



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

Investigación del origen del enredamiento
cuántico desde la perspectiva de la
Electrodinámica Estocástica Lineal

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTORA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

ANDREA VALDÉS HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS: Dr. Luis de la Peña Auerbach

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: Dr. Germinal Cocho Gil

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: Dr. Jaime Avendaño López



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

Abril de 2010



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Laura Hernández Sadurní y a Cuauhtémoc Valdés Olmedo,
por todo aquello que origina nuestro enredamiento.

Agradecimientos

Un maestro que enseña a su alumno a cuestionar y a explorar terrenos que parecen fértiles sin miedo a que sean poco transitados, es un maestro excepcional, y el alumno uno privilegiado. Muchas gracias a Luis de la Peña por ser este maestro, y por su invaluable amistad.

Agradezco a los miembros de mi Comité Tutorial, Jaime Avendaño y Germinal Cocho, por su permanente apoyo y su interés en perseguir una visión más amplia de la física.

Jaime Avendaño, José Luis del Río, Manuel Fernández, José Antonio García, Rocío Jaúregui y Pier A. Mello merecen mi especial gratitud por su labor como sinodales y por sus aportaciones como críticos lectores de la tesis. Agradezco especialmente a Pier A. Mello el interés y cuidado que puso en la revisión del trabajo, que fueron fundamentales en la versión final.

Un sentido agradecimiento a Ana María Cetto quien, por encima de la distancia, fue siempre un apoyo constante y sobre todo parte importante de este trabajo. A ella le debo y agradezco también la cesión temporal de su cubículo, lo que me brindó el privilegio de contar con un bonito espacio de trabajo en el Instituto de Física.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología el apoyo económico brindado durante mis estudios de posgrado. Igualmente extendiendo mi gratitud al Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal, por la beca otorgada durante la etapa final de mi investigación.

Esta tesis no sería tal si en otros tiempos Miguel Alcubierre, Rocío Jaúregui, José Luis Jiménez y Genaro Toledo no hubiesen aprobado el proyecto. Doy las gracias a cada uno de ellos por sus comentarios y observaciones sobre aquel primer trabajo.

Mi agradecimiento a todos mis profesores del posgrado, y a todos aquellos que sin serlo fungieron como tales.

A la Coordinación del Posgrado en Ciencias Físicas de la UNAM, especialmente a Manuel Torres y a Yanalté Herrero les doy las gracias por su permanente apoyo.

Mi gratitud para María Luisa Araujo, Lizette Ramírez y Martha Tinoco por la buena disposición que mostraron siempre que les pedí ayuda.

Agradezco a todos en el 10o piso del Instituto de Física por su cálida compañía. Todo mi cariño para “los niños”: Alejandro, Eduardo, Gabriel y Moicés (con c) por haberme consentido todos estos años; y mi agradecimiento al interdisciplinario grupo de las divas: Karen, Lorea, Lorena y Natalia, por los espectáculos que damos cuando tocan crepas.

Con mucho cariño le agradezco a Angel que, entre la arquitectura y las fotos, comparta conmigo sus disertaciones cuánticas.

Al abuelo, a las Hernández, a la Moctezuma y a la Jayme les agradezco por estar siempre ahí, por las chorchas y por las rebatingas.

He reservado para el final mi más profundo agradecimiento a la Universidad Nacional Autónoma de México, por el privilegio de ser acogida en sus aulas y formada en su seno. ¡Goooooya!

Resumen

Esta tesis tiene como principal objetivo avanzar hacia una mejor comprensión del fenómeno de entrelazamiento, dentro de un contexto que amplía nuestra visión general del fenómeno cuántico.

Actualmente el enredamiento ocupa un lugar central en la investigación en física, y la mayoría de los estudios sobre el tema se vuelcan hacia sus muy amplios e importantes usos. Pero más allá de ser un recurso de revolucionarias aplicaciones tecnológicas, el enredamiento —quizá el fenómeno cuántico por antonomasia— debe verse también como un recurso esencial en el camino hacia una mejor comprensión de nuestras teorías físicas. En este sentido no debemos perder de vista que ciertos aspectos del entrelazamiento son hoy un arcano tan profundo como lo fueron hace tres cuartos de siglo para sus primeros investigadores.

Frente a esta perspectiva la presente tesis busca abrir un paréntesis en la vertiginosa investigación dirigida a las aplicaciones del enredamiento, para ahondar en algunos de los mecanismos físicos que le dan origen y que han escapado al formalismo de la mecánica cuántica. Semejante labor se lleva a cabo dentro de un marco teórico exterior al de la descripción cuántica usual, toda vez que la inagotable discusión — larga ya por más de 80 años — alrededor de la interpretación de la mecánica cuántica ha dejado claro que para comprender el sentido de su formalismo es preciso mirarla desde una atalaya que proporcione una mirada más amplia. La tesis se desarrolla entonces bajo los preceptos de la *Electrodinámica Estocástica Lineal* (EDEL), teoría que busca proveernos de una formulación fundamental de la mecánica cuántica y que ha alcanzado importantes resultados para problemas de una sola partícula. Así, para alcanzar su propósito este trabajo aborda el problema de generalizar la EDEL a sistemas bipartitas, no sin antes precisar y profundizar en la teoría de una sola partícula.

El primer capítulo tiene por objeto mostrar que la existencia de un campo fluctuante de radiación de punto cero —entendido éste como un campo clásico en todos sus aspectos salvo porque su energía (atérmica) por modo de frecuencia ω es

$\mathcal{E}_0 \sim \omega$ — es suficiente para dotar al campo total de sus propiedades cuánticas una vez que se ha alcanzado un estado de equilibrio termodinámico. En particular, se muestra que un valor no nulo de \mathcal{E}_0 conduce *necesariamente* a la ley de Planck, al tiempo que las fluctuaciones atérmicas dan origen a inevitables fluctuaciones que pueden identificarse con las cuánticas.

El resultado de que el carácter discreto del campo surge inevitablemente por la presencia de su componente de punto cero abre paso al tema central del capítulo dos: estudiar los efectos del campo fluctuante de radiación (con contribución de punto cero) sobre una partícula, una vez que el sistema completo ha alcanzado el equilibrio. Se desarrolla ahí una versión revisada y precisada del núcleo de la EDEL, y se muestra que tras una serie de demandas (como la ergódica) y aproximaciones (como la no radiativa) la teoría establece contacto con el formalismo matricial de la mecánica cuántica. A lo largo de las derivaciones se revelan los elementos y mecanismos físicos que en última instancia proveen al sistema mecánico de sus propiedades cuánticas —a saber: el campo de fondo, el comportamiento ergódico y la respuesta resonante del sistema mecánico a un conjunto específico de frecuencias del campo— si bien ellos quedan ocultos para la descripción cuántica usual.

La transición a sistemas bipartitas se realiza en el capítulo tres, donde se estudia el caso de partículas entre las que no existe potencial de interacción alguno, pero que se hallan inmersas en un campo de fondo común. Se encuentra que siempre que las partículas comparten una misma frecuencia de resonancia aparecen correlaciones entre sus movimientos que son inducidas vía el campo de fondo. Cuando la descripción se reduce a una en términos de vectores de estado en un espacio de Hilbert apropiado, los estados enredados surgen en forma natural como los únicos que permiten reproducir tales correlaciones. Más aún, al restringir el estudio a sistemas de partículas iguales ocurre que el enredamiento es máximo y está descrito por estados de máxima (anti) simetría. Con estos resultados la EDEL revela el mecanismo y origen físico —ambos ajenos a la descripción cuántica usual— del enredamiento entre partículas no interactuantes y el principio cuántico de simetrización.

La conclusión general que se desprende de estos tres capítulos es que el fenómeno cuántico puede entenderse como la manifestación última de un intrincado proceso de interacción entre la materia y un campo fluctuante de radiación de punto cero. La cuantización no es entonces una propiedad intrínseca de la naturaleza sino una propiedad *emergente* (y estadística) del sistema campo-materia; observación que de suyo abre nuevos caminos de exploración física. Un breve análisis sobre estas conclusiones y sus repercusiones en nuestra comprensión del fenómeno cuántico, particularmente del enredamiento, es material del cuarto y último capítulo.

Summary

The main aim of the present thesis is to achieve a better understanding of the phenomenon of entanglement, within a context that broadens our general view of quantum phenomena.

Currently, entanglement holds a central place in physical research, and most studies on the subject turn to its very extensive and important applications. However, beyond being a resource of revolutionary technological applications, entanglement — perhaps the quantum phenomenon par excellence — should also be regarded as a key resource in the search for a better understanding of our physical theories. In this sense we must not forget that certain aspects of entanglement are as elusive today as they were three quarters of a century ago for its pioneer researchers.

In response to this situation, the thesis seeks to open a parenthesis in the rapidly increasing research focused in the applications of entanglement, to delve into some of the physical mechanisms that give rise to it but have been unattainable for the quantum formalism. Such task is carried out within a theoretical framework that stands outside the usual quantum description, mainly because the endless discussion —going on for more than 80 years— about the interpretation of quantum mechanics has made it clear that in order to grasp the essence of its formalism it is necessary to look at it from a wider perspective. The thesis is thus developed under the precepts of *Linear Stochastic Electrodynamics* (LSED), a theory that seeks to provide a fundamental formulation of quantum mechanics and has achieved significant results regarding one-particle problems. Thus, in order to attain its purpose this work addresses the task of generalizing LSED so as to include bipartite systems, only after going deeper into the one-particle theory.

The first chapter aims to show that the existence of a stochastic zero-point radiation field —classical in all respects except that its (non thermal) energy per mode of frequency ω is $\mathcal{E}_0 \sim \omega$ — is enough to endow the total field with its quantum properties once thermodynamic equilibrium has been attained. In particular, it is shown that a nonzero value of \mathcal{E}_0 leads *necessarily* to Planck's law, while ather-

mal fluctuations give rise to inevitable fluctuations that can be identified with the quantum ones.

The fact that the discreet properties of the field emerge as inevitable in the presence of the fluctuating zero-point energy leads naturally to the central theme of chapter two: the study of the effects of the fluctuating radiation field (with zero-point contribution) on a single particle, once the complete system has reached a state of dynamic equilibrium. A revised and refined version of the core of LSED is presented, and it is shown that after a series of demands (such as the ergodic one) and approximations (such as the radiationless one) the theory makes contact with the matrix formalism of quantum mechanics. Throughout the derivations the elements and physical mechanisms that ultimately endow the mechanical system with its quantum properties are revealed — namely the background field, the ergodic behavior and the resonant response of the mechanical system to a specific set of frequencies of the field — even though they remain hidden for the usual quantum description.

The transition to bipartite systems is made in chapter three. There we study the case of particles that do not interact by means of any interaction potential, but are embedded in a common background field. It is found that whenever the particles share one resonance frequency correlations arise between their motions, these being induced via the background field. When the description is reduced to one in terms of state vectors of an appropriate Hilbert space, the entangled states emerge naturally as the only ones that can reproduce such correlations. Moreover, in the case of systems of identical particles it happens that the entanglement is maximum and must be described by totally (anti) symmetric states. With these results LSED reveals the physical mechanism and origin — both of them foreign to the usual quantum description — of the entanglement between non-interacting particles and the quantum symmetrization postulate.

The general conclusion that ensues from these three chapters is that the quantum phenomenon can be understood as the ultimate manifestation of an intricate interaction process between matter and a fluctuating zero-point radiation field. Quantization is therefore not an intrinsic property of nature but an *emergent* (and statistical) property of the matter-field system, an observation that opens up new exploration roads to physics. A brief analysis of these conclusions and their repercussions in our understanding of the quantum phenomena, particularly of entanglement, is the material of the fourth and final chapter.

Índice general

Introducción	1
1. La ley de Planck, notable e inevitable consecuencia del campo de punto cero	6
1.1. Relaciones termo-estadísticas del oscilador armónico	8
1.1.1. Surgimiento de la energía de punto cero	8
1.1.2. La distribución termodinámica	10
1.1.3. Propiedades generales de la distribución $W_g(\mathcal{E})$	12
1.2. La energía media de los osciladores en equilibrio	13
1.2.1. Determinación de $\sigma_{\mathcal{E}}^2(U)$	13
1.2.2. La energía media	17
1.2.3. Comentario sobre las fluctuaciones de la energía de punto cero	18
1.3. Planck, Einstein y la energía de punto cero	19
1.3.1. El análisis de Planck. La cuantización como mecanismo de intercambio de energía	19
1.3.2. El análisis de Einstein. La concepción del fotón	20
1.4. Surgimiento del campo de punto cero	22
1.5. Continuo <i>versus</i> discreto	23
1.5.1. La función de partición	24
1.5.2. El origen de la discretización	25
1.6. Una distribución de probabilidad cuántica	27
1.6.1. Fluctuaciones independientes de la temperatura	27
1.6.2. Fluctuaciones cuánticas y la energía de punto cero	30
2. La mecánica cuántica como una propiedad emergente de la interacción campo-materia	34
2.1. Introducción del campo de punto cero en la dinámica del sistema mecánico	36

2.1.1.	Introducción del campo estocástico de fondo	36
2.1.2.	Estacionariedad	38
2.2.	Soluciones resonantes en el régimen estacionario	40
2.2.1.	Respuesta resonante	40
2.2.2.	La familia de soluciones estacionarias	42
2.2.3.	Ecuación detallada de movimiento	45
2.3.	El principio de ergodicidad	47
2.4.	Implicaciones del principio ergódico en las variables del campo	52
2.4.1.	Un caso particular: el cuadrado	53
2.4.2.	El caso general: la regla de la cadena	54
2.5.	Implicaciones del principio ergódico en la dinámica del sistema mecánico	56
2.5.1.	Regla matricial	56
2.5.2.	Mecánica matricial	58
2.6.	Régimen no radiativo: estableciendo contacto con la mecánica cuántica	61
2.6.1.	Regla de conmutación para \hat{x} y \hat{p} : recuperando la \hbar del campo	63
2.6.2.	La ecuación de Heisenberg y la regla de transición de Bohr . . .	66
2.6.3.	La descripción en el espacio de Hilbert	68
2.7.	La naturaleza estadística de la descripción cuántica	73
2.7.1.	Reflexión sobre las variables físicas y su representación matricial	75
3.	Sistemas de dos partículas: el campo enredador	78
3.1.	El campo en la vecindad de las partículas	79
3.2.	Soluciones en el régimen estacionario	81
3.2.1.	Las ecuaciones de movimiento	81
3.2.2.	Soluciones estacionarias	82
3.3.	La variable estocástica común	84
3.3.1.	Definición y propiedades de la variable estocástica común . . .	85
3.4.	Régimen no radiativo: estableciendo contacto con el espacio producto .	87
3.5.	Correlación como resultado de la existencia de frecuencias relevantes comunes	91
3.5.1.	Descomposición espectral	91
3.5.2.	Desarrollo de estado <i>vs</i> desarrollo de energía	92
3.5.3.	Correlación entre las partículas	95
3.5.4.	Implicaciones del principio ergódico	98
3.6.	Vectores de estado. Superposición y enredamiento	100
3.6.1.	Factor de enredamiento: remanente del campo en la descripción cuántica	104

3.7. Sistemas de partículas iguales	105
3.7.1. Enredamiento intrínseco	105
3.7.2. Estados totalmente simétricos y antisimétricos	109
3.7.3. Incursiones preliminares sobre la separación de equilibrio	113
4. Reflexiones finales	116
4.1. En busca de una mejor comprensión del fenómeno cuántico	116
4.2. La existencia del campo fluctuante de punto cero	118
4.2.1. Surgimiento del campo <i>fluctuante</i> de punto cero	119
4.2.2. Realidad física del campo	119
4.3. La <i>emergencia</i> del fenómeno cuántico	121
4.3.1. La cuantización como una propiedad adquirida en la interacción campo-materia	121
4.3.2. El fenómeno cuántico: una propiedad emergente	122
4.4. La física detrás del fenómeno cuántico	123
4.4.1. Las herencias del campo en la mecánica cuántica	123
4.4.2. Implicaciones del principio ergódico en la descripción de las variables dinámicas	124
4.4.3. La respuesta resonante como mecanismo de cuantización	125
4.5. Desenredando el entrelazamiento	127
4.5.1. ¿Qué entrelaza a las partículas?	127
4.5.2. Naturaleza estadística del enredamiento	129
4.5.3. El inevitable enredamiento de las partículas iguales	130
4.5.4. ¿Simetría o antisimetría?	132
4.6. Perspectivas a futuro	133
A. Espectro del oscilador armónico a partir de las frecuencias de re- sonancia	135
B. Determinación de $(x^2)_\alpha$. La regla de la cadena	139
C. Derivación alterna del conmutador $[\hat{x}, \hat{p}]$	145
D. Determinación de las amplitudes \tilde{x}_{iAB} en el régimen no radiativo	147
Referencias	150

Introducción

Los enredos del entrelazamiento cuántico cumplen ya 75 años. El bien conocido artículo de Einstein, Podolsky y Rosen (EPR)^[1] en 1935 pone al descubierto la forma tan peculiar que tiene la mecánica cuántica de describir sistemas compuestos, toda vez que con frecuencia requiere para ello del enredamiento entre sus partes. El trabajo EPR marcó un hito en el debate sobre la propia naturaleza de la descripción cuántica y condujo a Schrödinger a ver en los estados enredados no *uno* sino *el* rasgo característico de la mecánica cuántica, aquel que marca su completo desvío respecto de toda noción clásica.^[2] El interés en los estados entrelazados no disminuiría desde entonces pero fue transformándose,¹ y de enfocarse en las discusiones interpretativas de la mecánica cuántica se dirigió hacia las nuevas perspectivas que ofrecían sus potenciales aplicaciones tecnológicas.^[8, 9] En el vertiginoso desarrollo de la información cuántica se ha impulsado toda una serie de investigaciones en las que el entrelazamiento juega el papel central; no obstante, a pesar de que el enredamiento ha sido controlado, cuantificado y analizado, algunos aspectos de su significado físico permanecen tan ocultos como lo estaban hace tres cuartos de siglo.²

La causa física del enredamiento entre diversas partículas que han interactuado mutuamente se halla precisamente en su interacción, si bien tal entrelazamiento desafía las nociones clásicas de localidad y separabilidad, como lo señalaran EPR. Sin embargo, el caso es más dramático cuando observamos que de acuerdo con el formalismo de la mecánica cuántica, los estados que describen un sistema conformado por partículas iguales son estados de máximo enredamiento (estados totalmente (anti)simétricos) aún cuando no exista interacción alguna entre ellas. De este enredamiento se desprende la inevitable existencia de correlaciones entre los diversos

¹En las refs. [3, 4] se muestran y discuten los trabajos ya clásicos de Bell que dieron inicio a la extensa serie de estudios referentes al enredamiento, hace poco más de 40 años. Por otro lado, los artículos de revisión [5]-[7] son clara muestra del amplio trabajo que se ha realizado en los últimos años alrededor del tema.

²Debemos señalar que las principales investigaciones en el marco de la información cuántica involucran enredamiento entre fotones y no entre partículas, que será el tipo de entrelazamiento que nos ocupa en este trabajo. Sin embargo, esta diferencia no es relevante para lo que aquí se dice.

componentes del sistema; no obstante, al no considerar interacción alguna entre ellos y no ofrecer un mecanismo físico que conduzca a su entrelazamiento, la mecánica cuántica postula que en un sistema de partículas iguales éstas se correlacionan *por el sólo hecho* de ser iguales, es decir, se correlacionan sin causa *física* aparente.³ Así, la mecánica cuántica, que lleva en el enredamiento su marca más distintiva, no identifica el elemento crucial que lo produce y que es precisamente aquel que enreda a las partículas.

¿Cuál es entonces la física detrás del enredamiento de dos partículas no interactuantes?, ¿cuál es el lazo que las entrelaza? Queda claro de la discusión anterior que la respuesta debe buscarse fuera de la teoría cuántica. De hecho, han sido este tipo de dificultades para encontrar en la propia mecánica cuántica los elementos necesarios que permitan entender muchos de sus resultados, lo que ha conducido a la construcción de teorías que, viendo en la mecánica cuántica una descripción incompleta del mundo físico, buscan enriquecerla dotándola de procesos físicos subyacentes. Una de estas teorías es la *Electrodinámica Estocástica Lineal* (EDEL), y será precisamente bajo los preceptos de ésta que abordaremos el problema de responder a las interrogantes que hemos planteado.

El principio rector de la EDEL se remonta a 1916, cuando Nernst^[10] intuyó que el *campo fluctuante de radiación de punto cero (o de vacío)* era una entidad física real capaz de darle salida al problema de la estabilidad de la materia —problema central para el surgimiento de la teoría cuántica temprana— proponiendo una condición de balance entre la potencia media radiada por el electrón atómico y la potencia media que éste absorbe del campo de punto cero presente, mecanismo con el que se logra evitar el inminente colapso del átomo.⁴ La propuesta de Nernst, aunada al interés por solventar las dificultades interpretativas y conceptuales de la mecánica cuántica, condujo años más tarde al desarrollo de teorías que buscan explicar el comportamiento cuántico de la materia desde una perspectiva fundamental y en la que el campo de vacío juega un papel de extrema importancia.⁵ Nació entonces la *Electrodinámica*

³En estas líneas, y a lo largo de toda la tesis, hablaremos de la mecánica cuántica (o de la descripción cuántica) entendiendo por esto la descripción cuántica no relativista y desprovista de espín. En ella, la simetrización del estado (o equivalentemente de la función de onda) que describe al sistema compuesto se toma frecuentemente como un postulado (en todo caso los argumentos que se emplean para su justificación no están libres de dificultades, como se explica en el capítulo 4). Es dentro de la teoría cuántica de campos que se deriva el teorema espín-estadística, o bien se determinan las reglas de conmutación para campos bosónicos o fermiónicos, de donde se deriva la total (anti)simetría mencionada. Sin embargo, tampoco aquí se encuentran elementos físicos que *expliquen* el origen físico de dicho resultado.

⁴El mecanismo de estabilidad propuesto por Nernst adquiere hoy más relevancia en tanto que ha sido verificado recientemente mediante simulaciones numéricas, como se comenta al inicio del capítulo 2.

⁵Los esfuerzos por construir teorías que establezcan un conjunto de elementos y principios físicos

Estocástica (EDE), teoría pionera que logró recuperar con éxito muchas de las predicciones cuánticas; sin embargo, con el tiempo quedó claro que los métodos (más no así los principios) de la EDE circunscribían su capacidad predictiva, conduciéndola a resultados equivocados cuando abordaba problemas no lineales. Habiendo fallado en proveer una correcta descripción del fenómeno cuántico en general, el enfoque de la EDE tuvo que ser abandonado, y una nueva teoría, la EDEL, surgió como la alternativa para seguir avanzando hacia el objetivo de su antecesora.⁶ Así, la EDEL comparte con la EDE el principio rector de que el campo fluctuante de radiación de punto cero es capaz de producir efectos significativos sobre la materia —tanto así que se le entiende como la entidad física que está a la base del fenómeno cuántico— pero difiere esencialmente de ella en sus particulares hipótesis y procedimientos.⁷ Si bien ello le ha permitido a la EDEL superar y solventar las dificultades de la EDE, la teoría se ha restringido a estudiar sistemas de una sola partícula, razón por la que la posibilidad de ahondar en el fenómeno cuántico, específicamente en el origen del enredamiento, está fuera de su alcance.

Llegamos así al objetivo principal de esta tesis: extender la EDEL a sistemas de dos partículas y explorar el mecanismo físico que da origen a su enredamiento.

que permitan derivar, interpretar y entender lo que el formalismo cuántico dice acerca de la naturaleza, han dejado de verse como un problema casi propio de la filosofía para convertirse en uno de gran interés físico actual. Como se ha señalado, por ejemplo en las refs. [11]-[13], el hecho de que la física apunte hacia una formulación unificada que conjunte la teoría cuántica y la relativista, requiere que los principios de la mecánica cuántica sean revisados a fondo, con el fin de que las teorías futuras no hereden sus dificultades. La importancia de ahondar en las bases del formalismo cuántico ha sido también señalada por la revista *Science* ubicando a la pregunta *¿Existen principios más profundos que subyacen a la incertidumbre cuántica y a la no localidad? (Do Deeper Principles Underlie Quantum Uncertainty and Nonlocality?)* entre las 25 más importantes que debe atender la física contemporánea.^[14, 15]

⁶Claramente la EDEL lleva en su nombre la teoría que le dio origen. La razón del término *lineal* será aclarada más adelante (capítulo 2) pero por lo pronto debemos dejar claro que dicho término *no* debe entenderse como una limitación de la teoría para tratar únicamente problemas lineales (como sí ocurre con la EDE). Una presentación detallada de los métodos y resultados alcanzados por la EDE, así como la primera versión de la EDEL, pueden verse en la ref. [16].

⁷Que el campo de vacío produce efectos sobre la materia es un hecho bien conocido; muestra de ello es que permite entender, dentro de la electrodinámica cuántica, diversos fenómenos a nivel atómico (e incluso macroscópico) muchos de los cuales carecen de explicación si se prescindie de la noción de un campo fluctuante de punto cero. El efecto Casimir y las fuerzas de van der Waals son ejemplos de fenómenos que se consideran usualmente causados por el campo de vacío, y cuando este último se conjuga con la reacción de radiación es posible entender otros como el corrimiento Lamb, el coeficiente de emisión espontánea de Einstein, la relación giromagnética, el diamagnetismo, etcétera.^{[16],[17]} No obstante, si bien las fluctuaciones del campo de vacío constituyen un componente de primera importancia dentro de la electrodinámica cuántica, existe una diferencia esencial entre el enfoque tradicional y el presente, que reside en el hecho de que el primero entiende al campo de punto cero como consecuencia de la cuantización, mientras que desde la perspectiva que aquí se adopta el campo de vacío es uno no cuantizado, cuyos efectos sobre la materia dan lugar precisamente al propio comportamiento cuántico.

Emprender este proyecto requiere, como primer paso, asentar las bases mismas de la teoría, y es por ello que el campo de vacío (o los osciladores que lo componen) ocupa un lugar central en el capítulo 1. Ahí se discute el problema que vio nacer a la mecánica cuántica, el problema del cuerpo negro, desde una perspectiva que difiere drásticamente de los tratamientos usuales y que muestra que la sola existencia del campo de radiación de punto cero es *suficiente* para alcanzar la ley de Planck. La hipótesis cuántica es entonces prescindible, y las propiedades corpusculares del campo surgen como propiedades adquiridas en respuesta a la presencia de su nueva contribución de punto cero.⁸ Más aún, la naturaleza fluctuante del campo de vacío introduce fluctuaciones atérmicas en el sistema, lo que conduce finalmente a entender las manifestaciones cuánticas de los osciladores de radiación como un reflejo de la presencia real del campo de punto cero.

Las repercusiones —ya no sobre el propio campo sino ahora sobre la materia— de un campo fluctuante que posee una contribución de vacío son analizadas en el capítulo 2, donde se presenta el corazón mismo de la EDEL en una versión revisada y precisada que se muestra aquí por vez primera. La teoría dirige su atención a construir las leyes dinámicas que describen a un ensemble de partículas inmersas en el campo de fondo, toda vez que se demanda que el sistema satisfaga un principio ergódico, hipótesis que adquiere suma relevancia en la EDEL. Si bien se observa que en el régimen estacionario y ergódico el sistema adquiere ya sus propiedades cuánticas, no es sino hasta que el campo es eliminado de la descripción —una vez que se toma el límite no radiativo— que la teoría establece contacto con el formalismo matricial de la mecánica cuántica.⁹ A lo largo de sus derivaciones, la EDEL logra identificar los mecanismos que llevan al sistema mecánico a adquirir sus propiedades cuánticas y que, como resultado de las aproximaciones, han quedado ocultos para la descripción usual. La conclusión es clara: la cuantización de la materia puede entenderse como un resultado emergente de su interacción con un campo fluctuante de radiación que posee una contribución de punto cero.

En el capítulo 3 se aborda el problema de estudiar sistemas bipartitas en los que no existe un potencial externo de interacción entre las partículas. El punto central ahí estriba en reconocer y construir la descripción apropiada del campo de fondo *común* en el que las partículas se encuentran inmersas, pues es a partir de la existencia de este campo que se hace posible entender cómo pueden correlacionarse

⁸De hecho, son las propiedades discretas de *cualquier* oscilador armónico unidimensional las que emergen como resultado de la existencia de una energía de punto cero.

⁹Antes de efectuar la aproximación no radiativa la descripción resultante corresponde a la de la electrodinámica cuántica (no relativista y sin variables de espín).

dos subsistemas que no interactúan directamente. Aquí también la EDEL arroja resultados físicamente transparentes, señalando la correlación del campo en las vecindades de cada una de las partículas como la causa de correlaciones entre ellas. Cuando la descripción se reduce a una en términos de vectores de estado (estableciendo contacto con el formalismo de la mecánica cuántica) se encuentra que los únicos estados que reproducen dichas correlaciones son precisamente los estados enredados. Más aún, cuando ambas partículas son iguales el enredamiento es máximo y los estados son totalmente (anti) simétricos.

Finalmente, el cuarto y último capítulo tiene como propósito discutir el conjunto de resultados obtenidos a lo largo de la tesis y construir la visión unificada que se desprende de ellos.

Del intrincado proceso de interacción entre los sistemas materiales y el campo de fondo, la EDEL logra extraer el formalismo de la mecánica cuántica al tiempo que revela algunos de los elementos físicos que le abren paso al fenómeno cuántico. Los presentes resultados, aunados al reconocimiento de la espléndida capacidad predictiva de la mecánica cuántica, invitan a profundizar en estos estudios con el afán de desentrañar eso que la mecánica cuántica intenta decirnos, y abrir paso a los nuevos horizontes que de ello emerjan.

Capítulo 1

La ley de Planck, notable e inevitable consecuencia del campo de punto cero

Paradigma de la linealidad, el oscilador armónico constituye uno de los sistemas físicos más simples, pero a la vez de mayor interés. En particular, fue fundamental en un momento crítico en la historia de la física que culminó con el nacimiento del concepto de cuanto. El espectro de la radiación de cuerpo negro en equilibrio a cierta temperatura representa, como es bien sabido, el ocaso de la noción clásica de continuidad ocurrido hace poco más de un siglo. El problema, sin embargo, hubiera parecido sencillo de resolver; el campo de radiación está compuesto de una colección de osciladores de todas las frecuencias, mientras que las paredes de las cavidades pueden ser modeladas como un conjunto de osciladores materiales.¹ Resulta entonces irónico que un sistema compuesto en última instancia de osciladores en interacción desafiara durante décadas a la física de la época, poniendo en clara evidencia la necesidad imperiosa de romper con algunos de sus principios más fundamentales.

No es así de sorprender que las investigaciones abocadas a resolver el problema del cuerpo negro, particularmente las realizadas a finales del siglo XIX, constituyan una amplia serie de análisis termodinámicos y estadísticos de los osciladores armónicos, de entre los que sobresalen aquéllos realizados por Planck. Sus primeros trabajos lo condujeron a introducir —por vez primera en la física, y como única salida a la

¹Esto se debe a la ley de la radiación de Kirchhoff^[18, 19] que establece, en particular, que la distribución de equilibrio del campo de radiación es independiente del material que compone las paredes del recipiente que lo contiene. Esto invitó a Planck a modelar dichas paredes como un conjunto de osciladores, pues el resultado final debe ser independiente del modelo utilizado.

mano para explicar el espectro de la radiación de cuerpo negro— la noción de cuanto como elemento esencial para describir el mecanismo de intercambio energético entre el campo y la materia. Pocos años después Einstein iría más lejos, reconociendo en los cuantos una estructura propia del campo de radiación. Con ello, la física clásica se postró ante la idea de un campo cuantizado *per se*, idea que es bien acogida actualmente y acorde con la visión de que la cuantización es una propiedad intrínseca de la naturaleza.

El estudio termodinámico y estadístico de los osciladores posee por lo tanto una clara importancia histórica, pero su riqueza es aún mayor en tanto que nos permite tomar un camino distinto del que siguieron Planck y Einstein, que desemboca en una lectura alterna de sus resultados. La observación fundamental que difiere drásticamente de aquellos trabajos realizados hace poco más de cien años, y que constituye el punto de partida de este capítulo, ha sido señalada por Boyer en un artículo sobre la termodinámica del oscilador armónico.^[20] En éste, y mediante un análisis basado en la invariancia de la acción bajo un cambio adiabático de la frecuencia del oscilador, Boyer obtiene una serie de relaciones termodinámicas de las que extrae una conclusión que rompe definitivamente con los tratamientos usuales: la solución para el potencial termodinámico, aunada a la ley de Wien (derivada de las propias relaciones termodinámicas obtenidas) permite la existencia de una energía atérmica (de punto cero) para los osciladores a $T = 0$. Con este resultado, la termodinámica empleada por Planck y Einstein se muestra restrictiva, en tanto que excluye *arbitrariamente* la energía de punto cero y da cabida sólo a la energía térmica. La energía de punto cero, además, resulta proporcional a la frecuencia de los osciladores, en contraposición con el principio clásico de la equipartición de la energía. Lo anterior apunta ya hacia una descripción física novedosa que difiere de la clásica y al mismo tiempo de la visión de Planck y Einstein. En efecto, buscando la interpolación más suave entre la equipartición de la energía a altas temperaturas y la energía de punto cero a bajas temperaturas, Boyer logró derivar la ley de Planck sin introducir hipótesis alguna de cuantización.

Los resultados anteriores conducen inevitablemente a preguntarse: ¿es la hipótesis cuántica realmente fundamental e imprescindible?, ¿refleja ella una propiedad intrínseca de la estructura del campo de radiación, o bien una característica adquirida por su interacción con la materia?, ¿cuáles son las repercusiones de esta energía de punto cero en la física, y en particular en las propiedades del sistema de osciladores? En este capítulo mostramos que partiendo de la existencia de la energía atérmica, e introduciendo como parte esencial del análisis una descripción estadística del ensemble de osciladores, la ley de Planck emerge directa e inmediatamente como la *única*

solución consistente con las relaciones termo-estadísticas.² Nuestro resultado no requiere de hipótesis de cuantización alguna, y supera la derivación de Boyer en tanto que está libre de las debilidades intrínsecas a todo método de interpolación.

Lo anterior obliga a reinterpretar los análisis originales de Planck y Einstein desde una nueva perspectiva, relacionando las nociones de continuidad y discontinuidad mediante la idea de la energía de punto cero. Una vez que demostramos que la energía de punto cero conduce a la ley de Planck, y asociamos el origen de dicha energía a la existencia de un campo de radiación de punto cero (o vacío), concluimos que basta aceptar este último para entender el origen de las propiedades corpusculares del campo de radiación. Más aún, una descripción estadística completa del sistema demanda la existencia de fluctuaciones del campo de punto cero, mismas que se reconocen como la causa de las fluctuaciones cuánticas, las cuales se manifiestan a través de las desigualdades de Heisenberg para las cuadraturas del campo. Así, partiendo de la ley de Planck como un hecho experimental, y considerando la descripción estadística de los osciladores, el estudio que se muestra en este capítulo revela un elemento de vital importancia física, a saber, la presencia inevitable de un campo *fluctuante* de radiación de punto cero. La incorporación de dicho campo en la descripción física nos permite, como quedará claro a lo largo de la tesis, ir más allá de la ley de Planck. Estudiar las consecuencias de su presencia no sólo nos conduce a un entendimiento más profundo sobre el origen de las propiedades cuánticas del campo de radiación, sino también a todo un campo para la exploración física y, en particular, para la física cuántica.

1.1. Relaciones termo-estadísticas del oscilador armónico

1.1.1. Surgimiento de la energía de punto cero

En su trabajo [20], Boyer estudia la termodinámica de un sistema de osciladores armónicos materiales y unidimensionales de frecuencia ω que se encuentran en equilibrio con un baño térmico a una cierta temperatura T . Partiendo del hecho de que el cociente entre la energía media U de los osciladores y su frecuencia ω es un invariante adiabático, Boyer encuentra una expresión para el trabajo dW realizado por el sistema, la cual, aunada a la primera ley de la termodinámica, lo conduce a escribir

$$TdS(\omega, T) = dU(\omega, T) - (U/\omega)d\omega, \quad (1.1)$$

²El material que constituye este capítulo aparece en las refs. [21], [22] y [23].

donde S es la entropía del sistema. Mediante un análisis de la ec. (1.1) Boyer obtiene la ley de Wien

$$U(\omega, T) = \omega f(\omega/T), \quad (1.2)$$

con f una función universal que queda sin especificar.

Las funciones termodinámicas del sistema pueden derivarse a partir del potencial $\phi(z)$ dado por (la constante de Boltzmann, k_B , se toma igual a 1 en el artículo citado)

$$\phi(z) = -\frac{1}{k_B T} F(\omega, T), \quad (1.3)$$

donde $F(\omega, T)$ es la energía libre de Helmholtz y la variable z depende del parámetro ω y de la temperatura T en la forma $z = \omega/T$.³ En particular, la energía media U está dada por

$$U(\omega, T) = -\omega k_B \frac{d\phi(z)}{dz}, \quad (1.4)$$

de modo que $f(z) = -k_B \frac{d\phi(z)}{dz}$, de acuerdo con las ecs. (1.2) y (1.4).

Por su parte, la entropía del sistema adquiere la forma

$$S(z) = k_B \phi(z) + \frac{1}{T} U(\omega, T). \quad (1.5)$$

Estos resultados constituyen las relaciones termodinámicas básicas que nos serán de utilidad en el presente capítulo. En particular, la ecuación (1.2) es fundamental, pues de ella se desprende la posibilidad de una energía de punto cero no nula para los osciladores. En efecto, en el límite de bajas temperaturas la ecuación (1.2) se reduce a

$$\mathcal{E}_0 \equiv U(\omega, 0) = \omega f(\infty), \quad (1.6)$$

de manera que la energía atérmica \mathcal{E}_0 queda determinada por el valor que adquiere f (o bien $d\phi(z)/dz$) en el infinito. En los análisis termodinámicos usuales arbitrariamente se asigna el valor constante $f(\infty) = A = 0$, anulando con ello la energía de punto cero; sin embargo, la solución genérica demanda un valor más general para la constante universal A .⁴ Si permitimos que A sea diferente de cero, entonces la ley de Wien predice la existencia de una energía de punto cero que es proporcional a la frecuencia

³Escrita con las constantes apropiadas la variable z representa la cantidad adimensional $\hbar\omega/k_B T$, donde \hbar representa una constante con dimensiones de acción. La presente teoría contiene de manera natural tal constante en la ecuación (1.7), donde es requerida para especificar la energía de punto cero de los osciladores.

⁴La constante A es universal porque determina la distribución de equilibrio a $T = 0$, la cual es una función universal de acuerdo con la ley de radiación de Kirchhoff.

de los osciladores,

$$\mathcal{E}_0 = A\omega = \frac{\hbar}{2}\omega, \quad (1.7)$$

donde, a fin de establecer contacto con la notación actual, hemos escrito la constante A como $\hbar/2$.⁵

A lo largo de las siguientes secciones, en las que no recurriremos más al trabajo de Boyer, exploraremos las implicaciones de la existencia de la energía de punto cero —contraria a la equipartición de la energía y por ende ajena a la física clásica del siglo XIX⁶— en la descripción estadística del sistema de osciladores. Específicamente tomaremos como punto seguro de partida la ley de Wien (ec. (1.2)) —considerando la solución más general $A \neq 0$ (ec. (1.7))— y estudiaremos su repercusión en la forma funcional de la energía media $U(\omega, T)$ cuando el sistema se encuentra en equilibrio térmico a una temperatura T .

1.1.2. La distribución termodinámica

De acuerdo con el principio de máxima entropía^[28, 29] la distribución de probabilidad (en el espacio fase) $w(p, q)$ que caracteriza a un sistema arbitrario en equilibrio termodinámico es aquella para la cual la entropía, definida como

$$S = -k_B \int w(p, q) \ln w(p, q) dpdq, \quad (1.8)$$

adquiere un valor máximo.⁷ La distribución así obtenida nos permite determinar los valores medios de toda función $h(p, q)$; sin embargo, para determinar los valores esperados de una función cualquiera $f(\mathcal{E})$ de la energía \mathcal{E} debemos recurrir a una distribución $W(\mathcal{E})$ tal que la probabilidad de que la energía del sistema adquiera un valor entre \mathcal{E} y $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$ está dada por $W(\mathcal{E})d\mathcal{E}$.

⁵El resultado $\mathcal{E}_0(\omega) \sim \omega$ es incluso más general en tanto que puede derivarse dentro de otros contextos físicos ajenos al cuántico. Por ejemplo, ya se ha demostrado en varias (e independientes) ocasiones^{[24]-[27]} que la *única* densidad espectral de energía para un campo atómico que cumple con la invariancia de Lorentz es de la forma $\rho_0(\omega) \sim \omega^3$, de donde se sigue que la relatividad especial (y por lo tanto la teoría electromagnética) permite una energía de punto cero $\mathcal{E}_0(\omega)$ que es lineal en ω . Por otro lado, en la ref. [16] puede verse cómo la ley de inercia aplicada a un dipolo que se halla en equilibrio con un campo de radiación de vacío conduce de nuevo a $\rho_0(\omega) \sim \omega^3$, y en consecuencia al resultado (1.7). Ambos ejemplos muestran que no se requieren hipótesis cuánticas para alcanzar la conclusión (1.7), además de que refuerzan la selección $A \neq 0$ que corresponde a la descripción termodinámica más general, como ya se ha dicho.

⁶Podríamos decir que en lugar de una equipartición de la energía existe una equipartición de la acción entre los modos del campo de punto cero, $J \equiv \hbar/2 = \mathcal{E}(\omega)/\omega$.

⁷La S en la ec. (1.8) coincide con la entropía $S = k_B \ln \Omega$, donde Ω es el número de microestados accesibles diferentes que son consistentes con el estado macroscópico particular del sistema (véanse, por ejemplo, las refs. [30, 31]).

Cuando el sistema se halla en equilibrio con un baño térmico a temperatura T podemos escribir $W(\mathcal{E})$ en la forma general

$$W_g(\mathcal{E}) = \frac{1}{Z_g(\beta)} g(\mathcal{E}) e^{-\beta\mathcal{E}}, \quad (1.9a)$$

$$Z_g(\beta) = \int g(\mathcal{E}) e^{-\beta\mathcal{E}} d\mathcal{E}, \quad (1.9b)$$

donde $\beta = 1/(k_B T)$, $Z_g(\beta)$ es la función de partición y el factor $g(\mathcal{E})$, también llamado función de estructura, es una función de peso que representa el número de estados que pueden realizarse dada una cierta \mathcal{E} .^[29, 32] El valor esperado $\langle f(\mathcal{E}) \rangle$ de una función arbitraria $f(\mathcal{E})$ está entonces dado por

$$\langle f(\mathcal{E}) \rangle = \int_0^\infty f(\mathcal{E}) W_g(\mathcal{E}) d\mathcal{E}. \quad (1.10)$$

Para el caso particular en que $f(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ tenemos que $\langle \mathcal{E} \rangle = U$.

Cuando el sistema en cuestión está compuesto de osciladores armónicos unidimensionales, los tratamientos termo-estadísticos usuales arrojan el siguiente valor para $g(\mathcal{E})$ ^[32]

$$g(\mathcal{E}) = g(\mathcal{E})_{\text{clásica}} = \frac{1}{s\omega}, \quad (1.11)$$

donde s es una constante con dimensiones de acción definida a partir del elemento de área unitario en el espacio fase, razón por la cual posee un valor universal.⁸ La expresión (1.11), sustituida en las ecs. (1.9), conduce a los siguientes resultados

$$W_{\text{clásica}}(\mathcal{E}) \equiv W_{g=\text{clásica}}(\mathcal{E}) = \frac{e^{-\beta\mathcal{E}}}{\int_0^\infty e^{-\beta\mathcal{E}} d\mathcal{E}}, \quad (1.12a)$$

$$Z_{\text{clásica}}(\beta) = \int_0^\infty g(\mathcal{E})_{\text{clásica}} e^{-\beta\mathcal{E}} d\mathcal{E} = \frac{1}{\beta s\omega} = \frac{k_B T}{s\omega}, \quad (1.12b)$$

$$\langle \mathcal{E} \rangle = U = \frac{1}{\beta} = k_B T. \quad (1.12c)$$

Es decir, el caso $g(\mathcal{E}) = 1/s\omega$ corresponde a la descripción clásica del oscilador armónico, en la cual $\mathcal{E}_0 = 0$ como lo indica la ec. (1.12c) para $T = 0$. Consecuentemente, y con el fin de dar cabida a la energía de punto cero (1.7), supondremos que la distribución en el espacio de energía tiene la forma de $W_g(\mathcal{E})$ si bien permitiremos un valor más general para la función $g(\mathcal{E})$, misma que habrá de determinarse.⁹

⁸La constante s se relaciona con el elemento de área en el espacio fase s' en la forma $s = s'/2\pi$.

⁹La distribución de probabilidad $W_g(\mathcal{E})$ fue empleada por Einstein en sus primeros trabajos sobre la capacidad calorífica de los sólidos,^[33] suponiendo desde el inicio una forma específica de la función $g(\mathcal{E})$ (equivalente a la que aparece en la ec. (1.72)) como lo dictaba la cuantización sugerida por

1.1.3. Propiedades generales de la distribución $W_g(\mathcal{E})$

A partir de las ecuaciones (1.9) y (1.10) con $f(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^r$ (r un entero positivo), se obtiene

$$\langle \mathcal{E}^r \rangle' = -\frac{Z'_g}{Z_g} \langle \mathcal{E}^r \rangle - \frac{1}{Z_g} \int_0^\infty \mathcal{E}^{r+1} g(\mathcal{E}) e^{-\beta \mathcal{E}} d\mathcal{E} = -\frac{Z'_g}{Z_g} \langle \mathcal{E}^r \rangle - \langle \mathcal{E}^{r+1} \rangle, \quad (1.13)$$

donde la prima denota derivada con respecto a β . Al sustituir el siguiente resultado (fácilmente derivable de la ecuación (1.9b))

$$\langle \mathcal{E} \rangle = U = \frac{1}{Z_g} \int_0^\infty \mathcal{E} g(\mathcal{E}) e^{-\beta \mathcal{E}} d\mathcal{E} = -\frac{Z'_g}{Z_g} \quad (1.14)$$

en la ecuación (1.13), obtenemos la siguiente relación de recurrencia

$$\langle \mathcal{E}^{r+1} \rangle = U \langle \mathcal{E}^r \rangle - \langle \mathcal{E}^r \rangle'. \quad (1.15)$$

Para el caso particular en que $r = 1$, esta expresión nos permite escribir la varianza de la energía $\sigma_{\mathcal{E}}^2$ como

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2 \equiv \langle (\mathcal{E} - U)^2 \rangle = \langle \mathcal{E}^2 \rangle - U^2 = -U', \quad (1.16)$$

lo que nos permite reescribir (1.15) en la forma

$$\langle \mathcal{E}^{r+1} \rangle = U \langle \mathcal{E}^r \rangle + \sigma_{\mathcal{E}}^2 \frac{d \langle \mathcal{E}^r \rangle}{dU}. \quad (1.17)$$

Este es un resultado importante, ya que muestra que todos los momentos $\langle \mathcal{E}^r \rangle$ para $r > 2$ están determinados por U y $\sigma_{\mathcal{E}}^2$, de modo que basta conocer estas últimas cantidades para determinar completamente la distribución W_g .

Por otro lado, la ec. (1.16) conduce a la bien conocida relación

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2 = -U' = k_B T^2 \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_\omega = k_B T^2 C_\omega, \quad (1.18)$$

donde $C_\omega = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_\omega$ es la capacidad calorífica. Dado que C_ω se mantiene finita a $T = 0$, concluimos de aquí que

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2(T = 0) = 0, \quad (1.19)$$

es decir, debemos entender a $\sigma_{\mathcal{E}}^2$ como una medida de las fluctuaciones *térmicas*, las

Planck. En el presente contexto estamos trabajando en sentido opuesto, al permitir que la teoría misma determine la forma de $g(\mathcal{E})$.

1.2. La energía media de los osciladores en equilibrio

cuales se anulan a $T = 0$. Este resultado no es más que reflejo de que la descripción provista por la distribución de probabilidad W_g es de índole termodinámica. De acuerdo con esto la energía $\mathcal{E}(T = 0)$ es una cantidad fija no obstante que $\mathcal{E}(T)$ es una cantidad fluctuante, punto que se discutirá y aclarará más adelante.

De la ecuación (1.16) se observa que si se determina la varianza $\sigma_{\mathcal{E}}^2$ como función de U , esto es $\sigma_{\mathcal{E}}^2(U)$, entonces la integración directa de

$$d\beta = -\frac{dU}{\sigma_{\mathcal{E}}^2(U)} \quad (1.20)$$

permite, tras invertir la función $\beta = \beta(U)$ resultante, determinar $U(\beta)$. Así, y en concordancia con lo que se dijo inmediatamente abajo de la ec. (1.17), basta determinar la función $\sigma_{\mathcal{E}}^2(U)$ sujeta a la condición (que se deriva de (1.19))

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2(\mathcal{E}_0) = 0, \quad (1.21)$$

para conocer la distribución W_g de *cualquier* sistema que se encuentre en equilibrio a una temperatura T .

1.2. La energía media de los osciladores en equilibrio

En lo que sigue aplicaremos los resultados generales que hemos obtenido a un ensemble de osciladores armónicos unidimensionales. En particular, esta sección estará dedicada a determinar la energía media $U(\beta)$ siguiendo el procedimiento expuesto en el párrafo anterior, por lo que primero procederemos a establecer la forma funcional de $\sigma_{\mathcal{E}}^2(U)$.

1.2.1. Determinación de $\sigma_{\mathcal{E}}^2(U)$

Para determinar $\sigma_{\mathcal{E}}^2(U)$ observamos primero que de acuerdo con la definición de $\sigma_{\mathcal{E}}^2$ (ec. (1.16)) la varianza es invariante frente a la inversión $\mathcal{E} \rightarrow -\mathcal{E}$. Si bien esta transformación carece de significado físico, formalmente conduce a la sustitución $U \rightarrow -U$ y nos permite concluir que $\sigma_{\mathcal{E}}^2$ es una función par de U , es decir,

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2(U) = \sigma_{\mathcal{E}}^2(-U). \quad (1.22)$$

Por su parte, la condición (1.21) muestra que \mathcal{E}_0 es una raíz de $\sigma_{\mathcal{E}}^2$, y de acuerdo con la ec. (1.22) ello implica que $-\mathcal{E}_0$ es también una raíz de $\sigma_{\mathcal{E}}^2$; así, suponiendo que $\sigma_{\mathcal{E}}^2(U)$ puede desarrollarse en una serie de potencias de U , lo anterior nos conduce a

1.2. La energía media de los osciladores en equilibrio

escribir la expresión general

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2(U) = \sigma_{\mathcal{E}}^2(U)^{(m,n)} = (U + \mathcal{E}_0)^m (U - \mathcal{E}_0)^n f_1(U), \quad (1.23)$$

con

$$f_1(U) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s U^s, \quad (1.24)$$

donde los enteros $m, n = 1, 2, \dots$ y las constantes b_s son cantidades que determinaremos a continuación. Aquí conviene aclarar que si bien podemos recurrir a argumentos de simetría para inferir que $m = n$, hemos optado por emplear los valores más generales en la ec. (1.23). La igualdad de estos enteros se verificará más adelante, abajo de la ec. (1.31b).

Dado que aquí estamos estudiando un sistema de osciladores armónicos, la ley de Wien (ec. (1.2)) debe satisfacerse, lo que implica que los coeficientes b_s no dependen de ω ni de T (si así lo hicieran entonces f_1 ya no podría escribirse como una función del argumento $\omega f(z)$). Al sustituir (1.24) en (1.23), escribir $\mathcal{E}_0 = A\omega$ y usar de nuevo la ley de Wien, obtenemos

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2(\omega, T) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s \omega^{m+n+s} f_2(z) f^s(z), \quad (1.25)$$

donde hemos definido

$$f_2(z) = (f(z) + A)^m (f(z) - A)^n. \quad (1.26)$$

Por otro lado, las ecuaciones (1.2) y (1.16) nos permiten escribir

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2 = -\frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \beta} = -k_B \omega \frac{\partial U}{\partial z} = -k_B \omega^2 \frac{df}{dz} = \omega^2 f_3(z), \quad (1.27)$$

donde se usó que $z = k_B \omega \beta$ y se definió

$$f_3(z) = -k_B \frac{df(z)}{dz}. \quad (1.28)$$

Reuniendo las ecs. (1.27) y (1.25) en una sola encontramos que

$$\omega^2 f_3(z) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s \omega^{m+n+s} f_2(z) f^s(z). \quad (1.29)$$

Como los coeficientes b_s son independientes de ω y de T , esta expresión se satisfará

siempre que

$$b_s = \begin{cases} 0, & \text{si } s \neq 2 - (m + n); \\ B, & \text{si } s = 2 - (m + n). \end{cases} \quad (1.30)$$

Ahora bien, dado que el índice s puede tomar los valores $0, 1, 2, \dots$, la condición $s = 2 - (m + n)$ conduce a

$$m + n \leq 2, \quad (1.31a)$$

mientras que el hecho de que $m, n = 1, 2, \dots$, implica que

$$2 \leq m + n. \quad (1.31b)$$

De este último par de ecuaciones se desprende que $n = m = 1$. Con esto, y usando la ec. (1.30), concluimos que el único término que contribuye a la suma (1.24) es el que corresponde a $s = 0$. Esto reduce $f_1(U)$ al valor constante B , con lo que la ec. (1.23) se reduce a

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2(U) = B(U + \mathcal{E}_0)(U - \mathcal{E}_0) = B(U^2 - \mathcal{E}_0^2). \quad (1.32)$$

El valor de la constante B , que fija la escala de las fluctuaciones, puede determinarse notando que a altas temperaturas el término U^2 es el dominante (ya que U debe ser una función creciente de T) y la energía de punto cero es despreciable. En este límite podemos recurrir a la distribución de probabilidad clásica (es decir, al caso $g(\mathcal{E}) = \text{cte}$, o bien a las ecs. (1.12)), que arroja el siguiente valor¹⁰ para $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$

$$\langle \mathcal{E}^2 \rangle = \beta \int_0^\infty \mathcal{E}^2 e^{-\beta \mathcal{E}} d\mathcal{E} = 2U^2, \quad (T \rightarrow \infty), \quad (1.33)$$

de donde $\sigma_{\mathcal{E}}^2 = U^2$, lo que fija $B = 1$. Al sustituir este valor en (1.32) obtenemos finalmente

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2(U) = U^2 - \mathcal{E}_0^2. \quad (1.34)$$

Derivación alterna de $\sigma_{\mathcal{E}}^2(U)$

Como quedará claro más adelante, la ec. (1.34) es de suma importancia. Por tal motivo presentamos ahora una derivación alterna —de naturaleza más formal

¹⁰El hecho de que $\sigma_{\mathcal{E}}^2$ sea una función cuadrática en U implica, de acuerdo con la ec. (1.17), que el r -ésimo momento $\langle \mathcal{E}^r \rangle$ del oscilador armónico es un polinomio de grado r en U . En el caso límite $T \rightarrow \infty$ dicho polinomio es de la forma

$$\langle \mathcal{E}^r \rangle = \beta \int_0^\infty \mathcal{E}^r e^{-\beta \mathcal{E}} d\mathcal{E} = r! U^r, \quad (T \rightarrow \infty).$$

1.2. La energía media de los osciladores en equilibrio

aunque de menor transparencia física— de dicho resultado.

