donde $\dim_k(m_p/m_p^2) = n$ y $\dim_k \frac{m_p/\mathscr{I}_p}{(m_p/\mathscr{I}_p)^2} = q$, así, hay q preimágenes en (m_p/m_p^2) que van a dar a q generadores en $\frac{m_p/\mathscr{I}_p}{(m_p/\mathscr{I}_p)^2}$.
Específicamente, si $\{\bar{w}_i\}$ es una base de n_p/n_p^2, se pueden tomar $\bar{x}_i \in m_p/m_p^2$ tales que

$$(\psi \otimes 1)(\bar{x}_i) = \bar{w}_i,$$

note que $< \bar{x}_1, ..., \bar{x}_q >$ son linealmente independientes, de esta manera se puede completar una base $\{\bar{x}_1, ..., \bar{x}_q, \bar{x}_{q+1}, ..., \bar{x}_n\}$ de m_p/m_p^2, y por el lema de Nakayama los elementos $\{x_1, ..., x_n\}$ generan a m_p.

Ahora, en la sucesión 2.25, el término medio y derecho son libres y $\delta((\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p) =$ kerφ, entonces tenemos una sucesión exacta

$$0 \to \delta((\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p) \hookrightarrow \Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k} \otimes_{(i^{-1}\mathscr{O}_X)_p} \mathscr{O}_{Y,p} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{\mathscr{O}_{Y,p}/k} \to 0, \qquad (2.28)$$

por lo tanto $\delta((\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p)$ es libre de rango $r = n - q$ (como en la primera parte de la demostración del teorema), de hecho

$$\Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k} \otimes_{(i^{-1}\mathscr{O}_X)_p} \mathscr{O}_{Y,p} \cong \delta((\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p) \oplus \Omega_{\mathscr{O}_{Y,p}/k}.$$

Ahora, sean $\bar{z}_1, ..., \bar{z}_r \in (\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p$ tales que $\{\delta(\bar{z}_i)\}$ son base libre de $\delta((\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p)$.
Si $\mathscr{I}' =< z_1, ..., z_r >$, note que $\mathscr{I}' < \mathscr{I}_p \subset m_p$ y $\{z_1, ..., z_r, x_1, ..., x_q\} \subset m_p$.

Observación IV. Sea φ el morfismo de la sucesión 2.25. Recordemos que φ esta definido por (ver fórmula 2.3)

$$\varphi(d(x_i) \otimes 1) = 1 \cdot d'(\psi'(x_i)),$$

donde $\mathscr{O}_{X,p} \xrightarrow{\psi'} \mathscr{O}_{Y,p}$ y $d' : \mathscr{O}_{Y,p} \to \Omega_{\mathscr{O}_{Y,p}/k}$ es la derivación natural. Entonces como $\{x_1, ..., x_q\}$ van a dar a $\{w_1, ..., w_q\}$ bajo ψ en ecuación 2.27, tenemos que $\varphi(d(x_i) \otimes 1) = d'(w_i)$. Ahora $\mathscr{O}_{Y,p}$ es regular de dimensión q y $w_1, ..., w_q$ generan a n_p, entonces por la observación I, $d'(w_i)$ generan a $\Omega_{\mathscr{O}_{Y,p}/k}$.
Como $\delta(\bar{z}_i), i = 1, ..., r$ generan a $\delta((\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_p)$ y $\varphi(d(x_i) \otimes 1) = d'w_i$ generan a $\Omega_{\mathscr{O}_{Y,p}/k}$, tenemos que $\{dz_1 \otimes 1, ..., dz_r \otimes 1, dx_1 \otimes 1, ..., dx_q \otimes 1\}$ son n elementos que generan a

$$\Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k} \otimes_{i^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{Y,p} \cong \Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k} \otimes_{i^{-1}\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_{X,p}/\mathscr{I}_p) = \Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k}/(\mathscr{I}_p \cdot \Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k}),$$

y por el lema de Nakayama $dx_1, ..., dx_q, dz_1, ..., dz_r$ generan a $\Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k}$. Sea $R = \mathscr{O}_{X,p}/\mathscr{I}'$, la sucesión $k \to \mathscr{O}_{X,p} \to R$ induce una sucesión exacta

$$\mathscr{I}'/\mathscr{I}'^2 \xrightarrow{\delta''} \Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k} \otimes_{\mathscr{O}_{X,p}} R \to \Omega_{R/k} \to 0.$$

Note que $B := \{dz_1 \otimes 1, ..., dz_r \otimes 1, dx_1 \otimes 1, ..., dx_q \otimes 1\}$ forman una base libre de $\Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k} \otimes_{\mathscr{O}_{X,p}} R$ (ver Eisenbud[4,corolario 4.4 b)]) y $\mathscr{I}'/\mathscr{I}'^2 =< \bar{z}_1, ..., \bar{z}_r >$, así $\delta''(\bar{z}_i) = dz_i \otimes 1$, como B es base libre, el módulo generado por los $dz_1 \otimes 1, ..., dz_r \otimes 1$ es libre, y es precisamente $\delta''(\mathscr{I}'/\mathscr{I}'^2)$. Entonces δ'' es inyectivo, pues $\delta''(\sum_{i=1}^r \alpha_i \bar{z}_i) = 0 = \sum_{i=1}^r \alpha_i(dz_i \otimes 1) \Rightarrow \alpha_i = 0$, de esta manera tenemos que la sucesión

$$0 \to \mathscr{I}'/\mathscr{I}'^2 \xrightarrow{\delta''} \Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k} \otimes_{\mathscr{O}_{X,p}} R \to \Omega_{R/k} \to 0 \tag{2.29}$$

es exacta y $\Omega_{R/k}$ es libre de rango q, pues

$$\Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k} \otimes_{\mathscr{O}_{X,p}} R = R\cdot(dx_1 \otimes 1) \oplus, ..., R\cdot(dx_q \otimes 1) \oplus R\cdot(dz_1 \otimes 1) \oplus, ..., R\cdot(dz_r \otimes 1)$$

y $\Omega_{R/k} = \frac{\Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k} \otimes_{\mathscr{O}_{X,p}} R}{\delta''(\mathscr{I}'/\mathscr{I}'^2)}$.

Observación V. Observe que R es anillo local con ideal maximal $m_p/\mathscr{I}'$ y campo residual k. Por proposición 2.1.23 tenemos que

$$q = \dim_k(\Omega_{R/k} \otimes k) = \dim_k \frac{m_p/\mathscr{I}'}{(m_p/\mathscr{I}')^2}.$$

Note también que $q = \dim_k(\Omega_{\mathscr{O}_{Y,p}/k} \otimes k) = \dim_k \frac{m_p/\mathscr{I}_p}{(m_p/\mathscr{I}_p)^2} = \dim_k(n_p/n_p^2)$.

Ahora note que $\frac{m_p/\mathscr{I}'}{(m_p/\mathscr{I}')^2} = \frac{m_p}{(m_p^2+\mathscr{I}')}$ y $\frac{m_p/\mathscr{I}_p}{(m_p/\mathscr{I}_p)^2} = \frac{m_p}{(m_p^2+\mathscr{I}_p)}$. Por lo tanto

$$\dim_k \frac{m_p}{(m_p^2+\mathscr{I}')} = \dim_k \frac{m_p}{(m_p^2+\mathscr{I}_p)}.$$

Finalmente como $\mathscr{I}' \subset \mathscr{I}_p \Rightarrow m_p^2 + \mathscr{I}' \subset m_p^2 + \mathscr{I}_p \subset m_p$. Tomando cociente vemos que $\frac{m_p^2+\mathscr{I}_p}{m_p^2+\mathscr{I}'} \subset \frac{m_p}{m_p^2+\mathscr{I}'}$. De esta manera

$$\dim_k(\tfrac{m_p}{m_p^2+\mathscr{I}'}) = \dim_k(\tfrac{m_p^2+\mathscr{I}_p}{m_p^2+\mathscr{I}'}) + \dim_k(\tfrac{m_p}{m_p^2+\mathscr{I}_p}) \Rightarrow$$
$$\dim_k(\tfrac{m_p^2+\mathscr{I}_p}{m_p^2+\mathscr{I}'}) = 0 \Rightarrow m_p^2 + \mathscr{I}_p = m_p^2 + \mathscr{I}'.$$

Como m_p es finitamente generado y $m_p = \mathrm{Jac}(\mathscr{O}_{Y,p})$ entonces aplicando una versión del lema de Nakayama (Matsumura [9,corolario,p.11]) a la última igualdad, obtenemos que $\mathscr{I}' = \mathscr{I}_p$. Entonces $R = \mathscr{O}_{X,p}/\mathscr{I}_p = \mathscr{O}_{Y,p}$. Por lo tanto de la sucesión 2.29 obtenemos

$$0 \to \mathscr{I}_p/\mathscr{I}_p^2 \xrightarrow{\delta''} \Omega_{\mathscr{O}_{X,p}/k} \otimes_{\mathscr{O}_{X,p}} \mathscr{O}_{Y,p} \to (\Omega_{Y/k})_p \to 0. \tag{2.30}$$

Así, se cumple también la condición (2) del teorema.□

Ahora se aplicarán las ideas anteriores para definir algunos invariantes de variedades no singulares sobre un campo.

