



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

PROBLEMAS INVERSOS DE DOS ESPECTROS PARA  
MATRICES DE JACOBI SEMI-INFINITAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

ROMEO PÉREZ ORTIZ



DIRECTOR DE TESIS:

Dr. LUIS OCTAVIO SILVA PEREYRA

2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno  
Romeo Pérez Ortiz  
56984299  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
401007176  
2 Datos del tutor

Dr. Luis Octavio Silva Pereyra

3. Datos del sinodal 1

Dr. Ricardo Alberto Weder Zaninovich

4. Datos del sinodal 2

Dr. Rafael René del Río Castillo

5. Datos del sinodal 3

Dra. María de los Ángeles Sandoval Romero

6. Datos del sinodal 4

Dr. Ricardo Berlanga Zubiaga

7. Datos del trabajo escrito  
Problemas inversos de dos espectros para matrices de Jacobi semi-infinitas  
122 p  
2010

## **AGRADECIMIENTOS**

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por ser uno de los espacios que brinda conocimientos a estudiantes, en su mayoría, de escasos recursos.

A la Facultad de Ciencias por haberme brindado la oportunidad de continuar con mi formación académica.

A mi asesor Dr. Luis Octavio Silva Pereyra por su valiosa conducción en la realización de mi tesis y por la enorme paciencia que me ha tenido.

Al Dr. Ricardo Alberto Weder Zaninovich por su puntual corrección y recomendación.

Al Dr. Rafael René del Río Castillo, por su apoyo en la preparación del examen profesional.

Al Dr. Ricardo Berlanga Zubiaga, por la revisión minuciosa de la tesis.

A la Dra. María de los Ángeles por sus importantes observaciones a la tesis.

## **DEDICATORIA**

Dedico esta investigación a las siguientes personas e instituciones:

Al Ing. Aquiles Córdova Morán por ser un hombre culto, sensible por los problemas que aquejan a la gente pobre y preocupado por la formación de hombres nuevos.

Al Dr. Abel Pérez Zamorano, hombre brillante y sensible que me ha sabido guiar en mi formación cultural.

Al Centro Mexicano de Estudios Económicos y Sociales (CEMEES), joven y prometedora institución. A sus integrantes les debo gran parte de mi preparación académica.

A mis padres y hermanos por la confianza, comprensión y apoyo en mis decisiones.

# Índice general

<b>I. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. Algunos aspectos de la teoría de funciones</b>	<b>15</b>
1.1. Conceptos básicos . . . . .	15
1.2. Funciones Herglotz . . . . .	19
<b>2. Teoría espectral en espacios de Hilbert</b>	<b>31</b>
2.1. Espacios de Hilbert . . . . .	31
2.2. Ortogonalidad . . . . .	34
2.3. Operadores lineales en espacios de Hilbert . . . . .	42
2.4. Operadores lineales acotados . . . . .	42
2.5. Funcionales lineales . . . . .	44
2.6. Gráfica de operadores lineales y operadores lineales cerrados . . . . .	48
2.7. Operador lineal adjunto . . . . .	50
2.8. Espectro de operadores lineales . . . . .	56
2.9. Operadores lineales simétricos . . . . .	61
2.10. Proyectores ortogonales . . . . .	63
2.11. Espectro de operadores compactos . . . . .	64
2.12. Teorema espectral . . . . .	67
2.13. Perturbación de operadores auto-adjuntos . . . . .	69
2.14. Física matemática y teoría espectral de operadores en espacios de Hilbert . . . . .	71
<b>3. Representación matricial de operadores lineales</b>	<b>73</b>
3.1. Representación matricial de operadores lineales acotados . . . . .	73
3.2. Representación matricial de operadores lineales simétricos no acotados . . . . .	80
<b>4. Matrices de Jacobi semi-infinitas</b>	<b>85</b>
4.1. Operadores de Jacobi . . . . .	85
4.2. Polinomios ortogonales de primer género e índices de deficiencia	86

4.3. Extensiones auto-adjuntas von Neumann . . . . .	89
4.4. Resolvente . . . . .	91
4.5. Perturbaciones de rango uno de operadores de Jacobi . . . . .	93
<b>5. Teoría espectral inversa de operadores de Jacobi</b>	<b>101</b>
5.1. Problemas directos e inversos . . . . .	101
5.2. Problemas espectrales inversos para matrices de Jacobi . . . . .	102
5.3. Reconstrucción de la matriz de Jacobi a partir de dos espectros	105
5.4. Condiciones necesarias y suficientes . . . . .	110

# Introducción

La descripción de un hecho o fenómeno del mundo real, cuando se tiene la información necesaria, se hace a través de modelos matemáticos. Y, en el estudio de estos modelos, generalmente, uno se enfrenta con dos tipos de problemas: los directos y los inversos. Los problemas directos son aquellos en los que se da una ecuación (que puede ser diferencial, en diferencias, integral, integro-diferencial, etc.) y alguna información complementaria (coeficientes de la ecuación, condiciones de frontera y/o iniciales, etc.) y se procede a resolver la ecuación con la finalidad de que el modelo matemático nos proporcione información sobre el comportamiento de cierto fenómeno físico. En los problemas inversos, en cambio, sucede lo contrario. Partimos de las soluciones de ciertas ecuaciones, junto con alguna información complementaria, y después pretendemos determinar esas ecuaciones y la parte de la información complementaria que no se haya dado, de modo que las soluciones que se dieron originalmente correspondan, efectivamente, a las ecuaciones encontradas. En resumen, resolver un problema inverso es determinar las causas desconocidas basadas en observaciones de sus efectos. Ahora, si ya conocemos las soluciones de la ecuación, algunos pudieran preguntarse ¿qué importancia tiene la información complementaria? Por una parte, la razón está en que frecuentemente en experimentos científicos y aplicaciones tecnológicas, lo que interesa conocer son los parámetros de las ecuaciones que modelan el fenómeno (pues muchas veces lo que se mide en los experimentos son los parámetros de las ecuaciones). Por otra parte, en ocasiones, el modelo matemático está incompleto o es impreciso y es, entonces, necesario conocer la ecuación y sus parámetros. Este tipo de problema, tiene una infinidad de aplicaciones como puede observarse en los siguientes ejemplos:

1. Análisis de imágenes: un ejemplo común es el problema de clasificar regiones de un imagen satelital de la superficie de la tierra en océanos, bosques, tierra para la agricultura, etc.
2. Ondas sísmicas en el estudio del subsuelo: consiste en emitir una onda y a



partir de su comportamiento determinar las características del subsuelo.

3. Espectroscopia de rayos X: abarca todas aquellas técnicas espectroscópicas utilizadas para determinar la estructura de los materiales mediante excitación por rayos X.
4. Resonancia Magnética: se obtiene al someter un paciente a un campo magnético que al interactuar con los tejidos permite obtener imágenes precisas del interior del cuerpo.
5. Estudio fotográfico de los espectros estelares: consiste en determinar las edades de las estrellas y sus grados de desarrollo por medio de sus espectros.

Ahora bien, haciendo un poco de abstracción vemos que los ejemplos dados anteriormente, pueden ser plasmados en teorías más abstractas como los denominados *problemas inversos de la teoría espectral de operadores*, en particular, los relacionados con *operadores Sturm-Liouville* y *Jacobi*. Para ambos operadores, el objetivo es reconstruir la ecuación (diferencial, para el primero, y en diferencias, para el segundo) con sus respectivos parámetros a partir de dos espectros que corresponden a dos condiciones de frontera diferentes.

Con esa finalidad, estudiaremos los problemas inversos de dos espectros para operadores de Jacobi. Para definir estos operadores, consideramos en  $l_2(\mathbb{N})$  al conjunto lineal  $l_{fin}(\mathbb{N})$  que consiste en sucesiones que tienen un número finito de elementos diferentes de cero. Así  $\hat{J}$  es un operador definido para cada  $\varphi = \{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  en  $l_{fin}(\mathbb{N})$  por medio del sistema recurrente

$$\begin{aligned} (\hat{J}\varphi)_1 &:= q_1\varphi_1 + b_1\varphi_2 \\ (\hat{J}\varphi)_k &:= b_{k-1}\varphi_{k-1} + q_k\varphi_k + b_k\varphi_{k+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \end{aligned} \quad (0.0.1)$$

donde hacemos uso de las sucesiones infinitas  $q = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  y  $b = \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ .

El operador  $\hat{J}$  es simétrico y, por lo tanto, cerrable. La cerradura  $\overline{\hat{J}}$  del operador  $\hat{J}$ , se denomina operador de Jacobi y, por conveniencia, lo seguiremos denotando por  $\hat{J}$ .

Note que hemos definido al operador de Jacobi  $\hat{J}$  de tal forma que la matriz tridiagonal semi-infinita

$$\{\hat{J}_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}} = \begin{pmatrix} q_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & q_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & q_3 & b_3 & \\ 0 & 0 & b_3 & q_4 & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (0.0.2)$$

sea su representación matricial con respecto a la base canónica  $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  en  $l_2(\mathbb{N})$ . Una discusión más a detalle de cómo se definen estos operadores, así como de otros operadores asociados a la matriz (0.0.2) se encuentran en el Cap. 4, Sec. 4.1.

Es bien sabido (Cap. 4, Sec. 4.2) que  $\hat{J}$  puede tener índices de deficiencia  $(0, 0)$  o  $(1, 1)$ , es decir, que el operador  $\hat{J}$  es o bien auto-adjunto o bien simétrico no auto-adjunto. De ahí que, si  $\hat{J}$  tiene índices de deficiencia  $(1, 1)$ , entonces a cada  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  le podemos asociar una extensión auto-adjunta von Neumann de  $\hat{J}$  que denotaremos por  $\hat{J}(g)$ . Cuando  $\hat{J}$  tenga índices de deficiencia  $(0, 0)$ ,  $\hat{J}$  se denotará por  $\hat{J}(-\infty)$ . Por lo tanto, para toda  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ ,  $\hat{J}(g)$  va a denotar un operador auto-adjunto de Jacobi.

Recordando que  $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es la base canónica en  $l_2(\mathbb{N})$ , considérese al operador  $\hat{P} = (\cdot, \delta_1)\delta_1$ , donde  $(\cdot, \cdot)$  es el producto interior en  $l_2(\mathbb{N})$ . Ahora bien, para cada  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$  fija, defina al operador  $\hat{J}_h(g)$  como

$$\hat{J}_h(g) := \hat{J}(g) + h\hat{P}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Observe que el operador  $\hat{J}_h(g)$  es un elemento de una familia de operadores parametrizada por  $h$  cuya acción es

$$(\hat{J}_h(g)\varphi)_j = \sum_{k \in \mathbb{N}} [\hat{J}_h(g)]_{jk} \varphi_k,$$

donde

$$\{\hat{J}_h(g)\}_{j,k \in \mathbb{N}} = \begin{pmatrix} q_1 + h & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & q_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & q_3 & b_3 & \\ 0 & 0 & b_3 & q_4 & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Las matrices semi-infinitas de Jacobi que acabamos de describir, guardan una estrecha relación con los operadores Sturm-Liouville. De hecho, aquéllas son el análogo discreto de éstos. Para ilustrar esta afirmación, considérese los siguientes operadores

$$\begin{aligned} (\partial_d f)_n &:= f_{n+1} - f_n, \quad n \in \mathbb{N} \\ (\partial_i f)_n &:= f_{n-1} - f_n, \quad n > 1 \\ (\partial_i f)_1 &:= -f_1, \end{aligned}$$

y la sucesión  $Q = \{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que, para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Q_n = b_{n-1} + q_n + b_n$ ,  $b_0 = 0$ , donde  $b$  y  $q$  son las sucesiones dadas en (0.0.1). Así, para  $n > 1$ ,

$$\begin{aligned} -\partial_i(b_n \partial_d f)_n + Q_n f_n &= -\partial_i(b_n(f_{n+1} - f_n)) + Q_n f_n, \quad n \in \mathbb{N} \\ &= -\{b_{n-1} f_n - b_{n-1} f_{n-1} - (b_n f_{n+1} - b_n f_n)\} + Q_n f_n \\ &= b_{n-1} f_{n-1} + q_n f_n + b_n f_{n+1}. \end{aligned}$$

Además, se cumple que

$$\begin{aligned} -\partial_i(b_1 \partial_d f)_1 + Q_1 f_1 &= -\partial_i(b_1(f_2 - f_1)) + Q_1 f_1 \\ &= -\{-b_1 f_2 - b_1 f_1\} + (q_1 + b_1) f_1 \\ &= q_1 f_1 + b_1 f_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$\hat{J} = -\partial_i(b \partial_d) + Q.$$

Por otra parte, el operador Sturm-Liouville  $\mathcal{L}$  puede definirse como el operador auto-adjunto en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = L_2(\mathcal{G})$ ,  $\mathcal{G} \subset \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ , dado por

$$\mathcal{L} := -\frac{d}{dx} \left( b \frac{d}{dx} \right) + Q, \quad (0.0.3)$$

donde  $Q$  es una función real localmente integrable (nótese que no hemos especificado aquí el dominio del operador  $\mathcal{L}$ ). El operador descrito en la ecuación (0.0.3) juega un papel central en la Física-Matemática, puesto que su uso en la modelación de fenómenos tanto en la Física Clásica como en la Cuántica es esencial. Y en este sentido, no podemos dejar de lado algunos resultados obtenidos en torno a los problemas inversos del operador Sturm-Liouville en el semi-eje  $[0, \infty)$  y en un intervalo finito. Dichos problemas inversos consisten en reconstruir un operador lineal a partir de sus características espectrales (espectros, funciones espectrales, etc.).

Uno de los primeros resultados en esa dirección que influyó enormemente en el desarrollo de la teoría de los problemas inversos, fue obtenido en 1929 por V. A. Ambartsumyan. Este matemático dedicó su vida al análisis de los operadores generados por la ecuación (0.0.3) con la función  $b$  idénticamente uno y  $Q$  una función real y continua. Ambartsumyan trabajó en el caso  $\mathcal{G} = [0, \pi]$  e impuso las siguientes condiciones a la frontera sobre las funciones  $f$  en el dominio del operador:

$$f'(0) = f'(\pi) = 0.$$

Ambartsumyan llegó a la conclusión de que la función  $Q$  era idénticamente cero siempre y cuando  $\lambda_n = n^2$  ( $\lambda_n$  auto-valor del operador  $\mathcal{L}$ ).

El siguiente paso importante fue dado por el matemático sueco G. Borg en [10], en el año de 1945. Fue el primero en indicar la importancia del resultado de Ambartsumyan y mostró, en general, que un espectro no determina a un operador Sturm-Liouville, sino más bien se requieren de dos, o sea que el resultado de Ambartsumyan era una excepción del caso general. El trabajo de Borg consistió en considerar la familia de operadores Sturm-Liouville  $\mathcal{L}_h$  ( $h \in \mathbb{R}$ ) con  $\mathcal{G} = [0, \pi]$ , donde para un  $H \in \mathbb{R}$  fijo, se imponen las condiciones de frontera

$$f'(0) - hf(0) = 0, \quad f'(\pi) + Hf(\pi) = 0.$$

Borg consideró a  $\{\lambda_k\}_k$  y  $\{\mu_k\}_k$  como los auto-valores de los operadores  $\mathcal{L}_{h_1}$  y  $\mathcal{L}_{h_2}$ , respectivamente, y llegó al siguiente resultado: que  $\{\lambda_k\}_k$  y  $\{\mu_k\}_k$  determinan unívocamente a la función  $Q$  y a los números reales  $H$ ,  $h_1$  y  $h_2$ .

Posteriormente, en el período 1950-1952, Borg, V. A. Marchenko y M. G. Krein, casi simultáneamente, hacen uso de la función espectral  $\rho_h(t)$  (véase la Definición 4.5.2) para resolver el problema inverso de dos espectros para operadores Sturm-Liouville en el semi-eje  $[0, \infty)$ . En 1950, Marchenko obtiene fórmulas asintóticas de la función espectral  $\rho_h(t)$  para operadores Sturm-Liouville y, en particular, para el caso del semi-eje. Desarrolla nuevos métodos para el estudio de fórmulas asintóticas de la función espectral y la convergencia de las expansiones en términos de eigen-funciones. En el mismo año, Marchenko da a conocer en [30] la demostración del *Teorema de Unicidad* conocido hoy en día como el *Teorema de Unicidad Borg-Marchenko*. En 1952, publica [31], en el que desarrolla extensamente la teoría espectral de operadores de Schrödinger de una dimensión, y repite la demostración del *Teorema de Unicidad*. Ese año fue marcado también por el trabajo de Borg publicado en [11] y que contiene la demostración del *Teorema de Unicidad* ya antes publicada por Marchenko (aunque cabe aclarar que Borg ya conocía el resultado de este teorema, pues fue el tema de su ponencia en el décimo primer Congreso Escandinavo de Matemáticas celebrado en Trondheim, Noruega en 1949 (véase [19])). De ahí que el *Teorema de Unicidad* es conocido como *Teorema de unicidad Borg-Marchenko*, el cual consiste en tomar dos operadores Sturm-Liouville con  $b \equiv 1$  bajo condiciones de frontera constantes tal que si las  $m$ -funciones de Weyl-Titchmarsh (véase la Definición 4.5.3) coinciden, o lo que es equivalente, si las funciones espectrales coinciden (véase las ecuaciones (4.5.7) y (5.2.5)), entonces los potenciales (o sea las funciones  $Q_1, Q_2$ ) deben coincidir.

Independiente y casi simultáneamente, Krein publica una serie de artículos [25, 26], en los que da, en particular, un método efectivo para la reconstrucción

del operador Sturm-Liouville a partir de sus dos espectros. En [26] da también, condiciones necesarias y suficientes a dos sucesiones de números reales para que éstas, puedan ser los espectros del operador Sturm-Liouville con condiciones de frontera diferentes, sin embargo, no en términos de las mismas sucesiones, sino en términos de una función auxiliar (véase también [29]).

En 1951, I. M. Gelfand y B. M. Levitan publican [16] en el que proporcionan un método efectivo para la reconstrucción del operador Sturm-Liouville a partir de su función espectral. Dan también condiciones necesarias y suficientes para la reconstrucción de dicho operador.

Utilizando nuevos descubrimientos que no se habían conocido en 1951, Levitan y Gasymov publican [29] en 1964, donde, haciendo uso de la función espectral, proporcionan solución al problema inverso de dos espectros para operadores Sturm-Liouville en un caso general. En el mismo artículo dan condiciones necesarias y suficientes para que dos sucesiones sean los espectros de un operador Sturm-Liouville con condiciones de frontera diferentes, en un caso particular.

A raíz de las soluciones obtenidas del problema inverso de dos espectros para operadores Sturm-Liouville, comienza ahora el estudio del mismo problema para matrices de Jacobi. Sabemos, por lo afirmado más arriba, que el dominio para operadores de Jacobi, no consta ya de funciones como en el caso del dominio de los operadores Sturm-Liouville, sino de sucesiones. Además de que, para determinar el operador de Jacobi, es necesario el uso de un sistema recurrente de términos (véase la ecuación (0.0.1)).

Los problemas inversos de dos espectros para matrices de Jacobi que estamos describiendo, consisten en reconstruir la matriz de Jacobi a partir de los espectros  $\sigma(\hat{J}_{h_1}(g))$  y  $\sigma(\hat{J}_{h_2}(g))$ . Consisten también en estudiar condiciones necesarias y suficientes que deben satisfacer dos sucesiones  $\{\lambda_k\}_k$  y  $\{\mu_k\}_k$  para que se cumplan  $\{\mu_k\}_k = \sigma(\hat{J}_{h_1}(g))$  y  $\{\lambda_k\}_k = \sigma(\hat{J}_{h_2}(g))$ .

Uno de los trabajos pioneros en el problema descrito anteriormente fue desarrollado por Halilova en [22]. El siguiente trabajo fue realizado por Fu-Hochstadt [15]. En él se demuestra que dos espectros correspondientes a las condiciones Dirichlet-Neumann determinan unívocamente a la matriz y se da un algoritmo de reconstrucción. En [21], Guseĭnov, da condiciones necesarias y suficientes para dos espectros Dirichlet-Neumann en casos particulares. Teschl en [41], demuestra la unicidad de la reconstrucción y da un algoritmo de reconstrucción para cualesquiera condiciones de frontera (no necesariamente Dirichlet-Neumann). Para esto, utiliza una forma nueva de tratar problemas inversos con base en la ecuación de Ricatti que satisface la  $m$ -función de Weyl-Titchmarsh [18].

Hay una forma abstracta de tratar el problema inverso de dos espectros en la teoría espectral de operadores. Esta forma consiste en tratar de forma general operadores que pueden ser tanto Sturm-Liouville como matrices de Jacobi. La herramienta que se usa en este caso es la Teoría de perturbaciones de rango uno y esto lo hace Donoghue en [14].

Como el lector pudo constatar más arriba, ya habían resultados de reconstrucción y búsqueda de condiciones necesarias y suficientes, antes de [37], para el problema espectral inverso de matrices de Jacobi. Cabe señalar que en [37], se optimizan los datos necesarios para la reconstrucción de la matriz (véase el Teorema 5.3.2 con los resultados en [14], [41]) y se dan condiciones necesarias y suficientes en el caso general. Se puede agregar que en [41] (véase también [14]) se prueba que el espectro discreto de  $\hat{J}_{\tilde{h}}(g)$  y  $\hat{J}_h(g)$ , junto con  $h$  y  $\tilde{h}$  determinan de manera única al operador  $\hat{J}$  y la condición a la frontera  $g$ , en el caso del índice de deficiencia  $(1, 1)$ . En [37], se prueba que no es necesario conocer a ambos  $h$  y  $\tilde{h}$ , basta con conocer uno de ellos.

Hasta aquí damos por terminado el recuento histórico del desarrollo de los problemas inversos para operadores Sturm-Liouville y Jacobi. Y presentamos a continuación el trabajo que vamos a realizar en esta investigación, el cual, basado fundamentalmente en [37], aborda esencialmente dos problemas inversos de dos espectros para matrices de Jacobi (véase Cap. 5, Sec. 5.2):

- a) El primero consiste en reconstruir las matrices de Jacobi a partir de dos espectros  $\sigma(\hat{J}_{h_1}(g))$  y  $\sigma(\hat{J}_{h_2}(g))$  y uno de los números  $h_1$  o  $h_2$ .
- b) El segundo, en encontrar condiciones necesarias y suficientes que se deberán imponer a dos sucesiones infinitas de números reales  $\{\mu_k\}_k$  y  $\{\lambda_k\}_k$  para que dado un número real  $h_1$ , existan de manera única  $h_2 \in \mathbb{R}$ ,  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$  y un único operador  $\hat{J}(g)$  tales que  $\{\mu_k\}_k = \sigma(\hat{J}_{h_1}(g))$  y  $\{\lambda_k\}_k = \sigma(\hat{J}_{h_2}(g))$ .

Para resolver los problemas antes mencionados fue necesario hacer uso de varias herramientas matemáticas. En el Capítulo 1 se introducen conceptos preliminares de la *Teoría de funciones analíticas* que es fundamental, en general, en el tratamiento de problemas espectrales inversos [15, 21, 22, 29, 31]. Y se dan las demostraciones de los teoremas [1.1.2, 1.1.4, 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4 y 1.2.5], pues tienen una implicación directa con el problema en cuestión. Otra herramienta que se usa, es la *Teoría espectral de operadores en espacios de Hilbert* (Capítulo 2). Además se utilizan reiteradamente diversos métodos asintóticos que permiten dar expansiones asintóticas de operadores y funciones que, posteriormente, se usan en la resolución de los problemas mencionados.

Sobre las posibles aportaciones del trabajo que presentamos aquí y que no pueden encontrarse en [37] son: la existencia de un tratamiento detallado de la

representación matricial de operadores simétricos no acotados. En el caso acotado esto es trivial y se trata en libros de texto. En el caso no acotado, a una misma matriz le podemos asociar varios operadores con diferentes dominios. Aquí tratamos con detalle la correspondencia entre matrices hermitianas y operadores simétricos (véase el Teorema 3.2.2). Se desarrolla también a detalle la demostración de todos los teoremas centrales relacionados con los resultados del problema inverso de dos espectros para matrices de Jacobi. Entre ellos se encuentran algunos de *la teoría de Funciones analíticas* y de la *Teoría espectral de operadores en espacios de Hilbert*, a saber, los Teoremas de Krein y Chebotarev sobre representación de funciones meromorfas Herglotz, el Teorema de Weyl de constancia del espectro esencial bajo perturbaciones compactas y la fórmula de Aronszajn-Krein. Estos teoremas, aunque son bien conocidos y de hecho se han utilizado ampliamente, no se encuentran fácilmente en la literatura salvo el Teorema de Weyl. Tiene importancia mencionar también el Teorema de Chebotarev (Teorema 1.2.4) y el Teorema 5.3.3 por lo siguiente: en el primero damos una demostración completa y detallada a diferencia de la que viene en [28], y en el segundo damos la demostración que viene en [37], pero con más detalle. Algunos comentarios que se hicieron a lo largo del texto proporcionan elementos para un mejor entendimiento del problema inverso de dos espectros para matrices de Jacobi y se espera que esta investigación sea útil a estudiantes de posgrado e investigadores interesados en el tema.

El texto se distribuye de la siguiente manera. En el Capítulo 1, hay un análisis detallado de la teoría avanzada de funciones analíticas. Se introducen los conceptos de las funciones meromorfas Herglotz, residuo de una función analítica, así como la definición de la convergencia uniforme, absoluta y absolutamente uniforme de productos infinitos de sucesiones de funciones complejas. También se introduce una convención (Convención 1.2.1) para enumerar ceros y polos de una función meromorfa Herglotz. Al final del Capítulo 1 incluimos las demostraciones de los Teoremas 1.2.3, 1.2.4 y 1.2.5. El primero aparece en [28] y se atribuye a *Krein*, el segundo es conocido como el Teorema de *Chebotarev* de representación de funciones meromorfas Herglotz y el tercero es una consecuencia inmediata del segundo.

En el Capítulo 2, *Teoría espectral de operadores en espacios de Hilbert*, se explican detalladamente las propiedades de operadores lineales acotados, cerrados, simétricos, adjuntos. Se da también la definición de la gráfica de un operador lineal. Se explica a detalle conceptos relacionados con los espectros de operadores lineales cerrados, particularmente, auto-adjuntos. En el mismo capítulo, hacemos mención del Teorema espectral, cuyo resultado es fundamental para la resolución del problema inverso de dos espectros para matrices de Jacobi; recomendamos al lector interesado en el teorema recurrir a [3, 9],

pues en este trabajo no damos la demostración. En lo que respecta a la Teoría de las perturbaciones, hay dos teoremas centrales que es necesario mencionar, pues fueron esenciales en la resolución del problema inverso espectral: Teorema 2.13.2 (Teorema de Weyl) y Teorema 2.13.1 (Criterio de Weyl).

En el Capítulo 3, *Representación matricial de operadores lineales*, se dan las condiciones necesarias y suficientes para que pueda efectuarse una correspondencia biunívoca entre una matriz y su operador asociado. Para los operadores acotados no existe mucha dificultad en efectuarse dicha correspondencia. En donde sí existe problema es en los operadores *no acotados*, dado que a una misma matriz se le pueden asociar varios operadores con diferentes dominios. Para el caso de las condiciones necesarias y suficientes fueron incluidos los Teoremas 3.1.1 y 3.1.2. La demostración del segundo teorema, generalmente, se basa de un caso particular del Teorema de Landau (véase [3, Sec. 18] y véase también [27]). Aquí, utilizamos los resultados sobre funcionales lineales y no lineales (véase el Teorema 2.5.2 y el Lema 2.5.1) para demostrarlo. En lo que respecta a *Representación matricial de operadores lineales simétricos no acotados* la demostración del Teorema 3.2.1 y los resultados proporcionados en los corolarios 3.2.1, 3.2.2 y 3.2.3 fueron esenciales.

En el capítulo 4, *Matrices de Jacobi semi-infinitas*, se presentan los principios de la teoría de matrices de Jacobi. En la Sección 4.1 damos la definición de la matriz semi-infinita de Jacobi y de su correspondiente operador asociado  $\hat{J}$ . En la Sección 4.2, se demuestra que  $\hat{J}$  puede tener únicamente índices de deficiencia  $(0, 0)$  o  $(1, 1)$  e introducimos los polinomios ortogonales de primer género. En la Sección 4.3, se definen las extensiones auto-adjuntas von Neumann y en la Sección 4.4 se da explícitamente la resolvente de esas extensiones. En la Sección 4.5, se define una familia de perturbaciones de rango uno de operadores de Jacobi y se tratan algunas de sus propiedades espectrales. En esta misma sección, usamos la expansión von Neumann de la resolvente para desarrollar a detalle la fórmula asintótica de la  $m$ -función de Weyl-Titchmarsh. Al final de este capítulo incluimos dos afirmaciones relacionadas con los momentos de la función espectral y polinomios densos en el espacio de Hilbert  $L_2(\mathbb{R}, d\rho_h(t))$  (véase el Teorema 4.5.8 y el Lema 4.5.2).

El Capítulo 5, *Teoría espectral inversa de operadores de Jacobi*, contiene el planteamiento del problema inverso de dos espectros para matrices de Jacobi (véase los Teoremas 5.3.2 y 5.4.2). En el Teorema 5.3.2 proporcionamos la demostración del problema citado en el inciso a) dada en [37]. En el Teorema 5.4.2 damos la demostración del problema descrito en el inciso b) también dada en [37]. Para demostrar el Teorema 5.3.2 fue necesario usar: el Teorema 5.3.1 y Lemas 5.3.1, 5.3.2 y 5.3.3, además del Corolario 5.3.1. Y en la demostración del Teorema 5.4.2, además de las herramientas mencionadas anteriormente,



fue necesario incluir el Teorema 5.4.1. En la penúltima sección (Sec. 5.3) se presentan algunos resultados espectrales para perturbaciones de rango uno como son el Lema 5.3.1 y la fórmula de *Aronszajn-Krein* (ecuación 5.3.3).

# Capítulo 1

## Algunos aspectos de la teoría de funciones

En este breve capítulo se exponen algunos aspectos de la teoría avanzada de funciones analíticas. Primero se introducen algunos conceptos básicos como son los de polo, residuo, funciones analíticas y meromorfas, así como la definición de convergencia uniforme, absoluta y absolutamente uniforme de productos infinitos de sucesiones de funciones complejas. Después se introducen las funciones Herglotz, se estudian algunas de sus propiedades y se adopta una convención (Convención 1.2.1) para enumerar ceros y polos de ciertas funciones meromorfas Herglotz. Además desarrollamos a detalle la demostración de cuatro teoremas centrales para nuestro trabajo (véase Teoremas 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4 y 1.2.5). Estos teoremas corresponden a la distribución de ceros y polos de una función meromorfa Herglotz y a los teoremas de representación de funciones meromorfas Herglotz de Krein y Chebotarev.

### 1.1. Conceptos básicos

**Definición 1.1.1.** Se dice que una función  $f$  es analítica en una región si es diferenciable en cada punto de la región.

**Definición 1.1.2.** Un punto singular aislado  $\zeta_0$  de una función  $f(\zeta)$  es un polo de  $f(\zeta)$  si

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} f(\zeta) = \infty.$$

**Teorema 1.1.1.** *El punto  $\zeta_0$  es un polo de la función  $f(\zeta)$  si y sólo si es cero de la función*

$$\frac{1}{f(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

El Teorema 1.1.1, que establece una relación entre polos y ceros, nos lleva a introducir el concepto de orden de un polo. Así, diremos que el punto  $\zeta_0$  es un polo de orden  $k$  ( $k \geq 1$ ) de la función  $f(\zeta)$  si  $\zeta_0$  es un cero de orden  $k$  de la función  $\frac{1}{f(\zeta)}$ .

**Definición 1.1.3.** El polo se dice que es **simple** si es de orden  $k = 1$  y múltiple si  $k > 1$ .

**Definición 1.1.4.** Una función  $f$  se dice que es *meromorfa* si es analítica en todo  $\mathbb{C}$ , salvo, tal vez, en sus polos.

**Definición 1.1.5.** Sea  $f(\zeta)$  una función analítica en un entorno  $\mathcal{N}(\zeta_0) \setminus \{\zeta_0\}$  de un punto singular aislado  $\zeta_0$ . Entonces, se denomina *residuo de una función analítica*  $f(\zeta)$  en un punto singular aislado  $\zeta = \zeta_0 \in \mathbb{C}$  al coeficiente  $a_{-1}$  de la primera potencia negativa del desarrollo de Laurent de la función  $f(\zeta)$  en un entorno del punto  $\zeta = \zeta_0$ . El residuo  $a_{-1}$  en la expansión de *Laurent*

$$f(\zeta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (\zeta - \zeta_0)^n, \quad \zeta \in \mathcal{N}(\zeta_0) \setminus \{\zeta_0\}$$

se denota por

$$a_{-1} = \operatorname{Res}_{\zeta=\zeta_0} f(\zeta).$$

Si  $\zeta = \zeta_0$  es un polo simple de  $f(\zeta)$ , el desarrollo de Laurent de la función  $f(\zeta)$  en un entorno del punto  $\zeta = \zeta_0$  tiene la forma

$$f(\zeta) = \frac{a_{-1}}{\zeta - \zeta_0} + \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a_n (\zeta - \zeta_0)^n,$$

de donde

$$(\zeta - \zeta_0)f(\zeta) = a_{-1} + (\zeta - \zeta_0) \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a_n (\zeta - \zeta_0)^n.$$

Así,

$$\operatorname{Res}_{\zeta=\zeta_0} f(\zeta) = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} [(\zeta - \zeta_0)f(\zeta)].$$

**Definición 1.1.6.** Una **función entera** es aquella función que es analítica en todo el plano complejo  $\mathbb{C}$ .

Citamos a continuación el Teorema 9.7 de [33, Cap. 9, Sec. 43].

**Teorema 1.1.2.** *Si una función entera  $f$  no tiene ceros en el plano complejo, entonces se puede escribir como*

$$f(\zeta) = e^{g(\zeta)},$$

donde  $g$  es una función entera.

*Demostración.* Dado que  $f(\zeta)$  no se anula para toda  $\zeta \in \mathbb{C}$ , entonces

$$\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}$$

es una función entera y

$$\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{d}{d\zeta} \log(f(\zeta))$$

es analítica en todo  $\mathbb{C}$ . Ahora bien, por el *Teorema Fundamental del Cálculo Integral* para funciones de variable compleja (véase el Corolario [32, Cap. 13, Sec. 68]), tenemos que para toda  $\xi \in \mathbb{C}$

$$\varphi(\xi) := \int_0^\xi \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \log(f(\xi)) - \log(f(0)) \quad (1.1.1)$$

que resulta ser también entera. Así

$$f(\xi) = e^{(\varphi(\xi) + \log(f(0)))}.$$

Haciendo  $g(\zeta) = \varphi(\zeta) + \log(f(0))$ , el teorema queda demostrado.  $\square$

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Teorema 8.81 de [43, Cap. 8, Sec. 8] que también citamos aquí sin demostración.

**Teorema 1.1.3.** *Una función entera que no sea constante toma todos los valores de  $\mathbb{C}$ , con la posible excepción de uno de ellos.*

**Definición 1.1.7.** Considere una sucesión de números complejos  $\{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que sólo un número finito de sus elementos puede ser cero. Entonces, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , podemos construir

$$\prod_{n=1}^m \zeta_n.$$

Se dice que la sucesión

$$\left\{ \prod_{n=1}^m \zeta_n \right\}_{m \in \mathbb{N}}$$

es convergente si al quitar los elementos de la sucesión  $\{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que pueden ser cero,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m \zeta_n$$

existe y es diferente de cero.

Recordemos que, por convergencia del límite entendemos lo siguiente:

Existe  $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|\prod_{n=1}^m \zeta_n - C| < \epsilon$  para  $m > N$ .

Así, si

$$\left\{ \prod_{n=1}^m \zeta_n \right\}_{m \in \mathbb{N}}$$

es convergente, entonces

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \zeta_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m \zeta_n$$

cuando  $\{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no tiene ceros y  $\prod_{n \in \mathbb{N}} \zeta_n = 0$  en caso contrario.

**Definición 1.1.8.** Decimos que el producto infinito  $\prod_{n \in \mathbb{N}} \zeta_n$  converge absolutamente si  $\prod_{n \in \mathbb{N}} |\zeta_n|$  converge.

**Definición 1.1.9.** Consideremos, ahora, una sucesión de funciones  $\{a_k(\zeta)\}$  cuyos elementos están definidos en una región  $B$  del plano complejo. Por lo que se dijo anteriormente, podemos considerar la sucesión

$$\left\{ \prod_{n=1}^m a_n(\zeta) \right\}_{m \in \mathbb{N}}$$

y decir que es uniformemente convergente en  $\tilde{B} \subset B$ , si para toda  $\zeta \in \tilde{B}$  existe  $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que para cualquier  $\epsilon > 0$  existe  $N$  (que no depende de  $\zeta \in \tilde{B}$ ) tal que si  $m > N$ , entonces

$$\left| \prod_{n=1}^m a_n(\zeta) - C \right| < \epsilon.$$

**Teorema 1.1.4.** Sea  $\{a_k(\zeta)\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones analíticas en  $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}$  y sea  $\mathcal{K}$  un compacto cualquiera de  $\mathbb{C}$ . El producto infinito  $\prod_{k \in \mathbb{N}} \{a_k(\zeta) + 1\}$  converge absoluta y uniformemente en  $\mathcal{K} \cap \mathcal{B}$  si y sólo si  $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k(\zeta)$  converge absoluta y uniformemente en  $\mathcal{K} \cap \mathcal{B}$  (véase el Teorema 6 de [1, Cap. 5, Sec. 2]).

*Demostración.* Note que, para toda  $\zeta \in \mathcal{B} \subset \mathbb{C}$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k(\zeta)| < \prod_{k \in \mathbb{N}} \{1 + |a_k(\zeta)|\} < e^{\sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k(\zeta)|}. \quad (1.1.2)$$

La primera desigualdad de (1.1.2) es obvia. La segunda, se obtiene de escribir  $e^{|a_k|} = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{|a_k|^n}{n!}$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Y esta última serie es mayor que  $1 + |a_k|$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . De esta forma, la convergencia uniforme de  $\prod_{k \in \mathbb{N}} \{a_k(\zeta) + 1\}$  y  $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k(\zeta)$  son equivalentes.  $\square$

*Comentario 1.1.1.* Recuerde que en el espacio de dimensión finita  $\mathbb{C}$ , un compacto es un conjunto cerrado y acotado.

## 1.2. Funciones Herglotz

**Definición 1.2.1.** Toda función  $F$  que sea analítica en el semi-plano superior  $\mathbb{C}_+$  del plano complejo y satisfaga

$$\frac{\operatorname{Im} F(\zeta)}{\operatorname{Im} \zeta} > 0, \quad \operatorname{Im} \zeta > 0$$

recibe el nombre de función *Herglotz* o función *Nevanlinna-Pick* o *R-función*.

Citamos aquí un teorema conocido en la teoría de funciones Herglotz y cuya demostración puede consultarse en el Teorema 6.2 de [20, Cap. 2, Sec. 6].