La expresión para $\sigma_{\mathcal{E}}^2(U)$ reescrita en términos de las variables ω y T requiere, de acuerdo con la ley de Wien (ec. (1.2)), que se cumpla

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2(\omega, T) = \sigma_{\mathcal{E}}^2(\omega f(\omega/T)), \quad (1.35)$$

ecuación que aunada a (1.27) conduce a

$$\omega^2 f_3(z) = \sigma_{\mathcal{E}}^2(\omega f(z)). \quad (1.36)$$

Como las funciones f y f_3 dependen de la frecuencia ω únicamente a través de z , el hecho de que el lado izquierdo de (1.36) sea una función de la variable $\omega f(z)$ implica que la solución no trivial para f_3 es de la forma¹¹

$$f_3(z) = Bf^2(z) + C. \quad (1.37)$$

Al sustituir este resultado en la ec. (1.36) obtenemos

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2(\omega f(z)) = B\omega^2 f^2(z) + C\omega^2, \quad (1.38)$$

y por lo tanto, usando (1.2), se encuentra que

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2(U) = BU^2 + C\omega^2. \quad (1.39)$$

Ahora imponemos la condición (1.21), lo que fija la constante $C = -BA^2$, de modo que (1.39) se reduce finalmente a la ecuación (1.32), de donde se desprende el resultado (1.34).

¹¹La forma general de f_3 puede escribirse como

$$f_3(z) = f^2(z)g_1(z) + g_2(z),$$

con $g_1(z)$ y $g_2(z)$ funciones por determinar (donde claramente $g_2(z)$ no tiene contribuciones de $f^2(z)$, pues de tenerlas éstas se incluirían en la función $g_1(z)$). Sustituyendo esta ecuación en (1.36) obtenemos

$$\omega^2 f^2(z)g_1(z) + \omega^2 g_2(z) = \sigma_{\mathcal{E}}^2(\omega f(z)).$$

De nuevo, el lado derecho requiere que la función del lado izquierdo sea función de la variable $\omega f(z)$. Claramente $g_1(z)$ no es función del argumento $\omega f(z)$, por lo que debe tratarse de una función constante; por su parte, $g_2(z)$, por no contener término alguno con $f^2(z)$, debe reducirse también a una constante, lo que nos conduce finalmente a (1.37).

1.2.2. La energía media

Una vez que hemos determinado la forma funcional de $\sigma_{\mathcal{E}}^2(U)$ sustituimos la ecuación (1.34) en (1.20), lo que da como resultado

$$\frac{dU}{U^2 - \mathcal{E}_0^2} = -d\beta. \quad (1.40)$$

La integración directa de (1.40) conduce a

$$\beta = \begin{cases} \frac{1}{\bar{U}}, & \text{si } \mathcal{E}_0 = 0; \\ \frac{1}{\mathcal{E}_0} \coth^{-1} \frac{U}{\mathcal{E}_0}, & \text{si } \mathcal{E}_0 \neq 0. \end{cases} \quad (1.41)$$

Si ahora invertimos las funciones que aquí aparecen se obtiene

$$U(\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}, & \text{si } \mathcal{E}_0 = 0; \\ \mathcal{E}_0 \coth \mathcal{E}_0 \beta, & \text{si } \mathcal{E}_0 \neq 0. \end{cases} \quad (1.42)$$

Aunque el caso $\mathcal{E}_0 = 0$ puede obtenerse como un límite (para $T \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow 0$) del caso $\mathcal{E}_0 \neq 0$, es más ilustrativo tratar ambos casos separadamente. El resultado (1.42) muestra que la energía media depende críticamente del valor de \mathcal{E}_0 . Por un lado, cuando la energía de punto cero es nula obtenemos el resultado clásico (equipartición de la energía)

$$U_{\text{equipartición}} = \beta^{-1}. \quad (1.43)$$

Por otro, si la teoría permite un valor diferente de cero para \mathcal{E}_0 , obtenemos la ley de Planck

$$U_{\text{Planck}} = \mathcal{E}_0 \coth \mathcal{E}_0 \beta \quad (1.44)$$

con la energía de punto cero $\mathcal{E}_0 = \hbar\omega/2$ incluida, como se observa al tomar el límite $\beta \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow 0$) en la ec. (1.44),

$$U_{\text{Planck}}(\beta \rightarrow \infty) = \mathcal{E}_0. \quad (1.45)$$

Destaca de esta derivación el hecho de que para alcanzar la ley de Planck no es necesario recurrir a hipótesis alguna de cuantización. Basta únicamente la ecuación (1.40), la cual no es sino resultado de la fórmula de recurrencia (1.15) (para $r = 1$) —fórmula que proviene de una distribución de probabilidad en la variable *continua* de energía— y de la dependencia cuadrática en U de la varianza. Al respecto,

es importante enfatizar que dicha dependencia es consecuencia directa de la ley de Wien, como queda al descubierto en ambas derivaciones de la ec. (1.34). Dado que es esta misma ley la que permite la existencia de una energía de punto cero no nula, concluimos que la ley de Wien —junto con la condición $A \neq 0$ en la ec. (1.7)— es *suficiente* para recuperar la ley de Planck y por ende (como se verá en la sección 1.5) la descripción cuántica de los osciladores. Más aún, si bien hemos estudiado un sistema de osciladores armónicos materiales, el hecho de que la ley de Wien se satisfaga también para los osciladores del campo de radiación¹² implica que la ec. (1.44) —y los resultados que de ella se deriven— poseen validez general, independientemente de la naturaleza de los osciladores.

1.2.3. Comentario sobre las fluctuaciones de la energía de punto cero

A partir de las ecs. (1.34) y (1.42) obtenemos la siguiente expresión para las fluctuaciones *térmicas* de la energía en el caso en que $\mathcal{E}_0 \neq 0$:

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2(U) = U^2 - \mathcal{E}_0^2 \quad (U = U_{\text{Planck}}), \quad (1.46)$$

mientras que en el caso clásico ($\mathcal{E}_0 = 0$) obtenemos

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2(U) = U^2 \quad (U = U_{\text{equipartición}}). \quad (1.47)$$

En esta última expresión las fluctuaciones térmicas de la energía de los osciladores dependen de la energía media *térmica*, $U_{\text{equipartición}}$, mientras que la ecuación (1.46) relaciona las fluctuaciones térmicas con la energía media *total*, U_{Planck} , que incluye una contribución independiente de la temperatura, como ya se ha visto. Como a $T = 0$ las fluctuaciones térmicas desaparecen, cualquier fluctuación (atérmica) de la energía alrededor de \mathcal{E}_0 a temperatura cero no puede obtenerse mediante una descripción termodinámica como la provista por la distribución W_g . En efecto, como se verá en la sección 1.6, sólo recurriendo a una nueva distribución podemos obtener una expresión de la misma forma que (1.47) que relacione ahora las fluctuaciones *totales* con la energía *total* (véase la ec. (1.77)).

¹²De hecho, el propio Wien derivó su ley estudiando precisamente la radiación electromagnética contenida en un cilindro, tomando en cuenta el corrimiento Doppler producido a causa de un pistón movable (véase, por ejemplo, la ref. [17]). Por otro lado, el hecho de que cada uno de los modos del campo pueda representarse como un oscilador armónico unidimensional (de masa $m = 1$) nos permite extender directamente los resultados que hemos obtenido al caso de los osciladores del campo de radiación.

1.3. Planck, Einstein y la energía de punto cero

La discusión anterior sugiere separar la energía media U_{Planck} (que en lo que sigue denotaremos simplemente con U) en sus contribuciones térmica (U_T) y atérmica (\mathcal{E}_0) en la forma

$$U = U_T + \mathcal{E}_0. \quad (1.48)$$

El primer término del lado derecho en esta expresión,

$$U_T = \mathcal{E}_0 \coth \mathcal{E}_0 \beta - \mathcal{E}_0 = \frac{2\mathcal{E}_0}{e^{2\mathcal{E}_0 \beta} - 1} \quad (1.49)$$

corresponde a la ley de Planck sin la contribución de punto cero, y a bajas temperaturas adquiere la forma

$$U_T = 2\mathcal{E}_0 e^{-2\mathcal{E}_0 \beta}, \quad (1.50)$$

que es la ley (aproximada) sugerida por Wien a fines del siglo XIX, y que fue considerada por algún tiempo como una descripción exacta del comportamiento del cuerpo negro.

Sustituyendo la ecuación (1.48) en (1.46) podemos descomponer $\sigma_{\mathcal{E}}^2$ como sigue:

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2 = U_T^2 + 2\mathcal{E}_0 U_T. \quad (1.51)$$

Las ecuaciones (1.50) y (1.51) constituyen el germen de la teoría cuántica, pues condujeron a Planck y a Einstein a introducir la noción de cuanto en la física. En lo que sigue discutiremos brevemente estos resultados y su relación con la energía de punto cero, prestando atención a dos momentos esenciales en el desarrollo de la teoría cuántica.

1.3.1. El análisis de Planck. La cuantización como mecanismo de intercambio de energía

Al inicio de sus estudios sobre el campo de radiación en equilibrio con la materia, Planck^[34, 35] tomó como un punto de partida la expresión¹³

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}. \quad (1.52)$$

De acuerdo con la teoría clásica prevaleciente en esa época la energía U que aparece en (1.52) debe entenderse como energía térmica, por lo que para seguir el análisis de

¹³El contenido central del material que se presenta en las dos subsecciones siguientes aparece en la ref. [36].

1.3. Planck, Einstein y la energía de punto cero

Planck sustituiremos U por U_T en lo que sigue.

En el límite de altas temperaturas Planck escribió (tomando $U_T(T \rightarrow \infty) = k_B T$)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U_T^2} = \frac{\partial}{\partial U_T} \left(\frac{k_B}{U_T} \right) = -\frac{k_B}{U_T^2}, \quad (1.53)$$

mientras que en el límite de bajas temperaturas recurrió a la ley de Wien en su forma (1.50), y escribió entonces

$$U_T = 2\mathcal{E}_0 e^{-2\mathcal{E}_0\beta} = 2\mathcal{E}_0 e^{-2\mathcal{E}_0/k_B T} = 2\mathcal{E}_0 e^{-2(\mathcal{E}_0/k_B)(\partial S/\partial U_T)}, \quad (1.54)$$

donde en vez de las constantes originalmente utilizadas por Planck hemos empleado la notación moderna $\mathcal{E}_0 = \hbar\omega/2$. De aquí se obtiene

$$\frac{\partial S}{\partial U_T} = -\frac{k_B}{2\mathcal{E}_0} \ln \frac{U_T}{2\mathcal{E}_0}, \quad (1.55)$$

y

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U_T^2} = -\frac{k_B}{2\mathcal{E}_0 U_T}. \quad (1.56)$$

Planck supuso que la descripción correcta, válida a toda temperatura, se obtendría interpolando las ecuaciones (1.53) y (1.56), lo que lo llevó a proponer que

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U_T^2} = -\frac{k_B}{U_T^2 + 2\mathcal{E}_0 U_T}. \quad (1.57)$$

Esta ecuación conduce inmediatamente a la ley de Planck sin contribución de punto cero, ec. (1.49). El siguiente paso resultaba aún más complejo: explicar la razón física de la ec. (1.57). Como es bien sabido, Planck interpretó su resultado como producto de la cuantización de la energía intercambiada entre los osciladores materiales y los osciladores del campo en equilibrio.

1.3.2. El análisis de Einstein. La concepción del fotón

Pocos años más tarde, Einstein se dio a la tarea de esclarecer el significado de la ecuación (1.57), muy bien cimentada por el experimento, pero simplemente

postulada por Planck. Partió de la ecuación¹⁴ (1.52), de donde obtuvo

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U_T^2} = \frac{\partial}{\partial U_T} \frac{1}{T} = -\frac{1}{T^2 C_\omega}, \quad (1.58)$$

y por lo tanto

$$k_B T^2 C_\omega = -k_B \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U_T^2} \right)^{-1}. \quad (1.59)$$

La combinación de este resultado con las ecs. (1.18) y (1.57) conduce a

$$k_B T^2 C_\omega = \sigma_{\mathcal{E}}^2 = U_T^2 + 2\mathcal{E}_0 U_T, \quad (1.60)$$

expresión que coincide con la ec. (1.51). Einstein interpretó^[37] el primer término del lado derecho de la ecuación (1.60) como debido a las fluctuaciones del campo (a temperatura $T \neq 0$) producidas por la interferencia entre sus modos de frecuencia ω .¹⁵ Dicha interpretación surge al considerar el límite de la ec. (1.60) para altas temperaturas, para las cuales $U_T \gg \mathcal{E}_0$ y por lo tanto $\sigma_{\mathcal{E}}^2 = U_T^2$, tal como lo predicen las ecuaciones de Maxwell.¹⁶ Así, Einstein vio en el término U_T^2 una manifestación directa de la naturaleza *ondulatoria* de la luz.

El segundo miembro del lado derecho de la ecuación (1.60) —ajeno a la termodinámica clásica y núcleo de la teoría cuántica de Planck— fue interpretado por Einstein, en lo que él mismo llamó su único paso revolucionario en la física,^[40] como debido a una estructura discreta del campo de radiación. Esto lo podemos entender como sigue. De acuerdo con Planck, si n denota el número de actos elementales e independientes de intercambio de energía $\hbar\omega$ entre la cavidad y el campo, entonces la energía promedio intercambiada entre los osciladores materiales y los osciladores (de frecuencia ω) del campo de radiación tiene la forma $\Delta U = \hbar\omega \langle n \rangle$, y contribuye a las fluctuaciones del campo con el término $\sigma_{\Delta U}^2 = 2\mathcal{E}_0 \Delta U = \hbar^2 \omega^2 \langle n \rangle$. Einstein arguyó que el carácter lineal en $\langle n \rangle$ de la varianza sugiere una distribución de Poisson para n eventos *independientes*, en cada uno de los cuales se intercambia una energía igual a $\mathcal{E} = \hbar\omega = 2\mathcal{E}_0$.¹⁷ De esta manera, Einstein interpretó el término lineal en

¹⁴Por razones de consistencia en la notación continuaremos escribiendo la capacidad calorífica como C_ω ; esta cantidad coincide con la capacidad calorífica a volumen constante, de modo que la notación usual en este contexto es $C_V = \partial U / \partial T$.

¹⁵El análisis de semejante proceso de interferencia aparece en viejos trabajos de Lorentz, Einstein y otros.^[38]

¹⁶Una derivación detallada del resultado $\sigma_{\mathcal{E}}^2 = U_T^2$ puede verse en las refs. [38] y [39]. A propósito de esto, cabe mencionar que la expresión (1.34) generaliza dicho resultado en tanto que predice una dependencia cuadrática en U para *todo* valor de \mathcal{E}_0 , reduciéndose al caso clásico mencionado siempre que $\mathcal{E}_0 = 0$.

¹⁷Una distribución de Poisson describe la probabilidad de que se realicen simultáneamente n even-

U_T de la ec. (1.60) como una contribución *corpuscular* (discreta) del campo, siendo cada corpúsculo un paquete independiente de energía $\hbar\omega$ —más tarde llamado fotón. Es claro de la ecuación (1.60) que la estructura discreta del campo se manifiesta a temperaturas suficientemente bajas, cuando el término lineal domina sobre el cuadrático, mientras que a temperaturas altas es este último, de naturaleza ondulatoria, el término predominante. Sin embargo, debe resaltarse —como lo hizo Einstein desde 1909— que ambos términos están presentes a toda temperatura,^[37] y por lo tanto *coexisten* los aspectos ondulatorio y corpuscular del campo de radiación. Este hecho es frecuentemente olvidado frente a la suposición, más o menos extendida, de la mutua exclusión de tales aspectos del comportamiento del campo (o la materia), si bien existen experimentos que muestran la coexistencia de ambos fenómenos.^[41, 42]

1.4. Surgimiento del campo de punto cero

En su argumento para explicar el origen físico del término $2\mathcal{E}_0U_T$, Einstein no hace alusión alguna a la energía de punto cero; en lugar de ello infiere una propiedad corpuscular del campo de radiación que, en última instancia, identifica como la base de la ley de Planck. Sin embargo, hemos visto que la existencia de una energía de punto cero da lugar a una lectura alterna de dicha ley, de modo que debemos esperar que el presente enfoque proporcione una nueva interpretación del término $2\mathcal{E}_0U_T$ que no requiera de la noción de cuantos. En efecto, la lectura de U_T^2 como resultado de la interferencia entre los modos del campo (a $T \neq 0$) sugiere interpretar al término $2\mathcal{E}_0U_T$ como debido a interferencias adicionales entre los modos de dicho campo y los modos de un *campo de radiación de punto cero*, presente a $T = 0$, cuya energía media es precisamente \mathcal{E}_0 . La cantidad \mathcal{E}_0^2 , que representaría la contribución de punto cero a la varianza $\sigma_{\mathcal{E}}^2$ del campo total, y que sería producto de la interferencia entre los propios modos del campo de punto cero, no contribuye a la ecuación (1.60) porque la descripción termodinámica que hemos empleado no da cabida a fluctuaciones atómicas, como ya hemos mencionado.

Desde esta perspectiva, la noción de discontinuidades intrínsecas al mecanismo de intercambio de energía, o bien al campo mismo, resulta innecesaria para explicar ya sea la ley de Planck o el término lineal en la ec. (1.60). La existencia del campo de punto cero resulta suficiente para entender ambos. Ésta no podía ser la

tos discretos independientes equivalentes, y tiene la forma $P(n) = e^{-a} a^n / n!$, en donde el parámetro a es precisamente $\langle n \rangle$. Es fácil comprobar que la varianza de n es $\sigma_n^2 = n$. Es esta última propiedad la que sugiere interpretar el término lineal en U_T de la ec. (1.60) como resultado de una distribución de Poisson y, por lo tanto, entenderlo como referido a eventos discretos independientes.

interpretación de Planck o de Einstein, pues aunque sus análisis admitían implícitamente la existencia de la energía de punto cero, ésta quedaba oculta por la descripción termodinámica clásica. De hecho, el concepto de energía de punto cero del campo de radiación aparece por vez primera hasta 1912, en un trabajo donde Planck^[43] propone un método alterno para derivar su ley dada su conocida insatisfacción con la idea de las discontinuidades, particularmente en los procesos de absorción de la radiación por la materia. Poco después, en 1913, Einstein y Stern^[44] utilizan la idea de la energía de punto cero, aunque aplicada a osciladores mecánicos (moléculas), para alcanzar la densidad espectral de energía correcta del campo de radiación; sin embargo los autores se vieron obligados a utilizar el valor $\hbar\omega$ para la energía de punto cero en vez de $\hbar\omega/2$. Esta y otras dificultades con su teoría condujeron desafortunadamente a que Einstein abandonara esta línea de investigación.¹⁸ La noción de *campo* de punto cero aparece aún más tarde, en 1916, en la propuesta visionaria de Nernst^[10] que se mencionó brevemente en la Introducción.

Lo importante aquí es destacar que la interpretación que se ha hecho del término $2\mathcal{E}_0U_T$ implica la existencia de un campo de radiación de punto cero, o campo de vacío, cuya energía media por modo de frecuencia ω es $\mathcal{E}_0 = \hbar\omega/2$. Como se verá más adelante (sección 1.6) la introducción de las *fluctuaciones* de dicho campo es necesaria para recuperar algunas de las características restantes y esenciales de la descripción cuántica, ya que como ha quedado claro, para derivar la ley de Planck bastó la *sola* existencia del campo de vacío (o bien la existencia de la energía de punto cero), sin que sus fluctuaciones fueran requeridas.

1.5. Continuo *versus* discreto

La discusión anterior muestra tres diferentes análisis que conducen a tres diferentes interpretaciones de la misma cantidad, $U_T^2 + 2\mathcal{E}_0U_T$. Como se explicó en los párrafos precedentes, los distintos enfoques señalan ya sea a la energía de punto cero, ya sea a la cuantización, como las nociones subyacentes a la distribución de Planck. Debido a esto y dado que ya hemos determinado la relación entre la energía de punto cero y la ley de Planck, resta investigar la relación entre la energía de punto cero y la cuantización.

¹⁸Una descripción más detallada de estos puntos, desde una perspectiva actual, puede verse en las refs. [17] y [45].

1.5.1. La función de partición

De acuerdo con la ec. (1.14), una vez que la función $U(\beta)$ es conocida es posible determinar la función de partición $Z_g(\beta)$ mediante la integración directa de

$$U(\beta) = -\frac{d \ln Z_g(\beta)}{d\beta}. \quad (1.61)$$

La ecuación (1.44) nos permite escribir entonces

$$\int \mathcal{E}_0 \coth \mathcal{E}_0 \beta \, d\beta = -\ln Z_g + \ln C, \quad (1.62)$$

lo que conduce a

$$Z_g(\beta) = \frac{C}{\sinh \mathcal{E}_0 \beta}. \quad (1.63a)$$

El valor de la constante de integración C puede establecerse demandando que el resultado clásico (ec. (1.12b)) sea recuperado a altas temperaturas, requerimiento que da

$$C = \mathcal{E}_0 / s\omega = \hbar / 2s. \quad (1.63b)$$

Por otro lado, de las ecuaciones (1.4) y (1.61) vemos que el potencial termodinámico ϕ puede escribirse como

$$\phi = \ln Z_g, \quad (1.64)$$

lo que, aunado a la ec. (1.5), arroja el siguiente valor para la entropía

$$\begin{aligned} S &= k_B \ln Z_g + \frac{U}{T} \\ &= k_B \ln \frac{\hbar}{s} - k_B \ln 2 \sinh \mathcal{E}_0 \beta + k_B U \beta, \end{aligned} \quad (1.65)$$

donde en la segunda línea hemos empleado las ecs. (1.63a) y (1.63b). En el límite $T \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow \infty$) esta expresión se reduce a

$$S(T \rightarrow 0) = k_B \ln \frac{\hbar}{s} - k_B \mathcal{E}_0 \beta + k_B \mathcal{E}_0 \beta = k_B \ln \frac{\hbar}{s}, \quad (1.66)$$

de tal manera que la demanda $S(T \rightarrow 0) = 0$ fija la constante s igual a \hbar , y con ello la función de partición adquiere la forma

$$Z_g(\beta) = \frac{1}{2 \sinh \mathcal{E}_0 \beta}. \quad (1.67)$$

1.5.2. El origen de la discretización

Con el propósito de evidenciar las discontinuidades características del formalismo cuántico a partir de la descripción continua que provee la distribución de probabilidad W_g , desarrollamos la expresión (1.67) y escribimos¹⁹

$$Z_g = \frac{1}{2 \sinh \mathcal{E}_0 \beta} = \frac{e^{-\mathcal{E}_0 \beta}}{1 - e^{-2\mathcal{E}_0 \beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mathcal{E}_0 \beta (2n+1)}, \quad (1.68)$$

o bien,

$$Z_g = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \mathcal{E}_n}, \quad (1.69)$$

con

$$\mathcal{E}_n \equiv (2n + 1)\mathcal{E}_0 = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}). \quad (1.70)$$

La ec. (1.69) puede reexpresarse como

$$Z_g = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \mathcal{E}_n} = \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_n) \right] e^{-\beta \mathcal{E}} d\mathcal{E}, \quad (1.71)$$

lo que, aunado a la relación (1.9b), nos permite determinar la función $g(\mathcal{E})$:

$$g(\mathcal{E}) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_n). \quad (1.72)$$

Si sustituimos este valor en la ecuación (1.9a) obtenemos finalmente

$$W_g(\mathcal{E}) = \frac{1}{Z_g} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_n) e^{-\beta \mathcal{E}}, \quad (1.73)$$

donde Z_g está dada por la ec. (1.69). Esta distribución de probabilidad, introducida en la ec. (1.10), arroja la siguiente expresión para el valor medio de una función arbitraria de la energía:

$$\langle f(\mathcal{E}) \rangle = \int_0^{\infty} W_g(\mathcal{E}) f(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n f(\mathcal{E}_n), \quad (1.74)$$

¹⁹Cálculos similares al que se muestra aquí pueden verse en las refs. [46]-[48].

donde hemos introducido los pesos²⁰

$$w_n = \frac{e^{-\beta\mathcal{E}_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\mathcal{E}_n}}. \quad (1.75)$$

El resultado (1.74) muestra que el valor medio de una función de la variable *continua* \mathcal{E} , calculado con la distribución de probabilidad $W_g(\mathcal{E})$, puede obtenerse en forma equivalente promediando sobre un conjunto de índices *discretos* (o *estados*) n , cuyos respectivos pesos son w_n . Como estamos describiendo un ensemble canónico, la estructura de w_n sugiere que identifiquemos las cantidades \mathcal{E}_n con los diferentes niveles discretos de la energía de los osciladores cuánticos, la cual incluye, claro está, la energía de punto cero como se sigue de la ec. (1.70).²¹

La expresión (1.74) nos permite pasar de una descripción que involucra promedios sobre la variable continua \mathcal{E} a una que involucra promedios sobre índices discretos n . Ya que la energía \mathcal{E}_n en este contexto está completamente caracterizada por dichos estados, es natural interpretar la ec. (1.70) como una manifestación de la naturaleza discreta de la energía, aunque en un sentido estricto la discretización es propia de los estados accesibles de energía (n) y no de la energía misma. Así, si bien ambos promedios —el calculado con W_g y el calculado con w_n — son formalmente equivalentes, las correspondientes descripciones difieren de manera esencial, pues la primera se refiere a \mathcal{E} como una variable continua mientras que la segunda la entiende como una variable discreta. El mecanismo responsable de esta discretización radica, claro está, en la distribución altamente patológica $g(\mathcal{E})$. Lo anterior pone al descubierto el estrecho vínculo que existe entre la energía de punto cero y las nociones cuánticas introducidas por Planck y Einstein, y muestran el papel fundamental que juega dicha energía (estando a la base de la ecuación (1.68) y en consecuencia de (1.72)) en la aparición (y comprensión) del fenómeno cuántico.

En particular, con respecto a los osciladores del campo de radiación, la ec. (1.70) sugiere un resultado sumamente atractivo: todo campo lineal que contenga una contribución de vacío posee, tras alcanzar el equilibrio, un espectro discreto. En este sentido, la cuantización del campo de radiación puede encontrar explicación y origen en la existencia de la energía de punto cero y, contrariamente al enfoque usual, no constituye una propiedad intrínseca del campo, sino más bien una propiedad

²⁰Debemos reconocer en la ec. (1.74) la expresión que procede del empleo de la matriz de densidad para un ensemble canónico con pesos w_n (véase, por ejemplo, la ref. [49]). Asimismo, el resultado (1.72) coincide con la $g(\mathcal{E})$ que se obtiene aplicando la estadística cuántica al sistema de osciladores, como puede verse en la ref. [32], específicamente en la ec. 23 (con $N = 1$), sección 3.8.

²¹En el Apéndice A se muestra una forma alterna de derivar el espectro de un oscilador armónico cuántico unidimensional (ec. (1.70)), siguiendo los métodos y resultados expuestos en el capítulo 2.

adquirida en su interacción con la materia. En otras palabras, el presente enfoque ve en la cuantización una *propiedad emergente* de la materia y los campos en su interacción mutua, idea que será central y ampliamente estudiada a lo largo de toda la tesis.

1.6. Una distribución de probabilidad cuántica

El análisis anterior nos permite concluir que aunque \mathcal{E} es una variable continua, la distribución de sus valores posee máximos extremadamente agudos, de tal forma que el espectro se aproxima a uno discreto. Este resultado explica por qué el valor medio $\langle f(\mathcal{E}) \rangle$, que corresponde a un estado de equilibrio, involucra únicamente el conjunto discreto \mathcal{E}_n en lugar del continuo de valores \mathcal{E} . Sin embargo, como de hecho la energía fluctúa, ella adquiere diferentes valores de entre un continuo.²²

Como se explicó en la subsección 1.2.3, la existencia de una energía fluctuante de punto cero en la descripción del oscilador armónico requiere de una distribución de probabilidad más general que sustituya a W_g , y que dé cuenta de *todas* las fluctuaciones de la energía, incluyendo cualquier contribución atérmica. Que tal distribución existe puede inferirse a partir de los resultados que muestran que el enfoque fundado en la energía de punto cero (basado en una distribución continua de la energía) conduce a resultados equivalentes a la descripción cuántica, y notando que las fluctuaciones independientes de la temperatura constituyen una propiedad característica de los sistemas cuánticos. El estudio de este tema nos permitirá establecer contacto con una de las distribuciones comúnmente empleadas en la estadística cuántica.

1.6.1. Fluctuaciones independientes de la temperatura

La distribución de probabilidad apropiada para describir tanto las fluctuaciones térmicas como las atérmicas no puede ser de la forma (1.9a), como ya se ha dicho. Con el fin de generalizar la ecuación (1.47) para incluir las fluctuaciones de punto cero buscamos una distribución de probabilidad $W_e(\mathcal{E})$ que maximice la entropía S_e definida como²³ (aquí c es una constante con dimensiones de energía)

$$S_e = -k_B \int W_e(\mathcal{E}) \ln cW_e(\mathcal{E}) d\mathcal{E}, \quad (1.76)$$

²² Al menos deben considerarse las fluctuaciones que conducen al ancho natural de línea. Al respecto véase, por ejemplo, la ref. [50].

²³ Nótese que esta cantidad difiere de la entropía termodinámica (véase la ec. (1.8)) la cual está definida a partir de una distribución en el espacio fase. En el caso presente permitimos que la energía \mathcal{E} sea una cantidad fluctuante a *toda* temperatura y recurrimos a la entropía (1.76) entendida más generalmente como una medida del desorden (véase, por ejemplo, la ref. [51]).

y que arroje el siguiente valor —válido a temperatura arbitraria y en particular, a todo valor de \mathcal{E}_0 — para la varianza:

$$(\sigma_{\mathcal{E}}^2)_e = U^2. \quad (1.77)$$

Hemos agregado el subíndice e en esta expresión para indicar que los promedios se hacen empleando la distribución W_e y distinguirlos de aquellos calculados con W_g .

El requerimiento (1.77) corresponde a demandar que el resultado de Lorentz,²⁴ válido para el campo a $T \neq 0$, mantenga su validez cuando al campo se le ha agregado una contribución de vacío. Más aún, el hecho de que la descripción estadística se refiera al campo *completo* nos permite recurrir al argumento adicional de que las fluctuaciones se originan por la interferencia entre un gran número de modos (monocromáticos) independientes, de tal forma que es aplicable el teorema del límite central^[52, 53] y en consecuencia la varianza debe corresponder a la de una distribución normal (en el espacio fase, como quedará claro más adelante) cuya forma es precisamente la que aparece en (1.77).

En el formalismo de máxima entropía se busca determinar la distribución $W_e(\mathcal{E})$ que maximiza a la función S_e y que está sujeta a ciertas condiciones auxiliares. Si éstas se toman iguales a

$$\int W_e(\mathcal{E})d\mathcal{E} = 1, \quad \int \mathcal{E}W_e(\mathcal{E})d\mathcal{E} = U \quad (1.78)$$

entonces, aplicando el método de multiplicadores de Lagrange, obtenemos que la condición $\delta S_e = 0$ nos permite escribir^[28, 32]

$$\int [-\lambda_1 - \lambda_2\mathcal{E} - k_B \ln cW_e(\mathcal{E})] \delta W_e(\mathcal{E})d\mathcal{E} = 0, \quad (1.79)$$

con λ_1 y λ_2 los dos multiplicadores que han de determinarse. De esta ecuación se desprende que

$$-\lambda_1 - \lambda_2\mathcal{E} - k_B \ln cW_e(\mathcal{E}) = k_B, \quad (1.80)$$

de donde se obtiene finalmente

$$W_e(\mathcal{E}) = \frac{1}{c} \exp \left[-\left(1 + \frac{\lambda_1}{k_B} + \frac{\lambda_2}{k_B} \mathcal{E}\right) \right]. \quad (1.81)$$

²⁴Véase la nota 15.

1.6. Una distribución de probabilidad cuántica

Si ahora imponemos las condiciones (1.78) encontramos

$$1 + \frac{\lambda_1}{k_B} = \ln \frac{U}{c}, \quad \frac{\lambda_2}{k_B} = \frac{1}{U}, \quad (1.82)$$

y en consecuencia la $W_e(\mathcal{E})$ que maximiza la entropía está dada por

$$W_e(\mathcal{E}) = \frac{1}{U} e^{-\mathcal{E}/U}. \quad (1.83)$$

Más aún, la varianza calculada con esta distribución en efecto tiene la forma de la ec. (1.77).

La selección $U = \beta^{-1}(\mathcal{E}_0 = 0)$ conduce a la distribución canónica usual, ec. (1.12a), y por lo tanto a la expresión clásica (1.47). Pero para $\mathcal{E}_0 \neq 0$, con la U que corresponde a la ley de Planck, las fluctuaciones totales resultantes son (con U_T dada por la ec. (1.49))²⁵

$$(\sigma_{\mathcal{E}}^2)_e = U^2 = (U_T + \mathcal{E}_0)^2 = U_T^2 + 2\mathcal{E}_0 U_T + \mathcal{E}_0^2. \quad (1.84)$$

Esta ecuación generaliza el resultado (1.47) e incluye ambas: las fluctuaciones y la energía *atérmicas*. Así, en la descripción provista por W_e la energía no tiene un valor fijo a temperatura cero sino que es una cantidad fluctuante, y las correspondientes fluctuaciones atérmicas tienen una magnitud igual a \mathcal{E}_0^2 . Las fluctuaciones térmicas $(\sigma_{\mathcal{E}}^2)_T$ son, de acuerdo con (1.84),

$$(\sigma_{\mathcal{E}}^2)_T = (\sigma_{\mathcal{E}}^2)_e - \mathcal{E}_0^2 = U_T^2 + 2\mathcal{E}_0 U_T, \quad (1.85)$$

en concordancia con la ec. (1.51).²⁶

Ahora descomponemos la energía total en dos contribuciones *fluctuantes*,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_T + \mathcal{E}_0, \quad (1.86)$$

donde \mathcal{E}_T y \mathcal{E}_0 representan las energías térmica y atérmica, respectivamente. Las fluctuaciones totales son

$$(\sigma_{\mathcal{E}}^2)_e = \sigma_{\mathcal{E}_T}^2 + \sigma_{\mathcal{E}_0}^2 + 2\Gamma(\mathcal{E}_T, \mathcal{E}_0) = U_T^2 + 2\mathcal{E}_0 U_T + \mathcal{E}_0^2, \quad (1.87)$$

²⁵Obsérvese que es la separación formal de U en dos términos, $U = U_T + \mathcal{E}_0$, lo que introduce un término lineal en la ec. (1.51) al tomar en cuenta solo $(\sigma_{\mathcal{E}}^2)_T$.

²⁶Este resultado verifica que la $\sigma_{\mathcal{E}}^2$ que aparece en la ec. (1.46) representa las fluctuaciones de naturaleza térmica, pues de las totales (U^2) se han extraído las de punto cero (o atérmicas) (\mathcal{E}_0^2).

con $\Gamma(\mathcal{E}_T, \mathcal{E}_0)$ la covariancia de \mathcal{E}_T y \mathcal{E}_0

$$\Gamma(\mathcal{E}_T, \mathcal{E}_0) \equiv \langle \mathcal{E}_T \mathcal{E}_0 \rangle - \langle \mathcal{E}_T \rangle \langle \mathcal{E}_0 \rangle. \quad (1.88)$$

Si escribimos $(\sigma_{\mathcal{E}}^2)_T = \sigma_{\mathcal{E}_T}^2$ y comparamos la expresión (1.85) con (1.87) (haciendo $\sigma_{\mathcal{E}_0}^2 = \mathcal{E}_0^2$) concluimos que $\Gamma(\mathcal{E}_T, \mathcal{E}_0) = 0$, y consecuentemente que las fluctuaciones de \mathcal{E}_T y \mathcal{E}_0 son estadísticamente independientes, como es de esperarse debido a la independencia de sus fuentes.

El hecho de que $(\sigma_{\mathcal{E}}^2)_e \neq 0$ a $T = 0$ confirma que en efecto W_e no está limitada a una descripción termodinámica sino que corresponde a una descripción estadística, que comprende fluctuaciones adicionales a las térmicas.

1.6.2. Fluctuaciones cuánticas y la energía de punto cero

Hemos visto que la descripción estadística proporcionada por la distribución de probabilidad W_e conduce de manera natural a las fluctuaciones de punto cero, y que la energía de punto cero es crucial para abandonar la descripción clásica y establecer contacto con la cuántica. A continuación investigaremos cómo se manifiestan estas fluctuaciones atérmicas en las propiedades estadísticas del ensemble de osciladores, con el fin de relacionarlas con las fluctuaciones propias de los sistemas cuánticos.

A partir de la expresión para la energía del oscilador armónico²⁷

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (1.89)$$

es posible pasar de la distribución de probabilidad $W_e(\mathcal{E})$ a una distribución $w_e(q, p)$ definida en el espacio fase. Para ello introducimos una nueva pareja de variables (\mathcal{E}, θ) relacionadas con las variables (q, p) de acuerdo con la transformación²⁸

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2m\mathcal{E}} \cos \theta, \\ q &= \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \sin \theta, \end{aligned} \quad (1.90)$$

de manera que $\theta = \omega t$ coincide con la variable de ángulo mientras que \mathcal{E} se relaciona con la variable de acción J en la forma $J = \mathcal{E}/\omega$.

Ahora bien, si $\frac{\partial(p,q)}{\partial(\mathcal{E},\theta)} = \left| \frac{\partial(\mathcal{E},\theta)}{\partial(p,q)} \right|^{-1}$ es el jacobiano de la transformación (1.90),

²⁷Para los osciladores del campo debemos tomar $m = 1$ en esta expresión.

²⁸Esta transformación difiere de una canónica sólo por el factor constante ω de su jacobiano.

1.6. Una distribución de probabilidad cuántica

entonces $w_e(q, p)$ está dada por^[54, 55]

$$w_e(p, q) = W_e(\mathcal{E}(p, q), \theta(p, q)) \left| \frac{\partial(\mathcal{E}, \theta)}{\partial(q, p)} \right|, \quad (1.91)$$

donde $W_e(\mathcal{E}, \theta)$ es la distribución conjunta en las variables \mathcal{E} y θ , que se reduce a $W_e(\mathcal{E})$ haciendo

$$W_e(\mathcal{E}) = \int_0^{2\pi} W_e(\mathcal{E}, \theta) d\theta. \quad (1.92)$$

Para obtener la distribución $w_e(p, q)$ resta entonces determinar la forma de $W_e(\mathcal{E}, \theta)$. Con este propósito notamos que para un sistema de osciladores armónicos en equilibrio las superficies de energía constante son independientes de θ , de modo que todos los valores de θ son igualmente probables, lo que nos permite escribir

$$W_e(\mathcal{E}, \theta) = \frac{1}{2\pi} W_e(\mathcal{E}). \quad (1.93)$$

Finalmente, sustituyendo (1.93) en (1.91) y tomando en cuenta que $\frac{\partial(p, q)}{\partial(\mathcal{E}, \theta)} = \left| \frac{\partial(\mathcal{E}, \theta)}{\partial(p, q)} \right|^{-1} = \omega^{-1}$, encontramos que $w_e(p, q)$ está dada por

$$\begin{aligned} w_e(p, q) &= \frac{\omega}{2\pi} W_e(\mathcal{E}(p, q)) \\ &= \frac{\omega}{2\pi U} \exp\left(-\frac{p^2 + m^2\omega^2 q^2}{2mU}\right), \end{aligned} \quad (1.94)$$

distribución que, con $U = \mathcal{E}_0 \coth \mathcal{E}_0 \beta$, coincide con la función de Wigner para el oscilador armónico.^[56]

En este punto es conveniente calcular la entropía S_{Wigner} que se obtiene a partir de $w_e(p, q)$ según lo indica la definición (1.8). Resulta entonces (aquí s' es una constante apropiada con dimensiones de acción)

$$S_{\text{Wigner}} = -k_B \int w_e(p, q) \ln s' w_e(p, q) dpdq = k_B - k_B \ln \frac{s' \omega}{2\pi U}, \quad (1.95)$$

expresión que al compararse con la ec. (1.5) muestra que la entropía S_{Wigner} asociada a w_e no coincide con la entropía S asociada a una distribución termodinámica. Este resultado es natural de acuerdo con lo dicho en el último párrafo de la subsección anterior, ya que S_{Wigner} (a diferencia de S) contempla las fluctuaciones de índole

atérmica. Más aún, de la ec. (1.95) se deriva que

$$\frac{\partial S_{\text{Wigner}}}{\partial U} = \frac{k_B}{U}, \quad (1.96)$$

mientras que la entropía S satisface la ec. (1.52),

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}. \quad (1.97)$$

Se ve de aquí que S y S_{Wigner} coinciden únicamente cuando $U = k_B T$, es decir, cuando $\mathcal{E}_0 = 0$. Concluimos entonces que la existencia de una energía *fluctuante* de punto cero va acompañada de la introducción de una entropía *estadística* (calculada con distribuciones W_e o bien w_e) o equivalentemente, de una redefinición de la temperatura $\beta \rightarrow 1/U(\beta)$. Una discusión acerca de este punto puede encontrarse en la referencia [57].

Volviendo a la distribución (1.94), vemos que ella puede factorizarse como un producto de dos distribuciones normales,

$$w_e(p, q) = w_p(p)w_q(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_p^2}} e^{-p^2/2\sigma_p^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_q^2}} e^{-q^2/2\sigma_q^2}, \quad (1.98)$$

con $\sigma_p^2 = mU$ y $\sigma_q^2 = U/m\omega^2$. De aquí se encuentra que

$$\sigma_q^2 \sigma_p^2 = \frac{U^2}{\omega^2} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{\omega^2} + \frac{\sigma_{\mathcal{E}_T}^2}{\omega^2} \geq \frac{\mathcal{E}_0^2}{\omega^2} = \frac{\hbar^2}{4}, \quad (1.99)$$

donde hemos usado la ec. (1.46) (con $\sigma_{\mathcal{E}}^2$ apropiadamente reescrita como $\sigma_{\mathcal{E}_T}^2$) para escribir la segunda igualdad, y la expresión $\mathcal{E}_0 = \hbar\omega/2$ para escribir la última.

Se observa en la ecuación anterior que la magnitud de $\sigma_q^2 \sigma_p^2$ está acotada por debajo debido a las fluctuaciones de la energía de punto cero (el valor mínimo para este producto, $\hbar^2/4$, se alcanza sólo cuando todas las fluctuaciones térmicas se anulan), de modo que la ec. (1.99) nos permite identificar el origen de las desigualdades de Heisenberg (en las cuadraturas de los osciladores) con la presencia de una energía *fluctuante* de punto cero. De acuerdo con lo anterior, la explicación y el significado de estas desigualdades les son ajenas a aquellas descripciones proporcionadas por las distribuciones de probabilidad térmicas como W_g . Este resultado refuerza la observación de que una vez que la energía de punto cero ha sido introducida en la teoría, se requieren nuevas distribuciones de probabilidad (específicamente estadísticas más que termodinámicas) para dar cuenta de sus fluctuaciones y recuperar las propiedades estadísticas cuánticas correspondientes. Por último, conviene mencionar que las de-

1.6. Una distribución de probabilidad cuántica

sigualdades de Heisenberg deben entenderse como referidas a resultados estadísticos —a promedios sobre ensembles— debido a la naturaleza estadística de la ecuación (1.99).

Capítulo 2

La mecánica cuántica como una propiedad emergente de la interacción campo-materia

En el capítulo anterior vimos que cuando un campo *fluctuante* (estocástico) de radiación que posee una contribución de punto cero se halla en interacción con la materia, alcanza estados de equilibrio que escapan a un tratamiento clásico y en cambio son consistentes con una descripción cuántica. Aquellos resultados muestran que el origen y el significado físico de las propiedades corpusculares del campo dependen centralmente de su contribución de vacío, pero claramente son también resultado de su interacción con la materia. De esta observación surge la pregunta acerca de cuáles son las implicaciones de la interacción campo-materia, ya no sobre los osciladores de radiación sino sobre la materia misma.

En relación con esto, es preciso destacar los resultados de recientes análisis numéricos del comportamiento estadístico de un electrón atómico, no relativista, inmerso en el campo de punto cero.^{[58]-[63]} En estos trabajos los autores toman como condición inicial una órbita circular alrededor del núcleo con un radio del orden del radio de Bohr; luego realizan diferentes corridas para simular un ensemble estadístico. Tras un tiempo suficientemente largo, la distribución espacial resultante claramente se aproxima a la predicha por la mecánica cuántica para el estado base del átomo de hidrógeno. Se verifica también que la eliminación del campo de punto cero conduce al rápido colapso del electrón hacia el núcleo atómico. Queda claro de estos resultados que el campo juega un papel decisivo en la dinámica del subsistema mecánico, al desviar el comportamiento —por lo demás clásico— del electrón atómico hacia uno

que reconocemos como cuántico. Se desprende de aquí que la interacción del campo fluctuante de punto cero con la materia no sólo afecta la estructura misma del campo de radiación, como se vio en el capítulo anterior, sino que también altera en forma drástica el comportamiento de las partículas inmersas en él. Esta observación es de suma importancia, ya que sugiere entender al campo de punto cero como la entidad física que da origen al fenómeno cuántico, y a la interacción campo-materia como el proceso responsable de dicho fenómeno.

El presente capítulo está dedicado precisamente a explorar esta hipótesis desde la perspectiva de la Electrodinámica Estocástica Lineal (EDEL).¹ El punto de partida de la teoría consiste en introducir el campo de punto cero (en permanente interacción con la materia) como parte fundamental del sistema físico, para después profundizar en la descripción estadística del subsistema mecánico una vez que se ha alcanzado un estado estacionario.² Sin embargo, si bien la presencia (y acción) del campo de punto cero es un principio fundamental de la EDEL, no es el único. Como se verá a lo largo de la exposición, la demanda *ergódica* impuesta sobre las soluciones estacionarias de la ecuación de movimiento del subsistema mecánico constituye el elemento que, en última instancia, conduce a la formulación matricial de la mecánica cuántica.³

Los resultados obtenidos no sólo proveen un marco teórico que permite entender los resultados de los experimentos numéricos antes mencionados; también revelan algunos de los mecanismos físicos detrás del fenómeno cuántico, y dejan ver que las propiedades cuánticas de la materia no son intrínsecas a ella (como tampoco las propiedades discretas del campo son intrínsecas a éste) sino que constituyen una propiedad *emergente*, resultado de su interacción con el campo de fondo. Más aún, al mostrar que la formulación cuántica usual es una descripción válida sólo en ciertas aproximaciones, la teoría aquí expuesta abre la puerta a una física que rebasa los dominios de la mecánica cuántica.

¹Anteriores versiones de la EDEL pueden verse en las refs. [16] y [64]-[67]. El material que se presenta en este capítulo corresponde a la forma más desarrollada de la teoría, y constituye una versión ampliada del trabajo [68].

²Este acercamiento al problema va en la línea de los resultados numéricos arriba mencionados, los cuales corroboran que el comportamiento cuántico es uno de naturaleza estadística (se refiere a un ensemble de partículas) y asintótica (se observa a tiempos suficientemente largos).

³De hecho, el principio ergódico que introduce la EDEL constituye una ruptura definitiva con la EDE, además de que proporciona una base física para justificar algunas de las hipótesis hechas en versiones anteriores de la misma EDEL.

2.1. Introducción del campo de punto cero en la dinámica del sistema mecánico

2.1.1. Introducción del campo estocástico de fondo

El sistema físico que consideraremos se compone de una partícula de carga eléctrica e que está sujeta a una fuerza externa $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y se encuentra inmersa en un campo *estocástico* de radiación cualquiera, excepto por que éste contendrá siempre su componente de vacío, cuya energía media por modo de frecuencia ω es $\mathcal{E}_0 = \hbar\omega/2$.⁴ El sistema completo está caracterizado por un hamiltoniano que puede expresarse en términos de las variables canónicas $(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ de la partícula y las cuadraturas $(q_{\mathbf{k}\lambda}(t), p_{\mathbf{k}\lambda}(t))$ del campo. A partir de las ecuaciones de Hamilton es posible eliminar estas últimas, lo que nos permite obtener la ley de movimiento para el subsistema mecánico.⁵ Ésta se reduce, en la aproximación no relativista, a la ecuación de

⁴Dado que e es la constante de acoplamiento de la partícula al campo surge la pregunta de qué ocurre en el caso de partículas neutras. Una posible respuesta, basada en el hecho de que el comportamiento de la partícula es independiente de la intensidad del acoplamiento, es que todas las partículas interactúan con al menos un campo de vacío, lo que en cada caso podría conducir a conclusiones similares a las que aquí se alcanzan. En el contexto de sistemas cuánticos no relativistas tales como sistemas atómicos o moleculares, es razonable suponer que la respuesta al campo electromagnético es dominante, de manera que el efecto del resto de campos es despreciable. Otra posibilidad es la de considerar el acoplamiento (siempre presente) de los multipolos superiores con el campo de fondo. Debemos señalar, sin embargo, que dichas generalizaciones aún no han sido llevadas a cabo. Para algunas discusiones acerca de este punto véase la ref. [16].

⁵La ecuación de movimiento que se obtiene tras eliminar las variables del campo es (véase por ejemplo la ref. [16])

$$m' \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} + \mathbf{F}_{\text{Lorentz}}^{(\text{libre})} + \mathbf{F}_{\text{auto}},$$

donde $\mathbf{F}_{\text{Lorentz}}^{(\text{libre})}$ es la fuerza de Lorentz debida al campo libre —que escribimos como $e\mathbf{E}$ en la aproximación no relativista— y \mathbf{F}_{auto} es la fuerza que la radiación emitida por la propia partícula ejerce sobre ella misma. En el régimen no relativista y recurriendo a la aproximación de onda larga dicha fuerza puede reescribirse como

$$\mathbf{F}_{\text{auto}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\ddot{\mathbf{x}}} - \delta m \ddot{\mathbf{x}}, \quad \text{con} \quad \delta m = \frac{4e^2}{3\pi c^3} \int_0^\infty d\omega.$$

El primer término que aparece en esta fuerza representa la reacción de radiación, mientras que el segundo constituye una contribución al término $m' \ddot{\mathbf{x}}$ en la ecuación de movimiento, lo que resulta en la masa *renormalizada*

$$m = m' + \delta m.$$

La contribución infinita del término δm , que es consecuencia de suponer que la partícula es puntual, puede eliminarse tomando una frecuencia de corte adecuada ω_c en la integral anterior, resultando $\delta m/m \simeq \tau\omega_c$, cantidad que es del orden de α para una frecuencia de corte dada por la frecuencia de Compton, $\omega_C = mc^2/\hbar$. La ecuación de movimiento, reescrita en términos de la masa renormalizada m es entonces la ecuación de Abraham-Lorentz, ec. (2.1).

2.1. Introducción del campo de punto cero en la dinámica del sistema mecánico

Abraham-Lorentz (m es la masa renormalizada de la partícula)⁶

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + m\tau\dddot{\mathbf{x}} + e\mathbf{E}(\mathbf{x},t), \quad \tau = \frac{2e^2}{3mc^3}. \quad (2.1)$$

Para expresar la componente eléctrica $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ del campo de radiación de fondo recurrimos, como es usual, a un desarrollo en ondas planas de la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \sum_{\mathbf{k},\lambda=1,2} \tilde{E}(\omega_k) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\lambda} a_{\mathbf{k},\lambda} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\omega_k t} + \text{c.c.} \quad (2.2)$$

La amplitud $\tilde{E}(\omega_k)$ determina la energía media de cada uno de los modos (\mathbf{k}, λ) que corresponden a una misma frecuencia $\omega_k = c|\mathbf{k}| = ck$, $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\lambda}$ es un vector unitario de polarización anclado y normal al vector de onda \mathbf{k} y $a_{\mathbf{k},\lambda}$ es una variable estocástica escalar que provee al campo de sus propiedades estocásticas.

El vector definido en el plano perpendicular a \mathbf{k} ,

$$\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \equiv \sum_{\lambda} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\lambda} a_{\mathbf{k},\lambda} = \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},1} a_{\mathbf{k},1} + \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},2} a_{\mathbf{k},2}, \quad (2.3)$$

cuyas componentes a lo largo de cada vector de polarización $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\lambda}$ están dadas por las variables estocásticas $a_{\mathbf{k},\lambda}$, nos permite reescribir la ecuación (2.2) en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x},t) &= \sum_{\mathbf{k}} \tilde{E}(\omega_k) \left[\int_{\Omega_{\mathbf{k}}} d\Omega_{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] e^{i\omega_k t} + \text{c.c.} \\ &\equiv \sum_{\mathbf{k}} \tilde{E}(\omega_k) \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) e^{i\omega_k t} + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

⁶Es oportuno mencionar que la presencia del término $\dddot{\mathbf{x}}$ en la ecuación de movimiento da lugar a un comportamiento acausal, como la pre-aceleración. Ello puede verse si escribimos la ecuación en la forma aproximada (con $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}}$)

$$m(\mathbf{a}(t) - \tau\dot{\mathbf{a}}(t)) \approx m\mathbf{a}(t - \tau) = \mathbf{F}(t),$$

de donde se tiene que $m\mathbf{a}(t) = \mathbf{F}(t + \tau)$ y consecuentemente que la aceleración al tiempo t depende de un tiempo *posterior* $t + \tau$. No obstante, semejante fenómeno no representa una dificultad en el presente tratamiento pues la pre-aceleración ocurre durante intervalos de tiempo del orden de τ . Para tiempos del orden de $\hbar/mc^2 \simeq \tau/\alpha = 137\tau$ la desigualdad tiempo-energía de Heisenberg predice fluctuaciones de la energía que caen fuera de todo tratamiento no relativista de interés cuántico.

Las dificultades asociadas al término $\ddot{\mathbf{x}}$ de la ecuación de Abraham-Lorentz son características de la teoría electromagnética y pueden resolverse recurriendo a una estructura efectiva de la carga. La importancia que adquiere el término radiativo de la ec. (2.1) (que contiene a $\ddot{\mathbf{x}}$) dentro del presente contexto quedará más clara en la siguiente subsección, donde se discute que es precisamente dicho término el que permite que el sistema alcance en efecto un estado estacionario.

donde se ha definido

$$\mathbf{a}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\omega_k, \mathbf{x}) \equiv \int_{\Omega_{\mathbf{k}}} d\Omega_{\mathbf{k}} \bar{\mathcal{A}}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (2.5)$$

El vector $\mathbf{a}_k(\mathbf{x})$ representa entonces el promedio angular sobre todos los modos que corresponden a la misma frecuencia ω_k . Cada una de sus componentes, $a_j(\omega_k, \mathbf{x})$ (con $j = 1, 2, 3$) es una variable estocástica adimensional que satisface la relación

$$a_j^*(\omega_k, \mathbf{x}) = a_j(-\omega_k, \mathbf{x}) \quad \text{para} \quad \omega_k \geq 0, \quad (2.6)$$

como consecuencia de la naturaleza real del campo.