Definición 2.3.21 Sea X una variedad no singular sobre k. Se define la ***gavilla tangente*** de X como $\mathscr{T}_X = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Omega_{X/k}, \mathscr{O}_X)$. Esta es una gavilla localmente libre de rango $n = \dim X$. Se define la ***gavilla canónica*** de X como $\omega_X = \wedge^n \Omega_{X/k}$, la n-ésima potencia exterior de la gavilla de diferenciales, donde $n = \dim X$. Esta es una gavilla invertible sobre X. Si X es proyectiva y no singular, se define el ***género geométrico*** de X como $p_g = \dim_k \Gamma(X, \omega_X)$. Este es un entero no negativo.

Ahora se mostrará mediante el siguiente teorema que el género geométrico es un ***invariante birracional*** de una variedad proyectiva no singular.

Teorema 2.3.22 Sean X y X' dos variedades proyectivas no singulares birracionalmente equivalentes sobre k. Entonces $p_g(X) = p_g(X')$.

Prueba. Recordando que si X y X' son birracionalmente equivalentes entonces existen mapeos racionales de X a X' y de X' a X los cuales son inversos el uno del otro. Considere el mapeo racional de X a X', sea $V \subseteq X$ el conjunto abierto más grande para el cual hay un morfismo $f : V \to X'$ que representa a tal mapeo racional. Entonces por la proposición 2.2.5 se tiene un mapeo $f^*\Omega_{X'/k} \xrightarrow{\psi} \Omega_{V/k}$. Estas son gavillas localmente libres del mismo rango n =dim$X$, así, se puede conseguir un mapeo inducido sobre las potencias exteriores: $f^*\omega_{X'} \to \omega_V$, el cual debido a que pull-back conmuta con producto exterior lo podemos escribir como

$$\wedge^n(f^*\Omega_{X'/k}) = f^*(\wedge^n\Omega_{X'/k}) \to \wedge^n\Omega_{V/k},$$

dado por $(r \wedge r \wedge \cdots \wedge r) \mapsto (\psi(r) \wedge \psi(r) \wedge \cdots \wedge \psi(r))$.
Este último mapeo induce un mapeo sobre el espacio de secciones globales $f^* : \Gamma(X', \omega_{X'}) \to \Gamma(V, \omega_V)$.
Ahora debido a que f es birracional, hay un conjunto abierto $U \subseteq V$ tal que $f(U)$ es abierto en X', y f induce un isomorfismo de U a $f(U)$. De esta manera existe un isomorfismo $\Omega_{X/k}|_U \cong \Omega_{X'/k}|_{f(U)}$ el cual induce otro isomorfismo

$$\wedge^n(f^*(\Omega_{X'/k}|_{f(U)})) \cong \wedge^n\Omega_{X/k}|_U,$$

y de esta manera se tiene que $\omega_X|_U \cong \omega_{X'}|_{f(U)}$ vía f, pero $\omega_X|_U = \omega_V|_U$, entonces $\omega_V|_U \cong \omega_{X'}|_{f(U)}$.
Como una sección global no cero de una gavilla invertible no puede ser cero sobre un conjunto abierto denso, se concluye que el mapeo de espacios vectoriales $f^* : \Gamma(X', \omega_{X'}) \to \Gamma(V, \omega_V)$ debe ser inyectivo.

Ahora se comparará $\Gamma(V, \omega_V)$ con $\Gamma(X, \omega_X)$. Primero, se puede probar que $X - V$ tiene codimensión ≥ 2 en X (ver Hartshorne [6,Teorema 4.7,p.101]).
Se puede mostrar que el mapeo restricción natural $\Gamma(X, \omega_X) \to \Gamma(V, \omega_V)$ es biyectivo. Debido a las condiciones de pegamiento de gavillas, es suficiente mostrar que para cada subconjunto abierto afín Spec$A = W \subseteq X$ tal que $\omega_X|_W \cong \mathscr{O}_W$, entonces $\Gamma(W, \mathscr{O}_W) \to \Gamma(W \cap V, \mathscr{O}_{W\cap V})$ es biyectivo.
Como $X \backslash V$ tiene codimensión ≥ 2 en X, entonces $W \backslash V$ tiene codimensión ≥ 2 en W.
Por otro lado, como X es variedad no singular, es normal, así W es normal, esto es, si $p \in W$, A_p es un dominio enteramente cerrado, entonces

$$A = \cap A_p \ \ \forall \ \ p \in \text{Spec}A \text{ tal que ht}(p) = 1, \tag{2.31}$$

(ver Hartshorne [6,Proposición 6.3A,p.132]), donde ht(p) denota la altura de p.
Observación. Note que los primos de altura 1 en $W \cap V$ coinciden con los primos de altura 1 en W, esto se puede verificar estudiando dos casos:
Caso a). Sea $p \in W \backslash V$ y suponga que ht$(p) = 1$. Primero tenemos que

$p \notin W \cap V$, como $W \backslash V$ es cerrado en W, consideramos sus componentes irreducibles $W \backslash V = \cup U_i$, con $p \in U_i$ para alguna i, dado que U_i es irreducible, $\text{codim}(U_i, W) \geq 2$, de esta manera existen subconjuntos irreducibles de W tales que

$$U_i = W_0 < W_1 < W_2 < \cdots, \tag{2.32}$$

donde $p \in W_k$ para todo k. Siendo W afín, podemos escribir $U_i = V(a)$ para algún ideal $a \in A$, para el punto genérico $p_0 \in U_i$ sucede que $\bar{p_0} = U_i = V(a) = V(\sqrt{a}) = V(p_0)$, de esta manera, $p \in V(p_0) \Rightarrow p_0 \subset p$. Ahora por 2.32 tenemos que para elementos $p_j \in W$ existe la cadena

$$V(p_0) \subset V(p_1) \subset V(p_2) \subset \cdots,$$

esto implica que $\cdots \subset \sqrt{p_2} \subset \sqrt{p_1} \subset \sqrt{p_0}$, y asi, $\cdots \subset p_2 \subset p_1 \subset p_0 \subset p$, por lo tanto $\text{ht}(p) \geq 2$, lo cual es una contradicción.
Caso b). Sea $p \notin W \backslash V$ con $\text{ht}(p) = 1$, este caso implica que $p \in W \cap V$.

Ahora, como las reestricciones son inyectivas, tenemos

$$A = \Gamma(W, \mathscr{O}_W) \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \Gamma(W \cap V, \mathscr{O}_{W \cap V}) \overset{\theta}{\hookrightarrow} \mathscr{O}_p = A_p$$

para todo $p \in W \cap V$, entonces $\text{Im}\varphi \subset \cap A_p$ para $p \in W \cap V$, pero para todo p tal que $\text{ht}(p) = 1$, $A = \cap A_p$ por 2.31, y como los primos de altura 1 en $W \cap V$ coinciden con los primos de altura 1 en W por nuestra observación, entonces $\text{Im}\varphi \subset A$.
Combinando los resultados obtenidos, se ve que $p_g(X') \leq p_g(X)$. Por simetría se obtiene también la desigualdad invertida, y de esta manera se concluye que $p_g(X) = p_g(X')$.□

Definición 2.3.23 Sea Y una subvariedad no singular de una variedad no singular X sobre k. A la gavilla localmente libre $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ del teorema 2.3.20 se le llama gavilla ***conormal*** de Y en X. Su dual $\mathscr{N}_{Y/X} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \mathscr{O}_Y)$ es llamada la gavilla ***normal*** de Y en X. Esta es localmente libre de rango $r = \text{codim}(Y, X)$.