**Teorema 1.2.1.** *Toda función  $f$  Herglotz puede representarse en la siguiente forma:*

$$f(\zeta) = \alpha + \beta\zeta + \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{\xi - \zeta} - \frac{\xi}{1 + \xi^2} \right) d\rho(\xi), \quad \zeta \in \mathbb{C}_+$$

para algún  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \geq 0$  y alguna medida no negativa  $\rho$  en  $\mathbb{R}$  que satisface

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\rho(\xi)}{1 + \xi^2} < \infty.$$

**Lema 1.2.1.** *Si  $F(\zeta)$  es una función Herglotz, entonces  $F(\zeta) + C$ , con  $C \in \mathbb{R}$ , también es una función Herglotz.*

*Demostración.* Como

$$\frac{\operatorname{Im}(F(\zeta) + C)}{\operatorname{Im} \zeta} = \frac{\operatorname{Im} F(\zeta)}{\operatorname{Im} \zeta} > 0, \quad \operatorname{Im} \zeta > 0,$$

entonces  $F(\zeta) + C$  es una función Herglotz.  $\square$

**Lema 1.2.2.** *Si  $F(\zeta)$  es una función Herglotz, entonces  $-\frac{1}{F(\zeta)}$  es una función Herglotz.*

*Demostración.* Tómesese  $f(\zeta) = \frac{e^{i\pi}}{\zeta}$ . Entonces

$$\arg f(\zeta) = \pi - \arg \zeta.$$

Así,  $0 < \arg \zeta < \pi$ , implica que  $0 < \arg f(\zeta) < \pi$ . Por lo tanto, haciendo la composición

$$f(F(\zeta)) = \frac{e^{i\pi}}{F(\zeta)} = -\frac{1}{F(\zeta)}$$

vemos claramente que  $-\frac{1}{F(\zeta)}$  es una función Herglotz.  $\square$

**Teorema 1.2.2.** *Si  $F$  es una función meromorfa Herglotz, entonces los ceros y polos de  $F$  son reales, simples y se entrelazan.*

*Demostración.* Observe que  $\arg \zeta$  está en  $[0, 2\pi)$ . Dado que  $F$  es Herglotz tenemos que  $0 < \arg F(\zeta) < \pi$  si  $0 < \arg \zeta < \pi$  y  $\pi < \arg F(\zeta) < 2\pi$  si  $\pi < \arg \zeta < 2\pi$ . Observe también, por el Teorema 1.2.1, que  $F$  es real, es decir, toma valores reales en los reales. Ahora bien, si  $\zeta$  es un cero o un polo tal que  $\text{Im } \zeta > 0$ , entonces al recorrer un contorno  $\gamma$  alrededor de  $\zeta$ , el  $\arg F(\zeta)$  no puede incrementarse en un ángulo mayor o igual a  $2\pi$ . De esto se sigue, por el *principio del argumento* descrito en el Teorema 2.3 de [33, Cap. 2, Sec. 7], que no pueden haber ceros y polos en  $\mathbb{C}_+$ . Del mismo argumento se deriva que tampoco pueden haber ceros y polos en  $\mathbb{C}_-$ . Para ver que los ceros y polos son simples y se entrelazan, tómesese el contorno  $\gamma$  que contenga un intervalo de  $\mathbb{R}$ , entonces al recorrer el contorno  $\gamma$ , por lo que se dijo arriba, obtenemos

$$|\Delta_\gamma \arg(F(\zeta))| \leq 2\pi. \quad (1.2.1)$$

La desigualdad (1.2.1) implica que la diferencia entre ceros y polos es a lo más uno (véase (2.21) de [33, Cap. 2, Sec. 7]), lo que demuestra que los ceros y polos se entrelazan y son simples. En efecto, si sucediera que un contorno contuviera dos ceros consecutivos y un polo, entonces, al tomar un contorno de radio más pequeño, dicho contorno incluiría sólo a los ceros, lo que contradice (1.2.1). Lo mismo sucede si suponemos que un contorno encierra a dos polos consecutivos y un cero. La simplicidad sigue de tomar contornos que contengan un sólo polo o un sólo cero.  $\square$

Debido al Teorema 1.2.2, si el conjunto de ceros está acotado superiormente (inferiormente), entonces el conjunto de polos está acotado superiormente (inferiormente).

**Definición 1.2.2.** Sea  $\mathfrak{H}$  el conjunto de las funciones meromorfas Herglotz tal que para cada función en  $\mathfrak{H}$ , el conjunto de los ceros de esta función forma un

conjunto no acotado y si este conjunto está acotado inferiormente, entonces el menor de los ceros es mayor que el menor de los polos, y si está acotado superiormente, entonces el mayor de los polos es menor que el mayor de los ceros.

Introducimos a continuación una convención para enumerar ceros y polos de la función  $f \in \mathfrak{H}$ .

**Convención 1.2.1.** Sean  $\{a_k\}_k$  y  $\{b_k\}_k$  los ceros y polos, respectivamente, de  $f \in \mathfrak{H}$ . Tomemos  $\mathcal{M}$  un subconjunto de  $\mathbb{Z}$  para enumerar las sucesiones  $\{a_k\}_k$  y  $\{b_k\}_k$  tal que  $b_k < a_k < b_{k+1}$ , para toda  $k \in \mathcal{M}$ . Así,

- (a) Si  $\inf_k \{b_k\}_k = -\infty$  y  $\sup_k \{b_k\}_k = +\infty$ , entonces tomamos  $\mathcal{M} := \mathbb{Z}$  con la siguiente condición:  $a_{-1} < 0 < b_1$ .
- (b) Si  $0 < \sup_k \{b_k\}_k < +\infty$ , entonces tomamos  $\mathcal{M} := \{k\}_{k=-\infty}^{k_{max}}$ ,  $k_{max} \geq 1$ , bajo la condición:  $a_{-1} < 0 < b_1$ .
- (c) Si  $\sup_k \{b_k\}_k \leq 0$ , entonces escogemos  $\mathcal{M} := \{k\}_{k=-\infty}^0$ .
- (d) Si  $\inf_k \{a_k\}_k \geq 0$ , entonces tomamos  $\mathcal{M} := \{k\}_{k=0}^{+\infty}$ .
- (e) Si  $-\infty < \inf_k \{a_k\}_k < 0$ , escogemos  $\mathcal{M} := \{k\}_{k=k_{min}}^{+\infty}$ , ( $k_{min} \leq -1$ ), y necesitamos que  $a_{-1} < 0 < b_1$ .

Note que, por como se hizo la enumeración, los únicos elementos de las sucesiones  $\{a_k\}_{k \in \mathcal{M}}$  y  $\{b_k\}_{k \in \mathcal{M}}$  que pueden ser igual a cero son  $a_0$  o  $b_0$ .

**Teorema 1.2.3.** (Krein)  $F \in \mathfrak{H}$  si y sólo si

$$F(\zeta) := C \frac{\zeta - a_0}{\zeta - b_0} \prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \left(1 - \frac{\zeta}{a_k}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{b_k}\right)^{-1}, \quad C > 0, \quad (1.2.2)$$

donde las sucesiones  $\{a_k\}_{k \in \mathcal{M}}$  y  $\{b_k\}_{k \in \mathcal{M}}$  han sido enumeradas como en la Convención 1.2.1.

*Demostración.* Vamos a demostrar primero que el producto infinito en (1.2.2) converge absoluta y uniformemente a un elemento  $\zeta$  en cualquier compacto de  $\mathbb{C} \setminus \{b_k\}_{k \in \mathcal{M}}$  (véase el Comentario 1.1.1). Por el Teorema 1.1.4 basta demostrar la convergencia absoluta y uniforme de

$$\sum_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \left( \left(1 - \frac{\zeta}{a_k}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{b_k}\right)^{-1} - 1 \right) = \zeta \sum_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \left( \frac{1}{b_k} - \frac{1}{a_k} \right) \left(1 - \frac{\zeta}{b_k}\right)^{-1} \quad (1.2.3)$$



en compactos de  $\mathbb{C} \setminus \{b_k\}_{k \in \mathcal{M}}$ . Fije un compacto cualquiera  $\mathcal{K}$  en  $\mathbb{C} \setminus \{b_k\}_{k \in \mathcal{M}}$ . Como  $\zeta$  está en un subconjunto acotado, entonces existe un  $M$  tal que  $|\zeta| < M$ . Fije  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $|\zeta| < |b_m|$  y defina  $S = \mathcal{M} \setminus \{-m, \dots, 0, \dots, m\}$ . Claramente, la convergencia absoluta y uniforme en  $\mathcal{K}$  en la ecuación (1.2.3), es equivalente a la convergencia absoluta y uniforme de

$$\zeta \sum_{k \in S} \left( \frac{1}{b_k} - \frac{1}{a_k} \right) \left( 1 - \frac{\zeta}{b_k} \right)^{-1} \quad (1.2.4)$$

en  $\mathcal{K}$ . Así, la convergencia absoluta y uniforme de (1.2.4) es equivalente a la convergencia absoluta de

$$\sum_{k \in S} \left( \frac{1}{b_k} - \frac{1}{a_k} \right).$$

Como  $b_k < a_k$  para cada  $k \in S$ , entonces

$$0 < \frac{1}{b_k} - \frac{1}{a_k} < \frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}}$$

y por consiguiente

$$\sum_{k \in S} \frac{1}{b_k} - \frac{1}{a_k} < \sum_{k \in S} \frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}}. \quad (1.2.5)$$

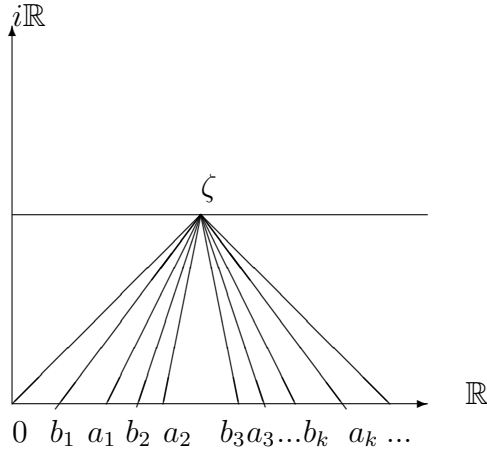
La suma derecha de la desigualdad (1.2.5) converge, pues es una suma telescópica. Por lo tanto, el producto infinito

$$\prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \left( 1 - \frac{\zeta}{a_k} \right) \left( 1 - \frac{\zeta}{b_k} \right)^{-1}$$

converge absoluta y uniformemente en compactos de  $\mathbb{C} \setminus \{b_k\}_{k \in \mathcal{M}}$ . Y entonces  $F$  es analítica en compactos de  $\mathbb{C}_+$ . Ahora bien, para ver que  $F$  es una función Herglotz, considere lo siguiente:

$$\arg \left( \frac{1 - \frac{\zeta}{a_k}}{1 - \frac{\zeta}{b_k}} \right) = \arg(a_k - \zeta) - \arg(b_k - \zeta) = \theta_k, \quad \forall k \in \mathcal{M}.$$

Ahora, si  $\text{Im } \zeta > 0$ , entonces  $\theta_k = \angle b_k \zeta a_k$  para toda  $k \in \mathcal{M}$ . Nótese que  $0 < \theta_k < \pi$ .



De la figura se sigue que

$$0 < \sum_{k \in \mathcal{M}} \theta_k < \pi,$$

por lo tanto  $\text{Im } \zeta > 0$ , implica que  $\text{Im } F(\zeta) > 0$ . Así  $F \in \mathfrak{H}$ . O sea que si una función se representa en la forma (1.2.2), entonces es una función de  $\mathfrak{H}$ .

Para demostrar la afirmación conversa, considérese  $G \in \mathfrak{H}$  con sus ceros  $\{a_k\}_{k \in \mathcal{M}}$  y polos  $\{b_k\}_{k \in \mathcal{M}}$  enumerados como en la Convención 1.2.1.

Sea

$$\tilde{G}(\zeta) := \frac{\zeta - a_0}{\zeta - b_0} \prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \left(1 - \frac{\zeta}{a_k}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{b_k}\right)^{-1}.$$

Ahora haciendo

$$H(\zeta) := \frac{G(\zeta)}{\tilde{G}(\zeta)}$$

se verifica fácilmente que  $H$  es una función entera sin ceros en el plano complejo. Entonces por el Teorema 1.1.2,

$$\frac{G(\zeta)}{\tilde{G}(\zeta)} = e^{g(\zeta)},$$

donde  $g$  es una función entera. Ahora bien,

$$\arg e^{g(\zeta)} = \arg \left( \frac{G(\zeta)}{\tilde{G}(\zeta)} \right) = \arg G(\zeta) - \arg \tilde{G}(\zeta).$$

Si  $0 < \arg \zeta < \pi$ , entonces  $-\pi < \arg e^{g(\zeta)} < \pi$ . Además, cuando  $\pi < \arg \zeta < 2\pi$ , entonces  $-\pi < \arg e^{g(\zeta)} < \pi$ . Del Teorema 1.2.1 se sigue que  $g(\zeta)$  es real,

entonces  $0 \leq \arg(\zeta) < 2\pi$  implica que  $-\pi < \arg e^{g(\zeta)} < \pi$ . De esto se sigue que  $g(\zeta)$  es tal que, para toda  $\zeta \in \mathbb{C}$ ,  $|\operatorname{Im} g(\zeta)| \leq \pi$ . Así, por el Teorema 1.1.3, se tiene que

$$\frac{G(\zeta)}{\tilde{G}(\zeta)} = C, \quad C = \text{constante.} \quad (1.2.6)$$

La constante en (1.2.6) es obviamente positiva, porque tanto  $G$  como  $\tilde{G}$  son funciones Herglotz. Por lo tanto,

$$G(\zeta) = C\tilde{G}(\zeta) = C \frac{\zeta - a_0}{\zeta - b_0} \prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \left(1 - \frac{\zeta}{a_k}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{b_k}\right)^{-1}, \quad C > 0.$$

□

El siguiente Teorema da una representación de funciones meromorfas Herglotz alternativa a la del Teorema 1.2.3. Damos aquí una demostración mucho más detallada a la dada en el teorema 2 de [28, Cap. 7, Sec. 1].

**Teorema 1.2.4.** (*Chebotarev*) Sea  $f \in \mathfrak{H}$  y  $\{b_k\}_{k \in \mathcal{M}}$  los polos de  $f$ , entonces

$$f(\zeta) = a\zeta + b + \sum_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} A_k \left( \frac{1}{b_k - \zeta} - \frac{1}{b_k} \right) + \frac{A_0}{b_0 - \zeta}, \quad (1.2.7)$$

donde  $a \geq 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$  y  $A_k \geq 0$  para toda  $k \in \mathcal{M}$ . Además

$$\sum_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \frac{A_k}{b_k^2} < \infty \quad (1.2.8)$$

y

$$\operatorname{Res}_{\zeta=b_k} f = -A_k.$$

*Demostración.* Vamos primero a demostrar que

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\zeta}{a_k}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{b_k}\right)^{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{A_{k,n}}{b_k - \zeta} + C_n. \quad (1.2.9)$$

Claramente,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\zeta}{a}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{b}\right)^{-1} &= \frac{b}{a} \left[ \frac{a-b}{b-\zeta} + 1 \right] \\ &= -\frac{A}{b-\zeta} + B, \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

donde  $B \in \mathbb{R}$  y  $A > 0$  siempre que  $a > b$  y  $a, b$  tengan el mismo signo. Por lo tanto, dada nuestra convención de ordenamiento, la fórmula (1.2.9) queda demostrada para  $n = 1$ . Supongamos ahora que la igualdad (1.2.9) se satisface y demostremos que esto implica

$$\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 - \frac{\zeta}{a_k}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{b_k}\right)^{-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{A_{k,n+1}}{b_k - \zeta} + C_{n+1}. \quad (1.2.11)$$

Efectivamente,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 - \frac{\zeta}{a_k}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{b_k}\right)^{-1} &= \left( \sum_{k=1}^n \frac{A_{k,n}}{b_k - \zeta} + C_n \right) \left(1 - \frac{\zeta}{a_{n+1}}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{b_{n+1}}\right)^{-1} \\ &= \left( \sum_{k=1}^n \frac{A_{k,n}}{b_k - \zeta} + C_n \right) \left( \frac{\tilde{A}}{b_{n+1} - \zeta} + C \right) \end{aligned}$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas, obtenemos que

$$\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 - \frac{\zeta}{a_k}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{b_k}\right)^{-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{A_{k,n+1}}{b_k - \zeta} + C_{n+1}. \quad (1.2.12)$$

Defínase el conjunto  $\mathcal{M}_n = \mathcal{M} \cap \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq n, n \in \mathbb{N}\}$  y la sucesión dada por  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  como

$$\begin{aligned} f_n(\zeta) &:= \frac{\zeta - a_0}{\zeta - b_0} \prod_{\substack{k \in \mathcal{M}_n \\ k \neq 0}} \left(1 - \frac{\zeta}{a_k}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{b_k}\right)^{-1} \\ &= \frac{A_{0,n}}{b_0 - \zeta} + \sum_{\substack{k \in \mathcal{M}_n \\ k \neq 0}} \frac{A_{k,n}}{b_k - \zeta} + \tilde{C}_n \\ &= \sum_{k \in \mathcal{M}_n} \frac{A_{k,n}}{b_k - \zeta} + \tilde{C}_n. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Nótese que de la demostración del Teorema 1.2.3 se sigue que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente en compactos de  $\mathbb{C} \setminus \{b_k\}$ .

Supongamos que  $m \in \mathcal{M}_n$ . Como la sucesión  $\{b_k\}_{k \in \mathcal{M}_n}$  está compuesta de

puros polos simples, se tiene que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res} f(\zeta) &= \lim_{\zeta \rightarrow b_m} (\zeta - b_m) f(\zeta) \\
&= \lim_{\zeta \rightarrow b_m} [(\zeta - b_m) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\zeta)] \\
&= \lim_{\zeta \rightarrow b_m} [\lim_{n \rightarrow \infty} (\zeta - b_m) f_n(\zeta)] \\
&= \lim_{\zeta \rightarrow b_m} [\lim_{n \rightarrow \infty} [-A_{m,n} + \sum_{\substack{k \in \mathcal{M}_n \\ k \neq m}} \frac{A_{k,n}}{b_k - \zeta} (\zeta - b_m)]], \tag{1.2.14}
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado (1.2.13). Ahora bien, por el Teorema 7.11 de [35, Cap. 7, Sec. 3] el doble límite en (1.2.14) es igual a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{\zeta \rightarrow b_m} [-A_{m,n} + \sum_{\substack{k \in \mathcal{M}_n \\ k \neq m}} \frac{A_{k,n}}{b_k - \zeta} (\zeta - b_m)]] = \lim_{n \rightarrow \infty} (-A_{m,n}).$$

Denotemos

$$A_m := - \operatorname{Res} f(\zeta). \tag{1.2.15}$$

Utilizando el teorema de *Weierstrass* sobre sucesión de funciones analíticas uniformemente convergentes en compactos de una región (véase el Teorema 15.8 de [32, Cap. 15, Sec. 76]), encontramos que la sucesión de sumas

$$f'_n(0) = \sum_{k \in \mathcal{M}_n} \frac{A_{k,n}}{b_k^2} \tag{1.2.16}$$

converge a  $f'(0)$  cuando el cero no es un polo. Entonces, dado que la sucesión  $\{f'_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es monótona no decreciente, tenemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\substack{k \in \mathcal{M}_n \\ k \neq 0}} \frac{A_{k,n}}{b_k^2} \leq f'(0). \tag{1.2.17}$$

El caso en el que el cero es un polo, hacemos

$$\sum_{\substack{k \in \mathcal{M}_n \\ k \neq 0}} \frac{A_{k,n}}{b_k - \zeta} + C_n = f_n(\zeta) - \frac{A_{0,n}}{b_0 - \zeta} = \tilde{f}_n(\zeta).$$

La función  $\tilde{f}_n(\zeta)$  converge uniformemente a  $\tilde{f}(\zeta) = f(\zeta) - \frac{A_0}{b_0 - \zeta}$  (véase (1.2.15)) en compactos de  $\mathbb{C} \setminus \{b_k\}_{k \neq 0}$ . Y por consiguiente tenemos también que

$$\sum_{\substack{k \in \mathcal{M}_n \\ k \neq 0}} \frac{A_{k,n}}{b_k^2} \leq \tilde{f}'(0).$$

De esto se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{k \in \mathcal{M}_n \\ k \neq 0}} \frac{A_{k,n}}{b_k^2} = \sum_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \frac{A_k}{b_k^2} < \infty. \quad (1.2.18)$$

Por lo tanto, la serie

$$\sum_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \frac{A_k}{b_k^2} \quad (1.2.19)$$

converge. Por otra parte, para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{\substack{k \in \mathcal{M}_n \\ k \neq 0}} A_k \left( \frac{1}{b_k - \zeta} - \frac{1}{b_k} \right) = \sum_{\substack{k \in \mathcal{M}_n \\ k \neq 0}} \frac{A_k}{b_k^2} \left( \frac{1}{\frac{1}{b_k} - \frac{1}{\zeta}} \right), \quad (1.2.20)$$

por lo que la serie del lado derecho de la fórmula (1.2.7) converge. Demostremos ahora que la diferencia entre la función  $f(\zeta)$  y la serie del lado derecho de la fórmula (1.2.7) es una función lineal. Para ello, fijamos un número  $m$  y consideramos para  $n > m$  la diferencia

$$f_n(\zeta) - \left( \sum_{\substack{k \in \mathcal{M}_m \\ k \neq 0}} A_{k,n} \left( \frac{1}{b_k - \zeta} - \frac{1}{b_k} \right) + \frac{A_{0,n}}{b_0 - \zeta} \right) = \sum_{k \in \mathcal{M}_n \setminus \mathcal{M}_m} \frac{A_{k,n}}{b_k - \zeta} + C'_n$$

El lado derecho de la igualdad anterior es una función evidentemente meromorfa Herglotz. Por lo tanto, si  $\text{Im } \zeta > 0$  entonces

$$\text{Im} \left[ f_n(\zeta) - \left( \sum_{\substack{k \in \mathcal{M}_m \\ k \neq 0}} A_{k,n} \left( \frac{1}{b_k - \zeta} - \frac{1}{b_k} \right) + \frac{A_0}{b_0 - \zeta} \right) \right] > 0. \quad (1.2.21)$$

Ahora bien, haciendo que  $n \rightarrow \infty$  en (1.2.21) vemos que para  $\text{Im } \zeta > 0$ ,

$$\text{Im} \left[ f(\zeta) - \left( \sum_{\substack{k \in \mathcal{M}_m \\ k \neq 0}} A_k \left( \frac{1}{b_k - \zeta} - \frac{1}{b_k} \right) + \frac{A_0}{b_0 - \zeta} \right) \right] \geq 0. \quad (1.2.22)$$

Claramente, la función

$$\widehat{f}(\zeta) := f(\zeta) - \left( \sum_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} A_k \left( \frac{1}{b_k - \zeta} - \frac{1}{b_k} \right) + \frac{A_0}{b_0 - \zeta} \right) \quad (1.2.23)$$

es entera. Y por ser  $\widehat{f}(\zeta)$  Herglotz y real (véase el Teorema 1.2.1), tenemos también que  $\widehat{f}(\zeta)$  es real y satisface (1.2.22) para  $\text{Im } \zeta > 0$ .

Ahora, utilizando el mismo argumento que en la demostración del Teorema 1.2.2 se puede mostrar que la función  $\widehat{f}(\zeta)$  en (1.2.23) tiene un solo cero real que denotaremos por  $x_0$ . Así la función  $g(\zeta) = (\zeta - x_0)^{-1} \widehat{f}(\zeta)$  no tiene ceros y  $|\arg g(\zeta)| \leq \pi$  en todo el plano complejo. Por lo tanto, la función entera  $\log g(\zeta)$  mapea todo el plano complejo en una banda  $|\text{Im } \log g(\zeta)| \leq \pi$  y por consiguiente tenemos que  $g(\zeta) = \text{constante} =: a$ . Así

$$\widehat{f}(\zeta) = a\zeta + b. \quad (1.2.24)$$

Que la función  $\widehat{f}$  es una función de la forma (1.2.24) es el contenido del Lema de *Chebotarev* proporcionado en [28, Cap. 5, Sec. 2]. Como  $a$  ejerce rotación sobre la variable  $\zeta$  y  $\widehat{f}$  satisface (1.2.22) para  $\text{Im } \zeta > 0$ , entonces  $a \geq 0$  y por consiguiente  $b \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Teorema 1.2.5.** *Sea  $f \in \mathfrak{H}$  y  $\{b_k\}_{k \in \mathcal{M}}$  los polos de  $f$ . Si*

$$\lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} f(\zeta) = 0,$$

entonces

$$f(\zeta) = \sum_{k \in \mathcal{M}} \frac{A_k}{b_k - \zeta},$$

donde  $A_k$  es como en el Teorema 1.2.4.

*Demostración.* De la representación (1.2.7) dada en el Teorema 1.2.4, inmediatamente concluimos que  $a = 0$ . Ahora

$$0 = \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} f(\zeta) = b + \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \sum_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} A_k \left( \frac{1}{b_k - \zeta} - \frac{1}{b_k} \right) + \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \frac{A_0}{b_0 - \zeta}.$$

Así

$$b = - \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \sum_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} A_k \left( \frac{1}{b_k - \zeta} - \frac{1}{b_k} \right) = - \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \sum_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \frac{A_k}{b_k^2} \left( \frac{1}{\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{b_k}} \right). \quad (1.2.25)$$

Por la ecuación (1.2.8), la serie de la última igualdad en (1.2.25) es uniformemente convergente con respecto a  $\zeta$ . Entonces podemos escribir

$$b = - \sum_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \frac{A_k}{b_k^2} \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \left( \frac{1}{\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{b_k}} \right) = \sum_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \frac{A_k}{b_k}. \quad (1.2.26)$$

Así, sustituyendo (1.2.26) en (1.2.7) tenemos que

$$f(\zeta) = \sum_{k \in \mathcal{M}} \frac{A_k}{b_k - \zeta}.$$

□





## Capítulo 2

# Teoría espectral en espacios de Hilbert

Este capítulo es el más extenso de todos. Contiene los principios básicos de la teoría de espacios de Hilbert (Sec. 2.1, 2.2). Las secciones 2.3 - 2.7 están destinadas a la teoría de operadores lineales en espacios de Hilbert. En estas secciones se dan los conceptos de operadores acotados y no acotados, cerrados, adjuntos, compactos y auto-adjuntos. En la Sección 2.5, particularmente, se estudian las propiedades de funcionales lineales en espacios de Hilbert  $\mathcal{H}$  y se dan las demostraciones de los Teoremas 2.5.1 y 2.5.2. El primero corresponde al Teorema de representación de Riesz y el segundo a funcionales lineales y continuos; ambos fueron esenciales en la demostración del Teorema 3.1.2. La Sección 2.9 está dedicada a los operadores simétricos y sus propiedades. En las secciones 2.8 - 2.12 se trata la teoría espectral de operadores. Hacemos mención de espectros de operadores lineales y del Teorema espectral (Teorema 2.12.1). En la Sección 2.13 se demuestran dos teoremas centrales para nuestra investigación (Teorema 2.13.1 (Criterio de Weyl) y Teorema 2.13.2 (Teorema de Weyl)).

### 2.1. Espacios de Hilbert

**Definición 2.1.1.** Considere un espacio lineal complejo  $\mathcal{L}$ . Definimos como producto interior  $(\cdot, \cdot)$  en  $\mathcal{L}$  a una función de  $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que:

(a)  $(f, g) = \overline{(g, f)}, \quad (f, g \in \mathcal{L}).$

(b)  $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 (f_1, g) + \alpha_2 (f_2, g), \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}).$

(c)  $(f, f) > 0, \quad (f \neq 0).$

De (a) y (b) de la Definición 2.1.1 se sigue que el producto interior  $(\cdot, \cdot)$ , es una función antilineal (o *semilineal*) con respecto a la segunda variable, esto es:

$$(f, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \bar{\beta}_1 (f, g_1) + \bar{\beta}_2 (f, g_2). \quad (2.1.1)$$

**Definición 2.1.2.** Un espacio lineal  $\mathcal{L}$  con producto interior  $(\cdot, \cdot)$ , es un espacio *pre-Hilbert*. Y para cualquier pre-Hilbert  $\mathcal{L}$ , dicho producto interior define una norma, denotada por

$$\|f\| := (f, f)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in \mathcal{L}. \quad (2.1.2)$$

En efecto, (2.1.2) satisface los axiomas de norma:  $\|0\| = 0$  y por la Definición 2.1.1 inciso (c), se tiene que  $\|f\| > 0$  si  $f \neq 0$ ; nuevamente de la Definición 2.1.1 inciso (b) y (2.1.1) se tiene  $(\lambda f, \lambda f) = |\lambda|^2 (f, f)$ , es decir,  $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ . Es fácil demostrar que se satisface la desigualdad del triángulo haciendo uso de la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad (2.1.3)$$

que establecemos en el Lema 2.1.1. En efecto,

$$(f + g, f + g) = \|f\|^2 + 2 \operatorname{Re}(f, g) + \|g\|^2. \quad (2.1.4)$$

Y así  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$  se deduce de (2.1.3) y (2.1.4).

**Lema 2.1.1.** (*Desigualdad de Cauchy-Schwarz*)

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|. \quad (2.1.5)$$

*Demostración.* Sean  $f, g \in \mathcal{L}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ; la desigualdad (2.1.5) es trivial si  $f = 0$ , por lo tanto suponga  $f \neq 0$ . De esto se sigue que

$$0 \leq \|\alpha f - \beta g\|^2 = |\alpha|^2 (f, f) - \alpha \bar{\beta} (f, g) - \bar{\alpha} \beta \overline{(f, g)} + |\beta|^2 (g, g)$$

y haciendo  $\alpha = \overline{(f, g)}$ ,  $\beta = (f, f)$  se llega a

$$(f, f)[(f, f)(g, g) - |(f, g)|^2] \geq 0$$

lo cual implica  $|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ .  $\square$

**Definición 2.1.3.** Sea  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión infinita en  $\mathcal{L}$ . Diremos que  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $f \in \mathcal{L}$  si  $\|f_k - f\| \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

**Definición 2.1.4.** Cualquier espacio *pre-Hilbert* completo con respecto a la norma (2.1.2), recibe el nombre de espacio de *Hilbert* que denotaremos por  $\mathcal{H}$ .

La norma que utilizaremos en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  siempre será la norma dada por (2.1.2).

**Definición 2.1.5.** Se dice que  $M \subset \mathcal{H}$  es un subespacio de  $\mathcal{H}$  si es un subconjunto lineal cerrado de  $\mathcal{H}$ , de esta forma  $M$  es un espacio de Hilbert en sí mismo.

Denótese por  $\vee M$  al subespacio más pequeño que contiene a  $M$ , donde  $M$  es un subconjunto de  $\mathcal{H}$ ; el subespacio  $\vee M$  coincide con la cerradura de la combinación lineal de los elementos de  $M$ .

**Definición 2.1.6.** Sea  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión infinita en  $\mathcal{H}$ . Diremos que  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge débilmente a  $f \in \mathcal{H}$ , si  $(f_k, g) \rightarrow (f, g)$  para todo  $g \in \mathcal{H}$ .

**Teorema 2.1.1.** *La sucesión de normas de una sucesión débilmente convergente es acotada.*

El Teorema 2.1.1 es una consecuencia directa de teoremas generales de la teoría de espacios de Banach y del teorema de Representación de Riesz (véase [3, Cap. 2, Sec. 16]). La demostración del Teorema 2.1.1 se encuentra en el Corolario 1 de [3, Cap. 2, Sec. 23].

En relación con el Teorema 2.1.1 se tiene también el siguiente resultado cuya demostración está ligada al Teorema 2.1.1 (véase el Corolario 2 de [3, Cap. 2, Sec. 23]).

**Teorema 2.1.2.** *Todo espacio de Hilbert es débilmente completo.*

Aquí damos por terminado un recuento básico y breve de los conceptos fundamentales de los espacios de Hilbert. Y a continuación mencionamos dos ejemplos de casos particulares de dichos espacios.

**Ejemplo 2.1.1.** El conjunto  $l_2(\mathbb{N})$  es un espacio de Hilbert definido como:

$$l_2(\mathbb{N}) := \{\varphi = \{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} : \sum_{k \in \mathbb{N}} |\varphi_k|^2 < \infty\}. \quad (2.1.6)$$

Y el producto interior en  $l_2(\mathbb{N})$  es

$$(\varphi, \psi) := \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k \overline{\psi_k}.$$

**Ejemplo 2.1.2.** El espacio lineal  $L^2_\rho$  es un espacio de Hilbert definido como el conjunto de todas las funciones  $f$   $\rho$ -medibles, donde  $\rho$  está definido en todo

$\mathbb{R}$ , es no decreciente, continua por la izquierda y de variación acotada (véase [3, Cap. 1, Sec. 12]), para el cual la integral de *Lebesgue-Stieltjes*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 d\rho(t)$$

existe y es finita. La métrica que se usa para el espacio  $L^2_\rho$  es la generada por el producto interior

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}d\rho(t).$$

**Definición 2.1.7.** El conjunto  $l_{fin}(\mathbb{N})$  es el espacio que consiste del conjunto de todas las sucesiones  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  con un número finito de elementos distintos de cero.

## 2.2. Ortogonalidad

**Definición 2.2.1.** Dos elementos  $f, g$  en  $\mathcal{H}$  son *ortogonales* si  $(f, g) = 0$  (en símbolos  $f \perp g$ ). Y diremos que  $f$  es ortogonal a un conjunto  $M \subset \mathcal{H}$  si  $(f, g) = 0$  para todo  $g \in M$  (en símbolos  $f \perp M$ ).

**Definición 2.2.2.** El conjunto de todos los vectores ortogonales a un subconjunto  $M$  de  $\mathcal{H}$  es denotado por  $M^\perp$ . En notación

$$M^\perp = \{f \in \mathcal{H} : (f, g) = 0, \quad \forall g \in M\}.$$

Note que  $M^\perp$  es siempre un subespacio. En efecto, fácilmente se verifica que si  $f, g \in M^\perp$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , entonces  $\alpha f + \beta g \in M^\perp$ . Observe también que  $M^\perp$  es siempre cerrado. En efecto, sea  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M^\perp$ . Suponga que  $f_k \rightarrow f$ , entonces para todo  $h \in M$ , se tiene que  $(f_k, h) = 0$ , para toda  $k \in \mathbb{N}$ , y por la continuidad del producto interior, la sucesión  $\{(f_k, h)\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $(f, h)$  y  $(f, h) = 0$ , lo que implica que  $f \in M^\perp$ .

**Lema 2.2.1.** *Entre los conjuntos  $\{0\}$  y  $\mathcal{H}$  se cumplen las siguientes igualdades:  $\{0\}^\perp = \mathcal{H}$  y  $\{0\} = \mathcal{H}^\perp$ .*

*Demostración.* Por definición,  $\{0\}^\perp = \{f \in \mathcal{H} : (f, 0) = 0\} = \mathcal{H}$  y por otro lado,  $\mathcal{H}^\perp = \{f \in \mathcal{H} : (f, g) = 0 \quad \forall g \in \mathcal{H}\}$ , entonces haciendo  $g = f$  tenemos que  $(f, f) = 0$  lo que implica que  $f = 0$ . De esto se sigue que  $\mathcal{H}^\perp = \{0\}$ .  $\square$

**Lema 2.2.2.** *Sea  $M$  un subespacio de  $\mathcal{H}$ . Existe  $g \neq 0 \in \mathcal{H}$  tal que  $g \perp M$  si y sólo si  $M \neq \mathcal{H}$ .*

*Demostración.* La existencia de  $g$  con las propiedades indicadas implica directamente que  $M \neq \mathcal{H}$ . En efecto, si  $M = \mathcal{H}$  y  $g \perp M$ , entonces tendría que  $g = 0$  por el Lema 2.2.1. La afirmación inversa sigue del hecho de que el subespacio  $M^\perp$  o bien es trivial en cuyo caso  $M = \mathcal{H}$  o bien no lo es, y por lo tanto existe  $g \neq 0$  tal que  $g \perp M$ .  $\square$

**Lema 2.2.3.** *Si  $f \perp M$ , entonces  $f \perp \vee M$ . En particular, si  $\vee M = \mathcal{H}$  y  $f \perp M$ , entonces  $f = 0$ .*

*Demostración.* Suponga que  $f \perp M$ , entonces se tiene que  $f \perp M_1$  donde  $M_1$  es el conjunto de todas las combinaciones lineales de  $M$ . Si  $g \in \vee M$ , entonces existe  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M_1$  tal que  $g_k \rightarrow g$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Puesto que  $(f, g_k) = 0$ , para toda  $k \in \mathbb{N}$ , haciendo  $k \rightarrow \infty$  tenemos que  $(f, g) = 0$ ; por lo tanto  $f \perp \vee M$ . Si  $\vee M = \mathcal{H}$ , entonces  $f = 0$  por el Lema 2.2.1.  $\square$

**Teorema 2.2.1.** *(Teorema de Pitágoras). Este teorema afirma que para cualesquiera elementos  $u_1, \dots, u_n$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  ortogonales entre sí, se tiene que*

$$\left\| \sum_{k=1}^n u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|u_k\|^2. \quad (2.2.1)$$

*Demostración.* Para  $n = 2$  tenemos

$$\|f + g\|^2 = (f + g, f + g) = \|f\|^2 + 2\operatorname{Re}(f, g) + \|g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2. \quad (2.2.2)$$

De aquí que podemos extender la igualdad (2.2.2) en general para  $n$  por inducción hasta obtener (2.2.1).  $\square$

**Lema 2.2.4.** *Sea  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de vectores ortogonales entre sí en  $\mathcal{H}$ . Entonces, la serie  $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k$  converge si y sólo si  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\|^2 < \infty$ . Además,*

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k \right\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\|^2. \quad (2.2.3)$$

*Demostración.* Considere la suma parcial  $g_n = \sum_{k=1}^n u_k$ . Se sigue del Teorema de Pitágoras, Teorema 2.2.1, que

$$\|g_{n+p} - g_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} \|u_k\|^2.$$

Así  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy si y sólo si la serie del lado derecho de (2.2.3) es convergente. Como  $\mathcal{H}$  es un espacio completo, entonces se tiene que  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión convergente.

La igualdad en (2.2.3) se obtiene haciendo  $n \rightarrow \infty$  en (2.2.1).  $\square$

**Definición 2.2.3.** Un conjunto  $M$  de vectores en  $\mathcal{H}$  se dice que es un *sistema ortonormal* si:

1.  $\|f\| = 1, \quad \forall f \in M.$
2.  $(f, g) = 0, \quad \forall f, g \in M$  con  $f \neq g.$

**Definición 2.2.4.** Se dice que  $\mathcal{H}$  es *separable* si coincide con la cerradura de algunos de sus subconjuntos numerables.

**Teorema 2.2.2.** *Si el espacio  $\mathcal{H}$  es separable, entonces cada sistema ortonormal de vectores en  $\mathcal{H}$  consiste de un número finito o numerable de elementos.*

*Demostración.* Sea  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión densa en  $\mathcal{H}$  y sea  $M$  un sistema ortonormal de vectores en  $\mathcal{H}$ . Demostraremos que los elementos de  $M$  se pueden enumerar; para ello, tómesese dos vectores distintos  $g_1, g_2$  en  $M$  y escójase  $f_n$ , en  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\|g_1 - f_n\| < \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Haga lo mismo para  $g_2$  y un segundo elemento  $f_m$  en  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Ya que,

$$\|g_1 - g_2\|^2 = \|g_1\|^2 + \|g_2\|^2 = 2,$$

tenemos

$$\sqrt{2} = \|g_1 - g_2\| \leq \|g_1 - f_n\| + \|f_n - g_2\| < \frac{1}{2}\sqrt{2} + \|g_2 - f_n\|.$$

De donde se sigue que

$$\|g_2 - f_n\| > \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

por lo tanto  $f_n \neq f_m$  y  $n \neq m$  y de esta manera podemos asociar con cada vector de  $M$  un número entero positivo diferente  $k$ ; esto último implica que el sistema ortonormal  $M$  es finito o numerable.  $\square$

Como consecuencia del Teorema 2.2.2 se tiene el siguiente comentario.