De la expresión (2.5) se sigue que las propiedades estadísticas de las variables promediadas $\mathbf{a}_k(\mathbf{x})$ no necesariamente reproducirán aquéllas propias de las variables originales $a_{\mathbf{k},\lambda}$. Es usual suponer que el campo en ausencia de materia es el más desordenado posible, de tal forma que las $a_{\mathbf{k},\lambda}$ son variables estadísticamente independientes que siguen una distribución normal; sin embargo, el promedio (2.5) así como la presencia de materia pueden modificar algunas de estas propiedades en las variables $a_j(\omega_k, \mathbf{x})$. Por esta razón debemos permitir que sea la teoría misma la que establezca las nuevas propiedades de dichas variables (como ocurre en la ec. (2.77) más abajo), aunque mantendremos la hipótesis de que se trata de cantidades estadísticamente independientes.

2.1.2. Estacionariedad

Al considerar el sistema compuesto campo-partícula es claro que en su interacción ambas entidades físicas intercambian energía. En particular, el hamiltoniano H de la partícula está dado por

$$H = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + V(\mathbf{x}) - m\tau\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}}, \quad (2.7)$$

donde $V(\mathbf{x})$ es el potencial asociado a la fuerza externa $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Derivando esta expresión y usando la ecuación de movimiento (2.1) obtenemos

$$\frac{dH}{dt} = -m\tau\dot{\mathbf{x}}^2 + e\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.8)$$

lo que muestra que la evolución del hamiltoniano de la partícula obedece a que ésta radía, como se sigue de la contribución $-m\tau\dot{\mathbf{x}}^2$, a la vez que absorbe energía del campo, como lo indica la presencia del término $e\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}$. Las soluciones estacionarias

2.1. Introducción del campo de punto cero en la dinámica del sistema mecánico

corresponden a aquellas en las que se ha establecido un equilibrio en promedio entre la potencia radiada y la potencia absorbida, es decir, corresponden a las soluciones de la ecuación de movimiento que satisfacen la condición asintótica ($t \rightarrow \infty$) $\langle dH/dt \rangle = 0$, o bien

$$e \langle \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E} \rangle = m\tau \left\langle \ddot{\mathbf{x}}^2 \right\rangle, \quad (2.9)$$

donde los paréntesis $\langle \cdot \rangle$ indican el promedio sobre todas las realizaciones del campo, o en forma equivalente el promedio sobre un ensemble de sistemas.⁷

Lo anterior deja ver la importancia de los dos últimos términos en la ecuación de movimiento (2.1) en el proceso que conduce al equilibrio mecánico del sistema. Así pues, los efectos radiativos son muy significativos en un principio;⁸ sin embargo, una vez que se ha alcanzado el equilibrio mecánico dichos términos se tornan despreciables dando lugar únicamente a correcciones radiativas, como se verá más adelante.

En lo que sigue supondremos que es válida la aproximación de onda larga, es decir, que las frecuencias de interés son tales que $\lambda_k = 2\pi c/\omega_k$ es grande comparada con las longitudes características del sistema. De esta manera supondremos que las amplitudes (relevantes al problema) del campo cambian de manera apreciable sólo a distancias mucho mayores que la desviación de la partícula con respecto a su posición de equilibrio \mathbf{x}^0 , lo que nos permite reemplazar $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ por $\mathbf{E}(\mathbf{x}^0, t)$ en la ec. (2.1).⁹ Más aún, restringiremos el estudio al caso unidimensional (suponiendo que la dirección del movimiento es $\hat{\mathbf{z}}$), y colocaremos el origen de coordenadas precisamente en \mathbf{x}^0 . El desarrollo del campo se reduce entonces a (véase la ec. (2.4))

$$\begin{aligned} E(t) &= \mathbf{E}(t) \cdot \hat{\mathbf{z}} = \sum_k \tilde{E}(\omega_k) (\mathbf{a}_k(0) \cdot \hat{\mathbf{z}}) e^{i\omega_k t} + \text{c.c.} \\ &= \sum_k \tilde{E}(\omega_k) a(\omega_k) e^{i\omega_k t} + \text{c.c.} \\ &= \sum_k \tilde{E}_k a_k e^{i\omega_k t} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde hemos definido $a(\omega_k) = a_k = \mathbf{a}_k(0) \cdot \hat{\mathbf{z}}$. Una vez hechas estas aproximaciones

⁷Tal equivalencia se discute al inicio de la subsección 2.2.2.

⁸De hecho, la presencia del término $m\tau\ddot{\mathbf{x}}$ es decisiva para entender la estabilidad mecánica del sistema. En el caso atómico, su importancia es justamente la señalada por Nernst,^[10] pues permite entender la existencia de estados estacionarios atómicos no sólo a pesar de la radiación emitida por la partícula, sino gracias a ella, compensando la energía absorbida en la interacción con el campo de fondo.

⁹Como estamos interesados principalmente en sistemas atómicos, consideraremos que λ_k es del orden de $10a_B$ o mayor (para átomos ligeros) donde a_B representa el radio de Bohr. Para átomos más pesados debemos tomar longitudes de onda superiores a $\lambda_{\text{Ryd}} = 4\pi\hbar^3 c/(m\epsilon^4) \sim a_B/\alpha$.

podemos reescribir la ecuación de movimiento en la forma

$$m\ddot{x} = f(x) + m\tau\ddot{x} + eE(t), \quad (2.11)$$

con $E(t)$ dado por (2.10).

2.2. Soluciones resonantes en el régimen estacionario

2.2.1. Respuesta resonante

Nuestro estudio se centrará en las soluciones estacionarias $x^{\text{est}}(t)$ de la ec. (2.11), las cuales, tras haberse alcanzado el estado estacionario, pueden descomponerse en dos partes: una independiente del tiempo y que coincide con el promedio temporal $(\overline{(\cdot)})^t$ definido como

$$\overline{x^{\text{est}}(t)}^t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^{\text{est}}(t) dt, \quad (2.12)$$

y otra, oscilatoria y estocástica, que promedia a cero temporalmente. Supondremos entonces que las soluciones estacionarias de (2.11) pueden escribirse en la forma

$$x^{\text{est}}(t) = \overline{x^{\text{est}}(t)}^t + \sum_{k(\neq 0)} (\tilde{x}_k a_k e^{i\omega_k t} + \text{c.c.}), \quad (2.13)$$

donde se ha excluido de la suma el término correspondiente a la frecuencia nula $\omega_0 = 0$. El término \tilde{x}_k en esta expresión es una amplitud (en principio estocástica) asociada a la frecuencia ω_k , a_k es la variable estocástica heredada del campo (2.10) y toda la dependencia temporal está contenida en el factor $e^{i\omega_k t}$.

Por simplicidad en la escritura definimos la variable

$$\hat{x}(t) = \sum_k \tilde{x}_k a_k e^{i\omega_k t} + \text{c.c.} \quad (2.14)$$

$$= (\tilde{x}_0 a_0 + \text{c.c.}) + \sum_{k(\neq 0)} (\tilde{x}_k a_k e^{i\omega_k t} + \text{c.c.}), \quad (2.15)$$

cuya parte no oscilatoria se relaciona con $\overline{x^{\text{est}}(t)}^t$ de acuerdo con

$$\overline{x^{\text{est}}(t)}^t = \frac{1}{2}(\tilde{x}_0 a_0 + \text{c.c.}). \quad (2.16)$$

Con esta definición $\hat{x}(t)$ y $x^{\text{est}}(t)$ difieren únicamente en sus promedios temporales, y

2.2. Soluciones resonantes en el régimen estacionario

$\hat{x}(t)$ se reduce a $x^{\text{est}}(t)$ mediante la transformación

$$(\tilde{x}_0 a_0 + \text{c.c.}) \rightarrow \frac{1}{2}(\tilde{x}_0 a_0 + \text{c.c.}), \quad (2.17)$$

es decir, multiplicando por 1/2 los términos correspondientes a la frecuencia nula.

Por lo que respecta a la fuerza externa $f(x)$ supondremos que puede desarrollarse en una serie de potencias de x ,

$$f(x(t)) = c_1 x(t) + c_2 x^2(t) + c_3 x^3(t) + \dots, \quad (2.18)$$

y que una vez alcanzado un estado estacionario puede descomponerse en forma análoga a (2.13)

$$f^{\text{est}}(t) = \overline{f^{\text{est}}(t)}^t + \sum_{k(\neq 0)} \left(\tilde{f}_k a_k e^{i\omega_k t} + \text{c.c.} \right), \quad (2.19)$$

si bien optamos por trabajar con la expresión

$$\hat{f} = \sum_k \tilde{f}_k a_k e^{i\omega_k t} + \text{c.c.}, \quad (2.20)$$

cuya relación con $f^{\text{est}}(t)$ es análoga a aquella que existe entre \hat{x} y $x^{\text{est}}(t)$. Es importante resaltar que al escribir (2.20) hemos escrito convenientemente la componente de frecuencia ω_k en la forma $\tilde{f}_k a_k$, aunque en principio las cantidades \tilde{f}_k pueden depender de las variables a_k ; esta observación es válida en particular para el caso $f = x$, y la amplitud $\tilde{x}_k a_k$ que aparece en (2.14).

Cuando sustituimos las expresiones (2.10), (2.14) y (2.20) en la ecuación de movimiento (2.11) obtenemos

$$-\sum_k m\omega_k^2 \tilde{x}_k a_k e^{i\omega_k t} + \text{c.c.} = \sum_k \left(\tilde{f}_k - im\tau\omega_k^3 \tilde{x}_k + e\tilde{E}_k \right) a_k e^{i\omega_k t} + \text{c.c.}, \quad (2.21)$$

lo que conduce a

$$-m\omega_k^2 \tilde{x}_k = \tilde{f}_k - im\tau\omega_k^3 \tilde{x}_k + e\tilde{E}_k, \quad (2.22)$$

de donde

$$\tilde{x}_k = -\frac{e}{m} \frac{\tilde{E}_k}{\omega_k^2 - i\tau\omega_k^3 + \frac{\tilde{f}_k}{m\tilde{x}_k}} \equiv -\frac{e}{m} \frac{\tilde{E}_k}{\Delta_k}, \quad (2.23a)$$

con

$$\Delta_k = \omega_k^2 - i\tau\omega_k^3 + \frac{\tilde{f}_k}{m\tilde{x}_k}. \quad (2.23b)$$

Vemos de aquí que las contribuciones importantes a la respuesta $\hat{x}(t)$ corresponden

a los polos de \tilde{x}_k , es decir, a aquellas frecuencias que satisfacen

$$\omega_k^2 \approx -\frac{\tilde{f}_k}{m\tilde{x}_k}. \quad (2.24)$$

Las resonancias a estas frecuencias son extremadamente angostas en virtud del valor de $\tau (= 2e^2/3mc^3)$ ($\sim 10^{-23}$ s para electrones); de hecho, para las frecuencias atómicas de interés resulta $\tau\omega \lesssim \tau\omega_{\text{Ryd}} \sim \alpha^3 \sim 10^{-7}$, donde $\omega_{\text{Ryd}} = 2\pi cR_{\text{Ryd}}$ y $R_{\text{Ryd}} = \alpha^2 mc/4\pi\hbar$. Le llamaremos $\{\omega_k\}_{\text{res}}$ al conjunto de soluciones de (2.24), y nos referiremos a sus elementos como *frecuencias de resonancia*.

2.2.2. La familia de soluciones estacionarias

La naturaleza aleatoria del campo en el que la partícula está inmersa le imprime a las soluciones de la ecuación de movimiento (2.11) su carácter fluctuante, de modo que estas últimas constituyen un proceso estocástico $x^{\text{est}(i)}(t)$, donde la variable i —que hemos omitido en las secciones precedentes— denota la dependencia de la función $x^{\text{est}}(t)$ en la realización i del campo presente.

Al considerar el conjunto $\{i\}$ de *todas* las realizaciones del campo se determina un ensemble de soluciones para una partícula, conjunto estadístico que puede reproducirse en forma equivalente considerando un ensemble de partículas cada una de las cuales está sujeta a *una* cierta realización (diferente) del campo. De esta forma, los promedios realizados sobre el ensemble de realizaciones (los cuales denotamos con $\overline{(\cdot)}^{(i)}$) pueden alcanzarse alternativamente promediando sobre el ensemble de partículas (promedio que denotamos con $\langle \cdot \rangle$). Así, por ejemplo, si el sistema mecánico consta de un oscilador armónico en equilibrio con el campo fluctuante de radiación, es posible extraer información estadística del sistema recurriendo a un ensemble de osciladores materiales en equilibrio con el campo de fondo. En ese caso podemos recurrir a la ec. (1.74) (aplicada a $f(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$) para escribir la energía media de los osciladores en la forma

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \mathcal{E}_n = \sum_i P_i \mathcal{E}^{(i)} = \overline{\mathcal{E}^{(i)}}^{(i)}, \quad (2.25)$$

donde \mathcal{E}_n y w_n están dadas por las ecs. (1.70) y (1.75), respectivamente, y P_i es la función de peso (con respecto al ensemble total $\{i\}$) asociada a la realización i .

De acuerdo con la discusión que le sigue a la ec. (1.75) el índice n que aquí aparece debe entenderse como uno que distingue entre los diferentes estados estacionarios accesibles al sistema, resultado que aunado a la ec. (2.25) sugiere descomponer el ensemble $\{i\}$ en diversos subensembles $\{i\}_n$ tales que la energía promediada

sobre sus elementos es precisamente \mathcal{E}_n . Es decir, $\{i\}_n$ es tal que

$$\sum_{i \in \{i\}_n} p_{i,n} \mathcal{E}^{(i)} = \mathcal{E}_n, \quad (2.26)$$

donde $p_{i,n}$ es la función de peso (con respecto al subensamble $\{i\}_n$) asociada a la realización $i \in \{i\}_n$.

Si bien la descomposición $\{i\} = \bigcup_n \{i\}_n$ surge de manera natural en el sistema de osciladores armónicos aquí estudiado, en lo que sigue haremos de dicha descomposición un ansatz válido para sistemas más generales. Es decir, supondremos que el ensemble de realizaciones $\{i\}$ puede descomponerse en diversos subensambles $\{i\}_\alpha$ de tal forma que el conjunto estadístico de soluciones estacionarias se divide en varios subensambles, cada uno de los cuales está conformado por aquellas partículas que han alcanzado un cierto estado estacionario identificado con el índice α .^{10,11} Más aún, por tratarse de un problema unidimensional dicho estado está completamente caracterizado por la energía mecánica alcanzada, y en consecuencia el índice α está en plena correspondencia con ésta.

En lo que sigue dirigiremos nuestra atención a un cierto subensamble $\{i\}_\alpha$, esto es, al subensamble de partículas que se hallan en el estado caracterizado por α , y construiremos los desarrollos apropiados para las diferentes variables dinámicas que corresponden a dicho subensamble.

Al restringirnos a un subensamble específico es claro que las frecuencias de interés del sistema (mismas que la teoría deberá determinar) son sólo un subconjunto (que depende de α) de todas las frecuencias ω_k . Así, a cada estado α le corresponde un (sub)conjunto de frecuencias, que llamaremos *frecuencias relevantes*, las cuales escribiremos en la forma $\omega_{\alpha\beta}$, donde el índice α indica el subensamble particular al que hacemos referencia y el índice β enumera las diferentes frecuencias del conjunto,

¹⁰En el caso particular de los osciladores armónicos el índice genérico α es precisamente n .

¹¹Semejante descomposición en subensambles constituye un requerimiento que claramente no se satisfará para *cualquier* sistema. Esto puede verse, por ejemplo, en el caso de osciladores armónicos con $\mathcal{E}_0 = 0$, para los cuales no existe la descomposición en la forma $\langle \mathcal{E} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \mathcal{E}_n$. En este ejemplo, y de acuerdo con lo que se vio en el capítulo 1, la condición $\mathcal{E}_0 \neq 0$ así como la condición (implícita) de equilibrio a una frecuencia dada —y consecuentemente a *cada* frecuencia del campo por separado— es crucial para la existencia de los subensambles $\{i\}_n$. Así, podemos pensar que la existencia de una energía de punto cero no nula y la condición de balance detallado (*i.e.*, satisfecho frecuencia a frecuencia) son condiciones necesarias para que surja la descomposición $\{i\}_\alpha$ en un sistema dado, lo que provee de justificación física al ansatz que hemos hecho. Con esto se entiende cómo es que la introducción del índice α es ajena a los tratamientos estocásticos usuales como aquellos descritos por la ecuación de Langevin, cuyas fuerzas estocásticas son esencialmente diferentes de las producidas por el campo de radiación de fondo (con contribución de vacío) y para las que no se demanda balance detallado.

2.2. Soluciones resonantes en el régimen estacionario

de tal forma que al variar β las diversas $\omega_{\alpha\beta}$ coinciden con las diferentes frecuencias ω_k que entran en juego para el subensamble caracterizado por α .¹²

Ahora bien, el hecho de que las amplitudes de la forma \tilde{A}_k y las variables a_k que aparecen en los desarrollos (2.10), (2.14) y (2.20) estén asociadas a la frecuencia ω_k , nos conduce a introducir la misma pareja de índices (α y β) en dichas cantidades —con un sentido idéntico al que ya hemos explicado en el caso de las $\omega_{\alpha\beta}$ — de tal forma que escribiremos $\tilde{E}_{\alpha\beta}$, $\tilde{x}_{\alpha\beta}$ y $\tilde{f}_{\alpha\beta}$ en lugar de \tilde{E}_k , \tilde{x}_k y \tilde{f}_k , respectivamente, y $a_{\alpha\beta}$ en sustitución de a_k . Así, el paso de una descripción referida al ensemble completo ($\{i\}$) a otra restringida al subensamble caracterizado por α ($\{i\}_\alpha$) viene acompañado de las sustituciones: $\hat{A}(t) \rightarrow \hat{A}_\alpha(t)$, $\omega_k \rightarrow \omega_{\alpha\beta}$ y $a_k \rightarrow a_{\alpha\beta}$ en la expresión de los diferentes desarrollos (del tipo (2.14)) de la variable genérica $\hat{A}(t)$. Tenemos entonces que la expresión para la respuesta $\hat{x}_\alpha(t)$, representativa de una partícula que ha alcanzado el estado estacionario α , tiene la forma^{13,14}

$$\hat{x}_\alpha(t) = \sum_{\beta} \tilde{x}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} + c.c. \quad (2.27)$$

Por su parte, la expresión que sustituye a (2.10) es¹⁵

$$\hat{E}_\alpha(t) = \sum_{\beta} \tilde{E}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} + c.c., \quad (2.28)$$

mientras que el desarrollo (2.20) para la fuerza se reescribe como

$$\hat{f}_\alpha(t) = \sum_{\beta} \tilde{f}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} + c.c. \quad (2.29)$$

De nuevo, aquí los coeficientes $\tilde{f}_{\alpha\beta}$ (y en particular $\tilde{x}_{\alpha\beta}$) dependen en principio de

¹²En este sentido el índice β está asociado con el índice k de las sumas como (2.20).

¹³Nótese que al caracterizar las respuestas únicamente con el índice α , es decir, con el parámetro de la energía alcanzada, hemos dejado de lado toda referencia a las condiciones iniciales, de modo que la descripción subsecuente posee información parcial, relativa sólo al estado estacionario *final* que caracteriza al subensamble.

¹⁴Aquí debemos hacer notar que a diferencia de lo que ocurre en la ec. (2.14), el desarrollo (2.27) (y en general todos los desarrollos de la forma (2.27)) no necesariamente representa una separación explícita en frecuencias positivas y negativas (ya que $\omega_{\alpha\beta}$ no siempre es positiva; véase, por ejemplo, la ec. (A.5b) del Apéndice A). Así, el paso de la suma \sum_k a la suma \sum_β viene acompañado de un reacomodo de los sumandos. Más aún, en la suma \sum_β se han filtrado ya las frecuencias relevantes (que posteriormente serán determinadas) separándolas del resto de términos (asociados a otras frecuencias) que representan una contribución ruidosa.

¹⁵Nótese que la presencia de α en la expresión del campo muestra que éste posee información sobre el estado específico que alcanzó la partícula; es decir, el índice α en $\hat{E}_\alpha(t)$ distingue al campo que ha alcanzado el equilibrio con la partícula cuando ésta se halla en un estado estacionario α .

2.2. Soluciones resonantes en el régimen estacionario

las variables estocásticas $a_{\alpha\beta}$, de modo que en este punto los desarrollos anteriores no deben entenderse como desarrollos explícitos en dichas variables.

Finalmente, concluimos esta subsección generalizando los desarrollos de la forma (2.19) para introducir el índice α en la expresión de las diferentes variables dinámicas $A_\alpha^{\text{est}}(t)$:

$$A_\alpha^{\text{est}}(t) = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{\alpha\beta_0}a_{\alpha\beta_0} + \text{c.c.}) + \sum_{\beta(\neq\beta_0)} \left(\tilde{A}_{\alpha\beta}a_{\alpha\beta}e^{i\omega_{\alpha\beta}t} + \text{c.c.} \right), \quad (2.30)$$

donde β_0 es tal que $\omega_{\alpha\beta_0} = 0$.

2.2.3. Ecuación detallada de movimiento

La introducción del índice α para denotar las diferentes soluciones estacionarias nos conduce a reescribir la ecuación (2.11), para el estado estacionario α , en la forma

$$m \frac{d^2 \hat{x}_\alpha}{dt^2} = \hat{f}_\alpha + m\tau \frac{d^3 \hat{x}_\alpha}{dt^3} + e\hat{E}_\alpha. \quad (2.31)$$

Sustituyendo aquí los desarrollos (2.27), (2.28) y (2.29) obtenemos la generalización de la ecuación de movimiento (2.21) para el estado α

$$-\sum_{\beta} m\omega_{\alpha\beta}^2 \tilde{x}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} + \text{c.c.} = \sum_{\beta} \left(\tilde{f}_{\alpha\beta} - im\tau\omega_{\alpha\beta}^3 \tilde{x}_{\alpha\beta} + e\tilde{E}_{\alpha\beta} \right) a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} + \text{c.c.} \quad (2.32)$$

Cada uno de los sumandos que corresponden a una β dada es una amplitud asociada a la frecuencia relevante determinada por esa β particular. Si suponemos que existe un balance detallado a cada frecuencia relevante debemos esperar que las amplitudes asociadas a una misma β sean iguales. Ello conduce (reintroduciendo la dependencia temporal de cada uno de los términos) a

$$-m\omega_{\alpha\beta}^2 \tilde{x}_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} = \tilde{f}_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} - im\tau\omega_{\alpha\beta}^3 \tilde{x}_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} + e\tilde{E}_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t}, \quad (2.33)$$

o bien,

$$m \frac{d^2 \tilde{x}_{\alpha\beta}(t)}{dt^2} = \tilde{f}_{\alpha\beta}(t) + m\tau \frac{d^3 \tilde{x}_{\alpha\beta}(t)}{dt^3} + e\tilde{E}_{\alpha\beta}(t), \quad (2.34)$$

donde hemos definido genéricamente

$$\tilde{A}_{\alpha\beta}(t) = \tilde{A}_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t}. \quad (2.35)$$

2.2. Soluciones resonantes en el régimen estacionario

A su vez, los términos que acompañan al factor $e^{-i\omega_{\alpha\beta}t}$ dan lugar a la ecuación

$$-m\omega_{\alpha\beta}^2 \tilde{x}_{\alpha\beta}^* e^{-i\omega_{\alpha\beta}t} = \tilde{f}_{\alpha\beta}^* e^{-i\omega_{\alpha\beta}t} + im\tau\omega_{\alpha\beta}^3 \tilde{x}_{\alpha\beta}^* e^{-i\omega_{\alpha\beta}t} + e\tilde{E}_{\alpha\beta}^* e^{-i\omega_{\alpha\beta}t}, \quad (2.36)$$

que no es sino la compleja conjugada de (2.33).

De la ecuación (2.33) se desprenden las siguientes relaciones, análogas a (2.23a) y (2.23b)

$$\tilde{x}_{\alpha\beta} = -\frac{e}{m} \frac{\tilde{E}_{\alpha\beta}}{\Delta_{\alpha\beta}}, \quad (2.37a)$$

$$\Delta_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}^2 - i\tau\omega_{\alpha\beta}^3 + \frac{\tilde{f}_{\alpha\beta}}{m\tilde{x}_{\alpha\beta}}. \quad (2.37b)$$

Una vez más vemos que el sistema presenta un comportamiento resonante a aquellas frecuencias que, de acuerdo con (2.37) y en analogía con (2.24), están dadas por las soluciones del sistema (aproximado) de ecuaciones¹⁶

$$\omega_{\alpha\beta}^2 \approx -\frac{\tilde{f}_{\alpha\beta}}{m\tilde{x}_{\alpha\beta}}. \quad (2.38)$$

Las frecuencias relevantes que satisfacen la ecuación anterior son precisamente las frecuencias de resonancia asociadas al subensamble α , las cuales a su vez forman un subconjunto de $\{\omega_k\}_{\text{res}}$.¹⁷

El hecho de que la ecuación de movimiento (2.31) se descomponga en dos ecuaciones: la (2.33) y su compleja conjugada, nos permite restringir nuestro estudio a las soluciones de la ec. (2.33). Para ello observamos que esta última no es sino la forma detallada (término a término) de la ecuación

$$m\ddot{x}_{\alpha} = f_{\alpha} + m\tau\ddot{x}_{\alpha} + eE_{\alpha}, \quad (2.39)$$

¹⁶La ec. (2.38) representa, en general, un sistema de ecuaciones no lineales acopladas para las $\tilde{x}_{\alpha\beta}$'s y las $\omega_{\alpha\beta}$'s. De hecho, y como consecuencia de haber hecho un desarrollo tipo Fourier, todas las no linealidades del problema se heredan a este conjunto de ecuaciones acopladas.

¹⁷Esto se entiende notando que, de acuerdo con lo que se explicó al final de la subsección 2.2.1, cada una de las partículas que conforman el subensamble asociado al estado estacionario α puede resonar a algunas de las frecuencias $\{\omega_k\}_{\text{res}}$ pero en general no resonará a todas, ya que las soluciones de (2.24) determinan las frecuencias de resonancia del ensemble *completo*, que no distingue entre los diferentes estados estacionarios.

2.3. El principio de ergodicidad

donde hemos definido las cantidades complejas

$$x_\alpha(t) = \sum_{\beta} \tilde{x}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta} t}, \quad (2.40a)$$

$$f_\alpha(t) = \sum_{\beta} \tilde{f}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta} t}, \quad (2.40b)$$

$$E_\alpha(t) = \sum_{\beta} \tilde{E}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta} t}. \quad (2.40c)$$

En lo que sigue trabajaremos con la ecuación (2.39) —que está en plena correspondencia con la ecuación de movimiento original— y con las expresiones (2.40), cuyas amplitudes satisfacen la ec. (2.33).

2.3. El principio de ergodicidad

Al descomponer $x_\alpha(t)$ en su parte independiente de t (que coincide con $\overline{x_\alpha(t)}^t$) y otra que oscila y promedia a cero temporalmente tenemos¹⁸

$$x_\alpha(t) = \tilde{x}_{\alpha\beta_0} a_{\alpha\beta_0} + \sum_{\beta(\neq\beta_0)} \tilde{x}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta} t}. \quad (2.41)$$

Simplificaremos aún más la notación observando que, en virtud de que $\overline{x_\alpha(t)}^t$ (y por ende $\tilde{x}_{\alpha\beta_0} a_{\alpha\beta_0}$) sólo depende del índice α , podemos definir formalmente $\beta_0 = \alpha$, lo que nos permite escribir

$$\omega_{\alpha\beta_0} = \omega_{\alpha\alpha} = 0. \quad (2.42)$$

Con esto, reescribimos (2.41) como

$$x_\alpha(t) = \tilde{x}_{\alpha\alpha} a_{\alpha\alpha} + \sum_{\beta(\neq\alpha)} \tilde{x}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta} t}. \quad (2.43)$$

El segundo término del lado derecho de esta expresión corresponde a las desviaciones de $x_\alpha(t)$ con respecto a su valor medio, y su módulo nos permite determinar la

¹⁸ Cuando el desarrollo de $x_\alpha(t)$ involucra únicamente a las frecuencias relevantes, el promedio temporal definido en la ec. (2.12) puede realizarse recurriendo a una escala de tiempo finita T lo suficientemente grande como para asegurar que $T \gg \frac{2\pi}{\omega_{\alpha\beta}}$, para toda frecuencia relevante $\omega_{\alpha\beta}$. Como se mencionó abajo de la ec. (2.24) las frecuencias atómicas de interés son tales que $\tau\omega \lesssim 10^{-7}$, lo que muestra que T debe ser varios órdenes de magnitud superior a τ .

2.3. El principio de ergodicidad

varianza $\sigma_{x_\alpha}^2$ definida como

$$\sigma_{x_\alpha}^2 = \overline{\left| x_\alpha - \overline{x_\alpha(t)} \right|^{2t}}, \quad (2.44)$$

donde

$$\begin{aligned} \left| x_\alpha - \overline{x_\alpha(t)} \right|^2 &= \sum_{\beta'(\neq\alpha), \beta''(\neq\alpha)} \tilde{x}_{\alpha\beta'} \tilde{x}_{\alpha\beta''}^* a_{\alpha\beta'} a_{\alpha\beta''}^* e^{i(\omega_{\alpha\beta'} - \omega_{\alpha\beta''})t} \\ &= \sum_{\beta'(\neq\alpha)} \left| \tilde{x}_{\alpha\beta'} a_{\alpha\beta'} \right|^2 + \sum_{\beta'(\neq\alpha) \neq \beta''(\neq\alpha)} \tilde{x}_{\alpha\beta'} \tilde{x}_{\alpha\beta''}^* a_{\alpha\beta'} a_{\alpha\beta''}^* e^{i(\omega_{\alpha\beta'} - \omega_{\alpha\beta''})t}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

El primer término del lado derecho de (2.45) es el único independiente del tiempo, pues los diferentes sumandos de la segunda suma oscilan con una frecuencia $\omega_{\alpha\beta'} - \omega_{\alpha\beta''}$ que nunca puede anularse en virtud de que está impuesta la condición $\beta' \neq \beta''$. Así, identificando las contribuciones independientes de t en (2.45) con el promedio temporal de $\left| x_\alpha - \overline{x_\alpha(t)} \right|^2$ obtenemos el siguiente valor para la varianza

$$\sigma_{x_\alpha}^2 = \sum_{\beta'(\neq\alpha)} \left| \tilde{x}_{\alpha\beta'} a_{\alpha\beta'} \right|^2. \quad (2.46)$$

Como se mencionó al inicio de la subsección 2.2.2 el valor que adquiere x_α al tiempo t depende en cada caso de la realización específica $i \in \{i\}_\alpha$ del campo. Asimismo las cantidades $\tilde{x}_{\alpha\beta}$, $\{\omega_{\alpha\beta}\}$ y $\tilde{f}_{\alpha\beta}$ dependerán en principio de i . Agregaremos entonces el superíndice (i) a las cantidades de naturaleza estocástica con el fin de enfatizar su dependencia en la realización del campo presente. El desarrollo (2.40a), por ejemplo, queda

$$x_\alpha^{(i)}(t) = \sum_{\beta} \tilde{x}_{\alpha\beta}^{(i)} a_{\alpha\beta}^{(i)} e^{i\omega_{\alpha\beta}^{(i)}t} = -\frac{e}{m} \sum_{\beta} \frac{\tilde{E}_{\alpha\beta}^{(i)}}{\Delta_{\alpha\beta}^{(i)}} a_{\alpha\beta}^{(i)} e^{i\omega_{\alpha\beta}^{(i)}t}, \quad (2.47)$$

donde en la última igualdad hemos recurrido a la ecuación (2.37a).

La dependencia en i tanto de $\tilde{x}_{\alpha\beta}$ como de $a_{\alpha\beta}$ nos conduce a reescribir la varianza (2.46) en forma explícitamente estocástica:

$$\sigma_{x_\alpha}^{2(i)} = \sum_{\beta(\neq\alpha)} \left| \tilde{x}_{\alpha\beta}^{(i)} a_{\alpha\beta}^{(i)} \right|^2. \quad (2.48)$$

2.3. El principio de ergodicidad

Vemos entonces que $\sigma_{x_\alpha}^2$ es independiente de t (ya que la varianza fue calculada empleando promedios temporales) pero no así de la realización específica i del campo. Por otra parte, la varianza que se obtiene empleando promedios sobre el ensemble de realizaciones es igual a

$$\left\langle |x_\alpha - \langle x_\alpha(t) \rangle|^2 \right\rangle = \overline{|x_\alpha - \overline{x_\alpha(t)}^{(i)}|^2}^{(i)}, \quad (2.49)$$

misma que, por definición, depende en general de t pero no de i .¹⁹

En este punto introducimos una hipótesis esencial en la teoría, y es que el sistema satisface la condición de ergodicidad. Ello significa que ambas expresiones para $\sigma_{x_\alpha}^2$, a saber (2.48) y (2.49) coinciden, y por lo tanto que el lado derecho de la ec. (2.48) debe ser independiente de la realización. Es decir, la demanda de ergodicidad implica que

$$\sigma_{x_\alpha}^2 = \sum_{\beta(\neq\alpha)} \left| \tilde{x}_{\alpha\beta}^{(i)} a_{\alpha\beta}^{(i)} \right|^2 \text{ es independiente de } i. \quad (2.50)$$

El lado derecho de esta expresión es una suma de términos estadísticamente independientes, de modo que su varianza es la suma de las varianzas de cada uno de los sumandos, todas ellas cantidades positivo-definidas. Por otra parte, el lado izquierdo constituye una cantidad fija, no estocástica, y en consecuencia de varianza cero. De aquí que la única forma de satisfacer la condición (2.50) sea anulando las varianzas de cada uno de los sumandos, lo que conduce a que cada uno de ellos es independiente de la realización, es decir,

$$\left| \tilde{x}_{\alpha\beta}^{(i)} \right|^2 \left| a_{\alpha\beta}^{(i)} \right|^2 \text{ es independiente de } i \quad (\text{para } \beta \neq \alpha), \quad (2.51)$$

donde la condición $\beta \neq \alpha$ se sigue de la restricción sobre la suma en (2.50).

Cuando se escriben $\tilde{x}_{\alpha\beta}^{(i)}$ y $a_{\alpha\beta}^{(i)}$ en su forma polar,

$$\tilde{x}_{\alpha\beta}^{(i)} = \chi_{\alpha\beta}^{(i)} e^{i\xi_{\alpha\beta}^{(i)}}, \quad (2.52)$$

$$a_{\alpha\beta}^{(i)} = r_{\alpha\beta}^{(i)} e^{i\zeta_{\alpha\beta}^{(i)}}, \quad (2.53)$$

la ecuación (2.51) establece que el módulo de $\tilde{x}_{\alpha\beta}^{(i)} a_{\alpha\beta}^{(i)}$, dado por $\chi_{\alpha\beta}^{(i)} r_{\alpha\beta}^{(i)}$, es indepen-

¹⁹Dado que estamos interesados en la solución para una α dada, el promedio que se efectúa aquí sobre (i) debe entenderse como un promedio sobre aquellas realizaciones que conducen a la partícula al estado α , es decir, sobre los elementos del subconjunto $\{i\}_\alpha$ definido en la subsección 2.2.2. En concordancia con lo ahí expuesto dicho promedio coincidirá con el promedio realizado sobre el subensemble de partículas que han alcanzado dicho estado, y que aquí (y en lo que sigue) está denotado con el símbolo $\langle \cdot \rangle$.

2.3. El principio de ergodicidad

diente de i , resultado que nos permite escribir

$$\chi_{\alpha\beta}^{(i)} = \chi_{\alpha\beta}, \quad r_{\alpha\beta}^{(i)} = r_{\alpha\beta}, \quad (\beta \neq \alpha) \quad (2.54)$$

y en consecuencia cada uno de los módulos es independiente de la realización del campo.

Ahora bien, dado que $\tilde{x}_{\alpha\beta}$ es una cantidad que aparece siempre junto a las variables $a_{\alpha\beta}$ (veáse por ejemplo la ecuación (2.40a)) podemos transferir cualquier contribución aleatoria contenida en la fase de $\tilde{x}_{\alpha\beta}$ a la fase estocástica de $a_{\alpha\beta}^{(i)}$, de modo que podemos hacer

$$\tilde{x}_{\alpha\beta}^{(i)} = \tilde{x}_{\alpha\beta}, \quad (\beta \neq \alpha) \quad (2.55)$$

y

$$a_{\alpha\beta}'^{(i)} \equiv r_{\alpha\beta} e^{i\varphi_{\alpha\beta}^{(i)}}, \quad (\beta \neq \alpha), \quad (2.56)$$

donde toda la estocasticidad ha sido absorbida en la nueva fase $\varphi_{\alpha\beta}^{(i)}$. La variable $a_{\alpha\beta}'^{(i)}$ así definida representa la nueva variable del campo estocástico que resulta de su interacción con la materia.

Por lo que respecta al término con $\beta = \alpha$ recurriremos a la demanda de ergodicidad impuesta sobre la cantidad $x_\alpha(t)$, la cual requiere que

$$\overline{x_\alpha}^t = \tilde{x}_{\alpha\alpha}^{(i)} a_{\alpha\alpha}^{(i)} = \tilde{x}_{\alpha\alpha} a_{\alpha\alpha} = \langle x_\alpha \rangle, \quad (2.57)$$

donde la segunda igualdad enfatiza que ni $\tilde{x}_{\alpha\alpha}^{(i)}$ ni $a_{\alpha\alpha}^{(i)}$ pueden depender de i . De aquí se sigue que las ecuaciones (2.54)-(2.56) son también válidas para $\beta = \alpha$. En particular, la relación (2.56) se cumple en general

$$a_{\alpha\beta}'^{(i)} = r_{\alpha\beta} e^{i\varphi_{\alpha\beta}^{(i)}} \quad \forall \beta, \quad (2.58)$$

con la siguiente condición sobre las fases (en la que se ha tomado en cuenta que el valor medio de cualquier fase $\varphi_{\alpha\beta}^{(i)}$ es nulo)

$$\varphi_{\alpha\alpha}^{(i)} = \varphi_{\alpha\alpha} = 0. \quad (2.59)$$

En lo que sigue escribiremos simplemente $a_{\alpha\beta}^{(i)}$ en lugar de $a_{\alpha\beta}'^{(i)}$, de tal forma que los resultados previos se resumen en

$$a_{\alpha\beta}^{(i)} = r_{\alpha\beta} e^{i\varphi_{\alpha\beta}^{(i)}}, \quad \varphi_{\alpha\alpha} = 0, \quad (2.60a)$$

$$\tilde{x}_{\alpha\beta}^{(i)} = \tilde{x}_{\alpha\beta}. \quad (2.60b)$$

2.3. El principio de ergodicidad

Con esto, la varianza $\sigma_{x_\alpha}^2$ (ec. (2.50)) adquiere la forma

$$\sigma_{x_\alpha}^2 = \sum_{\beta(\neq\alpha)} \left| \tilde{x}_{\alpha\beta}^{(i)} a_{\alpha\beta}^{(i)} \right|^2 = \sum_{\beta(\neq\alpha)} |\tilde{x}_{\alpha\beta}|^2 r_{\alpha\beta}^2. \quad (2.61)$$

Siguiendo un procedimiento similar al que condujo a la ecuación (2.48) podemos calcular la varianza del momento en el estado estacionario α ($\sigma_{p_\alpha}^2$) o equivalentemente la varianza de

$$\dot{x}_\alpha^{(i)}(t) = \sum_{\beta} i\omega_{\alpha\beta} \tilde{x}_{\alpha\beta}^{(i)} a_{\alpha\beta}^{(i)} e^{i\omega_{\alpha\beta} t}, \quad (2.62)$$

e imponer la demanda de que su valor calculado con promedios temporales coincida con el valor obtenido usando promedios sobre el ensemble de realizaciones. Esto conduce a la siguiente condición, análoga a (2.51),

$$\left| \omega_{\alpha\beta}^{(i)} \right|^2 \left| \tilde{x}_{\alpha\beta}^{(i)} \right|^2 \left| a_{\alpha\beta}^{(i)} \right|^2 \text{ es independiente de } i, \quad (2.63)$$

de donde se sigue, usando las ecuaciones (2.60), que

$$\omega_{\alpha\beta}^{(i)} = \omega_{\alpha\beta}. \quad (2.64)$$

De esta forma toda la estocasticidad ha sido absorbida por las fases de las amplitudes $a_{\alpha\beta}^{(i)}$ y consecuentemente ni $\tilde{x}_{\alpha\beta}$ ni $\omega_{\alpha\beta}$ dependen de la realización i ; esto significa, en particular, que las amplitudes $\tilde{x}_{\alpha\beta}$ no pueden depender de las variables estocásticas $a_{\alpha\beta}^{(i)}$. Esta observación, aplicada a las ecuaciones (2.37) nos permite concluir que en el desarrollo de la fuerza (2.40b) las amplitudes $\tilde{f}_{\alpha\beta}$ son también independientes de la realización, es decir,

$$\tilde{f}_{\alpha\beta} \text{ es independiente de } i. \quad (2.65)$$

El resultado (2.65), producto de la demanda ergódica, es de suma importancia y su significado e implicaciones se estudiarán conforme avancemos.

El hecho de que las amplitudes $\tilde{f}_{\alpha\beta}$ (en particular $\tilde{x}_{\alpha\beta}$) y las frecuencias relevantes $\omega_{\alpha\beta}$ sean cantidades no estocásticas muestra que $\Delta_{\alpha\beta}$ y $\tilde{E}_{\alpha\beta}$ son también independientes de i (véase la ec. (2.37a)). Esto implica que las expresiones (2.40) son desarrollos *explícitos* en las variables $a_{\alpha\beta}^{(i)}$, y por lo tanto que la respuesta mecánica es *lineal* en las variables estocásticas del campo una vez alcanzado el régimen estacionario y ergódico, independientemente de las no linealidades de la fuerza.²⁰ Este es

²⁰Nótese que al ser $\Delta_{\alpha\beta}$ independiente de la realización, la expresión (2.37a) implica que los componentes $\tilde{x}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}$ de frecuencia $\omega_{\alpha\beta}$ en el desarrollo de x_α son proporcionales a las correspondientes componentes del campo, $\tilde{E}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}$.

el origen del nombre Electrodinámica Estocástica *Lineal* de la presente teoría.

Una vez que ha quedado claro que sólo las variables $a_{\alpha\beta}$ son cantidades estocásticas, en lo que sigue omitiremos el índice (i) excepto cuando por claridad el análisis lo requiera.

2.4. Implicaciones del principio ergódico en las variables del campo

Hemos visto que para distinguir las soluciones que corresponden a los diversos estados estacionarios accesibles debemos introducir el índice α mediante la sustitución

$$x(t) = \sum_k \tilde{x}_k a_k e^{i\omega_k t} \rightarrow x_\alpha(t) = \sum_\beta \tilde{x}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta} t}, \quad (2.66)$$

donde hemos definido la variable $x(t)$ —que está en correspondencia con $\hat{x}(t)$ — de manera análoga a como definimos la $x_\alpha(t)$ asociada a $\hat{x}_\alpha(t)$ (véanse las ecs. (2.14), (2.27) y (2.40a)). Ahora bien, para expresar la fuerza f_α (y en general las variables dinámicas A_α) en términos de las amplitudes que aparecen en el desarrollo de x_α necesitamos construir los desarrollos correspondientes a las diferentes potencias de x a partir de la expresión (2.66). Para ello conviene primero analizar el caso cuadrático, $f(x) = x^2$. Escribiendo $f_\alpha = (x^2)_\alpha = (x_\alpha)^2$ tendremos

$$\begin{aligned} f_\alpha^{(i)} &= (x^2)_\alpha^{(i)} = (x_\alpha^{(i)})^2 = \sum_{\beta'} \tilde{x}_{\alpha\beta'} a_{\alpha\beta'}^{(i)} e^{i\omega_{\alpha\beta'} t} \sum_{\beta''} \tilde{x}_{\alpha\beta''} a_{\alpha\beta''}^{(i)} e^{i\omega_{\alpha\beta''} t} \\ &= \sum_{\beta'} \left[\sum_{\beta''} \tilde{x}_{\alpha\beta'} \tilde{x}_{\alpha\beta''} a_{\alpha\beta'}^{(i)} a_{\alpha\beta''}^{(i)} e^{i(\omega_{\alpha\beta'} + \omega_{\alpha\beta''}) t} \right]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Por otro lado, de acuerdo con la ec. (2.40b), $f_\alpha^{(i)}$ tiene la forma

$$f_\alpha^{(i)} = (x^2)_\alpha^{(i)} = \sum_{\beta'} \widetilde{x}_{\alpha\beta'}^2 a_{\alpha\beta'}^{(i)} e^{i\omega_{\alpha\beta'} t}, \quad (2.68)$$

donde la cantidad $\widetilde{f}_{\alpha\beta'} = \widetilde{x}_{\alpha\beta'}^2$ aún está por definirse. La comparación entre las

ecuaciones (2.67) y (2.68) conduce entonces a

$$\begin{aligned}
 \widetilde{x}_{\alpha\beta'}^2 a_{\alpha\beta'}^{(i)} e^{i\omega_{\alpha\beta'} t} &= \sum_{\beta''} \widetilde{x}_{\alpha\beta'} \widetilde{x}_{\alpha\beta''} a_{\alpha\beta'}^{(i)} a_{\alpha\beta''}^{(i)} e^{i(\omega_{\alpha\beta'} + \omega_{\alpha\beta''}) t} \\
 &= \widetilde{x}_{\alpha\beta'} a_{\alpha\beta'}^{(i)} e^{i\omega_{\alpha\beta'} t} \sum_{\beta''} \widetilde{x}_{\alpha\beta''} a_{\alpha\beta''}^{(i)} e^{i\omega_{\alpha\beta''} t} \\
 &= x_{\alpha}^{(i)}(t) \widetilde{x}_{\alpha\beta'} a_{\alpha\beta'}^{(i)} e^{i\omega_{\alpha\beta'} t}.
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Eliminando la variable $a_{\alpha\beta'}^{(i)}$ de ambos lados, así como el término temporal $e^{i\omega_{\alpha\beta'} t}$, resulta

$$\widetilde{x}_{\alpha\beta'}^2 = x_{\alpha}^{(i)}(t) \widetilde{x}_{\alpha\beta'}. \tag{2.70}$$

No obstante, esta expresión está en contradicción con la ec. (2.65), la cual indica que ni $\widetilde{x}_{\alpha\beta'}^2$ ni $\widetilde{x}_{\alpha\beta'}$ dependen de la realización i . Ello muestra que la elección $(x^2)_{\alpha} = (x_{\alpha})^2$, si bien es la más inmediata, es inconsistente con las implicaciones del principio ergódico. Vemos entonces que el problema de determinar el desarrollo de una potencia cualquiera de x en forma consistente con lo que se ha hecho anteriormente requiere de un análisis más cuidadoso.²¹ En la siguiente subsección estudiaremos el caso cuadrático para construir el desarrollo apropiado de $(x^2)_{\alpha}$; la generalización al resto de potencias será inmediata, como quedará claro más adelante.

2.4.1. Un caso particular: el cuadrado

Tomando como punto de partida la expresión para $[x(t)]^2$ procederemos a investigar cómo debemos introducir en ella el índice α a fin de que el desarrollo de $(x^2)_{\alpha}$ sea consistente con las demandas impuestas por la teoría.

Por simplicidad en la escritura en lo que sigue recurriremos a la notación simplificada

$$X_{\beta}(t) = \widetilde{x}_{\beta} a_{\beta} e^{i\omega_{\beta} t}, \quad X_{\alpha\beta}(t) = \widetilde{x}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta} t}, \tag{2.71}$$

²¹Es oportuno señalar que la inconsistencia que encontramos al hacer $(x^2)_{\alpha} = (x_{\alpha})^2$ apunta ya hacia una ruptura con toda descripción “clásica” en el sentido de que la cantidad $(x^2)_{\alpha}$ no puede entenderse como “el cuadrado de la trayectoria x_{α} ”. El término $(x^2)_{\alpha}$, que más adelante procederemos a determinar, debe entenderse entonces aquí como aquella cantidad cuadrática asociada a x_{α} —esto es, que se construye en términos de las amplitudes $\widetilde{x}_{\alpha\beta}$ que determinan a x_{α} — que es consistente con la demanda ergódica (2.65).

de tal forma que $x(t)$ y $x_\alpha(t)$ se reescriben como²²

$$x(t) = \sum_{\beta} X_{\beta}(t), \quad (2.72a)$$

$$x_{\alpha}(t) = \sum_{\beta} X_{\alpha\beta}(t). \quad (2.72b)$$

Tenemos entonces que

$$x^2 = \sum_{\beta', \beta''} X_{\beta'} X_{\beta''}. \quad (2.73)$$

Es claro de aquí que para construir $(x^2)_{\alpha}$ en términos de los elementos genéricos $X_{\delta\eta}$ que componen a x_{α} es preciso agregar un índice extra (uno de los cuales debe ser α) en cada uno de los elementos $X_{\beta'}$ y $X_{\beta''}$ que aparecen en la ec. (2.73); esto es, debemos transformar aquellos términos de la forma X_{β} en cantidades de la forma $X_{\delta\eta}$. En el Apéndice B abordamos el problema de determinar la disposición adecuada de los índices faltantes que garantice la consistencia del resultado con la condición ergódica. Lo que se obtiene es (nótese que hemos renombrado los índices mudos con respecto a aquellos que aparecen en la ec. (B.17) del apéndice):

$$(x^2)_{\alpha} = \sum_{\beta} \widetilde{x^2}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} = \sum_{\beta, \beta'} X_{\alpha\beta'} X_{\beta'\beta}. \quad (2.74a)$$

2.4.2. El caso general: la regla de la cadena

Como se muestra en el Apéndice B (ecs. (B.16) y (B.18)) la ec. (2.74a) está acompañada de las siguientes condiciones sobre las variables estocásticas y las frecuencias relevantes²³

$$a_{\alpha\beta'} a_{\beta'\beta} = a_{\alpha\beta}, \quad (2.75)$$

$$\omega_{\alpha\beta'} + \omega_{\beta'\beta} = \omega_{\alpha\beta}. \quad (2.76)$$

Es posible generalizar la relación (2.75) a un número arbitrario de factores mediante

²²Si bien la forma original de $x(t)$ es $\sum_k X_k(t)$ (con $X_k(t) = \tilde{x}_k a_k e^{i\omega_k t}$), aquí hemos sustituido el índice k por β , lo cual podemos hacer en virtud de que cada β está asociada con una k , de acuerdo con lo dicho en la nota 12.

²³Es importante resaltar que en estas expresiones *no* estamos empleando la convención de Einstein sobre índices repetidos.

2.4. Implicaciones del principio ergódico en las variables del campo

su aplicación sucesiva,

$$\begin{aligned}
 a_{\alpha\beta'} a_{\beta'\beta''} a_{\beta''\beta'''} \cdots a_{\beta^{(n-1)}\beta} &= (a_{\alpha\beta'} a_{\beta'\beta''}) a_{\beta''\beta'''} \cdots a_{\beta^{(n-1)}\beta} \\
 &= [(a_{\alpha\beta''}) a_{\beta''\beta'''}] \cdots a_{\beta^{(n-1)}\beta} \\
 &= [a_{\alpha\beta'''}] \cdots a_{\beta^{(n-1)}\beta} \\
 &= a_{\alpha\beta}.
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Si escribimos cada una de las $a_{\beta^{(n)}\beta^{(m)}}$ en forma polar de acuerdo con (2.60a), la ecuación (2.77) se descompone en la siguiente pareja de ecuaciones

$$\varphi_{\alpha\beta'}^{(i)} + \varphi_{\beta'\beta''}^{(i)} + \cdots + \varphi_{\beta^{(n-1)}\beta}^{(i)} = \varphi_{\alpha\beta}^{(i)}, \tag{2.78a}$$

$$r_{\alpha\beta'} r_{\beta'\beta''} r_{\beta''\beta'''} \cdots r_{\beta^{(n-1)}\beta} = r_{\alpha\beta}. \tag{2.78b}$$

Dado que el número de factores del lado izquierdo de esta última expresión es arbitrario, su única solución no trivial es

$$r_{\delta\eta} = 1, \quad \forall \delta, \eta. \tag{2.79}$$

Por otro lado, la solución general de (2.78a) es de la forma

$$\varphi_{\alpha\beta}^{(i)} = \phi_{\alpha}^{(i)} - \phi_{\beta}^{(i)}, \tag{2.80}$$

donde cada una de las $\phi_{\lambda}^{(i)}$ representa una fase estocástica. Si ahora combinamos las ecuaciones (2.79) y (2.80) con (2.60a) obtenemos

$$a_{\alpha\beta} = e^{i\varphi_{\alpha\beta}} = e^{i(\phi_{\alpha} - \phi_{\beta})}, \tag{2.81}$$

de donde se sigue, en particular, que

$$a_{\beta\alpha} = a_{\alpha\beta}^*. \tag{2.82}$$

Por su parte la ecuación (2.76) también se puede generalizar a cualquier número de términos, lo que conduce a una ecuación para las frecuencias análoga a (2.78a):

$$\omega_{\alpha\beta'} + \omega_{\beta'\beta''} + \cdots + \omega_{\beta^{(n-1)}\beta} = \omega_{\alpha\beta}, \tag{2.83}$$

2.5. Implicaciones del principio ergódico en la dinámica del sistema mecánico

de modo que las soluciones poseen la misma estructura que (2.80),

$$\omega_{\alpha\beta} = \Omega_\alpha - \Omega_\beta. \quad (2.84)$$

En particular, de aquí se obtiene el resultado

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}. \quad (2.85)$$

Las relaciones (2.77) y (2.83), fundamentales en la teoría, constituyen lo que de aquí en adelante llamaremos la *regla de la cadena*.²⁴

La ecuación (2.78a) muestra que las fases que corresponden a los modos relevantes del campo se correlacionan parcialmente, resultado que indica que no sólo la materia sino también el campo de fondo en el que ésta se encuentra inmersa se ve afectado durante la evolución del sistema hacia el equilibrio.

Finalmente, el hecho de que la regla de la cadena conduzca a una equivalencia entre los índices α (primer índice en los desarrollos del tipo (2.40), asociado a un cierto estado estacionario y por ende a una cierta energía) y los índices β (segundo índice en los desarrollos del tipo (2.40), asociado a las frecuencias del campo) implica que estos últimos se corresponden también con los diferentes estados estacionarios que puede alcanzar la partícula. Aparece entonces una estrecha relación entre la energía de la partícula y las frecuencias relevantes, la cual tiene como origen la relación $\mathcal{E}_0(\omega) = \hbar\omega/2$, satisfecha para todos y cada uno de los modos del campo de radiación de punto cero.