Note que si se toma el dual sobre Y de la sucesión exacta de gavillas localmente libres sobre Y dadas en el teorema 2.3.20, entonces se obtiene una sucesión exacta

$$0 \to \mathscr{T}_Y \to \mathscr{T}_X \otimes \mathscr{O}_Y \to \mathscr{N}_{Y/X} \to 0,$$

esto es, debemos aplicar el functor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\_\_, \mathscr{O}_Y)$ a la sucesión 2.19 y obtener por propiedades de Hom la siguiente sucesión que es exacta en el término medio y en el de la derecha

$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \mathscr{O}_Y) \xleftarrow{f} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\Omega_{X/k} \otimes \mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_Y) \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\Omega_{Y/k}, \mathscr{O}_Y) \leftarrow 0,$$

y de hecho se tiene que f es sobre, esto se verifica en los tallos, y se da porque el functor Hom conmuta con sacar tallos y porque la sucesión 2.19 se escinde en los tallos por ser una sucesión de módulos libres.
La gavilla normal que se ha definido corresponde a la noción geométrica usual de vectores normales.

Ejemplo 2.3.24 Sea $X = \mathbf{P}_k^n$, para obtener la gavilla canónica ω_X de $\mathbf{P}_k^n$, consideramos la sucesión exacta de 2.2.9

$$0 \to \Omega_{X/k} \to \mathscr{O}_X(-1)^{n+1} \to \mathscr{O}_X \to 0,$$

entonces por Hartshorne [6,cap II,ejercicio 5.16 d),p.126] tenemos que

$$\wedge^n \Omega_{X/k} \otimes_{\mathscr{O}_X} \wedge^1 \mathscr{O}_X = \wedge^{n+1}(\mathscr{O}_X(-1)^{n+1}),$$

$$\text{entonces } \ \omega_X = \wedge^{n+1}(\mathscr{O}_X(-1)^{n+1}),$$

si denotamos al producto tensorial $(n+1)$-ésimo de $\mathscr{O}_X(-1)$ por $\mathscr{O}_X(-1)^{\otimes^{n+1}}$, entonces haciendo inducción obtenemos

$$\wedge^{n+1}(\mathscr{O}_X(-1)^{n+1}) = \mathscr{O}_X(-1)^{\otimes^{n+1}}.$$

y por Hartshorne[5,corolario 5.18 d),p.121] tenemos que

$$\mathscr{O}_X(-1)^{\otimes^{n+1}} = \mathscr{O}_X(-n-1),$$

de esta manera obtenemos el isomorfismo $\omega_X \cong \mathscr{O}_X(-n-1)$. Como $\mathscr{O}(l)$ no tiene secciones globales para $l < 0$, se encuentra que $p_g(\mathbf{P}_k^n) = 0$ para cada $n \geq 1$. Recordando que una variedad racional esta definida como una variedad birracional a $\mathbf{P}_k^n$ para algún n, se concluye del teorema 2.3.22 que si Z es alguna variedad racional no singular proyectiva, entonces $p_g(Z) = 0$.

Capítulo 3

Morfismos planos y morfismos suaves

3.1. Módulos planos

En esta sección comenzaremos recordando de álgebra conmutativa algunas propiedades de exactitud del producto tensorial, con esto se definirán los módulos planos y algunas de sus características.

Exactitud del producto tensorial

Sea A un anillo con unidad y M, N, P tres A-módulos, se define un mapeo A-lineal entre A-módulos como un homomorfismo de A-módulos. Sea $f : M \times N \to P$ un mapeo A-bilineal. Para cada $x \in M$ el mapeo $y \mapsto f(x, y)$ de N dentro de P es A-lineal, de esta manera f induce un mapeo $M \to$Hom(N, P) el cual es A-lineal debido a que f es lineal en la variable x. Recíprocamente cada A-homomorfismo $\phi : M \to$Hom$_A(N, P)$ define un mapeo bilineal, es decir $(x, y) \mapsto \phi(x)(y)$. De esta manera el conjunto S de mapeos A-bilineales $M \times N \to P$ esta en correspondencia natural uno a uno con Hom(M,Hom(N, P)). Por otro lado, S esta en correspondencia uno a uno con Hom$(M \otimes N, P)$, por la definición de producto tensorial. De esta manera se tiene un isomorfismo canónico

$$\mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P)). \tag{3.1}$$

Proposición 3.1.1 Sea

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

una sucesión exacta de A-módulos y homomorfismos, y sea N algún A-módulo. Entonces la sucesión

$$M' \otimes N \xrightarrow{f\otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g\otimes 1} M'' \otimes N \rightarrow 0$$

(donde 1 denota el mapeo identidad sobre N) es exacta.

Prueba. Sea Q el A-módulo cociente de $M \otimes N$ con respecto a la imagen de $f \otimes 1$, $Q = \frac{M\otimes N}{Im(f\otimes 1)}$, con h el homomorfismo canónico, entonces se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M'\otimes N \arrow[r, "f\otimes 1"] & M\otimes N \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "g\otimes 1"'] & & Q \arrow[r] \arrow[dl, dashed, shift right, "p"'] & 0, \\
& & M''\otimes N \arrow[ur, dashed, shift right, "q"'] & &
\end{tikzcd}$$

con la sucesión superior exacta. Como $(g\otimes 1)(f\otimes 1) = g(f)\otimes 1 = 0$, entonces existe un A-homomorfismo p tal que $p \circ h = g \otimes 1$. Ahora mostraremos que p es un isomorfismo. Sea $(x'', y) \in M'' \times N$ y $x \in M$ tal que $g(x) = x''$. La aplicación $q' : M'' \times N \rightarrow Q$ dada por $q'(x'', y) = h(x \otimes y)$ está bien definida y es bilineal, entonces se tiene el homomorfismo $q : M'' \otimes N \rightarrow Q$, tal que $q(x'' \otimes y) = h(x \otimes y)$.
Así, $pq(x''\otimes y) = ph(x\otimes y) = (g\otimes 1)(x\otimes 1) = g(x)\otimes 1 = x''\otimes 1$, por lo tanto $p \circ q =$Id$_{M''\otimes N}$ y de forma análoga $q \circ p =$Id$_Q$. Por lo tanto p es biyectiva.□

Observación 3.1.2 Sea $T(M) = (M \otimes N)$ y sea $U(P) =$Hom(N, P). Entonces la fórmula 3.1 toma la forma Hom$(T(M), P) =$Hom$(M, U(P))$ para todos los A-módulos M y P. En otra palabras, el functor T es el adjunto izquierdo de U, y U es el adjunto derecho de T.

Observación 3.1.3 No es en general cierto que si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M''$ es una sucesión exacta de A-módulos y homomorfismos, entonces la sucesión $0 \rightarrow M' \otimes N \rightarrow M \otimes N \rightarrow M'' \otimes N$ obtenida al aplicar producto tensorial con un A-módulo arbitrario N sea exacta.

El functor $T_N : M \mapsto M \otimes_A N$ sobre la categoría de A-módulos y homomorfismos no es en general exacto.

Ejemplo 3.1.4 Sea la sucesión exacta de $\mathbb{Z}$-módulos

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0,$$

donde el morfismo inyectivo f esta dado por $f(a) = n \cdot a$, con $n > 0$ fijo, ahora tomemos a $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ y hagamos producto tensorial con el. El homomorfismo

$$f \otimes 1 : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n$$

es cero, pues $(f \otimes 1)(a \otimes b) = f(a) \otimes b = n \cdot a \otimes b = a \otimes \bar{n}b = 0$, por lo tanto la sucesión

$$0 \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \to 0$$

no es exacta por la izquierda.

Definición 3.1.5 Si T_N es exacto, es decir, si al tensorear con el A-módulo N, este transforma sucesiones exactas por izquierda (y por derecha) en sucesiones exactas por izquierda (y por derecha), entonces N se dice que es un A-***módulo plano*** o que N es plano sobre A, equivalentemente, si al tensorear con N se transforman monomorfismos en monomorfismos.

Ejemplo 3.1.6 Los módulos proyectivos y los módulos libres son módulos planos. Como se vió en el ejemplo anterior, el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_n$ no es plano por izquierda.

Lema 3.1.7 Sean N, M dos A-módulos, y sea la suma finita $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in M \otimes N$, si $\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i = 0$ en $M \otimes N$ entonces existe un submódulo M_0 de M finitamente generado tal que $x_1, ..., x_k \in M_0$, y $\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i = 0$ en $M_0 \otimes N$.