*Comentario 2.2.1.* La existencia de un sistema ortonormal de vectores no numerable en  $\mathcal{H}$  implica que el espacio es no separable.

De aquí en adelante, vamos a considerar que el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es siempre separable.

**Teorema 2.2.3.** Sea  $\{u_k\}_{k=1}^N$ ,  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , un sistema ortonormal en  $\mathcal{H}$ . Entonces para cada  $f \in \mathcal{H}$ ,

$$\sum_{k=1}^N |(f, u_k)|^2 \leq \|f\|^2 \quad (2.2.4)$$

y si  $N$  es infinito existe  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m (f, u_k)u_k$ . Además, para  $\sum_{k=1}^N (f, u_k)u_k = f_0 \in \mathcal{H}$  se cumple que

$$\|f - f_0\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N |(f, u_k)|^2 = \|f\|^2 - \|f_0\|^2. \quad (2.2.5)$$

*Demostración.* Note que

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^n (f, u_k)u_k \right\|^2 &= \left( f - \sum_{k=1}^n (f, u_k)u_k, f - \sum_{k=1}^n (f, u_k)u_k \right) \\ &= \|f\|^2 - \left( f, \sum_{k=1}^n (f, u_k)u_k \right) - \left( \sum_{k=1}^n (f, u_k)u_k, f \right) + \left\| \sum_{k=1}^n (f, u_k)u_k \right\|^2 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |(f, u_k)|^2. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

De la ecuación (2.2.6) se sigue que

$$\sum_{k=1}^n |(f, u_k)|^2 \leq \|f\|^2 \quad (2.2.7)$$

para toda  $n \leq N$  si  $N$  es finito y para toda  $n \in \mathbb{N}$  si  $N$  es infinito. Ahora bien, pasando (2.2.7) al límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , obtenemos (2.2.4). Y dado que (2.2.4) se satisface, tenemos  $\{(f, u_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset l_2(\mathbb{N})$  lo cual implica por el Lema 2.2.4 que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N (f, u_k)u_k$  existe. La igualdad (2.2.5) se sigue inmediatamente pasando al límite cuando  $n \rightarrow \infty$  la igualdad (2.2.6).  $\square$

**Teorema 2.2.4.** Sea  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión ortonormal, entonces  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge débilmente a cero.

*Demostración.* Sea  $f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k)u_k$ , entonces por (2.2.4) la sucesión

$$\{(f, u_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset l_2(\mathbb{N})$$

y por lo tanto  $\lim_{k \rightarrow \infty} (f, u_k) = 0$ .  $\square$



**Definición 2.2.5.** Un sistema ortonormal  $\{u_k\}_{k=1}^N$ ,  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , se dice que es completo si la igualdad se da en (2.2.4) para cada  $f \in \mathcal{H}$

**Definición 2.2.6.** Un sistema ortonormal  $\{u_k\}_{k=1}^N$ ,  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , se dice que es total si, para toda  $k$ ,  $(f, u_k) = 0$  implica que  $f = 0$ .

El teorema descrito a continuación es el Teorema 4 de [9, Cap. 2, Sec. 2], cuya demostración no damos aquí.

**Teorema 2.2.5.** Sea  $\{u_k\}_{k=1}^N$ ,  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , un sistema ortonormal en  $\mathcal{H}$ . Las siguientes propiedades son equivalentes:

- a)  $\vee \{u_k\}_{k=1}^N = \mathcal{H}$ ,  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .
- b)  $\{u_k\}_{k=1}^N$ ,  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , es completo.
- c) Cada elemento  $h \in \mathcal{H}$  puede expandirse en una serie de Fourier con respecto al sistema ortonormal  $\{u_k\}_{k=1}^N$ ,  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .
- d) El sistema ortonormal  $\{u_k\}_{k=1}^N$ ,  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , es total.

**Definición 2.2.7.** Se denomina *base ortonormal* a cualquier sistema ortonormal  $\{u_k\}_{k=1}^N$ ,  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , que satisface cualquiera de las propiedades del Teorema 2.2.5.

**Definición 2.2.8.** La *dimensión* del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es igual a la cardinalidad de su base ortonormal  $\{u_k\}_{k=1}^N$ ,  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , o sea,  $\dim(\mathcal{H}) = N$ .

De aquí en adelante,  $\dim(\mathcal{H}) = \infty$ .

**Definición 2.2.9.** Dos espacios de Hilbert  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$  son *isométricamente isomorfos* si existe una isometría  $U$  de  $\mathcal{H}_1$  sobre  $\mathcal{H}_2$ , es decir, un operador lineal  $U$  de  $\mathcal{H}_1$  sobre  $\mathcal{H}_2$  tal que, para toda  $f, g \in \mathcal{H}_1$ ,

$$(Uf, Ug)_2 = (f, g)_1. \quad (2.2.8)$$

*Propiedad 2.2.1.* Cada operador isométrico tiene un operador inverso, el cual es también isométrico.

Si  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ , entonces  $U$  se convierte en un operador unitario.

El siguiente teorema es el Teorema 7 de [9, Cap. 2, Sec. 2] y cuya demostración no proporcionamos aquí.

**Teorema 2.2.6.** *Cualquier espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , tal que  $\dim(\mathcal{H}) = \infty$ , es isométricamente isomorfo a  $l_2(\mathbb{N})$ . De hecho, existe una correspondencia uno a uno entre isometrías  $U$  de  $\mathcal{H}$  sobre  $l_2(\mathbb{N})$  y bases ortonormales  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{H}$ . Esta correspondencia está definida por  $Uu_k = \delta_k$ , para toda  $k$ , donde  $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es la base canónica en  $l_2(\mathbb{N})$ .*

**Teorema 2.2.7.** *(Teorema de proyección) Sea  $F$  un subespacio de  $\mathcal{H}$ . Para cualquier  $h \in \mathcal{H}$  existe una única representación*

$$h = f + g, \quad (f \in F, g \perp F). \quad (2.2.9)$$

*Demostración.* Si  $h \in F$ , la descomposición es trivial, pues basta hacer  $h = h + 0$  (recordemos que  $0$  es ortogonal a cualquier subconjunto de  $\mathcal{H}$ ). Por lo tanto, suponga que  $h \notin F$ . Sea  $f$  el único elemento de  $F$  que satisface

$$\|h - f\| = \inf_{w \in F} \|h - w\|.$$

Probaremos que  $h = f + (h - f)$  es la descomposición deseada. Si  $w \in F$  y  $\zeta \in \mathbb{C}$ , entonces  $f + \zeta w \in F$  y

$$\|h - f\|^2 \leq \|h - f - \zeta w\|^2 = \|h - f\|^2 - 2\operatorname{Re} \zeta(w, h - f) + |\zeta|^2 \|w\|^2.$$

Por lo tanto

$$-2\operatorname{Re} \zeta(w, h - f) + |\zeta|^2 \|w\|^2 \geq 0.$$

Si  $\zeta > 0$ , entonces dividiendo por  $\zeta$  y haciendo que  $\zeta \rightarrow 0$  obtenemos

$$\operatorname{Re}(w, h - f) \leq 0. \quad (2.2.10)$$

De manera similar, reemplace  $\zeta$  por  $-i\zeta$  ( $\zeta > 0$ ) y divida entre  $\zeta$ . Entonces haciendo  $\zeta \rightarrow 0$ , obtenemos

$$\operatorname{Im}(w, h - f) \leq 0. \quad (2.2.11)$$

Note también que  $-f \in F$ ; análogamente, las desigualdades (2.2.10) y (2.2.11) se satisfacen con  $-w$  en lugar de  $w$ . Por lo tanto,  $(w, h - f) = 0$  para cada  $w \in F$ ; lo que implica que  $h - f \in F^\perp$ . Para probar la unicidad, observe que si  $h = f_1 + g_1$ , donde  $f_1 \in F$ ,  $g_1 \in F^\perp$ , entonces  $f - f_1 \in F$  y  $g - g_1 \in F^\perp$ . Ya que  $f - f_1 = g_1 - g$ , debemos tener que  $f - f_1 = g_1 - g = 0$ . Por lo tanto  $f = f_1$  y  $g = g_1$ .  $\square$

*Comentario 2.2.2.* El Teorema 2.2.7 dice que cualquier elemento de  $\mathcal{H}$  puede descomponerse en un elemento de un subespacio dado y otro en su complemento. Por eso, podemos expresar  $\mathcal{H}$  como una suma *ortogonal* del subespacio  $F$  y su complemento ortogonal, es decir,

$$\mathcal{H} = F \oplus F^\perp.$$

Ocasionalmente también escribiremos  $F^\perp = \mathcal{H} \ominus F$  y diremos que  $F^\perp$  es el complemento ortogonal de  $F$ . Nótese que ya habíamos utilizado esta notación cuando  $F$  no necesariamente es un subespacio. Claramente, por el Teorema de Pitágoras, Teorema 2.2.1, se tiene que

$$\|h\|_{\mathcal{H}}^2 = \|f\|_F^2 + \|g\|_{H \ominus F}^2, \quad \forall h \in \mathcal{H}, f \in F, g \in F^\perp. \quad (2.2.12)$$

Con la ayuda del Teorema de proyección 2.2.7 demostraremos la siguiente afirmación.

**Teorema 2.2.8.** *La bola unitaria en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es débilmente compacta.*

*Demostración.* Sea  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión en la bola unitaria, o sea que

$$\|f_k\| \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sea  $G = \vee\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Defina a  $F$  como

$$F = H \ominus G.$$

Considere, ahora, la siguiente sucesión

$$\{(f_1, f_k)\}_{k \in \mathbb{N}}. \quad (2.2.13)$$

La sucesión de (2.2.13) está acotada, ya que

$$|(f_1, f_k)| \leq \|f_1\| \cdot \|f_k\| \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.2.14)$$

Y así, por ser (2.2.13) una sucesión acotada de números complejos, contiene una subsucesión  $\{f_{1k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  para la cual el  $\lim_{k \rightarrow \infty} (f_1, f_{1k})$  existe. Similarmente, por el acotamiento de la sucesión  $\{(f_2, f_{1k})\}_{k \in \mathbb{N}}$  tenemos que  $\{f_{1k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  contiene una subsucesión  $\{f_{2k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  para la cual el  $\lim_{k \rightarrow \infty} (f_2, f_{2k})$  existe. Repitiendo este argumento, llegamos a una sucesión infinita de sucesiones de la siguiente forma

$$\begin{array}{cccccc} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1k} & \cdots & = \{f_{1k}\}_{k \in \mathbb{N}} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2k} & \cdots & = \{f_{2k}\}_{k \in \mathbb{N}} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \cdots & f_{3k} & \cdots & = \{f_{3k}\}_{k \in \mathbb{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{k1} & f_{k2} & f_{k3} & \cdots & f_{kk} & \cdots & = \{f_{kk}\}_{k \in \mathbb{N}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

en el que cada renglón es una subsucesión del anterior. Entonces, es claro que la sucesión de la diagonal

$$f_{11}, f_{22}, f_{33}, \dots = \{f_{kk}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

tiene la propiedad de que para cada  $r \in \mathbb{N}$ , el  $\lim_{k \rightarrow \infty} (f_r, f_{kk})$  existe. Por lo tanto, se sigue que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (f, f_{kk})$  existe para cada  $f$  combinación lineal de elementos de  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , y por lo tanto, para cada  $f \in G$ . Ahora bien, si  $f \in F$ , entonces

$$\{(f, f_{kk})\}_{k \in \mathbb{N}} = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Consecuentemente,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f, f_{kk}) \quad (2.2.15)$$

existe para cada  $f \in F$  porque (2.2.15) es una sucesión estacionaria. Dado que  $\mathcal{H} = F \oplus G$ , el resultado obtenido implica la existencia de  $\lim_{k \rightarrow \infty} (h, f_{kk})$ , para cada  $h \in \mathcal{H}$ . Por lo tanto, la sucesión  $\{f_{kk}\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en el sentido de la convergencia débil. Pero por la completez débil del espacio (véase el Teorema 2.1.2), la sucesión  $\{f_{kk}\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge débilmente a  $f_\infty$  en la bola unitaria. En efecto,

$$1 \geq \left| \left( f_{kk}, \frac{f_\infty}{\|f_\infty\|} \right) \right| \rightarrow \|f_\infty\|, \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

Esto prueba el teorema.  $\square$

**Teorema 2.2.9.** *Para cualquier subconjunto  $M \neq \emptyset$  de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de  $M$  es denso en  $\mathcal{H}$  si y sólo si  $M^\perp = \{0\}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\vee M = \mathcal{H}$ . Entonces por el Lema 2.2.3  $M^\perp = \{0\}$ . Probemos ahora la afirmación conversada. Supongamos que  $M^\perp = \{0\}$ . Es fácil ver que  $\vee M^\perp = \{0\}$ ; en efecto, si  $f \perp \vee M$ , entonces  $f \perp M$  y por lo tanto  $f = 0$ . Ahora utilizando el Teorema de Proyección 2.2.7 y notando que

$$\mathcal{H} = \vee M \oplus \{0\} \quad (2.2.16)$$

tenemos de manera inmediata que  $\mathcal{H} = \vee M$ .  $\square$

**Definición 2.2.10.** En analogía con (2.2.12), el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  es el espacio de vectores

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad f_1, f_2 \in \mathcal{H},$$

donde

$$\left( \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right) := (f_1, g_1) + (f_2, g_2)$$

y, entonces,

$$\left\| \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2.$$

## 2.3. Operadores lineales en espacios de Hilbert

**Definición 2.3.1.** Un operador lineal  $T$  en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es una función definida en un subconjunto lineal de  $\mathcal{H}$  que denotaremos por  $\text{dom}(T)$  tal que  $T : \text{dom}(T) \rightarrow \mathcal{H}$ , y  $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T f + \beta T g$ , para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $f, g \in \text{dom}(T)$ .

**Definición 2.3.2.** El rango de  $T$  se define como

$$\text{ran}(T) = T \text{dom}(T) = \{g \in \mathcal{H} : g = T f, f \in \text{dom}(T)\}. \quad (2.3.1)$$

**Definición 2.3.3.** Sea  $T$  un operador lineal en  $\mathcal{H}$ , entonces el conjunto de los ceros o el núcleo de  $T$  se define como:

$$\ker(T) = \{f \in \text{dom}(T) : T f = 0\}. \quad (2.3.2)$$

**Definición 2.3.4.** Si el operador  $T$  mapea a cada pareja de elementos distintos de  $\text{dom}(T)$  en una pareja distinta de elementos de  $\text{ran}(T)$ , entonces afirmamos que existe un operador inverso denotado por  $T^{-1}$  de  $T$ , que mapea los elementos de  $\text{ran}(T)$  en los elementos de  $\text{dom}(T)$ .

*Comentario 2.3.1.* El operador  $T$  es invertible si y sólo si  $\ker(T) = \{0\}$ .  $T^{-1}$  es también lineal y  $\text{dom}(T^{-1}) = \text{ran}(T)$ ,  $\text{ran}(T^{-1}) = \text{dom}(T)$ .

**Definición 2.3.5.**  $T \supset S$  es una extensión de  $S$  si y sólo si  $\text{dom}(T) \supset \text{dom}(S)$  y  $S f = T f$  para todo  $f \in \text{dom}(S)$ .

## 2.4. Operadores lineales acotados

**Definición 2.4.1.** Un operador lineal  $T$  es acotado si para todo  $f \in \text{dom}(T)$  existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|T f\| \leq C \|f\|.$$

**Teorema 2.4.1.** *Un operador lineal  $T$  es acotado si y sólo si es continuo.*

*Demostración.* Suponga que  $T$  es un operador acotado, entonces para demostrar la continuidad en cualquier punto  $f_0$ , note que

$$\|Tf - Tf_0\| = \|T(f - f_0)\| \leq C\|f - f_0\|.$$

Por lo tanto, dado cualquier  $\epsilon > 0$ , tómesese un  $\delta = \frac{\epsilon}{C}$ . Entonces si  $\|f - f_0\| < \delta$  tenemos que  $\|Tf - Tf_0\| < \epsilon$ . Inversamente, suponga que  $T$  es un operador continuo, es decir, dado  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $f, f_0 \in \text{dom}(T)$  y  $\|f - f_0\| < \delta$ , entonces  $\|Tf - Tf_0\| < \epsilon$ . Tome alguna constante  $\tilde{C}$  con  $0 < \tilde{C} < \delta$ . Entonces, si  $f - f_0 \neq 0$  se tiene que

$$\left\| \frac{\tilde{C}(f - f_0)}{\|f - f_0\|} \right\| = \tilde{C} < \delta$$

y así

$$\epsilon > \left\| T \left( \frac{\tilde{C}(f - f_0)}{\|f - f_0\|} \right) \right\| = \tilde{C} \frac{\|T(f - f_0)\|}{\|f - f_0\|}. \quad (2.4.1)$$

La desigualdad (2.4.1) prueba que  $\|T(f - f_0)\| < C\|f - f_0\|$  con  $C = \frac{\epsilon}{\tilde{C}}$ .  $\square$

**Teorema 2.4.2.** *Sea  $T$  un operador lineal en  $\mathcal{H}$ .  $T$  tiene un inverso acotado si y sólo si existe  $C > 0$  tal que, para todo  $f \in \text{dom}(T)$ ,*

$$\|Tf\| \geq C\|f\|. \quad (2.4.2)$$

*Demostración.* Suponga que (2.4.2) es válido, entonces  $\ker(T) = \{0\}$ . Esto garantiza la existencia de  $T^{-1}$ . Sustituyendo  $Tf = g$  en (2.4.2) obtenemos que, para toda  $g \in \text{dom}(T^{-1}) = \text{ran}(T)$ ,

$$\|g\| \geq C\|T^{-1}g\|. \quad (2.4.3)$$

Por lo tanto,  $\|T^{-1}g\| \leq C^{-1}\|g\|$ . Para probar la afirmación converso, suponga que existe  $T^{-1}$  y es acotado, entonces existe una constante  $\tilde{C}$  tal que  $\|T^{-1}g\| \leq \tilde{C}\|g\|$ . Si hacemos  $f = T^{-1}g$  obtenemos (2.4.2) con  $C = \frac{1}{\tilde{C}}$ .  $\square$

**Definición 2.4.2.**  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  es el conjunto de todos los operadores acotados que actúan en todo el espacio  $\mathcal{H}$ .

**Definición 2.4.3.** Un operador  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  se dice que es compacto si para cada conjunto acotado  $F$  de vectores de  $\mathcal{H}$ , el conjunto  $\overline{\{Tf : f \in F\}}$  es compacto.

**Definición 2.4.4.** El conjunto de todos los operadores compactos en  $\mathcal{H}$  forman un subespacio cerrado de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . A este subespacio lo vamos a denotar por  $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$ .

**Definición 2.4.5.** Un operador  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  es de rango finito, si

$$\dim \operatorname{ran}(T) < \infty. \quad (2.4.4)$$

**Teorema 2.4.3.** *Los operadores de rango finito son compactos.*

*Demostración.* Sea  $T$  tal que

$$\dim \operatorname{ran}(T) < \infty. \quad (2.4.5)$$

Tomemos una sucesión  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  acotada en  $\mathcal{H}$ . Entonces como  $T$  es un operador acotado,  $\{Tf_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión acotada y como sucede (2.4.5), entonces el conjunto acotado  $\{Tf_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  está en un espacio de dimensión finita. Y esto quiere decir que dicho conjunto es relativamente compacto. Así, hemos probado que los operadores de rango finito son compactos.  $\square$

**Definición 2.4.6.** Sea  $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  y  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Decimos que  $T = s - \lim_{k \rightarrow \infty} T_k$  si para todo elemento  $f \in \mathcal{H}$ ,  $\{T_k f\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $Tf$  (véase la Definición 2.1.3).

**Definición 2.4.7.** El operador identidad  $I \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , es tal que

$$If = f, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

## 2.5. Funcionales lineales

**Definición 2.5.1.** Un funcional lineal  $\mathbf{l}$  en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es una función definida en un subconjunto lineal de  $\mathcal{H}$  que denotaremos por  $\operatorname{dom}(\mathbf{l})$  tal que  $\mathbf{l} : \operatorname{dom}(\mathbf{l}) \rightarrow \mathbb{C}$ , y  $\mathbf{l}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathbf{l}(f) + \beta \mathbf{l}(g)$ , para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $f, g \in \operatorname{dom}(\mathbf{l})$ .

**Definición 2.5.2.** De la misma forma a como se hizo con operadores lineales, defínase

$$\ker \mathbf{l} : \{f \in \mathcal{H} : \mathbf{l}(f) = 0\}. \quad (2.5.1)$$

*Comentario 2.5.1.* La linealidad de  $\mathbf{l}$  implica la linealidad del  $\ker \mathbf{l}$ . Note, además, que si  $\mathbf{l}$  es un funcional lineal continuo, entonces  $\ker \mathbf{l}$  es cerrado, o sea,  $\ker \mathbf{l}$  es un subespacio. En efecto, si  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $\ker \mathbf{l}$  tal que  $f_n \rightarrow f$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $0 = \mathbf{l}(f_n) \rightarrow \mathbf{l}(f)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por lo que  $f \in \ker \mathbf{l}$ .

**Teorema 2.5.1.** (*Teorema de Representación de Riesz*)  $\mathbf{l}$  es un funcional lineal continuo en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  si y sólo si existe  $g \in \mathcal{H}$  tal que  $\mathbf{l}$  puede representarse unívocamente de la siguiente forma

$$\mathbf{l}(f) = (f, g) \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (2.5.2)$$

*Demostración.* Note que si el funcional lineal  $\mathbf{l}$  es idénticamente cero, hacemos  $g = 0$ . Si  $\mathbf{l} \neq 0$ , consideramos el subespacio  $\ker \mathbf{l}$ . Ahora bien, como  $\mathbf{l}$  es continuo, por el comentario 2.5.1, tenemos que  $\ker \mathbf{l}$  es cerrado y lineal. Y por ser  $\mathbf{l}$  no trivialmente cero,  $\ker \mathbf{l} \neq \mathcal{H}$ . Esto último implica que existe al menos un elemento  $h$  en  $(\ker \mathbf{l})^\perp$  con  $\|h\| = 1$ . Así, para cada  $f \in \mathcal{H}$  existe un número  $\alpha \in \mathbb{C}$  tal que  $f - \alpha h \in \ker \mathbf{l}$ . Efectivamente, si  $f - \alpha h \in \ker \mathbf{l}$ , entonces  $\mathbf{l}(f - \alpha h) = 0$  y por consiguiente  $\alpha = \mathbf{l}(f)/\mathbf{l}(h)$ . Dado que  $(f - \alpha h, h) = 0$  y  $(h, h) = 1$  se tiene que  $\alpha = (f, h)$ . Por lo tanto, el funcional  $\mathbf{l}$  puede reescribirse de la forma

$$\mathbf{l}(f) = \mathbf{l}(h)(f, h), \quad (2.5.3)$$

la cual coincide con la igualdad (2.5.2) haciendo  $g = \overline{\mathbf{l}(h)} \cdot h$ . La unicidad de (2.5.2) se obtiene como sigue: considerando  $\mathbf{l}(f) = (f, g)$  y  $\mathbf{l} = (f, \tilde{g})$  se tiene que  $(f, g - \tilde{g}) = 0$ , y dado que  $f$  es cualquier elemento de  $\mathcal{H}$ , por el Lema 2.2.1, concluimos que  $g = \tilde{g}$ . Para probar la dirección inversa, note que para elementos  $f, \tilde{f} \in \text{dom}(\mathbf{l})$ , tales que  $\|f - \tilde{f}\|$  sea suficientemente pequeña, tenemos que  $|\mathbf{l}(f) - \mathbf{l}(\tilde{f})|$  es tan pequeña como queramos. En efecto,

$$|\mathbf{l}(f) - \mathbf{l}(\tilde{f})| = |(f, g) - (\tilde{f}, g)| = |(f - \tilde{f}, g)| \leq \|f - \tilde{f}\| \cdot \|g\|. \quad (2.5.4)$$

Por lo tanto,  $\mathbf{l}$  es un funcional continuo. La linealidad de  $\mathbf{l}$  es inmediata.  $\square$

Ahora vamos a considerar un resultado concerniente a funcionales no lineales que se usará en la demostración del Teorema 2.5.2.

**Lema 2.5.1.** *Sea  $\mathbf{l}$  un funcional real definido en todo  $\mathcal{H}$  tal que*

$$a) \mathbf{l}(f + g) \leq \mathbf{l}(f) + \mathbf{l}(g)$$

$$b) \mathbf{l}(\alpha f) = |\alpha| \mathbf{l}(f)$$

y, para todo  $f, f_0 \in \mathcal{H}$  y  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que

$$\mathbf{l}(f) - \mathbf{l}(f_0) > -\epsilon \quad (2.5.5)$$

siempre que  $\|f - f_0\| < \delta$ . Entonces, existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\mathbf{l}(f) \leq C \|f\| \quad (2.5.6)$$

para todo  $f \in \mathcal{H}$ .



*Demostración.* Vamos a probar primero que si el funcional  $\mathbf{l}$  no es acotado en la bola unitaria, entonces dicho funcional no será acotado en cualquier bola  $S(\rho, g)$  con centro  $g \in \mathcal{H}$  y radio  $\rho > 0$  donde  $\rho$  y  $g$  son arbitrarios. Suponiendo que  $\mathbf{l}(f) < C$  para  $\|f - g\| < \rho$ , encontramos que

$$\mathbf{l}(f - g) \leq \mathbf{l}(f) + \mathbf{l}(-g) = \mathbf{l}(f) + \mathbf{l}(g) < 2C \quad (2.5.7)$$

para  $\|f - g\| < \rho$ . Consecuentemente, si

$$h = \frac{f - g}{\rho}$$

tenemos que

$$\mathbf{l}(h) = \frac{2C}{\rho}$$

para algún  $h \in S(1, 0)$ , así que el funcional  $\mathbf{l}$  es acotado en la bola unitaria. De acuerdo al inciso b) es suficiente probar que el funcional  $\mathbf{l}$  es acotado en la bola  $S(1, 0)$ . Asumiendo lo contrario escogemos un elemento  $h_1 \in S(1, 0)$  tal que  $\mathbf{l}(h_1) > 1$ . La propiedad (2.5.5) del funcional  $\mathbf{l}$  implica que existe una bola  $S(\rho_1, h_1) \subset S(1, 0)$  con radio  $\rho_1 < 1/2$  tal que  $\mathbf{l}(f) > 1$  siempre que  $f \in S(\rho_1, h_1)$ . Dado que  $\mathbf{l}$  no es acotado en cada bola, existe un punto  $h_2 \in S(\rho_1, h_1)$  y también una bola  $S(\rho_2, h_2) \subset S(\rho_1, h_1)$  con radio  $\rho_2 < (1/2)\rho_1$  en la cual  $\mathbf{l}(f) > 2$ . Continuando este proceso, obtenemos una sucesión infinita de bolas, ordenadas de la siguiente forma:

$$S(1, 0) \supset S(\rho_1, h_1) \supset S(\rho_2, h_2) \supset \cdots \quad (2.5.8)$$

para las cuales  $\rho_n < (1/2)\rho_{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , y también  $\mathbf{l}(f) > n$  si  $f \in S(\rho_n, h_n)$ . Pero las sucesiones de centros  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son sucesiones de Cauchy y, por lo tanto, convergen a algún elemento  $h$ . De esto se sigue que  $\mathbf{l}(h) > n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , lo cual es imposible.  $\square$

El siguiente resultado sencillo se utiliza en el Teorema 3.1.2 del Capítulo 3 de nuestra investigación.

**Teorema 2.5.2.** *Considere el espacio de Hilbert  $l_2(\mathbb{N})$  y una sucesión  $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Si*

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \eta_k \varphi_k < \infty \quad (2.5.9)$$

para toda  $\varphi = \{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{N})$ . Entonces, el funcional

$$\mathbf{l}(\varphi) := \sum_{k \in \mathbb{N}} \eta_k \varphi_k \quad (2.5.10)$$

definido en todo  $l_2(\mathbb{N})$  es lineal y continuo.

*Demostración.* De (2.5.9) se sigue que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |\eta_k \varphi_k| < \infty \quad (2.5.11)$$

para todo  $\varphi \in l_2(\mathbb{N})$ . En efecto,

$$|\eta_k \varphi_k| = \eta_k \varphi_k e^{is_k} \quad (2.5.12)$$

Para cierto  $s_k \in \mathbb{R}$ . Así,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |\eta_k \varphi_k| = \sum_{k \in \mathbb{N}} \eta_k \varphi_k e^{is_k} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \eta_k \tilde{\varphi}_k < \infty, \quad (2.5.13)$$

ya que  $\tilde{\varphi}_k = \varphi_k e^{is_k}$  está claramente en  $l_2(\mathbb{N})$ .

Ahora fijamos  $\varphi \in l_2(\mathbb{N})$  y definamos

$$\mathbf{l}_n(\varphi) := \sum_{k=1}^n |\eta_k \varphi_k|$$

$$\mathbf{l}_\infty(\varphi) := \sum_{k \in \mathbb{N}} |\eta_k \varphi_k|.$$

Obsérvese que  $\mathbf{l}_\infty$  satisface las condiciones *a)* y *b)* del Lema 2.5.1. Ahora demostraremos que  $\mathbf{l}_\infty$  satisface también (2.5.5). Fíjese  $n_0 \in \mathbb{N}$ , y, como  $\mathbf{l}_{n_0}$  es continuo, entonces tomando  $\|\psi - \varphi\|$  suficientemente pequeña, podemos lograr que para todo  $\epsilon > 0$

$$|\mathbf{l}_{n_0}(\psi) - \mathbf{l}_{n_0}(\varphi)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Así, cuando  $n_0$  es suficientemente grande

$$\mathbf{l}_\infty(\psi) - \mathbf{l}_\infty(\varphi) > \mathbf{l}_\infty(\psi) - \mathbf{l}_{n_0}(\varphi) - \frac{\epsilon}{2} \geq \mathbf{l}_{n_0}(\psi) - \mathbf{l}_{n_0}(\varphi) - \frac{\epsilon}{2} > -\epsilon.$$

Por lo tanto,  $\mathbf{l}_\infty$  satisface las condiciones del Lema 2.5.1 y así,

$$\mathbf{l}_\infty(\varphi) \leq C \|\varphi\|_{l_2}.$$

Ahora, consideramos el funcional  $\mathbf{l}$  dado en (2.5.10) definido en todo  $l_2(\mathbb{N})$ . Claramente  $\mathbf{l}$  es lineal y se satisface

$$|\mathbf{l}(\varphi)| \leq \mathbf{l}_\infty(\varphi) \leq C \|\varphi\|_{l_2}. \quad (2.5.14)$$

De (2.5.14) se sigue que  $\mathbf{l}$  es continuo, ya que el análogo del Teorema 2.4.1 para funcionales tiene lugar.  $\square$

## 2.6. Gráfica de operadores lineales y operadores lineales cerrados

**Definición 2.6.1.** Sea  $T$  un operador lineal. La gráfica de  $T$ ,  $G(T) \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ , se define como el conjunto

$$G(T) := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ Tf \end{pmatrix} : f \in \text{dom}(T) \right\}.$$

**Definición 2.6.2.** Un operador  $T$  es cerrado si el subconjunto  $G(T) \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  es cerrado en  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ .

**Teorema 2.6.1.** *Un operador  $T$  es cerrado en  $\mathcal{H}$  si y sólo si para cada sucesión  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{dom}(T)$  tal que los límites  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  y  $\lim Tf_k = g$  existen, entonces  $f \in \text{dom}(T)$  y  $g = Tf$ .*

*Demostración.* Suponga que  $T$  es un operador cerrado. Sea  $\left\{ \begin{pmatrix} f_k \\ \tilde{f}_k \end{pmatrix} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión convergente de elementos en  $G(T)$ . Sea  $\begin{pmatrix} f \\ \tilde{f} \end{pmatrix}$  el límite de esa sucesión,  $\begin{pmatrix} f \\ \tilde{f} \end{pmatrix} \in G(T)$ . Ahora bien, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $k \geq N$ , entonces

$$\left\| \begin{pmatrix} f_k \\ \tilde{f}_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ \tilde{f} \end{pmatrix} \right\| < \sqrt{\epsilon}.$$

Así,

$$\epsilon > \left\| \begin{pmatrix} f_k \\ \tilde{f}_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ \tilde{f} \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} f_k - f \\ \tilde{f}_k - \tilde{f} \end{pmatrix} \right\|^2 = \|f_k - f\|^2 + \|\tilde{f}_k - \tilde{f}\|^2.$$

Entonces  $f_k \rightarrow f$  y  $\tilde{f}_k \rightarrow \tilde{f}$  en  $\mathcal{H}$ , donde  $f$  está en el  $\text{dom}(T)$  y  $\tilde{f} = Tf$ . Para probar la afirmación converso, tomemos la sucesión  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{dom}(T)$  tal que  $\lim f_k = f$ ,  $\lim Tf_k = \tilde{f}$ ,  $f \in \text{dom}(T)$  y  $\tilde{f} = Tf$ . Sea  $\tilde{f}_k = Tf_k$ , entonces  $\left\{ \begin{pmatrix} f_k \\ \tilde{f}_k \end{pmatrix} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $G(T)$ . Mostremos que  $\left\{ \begin{pmatrix} f_k \\ \tilde{f}_k \end{pmatrix} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $\begin{pmatrix} f \\ \tilde{f} \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} f \\ \tilde{f} \end{pmatrix} \in G(T)$ . Por la definición de la norma en  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$

$$\left\| \begin{pmatrix} f_k \\ \tilde{f}_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ \tilde{f} \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} f_k - f \\ \tilde{f}_k - \tilde{f} \end{pmatrix} \right\|^2 = \|f_k - f\|^2 + \|\tilde{f}_k - \tilde{f}\|^2 \rightarrow 0$$

cuando  $k \rightarrow \infty$ . Resta ver que  $\begin{pmatrix} f \\ \tilde{f} \end{pmatrix} \in G(T)$ . Pero, por hipótesis  $f \in \text{dom}(T)$  y  $\tilde{f} = Tf$ , así  $\begin{pmatrix} f \\ \tilde{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ Tf \end{pmatrix} \in G(T)$ . Por lo tanto,  $G(T)$  es un conjunto cerrado.  $\square$

**Teorema 2.6.2.** *Si  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , entonces existen  $C_1, C_2 > 0$  tal que, para todo  $f \in \mathcal{H}$ ,*

$$C_2 \|f\| \leq \left\| \begin{pmatrix} f \\ Tf \end{pmatrix} \right\| \leq C_1 \|f\|. \quad (2.6.1)$$

*Demostración.* Sea  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , entonces existe una constante  $C$  tal que

$$\|f\|^2 \leq \|f\|^2 + \|Tf\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} f \\ Tf \end{pmatrix} \right\|^2 = \|f\|^2 + \|Tf\|^2 \leq \|f\|^2 + C^2 \|f\|^2 = (1 + C^2) \|f\|^2.$$

Por lo tanto, (2.6.1) se satisface, tomando  $C_1 = \sqrt{1 + C^2}$  y  $C_2 = 1$ .  $\square$

**Teorema 2.6.3.** *Un operador continuo  $T$  es cerrado si y sólo si  $\text{dom}(T)$  es cerrado en  $\mathcal{H}$ .*

*Demostración.* Por la equivalencia de normas en el Teorema 2.6.2 el  $\text{dom}(T)$  es un conjunto cerrado en  $\mathcal{H}$  si y sólo si  $G(T)$  es cerrado en  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ .  $\square$

**Teorema 2.6.4.** *Si  $T$  tiene una inversa, entonces  $T$  y  $T^{-1}$  son cerrados simultáneamente.*

*Demostración.* Tenemos que si  $T$  es un operador en  $\mathcal{H}$  y existe  $T^{-1}$ , entonces

$$G(T^{-1}) = \widehat{U}G(T), \quad (2.6.2)$$

donde  $\widehat{U}$  es un operador en  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  tal que  $\widehat{U} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}$ . Así, de la igualdad (2.6.2) tenemos que  $T$  y  $T^{-1}$  son cerrados simultáneamente.  $\square$

**Teorema 2.6.5.** *Si  $T$  es un operador cerrado, entonces  $\ker(T)$  es un subespacio de  $\mathcal{H}$ .*

*Demostración.* Probemos primero la linealidad del  $\ker(T)$ . Sean  $f, g \in \ker(T)$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Entonces  $\alpha Tf = 0, \beta Tg = 0$ . Por ser  $T$  un operador lineal, tenemos que  $T(\alpha f) = 0$  y  $T(\beta g) = 0$ , entonces  $T(\alpha f) + T(\beta g) = 0$ , implica que  $T(\alpha f + \beta g) = 0$ . Por lo tanto,  $\alpha f + \beta g \in \ker(T)$ . Así,  $\ker(T)$  es lineal. Ahora bien, para ver que  $\ker(T)$  es un subespacio, resta probar que es cerrado. Sea  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \ker(T)$ ,  $\{Tf_k\}_{k \in \mathbb{N}} \equiv 0$ , tal que  $f_k \rightarrow f$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . En vista del Teorema 2.6.1 se tiene que  $f \in \text{dom}(T)$  y  $Tf = 0$ . De donde se sigue que  $\ker(T) = \overline{\ker(T)}$ .  $\square$

**Teorema 2.6.6.** *Sea  $T$  un operador cerrado tal que*

$$\|Tf\| \geq C\|f\|, \quad C > 0, \quad \forall f \in \text{dom}(T), \quad (2.6.3)$$

*entonces  $\text{ran}(T)$  es un subespacio.*

*Demostración.* Por el Teorema 2.4.2,  $T$  tiene una inversa acotada. Por el Teorema 2.6.4,  $T^{-1}$  es cerrado. Por lo tanto,  $\text{ran}(T) = \text{dom}(T^{-1})$  es un subespacio, por el Teorema 2.6.3.  $\square$

**Definición 2.6.3.** Un operador  $T$  se considera cerrable si existe  $S \supset T$  y  $S$  es un operador cerrado.

**Definición 2.6.4.** El operador  $S$  descrito en la Definición 2.6.3, se dice que es la *cerradura* de  $T$  si es la *mínima extensión cerrada* de  $T$ , en símbolos:  $S = \overline{T}$ . En este caso, se puede verificar fácilmente (véase la igualdad (3) de [9, Cap. 3, Sec. 2]) que

$$\overline{G(T)} = G(\overline{T}) \quad (2.6.4)$$

## 2.7. Operador lineal adjunto

En esta sección incluimos operadores lineales no acotados con dominio denso en  $\mathcal{H}$ , es decir, operadores con  $\overline{\text{dom}(T)} = \mathcal{H}$ . En este sentido diremos que dicho operador está densamente definido en  $\mathcal{H}$ .