2.5. Implicaciones del principio ergódico en la dinámica del sistema mecánico

2.5.1. Regla matricial

Si escribimos $X_{\alpha\beta'}$ y $X_{\beta'\beta}$ explícitamente según lo indica la definición (2.71), la ecuación (2.74a) adquiere la forma

$$\sum_{\beta} \widetilde{x}_{\alpha\beta}^2 a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} = \sum_{\beta, \beta'} \tilde{x}_{\alpha\beta'} \tilde{x}_{\beta'\beta} a_{\alpha\beta'} a_{\beta'\beta} e^{i(\omega_{\alpha\beta'} + \omega_{\beta'\beta})t}. \quad (2.86)$$

²⁴Aquí es oportuno mencionar que la ecuación (2.83) (así como todas aquellas asociadas a la regla de la cadena), al ser resultado de una hipótesis ergódica que como tal se refiere a una propiedad estadística, no se satisface en general *idénticamente* para un sistema físico individual. Así, por ejemplo, debemos esperar que los valores *exactos* de las frecuencias relevantes $\omega_{\alpha\beta}$ que se realizan en la naturaleza fluctúen alrededor del valor predicho (2.84).

2.5. Implicaciones del principio ergódico en la dinámica del sistema mecánico

Usando ahora la regla de la cadena (en particular las ecs. (2.75) y (2.76)) podemos reescribir (2.86) como

$$\sum_{\beta} \widetilde{x^2}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} = \sum_{\beta} \left(\sum_{\beta'} \widetilde{x}_{\alpha\beta'} \widetilde{x}_{\beta'\beta} \right) a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t}, \quad (2.87)$$

de donde obtenemos

$$\widetilde{x^2}_{\alpha\beta} = \sum_{\beta'} \widetilde{x}_{\alpha\beta'} \widetilde{x}_{\beta'\beta}, \quad (2.88)$$

expresión que coincide con la regla de multiplicación matricial para las amplitudes $\widetilde{x}_{\alpha\beta}$. Esto nos permite identificar la cantidad $\widetilde{x}_{\alpha\beta}$ con el elemento $\alpha\beta$ de una matriz cuadrada \widetilde{x} tal que

$$\widetilde{x^2}_{\alpha\beta} = (\widetilde{x}^2)_{\alpha\beta}, \quad (2.89)$$

lo que nos conduce, junto con (2.88), a escribir la ecuación (2.68) como

$$\begin{aligned} (x^2)_{\alpha} &= \sum_{\beta} \left(\sum_{\beta'} \widetilde{x}_{\alpha\beta'} \widetilde{x}_{\beta'\beta} \right) a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} \\ &= \sum_{\beta} (\widetilde{x}^2)_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Es fácil verificar que las generalizaciones (2.77) y (2.83) permiten expresar una potencia cualquiera de x de manera consistente con la condición ergódica en la forma

$$(x^n)_{\alpha} = \sum_{\beta} (\widetilde{x}^n)_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t}, \quad (2.91)$$

con $(\widetilde{x}^n)_{\alpha\beta}$ dada por el elemento $\alpha\beta$ del correspondiente producto matricial. Así, toda variable dinámica $A(t)$ que pueda expresarse como una serie de potencias de x o de \dot{x} —o más en general, como una serie de potencias de la forma $h(x) + g(\dot{x})$ — puede escribirse, cuando la partícula está en un estado α , en la forma²⁵

$$A_{\alpha}(t) = \sum_{\beta} \widetilde{A}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t}, \quad (2.92)$$

²⁵El hecho de que podamos usar los resultados anteriores para series de potencias de \dot{x}_{α} es consecuencia de que la demanda de ergodicidad ha sido también aplicada al desarrollo (2.62),

$$\dot{x}_{\alpha}(t) = \sum_{\beta} i\omega_{\alpha\beta} \widetilde{x}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} = \sum_{\beta} \widetilde{\dot{x}}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t}.$$

y tiene una matriz \tilde{A} asociada a ella, cuyos elementos están dados por las amplitudes $\tilde{A}_{\alpha\beta}$.

Consideremos ahora las expresiones para $x_\alpha(t)$ y $x_\alpha^*(t)$,

$$x_\alpha(t) = \sum_{\beta} \tilde{x}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta} t}, \quad (2.93a)$$

$$x_\alpha^*(t) = \sum_{\beta} \tilde{x}_{\alpha\beta}^* a_{\beta\alpha} e^{i\omega_{\beta\alpha} t}, \quad (2.93b)$$

donde en la segunda línea hemos empleado los resultados (2.82) y (2.85). Estas ecuaciones muestran que por lo que respecta a $a_{\alpha\beta}$ y a $\omega_{\alpha\beta}$, la conjugación equivale al intercambio de índices α y β . La estructura de estas expresiones sugiere entonces la relación

$$\tilde{x}_{\alpha\beta}^* = \tilde{x}_{\beta\alpha}, \quad (2.94)$$

misma que implica la hermiticidad de la matriz \tilde{x} . Más aún, la antisimetría de las frecuencias $\omega_{\alpha\beta}$ exhibida en la ec. (2.85) indica que la relación (2.94) es consistente con la propiedad $\tilde{x}(\omega_k) = \tilde{x}^*(-\omega_k)$ satisfecha por las amplitudes $\tilde{x}_k = \tilde{x}(\omega_k)$ del desarrollo original (2.14). En respuesta a esto consideraremos válida la expresión (2.94), la cual, junto con (2.85), implica que las amplitudes de $\dot{x}_\alpha(t)$ ($\tilde{x}_{\alpha\beta} = i\omega_{\alpha\beta}\tilde{x}_{\alpha\beta}$) satisfacen asimismo la ec. (2.94), y consecuentemente que también $\tilde{x} \sim \tilde{p}$ constituirá una matriz hermitiana.²⁶

2.5.2. Mecánica matricial

A lo largo de las secciones anteriores hemos visto que la regla de la cadena, al reducir un producto de amplitudes $a_{\alpha\beta}$ de la forma (2.77) a una función lineal de dichas variables, tiene como consecuencia directa la aparición de un álgebra matricial para las amplitudes $\tilde{A}_{\alpha\beta}$. Más aún, por la aplicación de la ecuación (2.83) se encuentra directamente que los osciladores de la forma (2.35) también satisfacen un álgebra matricial. En lo que sigue emplearemos el símbolo $\hat{A}(t)$ para referirnos a la matriz — que previamente habíamos denotado con \tilde{A} — que tiene por elementos a las amplitudes $\tilde{A}_{\alpha\beta}(t)$. Con esta nueva notación podemos entonces reescribir la ec. (2.34) como

$$m \frac{d^2 \hat{x}(t)}{dt^2} = \hat{f}(t) + m\tau \frac{d^3 \hat{x}(t)}{dt^3} + e\hat{E}(t). \quad (2.95)$$

Es importante destacar que (2.95) va más allá de ser una simple reescritura

²⁶La validez de la ec. (2.94) puede justificarse también arguyendo que las variables físicas, por poseer valores reales, deben asociarse a matrices hermitianas (al respecto, véase la nota 33).

de la ecuación de movimiento (2.34). Esta última ha perdido aquí su naturaleza estocástica (más no así la estadística, como se verá en la sección 2.7) pues ahora, a consecuencia de la condición ergódica, ni $\tilde{x}_{\alpha\beta}$ (\hat{x}) ni $\tilde{f}_{\alpha\beta}$ (\hat{f}) dependen de $a_{\alpha\beta}$, de modo que toda referencia a las variables estocásticas del campo ha desaparecido de la ecuación; además, al tomar la forma (2.95) la ecuación (2.34) ha quedado expresada en forma matricial. Dicho de otra manera, la ecuación estocástica (2.34), escrita en términos de números c , se ha transformado en una ecuación matricial no estocástica como resultado del principio ergódico, el cual se manifiesta matemáticamente en la regla de la cadena.

La ecuación (2.95), que porta información sobre la dinámica del subsistema mecánico en el régimen asintótico, estacionario y ergódico, es precisamente la ecuación de movimiento encontrada en la electrodinámica cuántica no relativista, de modo que a este régimen le llamaremos el *régimen cuántico*. En ausencia de campo externo $\hat{E}(t)$ es una matriz que representa el campo cercano de vacío que, al encontrarse en equilibrio con la materia, ha sido afectado por ella en el sentido de que sus variables estocásticas han adquirido las propiedades descritas por la ecuación (2.77).²⁷ Más aún, se trata de un campo cuantizado de acuerdo con los resultados del capítulo 1. La relación entre las matrices asociadas con las variables dinámicas y las propias variables físicas se discute brevemente en la subsección 2.7.1.

El hecho de que los osciladores (2.35) satisfagan un álgebra matricial nos permite determinar la ecuación de evolución para toda variable dinámica A que pueda representarse en la forma (2.92). Para ello derivamos $A_\alpha(t)$ con respecto al tiempo y usamos la ec. (2.84), lo que conduce a:

$$\frac{dA_\alpha(t)}{dt} = \sum_{\beta} i\omega_{\alpha\beta} \tilde{A}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\beta} i \left[\Omega_{\alpha} \tilde{A}_{\alpha\beta}(t) - \Omega_{\beta} \tilde{A}_{\alpha\beta}(t) \right] a_{\alpha\beta} \\ &= \sum_{\beta} i \left[\sum_{\gamma} \left(\delta_{\alpha\gamma} \Omega_{\gamma} \tilde{A}_{\gamma\beta}(t) - \tilde{A}_{\alpha\gamma}(t) \Omega_{\gamma} \delta_{\gamma\beta} \right) \right] a_{\alpha\beta} \\ &= \sum_{\beta} i \left[\hat{\Omega}, \hat{A}(t) \right]_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$= \sum_{\beta} i \left[\hat{\Omega}, \hat{A} \right]_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t}, \quad (2.98)$$

²⁷En el presente trabajo nos hemos limitado a estudiar la ecuación de movimiento del subsistema mecánico, por lo que no estamos en condiciones de extraer conclusiones más completas y detalladas acerca de las modificaciones que sufre el campo.

donde hemos definido la matriz $\hat{\Omega}$ como aquella que tiene por elementos

$$\tilde{\Omega}_{\alpha\beta} = \Omega_\alpha \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.99)$$

Por otro lado, si hacemos

$$\frac{dA_\alpha(t)}{dt} = \left(\frac{dA(t)}{dt} \right)_\alpha = \sum_\beta \tilde{A}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} = \sum_\beta \tilde{A}_{\alpha\beta}(t) a_{\alpha\beta} \quad (2.100)$$

y comparamos con (2.97), obtenemos la ley de evolución

$$\tilde{A}_{\alpha\beta}(t) = i \left[\hat{\Omega}, \hat{A}(t) \right]_{\alpha\beta}, \quad (2.101)$$

que en notación cerrada toma la forma

$$i \frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \left[\hat{A}(t), \hat{\Omega} \right]. \quad (2.102)$$

Este resultado, de carácter general, es consecuencia directa de la estructura del desarrollo de $A_\alpha(t)$ y de la antisimetría de las frecuencias relevantes $\omega_{\alpha\beta}$, siendo esta propiedad antisimétrica la que en última instancia conduce a que la evolución de los operadores dinámicos se describa en términos de un álgebra de conmutadores.

La ecuación (2.102) muestra que los elementos Ω_α son decisivos en la evolución del subsistema mecánico; sin embargo, es claro que dicha evolución está regida por el hamiltoniano del problema, de modo que la matriz \hat{H} asociada a éste debe estar relacionada con la matriz $\hat{\Omega}$ que interviene en la ley (2.102). Dado que los elementos de $\hat{\Omega}$ determinan las frecuencias relevantes de acuerdo con la ec. (2.84), la necesaria relación entre $\hat{\Omega}$ y \hat{H} es un reflejo más de la ya mencionada relación entre la energía mecánica y las frecuencias (relevantes) del campo.

Para determinar cómo se relacionan $\hat{\Omega}$ y \hat{H} escribimos primero el hamiltoniano —que es una variable dinámica real que en el estado estacionario α coincide con el valor de la energía \mathcal{E}_α — en la forma (2.92),

$$H_\alpha \equiv \mathcal{E}_\alpha = \tilde{H}_{\alpha\alpha} + \sum_{\beta(\neq\alpha)} \tilde{H}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t}. \quad (2.103)$$

Sabemos que \mathcal{E}_α no depende del tiempo, justamente por tratarse de la energía en un estado estacionario; tampoco depende de la realización específica del campo (pues diferentes realizaciones pueden conducir a un mismo estado estacionario) de manera que debemos garantizar que el lado derecho de la ec. (2.103) no contenga términos

dependientes del tiempo (oscilatorios) ni de la realización (estocásticos). Con ayuda de las propiedades (2.81) y (2.85) vemos que esto es posible siempre que los elementos de \hat{H} sean de la forma

$$\tilde{H}_{\alpha\beta} \sim \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.104)$$

En este caso, y debido a la restricción sobre la última suma en la ec. (2.103), encontramos que

$$\mathcal{E}_\alpha = \tilde{H}_{\alpha\alpha}, \quad (2.105)$$

y por lo tanto los elementos de la matriz \hat{H} están dados por

$$\tilde{H}_{\alpha\beta} = \mathcal{E}_\alpha \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.106)$$

Otra manera de verificar este resultado es notando que la condición de estacionariedad $(dH/dt) = 0$ implica, a través de la ec. (2.102), que la matriz \hat{H} conmuta con la matriz diagonal $\hat{\Omega}$, y por lo tanto debe ser también diagonal. Esto nos lleva a escribir la siguiente relación entre \hat{H} y $\hat{\Omega}$:

$$\hat{\Omega} = \hat{D}\hat{H} = \hat{H}\hat{D}, \quad (2.107)$$

donde la matriz \hat{D} tiene por elementos

$$D_{\alpha\beta} = d_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.108)$$

y en consecuencia

$$\Omega_\alpha = d_\alpha \mathcal{E}_\alpha. \quad (2.109)$$

La relación (2.107) nos permite reescribir la ley de evolución (2.102) en términos del hamiltoniano en la forma

$$i \frac{d\hat{A}(t)}{dt} = [\hat{A}, \hat{D}\hat{H}]. \quad (2.110)$$

2.6. Régimen no radiativo: estableciendo contacto con la mecánica cuántica

Una vez que se ha alcanzado el régimen cuántico la acción conjunta del campo de fondo y la reacción de radiación —precisamente la de conducir al sistema al equilibrio— ha jugado ya su papel fundamental. En la ecuación de movimiento (2.95) los correspondientes términos representan ahora meramente correcciones radiativas; por ello, podemos despreciarlos en una primera aproximación, resultando entonces

las ecuaciones

$$\hat{p} = m \frac{d\hat{x}}{dt}, \quad (2.111a)$$

$$\hat{f} = \frac{d\hat{p}}{dt}. \quad (2.111b)$$

Por su parte, el hamiltoniano de la partícula en el límite no radiativo queda expresado como

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}). \quad (2.111c)$$

Ahora bien, para establecer la ley de evolución (2.110) en este régimen resta aún determinar la matriz \hat{D} , tarea a la que nos enfocaremos a continuación.

Aplicamos la ley (2.110) al operador $\hat{A} = \hat{x}$ y usamos la ec. (2.107) para obtener

$$\begin{aligned} i \frac{d\hat{x}}{dt} &= [\hat{x}, \hat{H}\hat{D}] = [\hat{x}, \hat{H}] \hat{D} + \hat{H} [\hat{x}, \hat{D}] \\ &= [\hat{x}, \hat{H}] \hat{D} + [\hat{H}\hat{x}, \hat{D}]. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Al tomar aquí la aproximación no radiativa debemos recurrir a las ecs. (2.111), de manera que²⁸

$$\begin{aligned} i \frac{\hat{p}}{m} &= \left[\hat{x}, \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} \right) \right] \hat{D} + \left[\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} \right) \hat{x}, \hat{D} \right] \\ &= \frac{1}{2m} (\hat{x}\hat{p}^2\hat{D} - \hat{D}\hat{p}^2\hat{x}) + [\hat{V}\hat{x}, \hat{D}]. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Mientras que el lado izquierdo de esta ecuación es una función de \hat{p} , el último término del lado derecho sólo depende de \hat{x} (pues el potencial es sólo función de \hat{x} y \hat{D} no depende de ninguna variable dinámica) de modo que para que (2.113) se satisfaga idénticamente se requiere que el conmutador $[\hat{V}\hat{x}, \hat{D}]$ se anule, lo que conduce a

$$(\hat{V}\hat{x})\hat{D} = \hat{D}(\hat{V}\hat{x}). \quad (2.114)$$

Como esta condición debe satisfacerse independientemente de cuál sea el potencial \hat{V} (es decir, para cualquiera que sea la matriz $\hat{V}\hat{x}$) entonces \hat{D} , siendo diagonal, debe ser proporcional a la matriz identidad. De acuerdo con (2.108) tenemos entonces que

$$d_\alpha = d, \quad \hat{D} = d\mathbb{I}. \quad (2.115)$$

²⁸Nótese que si bien no hemos modificado la notación, la \hat{D} que aparece en (2.113) difiere de la que aparece en (2.112) pues aquí *ya* estamos en el régimen no radiativo.

Sustituyendo lo anterior en la ec. (2.113) ésta se reescribe como

$$\begin{aligned} i\hat{p} &= \frac{d}{2} [\hat{x}, \hat{p}^2] \\ &= \frac{d}{2} (\hat{C}\hat{p} + \hat{p}\hat{C}), \end{aligned} \quad (2.116)$$

donde \hat{C} es el conmutador $\hat{C} \equiv [\hat{x}, \hat{p}]$.

Una primera conclusión que podemos extraer de lo anterior es que d , al no depender del estado particular α , es una constante *universal* que aparece —una vez establecido el régimen no radiativo— en la ley de evolución dinámica (ec. (2.110)) en la forma

$$i \frac{d\hat{A}(t)}{dt} = d [\hat{A}, \hat{H}]. \quad (2.117)$$

La segunda conclusión que se desprende de la ec. (2.116) es que el conmutador \hat{C} debe ser inversamente proporcional a d . De hecho, claramente la matriz

$$\hat{C} = id^{-1}\mathbb{I} \quad (2.118)$$

es solución de la ec. (2.116) (una demostración más formal del resultado (2.118) se presenta en la subsección siguiente). Lo importante aquí es destacar que en el régimen no radiativo \hat{C} contiene necesariamente a la constante d y posee por lo tanto un valor universal. Así, basta determinar \hat{C} para conocer d y con ello la forma final de la ecuación (2.117), o viceversa. Se sigue de aquí que el conmutador de \hat{x} y \hat{p} y la ecuación que rige la evolución de las variables dinámicas (ambos en la aproximación no radiativa) guardan una estrecha relación, que le otorga al conmutador un significado dinámico.

Dado que en las ecuaciones (2.117) y (2.118) se ha perdido la información (explícita) del campo que se halla en equilibrio con la materia, debemos esperar que ella esté contenida en la constante d , y para verificarlo procederemos a calcular el conmutador \hat{C} .

2.6.1. Regla de conmutación para \hat{x} y \hat{p} : recuperando la \hbar del campo

Si bien la ec. (2.116) muestra que el conmutador de \hat{x} y \hat{p} es diagonal, a continuación daremos una prueba alterna de dicho resultado. Partimos de escribir el elemento $\alpha\beta$ del conmutador,

$$C_{\alpha\beta}(t) = [\hat{x}(t), \hat{p}(t)]_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} [\tilde{x}_{\alpha\gamma}(t)\tilde{p}_{\gamma\beta}(t) - \tilde{p}_{\alpha\gamma}(t)\tilde{x}_{\gamma\beta}(t)]. \quad (2.119)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $\omega_{\alpha\beta}$ y usando la regla de la cadena (2.76) obtenemos (omitimos la dependencia en t por simplicidad en la escritura)

$$\begin{aligned}\omega_{\alpha\beta}C_{\alpha\beta} &= \sum_{\gamma} (\tilde{x}_{\alpha\gamma}\tilde{p}_{\gamma\beta} - \tilde{p}_{\alpha\gamma}\tilde{x}_{\gamma\beta})(\omega_{\alpha\gamma} + \omega_{\gamma\beta}) \\ &= \sum_{\gamma} (\tilde{x}_{\alpha\gamma}\tilde{p}_{\gamma\beta}\omega_{\alpha\gamma} + \tilde{x}_{\alpha\gamma}\tilde{p}_{\gamma\beta}\omega_{\gamma\beta} - \tilde{p}_{\alpha\gamma}\omega_{\alpha\gamma}\tilde{x}_{\gamma\beta} - \tilde{p}_{\alpha\gamma}\tilde{x}_{\gamma\beta}\omega_{\gamma\beta})\end{aligned}\quad (2.120)$$

Si ahora hacemos $\tilde{p}_{\alpha\gamma} = im\omega_{\alpha\gamma}\tilde{x}_{\alpha\gamma}$ (como se sigue de (2.111a)) encontramos que

$$\tilde{x}_{\alpha\gamma}\tilde{p}_{\gamma\beta}\omega_{\alpha\gamma} = im\tilde{x}_{\alpha\gamma}\tilde{x}_{\gamma\beta}\omega_{\gamma\beta}\omega_{\alpha\gamma} = \tilde{p}_{\alpha\gamma}\tilde{x}_{\gamma\beta}\omega_{\gamma\beta},\quad (2.121)$$

de modo que el primer y último término de la ec. (2.120) se cancelan. Dicha expresión se reduce entonces, con ayuda de la ec. (2.111b) reescrita en la forma $\tilde{f}_{\alpha\gamma} = i\omega_{\alpha\gamma}\tilde{p}_{\alpha\gamma}$, a

$$\omega_{\alpha\beta}C_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} -i \left(\tilde{x}_{\alpha\gamma}\tilde{f}_{\gamma\beta} - \tilde{f}_{\alpha\gamma}\tilde{x}_{\gamma\beta} \right) = -i \left[\hat{x}, \hat{f}(x) \right]_{\alpha\beta} = 0.\quad (2.122)$$

Dado que la ecuación (2.122) debe satisfacerse para toda pareja $\alpha\beta$, y en general $\omega_{\alpha\beta} \neq 0$ (salvo cuando $\alpha = \beta$), debemos concluir que en la aproximación no radiativa en efecto \hat{C} es una matriz diagonal (y por lo tanto independiente de t), es decir,

$$C_{\alpha\beta} = C_{\alpha}\delta_{\alpha\beta},\quad (2.123)$$

resultado que al sustituirse en la ec. (2.116) conduce a

$$C_{\alpha} + C_{\beta} = \frac{2i}{d}\quad (2.124)$$

para toda $\alpha \neq \beta$. Como el lado derecho de (2.124) es independiente del estado específico, los elementos C_{δ} deben ser también independientes del índice, de manera que

$$C_{\alpha} = C = id^{-1},\quad (2.125)$$

expresión que junto con (2.123) demuestra la ec. (2.118).

Resta entonces determinar el valor de la constante d . Para ello recurrimos a su universalidad, que hace del valor del conmutador uno independiente del sistema y el estado específicos. Esto nos permite calcular \hat{C} suponiendo que estamos tratando con un ensemble de osciladores armónicos de frecuencia ω_0 en presencia del campo

de punto cero. En este caso contamos con la ecuación

$$(\sigma_x^2 \sigma_p^2)_{\min} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{\omega_0^2} = \frac{\hbar^2}{4}, \quad (2.126)$$

que no es sino la ec. (1.99) aplicada al caso en que el campo sólo posee su contribución de vacío (lo que elimina el término de origen térmico $\sigma_{\mathcal{E}_T}^2$) y en la que hemos sustituido la variable q por x .

Por otro lado, las varianzas σ_x^2 y σ_p^2 de los operadores \hat{x} y \hat{p} satisfacen la relación de Robertson-Schrödinger^[69]:

$$\sigma_x^2 \sigma_p^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle|^2 + \left| \langle \frac{1}{2} \{ \hat{x}, \hat{p} \} - \langle \hat{x} \rangle \langle \hat{p} \rangle \rangle \right|^2 \quad (2.127)$$

con $\{ \hat{x}, \hat{p} \} = \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}$.²⁹ De aquí se tiene, en particular, que

$$\sigma_x^2 \sigma_p^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle|^2 = \frac{1}{4} \left| \langle \hat{C} \rangle \right|^2. \quad (2.128)$$

Comparando el valor mínimo de $\sigma_x^2 \sigma_p^2$ que arroja esta expresión con la ec. (2.126), y recurriendo a la ec. (2.118), se encuentra³⁰

$$\left| \langle \hat{C} \rangle \right|^2 = |id^{-1}|^2 = \hbar^2, \quad (2.129)$$

de donde se desprende que

$$d = \frac{1}{\hbar}, \quad (2.130)$$

y por lo tanto que el conmutador está dado por:

$$\hat{C} = [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\mathbb{I}. \quad (2.131)$$

Alcanzamos así un resultado de gran importancia: el conmutador $[\hat{x}, \hat{p}]$ está determinado exclusivamente por el campo de vacío, a través de la constante que fija la energía (de punto cero) de cada uno de sus modos. Así, la referencia al campo que se había perdido en las ecuaciones (2.117) y (2.118) se recupera a través del conmutador, el cual reintroduce la constante de Planck en la teoría alejándola definitivamente de

²⁹ Aquí es importante hacer notar que el resultado (2.127) es estrictamente matemático e independiente de cualquier ley física.

³⁰ La comparación entre dichas ecuaciones es legítima en virtud de que puede demostrarse que la varianza de A_α coincide con la varianza del operador (matriz) \hat{A} asociado a dicha variable, una vez que los estados del sistema (α) se asocian con vectores de estado ($|\alpha\rangle$) de un espacio de Hilbert. Más adelante, en la primera parte de la sección 2.7, se muestra y discute dicho resultado.

toda descripción clásica. Más aún, la desigualdad

$$\sigma_x^2 \sigma_p^2 \geq \hbar^2/4 \quad (2.132)$$

que se obtiene sustituyendo (2.131) en (2.128) —y cuya validez había sido probada en el capítulo 1 para un sistema de osciladores armónicos— muestra que una vez que se ha alcanzado el régimen cuántico, y como resultado de la acción del campo de punto cero, *todo* sistema mecánico adquiere fluctuaciones que son inevitables. De esta manera podemos decir que el conmutador $[\hat{x}, \hat{p}]$ porta información acerca de la intensidad de las fluctuaciones impresas por el campo sobre la partícula.

Para finalizar esta sección es importante señalar que a diferencia de la *identidad* del paréntesis de Poisson clásico, $[x, p]_P = 1$, su contraparte cuántica —el conmutador (2.131)— constituye una *ley física* con significado dinámico, como ya se había mencionado abajo de la ec. (2.118). En otras palabras, mientras $[x, p]_P = 1$ es una relación inviolable, la ley física $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ es sólo aproximada y consecuentemente de validez restringida.

En el Apéndice ?? se presenta una derivación alterna del resultado (2.131) que descansa en la naturaleza resonante de la respuesta del sistema mecánico al campo.

2.6.2. La ecuación de Heisenberg y la regla de transición de Bohr

Cuando sustituimos el valor de la constante d (ec. (2.130)) en la ec. (2.117) encontramos finalmente la ley de evolución

$$i\hbar \frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}], \quad (2.133)$$

que no es sino la ecuación de Heisenberg para el operador dinámico $\hat{A}(t)$.

Por otro lado, sustituyendo la ec. (2.130) en (2.109) tenemos que

$$\Omega_\alpha = \frac{\mathcal{E}_\alpha}{\hbar}, \quad (2.134)$$

resultado que nos conduce a identificar la relación (2.84) con la regla de transición de Bohr

$$\hbar\omega_{\alpha\beta} = \mathcal{E}_\alpha - \mathcal{E}_\beta. \quad (2.135)$$

Con esta expresión la teoría logra establecer el significado de las frecuencias relevantes del sistema mecánico. Ahora bien, como las frecuencias de resonancia son sólo *ciertas* frecuencias relevantes, lo anterior indica que cuando el sistema mecánico resuena

a una frecuencia (de resonancia) dada $\omega_{\alpha\delta}$ entonces la partícula puede realizar una transición del estado estacionario α , de energía \mathcal{E}_α , al estado estacionario δ , de energía $\mathcal{E}_\delta = \mathcal{E}_\alpha - \hbar\omega_{\alpha\delta}$.^{31,32} Debe resaltarse que dado que las frecuencias de resonancia están dinámicamente bien determinadas (mediante la ecuación (2.38)), también lo están las transiciones posibles partiendo desde cada uno de los estados estacionarios; con esto se explica cómo es que el electrón “sabe” de antemano la frecuencia que debe emitir (o absorber) al realizar la transición, pues ella está determinada por las resonancias del sistema. De acuerdo con esto la respuesta resonante de la partícula a *ciertas* frecuencias del campo de fondo constituye el mecanismo físico responsable de las transiciones de la partícula a los diferentes estados estacionarios *accesibles*. Esta propiedad resonante, aunada al hecho de que las cantidades que aparecen en la ec. (2.135) han perdido su carácter estocástico gracias a la demanda de ergodicidad, juega entonces el papel de un *principio de cuantización*. De esta manera, durante la evolución del sistema completo hacia el equilibrio el principio ergódico selecciona, de entre todas las posibles soluciones estacionarias de la ecuación de movimiento, aquellas que son suficientemente robustas con respecto a las fluctuaciones del campo, definiendo así lo que entendemos como las soluciones cuánticas. Es oportuno señalar que las aproximaciones no radiativas que condujeron a las ecs. (2.111) permiten tratar los estados excitados como si fuesen estacionarios, como ocurre también en la mecánica cuántica.

Por otro lado, la relación entre la energía y la frecuencia que caracteriza al sistema mecánico de acuerdo con la ec. (2.135) (y que se comentó al final de la subsección 2.4.2) no obedece, desde esta perspectiva, a una cualidad ondulatoria *propia* de la materia (como suele entenderse en el contexto de la mecánica cuántica) sino que refleja meramente su interacción con el campo, cuya energía se relaciona en forma directa con la frecuencia.

Es importante señalar que si bien nos hemos basado en la forma diagonal de la matriz \hat{H} para obtener la expresión (2.110), y por ende la ec. (2.133), esta

³¹Las frecuencias relevantes que no son frecuencias de resonancia no inducen transiciones; no obstante ellas juegan un papel importante en la descripción de las diferentes variables dinámicas, toda vez que representan las frecuencias de oscilación de las diferentes potencias de x , como se sigue de la aplicación de la regla matricial (un ejemplo claro de esto puede verse al final del Apéndice.A). En este sentido la regla de la cadena nos dice que las frecuencias relevantes no son sino una suma encadenada de frecuencias de resonancia (las cuales determinan las contribuciones importantes de x_α). Esto último explica por qué las reglas de selección involucran los elementos de matriz de \hat{x} y no de cualquier otra variable.

³²El hecho de que el campo no representa un ruido blanco es determinante aquí, pues es gracias a la coherencia espacial y temporal del campo de fondo que la partícula puede mantener su estado estacionario durante tiempos relativamente largos, antes de que ocurra una transición entre estados estacionarios.

última seguirá satisfaciéndose aun cuando se realice un cambio de base y la matriz transformada $\hat{H}' = U^\dagger \hat{H} U$ deje de ser diagonal, siempre que la transformación U sea unitaria. En este caso, cuando la matriz del hamiltoniano es \hat{H}' , la expresión (2.103) muestra que la energía \mathcal{E}_α será una cantidad fluctuante y en consecuencia el estado α no será uno estacionario. Por lo anterior, podemos decir que (2.133) es la ley de evolución para las variables dinámicas en todos los casos, incluso en los no estacionarios.

Los resultados previos muestran que cuando se ha alcanzado el régimen cuántico la presente teoría establece contacto con las ecuaciones fundamentales de la mecánica cuántica, a la vez que identifica algunos de los mecanismos físicos que subyacen a ellas. Sin embargo, una descripción en términos de operadores que representan variables dinámicas es insuficiente para nuestros propósitos a no ser que se introduzcan en ella vectores de estado. Con este fin, en las siguientes subsecciones completaremos la descripción en el espacio de Hilbert al tiempo que extraeremos algunas conclusiones acerca de la naturaleza estadística de nuestros resultados.

2.6.3. La descripción en el espacio de Hilbert

Vectores de estado

Hemos visto que toda variable dinámica real $A(t)$ que se pueda expresar en la forma (2.92) tiene asociada una matriz $\hat{A}(t)$ cuyos elementos están dados por los osciladores elementales $\tilde{A}_{\alpha\beta}(t) = \tilde{A}_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t}$. Dicha matriz puede desarrollarse como sigue

$$\hat{A}(t) = \sum_{\alpha,\beta} \tilde{A}_{\alpha\beta}(t) |e_\alpha\rangle \langle e_\beta| = \sum_{\alpha,\beta} \tilde{A}_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} |e_\alpha\rangle \langle e_\beta|, \quad (2.136)$$

en términos de una base $\{|e_\alpha\rangle \langle e_\beta|\}$ de operadores construidos a partir de los vectores $\{|e_\alpha\rangle\}$ de una base ortonormal que genera un espacio de Hilbert apropiado \mathbb{H} . Usando esta base es posible construir otra a través de la transformación unitaria

$$|e_\alpha\rangle \rightarrow |\alpha(t)\rangle = e^{-i(\mathcal{E}_\alpha/\hbar)t} |e_\alpha\rangle, \quad (2.137)$$

de tal forma que en esta nueva representación la expresión (2.136) se convierte en

$$\begin{aligned}
 \hat{A}(t) &= \sum_{\alpha,\beta} \tilde{A}_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} |\alpha(t)\rangle \langle\beta(t)| \\
 &= \sum_{\alpha,\beta} \tilde{A}_{\alpha\beta} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathcal{E}_\alpha - \mathcal{E}_\beta)t} e^{-i(\mathcal{E}_\alpha/\hbar)t} e^{i(\mathcal{E}_\beta/\hbar)t} |e_\alpha\rangle \langle e_\beta| \\
 &= \sum_{\alpha,\beta} \tilde{A}_{\alpha\beta} |e_\alpha\rangle \langle e_\beta| = \hat{A}(0),
 \end{aligned} \tag{2.138}$$

es decir, la matriz \hat{A} pierde su dependencia temporal —aquella que está a la base de la representación de Heisenberg de la mecánica cuántica— recayendo la dinámica en los vectores $\{|\alpha(t)\rangle\}$. Como éstos están directamente relacionados con la energía \mathcal{E}_α alcanzada por la partícula, cada uno de los vectores $|\alpha(t)\rangle$ está asociado a uno de los diferentes estados estacionarios $\{\alpha\}$ y constituye por lo tanto un vector de *estado* (estacionario) —entendido éste como un vector que representa un estado físico del sistema— que evoluciona de acuerdo con la ec. (2.137). Esta observación nos permite establecer contacto con la representación de Schrödinger de la mecánica cuántica y ayuda a explicitar la interpretación estadística del formalismo.

Debido a las propiedades de ortonormalidad y completéz de la base $\{|e_\alpha\rangle\}$, las ecs. (2.138) y (2.137) nos permiten derivar la expresión

$$\tilde{A}_{\alpha\beta}(t) = \langle e_\alpha | \hat{A}(t) | e_\beta \rangle = \langle \alpha(t) | \hat{A}(0) | \beta(t) \rangle. \tag{2.139}$$

En lo que sigue simplificaremos la notación y escribiremos

$$\tilde{A}_{\alpha\beta} = \langle \alpha | \hat{A} | \beta \rangle, \tag{2.140}$$

lo que conduce (al tomar $\alpha = \beta$) a

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_{\alpha\alpha} &= \langle \alpha | \hat{A} | \alpha \rangle \\
 &= \overline{A}_\alpha^t = \langle A_\alpha \rangle,
 \end{aligned} \tag{2.141}$$

donde en la última línea hemos empleado la expresión (2.57) (con $a_{\alpha\alpha} = 1$ como se sigue de (2.81)) que se cumple en general para toda variable dinámica de la forma (2.92).³³

El resultado (2.140) constituye la bien conocida relación entre los elementos $\alpha\beta$ de la matriz asociada a la variable A y los correspondientes vectores de estado, y

³³Este resultado muestra que siempre que \hat{A} sea una matriz hermitiana su valor esperado es una cantidad real y por lo tanto $A_\alpha(t)$ puede en principio considerarse una cantidad física real.

junto con la ec. (2.133) nos permite recuperar la descripción matricial estándar de la mecánica cuántica.

La ecuación de Schrödinger

Por generar un espacio de Hilbert los vectores de la base $\{|\alpha(t)\rangle\}$ permiten construir un conjunto completo de funciones $\{\psi_\alpha(x, t)\}$ tales que

$$\psi_\alpha(x, t) = \langle x | \alpha(t) \rangle = e^{-i(\mathcal{E}_\alpha/\hbar)t} \langle x | e_\alpha \rangle = e^{-i(\mathcal{E}_\alpha/\hbar)t} \varphi_\alpha(x), \quad (2.142)$$

donde $|x\rangle$ es un elemento de una base continua del espacio de Hilbert y donde hemos definido

$$\varphi_\alpha(x) = \psi_\alpha(x, 0). \quad (2.143)$$

La ecuación (2.142) no es sino la ecuación (2.137) reescrita en el espacio de funciones $\{\psi_\alpha(x, t)\}$. La ley que determinará la evolución dinámica del sistema se obtiene fácilmente a partir de (2.142) y está dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_\alpha(x, t) = \mathcal{E}_\alpha \psi_\alpha(x, t), \quad (2.144)$$

en coincidencia con la condición de estacionariedad de la ecuación de Schrödinger.³⁴

En esta representación el elemento de matriz $\tilde{A}_{\alpha\beta} = \langle \alpha | \hat{A} | \beta \rangle$ adquiere la forma

$$\tilde{A}_{\alpha\beta} = \int \psi_\alpha^* \hat{A}_x \psi_\beta dx, \quad (2.145)$$

donde hemos escrito \hat{A}_x para resaltar el hecho de que aquí debe emplearse la forma del operador \hat{A} en la representación de coordenadas, aunque en lo que sigue omitiremos el subíndice x . En particular, haciendo $\alpha = \beta$ en (2.145) y utilizando la ec. (2.141) obtenemos

$$\overline{A}_\alpha^t = \langle A_\alpha \rangle = \int \psi_\alpha^* \hat{A} \psi_\alpha dx. \quad (2.146)$$

³⁴ Aquí es oportuno mencionar que si bien la ecuación de Heisenberg y la ecuación de Schrödinger proveen la misma información física, los parámetros que aparecen de manera natural en la primera representación son las frecuencias $\omega_{\alpha\beta}$ mientras que en la segunda lo son las energías \mathcal{E}_α , de modo que en la transición de una representación otra se traslada el acento de las frecuencias $\omega_{\alpha\beta}$ a las energías \mathcal{E}_α y viceversa. Así, con la *sola* ecuación (2.144) no sólo no se puede recuperar el mecanismo de resonancia (éste se perdió al eliminar la presencia del campo cuando tomamos la aproximación no radiativa), sino que también la noción de transición queda oculta, reincorporándose hasta que se introduce la regla de transición de Bohr, ec. (2.135).

Si además la variable A es tal que $A = A(x)$, entonces lo anterior se reduce a

$$\overline{A}_\alpha^t = \langle A_\alpha \rangle = \int \rho_\alpha(x) A(x) dx, \quad (2.147)$$

donde

$$\rho_\alpha(x) = |\psi_\alpha|^2 = |\varphi_\alpha|^2. \quad (2.148)$$

De acuerdo con (2.147) la función $\rho_\alpha(x)$ representa la densidad de probabilidad a partir de la cual se calculan los valores medios de toda función de x . La expresión (2.148) conduce entonces a interpretar la función φ_α como una amplitud de probabilidad en el espacio de configuración, resultado que verifica la legitimidad del significado de dicha función en el marco del formalismo cuántico, y que permite reincorporar el sentido estadístico al formalismo de Schrödinger que describe estados estacionarios. Debe señalarse, sin embargo, que de acuerdo con el enfoque presente (véase la sección 2.7) la función de onda $\varphi_\alpha(x)$ proporciona información sobre el *subensemble* de partículas de energía \mathcal{E}_α y no sobre una sola de ellas.

Como se mencionó al final de la subsección 2.6.2 la ecuación de Heisenberg mantiene su validez incluso en el caso no estacionario siempre que la transformación que lleva de la base original a la base en la que \hat{H} deja de ser diagonal sea unitaria. Debido a esto, y por razones de completez, a continuación determinaremos la ecuación general que debe sustituir a (2.144) cuando el sistema no se encuentra en un estado estacionario. Para ello escribimos la ecuación (2.133) (en términos de \hat{H}') elemento a elemento

$$i\hbar \frac{d\hat{A}_{\alpha\beta}}{dt} = (\hat{A}\hat{H}' - \hat{H}'\hat{A})_{\alpha\beta}. \quad (2.149)$$

Si ahora recurrimos al último miembro de la expresión (2.139) podemos reexpresar la ec. (2.149) como (nótese que ahora los vectores $\{|\alpha(t)\rangle\}$ no corresponden a vectores de un estado estacionario, como ocurría en (2.137))

$$i\hbar \left[\langle \alpha(t) | \hat{A} \cdot \frac{d}{dt} |\beta(t)\rangle + \left(\frac{d}{dt} \langle \alpha(t) | \right) \cdot \hat{A} |\beta(t)\rangle \right] = \langle \alpha(t) | \hat{A}\hat{H}' |\beta(t)\rangle - \langle \alpha(t) | \hat{H}'\hat{A} |\beta(t)\rangle. \quad (2.150)$$

Reacomodando los términos (y omitiendo la dependencia en t) obtenemos

$$\langle \alpha | \hat{A} \left[i\hbar \frac{d}{dt} |\beta\rangle - \hat{H}' |\beta\rangle \right] = \left[-i\hbar \frac{d}{dt} \langle \alpha | - \langle \alpha | \hat{H}' \right] \hat{A} |\beta\rangle. \quad (2.151)$$

Como esta ecuación debe satisfacerse para toda \hat{A} e independientemente de los estados

α y β , ella conduce a que

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha(t)\rangle = \hat{H}' |\alpha(t)\rangle. \quad (2.152)$$

Finalmente, proyectando $|\alpha(t)\rangle$ sobre $|x\rangle$, con $\psi_\alpha(x, t) = \langle x | \alpha(t) \rangle$, llegamos a la ecuación completa de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_\alpha(x, t) = \hat{H}' \psi_\alpha(x, t). \quad (2.153)$$

Representación estocástica

La regla de la cadena para las variables $\{a_{\alpha\beta}\}$ (ec. (2.77)) implica que no sólo las cantidades $\tilde{A}_{\alpha\beta}(t)$, sino también los diferentes sumandos que aparecen en el desarrollo de $A_\alpha(t)$:

$$\tilde{A}_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} a_{\alpha\beta}, \quad (2.154)$$

pueden considerarse como los elementos $\alpha\beta$ de una matriz, en este caso una matriz *estocástica*, que denotaremos con $\hat{A}^{(i)}$. Desarrollando ésta en términos de la misma base canónica empleada en (2.136) obtenemos

$$\hat{A}^{(i)}(t) = \sum_{\alpha, \beta} \tilde{A}_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} a_{\alpha\beta}^{(i)} |e_\alpha\rangle \langle e_\beta|. \quad (2.155)$$

Como lo indica la expresión (2.81), la regla de la cadena establece una estructura para las $a_{\alpha\beta}^{(i)}$ que nos permite factorizarlas en la forma

$$a_{\alpha\beta}^{(i)} = e^{i\phi_\alpha^{(i)}} e^{-i\phi_\beta^{(i)}}, \quad (2.156)$$

de modo que si definimos los elementos de una base estocástica de acuerdo con

$$|\alpha^{(i)}\rangle \equiv e^{i\phi_\alpha^{(i)}} |e_\alpha\rangle, \quad (2.157)$$

podemos reescribir la matriz $\hat{A}^{(i)}(t)$ como sigue

$$\hat{A}^{(i)}(t) = \sum_{\alpha, \beta} \tilde{A}_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} |\alpha^{(i)}\rangle \langle \beta^{(i)}|. \quad (2.158)$$

La ortonormalidad de la nueva base $\{|\alpha^{(i)}\rangle\}$ conduce al resultado

$$\tilde{A}_{\alpha\beta}(t) = \langle \alpha^{(i)} | \hat{A}^{(i)}(t) | \beta^{(i)} \rangle, \quad (2.159)$$

expresión que, junto con (2.139), muestra una equivalencia entre los resultados obtenidos

2.7. La naturaleza estadística de la descripción cuántica

en las representaciones de Heisenberg, Schrödinger y esta última, la *representación estocástica*.

Aplicando la transformación (2.137) a los vectores de la base canónica $\{|e_\alpha\rangle\}$ podemos generalizar la ec. (2.157) para obtener

$$|\alpha^{(i)}(t)\rangle = e^{i\phi_\alpha^{(i)}} |\alpha(t)\rangle, \quad (2.160)$$

de manera que los vectores resultantes difieren de aquellos que aparecen en la representación de Schrödinger por la fase estocástica $\phi_\alpha^{(i)}$. Si bien dentro del formalismo cuántico el estado $|\alpha(t)\rangle$ está completamente determinado salvo por una fase, de tal forma que ésta no provee información física alguna (sólo las fases relativas entre diferentes estados son relevantes), en el presente contexto $\phi_\alpha^{(i)}$ aparece como un remanente de la estocasticidad del sistema, y en consecuencia posee un claro sentido físico.

La suma de dos vectores en la representación estocástica está dada por

$$\begin{aligned} |\Psi^{(i)}\rangle &= |\alpha^{(i)}\rangle + |\delta^{(i)}\rangle \\ &= e^{i\phi_\alpha^{(i)}} \left(|\alpha\rangle + e^{i(\phi_\delta^{(i)} - \phi_\alpha^{(i)})} |\delta\rangle \right), \end{aligned} \quad (2.161)$$

donde la superposición³⁵

$$|\psi^{(i)}\rangle = |\alpha\rangle + e^{i(\phi_\delta^{(i)} - \phi_\alpha^{(i)})} |\delta\rangle \quad (2.162)$$

con fase relativa ruidosa es de la misma naturaleza que aquella que normalmente se emplea, por ejemplo, en las teorías de la medición como una forma de introducir el ambiente, el cual en este contexto es precisamente el campo de fondo en el que la partícula está inmersa. Así, la existencia de una fase relativa y ruidosa —que coincide con $a_{\delta\alpha}$ — como indicador de la presencia del ambiente es completamente natural desde la perspectiva de la EDEL.

2.7. La naturaleza estadística de la descripción cuántica

Hasta aquí hemos entendido a $x_\alpha^{\text{est}}(t)$ como el valor que adquiere $x(t)$ cuando el subsistema mecánico ha alcanzado el estado estacionario α . Sin embargo, y de

³⁵En la sección 3.6 ahondaremos en el origen de la superposición de estados, característica de la mecánica cuántica.

acuerdo con lo que se explicó al inicio de la subsección 2.2.2, $x_\alpha^{\text{est}}(t)$ no describe la correspondiente variable física de *una* partícula, sino que es una cantidad estocástica representativa del subensamble de partículas que al tiempo t se encuentran en un estado de energía \mathcal{E}_α . Como ya ha sido discutido, las partículas que alcanzan este estado pueden resonar a ciertas frecuencias del campo, de modo que el subensamble en cuestión está conformado a su vez por diversos subensambles, cada uno de los cuales está compuesto de las partículas que resuenan a cada una de dichas frecuencias. La contribución de todos estos subensambles al valor de $x_\alpha^{\text{est}}(t)$ aparece claramente en la suma de la expresión

$$x_\alpha^{\text{est}}(t) = \tilde{x}_{\alpha\alpha} + \sum_{\beta(\neq\alpha)} \left(\tilde{x}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathcal{E}_\alpha - \mathcal{E}_\beta)t} + \tilde{x}_{\beta\alpha} a_{\beta\alpha} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha)t} \right), \quad (2.163)$$

que no es sino la ec. (2.30) reescrita para $A = x$ donde hemos empleado las ecs. (2.82) y (2.94), y restringido la suma sólo a aquellas frecuencias (de resonancia) que contribuyen de manera importante a $x_\alpha^{\text{est}}(t)$.

Dado que $\bar{x}_\alpha^t = \tilde{x}_{\alpha\alpha}$ los términos que encuentran su origen en la respuesta resonante del sistema —aquellos que corresponden a las amplitudes $\tilde{x}_{\alpha\beta}(t)$ ($\alpha \neq \beta$)— determinan las desviaciones de $x_\alpha^{\text{est}}(t)$ con respecto a su valor medio, indicando que dicha variable está distribuida cuando consideramos al ensemble de partículas. Asimismo, como las frecuencias de resonancia ya han sido identificadas con las frecuencias de transición (ec. (2.135)), el conjunto de tales desviaciones puede entenderse como una colección de todas las transiciones posibles, realizadas por las diferentes partículas del subensamble, desde o hacia el estado de energía \mathcal{E}_α .³⁶ Esta interpretación les otorga a las amplitudes $\tilde{x}_{\alpha\beta}$, cuya magnitud determinará la contribución al estado α de partículas provenientes desde el estado β , una naturaleza claramente estadística.

Surge entonces la duda de si el carácter estadístico de la presente teoría persiste en la descripción cuántica, toda vez que la fuente de estocasticidad ha sido eliminada al efectuar la aproximación no radiativa. A manera de ejemplo, y con el fin de ilustrar que las expresiones del formalismo cuántico heredan una naturaleza estadística, aplicaremos la ecuación (2.140) a $A = x$ y usaremos las ecuaciones (2.61) y (2.79) para obtener

$$\sigma_{x_\alpha}^2 = \sum_{\beta(\neq\alpha)} |\langle \alpha | \hat{x} | \beta \rangle|^2 = \sum_{\beta(\neq\alpha)} \langle \alpha | \hat{x} | \beta \rangle \langle \beta | \hat{x} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{x}^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle^2, \quad (2.164)$$

³⁶Nótese que el hecho de que \hat{x} sea un operador hermitiano nos permite entender el intercambio de índices $\alpha \leftrightarrow \beta$ como la transición inversa.

donde hemos usado la hermiticidad de \hat{x} y la relación de completez de la base $\{|\alpha\rangle\}$. Dado que el lado izquierdo de la ec. (2.164) representa la varianza estadística (es decir, la varianza que se obtiene al calcular promedios sobre el tiempo o sobre las realizaciones del campo), la primera igualdad muestra que las cantidades $\langle\alpha|\hat{x}|\beta\rangle$ poseen una connotación estadística. Se puede demostrar fácilmente que una ecuación similar a (2.164) se cumple para la varianza $\sigma_{A\alpha}^2$ de una variable dinámica cualquiera A (siempre que su matriz representativa sea hermitiana), de tal forma que aunque las amplitudes (2.139) —y en general cualquiera de los elementos matriciales de la ecuación de movimiento (2.95)— no tienen remanentes estocásticos, su naturaleza estadística no se ha perdido. Más aún, la última igualdad en (2.164) muestra que la varianza como se calcula con el formalismo estándar de la mecánica cuántica debe en efecto interpretarse como una varianza estadística, a pesar de que en dicha descripción no hay referencia alguna a las variables estocásticas y de que la definición se aplica a números q , es decir, a operadores y no a números c . Esto implica, en particular, que la desigualdad de Heisenberg (2.132) involucra varianzas estadísticas, de tal forma que no son necesarios para su interpretación conceptos como observaciones o mediciones, ni ningún otro que sea ajeno a una descripción objetiva y de índole estadística.

Los resultados anteriores se entienden fácilmente notando que la expresión (2.141) muestra que la cantidad $\langle\alpha|\hat{A}|\alpha\rangle$ puede legítimamente ser considerada y llamada un valor esperado. Dicha ecuación deja ver también que los valores esperados con los que trabaja la mecánica cuántica en un estado estacionario satisfacen el principio de ergodicidad.

2.7.1. Reflexión sobre las variables físicas y su representación matricial

A lo largo del presente capítulo hemos podido construir las ecuaciones dinámicas de la mecánica cuántica a partir de la ecuación de movimiento estocástica (2.11). No obstante, si bien los operadores que aparecen en el formalismo cuántico se corresponden con las respectivas variables *físicas*, ambos elementos difieren entre sí como lo indica su naturaleza claramente disímbola. La descripción contenida en la evolución de las matrices asociadas a las variables físicas ha perdido toda referencia a estas últimas, y en consecuencia ellas son *stricto sensu* ajenas a la mecánica cuántica. La relación entre una variable dinámica física y su matriz correspondiente, así como la relación entre las leyes matriciales y las leyes satisfechas por cantidades físicas, debe entonces buscarse fuera de los límites del formalismo cuántico. En esta última sección esbozaremos algunas de las conclusiones preliminares que arroja la teoría al

respecto.³⁷

En un estado α y para una variable dinámica $A(t)$ hemos definido dos cantidades: el número, en general complejo (veáanse las ecs. (2.40))

$$A_\alpha(t) = \sum_{\beta} \tilde{A}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} = \tilde{A}_{\alpha\alpha} + \sum_{\beta(\neq\alpha)} \tilde{A}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t}, \quad (2.165)$$

y el número real (veáse la ec. (2.30))

$$A_\alpha^{\text{est}}(t) = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{\alpha\alpha} a_{\alpha\alpha} + \text{c.c.}) + \sum_{\beta(\neq\alpha)} \left(\tilde{A}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t} + \text{c.c.} \right) \quad (2.166)$$

que determina el valor que adquiere la variable A en el tiempo y por lo tanto identificamos con la variable *física*. Ambas cantidades se desarrollan en términos de los elementos matriciales $\tilde{A}_{\alpha\beta}(t)$, de modo que tanto $A_\alpha(t)$ como $A_\alpha^{\text{est}}(t)$ están en correspondencia con la matriz $\hat{A}(t)$. Sin embargo, la ecuación (2.95), que en el límite no radiativo se reduce a las ecuaciones de movimiento (2.111), no es más que la forma cerrada (matricial) de escribir la ecuación (2.33).³⁸ Ésta a su vez es la ecuación de movimiento detallada (*i.e.*, para cada frecuencia relevante) de la ecuación (2.39) que involucra a las variables complejas $A_\alpha(t)$ y *no* a las variables físicas $A_\alpha^{\text{est}}(t)$. Así, el hecho de que las leyes matriciales que hemos encontrado reflejen ecuaciones directamente asociadas a las variables $A_\alpha(t)$, sugiere que la cantidad que está *directamente* representada por la matriz $\hat{A}(t)$ es $A_\alpha(t)$ y no $A_\alpha^{\text{est}}(t)$. Dicho de otro modo, dado que la ecuación matricial (2.95) no corresponde estrictamente a una ecuación de movimiento en términos de las correspondientes variables físicas, entonces sus soluciones —esto es, las diversas matrices $\hat{A}(t)$ — no deben identificarse en un sentido estricto con las variables $A^{\text{est}}(t)$.

No obstante, si la matriz $\hat{A}(t)$ es hermitiana, la expresión (2.141) muestra que aunque el operador $\hat{A}(t)$ no representa directamente la variable $A^{\text{est}}(t)$, sus elementos diagonales ($\tilde{A}_{\alpha\alpha}$) *sí* deben identificarse con cantidades físicas que son precisamente los valores esperados de $A^{\text{est}}(t)$ en los diferentes estados estacionarios accesibles $\{\alpha\}$. Más aún, las expresiones (2.165) y (2.166) indican que $A_\alpha(t)$ y $A_\alpha^{\text{est}}(t)$ coinciden en sus valores medios, resultado que nos permite concluir que el valor medio de la ley

³⁷En estas líneas debemos insistir en que las variables dinámicas que hemos definido caracterizan a un ensemble de sistemas, de modo que así como una variable no debe entenderse como referida a *una sola* partícula, tampoco tiene sentido hablar del operador correspondiente como asociado a un sistema individual.