Prueba. Como $\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i = 0$ en $M \otimes N$, entonces $\sum_{i=1}^{k}(x_i, y_i)$ está en el submódulo de $M \times N$ generado por las relaciones bilineales, esto es;

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^{t} a_j b_j, \tag{3.2}$$

con b_j una relación bilineal y $a_j \in A$. Sea M_0 el submódulo de M tal que $M_0 =< x_1, ..., x_k > +\{m_1, ..., m_r\}$, donde las m_j son todos los elementos de M que aparecen en la coordenada izquierda en las relaciones bilineales b_j. Entonces $\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i = 0$ en $M_0 \otimes N$, pues la ecuación 3.2 sigue siendo válida en $M_0 \otimes N$.$\square$

Proposición 3.1.8 Las siguientes afirmaciones son equivalentes, para un A-módulo N:
i) N es plano.
ii) Si $0 \to M^{'} \to M \to M^{''} \to 0$ es una sucesión exacta de A-módulos, la sucesión tensoreada $0 \to M^{'} \otimes N \to M \otimes N \to M^{''} \otimes N \to 0$ es exacta.
iii) Si $f : M^{'} \to M$ es inyectiva, entonces $f \otimes 1 : M^{'} \otimes N \to M \otimes N$ es inyectiva.
iv) Si $f : M^{'} \to M$ es inyectiva y $M, M^{'}$ son finitamente generados, entonces $f \otimes 1 : M^{'} \otimes N \to M \otimes N$ es inyectiva.

Prueba.
i) $\Longleftrightarrow$ ii) Se obtiene por definición.
ii)$\Rightarrow$ iii) es claro.
iii)$\Rightarrow$ ii) es clara por proposición 3.1.1.
iii)$\Rightarrow$ iv) es claro.
iv)$\Rightarrow$ iii). Sea $f : M' \to M$ inyectivo, y sea $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in$Ker$(f \otimes 1)$, de esta manera, con $x_i \in M'$ tenemos que $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \otimes y_i = 0$ en $M \otimes N$, tomemos a M_0 como el submódulo finitamente generado de M (igual que en el lema 3.1.7), tal que $f(x_i) \in M_0 \; \forall \; i = 1, ..., n$, así por el mismo lema, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \otimes y_i = 0$ en $M_0 \otimes N$.
Sea M_0' el submódulo de M' generado por $x_1, ..., x_n$, entonces la reestricción de f, $f_0 : M_0' \to M_0$ sigue siendo inyectiva, y como $(f_0 \otimes 1)(u) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \otimes y_i = 0$ en $M_0 \otimes N$, se tiene que $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$ en $M_0' \otimes N$, note que $M_0' \hookrightarrow M'$ induce $M_0' \otimes N \to M' \otimes N$, y la imagen de $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ en $M' \otimes N$ va a dar a cero, por lo tanto $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$ en $M' \otimes N$, y con esto $f \otimes 1$ es inyectiva.$\square$

Definición 3.1.9 Si $A \to B$ es un homomorfismo de anillos, se dice que B es plano sobre A si este es plano como un módulo.

Proposición 3.1.10 (a) Un A-módulo M es plano si y sólo si para cada ideal finitamente generado $\mathfrak{a} \subseteq A$, el mapeo $\mathfrak{a} \otimes M \to M$ es inyectivo.
(b) Extensión de base: Si M es un A-módulo plano, y $A \to B$ es un homomorfismo, entonces $M \otimes_A B$ es un B-módulo plano.
(c) Transitividad: Si B es una A-álgebra plana, y N es un B-módulo plano, entonces N es también plano como un A-módulo.
(d) Localización: M es plano sobre A si y sólo si $M_{\mathfrak{p}}$ es plano sobre $A_{\mathfrak{p}}$ para todo $\mathfrak{p} \in$Spec$A$.
(e) Sea $0 \to M^{'} \to M \to M^{''} \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos. Si $M^{'}$ y $M^{''}$ son ambos planos entonces M es plano; si M y $M^{''}$ son ambos planos,

entonces M' es plano.
(f) Un módulo finitamente generado M sobre un anillo noetheriano local es plano si y sólo si este es libre.

Prueba.Matsumura [9,C.2,S.3]

Ejemplo 3.1.11 Si A es un anillo y $S \subseteq A$ es un sistema multiplicativo, entonces la localización $S^{-1}A$ es una A-álgebra plana. Si $A \to B$ es un homomorfismo de anillos, si M es un B-módulo el cual es plano sobre A, y si S es un sistema multiplicativo en B, entonces $S^{-1}M$ es plano sobre A.

Ejemplo 3.1.12 Sea A un dominio de ideales principales. Entonces un A-módulo M es plano si y sólo si este es libre de torsión. Porsupuesto que se debe ver que para cada ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$, $\mathfrak{a} \otimes M \to M$ es inyectivo. Pero $\mathfrak{a}$ es principal, entonces se dice que es generado por t, esto justamente dice que t no es un divisor de cero en M, es decir: M es libre de torsión.

Ahora daremos un criterio de planitud en términos del functor Tor (ver Proposición 3.1.14), pero antes recordaremos algunas propiedades.

Definición 3.1.13 Sea M un R-módulo. Los functores derivados del functor $M \otimes_R -$ son llamados $\mathrm{Tor}_i^R(M, -)$. El producto tensorial es en si mismo conmutativo en el sentido de que $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$, y esta propiedad se hereda a los Tor_i. Así, Tor_i^R puede ser tomado como un functor de dos variables $\mathrm{Tor}_i^R(-, -)$, se pueden conseguir sucesiones exactas largas de sucesiones exactas cortas en ambas variables.

Propiedades de Tor.
1. Si $\cdots \to F_{i+1} \to F_i \to F_{i-1} \to \cdots \to F_0 \to N \to 0$ es una resolución libre de N como un R-módulo, entonces $\mathrm{Tor}_i^R(M, N)$ es la homología en $M \otimes F_i$ del complejo $M \otimes F_{i+1} \to M \otimes F_i \to M \otimes F_{i-1}$, esto es; es el kernel de $M \otimes F_i \to M \otimes F_{i-1}$ módulo la imagen de $M \otimes F_{i+1} \to M \otimes F_i$.
Esta homología es independiente de la resolución escogida. (Es posible también calcular $\mathrm{Tor}_i^R(M, N)$ tensoreando N con una resolución libre de M).
De lo anterior se deduce que:

a. $\mathrm{Tor}_0^R(M, N) = M \otimes_R N$.

b. Si M o N es libre, entonces $\mathrm{Tor}_i^R(M, N) = 0$ para $i > 0$ (lo mismo es verdad para módulos planos).

c. Si R es noetheriano y M y N son R-módulos finitamente generados, entonces $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$ es un módulo finitamente generado.

d. Si S es una R-álgebra plana (tal como una localización $R[U^{-1}]$), entonces $S \otimes_R \mathrm{Tor}_i^R(M,N) = \mathrm{Tor}_i^S(S \otimes_R M, S \otimes_R N)$.

2. Para cada sucesión exacta corta $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ de R-módulos, y cada R-módulo N, existe una sucesión exacta larga de Tor:

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_i^R(M',N) \to \mathrm{Tor}_i^R(M,N) \to \mathrm{Tor}_i^R(M'',N) \to \cdots$$

$$\to \mathrm{Tor}_1^R(M',N) \to \mathrm{Tor}_1^R(M,N) \to \mathrm{Tor}_1^R(M'',N)$$

$$\to M' \otimes_R N \to M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N \to 0.$$

Proposición 3.1.14 Sea R un anillo y M un R-módulo. Si I es un ideal de R, entonces el mapeo multiplicación $\psi : I \otimes_R M \to M$ es una inyección si y sólo si $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, M) = 0$. Equivalentemente M es plano $\iff$ $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, M) = 0$ para todo ideal finitamente generado $I < R$.

Prueba. Ver D.Eisenbud [4,Proposición 6.1,p.161].

3.2. Morfismos planos

Definición 3.2.1 Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas, y sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Se dice que $\mathscr{F}$ es plano sobre Y en un punto $x \in X$, si el tallo $\mathscr{F}_x$ es un $\mathscr{O}_{y,Y}$-módulo plano, donde $y = f(x)$ y se considera $\mathscr{F}_x$ como un $\mathscr{O}_{y,Y}$-módulo vía el mapeo natural $f^{\#} : \mathscr{O}_{y,Y} \to \mathscr{O}_{x,X}$. Se dice simplemente que $\mathscr{F}$ es plano sobre Y si este es plano en cada punto de X. Se dice que X es plano sobre Y si $\mathscr{O}_X$ lo es, y si esto pasa, entonces f es un ***morfismo plano***.