**Definición 2.7.1.** Sea  $T : \text{dom}(T) \rightarrow \mathcal{H}$ , un operador lineal densamente definido en  $\mathcal{H}$ . El operador *adjunto*  $T^*$  se define como aquel operador cuyo dominio, denotado por  $\text{dom}(T^*)$ , consiste de todo elemento  $g \in \mathcal{H}$  tal que existe un  $h \in \mathcal{H}$  que satisface

$$(Tf, g) = (f, h), \quad \forall f \in \text{dom}(T) \quad \text{con} \quad T^*g := h. \quad (2.7.1)$$

El operador  $T^*$  está bien definido dado que a cada  $g$  le corresponde un único  $h$ . En efecto, la unicidad de  $h$  se obtiene haciendo uso del Lema 2.2.3 (véase también el Teorema 2.2.9).

Al considerar  $\overline{\text{dom}(T)} \neq \mathcal{H}$ , el complemento ortogonal  $(\overline{\text{dom}(T)})^\perp \neq \{0\}$  y, por lo tanto, podemos decir que existe  $h_1 \neq \{0\}$  tal que  $(h_1, f) = 0$  para todo  $f \in \text{dom}(T)$ . De esta manera podemos escribir

$$(f, h) = (f, h) + (f, h_1) = (f, h + h_1)$$

con lo cual tendríamos que en (2.7.1)  $h = h + h_1$ , o sea,  $h = T^*g + h_1$  y por lo tanto no se garantiza la unicidad de  $h$ .

En cambio, si consideramos  $\overline{\text{dom}(T)} = \mathcal{H}$ , es claro que  $\overline{\text{dom}(T)}^\perp = \{0\}$  con lo cual, para todo  $f \in \text{dom}(T)$ ,  $(h_1, f) = 0$  implica que  $h_1 = 0$  y por lo tanto  $h = T^*g + h_1 = T^*g$ , comprobándose de esta forma la unicidad de  $h$  y por consiguiente, el operador  $T^*$  existe y está bien definido.

**Teorema 2.7.1.** *El operador  $T^*$  es lineal.*

*Demostración.* Sean  $g_1, g_2 \in \text{dom}(T^*)$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , entonces

$$\begin{aligned}(Tf, \alpha g_1) &= \overline{\alpha(Tf, g_1)} = \overline{\alpha} \overline{(Tf, g_1)} = (f, \alpha T^* g_1) \\ (Tf, \beta g_2) &= \overline{\beta(Tf, g_2)} = \overline{\beta} \overline{(Tf, g_2)} = (f, \beta T^* g_2).\end{aligned}$$

Sumando estas dos ecuaciones tenemos que

$$(Tf, \alpha g_1 + \beta g_2) = (Tf, \alpha g_1) + (Tf, \beta g_2) = (f, \alpha T^* g_1 + \beta T^* g_2).$$

Por lo tanto,  $T^*$  es lineal ya que  $\alpha g_1 + \beta g_2 \in \text{dom}(T^*)$  y

$$T^*(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha T^* g_1 + \beta T^* g_2.$$

□

**Teorema 2.7.2.** *El operador adjunto  $T^*$  es siempre cerrado.*

*Demostración.* Tómese  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{dom}(T^*)$  tal que  $g_k \rightarrow g$ , y  $T^*g_k \rightarrow w$ ; entonces para todo  $f \in \text{dom}(T)$ ,

$$(f, T^*g) = (Tf, g) = \lim_{k \rightarrow \infty} (Tf, g_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f, T^*g_k) = (f, w). \quad (2.7.2)$$

Por lo tanto  $g \in \text{dom}(T^*)$  y  $T^*g = w$ . Así por el Teorema 2.6.1  $T^*$  es cerrado. □

**Teorema 2.7.3.** *Sea  $W$  un operador en  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  tal que  $W \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -g \\ f \end{pmatrix}$  y supongamos que  $T$  es un operador (lineal) densamente definido. Entonces*

$$[WG(T)]^\perp = G(T^*). \quad (2.7.3)$$

*Demostración.* Sea  $f \in \text{dom}(T)$ , entonces  $\begin{pmatrix} f \\ Tf \end{pmatrix} \in G(T)$ . Así

$$\begin{pmatrix} -Tf \\ f \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} f \\ Tf \end{pmatrix}.$$

Buscamos los elementos

$$\begin{pmatrix} y \\ h \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \text{ tales que } \left( \begin{pmatrix} y \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -Tf \\ f \end{pmatrix} \right) = 0$$

Por la Definición 2.2.10 esto es equivalente a

$$-(y, Tf) + (h, f) = 0,$$

entonces por la Definición 2.7.1 se tiene que

$$\begin{pmatrix} y \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ T^*y \end{pmatrix} \in G(T^*).$$

Esto último demuestra que  $[WG(T)]^\perp \subset G(T^*)$ . La prueba en el sentido contrario se obtiene al verificar que  $\begin{pmatrix} y \\ T^*y \end{pmatrix}$  es ortogonal a  $\begin{pmatrix} -Tf \\ f \end{pmatrix}$ .  $\square$

**Teorema 2.7.4.** *Si  $T$  es cerrable, entonces*

$$(\overline{T})^* = T^* \tag{2.7.4}$$

*Demostración.* Comparando (2.7.3) y (2.6.4) vemos que las gráficas de  $(\overline{T})^*$  y  $T^*$  coinciden, por lo tanto la igualdad (2.7.4) se satisface.  $\square$

**Teorema 2.7.5.** *Sea  $\overline{\text{dom}(T)} = \mathcal{H}$ . Entonces  $\overline{\text{dom}(T^*)} = \mathcal{H}$  si y sólo si  $T$  es cerrable. En este caso  $T^{**}$  existe y*

$$T^{**} = \overline{T}. \tag{2.7.5}$$

*Demostración.* Considere la gráfica de  $T^*$ . Note que  $-W^2$  es el operador identidad en  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ . Así, utilizando el Teorema 2.7.3 tenemos que

$$WG(T^*) = W[WG(T)]^\perp = [W^2G(T)]^\perp = [-G(T)]^\perp = [G(T)]^\perp. \tag{2.7.6}$$

Aquí hemos utilizado el hecho de que si un conjunto  $A \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ , entonces  $[WA]^\perp = WA^\perp$ . De (2.7.6) se sigue que  $(WG(T^*))^\perp = \overline{G(T)}$ . El conjunto,  $G(T)$  es una gráfica si y sólo si  $T$  es cerrable. Cuando  $T$  es cerrable,  $\overline{G(T)} = G(\overline{T})$  y por consiguiente,

$$[WG(T^*)]^\perp = G(\overline{T}). \tag{2.7.7}$$

Por otro lado, en vista del Lema 3 de [9, Cap. 3, Sec. 1] tenemos que el lado izquierdo de la ecuación (2.7.7) es una gráfica si y sólo si  $\overline{\text{dom}(T^*)} = \mathcal{H}$ . Por lo tanto, esta igualdad es equivalente al hecho de que  $T$  es cerrable. Si  $\overline{\text{dom}(T^*)} = \mathcal{H}$ , el operador  $T^{**}$  existe. La igualdad (2.7.5) se obtiene de la igualdad (2.7.7) aplicando nuevamente el Teorema 2.7.3 al operador  $T^*$ .  $\square$

**Teorema 2.7.6.** *El operador  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  si y sólo si  $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .*

*Demostración.* Suponga que  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , entonces por la desigualdad de *Cauchy-Schwarz* (2.1.3), se tiene que para todo  $f, g \in \mathcal{H}$ ,

$$|(Tf, g)| \leq \|Tf\| \cdot \|g\| \leq C\|f\| \cdot \|g\|. \quad (2.7.8)$$

Fijamos arbitrariamente  $g \in \mathcal{H}$ , entonces  $(Tf, g)$  es un funcional lineal de  $f$  que por (2.7.8) es acotado. Por el Teorema de Riesz (véase el Teorema 1 de [9, Cap. 2, Sec. 4]) existe un  $h \in \mathcal{H}$  tal que

$$(Tf, g) = (f, h).$$

De esto se sigue, de acuerdo a la Definición 2.7.1, que  $g \in \text{dom}(T^*)$  y  $T^*g = h$ . Entonces  $\text{dom}(T^*) = \mathcal{H}$ . Ahora verificamos que  $T^*$  es acotado. Si  $h = T^*g = 0$ , entonces siempre hay una cota superior para  $\|T^*g\|$ . Supongamos que  $h \neq 0$ , así

$$\|h\|^2 = (T^*g, h) = (g, Th) \leq \|g\| \cdot \|T\| \cdot \|h\|$$

del que se sigue que

$$\|h\| = \|T^*g\| \leq \|g\| \cdot \|T\|.$$

Por lo tanto,  $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . La afirmación converso sigue del Teorema 2.7.5 repitiendo el argumento anterior.  $\square$

Con base en el Teorema 2.7.6 podemos demostrar el siguiente teorema (Teorema 1 de [9, Cap. 2, Sec. 6]) relacionado con operadores compactos que ya fueron introducidos en la Sección 2.4. Este resultado será útil más adelante.

**Teorema 2.7.7.** *Un operador  $T$  es compacto si y sólo si  $T$  transforma una sucesión débilmente convergente en una sucesión convergente.*

*Demostración.* Sea  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión débilmente convergente a  $f_0$ . Por el Teorema 2.1.1, sabemos que  $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\| < \infty$ . Y por la continuidad de  $T$ , tenemos que  $\{Tf_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge débilmente a  $Tf_0$ . En efecto, para todo  $f \in \mathcal{H}$ ,  $(Tf_k, f) = (f_k, T^*f)$ , para toda  $k \in \mathbb{N}$ , así que  $\{(f_k, T^*f)\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $(f_0, T^*f) = (Tf_0, f)$ . Suponga, sin pérdida de generalidad, que  $f_0 = 0$ . Si la sucesión  $\{Tf_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  no converge a cero, entonces  $\inf_{k \in \mathbb{N}} \|Tf_k\| = a > 0$ . La sucesión  $\{Tf_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es relativamente compacta y esto viene del hecho de que  $T$  es compacto, así existe una subsucesión  $\{f_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que la sucesión  $\{Tf_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente a un elemento  $h$ . Puesto que la sucesión  $\{Tf_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge débilmente a cero, vemos que  $h = 0$ , lo que contradice el hecho de que  $\|Tf_k\| \geq$



$a > 0$ . Para probar la afirmación converso, basta demostrar que del hecho de que  $T$  transforma una sucesión débilmente convergente en una convergente se sigue que la imagen de la bola unitaria bajo el operador  $T$  sea relativamente compacta. Para esto, es suficiente verificar que para cualquier sucesión  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  con  $\|f_k\| \leq 1$ , existe una subsucesión  $\{f_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  para la que  $\{Tf_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  sea convergente. Pero por el Teorema 2.2.8 sabemos que cualquier bola unitaria en un espacio de Hilbert es débilmente compacta, así, podemos extraer una subsucesión débilmente convergente  $\{f_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  en dicha bola unitaria. Y por hipótesis la sucesión  $\{Tf_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge, lo que prueba que  $T$  es compacto.  $\square$

Reproducimos, a continuación, el Teorema 5 de [9, Cap. 3, Sec. 3].

**Teorema 2.7.8.** *Sea  $T$  un operador lineal en  $\mathcal{H}$ . Los subespacios  $\overline{\text{ran}(T)}$  y  $\ker(T^*)$  son complementos ortogonales uno con respecto de otro. Así  $\mathcal{H}$  se descompone de la siguiente forma:*

$$\mathcal{H} = \overline{\text{ran}(T)} \oplus \ker(T^*). \quad (2.7.9)$$

*Demostración.* Sea  $g \in \ker(T^*)$ , entonces para cualquier  $f \in \text{dom}(T)$  se tiene que

$$(Tf, g) = (f, T^*g) = (f, 0) = 0.$$

Esto significa que  $g \perp \text{ran}(T)$ . Por lo tanto,  $\ker(T^*) \subset \text{ran}(T)^\perp$ . Ahora suponga que  $g \in \text{ran}(T)^\perp$ , entonces para todo  $f \in \text{dom}(T)$  se tiene que  $(Tf, g) = 0$  lo que implica que  $g \in \text{dom}(T^*)$  y  $T^*g = 0$ . Así  $\text{ran}(T)$  y  $\ker(T^*)$  son complementos ortogonales uno con respecto de otro y (2.7.9) se satisface.  $\square$

**Definición 2.7.2.** Un operador lineal definido densamente en  $\mathcal{H}$  se considera *auto-adjunto* si coincide con su adjunto:  $T = T^*$ .

*Comentario 2.7.1.* Del Teorema 2.7.2 se sigue que un operador auto-adjunto es cerrado.

**Teorema 2.7.9.** *Sea  $\overline{\text{dom}(T)} = \overline{\text{ran}(T)} = \mathcal{H}$  y suponga que el operador  $T$  tiene una inversa. Entonces el operador adjunto  $T^*$  también tiene una inversa y se satisface la siguiente relación:*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* \quad (2.7.10)$$

*Demostración.* De la igualdad (2.7.9) se tiene  $\ker(T^*) = \{0\}$  garantizando de esa manera la existencia de  $(T^*)^{-1}$ . La existencia de  $(T^{-1})^*$  se obtiene del hecho de que  $\text{dom}(T) = \text{ran}(T) = \mathcal{H}$ . Para probar (2.7.10) consideraremos las

gráficas de  $(T^*)^{-1}$  y  $(T^{-1})^*$ . Sea  $\widehat{U}$  como en la demostración del Teorema 2.6.4. En vista de las ecuaciones (2.6.2) y (2.7.3) tenemos que

$$G((T^*)^{-1}) = \widehat{U}([WG(T)]^\perp). \quad (2.7.11)$$

Dado que la operación del complemento ortogonal conmuta con la isometría  $\widehat{U}$  y  $\widehat{U}W = -W\widehat{U}$ , haciendo uso de las definiciones de  $\widehat{U}$  y  $W$ , obtenemos

$$G((T^*)^{-1}) = [\widehat{U}WG(T)]^\perp = [-W\widehat{U}G(T)]^\perp = [W\widehat{U}G(T)]^\perp = G((T^{-1})^*). \quad (2.7.12)$$

□

**Teorema 2.7.10.** a) Si  $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , entonces  $(T + S)^* = T^* + S^*$ .

b) Si además,  $S^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , entonces  $(TS)^* = S^*T^*$ ,  $(ST)^* = T^*S^*$ .

*Demostración.* Para probar a), suponga  $g \in \text{dom}(T^*)$ . Entonces para un elemento  $f \in \text{dom}(T)$  se tiene que

$$\begin{aligned} ((T + S)f, g) &= (Tf + Sf, g) = (Tf, g) + (Sf, g) \\ &= (f, T^*g) + (f, S^*g) = (f, T^*g + S^*g), \end{aligned}$$

por lo tanto,  $T^* + S^* \subset (T + S)^*$ . Para probar la otra contención, considere  $g \in \text{dom}((T + S)^*)$ . Entonces, para una  $f \in \text{dom}(T + S)$  tenemos que

$$\begin{aligned} (Tf, g) &= ((T + S - S)f, g) = ((T + S)f, g) - (Sf, g) \\ &= (f, (T + S)^*g) - (f, S^*g) = (f, [(T + S)^* - S^*]g), \end{aligned} \quad (2.7.13)$$

entonces  $g \in \text{dom}(T^*)$ , lo cual implica que

$$\text{dom}(T + S)^* \subset \text{dom}(T^*) = \text{dom}(T^* + S^*).$$

Observe que de (2.7.13)

$$T^*g = [(T + S)^* - S^*]g \quad \text{por lo que} \quad (T^* + S^*)g = (T + S)^*g.$$

La relación anterior se cumple siempre que  $g \in \text{dom}(T + S)^*$ , de la que concluimos  $(T + S)^* \subset T^* + S^*$ . La prueba del inciso b) se obtiene observando que  $\text{dom}(TS) = S^{-1} \text{dom}(T)$  y  $\text{dom}(S^*T^*) = \text{dom}(T^*)$ . Así, si suponemos que  $Sf \in \text{dom}(T)$  y  $g \in \text{dom}(T^*)$ , entonces  $(TSf, g) = (Sf, T^*g) = (f, S^*T^*g)$ . Por lo tanto,  $S^*T^* \subset (TS)^*$ . Para probar la afirmación conversada, suponga que  $g \in \text{dom}((TS)^*)$ . Entonces, para cualquier  $f \in \text{dom}(T)$ , se tiene que

$$(Tf, g) = (TS(S^{-1}f), g) = (S^{-1}f, (TS)^*g) = (f, (S^{-1})^*(TS)^*g). \quad (2.7.14)$$

Por lo tanto,  $g \in \text{dom}(T^*)$  y  $T^*g = (S^{-1})^*(TS)^*g$ . Así usando el Teorema 2.7.9 concluimos que  $(TS)^*g = S^*T^*g$ , lo que significa que  $(TS)^* \subset S^*T^*$ . Por lo tanto, la primera igualdad de b) es demostrada. La segunda igualdad del mismo inciso, se obtiene repitiendo la demostración anterior. □

*Comentario 2.7.2.* Un caso especial del Teorema 2.7.10 es:

$$(T - \zeta I)^* = T^* - \bar{\zeta}I, \quad \zeta \in \mathbb{C}. \quad (2.7.15)$$

## 2.8. Espectro de operadores lineales

**Definición 2.8.1.** El conjunto de puntos de tipo regular  $\hat{\rho}(T)$  (o *cuasi-regular*) se define como:

$$\hat{\rho}(T) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \exists C > 0 : \|(T - \zeta I)f\| \geq C\|f\| \quad \forall f \in \text{dom}(T)\}. \quad (2.8.1)$$

*Comentario 2.8.1.* Por el Teorema 2.4.2, si  $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ , entonces  $(T - \zeta I)^{-1}$  está definido en  $\text{ran}(T - \zeta I)$  y es acotado.

**Teorema 2.8.1.** *Sea  $T$  un operador lineal y  $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ , entonces*

$$\text{ran}(T - \zeta I) = \overline{\text{ran}(T - \zeta I)}$$

*si y sólo si  $T$  es cerrado.*

*Demostración.* Note que  $T$  es cerrado si y sólo si  $T - \zeta I$  es cerrado (véase el Teorema 3 [9, Cap. 3, Sec. 2]). Sea  $T$  un operador cerrado y  $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ . Entonces existe una constante  $C > 0$  tal que  $\|(T - \zeta I)f\| \geq C\|f\|$  para todo  $f \in \text{dom}(T - \zeta I)$ . Y por el Teorema 2.6.6, se sigue que  $\text{ran}(T - \zeta I)$  es un subespacio. Así  $\text{ran}(T - \zeta I) = \overline{\text{ran}(T - \zeta I)}$ . Probemos, ahora, la afirmación conversas: si  $\text{ran}(T - \zeta I) = \overline{\text{ran}(T - \zeta I)}$ , entonces para cualquier  $\zeta \in \hat{\rho}(T)$  se tiene que  $(T - \zeta I)^{-1}$  es continuo y por el Teorema 2.6.3, se sigue que  $(T - \zeta I)^{-1}$  es cerrado. Ahora, por el Teorema 2.6.4, vemos que  $(T - \zeta I)$  es un operador cerrado. Así,  $T$  es cerrado.  $\square$

Hay una demostración alternativa al siguiente resultado en el Teorema 5.6 de [44, Cap. 5]

**Teorema 2.8.2.** *Si  $T$  es un operador cerrado y  $\text{dom}(T)$  es cerrado, entonces  $T$  es acotado.*

*Demostración.* Supongamos primero que  $\text{dom}(T) = \mathcal{H}$ , entonces existe el operador adjunto  $T^*$  tal que  $\text{dom}(T^*) = \mathcal{H}$  por el Teorema 2.7.5. Ahora demostramos que  $T^*$  es acotado. Para ello, considere una familia de funcionales lineales tal que para todo  $g \in \text{dom}(T^*)$  y  $\|g\| \leq 1$  se tiene que

$$\mathbf{l}(f) = (Tf, g) = (f, T^*g). \quad (2.8.2)$$

Note que la familia de funcionales lineales es acotada punto por punto. En efecto,

$$|\mathbf{l}(f)| = |(Tf, g)| \leq \|Tf\| \|g\| \leq \|Tf\|. \quad (2.8.3)$$

Así, de (2.8.3) se sigue, por el *principio de acotamiento uniforme* (véase Teorema 4.22 de [44, Cap. 4]), que existe una constante  $C > 0$  tal que para todo  $g \in \text{dom}(T^*)$  con  $\|g\| \leq 1$ ,  $\|T^*g\| \leq C$ . Esto implica que  $T^*$  es acotado. Ahora bien, ya que  $T^*$  es cerrado por el Teorema 2.7.2, entonces inmediatamente por el Teorema 2.6.3 se tiene que  $\text{dom}(T^*) = \mathcal{H}$ , es decir,  $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Y por el Teorema 2.7.6 concluimos que  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .

Supongamos ahora que  $\text{dom}(T) \neq \mathcal{H}$ . Denótese por  $P$  la proyección sobre  $\text{dom}(T)$  y considérese el operador  $TP$  con dominio en  $\mathcal{H}$ . Ahora escójase una sucesión  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$  tal que  $f_k \rightarrow f$  y  $TPf_k \rightarrow f$ . Entonces tenemos que  $Pf_k \rightarrow Pf$  y  $g = TPf$  ya que  $T$  es cerrado. De donde se sigue que  $TP$  es cerrado y continuo. Por último observe que  $T$  coincide con  $TP$  en el  $\text{dom}(T)$ , lo que demuestra que  $T$  es también acotado para  $\text{dom}(T) \neq \mathcal{H}$ .  $\square$

Note, además, que del Teorema 7 de [9, Cap. 3, Sec. 2] se tiene que:

**Teorema 2.8.3.** *Sea  $T$  un operador cerrado y suponga que existe  $(T - \zeta I)^{-1}$ ,  $\text{ran}(T - \zeta I) = \text{ran}(T - \bar{\zeta} I)$ , entonces  $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ .*

*Demostración.* Dado que  $T$  es cerrado se tiene que  $T - \zeta I$  es cerrado (véase el principio de la demostración del Teorema 2.8.1). Entonces  $(T - \zeta I)^{-1}$  es cerrado por el argumento del Teorema 2.6.4. Ahora bien, como

$$\text{dom}(T - \zeta I)^{-1} = \text{ran}(T - \zeta I) \quad (2.8.4)$$

es cerrado, por el Teorema 2.8.2 se tiene que  $(T - \zeta I)^{-1}$  es acotado, es decir,  $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ .  $\square$

La afirmación del siguiente teorema se puede encontrar en el Teorema 4 de [9, Cap. 3, Sec. 7]. Aquí se presenta una demostración diferente.

**Teorema 2.8.4.** *Sea  $T$  un operador cerrado densamente definido en  $\mathcal{H}$ . Entonces el conjunto  $\hat{\rho}(T)$  es abierto, y  $\dim \ker(T^* - \bar{\zeta} I)$  es constante en cada componente conexa de  $\hat{\rho}(T)$ .*

*Demostración.* Sea  $\zeta_0 \in \hat{\rho}(T)$  y tomemos  $\zeta$  en una vecindad suficientemente pequeña de  $\zeta_0$ . Escribamos  $T - \zeta I = (T - \zeta_0 I) + (\zeta_0 - \zeta)I$ . Considere a  $(\zeta_0 - \zeta)I$  como una *perturbación* del operador  $T - \zeta_0 I$  (la norma de la perturbación es

pequeña comparada con la norma de  $T - \zeta_0 I$ ). Note que  $\|(\zeta_0 - \zeta)I\| = |\zeta_0 - \zeta|$ . Así tenemos que,

$$\begin{aligned} \|(T - \zeta I)f\| &= \|(T - \zeta_0 I)f + (\zeta_0 - \zeta)If\| \\ &\geq \|(T - \zeta_0 I)f\| - \|(\zeta_0 - \zeta)If\| \\ &\geq (C - |\zeta_0 - \zeta|)\|f\|. \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

Por lo tanto,  $|\zeta_0 - \zeta| < C$  garantiza  $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ . Ahora demostremos que en el disco  $|\zeta_0 - \zeta| < C$ ,

$$\dim \ker(T^* - \bar{\zeta}I) = \dim \ker(T^* - \bar{\zeta}_0 I). \quad (2.8.6)$$

En efecto, supongamos que  $\dim \ker(T^* - \bar{\zeta}I) > \dim \ker(T^* - \bar{\zeta}_0 I)$ , entonces debe existir en  $\ker(T^* - \bar{\zeta}I)$  un  $h \neq 0$  tal que en la descomposición (2.2.9), donde  $F = \ker(T^* - \bar{\zeta}_0 I)$ , tenemos  $h = g$ ,  $g \perp \ker(T^* - \bar{\zeta}_0 I)$ . Pues si no existiera ese  $h$ , entonces en (2.2.9)  $f = 0$  implicaría que  $g = 0$ , por lo que, si consideramos el operador lineal  $P$  de  $\ker(T^* - \bar{\zeta}I)$  a  $\ker(T^* - \bar{\zeta}_0 I)$  tal que  $Ph = f$ , tenemos que  $\ker(P) = \{0\}$ . Esto significa que  $\dim \ker(T^* - \bar{\zeta}I) \leq \dim \ker(T^* - \bar{\zeta}_0 I)$ . Tomemos ese  $h$ . Dado que es ortogonal al  $\ker(T^* - \bar{\zeta}_0 I)$ , entonces tenemos que  $h \in \text{ran}(T - \zeta_0 I)$  (véase el Teorema 2.7.8). Así, existe  $f \in \text{dom}(T - \zeta_0 I)$  tal que  $h = (T - \zeta_0 I)f$ . Como  $f \in \text{dom}(T - \zeta I)$  y  $h \perp \text{ran}(T - \zeta I)$  tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (h, (T - \zeta I)f) = ((T - \zeta_0 I)f, (T - \zeta I)f) \\ &= \|(T - \zeta_0 I)f\|^2 + ((T - \zeta_0 I)f, (\zeta_0 - \zeta)If), \end{aligned}$$

entonces por la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*, tenemos que

$$\|(T - \zeta_0 I)f\|^2 \leq \|(\zeta_0 - \zeta)If\| \cdot \|(T - \zeta_0 I)f\| < C\|f\| \cdot \|(T - \zeta_0 I)f\|.$$

Pero sabemos que  $\|(T - \zeta_0 I)f\| \geq C\|f\|$ , o sea, llegamos a la contradicción

$$\|(T - \zeta_0 I)f\|^2 < \|(T - \zeta_0 I)f\|^2. \quad (2.8.7)$$

En el caso de suponer  $\dim \ker(T^* - \bar{\zeta}I) < \dim \ker(T^* - \bar{\zeta}_0 I)$ , repitiendo el razonamiento anterior llegamos nuevamente a la desigualdad (2.8.7). Por lo tanto, no queda más que

$$\dim \ker(T^* - \bar{\zeta}I) = \dim \ker(T^* - \bar{\zeta}_0 I), \quad \forall \zeta : |\zeta - \zeta_0| < C. \quad (2.8.8)$$

Resta demostrar, ahora, que  $\dim \ker(T^* - \bar{\zeta}I)$  es constante en cada componente conexa de  $\hat{\rho}(T)$ . Descomponga al conjunto  $\hat{\rho}(T)$  en una unión numerable de componentes conexas abiertas disjuntas. Si consideramos el caso en el que dos puntos pertenecen a una sola componente, por ser ésta conexa, podemos

construir en ella una trayectoria que conecte a aquellos dos puntos. Tomemos ahora cada uno de los puntos de la trayectoria como los centros de un disco tal que  $\dim \ker(T^* - \bar{\zeta}I)$  es constante. Así, podemos cubrir la trayectoria con puros discos abiertos. Como la trayectoria es cerrada y acotada, existe una subcubierta finita que contiene a la trayectoria. Así, ya que en cada disco de esta subcubierta se cumple (2.8.6), entonces  $\dim \ker(T^* - \bar{\zeta}I)$  es constante en la componente conexa en la que se escogieron los dos puntos. Aplicando este proceso para cada componente conexa de  $\hat{\rho}(T)$ , tenemos que  $\dim \ker(T^* - \bar{\zeta}I)$  es constante en cada componente conexa de  $\hat{\rho}(T)$ .  $\square$

**Definición 2.8.2.** El *conjunto resolvente* de  $T$  lo vamos a definir como

$$\rho(T) := \{\zeta \in \hat{\rho}(T) : \text{ran}(T - \zeta I) = \mathcal{H}\}.$$

**Definición 2.8.3.** Sea  $\zeta \in \rho(T)$ . El operador resolvente de  $T$  en  $\zeta$  es

$$R_\zeta(T) := (T - \zeta I)^{-1}.$$

**Definición 2.8.4.** Definiremos el *espectro*  $\sigma(T)$  de  $T$  como

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

Si  $T$  no es un operador cerrado, entonces por el Teorema 2.8.1 se tiene que  $\rho(T) = \emptyset$  y por consiguiente  $\sigma(T) = \mathbb{C}$ . Por eso, cuando estudiemos las propiedades espectrales de un operador, siempre lo consideraremos cerrado.

**Definición 2.8.5.** El *núcleo espectral* de  $T$  se define por

$$\hat{\sigma}(T) := \mathbb{C} \setminus \hat{\rho}(T).$$

*Comentario 2.8.2.* En la teoría espectral de operadores podemos llegar a tener los siguientes casos extremos:

$$a) \hat{\sigma}(T) = \mathbb{C}, \quad b) \sigma(T) = \mathbb{C}, \quad c) \hat{\sigma}(T) = \emptyset, \quad d) \sigma(T) = \emptyset.$$

Nótese que b) puede ocurrir aún cuando  $T$  es cerrado.

Proporcionamos a continuación la definición del espectro continuo descrita en [9, Cap. 3, Sec. 7].

**Definición 2.8.6.** El conjunto  $\sigma_c(T)$  es denominado el espectro continuo de  $T$  y lo definiremos como:

$$\sigma_c(T) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \text{ran}(T - \zeta I) \neq \overline{\text{ran}(T - \zeta I)}\}. \quad (2.8.9)$$

Obsérvese que por el Teorema 2.8.1  $\sigma_c(T) \subset \hat{\sigma}(T)$ .

**Definición 2.8.7.** El espectro puntual denotado por el conjunto  $\sigma_p(T)$  del operador  $T$  se define como:

$$\sigma_p(T) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \ker(T - \zeta I) \neq \{0\}\}. \quad (2.8.10)$$

A los elementos de  $\sigma_p(T)$  se les llama auto-valores.

**Definición 2.8.8.** La multiplicidad de un auto-valor  $\zeta \in T$  se define como

$$\text{mult}(\zeta) := \dim \ker(T - \zeta I). \quad (2.8.11)$$

**Definición 2.8.9.** El conjunto  $\sigma_p^\infty(T)$  se define como el conjunto de auto-valores de un operador  $T$  de multiplicidad infinita. En símbolos:

$$\sigma_p^\infty(T) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \dim \ker(T - \zeta I) = \infty\}. \quad (2.8.12)$$

**Teorema 2.8.5.** Sea  $A = A^*$ . Sea  $\zeta_1, \zeta_2 \in \sigma_p(A)$  con  $\zeta_1 \neq \zeta_2$ . Entonces, los auto-vectores propios  $\psi_1, \psi_2$  correspondientes a los auto-valores  $\zeta_1, \zeta_2$ , son ortogonales.

*Demostración.*

$$\zeta_1(\psi_1, \psi_2) = (\zeta_1 \psi_1, \psi_2) = (A\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, A\psi_2) = (\psi_1, \zeta_2 \psi_2) = \bar{\zeta}_2(\psi_1, \psi_2),$$

entonces, escogiendo  $\bar{\zeta}_2 \neq 0$ ,

$$\frac{\zeta_1}{\bar{\zeta}_2}(\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, \psi_2)$$

de donde se sigue que

$$\left(\frac{\zeta_1}{\bar{\zeta}_2} - 1\right)(\psi_1, \psi_2) = 0.$$

Por lo tanto, los auto-vectores propios  $\psi_1, \psi_2$  son ortogonales.  $\square$

**Definición 2.8.10.** El espectro esencial  $\sigma_e(A)$  de un operador auto-adjunto  $A$  se define como:

$$\sigma_e(A) := \sigma_c(A) \cup \sigma_p^\infty(A). \quad (2.8.13)$$

**Definición 2.8.11.** Sea  $\lambda$  un auto-valor del operador  $A$ . Se dice que  $\lambda$  es un auto-valor aislado de  $A$  si no existe otro auto-valor de  $A$  en cierta vecindad de  $\lambda$ .

**Definición 2.8.12.** El espectro discreto  $\sigma_d(A)$  del operador auto-adjunto  $A$  se define como

$$\sigma_d(A) := \sigma(A) \setminus \sigma_e(A). \quad (2.8.14)$$

Dicho espectro está constituido por auto-valores aislados de multiplicidad finita (véase [9, Cap. 9, Sec. 1]).

## 2.9. Operadores lineales simétricos

**Definición 2.9.1.** Sea  $A$  un operador lineal densamente definido en  $\mathcal{H}$ . Diremos que  $A$  es simétrico si y sólo si  $A \subset A^*$ .

*Comentario 2.9.1.* Con base en la definición 2.6.3, el operador simétrico  $A$  es cerrable, puesto que  $A^*$  es cerrado.

**Teorema 2.9.1.** Sea  $A$  un operador lineal densamente definido en  $\mathcal{H}$ . Entonces  $A$  es un operador simétrico si y sólo si para todo elemento  $f, g \in \text{dom}(A)$ , se cumple que

$$(Af, g) = (f, Ag). \quad (2.9.1)$$

*Demostración.* Sea  $A$  un operador simétrico o sea que  $A \subset A^*$ . Suponga que  $f, g \in \text{dom}(A) \subset \text{dom}(A^*)$ , entonces

$$(Af, g) = (f, A^*g) = (f, Ag). \quad (2.9.2)$$

Probemos ahora la afirmación converso. Sea  $g \in \text{dom}(A)$ , entonces de (2.9.2) se sigue que  $g \in \text{dom}(A^*)$  y que

$$A^*g = Ag, \quad (2.9.3)$$

entonces  $A^* \supset A$ . □

*Comentario 2.9.2.* La definición de un operador simétrico coincide con la de un operador auto-adjunto solamente si se considera acotado dicho operador.

*Comentario 2.9.3.* De acuerdo con la Definición 2.9.1, si un operador lineal es no acotado, entonces no necesariamente se cumple que  $\text{dom}(A) = \text{dom}(A^*)$ . Por consiguiente, no todo operador simétrico es auto-adjunto.

**Teorema 2.9.2.**  $A$  es simétrico, entonces para toda  $f \in \text{dom}(A)$  se tiene que

$$(Af, f) \in \mathbb{R}. \quad (2.9.4)$$

*Demostración.* Como  $(Af, f) = \overline{(f, Af)} = \overline{(Af, f)}$ , entonces  $(Af, f) \in \mathbb{R}$ . □

**Teorema 2.9.3.** Sean  $A_1$  y  $A_2$  operadores simétricos, tales que  $A_1 \subset A_2$ , entonces  $A_2^* \subset A_1^*$ .

*Demostración.* Sea  $g \in \text{dom}(A_2^*)$  y  $f \in \text{dom}(A_1)$ , entonces

$$(A_1f, g) = (A_2f, g) = (f, A_2^*g),$$

entonces  $g \in \text{dom}(A_1^*)$  y  $A_1^*g = A_2^*g$ . Por lo tanto,  $A_2^* \subset A_1^*$ . □



Reproducimos a continuación los Teoremas 1, 6 y 7 de [9, Cap. 4, Sec. 1].

**Teorema 2.9.4.** *Sea  $A$  un operador simétrico. Entonces el semi-plano superior  $\text{Im } \zeta > 0$  y el semi-plano inferior  $\text{Im } \zeta < 0$  están contenidos en  $\hat{\rho}(A)$ .*

*Demostración.* Pongamos  $\zeta = \alpha + i\beta$ , entonces

$$\|(A - \zeta I)f\|^2 = \|(A - \alpha I)f\|^2 + |\beta|^2 \|f\|^2 + 2 \text{Re}((A - \alpha I)f, -i\beta f). \quad (2.9.5)$$

El último término de la igualdad (2.9.5) se hace cero ya que  $((A - \alpha I)f, f) \in \mathbb{R}$ , por el Teorema 2.9.2. Por lo tanto,

$$\|(A - \zeta I)f\|^2 = \|(A - \alpha I)f\|^2 + |\beta|^2 \|f\|^2.$$

De la ecuación anterior se sigue que  $\|(A - \zeta I)f\| \geq |\text{Im } \zeta| \cdot \|f\|$ . □

**Definición 2.9.2.** Sea  $A$  un operador simétrico y cerrado. Por el Teorema 2.8.4, los valores de  $\dim \ker(A^* - \bar{\zeta}I)$  en  $\{\text{Im } \zeta < 0\}$  y en  $\{\text{Im } \zeta > 0\}$  son constantes y se denotan por  $n_- = n_-(A)$  y  $n_+ = n_+(A)$ , respectivamente. Estas constantes son denominadas *índices de deficiencia* del operador  $A$ . Así,

$$\dim \ker(A^* - \zeta I) = \begin{cases} n_-(A) & \text{si } \text{Im } \zeta > 0 \\ n_+(A) & \text{si } \text{Im } \zeta < 0 \end{cases} \quad (2.9.6)$$

**Teorema 2.9.5.** *Si  $A = A^*$ , entonces  $\hat{\rho}(A) = \rho(A)$  y así  $\hat{\sigma}(A) = \sigma(A) \subset \mathbb{R}$ .*

*Demostración.*  $\rho(A) \subset \hat{\rho}(A)$  por definición. Resta probar que  $\hat{\rho}(A) \subset \rho(A)$ . Para ello, suponga que  $\text{Im } \zeta \neq 0$  y  $A = A^*$ , entonces

$$\ker(A^* - \zeta I) = \ker(A - \zeta I) = \{0\}. \quad (2.9.7)$$

Por (2.7.9) se tiene que  $\text{ran}(A - \bar{\zeta}I) = \mathcal{H}$  lo que prueba que  $\bar{\zeta} \in \rho(A)$ . De esto se sigue que  $\rho(A) \supset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Pero, por el Teorema 2.9.4,  $\hat{\rho}(A) \setminus \mathbb{R} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , o sea que  $\hat{\rho}(A) \setminus \mathbb{R} \subset \rho(A)$ . Ahora, si  $\zeta \in \hat{\rho}(A) \cap \mathbb{R}$ , entonces (2.9.7) sigue siendo válido y  $\text{ran}(A - \zeta I) = \mathcal{H}$ . Por lo tanto,  $\zeta \in \rho(A)$ . De esta forma  $\hat{\rho}(A) \subset \rho(A)$ . Como  $\hat{\sigma}(A) = \mathbb{C} \setminus \hat{\rho}(A)$  y  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ , entonces  $\hat{\sigma}(A) = \sigma(A) \subset \mathbb{R}$ . □

**Teorema 2.9.6.** *Sea  $A$  un operador simétrico cerrado. Entonces  $A$  es auto-adjunto si y sólo si*

$$n_+(A) = n_-(A) = 0.$$

*Demostración.* Si  $A = A^*$ , entonces por el Teorema 2.9.5 inmediatamente tenemos que  $n_{\pm}(A) = 0$ . Para probar la afirmación converso, suponga ahora que  $n_{\pm}(A) = 0$ , entonces por (2.9.6) se sigue que  $\ker(A^* - \zeta I) = 0$  para toda  $\zeta \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ . Así, por el Comentario 2.7.1, el Teorema 2.7.8 y el Teorema 2.8.1 resulta

$$\operatorname{ran}(A - \bar{\zeta}I) = \mathcal{H}, \quad \forall \zeta \notin \mathbb{R}. \quad (2.9.8)$$

Vamos a demostrar que de (2.9.8) y del hecho de que  $A$  es simétrico se sigue que  $A = A^*$ . En efecto, sea  $g \in \operatorname{dom}(A^*)$  y  $h = (A^* - \bar{\zeta}I)g$  con  $\zeta \notin \mathbb{R}$ . Existe  $g_0 \in \operatorname{dom}(A)$  tal que  $h = (A - \bar{\zeta}I)g_0$  para  $\zeta \notin \mathbb{R}$ . Ahora bien, para cualquier  $f \in \operatorname{dom}(A)$

$$((A - \zeta I)f, g) = (f, (A^* - \bar{\zeta}I)g) = (f, (A - \bar{\zeta}I)g_0) = ((A - \zeta I)f, g_0).$$

La ecuación anterior implica  $((A - \zeta I)f, g - g_0) = 0$ . Por lo tanto, cuando  $f$  recorre todo  $\operatorname{dom}(A)$ ,  $(A - \zeta I)f$  recorre todo  $\mathcal{H}$ . Por el Lema 2.2.3 se sigue que  $g = g_0$ . Así  $g \in \operatorname{dom}(A)$  y  $A^* \subset A$ . Como  $A$  es simétrico,  $A \subset A^*$ , así  $A = A^*$ .  $\square$

**Teorema 2.9.7.** *Un operador  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  es auto-adjunto si y sólo si su forma cuadrática es real.*

*Demostración.* Suponga que  $A = A^*$ , entonces la afirmación sigue directamente del Teorema 2.9.2. Ahora suponga que  $(Af, f)$  es real. Observe primero que para toda  $f, g \in \mathcal{H}$  un sencillo cálculo lleva a concluir que

$$\begin{aligned} (Af, g) &= (A(f+g), f+g) - (A(f-g), f-g) + \\ &\quad i(A(f+ig), f+ig) - i(A(f-ig), f-ig). \end{aligned}$$

De la ecuación anterior se sigue que

$$(g, Af) = \overline{(Af, g)} = (Af, g), \quad (2.9.9)$$

lo que demuestra que  $A = A^*$ .  $\square$

## 2.10. Proyectores ortogonales

Del Teorema 2.2.7 (Teorema de Proyección) y en particular de la ecuación (2.2.9) se sigue que para cualquier subespacio  $F \subset \mathcal{H}$  podemos definir un operador

$$P_F h = f \quad (2.10.1)$$

donde  $h$  y  $f$  son como en la ecuación (2.2.9). El operador  $P_F$  es denominado *proyector ortogonal*. Nótese que  $\text{dom}(P_F) = \mathcal{H}$ . Tómese el proyector ortogonal  $P_F$  al subespacio  $F$  y observe primero que si  $f \in F$ ,  $Pf = f$ . Además, para todo  $h \in \mathcal{H}$  y recordando la notación de la ecuación (2.2.9) tenemos que

$$0 \leq \|Ph\|^2 = \|f\|^2 = (f, f + g) = (f, h) = (Ph, h). \quad (2.10.2)$$

Lo que indica por el Teorema 2.9.7 que  $P = P^*$ . Observe también que

$$P^2h = Pf = f = Ph, \quad (2.10.3)$$

entonces  $P^2 = P$ . Más aún, tiene lugar el siguiente teorema.