³⁸De manera más general diríamos que la ecuación (2.102), que en la aproximación no radiativa se reduce a la ley de evolución de Heisenberg, no es sino la forma cerrada de escribir la ec. (2.98).

dinámica (2.133),

$$i\hbar \langle \hat{A} \rangle = \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle, \quad (2.167)$$

constituye una ley que, a pesar de estar escrita en términos matriciales y de estar construida a partir de una variable $A_\alpha(t)$ que no posee sentido físico directo, establece una relación entre cantidades que en efecto podemos identificar como físicas. De acuerdo con esto, sólo los elementos diagonales de la ecuación de Heisenberg reflejan una ley que se refiere *directamente* a (los valores promedio de) variables físicas.³⁹ Los términos fuera de la diagonal proveen información sobre la evolución de sus desviaciones ($\tilde{A}_{\alpha\beta}(t)$ con $\beta \neq \alpha$) con respecto a su valor medio, es decir, sobre la evolución de sus fluctuaciones. Como queda claro de la discusión que le sigue a la ec. (2.163), la respuesta resonante de la partícula al campo introduce fluctuaciones de las variables dinámicas; de hecho, como se vio en la subsección 2.6.1, la presencia misma del campo introduce dispersiones inevitables, como las descritas en la desigualdad de Heisenberg (2.132). En este sentido la ec. (2.133) puede entenderse no sólo como una ley que determina la evolución de los operadores dinámicos, sino también como una que describe (parcialmente) la evolución de las desviaciones de las variables correspondientes, las cuales caracterizan a un ensemble de partículas en interacción con el campo de fondo. Siguiendo esta interpretación, los términos no diagonales de la matriz \hat{A} son remanentes que reflejan la presencia del campo, lo que permite entender por qué la teoría ha quedado expresada en términos matriciales.

³⁹En particular el teorema de Ehrenfest,

$$\langle \hat{f}(\hat{x}) \rangle = m \frac{d^2 \langle \hat{x} \rangle}{dt^2},$$

que se obtiene a partir de las ecs. (2.111), refleja una relación entre los promedios de las variables físicas $f_\alpha^{\text{est}}(t)$ y $x_\alpha^{\text{est}}(t)$.

Capítulo 3

Sistemas de dos partículas: el campo enredador

De acuerdo con el capítulo anterior el comportamiento cuántico de sistemas de una partícula puede entenderse como una propiedad emergente, resultado de la interacción de la partícula (por lo demás clásica) con el campo estocástico de fondo. En el régimen estacionario, ergódico y no radiativo, la teoría recupera el formalismo estándar de la mecánica cuántica no relativista al tiempo que deja ver algunos mecanismos físicos responsables del origen de la cuantización. Sin embargo, una comprensión más profunda de los procesos que dan paso al fenómeno cuántico demanda, como se discutió en la Introducción, investigar uno de los aspectos más característicos —de hecho inherente— de los sistemas cuánticos compuestos, a saber, el enredamiento entre sus partes.

En este capítulo¹ generalizaremos la teoría previamente desarrollada a sistemas compuestos de dos partículas no interactuantes que se hallan inmersas en un campo estocástico de fondo *común*. Veremos que la aparición de correlaciones entre los componentes del sistema bipartita es inducida vía las correlaciones del campo de fondo, siempre que ambos subsistemas compartan una *misma* frecuencia relevante. El enredamiento salta a la vista cuando la descripción realizada en el régimen estacionario, ergódico y no radiativo se reduce a una en términos de vectores de estado en un espacio de Hilbert apropiado. Más aún, cuando ambas partículas son iguales los estados entrelazados que describen al sistema son precisamente aquellos que poseen máxima (anti)simetría. Los resultados obtenidos representan un paso hacia adelante en la consolidación de la EDEL y arrojan luz sobre la física detrás del enredamiento.

¹El presente capítulo constituye una versión ampliada del trabajo [70].

3.1. El campo en la vecindad de las partículas

Consideraremos una pareja de partículas *no interactuantes* (vía un potencial de interacción externo) inmersas en el campo de fondo (2.4). Supondremos que ellas están localizadas en \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 , y sujetas a las fuerzas $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1)$ y $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2)$, respectivamente. En este caso las ecuaciones de movimiento para el subsistema mecánico, de nuevo en la aproximación no relativista, están dadas por²

$$m_1\ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + m_1\tau_1\ddot{\ddot{\mathbf{x}}}_1 + \frac{e_1}{e_2}m_2\tau_2\ddot{\ddot{\mathbf{x}}}_2 + e_1\mathbf{E}(\mathbf{x}_1, t), \quad (3.1a)$$

$$m_2\ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2) + m_2\tau_2\ddot{\ddot{\mathbf{x}}}_2 + \frac{e_2}{e_1}m_1\tau_1\ddot{\ddot{\mathbf{x}}}_1 + e_2\mathbf{E}(\mathbf{x}_2, t), \quad (3.1b)$$

donde m_1 , m_2 y e_1 , e_2 son las masas (renormalizadas) y las cargas eléctricas de las respectivas partículas, y $\tau_i = 2e_i^2/3m_i c^3$ ($i = 1, 2$).

A diferencia de lo que ocurre en la ec. (2.1), la presencia de una segunda partícula nos obliga a introducir en la descripción la componente eléctrica del campo en *dos* puntos diferentes del espacio, \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 . Sin embargo, y en concordancia con lo que hicimos en el problema de una sola partícula, aquí recurriremos a la aproximación de onda larga para el campo en las vecindades de cada una de ellas. Así, supondremos que las amplitudes de interés del campo cambian de manera considerable sólo a distancias mucho mayores que las desviaciones de cada una de las partículas con respecto a sus correspondientes posiciones de equilibrio \mathbf{x}_i^0 , de tal forma que en lugar de referirnos al campo de fondo definido en \mathbf{x}_i nos referiremos al campo de fondo en la *vecindad* de la partícula localizada en \mathbf{x}_i , lo que nos permite reemplazar $\mathbf{E}(\mathbf{x}_i, t)$ por $\mathbf{E}(\mathbf{x}_i^0, t)$ en las ecs. (3.1). Con el fin de construir los desarrollos apropiados para estos campos procederemos como sigue.

Dado que en lo que resta del trabajo restringiremos el estudio al movimiento en una sola dimensión, podemos suponer que los vectores \mathbf{x}_1^0 y \mathbf{x}_2^0 son colineales, de manera que escribimos

$$\mathbf{x}_2^0 = \mathbf{x}_1^0 + \mathbf{R} = (x_1^0 + R)\hat{\mathbf{x}}_1^0, \quad (3.2)$$

donde \mathbf{R} es un vector constante (no estocástico) que representa la distancia media que separa a las posiciones de equilibrio de las partículas.³ Entonces, de acuerdo con

²La ecuación de movimiento (3.1a) no es sino la ecuación de Abraham-Lorentz (ec. (2.1)) para la partícula situada en \mathbf{x}_1 , a la que se le ha agregado el término radiativo $\frac{e_1}{e_2}m_2\tau_2\ddot{\ddot{\mathbf{x}}}_2$, el cual corresponde a la fuerza $\mathbf{F}_1 = e_1\mathbf{E}_2^{\text{rad}} = e_1\frac{2e_2}{3c^3}\ddot{\ddot{\mathbf{x}}}_2$ que la reacción de radiación de la partícula situada en \mathbf{x}_2 ejerce sobre la carga e_1 .^[71] El mismo procedimiento, pero intercambiando las partículas, conduce a la ec. (3.1b).

³Más en general, la descripción que haremos permite la existencia de un movimiento relativo entre las partículas, de tal forma que $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$, siempre y cuando los tiempos característicos del

3.1. El campo en la vecindad de las partículas

la expresión (2.4), tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}_1^0, t) &= \sum_k \tilde{E}(\omega_k) \left[\int_{\Omega_{\mathbf{k}}} d\Omega_{\mathbf{k}} \bar{\mathcal{A}}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1^0} \right] e^{i\omega_k t} + \text{c.c.} \\ &= \sum_k \tilde{E}(\omega_k) \mathbf{a}_k(x_1^0) e^{i\omega_k t} + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (3.3a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}_2^0, t) &= \sum_k \tilde{E}(\omega_k) \left[\int_{\Omega_{\mathbf{k}}} d\Omega_{\mathbf{k}} \bar{\mathcal{A}}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1^0 + \mathbf{R})} \right] e^{i\omega_k t} + \text{c.c.} \\ &= \sum_k \tilde{E}(\omega_k) \mathbf{a}_k(x_1^0 + R) e^{i\omega_k t} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (3.3b)$$

Es importante señalar que cuando escribimos el mismo vector $\bar{\mathcal{A}}_{\mathbf{k}} (= \bar{\mathcal{A}}_{\mathbf{k}}^{(i)})$ en las expresiones para $\mathbf{E}(\mathbf{x}_1^0, t)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{x}_2^0, t)$ estamos suponiendo implícitamente que ambas partículas están sujetas a la *misma* realización del campo. Dicha hipótesis excluye de la presente descripción aquellos sistemas en los que las partículas están arbitrariamente separadas, pues cuando ello ocurre y el campo ha perdido su correlación debemos considerar que los campos en las vecindades de cada una de las partículas son independientes y corresponden a realizaciones diferentes. La descripción que aquí se hace corresponde entonces a la de un solo sistema compuesto de dos partículas, más que a la de una pareja de sistemas independientes.

Ahora colocamos el origen en coincidencia con la posición de equilibrio de la primera partícula y escribimos $x_1^0 = 0$ en las ecs. (3.3). Como el movimiento es unidimensional proyectamos los campos (3.3) en la dirección $\hat{\mathbf{R}}$, obteniendo así⁴

$$E_1(t) \equiv \sum_k \tilde{E}(\omega_k) \left(\mathbf{a}_k(0) \cdot \hat{\mathbf{R}} \right) e^{i\omega_k t} = \sum_k \tilde{E}(\omega_k) a_k e^{i\omega_k t}, \quad (3.4a)$$

$$E_2(t) \equiv \sum_k \tilde{E}(\omega_k) \left(\mathbf{a}_k(R) \cdot \hat{\mathbf{R}} \right) e^{i\omega_k t} = \sum_k \tilde{E}(\omega_k) b_k e^{i\omega_k t}, \quad (3.4b)$$

donde hemos hecho

$$a_k = \mathbf{a}_k(0) \cdot \hat{\mathbf{R}}, \quad (3.5a)$$

$$b_k = \mathbf{a}_k(R) \cdot \hat{\mathbf{R}}. \quad (3.5b)$$

Nótese que si tomamos \mathbf{R} en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$ la variable estocástica a_k aquí definida coincide con la que aparece en el desarrollo (2.10) en el caso de una sola partícula.

movimiento de cada uno de los subsistemas mecánicos sean mucho menores que el tiempo requerido para que $\mathbf{R}(t)$ cambie apreciablemente.

⁴En lo que sigue omitiremos el término c.c. de los desarrollos, de tal forma que las variables que aparezcan (en este caso $E_{1,2}(t)$) son análogas a aquellas definidas en las ecs. (2.40).

3.2. Soluciones en el régimen estacionario

3.2.1. Las ecuaciones de movimiento

En el caso unidimensional reescribimos las ecs. (3.1) como

$$m_1\ddot{x}_1 = f_1(x_1) + m_1\tau_1\ddot{x}_1 + e_1[E_1(t) + \frac{1}{e_2}m_2\tau_2\ddot{x}_2], \quad (3.6a)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = f_2(x_2) + m_2\tau_2\ddot{x}_2 + e_2[E_2(t) + \frac{1}{e_1}m_1\tau_1\ddot{x}_1], \quad (3.6b)$$

donde los desarrollos para $E_i(t)$ están dados por las ecs. (3.4) y cada $f_i(x_i)$ puede desarrollarse como una serie de potencias de su respectiva variable en la misma forma que (2.18).

Una comparación entre las ecuaciones (2.11) y (3.6) muestra que los términos que contienen \ddot{x}_2 y \ddot{x}_1 en las ecuaciones (3.6a) y (3.6b), respectivamente, modifican el campo que actúa sobre cada una de las partículas con respecto al campo que existiría en ausencia de la otra y, de manera más trascendente, introducen un acoplamiento entre ambas ecuaciones aun cuando no existe un potencial de interacción entre las partículas. En lo que sigue discutiremos la importancia de dicho acoplamiento en el proceso que conduce al equilibrio del sistema, y que posteriormente será decisivo para conducir a una descripción en términos del espacio producto de Hilbert.

Los términos de acoplamiento en las ecs. (3.6) son términos radiativos que se superponen al campo de fondo $E_i(t)$ definido en la vecindad de la partícula i , dando lugar a los campos *efectivos* E_i^{ef} cuya forma es

$$E_1^{\text{ef}} = E_1(t) + c_2\ddot{x}_2, \quad E_2^{\text{ef}} = E_2(t) + c_1\ddot{x}_1, \quad (3.7)$$

donde $c_i = 2e_i/3c^3 = m_i\tau_i/e_i$, ($i = 1, 2$). De acuerdo con el mecanismo que conduce al equilibrio —discutido al inicio de la subsección 2.1.2— la partícula localizada en x_i alcanza un estado estacionario cuando la potencia media radiada compensa a la potencia media absorbida del campo efectivo E_i^{ef} . El hecho de que este último contenga los términos de acoplamiento de las ecs. (3.6) pone en evidencia el papel fundamental de éstos durante el proceso que conduce al sistema mecánico hacia el equilibrio. De este modo los efectos radiativos de una partícula sobre la otra, y con ello los términos de acoplamiento en las ecuaciones de movimiento, son tan significativos en un principio como lo es la propia reacción de radiación.⁵ Sin embargo, cuando

⁵De hecho, las contribuciones de cada uno de los términos de reacción de radiación que aparecen en las ecuaciones (3.6) son en general del mismo orden de magnitud. En particular, el factor e_i/e_j se reduce a la unidad para partículas cuyas constantes de acoplamiento al campo sean iguales.

finalmente se ha alcanzado un estado estacionario dichos términos contribuyen sólo con correcciones radiativas que pueden despreciarse en una primera aproximación, tal como se hizo en la sección 2.6.

3.2.2. Soluciones estacionarias

Supongamos que una vez alcanzado un estado estacionario la partícula situada en x_1 se encuentra en un estado α , mientras que la partícula localizada en x_2 se halla en un estado α' (en lo que sigue usaremos índices griegos no primados para denotar los estados estacionarios de la partícula que se halla en x_1 e índices griegos primados para los correspondientes a la partícula situada en x_2). De acuerdo con los resultados del capítulo anterior y las ecs. (3.4), si la partícula en x_1 alcanza un estado α , entonces el campo de fondo en su vecindad puede representarse, en una primera aproximación, con

$$E_{1\alpha}(t) = \sum_{\beta} \tilde{E}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t}. \quad (3.8a)$$

Por su parte, el campo de fondo en la vecindad de la partícula que ha alcanzado el estado α' es⁶

$$E_{2\alpha'}(t) = \sum_{\beta'} \tilde{E}_{\alpha'\beta'} b_{\alpha'\beta'} e^{i\omega_{\alpha'\beta'}t}. \quad (3.8b)$$

Las ecuaciones de movimiento (3.6) nos permiten identificar a $E_{1\alpha}(t)$ y a $E_{2\alpha'}(t)$ como las *dos* fuentes de estocasticidad del problema. Así, es claro que las soluciones estacionarias de (3.6a) dependen directamente de las variables estocásticas de $E_{1\alpha}(t)$, $\{a_{\alpha\beta}\}$, pero *también* dependen de las variables aleatorias de $E_{2\alpha'}(t)$, $\{b_{\alpha'\beta'}\}$, que son introducidas indirectamente por los términos de acoplamiento a través del campo efectivo E_1^{ef} . Una conclusión análoga se obtiene para las soluciones de la ec. (3.6b), de modo que ambas soluciones están influenciadas por la estocasticidad tanto del campo cercano a la partícula correspondiente como del campo en la vecindad de la otra. Así, la presencia de los términos de acoplamiento en las ecuaciones (3.6) indica que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ involucran a ambas familias de variables $\{a_{\alpha\beta}\}$ y $\{b_{\alpha'\beta'}\}$.⁷

⁶Existe un único trabajo en Electrodinámica Estocástica previo a éste que aborda el problema de sistemas de más de una partícula (ref. [72]). Las conclusiones que ahí se alcanzan son poco convincentes, resultado no sólo de que se recurre a los métodos de la Electrodinámica Estocástica original (los cuales ya han sido superados por la presente teoría) sino, en particular, de que los autores consideran que el campo de fondo es el mismo para todas las partículas. En nuestro caso, como se observa en las ecs. (3.8), los dos campos están caracterizados por variables estocásticas diferentes.

⁷Esta observación muestra que el campo que determina la estocasticidad de la solución x_i es el campo que *sustenta* el equilibrio de la partícula i , esto es, el campo efectivo, el cual no coincide en el caso de dos partículas con el campo de fondo cercano E_i . Esta es una diferencia importante con respecto al caso de una sola partícula, pues ahí los dos campos coinciden y por lo tanto las soluciones

3.2. Soluciones en el régimen estacionario

La necesidad de introducir *ambas* variables estocásticas en las soluciones estacionarias de (3.6) requiere entonces del uso de un índice compuesto $A = (\alpha, \alpha')$ que las caracterice, lo que nos conduce a escribir $x_{1A}(t)$ y $x_{2A}(t)$ en lugar de $x_1(t)$ y $x_2(t)$, generalizando así la expresión $x_\alpha(t)$ que se tenía para el caso de una sola partícula. Físicamente, el índice A destaca que conforme el sistema completo se aproximó al equilibrio el comportamiento de cada una de las partículas se vio afectado por el comportamiento de la segunda, de tal forma que cuando finalmente se establece un estado estacionario cada una de las partículas se encuentra en equilibrio con un campo (E_i^{ef}) que posee información sobre el estado final alcanzado por la otra.

Así como el índice α en el caso de una partícula provee información sobre el estado estacionario que alcanzó el subsistema mecánico, el índice A caracteriza a su vez el estado estacionario alcanzado por *ambas* partículas, es decir, el estado final del sistema mecánico completo (compuesto, en este caso, por dos partículas). Este último está, al menos parcialmente, caracterizado por la energía total del sistema, de manera que el índice A está en correspondencia directa —aunque no unívoca— con la energía mecánica total que denotamos con \mathcal{E}_A .⁸ En ausencia de un potencial de interacción entre las partículas \mathcal{E}_A es la suma de las energías individuales de cada una de ellas, de tal forma que si \mathcal{E}_α es la energía de la partícula en x_1 (que se encuentra en el estado α) y $\mathcal{E}_{\alpha'}$ es la energía de la partícula en x_2 (que se encuentra en el estado α') debemos escribir la energía total como⁹

$$\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_\alpha + \mathcal{E}_{\alpha'}. \quad (3.9)$$

Una vez que ha quedado claro que las soluciones estacionarias de (3.6) comparten el índice A y se expresan en términos de las variables $\{a_{\alpha\beta}\}$ y $\{b_{\alpha'\beta'}\}$, dedicaremos la siguiente sección a construir una variable estocástica *común* apropiada para construir los desarrollos de $x_{iA}(t)$, y así generalizar las expresiones (2.40) al caso bipartita.

están descritas en términos de las variables estocásticas del campo de fondo, $a_{\alpha\beta}$.

⁸A diferencia de lo que ocurrió con una sola partícula, aquí la correspondencia entre A y \mathcal{E}_A no es unívoca debido a la posible degeneración de \mathcal{E}_A . Esta posibilidad será importante y analizada más adelante.

⁹El índice A también puede entenderse en términos de una descomposición del ensemble $\{i\}$ de realizaciones del campo en forma análoga a como se hizo en la subsección 2.2.2, donde el índice involucrado era α . En este sentido, el índice A identifica al subensemble $\{i\}_A \subset \{i\}$ asociado a aquellos sistemas mecánicos (ahora bipartitas) en los que una de las partículas posee energía \mathcal{E}_α mientras que la otra posee energía $\mathcal{E}_{\alpha'}$.

3.3. La variable estocástica común

Como $\{a_{\alpha\beta}\}$ y $\{b_{\alpha'\beta'}\}$ (con α y α' fijas) constituyen las variables estocásticas propias de los campos necesarios para que las partículas alcancen, respectivamente, los estados de energía \mathcal{E}_α y $\mathcal{E}_{\alpha'}$, cada una de estas familias resuelve (por separado) el problema de una sola partícula. Específicamente, y como resultado de imponer la condición ergódica a cada uno de los subsistemas mecánicos, ambas familias de variables así como los conjuntos correspondientes de frecuencias relevantes $\{\omega_{\alpha\beta}\}$ y $\{\omega_{\alpha'\beta'}\}$, satisfacen la regla de la cadena (ecs. (2.77) y (2.83)). A continuación escribimos explícitamente dichas ecuaciones para las variables primadas:¹⁰

$$b_{\alpha'\beta'_1}^{(i)} b_{\beta'_1\beta'_2}^{(i)} b_{\beta'_2\beta'_3}^{(i)} \cdots b_{\beta'_n\beta'}^{(i)} = b_{\alpha'\beta'}^{(i)} = \exp(i\theta_{\alpha'\beta'}^{(i)}), \quad (3.10a)$$

$$\omega_{\alpha'\beta'_1} + \omega_{\beta'_1\beta'_2} + \omega_{\beta'_2\beta'_3} + \dots + \omega_{\beta'_n\beta'} = \omega_{\alpha'\beta'}, \quad (3.10b)$$

de donde se siguen resultados análogos a (2.84) y (2.85) para las frecuencias, y (2.80) y (2.82) para las fases y las variables del campo, respectivamente.

De acuerdo con lo que se dijo abajo de las ecs. (3.3), $a_{\alpha\beta}$ y $b_{\alpha'\beta'}$ corresponden a la misma realización (i) del campo, de manera que sus valores difieren sólo por un factor de fase como se sigue de la ec. (2.81) y la última igualdad en (3.10a). Así,

$$b_{\alpha\beta}^{(i)}(t) = a_{\alpha\beta}^{(i)}(t) \exp(i\zeta_{\alpha\beta}^{(i)}), \quad (3.11)$$

con

$$\zeta_{\alpha\beta}^{(i)} = \theta_{\alpha\beta}^{(i)} - \varphi_{\alpha\beta}^{(i)}. \quad (3.12)$$

En virtud de que las variables $\{a_{\alpha\beta}\}$ y $\{b_{\alpha\beta}\}$ satisfacen la regla de la cadena, las fases relativas $\{\zeta_{\alpha\beta}^{(i)}\}$ satisfacen también una relación análoga a (2.80). En particular se cumple que

$$\zeta_{\alpha\beta}^{(i)} = -\zeta_{\beta\alpha}^{(i)}. \quad (3.13)$$

¹⁰Debe tenerse cuidado en no confundir la notación primada. En el capítulo 2 ésta no tenía un significado especial y se le empleaba para denotar diferentes estados de una misma partícula. En este capítulo, sin embargo —y como se señaló al inicio de la subsección 3.2.2— la notación primada sirve para distinguir los estados accesibles (en principio diferentes) de cada una de las partículas. Para denotar los diversos estados de una misma partícula emplearemos subíndices numéricos.

3.3.1. Definición y propiedades de la variable estocástica común

De la regla de la cadena, satisfecha tanto para las cantidades primadas como para las no primadas, obtenemos

$$b_{\alpha'\alpha'}e^{i\omega_{\alpha'}t} = 1, \quad a_{\alpha\alpha}e^{i\omega_{\alpha}t} = 1, \quad (3.14)$$

lo que nos permite reescribir las ecs. (3.8) en la forma

$$E_{1\alpha}(t) \rightarrow E_{1A}(t) = \sum_{\beta, \beta'} \tilde{E}_{\alpha\beta} \delta_{\alpha'\beta'} a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} e^{i(\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha'\beta'})t}, \quad (3.15a)$$

$$E_{2\alpha'}(t) \rightarrow E_{2A}(t) = \sum_{\beta, \beta'} \tilde{E}_{\alpha'\beta'} \delta_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} e^{i(\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha'\beta'})t}. \quad (3.15b)$$

Al hacer esta sustitución ambos índices, primados y no primados, aparecen de forma simétrica en el desarrollo de los campos de fondo locales, o sea, en las fuentes estocásticas. Más aún, las expresiones (3.15) muestran que en efecto ambos campos se desarrollan en términos de una variable estocástica *común*, a saber

$$a_{AB} \equiv a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'}. \quad (3.16)$$

Aquí es oportuno mencionar que si bien los desarrollos de $E_{1A}(t)$ y $E_{1\alpha}(t)$ son formalmente equivalentes, dichas expresiones difieren en un sentido físico ya que en el desarrollo de E_{1A} —a diferencia de lo que ocurre en la expresión para $E_{1\alpha}(t)$ — la partícula caracterizada por los estados primados se ha fijado en el estado α' ; el desarrollo (3.15a) (y análogamente (3.15b)) es por lo tanto el desarrollo para una de las partículas *en presencia de la otra*.

Así como el índice A representa en realidad dos índices, $A = (\alpha, \alpha')$, cada pareja (β, β') en la ecs. (3.15) queda representada por el índice compuesto $B = (\beta, \beta')$. Esto nos permite introducir la notación simplificada

$$a_{AB}(t) = a_{AB} e^{i\omega_{AB}t} = a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} e^{i(\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha'\beta'})t}, \quad (3.17)$$

donde hemos definido

$$\omega_{AB} \equiv \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha'\beta'}. \quad (3.18)$$

A partir de la definición (3.16) y aplicando la regla de la cadena a cada familia de variables obtenemos

$$a_{AB} a_{BG} = (a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'}) (a_{\beta\gamma} b_{\beta'\gamma'}) = (a_{\alpha\beta} a_{\beta\gamma}) (b_{\alpha'\beta'} b_{\beta'\gamma'}) = a_{\alpha\gamma} b_{\alpha'\gamma'} = a_{AG}. \quad (3.19)$$

3.3. La variable estocástica común

Además, de las ecs. (2.83), (3.10b) y (3.18) resulta

$$\begin{aligned}
 \omega_{AB} + \omega_{BG} &= (\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha'\beta'}) + (\omega_{\beta\gamma} + \omega_{\beta'\gamma'}) \\
 &= (\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\gamma}) + (\omega_{\alpha'\beta'} + \omega_{\beta'\gamma'}) \\
 &= \omega_{\alpha\gamma} + \omega_{\alpha'\gamma'} = \omega_{AG}.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Como las relaciones (3.19) y (3.20) pueden generalizarse fácilmente a cualquier número de términos (como se hizo en la subsección 2.4.2), concluimos que la regla de la cadena se satisface *también* para las variables $\{a_{AB}\}$ y las frecuencias $\{\omega_{AB}\}$. En particular se cumple que

$$a_{AB}^* = a_{BA}, \quad a_{AA} = 1. \tag{3.21}$$

Por otro lado, las ecs. (2.82), (3.11) y (3.16) nos permiten escribir

$$a_{AB} = a_{\alpha\beta} a_{\alpha'\beta'} e^{i\zeta_{\alpha'\beta'}} = a_{\alpha\beta} a_{\beta'\alpha'}^* e^{i\zeta_{\alpha'\beta'}} = a(\omega_{\alpha\beta}) a^*(\omega_{\beta'\alpha'}) e^{i\zeta_{\alpha'\beta'}}, \tag{3.22}$$

expresión que se simplifica considerablemente si las frecuencias $\omega_{\alpha\beta}$ y $\omega_{\alpha'\beta'}$ son tales que $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\alpha'\beta'} = \omega_{\beta'\alpha'}$. En ese caso, el hecho de que el módulo de $a_{\alpha\beta}$ sea 1 nos conduce a

$$a_{AB} = a(\omega_{\alpha\beta}) a^*(\omega_{\alpha\beta}) e^{i\zeta_{\alpha'\beta'}} = a_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}^* e^{i\zeta_{\alpha'\beta'}} = e^{i\zeta_{\alpha'\beta'}}, \quad (\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\alpha'\beta'}). \tag{3.23}$$

En forma equivalente a (3.22) podemos reescribir a_{AB} en la forma

$$a_{AB} = b_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} e^{-i\zeta_{\alpha\beta}} = b^*(\omega_{\beta\alpha}) b(\omega_{\alpha'\beta'}) e^{-i\zeta_{\alpha\beta}}, \tag{3.24}$$

lo que conduce, bajo la condición $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\alpha'\beta'} = \omega_{\beta'\alpha'}$, a la siguiente expresión análoga a (3.23),

$$a_{AB} = b^*(\omega_{\alpha'\beta'}) b(\omega_{\alpha'\beta'}) e^{-i\zeta_{\alpha\beta}} = b_{\alpha'\beta'}^* b_{\alpha'\beta'} e^{-i\zeta_{\alpha\beta}} = e^{-i\zeta_{\alpha\beta}}. \tag{3.25}$$

De las ecs. (3.23) y (3.25) resulta entonces

$$a_{AB} = e^{i\zeta_{\alpha'\beta'}} = e^{-i\zeta_{\alpha\beta}}. \tag{3.26}$$

Este es un resultado importante al que volveremos más adelante.

3.4. Régimen no radiativo: estableciendo contacto con el espacio producto

De acuerdo con los resultados de las secciones previas, el acoplamiento entre las ecuaciones de movimiento conduce a desarrollar tanto los campos efectivos como las soluciones estacionarias de (3.6) en términos de las variables $\{a_{AB}\}$, las cuales son comunes a ambas fuentes de estocasticidad y constituyen las variables estocásticas apropiadas para describir el campo de fondo común.¹¹

Así, cuando el sistema mecánico se encuentra en un estado A , debemos escribir los siguientes desarrollos (que generalizan a los que aparecen en las ecs. (2.40))

$$x_{iA} = \sum_B \tilde{x}_{iAB} a_{AB} e^{i\omega_{AB}t}, \quad (3.27a)$$

$$E_{iA}^{\text{ef}} = \sum_B \tilde{E}_{iAB}^{\text{ef}} a_{AB} e^{i\omega_{AB}t}, \quad (3.27b)$$

$$f_{iA} = \sum_B \tilde{f}_{iAB} a_{AB} e^{i\omega_{AB}t}, \quad (3.27c)$$

donde $i = 1, 2$ y cada una de las amplitudes de la forma \tilde{A}_{iAB} es una cantidad caracterizada por cuatro índices, $\tilde{A}_{iAB} = \tilde{A}_{i(\alpha\beta;\alpha'\beta')}$, cuya forma explícita está todavía indeterminada. No obstante, nos interesa estudiar el sistema en la aproximación no radiativa, cuando el campo de fondo y los términos radiativos han jugado su papel fundamental de conducir al sistema al equilibrio. Como ya se ha dicho, una vez alcanzado el régimen estacionario puede considerarse que los términos radiativos (en particular los términos de acoplamiento) contribuyen sólo con correcciones radiativas a las soluciones; así, en el límite no radiativo x_{1A} coincide con la solución que obtuvimos en el problema de una sola partícula (cuando ésta ha alcanzado el estado α) adecuadamente reescrita en términos de la variable a_{AB} . Usando de nuevo la primera de las relaciones en (3.14) podemos proceder como lo hicimos en (3.15) y escribir

$$x_{1A} = x_{1\alpha\alpha'} = \sum_{\beta,\beta'} \tilde{x}_{1\alpha\beta} \delta_{\alpha'\beta'} a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} e^{i(\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha'\beta'})t}. \quad (3.28)$$

Consecuentemente, si introducimos el superíndice (0) en las amplitudes \tilde{x}_{iAB} que aparecen en la ec. (3.27a) para denotar su valor en la aproximación no radiativa, la

¹¹Nos referimos a un campo *común* en el sentido de que las partículas inmersas en él conforman un solo sistema físico en lugar de dos sistemas aislados e independientes.

3.4. Régimen no radiativo: estableciendo contacto con el espacio producto

ec. (3.28) nos lleva a la expresión

$$\tilde{x}_{1AB}^{(0)} = \tilde{x}_{1\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'}, \quad (3.29)$$

donde $\tilde{x}_{1\alpha\beta}$ es la amplitud —correspondiente a la frecuencia relevante $\omega_{\alpha\beta}$ — que resuelve el problema de una sola partícula situada en x_1 y sujeta a la acción de la fuerza externa $f_1(x_1)$, una vez hecha la aproximación no radiativa; es decir, es la amplitud que aparece en la ec. (2.33) tras haber tomado el límite no radiativo. La conclusión análoga para x_{2A} se obtiene de inmediato simplemente intercambiando $1 \longleftrightarrow 2$ y $\alpha, \beta \longleftrightarrow \alpha', \beta'$ en las expresiones anteriores. Una derivación más formal y detallada de la ec. (3.29) se presenta en el Apéndice D.

De estos resultados (y de aquellos que aparecen al final de la subsección 2.5.1) se desprende que toda variable dinámica real F que corresponda a la partícula inmersa en el campo descrito por $\{a_{\alpha\beta}\}$ y pueda expresarse en la forma (2.92), queda representada, en el presente límite y en el estado A , mediante el desarrollo

$$F_A(t) = \sum_{\beta, \beta'} \tilde{F}_{\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'} a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} e^{i(\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha'\beta'})t} = \sum_B \tilde{F}_{AB}^{(0)} a_{AB} e^{i\omega_{AB}t}, \quad (3.30)$$

donde

$$\tilde{F}_{AB}^{(0)} = \tilde{F}_{\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'}, \quad (3.31)$$

y $\tilde{F}_{\alpha\beta}$ denota el elemento $\alpha\beta$ de una matriz \hat{F} que opera sobre los vectores de un espacio de Hilbert (asociado a la partícula ubicada en x_1) que llamaremos \mathbb{H}_1 . Más aún, si incluimos los factores temporales del desarrollo (3.30) a fin de construir las amplitudes $\tilde{F}_{AB}^{(0)}(t)$ obtenemos

$$\tilde{F}_{AB}^{(0)}(t) = \tilde{F}_{\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'} e^{i(\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha'\beta'})t} = \tilde{F}_{\alpha\beta}(t)\delta_{\alpha'\beta'} e^{i\omega_{\alpha'\beta'}t}, \quad (3.32)$$

y ahora $\tilde{F}_{\alpha\beta}(t) = \tilde{F}_{\alpha\beta} e^{i\omega_{\alpha\beta}t}$ constituye el elemento $\alpha\beta$ de la matriz $\hat{F}(t)$ que evoluciona de acuerdo con (2.133).

Análogamente, toda variable dinámica real G que corresponda a la partícula inmersa en el campo descrito por $\{b_{\alpha'\beta'}\}$ y pueda expresarse en la forma (2.92) (con las variables a y los estados $\{\beta\}$ apropiadamente sustituidos por b y $\{\beta'\}$) queda representada mediante el desarrollo

$$G_A(t) = \sum_{\beta, \beta'} \tilde{G}_{\alpha'\beta'}\delta_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} e^{i(\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha'\beta'})t} = \sum_B \tilde{G}_{AB}^{(0)} a_{AB} e^{i\omega_{AB}t}, \quad (3.33)$$

3.4. Régimen no radiativo: estableciendo contacto con el espacio producto

con

$$\tilde{G}_{AB}^{(0)} = \tilde{G}_{\alpha'\beta'}\delta_{\alpha\beta}. \quad (3.34)$$

Introduciendo aquí la dependencia temporal como lo hicimos con $\tilde{F}_{AB}^{(0)}(t)$ obtenemos

$$\tilde{G}_{AB}^{(0)}(t) = \tilde{G}_{\alpha'\beta'}\delta_{\alpha\beta}e^{i(\omega_{\alpha\beta}+\omega_{\alpha'\beta'})t} = \tilde{G}_{\alpha'\beta'}(t)\delta_{\alpha\beta}e^{i\omega_{\alpha\beta}t}, \quad (3.35)$$

donde ahora $\tilde{G}_{\alpha'\beta'}(t)$ representa el elemento $\alpha'\beta'$ de una matriz $\hat{G}(t)$ que actúa sobre los elementos de un espacio de Hilbert (asociado a la partícula ubicada en x_2) que denotaremos con \mathbb{H}_2 .

Así, si llamamos \mathcal{F} a la matriz cuyos elementos AB están dados por $\tilde{F}_{AB}^{(0)}$ y \mathcal{G} a la matriz cuyos elementos AB están dados por $\tilde{G}_{AB}^{(0)}$, podemos reescribir las ecs. (3.31) y (3.34) en notación matricial cerrada como

$$\mathcal{F} = \hat{F} \otimes \mathbb{I}_2, \quad (3.36a)$$

$$\mathcal{G} = \mathbb{I}_1 \otimes \hat{G}, \quad (3.36b)$$

de manera que las amplitudes $\tilde{F}_{AB}^{(0)}$ y $\tilde{G}_{AB}^{(0)}$ constituyen los elementos de un operador extendido, definido en el espacio producto $\mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$.

Ahora bien, en cuanto extendemos el problema de una partícula al problema de una pareja de ellas, aparecen nuevas variables dinámicas que son funciones de x_1 y \dot{x}_1 y también de x_2 y \dot{x}_2 . Estudiaremos aquí el caso en que dichas funciones pueden expresarse como combinaciones lineales de productos cuya forma general es $F(x_1, \dot{x}_1)G(x_2, \dot{x}_2)$,¹² de manera que basta estudiar la variable arbitraria FG . Suponiendo que el sistema mecánico ha alcanzado el estado A escribimos entonces

$$\begin{aligned} (FG)_A(t) &= F_A(t)G_A(t) = \sum_{L,D} \tilde{F}_{AL}^{(0)}\tilde{G}_{AD}^{(0)}a_{AL}a_{AD}e^{i(\omega_{AL}+\omega_{AD})t} \\ &= \sum_{\lambda,\lambda',\delta,\delta'} \tilde{F}_{\alpha\lambda}\tilde{G}_{\alpha'\delta'}\delta_{\alpha'\lambda'}\delta_{\alpha\delta}a_{\alpha\lambda}a_{\alpha\delta}b_{\alpha'\lambda'}b_{\alpha'\delta'}e^{i(\omega_{\alpha\lambda}+\omega_{\alpha'\lambda'}+\omega_{\alpha\delta}+\omega_{\alpha'\delta'})t} \\ &= \sum_{\lambda,\delta'} \tilde{F}_{\alpha\lambda}\tilde{G}_{\alpha'\delta'}a_{\alpha\lambda}b_{\alpha'\delta'}e^{i(\omega_{\alpha\lambda}+\omega_{\alpha'\delta'})t}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Haciendo $\lambda \rightarrow \beta$ y $\delta' \rightarrow \beta'$ en la última línea de (3.37) obtenemos

$$(FG)_A(t) = \sum_{\beta,\beta'} \tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{G}_{\alpha'\beta'}a_{\alpha\beta}b_{\alpha'\beta'}e^{i(\omega_{\alpha\beta}+\omega_{\alpha'\beta'})t}, \quad (3.38)$$

¹²Donde de acuerdo con lo que se dijo abajo de la ec. (2.91), $F(x_1, \dot{x}_1)$ y $G(x_2, \dot{x}_2)$ son de la forma $h_i(x_i) + g_i(\dot{x}_i)$.

3.4. Régimen no radiativo: estableciendo contacto con el espacio producto

expresión que al reescribirse en forma análoga a (3.27c),

$$(FG)_A = \sum_B \widetilde{(FG)}_{AB}^{(0)} a_{AB} e^{i\omega_{AB}t}, \quad (3.39)$$

nos permite escribir las amplitudes $\widetilde{(FG)}_{AB}^{(0)}$ como

$$\widetilde{(FG)}_{AB}^{(0)} = \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'}. \quad (3.40)$$

El resultado (3.40) generaliza las ecs. (3.31) y (3.34) y nos lleva a construir la matriz

$$\mathcal{FG} = \hat{F} \otimes \hat{G}, \quad (3.41)$$

definida en el espacio $\mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$ y cuyos elementos AB son $\widetilde{(FG)}_{AB}^{(0)}$.¹³ En lo que sigue, sin embargo, omitiremos el superíndice (0) de todas las amplitudes si bien debemos tener presente que la descripción estará limitada a la aproximación no radiativa.

Por último, es importante mencionar que mientras que en las expresiones (3.31) y (3.34) el estado de una de las partículas se mantiene fijo, ello deja de ser así cuando empleamos las amplitudes (3.40). En ese caso, y si las frecuencias relevantes son frecuencias de resonancia, los desarrollos de la forma (3.39) quedan expresados en términos de transiciones que involucran a *ambas* partículas, es decir, en términos de transiciones del sistema mecánico *completo*. Las energías (totales) \mathcal{E}_B que se definen mediante tales transiciones (desde el estado A) están determinadas, de acuerdo con las ecs. (2.135), (3.9) y (3.18), por¹⁴

$$\hbar\omega_{AB} = \mathcal{E}_A - \mathcal{E}_B. \quad (3.42)$$

¹³Es oportuno resaltar que la descripción en el espacio $\mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$ es consecuencia de haber desarrollado las variables dinámicas en términos de variables estocásticas cuya estructura es precisamente la de las variables $\{a_{AB}\}$. Esto último es, a su vez, resultado de la presencia de los términos de acoplamiento en las ecs. (3.6); así, la interacción de las partículas vía los campos estocásticos efectivos está a la base de la descripción en el espacio producto de Hilbert.

¹⁴Aquí es importante señalar que las transiciones del sistema completo asociadas a las frecuencias $\omega_{AB} (= \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha'\beta'})$ constituyen en realidad *dos* transiciones, cada una realizada por una partícula y asociada a la frecuencia resonante correspondiente ($\omega_{\alpha\beta}$ y $\omega_{\alpha'\beta'}$).

3.5. Correlación como resultado de la existencia de frecuencias relevantes comunes

3.5.1. Descomposición espectral

En sistemas unidimensionales compuestos de una sola partícula no existe degeneración de la energía \mathcal{E}_α y consecuentemente tampoco existe degeneración de las frecuencias $\omega_{\alpha\beta}$ (para una α dada), es decir, no existen β_1 y β_2 diferentes tales que $\omega_{\alpha\beta_1} = \omega_{\alpha\beta_2}$. No obstante, en presencia de dos partículas las frecuencias $\omega_{AB} = \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha'\beta'}$ que aparecen en la ec. (3.38) sí pueden ser degeneradas. Las implicaciones de una degeneración de este tipo es el tema que nos ocupa en esta sección.

Partimos de suponer que en el desarrollo (3.38) existen parejas $(\beta, \beta') = (\gamma, \gamma'), (\delta, \delta')$ tales que

$$\omega_{AG} = \omega_{\alpha\gamma} + \omega_{\alpha'\gamma'} = \omega_{\alpha\delta} + \omega_{\alpha'\delta'} = \omega_{AD}, \quad (3.43a)$$

con

$$\gamma \neq \delta \neq \alpha, \quad \gamma' \neq \delta' \neq \alpha'. \quad (3.43b)$$

Nuestro objetivo es construir un desarrollo para $(FG)_A(t)$ en el que los diferentes sumandos oscilen con frecuencias diferentes. Para hacerlo, simplificaremos el problema suponiendo que sólo una frecuencia es doblemente degenerada, lo que significa que la única degeneración presente es la que aparece explícitamente en la ec. (3.43a).¹⁵ Separamos los sumandos que corresponden a estas frecuencias $((\beta, \beta') = (\delta, \delta'), (\gamma, \gamma'))$ en el desarrollo (3.38) y obtenemos

$$\begin{aligned} (FG)_A &= (\tilde{F}_{\alpha\delta}\tilde{G}_{\alpha'\delta'}a_{\alpha\delta}b_{\alpha'\delta'} + \tilde{F}_{\alpha\gamma}\tilde{G}_{\alpha'\gamma'}a_{\alpha\gamma}b_{\alpha'\gamma'})e^{i\omega_{AD}t} + \\ &+ \sum'_{\beta, \beta'} \tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{G}_{\alpha'\beta'}a_{\alpha\beta}b_{\alpha'\beta'}e^{i\omega_{AB}t}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

donde la prima sobre \sum significa que deben excluirse de la suma los términos asociados a $(\beta, \beta') = (\delta, \delta'), (\gamma, \gamma')$. Ahora aplicamos la regla de la cadena (ec. (3.19)) para escribir

$$a_{AG} = a_{AD}a_{DG} \quad (3.45)$$

¹⁵La generalización al caso en que exista más de una frecuencia degenerada, aunque sin modificar la restricción sobre el orden de la degeneración, se sigue de inmediato.

y sustituimos en la expresión (3.44),

$$(FG)_A = (\tilde{F}_{\alpha\delta}\tilde{G}_{\alpha'\delta'} + a_{DG}\tilde{F}_{\alpha\gamma}\tilde{G}_{\alpha'\gamma'})a_{AD}e^{i\omega_{AD}t} + \sum_{\beta,\beta'}^I \tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{G}_{\alpha'\beta'}a_{AB}e^{i\omega_{AB}t}. \quad (3.46)$$

Por construcción, cada uno de los términos que aquí aparecen oscila con diferente frecuencia. Queda claro de esta expresión que aquellos coeficientes del desarrollo espectral que corresponden a una frecuencia degenerada son de naturaleza diferente del resto de amplitudes, asociadas a frecuencias no degeneradas.

Si bien hemos partido de la existencia de degeneración en las frecuencias totales $\omega_{AG} = \omega_{AD}$, las ecs. (2.83) y (2.85) (y las respectivas relaciones con índices primados) muestran que la condición (3.43a) es equivalente a

$$\omega_{\delta\gamma} = -\omega_{\delta'\gamma'} = \omega_{\gamma'\delta'}, \quad (3.47)$$

con $\gamma \neq \delta, \gamma' \neq \delta'$, lo que significa que ambas partículas poseen una frecuencia relevante *común* no trivial (no nula). Así, el hecho de que ambos sistemas respondan de manera importante (quizá resonante) a una misma frecuencia del campo modifica las amplitudes que aparecen en la descomposición espectral de $(FG)_A$, dando lugar a coeficientes no factorizables como los que aparecen en el primer término (que oscila con frecuencia ω_{AD}) de la expresión (3.46).

3.5.2. Desarrollo de estado *vs* desarrollo de energía

La condición (3.43b) excluye la posibilidad de que cualquiera de los índices en (3.47) sea α o α' , y por lo tanto limita los resultados anteriores al caso en que las frecuencias comunes no involucran a los estados actuales (α y α') de las partículas. Consecuentemente la degeneración

$$\omega_{\alpha\kappa} = -\omega_{\alpha'\kappa'}, \quad (3.48)$$

con $\alpha \neq \kappa, \alpha' \neq \kappa'$, requiere un análisis aparte, al cual nos enfocaremos a continuación.

Observamos primero que de acuerdo con la relación (2.135), la ec. (3.48) es equivalente a

$$\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_\alpha + \mathcal{E}_{\alpha'} = \mathcal{E}_\kappa + \mathcal{E}_{\kappa'} = \mathcal{E}_K, \quad (3.49)$$

es decir, significa que la energía del estado A es degenerada (en lo que sigue supondremos que la degeneración es doble, es decir, que toda la degeneración es la que

aparece explícitamente en (3.49)).¹⁶ De igual forma, la condición (3.47) puede reescribirse en términos energéticos como

$$\mathcal{E}_D = \mathcal{E}_G \neq \mathcal{E}_A, \quad (3.50)$$

donde la desigualdad, que es consecuencia de la condición (3.43b), muestra que el desarrollo (3.44) es uno que corresponde a una energía \mathcal{E}_A que no es degenerada. En ese caso, el índice A está unívocamente relacionado con la energía \mathcal{E}_A y podemos asegurar que $(FG)_A$ representa ambos: el desarrollo que describe a la variable en el estado A y el desarrollo que la describe cuando el sistema mecánico posee energía \mathcal{E}_A . En lo que sigue nos referiremos al primero como *desarrollo de estado* y al segundo como *desarrollo de energía*; para distinguirlos emplearemos el subíndice de estado en el primer caso y el subíndice de energía en el segundo. Así, por ejemplo, de acuerdo con lo que acabamos de mencionar,

$$(FG)_A = (FG)_{\mathcal{E}_A} \quad \text{si } \mathcal{E}_A \text{ no es degenerada.} \quad (3.51)$$

Por otro lado, en presencia de la degeneración (3.49) el índice A y la energía \mathcal{E}_A no están unívocamente relacionados y por lo tanto, si bien $(FG)_A$ representa a la variable dinámica en el estado $A = (\alpha, \alpha')$, no podemos afirmar que constituya un desarrollo de energía, puesto que el estado A es sólo *uno* de los que poseen energía \mathcal{E}_A . Para describir entonces la variable FG cuando la energía del sistema mecánico es $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_K$, debemos construir el desarrollo de energía correspondiente, mismo que denotaremos con $(FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}$.

Como se sigue de lo discutido en la subsección 2.7, el desarrollo (de energía) de una variable dinámica proporciona información estadística sobre el valor de dicha variable en un ensemble de sistemas caracterizados por una cierta energía mecánica. Así por ejemplo, cuando \mathcal{E}_A no es degenerada, entonces el único ensemble que corresponde a dicha energía está compuesto de aquellos subsistemas mecánicos que se encuentran en el estado $A = (\alpha, \alpha')$ y por lo tanto, como ya se mencionó, el desarrollo $(FG)_A$ es el adecuado para describir la variable FG que caracteriza a dicho ensemble. No obstante, si ocurre que $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_K$, es claro que la descripción *estadística* de la variable FG asociada a esta energía —descripción que es proporcionada por el desarrollo de energía— poseerá información de dos subensembles: aquel conformado

¹⁶De acuerdo con la ec. (3.49) cuando las partículas, estando en los estados α y α' , resuenan respectivamente a las frecuencias $\omega_{\alpha\kappa}$ y $\omega_{\alpha'\kappa'}$, el sistema mecánico total puede realizar una transición desde el estado $A = (\alpha, \alpha')$ hacia el estado $K = (\kappa, \kappa')$, transición que no requiere gasto energético alguno.

3.5. Correlación como resultado de la existencia de frecuencias relevantes comunes

por los sistemas en los que una partícula está en el estado α al tiempo que la otra está en el estado α' , y aquel conformado por los sistemas en los que una partícula está en el estado κ mientras que la otra está en el estado κ' .¹⁷ Para escribir entonces el desarrollo $(FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}$ consideramos el subensamble de sistemas que se hallan en el estado A así como el subensamble de sistemas que se encuentran en el estado K . Suponiendo que el peso estadístico de ambos subensambles es el mismo, escribimos

$$\begin{aligned} (FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K} &= \frac{1}{2} [(FG)_A + (FG)_K] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\beta, \beta'} \left(\tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'} a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} + \tilde{F}_{\kappa\beta} \tilde{G}_{\kappa'\beta'} a_{\kappa\beta} b_{\kappa'\beta'} \right) e^{i\omega_{AB}t}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Nótese que aquí se hace necesario introducir la noción de *peso estadístico* como un elemento esencial para construir los desarrollos de energía de las diferentes variables dinámicas. En este caso la contribución simétrica de cada uno de los subensambles se refleja en el valor $\frac{1}{2}$ asignado a cada uno de los pesos estadísticos. Esta hipótesis implica que si un sistema tomado del ensemble se encuentra en un estado de energía \mathcal{E}_A , dicho sistema puede ser parte del subensamble caracterizado por el estado A o bien puede pertenecer al subensamble caracterizado por el estado K con igual probabilidad. En el caso más general tendríamos que escribir

$$(FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K} = C_A (FG)_A + C_K (FG)_K, \quad (3.53)$$

donde los coeficientes C_A y C_K están sujetos a la condición

$$C_A + C_K = C_{\alpha\alpha'} + C_{\kappa\kappa'} = 1. \quad (3.54)$$

Aplicamos ahora la regla de la cadena como lo hicimos en la ec. (3.45) para obtener

$$a_{KB} = a_{KA} a_{AB}, \quad (3.55)$$

expresión que, al introducirla en la ec. (3.52), nos conduce a escribir el desarrollo de energía para la variable FG cuando dicha energía es degenerada en la forma

$$(FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K} = \frac{1}{2} \sum_{\beta, \beta'} \left(\tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'} + a_{KA} \tilde{F}_{\kappa\beta} \tilde{G}_{\kappa'\beta'} \right) a_{AB} e^{i\omega_{AB}t}. \quad (3.56)$$

La estructura de las amplitudes que aparecen en esta expresión resulta natural toman-

¹⁷Se sigue de aquí que al pasar a una descripción estadística y construir $(FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}$ el desarrollo resultante poseerá menos información acerca del estado específico del sistema.

do en cuenta los resultados de la subsección anterior, ya que como se explicó ahí la forma de dichas amplitudes no es sino reflejo de la degeneración de las frecuencias (3.48) (o bien (3.47)).

Por último, para hacer de la ec. (3.56) un desarrollo espectral podemos proceder como lo hicimos antes. Así, suponiendo que existen parejas $(\beta, \beta') = (\gamma, \gamma')$, (δ, δ') (diferentes de (α, α') , (κ, κ')) tales que se satisface la ec. (3.47), extraemos de la suma (3.56) la siguiente amplitud (proporcional a a_{AD} y correspondiente al término que oscila con la frecuencia degenerada $\omega_{AD} = \omega_{AG}$)

$$\frac{1}{2} \left[\tilde{F}_{\alpha\delta} \tilde{G}_{\alpha'\delta'} + a_{KA} \tilde{F}_{\kappa\delta} \tilde{G}_{\kappa'\delta'} + a_{DG} \left(\tilde{F}_{\alpha\gamma} \tilde{G}_{\alpha'\gamma'} + a_{KA} \tilde{F}_{\kappa\gamma} \tilde{G}_{\kappa'\gamma'} \right) \right], \quad (3.57)$$

donde hemos usado la regla de la cadena, ec. (3.55). El resto de amplitudes (asociadas a frecuencias ω_{AB} no degeneradas) tienen la misma forma que aquellas que aparecen explícitamente en el desarrollo (3.56).

