UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Números Perfectos Pares. ¿Existirá algún Número Perfecto Impar?

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

CLAUDIA MÓNICA HERNÁNDEZ NAVA

DIRECTOR DE TESIS:
MAT. JULIO CÉSAR GUEVARA BRAVO

2010

1. Datos del alumno
   Hernández
   Nava
   Claudia Mónica
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   096505238

2. Datos del tutor
   Mat
   Julio César
   Guevara
   Bravo

3. Datos del sinodal 1
   Dr
   Alejandro Ricardo
   Garciadiego
   Dantán

4. Datos del sinodal 2
   Dr
   Carlos
   Torres
   Alcaraz

5. Datos del sinodal 3
   Mat
   Ernesto
   Mayorga
   Saucedo

6. Datos del sinodal 4
   Dr
   Armando
   García
   Martínez

7. Datos del trabajo escrito
   Números Perfectos Pares. ¿Existirá algún Número Perfecto Impar?
   p 104
   2010

VNIVERSDAD NACIONAL AVTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias
Secretaría General
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

Act. Mauricio Aguilar González
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Números Perfectos Pares. ¿Existirá algún Número Perfecto Impar?

realizado por **Hernández Nava Claudia Mónica** con número de cuenta **0-9650523-8** quien ha decidido titularse mediante la opción de **tesis** en la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario	Dr. Alejandro Ricardo Garciadiego Dantán	Alejandro Garciadiego
Propietario	Dr. Carlos Torres Alcaraz	
Propietario Tutor	Mat. Julio César Guevara Bravo	
Suplente	Mat. Ernesto Mayorga Saucedo	Ernesto Mayorga S.
Suplente	Dr. Armando García Martínez	

Atentamente,
"Por Mi Raza Hablará El Espíritu"
Ciudad Universitaria, D. F., a 09 de noviembre de 2009
El Coordinador del Comité Académico de la Licenciatura en Matemáticas

M. en C. Francisco de Jesús Struck Chávez

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.
'nlm.

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

A TI, OH DIOS DE MIS PADRES,

CONFIESO Y TE ALABO,

QUE ME DISTE SABIDURÍA Y FORTALEZA.

ASÍ QUE NO ES DEL QUE QUIERE,

NI DEL QUE CORRE,

SINO DE DIOS QUE TIENE MISERICORDIA.

PORQUE DE ÉL, Y POR ÉL, Y EN ÉL,

SON TODAS LAS COSAS.

A ÉL SEA GLORIA POR SIGLOS.

AMÉN.

A MI PADRE:

Donde quiera que tú fueres, iré yo;
Y donde quiera que vivieres, viviré.
Tu pueblo será mi pueblo, y tu Dios mi Dios.
Donde tú murieres, moriré yo, y allí seré sepultada;
Así me haga Jehová, y así me dé,
Que sólo la muerte hará separación entre mí y ti.

A MI MADRE:

Muchas mujeres hicieron el bien;
Mas tú las sobrepujaste á todas.
Engañosa es la gracia, y vana la hermosura:
La mujer que teme á Jehová, ésa será alabada.

A MI HERMANA:

Mejores son dos que una;
Porque si cayeren, la una levantará a su compañera:
Y si alguno prevaleciere contra la una, dos estarán contra él;
Y cordón de tres dobleces no presto se rompe.
SHALOM

AGRADECIMIENTOS

A todos aquellos que han sido participes en el desarrollo de mi vida académica les agradezco el haberme dado la oportunidad de acercarme a las matemáticas. Me resultaría imposible nombrar a todos los cómplices de mi felicidad y, como no quiero deber honra a nadie, sólo quiero decirles que Dios no es injusto para olvidar vuestra obra y el trabajo de amor que habéis mostrado para conmigo habiéndome apoyado y apoyándome aún. Mi Dios, al que los cielos de los cielos, no le pueden contener; los Bendiga.

GRACIAS

Claudia M

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la Teoría de los Números ha creado decenas de relaciones matemáticas que han dado lugar a la proposición de diversos tipos de números que hasta nuestros días seguimos identificando, pero que principalmente, aún los estudiamos. Esta diversidad numérica se halla en prácticamente todas las disciplinas y algunas de las particularidades pueden ser: Los gaussianos, pitagóricos, de Bernoulli, armónicos, transfinitos, algebraicos, los primos de Sophie Germain, hipercomplejos, enteros de Goldbach, Catalán, los primos de Eisenstein-Jacobi, multiperfectos, los poliedro, cuaterniones, los de Carmichael, de Möbius, entre otros. En mayor o menor medida se sigue desarrollando labor de investigación para cada uno de los tipos de números que se conocen, y bajo estos derroteros, se tiene que algunos de ellos ya cuentan con una estructura teórica y un sólido marco de certidumbre para que se siga con el avance de su investigación.

Ahora, por otro lado, existen números que han despertado un gran interés en la comunidad matemática desde hace cientos de años, pero, los avances para conocerlos más no son tan explícitos como se quisiera. Un ejemplo de esto último son los números perfectos,[1] ya que a pesar de los más de dos mil años que ha llevado su estudio, sólo se ha logrado desentrañar la mitad del problema, es decir, sólo se han encontrado los perfectos pares y de los perfectos impares se han encontrado múltiples propiedades, pero ellas no han proporcionado los elementos suficientes para poder exhibir a uno de ellos.

Este trabajo de tesis titulado "Números Perfectos Pares. ¿Existirá algún Número Perfecto Impar?", tiene dos propósitos:

1) Mostrar la teoría que ha llevado a la consolidación de los números perfectos pares.
2) Presentar de manera panorámica parte de los resultados obtenidos por la búsqueda de los números perfectos impares.

Durante el desarrollo del presente trabajo resultó complicado exponer una idea general de la teoría de los perfectos impares, y esto fue por la extensa y especializada cantidad de resultados matemáticos que se han publicado sobre ellos. De las aportaciones que se

[1] Cabe recordar que los números perfectos se definen como aquellos que son iguales a la suma de sus divisores propios, así, el primer perfecto es el 6 ya que 6=1+2+3. Si se considera a todos los divisores de un número y no sólo a los propios, entonces, decimos que un número es perfecto cuando la suma de sus divisores es dos veces el número.

presentan en la tesis, vinculadas con los perfectos pares, algunas se modificaron en sus demostraciones y otras fueron complementadas en su exposición.

El Capítulo I de la tesis está dedicado exclusivamente a los números perfectos pares desde su origen con Pitágoras, las identificaciones de Euclides y Euler, su relación biyectiva con los números primos de Mersenne, sus diferentes propiedades, y concluye con un análisis acerca de su infinitud.

El Capítulo II trata sobre los números perfectos impares. Su objetivo es exponer de manera muy general el amplio desarrollo teórico de estos ya que de existir contarían con varias e interesantes características, como: Su estructura (n perfecto impar tendría la forma $n = q^{\alpha} P_1^{2\beta_1} P_2^{2\beta_2} P_3^{2\beta_3} \cdots P_r^{2\beta_r}$ donde los $q, P_1, P_2, \cdots P_r$ son primos impares distintos y $q \equiv \alpha \equiv 1 \ (mod\, 4)$), la cantidad de factores primos que requieren (al menos 37), su extensión (no podrían ser menores que 10^{500}), entre otras.

La Reflexión que se presenta al final de la tesis cuestiona el problema de "la existencia en matemáticas", y que ésta no se reduce solamente a la verificación de la no contradicción.

Pasando a otro plano, debo mencionar que decidí hacer mi tesis de licenciatura dentro del campo de la Teoría de los Números porque al igual que Gauss creo que "La matemática es la reina de las ciencias, pero, la Teoría de los Números es la reina de las matemáticas". Me interesa el estudio de esta disciplina porque desarrolla la imaginación y educa la capacidad de razonamiento, además, la considero como la expresión creadora de la mente humana porque a partir de significados aparentemente arbitrarios es capaz de crear resultados de valor científico. Ya Proclo afirmaba que: "Allí donde hay número, hay belleza". Aunque la etimología de números perfectos posee un tono místico que traduce un estado de espíritu poco científico, es un tema apasionante no falto de rigor matemático. El que aún no se haya podido encontrar algún número perfecto impar y, que por otro lado, se enuncien propiedades de estos, me recuerda un dialogo de la obra *El Aleph* de Jorge Luis Borges: "Claro está que si no lo ves, tu incapacidad no invalida mi testimonio". A pesar de que la matemática numérica no ha producido un perfecto impar no se pierde la esperanza de poder hallarlos por otras maneras.

CAPÍTULO I

Números Perfectos Pares.

La enseñanza de las matemáticas, en los diferentes niveles escolares, es de lo más compleja y a la vez paradójica, porque hay quienes consideran que la matemática es la ciencia que debería de tener menos dificultades para su aprendizaje. El argumento de quienes así lo piensan se sustenta en el hecho de que los resultados matemáticos son creados por el hombre y, entonces, él mismo debe de ser capaz de asimilarlos con facilidad, esto último sería ideal pero sabemos que la realidad es otra. Y un contraste de lo anterior, es que la matemática es la ciencia que posiblemente tiene el mayor número de problemas con más longevidad y que permanecen aún sin solución (en la actualidad siguen vigentes y sin modificaciones en sus enunciados problemas que se expusieron hace más de veinte siglos). Sucede en otras disciplinas que el mismo avance de la ciencia hace que algunas preguntas del pasado tengan ahora que replantearse o que de plano ya carezca de sentido encontrar sus respuestas, un ejemplo de ello sucede con la circulación de la sangre.[1]

Retornando al caso de la ciencia matemática y de los problemas vigentes, se tiene que la Teoría de los Números siempre ha sido rica en problemas *ad hoc* para quitarle a los interesados en esta disciplina un poco o mucho de su sueño y, además, para hacerlos soñar con encontrar una solución a algunos problemas de aparente inocencia en sus enunciados, pero de extremada dificultad en su resolución.

[1]Durante la antigüedad griega y romana se tenían teorías de cómo se generaba la sangre en el cuerpo, pero, no se planteaba la posibilidad de que circulara entre arterias y venas pasando por los capilares. Pensaban que la sangre se generaba en el hígado, pasaba a las arterias y venas, y posteriormente se desechaba por los fluidos. Claramente esta teoría no es la correcta y como desde el siglo XVII se descartó, ya no fue necesario responder a las interrogantes que existían para explicar el funcionamiento del sistema bascular.

I. LOS PERFECTOS.

Un tema, entre otros tantos, que puede ejemplificar lo anterior es el de los números perfectos pares e impares, y cabe señalar que es una de las interrogantes más antiguas de la Teoría de los Números que aún no se ha resuelto totalmente.

Desde los tiempos griegos, de la mano de los pitagóricos (600 a.C.), ya aparecen las nociones matemáticas puramente abstractas, por ejemplo, la de número. En ese periodo existían quienes sólo cultivaban lo simple, armonioso y bello, importando solamente las ideas y no lo que el hombre añade a ellas. Los pitagóricos se apasionaron por las fascinantes propiedades, casi mágicas, de los números (enteros positivos) bajo la doctrina mística de que la divinidad se alcanza mediante la armonía de las relaciones numéricas. Para ellos, todas las cosas son números y los números son los que gobiernan a la sociedad, de hecho, el lema de la escuela pitagórica era: "Todo es número". Así, de una rara mezcla de misticismo y matemáticas, muy cercana a una religión, los griegos adoptaron algunas consideraciones sumamente peculiares en aritmética sobre los números, una de ellas es la que se refiere a la perfección.

Los pitagóricos son los iniciadores de la vinculación entre los múltiplos de un entero y la suma de sus divisores, y con ello, logran definir a un número perfecto como aquel cuyas partes al ser agrupadas (sumadas) generan al mismo número, es decir, el entero positivo que es igual a la suma de todos sus divisores positivos propios. Así el 6 será el primer número perfecto ya que $6 = 1 + 2 + 3$. A pesar de la aparente sencillez de esta definición, los griegos sólo pudieron conocer los primeros cuatro números perfectos:

$$\begin{aligned}
6 &= 1+2+3 \\
28 &= 1+2+4+7+14 \\
496 &= 1+2+4+8+16+31+62+124+248 \\
8128 &= 1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064
\end{aligned}$$

Cabe comentar, que fueron específicamente los pitagóricos los que decidieron llamar a estos números como perfectos dado que consideraban que la perfección de un número dependía de sus partes (divisores). Según la filosofía pitagórica y la tradición cristiana, el 6 y el 28 albergaban propiedades maravillosas, por ejemplo: Dios creó al mundo en 6 días y, por otro lado, la luna tarda 28 días en dar su circunvalación en torno a la Tierra.[2]

También, los números perfectos son considerados como amigos de si mismos por la definición de números cordiales o amigables (dos números son amigos si cada uno de ellos es la suma de los divisores propios del otro, como es el caso de 220 y 284).[3] Los pitagóricos, ahondando en el estudio de los números perfectos encontraron dos resultados que parecen circunstanciales y, sin embargo, han sido de gran ayuda para su posterior desarrollo.

[2]El tema de los números perfectos no sólo ha atraído al mundo de la aritmética, también lo ha hecho con diversas culturas que han quedado impresionadas por la perfección de los números 6 y 28. La perfección del 6 ha trascendido a otros planos, por ejemplo, siglos después de ser definidos los perfectos, el 6 es mencionado por San Agustín en su obra *Ciudad de Dios* donde argumenta que no obstante poder Dios haber creado el mundo en un instante, Él prefirió emplear 6 días porque la perfección del número 6 representa a la perfección del universo. Por su parte, Alcuino de York, el teólogo a cargo de las ambiciones educativas de Carlomagno, exaltaba las cualidades del 6 como vinculado a la creación del universo y sus dotes de número perfecto. También, por definición, 6 es un número triangular. El 6 significa equilibrio y armonía porque se puede representar de las siguientes formas: 1+1+1+1+1+1=6, 2+2+2=6 y 3+3=6 …

[3]Los números cordiales o amigables provienen de una anécdota de Pitágoras, se dice que cuando le pidieron que describiera las características de un amigo lo hizo con los siguientes términos: “Es el otro yo, como 220 y 284”. En otras palabras, dado que los divisores exactos de 220 son: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110 cuya suma resulta ser 284 y los divisores exactos de 284 son: 1, 2, 4, 71 y 142 cuya suma es 220, por lo tanto, 220 y 284 son números amigables. Cabe mencionar, que en la Edad Media a estos números se les atribuyeron propiedades mágicas y hasta se fabricaban con ellos talismanes que eran intercambiados entre los amigos.

2. LOS PRIMEROS DOS RESULTADOS.

Primero. *Los números perfectos se pueden representar como una suma de números enteros consecutivos*, es decir:

$$
\begin{aligned}
6 &= 1+2+3 \\
28 &= 1+2+3+4+5+6+7 \\
496 &= 1+2+3+4+5+6+7+8+\ldots+29+30+31 \\
8128 &= 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+\ldots+124+125+126+127
\end{aligned}
$$

Dado que todos los perfectos pares que habían hallado cumplen tal propiedad, entonces, afirmaron que estos números son el resultado de una serie de la forma $1+2+3+4+5+6+7+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, y proponían que todo perfecto también cumplía esta propiedad.[4]

En el segundo resultado, los pitagóricos al definir a los números casi perfectos (números cuya suma de sus divisores positivos propios es una unidad inferior al propio número, por ejemplo: 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...) observaron que las potencias de dos $\left(2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots\right)$ satisfacían esta característica, dejando ver así que la noción de perfección va muy vinculada con la binariedad.[5]

Como los números perfectos pares se descomponen en un producto de dos factores (véase la nota a pie 4), por ejemplo, $6=2\times 3$, $28=4\times 7$, $496=16\times 31$ y $8128=64\times 127$, donde el primer factor representa a algunas potencias de dos y el segundo pertenece a ciertos miembros de la conocida suma $2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$, se deduce la siguiente relación:

---

[4]Más adelante se verá que todos los perfectos pares son de la forma $2^{P-1}\left(2^P-1\right)$ con 2^P-1 primo, sustituyendo este número perfecto en la serie se tiene: $\sum_{i=1}^{n} 1+2+3+4+5+6+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{\left(2^P-1\right)\left(2^P-1+1\right)}{2}=2^{P-1}\left(2^P-1\right)$.
Por lo tanto, todo perfecto par *n* se puede expresar como una suma de números enteros consecutivos.

[5]De hecho, la representación binaria de un número perfecto par sigue el siguiente patrón:

Notación Decimal	Notación Binaria
6	$110=10(11)$
28	$11100=100(111)$
496	$111110000=10000(11111)$
8128	$1111111000\,000=(1111111)$

$$\begin{array}{ccccccc} 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & \cdots & 2^{n-1} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ (2^1-1) & (2^2-1) & (2^3-1) & (2^4-1) & (2^5-1) & \cdots & (2^n-1) \end{array}$$

Es decir:

$$\begin{array}{lcccl} 2^1(3) & = & 2^1(2^2-1) & = & 6 \\ 2^2(7) & = & 2^2(2^3-1) & = & 28 \\ 2^3(15) & = & 2^3(2^4-1) & = & 120 \\ 2^4(31) & = & 2^4(2^5-1) & = & 496 \\ 2^5(63) & = & 2^5(2^6-1) & = & 2016 \\ 2^6(127) & = & 2^6(2^7-1) & = & 8128 \quad \ldots \end{array}$$

De esta manera, se puede concluir que el factor 2^n-1 de los números perfectos 6, 28, 496 y 8128 es un primo (3, 7, 31 y 127 respectivamente).[6]

Elementos del razonamiento anterior se encuentran por primera vez en uno de los teoremas más importantes e impresionantes referente a los números perfectos, y fue de Euclides en el siglo III a.C., que a pesar de que sólo conocía dos perfectos, lo pudo enunciar y demostrar en su famosa obra de los *Elementos*.[7] En la definición 22 del Libro VII los enuncia por primera vez: *Se dice perfecto un número cuando es igual a [la suma de] sus partes alícuotas*, y posteriormente, coronó la exposición de los libros aritméticos de los *Elementos* con la proposición 36 del Libro IX, y es aquella que dice: *Si tantos números como se quiera a partir de una unidad se disponen en proporción duplicada hasta que su [suma] total resulte [un número] primo, y el total multiplicado por el último produce algún número, el producto será [un número] perfecto*.[8]

[6]Más adelante se retomarán estas ideas para demostrar que todo perfecto par es una suma de potencias de 2.

[7]Los *Elementos* de Euclides (300 a.C.) son un extenso tratado (trece secciones) de los fundamentos geométricos que los griegos desarrollaron, cuyos temas versan sobre: Geometría plana y del espacio, proporciones, propiedades de los números, magnitudes inconmensurables, etc. Aunque los *Elementos* son considerados como una recopilación de resultados, se sabe que Euclides hizo diversas aportaciones en lo que se refiere a la Teoría de los Números específicamente. Los *Elementos* han sido utilizados como un texto básico en el estudio de la geometría, incluso en la actualidad, una versión modificada de sus primeros libros constituyen la base de la enseñanza de la geometría plana en la educación secundaria.

[8]Haciendo un breve paréntesis en el desarrollo de la exposición, aquí se recomienda leer la demostración a la manera euclidiana de la proposición 36 que está en el Apéndice para recordar cómo los griegos trataban a los números desde una perspectiva de magnitudes.

En notación moderna se tendría una sucesión de segmentos de magnitud $1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots, 2^{n-1}$ que se encuentran en proporción duplicada (es decir, la longitud de cada segmento es el doble del que le precede) y cuya suma resulte ser un primo M. Ahora, si M se multiplica por el último término de la sucesión que es 2^{n-1}, entonces, se obtiene el producto $2^{n-1} \times M$, y aunque Euclides no lo menciona explícitamente, sí deja ver que *M* es $2^n - 1$. Así, en notación y lenguaje actual se tiene que si un número es de esta forma $2^{n-1}(2^n - 1)$ con $2^n - 1$ primo, entonces es perfecto par.

Cabe señalar que en los *Elementos* sólo se llega a mencionar como ejemplos de números perfectos a $2^{2-1}(2^2 - 1) = 6$ y a $2^{3-1}(2^3 - 1) = 28$. Es Nicómaco quien proporciona los dos siguientes: $2^{5-1}(2^5 - 1) = 496$ y $2^{7-1}(2^7 - 1) = 8128$.

Así, Euclides en la anterior proposición 36 muestra una ley de construcción de los números perfectos, es decir:

$1 + 2^1 = 3$	3 es primo,	entonces	$2^1 \times 3 = 6$	es Perfecto.
$1 + 2^1 + 2^2 = 7$	7 es primo,	entonces	$2^2 \times 7 = 28$	es Perfecto.
$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 15$	15 no es primo,	entonces	$2^3 \times 15 = 120$	no es Perfecto.
$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$	31 es primo,	entonces	$2^4 \times 31 = 496$	es Perfecto.

$$\vdots$$

Con este algoritmo queda establecida una condición suficiente, pero no necesaria, para hallar números perfectos pares. Hoy en día, esta proposición 36 forma parte de los conocidos teoremas de la Teoría de los Números cuya demostración sintetiza a la euclidiana y en lenguaje actual se expresa como: *Si un entero par es de la forma $2^{P-1}(2^P - 1)$ donde $2^P - 1$ es primo, entonces, es un número perfecto.*

El tema de los números perfectos que arrancó en los libros aritméticos de los *Elementos* de Euclides quedó apenas en el inicio. Fue hasta mediados del siglo XVIII cuando Euler demostró el inverso[9] de la proposición 36 euclidiana; mientras tanto, en este trascurso de más de veinte siglos, se tienen pocas referencias sobre el estudio de tales números.

[9]Proposición de Euler (inversa de la proposición 36 de Euclides): *Si un entero par es un número perfecto, entonces, es de la forma $2^{P-1}(2^P - 1)$ donde $2^P - 1$ es primo.*

El matemático griego Nicómaco de Gerasa (siglo I) en su obra *Introductio Arithmetica* incluye los primeros cuatro números perfectos pares: 6, 28, 496 y 8128. En su *Introductio*, Nicómaco clasifica a los números en tres categorías:

I) Los Números Abundantes (m) con la propiedad de que la suma de los divisores propios de un m son mayores que m.

II) Los Números Deficientes (m') con la propiedad de que la suma de los divisores propios de un m' son menores que m'.

III) Los Números Perfectos (n) con la propiedad de que la suma de los divisores propios de un n son iguales que n.

En su momento Nicómaco de Gerasa planteó que tanto los números abundantes como los deficientes eran muy numerosos, sin embargo, no pudo encontrar una forma de generarlos. Además, para los números perfectos, Nicómaco proporcionó las siguientes cinco propiedades:

1) *El n-ésimo número perfecto tiene n dígitos.*[10]
2) *Todo número perfecto es par.*
3) *Todo número perfecto termina en 6 u 8 de manera alternada.*
4) *Todo número perfecto es de la forma* $2^{k-1}\left(2^k-1\right)$ *para* $k>1$ *y* 2^k-1 *primo.*
5) *Hay una infinidad de números perfectos.*

Es importante señalar que a pesar de que Nicómaco no justificó ninguna de estas proposiciones, se consideraron como verdaderas durante años. Ahora se sabe que las proposiciones 1) y 3) son falsas ya que fueron refutadas cuando se encontraron más números perfectos pares. Regiomontano, en 1461, encontró el quinto número perfecto par que es: 33550336 y en 1603 se encontró el sexto: 8589869056, con lo que se hallaron los contraejemplos que muestran la contradicción de dichas proposiciones.

[10]Nicómaco conjeturó que hay un número perfecto entre 1 y 10, otro entre 10 y 100, otro entre 1000 y 10000, esto es, el n-ésimo número perfecto tiene exactamente n dígitos.

Dos siglos después, Jámblico reafirma que hay exactamente un número perfecto en el intervalo $10^k \leq n \leq 10^{k+1}$ para alguna *k* no negativa. En 1202, Fibonacci [2002] listó los tres primeros números perfectos pares en el *Liber Abaci*. En los inicios del siglo XIII, Jordanus de Nemore propuso en *Elementos de Aritmética*, que todo múltiplo de un número perfecto o abundante, es abundante y que todo divisor de un perfecto es deficiente.

En 1510, Charles de Bouvelles descubrió números abundantes de gran tamaño y demostró que todo número perfecto es triangular, además, propuso (como lo hizo cincuenta años más tarde Tartaglia) que la suma de los dígitos de todo perfecto par mayor que 6 deja resto 1 cuando es dividido por 9. Así, se podrían seguir mencionando propiedades que durante el siglo XVI propusieron varios interesados [entre los cuales se pueden citar a: Hudalrichus Regius (1536), Michael Stifel (1544), Francesco Maurolico (1575), Pierre Ramèe (1599) y Jan Brozek (1638)], sin embargo, la mayoría de éstas no fueron demostradas o eran semejantes a resultados ya expuestos anteriormente por otros.

En la primera mitad del siglo XVII, mentes respetables como la de René Descartes se adentraron en el tema, de hecho, se tienen datos donde se asegura que el 15 de noviembre de 1638 Descartes dirigió una carta al matemático francés Marin Mersenne en la cual le afirma que posee resultados de números perfectos de la forma euclidiana. Con la capacidad matemática de él, se podría haber pensado que una primera fase —la de los perfectos pares— del trabajo iniciado por Euclides habría llegado a su fin, lamentablemente nunca se dieron a conocer dichos resultados. Sin embargo, Mersenne, motivado por tal carta, se inició en la búsqueda de los números perfectos centrando su atención en el segundo factor de estos, es decir, en el grupo de números primos de la forma $2^P - 1$. Sus investigaciones lo llevaron a la conclusión de que si $2^P - 1$ es primo, entonces, *P* es primo (notar que si *P* es primo, $2^P - 1$ no es necesariamente primo),[11] de esta manera, actualmente se definen a los

[11]Fermat obtuvo tres resultados que fueron usados por Mersenne en su *Cogitata Physica Mathematica* para generar a los primos de la forma $2^P - 1$, que se hallan en el número perfecto $2^{P-1}(2^P - 1)$, tales resultados son los siguientes:

a) *Si P es compuesto, entonces,* $2^P - 1$ *es compuesto.*

b) *Si P es primo, entonces,* $a^P - a = Pt$ *para algún* $t \in N$.

c) *Si P es primo y m divide a* $2^P - 1$*, entonces,* $(m-1) = P \cdot q$ *para algún* $q \in N$

Con estos enunciados, Mersenne logró establecer la siguiente propiedad: *Si un número de la forma* $2^P - 1$ *es primo, entonces, P es primo.* (La demostración de esta propiedad puede verse en el Apéndice). Es importante observar que el recíproco de dicha propiedad es falso. Cabe señalar que Leibniz estaba en un error al creerlo verdadero, porque para $P = 11$ se tiene que el factor $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$, hallándose así, un número compuesto y no primo. De esta manera, la búsqueda de primos de Mersenne se redujo a buscar a los *P* primos.

primos de la forma $2^P - 1$ como primos de Mersenne, los cuales, presentan una relación especial con los perfectos pares.