A continuación presentamos algunas propiedades de morfismos planos.

Proposición 3.2.2 (a) Una inmersión abierta es plana.
(b) Cambio de base: Sea $f : X \to Y$ un morfismo, sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo el cual es plano sobre Y, y sea $g : Y' \to Y$ un morfismo. Sea $X' = X \times_Y Y'$,

sea $f' : X' \to Y'$ la segunda proyección, y sea $\mathscr{F}' = p_1^*(\mathscr{F})$. Entonces $\mathscr{F}'$ es plano sobre Y'.
(c) Transitividad: Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ morfismos. Sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo el cual es plano sobre Y, y asumiendo también que Y es plano sobre Z. Entonces $\mathscr{F}$ es plano sobre Z.
(d) Sea $A \to B$ un homomorfismo de anillos, y sea M un B-módulo. Sea $f : X = \mathrm{Spec}B \to Y = \mathrm{Spec}A$ el correspondiente morfismo de esquemas afines, y sea $\mathscr{F} = \tilde{M}$. Entonces $\mathscr{F}$ es plano sobre Y si y sólo si M es plano sobre A.
(e) Sea X un esquema noetheriano, y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo coherente. Entonces $\mathscr{F}$ es plano sobre X si y sólo si este es $\mathscr{O}_X$-módulo coherente localmente libre. Entonces $\mathscr{F}$ es plano sobre X si y sólo si este es localmente libre.

Prueba.
Aquí sólo incluimos la prueba de a). Todas las demás propiedades se siguen de las propiedades correspondientes de módulos, tomando en cuenta que el functor $\sim$ es compatible con $\otimes$.
a). Sea $f : X \to Y$ una inmersión abierta, entonces $f(X)$ es abierto y f induce un isomorfismo $f : X \to f(X) \subset Y$, sea $V := f(X)$, ahora, el isomorfismo de gavillas $f^\# : \mathscr{O}_V \to f_*\mathscr{O}_X$ induce un isomorfismo en tallos

$$f_p^\# : \mathscr{O}_{V,f(p)} \to \mathscr{O}_{X,p},$$

para todo $p \in X$, por otro lado $\mathscr{O}_{Y,f(p)} = \mathscr{O}_{V,f(p)}$, y de esta manera tenemos que $\mathscr{O}_{Y,f(p)} \cong \mathscr{O}_{X,p}$, así, $\mathscr{O}_{X,p}$ es un $\mathscr{O}_{Y,f(p)}$-módulo y es libre de rango 1, entonces $\mathscr{O}_{X,p}$ es plano, de esto se sigue que X es plano sobre Y y por lo tanto f es un morfismo plano.$\square$

3.3. Morfismos Suaves

La noción de morfismo suave es una versión relativa de variedad no singular sobre un campo. En esta sección se recordará la definición y algunos resultados básicos acerca de morfismos suaves.
Por simplicidad, se asumirá que todos los esquemas en esta sección son de tipo finito sobre un campo k.

Definición 3.3.1 Un morfismo $f : X \to Y$ de esquemas de tipo finito sobre k es ***suave*** de dimensión relativa n si:
(1) f es plano;

(2) si $X' \subseteq X$ y $Y' \subseteq Y$ son componentes irreducibles tales que $f(X') \subseteq Y'$, entonces $\dim X' = \dim Y' + n$;
(3) para cada punto $p \in X$ (cerrado o no),

$$\dim_{k(p)}(\Omega_{X/Y} \otimes_{\mathscr{O}_X} k(p)) = n, \tag{3.3}$$

donde $k(p)$ es el campo residual del anillo local $\mathscr{O}_p$.

Ejemplo 3.3.2 Si X es entero, entonces la condición (3) de la Definición 3.3.1 es equivalente a decir que $\Omega_{X/Y}$ es localmente libre sobre X de rango n.

Prueba. Tomemos $p \in X$ y sean abiertos afines $U = \mathrm{Spec}B$ en Y y $V = \mathrm{Spec}A$ en X tales que $f(p) \in U$ y $V \subset f^{-1}(U)$. Primero note que tomando el tallo en $\Omega_{X/Y}$ tenemos que

$$(\Omega_{X/Y})_p = (\Omega_{X/Y}|_V)_p = (\widetilde{\Omega_{A/B}})_p = \Omega_{A/B,p} = \Omega_{A_p/B} = \Omega_{A_p/B_{f(p)}},$$

la última igualdad se tiene verificando que el término izquierdo de la sucesión

$$\Omega_{B_{f(p)}/B} \otimes_{B_{f(p)}} A_p \to \Omega_{A_p/B} \to \Omega_{A_p/B_{f(p)}} \to 0,$$

la cual es inducida por la sucesión $B \to B_{f(p)} \to A_p$, es cero.
Ahora por la ecuación 3.3 tenemos que en tallos

$$\dim_{k(p)}(\Omega_{A_p/B} \otimes_{\mathscr{O}_{X,p}} A_p/(pA_p)) = n,$$

Note que $(\Omega_{X/Y})_p$ es finitamente generado por ser $\Omega_{X/Y}$ coherente, la coherencia de $\Omega_{X/Y}$ se da por ser f de tipo finito y X, Y esquemas noetherianos (ver observación 2.2.2).
Queremos usar el lema 2.1.31 y obtener que $\Omega_{A_p/B}$ es libre de rango n.
Sea $K(A_p)$ el campo de fracciones del anillo local A_p, y como $K(A_p) = (A_p)_0 = A_0$, entonces $K(A_p) = K(A)$, siempre tenemos que

$$\dim_{k(p)}(\Omega_{A_p/B} \otimes_{\mathscr{O}_{X,p}} k(p)) = n,$$

ahora si consideramos el punto genérico $q = 0$, $K(A_q) = K(A)$, es decir, $\mathscr{O}_{X,q} = K(X) = K(A)$, así

$$\dim_{K(A)}(\Omega_{K(A)/B} \otimes_{K(A)} K(A)) = n.$$

Ahora

$$\Omega_{A_p/B} \otimes_{A_p} K(A_p) = \Omega_{A_p/B} \otimes_{A_p} (A_p)_0 = (\Omega_{A_p/B})_0 = \Omega_{A_0/B} =$$
$$\Omega_{A_0/B} \otimes_{K(A)} K(A) = \Omega_{K(A)/B} \otimes_{K(A)} K(A),$$

por lo tanto $\dim_{K(A_p)}(\Omega_{A_p/B} \otimes_{A_p} K(A_p)) = n$.
De esta manera se cumplen las condiciones del lema 2.1.31, por lo tanto $\Omega_{A_p/B}$ es libre de rango n y por la afirmación 2.3.16 b) tenemos que $\Omega_{X/Y}$ es localmente libre de rango n.□

Definición 3.3.3 Si Y es un esquema, se define el ***n-espacio proyectivo sobre*** Y, denotado por $\mathbf{P}^n_Y$ como $\mathbf{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}} Y$ y donde $\mathbf{P}^n_{\mathbb{Z}}$ =Proj$\mathbb{Z}[x_0, ..., x_n]$.

Ejemplo 3.3.4 Para cada Y, $\mathbf{A}^n_Y$ y $\mathbf{P}^n_Y$ son suaves de dimensión relativa n sobre Y.