**Teorema 2.10.1.** *Sea  $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Entonces  $P$  es un proyector si y sólo si*

$$P = P^* = P^2. \quad (2.10.4)$$

Además  $P = P_F$ , donde  $F = \{f \in \mathcal{H} : Pf = f\}$ .

*Demostración.* Claramente  $F$  es un subespacio, porque  $P$  es continuo. Por lo visto arriba, si  $P$  es un proyector, entonces (2.10.4) tiene lugar. Para probar la afirmación converso suponga que (2.10.4) se satisface. Ya que  $P = P^2$ , para todo  $h \in \mathcal{H}$  se tiene que  $(I - P)Ph = (P - P^2)h = 0$ , entonces  $Ph \in F$ . Ahora bien, si  $f \in F$  se sigue que

$$0 = ((I - P)f, h) = (f, (I - P)h), \quad (2.10.5)$$

es decir,  $f \perp h - Ph$ , o sea  $h - Ph \in F^\perp$ , lo que prueba que  $P$  es un proyector.  $\square$

## 2.11. Espectro de operadores compactos

**Teorema 2.11.1.** *Sea  $V \in S_\infty(\mathcal{H})$ ,  $\zeta \neq 0$ , entonces  $\text{ran}(V - \zeta I)$  es cerrado.*

*Demostración.* Sea  $g \in \overline{\text{ran}(V - \zeta I)}$ , entonces existe  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{ran}(V - \zeta I)$  tal que  $g_k \rightarrow g$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

$$g_k = (V - \zeta I)\tilde{f}_k, \quad \tilde{f}_k \in \mathcal{H}.$$

Por el Teorema 2.2.7, para toda  $k \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$\tilde{f}_k = f_k + \hat{f}_k,$$

donde  $f_k \in \ker(V - \zeta I)^\perp$  y  $\widehat{f}_k \in \ker(V - \zeta I)$ . Entonces  $g_k = (V - \zeta I)f_k$ . Probemos que la sucesión  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  está acotada. En efecto, suponga lo contrario y defina  $h_k = \frac{f_k}{\|f_k\|}$ , entonces

$$(V - \zeta I)h_k = \frac{g_k}{\|f_k\|} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

Ahora, como  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  está acotada, entonces existe  $\{h_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\{Vh_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente, entonces la sucesión  $\{h_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es también convergente, ya que

$$h_{k_n} = \zeta^{-1} \left( Vh_{k_n} - \frac{g_{k_n}}{\|f_{k_n}\|} \right).$$

Denotemos el límite de  $\{h_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  por  $h$ . Dado que  $\ker(V - \zeta I)^\perp$  es un subespacio, se tiene que  $h \in \ker(V - \zeta I)^\perp$ , pero por otra parte

$$(V - \zeta I)h = \lim_{n \rightarrow \infty} (V - \zeta I)h_{k_n} = 0,$$

o sea que  $h \in \ker(V - \zeta I)$ , lo cual es una contradicción. Así hemos demostrado que  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión acotada. Por lo tanto, existe  $\{f_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\{Vf_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente, pero por el mismo razonamiento anterior  $\{f_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es entonces convergente y por tanto tenemos que

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} (V - \zeta I)f_{k_n} = (V - \zeta I)f \in \text{ran}(V - \zeta I).$$

Lo que implica que  $\text{ran}(V - \zeta I)$  es cerrado.  $\square$

**Teorema 2.11.2.** *Sea  $V \in S_\infty(\mathcal{H})$ . Suponga que  $\zeta \neq 0$ ,  $\ker(V - \zeta I) = \{0\}$  y  $\text{ran}(V - \zeta I) \neq \mathcal{H}$ , entonces  $\text{ran}(V - \zeta I)^{k+1}$  es un subespacio propio de  $\text{ran}(V - \zeta I)^k$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Por el Teorema 2.11.1, se tiene que  $\text{ran}(V - \zeta I)$  es cerrado. Como  $\ker(V - \zeta I) = \{0\}$ , existe  $(V - \zeta I)^{-1}$  que genera una correspondencia biunívoca entre  $\text{ran}(V - \zeta I)^2$  y  $\text{ran}(V - \zeta I)$ . Dado, además, que  $V - \zeta I$  es cerrado (véase el principio de la demostración del Teorema 2.8.1), haciendo uso del Teorema 2.11.1 y del Teorema 2.8.3 tenemos que  $(V - \zeta I)^{-1}$  es acotado. De esto se sigue de manera inmediata que  $\text{ran}(V - \zeta I)^2$  es también cerrado. Y así por inducción tenemos que  $\text{ran}(V - \zeta I)^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , es cerrado.

Se puede verificar que  $\text{ran}(V - \zeta I)^{k+1} \subset \text{ran}(V - \zeta I)^k$ . En efecto, suponga que existe un  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\text{ran}(V - \zeta I)^{k_0+1} = \text{ran}(V - \zeta I)^{k_0},$$

entonces

$$\mathcal{H} = (V - \zeta I)^{-k_0} \text{ran}(V - \zeta I)^{k_0} = (V - \zeta I)^{-k_0} \text{ran}(V - \zeta I)^{k_0+1} = \text{ran}(V - \zeta I)$$

lo que contradice la hipótesis del teorema.  $\square$

La siguiente afirmación no supone nada sobre el operador  $V$  salvo que sea lineal. Este resultado generaliza un resultado bien conocido del Álgebra Lineal.

**Teorema 2.11.3.** *Sea  $V$  un operador lineal en  $\mathcal{H}$ . Si los auto-valores  $\lambda_k \neq \lambda_j$ , entonces*

$$\ker(V - \lambda_k I) \cap \ker(V - \lambda_j I) = \{0\}. \quad (2.11.1)$$

*Demostración.* Suponga que  $\lambda_k \neq \lambda_j$  y que

$$\ker(V - \lambda_k I) \cap \ker(V - \lambda_j I) \neq \{0\}. \quad (2.11.2)$$

De (2.11.2) se sigue que existe un  $f_j \neq 0$  en  $\ker(V - \lambda_j I) \cap \ker(V - \lambda_k I)$ . Por definición del núcleo espectral (véase la Definición 2.3.3), tenemos

$$(V - \lambda_k I)f_j = (V - \lambda_j I)f_j = 0 \quad (2.11.3)$$

de lo que se deduce  $\lambda_k f_j = \lambda_j f_j$ . Así  $\lambda_k = \lambda_j$ , contradiciendo la hipótesis.  $\square$

Citamos aquí el Teorema 6.7 de [44, Cap. 6, Sec. 6.1] que hace uso de los tres teoremas mencionados anteriormente.

**Teorema 2.11.4.** *Sea  $V \in S_\infty(\mathcal{H})$ , entonces  $\sigma(V) \setminus \{0\}$  consiste solamente de auto-valores aislados de multiplicidad finita.*

*Demostración.* Sea  $\zeta \in \sigma(V)$  tal que  $\zeta \neq 0$ . Suponga que  $\zeta$  no es un auto-valor. Entonces  $\zeta$  y  $V$  son tales que satisfacen la condición del Teorema 2.11.2. En efecto, que  $\zeta$  no sea auto-valor quiere decir que  $\ker(V - \zeta I) = \{0\}$ , mientras que si  $\zeta \in \sigma(V)$ , entonces  $\text{ran}(V - \zeta I) \neq \mathcal{H}$ . Así, por el Teorema 2.11.2 podemos construir la sucesión ortonormal  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que

$$f_k \in \text{ran}(V - \zeta I)^{k-1} \ominus \text{ran}(V - \zeta I)^k,$$

entonces por los Teoremas 2.2.4 y 2.7.7,  $V f_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Por el otro lado, tenemos que

$$V f_k = \zeta f_k + (V - \zeta I)f_k.$$

Así  $f_k \perp \text{ran}(V - \zeta I)^k$  y  $(V - \zeta I)f_k \in \text{ran}(V - \zeta I)^k$ . Por lo tanto, usando el Teorema de Pitágoras, Teorema 2.2.1,

$$\|V f_k\|^2 = |\zeta|^2 \|f_k\|^2 + \|(V - \zeta I)f_k\|^2 \geq |\zeta|^2 \|f_k\|^2 = |\zeta|^2 > 0. \quad (2.11.4)$$

Lo que indica una contradicción. Así  $\zeta$  debe ser un auto-valor. Probemos ahora que la multiplicidad de cada auto-valor  $\zeta$  distinto de cero es finita. Si hacemos

que  $\dim \ker(V - \zeta I) = \infty$ , entonces podría existir una sucesión ortonormal  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\ker(V - \zeta I)$ . Ya que  $V$  es compacto, entonces  $Vf_k \rightarrow 0$ , contradiciendo la igualdad  $\|Vf_k\| = |\zeta| \|f_k\| = |\zeta|$ .

Resta probar, ahora, que los auto-valores pueden acumularse solamente en el cero. Suponga que no es así y que  $\{\zeta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \sigma(V)$  tal que  $\zeta_k \rightarrow \zeta \neq 0$ . Considérese la sucesión  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $\|f_k\| = 1$ , tal que

$$(V - \zeta_k I)f_k = 0. \quad (2.11.5)$$

Del Teorema 2.11.3 concluimos inmediatamente que la sucesión  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es linealmente independiente. Sea

$$g_m \in \vee \{f_k\}_{k=1}^m \ominus \vee \{f_k\}_{k=1}^{m-1}$$

tal que  $\|g_m\| = 1$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ . Repitiendo el argumento anterior vemos que  $Vg_m \rightarrow 0$  cuando  $m \rightarrow \infty$  y además

$$Vg_k = \zeta_k g_k + (V - \zeta_k I)g_k. \quad (2.11.6)$$

Ahora bien, haciendo  $g_k = \sum_{j=1}^k a_{kj} f_j$  y tomando en cuenta (2.11.5) tenemos que

$$(V - \zeta_k I)g_k = \sum_{j=1}^k a_{kj} (V - \zeta_k I)f_j = \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} ((\zeta_j - \zeta_k)I)f_j \in \vee \{f_j\}_{j=1}^{k-1}. \quad (2.11.7)$$

Por lo tanto,  $g_k \perp (V - \zeta_k I)g_k$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ . Así, a partir de (2.11.6), podemos usar el mismo razonamiento que en (2.11.4), tenemos que  $\|Vg_k\| \geq |\zeta_k| \rightarrow |\zeta|$ , lo que contradice el hecho de que  $Vg_k \rightarrow 0$ .  $\square$

## 2.12. Teorema espectral

En esta sección introducimos resultados fundamentales de la teoría espectral de operadores relacionados con el Teorema espectral. Este teorema tiene implicaciones en la teoría y aplicaciones de operadores en espacios de Hilbert.

**Definición 2.12.1.** Una *resolución de la identidad* en  $\mathcal{H}$ , es una familia de operadores de proyección  $E(t)$  parametrizados por  $t \in \mathbb{R}$  y tales que satisfacen:

- a)  $E(-\infty) := s - \lim_{t \rightarrow -\infty} E(t) = 0$  y  $E(+\infty) := s - \lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = I$ , donde  $I$  es el operador identidad en  $\mathcal{H}$ .
- b)  $E(c-0) = s - \lim_{t \rightarrow c^-} E(t) = E(c)$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

c)  $E(a)E(b) = E(c)$ , donde  $c = \min\{a, b\}$ .

El operador  $s - \lim_{t \rightarrow a} E(t)$ , de acuerdo con la Definición 2.4.6, es el operador  $s - \lim_{k \rightarrow \infty} E(t_k)$ , donde  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  es cualquier sucesión tal que  $t_k \rightarrow \infty$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

A continuación reproducimos el Teorema 1 de [9, Cap. 6, Sec. 1], conocido como el teorema espectral.

**Teorema 2.12.1.** *A cada operador auto-adjunto  $A$  en  $\mathcal{H}$  le corresponde una única resolución de la identidad  $E_A(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , tal que:*

$$A = \int_{\mathbb{R}} t dE_A(t). \quad (2.12.1)$$

Note que, por como se definió la resolución de la identidad, fácilmente se verifica

$$I = \int_{\mathbb{R}} dE_A(t). \quad (2.12.2)$$

Además se puede mostrar que

$$\|Au\|^2 = \int_{\mathbb{R}} t^2 (dE_A(t)u, u). \quad (2.12.3)$$

Diremos que un punto  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un punto constante o de constancia de  $E$ , si  $E(\lambda + \epsilon) - E(\lambda - \epsilon + 0) = 0$  para algún  $\epsilon > 0$ . De otra forma  $\lambda$  será un punto de crecimiento de  $E(t)$ . Se puede mostrar que el conjunto de los puntos constantes de  $E(t)$  es abierto y el conjunto de los puntos de crecimiento es cerrado (véase [9, Cap. 6, Sec. 1]).

**Teorema 2.12.2.** *Sea (2.12.1) la expansión espectral de un operador auto-adjunto  $A$ . Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas (véase el Teorema 3 de [9, Cap. 6, Sec. 1]).*

- a)  $\sigma(A) = \{\text{puntos de crecimiento de } E_A\}$ .
- b)  $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : (E_A(\lambda + 0) - E_A(\lambda)) \neq 0\}$ , y el auto-espacio que corresponde a  $\lambda \in \sigma_p(A)$  es  $\mathcal{H}\{\lambda\} = [E_A(\lambda + 0) - E_A(\lambda)]\mathcal{H}$ .
- c)  $\sigma_c(A)$  es el conjunto de puntos no aislados de  $\sigma(A)$ .

El siguiente resultado es bien conocido y es un caso particular de un resultado más general cuya demostración se puede encontrar en [9, Cap. 6, Sec. 6].

**Teorema 2.12.3.** *Si  $A = A^*$  y  $\varphi$  es una función racional definida en  $\mathbb{R}$ , salvo posiblemente en un punto, entonces*

$$\sigma(\varphi(A)) = \overline{\varphi(\sigma(A))}. \quad (2.12.4)$$

## 2.13. Perturbación de operadores auto-adjuntos

**Definición 2.13.1.** Sea  $A$  un operador auto-adjunto en  $\mathcal{H}$  y  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de elementos en  $\mathcal{H}$ . Se dice que  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión singular para  $A$  en el punto  $\zeta$  si:

- a)  $\inf_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\| > 0$ .
- b) La sucesión  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge débilmente a cero (véase la Definición 2.1.6).
- c) La sucesión  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  está en el  $\text{dom}(A)$ .
- d)  $\{(A - \zeta I)f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a cero (véase la Definición 2.1.3).

**Lema 2.13.1.** *El punto  $\lambda \in \sigma_e(A)$ , ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ), si y sólo si para cualquier  $\epsilon > 0$ ,*

$$\dim E_A(\Delta)\mathcal{H} = \infty, \quad \Delta = (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon). \quad (2.13.1)$$

*Demostración.* Suponga que (2.13.1) no vale, es decir, para algún  $\epsilon_0 > 0$ ,

$$\dim E_A(\Delta_0)\mathcal{H} < \infty, \quad \Delta_0 = (\lambda - \epsilon_0, \lambda + \epsilon_0). \quad (2.13.2)$$

Esto es equivalente al hecho de que (véase el Teorema 2.12.2)  $\lambda$  es o bien un auto-valor de multiplicidad finita o un punto regular de  $A$ .  $\square$

Reproducimos aquí los Teoremas 2 y 3 de [9, Cap. 9, Sec. 1].

**Teorema 2.13.1.** *(Criterio de Weyl) Un elemento  $\lambda$  pertenece a  $\sigma_e(A)$  si y sólo si existe una sucesión singular para el operador auto-adjunto  $A$  en  $\lambda$ .*

*Demostración.* Sea  $\lambda \in \sigma_e(A)$  y suponga la existencia de un  $\epsilon_k > 0$ , tal que  $\{\epsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a cero. Haga  $\Delta_k = (\lambda - \epsilon_k, \lambda + \epsilon_k)$ , entonces  $\Delta = \Delta_k$  satisface (2.13.1). Tómese una sucesión ortonormal  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que

$$u_k \in [E_A(\lambda + \epsilon_k) - E_A(\lambda - \epsilon_k + 0)]\mathcal{H}. \quad (2.13.3)$$

La sucesión  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es singular, pues los incisos a) - c) de la Definición 2.13.1 se cumplen, mientras que d) (véase (2.12.2) y (2.12.3)) sigue del hecho de que

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda I)u_k\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} |t - \lambda|^2 (dE_A(t)u_k, u_k) \\ &= \int_{\mathbb{R} \setminus V_{\epsilon_k}(\lambda)} |t - \lambda|^2 (dE_A(t)u_k, u_k) + \int_{V_{\epsilon_k}(\lambda)} |t - \lambda|^2 (dE_A(t)u_k, u_k). \end{aligned}$$



La primera integral del lado izquierdo se hace cero por la propiedad de ortogonalidad (véase Definición 2.12.1 c)) de la resolución de la identidad. Así,

$$\|(A - \lambda I)u_k\|^2 = \int_{V_{\epsilon_k}(\lambda)} |t - \lambda|^2 (dE_A(t)u_k, u_k) \leq \epsilon_k^2 \|u_k\|^2 = \epsilon_k^2. \quad (2.13.4)$$

Para probar la afirmación converso, suponga que  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión singular de  $A$  en el punto  $\lambda$ . Si  $\lambda \notin \sigma_e(A)$ , entonces (2.13.2) se satisface para algún  $\epsilon_0 > 0$ . Escriba

$$v_k = u_k - [E_A(\lambda + 0) - E_A(\lambda)]u_k. \quad (2.13.5)$$

Entonces

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)v_k &= (A - \lambda I)u_k - (A - \lambda I)[E_A(\lambda + 0) - E_A(\lambda)]u_k \\ &= (A - \lambda I)u_k \end{aligned}$$

ya que  $[E_A(\lambda + 0) - E_A(\lambda)]u_k$  se encuentra en el auto-espacio correspondiente a  $\lambda$ . Así  $(A - \lambda I)v_k \rightarrow 0$ , pues  $(A - \lambda I)u_k \rightarrow 0$ . Además  $v_k \perp [E_A(\lambda + 0) - E_A(\lambda)]\mathcal{H}$ . En efecto, si  $w \in [E_A(\lambda + 0) - E_A(\lambda)]\mathcal{H}$ , entonces

$$\begin{aligned} (v_n, w) &= (u_n - [E_A(\lambda + 0) - E_A(\lambda)]u_n, w) \\ &= (u_n, w) - (E_A(\lambda + 0) - E_A(\lambda)]u_n, w). \end{aligned}$$

Y utilizando las propiedades del proyector, tenemos que

$$(E_A(\lambda + 0) - E_A(\lambda)]u_n, w) = (u, w). \quad (2.13.6)$$

Así, se cumple que  $(v_n, w) = 0$ .

Ahora bien, puesto que  $\lambda$  es un punto regular de la parte de  $A$  en  $\mathcal{H} \ominus [E_A(\lambda + 0) - E_A(\lambda)]\mathcal{H}$  (es decir, del operador  $A$  restringido a  $\text{dom}(A) \cap \mathcal{H} \ominus [E_A(\lambda + 0) - E_A(\lambda)]\mathcal{H}$ ), se sigue de esto que  $\|(A - \lambda I)v_k\| \geq C_0 \|v_k\|$ ,  $C_0 > 0$ , y así,  $v_k \rightarrow 0$ . La proyección  $[E_A(\lambda + 0) - E_A(\lambda)]$ , de dimensión finita, es compacta. Por lo tanto, la convergencia débil de  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  al elemento cero, implica que  $[E_A(\lambda + 0) - E_A(\lambda)]u_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Y por (2.13.5) se sigue que  $u_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , lo que contradice la condición  $\inf_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\| > 0$ .  $\square$

Teorema 2.13.1 muestra que el espectro esencial es estable bajo perturbaciones compactas.

**Teorema 2.13.2.** (Teorema de Weyl) Sea  $V = V^* \in \mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$  y  $A = A^*$ . Entonces el operador  $B = A + V$  es auto-adjunto y  $\sigma_e(B) = \sigma_e(A)$ .

*Demostración.* El Teorema 2.7.10 (a) implica directamente que  $B$  es auto-adjunto. Sea  $\zeta \in \sigma_e(A)$  y  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión singular para el operador  $A$  en  $\zeta$ . Ya que  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge débilmente al elemento 0 y  $V \in \mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$ , por el Teorema 2.7.7, tenemos que  $\{Vf_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a 0 y así

$$(B - \zeta I)f_k = (A - \zeta I)f_k + Vf_k \rightarrow 0. \quad (2.13.7)$$

Por lo tanto, la sucesión  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es singular para el operador auto-adjunto  $B$  en  $\zeta$  y  $\sigma_e(A) \subset \sigma_e(B)$ . Ahora, la igualdad  $A = B + (-V)$  hace que  $\sigma_e(B) \subset \sigma_e(A)$ , por lo tanto  $\sigma_e(B) = \sigma_e(A)$ .  $\square$

## 2.14. Física matemática y teoría espectral de operadores en espacios de Hilbert

En Mecánica Cuántica, los sistemas son descritos por operadores y vectores en un espacio de Hilbert separable  $\mathcal{H}$ . A cada vector  $f \in \mathcal{H}$  tal que  $\|f\| = 1$  le corresponde un estado físico. Además, dos vectores  $f$  y  $g$  tales que  $\|f\| = 1$ ,  $\|g\| = 1$  corresponden al mismo estado físico si y sólo si existe  $\theta \in [0, 2\pi)$  tal que  $f = e^{i\theta}g$ . Para cada “observable”, es decir, una magnitud medible del sistema cuántico, existe un operador auto-adjunto  $A$  en  $\mathcal{H}$ . Así, si el sistema está en el estado físico  $f$  y medimos la observable correspondiente al operador auto-adjunto  $A$ , la distribución de probabilidad del valor de la medición es  $(dE_A(t)f, f)$ . O sea que, la probabilidad de que el valor de la medición esté en el intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  es

$$\int_{[a,b]} (dE_A(t)f, f). \quad (2.14.1)$$

Es por esto, que la Teoría espectral de operadores en espacios de Hilbert ocupa un lugar destacado en la Física-Matemática.

Un aspecto importante que usualmente no se toma en cuenta en libros de texto de Física cuando se estudian los operadores lineales en espacios de Hilbert es su dominio de definición; en este trabajo, en cambio, dada su característica, el análisis de esos dominios resulta indispensable. Los siguientes teoremas ilustran que en general los operadores que se utilizan en Mecánica Cuántica no están siempre definidos en todo  $\mathcal{H}$ .

**Teorema 2.14.1.** (*Teorema de la Gráfica Cerrada*) Sea  $T$  un operador lineal en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  tal que  $\text{dom}(T) = \mathcal{H}$ . Entonces  $T$  es acotado si y sólo si su gráfica  $G(T)$  es cerrada.

*Demostración.* Suponga que  $T$  es un operador cerrado, entonces por el Teorema 2.8.2,  $T$  es acotado. Ahora suponga que  $T$  es acotado, entonces por el Teorema 2.6.3 se tiene que  $T$  es cerrado, lo que demuestra que  $G(T)$  es cerrada.  $\square$

*Comentario 2.14.1.* Por el *Teorema de la Gráfica Cerrada*, un operador no acotado y cerrado no puede estar definido en todo  $\mathcal{H}$ .

**Teorema 2.14.2.** (*Hellinger-Toeplitz*) Sea  $A$  un operador simétrico definido en todo  $\mathcal{H}$ , entonces  $A$  es acotado.

*Demostración.* Como  $A$  es cerrable y  $\mathcal{H} = \text{dom}(A) \subset \text{dom}(\bar{A})$  implica que  $\text{dom}(\bar{A}) = \text{dom}(A)$ , entonces  $A$  es un operador cerrado. De aquí se sigue que  $A$  es acotado, haciendo uso del Teorema 2.14.1.  $\square$

*Comentario 2.14.2.* Por el teorema de *Hellinger-Toeplitz* un operador que sea simétrico y no acotado no puede estar definido en todo  $\mathcal{H}$ . Como los operadores auto-adjuntos son simétricos, vemos que los operadores en Mecánica Cuántica, en general, no están definidos en todo  $\mathcal{H}$ .

# Capítulo 3

## Representación matricial de operadores lineales

Vamos a estudiar en este capítulo la representación matricial de operadores acotados y simétricos no acotados. Ello consiste en asignar a una matriz un único operador lineal y a un operador lineal una única matriz, y para lo cual se dan ciertas condiciones. El problema de la representación matricial de operadores acotados es sencillo, porque existe una relación biunívoca entre estos operadores y ciertas matrices. Para la representación matricial de operadores no acotados existe una dificultad que consiste en que a una sola matriz le podemos asociar varios operadores con diferentes dominios.

### 3.1. Representación matricial de operadores lineales acotados

En esta sección vamos a trabajar con operadores lineales definidos en todo el espacio  $\mathcal{H}$  y demostraremos que los operadores acotados admiten representaciones matriciales completamente análogas a las ya bien conocidas de los operadores lineales en los espacios de dimensión finita.

Para ello, comenzamos por escoger una base ortonormal fija  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{H}$  y para el operador  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  definimos

$$t_{jk} := (Tu_k, u_j) = (u_k, T^*u_j), \quad \forall j, k \in \mathbb{N}. \quad (3.1.1)$$

Los números  $t_{jk}$   $j, k \in \mathbb{N}$  están definidos unívocamente una vez que fijamos la base ortonormal  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

Ya en el Teorema 2.2.6 vimos que cualquier espacio de *Hilbert*  $\mathcal{H}$ , con  $\dim(\mathcal{H}) = \infty$ , es isométricamente isomorfo a  $l_2(\mathbb{N})$ . Observamos también que

existe una correspondencia uno a uno definida por el operador isométrico  $U$  de la siguiente forma  $Uu_k = \delta_k$  para toda  $k$ , donde  $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  formaba la base canónica en el espacio de Hilbert  $l_2(\mathbb{N})$ . Con este recordatorio, sea  $f \in \mathcal{H}$  y  $\varphi = \{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{N})$ . Así si

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k u_k ,$$

entonces

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k \delta_k = \varphi = Uf = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k Uu_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k \delta_k$$

del que se sigue que  $f_k = \varphi_k$ .

La idea en esta sección es trabajar en el espacio  $l_2(\mathbb{N})$ ; para ello, construimos el operador

$$\widehat{T} := UTU^{-1} : l_2(\mathbb{N}) \rightarrow l_2(\mathbb{N}). \quad (3.1.2)$$

Los operadores  $\widehat{T}$  y  $T$  comparten las mismas propiedades y es equivalente estudiar  $\widehat{T}$  en  $l_2(\mathbb{N})$  a estudiar  $T$  en  $\mathcal{H}$ .

Sea  $Tf = g$  tal que  $g = \sum_{j \in \mathbb{N}} g_j u_j$ . Entonces, si  $\psi = Ug$  se tiene que  $g_j = \psi_j$ . Así

$$\begin{aligned} \psi_j &= (g, u_j) = (Tf, u_j) = \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k u_k, T^* u_j \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k (u_k, T^* u_j) = \sum_{k \in \mathbb{N}} t_{jk} \varphi_k. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

La convergencia de la última serie en la ecuación (3.1.3) sigue de la continuidad del producto interior, y de la convergencia de  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k u_k$ . Así,

$$(\widehat{T}\varphi)_j = \sum_{k \in \mathbb{N}} t_{jk} \varphi_k. \quad (3.1.4)$$

*Comentario 3.1.1.* El operador  $\widehat{T}$  actúa sobre las sucesiones como una matriz  $t_{jk}$  sobre vectores. O sea  $\widehat{T}$  puede identificarse con la matriz  $t_{jk}$ , la cual es la representación matricial del operador  $T$ .

**Definición 3.1.1.** Denotaremos a  $\{t_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  como la representación matricial del operador  $T$  con respecto a la base ortonormal  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

La representación matricial de  $T^*$  se obtiene de la siguiente manera:

$$t_{jk}^* = (T^* u_k, u_j) = (u_k, T u_j) = \overline{t_{kj}}.$$

De donde resulta que

$$(\widehat{T}^* \varphi)_j = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{t_{kj}} \varphi_k. \quad (3.1.5)$$

Observe que

$$\begin{aligned} (\widehat{T} \varphi, \psi)_{l_2(\mathbb{N})} &= (\widehat{T} U f, \psi)_{l_2(\mathbb{N})} = (U T f, U g)_{l_2(\mathbb{N})} \\ &= (f, T^* g)_{\mathcal{H}} = (U f, U T^* g)_{l_2(\mathbb{N})} \\ &= (\varphi, \widehat{T}^* U g)_{l_2(\mathbb{N})} = (\varphi, \widehat{T}^* \psi)_{l_2(\mathbb{N})}. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Por lo tanto

$$\widehat{T}^* = (\widehat{T})^*. \quad (3.1.7)$$

Así que, de

$$(\widehat{T} \varphi, \psi) = (\varphi, \widehat{T}^* \psi),$$

tenemos

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} t_{jk} \varphi_k \right) \overline{\psi_j} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} t_{kj} \overline{\psi_k} \right) \varphi_j. \quad (3.1.8)$$

Dado que  $\widehat{T} \in \mathcal{B}(l_2(\mathbb{N}))$ , de la desigualdad

$$|(\widehat{T} \varphi, \psi)| \leq M \|\varphi\| \cdot \|\psi\| \quad (3.1.9)$$

con  $M > 0$ , se sigue

$$\left| \sum_{j \in \mathbb{N}} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} t_{kj} \overline{\psi_k} \right) \varphi_j \right| \leq M \sqrt{\sum_{j \in \mathbb{N}} |\varphi_j|^2} \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{N}} |\psi_k|^2}. \quad (3.1.10)$$

Así hemos probado el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.1.** *La matriz  $\{t_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  como se definió en (3.1.1) satisface (3.1.10) para cualesquiera  $\varphi, \psi \in l_2(\mathbb{N})$ .*

**Teorema 3.1.2.** *Suponga que se nos da una matriz  $\{s_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  que satisface la desigualdad*

$$\left| \sum_{j=1}^p \left( \sum_{k=1}^q s_{kj} \overline{\psi_k} \right) \varphi_j \right| \leq M \sqrt{\sum_{j=1}^p |\varphi_j|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^q |\psi_k|^2} \quad (3.1.11)$$

con  $M > 0$  para cualesquiera  $p, q \in \mathbb{N}$ , entonces para todo  $\varphi \in l_2(\mathbb{N})$  podemos definir la acción de un operador  $\widehat{S}$  de la siguiente forma:

$$(\widehat{S} \varphi)_k := \sum_{n \in \mathbb{N}} s_{kn} \varphi_n \quad (3.1.12)$$

y  $\widehat{S}$  es acotado.

*Demostración.* Sea  $\{s_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  una matriz que satisface la desigualdad (3.1.11) para cualesquiera  $p, q \in \mathbb{N}$ . Vamos a probar que esta matriz determina a un operador lineal acotado  $\widehat{S}$ . De la desigualdad (3.1.11) con

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_{j-1} = \varphi_{j+1} = \cdots = 0, \varphi_j \neq 0, \\ \psi_1 = \psi_2 = \cdots = \psi_{m-1} = \psi_{n+1} = \psi_{n+2} = \cdots = 0, \psi_m, \dots, \psi_n \neq 0 \end{aligned}$$

obtenemos

$$\left| \sum_{k=m}^n s_{kj} \overline{\psi}_k \right| \leq M \sqrt{\sum_{k=m}^n |\psi_k|^2}.$$

Esto implica la convergencia de la serie

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} s_{kj} \overline{\psi}_k \quad (3.1.13)$$

para cualquier  $j \in \mathbb{N}$  y cualquier sucesión  $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{N})$ . Por el Teorema 2.5.2 podemos considerar al funcional lineal y continuo

$$l_j(\psi) = \sum_{k \in \mathbb{N}} s_{kj} \psi_k, \quad (3.1.14)$$

definido en todo  $l_2(\mathbb{N})$ . Ahora por el Teorema de representación de Riesz (Teorema 2.5.1), existe  $\eta^j = \{\eta_k^j\}_{k \in \mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{N})$  tal que

$$l_j(\psi) = (\psi, \eta^j) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \psi_k \overline{\eta_k^j}. \quad (3.1.15)$$

O sea que, para cada  $j \in \mathbb{N}$  y  $\psi \in l_2(\mathbb{N})$  se tiene que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} s_{kj} \psi_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{\eta_k^j} \psi_k. \quad (3.1.16)$$

Considerando la base canónica  $\{\delta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  en  $l_2(\mathbb{N})$  tenemos que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (s_{kj} - \overline{\eta_k^j}) \delta_{mk} = 0, \quad (3.1.17)$$

por lo tanto, para cada  $k \in \mathbb{N}$

$$s_{kj} - \overline{\eta_k^j} = 0$$

lo que implica que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |s_{kj}|^2 < \infty. \quad (3.1.18)$$

El hecho de que (3.1.18) siga de (3.1.13) es un caso particular del Teorema de Landau (véase [3, Sec. 18] y para el caso general véase [27]).

Definamos la acción del operador  $\widehat{S}_0$ , para la base canónica  $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  por medio de la fórmula

$$(\widehat{S}_0 \delta_n)_k := \sum_{j \in \mathbb{N}} s_{kj} \delta_{nj} = s_{kn}.$$

El vector  $\widehat{S}_0 \delta_n$  está en  $l_2(\mathbb{N})$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  ya que (3.1.18) tiene lugar. Ahora por la linealidad, podemos definir la acción del operador  $\widehat{S}_0$  para todos los vectores con solamente un número finito de componentes diferentes de cero. En efecto, dado que

$$\widehat{S}_0 \delta_n = \{s_{kn}\}_{k \in \mathbb{N}},$$

la acción del operador  $\widehat{S}_0$  sobre  $\varphi = \sum_{n=1}^N \varphi_n \delta_n$  está dada por

$$\widehat{S}_0 \varphi = \sum_{n=1}^N \varphi_n \widehat{S}_0 \delta_n,$$

lo que implica

$$\widehat{S}_0 \varphi = \sum_{n=1}^N \varphi_n \{s_{kn}\}_{k \in \mathbb{N}} = \left\{ \sum_{n=1}^N \varphi_n s_{kn} \right\}_{k \in \mathbb{N}}. \quad (3.1.19)$$

Por lo tanto,

$$(\widehat{S}_0 \varphi)_k = \sum_{n=1}^N s_{kn} \varphi_n, \quad \varphi \in l_{fin}(\mathbb{N}). \quad (3.1.20)$$

Recuerde que  $l_{fin}(\mathbb{N})$  fue definido en la Definición 2.1.7.

Probemos, ahora, que el operador  $\widehat{S}_0$  es acotado. Por la desigualdad (3.1.11), para  $\varphi, \psi \in l_{fin}(\mathbb{N})$  tenemos que

$$|(\widehat{S}_0 \varphi, \psi)| \leq M \|\varphi\| \cdot \|\psi\|. \quad (3.1.21)$$



Por la continuidad del producto interior, la desigualdad (3.1.21) se satisface para todo  $\psi \in l_2(\mathbb{N})$ . Sea  $\psi = \widehat{S}_0\varphi \neq 0$ . En (3.1.21) obtenemos

$$\|\widehat{S}_0\varphi\|^2 \leq M\|\varphi\| \cdot \|\widehat{S}_0\varphi\|, \quad (3.1.22)$$

así,

$$\|\widehat{S}_0\varphi\| \leq M\|\varphi\|. \quad (3.1.23)$$

Por lo tanto,  $\widehat{S}_0$  es acotado. Ahora bien, extendiendo el operador  $\widehat{S}_0$  por continuidad a todo el espacio  $l_2(\mathbb{N})$ , y denotando esa extensión como  $\widehat{S}$ , vemos que  $\widehat{S}$  es un operador acotado en todo  $l_2(\mathbb{N})$ , y por (3.1.20), la acción del operador  $\widehat{S}$  se puede definir como:

$$(\widehat{S}\varphi)_k = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_{kn}\varphi_n.$$

□

Observe que para cualquier base ortonormal  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  y el correspondiente operador  $U$  dado en el Teorema 2.2.6 se tiene que

$$S := U^{-1}\widehat{S}U,$$

es un operador en  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ .

*Comentario 3.1.2.* De los Teoremas 3.1.1 y 3.1.2 se sigue que para que una matriz  $\{t_{jk}\}$  sea la representación matricial de un operador  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  es *necesario y suficiente* que satisfaga la condición (3.1.11). En efecto, a cada  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  le corresponde una única matriz que satisface (3.1.11) y a cada matriz que satisface la condición (3.1.11) le corresponde un único operador  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .

**Teorema 3.1.3.** *Sea  $\{t_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  la representación matricial de  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Si*

$$\sum_{j,k \in \mathbb{N}} |t_{jk}|^2 < \infty, \quad (3.1.24)$$

*entonces  $T \in S_\infty(\mathcal{H})$ .*

*Demostración.* Suponga que  $\sum_{j,k \in \mathbb{N}} |t_{jk}|^2 < \infty$ , entonces

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^p \sum_{k \in \mathbb{N}} |t_{jk}|^2 < \infty.$$

Por lo tanto, para cada  $\epsilon > 0$ , existe un número entero  $p = p(\epsilon)$  tal que

$$\sum_{j=p+1}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} |t_{jk}|^2 \leq \epsilon^2.$$

Construyamos ahora el operador  $\widehat{T}_\epsilon$  con la siguiente relación

$$\widehat{T}_\epsilon \varphi = \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 + \cdots + \psi_p u_p,$$

donde  $\psi_j = \sum_{k \in \mathbb{N}} t_{jk} \varphi_k$ , si  $\varphi = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k u_k$ . Sea

$$\widehat{T} \varphi = \sum_{j \in \mathbb{N}} \psi_j u_j,$$

entonces tenemos que

$$\|\widehat{T} \varphi - \widehat{T}_\epsilon \varphi\|^2 = \left\| \sum_{j=p+1}^{\infty} \psi_j u_j \right\|^2 = \sum_{j=p+1}^{\infty} \left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} t_{jk} \varphi_k \right\|^2 \leq \sum_{j=p+1}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} |t_{jk}|^2 \|\varphi\|^2 \leq \epsilon^2 \|\varphi\|^2.$$

Resta solamente verificar que el operador  $\widehat{T}_\epsilon$  es compacto. Para ello, seleccionamos cualquier conjunto acotado de vectores en  $\mathcal{H}$ . El operador  $\widehat{T}_\epsilon$  va a mapear este conjunto en un conjunto acotado de un subespacio de dimensión finita de  $\mathcal{H}$ , y este conjunto es compacto por el Teorema de Bolzano-Weierstrass. Por lo tanto,  $\widehat{T}_\epsilon$  es un operador compacto.

Demostremos, ahora, que si

$$\|\widehat{T} \varphi - \widehat{T}_\epsilon \varphi\| \leq \epsilon^2 \|\varphi\| \quad (3.1.25)$$

con  $\epsilon$  arbitrario y  $\widehat{T}_\epsilon$  compacto, entonces  $\widehat{T}$  es compacto. Y como los operadores  $\widehat{T}$  y  $T$  comparten las mismas propiedades, entonces se tiene que también  $T$  es compacto. Para probar esta afirmación, escogemos una sucesión de números positivos  $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3 > \cdots$  con  $(\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0)$  y consideramos una sucesión de operadores compactos de la forma  $\{T_{\epsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Sea  $M$  un conjunto acotado arbitrario de puntos  $f \in \mathcal{H}$  tales que  $\|f\| \leq C$ . Tómese una sucesión arbitraria  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  en  $M$ . Ahora bien, por la compacidad del operador  $T_{\epsilon_1}$ , existe una subsucesión

$$f_{11}, f_{12}, f_{13}, \cdots \quad (3.1.26)$$

la cual es mapeada por el operador  $T_{\epsilon_1}$  en una sucesión convergente. De la sucesión (3.1.26) seleccionamos una subsucesión

$$f_{21}, f_{22}, f_{23}, \cdots \quad (3.1.27)$$

la cual es también mapeada en una sucesión convergente por el operador  $T_{\epsilon_2}$ . Continuando este proceso, obtenemos la sucesión infinita de sucesiones de la forma

$$\begin{array}{cccccc}
 f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1k} & \cdots & = \{f_{1k}\}_{k \in \mathbb{N}} \\
 f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2k} & \cdots & = \{f_{2k}\}_{k \in \mathbb{N}} \\
 f_{31} & f_{32} & f_{33} & \cdots & f_{3k} & \cdots & = \{f_{3k}\}_{k \in \mathbb{N}} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 f_{k1} & f_{k2} & f_{k3} & \cdots & f_{kk} & \cdots & = \{f_{kk}\}_{k \in \mathbb{N}} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
 \end{array}$$

en el que cada una es una subsucesión de la anterior. La sucesión de la diagonal

$$f_{11}, f_{22}, f_{33}, \cdots \quad (3.1.28)$$

es mapeada por el operador  $T_{\epsilon_k}$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ , en una sucesión convergente. Probemos que la siguiente sucesión diagonal  $\{f_{kk}\}_{k \in \mathbb{N}}$  es mapeada también en una sucesión convergente por el operador  $T$ . Para ello, es suficiente probar que

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|Tf_{nn} - Tf_{mm}\| = 0. \quad (3.1.29)$$

Note que

$$\begin{aligned}
 \|Tf_{nn} - Tf_{mm}\| &\leq \|(T - T_{\epsilon_k})f_{nn}\| + \|T_{\epsilon_k}f_{nn} - T_{\epsilon_k}f_{mm}\| + \|(T - T_{\epsilon_k})f_{mm}\| \\
 &\leq 2\epsilon_k C + \|T_{\epsilon_k}f_{nn} - T_{\epsilon_k}f_{mm}\|.
 \end{aligned}$$

Tomando  $k$  suficientemente grande, podemos hacer el término  $2\epsilon_k C$  tan pequeño como queramos. Después de esto, tomamos  $N$  tan grande de tal forma que  $\|T_{\epsilon_k}f_{nn} - T_{\epsilon_k}f_{mm}\|$  se haga tan pequeño como queramos para  $m, n > N$ . Así la relación (3.1.29) se satisface y  $T$  es compacto, es decir,  $T \in S_\infty(\mathcal{H})$ .  $\square$

## 3.2. Representación matricial de operadores lineales simétricos no acotados

En esta sección supondremos siempre que  $A$  es un operador cerrado y simétrico. De la misma forma como en la sección anterior, escogemos una base ortonormal fija  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  sólo que ahora en el dominio del operador  $A$ , donde  $A$  es un operador cerrado, simétrico y no acotado. Así

$$a_{jk} := (Au_k, u_j) = (u_k, Au_j) = \overline{a_{kj}} \quad \forall j, k \in \mathbb{N}, \quad (3.2.1)$$

de donde se sigue que  $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  es una matriz hermitiana.

Para la base ortonormal  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  fija, consideramos el operador isométrico  $U$  del Teorema 2.2.6 para obtener el operador

$$\widehat{A} = UAU^{-1}. \quad (3.2.2)$$

Los operadores  $\widehat{A}$  y  $A$  tienen exactamente las mismas propiedades, en particular, sucede que  $\text{dom}(\widehat{A}) = U \text{dom}(A)$  y  $\widehat{A}$  es cerrado.

**Definición 3.2.1.** Sea  $\widehat{A}_{\text{máx}}$  el operador definido en

$$\text{dom}(\widehat{A}_{\text{máx}}) := \{\varphi \in l_2(\mathbb{N}) : \sum_{j \in \mathbb{N}} |\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{jk} \varphi_k|^2 < \infty\} \quad (3.2.3)$$

y que actúa como

$$(\widehat{A}_{\text{máx}}\varphi)_j := \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{jk} \varphi_k. \quad (3.2.4)$$

*Comentario 3.2.1.* Hemos definido  $\widehat{A}_{\text{máx}}$  de manera que (3.2.4) tiene sentido para todo  $\varphi \in \text{dom}(\widehat{A}_{\text{máx}})$ . Claramente, si un operador en  $l_2(\mathbb{N})$  actúa de la misma forma que  $\widehat{A}_{\text{máx}}$ , entonces aquel operador debe ser restricción de  $\widehat{A}_{\text{máx}}$ . Nótese, además, que  $\text{dom}(\widehat{A}_{\text{máx}}) = l_2(\mathbb{N})$ , dado que  $\text{dom}(\widehat{A}_{\text{máx}}) \supset l_{\text{fin}}(\mathbb{N})$  y este último es denso en  $l_2(\mathbb{N})$ .

**Definición 3.2.2.** Defínase  $\widehat{A}_{\text{mín}}$  como  $\widehat{A}_{\text{mín}} := (\widehat{A}_{\text{máx}})^*$ .

Considérese el operador  $\widehat{A}_{\text{máx}}|_{l_{\text{fin}}(\mathbb{N})}$  como el operador  $\widehat{A}_{\text{máx}}$  restringido a  $l_{\text{fin}}(\mathbb{N})$  (veáse la Definición 2.1.7).

**Teorema 3.2.1.**  $(\widehat{A}_{\text{máx}}|_{l_{\text{fin}}(\mathbb{N})})^* = \widehat{A}_{\text{máx}}$ .

*Demostración.* Demostremos primero que  $\text{dom}((\widehat{A}_{\text{máx}}|_{l_{\text{fin}}(\mathbb{N})})^*) \subset \text{dom}(\widehat{A}_{\text{máx}})$ . Sea  $\varphi \in \text{dom}((\widehat{A}_{\text{máx}}|_{l_{\text{fin}}(\mathbb{N})})^*)$ , entonces  $(\widehat{A}_{\text{máx}}|_{l_{\text{fin}}(\mathbb{N})})^* \varphi = \psi \in l_2(\mathbb{N})$ .

$$\begin{aligned} \psi_j &= (\psi, \delta_j) = ((\widehat{A}_{\text{máx}}|_{l_{\text{fin}}(\mathbb{N})})^* \varphi, \delta_j) = \overline{(\delta_j, (\widehat{A}_{\text{máx}}|_{l_{\text{fin}}(\mathbb{N})})^* \varphi)} \\ &= \overline{(\widehat{A}_{\text{máx}}|_{l_{\text{fin}}(\mathbb{N})} \delta_j, \varphi)} = \overline{(\widehat{A}_{\text{máx}}|_{l_{\text{fin}}(\mathbb{N})} \delta_j, \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k \delta_k)} \\ &= \overline{\sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{\varphi_k} (\widehat{A}_{\text{máx}}|_{l_{\text{fin}}(\mathbb{N})} \delta_j, \delta_k)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{jk} \varphi_k. \end{aligned}$$

Esto demuestra que  $\varphi \in \text{dom}(\widehat{A}_{\text{máx}})$ . Probemos ahora que

$$\text{dom}(\widehat{A}_{\text{máx}}) \subset \text{dom}((\widehat{A}_{\text{máx}}|_{l_{\text{fin}}(\mathbb{N})})^*).$$

Claramente,

$$(\widehat{A}_{\text{máx}}|_{l_{\text{fin}}(\mathbb{N})}\delta_j, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{\varphi_k} (\widehat{A}_{\text{máx}}|_{l_{\text{fin}}(\mathbb{N})}\delta_j, \delta_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{kj} \overline{\varphi_k}. \quad (3.2.5)$$

Por otra parte, suponga que  $\varphi \in \text{dom}(\widehat{A}_{\text{máx}})$ , entonces

$$(\widehat{A}_{\text{máx}}\varphi, \delta_j) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k (\widehat{A}_{\text{máx}}\delta_k, \delta_j) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{a_{kj}} \varphi_k. \quad (3.2.6)$$

Así, para todo elemento de la base canónica  $\delta_j$ ,

$$(\delta_j, \widehat{A}_{\text{máx}}\varphi) = \overline{(\widehat{A}_{\text{máx}}\varphi, \delta_j)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{kj} \overline{\varphi_k} = (\widehat{A}_{\text{máx}}|_{l_{\text{fin}}(\mathbb{N})}\delta_j, \varphi).$$

Entonces para cualquier  $\psi \in \text{dom}(\widehat{A}_{\text{máx}}|_{l_{\text{fin}}(\mathbb{N})})$  se cumple que

$$(\widehat{A}_{\text{máx}}|_{l_{\text{fin}}(\mathbb{N})}\psi, \varphi) = (\psi, \widehat{A}_{\text{máx}}\varphi),$$

por lo que  $\varphi \in \text{dom}((\widehat{A}_{\text{máx}}|_{l_{\text{fin}}(\mathbb{N})})^*)$  y  $(\widehat{A}_{\text{máx}}|_{l_{\text{fin}}(\mathbb{N})})^*\varphi = \widehat{A}_{\text{máx}}\varphi$ .  $\square$

**Corolario 3.2.1.** *Del Teorema 3.2.1 se concluye inmediatamente que  $\widehat{A}_{\text{máx}}|_{l_{\text{fin}}(\mathbb{N})}$  es un operador simétrico*

**Corolario 3.2.2.** *Del Comentario 2.7.2, se sigue que  $\widehat{A}_{\text{máx}}$  es cerrado.*

**Corolario 3.2.3.** *De la igualdad (2.7.5) se sigue que*

$$\widehat{A}_{\text{mín}} = \overline{(\widehat{A}_{\text{máx}})|_{l_{\text{fin}}(\mathbb{N})}}. \quad (3.2.7)$$

**Definición 3.2.3.** Cuando  $\widehat{A} = \widehat{A}_{\text{mín}}$ , diremos que  $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  es la representación matricial de  $A$  con respecto a la base ortonormal  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . En este caso  $\widehat{A}$  es el mínimo operador simétrico cerrado en  $l_2(\mathbb{N})$  que satisface

$$(\widehat{A}\delta_k, \delta_j) = a_{jk}, \quad (3.2.8)$$

o lo que es lo mismo decir que  $A$  es el mínimo operador cerrado en  $\mathcal{H}$  que satisface

$$(Au_k, u_j) = a_{jk}.$$

*Comentario 3.2.2.* Claramente,  $\widehat{A} = \widehat{A}_{\min}$  es el mínimo operador cerrado que satisface (3.2.8). En efecto, suponga que existe  $\widetilde{A}$  que es cerrado y  $\widetilde{A} \subset \widehat{A}$ ,  $\widetilde{A} \neq \widehat{A}$  y satisface (3.2.8). Como  $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  es una matriz hermitiana, entonces  $\widetilde{A}$  es simétrico y  $\widetilde{A}^*$  también satisface (3.2.8), por ser una extensión de  $\widetilde{A}$ . O sea que  $\widetilde{A}^*$  debe ser una restricción de  $\widehat{A}_{\max}$ . Pero, por el Teorema 2.9.3,  $\widehat{A}_{\max} \subset \widetilde{A}^*$ , lo que es una contradicción.

*Comentario 3.2.3.* Si  $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  es la representación matricial de  $A$  con respecto a la base ortonormal  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , entonces la matriz  $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  define unívocamente al operador  $A$ . En efecto, el operador simétrico cerrado determinado unívocamente por la matriz  $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$ , con respecto a la base ortonormal  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , es

$$U^{-1} \overline{(\widehat{A}_{\max})|_{l_{fin}(\mathbb{N})}} U.$$

**Definición 3.2.4.** Una base ortonormal  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  se dice que es *base de una representación matricial* de un operador simétrico cerrado  $A$  si:

1. Los elementos de  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  pertenecen al  $\text{dom}(A)$ .
2. Para el operador  $U$  definido en el Teorema 2.2.6 con respecto a  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , se cumple que

$$A = U^{-1} \widehat{A}_{\min} U.$$

Resulta que para cualquier operador simétrico cerrado es posible encontrar una base de representación matricial. Este es el contenido del teorema 3 de [3, Sec. 47].

**Teorema 3.2.2.** *Sea  $\{b_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  una matriz hermitiana que satisface*

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |b_{jk}|^2 < \infty. \quad (3.2.9)$$

*Entonces es posible definir un operador simétrico cerrado  $B$  en  $l_2(\mathbb{N})$  por medio del siguiente algoritmo: se define*

$$B\delta_j = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_{jk} \delta_k. \quad (3.2.10)$$

*Se extiende (3.2.10) por linealidad al conjunto de combinaciones lineales de  $\{\delta_k\}$  y se toma la cerradura del operador obtenido. Además se tiene que  $B = \widehat{B}_{\min}$ .*

*Demostración.* Observe que (3.2.9) implica la convergencia de (3.2.10) para toda  $j \in \mathbb{N}$ . Posteriormente, note que  $\widehat{B} = \overline{(\widehat{B}_{\max})|_{l_{fin}(\mathbb{N})}}$ .  $\square$

**Corolario 3.2.4.** Si  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una base ortonormal en  $\mathcal{H}$  y  $U$  el operador unitario del Teorema 2.2.6, la matriz  $\{b_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$ , con respecto a  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , define unívocamente un operador simétrico cerrado  $B$  en  $\mathcal{H}$ , expresado por:

$$B := U^{-1} \widehat{B} U. \quad (3.2.11)$$

*Comentario 3.2.4.* Claramente  $\{b_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  es la representación matricial de  $B$  con respecto a la base ortonormal  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

# Capítulo 4

## Matrices de Jacobi semi-infinitas

En este capítulo se presentan los principios de la teoría de matrices de Jacobi. En la Sección 4.1 damos la definición de la matriz semi-infinita de Jacobi y de su correspondiente operador asociado. En la Sección 4.2 damos cuenta de que el operador de Jacobi, puede tener únicamente índices de deficiencia  $(1, 1)$  o  $(0, 0)$  e introducimos los polinomios ortogonales de primer género. En la Sección 4.3 se definen las extensiones auto-adjuntas von Neumann y en 4.4 se da explícitamente la resolvente de esas extensiones. En la Sección 4.5 se define una familia de perturbaciones de rango uno de operadores de Jacobi y se tratan algunas de sus propiedades espectrales. En esta misma sección, usamos la expansión von Neumann de la resolvente para desarrollar a detalle la fórmula asintótica de la  $m$ -función de Weyl-Titchmarsh.

### 4.1. Operadores de Jacobi

**Definición 4.1.1.** Dadas las sucesiones  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  y  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ , defina la matriz de *Jacobi* como una matriz tridiagonal semi-infinita de la forma:

$$\{J_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}} = \begin{pmatrix} q_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & q_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & q_3 & b_3 & \\ 0 & 0 & b_3 & q_4 & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.1.1)$$

*Comentario 4.1.1.* Claramente la matriz  $\{J_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  es simétrica.



**Definición 4.1.2.** Como se hizo en [Cap. 3, Sec. 3.2], defina los operadores  $\hat{J}_{\text{máx}}$  y  $\hat{J}_{\text{mín}}$  en  $l_2(\mathbb{N})$  de la manera siguiente:

1.

$$\text{dom}(\hat{J}_{\text{máx}}) := \left\{ \varphi \in l_2(\mathbb{N}) : \sum_{j \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} J_{jk} \varphi_k \right|^2 < \infty \right\} \quad (4.1.2)$$

donde  $\hat{J}_{\text{máx}}$  actúa como

$$(\hat{J}_{\text{máx}}\varphi)_j := \sum_{k \in \mathbb{N}} J_{jk} \varphi_k. \quad (4.1.3)$$

2.  $\hat{J}_{\text{mín}} := (\hat{J}_{\text{máx}})^*$ .

**Definición 4.1.3.** Debido a que  $\{J_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  satisface la relación (3.2.9), el Teorema 3.2.2 implica que la matriz  $\{J_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  define unívocamente a un operador simétrico cerrado

$$\hat{J} := \hat{J}_{\text{mín}}.$$

Ahora bien, dado  $\mathcal{H}$  con una base ortonormal  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  y el operador unitario  $U$  definido en el Teorema 2.2.6 podemos definir a un operador  $J$  en  $\mathcal{H}$  de la siguiente forma:

$$J := U^{-1} \hat{J} U. \quad (4.1.4)$$

El operador  $J$  en (4.1.4) recibe el nombre de *operador de Jacobi* asociado a la matriz (4.1.1).

## 4.2. Polinomios ortogonales de primer género e índices de deficiencia

Considere la siguiente ecuación:

$$(\hat{J}^* - \zeta I)\varphi = 0, \quad \zeta \in \mathbb{C}. \quad (4.2.1)$$

De (4.1.1), (4.1.3) y (4.2.1) se sigue que

$$q_1 \varphi_1 + b_1 \varphi_2 = \zeta \varphi_1 \quad (4.2.2)$$

$$b_{n-1} \varphi_{n-1} + q_n \varphi_n + b_n \varphi_{n+1} = \zeta \varphi_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \quad (4.2.3)$$

Es fácil generar una solución del sistema (4.2.2) y (4.2.3). Por ejemplo, haciendo  $\varphi_1 = 1$  se tiene que  $\varphi_2 = \frac{1}{b_1}(\zeta - q_1)$ . De (4.2.3) con  $n = 2$ , obtenemos

$$\varphi_3 = \frac{1}{b_2}((\zeta - q_2)\varphi_2 - b_1) = \frac{1}{b_2} \left( \frac{1}{b_1}(\zeta - q_2)(\zeta - q_1) - b_1 \right). \quad (4.2.4)$$

Y así sucesivamente. Nótese que  $\varphi_n$  es en realidad un polinomio con respecto a  $\zeta$  de grado  $n - 1$ . Usaremos la notación

$$P_{n-1}(\zeta) := \varphi_n \quad (4.2.5)$$

cuando queramos recalcar que  $\varphi_n$  es un polinomio.

Si la sucesión  $\varphi = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  construida anteriormente está en  $l_2(\mathbb{N})$ , entonces también está en  $\text{dom}(\hat{J}^*)$ . En efecto, ya que

$$\zeta \varphi_j = \sum_{k \in \mathbb{N}} J_{jk} \varphi_k$$

se tiene que

$$\varphi \in l_2(\mathbb{N}) \Rightarrow \sum_{j \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} J_{jk} \varphi_k \right|^2 < \infty$$

y por (4.1.2) concluimos que  $\varphi \in \text{dom}(\hat{J}^*)$ .

De esta forma,  $\varphi$  es solución de (4.2.1) siempre que  $\varphi \in l_2(\mathbb{N})$ . Así

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |P_n(\zeta)|^2 < \infty \quad (4.2.6)$$

si y sólo si  $\varphi$  es solución de (4.2.1).

Que  $\varphi$  sea solución de (4.2.1) significa que  $\varphi$  es el auto-vector de  $\hat{J}^*$  correspondiente a  $\zeta \in \mathbb{C}$ .

**Teorema 4.2.1.** *La multiplicidad de cualquier auto-valor de  $\hat{J}^*$  es siempre igual a 1.*

*Demostración.* Supongamos que  $\tilde{\varphi}$  es también solución de (4.2.1) para una  $\zeta$  fija en  $\mathbb{C}_+$ . Entonces, denotando  $\tilde{c} := \tilde{\varphi}_1(\zeta)$ , es fácil concluir que

$$\tilde{\varphi}(\zeta) = \tilde{c}\varphi(\zeta). \quad (4.2.7)$$

Por lo tanto, la dimensión del espacio de soluciones de (4.2.1) es 1.  $\square$

Calculemos, ahora, el índice de deficiencia  $n_-$  de acuerdo a la fórmula (2.9.6). Del Teorema 4.2.1 con  $\zeta \in \mathbb{C}_+$ , se sigue que  $n_-$  es igual a 1 cuando (4.2.6) tiene lugar, e igual a cero cuando

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |P_n(\zeta)|^2 = \infty. \quad (4.2.8)$$

Note que la convergencia de la serie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |P_n(\zeta)|^2$$

para  $\text{Im } \zeta > 0$  es equivalente a la convergencia cuando  $\text{Im } \zeta < 0$ . En efecto, ya que los coeficientes de los polinomios  $P_n$  son reales para toda  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que

$$|P_n(\zeta)|^2 = P_n(\zeta)\overline{P_n(\zeta)} = P_n(\zeta)P_n(\bar{\zeta}), \quad (4.2.9)$$

lo cual nos lleva a concluir que

$$n_+ = n_-. \quad (4.2.10)$$

De esta manera podemos decir que el operador  $\hat{J}^*$  tiene o bien *índices de deficiencia*  $(0,0)$  o bien  $(1,1)$ . Dado que  $\hat{J}$  es un operador cerrado por definición, el índice de deficiencia  $(0,0)$  implica que  $\hat{J} = \hat{J}^*$  (véase el Teorema 2.9.6); o equivalentemente  $\hat{J}_{\text{máx}} = \hat{J}_{\text{mín}}$  (véase las Definiciones 4.1.2 y 4.1.3). En esta situación diremos que  $\{J_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  está en el caso del *punto límite*.

Si el operador  $\hat{J}$  tiene índice de deficiencia  $(1,1)$ , entonces se tiene que  $\hat{J} \neq \hat{J}^*$  y  $\hat{J}_{\text{máx}} \supset \hat{J}_{\text{mín}}$ . En esta circunstancia diremos que  $\{J_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  está en el caso del *círculo límite*. Nótese que tiene lugar el siguiente teorema:

**Teorema 4.2.2.** *Si el operador  $\hat{J}$  está en el caso del círculo límite, entonces (4.2.6) tiene lugar para toda  $\zeta \in \mathbb{C}$ .*

*Demostración.* Ya vimos más arriba que (4.2.6) tenía lugar si  $\zeta \in \mathbb{C}_+$  o en  $\mathbb{C}_-$ . Ahora bien, si  $\zeta \in \mathbb{R}$ , entonces supóngase que la serie en (4.2.6) es divergente. Esto quiere decir que  $\dim \ker(\hat{J}^* - \bar{\zeta}I) = 0$ . Tomando una vecindad de  $\zeta$ , vemos, por el Teorema 2.8.4, que  $\dim \ker(\hat{J}^* - \bar{\zeta}I) = 0$  en  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Pero esto contradice el hecho de que los índices de deficiencia del operador  $\hat{J}$  eran igual a  $(1,1)$ . Por lo tanto, (4.2.6) tiene lugar también si  $\zeta \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Teorema 4.2.3.** *Para toda  $k \in \mathbb{N}$  se tiene que*

$$\delta_k = P_{k-1}(\hat{J})\delta_1. \quad (4.2.11)$$

donde  $P_k(\hat{J})$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , es el operador que resulta de evaluar el polinomio ortogonal de primer género en  $\hat{J}$  y  $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es la base canónica en  $l_2(\mathbb{N})$ .

*Demostración.* De las ecuaciones (4.2.2) y (4.2.3) y debido a que la matriz (4.1.1) es simétrica, tenemos también que

$$\hat{J}\delta_1 = q_1\delta_1 + b_1\delta_2 \quad (4.2.12)$$

$$\hat{J}\delta_n = b_{n-1}\delta_{n-1} + q_n\delta_n + b_n\delta_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \quad (4.2.13)$$

Para confirmar que (4.2.11) tiene lugar, basta con despejar iterativamente  $\delta_k$  de las sucesiones (4.2.12) y (4.2.13).  $\square$

**Corolario 4.2.1.** *Para toda  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  se tiene que*

$$\delta_1 \in \text{dom}(\hat{J}^k). \quad (4.2.14)$$

### 4.3. Extensiones auto-adjuntas von Neumann

**Definición 4.3.1.** Los polinomios de segundo género  $\{Q_n(\zeta)\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$  asociados a la matriz (4.1.1) se definen como las soluciones del sistema recurrente (4.2.3), bajo el supuesto de  $\varphi_1 = 0$  y  $\varphi_2 = b_1^{-1}$ . Nótese que  $\varphi_n$  es un polinomio de grado  $n - 2$  con respecto a  $\zeta$ . Utilizaremos la notación

$$Q_{n-1}(\zeta) := \varphi_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.3.1)$$

cuando queramos recalcar que  $\varphi_n$  es un polinomio.

Nótese que  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  no satisfacen (4.2.2) y por lo tanto  $\varphi$  no puede ser solución de (4.2.1).

**Definición 4.3.2.** Sean  $\varphi = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\psi = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesiones infinitas en  $l_2(\mathbb{N})$ . El **wronskiano** asociado con el operador  $\hat{J}$  se define como:

$$W_n(\varphi, \psi) := b_n(\varphi_n \psi_{n+1} - \psi_n \varphi_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.3.2)$$

**Teorema 4.3.1.** *Sean  $\varphi$  y  $\psi$  soluciones de (4.2.3). Entonces el wronskiano es constante.*

*Demostración.* Como  $\varphi$  y  $\psi$  son soluciones de (4.2.3), entonces para  $n > 1$

$$b_{n-1}\varphi_{n-1} + q_n\varphi_n + b_n\varphi_{n+1} = \zeta\varphi_n \quad (4.3.3)$$

$$b_{n-1}\psi_{n-1} + q_n\psi_n + b_n\psi_{n+1} = \zeta\psi_n. \quad (4.3.4)$$

Así, multiplicando (4.3.3) por  $\psi_n$  y restándolo a (4.3.4) multiplicado por  $\varphi_n$ , vemos que

$$W_n(\varphi, \psi) - W_{n-1}(\varphi, \psi) = 0. \quad (4.3.5)$$

Por lo tanto, el wronskiano es constante en  $n$ .  $\square$

**Definición 4.3.3.** Defina

$$W_\infty(\varphi, \psi) =: \lim_{n \rightarrow \infty} W_n(\varphi, \psi). \quad (4.3.6)$$

En el caso  $\hat{J} \neq \hat{J}^*$ , vamos a considerar extensiones auto-adjuntas von Neumann. Esto es, operadores auto-adjuntos que son extensiones de  $\hat{J}$  y restricciones de  $\hat{J}^*$ . Para un operador de Jacobi dado, hay una forma simple de describir

todas las extensiones auto-adjuntas von Neumann [42, Lema 2.20]. Para lo anterior, vamos a considerar las sucesiones  $\nu(g) = \{\nu_n(g)\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que, para toda  $n \in \mathbb{N}$  se tiene

$$\nu_n(g) := P_{n-1}(0) + gQ_{n-1}(0), \quad g \in \mathbb{R} \quad (4.3.7)$$

y

$$\nu_n(+\infty) := Q_{n-1}(0). \quad (4.3.8)$$

Fijamos  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  y definamos el conjunto

$$\begin{aligned} D(g) &:= \{\varphi = \{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{dom}(\hat{J}^*) : W_\infty(\nu(g), \varphi) = 0\} \\ &= \{\varphi \in l_2(\mathbb{N}) : \hat{J}^* \varphi \in l_2(\mathbb{N}), W_\infty(\nu(g), \varphi) = 0\}. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

*Comentario 4.3.1.* En la definición del conjunto  $D(g)$  usamos una condición a la frontera en el infinito que está dada por  $g$ .

Para cada extensión auto-adjunta von Neumann del operador no auto-adjunto  $\hat{J}$ , existe una única  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  que hace que esa misma extensión sea restricción de  $\hat{J}^*$  al conjunto  $D(g)$ .

La unicidad con que la extensión auto-adjunta determina a  $g$  se debe a que puede mostrarse fácilmente que valores diferentes de  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  implican diferentes conjuntos  $D(g)$ . Denotaremos la extensión auto-adjunta von Neumann determinada por  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  como sigue:

$$\hat{J}(g) = \hat{J}^*|_{D(g)}. \quad (4.3.10)$$

En este trabajo estudiaremos operadores de *Jacobi* auto-adjuntos. Si  $\hat{J}$  resulta tener índices de deficiencia  $(1, 1)$ , entonces vamos a considerar siempre una extensión auto-adjunta von Neumann de  $\hat{J}$ , es decir, un operador  $\hat{J}(g)$  con  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Y cuando tengamos el caso  $\hat{J} = \hat{J}^*$ , utilizaremos la notación

$$\hat{J} =: \hat{J}(-\infty). \quad (4.3.11)$$

**Teorema 4.3.2.** *Los auto-valores de  $\hat{J}(g)$ ,  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ , son simples, es decir, su multiplicidad es igual a 1.*

*Demostración.* Note que, para cada  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ ,  $\hat{J} \subset \hat{J}(g) \subset \hat{J}^*$ . Sea  $\lambda \in \sigma_p(\hat{J}(g))$ . Como  $\hat{J}(g)$  es una restricción de  $\hat{J}^*$  en el dominio  $D(g)$ , entonces

$$\ker(\hat{J}(g) - \zeta I) \subset \ker(\hat{J}^* - \zeta I), \quad \zeta \in \mathbb{C}. \quad (4.3.12)$$

Pero, por el Teorema 4.2.1, sabemos que la dimensión de  $\ker(\hat{J}^* - \zeta I)$  es a lo más uno. Por lo tanto, los auto-valores de  $\hat{J}(g)$  son simples.  $\square$

## 4.4. Resolvente

**Lema 4.4.1.** Sea  $\zeta \in \rho(\hat{J}(g))$  y  $\psi := (\hat{J}(g) - \zeta \hat{I})^{-1} \delta_1$ . La representación matricial de  $\hat{R}_\zeta(\hat{J}(g))$  es

$$\hat{R}_\zeta(\hat{J}(g))_{jk} = \begin{cases} \psi_k \varphi_j & j \leq k \\ \psi_j \varphi_k & j > k \end{cases} \quad (4.4.1)$$

donde  $\varphi = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es la sucesión dada en (4.2.5).

*Demostración.* Sea  $\eta = \hat{R}_\zeta(\hat{J}(g))v$ , entonces  $\eta_j = \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat{R}_\zeta(\hat{J}(g))_{jk} v_k$ . Tomando en cuenta (4.2.2) y (4.2.3) y usando el hecho de que  $\psi_m$  y  $\varphi_m$  son soluciones de  $\hat{J}(g)\psi = \zeta\psi$  para  $m \geq 2$ , tenemos

$$\begin{aligned} ((\hat{J}(g) - \hat{I}\zeta)\eta)_m &= b_{m-1}\eta_{m-1} + (q_m - \zeta)\eta_m + b_m\eta_{m+1} \\ &= b_{m-1} \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat{R}_\zeta(\hat{J}(g))_{m-1k} v_k + (q_m - \zeta) \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat{R}_\zeta(\hat{J}(g))_{mk} v_k + b_m \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat{R}_\zeta(\hat{J}(g))_{m+1k} v_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} v_k [b_{m-1} \hat{R}_\zeta(\hat{J}(g))_{m-1k} + (q_m - \zeta) \hat{R}_\zeta(\hat{J}(g))_{mk} + b_m \hat{R}_\zeta(\hat{J}(g))_{m+1k}]. \end{aligned}$$

Ahora distribuyamos la serie anterior en tres sumandos. Así,

$$\begin{aligned} ((\hat{J}(g) - \hat{I}\zeta)\eta)_m &= \sum_{k=1}^{m-1} v_k \varphi_k [b_{m-1} \psi_{m-1} + (q_m - \zeta) \psi_m + b_m \psi_{m+1}] \\ &\quad + \sum_{k=m+1}^{\infty} v_k \psi_k [b_{m-1} \varphi_{m-1} + (q_m - \zeta) \varphi_m + b_m \varphi_{m+1}] \\ &\quad + v_m [b_{m-1} \psi_m \varphi_{m-1} + (q_m - \zeta) \psi_m \varphi_m + b_m \psi_{m+1} \varphi_m]. \end{aligned}$$

La suma finita es cero, dado que  $\delta_1 = (\hat{J} - \zeta I)\psi$  y  $m \geq 2$ . La serie es también cero porque  $\varphi$  es la sucesión dada en (4.2.5). Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} ((\hat{J}(g) - \hat{I}\zeta)\eta)_m &= v_m [b_{m-1} \psi_m \varphi_{m-1} + (q_m - \zeta) \psi_m \varphi_m + b_m \psi_{m+1} \varphi_m] \\ &= v_m [\psi_m (b_{m-1} \varphi_{m-1} + (q_m - \zeta) \varphi_m) + b_m \psi_{m+1} \varphi_m] \\ &= v_m [-b_m \psi_m \varphi_{m+1} + b_m \psi_{m+1} \varphi_m] \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

$$= v_m b_m [\psi_{m+1} \varphi_m - \psi_m \varphi_{m+1}] = v_m. \quad (4.4.3)$$

La igualdad (4.4.2) es válida, ya que  $\varphi$  es la sucesión dada en (4.2.5) y  $b_{m-1} \varphi_{m-1} + (q_m - \zeta) \varphi_m = -b_m \psi_m \varphi_{m+1}$ . Para probar la igualdad (4.4.3), observe que  $\psi$ ,  $\varphi$  satisfacen (4.2.3), o sea que  $W_n(\varphi, \psi)$  es constante. Así, basta calcular  $W_1(\varphi, \psi)$ .

$$W_1(\varphi, \psi) = b_1(\psi_2 - \psi_1 \varphi_2)$$

y dado que  $\varphi_2 = (\frac{\zeta - q_1}{b_1})$ , se tiene que

$$W_1(\varphi, \psi) = b_1 \left( \psi_2 - \psi_1 \left( \frac{\zeta - q_1}{b_1} \right) \right) = b_1 \psi_2 + \psi_1(q_1 - \zeta) = 1.$$

Para  $m = 1$ , se tiene también que

$$\begin{aligned} ((\hat{J}(g) - \hat{I}\zeta)\eta)_1 &= v_1 \psi_2 b_1 \varphi_1 + v_1 \psi_1 (q_1 - \zeta) \varphi_1 \\ &= v_1 [\psi_2 b_1 \varphi_1 + \psi_1 (q_1 - \zeta) \varphi_1] \\ &= v_1 [\psi_2 b_1 + \psi_1 (q_1 - \zeta)] \\ &= v_1. \end{aligned}$$

□

**Teorema 4.4.1.** *Si  $g \neq -\infty$ , entonces la resolvente  $\hat{R}_\zeta(\hat{J}(g))$  es compacta.*

*Demostración.* Probemos que  $R_\zeta(\hat{J}(g))$  satisface el Teorema 3.1.3. Así

$$\begin{aligned} \sum_{j,k \in \mathbb{N}} |\hat{R}_\zeta(\hat{J}(g))_{jk}|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |\hat{R}_\zeta(\hat{J}(g))_{jk}|^2 \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \left( |\varphi_j(\zeta)|^2 \sum_{k < j} |\psi_k(\zeta)|^2 + |\psi_j(\zeta)|^2 \sum_{k \geq j} |\varphi_k(\zeta)|^2 \right) \\ &\leq 2 \|\varphi(\zeta)\|^2 \|\psi(\zeta)\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Esto último se satisface porque tanto  $\psi$  como  $\varphi$  están en  $l_2(\mathbb{N})$ . La primera inclusión se sigue de la definición  $\psi$  en el Lema 4.4.1 y, la segunda inclusión porque estamos en el caso del círculo límite y (4.2.6) tiene lugar para toda  $\zeta \in \mathbb{C}$  por el Teorema 4.3.2. Con esto hemos demostrado que la resolvente del operador  $\hat{J}(g)$  es compacta. □

Introduzcamos el operador de proyección  $\hat{P} = (\cdot, \delta_1)\delta_1$  al subespacio generado por  $\delta_1$ :

$$\hat{P}\varphi = (\varphi, \delta_1)\delta_1 = \varphi_1 \delta_1. \quad (4.4.4)$$

Claramente,

$$(\hat{P}\varphi)_j = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_{jk} \varphi_k, \quad (4.4.5)$$

donde

$$P_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k = 1 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases} \quad (4.4.6)$$

Puesto que  $\text{ran}(\hat{P})$  es finito en el subespacio generado por  $\delta_1$ , entonces por el Teorema 2.4.3,  $\hat{P} \in \mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$ . Además  $\hat{P} = \hat{P}^*$ .