Regresando a la proposición 36 de Euclides y a su inverso demostrado por Euler, que en conjunto forman el llamado Teorema de Euclides–Euler,[12] ya se pueden establecen por fin las condiciones suficientes y necesarias para que un entero par sea número perfecto, sabiendo que: *Todo número de la forma $2^{P-1}(2^P - 1)$ con $2^P - 1$ primo es número perfecto par*. Así, por ejemplo, el número $33550336 = 2^{12}(2^{13} - 1)$ con $2^{13} - 1$ primo es perfecto, a diferencia del entero par 1664 que a pesar de descomponerse como $1664 = 2^7 \times 13$ no es perfecto porque $13 \neq 2^8 - 1$.

Por otro lado, dado que existe una correspondencia biyectiva entre los números primos de Mersenne y los perfectos pares, la búsqueda de estos últimos queda reducida al hallazgo de primos de Mersenne, es decir, primos de la forma $2^P - 1$ donde *P* es primo (cabe recordar que los mayores números primos conocidos son de esta forma); no obstante, que este resultado facilita la búsqueda de los perfectos pares hasta ahora sólo se conocen cuarenta y cuatro.[13] Quizá una de las causas por las que se tengan pocos perfectos pares es la de su probabilidad de aparición, ya que se halla un primo de Mersenne por cada 60000 números primos aproximadamente; otra causa podría deberse al gran número de cifras que presentan, por ejemplo, el número perfecto par que ocupa el lugar treinta y nueve: $\left(2^{13466916}\left(2^{13466917} - 1\right)\right)$ cuenta con 8107892 dígitos, por lo que, necesitaría un libro de más de mil hojas para escribirse a cincuenta renglones por página con ochenta dígitos por renglón.[14]

También, Fermat estableció un test donde condiciona a estos *P* primos para obtener a $2^P - 1$ primo (en el Apéndice se encuentra un ejemplo de la aplicación de dicho Test de Fermat).

[12]La demostración del Teorema de Euclides-Euler: *Todo número par de la forma $2^{P-1}(2^P - 1)$ con $2^P - 1$ primo es número perfecto par*. Puede verse en el Apéndice.

[13]En el Apéndice se encuentra una tabla que muestra los cuarenta y cuatro números perfectos pares que se conocen actualmente. Cabe mencionar que en el año 2006 se halló el último perfecto par: $2^{32582656}\left(2^{32582657} - 1\right)$.

[14]Hoy en día, se han formado agrupaciones que se dedican de manera continua a la búsqueda de los números primos de Mersenne, las cuales, han logrando hallar a los más grandes. Las dos agrupaciones más sobresalientes son: El proyecto "GIMPS" (The Great Internet Mersenne Prime Search) creado por George Woltman en 1995 y el "PrimeNet" establecido en 1997 por Scott Kurowski.

3. CON EULER SE CIERRA EL CÍRCULO.

Hasta la época del siglo XVII, el resultado euclidiano no daba las bases para demostrar el recíproco, y como ya se mencionó, el regreso de la demostración esperó alrededor de dos mil años y ya sabemos que la persona indicada para retomar este rezago fue Euler. La demostración del recíproco de la proposición 36 de Euclides se encuentra en dos de sus trabajos. Uno es el libro inconcluso de Teoría de los Números titulado *Tractatus de Numerorum* (E657)[15] que se conoció hasta 1849, justo sesenta y seis años después de su muerte (se desconoce cuando lo escribió, de hecho, hubiese sido el primer libro sobre Teoría de los Números, pero en 1798 llegó el de Legendre). El otro trabajo donde se encuentra la demostración es: *De Numeris Amicabilis* (E152).

En el párrafo 106 del *Tractatus de Numerorum*, Euler define lo que es un número perfecto N como: $\int N = 2N$.[16] Posteriormente, supone que el perfecto N es par e indica que debe ser de la forma $N = 2^n \times A$ con A impar. Así, $N = 2^n \times A$ entonces $2N = 2 \cdot 2^n \times A = 2^{n+1} \times A$, lo cual implica que $2^{n+1} \times A = \int (2^n \times A)$ y por tanto $2^{n+1} \times A = \int 2^n \times \int A$.

Ahora como la suma de los divisores de $\int 2^n$ es $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, entonces, $2^{n+1} \times A = (2^{n+1} - 1) \times \int A \Rightarrow \dfrac{\int A}{A} = \dfrac{2^{n+1}}{(2^{n+1} - 1)}$. El hecho de que $\dfrac{2^{n+1}}{(2^{n+1} - 1)}$ es un número muy cercano a uno, le bastó a Euler para aplicar su Lema: *Si* $\dfrac{\int N}{N} = \dfrac{m}{n}$ *donde* $\dfrac{m}{n}$ *es un número pequeño y N es diferente de uno, entonces,* $m > n$ *y* $N = n$. Y así, pudo concluir que $A = (2^{n+1} - 1)$ y, en consecuencia, como $2^{n+1} \times A = (2^{n+1} - 1) \times \int A \Rightarrow \int A = 2^{n+1}$ y por la forma antes mencionada de A, se tiene que $\int A = A + 1$. De esta manera, se tiene que A es un primo.

---

[15]Esta clave se refiere al número de clasificación Eneström. Cabe aclarar, que dicha clasificación fue realizada en el siglo XX por el matemático sueco Gustav Eneström y está formada por los más de ochocientos trabajos realizados por Euler.

[16]En esta definición de número perfecto Euler denota a la función suma de los divisores de N como: $\int N$. Además, es importante señalar que la enorme diferencia entre el trabajo de Euclides y el de Euler es que el primero sólo considera a los divisores propios de N mientras que Euler asume que N también se divide a si mismo, por lo que, en su definición incluye a todos los divisores propios de N y al mismo N.

Finalmente, dado que $N=2^n\times A$ es perfecto par y, $A=\left(2^{n+1}-1\right)$ es primo, entonces $N=2^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$. Así, se obtiene por fin el recíproco de la proposición 36 de Euclides.

En el artículo de *De Numeris Amicabilis* (publicado en 1750 y escrito en 1747), Euler trabaja con la igualdad $\frac{\int A}{A}=\frac{2^{n+1}}{\left(2^{n+1}-1\right)}$ suponiendo que existe una c tal que $A=c\left(2^{n+1}-1\right)$ y $\int A=c\cdot 2^{n+1}$, y logra deducir que $c\geq 1$. Después, llegarían otros para demostrar que $c=1$. En ambas demostraciones se nota la falta de una plena justificación (desde nuestra perspectiva actual y no en la época de Euler), desde $\frac{\int A}{A}=\frac{2^{n+1}}{\left(2^{n+1}-1\right)}$ hasta la conclusión de que $\int A=A+1$. En una demostración actual (usando la misma notación de Euler) resulta que al retomar la igualdad $\frac{\int A}{A}=\frac{2^{n+1}}{\left(2^{n+1}-1\right)}$ se tiene que $2^{n+1}\times A=\left(2^{n+1}-1\right)\times\int A$ y al definir $\int A=A+t$ donde $t=\sum_{\substack{d|A\\ d<A}} d$, se obtiene: $2^{n+1}\times A=\left(2^{n+1}-1\right)\times(A+t)$. Simplificando se llega a que $A=t\left(2^{n+1}-1\right)$ por lo que $t|A$, pero, recuérdese que t es la suma de los divisores menores que A y como t divide a A, entonces, t tendría que pertenecer al conjunto de los mismos sumandos de t lo cual sucede sólo cuando $t=1$ y, por consiguiente, $\int A=A+1$, con lo que se concluye que A es un primo y además es tal que $A=\left(2^{n+1}-1\right)$, por lo tanto, $N=2^n\times A=2^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$ con $\left(2^{n+1}-1\right)$ primo. Entonces, con estos ajustes queda la demostración, pero es importante recordar que un paso fundamental es que Euler consideró que un entero es dividido por sí mismo.

Para finalizar esta exposición de la demostración de cómo son los perfectos pares, es importante mencionar que el *Tractatus de Numerorum* no fue el primer trabajo donde Euler abordó el tema de los perfectos; ya que cuando él publicó su primer trabajo sobre Teoría de los Números (E26) en 1732 le dedicó una parte considerable a encontrar criterios que descartaran a los primos P que no cumplieran con que el número $\left(2^P-1\right)$ no fuera primo, un ejemplo de ello es el teorema que dice: *Si se tienen los primos* $4m-1$ *y* $8m-1$ *entonces* $(8m-1)|\left(2^{4m-1}-1\right)$. Así, este teorema proporciona números con la forma de Mersenne que no son primos a pesar de que el exponente $(4m-1)$ sí lo es.

4. LA INFINITUD DE LOS PERFECTOS PARES.

Del hallazgo del primer número perfecto par al último que se conoce han transcurrido más de dos mil quinientos años y como en este largo periodo de tiempo sólo es posible ubicar un poco más de cuarenta se podría pensar que éstos forman un conjunto finito, y este es uno de los grandes pendientes acerca de los perfectos pares, saber si son infinitos, o lo que es equivalente: Saber si los primos de Mersenne son infinitos.

En el año 2002, Alberto Durán Meza [2002] (Universidad José María Vargas de Caracas, Venezuela) publicó en el *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* —revista de la Universidad de Leicester, Inglaterra— un artículo donde expone su demostración de que la cardinalidad del conjunto de los primos de Mersenne es infinita y de esta manera deja como corolario la infinitud de los perfectos pares.

El artículo nunca recibió la atención que se esperaba para un resultado tan codiciado por cualquier matemático, y la razón es que el trabajo contiene errores matemáticos que lo hacen muy cuestionable. Se ha decidido incluir algunas puntos de este artículo porque es importante hacer notar que en las revistas de investigación de alto impacto suceden cosas que no se pueden justificar, y es cuando surgen las interrogantes: ¿Qué pasó con los editores?, ¿qué pasó con los árbitros?.

La Proposición dice: *Sea* M_P *el conjunto de los números primos de Mersenne, entonces,* M_P *es infinito*. Algunos aspectos de la demostración son:

Hipótesis: Supóngase que M_P es un conjunto finito.

Como $M_P \subseteq N$, y por el Lema: *Los números naturales son un conjunto ordenado*, entonces se puede escribir a los números primos de Mersenne como la serie finita creciente: $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots < m_q$ donde se tiene un elemento mínimo y uno máximo, a saber, $m_1 = 2^{P_1} - 1$ y $m_q = 2^{P_q} - 1$, respectivamente.

Ahora, constrúyase para cada $m_1, m_2, m_3 \cdots m_q$ un intervalo de Bertrand, esto es, usando el Teorema de Chebishev-Bertrand que dice: *Si* $\lambda \in N$, *entonces, entre* λ *y* 2λ *existe al menos un número primo*, se construyen los intervalos $B_1, B_2, B_3 \cdots B_q$ donde cada uno contiene al menos un número primo:

$$B_1 = \left[2^{P_1} - 1,\ 2\left(2^{P_1} - 1\right)\right],$$
$$B_2 = \left[2^{P_2} - 1,\ 2\left(2^{P_2} - 1\right)\right],$$
$$B_3 = \left[2^{P_3} - 1,\ 2\left(2^{P_3} - 1\right)\right],$$
$$\vdots$$
$$B_q = \left[2^{P_q} - 1,\ 2\left(2^{P_q} - 1\right)\right].$$

Así, sea $m_k = 2^{P_k} - 1$ el primo de Mersenne anterior al máximo cuyo intervalo de Bertrand asociado es $B_k = \left[2^{P_k} - 1,\ 2\left(2^{Pk} - 1\right)\right]$ y dado que $m_q = 2^{P_q} - 1$ es más grande que $m_k = 2^{P_k} - 1$ se tendrían dos casos:

CASO 1: $m_q \in B_k$.

Como $\left(2^{P_q}\right) \in \left[2^{P_k} - 1,\ 2\left(2^{Pk} - 1\right)\right]$ entonces $2^{P_k} - 1 < 2^{P_q} - 1 < 2\left(2^{P_k} - 1\right)$ $\ldots$ (1). Luego, por inducción matemática se demuestra la desigualdad $2^n < 2^{n+1} - 1 < 2^{n+1}$ $\forall n \in N$, de la cual, se obtiene como caso particular que $2^{P_k} < 2^{P_k + 1} - 1 < 2^{P_k + 1}$ $\forall p \in N$ $\ldots$ (2). Ahora, restando a (2) la desigualdad (1) resulta que: $1 < 2^{P_k + 1} - 2^{P_q} < 2$. Por lo tanto, se deduce que $2^{P_k + 1} - 2^{P_q} \notin Z$. Y así llega a una contradicción, con la cual, no es posible pensar que los primos de Mersenne son un conjunto finito.

Pero, el gran error está en que al restar las desigualdades (1) y (2) no hace los cambios adecuados con los signos, ya que considera las propiedades de la suma de desigualdades similares a las de la resta y esto no es posible.

Para el CASO 2: $m_q \notin B_k$, pasa algo semejante con el manejo de las desigualdades, y nuevamente se infiere con esto que los primos de Mersenne tienen que ser infinitos.

Finalmente, enuncia el corolario: *Existen infinitos números perfectos pares.*

En conclusión, la demostración no se sostiene y se sigue sin saber si los números perfectos pares son infinitos.

5. PROPIEDADES DE LOS PERFECTOS PARES.

En adelante y hasta el término de este primer capítulo se expondrán algunas de las propiedades que se conocen sobre los números perfectos pares.[17] Es importante señalar que algunas de las siguientes propiedades ya se mencionaron como parte de las aportaciones de Jordanus de Nemore, Charles de Bouvelles y Nicolo Tartaglia, entre otros.

5.1. LOS PERFECTOS PARES Y LOS NÚMEROS FIGURADOS.

Los números triangulares *T* son aquellos que tienen la siguiente representación:

$1 \qquad 1+2=3 \qquad 1+2+3=6 \qquad 1+2+3+4=10 \qquad 1+2+3+4+5=15$

Así, $T_1=1$, $T_2=3$, $T_3=6$, $T_4=10$, $T_5=15$, $T_6=21$, $T_7=28$, $T_8=36$ $\ldots$ De esta manera, cada número triangular será la suma de enteros consecutivos a partir de uno, por lo que, el enésimo número triangular es la suma de los n primeros enteros positivos. Es decir, $T_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ $\forall n\in N$. (Nótese que T_3 y T_7 además de triangulares son perfectos pares).

<u>Proposición 1</u>: *Todo número perfecto par es un número triangular.*

Demostración.

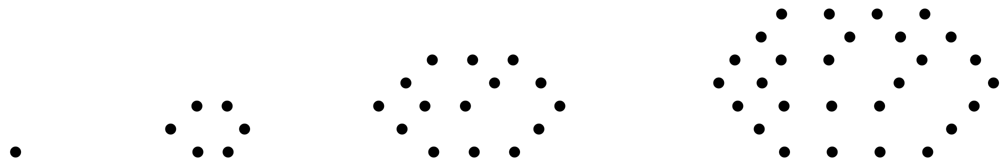
Sea $n=2^p-1$ donde n y p son números primos. Sustituyendo n en $T_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ se obtiene:

$T_{2^p-1}=\dfrac{2^p-1(2^p-1+1)}{2}=\dfrac{2^p(2^p-1)}{2}=2^{p-1}(2^p-1)$ $\forall p\in N$. Así, el número triangular de orden (2^p-1) tiene la forma $T_{2^p-1}=2^{p-1}(2^p-1)$ con p primo. Por el Teorema de Euclides-Euler, n es un perfecto par.

Por lo tanto, todo número perfecto par es un número triangular ■

[17] Cabe mencionar que de las veintitrés propiedades que se muestran; la 7, 11, 13, 20 y 23 se aplican a los números perfectos en general, es decir, tanto a pares como impares.

Los números hexagonales H son aquellos que tienen la siguiente representación:



1 $\quad$ $1+5=6$ $\quad$ $1+5+9=15$ $\quad$ $1+5+9+13=28$

Así, $H_1=1,\ H_2=6,\ H_3=15,\ H_4=28,\ H_5=45,\ H_6=66,\ H_7=91\ \ldots$ Este patrón de aparición atiende a un tipo de comportamiento recursivo de los elementos de la progresión aritmética $1+4k$. Es decir, $H_n=1\ +\ \left(1+(1+4)\right)\ +\ \left(1+(1+4)+(1+8)\right)\ +\ \left(1+(1+4)+(1+8)+(1+12)\right)\ \ldots$ De esta manera, se tendrá que el enésimo número hexagonal H_n será de la forma: $1+\left(1+(1+4\cdot 1)\right)+\left(1+(1+4\cdot 1)+(1+4\cdot 2)\right)+\left(1+(1+4\cdot 1)+(1+4\cdot 2)+(1+4\cdot 3)\right)+\ldots=n+\dfrac{4((n-1)n)}{2}$. Por lo que, $H_n=n(2n-1)$. (Nótese que los hexagonales H_2 y H_4 también son perfectos pares).

Proposición 2: *Todo número perfecto par es un número hexagonal.*

Demostración.

Sea $n=2^{p-1}$ donde p es un número primo.

Sustituyendo n en $H_n=n(2n-1)$ se obtiene:

$$H_{2^{p-1}}=2^{p-1}\left(2\left(2^{p-1}\right)-1\right)=2^{p-1}\left(2^p-1\right) \quad \forall\, p\in N.$$

Entonces, por el Teorema de Euclides-Euler, siempre que el factor $\left(2^p-1\right)$ sea primo se tendrá un número perfecto par.

Por lo tanto, todo número perfecto par es un número hexagonal ■

5.2. REPRESENTACIÓN ADITIVA DE UN NÚMERO PERFECTO PAR.

Lema 1: *Si $p \in Z^+$ y $q \in Z^+$ tal que $(p,q)=1$, entonces, todo entero positivo $c > pq-p-q$ puede escribirse como una combinación lineal: $c = px+qy$ con $x \in Z^+$ e $y \in Z^+$. Y además, $pq-p-q$ no es una combinación lineal de este tipo.*

Demostración.

i) Por demostrar que todo *c* es de la forma $c = px+qy$. Sea (x_0, y_0) una solución de la ecuación $c = px+qy$, donde *c, x, y, p, q* son enteros positivos tales que $c > pq-p-q$ y $(p,q)=1$. Sean las soluciones *x*, *y* de la combinación lineal $c = px+qy$ de la forma: $x = x_0+qt$ y $y = y_0-pt$ con $t \in Z$. Por demostrar que existe *t* tal que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Dado que $y \in Z^+$, $0 \leq y_0-pt < p \Leftrightarrow 0 \leq y_0-pt \leq p-1 \ldots(1)$.

Por hipótesis $c = p(x_0+qt)+q(y_0-pt) \Leftrightarrow p(x_0+qt) = c-q(y_0-pt)$ y por (1) se tiene que $-q(y_0-pt) \geq -q(p-1)$. Y como $c > pq-p-q$ entonces $p(x_0+qt) > pq-p-q-q(p-1) = -p$, lo cual implica que, $(x_0+qt) > -1$.

Por lo tanto, $x = (x_0+qt) \geq 0$ ■

ii) Por demostrar que $pq-p-q$ no es combinación lineal de $px+qy$ para $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Supóngase que $px+qy = pq-p-q$ con $x \geq 0$ e $y \geq 0$, entonces, $pq = p(x+1)+q(y+1)$ y como $(p,q)=1$ se tiene que $p|(y+1)$ y $q|(x+1)$, por lo que, $y+1 \geq p$ y $x+1 \geq q$. Así, resulta que $pq = p(x+1)+q(y+1) \geq 2pq$, lo cual, es una contradicción.

Por lo tanto, $px+qy \neq pq-p-q$ con $x \in Z^+$ e $y \in Z^+$ ■

Proposición 3: *Todo número perfecto par mayor que 28 puede expresarse como una combinación lineal de por lo menos dos números perfectos pares.*

Demostración.

Sea *n* un número perfecto par mayor que 28, por demostrar que $n = 6(r)+28(s)$ con $r, s \in Z^+$. Considérese a los naturales y primos relativos entre sí 3 y 14. Como $(3)(14)-(3)-(14) = 25$, entonces, por el Lema 1 todo entero positivo mayor que 25 se puede escribirse como una combinación lineal de la forma: $3r+14s$ con $r, s \in Z^+$.

Así, sin perdida de generalidad, $26=3r+14s \Leftrightarrow 2(26)=2(3r+14s)=6r+28s$ con $r,s\in Z^{+}$. Por lo tanto, todo número mayor que 52 (en particular todo perfecto par mayor que 28) puede expresarse como combinación lineal de $6(r)+28(s)$ donde 6 y 28 son números perfectos pares ■

Dicha combinación lineal no es única. Por ejemplo, para el número perfecto par 496 se tienen las siguientes combinaciones lineales de la forma $n=6(r)+28(s)$ con $r,s\in Z^{+}$:
$496=6(78)+28(1)=6(64)+28(4)=6(50)+28(7)=6(36)+28(10)=6(22)+28(13)=6(8)+28(16)$.
De manera general, si $496=6(78)+28(1)$ entonces $496=6(78+28t)+28(1-6t)$ para toda t entera, así, es posible generar una infinidad de combinaciones lineales de 496 con 6 y 28.

<u>Proposición 4</u>: *Todo número perfecto par n puede expresarse como una suma de potencias de dos.*

Demostración.

Sea n número perfecto par, por el Teorema de Euclides-Euler, $n=2^{p-1}(2^{p}-1)$ con $(2^{p}-1)$ número primo.

Como los factores 2^{p-1} y $(2^{p}-1)$ son tales que $(2^{p-1}\ ,\ 2^{p}-1)=1$ entonces:

$\sigma(n) \;=\; \sigma(2^{p-1})\sigma(2^{p}-1) \;=\; (1+2+2^{2}+2^{3}+2^{4}+2^{5}+\cdots+2^{p-1})(1+(2^{p}-1))$.

Es decir,

$$\sigma(n) \;=\; (1+2+2^{2}+\cdots+2^{p-1})+(1(2^{p}-1)+2(2^{p}-1)+2^{2}(2^{p}-1)+\cdots+2^{p-1}(2^{p}-1))$$

$$\Rightarrow\ \sigma(n) \;=\; (1+2+2^{2}+\cdots+2^{p-1})+(2^{p}-1+2^{p+1}-2+2^{p+2}-2^{2}+\cdots+2^{2p-1}-2^{p-1})$$

$$\Rightarrow\ \sigma(n) \;=\; 2^{p}+2^{p+1}+2^{p+2}+\cdots+2^{2p-1}.$$

Ahora, dado que n es perfecto par, entonces, $\sigma(n)=2n$. Sustituyendo n y $\sigma(n)$ se tiene que:

$$2^{p}+2^{p+1}+2^{p+2}+\cdots+2^{2p-1} \;=\; 2\left(2^{p-1}(2^{p}-1)\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{2^{p}+2^{p+1}+2^{p+2}+\cdots+2^{2p-1}}{2} = 2^{p-1}(2^{p}-1)$$

$$\Rightarrow\ 2^{p-1}(2^{p}-1)=2^{p-1}+2^{p}+2^{p+1}+\cdots+2^{2(p-1)}.$$

Por lo tanto, el perfecto par n puede expresarse como una suma de potencias de dos ■

Proposición 5: *Todo número perfecto par n (excepto el seis) puede expresarse como suma de cubos enteros impares consecutivos donde el primer cubo es el uno.*

Demostración.

Sea $n>6$ un perfecto par, por el Teorema de Euclides-Euler, $n=2^{p-1}\left(2^{p}-1\right)$ con $p>2$ primo. Por inducción matemática se demuestra que $1^{3}+3^{3}+5^{3}+\cdots+(2m-1)^{3}=m^{2}\left(2m^{2}-1\right)\ \forall m\in N$. Ahora, sea $m=2^{k}$ con $k\in N$. Sustituyendo *m* en la suma de enteros impares consecutivos se tiene: $1^{3}+3^{3}+5^{3}+\cdots+\left(2\left(2^{k}\right)-1\right)^{3}=\left(2^{k}\right)^{2}\left(2\left(2^{k}\right)^{2}-1\right)\Rightarrow 1^{3}+3^{3}+5^{3}+\cdots+\left(2^{k+1}-1\right)^{3}=2^{2k}\left(2^{2k+1}-1\right)$.

Pero, si se toma a *k* de la forma $k=\dfrac{t-1}{2}$ con *t* primo impar, entonces:

$$1^{3}+3^{3}+5^{3}+\cdots+\left(2^{\frac{t-1}{2}+1}-1\right)^{3}=2^{2\left(\frac{t-1}{2}\right)}\left(2^{2\left(\frac{t-1}{2}\right)+1}-1\right)\Rightarrow 1^{3}+3^{3}+5^{3}+\cdots+\left(2^{\frac{t+1}{2}}-1\right)^{3}=2^{t-1}\left(2^{t}-1\right).$$

Como *t* es primo impar, bastará con que el factor $\left(2^{t}-1\right)$ sea primo para así tener un número perfecto par. Por lo tanto, el perfecto par $n>6$ es de la forma: $n=1^{3}+3^{3}+5^{3}+7^{3}+9^{3}+\ldots$ ■

Lema 2: $(n+1)\equiv -1\ (mod\ 3)$ *donde* $n=2^{p-1}\left(2^{p}-1\right)$ *y p primo.*

Demostración.[18]

Sea $m=\dfrac{p-3}{2}$ con p primo y sustitúyase en $4\equiv 1\ (mod\ 3)\Leftrightarrow 4^{m}\equiv 1^{m}\ (mod\ 3)$, entonces,

$$4^{\frac{p-3}{2}}\equiv 1\ (mod\ 3)\Leftrightarrow 4^{\frac{p-1}{2}}\equiv 4\ (mod\ 12)\quad \ldots(1)\quad \text{y}\quad \left(2\times 4^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\equiv(2\times 4-1)\ (mod\ 12)\quad \ldots(2).$$

Multiplicando (1) y (2), y por $4(2\times 4-1)\equiv 4\ (mod\ 12)$ se tiene: $4^{\frac{p-1}{2}}\left(2\times 4^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\equiv 4\ (mod\ 12)$.

Y como $n=2^{p-1}\left(2^{p}-1\right)$ con *p* primo, entonces, $n=4^{\frac{p-1}{2}}\left(2\times 4^{\frac{p-1}{2}}-1\right)$. Es decir, $n\equiv 4\ (mod\ 12)$ lo cual implica que $n+1\equiv 4+1\ (mod\ 3)$. Ahora, tomando al sistema completo de residuos modulo 3: $\{-1,0,1\}$, por lo tanto, $n+1\equiv -1\ (mod\ 3)$ para algún *p* primo ■

[18]Durante el desarrollo de esta demostración se hace uso de propiedades elementales de congruencias.

<u>Proposición 6</u>: *Dos números consecutivos no pueden ser simultáneamente perfectos pares.*

Demostración.