3.5.3. Correlación entre las partículas

De las expresiones (3.8) tenemos que el campo E_1 en la vecindad de la primer partícula se desarrolla en términos de las variables $\{a_{\alpha\beta}\}$ mientras que el campo E_2 en la vecindad de la segunda está descrito en términos las variables $\{b_{\alpha'\beta'}\}$. Es claro que la correlación entre E_1 y E_2 está determinada por la correlación entre dichas variables; así, la correlación entre el modo $\alpha\beta$ de E_1 y el modo $\alpha'\beta'$ de E_2 depende de la cantidad

$$\langle a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} \rangle = \langle a(\omega_{\alpha\beta}) b^*(\omega_{\beta'\alpha'}) \rangle = \langle a_{AB} \rangle. \quad (3.58)$$

Dado que hemos supuesto que las partículas se encuentran lo suficientemente cercanas como para asegurar que el campo no ha perdido su correlación, tendremos que $\langle a_{AB} \rangle$ será diferente de cero siempre que $\omega_{\alpha\beta} = \omega_{\beta'\alpha'}$, esto es, siempre que ambas partículas compartan una frecuencia común. En ese caso es natural esperar que la correlación existente del campo induzca una correlación entre ellas, y para verificarlo calcularemos primero la covarianza

$$\Gamma_{(FG)_A} \equiv \overline{(FG)_A}^t - \overline{F_A}^t \overline{G_A}^t = \overline{F_A G_A}^t - \overline{F_A}^t \overline{G_A}^t \quad (3.59)$$

de las variables F y G asociadas a cada una de las partículas, cuando el sistema se encuentra en un estado A . Para hacerlo partimos del desarrollo (3.38) reescribiéndolo

3.5. Correlación como resultado de la existencia de frecuencias relevantes comunes

en la forma

$$(FG)_A = \sum_{\beta, \beta'} \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'} a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} \Big|_{\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\alpha'\beta'}} + \sum_{\beta, \beta'} \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'} a_{AB} e^{i\omega_{AB}t}, \quad (3.60)$$

donde la primera suma representa la contribución independiente de t y la segunda contiene los términos oscilatorios (que en lo que sigue denotaremos genéricamente con el símbolo $\mathcal{O} = \mathcal{O}(t)$). Del primer término extraemos aquel que corresponde a $(\beta, \beta') = (\alpha, \alpha')$ —es decir, aquel que satisface idénticamente la condición $\omega_{\alpha\alpha} = -\omega_{\alpha'\alpha'} = 0$ — lo que da como resultado (usando que $a_{\alpha\alpha} = b_{\alpha'\alpha'} = 1$)

$$(FG)_A = \tilde{F}_{\alpha\alpha} \tilde{G}_{\alpha'\alpha'} + \sum_{\beta, \beta'} \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'} a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} \Big|_{\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\alpha'\beta'} \neq 0} + \mathcal{O}. \quad (3.61)$$

Ahora bien, a partir de las ecs. (3.30) y (3.33) tenemos que

$$\overline{F}_A^t = \tilde{F}_{\alpha\alpha}, \quad (3.62a)$$

$$\overline{G}_A^t = \tilde{G}_{\alpha'\alpha'}, \quad (3.62b)$$

de modo que la sustitución de (3.62) en (3.61) conduce, tomando en cuenta que $\overline{\mathcal{O}}^t = 0$, a

$$\Gamma_{(FG)_A} = \sum_{\beta, \beta'} \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'} a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} \Big|_{\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\alpha'\beta'} \neq 0}. \quad (3.63)$$

Esta expresión muestra que la covarianza $\Gamma_{(FG)_A}$ está completamente determinada por la existencia de frecuencias relevantes comunes no triviales. Cuando A denota un estado cuya energía no es degenerada no existen frecuencias $\omega_{\alpha\beta}$ y $\omega_{\alpha'\beta'}$ diferentes de cero que satisfagan la condición impuesta en (3.63), y por lo tanto el lado derecho de dicha ecuación se anula, dando como resultado

$$\Gamma_{(FG)_{\mathcal{E}_A}} = 0, \quad (3.64)$$

donde hemos recurrido a la expresión (3.51), válida en virtud de que en este caso $(FG)_A$ constituye un desarrollo (factorizable) de energía. Así, en aquellos estados en los que \mathcal{E}_A no posee degeneración las partículas están descorrelacionadas.

Si en cambio la energía \mathcal{E}_A es tal que $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_K$, de manera que $(FG)_A$ es meramente un desarrollo de estado, entonces existe una contribución no nula del lado derecho de la ec. (3.63), proveniente del término $(\beta, \beta') = (\kappa, \kappa')$ e igual a

$$\Gamma_{(FG)_A} = a_{AK} \tilde{F}_{\alpha\kappa} \tilde{G}_{\alpha'\kappa'}. \quad (3.65)$$

3.5. Correlación como resultado de la existencia de frecuencias relevantes comunes

Nótese que el lado derecho de esta expresión posee cuatro índices: α, α', κ y κ' , mientras que el izquierdo parece depender sólo de α y α' . Esto es reflejo de que en realidad, y por ser A un estado de energía degenerada, $(FG)_A$ no es independiente de $(FG)_K$ (de hecho, recurriendo a la hermiticidad de \hat{F} y de \hat{G} así como al resultado (3.21), se observa fácilmente que $\Gamma_{(FG)_K} = \Gamma_{(FG)_A}^*$). La cantidad que toma en cuenta ambas contribuciones es la covarianza para los desarrollos de energía,

$$\Gamma_{(FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}} \equiv \overline{(FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}}^t - \overline{F_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}}^t \overline{G_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}}^t. \quad (3.66)$$

En este caso debemos recurrir al desarrollo (3.56), el cual, una vez separado en un término independiente de t y términos oscilatorios (\mathcal{O}) se expresa como

$$(FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K} = \frac{1}{2} \sum_{\beta, \beta'} \left(\tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'} + a_{KA} \tilde{F}_{\kappa\beta} \tilde{G}_{\kappa'\beta'} \right) a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} \Big|_{\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\alpha'\beta'}} + \mathcal{O}. \quad (3.67)$$

Las únicas frecuencias que satisfacen la condición $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\alpha'\beta'}$ son aquellas que corresponden a $(\beta, \beta') = (\alpha, \alpha')$ (que dan lugar a las frecuencia nulas y por lo tanto a la identidad trivial) y a $(\beta, \beta') = (\kappa, \kappa')$ (pues hemos supuesto que la única degeneración presente es la que aparece en (3.48)). Escribimos entonces

$$\begin{aligned} (FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K} &= \frac{1}{2} \left[\left(\tilde{F}_{\alpha\alpha} \tilde{G}_{\alpha'\alpha'} + a_{KA} \tilde{F}_{\kappa\alpha} \tilde{G}_{\kappa'\alpha'} \right) + a_{AK} \left(\tilde{F}_{\alpha\kappa} \tilde{G}_{\alpha'\kappa'} + a_{KA} \tilde{F}_{\kappa\kappa} \tilde{G}_{\kappa'\kappa'} \right) \right] + \mathcal{O} \\ &= \frac{1}{2} \left[\tilde{F}_{\alpha\alpha} \tilde{G}_{\alpha'\alpha'} + \tilde{F}_{\kappa\kappa} \tilde{G}_{\kappa'\kappa'} + a_{KA} \tilde{F}_{\kappa\alpha} \tilde{G}_{\kappa'\alpha'} + a_{AK} \tilde{F}_{\alpha\kappa} \tilde{G}_{\alpha'\kappa'} \right] + \mathcal{O} \\ &= \frac{1}{2} \left(\tilde{F}_{\alpha\alpha} \tilde{G}_{\alpha'\alpha'} + \tilde{F}_{\kappa\kappa} \tilde{G}_{\kappa'\kappa'} \right) + \text{Re } a_{AK} \tilde{F}_{\alpha\kappa} \tilde{G}_{\alpha'\kappa'} + \mathcal{O}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

donde hemos empleado el resultado (3.21) y la hermiticidad tanto de \hat{F} como de \hat{G} .

Por otro lado, si hacemos $G = 1$ en la ec. (3.52) vemos que

$$F_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K} = \frac{1}{2} (F_A + F_K), \quad (3.69)$$

y por lo tanto

$$\overline{F_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}}^t = \frac{1}{2} \left(\tilde{F}_{\alpha\alpha} + \tilde{F}_{\kappa\kappa} \right). \quad (3.70)$$

Un resultado análogo se cumple para $\overline{G_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}}^t$, de donde se sigue que

$$\overline{F_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}}^t \overline{G_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}}^t = \frac{1}{4} \left(\tilde{F}_{\alpha\alpha} \tilde{G}_{\alpha'\alpha'} + \tilde{F}_{\alpha\kappa} \tilde{G}_{\alpha'\kappa'} + \tilde{F}_{\kappa\kappa} \tilde{G}_{\alpha'\alpha'} + \tilde{F}_{\kappa\kappa} \tilde{G}_{\kappa'\kappa'} \right), \quad (3.71)$$

expresión que, al introducirla en (3.68), nos conduce a

$$\begin{aligned}\Gamma_{(FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}} &= \overline{(FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}}^t - \overline{F_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}}^t \overline{G_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}}^t \\ &= \frac{1}{4} \left(\tilde{F}_{\alpha\alpha} - \tilde{F}_{\kappa\kappa} \right) \left(\tilde{G}_{\alpha'\alpha'} - \tilde{G}_{\kappa'\kappa'} \right) + \text{Re } a_{AK} \tilde{F}_{\alpha\kappa} \tilde{G}_{\alpha'\kappa'}.\end{aligned}\quad (3.72)$$

De esta forma queda establecido que cuando el sistema mecánico se encuentra en un estado de energía $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_K$, es decir, siempre que existan frecuencias degeneradas $\omega_{\alpha\kappa} = -\omega_{\alpha'\kappa'}$, las partículas están correlacionadas.

En resumen: cuando el sistema se encuentra en un estado de energía \mathcal{E}_A , e independientemente de si empleamos desarrollos de estado o de energía, podemos concluir que

$$\Gamma_{(FG)} \begin{cases} = 0 & \text{si no existen frecuencias tales que } \omega_{\alpha\kappa} = -\omega_{\alpha'\kappa'}, \\ & \text{(o bien si } \mathcal{E}_A \text{ no es degenerada)} \\ \neq 0 & \text{si existen frecuencias tales que } \omega_{\alpha\kappa} = -\omega_{\alpha'\kappa'}, \\ & \text{(o bien si } \mathcal{E}_A \text{ es degenerada).} \end{cases} \quad (3.73)$$

Se desprende de aquí que, como era de esperarse, la degeneración en las frecuencias que involucran al estado actual de las partículas implica una correlación entre ellas. Más aún, dicha correlación depende directamente de las variables del campo, tema en el que ahondaremos más adelante.

Nuestra siguiente tarea, a la que dedicaremos la subsección siguiente, será investigar las implicaciones de imponer la condición ergódica sobre los promedios temporales que hemos calculado.

3.5.4. Implicaciones del principio ergódico

De acuerdo con lo discutido en la sección 3.4, las amplitudes $\tilde{F}_{\lambda\eta}$ y $\tilde{G}_{\lambda'\eta'}$ coinciden con aquellas que aparecen en los desarrollos del problema de una sola partícula, y en consecuencia (como se mostró en el capítulo 2) son independientes de la realización del campo una vez que se ha impuesto la demanda ergódica a cada uno de los subsistemas por separado. Esto nos permite reescribir la ec. (3.72) en la forma

$$\Gamma_{(FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}} = \frac{1}{4} \left(\tilde{F}_{\alpha\alpha} - \tilde{F}_{\kappa\kappa} \right) \left(\tilde{G}_{\alpha'\alpha'} - \tilde{G}_{\kappa'\kappa'} \right) + \text{Re } a_{AK}^{(i)} \tilde{F}_{\alpha\kappa} \tilde{G}_{\alpha'\kappa'}, \quad (3.74)$$

donde se ha reintroducido el índice (i) para denotar explícitamente la dependencia en la realización i del campo. Imponer la condición ergódica sobre los promedios $\overline{(\cdot)}^t$ que

3.5. Correlación como resultado de la existencia de frecuencias relevantes comunes

hemos calculado, en particular sobre $\Gamma_{(FG)\varepsilon_A=\varepsilon_K}$, equivale a demandar que el lado derecho de la ec. (3.74) sea independiente de la realización, lo que conduce a

$$a_{AK}^{(i)} = a_{\alpha\kappa}^{(i)} b_{\alpha'\kappa'}^{(i)} = a_{AK}, \quad \text{siempre que} \quad \omega_{\alpha\kappa} = -\omega_{\alpha'\kappa'}, \quad (3.75)$$

es decir, la variable a_{AK} pierde su estocasticidad siempre que las frecuencias relevantes involucradas satisfagan la condición expuesta (necesaria para alcanzar el resultado (3.72)).^{18,19}

Para distinguir claramente las variables a_{AB} que cumplen la condición (3.75) de aquellas que dependen de la realización del campo conviene definir

$$\lambda_{DG} \equiv a_{DG} = e^{i\zeta_{\delta'\gamma'}} = e^{-i\zeta_{\delta\gamma}}, \quad \text{con} \quad \omega_{\delta\gamma} = -\omega_{\delta'\gamma'}, \quad (3.76a)$$

donde en la última igualdad hemos empleado la ec. (3.26).²⁰ Más aún, debido a su independencia en la realización i , el parámetro λ_{DG} coincide con la correlación entre las variables estocásticas de los campos E_1 y E_2 correspondientes a las frecuencias $\omega_{\delta\gamma}$ y $\omega_{\delta'\gamma'}$,

$$\lambda_{DG} = a_{DG} = \langle a_{DG} \rangle = \langle a(\omega_{\delta\gamma}) b(\omega_{\delta'\gamma'}) \rangle. \quad (3.76b)$$

De aquí y de lo anterior se desprende una importante conclusión: siempre que exista una frecuencia de resonancia común a ambas partículas, el campo induce una correlación entre ellas a través del término λ_{DG} . Verificamos así que en efecto la correlación que existe entre las variables que definen al campo en cada una de las vecindades se manifiesta, en el subsistema mecánico, como una correlación entre los movimientos de las partículas.

Ahora podemos usar el resultado (3.76a) para reescribir los desarrollos (no

¹⁸Ahora la condición $a_{\alpha\alpha}^{(i)} = a_{\alpha\alpha}$, que resultaba de imponer la ergodicidad en el caso de una partícula a través de la ec. (2.57), es claramente un caso particular de (3.75) cuando se toma $\kappa = \alpha$, $\kappa' = \alpha'$.

¹⁹El resultado (3.75) no depende del desarrollo que empleemos para derivarla, pues la misma conclusión (aunque intercambiando kappas por betas) se obtiene si imponemos la ergodicidad en la expresión (3.63).

²⁰Este resultado (3.76a) era previsible según lo dicho al inicio de la subsección anterior (véase la discusión que le sigue a la ec. (3.58)) recurriendo al siguiente argumento. De acuerdo con la expresión (3.26) el hecho de que para $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\alpha'\beta'}$ la cantidad $\langle a_{AB} \rangle$ sea distinta de cero implica que $\langle e^{i\zeta_{\alpha'\beta'}} \rangle = \langle e^{-i\zeta_{\alpha\beta}} \rangle \neq 0$. Por otro lado, la fase relativa entre $a_{\alpha\beta}$ y $b_{\alpha'\beta'}$ está en principio distribuida entre 0 y 2π , de tal manera que debería cumplirse que $\langle e^{i\zeta_{\alpha'\beta'}} \rangle = \langle e^{-i\zeta_{\alpha\beta}} \rangle = 0$. Como esto contradice el resultado anterior debemos concluir que la fase $\zeta_{\alpha\beta}$ (o equivalentemente $\zeta_{\alpha'\beta'}$) no está distribuida, y por lo tanto que se trata de una cantidad no estocástica, independiente de la realización del campo.

espectrales) (3.38) y (3.56) en la forma

$$(FG)_A^{(i)} = \sum_{\beta, \beta'} \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'} a_{AB}^{(i)} e^{i\omega_{AB}t}, \quad (3.77a)$$

$$(FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{\beta, \beta'} \left(\tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'} + \lambda_{KA} \tilde{F}_{\kappa\beta} \tilde{G}_{\kappa'\beta'} \right) a_{AB}^{(i)} e^{i\omega_{AB}t}, \quad (3.77b)$$

donde hemos escrito el índice (i) explícitamente para enfatizar la dependencia estocástica de las diferentes cantidades que aquí aparecen. En particular, y gracias a que las λ_{KA} resultan ser fases no estocásticas, *todo* coeficiente en los desarrollos (3.77) (incluso en sus descomposiciones espectrales) es independiente de la realización del campo, y por lo tanto la respuesta lineal que encontramos en la teoría de una sola partícula (véase la discusión abajo de la ec. (2.65)) mantiene su validez en el caso de sistemas compuestos, aunque referida ahora a las variables compuestas a_{AB} .

3.6. Vectores de estado. Superposición y enredamiento

Al introducir los factores temporales de la ec. (3.39) en las amplitudes (3.40) obtenemos una matriz $(\mathcal{FG})(t)$ que puede desarrollarse en la forma

$$\begin{aligned} (\mathcal{FG})(t) &= \sum_{A,B} \widetilde{(FG)}_{AB}(t) |e_A\rangle \langle e_B| \\ &= \sum_{\alpha, \alpha', \beta, \beta'} \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'} e^{i(\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha'\beta'})t} |e_\alpha\rangle |e_{\alpha'}\rangle \langle e_{\beta'}| \langle e_\beta|, \end{aligned} \quad (3.78)$$

donde hemos empleado la base $\{|e_A\rangle = |e_\alpha\rangle |e_{\alpha'}\rangle\}$ del espacio $\mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$ construida a partir de los vectores $\{|e_\alpha\rangle\}$ y $\{|e_{\alpha'}\rangle\}$ que generan a los espacios \mathbb{H}_1 y \mathbb{H}_2 , respectivamente.

Al igual que se hizo en la subsección 2.6.3, es posible transferir la dependencia temporal de la matriz $(\mathcal{FG})(t)$ a los vectores de una nueva base que se obtiene de la original $\{|e_A\rangle\}$ mediante la aplicación de la transformación unitaria (2.137), de tal forma que los vectores transformados son

$$|e_A\rangle \rightarrow |A(t)\rangle = |\alpha(t)\rangle |\alpha'(t)\rangle = e^{-i(\mathcal{E}_A/\hbar)t} |e_A\rangle, \quad (3.79)$$

donde para escribir la última igualdad se usó la ec. (3.9). En esta nueva representación

el operador extendido \mathcal{FG} está dado por

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{FG})(t) &= \sum_{A,B} \widetilde{(FG)}_{AB}(t) |A(t)\rangle \langle B(t)| \\
 &= \sum_{\alpha,\alpha',\beta,\beta'} \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'} e^{i(\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha'\beta'})t} |\alpha(t)\rangle |\alpha'(t)\rangle \langle\beta'(t)| \langle\beta(t)| \\
 &= \sum_{\alpha,\alpha',\beta,\beta'} \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'} |e_\alpha\rangle |e_{\alpha'}\rangle \langle e_{\beta'}| \langle e_\beta| = (\mathcal{FG})(0), \tag{3.80}
 \end{aligned}$$

resultado que generaliza a la ec. (2.138). Vemos de aquí que, una vez desarrollada en términos de los vectores $\{|A(t)\rangle\}$, la matriz \mathcal{FG} le hereda la evolución temporal a los vectores de la nueva base. Como ocurrió en el caso de una partícula, la transformación (3.79) representa un cambio en la descripción dinámica que ahora se efectúa en términos de vectores en un espacio de Hilbert, y ya no en términos de sus operadores. En esta transición, sin embargo, surge una diferencia esencial con respecto al problema de una sola partícula, pues como veremos a continuación la energía del sistema mecánico *no* siempre está unívocamente relacionada con un sólo vector de la base transformada (3.79).

A partir de la ec. (3.80) podemos recurrir a la ortonormalidad de las bases $\{|e_\alpha\rangle\}$ y $\{|e_{\alpha'}\rangle\}$ para obtener la siguiente expresión, análoga a (2.139),

$$\begin{aligned}
 \widetilde{(FG)}_{AB} &= \langle e_{\alpha'} | \langle e_\alpha | (\mathcal{FG})(t) | e_\beta \rangle | e_{\beta'} \rangle \\
 &= \langle \alpha(t) | \langle \alpha'(t) | (\mathcal{FG})(0) | \beta(t) \rangle | \beta'(t) \rangle, \tag{3.81}
 \end{aligned}$$

que en notación más condensada (en analogía con (2.140)) adquiere la forma

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'} = \langle \alpha | \langle \alpha' | \mathcal{FG} | \beta \rangle | \beta' \rangle = \langle A | \hat{F} \hat{G} | B \rangle. \tag{3.82}$$

Una comparación con el desarrollo espectral de $(FG)_{\mathcal{E}_A}$ (ec. (3.46)) muestra que las amplitudes asociadas a frecuencias ω_{AB} *no* degeneradas, cuya forma es justamente $\tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'}$, pueden obtenerse a partir de $\hat{F} \hat{G}$ operando y proyectando sobre los vectores *factorizables* de la base (3.79), tal como se muestra en (3.82). Al no existir degeneración en la frecuencia dada ω_{AB} , ni \mathcal{E}_A ni \mathcal{E}_B son degeneradas, como se sigue de la ec. (3.42), lo que nos permite concluir que en este caso los vectores de la nueva base,

$$|A(t)\rangle = |\alpha(t)\rangle |\alpha'(t)\rangle, \tag{3.83}$$

están unívocamente asociados a la energía \mathcal{E}_A que caracteriza al estado estacionario, y por ende constituyen los vectores de estado asociados a los desarrollos de la forma

$(FG)_{\mathcal{E}_A}$. Esto nos permite establecer la relación

$$(FG)_{\mathcal{E}_A} \rightarrow |\alpha\rangle |\alpha'\rangle. \quad (3.84)$$

Por otro lado, ya se ha visto que la estructura de los coeficientes que se desprenden de una degeneración del tipo (3.47) son de naturaleza diferente a (3.82). Su forma específica, (véase el primer término de la ec. (3.46))

$$\tilde{F}_{\alpha\delta}\tilde{G}_{\alpha'\delta'} + \lambda_{DG}\tilde{F}_{\alpha\gamma}\tilde{G}_{\alpha'\gamma'}, \quad (3.85)$$

muestra claramente que estos términos no pueden ser obtenidos mediante la aplicación de $\hat{F}\hat{G}$ sobre vectores factorizables, como ocurrió en la ec. (3.82); en lugar de ello, la estructura (3.85) revela la existencia de un nuevo tipo de vector que no es un elemento de la base (3.83). Para escribir la amplitud (3.85) en la forma

$$\langle A | \hat{F}\hat{G} | W \rangle = \langle \alpha(t) | \langle \alpha'(t) | \hat{F}\hat{G} | W \rangle \quad (3.86)$$

debe determinarse el vector $|W\rangle$ que sustituye a $|B\rangle$ en la expresión (3.82). En analogía con esta última vemos que la ec. (3.85) nos permite escribir²¹

$$\tilde{F}_{\alpha\delta}\tilde{G}_{\alpha'\delta'} + \lambda_{DG}\tilde{F}_{\alpha\gamma}\tilde{G}_{\alpha'\gamma'} = \langle \alpha' | \langle \alpha | \hat{F}\hat{G} \left(|\delta\rangle |\delta'\rangle + \lambda_{DG} |\gamma\rangle |\gamma'\rangle \right), \quad (3.87)$$

de donde se sigue que $|W\rangle$ debe ser

$$|\delta\rangle |\delta'\rangle + \lambda_{DG} |\gamma\rangle |\gamma'\rangle, \quad \text{con } \omega_{\delta\gamma} = \omega_{\gamma'\delta'}. \quad (3.88)$$

Así, siempre que $\omega_{\delta\gamma} = \omega_{\gamma'\delta'}$ esto es, siempre que una misma frecuencia del campo de fondo sea relevante para ambas partículas, emerge una nueva familia de vectores que, a diferencia de los vectores de la base, no son *factorizables* y dan lugar al *enredamiento*.

Es claro a partir de la estructura del vector (3.88) que la posibilidad de superponer diferentes vectores de estado para construir un tercero es crucial para que surja el enredamiento. Es entonces esta superposición, junto con la existencia de frecuencias resonantes comunes a ambas partículas, lo que conduce a los estados enredados (3.88), asociados a una cierta energía (en este caso $\mathcal{E}_D = \mathcal{E}_G$). En el formalismo usual de la mecánica cuántica la superposición de los vectores de estado —característica de dicha teoría— se entiende como resultado de la linealidad de la ecuación de Schrödinger, mientras que en el presente contexto la superposición encuentra su origen más pro-

²¹Aquí debemos tener en cuenta que los operadores \hat{F} y \hat{G} actúan sobre el espacio generado por los vectores $\{|\alpha(t)\rangle\}$ y $\{|\alpha'(t)\rangle\}$, respectivamente.

3.6. Vectores de estado. Superposición y enredamiento

fundo en la regla de la cadena, satisfecha por las variables estocásticas del campo común.²² En efecto, la ec. (3.45) nos permite reescribir el desarrollo (3.44) en la forma (3.46), expresión que una vez tomada en cuenta la ec. (3.76b) conduce a escribir la componente de frecuencia $\omega_{AD} = \omega_{AG}$ en términos de cantidades no estocásticas en la forma (3.85). Así, es gracias a la ec. (3.45) que es posible construir *una sola* amplitud (no estocástica, dada por (3.85) y asociada a la variable a_{AD}) que posee información de *dos* estados diferentes ($|\delta\rangle|\delta'\rangle$ y $|\gamma\rangle|\gamma'\rangle$) que corresponden a una misma energía. Lo anterior, aunado a la correspondencia entre *una* amplitud del desarrollo FG y *un* ket, se manifiesta finalmente en la superposición que aparece en (3.88). Aquí es oportuno insistir en que la regla de la cadena está a la base de la respuesta lineal mencionada abajo de las ecs. (3.77), lo que nos permite decir que tras esta linealidad se encuentra el origen de la superposición.

Volvamos ahora a la ec. (3.88). Dado que la condición sobre las frecuencias necesaria para que existan vectores de la forma (3.88) implica que $\mathcal{E}_D = \mathcal{E}_G$, los nuevos vectores enredados son los apropiados para describir al sistema mecánico cuando éste posee una energía degenerada, y en consecuencia están asociados a los desarrollos de energía $(FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}$. Esta necesidad de representar estados de energía (degenerada) mediante vectores no factorizables queda de manifiesto en la forma del desarrollo (3.56), pues en ese caso *todas* las amplitudes poseen una estructura similar a (3.87), pero ahora en términos del bra

$$\langle\alpha'|\langle\alpha| + \lambda_{AK}^* \langle\kappa'|\langle\kappa|, \quad (3.89)$$

donde hemos usado $\lambda_{AK}^* = \lambda_{KA}$, como se sigue de las ecs. (3.13) y (3.76a). Una vez que realizamos la descomposición espectral del desarrollo (3.56) para obtener las amplitudes (3.57) podemos identificar a éstas, recurriendo a la ecuación (3.87), con la cantidad

$$\frac{1}{2} \left(\langle\alpha'|\langle\alpha| + \lambda_{AK}^* \langle\kappa'|\langle\kappa| \right) \hat{F}\hat{G} \left(|\delta\rangle|\delta'\rangle + \lambda_{DG} |\gamma\rangle|\gamma'\rangle \right), \quad (3.90)$$

dando así lugar a estados (de energía) cuya forma es

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\mu\rangle|\mu'\rangle + \lambda_{MR} |\rho\rangle|\rho'\rangle \right). \quad (3.91)$$

Nótese que el factor $\frac{1}{2}$ que representa el peso estadístico en la ec. (3.52) reaparece

²²Recuérdese que dicha regla no es sino consecuencia de que las dos familias de variables $\{a_{\alpha\beta}\}$ y $\{b_{\alpha'\beta'}\}$ cumplen la regla de la cadena (3.10a), la cual a su vez es consecuencia directa de la ergodicidad.

en la ec. (3.90) donde, debido a la simetría, se ha distribuido equitativamente en ambos vectores resultando el factor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ en la expresión (3.91). Así, dentro del presente contexto, el factor de normalización de los estados (3.91) adquiere naturalmente su sentido estadístico usual. Finalmente, y en analogía con (3.84) podemos establecer la relación

$$(FG)_{\varepsilon_A=\varepsilon_K} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\alpha\rangle |\alpha'\rangle + \lambda_{AK} |\kappa\rangle |\kappa'\rangle \right). \quad (3.92)$$

3.6.1. Factor de enredamiento: remanente del campo en la descripción cuántica

Las ecs. (3.64) y (3.72), aunadas a las expresiones (3.84) y (3.92), indican que la descripción del estado del sistema en términos de vectores enredados da lugar a una correlación entre las partículas que no existe cuando el sistema se encuentra en un estado caracterizado por un vector factorizable. Esta conclusión está en plena concordancia con las predicciones cuánticas; de hecho, las correlaciones Γ_{FG}^{mq} que se emplean en la mecánica cuántica:

$$\Gamma_{FG}^{\text{mq}} = \langle \hat{F}\hat{G} \rangle - \langle \hat{F} \rangle \langle \hat{G} \rangle = \langle \Psi | \hat{F}\hat{G} | \Psi \rangle - \langle \Psi | \hat{F} | \Psi \rangle \langle \Psi | \hat{G} | \Psi \rangle \quad (3.93)$$

coinciden con las expresiones que obtuvimos para $\Gamma_{(FG)\varepsilon_A}$ y $\Gamma_{(FG)\varepsilon_A=\varepsilon_K}$ cuando $|\Psi\rangle$ está dado por los vectores (3.84) y (3.92), respectivamente. En particular, para este último se tiene (véase la ec. (3.74) con $a_{AK}^{(i)} = \lambda_{AK}$)

$$\Gamma_{FG}^{\text{mq}} = \frac{1}{4} \left(\tilde{F}_{\alpha\alpha} - \tilde{F}_{\kappa\kappa} \right) \left(\tilde{G}_{\alpha'\alpha'} - \tilde{G}_{\kappa'\kappa'} \right) + \text{Re} \lambda_{AK} \tilde{F}_{\alpha\kappa} \tilde{G}_{\alpha'\kappa'}. \quad (3.94)$$

La coincidencia de nuestros resultados con aquellos obtenidos aplicando los métodos cuánticos²³ muestra que una vez que limitamos el estudio del sistema físico al régimen estacionario, ergódico y no radiativo, y además hacemos la transición a la descripción en términos de los vectores del espacio de Hilbert, la presente teoría establece contacto con los resultados usuales del formalismo cuántico no sólo en el problema de una sola partícula (como ya se discutió en el capítulo 2) sino, más generalmente, en el caso de sistemas bipartitas.

La correlación que implica la ec. (3.72) —o bien la estructura del vector (3.92)— refleja el *enredamiento* de las partículas y debe su forma, directa y esencialmente, al factor de fase λ_{AK} cuyo origen se remonta a las variables del campo, como

²³La mecánica cuántica adopta la definición estadística de covarianza para establecer la expresión (3.93). Sin embargo, como se discutirá brevemente en la subsección 4.5.2, cuando $|\Psi\rangle$ es un estado enredado la cantidad Γ_{FG}^{mq} no representa, *strictu sensu*, la covarianza en un sentido estadístico usual.

lo indica la expresión (3.76b). Aquí es importante señalar que es gracias a la segunda igualdad de la ec. (3.76a) que los factores λ_{AK} se heredan consistentemente a la descripción en el espacio de Hilbert, toda vez que en ésta *ya* se ha efectuado la aproximación no radiativa y por lo tanto se ha eliminado toda referencia a las variables del campo; es decir, dado que en este régimen no existe alusión alguna a las variables $\{a_{\alpha\beta}\}$, $\{b_{\alpha'\beta'}\}$, el hecho de que λ_{AK} pueda escribirse de manera independiente de éstas como una fase $e^{i\zeta_{\alpha'\kappa'}}$ permite que dicha cantidad aparezca legítimamente en los vectores como (3.92).

La presencia de los factores λ_{AK} en la descripción reducida, válida en la aproximación no radiativa, revela la misma trascendencia del campo de fondo que vimos en la subsección 2.6.1, en donde la constante \hbar se introduce al formalismo cuántico —vía el conmutador canónico— como un remanente del campo. En este caso el remanente es precisamente el factor de enredamiento, resultado que muestra una vez más, cómo la presencia del campo de fondo afecta las propiedades físicas del subsistema mecánico con el que alcanza el equilibrio. Así, dentro del presente esquema el campo de fondo puede identificarse como la entidad física que en última instancia es responsable del entrelazamiento, mientras que la respuesta resonante de cada una de las partículas a ciertas frecuencias comunes constituye el mecanismo físico que lo permite y que da lugar a una correlación entre sus movimientos (y entre sus diferentes variables dinámicas). Enfocarse *únicamente* en la descripción de los vectores de energía dada (3.88) —como se hace dentro del marco de la mecánica cuántica— implica pasar por alto dicho mecanismo, lo que impide entender el origen del comportamiento (ahora correlacionado) de las partículas al menos por dos razones. La primera, y principal, es que en la transición al formalismo cuántico se pierde toda referencia a las variables a_{AB} y con ello al origen físico de los factores de fase λ . La segunda es que, como ya se mencionó anteriormente, al pasar a una descripción en términos de vectores de estado los parámetros que surgen de manera natural ya no son las frecuencias sino las energías. Por esta razón, en la construcción de los vectores de estado (o energía) se hace necesario recurrir a la condición de degeneración de la energía mecánica total, $\mathcal{E}_D = \mathcal{E}_G$, para justificar el enredamiento.

3.7. Sistemas de partículas iguales

3.7.1. Enredamiento intrínseco

Los resultados anteriores muestran que el enredamiento bipartita surge siempre que ambas partículas comparten una frecuencia relevante *común* —o bien, siempre

3.7. Sistemas de partículas iguales

que existe degeneración en la energía del sistema mecánico— independientemente de la naturaleza de las partículas. En particular, cuando éstas son iguales y están sujetas al mismo potencial externo, el enredamiento entre ellas es *inevitable*. En este caso las frecuencias de resonancia de ambas partículas son las mismas, pues de acuerdo con la ec. (2.38) ellas están completamente determinadas por m , τ y la fuerza externa. Más aún, las frecuencias relevantes ($\{\omega_{\alpha\beta}\}$ y $\{\omega_{\alpha'\beta'}\}$) son todas iguales y consecuentemente los estados accesibles forman idénticos conjuntos, de tal manera que

$$\{\beta\} = \{\beta'\}. \quad (3.95)$$

Se sigue de aquí que para cada pareja ($\beta = \beta_i$, $\beta' = \beta'_i$) (con $\beta_i \neq \beta'_i$) existe otra, ($\beta = \beta'_i$, $\beta' = \beta_i$), que conduce al mismo valor $\mathcal{E}_B = \mathcal{E}_\beta + \mathcal{E}_{\beta'}$, o equivalentemente, a la degeneración espectral (véase la condición (3.48) con $(\alpha, \alpha') = (\beta_i, \beta'_i)$ y $(\kappa, \kappa') = (\beta'_i, \beta_i)$)

$$\omega_{\beta_i\beta'_i} = -\omega_{\beta'_i\beta_i}. \quad (3.96)$$

Si bien ésta es una identidad trivial a partir de la regla de la cadena (que implica la antisimetría de las frecuencias $\omega_{\alpha\beta}$), debemos distinguir el significado físico de esta expresión y observar que del lado izquierdo aparece la frecuencia de la partícula inmersa en el campo descrito por las variables $\{a\}$, mientras que del lado derecho aparece la frecuencia de la partícula inmersa en el campo descrito por las variables $\{b\}$. De esta manera, la propiedad (3.95) implica una doble degeneración de *todas* las energías \mathcal{E}_B así como de *todas* las frecuencias de ambas partículas, siempre que $\beta \neq \beta'$. Por tal motivo, para escribir el desarrollo de la variable dinámica FG cuando el sistema se encuentra en un estado de energía arbitraria \mathcal{E}_A (donde α es generalmente diferente de α') debemos recurrir al desarrollo de energía (3.52) con $\kappa' = \alpha$ y $\kappa = \alpha'$.²⁴ Debido al valor que adquieren en este caso κ y κ' , y por claridad en la escritura, sustituimos el subíndice $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_K$ de $(FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}$ por $\mathcal{E}_{(\alpha,\alpha')} = \mathcal{E}_{(\alpha',\alpha)}$, de manera que la ecuación (3.56) se convierte entonces en

$$(FG)_{\mathcal{E}_{(\alpha,\alpha')}=\mathcal{E}_{(\alpha',\alpha)}} = \frac{1}{2} \sum_{\beta,\beta'} \left(\tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'} + \lambda_A^* \tilde{F}_{\alpha'\beta} \tilde{G}_{\alpha\beta'} \right) a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} e^{i\omega_{AB}t}, \quad (3.97)$$

²⁴En el caso de partículas iguales la simetría del problema conduce naturalmente a la selección $\frac{1}{2}$ para ambos pesos estadísticos $C_{\alpha\alpha'}$ y $C_{\alpha'\alpha}$.

3.7. Sistemas de partículas iguales

con²⁵

$$\lambda_A = a_{\alpha\alpha'} b_{\alpha'\alpha}. \quad (3.98)$$

Ahora extraemos de la suma (3.97) los términos arriba mencionados ($\beta = \beta_i$, $\beta' = \beta'_i$) y ($\beta = \beta'_i, \beta' = \beta_i$) para obtener (por simplicidad en la escritura hacemos las sustituciones $\beta_i \rightarrow \beta$ y $\beta'_i \rightarrow \beta'$)

$$\begin{aligned} (FG)_{\mathcal{E}_{(\alpha,\alpha')}=\mathcal{E}_{(\alpha',\alpha)}} &= \frac{1}{2} \sum_{\beta < \beta'} \left[\left(\tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'} + \lambda_A^* \tilde{F}_{\alpha'\beta} \tilde{G}_{\alpha\beta'} \right) a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} + \right. \\ &+ \left. \left(\tilde{F}_{\alpha\beta'} \tilde{G}_{\alpha'\beta} + \lambda_A^* \tilde{F}_{\alpha'\beta'} \tilde{G}_{\alpha\beta} \right) a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} \right] e^{\frac{i}{\hbar}(\mathcal{E}_A - \mathcal{E}_B)t} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\beta = \beta'} \left(\tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'} + \lambda_A^* \tilde{F}_{\alpha'\beta} \tilde{G}_{\alpha\beta'} \right) a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathcal{E}_A - 2\mathcal{E}_\beta)t}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

donde hemos usado (3.42) para reescribir las frecuencias ω_{AB} en términos de la energía total. Aplicando la regla de la cadena encontramos que

$$a_{\alpha\beta'} b_{\alpha'\beta} = a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} (a_{\beta\beta'} b_{\beta'\beta}) = a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} \lambda_B, \quad (3.100)$$

lo que conduce a reescribir la expresión (3.99) como

$$\begin{aligned} (FG)_{\mathcal{E}_{(\alpha,\alpha')}=\mathcal{E}_{(\alpha',\alpha)}} &= \frac{1}{2} \sum_{\beta < \beta'} \left[\tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'} + \lambda_A^* \tilde{F}_{\alpha'\beta} \tilde{G}_{\alpha\beta'} + \right. \\ &+ \left. \lambda_B \left(\tilde{F}_{\alpha\beta'} \tilde{G}_{\alpha'\beta} + \lambda_A^* \tilde{F}_{\alpha'\beta'} \tilde{G}_{\alpha\beta} \right) \right] a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathcal{E}_A - \mathcal{E}_B)t} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\beta} \left(\tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'} + \lambda_A^* \tilde{F}_{\alpha'\beta} \tilde{G}_{\alpha\beta'} \right) a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathcal{E}_A - 2\mathcal{E}_\beta)t}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Las ecs. (3.57) y (3.90) nos permiten identificar el término dentro del paréntesis cuadrado con

$$\frac{1}{2} \left({}_2 \langle \alpha' | {}_1 \langle \alpha | + \lambda_A^* {}_2 \langle \alpha | {}_1 \langle \alpha' | \right) \hat{F} \hat{G} \left(| \beta \rangle_1 | \beta' \rangle_2 + \lambda_B | \beta' \rangle_1 | \beta \rangle_2 \right), \quad (3.102)$$

²⁵La hipótesis de que las partículas son iguales es esencial aquí, pues ello es lo que permite introducir índices mezclados (primados y no primados) en una misma variable del campo a o b . Es decir, puesto que las variables $a_{\alpha\beta}$ (o bien $b_{\alpha\beta}$) deben satisfacer la regla de la cadena, los índices α y β que en ellas aparecen deben ser simétricos (de la misma naturaleza y con el mismo dominio); términos cruzados del tipo $a_{\alpha\beta'}$ —que son justamente los que dan lugar a los factores de enredamiento (3.98)— poseen sentido (o dan lugar a una variable del campo aceptable, *i.e.*, que satisface la regla de la cadena) siempre que los estados primados y los no primados posean el mismo dominio, lo cual ocurre (para toda pareja de índices) sólo si se satisface la condición (3.95). Más aún, si no coinciden los dos conjuntos de estados accesibles no podemos asegurar que las amplitudes como $\tilde{F}_{\alpha'\beta}$ representan los elementos de una matriz cuadrada.

3.7. Sistemas de partículas iguales

de manera que los vectores (3.91) se reducen, para el caso de partículas iguales en un estado de energía total \mathcal{E}_G , a

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\gamma\rangle_1 |\gamma'\rangle_2 + \lambda_G |\gamma'\rangle_1 |\gamma\rangle_2 \right), \quad (\gamma \neq \gamma'), \quad (3.103)$$

y en particular, el vector que corresponde al desarrollo $(FG)_{\mathcal{E}_{(\alpha,\alpha')}=\mathcal{E}_{(\alpha',\alpha)}}$ es

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\alpha\rangle_1 |\alpha'\rangle_2 + \lambda_A |\alpha'\rangle_1 |\alpha\rangle_2 \right), \quad (\alpha \neq \alpha'). \quad (3.104)$$

Nótese que a diferencia de lo que ocurre en la ec. (3.92) los vectores de una partícula en esta expresión han sido numerados con los índices 1, 2. Cuando los conjuntos $\{\beta'\}$ y $\{\beta\}$ no coinciden (partículas o espectros diferentes), la prima (o la no prima) en un cierto estado especifica que éste corresponde a aquella partícula inmersa en el campo descrito por las variables $b_{\alpha'\beta'}$ (o $a_{\alpha\beta}$). No obstante, cuando se cumple la condición (3.95) y las variables del campo se ignoran —como ocurre al pasar de la presente teoría al formalismo cuántico, dirigiendo así la atención *exclusivamente* a los vectores de estado o energía— un estado primado no es suficiente para especificar cuál de las partículas ocupa dicho estado, y surge entonces la necesidad de introducir los índices 1 y 2 en la ec. (3.103) con el fin evitar ambigüedades con respecto a la partícula que se encuentra en el estado dado γ o γ' (o bien con respecto al espacio de Hilbert al que pertenecen los vectores correspondientes). Esta observación nos permite comentar acerca del significado físico de los índices 1 y 2. Dado que las partículas son iguales, es claro que estos índices no proveen información física adicional ni caracterizan alguna propiedad intrínseca de los corpúsculos, de manera que sólo denotan los respectivos espacios de Hilbert asociados a cada uno de ellos. Sin embargo, dentro de la presente teoría, dichas etiquetas se corresponden con los campos en las vecindades de las partículas, de modo que no están carentes de cierto carácter físico; en contraposición, cuando el campo se desconoce los índices 1 y 2 pierden todo sentido físico y representan etiquetas meramente *matemáticas*. De acuerdo con esto, los índices numéricos que aparecen en la expresión (3.102) no deben interpretarse como etiquetas que distinguen a las partículas en un sentido físico estricto, sino como etiquetas que corresponden a los (idénticos) espacios de Hilbert vinculados a cada una de ellas.²⁶ En todo caso, si se les ha de asignar un sentido físico, éste debe estar relacionado con los campos de fondo en los que las partículas se hallan inmersas.

²⁶Se sigue de aquí que en el formalismo cuántico el intercambio de partículas (que corresponde a la sustitución $1 \leftrightarrow 2$) representa una operación matemática que equivale a intercambiar los espacios \mathbb{H}_1 y \mathbb{H}_2 .

3.7.2. Estados totalmente simétricos y antisimétricos

A lo largo de este capítulo nos hemos referido a sistemas compuestos en los que una de las partículas está inmersa en un campo descrito por las variables estocásticas a y posee un conjunto de estados accesibles $\{\beta\}$, mientras que la otra se encuentra bajo la acción de un campo cuyas variables denotamos con b y puede acceder a un conjunto de estados $\{\beta'\}$. Un cierto estado físico de la pareja de partículas se especifica señalando el estado alcanzado por cada una de ellas —por ejemplo, α y α' — de manera que la situación física particular está caracterizada por dichos estados y por las familias de variables $\{a_{\alpha\beta}\}$ y $\{b_{\alpha'\beta'}\}$. Así, cuando hemos descrito una cierta variable dinámica compuesta FG , donde F corresponde a la primera de estas partículas y G a la segunda, nos ha bastado con referirnos a una expresión cuya forma se puede escribir más detalladamente como

$$(FG)_A = (FG)_{\alpha\alpha'} = (FG)_{\alpha\alpha'}(a, b), \quad (3.105)$$

donde entendemos que en la última igualdad todas las cantidades que aparecen en primera o segunda posición se corresponden entre sí. Cuando el sistema que nos ocupa está compuesto de dos partículas iguales sujetas a la acción del mismo potencial externo, entonces (como hemos visto) la variable FG en el estado de energía dada \mathcal{E}_A se describe recurriendo al desarrollo (3.97), el cual puede expresarse, usando la ec. (3.52) y la notación (3.105), como

$$(FG)_{\mathcal{E}_{(\alpha,\alpha')}=\mathcal{E}_{(\alpha',\alpha)}} = \frac{1}{2} [(FG)_{\alpha\alpha'}(a, b) + (FG)_{\alpha'\alpha}(a, b)]. \quad (3.106)$$

Es claro que en este tipo de sistemas existe una simetría inmediata, que es la invariancia de sus propiedades físicas frente al intercambio de partículas. En la descripción presente, y de acuerdo con lo explicado al inicio de esta subsección, el intercambio de partículas es una operación (que denotamos con I_p) que se obtiene al intercambiar los estados α y α' de cada una de las ellas (operación que denotamos con I_e) al tiempo que se intercambian los campos de fondo —a través de sus variables— en los que están inmersas (operación que denotamos con I_c).²⁷ El intercambio constituye entonces una operación física que puede describirse matemáticamente mediante las

²⁷Debemos resaltar que el intercambio de partículas así definido es válido únicamente para partículas iguales sujetas al mismo potencial externo. La razón de ello es que para asegurar que una vez efectuado el intercambio el estado resultante siga siendo estacionario se requiere que tanto α como α' sean estados (estacionarios) accesibles de *ambas* partículas. Como esto debe ocurrir independientemente de cuáles sean α y α' , debe cumplirse entonces para toda $\alpha \in \{\beta\}$ y toda $\alpha' \in \{\beta'\}$, es decir, debe cumplirse la condición (3.95).

3.7. Sistemas de partículas iguales

transformaciones

$$I_p = I_e I_c = I_c I_e, \quad (3.107a)$$

donde

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \xleftrightarrow{I_e} & \alpha', \\ a & \xleftrightarrow{I_c} & b. \end{array} \quad (3.107b)$$

Consideremos la expresión (3.106), la cual representa la variable FG en un estado de energía total \mathcal{E}_A en términos de dos contribuciones: la primera, $(FG)_{\alpha\alpha'}(a, b)$, en la que una de las partículas (de la cual describimos la variable F) se encuentra en el estado α e inmersa en el campo descrito por las variables $\{a_{\alpha\beta}\}$, mientras que la otra (de la cual describimos la variable G) se encuentra en el estado α' e inmersa en el campo descrito por las variables $\{b_{\alpha'\beta'}\}$; y la segunda, $(FG)_{\alpha'\alpha}(a, b)$, que corresponde al caso anterior con los estados intercambiados. Dicha expresión puede reescribirse explícitamente en la forma

$$(FG)_{\mathcal{E}_{(\alpha,\alpha')}=\mathcal{E}_{(\alpha',\alpha)}} = \frac{1}{2} \sum_{\beta,\beta'} \left(\tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'} a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} + \tilde{F}_{\alpha'\beta} \tilde{G}_{\alpha\beta'} a_{\alpha'\beta} b_{\alpha\beta'} \right) e^{i(\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha'\beta'})t}. \quad (3.108)$$

Si ahora intercambiamos las partículas aplicando la transformación I_p obtenemos

$$I_p (FG)_{\mathcal{E}_{(\alpha,\alpha')}=\mathcal{E}_{(\alpha',\alpha)}} = \frac{1}{2} \sum_{\beta,\beta'} \left(\tilde{F}_{\alpha'\beta} \tilde{G}_{\alpha\beta'} b_{\alpha'\beta} a_{\alpha\beta'} + \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\alpha'\beta'} b_{\alpha\beta} a_{\alpha'\beta'} \right) e^{i(\omega_{\alpha'\beta} + \omega_{\alpha\beta'})t}. \quad (3.109)$$

En virtud de que se cumple la condición (3.95) podemos intercambiar $\beta \leftrightarrow \beta'$ en la expresión anterior, resultando, después de reacomodar los términos,

$$I_p (FG)_{\mathcal{E}_{(\alpha,\alpha')}=\mathcal{E}_{(\alpha',\alpha)}} = \frac{1}{2} \sum_{\beta,\beta'} \left(\tilde{F}_{\alpha'\beta'} \tilde{G}_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} + \tilde{F}_{\alpha\beta'} \tilde{G}_{\alpha'\beta} a_{\alpha'\beta} b_{\alpha\beta'} \right) e^{i(\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha'\beta'})t}. \quad (3.110)$$

Esta expresión muestra que en efecto las partículas se han intercambiado, pues ahora —como se observa de los índices que corresponden a las variables F y G , asociadas a las diferentes partículas— la primera contribución corresponde al caso en que la partícula de la cual describimos la variable F se encuentra en el estado α' e inmersa en el campo descrito por las variables $\{b_{\alpha'\beta'}\}$, mientras que la otra (de la cual describimos la variable G) se encuentra en el estado α e inmersa en el campo descrito por las variables $\{a_{\alpha\beta}\}$. La segunda contribución corresponde de nuevo al primer caso con los estados intercambiados.

3.7. Sistemas de partículas iguales

El resultado (3.110) nos permite extraer una conclusión importante. Como ya hemos visto, en cuanto se eliminan las variables del campo de fondo la descripción presente se reduce a una que tiene lugar en el espacio producto de Hilbert, y en la que los únicos elementos a la mano son los elementos matriciales del tipo $\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{G}_{\alpha'\beta'}$ y los vectores de $\mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$. Una comparación entre las ecs. (3.108) y (3.110) muestra que si nos enfocamos en esta descripción reducida de manera que sólo consideramos las amplitudes $\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{G}_{\alpha'\beta'}$ (o $\tilde{F}_{\alpha'\beta}\tilde{G}_{\alpha\beta'}$) en (3.108) —o bien los vectores de la forma $|\alpha\rangle_1|\alpha'\rangle_2$ (o $|\alpha'\rangle_1|\alpha\rangle_2$) que aparecen en (3.104)— el intercambio de partículas se obtiene mediante el intercambio de estados primados por no primados, es decir, aplicando la transformación I_e a los elementos matriciales o bien a los vectores de $\mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$. Este procedimiento, que es usual dentro del formalismo cuántico y no es sino consecuencia de haber eliminado las variables del campo, deja ver que en la transición al espacio de Hilbert la *misma* transformación física, a saber, el intercambio de partículas, se obtiene mediante el operador

$$I_p^{\text{mq}} = I_e, \quad (3.111)$$

donde hemos escrito I_p^{mq} para distinguir el operador de intercambio en la descripción reducida (cuántica) de la transformación (3.107a), aplicable a los desarrollos que hemos construido.²⁸

De lo anterior es fácil ver que cuando las partículas son iguales y están sujetas al mismo potencial externo, las variables del campo común $\{a_{AB}\}$ son invariantes frente a I_p , es decir,

$$I_p a_{AB} = I_p(a_{\alpha\beta}b_{\alpha'\beta'}) = b_{\alpha'\beta'}a_{\alpha\beta} = a_{AB}. \quad (3.112)$$

Este resultado indica que el campo común no se ve afectado por el intercambio de partículas, y por lo tanto que el sistema físico completo es invariante frente a I_p , como es de esperar. De la ec. (3.112) se sigue un resultado de suma relevancia, y es que los factores de fase $\lambda_A = a_{\alpha\alpha'}b_{\alpha'\alpha}$ son invariantes frente al intercambio de partículas,

$$I_p \lambda_A = I_p a_{\alpha\alpha'}b_{\alpha'\alpha} = b_{\alpha'\alpha}a_{\alpha\alpha'} = \lambda_A. \quad (3.113)$$

²⁸Debe quedar claro, sin embargo, que dentro del presente esquema el solo intercambio de estados accesibles *no* corresponde al intercambio de partículas. Esto puede verse fácilmente aplicando I_e , por ejemplo, a la primera contribución de $(FG)_{\mathcal{E}_{(\alpha,\alpha')}=\mathcal{E}_{(\alpha',\alpha)}}$,

$$(FG)_{\alpha\alpha'}(a, b) \xrightarrow{I_e} (FG)_{\alpha'\alpha}(a, b) = \sum_{\beta,\beta'} \tilde{F}_{\alpha'\beta'}\tilde{G}_{\alpha\beta}a_{\alpha'\beta'}b_{\alpha\beta}e^{i(\omega_{\alpha'\beta'}+\omega_{\alpha\beta})t},$$

expresión que corresponde a una situación en la que la partícula cuyo estado era α ahora ocupa el estado α' pero se mantiene en el *mismo* campo, descrito por las variables a . De aquí que las partículas *no* han sido intercambiadas (compárese esta última ecuación con el primer término de (3.110)).

3.7. Sistemas de partículas iguales

Por otro lado, como se mencionó en la subsección 3.6.1, cuando restringimos la descripción a vectores y operadores en el espacio de Hilbert el término λ_A debe reescribirse como

$$\lambda_A = \exp(i\zeta_{\alpha'\alpha}), \quad (3.114)$$

es decir, en una forma que no haga referencia a las variables de los campos, a fin de ser consistentes con la aproximación no radiativa. Ahora bien, es claro que las propiedades de invariancia de λ_A no pueden verse afectadas por el hecho de que ésta aparezca en un desarrollo del tipo (3.97) o en un vector de estado como (3.104); por lo tanto, λ_A mantiene su invariancia frente al intercambio de partículas ya sea que se exprese en el contexto de la presente teoría (en la forma (3.98)) o en el de la descripción en el espacio de Hilbert (en la forma (3.114)). Esta observación, junto con la ec. (3.111), nos conduce a demandar que se cumpla

$$I_p^{\text{mq}}\lambda_A = \lambda_A, \quad (3.115)$$

con λ_A dada por (3.114). Usando la propiedad (3.13) obtenemos

$$I_p^{\text{mq}}\lambda_A = I_p^{\text{mq}}\exp(i\zeta_{\alpha'\alpha}) = \exp(i\zeta_{\alpha\alpha'}) = \lambda_A^*, \quad (3.116)$$

y en consecuencia la demanda (3.115) conduce a

$$\lambda_A = \lambda_A^*. \quad (3.117)$$

Por tratarse de un factor de fase, concluimos que λ_A está dada por

$$\lambda_A = \pm 1, \quad \forall \alpha \neq \alpha'. \quad (3.118)$$

Aunque el caso particular $\alpha = \alpha'$ conduce a $\lambda_A = 1$ trivialmente (pues $a_{\alpha\alpha} = b_{\alpha\alpha} = 1$) estamos interesados en aquellas λ_A para las que $\alpha \neq \alpha'$ (véase la ec. (3.104)).