Prueba. Se mostrará solamente el caso A^n_Y con Y entero, recordemos que

$$A^n_Y = \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n] \times_{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}} Y,$$

entonces debemos mostrar que la segunda proyección del producto fibrado $\pi_2 : A^n_Y \to Y$ es suave de dimensión relativa n:
(1). Primero veamos que π_2 es plano. Para esto usaremos la proposición 3.2.2 inciso b), es decir debemos verificar que se cumplen las hipótesis y así obtener que π_2 es plano, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & A^n_Y \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n] \arrow[dr, "g"'] & & Y, \arrow[dl, "g'"] \\ & \mathrm{Spec}\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

en general para gavillas estructurales sucede que si $f : X \to Y$ es morfismo de esquemas, entonces $f^*\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X$, pues $f^*\mathscr{O}_Y = f^{-1}\mathscr{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X$, así, sólo debemos verificar que sea cierta la hipótesis de que g es plano.
Sea $p \in \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]$, tenemos el morfismo inducido en tallos por $g^\#$

$$g^\#_p : \mathscr{O}_{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}, g(p)} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[x_1,...,x_n],p},$$

el cual coincide con $h : \mathbb{Z}_{g(p)} \to \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]_p$, se verificará que $\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]_p$ es plano sobre $\mathbb{Z}_{g(p)}$.
Sean $R := \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n], R_T := R[T^{-1}] = R_p$ con $T = R\backslash p$, y note que si

$S=\mathbb{Z}\backslash g(p)$, sucede que $\mathbb{Z}\backslash g(p)=R\backslash p\cap\mathbb{Z}\subset R\backslash p$, entonces $S\subset T$.
Si T' es la imagen de T en $R_S:=R[S^{-1}]$, tenemos que $R_T=(R_S)_{T'}$ (ver Matsumura [10,Corolario 3,p.24]), y como todo elemento $s\in T'$ no está en $pR_S\subset R_S$, esto es $s\in R_S\backslash(pR_S)$, entonces se tiene un homomorfismo $(R_S)_{T'}\to(R_S)_{pR_S}$, y se puede checar que es un isomorfismo, de esta manera

$$R_p=(R_S)_{pR_S},$$

ahora $R_S=\mathbb{Z}_{g(p)}[x_1,...,x_n]$, entonces R_S es libre sobre $\mathbb{Z}_{g(p)}$ y por lo tanto plano, de esta manera, considerando un morfismo inyectivo de $\mathbb{Z}_{g(p)}$-módulos $M\to N$, tenemos que $M\otimes_{\mathbb{Z}_{g(p)}}R_S\to N\otimes_{\mathbb{Z}_{g(p)}}R_S$ es inyectivo.
Ahora como $(R_S)_{pR_S}$ es plano sobre R_S tenemos que

$$M\otimes_{\mathbb{Z}_{g(p)}}(R_S\otimes_{R_S}(R_S)_{pR_S})\to N\otimes_{\mathbb{Z}_{g(p)}}(R_S\otimes_{R_S}(R_S)_{pR_S})$$

es inyectivo, por lo tanto

$$M\otimes_{\mathbb{Z}_{g(p)}}R_p\to N\otimes_{\mathbb{Z}_{g(p)}}R_p$$

es inyectivo, así R_p es plano, entonces g es plano como se quería.
(2). Como Y es entero, Y es irreducible y por lo tanto es su única componente irreducible. Ahora, A^n_Y es entero, y por lo tanto irreducible, también es su única componente irreducible, de hecho para el abierto afín $U=\mathrm{Spec}B\subset Y$, tenemos que

$$\pi_2^{-1}(U)=\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[x_1,...,x_n]\times_{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}}\mathrm{Spec}B=\mathrm{Spec}B[x_1,...,x_n]\subset A^n_Y,$$

y por lo tanto

$$\dim(A^n_Y)=\dim(\pi_2^{-1}(U))=\dim B[x_1,...,x_n]=\dim B+n,$$

la última igualdad se tiene por Eisenbud [4,Corolario 10.13 b),p.239], ahora note que $\dim Y=\dim U=\dim B$, pues para un punto $p\in U$ el anillo local $\mathscr{O}_p$ es $\mathscr{O}_p=B_p$, y en este caso $\dim\mathscr{O}_p=\dim U$ (ver Hartshorne [6,teorema 3.2,p.17]), así se ha mostrado la condición (2) para las componentes irreducibles A^n_Y, Y de A^n_Y y Y respectivamente.
(3). Por el ejemplo 3.3.2 debemos mostrar que $\Omega_{A^n_Y/Y}$ es localmente libre de rango n, pues A^n_Y es entero.
Hemos visto por el ejemplo 2.2.8 que $\Omega_{A^n_Y/Y}$ es $\mathscr{O}_{A^n_Y}$-módulo libre de rango n, entonces por el morfismo inducido en tallos tenemos que $(\Omega_{A^n_Y/Y})_p$ es un $(\mathscr{O}_{A^n_Y,p})$-módulo libre para todo $p\in A^n_Y$, como consecuencia tenemos que $\Omega_{A^n_Y/Y}$ es localmente libre de rango n.□

Ejemplo 3.3.5 Si $Y = \text{Spec}(k)$ y k es algebraicamente cerrado, entonces X es suave sobre k si y sólo si X es regular de dimensión n. En particular, si X es irreducible y separado sobre k, entonces este es suave si y sólo si este es una variedad no singular.

Proposición 3.3.6 (a) Una inmersión abierta es suave de dimensión relativa 0.
(b) Cambio de base: Si $f : X \to Y$ es suave de dimensión relativa n, y $g : Y' \to Y$ es algún morfismo, entonces el morfismo $f' : X' \to Y'$ obtenido por extensión de base es también suave de dimensión relativa n.
(c) Composición. Si $f : X \to Y$ es suave de dimensión relativa n, y $g : Y \to Z$ es suave de dimensión relativa m, entonces $g \circ f : X \to Z$ es suave de dimensión relativa $n + m$.
(d) Producto. Si X y Y son suaves sobre Z, de dimensión relativa n y m respectivamente, entonces $X \times_Z Y$ es suave sobre Z de dimensión relativa $n + m$.

Prueba. Sólo mostraremos los incisos a) y b), para lo demás incisos ver Harshorne [6,Proposición 10.1,p.268].

(a). (1).Por la proposición 3.2.2, una inmersión abierta es plana.
(2). Sea $f : X \to Y$ inmersión abierta, entonces se induce el isomorfismo $f : X \to f(X) \subset Y$, con $f(X)$ subesquema abierto de Y, sean $X' \subseteq X, Y' \subseteq Y$ componentes irreducibles tales que $f(X') \subseteq Y'$, note que $f(X') \subseteq Y' \cap f(X)$ el cual es un abierto de Y', así $\dim f(X')=\dim Y'$, además $\dim(X) = \dim f(X)$ y $f(X') \subseteq f(X)$, así $\dim(X') = \dim f(X')$, por lo tanto $\dim(X')\text{-}\dim(Y') = 0$.
(3). Sea $x \in X$ y tomemos un abierto afín $\text{Spec}B = U \subset X$ tal que $p \in U$, sea $V = f(U)$, como f es inmersión abierta V es abierto e isomorfo a U, entonces $f(p) \in V$ y $U = f^{-1}(V)$, además como $V = \text{Spec}B$, entonces $\Omega_{X/Y}|_U = \widetilde{\Omega_{B/B}} = 0$, así, en tallos $\dim_{k(p)}(\Omega_{X/Y}|_U)_p \otimes_{\mathscr{O}_p} k(p)) = 0$, y como

$$\Omega_{X/Y} \otimes_{\mathscr{O}_X} k(p) = \Omega_{X_p/Y} \otimes_{\mathscr{O}_{X,p}} k(p),$$

entonces $\dim_{k(p)}(\Omega_{X/Y} \otimes_{\mathscr{O}_X} k(p)) = 0.\square$
(b). (1). f' es plano por Proposición 3.1.8.
(2). La prueba de esta condición sólo se hará para abiertos irreducibles.
Sean X_0, Y_0 y Y_0' abiertos irreducibles de X, Y y Y' respectivamente, entonces podemos considerar el producto fibrado

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X_0' := X_0 \times_{Y_0} Y_0' \arrow[dl] \arrow[dr, "f_0'"] & \\ X_0 \arrow[dr, "f_0"'] & & Y_0'. \arrow[dl, "g_0"] \\ & Y_0 & \end{tikzcd}$$

Entonces la condición (2) en la Definición 3.3.1 es equivalente a decir que cada componente irreducible de cada fibra $(X_0)_{y_0}$ (donde $y_0 \in Y_0$) de f_0 tiene dimensión n por Hartshorne [6,Corolario 9.6,p.257]). Se mostrará que tal condición es preservada bajo extensión de base.
Observe que si $y_0 \in U$, donde U es un abierto afín de Y_0, tenemos los morfismos $\mathscr{O}(U) \to \mathscr{O}_{y_0} \to k(y_0)$, pero como $U = \mathrm{Spec}\mathscr{O}(U)$, podemos obtener siempre el morfismo de $\mathrm{Spec}(k(y_0)) \to Y_0$.
También note que si $y_0 = g_0(y_0')$ tenemos que el morfismo de anillos locales

$$\mathscr{O}_{Y_0,y_0} \to \mathscr{O}_{Y_0',y_0'} \text{ induce una extensión de campos } \ k(y_0) \to k(y_0').$$