Sea n un número perfecto par, por el Teorema de Euclides-Euler, $n=2^{p-1}\left(2^{p}-1\right)$ con p primo. Considérese al número anterior $(n-1)$ y posterior $(n+1)$ a n, por demostrar que $(n-1)$ y $(n+1)$ no pueden ser números perfectos cuando p es un primo.

CASO 1: Sea p primo par.

Dado que $6=2^{2-1}\left(2^{2}-1\right)$ es el único número perfecto par que tiene al primo $p=2$, entonces, claramente se nota que los números anterior (5) y posterior (7) a 6 no son perfectos.

Por lo tanto, dos números consecutivos no son simultáneamente perfectos con $p=2$ ■

CASO 2: Sea p primo impar.

i) Por demostrar que $(n+1)$ no es un número perfecto.

Supóngase que $(n+1)$ es número perfecto.

Sea $\sigma(n+1)=\sum_{d_i/n+1}\left(d_i+{(n+1)}/{d_i}\right)$ donde los divisores de $(n+1)$ son tales que $(n+1)=d_i\left(\frac{n+1}{d_i}\right)$.

Nótese que si $d_i\leq\sqrt{(n+1)}$, entonces, $\left(\frac{n+1}{d_i}\right)\geq\sqrt{(n+1)}$ o viceversa ya que ambos divisores no pueden ser simultáneamente mayores o menores a $\sqrt{(n+1)}$. Por otro lado, se sabe que cada uno de los divisores de $(n+1)$ son congruentes modulo 3 con uno y sólo uno de los elementos de un sistema completo de residuos modulo 3, y para este caso, tómese al conjunto: $\{-1,0,1\}$. Pero, resulta que estos divisores no son congruentes a 0 modulo 3 ya que si $d_i\equiv 0\pmod 3$ y $\left(\frac{n+1}{d_i}\right)\equiv 0\pmod 3$ entonces $d_i=3k$ y $\left(\frac{n+1}{d_i}\right)=3k$, y por el Lema 2, se tendría que $3|-1$ con lo que se llega a una contradicción. Así, se asumirá que cada pareja de divisores d_i y $\left(\frac{n+1}{d_i}\right)$ será congruente a 1 o -1 modulo 3, donde ambos divisores no son congruentes al mismo número, porque de serlo, se tendría que $(n+1)\equiv 1\pmod 3$ lo cual no es posible por el Lema 2.

Ahora, y sin perdida de generalidad, supóngase que:

$$d_1 \equiv 1 \pmod 3 \qquad \frac{n+1}{d_1} \equiv -1 \pmod 3$$

$$d_2 \equiv 1 \pmod 3 \qquad \frac{n+1}{d_2} \equiv -1 \pmod 3$$

$$d_3 \equiv 1 \pmod 3 \qquad \frac{n+1}{d_3} \equiv -1 \pmod 3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Sumando estas congruencias se tiene que $\sigma(n+1) \equiv 0 \pmod 3$ y como por hipótesis $(n+1)$ es un número perfecto, entonces, $2(n+1) \equiv 0 \pmod 3$ pero por el Lema 2 se obtiene que $2(n+1) \equiv -2 \pmod 3$ y dado que $-2 \equiv 1 \pmod 3$ se concluye que $1 \equiv 0 \pmod 3$, llegándose así a una contradicción.

Por lo tanto, $(n+1)$ no es un número perfecto ■

ii) Por demostrar que $(n-1)$ no es un número perfecto.

Supóngase que $(n-1)$ es número perfecto.

En el desarrollo de la demostración del Lema 2 se halló el resultado: $n \equiv 4 \pmod{12}$. De lo cual, se deduce que $n \equiv 4 \pmod 4$ y como $3 \equiv -1 \pmod 4$, entonces, $n-1 \equiv -1 \pmod 4$ ...(1)

Sea $\sigma(n-1) = \sum_{d_i/n-1} \left(d_i + {(n-1)}/{d_i} \right)$ donde los divisores de $(n-1)$ son tales que $(n-1) = d_i \left(\frac{n-1}{d_i} \right)$.

Nótese que si $d_i \leq \sqrt{(n-1)}$, entonces, $\left(\frac{n-1}{d_i} \right) \geq \sqrt{(n-1)}$ o viceversa ya que ambos divisores no pueden ser simultáneamente mayores o menores a $\sqrt{(n-1)}$. Por otro lado, se sabe que cada uno de los divisores de $(n-1)$ son congruentes modulo 4 con uno y sólo uno de los elementos de un sistema completo de residuos modulo 4, y para este caso, tómese al conjunto: $\{-1, 0, 1, 2\}$. Pero, resulta que estos divisores no son congruentes a 0 y 2 modulo 4 ya que si $d_i \equiv 0 \pmod 4$ y $\left(\frac{n-1}{d_i} \right) \equiv 0 \pmod 4$, entonces, $d_i = 4k$ y $\left(\frac{n-1}{d_i} \right) = 4k$, y por (1), se tendría que $4 | -1$, con lo que se llega a una contradicción.

De manera similar, se deduce que los divisores de $(n-1)$ no son congruentes a 2 modulo 4 porque si $d_i \equiv 2 \ (mod\ 4)$ y $\left(\frac{n-1}{d_i}\right) \equiv 2 \ (mod\ 4)$, entonces, $d_i = 2k$ y $\left(\frac{n-1}{d_i}\right) = 2k$, y por (1), se tendría que $2|-1$ con lo que se llega nuevamente a una contradicción. Así, se asumirá que cada pareja de divisores d_i y $\left(\frac{n-1}{d_i}\right)$ será congruente a 1 o -1 modulo 4, pero, como en el caso anterior ambos divisores no son congruentes al mismo número, porque de serlo, se tendría que $(n-1) \equiv 1 \ (mod\ 4)$ lo cual no es posible por (1).

Ahora, y sin perdida de generalidad, supóngase que:

$$
\begin{array}{ll}
d_1 \equiv 1 \ (mod\ 4) & \dfrac{n-1}{d_1} \equiv -1 \ (mod\ 4) \\
d_2 \equiv 1 \ (mod\ 4) & \dfrac{n-1}{d_2} \equiv -1 \ (mod\ 4) \\
d_3 \equiv 1 \ (mod\ 4) & \dfrac{n-1}{d_3} \equiv -1 \ (mod\ 4) \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

Sumando estas congruencias se tiene que $\sigma(n-1) \equiv 0 \ (mod\ 4)$ y como por hipótesis $(n-1)$ es un número perfecto, entonces, $2(n-1) \equiv 0 \ (mod\ 4)$, pero por (1) se obtiene que $2(n-1) \equiv -2 \ (mod\ 4)$ y dado que $-2 \equiv 2 \ (mod\ 4)$, se concluye que $2 \equiv 0 \ (mod\ 4)$, llegándose así a una contradicción.

Por lo tanto, $(n-1)$ no es un número perfecto ■

5.3. REPRESENTACIÓN EN FACTORES DEL NÚMERO PERFECTO PAR.

<u>Proposición 7</u>: *Si n es un número perfecto mayor que 6, entonces, n no puede ser o producto de dos primos o potencia de un primo.*

Demostración.

a) Por demostrar que $n>6$, número perfecto, no puede representarse como el producto de dos números primos.

Sea n un número perfecto mayor que 6 y supóngase que $n=pq$ donde p y q son primos relativos. Así, se tiene que: $\sigma(pq)=2pq$ y $\sigma(pq)=\sigma(p)\sigma(q)=(p+1)(q+1)$, lo cual implica que $2pq=(p+1)(q+1)$ y por tanto $pq=p+q+1$. Como p y q son primos, el producto pq no admite otra factorización, entonces y sin perdida de generalidad, se puede deducir que $2p=(q+1)$ y $q=(p+1)$. Y dado que esto ocurre sólo para los primos $p=2$ y $q=3$ se contradice la hipótesis de que $n>6$.

Por lo tanto, el número perfecto n no puede ser el producto de dos primos ■

b) Por demostrar que $n>6$, número perfecto, no puede representarse como potencia de un número primo.

Sea n un número perfecto mayor que 6 y supóngase que $n=P^{\alpha}$, donde P es un primo. Así, se tiene que: $\sigma(P^{\alpha})=2P^{\alpha}$. Y por otro lado, como se sabe que para P primo, $\sigma(P^{\alpha})=\dfrac{P^{\alpha+1}-1}{P-1}$. Entonces, $2P^{\alpha}=\dfrac{P^{\alpha+1}-1}{P-1}$

$$\Rightarrow\ 2P^{\alpha+1}-2P^{\alpha}=P^{\alpha+1}-1$$

$$\Rightarrow\ P^{\alpha+1}-2P^{\alpha}=-1$$

$$\Rightarrow\ P^{\alpha}P-2P^{\alpha}=-1$$

$$\Rightarrow\ P^{\alpha}(2-P)=1.$$

Dado que esta última igualdad sólo tiene solución cuando $P=1$ se obtiene una contradicción porque por hipótesis P es un número primo.

Por lo tanto, el número perfecto n no puede ser la potencia de un primo ■

Definición: Si un número natural m es mayor que la suma de sus divisores propios entonces se dice que m es un número deficiente, es decir, $\sigma(m)-m<m$.

Proposición 8: *Todo número perfecto par n se puede expresar como el producto (no necesariamente único) de dos números deficientes.*

Demostración.

Sea n un número perfecto par, por el Teorema de Euclides-Euler, $n=2^{P-1}(2^P-1)$ con (2^P-1) número primo.

Dado que (2^P-1) es primo, se sabe que sus únicos divisores son él mismo y la unidad. Así, se tiene que $\sigma(2^P-1)-(2^P-1)=1$, y por definición, se concluye que (2^P-1) es un número deficiente.

Por otro lado, como los divisores propios del factor 2^{P-1} son las potencias: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, \cdots 2^{P-2}$ y como por inducción matemática se demuestra que $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1}-1 \ \ \forall n \in N$.

Entonces, $\sigma(2^{P-1})-(2^{P-1})=(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{P-2}+2^{P-1})-(2^{P-1})$.

Es decir, $\sigma(2^{P-1})-(2^{P-1})=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{P-2}=\sum_{i=0}^{P-2} 2^i = 2^{P-1}-1<2^{P-1}$.

Por tanto, por definición, 2^{P-1} es un número deficiente.

Por lo tanto, el perfecto par $n=2^{P-1}(2^P-1)$ es el producto de dos números deficientes ∎

Por el desarrollo de esta demostración, se concluye también, que todo primo es número deficiente y que cualquier potencia entera de dos es un número deficiente.

Definición: Si un número natural m es menor que la suma de sus divisores propios entonces se dice que m es un número abundante, es decir, $\sigma(m)-m>m$.

Proposición 9: *Ningún número perfecto par n se puede expresar como el producto de dos números abundantes.*

Demostración.

Sea n número perfecto par, por el Teorema de Euclides-Euler, $n=2^{P-1}\left(2^P-1\right)$ con $\left(2^P-1\right)$ número primo.

Por la demostración de la Proposición 8 se sabe que el primo $\left(2^P-1\right)$ y la potencia 2^{P-1} son números deficientes y por el Teorema Fundamental de la Aritmética se deduce que la representación de $n=2^{P-1}\left(2^P-1\right)$ es única, así, bastará con demostrar que no existe ningún número abundante de la forma $2^q\left(2^P-1\right)$ tal que $1\leq q\leq P-2$.

Supóngase que $2^q\left(2^P-1\right)$ con $1\leq q\leq P-2$ y $\left(2^P-1\right)$ primo fijo, es un número abundante. Los divisores propios de $2^q\left(2^P-1\right)$ son: $2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ \ldots\ 2^q,\ 2^0\left(2^P-1\right),\ 2^1\left(2^P-1\right),\ \ldots\ 2^{q-1}\left(2^P-1\right)$ y como por inducción matemática se demuestra que $\sum_{i=0}^{n}2^i=2^{n+1}-1\ \ \forall n\in N$, entonces, $\sigma\left(2^q\left(2^P-1\right)\right)-2^q\left(2^P-1\right)=\left(2^{P-1}-1\right)+\left(2^{P-2}-1\right)\left(2^P-1\right)$.

Por otro lado, dado que por hipótesis $2^q\left(2^P-1\right)$ es número abundante, por definición, se tiene que $\left(2^{P-1}-1\right)+\left(2^{P-2}-1\right)\left(2^P-1\right)>2^q\left(2^P-1\right)\ \Rightarrow\ 1<\dfrac{2^{P-1}-1}{2^P-1}$ llegándose de esta manera a una contradicción. Y como también dicho número no es un perfecto, porque de serlo, se tendría que: $\sigma\left(2^q\left(2^P-1\right)\right)=\left(2^{P-1}-1\right)+\left(2^{P-2}-1\right)\left(2^P-1\right)+2^q\left(2^P-1\right)=2\left(2^q\left(2^P-1\right)\right)\ \Leftrightarrow\ 1=\dfrac{2^{P-1}-1}{2^P-1}$, lo cual, no es posible. Por la Propiedad de la Tricotomía, el número $2^q\left(2^p-1\right)$ con $1\leq q\leq P-2$ y $\left(2^P-1\right)$ primo fijo, será deficiente.

Por lo tanto, el perfecto par $n=2^{P-1}\left(2^P-1\right)$ no puede expresarse como el producto de dos números abundantes ■

Proposición 10: *Ningún número perfecto par n puede expresar como el producto de un número abundante y un número deficiente.*

Demostración.

Sea n número perfecto par de la forma $n=2^{P-1}\left(2^P-1\right)$ con $\left(2^P-1\right)$ primo. Por la demostración de la Proposición 8 se sabe que el primo $\left(2^P-1\right)$ y la potencia 2^{P-1} son números deficientes. Y por la demostración de la Proposición 9 se sabe que no existe ningún número abundante de la forma $2^q\left(2^P-1\right)$ con $1\leq q\leq P-2$ y $\left(2^P-1\right)$ primo fijo. Y por el Teorema Fundamental de la Aritmética se sabe que la representación de $n=2^{P-1}\left(2^P-1\right)$ es única. Por lo tanto, el número perfecto par n no se puede expresar como el producto de un número abundante y un número deficiente ■

La siguiente proposición fue realizada por Charles de Neuvéglise en 1700. En ésta se afirma que a excepción del seis, todos los números perfectos presentan en su descomposición única en factores primos al menos uno elevado a la potencia dos. Por ejemplo $28=2^2\times 7$.

Proposición 11: *El único número perfecto libre de cuadrados es el seis.*

Demostración.

Sea n un número perfecto. Supóngase que $n=P_1P_2P_3\ \ldots\ P_r$ donde todos los P_i son primos diferentes entre sí, y además, son tales que $P_1<P_2<P_3<\cdots<P_r$.

Como n es perfecto, por definición, $\sigma(n)=2P_1P_2P_3\ \ldots\ P_r$ y dado que $\left(P_1,P_2,P_3,\ \ldots\ ,P_r\right)=1$ entonces $\sigma(n)=\sigma\left(P_1P_2P_3\ \ldots\ P_r\right)=\sigma(P_1)\sigma(P_2)\sigma(P_3)\cdots\sigma(P_r)$, y por ser los P_i primos, se tiene que $\sigma(n)=\sigma(P_1)\sigma(P_2)\sigma(P_3)\cdots\sigma(P_r)=(P_1+1)(P_2+1)(P_3+1)\cdots(P_r+1)$. Ahora, como los $P_1,P_2,P_3,\ldots,P_r$ son primos distintos se sabe que su producto no admite otra factorización y dado que $\sigma(n)=2P_1P_2P_3\ \ldots\ P_r=(P_1+1)(P_2+1)(P_3+1)\cdots(P_r+1)$, entonces, sin perdida de generalidad, se puede concluir que $2P_1=P_r+1$, $P_2=P_1+1$, $P_3=P_2+1$ ... $P_r=P_{r-1}+1$. Entonces $P_1=2$ y $P_r=P_2=3$ ya que la suma de los P_i+1 es par y los P_i son impares excepto para $P_1=2$, lo cual, ocurre sólo cuando $n=(2)(3)=6$. Por lo tanto, seis es el único número perfecto libre de cuadrados ■

5.4. LOS DÍGITOS DE LOS NÚMEROS PERFECTOS PARES.

Proposición 12: *Todo número perfecto par n termina en 6 u 8.*

Demostración.

Sea n número perfecto par de la forma $n=2^{p-1}\left(2^p-1\right)$ con 2^p-1 primo y donde p también es primo.

CASO 1) Sea p par. Entonces $n=2^{2-1}\left(2^2-1\right)=6$ ■

CASO 2) Sea p impar. Supóngase que p es de la forma $4m+1$ ó $4m+3$ con $m>0$ y $m\in Z^+$. (Esto se asume porque como un sistema completo de residuos módulo 4 es $\{0,1,2,3\}$, entonces, se deduce que todo entero positivo es de la forma $4m$ ó $4m+1$ ó $4m+2$ ó $4m+3$).

i) Sea p de la forma $4m+1$.

Sustituyendo p en n se tiene que $n=2^{4m}\left(2^{4m+1}-1\right)=16^m\left(2\times 16^m-1\right)$ donde $m\geq 1$ y $m\in Z^+$. Y como por inducción matemática se demuestra que toda potencia entera positiva de dieciséis termina en seis, entonces, 16^m y $\left(2\times 16^m-1\right)$ terminan en seis y en uno, respectivamente. Por lo tanto, n terminará en 6 ■

ii) Sea p de la forma $4m+3$.

Sustituyendo p en n se tiene que $n=2^{4m+2}\left(2^{4m+3}-1\right)=4\times 16^m\left(8\times 16^m-1\right)$ donde $m\geq 0$ y $m\in Z^+$. Y como por inducción matemática se demuestra que toda potencia entera positiva de dieciséis termina en seis, entonces, 4×16^m y $\left(8\times 16^m-1\right)$ terminan en cuatro y en siete, respectivamente. Por lo tanto, n terminará en 8 ■

Corolario 1: *Un número perfecto par n no puede ser múltiplo de 10.*

Demostración.

Sea n un número perfecto par. Supóngase que n es múltiplo de 10, es decir, n es de la forma $n=10\cdot k$ para algún $k\in N$. Como cero es la última cifra del producto $10\cdot k$ se deduce que el perfecto par n termina en cero, pero, por la Proposición 12 esto no es posible. Por lo tanto, un número perfecto par no es múltiplo de 10 ■

Lema 3: $\sigma(km) > k\sigma(m)$ *con* $m \in Z^+$, $k \in Z^+$ *y* $k \neq 1$.

Demostración.

Como $\sigma(m)=d_1+d_2+\cdots+d_r$ con $d_i|m$ entonces $k\sigma(m)=kd_1+kd_2+\cdots+kd_r$ Y por otro lado, $\sigma(km)=(d_1+d_2+\cdots+d_r)+(k_1+k_2+\cdots+k_s)+(d_1k_1+d_1k_2+\cdots+d_1k_s)+(d_2k_1+d_2k_2+\cdots+d_2k_s)+\ldots+(d_rk_1+d_rk_2+\cdots+d_rk_s)$. Por lo tanto, $\sigma(km) > k\sigma(m)$ ■

Proposición 13: *Todo múltiplo de un número perfecto o abundante, es abundante.*[19]

Demostración.

Sea *m* un número perfecto o abundante, es decir, $\sigma(m)\geq 2m$. Para algún $k\in Z^+$ se tiene que $k\sigma(m)\geq k(2m)$, pero, por el Lema 3 es posible concluir que $\sigma(km)>k\sigma(m)\geq 2km$ donde *km* es múltiplo de *m* porque $k\neq 1$ y $k\in Z^+$. Por lo tanto, por definición, todo múltiplo de un número perfecto o abundante, es abundante ■

La siguiente proposición muestra un patrón de comportamiento de los perfectos pares cuando se representan en base dos, la cual, ha resultado útil para hallarlos por métodos computacionales. Por ejemplo: El número perfecto par $28=2^2(2^3-1)$ donde $p=3$ y $(p-1)=2$ en base dos tiene la forma: $(11100)_2$, por lo tanto, se concluye que tiene 3 unos y 2 ceros.

Proposición 14: *Todo número perfecto par* $n=2^{p-1}(2^p-1)$ *en base dos tiene p unos y* $p-1$ *ceros.*

Demostración.

Sea *n* un número perfecto par. Por la Proposición 4 se puede representar a *n* como $n=2^{p-1}+2^p+2^{p+1}+\cdots+2^{2(p-1)}$, expresando esta forma de *n* en base dos se tiene que: $n=10^{p-1}+10^p+10^{p+1}+\cdots+10^{2(p-1)}$, entonces, de esta construcción particular se tendrá:

$$\begin{array}{ll}
1000000\ldots0 & \to 10^{p-1} \\
10000000\ldots0 & \to 10^{p} \\
\vdots & \vdots \\
\underline{100000000000\ldots0} & \to 10^{2(p-1)} \\
 & \\
1111111000000\ldots0 &
\end{array}$$

[19] Esta proposición fue demostrada en el año de 1621 por Boehet.

De donde se concluye que n tiene $(p-1)$ ceros y $2(p-1)-(p-1)+(1)=p$ unos. Por lo tanto, el perfecto par n expresado en base dos tiene p unos y $p-1$ ceros ■

<u>Proposición 15</u>: *Si n número perfecto par tiene d dígitos, entonces,* $10^{d-1}<n<10^{d}$.[20]

Demostración.

Sea n un número perfecto par con d dígitos, es decir, $n=(a_1\times10^0)+(a_2\times10^1)+\cdots+(a_d\times10^{d-1})$. Y como $a_d\times10^{d-1}\neq0$, entonces, $10^{d-1} < (a_1\times10^0)+(a_2\times10^1)+(a_3\times10^2)+\cdots+(a_d\times10^{d-1})$. Y por el Corolario 1 se deduce que $(a_1\times10^0)+(a_2\times10^1)+(a_3\times10^2)+(a_4\times10^3)+\cdots+(a_d\times10^{d-1}) < 10^d$.

Por lo tanto, el perfecto par n con d dígitos es tal que $10^{d-1}<n<10^d$ ■

<u>Proposición 16</u>: *La suma de los dígitos de todo número perfecto euclidiano mayor que seis siempre deja residuo uno cuando es dividido por nueve.*

Demostración.

Sea $n>6$ un número perfecto euclidiano. Escríbase a n en forma decimal extendida: $n=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_1\times10^1+a_0\times10^0=\sum_{i=0}^{n}a_i10^i$ donde los a_i son los dígitos de n.

Ahora, considérense las siguientes congruencias:

$$
\begin{array}{lcl}
10^0\equiv1 \pmod 9 & \text{y} & a_0\equiv a_0 \pmod 9\\
10^1\equiv1 \pmod 9 & \text{y} & a_1\equiv a_1 \pmod 9\\
10^2\equiv1 \pmod 9 & \text{y} & a_2\equiv a_2 \pmod 9\\
\vdots & & \vdots\\
10^n\equiv1 \pmod 9 & \text{y} & a_n\equiv a_n \pmod 9
\end{array}
$$

Así, y por propiedades de congruencias se tiene que:

[20] Cabe aclarar aquí, que no siempre existe un número perfecto par entre potencias sucesivas de 10, de hecho, entre las potencias $10^4, 10^5, 10^6$ y 10^7 no existe ninguno. Pero lo que sí es posible asegurar, hasta ahora, es que no existe más de un perfecto par entre potencias sucesivas de 10.

$$
\begin{aligned}
&a_0 10^0 \equiv a_0 \pmod 9\\
&a_1 10^1 \equiv a_1 \pmod 9\\
&a_2 10^2 \equiv a_2 \pmod 9\\
&\qquad\vdots\\
&a_n 10^n \equiv a_n \pmod 9
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow\ \left(a_0 10^0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 + \cdots + a_n 10^n\right) \equiv \left(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right) \pmod 9$$

$$\Rightarrow\ \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i \pmod 9$$

$$\Rightarrow\ \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i - 1 \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i - 1 \pmod 9$$

$$\Rightarrow\ 9 \mid \left(\sum_{i=0}^{n} a_i 10^i - 1\right) - \left(\sum_{i=0}^{n} a_i - 1\right).$$

Para demostrar la proposición primero se verá que $9 \mid \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i - 1$.

Como $n > 6$ es un perfecto euclidiano entonces $n = 2^{p-1}\left(2^p - 1\right)$ con p primo impar, es decir, $p = 2r + 1$ con $r \in N$.

Ahora, dado que $\quad 3 \mid 4 - 1 \ \Rightarrow\ 3 \mid 4^r - 1 \ \Rightarrow\ 3 \mid 2^{2r} - 1 \ \Rightarrow\ 3 \mid 2^{(2r+1)-1} - 1 \ \Rightarrow\ 3 \mid 2^{p-1} - 1$

entonces $\quad 2^{p-1} - 1 = 3k \ \Rightarrow\ 2^{p-1} = 3k + 1$

y como $\quad 2^{p-1} = 3k + 1 \ \Rightarrow\ 2\left(2^{p-1}\right) = 2(3k+1) \ \Rightarrow\ 2^p - 1 = 6k + 1.$

Sustituyendo $2^{p-1} = 3k + 1$ y $2^p - 1 = 6k + 1$ en $n = 2^{p-1}\left(2^p - 1\right)$ se obtiene que $n = 9t + 1$, lo cual implica, por definición de divisibilidad, que $9 \mid n - 1$. Y por la forma decimal extendida de n se deduce que $9 \mid \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i - 1$. Por otro lado, como se halló que $9 \mid \left(\sum_{i=0}^{n} a_i 10^i - 1\right) - \left(\sum_{i=0}^{n} a_i - 1\right)$ y por la propiedad de divisibilidad: *Si* $a \mid b + c$ *y* $a \mid b$ *entonces* $a \mid c$, así, se concluye que $9 \mid \sum_{i=0}^{n} a_i - 1$. Por lo tanto, $\sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 1 \pmod 9$ donde los a_i son los dígitos de n, y finalmente por las propiedades de congruencias y residuos, se tiene que el residuo de dividir a la suma de los dígitos de n entre 9 es 1 ■

La búsqueda de propiedades para los números perfectos pares ha sido tan minuciosa que se les han observado detalles muy sutiles, por ejemplo, la cantidad de dígitos que poseen y la suma recursiva de estos. De hecho, es posible conocer la cantidad de dígitos que tienen los perfectos pares a través de la Propiedad que dice: *El número de dígitos de la potencia 2^n estará dado por la característica de $\log_{10} 2^n + 1$* (al hallar el valor de $\log x$, a la parte entera se le llama característica y a la decimal la mantisa). Así, dado que un perfecto par es de la forma $n = 2^{P-1}\left(2^P - 1\right)$ donde el factor $\left(2^P - 1\right)$ tiene el mismo número de dígitos que 2^P, bastará con calcular los dígitos de la potencia 2^{2P-1} para saber cuántos dígitos tiene *n*, es decir, será suficiente con encontrar la característica del $\log_{10} 2^{2P-1} + 1$. Por ejemplo para el octavo perfecto par: $2^{30}\left(2^{31} - 1\right)$ se tiene que $\log_{10} 2^{61} + 1 = (61)\log_{10} 2 + 1 = 19.362823$, por lo tanto, se concluye que este perfecto cuenta con 19 dígitos. (De hecho, $2^{30}\left(2^{31} - 1\right) = 2305843008139952128$).