El resultado (3.118) muestra que los vectores de estado (3.104) de todo sistema de partículas iguales, no interactuantes y sujetas a la misma fuerza externa, son totalmente (anti)simétricos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\alpha\rangle_1 |\alpha'\rangle_2 \pm |\alpha'\rangle_1 |\alpha\rangle_2 \right). \quad (3.119)$$

En particular, las ecs. (3.76b) y (3.118) muestran que en este caso las variables $a_{\alpha\alpha'}$ y $b_{\alpha'\alpha}$ poseen máxima (anti)correlación, de tal forma que lo mismo ocurre con la pareja de partículas.

3.7.3. Incursiones preliminares sobre la separación de equilibrio

De acuerdo con la ec. (3.76a), cuando se cumple la condición $\omega_{\delta\gamma} = -\omega_{\delta'\gamma'}$, la fase $\varsigma_{\delta\gamma}$ (o bien $\varsigma_{\delta'\gamma'}$) es independiente de la realización del campo, de modo que $\varsigma_{\delta\gamma}$ depende solamente de cantidades que a su vez son independientes de i . Este resultado, aunado al hecho de que $\varsigma_{\delta\gamma}$ está asociada a la frecuencia $\omega_{\delta\gamma}$ —cantidad que como se vio en el capítulo 2 es también independiente de i — sugiere escribir $\varsigma_{\delta\gamma}$ como una función de $\omega_{\delta\gamma}$ y de otras cantidades, que por el momento denotaremos globalmente con la variable z , que son independientes tanto de la realización del campo como de los índices δ, γ .²⁹ Proponemos entonces:

$$\varsigma_{\delta\gamma} = \varsigma(\omega_{\delta\gamma}, z). \quad (3.120)$$

Por otro lado, las ecs. (3.5b) y (3.11) muestran que la fase $\varsigma_{\delta\gamma}$ posee información sobre la distancia R que separa a las partículas, de tal manera que z contiene necesariamente a R ; de hecho, como no existe en la teoría otro parámetro apropiado que caracterice al sistema y que a la vez sea independiente de la realización y de los índices δ, γ , sustituiremos R en lugar de z en la expresión (3.120). Más aún, el hecho de que $\varsigma_{\delta\gamma}$ sea una cantidad adimensional indica que $\varsigma(\omega_{\delta\gamma}, R)$ debe ser función de una variable adimensional construida a partir de $\omega_{\delta\gamma}$ y R . Esto nos lleva a escribir

$$\varsigma_{\delta\gamma} = \varsigma(R\omega_{\delta\gamma}/c). \quad (3.121)$$

Consideremos ahora un punto intermedio entre el origen y R , de tal forma que R queda expresada en la forma

$$R = R_1 + R_2. \quad (3.122)$$

La proyección del campo definido en una vecindad alrededor del punto R_1 a lo largo de la dirección $\hat{\mathbf{R}}$ puede escribirse como (véanse las ecs. (3.4))

$$E_3(t) \equiv \sum_k \tilde{E}(\omega_k) \left(\mathbf{a}_k(R_1) \cdot \hat{\mathbf{R}} \right) e^{i\omega_k t} = \sum_k \tilde{E}(\omega_k) c_k e^{i\omega_k t}, \quad (3.123)$$

donde, en analogía con la ec. (3.5), hemos definido la variable estocástica c_k en la forma

$$c_k = \mathbf{a}_k(R_1) \cdot \hat{\mathbf{R}}. \quad (3.124)$$

²⁹ Aquí estamos suponiendo que toda la dependencia de $\varsigma_{\delta\gamma}$ en los índices δ, γ entra sólo a través de la frecuencia $\omega_{\delta\gamma}$.

3.7. Sistemas de partículas iguales

Supongamos ahora que en lugar de colocar una partícula en el origen y la otra en R colocamos una en el origen y la otra en R_1 . En este caso, el hecho de que los resultados previos —en particular la ec. (3.11)— se hayan alcanzado sin necesidad de recurrir a la separación entre las partículas, nos permite escribir una expresión idéntica a (3.11) para relacionar las variables estocásticas $c_{\alpha\beta}^{(i)}$ que corresponden al campo donde se encuentra la segunda partícula con aquellas del campo en la vecindad de la primera. Tenemos entonces que

$$c_{\alpha\beta}^{(i)}(t) = a_{\alpha\beta}^{(i)}(t) \exp \left[i\varsigma_{\alpha\beta}^{(i)}(R_1) \right]. \quad (3.125)$$

Asimismo, podríamos haber colocado la primer partícula en el punto que se encuentra a una distancia R_1 del origen y la segunda en R . En ese caso, la independencia de (3.11) en la elección del origen de coordenadas nos conduce a la siguiente relación entre las variables de los campos 2 y 3:

$$b_{\alpha\beta}^{(i)}(t) = c_{\alpha\beta}^{(i)}(t) \exp \left[i\varsigma_{\alpha\beta}^{(i)}(R_2) \right]. \quad (3.126)$$

Sustituyendo la expresión (3.125) en la ec. (3.126) obtenemos

$$b_{\alpha\beta}^{(i)}(t) = a_{\alpha\beta}^{(i)}(t) \exp i \left[\varsigma_{\alpha\beta}^{(i)}(R_1) + \varsigma_{\alpha\beta}^{(i)}(R_2) \right], \quad (3.127)$$

ecuación que, aunada a (3.11) y a (3.122), implica que $\varsigma_{\delta\gamma}$ es lineal en R , y por lo tanto que la función (3.121) adquiere la forma

$$\varsigma_{\delta\gamma} = A \frac{R\omega_{\delta\gamma}}{c}, \quad (3.128)$$

con A una constante adimensional.

Ahora bien, de acuerdo con las ecs. (3.114) y (3.118) las fases $\varsigma_{\alpha\alpha'}$ son múltiplos enteros de π , de modo que $\varsigma_{\alpha\alpha'}$ queda expresada como

$$\varsigma_{\alpha\alpha'} = (\text{sg}\omega_{\alpha\alpha'})n\pi, \quad (3.129)$$

donde n par (o impar) corresponde a $\lambda_A = 1$ (o -1) y el signo de $\omega_{\alpha\alpha'}$, $(\text{sg}\omega_{\alpha\alpha'})$, se ha introducido para asegurar la antisimetría de $\varsigma_{\alpha\alpha'}$ frente al intercambio de índices. Reuniendo las ecs. (3.128) y (3.129) en una sola expresión encontramos que

$$A \frac{R|\omega_{\alpha\alpha'}|}{c} = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.130)$$

Finalmente rescribimos $|\omega_{\alpha\alpha'}|$ en términos de la longitud de onda correspondiente

3.7. Sistemas de partículas iguales

$\lambda_{\alpha\alpha'} = 2\pi c/|\omega_{\alpha\alpha'}|$ y obtenemos

$$R = A^{-1} \frac{n}{2} \lambda_{\alpha\alpha'}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.131)$$

lo que nos permite escribir (tomando $A = 1$)

$$R = \begin{cases} s\lambda_{\alpha\alpha'}, & \lambda_A = 1 \\ (s - \frac{1}{2})\lambda_{\alpha\alpha'}, & \lambda_A = -1 \end{cases}, \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (3.132)$$

Este sorprendente resultado es interesante no sólo porque escapa completamente a las predicciones cuánticas, sino también por sus implicaciones. De acuerdo con (3.132), cuando la pareja de partículas resuena a una frecuencia común del campo de fondo, ellas tienden a reacomodarse durante la evolución hacia el régimen estacionario y ergódico, de tal forma que cuando éste se ha alcanzado la distancia media que las separa está discretizada. Debemos notar, sin embargo, que el entero s que aquí aparece no puede adquirir valores arbitrariamente grandes, pues hemos supuesto (véase la discusión que le sigue a las ecs. (3.3)) que las partículas están sujetas a una misma realización del campo, lo que limita la validez de nuestros resultados a distancias finitas, en las que podemos considerar que los modos relevantes del campo mantienen su correlación.

El análisis de esta subsección y el resultado novedoso al que conduce, requieren todavía de una revisión cuidadosa, por lo que sería aventurado extraer mayores conclusiones por el momento. Sin embargo, lo hemos presentado aquí de manera preliminar como indicio de los resultados potenciales que podría ofrecer la EDEL en el futuro.

Capítulo 4

Reflexiones finales

4.1. En busca de una mejor comprensión del fenómeno cuántico

Toda teoría física que tenga por objeto entender el comportamiento de la naturaleza requiere de una estructura matemática que le permita predecir resultados comparables con el experimento, y de un marco conceptual o interpretativo (su semántica) que le otorgue a los elementos que emplea en la descripción matemática un significado físico preciso. La mecánica cuántica posee un sólido formalismo matemático y una capacidad predictiva incuestionables; sin embargo, desde sus inicios han existido múltiples cuestionamientos referentes a su interpretación.¹ Uno de los puntos más agudos que se discuten surge cuando observamos que algunos de los principios fundamentales de la física precuántica y de la ciencia en general como son el determinismo, la causalidad, la localidad y el realismo, resultan irreconciliables con las predicciones que arroja la teoría cuántica, lo que suele interpretarse diciendo que tales principios simplemente son irreconciliables con el mundo físico. Esta conclusión está fuertemente arraigada a la idea de que la mecánica cuántica es una teoría completa, al menos en el sentido de que sus predicciones reflejan fielmente la verdadera naturaleza de los sistemas que estudia. No obstante, afirmar que la descripción cuántica es una teoría acabada o completa en base a su enorme capacidad predictiva no sólo nos obliga a renunciar a principios fundamentales que nos han permitido visualizar y *entender* los fenómenos físicos, sino que constriñe la búsqueda constante que caracteriza al espíritu científico.

La EDEL es una teoría que nace de la necesidad de comprender el fenómeno

¹Una (muy limitada) muestra del amplio espectro de puntos de vista acerca de cómo debe entenderse la mecánica cuántica puede verse, por ejemplo, en las refs. [73]-[81].

cuántico a través de una descripción basada en consideraciones estrictamente físicas. Una descripción de esta índole amplía nuestro panorama del fenómeno cuántico a la vez que permite dar salida a muchos de los problemas interpretativos que lo rodean. Para alcanzar su objetivo la EDEL parte de un sistema físico bien definido descrito por leyes causales, deterministas y locales y, tras una serie de consideraciones físicas —*i.e.*, libres de cualquier juicio personal ajeno a la física— encuentra que la mecánica cuántica es una teoría aproximada, asintótica, estadística, y por lo tanto parcial. De esta forma sus resultados y predicciones están acotados y difícilmente pueden extrapolarse para obtener conclusiones sobre la naturaleza última del sistema que describe. Así, los principios antes señalados (determinismo, causalidad, localidad, realismo, etcétera) están ausentes en la descripción cuántica no porque ellos sean ajenos a la naturaleza, sino por el propio carácter aproximado del formalismo resultante. Los ejemplos más inmediatos de esto son la pérdida de la causalidad como resultado de tomar el límite no radiativo, y la introducción del indeterminismo como consecuencia de la naturaleza estadística de la descripción alcanzada. La aproximación no radiativa elimina al campo de fondo (junto con el resto de términos radiativos) y con él, la entidad estocástica fundamental que causa el fenómeno cuántico queda fuera del alcance de la teoría. En consecuencia, la descripción conduce a una teoría acausal e indeterminista, desprovista además de los elementos necesarios para darle respuesta fundada y transparente a las interrogantes asociadas al incumplimiento de dichas propiedades.²

Ver en la descripción cuántica una manifestación completa de las propiedades del mundo físico implica introducir un cambio profundo —aunque innecesario como hemos visto— en la concepción del comportamiento fundamental de la materia, con importantes implicaciones físicas y filosóficas.³ Por ejemplo, esta visión conduce a interpretar el comportamiento indeterminista del sistema como resultado de fluctuaciones *irreducibles*, de las cuales las desigualdades de Heisenberg se consideran el mejor ejemplo. Sin embargo, la EDEL muestra que el indeterminismo no es una propiedad intrínseca de los sistemas cuánticos, sino una adquirida en su descripción, y que las desigualdades de Heisenberg deben entenderse como una manifestación estadística de la acción del campo fluctuante de punto cero sobre la materia. Al respecto, debemos destacar que las respuestas que arroja la EDEL para entender al-

²Si bien la evolución de los estados cuánticos (controlada por la ecuación de Schrödinger) sí es causal, la teoría que emerge es acausal en el sentido de que está imposibilitada, de principio, para identificar algunas de las causas físicas detrás de sus resultados.

³Reintroducir el campo más tarde, como se hace cuando se consideran correcciones radiativas dentro de la electrodinámica cuántica, no reincorpora los mecanismos subyacentes al comportamiento cuántico, pues el sistema completo es ya uno que se considera *intrínsecamente* cuántico.

gunas de las dificultades conceptuales de la mecánica cuántica están estrechamente relacionadas con el hecho de que la descripción presente se refiere a ensembles de partículas y no a sistemas individuales. Así, mientras que la cuestión acerca de si la formulación cuántica debe entenderse como referida a un corpúsculo o a un ensemble se ha abordado tradicionalmente *postulando* una u otra alternativa, la respuesta (no hipótesis) de la presente teoría es clara: la descripción cuántica se refiere a ensembles, y sólo muy circunstancialmente puede aplicarse a casos individuales. Este resultado, junto con la imagen del campo de fondo, nos permite también reincorporar la noción de localidad y realismo al mundo físico. En particular el entrelazamiento cuántico se antoja como un problema interesante para la teoría, pues la visión usual que se tiene de este fenómeno contraviene intensamente dichos principios.⁴

Si bien la EDEL constituye una teoría que provee los elementos físicos que hacen posible visualizar los fenómenos como ocurren en la naturaleza, reincorporando a la física algunos de sus principios más fundamentales, sería equivocado entender que su alcance está constreñido únicamente a solventar muchas de las dificultades interpretativas de la mecánica cuántica. La mayor riqueza de la EDEL no estriba en que ella conduce de manera natural al formalismo de la mecánica cuántica, sino en que identifica los mecanismos físicos que subyacen a algunos de sus fenómenos más característicos como son la cuantización misma y el enredamiento entre las diferentes partes (aparentemente no interactuantes) de un sistema compuesto; más aún, la EDEL ofrece en principio la posibilidad de avanzar más allá de los límites propios de la mecánica cuántica actual. En las siguientes secciones se destacarán y discutirán algunos de los principales resultados de la teoría.

4.2. La existencia del campo fluctuante de punto cero

La existencia del campo fluctuante de radiación de punto cero constituye el elemento primordial de la presente teoría. Las consecuencias físicas de su presencia difícilmente pueden sobreestimarse, y debido a su trascendencia se torna preciso ahondar en su origen y en el carácter real que posee esta entidad.

⁴Una teoría que satisface la demanda de realismo acepta una descripción espacio-temporal del sistema, de tal forma que entiende que una partícula sólo puede estar en un sitio a la vez. Claramente la interpretación que ve en el enredamiento la posibilidad de que la partícula se encuentre en dos (o más) lugares simultáneamente rompe con toda noción realista, mientras que la visión estadística que se ha dado aquí es consistente con ella, como queda claro de la discusión que aparece más adelante, en la subsección 4.5.2.

4.2.1. Surgimiento del campo *fluctuante* de punto cero

Desde la perspectiva de este trabajo, el primer viso de un campo de radiación de punto cero se encuentra en la existencia de una energía atérmica de los osciladores del campo de radiación en equilibrio con la materia. Dicha energía está consistentemente contenida en la física precuántica, según lo indican el análisis termodinámico referido al inicio de capítulo 1, así como los resultados mencionados en la nota 5, trabajos todos ellos que muestran que los osciladores de frecuencia ω del campo de radiación aceptan, en principio, una energía de punto cero dada por $\mathcal{E}_0 = A\omega$. Un valor no nulo para la constante universal A representa, por un lado, la solución más general para el potencial termodinámico ϕ (véase por ejemplo la ec. (1.4)) y por otro, puede derivarse sustituyendo las condiciones de frontera que normalmente se suponen para las soluciones de las ecuaciones de Maxwell —y en las que el campo se anula en el infinito— por otras, físicamente más realistas, en las que existe un campo de radiación fluctuante en el infinito.⁵ Tomadas en conjunto, estas observaciones muestran que la misma física proporciona una base para considerar seriamente un valor no nulo de la energía de punto cero, y con él la consecuente presencia de un campo de radiación de vacío. La noción de campo *fluctuante* de punto cero surge en cuanto se observa que el campo *total* constituye en sí mismo una sola entidad física —conformada por el campo a $T \neq 0$ y el campo de vacío— de tal forma que si el primero posee una naturaleza fluctuante (como en efecto ocurre de acuerdo con la ec. (1.18)) entonces debemos esperar que lo mismo suceda para el campo de vacío.

4.2.2. Realidad física del campo

En el momento en que adoptamos las consideraciones físicas que hemos mencionado y que justifican la presencia del campo de punto cero, las consecuencias que se derivan de hacer $\mathcal{E}_0 \neq 0$ adquieren sustento físico, y toda hipótesis discreta que se requiera para reproducirlas resulta innecesaria. Este es el caso de la hipótesis cuántica aplicada a los osciladores del campo de radiación, ya que como hemos visto, la ley de Planck —y la descripción cuántica (discreta) del campo que se desprende de ella— es consecuencia directa de la existencia de una energía de punto cero no nula.

⁵En los tratamientos usuales de la electrodinámica clásica se recurre a la hipótesis de que en ausencia de fuentes (cargas) el campo electromagnético debe anularse. Sin embargo, si pensamos en un espacio permeado por materia, el hecho de que ésta esté constituida de partículas cargadas cuya descripción en conjunto es altamente compleja, sugiere que la existencia de un campo de radiación azaroso (que podríamos identificar con el campo de punto cero) es una hipótesis más realista que la del campo nulo. Para una discusión detallada acerca de la pertinencia de una modificación de las condiciones de frontera de las ecuaciones de Maxwell (y de cómo ella implica un valor diferente de cero para A) véase la ref. [82].

Es importante insistir en que el enfoque que hemos presentado va más allá de proveer una simple forma alterna y equivalente de reproducir los resultados de las investigaciones sobre la radiación de cuerpo negro obtenidos hace poco más de 100 años. Históricamente, la naturaleza discontinua —ya sea de algún proceso físico, como lo pensara Planck (muy a su pesar), o bien de las entidades físicas mismas, como lo propusiera Einstein— constituye la hipótesis *necesaria* para entender las discrepancias entre los fenómenos observados y las predicciones que arroja la física clásica. Aceptar la necesidad de esta hipótesis, y más aún, acoger con ello la noción de discontinuidad como una propiedad fundamental de la naturaleza, nos obliga a introducir una nueva propiedad de la materia y del campo de radiación, de cuya causa la teoría usual no provee explicación física alguna. Sin embargo, desde la perspectiva de la EDEL no sólo la hipótesis discontinua es prescindible, sino que ha quedado provista de bases físicas a través de la presencia del campo de vacío, entidad que, reiteramos, surge de manera natural en cuanto se reconocen las posibilidades subyacentes e inexploradas que nos ofrecen algunas teorías ajenas a la cuántica.

En este punto es importante destacar el papel fundamental que juega la ley de Wien en los desarrollos que conducen a las conclusiones anteriores. Ella no sólo es el punto de entrada de la energía de punto cero en la descripción termodinámica de los osciladores, sino que constituye la ley que en última instancia permite escribir $\sigma_{\mathcal{E}}^2(U)$ en la forma (1.34), de donde la ley de Planck sigue inmediatamente. De esta forma, la ley de Wien y la condición $\mathcal{E}_0 \neq 0$ son suficientes para alcanzar la ley de Planck. Si bien este resultado sitúa a la primera como una ley más fundamental que la segunda, el hecho de que la ley de Wien pueda derivarse mediante consideraciones puramente dimensionales,^[83] es decir, esencialmente independientes de nuestras teorías físicas, nos obliga a identificar la raíz *física* de la ley de Planck —y en consecuencia de la descripción cuántica de los osciladores— en la existencia de la energía de punto cero. Así, a los argumentos anteriores que sirven para justificar la existencia del campo de vacío, se suma la propia evidencia experimental ofrecida por la ley de Planck.

Por otro lado, hemos visto que si bien las relaciones termodinámicas admiten la presencia del campo de punto cero, la descripción estadística inicial —aquella basada en una distribución de probabilidad de la forma (1.9)— no acepta la existencia de sus fluctuaciones. La introducción de estas últimas requiere de la construcción de un tratamiento estadístico completo del sistema de osciladores, uno que, de acuerdo con lo expuesto en la sección 1.6, sobrepasa la descripción clásica y conduce a distribuciones de probabilidad que identificamos con aquellas que emergen de un tratamiento estadístico cuántico.

En conjunto, estos resultados muestran que es posible reinterpretar la e-

videncia experimental de las manifestaciones cuánticas del campo de radiación — entendiéndolo por éstas las que se derivan de su descripción discontinua así como de su nueva descripción estadística— como un reflejo de la existencia de un campo (no virtual) de radiación fluctuante de punto cero (o vacío), en contraposición con el carácter virtual que normalmente se le atribuye.⁶

4.3. La *emergencia* del fenómeno cuántico

4.3.1. La cuantización como una propiedad adquirida en la interacción campo-materia

Los resultados obtenidos en el capítulo 1 descansan en relaciones termostadísticas que presuponen que se ha alcanzado un equilibrio (a cierta temperatura) entre la radiación y la materia que conforma las paredes que la contienen. Esta observación es esencial, y nos debe mantener alertas para no interpretar las propiedades discretas del campo de radiación como intrínsecas al campo mismo. Es decir, debemos tener presente que el sistema físico es uno compuesto de radiación *y* materia —ambos en interacción constante a fin de alcanzar y mantener el estado de equilibrio— y que la descripción cuántica de los osciladores del campo surge como resultado de dicha interacción, y no, como suele extrapolarse, como consecuencia de alguna propiedad discreta propia del campo. La presente teoría es entonces claramente más acorde a la visión de Planck que a la de Einstein, pues mientras el primero veía en el campo de radiación una entidad continua, cuyas propiedades discretas eran sólo una manifestación de su interacción con la materia, el segundo entendió tales discontinuidades como intrínsecas al propio campo. A propósito de esto conviene mencionar que la visión convencional (ampliamente extendida) de que el campo de radiación está compuesto de paquetes discretos e indivisibles de energía no está en absoluto carente de

⁶Lo que normalmente se acepta que posee realidad física son las *fluctuaciones* del campo de punto cero, no el campo mismo. El primer y más conocido problema relacionado con el carácter real del campo radica en que su existencia está estrechamente vinculada a uno de los problemas más profundos de la física moderna, el problema de la constante cosmológica Λ .^[84] La existencia del campo de punto cero —más aún, la de cualquiera de los campos de vacío que predice la teoría cuántica de campos— implica la existencia de una enorme cantidad de energía que se esperaría produjera efectos gravitacionales descomunales. La constante cosmológica, entendida como una medida de estos efectos, alcanzaría entonces un valor que difiere del observado en muchos órdenes de magnitud (tan sólo para el campo de vacío electromagnético la densidad de energía discrepa de la que permite la constante Λ observada por un factor de 10^{55} si la frecuencia de corte se toma apenas en el rango ultravioleta, ~ 100 GeV, o por un factor de 10^{120} si se toma como límite la energía de Planck). Sobra decir que el hecho de que la conjunción de las dos grandes teorías físicas del siglo XX conduzca a una discrepancia con las observaciones de proporciones nunca antes vistas en la física, constituye uno de los problemas más agudos que enfrenta la física hoy en día; problema del que claramente la presente teoría, como toda la teoría cuántica de campos, no está exenta.

problemas interpretativos.⁷

Al observar que el campo y la materia constituyen un solo sistema físico, la presencia ineludible del campo de vacío modifica el enfoque con el que debe abordarse el estudio del subsistema material. La nueva entidad física obliga a renunciar a la idea (permisible dentro de un contexto clásico) de que el sistema mecánico puede ser aislado, y en consecuencia el estudio de las propiedades dinámicas de la materia debe siempre considerar que ella está inmersa en un campo de fondo con el que interacciona de manera permanente. Reconocer que no es posible aislar a la materia del campo de vacío no sólo es el punto de partida de la EDEL para estudiar los estados estacionarios de la materia, sino que permite entender su existencia misma. La hipótesis original de Nernst, aquella que recurre al balance entre la energía radiada por el electrón atómico y la energía que éste absorbe del campo para explicar la estabilidad atómica, es determinante en la presente teoría y además verificada en los resultados numéricos de Cole y Zou^{[58]-[63]}.⁸ Más aún, nuestros desarrollos muestran que los estados estacionarios de una partícula están cuantizados como resultado de su interacción con el campo de fondo,⁹ de modo que la conclusión que alcanzamos sobre la cuantización de este último adquiere un carácter más general: la cuantización, ya sea del campo de radiación o de la materia, es una propiedad adquirida durante la evolución del sistema *completo* hacia el equilibrio, y no una propiedad intrínseca a estas entidades.

4.3.2. El fenómeno cuántico: una propiedad emergente

Una vez que la interacción campo-materia conduce a una partícula a un cierto estado estacionario, la EDEL introduce uno de sus principios más fundamentales: el principio ergódico. El papel decisivo que juega éste en la teoría ya ha sido destacado a lo largo de la tesis y volveremos a él más adelante; por el momento nos interesa hacer una observación importante al respecto, y es que al demandar un comportamiento ergódico estamos imponiendo una condición sobre un *ensemble* de sistemas equivalentes. Que la descripción que se ha hecho se refiere a un ensemble de partículas

⁷En la ref. [85] puede encontrarse una discusión actual y crítica enfocada a solventar algunas de estas dificultades, por ejemplo, a través de modelos fotónicos que reincorporan a la física las nociones de causalidad y localidad.

⁸El hecho de que en estos últimos sólo se haya recuperado la predicción cuántica para el estado base del átomo se explica notando que los autores sólo consideraron el campo de vacío en sus simulaciones. No obstante, si bien ellos apenas han incursionado en reproducir el primer estado excitado, la descripción que hemos hecho aquí es más rica en tanto que da cabida a cualquier campo de fondo siempre que éste contenga su contribución de punto cero, de modo que los resultados obtenidos contemplan todos los posibles estados excitados.

⁹Esta propiedad será discutida con mayor detalle en la subsección 4.4.3.

ya ha sido señalado en la sección 2.7, pero a ello debe agregarse que una vez que se impone la condición de ergodicidad los resultados que de ella se desprendan no pueden separarse ya de su sentido estadístico. En consecuencia, el formalismo de la mecánica cuántica, por identificarse con la versión última (aproximada y asintótica) de la presente teoría, posee un carácter irrevocablemente estadístico, de tal forma que sus elementos y resultados no pueden, en general, entenderse como referidos a un solo sistema individual. Esta cualidad, aunada al hecho de que el campo y la materia adquieren sus propiedades cuánticas como resultado de su interacción mutua, exhibe al fenómeno cuántico como una propiedad *emergente* del sistema campo-materia.

4.4. La física detrás del fenómeno cuántico

Desde la perspectiva de la EDEL, la mecánica cuántica constituye la descripción estadística, asintótica y aproximada de un complejo proceso de interacción entre la materia y el campo de fondo, y como tal, es una teoría limitada que ha perdido elementos y mecanismos que son necesarios para sustentar físicamente algunos (si no muchos) de sus resultados más fundamentales. La existencia de una teoría capaz de subsumir la mecánica cuántica dentro de un marco teórico más amplio deja al descubierto que la descripción cuántica posee limitaciones; sin embargo, no nos acerca a una mejor comprensión de su significado físico a menos que la teoría en cuestión logre identificar los procesos que dan paso al fenómeno cuántico. La EDEL cumple, si bien parcialmente, esta tarea, colocando al campo de fondo, a la ergodicidad y a la respuesta resonante como la entidad, la condición y el mecanismo físico, respectivamente, que conducen —en última instancia y en el régimen estacionario, ergódico y no radiativo— a algunas de las manifestaciones cuánticas del subsistema mecánico.¹⁰ En esta sección identificaremos aquellas cantidades esenciales en la descripción cuántica que son herencia directa del campo de fondo, y discutiremos el papel que juegan el principio ergódico y la respuesta resonante en la física detrás del comportamiento cuántico.

4.4.1. Las herencias del campo en la mecánica cuántica

Como ya se ha visto, cuando se toma la aproximación no radiativa (tras haberse alcanzado el régimen cuántico¹¹) de la teoría aquí desarrollada, es posible establecer contacto con el formalismo de la mecánica cuántica matricial. En este

¹⁰En estas líneas incluimos al enredamiento como una manifestación de la cuantización en el sentido de que provee al sistema de sus propiedades cuánticas.

¹¹Recordemos que el régimen cuántico coincide con el régimen estacionario y ergódico.

límite el campo desaparece de la descripción dinámica, mas no así sus repercusiones sobre el subsistema mecánico, como queda claro al observar que la estructura (no clásica) de la ec. (2.102) se preserva y transmite a su versión aproximada, la propia ecuación de Heisenberg. Este resultado confirma que la acción del campo sobre la materia trasciende las correcciones radiativas y persiste incluso después de haber suprimido explícitamente al campo de la teoría. Más aún, este último subsiste tras la aproximación no radiativa a través de la constante \hbar —signo perseverante de la presencia del campo de vacío— la cual adquiere un papel decisivo en la dinámica del sistema y el subsecuente comportamiento cuántico, como puede apreciarse a partir de las ecs. (2.131) y (2.133), afianzándose así como la constante característica de toda la mecánica cuántica. De esta manera la constante de Planck es una herencia *directa* del campo de vacío —una que nos remonta al origen físico del comportamiento cuántico— si bien este no es su único legado.

Al estudiar un sistema compuesto de dos partículas encontramos que los factores de fase λ que dan lugar a su enredamiento no son sino una reminiscencia directa —y no estocástica, gracias al principio ergódico— de las variables $\{a_{AB}\}$ que caracterizan al campo de fondo común en el que las partículas están inmersas. Se tiene entonces que dos elementos fundamentales en la descripción cuántica son, en esencia, una manifestación directa de la presencia del campo de fondo. Esto nos permite entender por qué la mecánica cuántica no puede identificar el origen físico último de algunos de sus resultados más fundamentales, como son el valor del conmutador canónico y la existencia de correlaciones entre partículas no interactuantes, y la razón es que la entidad que les da origen ha quedado fuera de su formalismo.

4.4.2. Implicaciones del principio ergódico en la descripción de las variables dinámicas

El principio ergódico juega un papel por demás trascendente en la teoría que hemos presentado. En particular está a la base de la regla de la cadena, y consecuentemente es responsable de que la respuesta del sistema mecánico al campo sea lineal en sus variables estocásticas, propiedad que a su vez define un álgebra matricial para la construcción de las diferentes variables dinámicas. Este resultado muestra que basta combinar la presencia del campo de fondo con el principio ergódico para alejar definitivamente al sistema mecánico de toda descripción clásica, ya que la naturaleza —estocástica y en términos de números c — de las variables dinámicas y las leyes que originalmente regían la evolución del sistema, queda sustituida por una descripción

no estocástica de carácter matricial.¹² Con ello, una vez alcanzado el régimen cuántico las diversas cantidades físicas quedan representadas por operadores (matrices) que evolucionan de acuerdo con la ec. (2.102). Debemos tener presente, sin embargo, que el hecho de referirnos a una descripción estadística implica que los nuevos operadores, junto con las leyes que rigen su evolución, proveen información (parcial) que refleja el comportamiento de un ensemble de sistemas, de tal forma que se debe ser muy cauteloso al trasladar las propiedades o relaciones entre operadores cuánticos a un lenguaje clásico.

A propósito de la regla de la cadena y en concordancia con lo dicho en la subsección 4.3.1, la presente teoría, lejos de entender al campo de fondo como un simple reservorio, permite (y en realidad espera) que las propiedades estadísticas de las variables aleatorias que definen al campo en la vecindad de la partícula se vean modificadas, al menos parcialmente, por la presencia de materia. Muestra de que ello en efecto ocurre es la propia regla de la cadena; mientras que el campo de punto cero en el vacío es uno máximamente desordenado, la relación (2.77) implica que las fases $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ que definen a las variables $\{a_{\alpha\beta}\}$ se correlacionan parcialmente, lo que produce un campo menos azaroso. El hecho de que este cambio venga aparejado del surgimiento de las propiedades cuánticas del campo sugiere que el ordenamiento parcial de sus variables estocásticas podría estar asociado a la noción de fotón, entendido éste como una manifestación de cierta estructura u organización del campo de radiación. Esta conjetura abre una línea de investigación que podría arrojar resultados interesantes y que deberá explorarse detalladamente.

4.4.3. La respuesta resonante como mecanismo de cuantización

Como se mencionó al final de la sección 4.1, la teoría que hemos desarrollado aquí adquiere especial relevancia toda vez que nos permite identificar los mecanismos físicos que pueden colocarse a la base de los espectros discretos y del enredamiento entre las diferentes partes (no interactuantes) que componen un sistema mecánico bipartita. A continuación discutiremos cómo la EDEL encuentra en la respuesta resonante del sistema mecánico al campo un factor central para entender dichos fenómenos.

El hecho de que el sistema mecánico responda de manera resonante a ciertas frecuencias del campo, con curvas de resonancias extremadamente agudas, revela la propiedad que da origen a la discretización de los estados estacionarios. Una partícula

¹²Por ejemplo, la ecuación estocástica (2.33) se transforma en la ecuación matricial no estocástica (2.95), la cual puede generalizarse para describir la evolución de una variable dinámica cualquiera como lo dicta la ec. (2.102).

que ha alcanzado el estado α puede resonar, de entre todas las frecuencias del campo, sólo a *algunas* de ellas, lo que restringe los estados estacionarios (β) a los que la partícula puede acceder desde el estado α . Esta restricción en las energías (estados) que le son accesibles a la partícula se manifiesta entonces en un espectro discreto, y en consecuencia la respuesta resonante puede identificarse con el mecanismo que está a la base de la cuantización de la energía.¹³ Es oportuno observar que dentro del presente contexto es completamente natural que la transición de la partícula de un estado estacionario a otro venga aparejada de un cambio en el campo de fondo —lo que en el lenguaje usual correspondería a la emisión o absorción de un fotón— mientras que en la descripción convencional el campo se introduce posteriormente, como un elemento adicional a la teoría (elemento que se incorpora en la electrodinámica cuántica) y como única salida para dar cuenta del decaimiento espontáneo de los estados excitados. Sin embargo, aún cuando introduzca al campo, la mecánica cuántica no puede explicar cómo es que el estado final está bien determinado *previo* a efectuarse la transición; es decir, no existe dentro del formalismo cuántico un mecanismo físico que permita entender por qué, en el lenguaje estándar, sólo ciertos fotones pueden ser emitidos o absorbidos en un estado dado.¹⁴ Es conveniente insistir en que la teoría que hemos presentado no da cabida a esta dificultad, ya que las frecuencias de resonancia están determinadas dinámicamente desde el inicio por la partícula misma (a través de m y τ) y por las fuerzas externas a las que está sujeta. La agudeza de las resonancias debida a la pequeñez de τ determina con alta precisión el nivel (es decir, el estado) en el que el electrón habrá de aterrizar, de manera que no hay nada extraño en que la partícula “sepa” de antemano la frecuencia del fotón que debe absorber o emitir al realizar una transición.

Por otro lado, una respuesta resonante *común* en un sistema bipartita es esencial para comprender la correlación entre los movimientos de las dos partículas. Ahondaremos en este punto en la siguiente sección, que está destinada a discutir los resultados más relevantes que arroja la EDEL para entender el enredamiento.

¹³Está claro que para alcanzar la ecuación (2.135) se requiere, además de una respuesta resonante, el principio ergódico que conduce a la independencia de las frecuencias $\omega_{\alpha\beta}$ de la realización del campo.

¹⁴El argumento de que las frecuencias de transición están predeterminadas por la diferencia de energías claramente no constituye una explicación para entender el mecanismo físico de la transición.

4.5. Desenredando el entrelazamiento

4.5.1. ¿Qué entrelaza a las partículas?

Cuando el subsistema mecánico se compone de dos partículas que poseen una frecuencia relevante en común, la correlación que existe entre los modos correspondientes del campo en las vecindades de cada una de las partículas induce una correlación entre aquellas variables (de una y otra partícula) que oscilan con dichas frecuencias. Este es, en pocas palabras, el mecanismo físico detrás del enredamiento de acuerdo con la EDEL. En particular, cuando la frecuencia relevante corresponde a una resonancia la correlación de los movimientos de ambos corpúsculos resulta significativa.¹⁵

La aparición de correlaciones entre subsistemas *no interactuantes* está estrechamente vinculada no sólo a la existencia de frecuencias relevantes comunes, sino también, y de manera fundamental, a la propia correlación entre las variables estocásticas $a_{\alpha\beta}$ y $b_{\alpha'\beta'}$ que describen al campo en las vecindades de cada una de las partículas. De hecho, tal correlación es precisamente el factor λ_{AK} que determina la covarianza predicha por la mecánica cuántica para las variables dinámicas F y G asociadas a cada uno de los subsistemas, como se aprecia de las ecs. (3.76b) y (3.94).

Cuando las partículas están correlacionadas no es posible describir el subsistema mecánico en forma separada e independiente, pues ambas entidades están en presencia de un campo de fondo que hace de ellas un solo sistema físico. Esta inseparabilidad se hace más que evidente cuando eliminamos el campo y establecemos contacto con el formalismo (cuántico) en términos de vectores de estado, resultando así una descripción que involucra estados enredados. Las correlaciones que de ellos se desprenden aparecen entonces como una manifestación de (aparentes) efectos no locales y no causales; sin embargo, es claro que dentro de la presente teoría no es necesario recurrir a estas nociones, completamente prescindibles en cuanto se reconocen los efectos del campo sobre la materia. De acuerdo con esto, aceptar que el campo de fondo se encuentra en permanente interacción con la materia abre todo un campo de exploración que eventualmente podría conducir a una mayor comprensión acerca de la (aparente) no localidad, y mostrarla como una propiedad de una descripción aproximada más que como una intrínseca a la naturaleza.

La importancia del campo de fondo en el proceso que conduce al enredamiento trasciende a los sistemas materiales como el que hemos estudiado aquí. Muestra de

¹⁵Esto es así porque las frecuencias de resonancia, al ser las que determinan las contribuciones importantes a la respuesta x_α , son precisamente las frecuencias de oscilación de los desarrollos de las variables x y p .

ello son algunos resultados que se derivan de una serie de trabajos realizados por Santos y Marshall^{[86]-[89]} dentro del marco de la *óptica estocástica*, en los que se muestra que el enredamiento entre fotones no es sino consecuencia de la presencia de correlaciones que involucran al campo fluctuante de vacío.¹⁶ En conjunto, estos resultados apuntan hacia un mecanismo universal responsable del enredamiento; uno que descansa en correlaciones —inalcanzables para la física clásica y que permanecen ocultas a la descripción cuántica usual— debidas al campo fluctuante de punto cero.

Las observaciones previas destacan la acción mediadora del fondo estocástico (*i.e.*, el campo) en el proceso que enreda a las partículas. De esta forma el ambiente en el que se halla el sistema mecánico compuesto, y que se entiende aquí como el campo de radiación fluctuante, aparece como una entidad física capaz de enredar sus diversos componentes. Esta capacidad del ambiente para inducir correlaciones entre las partículas —que claramente se contraponen con su acción degradadora de enredamiento mediante el proceso de decoherencia— ha sido ampliamente estudiada en años recientes dentro del propio formalismo de la mecánica cuántica.^{[90]-[100]} Las conclusiones que arrojan estos trabajos están en plena concordancia con lo que aquí se ha dicho, en el sentido de que diferentes constituyentes —independientes entre sí— de un sistema multipartita pueden enredarse por el simple hecho de interactuar (separadamente) con el ambiente; no obstante, dejan de lado el *mecanismo* físico que da cuenta de ello y que desde la perspectiva de este trabajo es clara.^{17,18}

Para finalizar, es oportuno mencionar que es posible obtener un resultado análogo al entrelazamiento cuántico en un sistema de partículas brownianas.^[101] Sin embargo, si bien el *enredamiento browniano* requiere de la presencia de un fondo estocástico (en ese caso el baño térmico) para que exista una correlación entre las partículas inmersas en él, hay una diferencia esencial entre el enredamiento browniano y el cuántico, y es la propia naturaleza de los ambientes estocásticos presentes en cada caso. El baño térmico browniano representa un ruido blanco y como tal está completamente descorrelacionado, de manera que es incapaz de correlacionar a las partículas que se encuentran en su seno. Por su parte el campo de punto cero,

¹⁶Esta teoría, que comparte el mismo espíritu de la EDEL, ha logrado también explicar con éxito los resultados de varios experimentos relacionados con fotones en los que suele atribuirse un comportamiento no local de la naturaleza, considerando la presencia del campo (ondulatorio) de radiación fluctuante de punto cero.

¹⁷Se entiende que nos referimos aquí al caso en que el ambiente es un campo de radiación electromagnética.

¹⁸La razón de que en los trabajos mencionados no se revele un mecanismo fundamental subyacente al enredamiento inducido por el ambiente es que sus resultados están derivados dentro del contexto cuántico usual, en el que —como ya se ha mencionado— han quedado ocultos los elementos necesarios para hacerlo.

al mantener su correlación, puede inducir a través de ella correlaciones entre las partículas dando lugar al mecanismo de enredamiento que hemos mencionado.¹⁹

4.5.2. Naturaleza estadística del enredamiento

Como lo muestran las ecs. (3.48) y (3.49) la existencia de frecuencias relevantes comunes a ambas partículas está aparejada de una degeneración de la energía mecánica total. Esta degeneración es particularmente útil porque, de acuerdo con lo explicado en la subsección 3.5.2, nos permite construir nuevos desarrollos para la variable FG . Así, la teoría cuenta con dos expresiones asociadas a una misma variable dinámica compuesta: el desarrollo de estado, el cual describe a la variable FG representativa de un ensemble de sistemas en los que cada una de las partículas se encuentra en un cierto estado (por ejemplo α y α'), y el desarrollo de energía, que describe a la variable representativa de un ensemble de sistemas que poseen una cierta energía mecánica total (por ejemplo \mathcal{E}_A). Cuando la energía mecánica no es degenerada ambos desarrollos coinciden, pero difieren cuando existen κ y κ' tales que $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_K$. En este último caso, el desarrollo de energía correspondiente $(FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}$ posee una estructura claramente estadística, ya que se compone de los dos desarrollos de estado que comparten la misma energía, cada uno de los cuales contribuye con un cierto peso estadístico. La información de estos pesos se transfiere finalmente a los vectores enredados (3.92), resultado que legitima la interpretación (usual) de sus coeficientes como amplitudes de probabilidad y, más aún, muestra que los estados (3.92) deben entenderse en un sentido estadístico. Así, debemos descartar toda lectura que vea en ellos la posibilidad de que una partícula pueda encontrarse en dos estados a la vez; la estructura de las dos contribuciones en los vectores (3.92) significa que, dado un sistema (pareja de partículas) de energía total $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_K$, éste bien puede pertenecer al subensemble de energía \mathcal{E}_A y encontrarse en el estado $|\alpha\rangle|\alpha'\rangle$, o bien puede pertenecer al subensemble de energía \mathcal{E}_K y encontrarse en el estado $|\kappa\rangle|\kappa'\rangle$. Ambos casos son igualmente probables y se realizan simultáneamente, es decir, ambos subensembles coexisten y ninguna de las partículas se encuentra de manera permanente en sólo uno de los dos estados posibles.

El hecho de que el desarrollo $(FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}$ no esté asociado a un único estado del subsistema mecánico sino que sea una cantidad promediada sobre dos subensembles (que corresponden a una misma energía mecánica), le otorga a la covarianza $\Gamma_{(FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}}$ un carácter singular, ya que ésta involucra promedios sobre cantidades

¹⁹Lo anterior explica por qué, para que ocurra el enredamiento browniano, es necesario que las partículas interactúen (o hayan interactuado) vía un potencial de interacción externo, ya que el baño térmico puede mantener por un tiempo la correlación entre las partículas pero no la origina.

que han sido parcialmente promediadas. A su vez, esta propiedad hace del desarrollo de energía uno no separable (a diferencia del desarrollo de estado) de tal manera que el promedio $\overline{(FG)}_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}^t$ no puede descomponerse en la forma $\overline{F}_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K} \overline{G}_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}^t$, y consecuentemente $\Gamma_{(FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}}$ no satisface la última igualdad de la ec. (3.59), como ocurriría si se tratase de una covarianza en el sentido usual. Dado que $\Gamma_{(FG)_{\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_K}}$ es precisamente la covarianza cuántica, lo anterior nos permite concluir que las correlaciones cuánticas poseen un carácter *sui generis* que formalmente las hacen diferir de aquellas que se encuentran en una descripción estadística estándar. No obstante, este resultado no es de extrañar si recordamos que la mecánica cuántica no es una teoría necesariamente consistente con las descripciones estadísticas usuales.²⁰

4.5.3. El inevitable enredamiento de las partículas iguales

La condición que conduce a los estados enredados, esto es, la existencia de frecuencias relevantes comunes, se satisface trivialmente cuando las dos partículas son iguales y están sujetas a las mismas condiciones externas (véase la ec. (3.96)), lo que conduce a que el enredamiento entre ellas sea inevitable. Más aún, la simetría intrínseca a este tipo de sistemas implica que dicho enredamiento es máximo, es decir, que los estados enredados correspondientes son estados de máxima (anti)simetría. De acuerdo con lo que se vio en la subsección 3.7.2 las variables $\{a_{AB}\}$ del campo común son invariantes frente al intercambio de partículas, resultado que es determinante para concluir que los factores de fase λ que dan lugar al entrelazamiento son reales, de donde se desprende la (anti)simetría de los estados enredados (3.119). El espíritu de la EDEL se hace evidente en esta derivación, pues ella parte de una propiedad (la invariancia) de las variables del *campo de fondo* para extraer conclusiones directamente sobre los estados que representan al *subsistema mecánico*. Es claro que ello es posible toda vez que se reconoce que el factor de enredamiento λ no es sino una huella directa del campo de fondo; sin embargo, la mecánica cuántica sólo tiene a la mano el sistema mecánico, ¿cómo justifica entonces la (anti)simetría de los vectores (3.119)? A continuación discutiremos críticamente algunos de los argumentos de los que se vale la mecánica cuántica para hacer esto.²¹

²⁰Por ejemplo, viola las leyes kolmogorovianas de la probabilidad al predecir distribuciones de probabilidad negativas. Estas y otras consideraciones similares podrían servir de base para explicar por qué la interpretación de ensemble de la mecánica cuántica^[102, 103] se ha encontrado con dificultades para alcanzar su pleno desarrollo.

²¹Aquí conviene recordar lo dicho en la nota 3 de la Introducción referente a que dentro del formalismo de la mecánica cuántica es usual entender la (anti)simetría de los estados como un *postulado*, si bien existen argumentos que intentan proveerlo de cierta justificación física.

Intercambio de partículas

En los tratamientos usuales la mecánica cuántica recurre a argumentos de simetría (o invariancia) para justificar la (anti)simetría de los estados (3.119); no obstante, ellos difieren en esencia de los que hemos empleado aquí. Para aclarar esto debe tenerse presente que la transformación I_p que representa el intercambio físico de partículas dentro de la EDEL no coincide con la transformación correspondiente que aparece en el formalismo cuántico, y que hemos denotado con I_p^{mq} . Que exista esta discrepancia es natural, ya que lo que distingue a ambas transformaciones es el intercambio (I_c) de los campos en las vecindades de cada una de las partículas, campo del que no se dispone en el esquema usual. Ahora bien, las variables del campo están en clara correspondencia con las posiciones que ocupan las partículas, de tal forma que el efecto de I_c puede verse como el intercambio de dichas posiciones. Esta idea contraviene la visión dominante que se tiene de la mecánica cuántica no sólo porque ella no da cabida al campo de fondo, sino porque rechaza la noción de trayectoria y consecuentemente está obligada a renunciar a la posibilidad de intercambiar las posiciones de ambas partículas, ya que “por principio” no puede determinar el sitio donde se encuentra cada una de ellas.²² De hecho, es esta imposibilidad de distinguir las trayectorias lo que con frecuencia se considera la base de la *indistinguibilidad* de las partículas,²³ propiedad que se identifica como la responsable de que los sistemas cuánticos de partículas iguales difieran esencialmente de sus análogos clásicos.^[104] Sin embargo, como ya se ha visto, este tipo de argumentos son innecesarios además de que de aceptarse nos conducen a optar por una de dos posturas: o bien la noción de intercambio de partículas depende del sistema físico que se estudie, o bien lo que la mecánica cuántica entiende como intercambio de partículas *no* corresponde, en realidad, a dicha transformación. Esto es resultado de que la operación cuántica I_p^{mq} no considera el intercambio de posiciones de las partículas, de tal forma que

²²La inexistencia de trayectorias en la visión estándar es frecuentemente entendida como consecuencia de las desigualdades de Heisenberg, pues ellas se leen como un *principio* referido a *una* sola partícula bajo el supuesto de que la descripción cuántica proporciona la información *completa* del sistema físico. La conclusión que arroja la teoría aquí desarrollada es enteramente diferente: la solución de la ecuación de movimiento original constituye un proceso estocástico en el que existe, en principio, una trayectoria bien definida. No obstante, al considerar todo un ensemble de sistemas que satisfacen el principio ergódico se torna imposible identificar dichas trayectorias. Así, si bien la teoría presente no alude a la noción explícita de trayectoria, sí presupone su existencia. Esto último es importante porque permite, en principio, la posibilidad de contar con una descripción espacio-temporal del sistema cuántico.

²³Aquí conviene resaltar que esta imposibilidad de distinguir las trayectorias introduce al observador como parte esencial del argumento, como ocurre en otras áreas de la mecánica cuántica dentro de la visión ortodoxa. Claramente la EDEL no requiere de observador alguno para alcanzar sus conclusiones.

si suponemos que el sentido físico del intercambio es independiente del sistema, es decir, no se ve modificado porque tratemos un sistema cuántico o uno clásico — el cual sí permite la idea de trayectoria y por ende el intercambio de posiciones— entonces debemos concluir que I_P^{mq} *no* representa el intercambio físico, real, de las partículas. Si por otro lado, suponemos que I_P^{mq} *sí* representa dicho intercambio, entonces necesariamente la definición de intercambio se ve modificada al pasar de un sistema cuántico a uno clásico (en el primer caso no intervienen las posiciones, en el segundo sí). Desde la perspectiva de la EDEL el intercambio de partículas es una operación física bien definida que como tal no depende del sistema que se estudie, y en consecuencia entendemos que I_P^{mq} no refleja el intercambio de partículas sino el intercambio de *etiquetas*, como ya se explicó al final de la subsección 3.7.1. Así, los argumentos usuales que se basan en la invariancia del sistema frente a la operación I_P^{mq} aplicada a los vectores del espacio de Hilbert *no* descansan en la invariancia *física* natural, que es la simetría frente al intercambio (físico) de partículas.

En este punto es oportuno mencionar otra diferencia importante que distingue a los argumentos presentados en el capítulo 3 de aquellos que aparecen frecuentemente en la literatura. Hemos visto que en virtud de la equivalencia que existe entre las ecs. (3.48) y (3.49) es indistinto hablar de frecuencias relevantes comunes que de degeneración de la energía mecánica total. Dado que esta última condición corresponde a la llamada *degeneración de intercambio* referida en el tratamiento cuántico usual para construir los estados enredados, lo anterior podría sugerir que algunos de los argumentos presentados aquí son, en esencia, los mismos a los que se alude en la mecánica cuántica.²⁴ Es importante destacar que esto no es así, pues si bien las condiciones (3.48) y (3.49) son en efecto equivalentes, la condición de frecuencias degeneradas porta consigo el sentido físico de la respuesta resonante, mientras que la *sola* condición de energía degenerada no proporciona el mecanismo que subyace al enredamiento. Esto sucede a resultas de que, al haberse despojado del campo de fondo, la mecánica cuántica ha perdido toda referencia al proceso de resonancia.

4.5.4. ¿Simetría o antisimetría?

La predicción que hace la EDEL de la (anti)simetría de los estados enredados que describen sistemas de partículas iguales (no interactuantes) representa un importante avance con respecto al estatus que ocupa dicho resultado dentro de la mecánica

²⁴En realidad la degeneración de intercambio es más general, y se refiere a que diferentes estados matemáticos pueden representar una misma situación física. En particular, cuando dichos estados son eigenestados del hamiltoniano, la degeneración de intercambio corresponde a la degeneración de energía a la que nos referimos.

cuántica, toda vez que aquí el postulado de simetrización aparece provisto de significado físico. Sin embargo, hasta donde ha sido desarrollada, la presente teoría no puede precisar cuál de los dos estados (el simétrico o el antisimétrico) es el adecuado para representar al sistema compuesto. Establecer un criterio para discernir entre ambos estados requiere, como es bien sabido, introducir la noción de espín; no obstante, la teoría que hemos desarrollado no cuenta aún con una descripción de éste, de tal manera que en su forma presente la EDEL está desprovista de los elementos necesarios para construir una descripción libre de ambigüedades. Existen, sin embargo, trabajos realizados dentro del terreno de la Electrodinámica Estocástica (EDE) que apuntan a que el espín es una propiedad adquirida por las partículas en su interacción con el campo^[105, 106] y arrojan algunos resultados alentadores, aunque aún parciales.²⁵ Así, si bien la EDE es una teoría que ya ha sido superada por la EDEL, es posible que algunos sus resultados puedan recuperarse y desarrollarse con éxito.

4.6. Perspectivas a futuro

Es claro que el tratamiento que hemos expuesto en este trabajo deja un número importante de interrogantes sin resolver; el sólo hecho de plantearlas todas constituye una tarea en extremo ambiciosa, razón por la cual aquí nos limitaremos a presentar aquellas líneas de investigación más inmediatas que se desprenden de nuestros resultados.

Quizá la pregunta más evidente que deja abierta la presente teoría es qué ocurre con el sistema campo-materia durante su evolución hacia el régimen cuántico. Antes de alcanzarse éste el sistema mecánico intercambia energía y momento con el campo, de tal forma que es un sistema abierto en el que la constante de Planck está presente —vía el campo de punto cero— si bien aún no se han establecido las leyes dinámicas cuánticas. En este régimen el sistema está entonces gobernado por una física novedosa, que difiere de la clásica y a la vez de la cuántica, y en la que sin lugar a dudas nos aguardan resultados interesantes.

Por otro lado, el papel que juega el campo de fondo en la presente descripción deja en claro que los efectos que produce el ambiente en los sistemas cuánticos pueden ser mayúsculos, observación que podría ser relevante al profundizar en las teorías de la medición y de la decoherencia espontánea.