## 4.5. Perturbaciones de rango uno de operadores de Jacobi

**Definición 4.5.1.** Para cada  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$  fija, defina al operador  $\hat{J}_h(g)$  de la siguiente manera:

$$\hat{J}_h(g) := \hat{J}(g) + h\hat{P}, \quad h \in \mathbb{R}. \quad (4.5.1)$$

El operador  $\hat{J}_h(g)$  es un elemento de una familia de operadores parametrizada por  $h$ . Y para todo

$$\varphi \in \text{dom}(\hat{J}_h(g)) = D(g)$$

se tiene que

$$(\hat{J}_h(g)\varphi)_j = \sum_{k \in \mathbb{N}} [\hat{J}_h(g)]_{jk} \varphi_k, \quad (4.5.2)$$

donde

$$\{\hat{J}_h(g)\}_{j,k \in \mathbb{N}} = \begin{pmatrix} q_1 + h & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & q_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & q_3 & b_3 & \\ 0 & 0 & b_3 & q_4 & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.5.3)$$

Dado un operador  $\hat{J}(g)$ , cada  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$  genera una familia  $\{\hat{J}_h(g)\}_{h \in \mathbb{R}}$  distinta de operadores  $\hat{J}_h(g)$ .

**Teorema 4.5.1.** 1)  $\hat{J}_h(g) = \hat{J}_h(g)^*$ .

2) *Los auto-valores de  $\hat{J}_h(g)$  son simples para todo  $h \in \mathbb{R}$ .*

*Demostración.* La prueba de 1) sigue inmediatamente del Teorema 2.13.2 y, 2) se obtiene repitiendo las afirmaciones de los Teoremas 4.2.1 y 4.3.2, con la matriz (4.5.3) en lugar de (4.1.1).  $\square$

**Teorema 4.5.2.** *Si existe  $h_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\hat{J}_{h_0}(g)$  tiene espectro discreto, entonces  $\hat{J}_h(g)$  tiene espectro discreto para todo elemento  $h \in \mathbb{R}$ .*

*Demostración.* De la ecuación (4.5.1) tenemos que

$$\hat{J}_h(g) = \hat{J}(g) + h\hat{P}$$

y

$$\hat{J}_{h_0}(g) = \hat{J}(g) + h_0\hat{P}.$$



Así,

$$\hat{J}_h(g) = \hat{J}_{h_0}(g) + (h - h_0)\hat{P}.$$

Supongamos que para  $h_0$ ,  $\hat{J}_{h_0}(g)$  es un operador auto-adjunto. El operador  $(h - h_0)\hat{P}$  es un operador compacto auto-adjunto (véase el párrafo anterior a la sección 4.5), entonces usando el Teorema 2.13.2 (Teorema de Weyl), tenemos que

$$\sigma_e(\hat{J}_h(g)) = \sigma_e(\hat{J}_{h_0}(g)) = \emptyset.$$

Entonces  $\sigma_d(\hat{J}_h(g)) := \sigma(\hat{J}_h(g)) \setminus \sigma_e(\hat{J}_h(g)) = \sigma(\hat{J}_h(g))$ , por lo tanto el operador  $\hat{J}_h(g)$  tiene puramente espectro discreto para todo  $h \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Por el Teorema 2.12.1, se tiene que a cada operador auto-adjunto  $\hat{J}_h(g)$  le corresponde una única resolución de la identidad  $E_{\hat{J}_h(g)}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , tal que:

$$\hat{J}_h(g) = \int_{\mathbb{R}} t dE_{\hat{J}_h(g)}(t). \quad (4.5.4)$$

**Definición 4.5.2.** Defina la función  $\rho_h(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  de la siguiente forma:

$$\rho_h(t) := (E_{\hat{J}_h(g)}(t)\delta_1, \delta_1). \quad (4.5.5)$$

La función  $\rho_h(t)$  recibe el nombre de función espectral.

**Definición 4.5.3.** Recordando la notación de la Definición 2.8.3, defina la  $m$ -función de Weyl-Titchmarsh del operador  $\hat{J}_h(g)$  como:

$$m_h(\zeta, g) := (R_\zeta(\hat{J}_h(g))\delta_1, \delta_1), \quad \zeta \in \rho(\hat{J}_h(g)). \quad (4.5.6)$$

Note que las funciones  $\rho_h(t)$  y  $m_h(\zeta, g)$  están relacionadas por la transformada de Stieltjes (también llamada transformada de Borel). Así de las ecuaciones (4.5.5) y (4.5.6) (véase también [3, Sec. 63]) obtenemos

$$m_h(\zeta, g) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\rho_h(t)}{t - \zeta}. \quad (4.5.7)$$

*Comentario 4.5.1.* Como consecuencia del Teorema 1.2.1 y de la ecuación (4.5.7) se tiene que la  $m$ -función de Weyl-Titchmarsh es una función Herglotz (véase la Definición 1.2.1).

Usando la expansión von Neumann para el resolvente

$$R_\zeta(\hat{J}_h(g)) = - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\hat{J}_h(g))^k}{\zeta^{k+1}} + \frac{(\hat{J}_h(g))^N}{\zeta^N} R_\zeta(\hat{J}_h(g)), \quad (4.5.8)$$

donde  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\hat{J}(g))$ , podemos obtener la fórmula asintótica de la  $m$ -función de Weyl-Titchmarsh. En efecto, ya que

$$\begin{aligned} m_h(\zeta, g) &= (R_\zeta(\hat{J}_h(g))\delta_1, \delta_1) \\ &= \left( \left[ -\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\hat{J}_h(g))^k}{\zeta^{k+1}} + \frac{(\hat{J}_h(g))^N}{\zeta^N} R_\zeta(\hat{J}_h(g)) \right] \delta_1, \delta_1 \right) \\ &= \left( \left[ -\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\hat{J}(g) + h\hat{P})^k}{\zeta^{k+1}} + \frac{(\hat{J}(g) + h\hat{P})^N}{\zeta^N} R_\zeta(\hat{J}(g) + h\hat{P}) \right] \delta_1, \delta_1 \right), \end{aligned}$$

entonces, cuando  $\zeta \rightarrow \infty$  ( $\text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0$ ) tenemos

$$\begin{aligned} m_h(\zeta, g) &= -\left(\frac{1}{\zeta}\delta_1, \delta_1\right) - \left(\frac{\hat{J}(g) + h\hat{P}}{\zeta^2}\delta_1, \delta_1\right) - \left(\frac{(\hat{J}(g) + h\hat{P})^2}{\zeta^3}\delta_1, \delta_1\right) + O(\zeta^{-4}) \\ &= -\frac{1}{\zeta} - \left(\frac{q_1\delta_1 + b_1\delta_2 + h\delta_1}{\zeta^2}, \delta_1\right) - \left(\frac{(\hat{J}(g) + h\hat{P})(q_1\delta_1 + b_1\delta_2 + h\delta_1)}{\zeta^3}, \delta_1\right) + O(\zeta^{-4}) \\ &= -\frac{1}{\zeta} - \frac{q_1 + h}{\zeta^2} - \left(\frac{(\hat{J}(g)(q_1\delta_1 + b_1\delta_2 + h\delta_1) + h\hat{P}(q_1\delta_1 + b_1\delta_2 + h\delta_1))}{\zeta^3}, \delta_1\right) + O(\zeta^{-4}) \\ &= -\frac{1}{\zeta} - \frac{q_1 + h}{\zeta^2} - \left(\frac{q_1^2\delta_1 + b_1^2\delta_1 + 2hq_1\delta_1 + h^2\delta_1}{\zeta^3}, \delta_1\right) + O(\zeta^{-4}) \\ &= -\frac{1}{\zeta} - \frac{q_1 + h}{\zeta^2} - \frac{b_1^2 + (q_1 + h)^2}{\zeta^3} + O(\zeta^{-4}). \end{aligned} \tag{4.5.9}$$

Donde por  $O(\zeta^{-4})$  hemos denotado a una función de variable compleja  $f(\zeta)$  tal que existen constantes positivas  $C, R$  para las que, si  $|\zeta| > R$ , entonces

$$|f(\zeta)| \leq C|\zeta^{-4}|.$$

En general diremos que  $f(\zeta) = O(g(\zeta))$ ,  $\zeta \rightarrow a$ , si existen  $C, \epsilon$  constantes tales que

$$|f(\zeta)| \leq C|g(\zeta)|, \quad \forall \zeta \in V_\epsilon(a). \tag{4.5.10}$$

**Lema 4.5.1.** *Los polos de  $m_h(\zeta, g)$  son auto-valores aislados de  $\hat{J}_h(g)$ .*

La prueba de este Lema se encuentra en [9, Cap. 6, Sec. 3].

**Teorema 4.5.3.** *Suponga que  $\hat{J}_h(g)$  tiene espectro discreto,  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \sigma(\hat{J}_h(g))$  y  $\varphi(\lambda_k)$  el auto-vector correspondiente a  $\lambda_k$ , entonces*

$$\left\{ \frac{\varphi(\lambda_k)}{\|\varphi(\lambda_k)\|} \right\}_{\lambda_k \in \sigma(\hat{J}_h(g))} \tag{4.5.11}$$

es una base ortonormal del espacio de Hilbert  $l_2(\mathbb{N})$ .

*Demostración.* Note primero que

$$\left\| \frac{\varphi(\lambda_k)}{\|\varphi(\lambda_k)\|} \right\| = \frac{\|\varphi(\lambda_k)\|}{\|\varphi(\lambda_k)\|} = 1.$$

Del Teorema 2.12.2 se sigue que la resolución de la identidad  $E(t)$  correspondiente a  $\hat{J}_h(g)$  se puede escribir como

$$E(t) = \sum_{\lambda_k < t} (E(\lambda_k + 0) - E(\lambda_k)) = \sum_{\lambda_k < t} \mathcal{P}_{\lambda_k}, \quad (4.5.12)$$

donde  $\mathcal{P}_{\lambda_k}$  es el proyector en el auto-espacio  $\mathcal{H}_{\lambda_k}$  correspondiente a  $\lambda_k$ . Sabemos que  $E(t) \rightarrow I$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  (véase la Definición 2.12.1). Así

$$\sum_{\lambda_k} \mathcal{P}_{\lambda_k} = I.$$

Debido a que  $I$  es el proyector en todo  $\mathcal{H}$ , entonces por el Corolario 7 del Teorema 6 de [9, Cap. 2, Sec. 8],

$$\vee \mathcal{H}_{\lambda_k} = \mathcal{H}. \quad (4.5.13)$$

Y como (4.5.13) cumple una de las propiedades del Teorema 2.2.5, se sigue entonces que (4.5.11) es una base ortonormal de  $l_2(\mathbb{N})$ .  $\square$

**Teorema 4.5.4.** *Si el espectro de  $\hat{J}_h(g)$  es discreto, entonces la resolución de la identidad de  $\hat{J}_h(g)$  es*

$$E_{\hat{J}_h(g)}(t) := \sum_{\lambda_k < t} \frac{(\cdot, \varphi(\lambda_k))}{\|\varphi(\lambda_k)\|^2} \varphi(\lambda_k). \quad (4.5.14)$$

*Demostración.* Sea  $\psi \in \text{dom}(\hat{J}_h(g))$ . Entonces, usando (4.5.11) tenemos que,

$$\psi = \sum_{\lambda_k \in \sigma(\hat{J}_h(g))} \frac{(\psi, \varphi(\lambda_k)) \varphi(\lambda_k)}{\|\varphi(\lambda_k)\|^2}.$$

Así,

$$\hat{J}_h(g)\psi = \sum_{\lambda_k \in \sigma(\hat{J}_h(g))} \frac{(\psi, \varphi(\lambda_k)) \hat{J}_h(g) \varphi(\lambda_k)}{\|\varphi(\lambda_k)\|^2} = \sum_{\lambda_k \in \sigma(\hat{J}_h(g))} \frac{\lambda_k (\psi, \varphi(\lambda_k)) \varphi(\lambda_k)}{\|\varphi(\lambda_k)\|^2} = \int_{\mathbb{R}} t dE(t) \psi.$$

De aquí, usando (4.5.4) se sigue que

$$E_{\hat{J}_h(g)} = E(t).$$

$\square$

Por el Teorema 4.5.4 y la ecuación (4.5.12) tenemos

$$\mathcal{P}_{\lambda_k} = \frac{(\cdot, \varphi(\lambda_k))}{\|\varphi(\lambda_k)\|^2} \varphi(\lambda_k).$$

**Teorema 4.5.5.** *Si  $g \neq -\infty$ , entonces  $\hat{J}(g)$  tiene espectro discreto para todo  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  (véase el Lema 2.19 de [42, Cap. 2, Sec. 2.6]), y por consiguiente  $\hat{J}_h(g)$  tiene espectro discreto, por el Teorema 4.5.2.*

*Demostración.* Por el Teorema 4.4.1 sabemos que la resolvente  $R_\zeta(\hat{J}_h(g))$  es compacta cuando  $g \neq -\infty$ . Y del Teorema 2.11.4 se sigue que el conjunto  $\sigma(R_\zeta(\hat{J}_h(g))) \setminus \{0\}$  consiste de auto-valores aislados de multiplicidad finita. Pero, por el Teorema 2.12.3 cada elemento  $\lambda \in \sigma(\hat{J}_h(g))$  se escribe como

$$\lambda = \mu^{-1} + \zeta, \quad \mu \in \sigma(R(\hat{J}_h(g))). \quad (4.5.15)$$

Por lo tanto,  $\sigma(\hat{J}_h(g))$  se compone de puntos aislados que deben ser auto-valores de multiplicidad finita (véase el Teorema 2.12.2).  $\square$

**Teorema 4.5.6.** *Si el espectro de  $\hat{J}_h(g)$  es discreto, entonces no es acotado.*

*Demostración.* Suponga que el espectro de  $\hat{J}_h(g)$  es discreto y acotado. Entonces, por la Definición 2.8.12 (véase también [9, Cap. 9, Sec. 1]), el espectro de  $\hat{J}_h(g)$  consiste en un número finito de auto-valores aislados simples (véase el Teorema 4.5.1). Pero en el caso del espectro discreto, la resolución de la identidad

$$E_{\hat{J}_h(g)}(t) = \sum_{\lambda_k < t} \mathcal{P}_{\lambda_k}.$$

De aquí se ve que  $s - \lim_{t \rightarrow \infty} E_{\hat{J}_h(g)}(t)$  no puede ser la identidad en un espacio de dimensión infinita, puesto que

$$\dim \operatorname{ran} \left( \sum_{\lambda_k < t} \mathcal{P}_{\lambda_k} \right) < \infty.$$

La contradicción vino de suponer que el espectro de  $\hat{J}_h(g)$  era acotado.  $\square$

De ahora en adelante, vamos a considerar el espectro de  $\hat{J}(-\infty)$  discreto. De esta manera  $\hat{J}_h(g)$  con  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ ,  $h \in \mathbb{R}$ , tendrá siempre espectro discreto.

Como el espectro del operador  $\hat{J}_h(g)$  es discreto, entonces lo podemos escribir de la siguiente forma:  $\sigma(\hat{J}_h(g)) = \{\lambda_k\}_k$ , donde la sucesión  $\{\lambda_k\}_k$  es una sucesión infinita sin puntos finitos de acumulación.

**Definición 4.5.4.** Sea  $\mathcal{P}_{\lambda_k}$  el proyector descrito en (4.5.12). Defina

$$\frac{1}{\alpha_k(h)} := (\mathcal{P}_{\lambda_k} \delta_1, \delta_1). \quad (4.5.16)$$

Los coeficientes  $\{\alpha_k(h)\}_k$  son llamados constantes de normalización.

Claramente,

$$\rho_h(t) = (E_{\hat{J}_h(g)}(t)\delta_1, \delta_1) = \left( \sum_{\lambda_k < t} \mathcal{P}_{\lambda_k} \delta_1, \delta_1 \right) = \sum_{\lambda_k < t} (\mathcal{P}_{\lambda_k} \delta_1, \delta_1) = \sum_{\lambda_k < t} \frac{1}{\alpha_k(h)}. \quad (4.5.17)$$

Y por lo tanto,

$$1 = (\delta_1, \delta_1) = \int_{\mathbb{R}} d\rho = \sum_{\lambda_k} \frac{1}{\alpha_k(h)}. \quad (4.5.18)$$

**Teorema 4.5.7.** Sea  $\sigma(\hat{J}_h(g)) = \{\lambda_k\}$  y  $\{P_m\}_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$  la sucesión de polinomios ortogonales correspondientes a  $\hat{J}_h(g)$ , entonces

$$\alpha_k(h) = \sum_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |P_m(\lambda_k)|^2. \quad (4.5.19)$$

*Demostración.* Tomemos  $\varphi_n(\lambda_k) = P_{n-1}(\lambda_k)$ , entonces

$$\frac{1}{\alpha_k(h)} = (\mathcal{P}_{\lambda_k} \delta_1, \delta_1) = \frac{((\delta_1, \varphi(\lambda_k))\varphi(\lambda_k), \delta_1)}{\|\varphi(\lambda_k)\|^2} = \frac{1}{\|\varphi(\lambda_k)\|^2} = \frac{1}{\sum_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |P_m(\lambda_k)|^2}.$$

□

La  $m$ -función de Weyl-Titchmarsh, en este caso, está dada por

$$m_h(\zeta, g) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\alpha_k(h)(\lambda_k - \zeta)}. \quad (4.5.20)$$

De (4.5.20) tenemos que

$$(\lambda_n - \zeta)m_h(\zeta, g) = (\lambda_n - \zeta) \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\alpha_k(h)(\lambda_k - \zeta)} = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \neq n}} \frac{\lambda_n - \zeta}{\alpha_k(h)(\lambda_k - \zeta)} + \frac{1}{\alpha_n(h)}.$$

Por lo tanto,

$$\alpha_n^{-1}(h) = \lim_{\zeta \rightarrow \lambda_n} (\lambda_n - \zeta)m_h(\zeta, g) = -\operatorname{Res}_{\zeta=\lambda_n} m_h(\zeta, g). \quad (4.5.21)$$

**Teorema 4.5.8.** *Para todo  $h \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ ,*

$$\int_{\mathbb{R}} t^m d\rho_h(t) \in \mathbb{R}, \quad \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (4.5.22)$$

*Demostración.* Fijemos  $h \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ . Dado que  $\hat{J}_h = \int_{\mathbb{R}} t dE_{j_h}(t)$  por el Teorema espectral 2.12.1 y debido al Corolario 4.2.1 podemos escribir, haciendo uso de la Definición 4.5.2,

$$(\hat{J}_h^m \delta_1, \delta_1) = \int_{\mathbb{R}} t^m d\rho_h(t). \quad (4.5.23)$$

Pero  $\hat{J}_h^m$  es simétrico porque es una potencia de un operador simétrico. Así, por el Teorema 2.9.2 tenemos que  $(\hat{J}_h^m \delta_1, \delta_1) \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto,  $\int_{\mathbb{R}} t^m d\rho_h(t) \in \mathbb{R}$  para todo  $h \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ .  $\square$

**Lema 4.5.2.** *Sea  $\rho_h$  como en la Definición 4.5.2. El conjunto de todos los polinomios definidos en  $\mathbb{R}$  es denso en  $L_2(\mathbb{R}, d\rho_h)$  si y sólo si para toda sucesión de números complejos  $\{\beta_k\}_{k \in \mathcal{M}}$  tal que*

$$\sum_{k \in \mathcal{M}} \frac{|\beta_k|^2}{\alpha_k(h)} < \infty \quad (4.5.24)$$

*y para toda  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,*

$$\sum_{k \in \mathcal{M}} \frac{\beta_k \lambda_k^m}{\alpha_k(h)} = 0, \quad (4.5.25)$$

*entonces  $\beta_k = 0$  para toda  $k \in \mathcal{M}$ .*

*Demostración.* Recuerde que, por lo que se vio en el Ejemplo 2.1.2,  $L_2(\mathbb{R}, d\rho_h)$  es un espacio de Hilbert. Para toda  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , sea  $v_m \in L_2(\mathbb{R}, d\rho_h)$  la función dada por  $v_m(x) = x^m$ . Suponga primero que los polinomios son densos en  $L_2(\mathbb{R}, d\rho_h)$ , entonces por el Lema 2.2.3 se tiene que si  $f \perp v_m$  para toda  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , entonces  $f = 0$ . Que  $f \perp v_m$  quiere decir que

$$0 = (f, v_m) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{v_m(t)} d\rho_h(t) = \sum_{k \in \mathcal{M}} \frac{f(\lambda_k) \lambda_k^m}{\alpha_k(h)}, \quad (4.5.26)$$

donde la última igualdad de (4.5.26) sigue de (4.5.17). Además que  $f = 0$  significa que

$$0 = \|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\rho_h = \sum_{k \in \mathcal{M}} \frac{|f(\lambda_k)|^2}{\alpha_k(h)}, \quad (4.5.27)$$

pero como  $\alpha_k(h) > 0$  para toda  $k \in \mathcal{M}$ , entonces  $f(\lambda_k) = 0$  para toda  $k \in \mathcal{M}$ . Como  $f$  es cualquier función en  $L_2(\mathbb{R}, d\rho_h)$ , entonces  $\{f(\lambda_k)\}_{k \in \mathcal{M}}$  es cualquier sucesión. Ahora, suponga que la sucesión  $\{\beta_k\}_{k \in \mathcal{M}}$  satisface las condiciones del Lema 4.5.2, entonces si  $f(\lambda_k) = \beta_k$ , (4.5.24) implica que  $f \in L_2(\mathbb{R}, d\rho_h)$ . Por otra parte, la ecuación (4.5.25) significa que  $f \perp v_m$  para toda  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y por último,  $\beta_k = 0$  para toda  $k \in \mathcal{M}$ , quiere decir que  $f = 0$ . Ahora usamos el Lema 2.2.2 para concluir que

$$\vee \{v_m\}_{m \in \mathbb{N}} = L_2(\mathbb{R}, d\rho_h). \quad (4.5.28)$$

□

El siguiente resultado es bien conocido y lo citamos aquí sin demostración (cf. con el Teorema 2.3.3 de [2, Cap. 2, Sec. 2] y [39, Proposición 4.15]).

**Teorema 4.5.9.** *El conjunto de todos los polinomios definidos en  $\mathbb{R}$  es siempre denso en  $L_2(\mathbb{R}, d\rho_h)$  (véase el Teorema 2.3.3 de [2, Cap. 2, Sec. 2]).*

# Capítulo 5

## Teoría espectral inversa de operadores de Jacobi

Este es el capítulo principal de nuestra investigación, basado en [37]. Abordamos en él dos problemas inversos espectrales (véase los Teoremas 5.3.2 y 5.4.2). En la Sección 5.1 se explican los problemas directos e inversos. Posteriormente, en la Sección 5.2, procedemos a plantear dos problemas inversos que conforman la parte medular de nuestro trabajo. En las últimas dos secciones (Sec. 5.3, Sec. 5.4), damos respuesta a los dos problemas planteados en la Sección 5.2. Aquí también se presentan algunos resultados espectrales para perturbaciones de rango uno como son el Lema 5.3.1 y la fórmula de *Aronszajn-Krein* (ecuación 5.3.3) (véase también (I.13) de [40]).

### 5.1. Problemas directos e inversos

En la *Física Matemática* se estudian modelos matemáticos que describen fenómenos físicos. Y, en el estudio de un modelo matemático, generalmente, uno se enfrenta con dos tipos de problemas: los directos y los inversos. Los problemas directos son aquellos en los que se da una ecuación (que puede ser diferencial, en diferencias, integral, integro-diferencial, etc.) y alguna información complementaria (coeficientes de la ecuación, condiciones de frontera y/o iniciales, etc.). Y dado que, deseamos conocer el comportamiento de cierto fenómeno físico por medio de la información que nos proporciona el modelo matemático en cuestión, procedemos a resolver la ecuación. En los problemas inversos, en cambio, sucede lo contrario. Partimos de las soluciones de ciertas ecuaciones, junto con alguna información complementaria, y después pretendemos determinar esas ecuaciones y la parte de la información complementaria que no se haya dado, de modo que las soluciones que se dieron ori-



ginalmente correspondan, efectivamente, a las ecuaciones encontradas. Ahora, si ya conocemos las soluciones de la ecuación, algunos pudieran preguntarse ¿qué importancia tiene la información complementaria? Por una parte, la razón está en que, frecuentemente en experimentos científicos y aplicaciones tecnológicas, lo que interesa conocer son los parámetros de las ecuaciones que modelan el fenómeno (pues muchas veces lo que se mide en los experimentos son los parámetros de las ecuaciones). Por otra parte, en ocasiones, el modelo matemático está incompleto o es impreciso y es, entonces, necesario conocer la ecuación y sus parámetros.

Los problemas inversos, además de ser ubicuos, presentan interés teórico y son importantes en algunas de las siguientes aplicaciones: ondas sísmicas, en el estudio del subsuelo que consiste en emitir una onda y a partir de su comportamiento determinar las características del subsuelo; estudio fotográfico de los espectros estelares, el cual consiste en determinar las edades de las estrellas y sus grados de desarrollo por medio de sus espectros. Otros ejemplos son: el diagnóstico de una enfermedad a partir de sus síntomas; en reconstruir un suceso pasado a partir de las huellas que ha dejado en el presente; en diseñar un artefacto que desempeñe ciertas funciones, o en trazar un plan para alcanzar ciertos objetivos; en examinar articulaciones y el sistema nervioso central-encefálico y medular con el uso de la Resonancia Magnética; en el análisis de las estructuras óseas y zonas con movimiento como tórax, abdomen, hígado y páncreas con el uso del Scanner; en la colisión de partículas; en la radiación ultravioleta que emiten los cuerpos celestes. Todos estos problemas tienen ya varias soluciones, ya ninguna.

En los ejemplos mencionados arriba, se ve cómo los problemas inversos son menos importantes que los problemas directos. Sin embargo, un algoritmo general para resolver problemas inversos no existe. Algunas técnicas comunes que se usan para resolver un problema inverso es tener que resolver múltiples veces el problema directo bajo diferentes valores de los parámetros y, del gran número de soluciones obtenidas, se escoge la que sea más cercana a los datos experimentales (o deseables).

## 5.2. Problemas espectrales inversos para matrices de Jacobi

Un papel importante juegan los problemas inversos de la teoría espectral de operadores. Se pretende hallar, en estos problemas, a partir de datos de una clase dada de operadores, los parámetros que determinan de manera unívoca a los operadores en cuestión dentro de la clase dada, y dar un método para su

reconstrucción.

En el presente capítulo abordaremos dos problemas espectrales inversos para matrices semi-infinitas de Jacobi y daremos sus respectivas soluciones.

- El primer problema consiste en reconstruir las matrices de Jacobi a partir de dos espectros  $\sigma(\hat{J}_{h_1}(g))$ ,  $\sigma(\hat{J}_{h_2}(g))$  y una condición a la frontera  $h_1 \in \mathbb{R}$  o  $h_2 \in \mathbb{R}$ ; del que se desprenden los siguientes cuestionamientos:
  1. ¿Son suficientes los datos?
  2. ¿Existe un algoritmo de reconstrucción?
  3. ¿Es única la reconstrucción?
- El segundo problema consiste en encontrar *condiciones necesarias y suficientes* que se deberán imponer a dos sucesiones infinitas de números reales  $\{\lambda_k\}_k$  y  $\{\mu_k\}_k$  para que, dado un número real  $h_1$  o  $h_2$ , existan de manera única  $h_1 \in \mathbb{R}$  o  $h_2 \in \mathbb{R}$ ,  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$  y una matriz de Jacobi tales que  $\{\mu_k\}_k = \sigma(\hat{J}_{h_1}(g))$  y  $\{\lambda_k\}_k = \sigma(\hat{J}_{h_2}(g))$ .

Antes de dar respuesta a los cuestionamientos arriba planteados, haremos mención de resultados importantes en esta dirección. Los siguientes resultados son bien conocidos y sus demostraciones pueden encontrarse en [2, Cap. 1, Sec. 1], [2, Teorema 4.1.4, Teorema 2.3.3] y [39, Sec. 1].

**Teorema 5.2.1.** *Sea  $\rho(t)$  una función no decreciente con un número infinito de puntos de crecimiento, tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} d\rho(t) = 1 \quad (5.2.1)$$

*y, tal que todos los momentos existen*

$$\int_{\mathbb{R}} t^m d\rho(t) < \infty, \quad \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (5.2.2)$$

*Sea  $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$  la sucesión que se obtiene de aplicar en  $L_2(\mathbb{R}, d\rho_h)$  el proceso de ortogonalización de **Gram-Schmidt** a la sucesión  $\{t^k\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ , entonces los polinomios satisfacen*

$$tP_{k-1}(t) = b_{k-1}P_{k-2}(t) + q_kP_{k-1}(t) + b_kP_k(t), \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \quad (5.2.3)$$

$$tP_0(t) = q_1P_0(t) + b_1P_1(t), \quad (5.2.4)$$

*donde  $b_k > 0$  y  $q_k \in \mathbb{R}$ .*

**Teorema 5.2.2.** *Sea  $\tilde{\rho}$  una función no decreciente con un número infinito de puntos de crecimiento tal que (5.2.1) y (5.2.2) tienen lugar con  $\tilde{\rho}$  en lugar de  $\rho$ . Si el conjunto de polinomios definidos en  $\mathbb{R}$  es denso en  $L_2(\mathbb{R}, d\tilde{\rho}_h)$ , entonces existe  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$  tal que  $\tilde{\rho}$  es la función espectral de  $\hat{J}_0(g)$  donde la diagonal principal y las adyacentes a ésta de la matriz de Jacobi están dadas, respectivamente, por las sucesiones  $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  y  $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  del sistema (5.2.3) y (5.2.4).*

**Teorema 5.2.3.** *Sea  $m_0(\zeta, g)$  la función proporcionada en la Definición 4.5.3. Entonces  $m_0(\zeta, g)$  determina unívocamente a  $\hat{J}_0(g)$ .*

*Demostración.* Existe más de un método para recobrar el operador  $\hat{J}_0(g)$  a partir de la  $m$ -función de Weyl-Titchmarsh. Mencionamos aquí uno de ellos. *Método por polinomios ortogonales* que consiste en obtener la función  $\rho_0(t)$  a partir de  $m_0(\zeta, g)$  por medio de la transformada inversa de *Stieltjes*, a saber:

$$\rho_0(b) - \rho_0(a) = \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{a+\delta}^{b+\delta} (\operatorname{Im} m_0(x + i\epsilon, g)) dx. \quad (5.2.5)$$

La función  $\rho_0$  es tal que cumple todas las condiciones del Teorema 5.2.1. Por lo tanto, todos los elementos de la sucesión  $\{t^k\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$  están en  $L_2(\mathbb{R}, d\rho_0)$  y podemos aplicar, en este espacio de Hilbert, el proceso de ortonormalización de *Gram-Schmidt* a la sucesión  $\{t^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  obteniendo así una sucesión de polinomios  $\{P_k(t)\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$  normalizada y ortogonalizada en  $L_2(\mathbb{R}, d\rho_0)$ . Estos polinomios satisfacen el sistema recurrente (5.2.3) y (5.2.4), el cual describe la matriz de Jacobi asociado al operador  $\hat{J}_0$ , donde las sucesiones  $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  y  $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  constituyen la diagonal principal y adyacentes, respectivamente, de la matriz de Jacobi (4.1.1) (véase el Teorema 5.2.2).

Una vez encontrada la matriz de Jacobi asociada al operador  $\hat{J}_0$ , estamos ahora en la posibilidad de obtener la condición a la frontera en el infinito que define el dominio de  $\hat{J}_0(g)$  en el caso no auto-adjunto. Si resultase que  $\hat{J}_0 = \hat{J}_0^*$ , entonces  $g = -\infty$ . Si no, entonces  $g$  se puede encontrar de la siguiente forma: tomando un auto-valor  $\lambda$  de  $\hat{J}_0(g)$ , o lo que es lo mismo, un polo de  $m_0(\zeta, g)$ , y su auto-vector correspondiente  $\varphi(\lambda) = \{\varphi_k(\lambda)\}_{k \in \mathbb{N}} \in \operatorname{dom}(\hat{J}_0(g))$  obtenemos

$$W_\infty(\nu(g), \varphi(\lambda)) = 0. \quad (5.2.6)$$

Desarrollando (5.2.6) tenemos

$$\begin{aligned} W_\infty(\nu(g), \varphi(\lambda)) &= W_\infty(\{P_{k-1}(0)\}_{k \in \mathbb{N}} + g\{Q_{k-1}(0)\}_{k \in \mathbb{N}}, \varphi(\lambda)) \\ &= W_\infty(\{P_{k-1}(0)\}_{k \in \mathbb{N}}, \varphi(\lambda)) + gW_\infty(\{Q_{k-1}(0)\}_{k \in \mathbb{N}}, \varphi(\lambda)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, si  $W_\infty(\{Q_{k-1}(0)\}_{k \in \mathbb{N}}, \varphi(\lambda)) \neq 0$ , entonces

$$g = -\frac{W_\infty(\{P_{k-1}(0)\}_{k \in \mathbb{N}}, \varphi(\lambda))}{W_\infty(\{Q_{k-1}(0)\}_{k \in \mathbb{N}}, \varphi(\lambda))}. \quad (5.2.7)$$

Y si  $W_\infty(\{Q_{k-1}(0)\}_{k \in \mathbb{N}}, \varphi(\lambda)) = 0$ , entonces  $g = +\infty$ .  $\square$

### 5.3. Reconstrucción de la matriz de Jacobi a partir de dos espectros

**Lema 5.3.1.** *Sea  $\lambda(h) \in \sigma(\hat{J}_h(g))$  (recordemos que  $\hat{J}_h(g)$  tiene espectro discreto), entonces*

$$\frac{d}{dh} \lambda(h) = \frac{1}{\alpha(h)}, \quad (5.3.1)$$

donde  $\alpha(h)$  es la constante de normalización correspondiente a  $\lambda(h)$ .

*Demostración.* Sea  $\varphi(h)$  el auto-vector de  $\hat{J}_h(g)$  correspondiente a  $\lambda(h)$ . Sea  $\delta > 0$  y considerando que  $\text{dom}(\hat{J}_{h+\delta}(g)) = \text{dom}(\hat{J}_h(g))$  y que  $\hat{J}_h(g)$  es simétrico para cualquier  $h \in \mathbb{R}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} & (\lambda(h+\delta) - \lambda(h))(\varphi(h+\delta), \varphi(h)) \\ &= (\hat{J}_{h+\delta}(g)\varphi(h+\delta), \varphi(h)) - (\varphi(h+\delta), \hat{J}_h(g)\varphi(h)) \\ &= ((\hat{J}_{h+\delta}(g) - \hat{J}_h(g) + \hat{J}_h(g))\varphi(h+\delta), \varphi(h)) - (\varphi(h+\delta), \hat{J}_h(g)\varphi(h)) \\ &= \left( (\hat{J}_{h+\delta}(g) - \hat{J}_h(g)) \varphi(h+\delta), \varphi(h) \right) = \delta. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\lambda(h+\delta) - \lambda(h)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{(\varphi(h+\delta), \varphi(h))} = \frac{1}{\|\varphi(h)\|^2} = \frac{1}{\alpha(h)}.$$

$\square$

De Lema 5.3.1 se sigue directamente el siguiente Corolario.

**Corolario 5.3.1.** *Si existe  $h_0 \in \mathbb{R}$  tal que el espectro de  $\hat{J}_{h_0}(g)$  está acotado inferiormente (resp. superiormente), entonces para todo  $h \in \mathbb{R}$  el espectro de  $\hat{J}_h(g)$  está acotado inferiormente (resp. superiormente).*

Estableceremos a continuación la relación que existe entre  $m_{h_1}(\zeta, g)$  y  $m_{h_2}(\zeta, g)$  ( $h_1 \neq h_2$ ). Considere la segunda identidad de resolvente descrita en el Teorema 5.13 (c) de [44]:

$$\begin{aligned} R_\zeta(\hat{J}_{h_1}(g)) - R_\zeta(\hat{J}_{h_2}(g)) &= R_\zeta(\hat{J}_{h_1}(g))(\hat{J}_{h_2}(g) - \hat{J}_{h_1}(g))R_\zeta(\hat{J}_{h_2}(g)) \\ &= R_\zeta(\hat{J}_{h_2}(g))(\hat{J}_{h_2}(g) - \hat{J}_{h_1}(g))R_\zeta(\hat{J}_{h_1}(g)), \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

donde  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [\sigma(\hat{J}(g)) \cup \sigma(\hat{J}_h(g))]$ . Entonces, para los números reales  $h_1, h_2$  distintos, se tiene que

$$\begin{aligned} m_{h_1}(\zeta, g) - m_{h_2}(\zeta, g) &= \left( R_\zeta(\hat{J}_{h_1}(g)) - R_\zeta(\hat{J}_{h_2}(g)) \right) \delta_1, \delta_1 \\ &= -(R_\zeta(\hat{J}_{h_2}(g))(h_1 - h_2)\hat{P}R_\zeta(\hat{J}_{h_1}(g))\delta_1, \delta_1) \\ &= -(h_1 - h_2)(R_\zeta(\hat{J}_{h_1}(g))\delta_1, \delta_1)\delta_1, \delta_1 \\ &= -(h_1 - h_2)m_{h_1}(\zeta, g)(R_\zeta\delta_1, \delta_1) \\ &= -(h_1 - h_2)m_{h_1}(\zeta, g)m_{h_2}(\zeta, g). \end{aligned}$$

Despejando  $m_{h_1}(\zeta, g)$ , obtenemos la siguiente fórmula comúnmente conocida como la fórmula de *Aronszajn-Krein* descrita en (I.13) de [40].

$$m_{h_1}(\zeta, g) = \frac{m_{h_2}(\zeta, g)}{1 + (h_1 - h_2)m_{h_2}(\zeta, g)}. \quad (5.3.3)$$

Un caso particular de (5.3.3) es

$$m_{h_1}(\zeta, g) = \frac{m_0(\zeta, g)}{1 + h_1 m_0(\zeta, g)}. \quad (5.3.4)$$

*Comentario 5.3.1.* Si  $\hat{J}_{h_2}(g)$  tiene espectro discreto, del Lema 4.5.1 se sigue que  $m_{h_2}(\zeta, g)$  es meromorfa y, también lo es  $m_{h_1}(\zeta, g)$  por (5.3.3). Ya que los polos tanto del numerador como del denominador de (5.3.3) coinciden, asumiendo que  $(h_1 - h_2) \neq 0$ , tenemos que los polos de  $m_{h_1}(\zeta, g)$  son proporcionados por los ceros de  $1 + (h_1 - h_2)m_{h_2}(\zeta, g)$  y los ceros de  $m_{h_1}(\zeta, g)$  por los ceros de  $m_{h_2}(\zeta, g)$ .

**Definición 5.3.1.** Defina la función  $\mathfrak{m}(\zeta, g)$  con  $h_2 < h_1$  como

$$\mathfrak{m}(\zeta, g) := \frac{m_{h_2}(\zeta, g)}{m_{h_1}(\zeta, g)}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (5.3.5)$$

**Teorema 5.3.1.**  $\mathfrak{m}(\zeta, g)$  está en  $\mathfrak{H}$  (donde  $\mathfrak{H}$  es el conjunto dado en la Definición 1.2.2).