Por otro lado, entiéndase como suma recursiva de los dígitos de un número lo siguiente:

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{para } 6 & \rightarrow & 6, & & & & \\
\text{para } 28 & \rightarrow & 2+8=10 & \rightarrow & 1+0=1, & & \\
\text{para } 496 & \rightarrow & 4+9+6=19 & \rightarrow & 1+9=10 & \rightarrow & 1+0=1, \\
\text{para } 8128 & \rightarrow & 8+1+2+8=19 & \rightarrow & 1+9=10 & \rightarrow & 1+0=1, \quad \ldots
\end{array}
$$

En la tabla que a continuación se presenta se halla una muestra con los primeros quince números perfectos pares donde puede verse la frecuencia de aparición de cada uno de sus dígitos, siendo 3 y 6 simultáneamente los que más aparecen (187 ocasiones) y 0 el dígito con menos apariciones (151 ocasiones). Nótese que excepto para el 6, la suma recursiva de los dígitos de estos perfectos pares siempre es uno.

Número Perfecto	Frecuencia de aparición de los dígitos										Suma recursiva de los dígitos
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	6	7	8	9	
1							1				6
2			1						1		1
3					1		1			1	1
4		1	1						2		1
5	1			4		2	1				1
6	1					2	2		3	2	1
7		2	1	3	1		1	1	2	1	1
8	3	2	3	3	1	2			3	2	1
9		4	3	2	5	7	6	2	3	5	1
10	5	8	5	8	4	2	6	4	5	7	1
11	3	7	8	11	7	4	6	7	8	4	1
12	3	12	5	7	14	7	7	7	8	7	1
13	33	24	32	36	33	33	32	37	25	29	1
14	35	28	35	40	28	36	48	44	43	29	1
15	67	74	84	73	84	80	76	76	69	87	1

<u>Lema 4:</u> *Si n es un número perfecto par tal que* $n>6$, *entonces,* $n\equiv 1 \pmod{9}$.

Demostración.

Sea $n>6$ un perfecto par, entonces, $n=2^{p-1}\left(2^p-1\right)$ con $p\geq 3$. Así, el factor 2^{p-1} es de la forma 4^k con $k\geq 1$, es decir, $2^{p-1}=\left(1+3\right)^k$.

Por el Teorema del Binomio se tiene que $\left(1+3\right)^k=1+C_k^1 3+C_k^2 3^2+C_k^3 3^3+\cdots+C_k^k 3^k=1+3a \;\ldots\; (1)$.

Y por otro lado, como $2^{p-1}=\left(1+3\right)^k$ entonces $2^p-1=2\times 2^{p-1}-1=2\left(1+3a\right)-1=1+6a \;\ldots\; (2)$.

Sustituyendo (1) y (2) en n se obtiene: $n=2^{p-1}\left(2^p-1\right)=\left(1+3a\right)\left(1+6a\right)=1+9a\left(1+2a\right)$, lo cual implica, que $9\mid\left(n-1\right)$. Por lo tanto, $n\equiv 1 \pmod{9}$ ■

Proposición 17: *Si se suman los dígitos de un número perfecto par mayor que 6 se obtiene un entero, si de este entero se suman sus dígitos, se obtiene otro entero, y si se repite este proceso hasta llegar a un dígito se obtendrá como resultado final el número uno.*[21]

Demostración.

Sea $n>6$ número perfecto par, entonces, *n* es de la forma $n=2^{p-1}\left(2^{p}-1\right)$ donde $p\geq 3$ es primo.
Por la Proposición 16, por el Lema 4 y por la transitividad entre congruencias se deduce que:

$n\equiv\sum_{i=0}^{n}a_{i} \pmod 9$ donde los a_i son los dígitos de *n*.

Como la forma decimal extendida de *n* es $a_{n}\times 10^{n}+a_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots+a_{1}\times 10^{1}+a_{0}\times 10^{0}=\sum_{i=0}^{n}a_{i}10^{i}$

entonces $\sum_{i=0}^{n}a_{i}10^{i}\equiv\sum_{i=0}^{n}a_{i} \pmod 9$.

Y de forma iterada se da que $\sum_{i=0}^{n}a_{i}\equiv\sum\left(\sum_{i=0}^{n}a_{i}\right) \pmod 9$, de esta manera, se suman los dígitos de *n* repetidamente hasta llegar a uno solo que estará entre 1 y 9, a dicho dígito se le denotará por λ.

Así, y por la transitividad entre congruencias se tendrá que $n\equiv\lambda \pmod 9$, pero, como por el Lema 4 $n\equiv 1 \pmod 9$, entonces, $\lambda\equiv 1 \pmod 9$ lo cual implica que $9|\lambda-1$ y dado que $1\leq\lambda\leq 9$, el único valor que puede tomar λ es uno.

Por lo tanto, el último dígito que se halló de la suma iterativa de los dígitos de *n* es $\lambda=1$ ■

[21] Cuando a un número se le aplica este proceso se dice que se ha obtenido su "Raíz Digital".

5.5 LOS DIVISORES DE LOS NÚMEROS PERFECTOS PARES.

Proposición 18: *El producto de todos los divisores de un número perfecto par* $n=2^{P-1}\left(2^P-1\right)$ *es* n^P.

Demostración.

Sea n un número perfecto par de la forma $n=2^{P-1}\left(2^P-1\right)$, entonces, se deduce que sus únicos divisores positivos son las potencias de dos $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{P-2}, 2^{P-1}$, y estas multiplicadas por el primo de Mersenne 2^P-1.

Así, $\left\{ 2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^{P-1}, 2^0\left(2^P-1\right), 2^1\left(2^P-1\right), 2^2\left(2^P-1\right), \cdots, 2^{P-1}\left(2^P-1\right) \right\}$ es el conjunto de los divisores de n cuyo producto será: $\left(2^0 2^1 2^2 \cdots 2^{P-1}\right)\left(2^0\left(2^P-1\right)2^1\left(2^P-1\right)2^2\left(2^P-1\right)\cdots 2^{P-1}\left(2^P-1\right)\right)$

$$\Rightarrow \left(2^1 2^2 \cdots 2^{P-1}\right)^2\left(2^P-1\right)^P$$

$$\Rightarrow \left(2^{1+2+\cdots+(P-1)}\right)^2\left(2^P-1\right)^P.$$

Y como por inducción matemática se demuestra que: $1+2+3+4+5+6+\cdots+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$

entonces $\left(2^{1+2+\cdots+(P-1)}\right)^2\left(2^P-1\right)^P=\left(2^{\frac{(P-1)P}{2}}\right)^2\left(2^P-1\right)^P=\left(2^{P-1}\right)^P\left(2^P-1\right)^P=\left(2^{P-1}\left(2^P-1\right)\right)^P=n^P$. Por lo tanto, el producto de los divisores de n es igual a n^P ■

Proposición 19: *Todo divisor propio de un número perfecto n, es deficiente.*

Demostración.

Sea n un número perfecto y sea d un divisor propio de n, es decir, $d|n$ y $d<n$. Por demostrar que d es un número deficiente. Supóngase que d es un número abundante o perfecto. Sin perdida de generalidad, sea $n=\left(d\times\dfrac{n}{d}\right)$ (claramente n es un múltiplo del divisor d). Así, y por la Proposición 13 resulta que n es un número abundante, lo cual, es una contradicción porque por hipótesis n es un número perfecto. De esta manera y por la Propiedad de la Tricotomía se tiene entonces que $\sigma(d)<2d$ ya que $\sigma(d)\not>2d$ y $\sigma(d)\neq 2d$. Por lo tanto, por definición, todo divisor propio del número perfecto n es deficiente ■

Proposición 20: *Si n es un número perfecto par entonces* $\sum \frac{1}{d}=2$ *donde d es divisor de n.*

Demostración.

Sea n número perfecto par, por tanto, se sabe que los divisores de n son: $2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^{P-1}, 2^0(2^P-1), 2^1(2^P-1), 2^2(2^P-1), \cdots, 2^{P-1}(2^P-1)$.

Y la suma de los recíprocos de los divisores de n es:

$$\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{P-1}}+\frac{1}{2^0(2^P-1)}+\frac{1}{2^1(2^P-1)}+\frac{1}{2^2(2^P-1)}+\cdots+\frac{1}{2^{P-1}(2^P-1)}$$

$$=\frac{2^{P-1}(2^P-1)+2^{P-2}(2^P-1)+\cdots+2^1(2^P-1)+2^0(2^P-1)+2^{P-1}+2^{P-2}+\cdots+2^2+2^1+2^0}{2^{P-1}(2^P-1)}$$

De esta manera, resulta que en el numerador se encuentra la suma de todos los divisores de n, es decir, $\sigma(n)$ y en el denominador se tiene a n. Sustituyendo esto en la suma de los recíprocos, se tiene que: $\sum \frac{1}{d}=\frac{\sigma(n)}{n}$ donde d es divisor de n.

Pero, por ser n un número perfecto se sabe que $\sigma(n)=2n$ y entonces $\sum \frac{1}{d}=\frac{2n}{n}$, lo cual, implica que $\sum \frac{1}{d}=2$. Por lo tanto, la suma de los recíprocos de todos los divisores del número perfecto par n es dos ■ [22]

---

[22]Por este resultado: $\sum \frac{1}{d}=2$ donde d es divisor del perfecto par n, se deduce que los números perfectos pares son una categoría particular de los llamados Números con Suerte, los cuales, se definen como aquellos que pueden escribirse como una suma de enteros positivos tal que los recíprocos de dichos enteros sumen uno. Por ejemplo, 11 es un número con suerte ya que $11=2+3+6$ y $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$.

Ahora véase el caso de los perfectos pares, dado que 28 es un número perfecto par entonces $\sigma(28)=1+2+4+7+14+28=2\cdot 28$ y por la demostración se tiene que $\sum \frac{1}{d}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=2$, si se resta una unidad a $\sigma(28)$ y a $\sum \frac{1}{d}$ se obtiene que: $2+4+7+14+28=55$ y $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=1$, entonces por definición, se concluye que 55 es un número con suerte. Así, se puede decir que $\sigma(n)-1$ donde $\sigma(n)=2n$ y, n es un par, será un número con suerte.

5.6. CONGRUENCIA Y DIVISIBILIDAD DEL NÚMERO PERFECTO PAR.

<u>Lema 5:</u> $(2^p-1) \equiv 1 \pmod{6}$ *donde* $(2^p-1)>3$ *es un número primo de Mersenne.*

Demostración.

Dado que $(2^p-1)>3$ es primo de Mersenne entonces p es un primo impar. Así, los números (2^p-1) son primos impares que pertenecen a la sucesión $2^1-1,\ 2^3-1,\ 2^5-1,\ 2^7-1 \ldots 2^{2n-1}-1$.

Y como por inducción matemática se demuestra que: $2^1, 2^3, 2^5, 2^7, \ldots, 2^{2n-1} \equiv 2 \pmod{6}\ \ \forall n \in N$ entonces $2^1-1, 2^3-1, 2^5-1, \ldots, 2^{2n-1}-1 \equiv 2-1 \pmod{6}\ \ \forall n \in N$.

Por lo tanto, como caso particular, $(2^p-1) \equiv 1 \pmod{6}$ con $(2^p-1)>3$ primo de Mersenne ■

<u>Proposición 21</u>: *Todo número perfecto par n, excepto el seis, es congruente con cuatro modulo seis, es decir,* $n \equiv 4 \pmod{6}$.

Demostración.

Sea $n>6$ un número perfecto par, $n=2^{p-1}(2^p-1)$ con $(2^p-1)>3$ primo y, por el Teorema de Mersenne, p es un número primo impar. Así, el número $p-1$ es par y por el Lema 5 $2^{2n-1} \equiv 2 \pmod{6}\ \ \forall n \in N$, es decir, $2^{2n} \equiv 4 \pmod{6}\ \ \forall n \in N$. Entonces para p primo impar se tiene que: $2^{p-1} \equiv 4 \pmod{6}\ \ldots(1)$.

Y nuevamente por el Lema 5 se sabe que: $(2^p-1) \equiv 1 \pmod{6}\ \ldots(2)$ con p primo impar. De esta manera, y por la propiedad de congruencia: *Si* $a \equiv b \pmod{m}$ *y* $c \equiv d \pmod{m}$ *entonces* $ac \equiv bd \pmod{m}$, usada para (1) y (2) se concluye que $n=2^{P-1}(2^P-1) \equiv 4 \pmod{6}$ con p primo impar.

Por lo tanto, todo perfecto par n, excepto el seis, es congruente con cuatro modulo seis ■

5.7. OTRAS PROPIEDADES.

Definición: La Función de Euler $\phi(s)$ queda definida por la cantidad de primos relativos $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$ con *s* tales que $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots < s \in N$.

<u>Proposición 22</u>: *Si $n=2^{P-1}\left(2^P-1\right)$ es un número perfecto par, entonces, $\phi(n)=2^{P-1}\left(2^{P-1}-1\right)$.*

Demostración.

Sea *n* número perfecto par tal que $n=2^{P-1}\left(2^P-1\right)$, y como 2^{P-1} y el primo $\left(2^P-1\right)$ son números primos relativos, entonces, por las propiedades de la Función de Euler:

1) $\phi(s\cdot t)=\phi(s)\cdot\phi(t)$ *si* $(s,t)=1$.

2) $\phi(p)=p-1$ *si p es un número primo.*

Se tiene que $\phi(n)=\phi\left(2^{P-1}\left(2^P-1\right)\right)=\phi\left(2^{P-1}\right)\phi\left(2^P-1\right)=\phi\left(2^{P-1}\right)\left(2^P-2\right)$. Y como $\phi\left(2^{P-1}\right)=\dfrac{2^{P-1}}{2}$ ya que todos los números impares menores a 2^{P-1} son primos relativos con las potencias de dos, se tiene que: $\phi(n)=\phi\left(2^{P-1}\left(2^P-1\right)\right)=\dfrac{2^{P-1}}{2}\left(2^P-2\right)$, por lo que, $\phi\left(2^{P-1}\left(2^P-1\right)\right)=2^{P-1}\left(2^{P-1}-1\right)$.

Por lo tanto, $\phi(n)=2^{P-1}\left(2^{P-1}-1\right)$ cuando *n* es perfecto par ■

<u>Lema 6:</u> *Si n es un número perfecto par tal que $n=(m+1)r$, con m impar y $r=m^{m-1}-m^{m-2}+\cdots-m+1$, entonces, $(m+1,r)=1$.*

Demostración.

Como *m* es impar entonces $(m+1)$ es par y *r* es impar. Así, se tiene que $(m+1)=2^s t$ donde *t* y *s* son tales que $t\geq 1$ y $s\in Z^+$. Sustituyendo $2^s t$ en $n=(m+1)r$ se tiene que $n=\left(2^s t\right)r$ pero *n* es un número perfecto par, por lo que, se debe cumplir que $t=1$ (porque $n=2^{P-1}\left(2^P-1\right)=\left(2^s t\right)r \Rightarrow tr=\left(2^P-1\right)$ donde $r>1$ es impar y $\left(2^P-1\right)$ es un número primo). Entonces $(m+1)=2^s$, es decir, $(m+1)$ es una potencia de dos y *r* es un impar.

Por lo tanto, $(m+1,r)=1$ ■

Lema 7: *3 no divide al número perfecto impar* $n = m^m + 1$ *donde m es par.*

Demostración.

Supóngase que $n = m^m + 1$ es tal que $3|n$, es decir, $m^m \equiv -1 \pmod 3$. Como *m* es par entonces $(2k)^{2k} \equiv -1 \pmod 3$ y como $-1 \equiv 2 \pmod 3$ se tiene que $4^k k^{2k} \equiv 2 \pmod 3$, por otro lado, dado que $4^k \equiv 1 \pmod 3$ y $2 \cdot 4^k \equiv 2 \pmod 3$ entonces por transitividad $4^k k^{2k} \equiv 2 \cdot 4^k \pmod 3$ y como $(4^k, 3) = 1$, por tanto, $k^{2k} \equiv 2 \pmod 3$ $\ldots(1)$.

Ahora, tómese el sistema completo de residuos modulo 3 igual a $\{0, 1, 2\}$ y como sólo uno de los elementos de este conjunto es congruente con *k* modulo 3 se deduce que:

i) $k \not\equiv 0 \pmod 3$ ya que si $3|k$ entonces $k = 3t$ y por (1) se tendría que $3|2$.

ii) $k \not\equiv 1 \pmod 3$ ya que si $3|k-1$ entonces $k = 3t+1$ y por (1) se tendría que $3|-1$.

iii) $k \not\equiv 2 \pmod 3$ ya que si $3|k-2$ entonces $k = 3t+2$ y por (1) se tendría que $3|1$.

Así, se concluye que *k* no es congruente a 0 ó 1 ó 2 modulo tres.

Por lo tanto, $3 \nmid n$ ■

Lema 8: *Si* $n = (a^2+1)(a^4-a^2+1)$ *entonces* $(a^2+1,\ a^4-a^2+1) = 1$, *donde n es número perfecto impar de la forma* $n = m^m + 1$ *con m par.*

Demostración.

Supóngase que *q* es un divisor común de (a^2+1) y (a^4-a^2+1).

Ahora, considerando $a^4 - a^2 + 1 = (a^4 + 2a^2 + 1) - 3a^2 = (a^2+1)^2 - 3a^2 = (a^2+1)^2 - 3(a^2+1) + 3$ se tiene que: $q|a^4-a^2+1$, $q|a^2+1$ y $q|3$, entonces, $3|n$. Pero, esto es una contradicción porque en el Lema 7 se demostró que $3 \nmid n$. Así, los factores de *n* que son (a^2+1) y (a^4-a^2+1) no tienen un factor común, por lo que, son primos relativos entre sí. Además, dado que *n* es impar, se concluye que ambos factores también son impares ■

Lema 9: *Si v y $\sigma(v)$ son ambos impares entonces v es un cuadrado.*

Demostración.

Sea $v=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}P_3^{\alpha_3}P_4^{\alpha_4}\cdots P_r^{\alpha_r}$ donde todos los P_i son primos impares. Por definición, $\sigma(v)=\prod_{i=1}^{r}\left(P_i^{\alpha_1}+P_i^{\alpha_2}+\cdots+P_i^{\alpha_j}\right)=\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{P_i^{\alpha_{j+1}}-1}{P_i-1}\right)$ con $i=1,2,3,4\ldots r$ y $j=0,1,2,3\ldots r$. Pero, por la suma telescópica se tiene que: $\frac{P_i^{\alpha_{j+1}}-1}{P_i-1}=\frac{(P_i-1)\left(P_i^{\alpha_j}+P_i^{\alpha_{j-1}}+P_i^{\alpha_{j-2}}+\cdots+P_i+1\right)}{(P_i-1)}$. Así, $\sigma(v)=\prod\left(P_i^{\alpha_j}+P_i^{\alpha_{j-1}}+P_i^{\alpha_{j-2}}+\cdots+P_i+1\right)$ y dado que por hipótesis es impar se deduce que la suma $P_i^{\alpha_j}+P_i^{\alpha_{j-1}}+P_i^{\alpha_{j-2}}+\cdots+P_i$ es un número par y como todos los P_i son primos impares entonces los α_j son pares, es decir, $v=P_1^{2\alpha'_1}P_2^{2\alpha'_2}P_3^{2\alpha'_3}P_4^{2\alpha'_4}\cdots P_r^{2\alpha'_r}$. Por lo tanto, el impar v es un cuadrado ya que $v=\left(P_1^{\alpha'_1}P_2^{\alpha'_2}P_3^{\alpha'_3}P_4^{\alpha'_4}\cdots P_r^{\alpha'_r}\right)^2$ ■

Proposición 23: *El único número perfecto de la forma m^m+1 es el 28.*

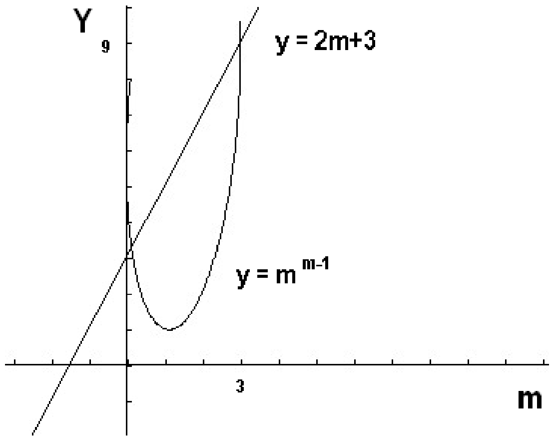
Demostración.

Sea *n* un número perfecto tal que $n=m^m+1$ con $m\in N$, por demostrar que $n=28$.

CASO 1) Sea *m* un número impar, entonces, *n* es par.

Como *n* es un perfecto par, $n=2^{P-1}\left(2^P-1\right)$ donde 2^P-1 es primo y por la serie telescópica $n=m^m+1$ se puede factorizar como $n=(m+1)r$ con $r=m^{m-1}-m^{m-2}+\cdots-m+1$ (claramente $r>1$ porque $n\neq 2$).

Por todo el desarrollo anterior y por el Lema 6, resulta que: $n=2^{P-1}\left(2^P-1\right)=(m+1)r=2^s r$ donde el primo $\left(2^P-1\right)$ y $r>1$ son ambos impares lo cual implica que $2^{P-1}=(m+1)=2^s$ y $\left(2^P-1\right)=r$, entonces, $r=\left(2^P-1\right)=\left(2\cdot 2^{P-1}-1\right)=2(m+1)-1=2m+1$. Sustituyendo esto en *n* se tiene que: $n=m^m+1=(m+1)r=(m+1)(2m+1)=2m^2+3m+1 \iff m^{m-1}=2m+3$. Y como $m\in N$ se concluye que esta ecuación sólo tiene una solución entera cuando $m=3$ (esto puede verificarse en la gráfica simultanea de m^{m-1} y $2m+3$). Así, sustituyendo $m=3$ entonces $n=m^m+1=3^3+1=28$. Por lo tanto, 28 es el único número perfecto de la forma m^m+1 ■



CASO 2) Sea *m* un número par, entonces, *n* es impar.

Como *m* es par se tiene que m^m es un cuadrado y por la forma de $n=m^m+1$ se deduce que $m^m \equiv -1 \pmod{n}$.

Por otro lado dado que *n* es impar y por el Teorema de Touchard[23] que dice: *Todo número perfecto impar es de la forma* $12u+1$ *o* $36u+9$ *para algún entero u*, se mostrará que *n* es de la forma $12u+1$. Supóngase que $n=36u+9$ es decir $n=3(12u+3)$ entonces $3|n$, pero, por el Lema 7 se demostró que $3\nmid n$, por lo tanto, $n=12u+1$.

Así, sustituyendo $n=12u+1$ en $n=m^m+1$ se tiene que: $n=m^m+1=12u+1 \Leftrightarrow m^m=12u=3(4u)$.

Por lo que, $3|m^m$ lo cual implica que $3|m$ y como también $2|m$ por ser *m* par entonces $6|m$.

De esta manera, sea $n=\left(m^{\frac{m}{6}}\right)^6+1=a^6+1$ con $a=m^{\frac{m}{6}}>1$ porque *n* es impar. Donde además, $n=a^6+1$ se puede factorizar de la forma: $n=(a^2+1)(a^4-a^2+1)$. Ahora, como *n* es un número perfecto y por el Lema 8 se halló que $(a^2+1, a^4-a^2+1)=1$, por ser la función σ multiplicativa, se concluye que $\sigma(n)=\sigma(a^2+1)\sigma(a^4-a^2+1)=2n$.

[23]La demostración del Teorema de Touchard se deja para el Capítulo II, y esto porque en esa parte es donde se aborda el teorema en un contexto sólo de los perfectos impares.

Y dado que *n* es un impar, también los factores (a^2+1) y (a^4-a^2+1) son números impares y en consecuencia $\sigma(a^2+1)$ o $\sigma(a^4-a^2+1)$ es impar (esto porque como $(a^2+1\,,\,a^4-a^2+1)=1$ entonces sólo alguno es par ya que $\sigma(a^2+1)\sigma(a^4-a^2+1)=2n$ donde *n* es impar).

Así, por el Lema 9 se deduce que (a^2+1) o (a^4-a^2+1) será un cuadrado. Pero, (a^2+1) no es un cuadrado porque entre los cuadrados enteros consecutivos a^2 y $(a^2+1)^2$ ocurre que $a^2<a^2+1<(a+1)^2$. Y de manera similar, se afirma que el factor (a^4-a^2+1) no es un cuadrado porque entre los cuadrados enteros consecutivos $(a^2-1)^2$ y $(a^2)^2$ ocurre que $(a^2-1)^2<a^4-a^2+1<(a^2)^2$ con $a>1$. Entonces como ninguno de los factores (a^2+1) y (a^4-a^2+1) puede ser un cuadrado, se llega a una contradicción porque alguno de ellos tendría que serlo por el Lema 9. Consecuentemente, no existen números perfectos impares *n* de la forma m^m+1. Por lo tanto, 28 es el único número perfecto de la forma m^m+1 ■

CAPÍTULO II

¿Existirá algún Número Perfecto Impar?

Por todo lo que ya se abordó en el capítulo anterior se puede considerar que los números perfectos pares ya han tomado vida propia, es decir, ya tienen un espacio lleno de certidumbre dentro de la matemática, un lugar en el que no hay duda de su existencia, su forma y una posible infinitud. Pero ahora es el momento de lanzar la pregunta del problema abierto que quizá sea de los más antiguos de la matemática, el cual lleva más de dos mil años resistiéndose a ser probado. Euclides seguramente lo reflexionó cuando escribía el libro IX de los *Elementos*: ¿Existen números perfectos impares?, es decir, existirá algún entero positivo impar que sea igual a la suma de todos sus divisores positivos propios?.

Al inspeccionar la suma de los divisores de n, esto es, al evaluar a $\sigma(n)$ con n impar en los enteros positivos se obtiene lo siguiente:

$$\sigma(3)=4,\ \sigma(5)=6,\ \sigma(7)=8,\ \sigma(9)=13,\ \sigma(11)=12,\ \sigma(13)=14,\ \sigma(15)=24,\ \ldots\ \sigma(31)=32\ \ldots$$

Tales cálculos llevan intuitivamente a pensar que $\sigma(n)<2n$ para toda n impar, y con ello, pareciera que todos los impares son números deficientes. Pero, al continuar con la sucesión de cálculos resulta que para $n=943$ y $n=945$ se obtiene respectivamente: $\sigma(943)=1008$ y $\sigma(945)=1920$, lo cual implica que, $\sigma(943)<2(943)$ y $\sigma(945)>2(945)$. Entonces, si la intuición ya decía que $\sigma(n)<2n$ para toda n impar y sucede que para $n=945$ la función suma de divisores es mayor que $2n$, entonces, por qué no pensar que en algún término de la sucesión se habría de dar la igualdad para alguna n impar con lo que se obtendría un perfecto impar. Procediendo así, pareciera que tales números sí podrían existir pero la realidad es que a la fecha no se ha podido encontrar uno y tampoco se ha demostrado su inexistencia.