Uno de los aspectos más característicos de la mecánica cuántica, y que ha dado lugar a múltiples discusiones, es el aparente comportamiento ondulatorio de la materia. La EDEL no da cabida a una dualidad onda-corpúsculo como ésta suele entenderse,

²⁵Para una discusión amplia de dichos trabajos véase la ref. [16].

y claramente rechaza aquellas interpretaciones que ven en las manifestaciones ondulatorias de las partículas el resultado de una transformación corpúsculo \leftrightarrow onda inducida por la preparación del sistema u otra causa similar. En concordancia con el resto de sus consideraciones, la presente teoría sugiere que fenómenos como la difracción de partículas pueden explicarse aludiendo a la influencia que el campo (ondulatorio) de fondo ejerce sobre la materia. Así, por ejemplo, podemos pensar que un haz de partículas que se hace incidir sobre una pantalla con dos rendijas reproducirá —si las partículas son sensibles a los modos difractados del campo— la estructura espacial (difractada) del mismo. Sobre esta posible explicación de la difracción de partículas se ha realizado algún trabajo preliminar con interesantes resultados.^[107, 108]

De manera análoga, aunque de naturaleza muy diferente, quedan pendientes un buen número de reflexiones teórico-filosóficas que surgen de manera natural de las consideraciones anteriores. A manera de ejemplo podemos citar el problema del realismo y la posibilidad de construir imágenes racionales del mundo cuántico — asociado ello a la recuperación de las trayectorias y órbitas electrónicas —, así como el rescate de la causalidad, el determinismo y la localidad, temas todos ellos que han sido materia de 80 años de inacabadas discusiones. Éstos y otros problemas similares son, sin embargo, temas que hemos dejado intencionalmente de lado en el presente trabajo en un esfuerzo por mantener su carácter rigurosamente físico.²⁶

Más allá de las muchas interrogantes pendientes, una conclusión emerge clara de lo anterior. En la existencia de una teoría como la EDEL, que exhibe a la mecánica cuántica como la descripción parcial de un intrincado proceso físico subyacente, debemos ver no sólo un conjunto de consideraciones que precisan, limitan, acotan y a la vez enriquecen el formalismo cuántico, sino sobre todo, una guía hacia nuevas y más profundas perspectivas físicas, hoy por hoy enteramente abiertas a la investigación.

²⁶Un intento incipiente de esta investigación filosófica se encuentra en la ref. [109].

Apéndice A

Espectro del oscilador armónico a partir de las frecuencias de resonancia

En este apéndice construimos el espectro del oscilador armónico unidimensional (ec. (1.70)) directamente a partir de la determinación de las frecuencias de resonancia, y construimos el desarrollo de $x_\alpha(t)$ en el estado estacionario α .

Para un oscilador armónico de frecuencia ω_0 tenemos $f = -m\omega_0^2x$ y consecuentemente, en un estado dado α , se cumple que

$$f_\alpha = -m\omega_0^2x_\alpha. \quad (\text{A.1})$$

La ec. (2.38) adquiere entonces la forma

$$\omega_{\alpha\beta}^2 \approx -\frac{\tilde{f}_{\alpha\beta}}{m\tilde{x}_{\alpha\beta}} = \omega_0^2, \quad (\text{A.2})$$

cuyas soluciones están dadas por

$$\omega_{\alpha\pm} \equiv \pm\omega_0. \quad (\text{A.3})$$

Al haber únicamente dos soluciones existen sólo dos frecuencias de resonancia para el estado α , las cuales hemos asociado a índices β que por el momento llamamos + y -.

Lo anterior significa que, estando en el estado (cualquiera) α , el sistema sólo puede resonar a una de dos frecuencias: $\omega_{\alpha+}$ o $\omega_{\alpha-}$. Como se discute en la subsección

2.6.2 dichas resonancias están asociadas a transiciones hacia nuevos estados, de tal forma que $\omega_{\alpha+}$ y $\omega_{\alpha-}$ definen, respectivamente y a través de la relación (2.135), dos nuevos estados estacionarios que denotaremos como¹

$$\begin{aligned} + &= (\alpha - 1), \\ - &= (\alpha + 1). \end{aligned} \tag{A.4}$$

Con esto reescribimos (A.3) en la forma

$$\omega_{\alpha, \alpha-1} = \omega_0, \tag{A.5a}$$

$$\omega_{\alpha, \alpha+1} = -\omega_0, \tag{A.5b}$$

de modo que la ec. (2.135) conduce a

$$\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}_{(\alpha-1)} + \hbar\omega_{\alpha, \alpha-1} = \mathcal{E}_{(\alpha-1)} + \hbar\omega_0, \tag{A.6a}$$

$$\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}_{(\alpha+1)} + \hbar\omega_{\alpha, \alpha+1} = \mathcal{E}_{(\alpha+1)} - \hbar\omega_0. \tag{A.6b}$$

Como estas ecuaciones se cumplen para toda α , en particular son válidas para el estado $(\alpha - 1)$, el cual tiene asociada la *misma* pareja de frecuencias de resonancia (ω_0 y $-\omega_0$) en virtud de que éstas son independientes del estado específico. Así, reescribimos la ec. (A.6a) haciendo $\alpha \rightarrow (\alpha - 1)$ y obtenemos

$$\mathcal{E}_{(\alpha-1)} = \mathcal{E}_{(\alpha-2)} + \hbar\omega_0, \tag{A.7}$$

donde $(\alpha - 2)$ es el nuevo estado, con $\mathcal{E}_{(\alpha-2)} < \mathcal{E}_{(\alpha-1)}$, definido por $(\alpha - 1)$ a través de la frecuencia ω_0 . Al sustituir (A.7) en la ec. (A.6a) se encuentra que

$$\mathcal{E}_\alpha = 2\hbar\omega_0 + \mathcal{E}_{(\alpha-2)}. \tag{A.8}$$

Continuando con este proceso iterativo podemos escribir \mathcal{E}_α en términos del estado $(\alpha - m)$ en la forma

$$\mathcal{E}_\alpha = m\hbar\omega_0 + \mathcal{E}_{(\alpha-m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \tag{A.9}$$

donde m denota el número de transiciones requeridas para alcanzar el estado $(\alpha - m)$

¹Si bien la notación más natural sugiere escribir el estado asociado a $\omega_{\alpha+}$ como $+ = (\alpha + 1)$ (y el estado asociado a $\omega_{\alpha-}$ como $- = (\alpha - 1)$) optamos por la notación inversa para destacar que, como se sigue de la ec. (2.135), para frecuencias positivas/negativas ($\omega_{\alpha+}/\omega_{\alpha-}$) el estado $(\alpha - 1)/(\alpha + 1)$ posee una energía *menor/mayor* que \mathcal{E}_α .

a partir del estado α . Ahora bien, como $\mathcal{E}_{(\alpha-m)} < \mathcal{E}_\alpha$ y la energía está acotada por abajo por la energía de punto cero \mathcal{E}_0 , el proceso iterativo que hemos seguido es finito y debe terminar (una vez que se alcance la energía \mathcal{E}_0) después de un cierto número de pasos que claramente depende del estado α original. Llamando n a dicho número encontramos que

$$\mathcal{E}_{\alpha_n} = n\hbar\omega_0 + \mathcal{E}_0, \quad (\text{A.10})$$

lo que nos permite cambiar la notación y hacer $\alpha \rightarrow n$, obteniendo así el espectro del oscilador armónico unidimensional, ec. (1.70):

$$\mathcal{E}_n = n\hbar\omega_0 + \mathcal{E}_0. \quad (\text{A.11})$$

Se sigue de aquí que las frecuencias relevantes están dadas por las armónicas de las frecuencias resonantes,

$$\omega_{nm} = \frac{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m}{\hbar} = \omega_0(n - m), \quad (\text{A.12})$$

y que los diferentes índices α y β son elementos del conjunto $\{s = 0, 1, 2, \dots\}$. Con esta nueva notación, el desarrollo de $x(t)$ del oscilador cuando éste se halla en el estado $\alpha = n$ está dado por

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \sum_m \tilde{x}_{nm} a_{nm} e^{i\omega_{nm}t} \\ &= \tilde{x}_{n,n-1} a_{n,n-1} e^{i\omega_0 t} + \tilde{x}_{n,n+1} a_{n,n+1} e^{-i\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

donde para escribir la última igualdad hicimos $\tilde{x}_{nm} \sim \delta_{m,n\pm 1}$, como se sigue del hecho de que las frecuencias de resonancia $\omega_{n,n\pm 1} = \mp\omega_0$ son precisamente las que corresponden a las contribuciones importantes de $x_n(t)$.

El resto de frecuencias relevantes aparecen en los desarrollos de las diferentes variables dinámicas que pueden construirse como potencias de x (o de p). Por ejemplo, para $\tilde{x}_{nm}^2(t)$ se tiene, usando la ec. (2.88) y la regla de la cadena (2.76),

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{nm}^2(t) &= \sum_l \tilde{x}_{nl} \tilde{x}_{lm} e^{i(\omega_{nl} + \omega_{lm})t} \\ &= (\tilde{x}_{n,n-1} \tilde{x}_{n-1,m} + \tilde{x}_{n,n+1} \tilde{x}_{n+1,m}) e^{i\omega_{nm}t}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

donde de nuevo hemos empleado el resultado $\tilde{x}_{nl} \sim \delta_{l,n\pm 1}$. Aplicándolo nuevamente pero ahora sobre los elementos $\tilde{x}_{n-1,m}$ y $\tilde{x}_{n+1,m}$ de esta última expresión, encontramos

que los únicos términos que contribuyen de manera importante a la suma (A.14) son

$$\begin{aligned}
\widetilde{x^2}_{nn} &= \widetilde{x}_{n,n-1}\widetilde{x}_{n-1,n} + \widetilde{x}_{n,n+1}\widetilde{x}_{n+1,n}, & (A.15) \\
\widetilde{x^2}_{n,n-2}(t) &= \widetilde{x}_{n,n-1}\widetilde{x}_{n-1,n-2}e^{i\omega_{n,n-2}t} = \widetilde{x^2}_{n,n-2}e^{i2\omega_0t}, \\
\widetilde{x^2}_{n,n+2}(t) &= \widetilde{x}_{n,n+1}\widetilde{x}_{n+1,n+2}e^{i\omega_{n,n+2}t} = \widetilde{x^2}_{n,n+2}e^{-i2\omega_0t},
\end{aligned}$$

resultado que muestra que las frecuencias $\pm 2\omega_0$ son las frecuencias de oscilación de $(x^2)_n$. La generalización de este cálculo a otras potencias de x deja ver que los desarrollos correspondientes oscilan con una (o varias) de las frecuencias relevantes (A.12).

Apéndice B

Determinación de $(x^2)_\alpha$. La regla de la cadena

En el presente apéndice se exploran las diversas posibilidades para construir la variable $(x^2)_\alpha$ apropiada para satisfacer el principio ergódico, permitiendo que sea la propia teoría la que determine la forma explícita de dicha cantidad.

De acuerdo con lo que se explicó en la subsección 2.4.1, para construir $(x^2)_\alpha$ partiendo de la estructura de x^2 debemos introducir un índice extra en cada uno de los términos $X_{\beta'}$ y $X_{\beta''}$ que aparecen en la expresión (2.73). Claramente uno de los índices que deben introducirse es el índice libre α ; llamando δ al índice restante podemos escribir entonces $[X_{\beta'}X_{\beta''}]_{\alpha,\delta}$ para referirnos al término $X_{\beta'}X_{\beta''}$ cuando éste ya ha sido provisto de los índices faltantes. Tendremos así que la transición $x^2 \rightarrow (x^2)_\alpha$ puede escribirse como

$$x^2 \rightarrow (x^2)_\alpha = \sum_{\beta'} \widetilde{x^2}_{\alpha\beta'} a_{\alpha\beta'} e^{i\omega_{\alpha\beta'} t} = \sum_{\beta'} \left(\sum_{\beta''} [X_{\beta'}X_{\beta''}]_{\alpha,\delta} \right), \quad (\text{B.1})$$

donde hemos empleado las ecs. (2.68) y (2.73).

Cada uno de los sumandos provenientes de una β' dada en la ec. (B.1) representa la contribución a $(x^2)_\alpha$ asociada a la frecuencia correspondiente a esa β' particular. Las respectivas contribuciones a cada lado de la segunda igualdad en (B.1) son entonces iguales (en plena consistencia con lo explicado abajo de la ecuación (2.32)), lo que nos conduce a

$$\widetilde{x^2}_{\alpha\beta'} a_{\alpha\beta'} e^{i\omega_{\alpha\beta'} t} = \sum_{\beta''} [X_{\beta'}(t)X_{\beta''}(t)]_{\alpha,\delta}, \quad (\text{B.2})$$

expresión que podemos reescribir en la forma

$$\widetilde{x}_{\alpha\beta'}^2 = \sum_{\beta''} \frac{[X_{\beta'}(t)X_{\beta''}(t)]_{\alpha,\delta}}{a_{\alpha\beta'}} e^{-i\omega_{\alpha\beta'}t}. \quad (\text{B.3})$$

Ahora bien, la condición ergódica implica, en particular, que la amplitud $\widetilde{x}_{\alpha\beta'}^2$ no depende de la realización del campo, de manera que el lado derecho de la ecuación (B.3) debe ser una función no estocástica, es decir, independiente de las variables a ; más aún, debe ser independiente de t ya que $\widetilde{x}_{\alpha\beta'}^2$ se mantiene constante en el tiempo. Como estas demandas deben satisfacerse para todo sistema e independientemente del índice β' , consideramos que *para cada* β'' el lado derecho de (B.3) es independiente de la realización del campo así como de t . En lo que sigue procederemos a determinar la forma explícita del término $[X_{\beta'}X_{\beta''}]_{\alpha,\delta}$ analizando detalladamente todos los posibles ordenamientos de cada nuevo índice (α y δ) introducido en $X_{\beta'}$ y $X_{\beta''}$ para determinar cuáles son consistentes con los requerimientos mencionados.

Supongamos primero que el índice δ coincide con α . Existen entonces tres posibilidades para el término $[X_{\beta'}X_{\beta''}]_{\alpha,\alpha}$:^{1,2}

$$X_{\alpha\beta'}X_{\beta''\alpha}, \quad (\text{B.4a})$$

$$X_{\beta'\alpha}X_{\alpha\beta''}, \quad (\text{B.4b})$$

$$X_{\beta'\alpha}X_{\beta''\alpha}. \quad (\text{B.4c})$$

La dependencia estocástica de cada uno de estos productos está contenida en las a 's correspondientes según lo indica la ecuación (2.71), de tal forma que cada sumando de (B.3) posee un factor estocástico dado, en cada uno de los respectivos casos (B.4), por

$$\frac{a_{\alpha\beta'}a_{\beta''\alpha}}{a_{\alpha\beta'}}, \quad (\text{B.5a})$$

$$\frac{a_{\beta'\alpha}a_{\alpha\beta''}}{a_{\alpha\beta'}}, \quad (\text{B.5b})$$

$$\frac{a_{\beta'\alpha}a_{\beta''\alpha}}{a_{\alpha\beta'}}. \quad (\text{B.5c})$$

El primer caso se reduce a $a_{\beta''\alpha}$, es decir, a una variable que para toda $\beta'' \neq$

¹El caso $(X_{\beta'}X_{\beta''})_{\alpha,\alpha} = X_{\alpha\beta'}X_{\alpha\beta''}$ no lo consideramos aquí porque es equivalente a hacer $(x^2)_{\alpha} = (x_{\alpha})^2$ posibilidad que, como se vió al inicio de la sección 2.4, debe ser excluída.

²Nótese que al escribir los diferentes casos (B.4) estamos permitiendo, por ser ello lo más general, que la posición de los índices *no* es indistinta.

α es una cantidad estocástica;³ así, la sustitución (B.4a) debe descartarse por ser inconsistente con el principio ergódico. Una situación análoga ocurre si tomamos $\beta' = \alpha$ en las expresiones (B.5b) y (B.5c), ya que las cantidades resultantes ($a_{\alpha\beta''}$ y $a_{\beta''\alpha}$ respectivamente) son de nuevo variables estocásticas. Con este resultado quedan eliminados también los casos (B.4b) y (B.4c), de donde concluimos que el índice δ no puede ser α .

De acuerdo con la ecuación (B.2) existen dos posibilidades más para el índice δ : que éste sea igual a β' o bien a β'' (índice mudo de la suma). El primer caso puede estudiarse en forma análoga a como se ha hecho arriba y queda descartado por argumentos similares. Ello nos conduce a tomar $\delta = \beta''$, lo que arroja los siguientes seis posibles candidatos para el producto $[X_{\beta'} X_{\beta''}]_{\alpha, \beta''}$:

$$X_{\alpha\beta'} X_{\beta''\beta''}, \quad (\text{B.6a})$$

$$X_{\beta'\alpha} X_{\beta''\beta''}, \quad (\text{B.6b})$$

$$X_{\beta'\beta''} X_{\beta''\alpha}, \quad (\text{B.6c})$$

$$X_{\beta'\beta''} X_{\alpha\beta''}, \quad (\text{B.6d})$$

$$X_{\beta''\beta'} X_{\beta''\alpha}, \quad (\text{B.6e})$$

$$X_{\beta''\beta'} X_{\alpha\beta''}. \quad (\text{B.6f})$$

La dependencia estocástica resultante de los respectivos sumandos de (B.3) está dada por

$$\frac{a_{\alpha\beta'} a_{\beta''\beta''}}{a_{\alpha\beta'}}, \quad (\text{B.7a})$$

$$\frac{a_{\beta'\alpha} a_{\beta''\beta''}}{a_{\alpha\beta'}}, \quad (\text{B.7b})$$

$$\frac{a_{\beta'\beta''} a_{\beta''\alpha}}{a_{\alpha\beta'}}, \quad (\text{B.7c})$$

$$\frac{a_{\beta'\beta''} a_{\alpha\beta''}}{a_{\alpha\beta'}}, \quad (\text{B.7d})$$

$$\frac{a_{\beta''\beta'} a_{\beta''\alpha}}{a_{\alpha\beta'}}, \quad (\text{B.7e})$$

$$\frac{a_{\beta''\beta'} a_{\alpha\beta''}}{a_{\alpha\beta'}}. \quad (\text{B.7f})$$

³Como se observa de la ec. (2.60a), la variable $a_{\beta''\alpha}$ con $\beta'' = \alpha$ es una cantidad no fluctuante y por ende independiente de la realización del campo.

Consideremos primero la expresión (B.6a) sustituyéndola en la ec. (B.1),

$$(x^2)_\alpha = \sum_{\beta', \beta''} X_{\alpha\beta'} X_{\beta''\beta''} = \left(\sum_{\beta''} X_{\beta''\beta''} \right) \cdot \sum_{\beta'} X_{\alpha\beta'}. \quad (\text{B.8})$$

Dado que la dependencia temporal del factor $X_{\alpha\beta'} X_{\beta''\beta''} e^{-i\omega_{\alpha\beta'} t}$ debe ser nula (de acuerdo con lo dicho abajo de la ec. (B.3)) entonces el producto $X_{\alpha\beta'} X_{\beta''\beta''}$ debe oscilar con una frecuencia que depende de α y β' pero es independiente de β'' . Concluimos de aquí que $X_{\beta''\beta''}$ no depende del tiempo, de modo que la suma entre paréntesis en (B.8) es un número, el mismo para todo t . En ese caso la ec. (B.8) conduce a

$$(x^2)_\alpha \sim x_\alpha(t). \quad (\text{B.9})$$

Es decir, si recurrimos al producto (B.6a) la expresión para x^2 resulta ser proporcional a x , y como este resultado no es válido en general debemos renunciar a la sustitución (B.6a).

Ahora analizamos el caso (B.6b), que conduce a una expresión similar a (B.8)

$$(x^2)_\alpha = \left(\sum_{\beta''} X_{\beta''\beta''} \right) \cdot \sum_{\beta'} X_{\beta'\alpha} \sim \sum_{\beta'} X_{\beta'\alpha}. \quad (\text{B.10})$$

Extrayendo de la última suma el término correspondiente a $\beta' = \alpha$ y recurriendo a las ecs. (2.42) y (2.57), vemos que la ec. (B.10) implica que la contribución no oscilatoria de $(x^2)_\alpha$, es decir, $\overline{(x^2)_\alpha}^t$, es proporcional a $\overline{(x)_\alpha}^t$. Como este resultado no puede satisfacerse en forma general concluimos que los casos en los que ambos índices β'' aparecen juntos en un mismo término (ecs. (B.7a) y (B.7b)) deben ser descartados.

Estudiaremos ahora la sustitución (B.6c). Si ésta ha de ser aceptable entonces (B.7c) debe ser una cantidad no estocástica para toda β' y β'' . En particular, para $\beta' = \alpha$ la expresión (B.7c) implica que el producto de dos variables a cuyos índices están intercambiados,

$$a_{\alpha\beta''} a_{\beta''\alpha}, \quad (\text{B.11})$$

no depende de la realización, y en consecuencia que sus respectivas fases (aleatorias) cumplen la condición (véase la ec. (2.60a))

$$\varphi_{\alpha\beta''} = -\varphi_{\beta''\alpha} \quad \forall \beta''. \quad (\text{B.12})$$

Por otro lado, haciendo $\beta'' = \alpha$, la expresión (B.7c) conduce a que es el cociente

$$\frac{a_{\beta'\alpha}}{a_{\alpha\beta'}} \quad (\text{B.13})$$

el que no depende de la realización, de modo que en este caso las fases satisfacen

$$\varphi_{\alpha\beta'} = \varphi_{\beta'\alpha} \quad \forall \beta'', \quad (\text{B.14})$$

en contradicción con (B.12). Esto nos obliga a descartar la posibilidad (B.6c).

Nos enfocaremos ahora en la expresión (B.7d), la cual, para $\beta' = \alpha$ se reduce a $(a_{\alpha\beta''})^2$, cantidad que en general (para toda $\beta'' \neq \alpha$) es estocástica. La misma condición pero con sus índices intercambiados se obtiene si tomamos $\beta' = \alpha$ en la expresión (B.7e). Así, ninguna de las posibilidades (B.6d) y (B.6e) es consistente con las demandas que se siguen de la ergodicidad y por lo tanto ambas deben ser excluidas.

Finalmente nos abocamos a estudiar el caso (B.7f), que corresponde a considerar el producto (B.6f). De acuerdo con lo que se dijo al inicio del apéndice el término (B.7f) debe ser independiente de la realización, y por lo tanto, siendo todas las variables que ahí aparecen cantidades fluctuantes, debe cumplirse que

$$a_{\alpha\beta''}a_{\beta''\beta'} \sim a_{\alpha\beta'} \quad \forall (\beta', \beta''), \quad (\text{B.15})$$

donde el factor de proporcionalidad es una constante no estocástica que sin pérdida de generalidad podemos tomar como la unidad. La condición resultante,

$$a_{\alpha\beta''}a_{\beta''\beta'} = a_{\alpha\beta'}, \quad (\text{B.16})$$

no conduce a inconsistencias como las que ya hemos visto y puede en principio ser satisfecha. Así, debemos considerar que el producto (B.7f), junto con la condición (B.16), es precisamente la solución que impone la teoría para cumplir con los requerimientos ergódicos mencionados abajo de la ec. (B.3), toda vez que el resto de posibilidades ya han sido descartadas. Sustituyendo entonces el producto (B.6f) en la ec. (B.1) obtenemos la expresión apropiada para $(x^2)_\alpha$:

$$(x^2)_\alpha = \sum_{\beta'} \widetilde{x^2}_{\alpha\beta'} a_{\alpha\beta'} e^{i\omega_{\alpha\beta'} t} = \sum_{\beta', \beta''} X_{\alpha\beta''} X_{\beta''\beta'}. \quad (\text{B.17})$$

Por otro lado, y de acuerdo con lo que se explicó inmediatamente después de la ec. (B.3), la dependencia temporal del término $X_{\alpha\beta''} X_{\beta''\beta'} e^{-i\omega_{\alpha\beta'} t}$ debe anu-

larse. Como se sigue de la expresión (2.71) el factor temporal de $X_{\alpha\beta}$ es $e^{i\omega_{\alpha\beta}t}$, y en consecuencia el requerimiento anterior conduce a la siguiente condición sobre las frecuencias:

$$\omega_{\alpha\beta''} + \omega_{\beta''\beta'} = \omega_{\alpha\beta'}. \quad (\text{B.18})$$

Finalmente, y recordando lo dicho en la nota 2 de este apéndice, debemos insistir en que a lo largo de las derivaciones hemos permitido que las posiciones de los índices jueguen un papel importante, dejando que sea la teoría misma la que determine la validez de semejante hipótesis. El resultado que hemos obtenido muestra que en efecto un mismo índice puede ocupar tanto el segundo como el primer sitio (véase la posición de β'' en la expresión (B.6f)), lo que nos permite reescribir las expresiones (B.15) y (B.18) en la forma general

$$a_{\gamma\delta}a_{\delta\kappa} = a_{\gamma\kappa}, \quad (\text{B.19a})$$

$$\omega_{\gamma\delta} + \omega_{\delta\kappa} = \omega_{\gamma\kappa}, \quad (\text{B.19b})$$

donde cada uno de los índices γ , δ y κ puede tomar los valores α o β (primer y segundo índices en los desarrollos del tipo (2.40), respectivamente). Este resultado muestra que ambos tipos de índice deben tratarse en forma equivalente y por lo tanto que ambos poseen el mismo sentido.⁴

⁴Al respecto, véase la discusión al final de la subsección 2.4.2.

Apéndice C

Derivación alterna del conmutador $[\hat{x}, \hat{p}]$

El objetivo de este apéndice es mostrar una derivación alterna del resultado $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\mathbb{I}$. A diferencia del presentado en el capítulo 2, el procedimiento que aquí se sigue descansa fuertemente en el hecho de que el sistema mecánico responde en forma resonante al campo de fondo.

En virtud de que contamos con la ec. (2.123) que establece la forma diagonal del conmutador, nos abocaremos a calcular los elementos diagonales $C_\alpha = C_{\alpha\alpha}$. Para ello hacemos $\alpha = \beta$ en la ecuación (2.119) (con $\tilde{p}_{\alpha\gamma} = im\omega_{\alpha\gamma}\tilde{x}_{\alpha\gamma}$) y obtenemos

$$C_\alpha = [\hat{x}, \hat{p}]_{\alpha\alpha} = i\frac{2e^2}{m} \sum_\gamma \frac{\omega_{\gamma\alpha}}{|\Delta_{\gamma\alpha}|^2} \tilde{E}_{\gamma\alpha} \tilde{E}_{\gamma\alpha}^*, \quad (\text{C.1})$$

donde hemos empleado la ecuación (2.37a). Es posible pasar de esta suma discreta a una integral haciendo $\omega_{\gamma\alpha} \rightarrow \omega$ y $\tilde{E}_{\gamma\alpha} \tilde{E}_{\gamma\alpha}^* \rightarrow \frac{4\pi}{3}\rho(\omega)$, con $\rho(\omega)$ la densidad espectral de energía del campo.¹ Ello nos conduce a

$$[\hat{x}, \hat{p}]_{\alpha\alpha} = i\frac{8\pi e^2}{3m} \int \frac{\omega}{|\Delta(\omega)|^2} \rho(\omega) d\omega, \quad (\text{C.2})$$

con

$$\Delta(\omega) = \omega^2 - i\tau\omega^3 + \tilde{g}(\omega), \quad \tilde{g}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{m\tilde{x}(\omega)}. \quad (\text{C.3})$$

¹La transición $\tilde{E}(\omega_{\gamma\alpha})\tilde{E}^*(\omega_{\gamma\alpha}) \rightarrow \frac{4\pi}{3}\rho(\omega)$ se obtiene notando que el término $\tilde{E}(\omega_{\gamma\alpha})\tilde{E}^*(\omega_{\gamma\alpha})$ no es sino la contribución de una de las componentes espaciales del campo a la densidad espectral de energía cuando el campo se expresa en términos de un desarrollo discreto, contribución que empleando el desarrollo continuo es precisamente $\frac{4\pi}{3}\rho(\omega)$. De esta forma la sustitución referida incluye ya los factores involucrados en la transición de la suma a la integral.

Como ya se explicó en el cuerpo de la tesis (véase la discusión que le sigue a la ec. (2.118)), el carácter universal del conmutador (en la aproximación no radiativa) hace de C_α una cantidad independiente del sistema específico, y por lo tanto de cualquier campo presente que se superponga al campo de punto cero. Esto nos permite calcular la integral en (C.2) suponiendo que el único campo presente es el de vacío, sin perder generalidad por ello. Sustituyendo entonces la densidad espectral de energía del campo de punto cero, $\rho_0(\omega) = \hbar\omega^3/(2\pi^2c^3)$, en la ec. (C.2) obtenemos

$$[\hat{x}, \hat{p}]_{\alpha\alpha} = i\hbar \frac{2\tau}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega^4}{|\Delta(\omega)|^2} d\omega. \quad (\text{C.4})$$

La contribución más importante a la integral proviene de la frecuencia de resonancia que denotamos con ω_r , de modo que podemos aproximar la $\tilde{g}(\omega)$ que aparece en (C.3) por

$$\tilde{g}(\omega) \approx \tilde{g}(\omega_r) \approx -\omega_r^2. \quad (\text{C.5})$$

Haciendo el cambio de variable $z = \tau\omega$ obtenemos

$$[\hat{x}, \hat{p}]_{\alpha\alpha} = i\hbar \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^4}{z^6 + (z + z_r)^2(z - z_r)^2} dz. \quad (\text{C.6})$$

Definimos ahora $u = z - z_r$ y observamos que debido a la resonancia extremadamente angosta podemos despreocuparnos de z_r en todo punto excepto en la diferencia $z - z_r$ y extender la integral desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Llegamos así a

$$[\hat{x}, \hat{p}]_{\alpha\alpha} = i\hbar \frac{z_r^2}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{u^2 + (z_r^4/4)}, \quad \text{o bien} \quad [\hat{x}, \hat{p}]_{\alpha\alpha} = i\hbar. \quad (\text{C.7})$$

Este resultado, junto con la ec. (2.123), nos permite concluir que en la aproximación no radiativa

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\mathbb{I}, \quad (\text{C.8})$$

en coincidencia con la ec. (2.131). Una derivación similar a esta, aunque restringida a la partícula libre y realizada dentro del marco de la electrodinámica cuántica puede verse en la ref. [110].

Apéndice D

Determinación de las amplitudes \tilde{x}_{iAB} en el régimen no radiativo

El propósito de este apéndice es mostrar que las amplitudes \tilde{x}_{1AB} que aparecen en el desarrollo de $x_{1A}(t)$ (véase la ec. (3.27a)) en efecto se reducen a la ec. (3.29) en la aproximación no radiativa.

Partimos de la ecuación de movimiento

$$m_1\ddot{x}_{1A} = f_{1A} + m_1\tau_1\ddot{x}_{1A} + e_1E_{1A}^{\text{ef}}, \quad (\text{D.1})$$

que no es sino la ec. (3.6a) a la que se le ha agregado el índice A que denota el estado estacionario correspondiente. Usamos ahora las ecs. (3.27) (con $i = 1$) para reescribir la ec. (D.1) como

$$-\sum_B m_1\omega_{AB}^2\tilde{x}_{1AB}a_{AB}e^{i\omega_{AB}t} = \sum_B \left(\tilde{f}_{1AB} - im_1\tau_1\omega_{AB}^3\tilde{x}_{1AB} + e_1\tilde{E}_{1AB}^{\text{ef}} \right) a_{AB}e^{i\omega_{AB}t}, \quad (\text{D.2})$$

expresión que generaliza a la ec. (2.32) al caso de dos partículas. Demandamos ahora (al igual que se hizo con la ec. (2.32)) que la ecuación anterior se satisfaga término a término; es decir, separadamente para cada índice B , o bien para cada pareja (β, β') .¹ Obtenemos así la siguiente ecuación, análoga a (2.37a),

$$\tilde{x}_{1AB} = -\frac{e_1}{m_1} \frac{\tilde{E}_{1AB}^{\text{ef}}}{\Delta_{1AB}}, \quad (\text{D.3})$$

¹Semejante demanda equivale, como se explicó en el caso de una partícula, a exigir que exista un balance detallado a cada frecuencia relevante. En este caso se ha fijado la condición separadamente para las frecuencias correspondientes a cada una de las partículas ($\omega_{\alpha\beta}$ y $\omega_{\alpha'\beta'}$).

con

$$\Delta_{1AB} = \omega_{AB}^2 - i\tau_1\omega_{AB}^3 + \frac{\tilde{f}_{1AB}}{m_1\tilde{x}_{1AB}}. \quad (\text{D.4})$$

Por otro lado, podemos usar las ecs. (3.7), (3.15a) y (3.27a) (con $i = 2$) para escribir el campo efectivo $\tilde{E}_{1A}^{\text{ef}}$ en la forma

$$\tilde{E}_{1A}^{\text{ef}} = \sum_B \left(\tilde{E}_{\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'} + c_2\tilde{\hat{x}}_{2AB} \right) a_{AB} e^{i\omega_{AB}t}. \quad (\text{D.5})$$

Una comparación con la ec. (3.27b) muestra que

$$\tilde{E}_{1AB}^{\text{ef}} = \tilde{E}_{\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'} + c_2\tilde{\hat{x}}_{2AB} = \tilde{E}_{\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'} - ic_2\omega_{AB}^3\tilde{x}_{2AB}, \quad (\text{D.6})$$

donde en la segunda igualdad se usó el resultado

$$\tilde{\hat{x}}_{2AB} = -i\omega_{AB}^3\tilde{x}_{2AB}, \quad (\text{D.7})$$

que se desprende de la ec. (3.27a).

Ahora introducimos (D.6) en la ec. (D.3), obteniendo

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{1AB} &= -\frac{e_1}{m_1} \left(\frac{\tilde{E}_{\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'}}{\Delta_{1AB}} - ic_2\frac{\omega_{AB}^3\tilde{x}_{2AB}}{\Delta_{1AB}} \right) \\ &= -\frac{e_1}{m_1} \frac{\tilde{E}_{\alpha\beta}}{\Delta_{1AB}|_{\beta'=\alpha'}} \delta_{\alpha'\beta'} + i\tau_2 \frac{e_1 m_2 \omega_{AB}^3 \tilde{x}_{2AB}}{e_2 m_1 \Delta_{1AB}}, \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

donde en la última línea hemos hecho las sustituciones $c_2 = m_2\tau_2/e_2$ y $\Delta_{1AB} \rightarrow \Delta_{1AB}|_{\beta'=\alpha'}$ (la validez de esto último se justifica por la presencia de la $\delta_{\alpha'\beta'}$ en el primer término de la ec. (D.8)).

Como se vio en el capítulo 2, una vez que se ha alcanzado el régimen estacionario y ergódico los términos radiativos representan sólo correcciones al movimiento y las soluciones a orden cero en τ son las que conducen a los resultados cuánticos. Así pues, en lo que sigue investigaremos la forma de las amplitudes \tilde{x}_{1AB} de la ec. (D.8) en el límite no radiativo. Como en esta aproximación el acoplamiento entre las partículas desaparece, el término proporcional a τ_2 en la ec. (D.8) debe despreciarse, lo que nos lleva a escribir

$$\tilde{x}_{1AB} = -\frac{e_1}{m_1} \frac{\tilde{E}_{\alpha\beta}}{\Delta_{1AB}|_{\beta'=\alpha'}} \delta_{\alpha'\beta'}, \quad (\text{D.9})$$

donde, como se sigue de las ecs. (3.18), (D.4) y $\omega_{\alpha'\alpha'} = 0$, $\Delta_{1AB}|_{\beta'=\alpha'}$ está dado por

$$\Delta_{1AB}|_{\beta'=\alpha'} = \omega_{\alpha\beta}^2 - i\tau_1\omega_{\alpha\beta}^3 + \left(\frac{\tilde{f}_{1AB}}{m_1\tilde{x}_{1AB}} \right) \Big|_{\beta'=\alpha'}. \quad (\text{D.10})$$

La ec. (D.9) muestra que las contribuciones importantes a \tilde{x}_{1AB} provienen de los polos de $\Delta_{1AB}|_{\beta'=\alpha'}$, esto es, de las frecuencias que satisfacen la ecuación (aproximada)

$$\omega_{\alpha\beta}^2 \approx - \left(\frac{\tilde{f}_{1AB}}{m_1\tilde{x}_{1AB}} \right) \Big|_{\beta'=\alpha'}. \quad (\text{D.11})$$

Ahora bien, las frecuencias resonantes de la partícula localizada en x_1 son solución de la ecuación

$$\omega_{\alpha\beta}^2 \approx - \frac{\tilde{f}_{1\alpha\beta}}{m_1\tilde{x}_{1\alpha\beta}}, \quad (\text{D.12})$$

con $\tilde{x}_{1\alpha\beta}$ y $\tilde{f}_{1\alpha\beta}$ las amplitudes correspondientes al problema de una sola partícula que aparecen en las ecuaciones (2.40). Por lo tanto, para las contribuciones principales (no ruidosas) de \tilde{x}_{1AB} podemos aproximar el último término de la ec. (D.11) por $\tilde{f}_{1\alpha\beta}/m_1\tilde{x}_{1\alpha\beta}$, de manera que

$$\Delta_{1AB}|_{\beta'=\alpha'} = \Delta_{1\alpha\beta}, \quad (\text{D.13})$$

y consecuentemente la ec. (D.9) se convierte en

$$\tilde{x}_{1AB} = - \frac{e_1}{m_1} \frac{\tilde{E}_{\alpha\beta}}{\Delta_{1\alpha\beta}} \delta_{\alpha'\beta'} = \tilde{x}_{1\alpha\beta} \delta_{\alpha'\beta'}, \quad (\text{D.14})$$

donde hemos empleado las ecs. (2.37).

Nótese que aunque hemos despreciado los términos que contienen τ_2 (es decir, hemos desacoplado las soluciones) el límite radiativo no ha sido aún tomado del todo. De hecho, la amplitud $\tilde{x}_{1\alpha\beta}$ que aparece en la ec. (D.14) es la que corresponde al problema de una partícula *antes* de tomar el límite no radiativo. Así, para obtener $\tilde{x}_{1AB}^{(0)}$ debemos reemplazar $\tilde{x}_{1\alpha\beta}$ en la ec. (D.14) por la correspondiente amplitud en el régimen no radiativo, llegando entonces a la ec. (3.29). No obstante, por simplicidad en la escritura hemos evitado emplear una notación diferente para denotar $\tilde{x}_{1\alpha\beta}$ antes y después de efectuar la aproximación no radiativa, entendiendo que la distinción debe ser clara a partir del contexto.

Referencias

1. A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. **47** (1935).
2. E. Schrödinger, Naturwiss **23**, 807, 823, 844 (1935). Traducción al inglés en: J. A. Wheeler y W.H. Zurek, (comps.), *Quantum theory and measurement*, Princeton University Press, Princeton (1983).
3. J. S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, Cambridge University Press, U. K. (1987).
4. M. Bell, K. Gottfried y M. Veltman, *John S. Bell on The Foundations of Quantum Mechanics*, World Scientific, Singapur (2001).
5. F. Mintert, A. R. R. Carvalho, M. Kus, y A. Buchleitner, *Measures and dynamics of entangled states*, Phys. Rep. **415**, 207 (2005).
6. L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh y V. Vedral, *Entanglement in many-body systems*, Rev. Mod. Phys. **80**, 517, (2008).
7. R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki y K. Horodecki, *Quantum entanglement*, Rev. Mod. Phys. **81**, 865, (2009).
8. J. Audretsch, *Entangled systems. New directions in quantum physics*, Wiley-VCH, Weinheim (2007).
9. M. A. Nielsen e I. Chuang, *Quantum computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, U. K. (2000).
10. W. Nernst, *Über einen Versuch von quantentheoretischen Betrachtungen zur Annahme stetiger Energieänderungen zurückzukehren*, Verhandl. Deutsch., Phys. Ges. **18**, 83 (1916).
11. G. 't Hooft, *Quantum mechanics and determinism*, arXiv.org/abs/hep-th/0105105v1 (2001).
12. G. 't Hooft, *On the free-will postulate in quantum mechanics*, arXiv.org/abs/quant-ph/0701097v1 (2007).
13. L. Smolin, *The Trouble with Physics*, Houghton Mifflin, New York (2006).
14. D. Kennedy y C. Norman, *What Don't We Know?*, Science, **309**, 75 (2005).
15. C. Seife, *Do Deeper Principles Underlie Quantum Uncertainty and Nonlocality?*, Sci-

-
- ence, **309**, 98 (2005).
16. L. de la Peña y A. M. Cetto, *The Quantum Dice. An Introduction to Stochastic Electrodynamics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1996).
 17. P. W. Milonni, *The Quantum Vacuum*, Academic Press, New York (1994).
 18. T. S. Kuhn, *Black-body Theory and the Quantum Discontinuity, 1894-1912*, Oxford University Press, New York (1978).
 19. F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, McGraw-Hill (1965).
 20. T. H. Boyer, *Thermodynamics of the harmonic oscillator: Wien's displacement law and the Planck spectrum*, Am. J. Phys. **71**, 866 (2003).
 21. L. de la Peña, A. Valdés-Hernández y A. M. Cetto, *Statistical consequences of the zero-point energy of the harmonic oscillator*, Am. J. Phys. **76** (10), 947 (2008).
 22. L. de la Peña, A. Valdés-Hernández y A. M. Cetto, *La ley de Planck, notable e inevitable consecuencia del campo de punto cero*, en: Leopoldo García-Colín, José Luis del Río y Héctor Uriarte (coordinadores), *Max Planck. A ciento cincuenta años de su nacimiento*, El Colegio Nacional, México (2010).
 23. A. Valdés-Hernández, L. de la Peña y A. M. Cetto, *Wien's law with zero-point energy implies Planck's law unequivocally*, en: A. Macías y L. Dagdug (eds.), *New trends in statistical physics: Festschrift in honor of Leopoldo García-Colín's 80th birthday*, World Scientific, Singapur (2010).
 24. T. W. Marshall, *Random electrodynamics*, Proc. Roy. Soc. A **276**, 475 (1963).
 25. E. Santos, *Is there an electromagnetic background radiation underlying the quantum phenomena?*, An. Real Soc. Esp. Fís. Quím. **LXIV**, 317 (1968).
 26. T. H. Boyer, *Derivation of the blackbody radiation spectrum without quantum assumptions*, Phys. Rev. **182**, 1374 (1969).
 27. T. H. Boyer, *Thermal effects of acceleration through random classical radiation*, Phys. Rev. D **21**, 2137 (1980).
 28. E. W. Montroll y M. F. Shlesinger, *Maximum entropy formalism, fractals, scaling phenomena, and 1/f noise: A tale of tails*, J. Stat. Phys. **32**, 209 (1983).
 29. L. E. Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics*, University of Texas Press, Austin (1980).
 30. L. Landau y E. Lifshitz, *Física Estadística*, Reverté, Barcelona (1988).
 31. W. Greiner, L. Neise y H. Stöcker, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1995).
 32. R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*, Buitenworth-Heinemann, Oxford (1996).
 33. A. Einstein, *Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme*, Ann. d. Phys. **22**, 180 (1907). Traducción al inglés en: *The Collected Papers of Albert Einstein*, Vol. 2 *The Swiss Years: Writings, 1900-1909*. Suplemento de la traducción al inglés, traducido por Anna Beck, Princeton University Press (1989).

-
34. M. Planck, *Über eine Verbesserung der Wienschen Spektralgleichung*, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **2**, 202 (1900). Traducción al inglés en: *The Collected Papers of Albert Einstein* (véase la ref. [33]).
35. M. Planck, *Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum*, Ann. d. Phys. **4**, 553 (1901).
36. L. de la Peña y A. M. Cetto, *Planck's Law as a consequence of the zeropoint radiation field*, Rev. Mex. Fís. **48** Suppl. 1, 1 (2002).
37. A. Einstein, *Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems*, Phys. Z. **10**, 185 (1909). Traducción al inglés en: *The Collected Papers of Albert Einstein* (véase la ref. [33]).
38. V. Vedral, *Modern Foundations of Quantum Optics*, Imperial College Press, London (2005), cap. 3.
39. S. -I. Tomonaga, *Quantum Mechanics, Vol. 1: Old Quantum Theory*, North Holland, Amsterdam (1962). Apéndice VII.
40. Carta de Einstein dirigida a Conrad Habicht; Mayo 18 o 25 de 1905, en: Martin J. Klein, A. J. Kox y Robert Schulmann (eds.), *The Collected Papers of Albert Einstein, Vol 5, The Swiss Years, Correspondence, 1902–1914*, Princeton University Press, Princeton (1993), pp. 31–32. Traducido al inglés por Anna Beck en la traducción adjunta, pp. 19–20. Una discusión acerca de este punto puede verse en J. S. Ridgen, *Einstein's revolutionary paper*, <physicsworld.com/cws/article/print/21818>.
41. Y. Mizobuchi y Y. Ohtaké, *An experiment to throw more light on light*, Phys. Lett. A **168**, 1 (1992).
42. P. Ghose y D. Home, *The two-prism experiment and wave-particle duality of light*, Found. Phys. **26**, 943 (1996).
43. M. Planck, *Über die Begründung des Gesetzes der schwarzen Strahlung*, Ann. d. Phys. **37**, 642 (1912).
44. A. Einstein y O. Stern, Ann. der Physik **40**, 551 (1913). Traducción al inglés: *Some Arguments for the Assumption of Molecular Agitation at Absolute Zero*, en: *The Collected Papers of Albert Einstein*, Vol. 4, traducido por Anna Beck, Princeton University Press (1996). Otra traducción al inglés con amplias anotaciones es: S. Bergia, P. Lugli y N. Zamboni, Ann. Fond. L. de Broglie **5**, 39 (1980).
45. J. L. Jiménez, L. de la Peña y T. A. Brody, *Zero-point term in cavity radiation*, Am. J. Phys. **48**, 840 (1980).
46. E. Santos, *Comment on 'Presenting the Planck's relation $E = nh\nu$ '*, Am. J. Phys. **43**, 743 (1975).
47. O. Theimer, *Blackbody spectrum and the interpretation of the quantum theory*, Am. J. Phys. **44**, 183 (1976).
48. P. T. Landsberg, *Einstein and statistical thermodynamics. II. Oscillator quantisation*, Eur. J. Phys. **2**, 208 (1981).

-
49. L. de la Peña, *Introducción a la mecánica cuántica*, Fondo de Cultura Económica-UNAM, México (2006).
 50. W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, John Wiley & Sons, New York (1973), cap. 5.
 51. H. B. Callen, *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics* (2a ed.), John Wiley & Sons, New York (1985), cap. 17.
 52. G. R. Grimmett y D. R. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, Clarendon Press, Oxford (1983), cap. 4.
 53. A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, Boston (1991), cap. 6.
 54. Z. W. Birnbaum, *Introduction to probability and mathematical statistics*, Harper & Row/John Weatherhill, Japón (1961), cap. 5.
 55. D. Foata y A. Fuchs, *Calcul des probabilités*, Dunod (1998), cap. 15.
 56. R. P. Feynman, *Statistical mechanics. A set of lectures*, W. A. Benjamin, INC., Canadá (1972).
 57. T. H. Boyer, *Classical statistical thermodynamics and electromagnetic zero-point radiation*, Phys. Rev. **186**, 1304 (1969).
 58. D. C. Cole, *Simulation Results Related to Stochastic Electrodynamics*, en: G. Adenier, Yu. Khrennikov y Th. Nieuwenhuizen (comps.), *Quantum Theory: Reconsideration of Foundations-3*, AIP Conference Proceedings, **810**, 99 (2006).
 59. D. C. Cole y Y. Zou, *Quantum Mechanical Ground State of Hydrogen Obtained from Classical Electrodynamics*, Phys. Lett. A, **317** (1-2), 14 (2003). quant-ph/0307154.
 60. D. C. Cole y Y. Zou, *Analysis of orbital decay time for the classical hydrogen atom interacting with circularly polarized electromagnetic radiation*, Phys. Rev. E **69**, 016601 (2004).
 61. D. C. Cole y Y. Zou, *Simulation Study of Aspects of the Classical Hydrogen Atom Interacting with Electromagnetic Radiation: Circular Orbits*, J. Sci. Comput. **20**, 43 (2004).
 62. D. C. Cole y Y. Zou, *Simulation Study of Aspects of the Classical Hydrogen Atom Interacting with Electromagnetic Radiation: Elliptical Orbits*, J. Sci. Comput. **20**, 379 (2004).
 63. D. C. Cole y Y. Zou, *Perturbation Analysis and Simulation Study of the Effects of Phase on the Classical Hydrogen Atom Interacting with Circularly Polarized Electromagnetic Radiation*, J. Sci. Comput. **21**, 145 (2004).
 64. L de la Peña y A. M. Cetto, *Quantum Theory and Linear Stochastic Electrodynamics*, Found. Phys. **31**, 1703 (2001).
 65. L de la Peña y A. M. Cetto, *Contribution from stochastic electrodynamics to the understanding of quantum mechanics*, arXiv:quant-ph/0501011v2.

-
66. L. de la Peña y A. M. Cetto, *Recent Developments in Linear Stochastic Electrodynamics*, en: G. Adenier, Yu. Khrennikov y Th. Nieuwenhuizen, (comps.), *Quantum Theory: Reconsideration of Foundations-3*, AIP Conference Proceedings **810**, 131 (2006).
 67. L. de la Peña y A. M. Cetto, *On the ergodic behaviour of atomic systems under the action of the zero-point radiation field*, en: Th. Nieuwenhuizen, V. Špička, B. Maman, M. Jafar-Aghdami y Yu. Khrennikov (comps.), *Beyond the Quantum*, World Scientific, Singapur (2007).
 68. L. de la Peña, A. Valdés-Hernández y A. M. Cetto, *Quantum mechanics as an emergent property of ergodic systems embedded in the zero-point radiation field*, *Found. Phys.* **39**, 1240 (2009).
 69. E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, Nueva York (1961), cap. 8.
 70. L. de la Peña, A. Valdés-Hernández y A. M. Cetto, *Entanglement of particles as a result of their coupling through the common background zero-point radiation field*, *Phys. E* **42**, 308 (2010).
 71. L. Landau y E. Lifshitz, *The classical theory of fields*, Addison-Wesley, Cambridge, Mass. (1951).
 72. R. Blanco y E. Santos, *Coupled harmonic oscillators in stochastic electrodynamics*, *Lett. Nuovo Cim.* **25**, 360 (1979).
 73. G. Auletta, *Foundations and Interpretation of Quantum Mechanics*, World Scientific, Singapur (2000).
 74. M. Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York (1974).
 75. J. A. Wheeler y W. H. Zurek (eds.), *Quantum Theory and Measurement*, Princeton University Press, New Jersey (1983).
 76. T. Brody, *The Philosophy Behind Physics*, L. de la Peña y P. Hodgson (eds.), Springer-Verlag, Berlín (1993).
 77. A. Elitzur, S. Dolev y N. Kolenda (comps.), *Quo Vadis Quantum Mechanics?*, Springer, Berlín (2005).
 78. A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, (1995).
 79. R. Omnès, *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, New Jersey (1994).
 80. D. Home, *Conceptual Foundations of Quantum Physics. An Overview from Modern Perspectives*, Plenum Press, New York (1997).
 81. D. Wick, *The Infamous Boundary*, Copernicus, New York (1995).
 82. T. H. Boyer, *Random electrodynamics: The theory of classical electrodynamics with classical electromagnetic zero-point radiation*, *Phys. Rev. D* **11**, 790 (1975).
 83. A. Sommerfeld, *Thermodynamics and statistical mechanics. Lectures on theoretical*

-
- Physics*, vol. 5, New York Academic Press, New York (1956).
84. S. E. Rugh y H. Zinkernagel, *The quantum vacuum and the cosmological constant problem*, *Studies in History and Philosophy of Science Part B* **33** (4), 663 (2002).
 85. C. Roychoudhuri, A. F. Kracklauer y K. Creath (comps.), *The nature of light. What is a photon?*, CRC Press, Florida (2008).
 86. E. Santos, *Photons are fluctuations of a random (zeropoint) radiation filling the whole space*, en la ref. [85].
 87. E. Santos, *What is entanglement?*, quant-physics/0204020.
 88. T. W. Marshall y E. Santos, *Stochastic optics: A reaffirmation of the wave nature of light*, *Found. Phys.* **18**, 185 (1988).
 89. T. W. Marshall y E. Santos, *Semiclassical optics as an alternative to nonlocality*, *Recent Res. Devel. Optics* **2**, 683 (2002).
 90. D. Braun, *Creation of Entanglement by Interaction with a Common Heat Bath*, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 277901 (2002).
 91. M. S. Kim, J. Lee, D. Ahn y P. L. Knight, *Entanglement induced by a single-mode heat environment*, *Phys. Rev. A* **65**, 040101 (2002).
 92. L. Jakóbczyk, *Entangling two qubits by dissipation*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 6383 (2002).
 93. S. Schneider y G. J. Milburn, *Entanglement in the steady state of a collective-angular-momentum (Dicke) model*, *Phys. Rev. A* **65**, 042107 (2002).
 94. L. Jakóbczyk y A. Jamróz, *Entanglement and nonlocality versus spontaneous emission in two - atom systems*, *Phys. Lett. A* **318**, 318 (2003).
 95. F. Benatti, R. Floreanini y M. Piani, *Environment Induced Entanglement in Markovian Dissipative Dynamics*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 070402 (2003).
 96. R. Tanaś y Z. Ficek, *Entangling two atoms via spontaneous emission*, *J. Opt. B* **6**, S90 (2004).
 97. J. H. An, S. J. Wang y H. G. Luo, *Entanglement production and decoherence-free subspace of two single-mode cavities embedded in a common environment*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 3579 (2005).
 98. Z. Ficek y R. Tanaś, *Dark periods and revivals of entanglement in a two-qubit system*, *Phys. Rev. A* **74**, 024304 (2006).
 99. K. Lendi y A. J. van Wonderen, *Davies theory for reservoir-induced entanglement in a bipartite system*, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 279 (2007).
 100. M. Hor-Meyll, A. Auyuanet, C. V. S. Borges, A. Aragão, J. A. O. Huguenin, A. Z. Khoury y L. Davidovich, *Environment-induced entanglement with a single photon*, *Phys. Rev. A* **80**, 042327 (2009) .
 101. A. E. Allahverdyan, A. Khrennikov y Th. M. Nieuwenhuizen, *Brownian entanglement*, *Phys. Rev. A* **72**, 032102 (2005).

-
102. L. E. Ballentine, *The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics*, Rev. Mod. Phys. **42**, 358 (1970).
 103. L. E. Ballentine, *Quantum Mechanics*, Prentice Hall, New Jersey (1990), cap. 9.
 104. C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York (1977).
 105. A. Jáuregui y L. de la Peña, *The spin and the anomalous magnetic moment of the electron in stochastic electrodynamics*, Phys. Lett. A **86**, 280 (1981).
 106. L. de la Peña y A. Jáuregui, *The spin of the electron according to stochastic electrodynamics*, Found. Phys. **12**, 441 (1982).
 107. J. Avendaño y L. de la Peña, *Reordering of the ridge patterns of a stochastic electromagnetic field by diffraction due to an ideal slit*, Phys. Rev. E **72**, 066605 (2005).
 108. J. Avendaño y L. de la Peña, *Matter diffraction through a double slit obtained by numerical simulation using a diffracted random electromagnetic field*, Phys. E **42**, 313 (2010).
 109. F. Samaniego, *Aproximación a las consecuencias filosóficas de la Electrodinámica Estocástica Lineal: realismo y causalidad en la mecánica cuántica*, Facultad de Filosofía y Letras, UNAM (2006).
 110. P. W. Milonni, *Radiation reaction and the nonrelativistic theory of the electron*, Phys. Lett. A **82**, 225 (1981).