*Demostración.* Demostramos primero que  $\mathbf{m}(\zeta, g)$  es una función Herglotz. Como  $m_0(\zeta, g)$  es Herglotz, entonces de (5.3.4) se sigue que

$$\mathbf{m}(\zeta, g) = \frac{1 + h_1 m_0(\zeta, g)}{1 + h_2 m_0(\zeta, g)} = 1 + \frac{-1}{\frac{h_2}{h_2 - h_1} + \frac{1}{(h_2 - h_1) m_0(\zeta, g)}}. \quad (5.3.6)$$

De (5.3.6) y del Lema (1.2.2) se deduce que  $\mathbf{m}(\zeta, g)$  es Herglotz si hacemos  $h_2 - h_1 < 0$ . Claramente,  $\mathbf{m}(\zeta, g)$  es meromorfa por ser el cociente de funciones meromorfas, y de (5.3.5) tenemos que sus ceros son los polos de  $m_{h_1}(\zeta, g)$  y sus polos son polos de  $m_{h_2}(\zeta, g)$ . Es también evidente que el conjunto de los ceros de  $\mathbf{m}(\zeta, g)$  no está acotado puesto que el espectro de  $\hat{J}_h(g)$  ( $h \in \mathbb{R}$ ) no está acotado (véase el Teorema 4.5.6 y el Lema 4.5.1). Ahora supongamos que los ceros de  $\mathbf{m}(\zeta, g)$  están acotados inferiormente, esto quiere decir que los espectros de  $\hat{J}_{h_1}(g)$  y  $\hat{J}_{h_2}(g)$  están acotados inferiormente. Tomemos a  $\lambda(h_1)$  y  $\lambda(h_2)$  como los mínimos auto-valores de los operadores  $\hat{J}_{h_1}(g)$  y  $\hat{J}_{h_2}(g)$ , respectivamente. Ya que  $\lambda(h)$  es una función monótona creciente (Lema 5.3.1) se tiene que, si  $h_2 < h_1$ , entonces  $\lambda(h_2) < \lambda(h_1)$ . Si los ceros de  $\mathbf{m}(\zeta, g)$  están acotados superiormente, entonces los espectros de  $\hat{J}_{h_1}(g)$  y  $\hat{J}_{h_2}(g)$  están acotados superiormente. Ahora, tómesese a  $\lambda(h_1)$  y  $\lambda(h_2)$  como los máximos auto-valores de los operadores  $\hat{J}_{h_1}(g)$  y  $\hat{J}_{h_2}(g)$ , respectivamente. De manera análoga, tenemos que si  $h_2 < h_1$ , entonces  $\lambda(h_2) < \lambda(h_1)$  por el Lema 5.3.1. Por lo tanto,  $\mathbf{m}(\zeta, g) \in \mathfrak{H}$ .  $\square$

**Lema 5.3.2.** De la fórmula asintótica dada en (4.5.9), se obtiene

$$\mathbf{m}(\zeta, g) = 1 + (h_2 - h_1)\zeta^{-1} + (h_2 - h_1)(q_1 + h_2)\zeta^{-2} + O(\zeta^{-3}) \quad (5.3.7)$$

haciendo  $\zeta \rightarrow \infty$  con  $(\text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0)$ .

*Demostración.* Por (5.3.3), tenemos que

$$1 + (h_1 - h_2)m_{h_2}(\zeta, g) = \frac{m_{h_2}(\zeta, g)}{m_{h_1}(\zeta, g)} = \mathbf{m}(\zeta, g). \quad (5.3.8)$$

De donde se sigue que

$$\mathbf{m}(\zeta, g) = 1 + (h_1 - h_2) \left( -\frac{1}{\zeta} - \frac{q_1 + h_2}{\zeta^2} - \frac{b_1^2 + (q_1 + h_2)^2}{\zeta^3} + O(\zeta^{-4}) \right).$$

Así,

$$\mathbf{m}(\zeta, g) = 1 + (h_2 - h_1)\frac{1}{\zeta} + (h_2 - h_1)\frac{q_1 + h_2}{\zeta^2} + (h_2 - h_1)\frac{b_1^2 + (q_1 + h_2)^2}{\zeta^3} + O(\zeta^{-4}).$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{m}(\zeta, g) = 1 + (h_2 - h_1)\zeta^{-1} + (h_2 - h_1)(q_1 + h_2)\zeta^{-2} + O(\zeta^{-3}).$$

$\square$

**Lema 5.3.3.** *Los espectros  $\{\mu_k\}_k = \sigma(\hat{J}_h(g))$  y  $\{\lambda_k\}_k = \sigma(\hat{J}_{\tilde{h}}(g))$  con  $h \neq \tilde{h}$  determinan cuándo  $h < \tilde{h}$  o cuándo  $\tilde{h} < h$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\sigma(\hat{J}_h(g))$  está acotado inferiormente (resp. superiormente), entonces por el Corolario 5.3.1,  $\sigma(\hat{J}_{\tilde{h}}(g))$  también está acotado inferiormente (resp. superiormente). Por lo tanto reproduciendo el argumento del Teorema 5.3.1, podemos determinar si  $\tilde{h} < h$  o  $h < \tilde{h}$ . Si  $\sigma(\hat{J}_h(g))$  no está acotado ni inferior ni superiormente, entonces enumeramos las sucesiones como se acordó en el inciso a) de la Convención 1.2.1 y formamos el producto infinito

$$\prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \left(1 - \frac{\zeta}{\mu_k}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{\lambda_k}\right)^{-1}, \quad (5.3.9)$$

el cual es convergente en compactos de  $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_k\}_{k \in \mathcal{M}}$ . Si (5.3.9) resulta ser Herglotz, entonces  $\tilde{h} < h$ . Si por el contrario, (5.3.9) resulta ser anti-Herglotz, entonces debe suceder que  $h < \tilde{h}$ .  $\square$

**Teorema 5.3.2.** ([37]) *Considere el operador de Jacobi  $\hat{J}(g)$  con su respectivo espectro discreto. Las sucesiones  $\{\mu_k\}_k = \sigma(\hat{J}_h(g))$ ,  $\{\lambda_k\}_k = \sigma(\hat{J}_{\tilde{h}}(g))$ , junto con el número real  $h$ , determinan de manera única al operador de Jacobi  $J$ , a  $\tilde{h} \in \mathbb{R}$  y a  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ .*

*Demostración.* Por el Lema 5.3.3 sabemos cuándo  $h < \tilde{h}$  o cuándo  $\tilde{h} < h$ , por lo que podemos definir la función  $\mathbf{m}(\zeta, g)$  como en la Definición 5.3.1 y además, podemos enumerar las sucesiones  $\{\mu_k\}_k$  y  $\{\lambda_k\}_k$  como en la Convención 1.2.1. Por definición, suponga que sucedió  $\tilde{h} < h$ , entonces

$$\mathbf{m}(\zeta, g) = \frac{m_{\tilde{h}}(\zeta, g)}{m_h(\zeta, g)}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

está en  $\mathfrak{H}$  (véase el Teorema 5.3.1). Así, con los ceros  $\{\mu_k\}_{k \in \mathcal{M}}$  y polos  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathcal{M}}$  de  $\mathbf{m}(\zeta, g)$  enumerados como en la Convención 1.2.1, la función  $\mathbf{m}(\zeta, g)$  puede expresarse como

$$\mathbf{m}(\zeta, g) = C \frac{\zeta - \mu_0}{\zeta - \lambda_0} \prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \left(1 - \frac{\zeta}{\mu_k}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{\lambda_k}\right)^{-1}, \quad C > 0. \quad (5.3.10)$$

Observe que de (5.3.7) se sigue que

$$\lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \mathbf{m}(\zeta, g) = 1. \quad (5.3.11)$$

Por otra parte es claro que

$$\lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \left( \frac{\zeta - \mu_0}{\zeta - \lambda_0} \right) = \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \left( 1 + \frac{\lambda_0 - \mu_0}{\zeta - \lambda_0} \right) = 1. \quad (5.3.12)$$

Puesto que (5.3.11) tiene lugar, entonces de (5.3.10) y (5.3.12) tenemos

$$C^{-1} = \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \left( 1 - \frac{\zeta}{\mu_k} \right) \left( 1 - \frac{\zeta}{\lambda_k} \right)^{-1}. \quad (5.3.13)$$

Con esto último, hemos demostrado que  $\mathbf{m}(\zeta, g)$  está completamente determinada por los espectros  $\sigma(\hat{J}_h(g))$  y  $\sigma(\hat{J}_{\tilde{h}}(g))$ .

Determine, ahora, de manera única a  $\tilde{h} \in \mathbb{R}$ . De (5.3.7) se tiene que

$$\zeta(\mathbf{m}(\zeta, g) - 1) = (\tilde{h} - h) + (\tilde{h} - h)(q_1 + \tilde{h})\zeta^{-1} + O(\zeta^{-2}),$$

cuando  $\zeta \rightarrow \infty$  ( $\text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0$ ), entonces

$$\lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \zeta(\mathbf{m}(\zeta, g) - 1) = \tilde{h} - h.$$

Por lo tanto,

$$\tilde{h} = h + \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \zeta(\mathbf{m}(\zeta, g) - 1) \quad (5.3.14)$$

Así,  $\tilde{h}$  queda determinado de manera única.

Ahora, para ver que el operador de Jacobi  $J$  está determinado de manera única, basta despejar  $m_0(\zeta, g)$  de la primera igualdad en (5.3.6). Así

$$m_0(\zeta, g) = \frac{1 - \mathbf{m}(\zeta, g)}{\tilde{h}\mathbf{m}(\zeta, g) - h}$$

determina de manera única al operador  $J$ , por Teorema 5.2.3. Para terminar la demostración resta sólo determinar de manera única a  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ . Si  $\hat{J}(g) = \hat{J}(g)^*$ , entonces inmediatamente se obtiene  $g = -\infty$ . Si  $\hat{J}(g) \neq \hat{J}(g)^*$ , entonces procedemos como en (5.2.6) y (5.2.7).  $\square$

*Comentario 5.3.2.* En [41] publicado antes que [37] (véase también [14]) se prueba que el espectro discreto de  $\hat{J}_{\tilde{h}}(g)$  y  $\hat{J}_h(g)$ , junto con  $h$  y  $\tilde{h}$  determinan de manera única al operador  $J$  y la condición a la frontera  $g$  en el caso del índice de deficiencia  $(1, 1)$ . El resultado de [37] muestra que no es necesario conocer a ambos  $h$  y  $\tilde{h}$ , basta con conocer uno de ellos.



La demostración del Teorema 5.3.2 da un algoritmo completo de reconstrucción de un operador de Jacobi que tiene como datos de entrada los espectros y un número real.

**Teorema 5.3.3.** ([37]) *Conociendo los espectros  $\sigma(\hat{J}_h(g))$ ,  $\sigma(\hat{J}_{\tilde{h}}(g))$  y  $q_1$ , el primer elemento de la diagonal principal de la matriz (4.1.1), es posible recuperar de manera única la matriz de Jacobi, las condiciones a la frontera  $h$ ,  $\tilde{h}$  y la condición a la frontera en el infinito  $g$ .*

*Demostración.* Sea  $\omega_1 = \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \zeta(\mathbf{m}(\zeta, g) - 1)$ . De (5.3.7) y (5.3.14), tenemos

$$\frac{\zeta^2(\mathbf{m}(\zeta, g) - 1)}{\omega_1} - \zeta = q_1 + \tilde{h} + O(\zeta^{-1}),$$

cuando  $\zeta \rightarrow \infty$  ( $\text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0$ ). Así,

$$\tilde{h} = -q_1 + \frac{1}{\omega_1} \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} (\zeta^2(\mathbf{m}(\zeta, g) - 1) - \zeta\omega_1).$$

Por lo tanto, si conocemos  $q_1$ ,  $\tilde{h}$  queda determinado de manera única y por el Teorema 5.3.2, quedan determinados de manera única  $h$ , la matriz de Jacobi y la condición a la frontera en el infinito  $g$ .  $\square$

## 5.4. Condiciones necesarias y suficientes

**Teorema 5.4.1.** *Dados los espectros  $\{\mu_k\}_k = \sigma(\hat{J}_h(g))$  y  $\{\lambda_k\}_k = \sigma(\hat{J}_{\tilde{h}}(g))$ , se tiene que*

$$\sum_{k \in \mathcal{M}} (\mu_k - \lambda_k) = \hat{h} - \tilde{h}.$$

*Demostración.* Observe que de (5.3.1), si  $\tilde{h} < \hat{h}$  o  $\hat{h} < \tilde{h}$  tenemos que

$$\lambda(\hat{h}) - \lambda(\tilde{h}) = \int_{\tilde{h}}^{\hat{h}} \frac{dh}{\alpha(h)}.$$

Pero  $\lambda(\hat{h})$  y  $\lambda(\tilde{h})$  son auto-valores de los operadores  $\hat{J}_h(g)$  y  $\hat{J}_{\tilde{h}}(g)$ , respectivamente, entonces

$$\mu_k - \lambda_k = \int_{\tilde{h}}^{\hat{h}} \frac{dh}{\alpha_k(h)}.$$

Sea  $\{\mathcal{M}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de subconjuntos de  $\mathcal{M}$  tal que  $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_{n+1}$  y  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n = \mathcal{M}$ , entonces, usando (4.5.18) tenemos

$$s_n := \sum_{k \in \mathcal{M}_n} (\mu_k - \lambda_k) = \sum_{k \in \mathcal{M}_n} \int_{\tilde{h}}^{\hat{h}} \frac{dh}{\alpha_k(h)} = \int_{\tilde{h}}^{\hat{h}} \sum_{k \in \mathcal{M}_n} \frac{dh}{\alpha_k(h)} \leq \hat{h} - \tilde{h}.$$

La sucesión  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente, así

$$\sum_{k \in \mathcal{M}} (\mu_k - \lambda_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \hat{h} - \tilde{h}.$$

□

**Teorema 5.4.2.** ([37]) *Dado  $h_1 \in \mathbb{R}$  y dos sucesiones infinitas de números reales  $\{\lambda_k\}_k$  y  $\{\mu_k\}_k$  sin puntos finitos de acumulación, existe un único real  $h_2 < h_1$ , un único  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$  y un único operador  $\hat{J}(g)$  tales que  $\{\mu_k\}_k = \sigma(\hat{J}_{h_1}(g))$  y  $\{\lambda_k\}_k = \sigma(\hat{J}_{h_2}(g))$  si y sólo si las siguientes condiciones se satisfacen*

- a)  $\{\lambda_k\}_k$  y  $\{\mu_k\}_k$  se entrelazan y, si  $\{\lambda_k\}_k$  está acotada inferiormente,  $\min_k \{\mu_k\}_k > \min_k \{\lambda_k\}_k$ , mientras que si  $\{\lambda_k\}_k$  está acotada superiormente,  $\max_k \{\lambda_k\}_k < \max_k \{\mu_k\}_k$ . De esta forma las sucesiones pueden ser enumeradas haciendo uso de la Convención 1.2.1.
- b) Las siguientes series convergen

$$0 < \sum_{k \in \mathcal{M}} (\mu_k - \lambda_k) = \Delta < \infty.$$

Por la condición b), el producto infinito  $\prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq n}} \frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n}$  es convergente,

así podemos definir

$$\tau_n^{-1} := \frac{\mu_n - \lambda_n}{\Delta} \prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq n}} \frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n}, \quad \forall k \in \mathcal{M}. \quad (5.4.1)$$

- c) La sucesión  $\{\tau_n\}_{k \in \mathcal{M}}$  es tal que, para  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , la serie

$$\sum_{k \in \mathcal{M}} \frac{\lambda_k^{2m}}{\tau_k} \quad \text{converge.}$$

d) Si una sucesión de números complejos  $\{\beta_k\}_{k \in \mathcal{M}}$  es tal que la serie

$$\sum_{k \in \mathcal{M}} \frac{|\beta_k|^2}{\tau_k} \quad \text{converge}$$

y, para  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,

$$\sum_{k \in \mathcal{M}} \frac{\beta_k \lambda_k^m}{\tau_k} = 0,$$

entonces  $\beta_k = 0$  para toda  $k \in \mathcal{M}$ .

*Demostración.* Probemos primero que si  $\{\mu_k\}_k$  y  $\{\lambda_k\}_k$  son los espectros de  $\hat{J}_{h_1}(g)$  y  $\hat{J}_{h_2}(g)$ , respectivamente, con  $h_2 < h_1$ , entonces a), b), c) y d) se satisfacen. La condición a) se sigue directamente de la demostración del Teorema 5.3.1. La convergencia de la serie en b), se sigue del Teorema 5.4.1 y claramente la convergencia absoluta de

$$\sum_{k \in \mathcal{M}} \mu_k - \lambda_k \tag{5.4.2}$$

implica la convergencia absoluta de

$$\sum_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k}$$

la cual es equivalente a la convergencia absoluta de

$$\prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq n}} \frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n},$$

por el Teorema 1.1.4. Por otra parte, la convergencia absoluta de (5.4.2) implica la convergencia absoluta de  $\sum_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \left( \frac{\lambda_k}{\mu_k} - 1 \right)$  y de nuevo por el Teorema 1.1.4, el producto infinito  $\prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \lambda_k / \mu_k$  es convergente. De esta manera

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \left( 1 - \frac{\zeta}{\mu_k} \right) \left( 1 - \frac{\zeta}{\lambda_k} \right)^{-1} \\ &= \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \left( \frac{\lambda_k}{\mu_k} \right) \left( \frac{\mu_k - \zeta}{\lambda_k - \zeta} \right) \\ &= \prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \frac{\lambda_k}{\mu_k} \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \frac{\mu_k - \zeta}{\lambda_k - \zeta}. \end{aligned}$$

Claramente,

$$\lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \frac{\mu_k - \zeta}{\lambda_k - \zeta} = \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \left( 1 + \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \zeta} \right) = 1.$$

Así,  $C = \prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \mu_k / \lambda_k$  y por (5.3.10) tenemos que

$$\mathfrak{m}(\zeta, g) = \prod_{k \in \mathcal{M}} \frac{\mu_k - \zeta}{\lambda_k - \zeta}. \quad (5.4.3)$$

De (4.5.21) y (5.3.8), tenemos que las constantes de normalización están dadas por

$$\begin{aligned} \alpha_n^{-1}(h_2) &= \lim_{\zeta \rightarrow \lambda_n} (\lambda_n - \zeta) \frac{\mathfrak{m}(\zeta, g) - 1}{h_1 - h_2} \\ &= \frac{1}{h_1 - h_2} \lim_{\zeta \rightarrow \lambda_n} (\lambda_n - \zeta) \mathfrak{m}(\zeta, g). \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow \lambda_n} (\lambda_n - \zeta) \mathfrak{m}(\zeta, g) &= \lim_{\zeta \rightarrow \lambda_n} (\lambda_n - \zeta) \prod_{k \in \mathcal{M}} \frac{\mu_k - \zeta}{\lambda_k - \zeta} \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow \lambda_n} \prod_{k \in \mathcal{M}} (\lambda_n - \zeta) \frac{\mu_k - \zeta}{\lambda_k - \zeta} \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow \lambda_n} \prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq n}} \frac{\mu_k - \zeta}{\lambda_k - \zeta} (\mu_n - \zeta) \\ &= (\mu_n - \lambda_n) \prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq n}} \frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n}. \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Por lo tanto,

$$\alpha_n^{-1}(h_2) = \frac{\mu_n - \lambda_n}{h_1 - h_2} \prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq n}} \frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n}. \quad (5.4.5)$$

Note que, por el Teorema 5.4.1,  $\Delta = h_1 - h_2$ , por lo tanto de (5.4.5), se sigue que  $\tau_n = \alpha_n(h_2)$  para toda  $n \in \mathcal{M}$ . Así, la función  $\rho_h$  de la extensión auto-adjunta  $\hat{J}_{h_2}(g)$  está dada por la expresión  $\rho_h(t) = \sum_{\lambda_k < t} \tau_k^{-1}$  (véase 4.5.17). Por lo tanto, el inciso c) sigue del Teorema 4.5.8 (dado que todos los momentos de  $\rho_h$  son finitos). Similarmente d) se obtiene del Teorema 4.5.9 tomando en cuenta el Lema 4.5.2.

Probemos ahora que las condiciones a), b), c) y d) son suficientes. Sea  $\{\lambda_k\}_k$  y  $\{\mu_k\}_k$  sucesiones como en a) y b). Entonces, de a) y la Convención 1.2.1,

$$\frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n} > 0, \quad \forall k \in \mathcal{M}, k \neq n. \quad (5.4.6)$$

Además, de b) se sigue la convergencia de

$$\prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq n}} \frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n}. \quad (5.4.7)$$

Así,

$$0 < \prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq n}} \frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n} < \infty. \quad (5.4.8)$$

La convergencia de este producto permite definir la sucesión infinita de números  $\{\tau_k\}_{k \in \mathcal{M}}$ . Observe que debido a (5.4.8),

$$\tau_k > 0, \quad \forall k \in \mathcal{M}. \quad (5.4.9)$$

En efecto,  $\Delta > 0$  y de la Convención 1.2.1 se sigue que  $\mu_n - \lambda_n > 0$  para toda  $n \in \mathcal{M}$ .

Defina la función

$$\rho(t) := \sum_{\lambda_k < t} \frac{1}{\tau_k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ya que (5.4.9) es válido, entonces  $\rho(t)$  es una función monótona no decreciente y tiene un número infinito de puntos de crecimiento. Note también que  $\rho(t)$  es continua por la izquierda. Ahora, vamos a mostrar que todos los momentos de la medida correspondiente a  $\rho(t)$  son finitos y que

$$\int_{\mathbb{R}} d\rho(t) = 1. \quad (5.4.10)$$

El hecho de que todos los momentos son finitos se sigue directamente de la condición c). En efecto, para toda  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} t^m d\rho(t) = \sum_{k \in \mathcal{M}} \frac{\lambda_k^m}{\tau_k}. \quad (5.4.11)$$

Para probar la convergencia de la serie en (5.4.11), note primero que la convergencia de  $\sum_{k \in \mathcal{M}} \frac{\lambda_k^m}{\tau_k}$  es equivalente a la convergencia de  $\sum_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ |\lambda_k| > 1}} \frac{\lambda_k^m}{\tau_k}$ , puesto que  $\{\lambda_k\}$  no tiene puntos finitos de acumulación. Esta última serie es convergente porque

$$\left| \sum_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ |\lambda_k| > 1}} \frac{\lambda_k^m}{\tau_k} \right| \leq \sum_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ |\lambda_k| > 1}} \left| \frac{\lambda_k^m}{\tau_k} \right| \leq \sum_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ |\lambda_k| > 1}} \frac{|\lambda_k^m|^2}{\tau_k} = \sum_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ |\lambda_k| > 1}} \frac{\lambda_k^{2m}}{\tau_k} < \infty. \quad (5.4.12)$$

Por lo tanto, para toda  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} t^m d\rho(t) < \infty. \quad (5.4.13)$$

Para continuar, probemos ahora que (5.4.10) se satisface. Dadas las sucesiones  $\{\lambda_k\}_k$  y  $\{\mu_k\}_k$  que satisfacen a) y b), defina la función

$$\tilde{\mathfrak{m}}(\zeta) := \prod_{k \in \mathcal{M}} \frac{\mu_k - \zeta}{\lambda_k - \zeta}.$$

Tomando en cuenta (5.4.1), obtenemos que

$$\operatorname{Res}_{\zeta=\lambda_n} (\tilde{\mathfrak{m}}(\zeta) - 1) = -\frac{\Delta}{\tau_n}.$$

En vista del inciso b), tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \operatorname{Im} \zeta \geq \epsilon > 0}} (\tilde{\mathfrak{m}}(\zeta) - 1) &= \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \operatorname{Im} \zeta \geq \epsilon > 0}} \prod_{k \in \mathcal{M}} \frac{\mu_k - \zeta}{\lambda_k - \zeta} - 1 \\ &= \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \operatorname{Im} \zeta \geq \epsilon > 0}} \prod_{\substack{k \in \mathcal{M} \\ k \neq 0}} \left( 1 + \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \zeta} \right) - 1 = 0. \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

Por lo tanto, por el Teorema 1.2.5, llegamos a

$$\tilde{\mathfrak{m}}(\zeta) - 1 = \sum_{k \in \mathcal{M}} \frac{\Delta}{(\lambda_k - \zeta)\tau_k}. \quad (5.4.15)$$

Definamos ahora la función  $\tilde{m}(\zeta)$  como  $\tilde{m}(\zeta) := \frac{\tilde{\mathfrak{m}}(\zeta) - 1}{\Delta}$ . Entonces, de (5.4.15) se tiene que

$$\tilde{m}(\zeta) = \sum_{k \in \mathcal{M}} \frac{1}{(\lambda_k - \zeta)\tau_k}. \quad (5.4.16)$$

En lo que sigue vamos a mostrar que

$$\lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \zeta \tilde{m}(\zeta) = -1.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{m}(\zeta)}{\Delta} &= \frac{1}{\Delta} \prod_{k \in \mathcal{M}} \frac{\mu_k - \zeta}{\lambda_k - \zeta} \\ &= \frac{1}{\Delta} \exp \left\{ \sum_{k \in \mathcal{M}} \ln \left( \frac{\mu_k - \zeta}{\lambda_k - \zeta} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta} \exp \left\{ \sum_{k \in \mathcal{M}} \ln \left( 1 + \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \zeta} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta} \exp \left\{ \sum_{k \in \mathcal{M}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \left( \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \zeta} \right)^p \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta} \exp \left\{ \sum_{k \in \mathcal{M}} \left( \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \zeta} \right) + \sum_{k \in \mathcal{M}} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \left( \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \zeta} \right)^p \right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando  $\zeta \rightarrow \infty$  con  $\text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{m}(\zeta)}{\Delta} &= \frac{1}{\Delta} \exp \left\{ \sum_{k \in \mathcal{M}} \left( \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \zeta} \right) + O(\zeta^{-2}) \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta} \left\{ 1 + \left\{ \sum_{k \in \mathcal{M}} \left( \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \zeta} \right) + O(\zeta^{-2}) \right\} + \frac{\left\{ \sum_{k \in \mathcal{M}} \left( \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \zeta} \right) + O(\zeta^{-2}) \right\}^2}{2!} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Así, cuando  $\zeta \rightarrow \infty$  ( $\text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0$ ),

$$\frac{\tilde{m}(\zeta)}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta} \sum_{k \in \mathcal{M}} \left( \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \zeta} \right) + O(\zeta^{-2}).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \zeta \tilde{m}(\zeta) &= \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \zeta \frac{1}{\Delta} \sum_{k \in \mathcal{M}} \left( \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \zeta} \right) \\ &= \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \frac{1}{\Delta} \sum_{k \in \mathcal{M}} \frac{\zeta(\mu_k - \lambda_k)}{\zeta \left( \frac{\lambda_k}{\zeta} - 1 \right)} \\ &= -\frac{1}{\Delta} \sum_{k \in \mathcal{M}} (\mu_k - \lambda_k) = -1. \end{aligned}$$

De (5.4.16), obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \zeta \tilde{m}(\zeta) &= \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \sum_{k \in \mathcal{M}} \zeta \frac{1}{(\lambda_k - \zeta) \tau_k} \\ &= \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} \sum_{k \in \mathcal{M}} \frac{\zeta}{\zeta \left( \frac{\lambda_k}{\zeta} - 1 \right) \tau_k} \\ &= - \sum_{k \in \mathcal{M}} \frac{1}{\tau_k}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$1 = \sum_{k \in \mathcal{M}} \frac{1}{\tau_k} = \int_{\mathbb{R}} d\rho(t).$$

Así la función  $\rho(t)$  es una función no decreciente con un número infinito de puntos de crecimiento tal que (5.4.10) se satisface y tal que todos los momentos existen (véase la ecuación (5.4.13)). Por lo tanto, podemos utilizar la función  $\rho(t)$  para obtener una matriz tridiagonal simi-infinita con base en el Teorema 5.2.1. Denótese por  $\check{J}$  al operador cuya representación matricial es la matriz obtenida. Por lo que se explicó en el Capítulo 4 (Sección 4.1) el operador  $\check{J}$  es cerrado y simétrico. Ahora, defina  $h_2 := h_1 - \Delta$  y  $\hat{J} = \check{J} - h_2(\cdot, \delta_1)\delta_1$ . Si  $\check{J} = \check{J}^*$ , sabemos que  $\rho(t) = (E_{\check{J}}(t)\delta_1, \delta_1)$ , donde  $E_{\check{J}}(t)$  es la descomposición espectral del operador auto-adjunto de Jacobi  $\check{J}$ . Entonces, obviamente,  $\check{J} = \hat{J}_{h_2}(-\infty)$ , o sea,  $g = -\infty$ .

Si  $\check{J} \neq \check{J}^*$ , la transformada de Stieltjes de  $\rho(t)$ , denotada por  $w(\zeta)$ , es la  $m$ -función de Weyl-Titchmarsh de alguna extensión auto-adjunta de  $\check{J}$  que denotaremos por  $\tilde{J}$ . Esta afirmación es cierta ya que los polinomios son densos en  $L_2(\mathbb{R}, d\rho(t))$  (véase el Teorema 5.2.2 y [2, Teorema 2.3.3]). En efecto, el inciso d) implica que los polinomios son densos en  $L_2(\mathbb{R}, d\rho(t))$ . Por lo tanto,  $\tilde{J} - h_2(\cdot, \delta_1)\delta_1$  es una extensión auto-adjunta de  $\hat{J}$  y por consiguiente,  $\tilde{J} - h_2(\cdot, \delta_1)\delta_1 = \hat{J}(g)$  para un único  $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Además, tenemos que  $\tilde{J} = \hat{J}_{h_2}(g)$  y así  $w(\zeta) = m_{h_2}(\zeta, g)$ . Con esto, reconstruimos de manera única  $m_0(\zeta, g)$ , a partir de  $m_{h_2}(\zeta, g)$  usando la ecuación (5.3.4) y entonces construimos unívocamente a  $g$  como se hace en la demostración del Teorema 5.2.3.

Note que

$$m_{h_2}(\zeta, g) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\rho(t)}{t - \zeta} = \tilde{m}(\zeta).$$

Así, sólo resta probar que las sucesiones  $\{\mu_k\}_k, \{\lambda_k\}_k$  que se dieron en un principio, correspondan a los espectros de los operadores  $\hat{J}_{h_1}(g)$  y  $\hat{J}_{h_2}(g)$  que



acabamos de encontrar. O sea, hay que verificar que  $\{\mu_k\}_k = \sigma(\hat{J}_{h_1}(g))$  y  $\{\lambda_k\}_k = \sigma(\hat{J}_{h_2}(g))$ . Para este fin, considere la función  $\mathbf{m}(\zeta, g)$  para la pareja  $\hat{J}_{h_1}(g)$  y  $\hat{J}_{h_2}(g)$  tal que

$$\mathbf{m}(\zeta, g) = \frac{m_{h_2}(\zeta, g)}{m_{h_1}(\zeta, g)}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Ahora denótese al espectro de  $\hat{J}_{h_1}(g)$  por  $\{\gamma_k\}_k$ . Es claro que  $\sigma(\hat{J}_{h_2}(g)) = \{\lambda_k\}_k$  por construcción. Entonces argumentando como en (5.4.3), obtenemos

$$\mathbf{m}(\zeta, g) = \prod_{k \in \mathcal{M}} \frac{\gamma_k - \zeta}{\lambda_k - \zeta}.$$

Dado que hemos probado que a) y b) son condiciones necesarias, tenemos que

$$\sum_{k \in \mathcal{M}} (\gamma_k - \lambda_k) = \Delta < \infty.$$

Y por la demostración de (5.4.14), se sigue que

$$\lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \text{Im } \zeta \geq \epsilon > 0}} (\mathbf{m}(\zeta) - 1) = 0.$$

Por lo tanto, por el Teorema 1.2.5, se concluye que

$$\mathbf{m}(\zeta, g) = 1 + \sum_{k \in \mathcal{M}} \frac{h_1 - h_2}{(\lambda_k - \zeta)\alpha_k(h_2)},$$

donde el residuo de  $\mathbf{m}(\zeta)$  se calculó como en (5.4.4). Por lo tanto, ya que  $\alpha_k(h_2) = \tau_k$  para toda  $k \in \mathcal{M}$ , y  $\Delta = h_1 - h_2$ ,

$$\mathbf{m}(\zeta, g) = 1 + \sum_{k \in \mathcal{M}} \frac{\Delta}{(\lambda_k - \zeta)\tau_k} = \tilde{\mathbf{m}}(\zeta, g). \quad (5.4.17)$$

La última igualdad de la ecuación (5.4.17) se obtiene de (5.4.15). Dado que  $\{\lambda_k\}_k$  y  $\{\mu_k\}_k$  son los polos y ceros, respectivamente, de  $\tilde{\mathbf{m}}(\zeta, g)$ , entonces  $\{\lambda_k\}_k$  y  $\{\mu_k\}_k$  son los auto-valores de  $\hat{J}_{h_2}(g)$  y  $\hat{J}_{h_1}(g)$ , respectivamente, con lo que hemos probado el teorema.  $\square$

# Bibliografía

- [1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis. An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. McGraw-Hill, Inc. New York, St. Louis, San Francisco, Anklnd. Third Edition, 1979.
- [2] N. I. Akhiezer, *The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis*. Hafner Publishing, New York, 1965.
- [3] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*. Dover Publications, New York, 1993.
- [4] T. Aktosun and R. Weder, Inverse spectral-scattering problem with two sets of discrete spectra for the radial Schrödinger equation. *Inverse Problems*. **22** (2006), 89–114.
- [5] T. Aktosun and R. Weder, The Borg-Marchenko theorem with a continuous spectrum. In *Recent Advances in Differential Equations and Mathematical Physics, Contemp. Math.* **412**. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, 15–30.
- [6] J. M. Berezanskiĭ, *Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators*. Translations of Mathematical Monographs **17**. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968.
- [7] J. M. Berezanskiĭ, Z. G. Sheftel, G. F. Us, *Funtional Analysis, vol. I; Operator Theory Advances and Applications*. **85**, Birkhäuser Verleg, Basel . Boston . Berlin, 1996.
- [8] J. M. Berezanskiĭ, Z. G. Sheftel, G. F. Us, *Funtional Analysis, vol. II; Operator Theory Advances and Applications*. **86**, Birkhäuser Verleg, Basel . Boston . Berlin, 1996.
- [9] M. I. Birman and M. I. Solomjak, *Spectral Theory Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*. Mathematics and its Applications (D. Reidel Publishing Company).Soviet Series, 1986.

- 
- [10] G. Borg, Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, *Acta Math.* **78** (1945), 1-96.
- [11] G. Borg, Uniqueness theorems in the spectral theory of  $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$ . *Proc. 11th Scandinavian Congress of Mathematicians*. Johan Grundt Tanums Forlag, Oslo, 1952, 276–287.
- [12] B. M. Brown, S. Naboko, and R. Weikard, The inverse resonance problem for Jacobi operators. *Bull. London Math. Soc.* **37** (2005), 727–737.
- [13] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon, *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*. Texts and Monographs in Physics. Springer, Berlin, 1987.
- [14] W. F. Donoghue, Jr., On the perturbation of spectra. *Comm. Pure Appl. Math.* **18** (1965), 559–579.
- [15] L. Fu and H. Hochstadt, Inverse theorems for Jacobi matrices. *J. Math. Anal. Appl.* **47** (1974), 162–168.
- [16] I. M. Gelfand and B. M. Levitan, On the determination of a differential equation from its spectral function. *Am. Math. Soc. Trans.* **1** (1951), 253–304.
- [17] F. Gesztesy and B. Simon, Uniqueness theorems in inverse spectral theory for one-dimensional Schrödinger operators. *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), 349–373.
- [18] F. Gesztesy and B. Simon,  $m$ -functions and inverse spectral analysis for finite and semi-infinite Jacobi matrices. *J. Anal. Math.* **73** (1997), 267–297.
- [19] F. Gesztesy and B. Simon, On local Borg-Marchenko uniqueness results. *Comm. Math. Phys.* **211** (2000), 273–287.
- [20] M. L. Gorbachuk and V. L. Gorbachuk: *M. G. Krein's lectures on entire operators*. *Operator Theory: Advances and Applications*, vol. 97. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
- [21] G. Š. Guseĭnov, The determination of the infinite Jacobi matrix from two spectra. *Mat. Zametki* **23** (1978), 709–720.
- [22] R. Z. Halilova, An inverse problem. *Izv. Akad. Nauk Azerbaĭdžan. SSR Ser. Fiz.-Tehn. Mat. Nauk* **3–4** (1967), 169–175.

- [23] T. Kato, *Perturbation Theory of Linear Operators*. Second Edition. Springer, Berlin, 1976.
- [24] E. Koelink, Spectral theory and special functions. In *Laredo Lectures on Orthogonal Polynomials and Special Functions*. Adv. Theory Spec. Funct. Orthogonal Polynomials. Nova Sci. Publ., Hauppauge, NY, 2004, pp. 45–84.
- [25] M. G. Krein, Solution of the inverse Sturm-Liouville problem, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 76 (1951), 21-24.
- [26] M. G. Krein, On a method of the effective solution of an inverse boundary value problem, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 95 (1954), 767-770.
- [27] E. Landau, Über einen Konvergenzsatz, *Göttinger Nachrichten*, (1907), 25-27. (Disponibile también en *Göttinger Digitalisierungszentrum*).
- [28] B. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*. Translations of Mathematical Monographs 5. Amer. Math. Soc., Providence, 1980.
- [29] B. M. Levitan and M. G. Gasymov, Determination of a differential equation by two of its spectra. *Uspehi Mat. Nauk* 19 (1964), 3–63.
- [30] V. A. Marchenko, Certain problems in the theory of second-order differential operators, *Doklady Akad. Nauk SSSR* 72, (1950), 457-460 [En ruso].
- [31] V. A. Marchenko, Some questions in the theory of one-dimensional linear differential operators of the second order. I, *Trudy Moskov. Mat. Obšč.* 1 (1952) 327–420 [En ruso, traducción al inglés en Am. Math. Soc. Transl. (ser. 2) 101 (1973) 1–104].
- [32] A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable*, vol.I. Prentice-Hall, inc., Englewood Cliffs, N. J., 1965.
- [33] A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable*, vol.II. Prentice-Hall, inc., Englewood Cliffs, N. J., 1965.
- [34] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. IV Analysis of Operators*. Academic Press, New York, 1978.
- [35] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, Inc. Third Edition, 1976.

- 
- [36] M. Schechter, *Spectra of Partial Differential Operators*. Second Edition. Applied Mathematics and Mechanics **14**. North Holland, Amsterdam, 1986.
- [37] L. O. Silva and R. Weder, On the Two Spectra Inverse Problem for Semi-infinite Jacobi Matrices. *Math Phys Anal Geom* (3)**9**, (2006), 263-290.
- [38] L. O. Silva and R. Weder, The Two-Spectra Inverse Problem for Semi-infinite Jacobi Matrices in The Limit - Circle Case. *Math Phys Anal Geom* (2)**11**, (2008), 131-154 .
- [39] B. Simon, The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator. *Adv. Math.* **137** (1998), 82–203.
- [40] B. Simon, Spectral analysis of rank one perturbations and applications. In: *Mathematical Quantum Theory. II. Schrödinger Operators* (Vancouver, BC, 1993), CRM Proc. Lecture Notes, **8**, Amer. Math. Soc., Providence, RI 1995, pp. 109-149.
- [41] G. Teschl, Trace formulas and inverse spectral theory for Jacobi operators. *Comm. Math. Phys.* **196** (1998) 175–202.
- [42] G. Teschl, *Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices*, Mathematical Surveys and Monographs **72**. Amer. Math. Soc., Providence, 2000.
- [43] E. C. Titchmarsh, M. A., F.S.R. *The theory of functions*, Oxford University Press, London, . Second edition 1952.
- [44] J. Weidmann, *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Graduate Texts in Mathematics **68**. Springer, New York, 1980.
- [45] R. Weikard, A local Borg-Marchenko theorem for difference equations with complex coefficients. In *Partial differential equations and inverse problems*, *Contemp. Math.* **362**. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 403–410.