Aunque no se ha encontrado un perfecto impar, sí se han dado casos en los que se han generado falsas esperanzas acerca de su existencia y aquí, cabe recordar, la anécdota del optimismo de Descartes cuando propuso a $n=198585576189$ como perfecto impar. Al hallar la descomposición en primos de este número obtuvo que $n=3^2 7^2 11^2 13^2 22021$ y por otro lado calculó la función $\sigma(n)=(1+3+3^2)(1+7+7^2)(1+11+11^2)(1+13+13^2)(1+22021)=2n$, resultando así, por definición, que n es un número perfecto impar. Pero, sucede que Descartes cometió el gran error de dar por hecho que 22021 era primo lo cual no ocurre porque $22021=19^2\cdot 61$. También, se pueden encontrar casos muy sorprendentes como el del número $n=3^4 7^2 11^2 19^2(-127)$ ya que al aplicarle la función suma de sus divisores se tiene: $(1+3+3^2+3^3+3^4)(1+7+7^2)(1+11+11^2)(1+19+19^2)(1+(-127))=-44035951806=2n$ con lo que se tendría un perfecto impar, el inconveniente que se encuentra es que -127 es un número negativo y, en consecuencia, la suma de los divisores ya no aplica adecuadamente para la definición de la función $\sigma(n)$.

Por otra parte, es importante señalar que los intentos por identificar números perfectos impares no han sido lo suficientemente exitosos como para mostrar explícitamente un número con dicha característica, pero sí se ha logrado desarrollar una teoría referente a ellos. Los resultados obtenidos apuntan a propiedades que podrían tener estos números en caso de existir y, que además, se siguen incrementando en la actualidad. Pero todas estas propiedades encontradas han sido insuficientes para poder exhibir alguno y aunque se pensara que podrían ser útiles para demostrar próximamente su inexistencia, no ha sucedido nada en ninguna de las dos vertientes, ya que no se ha dado el caso de una contradicción entre las propiedades encontradas, para así poder declarar la no existencia de los números perfectos impares.

Resulta que tales propiedades de los perfectos impares son numerosas y este trabajo de tesis no tiene como objetivo dar a conocer todas junto con sus demostraciones respectivas, lo que sí se expondrá aquí es una clasificación de algunos de los resultados hasta ahora obtenidos. En algunos casos se proporciona sólo una idea de los elementos matemáticos usados para la demostración y, en otros, sí se dará la demostración completa. Así, la clasificación de las propiedades presentadas en este capítulo apuntará en la siguiente dirección: El Factor de Euler, los tamaños mínimos que puede tener el posible número perfecto impar, la cantidad de factores primos que podrían presentar y otros resultados complementarios.

1. EL FACTOR DE EULER.

El primer resultado significativo para los números perfectos impares fue aportado por Leonhard Euler, y lo hizo a pesar de no conocer alguno. Él tuvo la grandeza de dar la primera personalización de cómo tendrían que ser. Demostró que: “Si n es un perfecto impar entonces $n=q^{\alpha}P_1^{2\beta_1}P_2^{2\beta_2}P_3^{2\beta_3}\cdots P_r^{2\beta_r}$ donde $q\equiv\alpha\equiv1 \pmod 4$ y los $q, P_1, P_2, \cdots P_r$ son primos impares diferentes”. Esta aportación inicial dio lugar a que al factor q^{α} se le conozca actualmente como *Factor de Euler*.

De esta manera, con números de la forma $n=q^{\alpha}P_1^{2\beta_1}P_2^{2\beta_2}P_3^{2\beta_3}\cdots P_r^{2\beta_r}$ se tuvo el punto de partida para construir un conjunto de propiedades que hasta ahora no ha dejado de avanzar. Sin embargo, aunque desde la segunda mitad del siglo XVIII ya se tenía esta caracterización dada por Euler para los perfectos impares, fue necesario esperar hasta las primeras décadas del siglo XX para tener nuevamente resultados dignos de mencionarse y que apuntaran en esta dirección.

Para dicha forma euleriana de los perfectos impares, actualmente se sabe que estos no pueden existir con la particularidad de que los factores β_i que se encuentran en los exponentes de P_i pertenezcan a la misma clase residual. Algunos de los resultados involucrados en esta afirmación son: Iannucci [2003] demostró que si $3|n$ donde n es un perfecto impar con las características eulerianas y α junto con β_i son enteros positivos tales que $\beta_1\equiv\beta_2\equiv\cdots\equiv\beta_r\equiv2 \pmod 5$ entonces n no es perfecto impar. Otro resultado semejante se da cuando $\beta_1\equiv\beta_2\equiv\cdots\equiv\beta_r\equiv38 \pmod{77}$. También, Hagis y McDaniel [1975] lo probaron para $\beta_i\equiv17 \pmod{35}$. Por su parte, McDaniel [1970] demostró que si todos los β_i cumplen que $\beta_i\equiv1 \pmod 3$ entonces no puede existir un perfecto impar con la forma de Euler (Iannucci llego a esta misma conclusión). Steuerwald [1937] demostró que $n=q^{\alpha}P_1^{2\beta_1}P_2^{2\beta_2}P_3^{2\beta_3}\cdots P_r^{2\beta_r}$ no es un número perfecto impar si $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\ldots=\beta_r=1$. Hagis y McDaniel probaron lo mismo para $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\ldots=\beta_r=3$.

Es importante mencionar que en las demostraciones de estos resultados mencionados se utilizaron las siguientes dos proposiciones adjudicados a U. Künel [1949] y Kanold [1941], respectivamente:

1) *Si n es número perfecto impar, entonces,* $105 \nmid n$.

2) *Si n es número perfecto impar y si en* $n = q^{\alpha} P_1^{2\beta_1} P_2^{2\beta_2} P_3^{2\beta_3} \cdots P_r^{2\beta_r}$, *t es divisor común de los* $(2\beta_i + 1)$ *para* $i = 1, 2, 3, \ldots, r$, *entonces,* $t^4 \mid n$.

Cohen mostró que *n* no es perfecto impar cuando $\beta_i = 6, 8, 11, 14$ *y* 18. Y Kanold [1941] también lo probó para $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_r = 2$, además, demostró que si los números $(2\beta_i + 1)$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, r$ tienen como máximo común divisor a $9, 15, 21$ *ó* 23, entonces, *n* no puede ser un perfecto impar.

Hasta aquí, se han visto algunas de las aportaciones que proveen casos específicos sobre la imposibilidad de que existan números perfectos impares con las β_i pertenecientes a una misma clase residual, ahora, se presentarán casos donde hay variantes en el conjunto de las β_i. Brauer [1943] y Kanold [1942] demostraron que no es posible que exista *n* perfecto impar si $\beta_1 = 1,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 1,\ \ldots$ y $\beta_r = 2$; este resultado también fue probado por Kanold [1939] pero con la particularidad de que el *Factor de Euler* es $\alpha = 1$ o $\alpha = 5$. Una década después otra vez Kanold [1953] demostró que *n* no es perfecto impar si $\beta_1 = 2,\ \beta_2 = 2,\ \beta_3 = 1,\ \ldots,\ \beta_r = 1$, además, lo hizo para el caso donde $\alpha = 5$ y de manera más general lo probó para $\beta_i = 1$ *ó* 2 cuando $i = 1, 2, 3, \ldots, r$. Durante la década de los 50 Kanold siguió extrayendo más cualidades, en [1947] y [1950] demostró que $n = q^{\alpha} P_1^{2\beta_1} P_2^{2\beta_2} P_3^{2\beta_3} \cdots P_r^{2\beta_r}$ no puede ser perfecto impar si *n* es primo relativo con 3 y, por otro lado, probó que si $\beta_2 = \beta_3 = \ \ldots\ \beta_r = 1$, donde $\alpha = 1$ *ó* 5 o $2\beta_i < 10$, entonces *n* tampoco es perfecto impar; en ambos casos es independiente el valor de β_1. Aunado a lo anterior, nuevamente Kanold demostró que si *n* es un perfecto impar y $\beta_2 = \beta_3 = \ \ldots\ \beta_r = 1$ entonces $\alpha + 2\beta_1 + 2(r+1) \geq 37$ donde $r \geq 9$ y, por lo tanto, $n > 10^{36}$. Posteriormente McCarthy [1957] demostró que si *n* perfecto impar, es primo relativo con 3 y $\beta_2 = \beta_3 = \ \ldots\ \beta_r = 1$ entonces $P_1 \equiv 1 \pmod 3$.

Regresando a las aportaciones de Kanold y retomando su artículo [1941], ahora, éstas se verán desde el perfil de las condiciones necesarias para un posible perfecto impar, emanadas de la expresión que contiene al *Factor de Euler* q^{α}:

I) *Si* $n=q^{\alpha}P_1^{2\beta_1}P_2^{2\beta_2}P_3^{2\beta_3}\cdots P_r^{2\beta_r}$ *es número perfecto impar, entonces, el máximo divisor primo de n es mayor que dos veces el máximo de* $\alpha+1$ *y de los* $(2\beta_i+1)$ *para* $i=1, 2, 3, \ldots, r$.

II) *Si n es número perfecto impar y si en* $n=q^{\alpha}P_1^{2\beta_1}P_2^{2\beta_2}P_3^{2\beta_3}\cdots P_r^{2\beta_r}$, *t es divisor común de los* $(2\beta_i+1)$ *para* $i=1, 2, 3, \ldots, r$, *entonces,* $t^4 \mid n$.

III) *Si* $(2\beta_i+1)=t^{\gamma_i}$ *para* $i=1, 2, 3, \ldots, r$ *y t es primo, entonces, ambas expresiones:* $q\equiv 1 \pmod t$ *y* $\dfrac{\alpha+1}{2}\equiv 0 \pmod t$ *ó* $\dfrac{\alpha+1}{2}\equiv 1 \pmod t$ *son condiciones necesarias para que* $n=q^{\alpha}P_1^{2\beta_1}P_2^{2\beta_2}P_3^{2\beta_3}\cdots P_r^{2\beta_r}$ *sea número perfecto impar.*

IV) *Si* $n=q^{\alpha}P_1^{2\beta_1}P_2^{2\beta_2}P_3^{2\beta_3}\cdots P_r^{2\beta_r}$ *es número perfecto impar y q es un primo de la forma* 2^x+1, *entonces,* $\alpha<a(a+1)\leq r(r-1)$ *donde a es el número de los* P_i *tales que* $P_i\equiv 1 \pmod q$.

V) *Si* $n=q^{\alpha}P_1^{2\beta_1}P_2^{2\beta_2}P_3^{2\beta_3}\cdots P_r^{2\beta_r}$ *es número perfecto impar,* $(q-1, 2\beta_i+1)=1$ *para* $i=1, 2, 3, \ldots, r$ *y a es el número de los* P_i *tales que* $P_i\equiv 1 \pmod q$, *entonces,* $1<a<r$ *y* $\alpha<\min\left[a(a-2), \dfrac{3a(a-1)}{4}\right]$ *donde* P^{a-1} *no divide a* $\sigma\left(P_i^{2\beta_i}\right)$ *para* $i=1, 2, 3, \ldots, r$ *y* $\alpha<\dfrac{(a-1)(3a-2)}{4}$ *en otros casos.*

A continuación se expondrán las demostraciones de los resultados más representativos referentes al *Factor de Euler*. Se iniciará con Leonhard Euler, porque como ya se mencionó, fue el primero en aportar un resultado trascedente para los perfectos impares (aquí se muestra su visión tan particular de cómo usa elementos matemáticos de carácter básico y llega a importantes resultados). En su trabajo *Tractatus de numerorum doctrina*, propone:

Proposición 1: *Si n es un número perfecto impar, entonces, n es de la forma:* $n=q^{\alpha}P_1^{2\beta_1}P_2^{2\beta_2}P_3^{2\beta_3}\cdots P_r^{2\beta_r}$ *donde los q, P_1, P_2, $\cdots$ P_r son primos impares distintos y, además,* $q\equiv\alpha\equiv 1 \pmod 4$.

Demostración.

Como n es un perfecto impar entonces se tiene por definición que $\sigma(n)=2n$ y por la factorización única en primos, $n=A\cdot B\cdot C\cdot D\cdots$ (estos divisores de n pueden verse como potencias de primos diferentes entre ellos e impares). Ahora, considerando que σ (función suma de divisores) es multiplicativa se tiene: $2n=\sigma(A\cdot B\cdot C\cdot D\cdots)=\sigma(A)\cdot\sigma(B)\cdot\sigma(C)\cdot\sigma(D)\cdots$

Además, dado que n es impar se deduce que $2n$ es el doble de un impar y, como diría Euclides, es un número "imparmente par", es decir, $2n=2(2\lambda+1)=4\lambda+2$ por lo tanto $2n\equiv 2 \pmod 4$, pero, nótese que $4\nmid 2n$ (porque si sucede que $4|2n$, entonces, $2|n$ lo cual no es posible ya que n es impar). Así, es importante señalar que entre los factores $\sigma(A)$, $\sigma(B)$, $\sigma(C)$, $\sigma(D)\cdots$ sólo hay uno que es imparmente par y los restantes son impares. Sin perdida de generalidad, tómese al factor $\sigma(B)$ como impar y supóngase que B es la potencia de un primo tal que: $B=P^m \Rightarrow \sigma(B)=\sigma(P^m)=\dfrac{P^{m+1}-1}{P-1}=P^m+P^{m-1}+\cdots+P^2+P+1$.

Como el primo P es impar y $P^m+P^{m-1}+\cdots+P^2+P+1$ es una suma de m impares más uno, entonces se deduce que el exponente m debe ser forzosamente par para que se cumpla que el factor $\sigma(B)$ sea impar. De esta manera, $B=P^m$ es una potencia par de un número impar, por lo que B será un cuadrado perfecto. Concluyéndose por tanto que todos los factores primos $A, B, C, D\cdots$ de n, a excepción de uno, serán cuadrados perfectos.

Por otro lado, sea $\sigma(A)$ el factor imparmente par de $\sigma(n)$, es decir, $\sigma(A)=2(2\varphi+1)=4\varphi+2$ entonces $\sigma(A)\equiv 2 \pmod 4$. Y sea $A=q^{\alpha}$ donde q es un primo impar, por lo que q es de la forma $4k+1$ ó $4k+3$. Se afirma que q es de la forma $4k+1$ porque si $q=4k+3$ se tendría que $\sigma(A)\not\equiv 2 \pmod 4$ lo cual contradice el hecho de que $\sigma(A)$ es imparmente par; esto se concluyó al aplicar a $\sigma(A)=\sigma(q^{\alpha})=q^{\alpha}+q^{\alpha-1}+\cdots+q^3+q^2+q+1$ las dos propiedades siguientes:

1) $(4k+3)^s \equiv 1 \pmod 4$ *si s es par y* $(4k+3)^s \equiv 3 \pmod 4$ *si s es impar, para las respectivas* $s=\alpha, \alpha-1, \ldots, 2, 1$.

2) $\sigma(q^\alpha) \equiv 1 \pmod 4$ *si* α *es par y* $\sigma(q^\alpha) \equiv 0 \pmod 4$ *si* α *es impar donde* $\sigma(q^\alpha) = q^\alpha + q^{\alpha-1} + \cdots + q^3 + q^2 + q + 1$.

Así, como *q* es de la forma $4k+1$ entonces $1, q, q^2, \cdots, q^{\alpha-1}, q^\alpha \equiv 1 \pmod 4$. Ahora, dado que $\sigma(A) = \sigma(q^\alpha) = q^\alpha + q^{\alpha-1} + \cdots + q^3 + q^2 + q + 1$ es una suma par cuya cantidad de sumandos es $\alpha+1$ se deduce que α es número impar, el cual, podría ser de la forma $4\lambda+1$ ó $4\lambda+3$. Y por la estructura de las potencias de *q* se tiene que cada una es de la forma:

$$4k_1+1,\ 4k_2+1,\ 4k_3+1,\ 4k_4+1,\ 4k_5+1\ \ldots\ 4k_\alpha+1 \quad \Rightarrow$$

$$1+q+q^2+q^3+\cdots+q^\alpha = 1+4(k_1+k_2+k_3+\cdots+k_\alpha)+\alpha \ \Rightarrow$$

$$4(k_1+k_2+\cdots+k_\alpha)+(\alpha+1) = 4k'+(\alpha+1) = 2\Gamma = \sigma(A) = \sigma(q^\alpha)$$

Por lo que, si $\alpha = 4\lambda+3$ se implica que Γ es par, es decir, $\sigma(A) = 2(2\phi)$ llegándose así a una contradicción ya que por hipótesis $\sigma(A)$ es imparmente par. Por tanto, $\alpha = 4\lambda+1$ y por consiguiente $\alpha \equiv 1 \pmod 4$.

Por todo lo anterior, ha quedado demostrado que todo número perfecto impar *n* es de la forma $n = q^\alpha P_1^{2\beta_1} P_2^{2\beta_2} P_3^{2\beta_3} \cdots P_r^{2\beta_r}$ donde los $q, P_1, P_2, \cdots P_r$ son primos impares distintos y $q \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4$ ■

Del trabajo directo de Euler, ahora se pasará a las demostraciones —de la década de los 40 del siglo XX— de algunos de los trabajos antes mencionados.

Proposición 2: *Si* $n = q^\alpha P_1^2 P_2^2 P_3^2 \cdots P_r^2$ *donde* q *y los* P_i *son primos impares distintos,* $q \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4$ *y además si* $3|n$ *, entonces, n no es un número perfecto impar.*[1]

Demostración.

[1]Notar que en esta proposición se considera a los factores de los exponentes de la forma dada por Euler para un número perfecto impar $n = q^\alpha P_1^{2\beta_1} P_2^{2\beta_2} P_3^{2\beta_3} \cdots P_r^{2\beta_r}$ como $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_r = 1$.

Supóngase que $n=q^{\alpha}P_1^2P_2^2P_3^2\cdots P_r^2$ es perfecto impar y que $3|n$. Así, uno de los factores de n es divisible por 3, este factor no puede ser q porque como es primo tendría que ser 3 y además cumplir que $q\equiv 1 \pmod 4$ lo cual no es posible, por tanto, uno de los P_i tiene que ser 3. Dado que por hipótesis n es número perfecto con q y P_i primos distintos, por definición, se tiene que $\sigma(n)=\sigma(q^{\alpha})\sigma(P_1^2)\sigma(P_2^2)\sigma(P_3^2)\cdots\sigma(P_r^2)=2n=2q^{\alpha}P_1^2P_2^2P_3^2\cdots P_r^2$ y como uno de los P_i es 3, entonces, $\sigma(3^2)=3^2+3+1=13$ y ya que $\sigma(3^2)|2n$ se implica que $13|n$, de esta manera, se concluye que 13 divide a alguno de los primos q o P_i.

Supóngase que $q\neq 13$. Como el número primo 13 divide a n, entonces, $\sigma(13^2)|n$, es decir, $(3\times 61)|n$ por tanto 61 divide a n.

Supóngase que $q\neq 61$. Como el número primo 61 divide a n, entonces, $\sigma(61^2)|n$, es decir, $(3\times 13\times 97)|n$ por tanto 97 divide a n.

Supóngase que $q\neq 97$. Como el número primo 97 divide a n, entonces, $\sigma(97^2)|n$, es decir, $(3\times 3169)|n$ por tanto 3169 divide a n.

De las operaciones anteriores, se concluye que: $(3\times 61)|n$, $(3\times 13\times 97)|n$ y $(3\times 3169)|n$. Dado que cada uno de estos divisores contiene al número 3, entonces, $3^3|n$ lo cual es una contradicción porque únicamente 3^2 puede dividir a n.

De esta manera, para terminar con la demostración, sólo faltaría ver que q no puede ser 13 ó 61 ó 97.

Considerando el resultado: $\sigma(q^{\alpha})=q^{\alpha}+q^{\alpha-1}+q^{\alpha-2}+\cdots+q+1=(q+1)(q^{\alpha-1}+q^{\alpha-3}+\cdots+q^2+1)$ se deduce que $(q+1)|\sigma(q^{\alpha})$, es decir, $\sigma(q^{\alpha})=(q+1)\lambda$. Y por ser n número perfecto, con q y P_i primos distintos, se sabe que $\sigma(n)=\sigma(q^{\alpha})\sigma(P_1^2)\sigma(P_2^2)\sigma(P_3^2)\cdots\sigma(P_r^2)=2n$, sustituyendo $\sigma(q^{\alpha})$, entonces $2n=(q+1)\lambda\sigma(P_1^2)\sigma(P_2^2)\sigma(P_3^2)\cdots\sigma(P_r^2)$ por tanto $n=\frac{(q+1)}{2}\lambda\sigma(P_1^2)\sigma(P_2^2)\sigma(P_3^2)\cdots\sigma(P_r^2)$.

Así, por definición, $\frac{(q+1)}{2}|n$ (se afirma que $\frac{(q+1)}{2}$ es entero porque por hipótesis $q=4k+1$).

CASO 1) Supóngase que $q=13$.

Sustituyendo $q=13$ en $\frac{(q+1)}{2}$ se tiene que $7|n$. Como 7 es primo, entonces $\sigma(7^2)=(3\times 19)|n$, y como 19 es primo $\sigma((19)^2)=(3\times 127)|n$ y como 127 es primo $\sigma((127)^2)=(3\times 5419)|n$. Así, se puede ver nuevamente que cada uno de estos tres factores de *n* contiene al 3, por lo que, 3^3 es un factor de *n* lo cual es una contradicción. Por lo tanto, *q* no puede ser igual a 13 ■

CASO 2) Supóngase que $q=61$.

Sustituyendo $q=61$ en $\frac{(q+1)}{2}$ se tiene que $31|n$. Como 31 es primo, entonces $\sigma((31)^2)=(3\times 331)|n$, y como 331 es primo $\sigma((331)^2)=(3\times 7\times 5233)|n$ y como 7 es primo $\sigma(7^2)=(3\times 19)|n$. Así, se puede ver nuevamente que cada uno de estos tres factores de *n* contiene al 3, por lo que, 3^3 es un factor de *n* lo cual es una contradicción. Por lo tanto, *q* no puede ser igual a 61 ■

CASO 3) Supóngase que $q=97$.

Sustituyendo $q=97$ en $\frac{(q+1)}{2}$ se tiene que $49|n$, es decir, $7^2|n$. Como 7 es primo, entonces $\sigma(7^2)=(3\times 19)|n$, y como 19 es primo $\sigma(19^2)=(3\times 127)|n$ y como 127 es primo $\sigma(127^2)=(3\times 5419)|n$. Así, se puede ver nuevamente que cada uno de estos tres factores de *n* contiene al 3, por lo que, 3^3 es un factor de *n* lo cual es una contradicción. Por lo tanto, *q* no puede ser igual a 97 ■

Se acaba de ver que el impar $n=q^{\alpha}P_1^2P_2^2P_3^2\cdots P_r^2$ no puede ser un perfecto si $3|n$, pero, llegaría el resultado de Steuerwald para demostrar que aunque 3 no divida a tal *n*, este seguirá sin poder ser un número perfecto impar. Y de esta manera, se eliminan todas las condiciones para asegurar que el número $n=q^{\alpha}P_1^2P_2^2P_3^2\cdots P_r^2$ no puede ser un perfecto impar.

Proposición 3: *Si* $n = q^{\alpha} P_1^2 P_2^2 P_3^2 \cdots P_r^2$ *donde* q *y los* P_i *son primos distintos tales que* $q \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4$, *entonces, n no es número perfecto impar.*

Demostración.

Por el resultado de la Proposición 2, bastará con demostrar aquí, que n no puede ser un número perfecto impar cuando 3 no lo divide. Esta demostración se hará por contradicción. Supóngase que $n = q^{\alpha} P_1^2 P_2^2 P_3^2 \cdots P_r^2$ es número perfecto impar y que $3 \nmid n$. Dado que por hipótesis $q \equiv 1 \pmod 4$ se deduce que q no puede ser igual a 3, y como $3 \nmid n$ se tiene que $P_i \not\equiv 0 \pmod 3$ para $i = 1, 2, \ldots, r$. Ahora, por ser n un perfecto impar tal que $\left(q^{\alpha}, P_1^2, P_2^2, \ldots, P_r^2\right) = 1$ entonces $\sigma(n) = \sigma(q^{\alpha})\sigma(P_1^2)\sigma(P_2^2)\sigma(P_3^2)\cdots\sigma(P_r^2) = 2q^{\alpha} P_1^2 P_2^2 P_3^2 \cdots P_r^2 = 2n$, pero, como los P_i son primos se tendrá que $\sigma(P_i^2) = P_i^2 + P_i + 1$ con lo cual se concluye que $P_i \not\equiv 1 \pmod 3$ (porque si $P_i \equiv 1 \pmod 3$ entonces $P_i = 3t + 1$, es decir, $\sigma(P_i^2)$ sería de la forma $3k$ y por tanto $3 | n$ contradiciéndose así la hipótesis de que $3 \nmid n$), por lo tanto, $P_i \equiv 2 \pmod 3$.[2]

Por otro lado, por el resultado: $\sigma(q^{\alpha}) = q^{\alpha} + q^{\alpha-1} + q^{\alpha-2} + \cdots + q + 1 = (q+1)\left(q^{\alpha-1} + q^{\alpha-3} + \cdots + q^2 + 1\right)$ se tiene que $(q+1) | \sigma(q^{\alpha})$, entonces, $q \not\equiv 2 \pmod 3$ (porque si $q \equiv 2 \pmod 3$ se tendría que $q = 3t + 2$ lo cual implicaría que $3 | \sigma(q^{\alpha})$, es decir, $3 | n$ y así se contradice la hipótesis de que $3 \nmid n$) y como $q \neq 3$, por tanto, $q \equiv 1 \pmod 3$. Además, dado que por hipótesis $q \equiv 1 \pmod 4$ entonces $q \equiv 1 \pmod{12}$.

Sea P_1 el más pequeño de los P_i. Así, $\sigma(P_1^2) = P_1^2 + P_1 + 1 < (P_1 + 1)(P_1 + 1) < P_2^2$ lo cual implica que $\sigma(P_1^2)$ es divisible a lo más por un P_i. De esta manera, se tendrán dos casos:

CASO 1) Sea $\sigma(P_1^2) = q^w$ con $1 \leq w \leq \alpha$.