Ahora, usando la observación 1.1.26 tenemos que

$$(X_0')_{y_0'} = X_0' \times_{Y_0'} \mathrm{Spec}(k(y_0')) = (X_0 \times_{Y_0} Y_0') \times_{Y_0'} \mathrm{Spec}(k(y_0'))$$

$$= X_0 \times_{Y_0} \mathrm{Spec}(k(y_0')) = (X_0 \times_{Y_0} k(y_0)) \times_{k(y_0)} k(y_0') = (X_0)_{y_0} \times_{k(y_0)} k(y_0'),$$

y como cada componente irreducible de $(X_0)_{y_0}$ tiene dimensión n (esto es la condición (2) de suavidad para f_0 y usando Hartshorne [6,Corolario 9.6,p.257]), entonces cada componente irreducible de $(X_0')_{y_0'}$ también (por Hartshorne [6,Ejercicio 3.20 f),p.95]).
(3).Finalmente se mostrará que $\Omega_{X/Y}$ es estable bajo extensión de base, y por lo tanto el número $\dim_{k(x)}(\Omega_{X/Y} \otimes k(x))$ también es estable, como consecuencia $\dim_{k(x')}(\Omega_{X'/Y'} \otimes k(x')) = n$ y se concluye que f' es suave.
Primero note que dado $x \in X$ entonces

$$\Omega_{X/Y} \otimes_{\mathscr{O}_X} k(x) = (\Omega_{X/Y})_x \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} k(x),$$

esto muestra que debemos fijarnos en los tallos, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X' := X \times_Y Y' \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "f'"] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & Y', \arrow[dl, "g"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

por la proposición 2.2.4 tenemos que $\Omega_{X'/Y'} = \pi^*(\Omega_{X/Y})$, entonces para un punto $x' \in X', (\Omega_{X'/Y'})_{x'} = (\pi^*(\Omega_{X/Y}))_{x'}$, por definición

$$(\pi^*(\Omega_{X/Y}))_{x'} = (\pi^{-1}\Omega_{X/Y} \otimes_{\pi^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{X'})_{x'} = (\pi^{-1}\Omega_{X/Y})_{x'} \otimes_{(\pi^{-1}\mathscr{O}_X)_{x'}} \mathscr{O}_{X',x'}$$
$$= (\Omega_{X/Y})_{\pi(x')} \otimes_{\mathscr{O}_{X,\pi(x')}} \mathscr{O}_{X',x'},$$

por otro lado, el morfismo de anillos locales induce la extensión de campos $k(\pi(x')) \to k(x')$, ahora tomando el producto tensorial con $k(x')$ tenemos

$$(\Omega_{X'/Y'})_{x'} \otimes_{\mathscr{O}_{X',x'}} k(x') = (\Omega_{X/Y,\pi(x')} \otimes_{\mathscr{O}_{X,\pi(x')}} \mathscr{O}_{X',x'}) \otimes_{\mathscr{O}_{X',x'}} k(x') =$$
$$\Omega_{X/Y,\pi(x')} \otimes_{\mathscr{O}_{X,\pi(x')}} k(x') = \Omega_{X/Y,\pi(x')} \otimes_{\mathscr{O}_{X,\pi(x')}} (k(\pi(x')) \otimes_{k(\pi(x'))} k(x'))$$
$$= (\Omega_{X/Y,\pi(x')} \otimes_{\mathscr{O}_{X,\pi(x')}} k(\pi(x'))) \otimes_{k(\pi(x'))} k(x')$$
$$\cong (k(\pi(x')))^n \otimes_{k(\pi(x'))} k(x') \cong (k(x'))^n,$$

por lo tanto $\dim_{k(x')}(\Omega_{X'/Y'} \otimes k(x')) = n$, que era lo que se quería.□

Enseguida se revisará cuándo un morfismo de variedades no singulares es suave. Recordando que para un punto x en un esquema X se define el espacio tangente Zariski T_x como el dual del $k(x)$-espacio vectorial $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Si $f : X \to Y$ es un morfismo, y $y = f(x)$, entonces existe un mapeo natural inducido sobre los espacios tangentes

$$T_f : T_x \to T_y \otimes_{k(y)} k(x). \tag{3.4}$$

Proposición 3.3.7 Sea $f : X \to Y$ sobre un campo algebraicamente cerrado k. Sea $n = \dim X - \dim Y$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:
(i) f es suave de dimensión relativa n;
(ii) $\Omega_{X/Y}$ es localmente libre de rango n sobre X;
(iii) para cada punto cerrado $x \in X$, el mapeo inducido sobre los espacios tangentes Zariski $T_f : T_x \to T_y$ es suprayectivo.

Prueba. Ver Hartshorne [6,proposición 10.4,p.270].
Ahora se revisará un resultado especial acerca de suavidad el cual vale sólo en característica cero.

Lema 3.3.8 Sea $f : X \to Y$ un morfismo dominante de esquemas enteros de tipo finito sobre un campo algebraicamente cerrado de característica 0. Entonces existe un conjunto abierto no vacío $U \subseteq X$ tal que $f : U \to Y$ es suave.

Prueba. Ver Hartshorne [6,lema 10.5,p.271].

Capítulo 4

Hessianos que se anulan

4.1. Hessianos

En esta sección se estudiarán algunos resultados sobre los Hessianos de polinomios. Usando la teoría del capítulo 3, esto es, la Proposición 3.3.7 y el lema 3.3.8 se probará el teorema 4.1.1, que trata sobre relaciones polinomiales que cumplen polinomios homogeneos. Como consecuencia directa de este resultado, se presenta un teorema donde se analizan condiciones para que el Hessiano de una forma no se anule, también se presentan algunos ejemplos de Hessianos que si se anulan.

Teorema 4.1.1 Sean $F_0, ..., F_n$ polinomios homogeneos sobre un campo algebraicamente cerrado de característica 0, donde $F_i \in k[x_0, ..., x_n]$, considere el mapeo

$$\psi = (F_0, ..., F_n) : \mathbb{A}_k^{n+1} \to \mathbb{A}_k^{n+1}, \tag{4.1}$$

si el determinante de la matriz jacobiana de ψ es cero, $\det J(\psi) = 0$, entonces existe un polinomio homogéneo $P \in k[y_0, ..., y_n]$ tal que

$$P(F_0, ..., F_n) = 0. \tag{4.2}$$

Prueba. Tomemos el mapeo $\psi = (F_0, ..., F_n) : \mathbb{A}_k^{n+1} \to \mathbb{A}_k^{n+1}$. Por el lema 3.3.8, vemos que si el $\det J(\psi) = 0$, entonces ψ no puede ser dominante, pues si ψ fuera dominante, habría un conjunto abierto Zariski no vacío $U \in \mathbb{A}_k^{n+1}$ tal que $\psi : U \to \mathbb{A}_k^{n+1}$ sería suave, entonces por proposición 3.3.7, para cada $p \in U$, el mapeo inducido sobre los espacios tangentes Zariski

$$T_p(\psi) : T_p(\mathbb{A}_k^{n+1}) \to T_{\psi(p)}(\mathbb{A}_k^{n+1})$$

sería suprayectivo, y por tanto un isomorfismo. Esto último significaría que el determinante de la matriz jacobiana de ψ no se hace cero en p, contradiciendo la hipótesis de que $\det J(\psi) = 0$.
Ahora, debido a que ψ no es dominante, la cerradura de la imagen de ψ esta contenida en alguna hipersuperficie. De esta manera, existe algún

$$P \in k[y_0, ..., y_n] \text{ tal que } P(F_0, ..., F_n) = 0.$$

Debido a que los F_i son homogeneos del mismo grado, se puede asumir que P es también homogéneo.□