Entonces $\sigma(P_1^2) = P_1^2 + P_1 + 1 = q^w$ pero por el Lema de Brauer [1943], resulta que esto es imposible cuando $1 < w \leq \alpha$. Por tanto, sólo se cumple cuando $w = 1$, es decir, para $\sigma(P_1^2) = q$.

---

[2] En este caso se consideró al sistema completo de residuos módulo 3 igual a: $\{0, 1, 2\}$. Por lo que, $q > 3$ será congruente a uno y sólo uno de los elementos de este conjunto.

CASO 2) Sea $\sigma(P_1^2)=q^w \cdot P_i$ con $0 \leq w \leq \alpha$ e $i=2,3,\ldots,r$.

Como ya se demostró que $P_i \equiv 2 \pmod 3$ y $q \equiv 1 \pmod 3$, entonces, se tiene que $\sigma(P_1^2) \equiv 2^2+2+1 \equiv 1 \pmod 3$ y $\sigma(P_1^2)=q^w \cdot P_i \equiv 1^w \cdot 2 \equiv 2 \pmod 3$, por tanto, se llega a una contradicción.

Finalmente, sea $h=\frac{q+1}{2}$. Se afirma que h es entero, divide a n y es congruente con uno módulo tres porque: Como $(q+1)|\sigma(q^\alpha)$ entonces $(q+1)|2n$, es decir, $2n=(q+1)t$ y por ser $q>3$ se tiene que $(q+1)\nmid 2$, además, q es impar por lo que $\frac{q+1}{2}$ es entero y $\frac{q+1}{2}|n$, ahora, dado que $q \equiv 1 \pmod 3$ se tiene que $q+1 \equiv 2 \pmod 3$ y por ser $q+1$ par y $(2,3)=1$ entonces $\frac{q+1}{2} \equiv 1 \pmod 3$.

De esta manera, se deduce que $\frac{q+1}{2}|n$ y $\frac{q+1}{2}\nmid q$ lo cual implica que $h=\frac{q+1}{2}|P_i$, con esto, se concluye que h es producto de los P_i. Si h es primo existe algún P_i tal que $h=P_i$, es decir, $h \equiv 2 \pmod 3$ pero no es posible porque $h \equiv 1 \pmod 3$, así, h tendrá al menos dos factores primos donde el más pequeño es menor o igual a $\sqrt{h}$, y dado que el más pequeño de los P_i es P_1 entonces $P_1 \leq \sqrt{h}$, y como también se sabe que $\sigma(P_1^2)=q$ se tiene que:

$q=P_1^2+P_1+1 \leq h+\sqrt{h}+1=\frac{q+3}{2}+\sqrt{\frac{q+1}{2}}$ por lo que $\frac{q-3}{2} \leq \sqrt{\frac{q+1}{2}}$, es decir, $q \leq 7$. Pero, así se contradice el resultado de que $q \equiv 1 \pmod{12}$. Por lo tanto, $n=q^\alpha P_1^2 P_2^2 P_3^2 \cdots P_r^2$ no es un número perfecto impar si $3 \nmid n$ ■

En esta misma dirección, se puede ver cómo se siguió trabajando sobre la propuesta original de Euler y así se obtuvo un resultado que involucra la idea hipotética de que los exponentes α, β_1, β_2, β_3, … β_r del número perfecto impar euleriano pudieran tener un divisor común, en este caso, se trabajó con el 3. Pero, la siguiente proposición deja ver la imposibilidad de que esto suceda.

Lema 1: $\sigma\left(p_i^{6\beta_i}\right) \equiv 1 \ (mod\ 3)$.

Demostración.

Como $p_i \equiv 0 \ (mod\ 3)$ ó $p_i \equiv 1 \ (mod\ 3)$ ó $p_i \equiv 2 \ (mod\ 3)$, entonces y al desarrollar $\sigma\left(p_i^{6\beta_i}\right)$ se tiene que $\sigma\left(p_i^{6\beta_i}\right) = p_i^{6\beta_i} + p_i^{6\beta_i - 1} + \cdots + p_i + 1$ entonces:

CASO 1) Si $p_i \equiv 0 \ (mod\ 3) \Rightarrow p_i^{6\beta_i} + p_i^{6\beta_i - 1} + \cdots + p_i + 1 \equiv 1 \ (mod\ 3)$.

Por lo tanto, $\sigma\left(p_i^{6\beta_i}\right) \equiv 1 \ (mod\ 3)$ ■

CASO 2) Si $p_i \equiv 1 \ (mod\ 3) \Rightarrow p_i^{6\beta_i} + p_i^{6\beta_i - 1} + \cdots + p_i + 1 \equiv 6\beta_i + 1 \equiv 1 \ (mod\ 3)$.

Por lo tanto, $\sigma\left(p_i^{6\beta_i}\right) \equiv 1 \ (mod\ 3)$ ■

CASO 3) Si $p_i \equiv 2 \ (mod\ 3) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} p_i^{6\beta_i} &\equiv 2^{6\beta_i} && (mod\ 3) \\ p_i^{6\beta_i - 1} &\equiv 2^{6\beta_i - 1} && (mod\ 3) \\ &\vdots && \\ p_i^{2} &\equiv 2^{2} && (mod\ 3) \\ p_i &\equiv 2 && (mod\ 3) \\ 1 &\equiv 1 && (mod\ 3) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sigma\left(p_i^{6\beta_i}\right) \equiv 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots \equiv 1 \ (mod\ 3)$ ■

Proposición 4: *Sea $n = q^{\alpha} P_1^{2\beta_1} P_2^{2\beta_2} P_3^{2\beta_3} \cdots P_r^{2\beta_r}$ un cubo donde q y los P_i son primos impares distintos tales que $q \equiv \alpha \equiv 1 \ (mod\ 4)$. Y si además $q \equiv 1 \ (mod\ 3)$ ó $3 \nmid n$, entonces, n no es un número perfecto impar.*

Demostración.

Supóngase que $n = q^{\alpha} P_1^{2\beta_1} P_2^{2\beta_2} P_3^{2\beta_3} \cdots P_r^{2\beta_r}$ es un perfecto impar y es un cubo, es decir, $\sigma(n) = 2n$ y $n = m^3$ con $m \in Z^+$.

Así, $\sigma\left(m^3\right) = 2\left(q^{3\alpha'} P_1^{6\beta'_1} P_2^{6\beta'_2} P_3^{6\beta'_3} \cdots P_r^{6\beta'_r}\right)$ para q y P_i primos impares diferentes. Y por ser la función $\sigma(n)$ multiplicativa, se tiene que: $\sigma(n) = \sigma\left(q^{3\alpha'}\right)\sigma\left(P_1^{6\beta'_1}\right)\sigma\left(P_2^{6\beta'_2}\right)\sigma\left(P_3^{6\beta'_3}\right)\cdots\sigma\left(P_r^{6\beta'_r}\right)$.

Pero, por el Lema 1 se deduce que $\sigma(n) \equiv \sigma\left(q^{3\alpha'}\right) \ (mod\ 3)$.

Ahora, por las condiciones de la hipótesis de la Proposición, se tendrán los siguientes dos casos:

CASO 1) Sea n un cubo y un perfecto impar. Y también supóngase que $q\equiv 1 \pmod{3}$, es decir, $q=3k+1$.

Como $\sigma(q^{3\alpha'}) = q^{3\alpha'}+q^{3\alpha'-1}+\cdots+q^2+q+1$, sustituyendo $q=3k+1$, se tiene que:

$$\sigma(q^{3\alpha'}) = (3k+1)^{3\alpha'}+(3k+1)^{3\alpha'-1}+\cdots+(3k+1)^2+(3k+1)+1 \quad \Rightarrow$$

$$\sigma(q^{3\alpha'}) = (3k_1+1)+(3k_2+1)+\cdots+(3k_{3\alpha'-1}+1)+(3k_{3\alpha'}+1)+1 \quad \Rightarrow$$

$$\sigma(q^{3\alpha'}) = 3t+3\alpha'+1 = 3\lambda+1, \text{ es decir, } \sigma(q^{3\alpha'}) \equiv 1 \pmod{3}.$$

Dado que se halló que $\sigma(n)\equiv\sigma(q^{3\alpha'}) \pmod{3}$, entonces, $\sigma(n)\equiv 1 \pmod{3}$ y por ser n un número perfecto: $\quad 2\left(q^{3\alpha'}P_1^{6\beta'_1}P_2^{6\beta'_2}P_3^{6\beta'_3}\cdots P_r^{6\beta'_r}\right)\equiv 1 \pmod{3} \quad \Rightarrow$

$$\left(q^{3\alpha'}P_1^{6\beta'_1}P_2^{6\beta'_2}P_3^{6\beta'_3}\cdots P_r^{6\beta'_r}\right)\equiv 2 \pmod{3} \quad \ldots(1).$$

Por otro lado, se tiene por hipótesis que $q\equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow q^{3\alpha'}\equiv 1^{3\alpha'}=1 \pmod{3}$ y como además los primos $P_i^{6\beta'_i}$ cumplen que $P_i^{6\beta'_i}\equiv 1 \pmod{3}$ para todo $i=1,2,\ldots,r$, entonces, $\left(q^{3\alpha'}P_1^{6\beta'_1}P_2^{6\beta'_2}P_3^{6\beta'_3}\cdots P_r^{6\beta'_r}\right)\equiv 1 \pmod{3}$ pero por (1) se produce una contradicción. Por lo tanto, $n=\left(q^{\alpha'}P_1^{2\beta'_1}P_2^{2\beta'_2}P_3^{2\beta'_3}\cdots P_r^{2\beta'_r}\right)^3$ no puede ser un número perfecto impar ■

CASO 2) Sea n un cubo perfecto impar. Y supóngase que $3\nmid n$.

Como $3\nmid n$ entonces $q\neq 3$. Y dado que en el Caso 1 se propuso que $q\equiv 1 \pmod{3}$, con lo cual no fue posible que n fuese perfecto impar, por el sistema completo de residuos modulo 3: $\{0,\ 1,\ 2\}$ se deduce que $q\equiv 2 \pmod{3}$.

Por otro lado, por hipótesis del *Factor de Euler*, $\alpha'\equiv 1 \pmod{4}$ por lo que $\alpha'=4k+1$, es decir, α' es impar. Y como $\sigma(q^{3\alpha'})=q^{3\alpha'}+q^{3\alpha'-1}+\cdots+q+1$ se tiene que:

$$q^{3\alpha'}\equiv 2^{3\alpha'}\equiv -1 \pmod{3}$$

$$q^{3\alpha'-1}\equiv 2^{3\alpha'-1}\equiv 1 \pmod{3}$$

$$q^{3\alpha'-2}\equiv 2^{3\alpha'-2}\equiv -1 \pmod{3}$$

$$q^{3\alpha'-3}\equiv 2^{3\alpha'-3}\equiv -1 \pmod{3}$$

$$\vdots$$

$$q\equiv -1 \pmod{3}$$

$$1\equiv 1 \pmod{3}$$

Así, se tendrá que $\sigma(q^{3\alpha'})\equiv 0 \pmod 3$ entonces $3|\sigma(q^{3\alpha'})$ y por tanto $3|n$, pero, esto es una contradicción porque se supuso que $3\nmid n$. Por lo tanto, $n=\left(q^{\alpha'}P_1^{2\beta'_1}P_2^{2\beta'_2}P_3^{2\beta'_3}\cdots P_r^{2\beta'_r}\right)^3$ no puede ser un número perfecto impar ■

Otra propiedad que se vincula a las anteriores en lo correspondiente a los perfectos impares eulerianos es el resultado que relaciona a un divisor primo conocido con los otros términos del posible número perfecto impar. Cabe mencionar que este tipo de resultados son de reciente aportación, siendo una de las direcciones en las que actualmente se trabajan los perfectos impares. Véase el articulo de Starni [2006], a continuación se presenta uno de los resultados de él.

Proposición 5: *Sea $n=q^{\alpha}3^{2\beta}Q^{2\beta}$ un entero positivo impar con q primo tal que $q\equiv\alpha\equiv 1 \pmod 4$ y sea Q un número libre de cuadrados donde $(Q,q)=(Q,3)=1$. Si n es número perfecto, entonces, $\sigma(q^{\alpha})\equiv 0 \pmod{3^{2\beta}}$.*

Demostración.

Como $n=q^{\alpha}3^{2\beta}Q^{2\beta}$ es número perfecto donde $(Q,q)=(Q,3)=1$ y por ser la función σ multiplicativa entonces $\sigma(n)=\sigma(q^{\alpha})\sigma(3^{2\beta})\sigma(Q^{2\beta})$. Por otro lado, dado que por hipótesis $n=q^{\alpha}3^{2\beta}(P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdots P_r)^{2\beta}$ con $q,\ 3,\ P_j$ primos impares diferentes se deduce que $\sigma(Q^{2\beta})=\sigma(P_1^{2\beta})\sigma(P_2^{2\beta})\sigma(P_3^{2\beta})\cdots\sigma(P_r^{2\beta})$ para $j=1,2,\ldots,r$. Ahora, distribúyanse estos primos P_j en dos clases:

1) $P_j\equiv 1 \pmod 6 \Rightarrow \sigma(P_j^{2\beta})=P_j^{2\beta}+P_j^{2\beta-1}+\cdots+P_j+1 \equiv 2\beta+1 \pmod 6$.

2) $P_j\equiv -1 \pmod 6 \Rightarrow \sigma(P_j^{2\beta})=P_j^{2\beta}+P_j^{2\beta-1}+\cdots+P_j+1 \equiv 1 \pmod 6$.

Así, para el producto $\sigma(Q^{2\beta})=\sigma(P_1^{2\beta})\sigma(P_2^{2\beta})\sigma(P_3^{2\beta})\cdots\sigma(P_r^{2\beta})$ se tiene que existe $m\geq 0$ tal que $\sigma(Q^{2\beta})\equiv(2\beta+1)^m \pmod 6$.

Por el resultado de McDaniel y Hagis [1975]: *Si $n=\pi^{\alpha}M^{2\beta}$ es número perfecto impar donde π es primo tal que $\pi\equiv\alpha\equiv 1 \pmod 4$ y M es un número impar libre de cuadrados con $(\pi,M)=1$,* *entonces,* $\beta \equiv 0 \pmod 3$ *ó* $\beta \equiv 2 \pmod 3$. Y como $n = q^{\alpha} 3^{2\beta} Q^{2\beta}$ se concluye que $\beta \not\equiv 1 \pmod 3$.

De esta manera, se tiene que: $(2\beta + 1)^m \equiv 2 \pmod 3$ si m es impar y $\beta \equiv 2 \pmod 3$.

$(2\beta + 1)^m \equiv 1 \pmod 3$ en otro caso.

Por lo anterior, es posible deducir que $\sigma(Q^{2\beta}) \equiv 1 \pmod 3$ ó $\sigma(Q^{2\beta}) \equiv 2 \pmod 3$, es decir, $3 \nmid \sigma(Q^{2\beta})$.

Y como $\sigma(n) = \sigma(q^{\alpha})\sigma(3^{2\beta})\sigma(Q^{2\beta}) = 2q^{\alpha} 3^{2\beta} Q^{2\beta}$ entonces $3^{2\beta} \mid \sigma(q^{\alpha})\sigma(3^{2\beta})\sigma(Q^{2\beta})$, pero, ya se vio que $3 \nmid \sigma(Q^{2\beta})$ y por ser $\sigma(3^{2\beta})$ igual a $3^{2\beta} + 3^{2\beta-1} + \cdots + 3 + 1$ se tiene que $(\sigma(3^{2\beta}),\ 3) = (\sigma(3^{2\beta}),\ 3^{2\beta}) = 1$. Así, sólo puede ocurrir que $3^{2\beta} \mid \sigma(q^{\alpha})$.

Por lo tanto, $\sigma(q^{\alpha}) \equiv 0 \pmod{3^{2\beta}}$ ■

1.1 POLINOMIOS CICLOTÓMICOS.

Una vertiente final para este breve análisis en lo correspondiente a los exponentes del número perfecto impar euleriano consiste del uso de los Polinomios Ciclotómicos.[3] Un ejemplo de esto puede verse en el siguiente resultado de los años 70 de Hagis y McDaniel [1972] que demostraron: $n=q^{\alpha}P_1^{2\beta_1}P_2^{2\beta_2}P_3^{2\beta_3}\cdots P_r^{2\beta_r}$ *no es un número perfecto impar si* $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_r=3$ *donde q y los* P_i *son primos impares distintos tales que* $q\equiv\alpha\equiv 1 \pmod 4$. En este caso se dará sólo un bosquejo de la demostración, para este fin, se requieren los siguientes tres resultados que ya eran conocidos en la época de los autores:

Proposición 1. $x^m-1=\prod_{d|m}F_d(x)$ *donde* $F_d(x)$ *es el d-ésimo polinomio ciclotómico.*

Proposición 2. *Si n es número perfecto impar, entonces,* $105\nmid n$.

Proposición 3. *Si n es número perfecto impar y si en* $n=q^{\alpha}P_1^{2\beta_1}P_2^{2\beta_2}P_3^{2\beta_3}\cdots P_r^{2\beta_r}$ *t es un divisor común de los* $(2\beta_i+1)$ *para* $i=1, 2, 3, \ldots, r$ *, entonces,* $t^4|n$.

En la demostración se asumirá que *n* sí es un número perfecto impar y se llegará a una contradicción. Usando la función aritmética σ y dado que *n* es perfecto euleriano se tiene que $\sigma(n)=2n=2q^{\alpha}P_1^6P_2^6P_3^6\cdots P_r^6$ y también $\sigma(n)$ se puede representar por la Proposición 1 como $2n=\sigma(q^{\alpha})\prod_{i=1}^{r}F_7(P_i)$, entonces, todo divisor primo impar de $F_7(P_i)$ es un divisor de *n* y por ser α impar $\left(\sigma(q^{\alpha})=q^{\alpha}+q^{\alpha-1}+q^{\alpha-2}+\cdots+q+1=(q+1)(q^{\alpha-1}+q^{\alpha-3}+\cdots+q^2+1)\right)$ se deduce que $(q+1)|\sigma(q^{\alpha})$, así, $\frac{(q+1)}{2}$ también dividirá a *n* al igual que todo divisor primo impar que divide a $(q+1)$. Por otro lado por la Proposición 3, $7^4|n$ y en consecuencia $F_7(7)=7^6+7^5+7^4+7^3+7^2+7+1=(29)(4733)$ divide a *n* con 29 y 4733 primos.

---

[3]Un Polinomio Ciclotómico es un polinomio irreducible (aquél que no puede expresarse como producto de otros dos) cuyas soluciones son las raíces de la unidad (es decir, se toman las raíces en los complejos), por ejemplo: $P_4(x)=x^2+1$. También, un Polinomio Ciclotómico es isomorfo con los llamados Números de De Moivre ya que $P_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-w^r)$ donde $w=e^{\frac{2\pi k}{n}}$, $0\le r<n$ y $(r,n)=1$, así, el polinomio para $n=12$ es tal que: $P_{12}(x)=(x-w)(x-w^5)(x-w^7)(x-w^{11})=x^4-x^2+1$. En el caso particular de los números perfectos, el Polinomio Ciclotómico al que se hará referencia es el de la forma: $F_n(p)=p^{n-1}+p^{n-2}+p^{n-3}+\cdots+p+1$ donde *p* es un primo.

De esta manera, si $q=29$ entonces $3\times 5\times 7|n$ lo cual contradice a la Proposición 2 (porque si $30|\sigma(q^{\alpha}) \Rightarrow 2\times 3\times 5|n$) por tanto $q\neq 29$, es decir, algún P_i será 29. Y como $F_7(29)=(7)(88009573)=7K$ divide a n donde K es un primo tal que $K\equiv 1 \pmod 4$, es necesario considerar los siguientes dos casos:

CASO 1) Si $K\neq q$ entonces $F_7(K)|n$.

Al desarrollar a $F_7(K)$ se halla que 7, 29, 43 y 71 son sus "factores primos pequeños" y dado que 43 y 71 no son congruentes con uno modulo cuatro se tiene que la factorización prima de $F_7(43)$ es $(7)(5839)(158341)$ y como el primo 883 es tal que $883|F_7(71)$, entonces, se han encontrado ocho valores primos que podría tomar *P* y que dividen a *n*: 29, 43, 71, 883, 4733, 5839, 158341 y 88009573. Los cuales son congruentes con uno modulo siete donde sólo 4733 ó 158341 podría ser *q*.

Así, y dado que $P\equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow F_7(P)\equiv 0 \pmod 7$ se concluye, por definición, que $7^7|n$. Pero, esto es una contradicción porque por hipótesis sólo $7^6|n$. Por lo tanto, el número impar de la forma $n=q^{\alpha}P_1^6P_2^6P_3^6\cdots P_r^6$ no puede ser perfecto ■

CASO 2) Si $K=q$, entonces, *n* es divisible por $\frac{(q+1)}{2}=53\times 830279=53R$ con 53 y *R* primos.

Dado que los factores primos menores a 10,000 de $F_7(R)$ son 43 y 1709, y por otro lado, como la factorización prima de $F_7(43)$ es $(7)(5839)(158341)$ y la de $F_7(53)$ es $(29)(778986167)$, entonces, se han encontrado siete valores primos que podría tomar *P* y que dividen a *n*: 29, 43, 1709, 4733, 5839, 158341 y 778986167. Los cuales son congruentes con uno modulo siete. Así, y dado que $P\equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow F_7(P)\equiv 0 \pmod 7$ se concluye, por definición, que $7^7|n$. Pero, esto es una contradicción porque por hipótesis sólo $7^6|n$. Por lo tanto, el número impar de la forma $n=q^{\alpha}P_1^6P_2^6P_3^6\cdots P_r^6$ no puede ser perfecto ■

Ahondando un poco más en el tema de los polinomios ciclotómicos, si se considera la forma euleriana de los números perfectos impares $n=q^{\alpha}P_1^{2\beta_1}P_2^{2\beta_2}P_3^{2\beta_3}\cdots P_r^{2\beta_r}$, y si se aplican las propiedades de la función sigma σ a las propiedades existentes entre los perfectos impares y los polinomios ciclotómicos: $\sigma(n)=2n=2q^{\alpha}P_1^{2\beta_1}P_2^{2\beta_2}P_3^{2\beta_3}\cdots P_r^{2\beta_r}=\sigma(q^{\alpha})\prod_{i=1}^{r}\sigma(P_i^{2\beta_i})$.

De lo que se deduce que: $$q^{\alpha}+q^{\alpha-1}+q^{\alpha-2}+q^{\alpha-3}+\cdots+q+1=\prod_{\substack{d|\alpha+1\\ d\neq 1}}F_d(q)$$

$$P_i^{2\beta_i}+P_i^{2\beta_i-1}+P_i^{2\beta_i-2}+\cdots+P_i+1=\prod_{\substack{d|2\beta_i+1\\ d\neq 1}}F_d(P).$$

Así, se trabajará con los divisores de dichos polinomios ciclotómicos $F_d(q)$ y $F_d(P)$, los cuales en este caso particular, son llamados el d-ésimo Polinomio Mónico Ciclotómico.[4] Con tales elementos, se propuso en el artículo de McCarthy [1957] el siguiente teorema: *Sea t el más pequeño de los divisores de* $\frac{\upsilon(n)}{2}$, *entonces, el número n con la factorización de Euler no es perfecto impar si tiene un divisor* t' *tal que* $t>t'$ *y* $t'\nmid q+1$. *En particular, n no es número perfecto si* $t>q$.[5] Cabe mencionar aquí, que los resultados obtenidos para los perfectos impares vía los polinomios ciclotómicos se sostenían en buena medida por el Teorema de Kronecker que enuncia: *Si s es un divisor primo del polinomio ciclotómico* $F_m(x)$ *entonces* $s|m$ *ó* $s\equiv 1 \pmod{m}$.

Para terminar esta sección sobre la forma de los números perfectos impares, no se puede dejar de señalar que además de la caracterización aportada por Leonhard Euler $n=q^{\alpha}P_1^{2\beta_1}P_2^{2\beta_2}P_3^{2\beta_3}\cdots P_r^{2\beta_r}$ que se ha estado exponiendo aquí, se tiene el Teorema de Touchard, un teorema que trata sobre las posibles formas de un perfecto impar que involucra a las clases residuales.

---

[4]Un Polinomio Mónico Ciclotómico es aquel cuyo coeficiente principal es uno.

[5]La Función Cantidad o Número de Divisores es una función numérica que proporciona el número de divisores de un entero positivo y está definida por: $\upsilon(n)=\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i+1)$ donde $n=\prod_{i=1}^{k}P_i^{\alpha_i}$. Por ejemplo, el número de divisores positivos de 756 es 24 porque como $756=2^2\cdot 3^3\cdot 7$ entonces $\upsilon(756)=(2+1)(3+1)(1+1)=24$.

Lema 2: *Sea n un número impar tal que $n \equiv -1 \pmod 6$ entonces n no puede ser un perfecto impar.*

Demostración.

Supóngase que n es un perfecto impar y que $n \equiv -1 \pmod 6$.

Es decir, $n = 6k - 1$ y $\sigma(n) = 2n = 2(6k - 1) = 6k' - 2$.

Así, por definición, $2n \equiv -2 \pmod 6 \Rightarrow n \equiv -1 \pmod 3$.

Por otro lado, dado que todo número es congruente a -1, 0 ó 1 módulo tres, entonces, todo cuadrado será congruente a 0 ó 1 módulo tres y como $n \equiv -1 \pmod 3$ se deduce que n no puede ser un cuadrado, y por consiguiente, $\sqrt{n}$ no es divisor de n.

De esta manera, es posible proponer a $\sigma(n) = \sum_{d_i < \sqrt{n}} \left(d_i + \frac{n}{d_i} \right)$ con d_i y $\frac{n}{d_i}$ divisores de n.

Ahora, como $n \equiv -1 \pmod 3$ y para cada divisor d_i de n se cumple que: $d_i \cdot \frac{n}{d_i} \equiv -1 \pmod 3$, entonces, se tienen las siguientes dos relaciones:

1) $d_i \equiv 1 \pmod 3$ y $\frac{n}{d_i} \equiv -1 \pmod 3$ ó

2) $d_i \equiv -1 \pmod 3$ y $\frac{n}{d_i} \equiv 1 \pmod 3$.

Pero, de ambas posibilidades resulta que $d_i + \frac{d_i}{n} \equiv 0 \pmod 3$, es decir, $\sigma(n) \equiv 0 \pmod 3$.

Llegándose así a una contradicción porque por hipótesis $\sigma(n) \equiv -2 \pmod 6$.

Por lo tanto, si $n \equiv -1 \pmod 6$ entonces n no es un número perfecto impar ■

Teorema de Touchard: *Si n es un número perfecto impar con las características eulerianas, entonces, n es de la forma $12k+1$ ó $36k+9$.*

Demostración.