Ejemplo 4.1.2 a). Sea $f_1 = x_0^2 x_2 + x_0 x_1 x_3 + x_1^2 x_4 + x_0^3 + x_1^3 \in k[x_0, ..., x_4]$. Entonces el determinante hessiano de f_1 es $H_{f_1} = 0$, pues su matriz hessiana es:

$$\mathbf{M}_{H_{f_1}} = \begin{pmatrix} 2x_2 + 6x_0 & x_3 & 2x_0 & x_1 & 0 \\ x_3 & 2x_4 + 6x_1 & 0 & x_0 & 2x_1 \\ 2x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si denotamos las derivadas parciales como $F_j := \frac{\partial f_1}{\partial x_j}$ tenemos un mapeo $\psi_1 : k^5 \to k^5$ dado por

$$\psi_1(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = (F_0, F_1, F_2, F_3, F_4) =$$

$$(2x_2x_0 + x_1x_3 + 3x_0^2, x_0x_3 + 2x_4x_1 + 3x_1^2, x_0^2, x_0x_1, x_1^2),$$

cuya matriz jacobiana $J(\psi_1)$ coincide con $\mathbf{M}_{H_{f_1}}$.
Además por el teorema 4.1.1 sabemos que existe un polinomio $P1 \in k[y_0, ..., y_4]$ que anula las parciales $(F_0, F_1, F_2, F_3, F_4)$, en este caso, un polinomio homogéneo de segundo grado que anula a ψ_1 es:

$$P1(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_2y_4 - y_3^2).$$

b). Sea $f_2 = x_0^2 x_2 + x_0 x_1 x_3 + x_1^2 x_4 + x_0^3 + x_1^3 + x_5^3 \in k[x_0, ..., x_5]$. Entonces el determinante hessiano de f_2 es $H_{f_2} = 0$, pues su matriz hessiana es:

$$\mathbf{M}_{H_{f_2}} = \begin{pmatrix} 2x_2 + 6x_0 & x_3 & 2x_0 & x_1 & 0 & 0 \\ x_3 & 2x_4 + 6x_1 & 0 & x_0 & 2x_1 & 0 \\ 2x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6x_5 \end{pmatrix},$$

denotando las derivadas parciales como $F_j := \frac{\partial f_2}{\partial x_j}$ tenemos el mapeo $\psi_2 : k^6 \to k^6$,

$$\psi_2(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5) =$$

$$(2x_2x_0 + x_1x_3 + 3x_0^2, x_0x_3 + 2x_4x_1 + 3x_1^2, x_0^2, x_0x_1, x_1^2, 3x_5^2),$$

cuya matriz jacobiana $J(\psi_2)$ coincide con $\mathbf{M}_{H_{f_2}}$.
El polinomio $P2 \in k[y_0, ..., y_5]$ que anula las parciales $(F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$ es:

$$P1(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_2y_4 - y_3^2).$$

c). Sea $f_3 = x_0^2x_2 + x_0x_1x_3 + x_1^2x_4 + x_0^3 + x_1^3 + x_5^3 - x_0x_1x_2 \in k[x_0, ..., x_5]$. Entonces el determinante hessiano de f_3 es $H_{f_3} = 0$, pues su matriz hessiana es:

$$\mathbf{M}_{H_{f_3}} = \begin{pmatrix} 2x_2 + 6x_0 & x_3 - x_2 & 2x_0 - x_1 & x_1 & 0 & 0 \\ x_3 - x_2 & 2x_4 + 6x_1 & -x_0 & x_0 & 2x_1 & 0 \\ 2x_0 - x_1 & -x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6x_5 \end{pmatrix},$$

nuevamente denotando las parciales por $F_j := \frac{\partial f_3}{\partial x_j}$ tenemos el mapeo $\psi_3 : k^6 \to k^6$,

$$\psi_3(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5) =$$

$$(2x_2x_0 + x_1x_3 + 3x_0^2 - x_1x_2, x_0x_3 + 2x_4x_1 + 3x_1^2 - x_0x_2, x_0^2 - x_0x_1, x_0x_1, x_1^2, 3x_5^2),$$

cuya matriz jacobiana $J(\psi_3)$ coincide con $\mathbf{M}_{H_{f_3}}$.

Teorema 4.1.3 *(Euler).* Sea $P(y_0, ..., y_n)$ un polinomio homogéneo no cero de grado m en $n+1$ variables $y_0, ..., y_n$, si P_i es la derivada de P con respecto a y_i entonces

$$\sum_{i=0}^{n} y_iP_i = mP.$$

Prueba. La demostración de este teorema es sencilla, pero podemos bosquejarla como sigue.
Tomamos el caso cuando P es un polinomio con un solo término en $n+1$ variables y de grado m, entonces derivándolo es claro que se cumple la afirmación, luego podemos extender el resultado por inducción para cuando P tiene r términos. $\square$
Ahora presentamos un criterio para la no anulación de un hessiano. Para ver otros criterios y un metodo para encontrar ejemplos de polinomios cuyos hessianos se anulan ver Ciliberto[3].

Teorema 4.1.4 El hessiano de una forma no singular (que corresponde a una variedad proyectiva) de grado $d \geq 2$ en $n+1$ variables no se hace cero.

Prueba. Sea F una forma no singular de grado $d \geq 2$ en $x_0, ..., x_n$ variables. Para $0 \leq i \leq n$, denotamos con F_i a la derivada parcial de F con respecto a x_i. Debido a que las F_i son homogeneas de grado $d-1$, ellas son las coordenadas de un mapeo homogéneo de $\mathbb{C}^{n+1}$ en si mismo. Si el hessiano de F se hace cero, entonces por el teorema 4.1.1, hay una relación polinomial entre las parciales de F. Sea $P(y_0, ..., y_n)$ un polinomio homogéneo no cero de grado mínimo en $n+1$ variables $y_0, ..., y_n$ tal que

$$P(F_0, ..., F_n) = 0.$$

Para $0 \leq i \leq n$, denotemos por P_i la derivada de P con respecto a y_i y definamos π_i como

$$\pi_i = P_i(F_0, ..., F_n).$$

Si m es el grado de P, entonces por el teorema 4.1.3 tenemos

$$\sum_{i=0}^{n} y_i P_i = mP. \tag{4.3}$$

Debido a que P fue elegido de grado mínimo, para algún i se tiene que $\pi_i \neq 0$. Reemplazando la variable y_i por F_i en la ecuación 4.3, para $0 \leq i \leq n$ se tiene

$$0 = mP(F_0, ..., F_n) = \sum_{i=0}^{n} F_i \cdot P_i(F_0, ..., F_n) = \sum_{i=0}^{n} F_i \pi_i. \tag{4.4}$$

Ahora, denotando por D al operador

$$D = \sum_{i=0}^{n} \pi_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

entonces podemos escribir $DF = 0$. Se dice que un polinomio o una función racional anulada por D es D-***constante***, de esta manera F es D-constante. Ahora, si tomamos la derivada con respecto a x_j de la relación $P(F_0, ..., .F_n) = 0$, se sigue que F_j es también D-constante, esto es, usando la ecuación 4.4 tenemos que

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_j} P(F_0, ..., F_n) = \sum_{i=0}^{n} \pi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_j},$$

y como las F_i son continuas, la expresión anterior es igual a

$$\sum_{i=0}^{n} \pi_i \frac{\partial F_j}{\partial x_i},$$

de esta manera $DF_j = 0$. Debido a que F tiene grado $d \geq 2$ y por la ecuación 4.3

$$(d-1)F_j(\pi_0, ..., \pi_n) = \sum_{i=0}^{n} \pi_i \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = DF_j = 0$$

y como los π_i no son simultaneamente 0, de esto se sigue que los polinomios F_j tienen un cero común, de esto F es singular y por lo tanto hay una contradicción, por lo tanto si F es no singular, su hessiano no se anula. $\square$

Bibliografía

[1] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald *Introduction to commutative Algebra.* Addison-Wesley, Great Britain, (1969).

[2] N. Bourbaki, *Algebre Commutative*, Eléments de Math. $27, 28, 30, 31$ Hermann, Paris (1961-1965).

[3] C. Ciliberto, F. Russo and A. Simis, *Homaloidal hypersurfaces and hypersurfaces with vanishing Hessian*, Advances in Mathematics 218(2008) 1759-1805, (2008).

[4] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, (1995).

[5] A. Grothendieck and J. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique*, I, Grundlehren 166, Springer-Verlag, Heidelberg.

[6] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, New York, (1977).

[7] George R. Kempf *Algebraic Varieties.* Cambrigde University Press, Cambrigde, (1993).

[8] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, New York, (1969).

[9] H. Matsumura, *Conmutative Algebra.* W. A. Benjamin Co., New York, (1970).

[10] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambrigde University Press, Cambrigde, (1986).

[11] Kenji Ueno, *Algebraic Geometry 1: From Algebraic Varieties to Schemes.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (1999).

[12] Kenji Ueno, *Algebraic Geometry 2: Sheaves and cohomology.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (2001).

[13] Kenji Ueno, *Algebraic Geometry 3: Further Study of Schemes.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (2003).

[14] F. Zaldívar, *Teoría de Galois*, Editorial Anthropos, Barcelona, (1996).

Índice alfabético