Sea $n = q^{\alpha} P_1^{2\beta_1} P_2^{2\beta_2} P_3^{2\beta_3} \cdots P_r^{2\beta_r}$ un número perfecto impar. Se afirma que para alguna $k \in Z^+$ n es de la forma $4k+1$ ya que por el Factor de Euler $q \equiv 1 \pmod 4$ y los primos $P_i^{2\beta_i}$ son tales que $P_i^{2\beta_i} = 4k+1$ (porque cada uno de los primos impares P_i es congruente a 1 ó -1 modulo cuatro y por ser sus potencias pares, entonces, $P_i^{2\beta_i}$ tiene la forma $4k+1$).

Por otro lado, dado que n es impar se deduce que n es congruente a -1, 1 ó 3 módulo seis y como por hipótesis n es perfecto, entonces, por el Lema 2 se llega a que $n \equiv 1 \pmod 6$ ó $n \equiv 3 \pmod 6$.

CASO 1) Supóngase que $n \equiv 1 \pmod 6$.

Es decir, $n = 6m+1$ pero como también $n = 4k+1$ se tiene que $3m = 2k$, por lo que $2 | 3m$ y dado que $2 \nmid 3$ entonces $2 | m \Rightarrow m = 2w$ lo cual implica que $n = 6m+1 = 6(2w)+1 = 12w+1$. Por lo tanto n, número perfecto impar, es de la forma $12k+1$ ■

CASO 2) Supóngase que $n \equiv 3 \pmod 6$.

Es decir, $n = 6z+3$ pero como también $n = 4k+1$, se tiene que $3z+1 = 2k$, por lo que, $3z+1$ es par. Entonces z tiene que ser impar con la forma $z = 2h+1$ lo cual implica que $n = 6z+3 = 6(2h+1)+3 = 3(4h+3)$.

De esta manera, se tienen dos casos:

i) Si $3 \nmid h \Rightarrow (3, 4h+3) = 1$.

Como $\sigma(n) = \sigma(3(4h+3)) = \sigma(3)\sigma(4h+3) = 4\sigma(4h+3) = 2 \times 2\sigma(4h+3)$ se concluye que $n = 2r$ es par, pero por hipótesis, n es un número impar. Por tanto, $3 | h$.

ii) Si $3 | h \Rightarrow h = 3u$.

Sustituyendo h en n se tiene que: $n = 3(4h+3) = 3(4(3u)+3) = 36u+9$. Por lo tanto n, número perfecto impar, es de la forma $36k+9$ ■ [6]

[6] La demostración original del Teorema de Touchard [1953] es complicada, pero, puede consultarse otra más accesible en el artículo de Holdener [2002]. También, Suryanarayana [1959] realizó otra demostración y un tiempo después llegó la de Raghavachari [1966].

2. EL TAMAÑO MÍNIMO DE UN PERFECTO IMPAR.

La construcción de las fronteras a partir de donde pueden habitar los números perfectos impares presenta varios autores. Se tiene la frontera más conocida: 2×10^{6} —no pueden existir perfectos impares menores a este número— obtenida por Turcaninov en 1908, esta frontera fue mejorada a 10^{8} por Bernhard [1949] y también por Kanold con 1.4×10^{14} en [1944]. Ore [1948] enunció en su obra *Historia de la Teoría de los Números* otra aproximación de 10^{18}. Resultados más recientes de Hagis [1983] y Chein [1979] refieren la necesidad de tener un mínimo de 37 factores primos con por lo menos 8 factores diferentes si $3|n$, y otros resultados de Hagis [1983] y Kishore [1983] enuncian que se requieren al menos 11 primos diferentes si *n* no es divisible por 3. Así, y por los cálculos de Brent, Cohen y Riele [1991] se sabe que no existen perfectos impares menores que 10^{300}, posteriormente, siguió William Lipp con técnicas semejantes para demostrar que un número perfecto impar tendría que ser mayor que 10^{500}. Una muestra de cómo se han construido estas fronteras que acotan la existencia de los perfectos impares puede verse en la construcción que realiza Bernhard en su artículo de [1949].

2.1 CONSTRUCCIÓN DE BERNHARD.

Dado que ya se conocen una serie de propiedades referentes a los perfectos impares, es posible vincular unas con otras para tratar de encontrar intervalos dentro del conjunto de los naturales donde no pueden vivir los números perfectos impares. Se sabe por la factorización prima que un número perfecto impar es de la forma: $N = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_m^{\alpha_m} P_1^{\beta_1} P_2^{\beta_2} \cdots P_n^{\beta_n}$ donde los q_j y los P_i son primos impares distintos. Por Euler se encontró que los exponentes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ son enteros impares donde $m = 1$ y además se cumple que $q_1 \equiv 1 \pmod 4$ al igual que $\alpha_1 \equiv 1 \pmod 4$, también se dedujo que los exponentes $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ son enteros pares. Así y en una primea fase, Sylvester demostró que el mínimo de factores primos diferentes que se requería para los P_i eran cuatro, y que junto con el Factor de Euler $q_1^{\alpha_1}$ resultaba entonces que se necesitarían de por lo menos cinco factores primos diferentes para la posible existencia de un número perfecto impar (es decir, $n = q_1^{\alpha_1} P_1^{2\beta_1} P_2^{2\beta_2} P_3^{2\beta_3} P_4^{2\beta_4}$). Steuerwald estableció una condición para las potencias $2\beta_i$ de los primos P_i, la cual, las restringe a que puedan ser iguales a dos por lo que no es posible tener $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_n = 1$. Para los años 40, Brauer demostró que $2\beta_i \neq 4$ cuando $2\beta_1 = 2\beta_2 = \ldots = 2\beta_{i-1} = 2\beta_{i+1} = \ldots = 2\beta_n = 2$. Y finalmente, otra propiedad de Sylvester, es aquella que enuncia: $35 \nmid n$, así, se tiene que $5 \nmid n$ ó $7 \nmid n$ ó ambos no lo dividen. Ahora, aplicando al número impar $N = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_m^{\alpha_m} P_1^{\beta_1} P_2^{\beta_2} \cdots P_n^{\beta_n}$ las anteriores propiedades que ya se demostró que poseen los perfectos impares se llega a que el número perfecto impar *n* tiene por lo menos la forma $n = q_1^{\alpha_1} P_1^{2\beta_1} P_2^{2\beta_2} P_3^{2\beta_3} P_4^{2\beta_4}$ donde q_1 podría ser 5 ó 13 ó 17 (se toman sólo estos primos porque se quiere encontrar la cota mínima) y por conveniencia tómese $\alpha = 1$, en otra dirección, dado que todas las $2\beta_i$ no pueden ser igual a dos y como también el valor mínimo que pueden tomar es dos a excepción de una que al menos debe ser seis, entonces, para tener el tamaño mínimo de *n* conviene que uno de sus factores primos sea 3^6 y que q_1 tome el valor de 17 ya que los factores primos 3, 5 y 7 no pueden estar simultáneamente en *n* (porque $35 \nmid n$ y $105 \nmid n$), por lo tanto, la mínima propuesta de un entero impar que cumpla las condiciones de un número perfecto es: $17 \times 3^6 \times 5^2 \times 11^2 \times 13^2 > 6 \times 10^9$ y el siguiente sería $13 \times 3^6 \times 5^2 \times 11^2 \times 17^2 > 8 \times 10^9$. Pero, resulta que ambos números impares no son perfectos.

Un resultado que viene a confirmar que los números perfectos impares no pueden existir en un rango pequeño de los enteros positivos, se produjo al estudiar el comportamiento de la suma de los recíprocos de los factores primos de un perfecto impar. Cabe recordar aquí, que en el Capítulo I se demostró que la suma de los recíprocos de los divisores de un número perfecto par es 2, en dicho caso, se tenía como primer divisor al 2 por lo que rápidamente la suma parcial de dichos recíprocos era igual a 0.5. Sin embargo, para el caso de un perfecto impar —si es que existe— se sabe por el trabajo realizado en las últimas décadas que la suma de los recíprocos de sus factores primos se va acercando a 0. El siguiente resultado sobre la suma de los recíprocos de los factores primos del posible perfecto impar, hace ver que sus factores primos serían "grandes" y esto se refuerza con lo mencionado al principio de esta sección sobre las posibles cotas de *n*. El teorema que se presenta a continuación se expone en el artículo de Suryanarayana [1963] (la demostración del artículo original se encuentra de forma condensada, por lo que, en el presente trabajo de tesis se han anexado algunas explicaciones para poder darle un mejor seguimiento) cuya demostración abarcará las próximas siete hojas, a pesar de que sólo se proporcionará la demostración del primer resultado (el caso α), ya que la extensión completa de la misma es muy amplia, y además los otros tres casos restantes se demuestran de manera semejante.

<u>**Teorema de D. Suryanarayana:**</u> *Si n es un número perfecto impar y d es divisor de n entonces:* [7]

(α) *Sea n de la forma* $n=12t+1$ *y* $5|n \Rightarrow \frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{\log\frac{48}{35}}{11\log\frac{11}{10}} < \sum_{d|n}\frac{1}{d} < \frac{1}{5}+\frac{1}{2738}+\log\frac{50}{31}$.

(β) *Sea n de la forma* $n=12t+1$ *y* $5\nmid n \Rightarrow \frac{1}{7}+\frac{\log\frac{12}{7}}{11\log\frac{11}{10}} < \sum_{d|n}\frac{1}{d} < \log 2$.

(γ) *Sea n de la forma* $n=36t+9$ *y* $5|n \Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{\log\frac{16}{15}}{17\log\frac{17}{16}} < \sum_{d|n}\frac{1}{d} < \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\log\frac{65}{61}$.

(δ) *Sea n de la forma* $n=36t+9$ *y* $5\nmid n \Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{\log\frac{4}{3}}{7\log\frac{7}{6}} < \sum_{d|n}\frac{1}{d} < \frac{1}{3}+\frac{1}{338}+\log\frac{18}{13}$.

---

[7]De este teorema se puede concluir que la suma de los recíprocos de los divisores primos del posible perfecto impar esta acotada por los valores del intervalo (0.3 , 0.59).

Demostración.

El desarrollo de esta demostración se basa en la construcción de la Relación (A) y de la Relación (B), que se proporcionan enseguida:

i) Relación (A).

Sea n número perfecto impar, por la forma euleriana $n=P_0^{\alpha_0}P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}P_3^{\alpha_3}\cdots P_r^{\alpha_r}$ donde los P_i para $i=0,1,2,3,\ldots,r$ son primos distintos. Como n es perfecto, entonces, $\sigma(n)=2n=2\prod_{i=0}^{r}P_i^{\alpha_i}$ y también $\sigma(n)=\sigma(P_0^{\alpha_0})\sigma(P_1^{\alpha_1})\sigma(P_2^{\alpha_2})\sigma(P_3^{\alpha_3})\cdots\sigma(P_r^{\alpha_r})=\prod_{i=0}^{r}\frac{P_i^{\alpha_i+1}-1}{P_i-1}$.

Así, $2\prod_{i=0}^{r}P_i^{\alpha_i}=\prod_{i=0}^{r}\frac{P_i^{\alpha_i+1}-1}{P_i-1}$ $\Rightarrow$ $2\prod_{i=0}^{r}P_i-1 = \prod_{i=0}^{r}\frac{P_i^{\alpha_i+1}-1}{P_i^{\alpha_i}}$

$$\Rightarrow\ 2\prod_{i=0}^{r}\frac{P_i-1}{P_i} = \prod_{i=0}^{r}\frac{P_i^{\alpha_i+1}-1}{P_i^{\alpha_i+1}}$$

$$\Rightarrow\ 2\prod_{i=0}^{r}\left(1-\frac{1}{P_i}\right)=\prod_{i=0}^{r}\left(1-\frac{1}{P_i^{\alpha_i+1}}\right).$$

Dado que cada factor de $\prod_{i=0}^{r}\left(1-\frac{1}{P_i^{\alpha_i+1}}\right)$ es menor que 1 se deduce que $2\prod_{i=0}^{r}\left(1-\frac{1}{P_i}\right)<1$.

Ahora, aplicando la función logaritmo a ambos lados de la desigualdad se tiene que:

$$log\,2+\sum_{i=0}^{r}log\left(1-\frac{1}{P_i}\right)<log\,1$$

$$\Rightarrow\ log\,2<\sum_{i=0}^{r}-log\left(1-\frac{1}{P_i}\right)$$

$$\Rightarrow\ log\,2<\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i}+\frac{1}{2P_i^2}+\frac{1}{3P_i^3}+\cdots$$

$$\Rightarrow\ log\,2<\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i^2}+\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i^3}+\cdots$$

Esta es la Relación (A).[8]

---

[8]Es necesario recordar aquí el desarrollo de la serie logaritmo natural: $ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots$, la cual, será utilizada en varias ocasiones en el desarrollo de esta demostración. En Teoría de los Números al "ln" (logaritmo natural) se le considera con la notación "log".

ii) Relación (B).

Si a la igualdad $2\prod_{i=0}^{r}\left(1-\frac{1}{P_i}\right)=\prod_{i=0}^{r}\left(1-\frac{1}{P_i^{\alpha_i+1}}\right)$ que se halló en la construcción de la Relación (A) se le aplica la función logaritmo, se tiene que:

$$log\,2+\sum_{i=0}^{r}log\left(1-\frac{1}{P_i}\right)=\sum_{i=0}^{r}log\left(1-\frac{1}{P_i^{\alpha_i+1}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad log\,2=\sum_{i=0}^{r}log\left(1-\frac{1}{P_i^{\alpha_i+1}}\right)+\sum_{i=0}^{r}-log\left(1-\frac{1}{P_i}\right)$$

$$\Rightarrow \quad log\,2=\sum_{i=0}^{r}\left[\left(-\frac{1}{P_i^{\alpha_i+1}}-\frac{1}{2P_i^{(\alpha_i+1)^2}}-\frac{1}{3P_i^{(\alpha_i+1)^3}}-\cdots\right)+\left(\frac{1}{P_i}+\frac{1}{2P_i^2}+\frac{1}{3P_i^3}+\cdots\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad log\,2=\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i}+\sum_{i=0}^{r}\left[\left(\frac{1}{2P_i^2}-\frac{1}{P_i^{\alpha_i+1}}\right)+\left(\frac{1}{3P_i^3}-\frac{1}{2P_i^{(\alpha_i+1)^2}}\right)+\cdots\right]$$

$$\Rightarrow \quad log\,2=\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i}+\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)P_i^{j+1}}-\frac{1}{jP_i^{(\alpha_i+1)j}}\right).$$

Si a esta cadena de sumandos de $log\,2$ se le separan los términos correspondientes a $i=0$, entonces: $log\,2=\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)P_i^{j+1}}-\frac{1}{jP_i^{(\alpha_i+1)j}}\right)+\left(\frac{1}{2P_0^2}-\frac{1}{P_0^{\alpha_0+1}}\right)+\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)P_0^{j+1}}-\frac{1}{jP_0^{(\alpha_0+1)j}}\right).$

Esta es la Relación (B).

Siguiendo con el desarrollo de la demostración, ahora, se tendrán cuatro casos para demostrar que $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{log\frac{48}{35}}{11log\frac{11}{10}}<\sum_{d|n}\frac{1}{d}<\frac{1}{5}+\frac{1}{2738}+log\frac{50}{31}$ bajo la suposición de que $7|n$ ó $7\nmid n$.

CASO 1) a) Por demostrar que $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{log\frac{48}{35}}{11log\frac{11}{10}}<\sum_{d|n}\frac{1}{d}$ suponiendo que $7|n$ y que n es de la forma $n=12t+1$ y $5|n$.

Sin perdida de generalidad, sean $P_1<P_2<P_3<\cdots<P_r$. Como $n=12t+1=3t'+1$ se deduce que $3\nmid n$ y por hipótesis se sabe que $5|n$ y $7|n$, así, tómense a $P_1=5$, $P_2=7$ y $P_i\geq 11$ para $3\leq i\leq r$ Desarrollando a estos primos $P_1=5$ y $P_2=7$ en la Relación (A) se tiene que:

$$log\,2<-log\left(1-\frac{1}{5}\right)-log\left(1-\frac{1}{7}\right)+\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1,2}}^{r}\frac{1}{P_i}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1,2}}^{r}\frac{1}{P_i^2}+\frac{1}{3}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1,2}}^{r}\frac{1}{P_i^3}+\cdots$$

$$\Rightarrow \qquad log\,2<log\frac{5}{4}+log\frac{7}{6}+\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1,2}}^{r}\frac{1}{P_i}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1,2}}^{r}\frac{1}{P_i^2}+\frac{1}{3}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1,2}}^{r}\frac{1}{P_i^3}+\cdots \ (1)$$

Por otro lado, por el resultado: *Si n es número perfecto impar euleriano* $n=q^{\alpha}P_1^{2\beta_1}P_2^{2\beta_2}P_3^{2\beta_3}\cdots P_r^{2\beta_r}$ *con la forma* $n=12k+1$ *entonces* $q\equiv 1\ (mod\ 12)$. Se concluye que $P_0\geq 13$ y como $P_i\geq 11$ para $3\leq i\leq r$ entonces $\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1,2}}^{r}\frac{1}{P_i^2}<\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1,2}}^{r}\frac{1}{11P_i}$, $\frac{1}{3}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1,2}}^{r}\frac{1}{P_i^3}<\frac{1}{3}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1,2}}^{r}\frac{1}{11^2P_i}$, $\cdots$

Sustituyendo esto en (1) se tiene que:

$$log\,2<log\frac{5}{4}+log\frac{7}{6}+\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1,2}}^{r}\frac{1}{P_i}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1,2}}^{r}\frac{1}{11P_i}+\frac{1}{3}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1,2}}^{r}\frac{1}{11^2P_i}+\cdots$$

$$\Rightarrow\ log\,2<log\frac{5}{4}+log\frac{7}{6}+\left(1+\frac{1}{2\times 11}+\frac{1}{3\times 11^2}+\cdots\right)\left(\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1,2}}^{r}\frac{1}{P_i}\right)$$

$$\Rightarrow\ log\,2<log\frac{5}{4}+log\frac{7}{6}+11\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{2\times 11^2}+\frac{1}{3\times 11^3}+\cdots\right)\left(\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$$

$$\Rightarrow\ log\,2<log\frac{5}{4}+log\frac{7}{6}+11log\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{log\frac{48}{35}}{11log\frac{11}{10}}<\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i} \quad \blacksquare$$

CASO 2) a) Por demostrar que $\sum_{d|n}\frac{1}{d}<\frac{1}{5}+\frac{1}{2738}+log\frac{50}{31}$ suponiendo que $7|n$ y que n es de la forma $n=12t+1$ con $5|n$.

Por la Relación (B) se tiene que:

$log\,2=\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)P_i^{j+1}}-\frac{1}{jP_i^{(\alpha_i+1)j}}\right)+\left(\frac{1}{2P_0^2}-\frac{1}{P_0^{\alpha_0+1}}\right)+\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)P_0^{j+1}}-\frac{1}{jP_0^{(\alpha_0+1)j}}\right)$. De la cual se deduce que cada uno de los términos de $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)P_i^{j+1}}-\frac{1}{jP_i^{(\alpha_i+1)j}}\right)$ es positivo, esto porque se cumple la desigualdad: $jP_i^{(\alpha_i+1)j}-(j+1)P_i^{j+1}\geq jP_i^{3j}-(j+1)P_i^{j+1}$ ya que por la forma euleriana de n, $\alpha_i\geq 2$ para $i\geq 1$ y como $jP_i^{3j}-(j+1)P_i^{j+1}=j\left(P_i^{3j}-P_i^{j+1}\right)-P_i^{j+1}=P_i^{j+1}\left(j\left(P_i^{2j-1}-1\right)-1\right)$ tal que $P_i^{j+1}\left(j\left(P_i^{2j-1}-1\right)-1\right)\geq 0$ si $j\geq 1$ entonces $jP_i^{(\alpha_i+1)j}-(j+1)P_i^{j+1}\geq 0 \Rightarrow jP_i^{(\alpha_i+1)j}\geq (j+1)P_i^{j+1}$ $\Rightarrow \frac{1}{(j+1)P_i^{j+1}}-\frac{1}{jP_i^{(\alpha_i+1)j}}\geq 0$. Y por otro lado, también se deduce que cada uno de los términos de $\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)P_0^{j+1}}-\frac{1}{jP_0^{(\alpha_0+1)j}}\right)$ es positivo, esto porque se cumple la desigualdad: $jP_0^{(\alpha_0+1)j}-(j+1)P_0^{j+1}\geq jP_0^{2j}-(j+1)P_0^{j+1}$ ya que por la forma euleriana de n, $\alpha_0\geq 1$ y como $jP_0^{2j}-(j+1)P_0^{j+1}=j\left(P_0^{2j}-P_{0i}^{j+1}\right)-P_0^{j+1}=P_0^{j+1}\left(j\left(P_0^{j-1}-1\right)-1\right)$ tal que $P_0^{j+1}\left(j\left(P_0^{j-1}-1\right)-1\right)\geq 0$ si $j\geq 2$ entonces $jP_0^{(\alpha_0+1)j}-(j+1)P_0^{j+1}\geq 0 \Rightarrow jP_0^{(\alpha_0+1)j}\geq (j+1)P_0^{j+1} \Rightarrow \frac{1}{(j+1)P_0^{j+1}}-\frac{1}{jP_0^{(\alpha_0+1)j}}\geq 0$. Ahora, como por hipótesis se sabe que $3\nmid n$, $5|n$ y $7|n$ se tomarán los primos $P_1=5$ y $P_2=7$. Suprimiendo en la Relación (B) a la suma $\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)P_0^{j+1}}-\frac{1}{jP_0^{(\alpha_0+1)j}}\right)$ y a los términos correspondientes a $i\neq 1$ y $i\neq 2$ en $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)P_i^{j+1}}-\frac{1}{jP_i^{(\alpha_i+1)j}}\right)$ se tiene que:

$$log\,2>\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)5^{j+1}}-\frac{1}{j5^{(\alpha_1+1)j}}\right)+\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)7^{j+1}}-\frac{1}{j7^{(\alpha_2+1)j}}\right)+\left(\frac{1}{2P_0^2}-\frac{1}{P_0^{\alpha_0+1}}\right) \qquad \ldots(1)$$

Por otra parte, como $\left(\frac{1}{2P_0^2}-\frac{1}{P_0^{(\alpha_0+1)}}\right)\geq -\frac{1}{2P_0^2}$ porque $\alpha_0\geq 1$ y $-\frac{1}{2P_0^2}\geq -\frac{1}{338}$ ya que $P_0\geq 13$ entonces $\left(\frac{1}{2P_0^2}-\frac{1}{P_0^{(\alpha_0+1)}}\right)\geq -\frac{1}{338}$ $\qquad \ldots(2)$

Además, como $\alpha_1\geq 2$ entonces $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)5^{j+1}}-\frac{1}{j5^{(\alpha_1+1)j}}\right)\geq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)5^{j+1}}-\frac{1}{j5^{3j}}\right)$ $\qquad \ldots(3)$

Y también se afirma que $\alpha_2 \geq 4$, y dado que $\alpha_2 = 2$ implicaría que $\sigma\left(P_2^{\alpha_2}\right)=\sigma\left(7^2\right)=57=3\times 19$, y por definición se tendría que $\sigma\left(P_2^{\alpha_2}\right)|\sigma(n) \Rightarrow 3|n$ lo cual no es posible porque por hipótesis $3\nmid n$, entonces, $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)7^{j+1}}-\frac{1}{j7^{(\alpha_2+1)j}}\right)\geq\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)7^{j+1}}-\frac{1}{j7^{5j}}\right) \quad \ldots(4)$

Relacionando las últimas cuatro desigualdades (1), (2), (3), (4) se tiene que:

$$log\,2>\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)5^{j+1}}-\frac{1}{j5^{(\alpha_1+1)j}}\right)+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)7^{j+1}}-\frac{1}{j7^{(\alpha_2+1)j}}\right)+\left(\frac{1}{2P_0^2}-\frac{1}{P_0^{(\alpha_0+1)}}\right)$$

$$\Rightarrow\ log\,2>\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)5^{j+1}}-\frac{1}{j5^{3j}}\right)+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)7^{j+1}}-\frac{1}{j7^{5j}}\right)-\frac{1}{338}$$

$$\Rightarrow\ log\,2>\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i}+\left(-log\left(1-\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}+log\left(1-\frac{1}{5^3}\right)\right)+\left(-log\left(1-\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{7}+log\left(1-\frac{1}{7^5}\right)\right)-\frac{1}{338}$$

$$\Rightarrow\ log\,2>\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i}+\left(log\left(\tfrac{31}{25}\right)-\frac{1}{5}\right)+\left(log\left(\tfrac{2801}{2401}\right)-\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{338}$$

$$\Rightarrow\ \sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i}<\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{338}+log\left(\tfrac{50\times 2401}{31\times 2801}\right).$$

Pero como $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{338}+log\left(\tfrac{50\times 2401}{31\times 2801}\right)<\frac{1}{5}+\frac{1}{2738}+log\left(\tfrac{50}{31}\right)$.

Por lo tanto, $\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i}<\frac{1}{5}+\frac{1}{2738}+log\frac{50}{31}$ ■

CASO 1) b) Por demostrar que $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{log\frac{48}{35}}{11log\frac{11}{10}}<\sum_{d|n}\frac{1}{d}$ suponiendo que $7\nmid n$ y que n es de la forma $n=12t+1$ tal que $5|n$.

Sin perdida de generalidad, sean $P_1<P_2<P_3<\cdots<P_r$. Como $n=12t+1=3t'+1$ se deduce que $3\nmid n$ y por hipótesis se sabe que $5|n$ y $7\nmid n$, así, tómense a $P_1=5$ y $P_i\geq 11$ para $2\leq i\leq r$. Por otro lado, por ser n euleriano se sabe que $P_0\equiv\alpha_0\equiv 1 \pmod 4$ y también por el resultado: *Si n es número perfecto impar euleriano $n=q^{\alpha}P_1^{2\beta_1}P_2^{2\beta_2}P_3^{2\beta_3}\cdots P_r^{2\beta_r}$ con la forma $n=12k+1$ entonces $q\equiv 1 \pmod{12}$*. Se concluye que $P_0\geq 13$ y además se afirma que $P_0\neq 13$, esto porque como α_0 es impar entonces $\sigma\left(P_0^{\alpha_0}\right)=(P_0+1)\left(P_0^{\alpha_0-1}+P_0^{\alpha_0-3}+\cdots+P_0^2+1\right)$ por tanto $(P_0+1)|\sigma\left(P_0^{\alpha_0}\right)$, es decir,

$(P_0+1)|\sigma(n) \Rightarrow (P_0+1)|2n \Rightarrow \dfrac{(P_0+1)}{2}|n$, y en consecuencia si $P_0=13$ se tendría que $7|n$ lo cual contradice la hipótesis de que $7\nmid n$. Y por ser P_0 de la forma $12k+1$ entonces $P_0\geq 37>11$. Desarrollando el primo 5 en la Relación (A) se tiene que:

$$log\,2<-log\left(1-\frac{1}{5}\right)+\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{r}\frac{1}{P_i}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{r}\frac{1}{P_i^2}+\frac{1}{3}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{r}\frac{1}{P_i^3}\cdots \Rightarrow log\,2<log\frac{5}{4}+\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{r}\frac{1}{P_i}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{r}\frac{1}{P_i^2}+\frac{1}{3}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{r}\frac{1}{P_i^3}\cdots \quad (1)$$

Como $P_0\geq 37>11$ y $P_i\geq 11$ para $2\leq i\leq r$ entonces $\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{r}\frac{1}{P_i^2}<\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{r}\frac{1}{11P_i},\ \frac{1}{3}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{r}\frac{1}{P_i^3}<\frac{1}{3}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{r}\frac{1}{11^2P_i},\ \cdots$

Sustituyendo en (1) se tiene que:

$$log\,2<log\frac{5}{4}+\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{r}\frac{1}{P_i}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{r}\frac{1}{11P_i}+\frac{1}{3}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{r}\frac{1}{11^2P_i}+\cdots \Rightarrow log\,2<log\frac{5}{4}+\left(1+\frac{1}{2\times 11}+\frac{1}{3\times 11^2}+\cdots\right)\left(\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{r}\frac{1}{P_i}\right)$$

$$\Rightarrow log\,2<log\frac{5}{4}+11\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{2\times 11^2}+\frac{1}{3\times 11^3}+\cdots\right)\left(\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i}-\frac{1}{5}\right) \Rightarrow log\,2<log\frac{5}{4}+11log\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i}-\frac{1}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}+\frac{log\frac{8}{5}}{11log\frac{11}{10}}<\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i}.$$

Pero como $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{log\frac{48}{35}}{11log\frac{11}{10}}<\frac{1}{5}+\frac{log\frac{8}{5}}{11log\frac{11}{10}}$.

Por lo tanto, $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{log\frac{48}{35}}{11log\frac{11}{10}}<\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i}$ ■

CASO 2) b) Por demostrar que $\sum_{d|n}\frac{1}{d}<\frac{1}{5}+\frac{1}{2738}+log\frac{50}{31}$ suponiendo que $7\nmid n$ y que n es de la forma $n=12t+1$ tal que $5|n$.

Por la relación (B) se tiene que:

$log\,2=\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)P_i^{j+1}}-\frac{1}{jP_i^{(\alpha_i+1)j}}\right)+\left(\frac{1}{2P_0^2}-\frac{1}{P_0^{\alpha_0+1}}\right)+\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)P_0^{j+1}}-\frac{1}{jP_0^{(\alpha_0+1)j}}\right)$. De la cual ya se demostró en el CASO 2) a) que cada uno de los términos de las sumas $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)P_i^{j+1}}-\frac{1}{jP_i^{(\alpha_i+1)j}}\right)$ y $\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)P_0^{j+1}}-\frac{1}{jP_0^{(\alpha_0+1)j}}\right)$ de esta Relación (B) son positivos. Y como por hipótesis $3 \nmid n$ y $5 | n$ se tomará al primo $P_1 = 5$. Suprimiendo en la Relación (B) a la suma $\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)P_0^{j+1}} - \frac{1}{jP_0^{(\alpha_0+1)j}}\right)$ y a los términos $i \neq 1$ en $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)P_i^{j+1}} - \frac{1}{jP_i^{(\alpha_i+1)j}}\right)$ se tiene que: $\log 2 > \sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)5^{j+1}} - \frac{1}{j5^{(\alpha_1+1)j}}\right) + \left(\frac{1}{2P_0^2} - \frac{1}{P_0^{(\alpha_0+1)}}\right) \quad \ldots(1)$

Por otra parte, como $\left(\frac{1}{2P_0^2} - \frac{1}{P_0^{(\alpha_0+1)}}\right) \geq -\frac{1}{2P_0^2}$ porque $\alpha_0 \geq 1$ y $-\frac{1}{2P_0^2} \geq -\frac{1}{2738}$ ya que $P_0 \geq 37$ entonces $\left(\frac{1}{2P_0^2} - \frac{1}{P_0^{(\alpha_0+1)}}\right) \geq -\frac{1}{2738} \quad \ldots(2)$

Además, como $\alpha_1 \geq 2$ entonces $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)5^{j+1}} - \frac{1}{j5^{(\alpha_1+1)j}}\right) \geq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)5^{j+1}} - \frac{1}{j5^{3j}}\right) \quad \ldots(3)$

Relacionando las últimas tres desigualdades (1), (2), (3) se tiene que:

$$\log 2 > \sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)5^{j+1}} - \frac{1}{j5^{(\alpha_1+1)j}}\right) + \left(\frac{1}{2P_0^2} - \frac{1}{P_0^{(\alpha_0+1)}}\right)$$

$$\Rightarrow \log 2 > \sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(j+1)5^{j+1}} - \frac{1}{j5^{3j}}\right) - \frac{1}{2738}$$

$$\Rightarrow \log 2 > \sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i} + \left(-\log\left(1-\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5} + \log\left(1-\frac{1}{5^3}\right)\right) - \frac{1}{2738}$$

$$\Rightarrow \log 2 > \sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i} + \left(\log\left(\tfrac{31}{25}\right) - \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{2738} \Rightarrow \sum_{i=0}^{r}\frac{1}{P_i} < \frac{1}{5} + \frac{1}{2738} + \log\left(\tfrac{50}{31}\right) \quad \blacksquare$$

3. CANTIDAD DE FACTORES PRIMOS DEL PERFECTO IMPAR.

Sylvester demostró que un número perfecto impar euleriano $n=q^{\alpha}P_1^{2\beta_1}P_2^{2\beta_2}P_3^{2\beta_3}\cdots P_r^{2\beta_r}$ tendrá al menos cinco factores primos distintos y, si además, cumple la condición de que $3\nmid n$ entonces $r\geq 7$. Por su parte Kühnel [1949], Gradstein [1925] y Webber [1951] probaron que si n es perfecto impar y $3|n$ entonces $r\geq 5$. Después se llegó a $r\geq 6$ mediante las aportaciones de Robbins [1972] y Pomerance [1972]. Con Hagis [1975] y Chein [1979] se obtuvieron ocho factores primos distintos para n, es decir, $r>7$. Kanold [1994] demostró que si n es perfecto impar y $3\nmid n$ entonces $r\geq 8$. Posteriormente, Iannucci y Sorli [2003] probaron que $r\geq 37$. A la fecha, Kishore [1983] y Hagis [1983] ya demostraron que si $3\nmid n$ entonces $r\geq 10$. De esta breve cronología de la posible cantidad de factores como potencias de primos que podría tener un número perfecto impar, ahora, se expondrán algunas demostraciones de dichas propuestas. Se empezará este camino con Sylvester (1814-1897), que como ya se mencionó al inicio de esta sección, dio los primeros pasos.

Teorema de Sylvester: *Un número perfecto impar n debe tener al menos tres factores primos diferentes.*

Demostración.

a) Supóngase que n es número perfecto impar con un sólo factor primo, es decir, $n=P^t$ donde P es primo impar y $t\geq 1$. Por ser n perfecto entonces $\sigma(P^t)=2P^t$ y como la suma de los divisores de P^t es $1+P+P^2+P^3+\cdots+P^t=\frac{P^{t+1}-1}{P-1}$ se tiene que: $\sigma(P^t)=2P^t=\frac{P^{t+1}-1}{P-1}$.

Entonces $2P^{t+1}-2P^t=P^{t+1}-1 \Rightarrow P^{t+1}-2P^t=-1 \Rightarrow 2P^t-P^{t+1}=1 \Rightarrow P(2P^{t-1}-P^t)=1$, lo cual, implica por definición que $P|1$. Así, se concluye que $P=1$ pero esto es una contradicción ya que por hipótesis P es un primo.

Por lo tanto, n número perfecto impar, no puede tener sólo un factor primo ■ [9]

[9] Aquí se acaba de demostrar, en otras palabras, que un número primo no puede ser un número perfecto impar.

b) Supóngase que n es número perfecto impar con dos factores primos, es decir, $n=P_1^t P_2^k$ tal que $P_1 < P_2$ donde P_1 y P_2 son primos impares con $t \geq 1$ y $k \geq 1$. Como n es perfecto, $(P_1, P_2)=1$ y $\sigma(P^t)=1+P+P^2+P^3+\cdots+P^t$.

Entonces: $\sigma(P_1^t P_2^k)=\sigma(P_1^t)\sigma(P_2^k)=(1+P_1+P_1^2+P_1^3+\cdots+P_1^t)(1+P_2+P_2^2+P_2^3+\cdots+P_2^k)=2P_1^t P_2^k$.

Despejando: $\dfrac{(1+P_1+P_1^2\cdots P_1^t)}{P_1^t}\dfrac{(1+P_2+P_2^2\cdots P_2^k)}{P_2^k}=\left(1+\dfrac{1}{P_1}+\dfrac{1}{P_1^2}+\cdots\dfrac{1}{P_1^t}\right)\left(1+\dfrac{1}{P_2}+\dfrac{1}{P_2^2}+\cdots\dfrac{1}{P_2^k}\right)=2$.

Y en particular para los dos primos más pequeños (3 y 5, respectivamente) se tiene que:

$2 \leq \left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^t}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots+\dfrac{1}{5^k}\right)$.

Y como $(P^t)=\dfrac{P^{t+1}-1}{P-1}$, entonces, $\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^t}\right)=\left(\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{t+1}-1}{\dfrac{1}{3}-1}\right)$ y dado que $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{t+1}$ es cero cuando t tiende a infinito, entonces, $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{1}{3^i}=\dfrac{3}{2}$. Por un argumento similar $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{1}{5^j}=\dfrac{5}{4}$.

De esta manera, se llega a que: $2 \leq \sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{1}{3^i}\cdot\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{1}{5^j}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}=\dfrac{15}{8}$ lo cual es una contradicción ya que $\dfrac{15}{8}<2$. Cabe señalar que si t y k no tienden a inifnito también se da la contradicción.

Por lo tanto, n número perfecto impar, no puede tener sólo dos factores primos ■

Prosiguiendo con Sylvester, se tiene que en el año de 1888 escribió el artículo: *Sur L´impossibilité de L´existence d´un nombre parfait impar qui ne contient pas au moins 5 diviseurs premiers distincts*, aquí Sylvester propone que si $n=q^{\alpha}P_1^{2\beta_1}P_2^{2\beta_2}P_3^{2\beta_3}\cdots P_r^{2\beta_r}$ es número perfecto impar entonces $r \geq 4$ si $3 \nmid n$, es decir, n tendrá al menos cinco factores primos distintos. La demostración de Sylvester sigue un razonamiento semejante al de su teorema anterior (*Un número perfecto impar n debe tener al menos tres factores primos diferentes*) ya que considera el resultado de Kühnel: *Si n es perfecto impar, entonces,* $105 \nmid n$; y supone que n sólo podría tener cuatro divisores primos diferentes.

Así, empieza por proponer como primer caso, que el número perfecto impar n sería de la forma $n=3^s 11^u 13^v 17^w$ y entonces cumple: $\sigma(n)=\sigma(3^s 11^u 13^v 17^w)=\sigma(3^s)\sigma(11^u)\sigma(13^v)\sigma(17^w)=2n$.

Es decir, $(1+3+3^2+\cdots+3^s)(1+11+11^2+\cdots+11^u)(1+13+13^2+\cdots+13^v)(1+17+17^2+\cdots+17^w)=2n$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^s}\right)\left(1+\frac{1}{11}+\frac{1}{11^2}+\ldots+\frac{1}{11^u}\right)\left(1+\frac{1}{13}+\frac{1}{13^2}+\ldots+\frac{1}{13^v}\right)\left(1+\frac{1}{17}+\frac{1}{17^2}+\ldots+\frac{1}{17^w}\right)=2n$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{3^i}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{11^j}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{13^k}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{17^l}=\frac{3}{2}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}<2.$$

Llegándose de esta manera a una contradicción ya que se tendría que $2<2$ y, por tanto, demuestra que no pueden existir números perfectos impares que tengan sólo cuatro factores primos distintos. Este artículo de Sylvester de 1888 continua en esta misma dirección analizando diversos casos, en cada uno de los cuales, termina concluyendo que $2<2$.

En la década de los 70 del siglo XX se retomaron estos resultados, pero ahora, haciendo uso de las herramientas del computo y de los métodos numéricos. Se tienen, por ejemplo, los artículos de Wall *et. al.* [1972] y de Kishore [1978] donde se trabajó con la densidad de la Función Abundancia,[10] esto es, con $\frac{\sigma(n)}{n}>1$. Así, se formó la expresión: $a\leq\frac{\sigma(n)}{n}\leq b$ en la que resultaría idóneo que para N número impar existiera la posibilidad de que $2\leq\frac{\sigma(N)}{N}\leq 2$ y entonces, por fin, hallar un perfecto impar. En dicho artículo de Kishore [1978] se construyó una tabla con los enteros impares N que tuvieran cinco factores primos diferentes y cuyo cociente $\frac{\sigma(N)}{N}$ tendiera a dos, es decir, se establecieron las condiciones $\left|\frac{\sigma(N)}{N}-2\right|>10^{-14}$ y $2-10^{-12}\leq\frac{\sigma(N)}{N}\leq 2+10^{-12}$. De esta manera, se hizo posible sostener el argumento de que no existen números perfectos impares, números cuasiperfectos y números semiperfectos con cuatro o menos factores primos diferentes.

[10]Dicha función surge directamente de la definición de número abundante la cual enuncia que m es número abundante si $\sigma(m)>m$, por tanto, la función abundancia es tal que: $\frac{\sigma(m)}{m}>1$ y se define como aquella que cumple que $\sigma(m)>m$.

3.1 LAS CARACTERÍSTICAS DE LA CANTIDAD DE FACTORES Y DÍGITOS.

E. Catalán (véase Dickson [1999]) demostró en 1888 que si un número perfecto impar no es divisible por 3, 5 ó 7 entonces tiene al menos 26 factores primos distintos y en consecuencia contaría con al menos 45 dígitos. T. Pepin (véase Dickson [1999]) probó en 1897 que un perfecto impar n que es primo relativo con 3×7, 3×5 y $3\times 5\times 7$ tiene al menos 11, 14 y 19 factores primos distintos respectivamente, además, mostró que n no puede ser de la forma $n=6k+5$. Kanold [1944] en su artículo de 1944 demostró que un número perfecto impar tiene al menos un divisor primo mayor o igual a 61. Muskat [1966] probó en 1966 que un perfecto impar es divisible por la potencia de un primo mayor que 10^{12}. Pomerance [1975] encontró que el segundo factor primo más grande de un perfecto impar es mayor o igual a 139, Hagis [1980] mejoró esta cota a 1000 pero Iannucci [1999] logró que dicha cota llegará hasta 10000. Robbins [1975] demostró que un número perfecto impar que es divisible por 17 tendrá un factor primo no menor a 577.

Por otro lado, se tiene que si n es un número perfecto impar con la factorización en primos $n=\prod_{i=1}^{A} P_i^{\alpha_i}$ donde $i=1, 2, 3, \ldots, A$ y A es la cantidad de factores primos distintos de n, entonces:

1) $P_i<(4A)^{2^{\left(\frac{i(i+1)}{2}\right)}}$. Resultado de Pomerance.

2) Si $2\le i\le 6$ entonces $P_i<2^{2^{(i-1)}}(A-i+1)$. Resultado de Kishore [1981].

Heath-Brown [1994] demostró que un número perfecto impar n con A factores primos distintos es tal que $n<4^{4^{(A)}}$. Con este resultado, puede suponerse que la cota donde posiblemente vive un perfecto impar es de extensiones astronómicas.

Por su parte, Dickson [82] aportó un importante resultado el cual afirma que sólo hay un número finito de perfectos impares con un número dado de divisores primos, en otras palabras, el conjunto $D=\left\{n \mid n=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}P_3^{\alpha_3}\cdots P_t^{\alpha_t} \text{ con } t \text{ primos impares dados}\right\}$ es finito, la demostración de este resultado fue mejorada por Shapiro [1949, 1968], Kanold [1956] y Van der Waall [1970], además, Kanold [1990] en 1990 formuló una generalización de dicho resultado de Dickson.

Regresando a la factorización de Euler $n=q^{\alpha}P_1^{2\beta_1}P_2^{2\beta_2}P_3^{2\beta_3}\cdots P_r^{2\beta_r}$ Levit [1947] demostró que n no es perfecto impar si $\frac{\sigma(q^{\alpha})}{2}$ y $\sigma(P_i^{2\beta_i})$ son potencias de primos para $i=1, 2, 3, \ldots, r$. Starni [1991] probó que si n es un perfecto impar tal que $P_i \equiv 3 \pmod{4}$ para $i=1, 2, 3, \ldots, r$ entonces $\frac{\sigma(q^{\alpha})}{2}$ será un número compuesto. Dos años después, en 1993, nuevamente Starni [1993] aporta a las proposiciones de los perfectos impares la demostración del teorema que a continuación se presenta, en el cual, reescribe la factorización de Euler y le da la forma: $n=\Pi^{\alpha}M^2$.

<u>Lema 3:</u> *Si P y a son primos impares diferentes ó P es seudoprimo*[11] *en base a, y además, $(P,a-1)=1$ entonces $\sigma(a^{P-2})\equiv 0 \pmod{P}$.*

Demostración.

Por hipótesis $(P,a)=1$ y del Pequeño Teorema de Fermat[12] se deduce que $a^{P-1}\equiv 1 \pmod{P} \Rightarrow a^{P-1}-1=kP \Rightarrow P|a^{P-1}-1$.

Por ser a primo entonces $\sigma(a^{P-2})=a^{P-2}+a^{P-1}+\cdots+a+1=\frac{a^{P-1}-1}{a-1}$ y sustituyendo $a^{P-1}-1=kP$ se tiene que $\sigma(a^{P-2})=\frac{kP}{a-1}$. Por otro lado, dado que $\frac{a^{P-1}-1}{a-1}$ es un entero entonces $a^{P-1}-1=(a-1)\lambda$. Así, $P|a^{P-1}-1 \Rightarrow P|(a-1)\lambda$ pero dado que por hipótesis $(P,a-1)=1$ se concluye que $p|\lambda$ y por ser $\lambda=\frac{a^{P-1}-1}{a-1}=\sigma(a^{P-2})$ se encuentra que $P|\sigma(a^{P-2})$.

Por lo tanto, $\sigma(a^{P-2})\equiv 0 \pmod{P}$ ■

---

[11]Definición: x es seudoprimo en *base a*, si x es un número compuesto tal que $a^{x-1}\equiv 1 \pmod{x}$ con $(a,x)=1$. Por ejemplo 91 es seudoprimo en base 3 porque se cumple que 91 es un número compuesto $(91=7\times 13)$ tal que $3^{90}\equiv 1 \pmod{91}$ donde $(3,91)=1$.

[12]Pequeño Teorema de Fermat: *Si p y a son primos relativos entre sí, entonces,* $a^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$.

Teorema de Starni: *Si* $n=\Pi^{\alpha}M^{2}$ *es un número perfecto impar,* $(\alpha+2)$ *es primo o seudoprimo en base* Π *y* $(\alpha+2,\ \Pi-1)=1$*, entonces,* $M^{2}\equiv 0\pmod{\alpha+2}$.

Demostración.

Por el Factor de Euler (Π^{α}) se sabe que Π es un primo impar de la forma $4k+1$ al igual que α, y en consecuencia el primo $\alpha+2=4k+3$. De esta manera, se tendrá a los primos impares diferentes Π y $\alpha+2$. Dado que por hipótesis $(\alpha+2,\Pi-1)=1$, por el Lema 3, se concluye que $\sigma(\Pi^{\alpha})\equiv 0\pmod{\alpha+2}$, es decir, $\alpha+2|\sigma(\Pi^{\alpha})$. Ahora, por ser *n* un perfecto impar euleriano se tiene que $\sigma(n)=\sigma(\Pi^{\alpha})\sigma(M^{2})=2\Pi^{\alpha}M^{2}$ y como se halló que $\alpha+2|\sigma(\Pi^{\alpha})$ entonces $\alpha+2|2\Pi^{\alpha}M^{2}$, pero, $\alpha+2$ y Π son primos impares diferentes. Por lo que, es posible deducir que $\alpha+2|M^{2}$.

Por lo tanto, $M^{2}\equiv 0\pmod{\alpha+2}$ ■

Este teorema de Starni, con algunos casos particulares, puede ser enunciado a manera de corolarios de las siguientes maneras:

1) *Si* $n=\Pi^{\alpha}M^{2}$ *es un perfecto impar,* $(\alpha+2)$ *es primo y* $\alpha+2>\dfrac{(\Pi-1)}{4}$, *entonces,* $M\equiv 0\pmod{\alpha+2}$.

2) *Si* $n=F_{k}^{\alpha}M^{2}$ *es un perfecto impar,* $F_{k}=2^{2^{k}}+1$ *es Primo de Fermat*[13] *y* $(\alpha+2)$ *es primo o seudoprimo en base* F_{k}*, entonces,* $M^{2}\equiv 0\pmod{\alpha+2}$.

3) *Si* $n=\Pi^{c-2}M^{2}$ *es un perfecto impar y c es Número de Carmichael*[14] *tal que* $(c,\Pi)=1$ *y* $(c,\Pi-1)=1$*, entonces,* $M\equiv 0\pmod{c}$.

---

[13]Definición: F_k es Número Primo de Fermat si es un primo de la forma $F_k=2^{2^{k}}+1$. Por ejemplo, el tercer primo de Fermat es 17 ya que $2^{2^{2}}+1=17$. Actualmente sólo se conocen cinco números primos de Fermat.

[14]Definición: Un Número de Carmichael *c* es un número compuesto que satisface la congruencia $d^{c-1}\equiv 1\pmod{c}$ con $(c,d)=1$. Por ejemplo, el primer número de Carmichael es 561 ya que $561=3\times 11\times 17$ y $d^{560}\equiv 1\pmod{561}$ para cualquier *d* tal que $(561,\ d)=1$.

4. RESULTADOS COMPLEMENTARIOS.

Retomando la forma euleriana de un número perfecto impar ahora se enunciará un resultado interesante, el Teorema de Ore, que interviene de manera directa sobre la deducción del tamaño de los factores primos del posible perfecto impar.

Pero antes se recordará la aportación de Kanold de 1957. Por Euler se sabe que un número perfecto impar es de la forma: $n = q^{\alpha} P_1^{2\beta_1} P_2^{2\beta_2} P_3^{2\beta_3} \cdots P_r^{2\beta_r}$ donde los $q, P_1, P_2, \cdots P_r$ son primos impares distintos con $q \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4$. Por otro lado, por el resultado de Künel de 1949, en el cual se demuestra que un perfecto impar debe tener al menos cinco factores primos distintos y junto con la propuesta de Ore: *Cualquier perfecto impar es divisible por la potencia de un primo mayor que* 10^8; Kanold en 1957 demostró que no podían existir perfectos impares menores que 10^{20}. Estos resultados ya se abordaron en secciones anteriores, pero aquí, lo que se quiere exponer en específico es el estudio que Ore publicó en 1948 el cual impactaba directamente sobre las formas en que se podían calcular los posibles tamaños de los primos que dividen a un número perfecto impar. Dicho estudio trata de las medias armónicas enteras, de hecho, Ore demostró que los perfectos —tanto pares como impares— cumplen esta propiedad.[15] Posteriormente uno de sus alumnos, Mills, probó que cualquier perfecto impar con media armónica entera tiene la potencia de un primo mayor que 10^7 como uno de sus factores y después, con ayuda de cálculos computacionales, se llegó a que este factor primo tenía que ser mayor que 10^{12}.

Regresando al estudio de Ore, a continuación se expondrá la demostración del resultado antes mencionado cuya importancia radica en que a partir de éste, se apoyarán las primeras aproximaciones acerca del tamaño de los factores de un número perfecto impar.

<u>**Teorema de Ore:**</u> *Cualquier número perfecto n tiene una media armónica entera.*

---

[15]La Media Armónica (H) de una cantidad finita de números es igual al recíproco de la media aritmética (promedio) de los recíprocos de dichos números. Así, dados los números $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ la media armónica será igual a: $H = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$.

Demostración.

Sea n número perfecto donde $n=P_1^{\gamma_1}P_2^{\gamma_2}P_3^{\gamma_3}\cdots P_r^{\gamma_r}$ es su factorización en primos. Sean $\upsilon(n)=(\gamma_1+1)(\gamma_2+1)(\gamma_3+1)\cdots(\gamma_r+1)$ y $\sigma(n)=\sum_{d|n}d_i=\frac{P_1^{\gamma_1+1}-1}{P_1-1}\cdot\frac{P_2^{\gamma_2+1}-1}{P_2-1}\cdot\frac{P_3^{\gamma_3+1}-1}{P_3-1}\cdots\frac{P_r^{\gamma_r+1}-1}{P_r-1}$ las funciones cantidad de divisores y suma de divisores, respectivamente. Al considerar los divisores del perfecto n se tiene su media aritmética: $A(n)=\frac{d_1+d_2+d_3+\cdots+d_{\upsilon(n)}}{\upsilon(n)}=\frac{\sigma(n)}{\upsilon(n)}$ y su media geométrica: $G(n)=\sqrt[\upsilon(n)]{d_1\cdot d_2\cdot d_3\cdots d_{\upsilon(n)}}=\sqrt[\upsilon(n)]{\prod_{d|n}d_i}$. Por otro lado, como cada divisor d_i de n tiene asociado un divisor $\frac{n}{d_i}$ (es decir, $d_i\cdot\frac{n}{d_i}=n$) entonces todos los divisores de n se pueden ver como $\frac{n}{d_1},\frac{n}{d_2},\frac{n}{d_3}\cdots\frac{n}{d_{\upsilon(n)}}$. Así, se tendrá que su producto es tal que

$$\prod_{d|n}d_i=\frac{n}{d_1}\cdot\frac{n}{d_2}\cdot\frac{n}{d_3}\cdots\frac{n}{d_{\upsilon(n)}}\Rightarrow\prod_{d|n}d_i=\frac{n^{\upsilon(n)}}{\prod_{d|n}d_i}\Rightarrow\left(\prod_{d|n}d_i\right)^2=n^{\upsilon(n)}\Rightarrow\prod_{d|n}d_i=\sqrt{n^{\upsilon(n)}}=n^{\frac{\upsilon(n)}{2}}.$$

Sustituyendo esto en la media geométrica: $G(n)=\sqrt[\upsilon(n)]{d_1\cdot d_2\cdot d_3\cdots d_{\upsilon(n)}}=\sqrt[\upsilon(n)]{\prod_{d|n}d_i}$ se obtiene que $G(n)=\sqrt[\upsilon(n)]{n^{\frac{\upsilon(n)}{2}}}=\left(n^{\frac{\upsilon(n)}{2}}\right)^{\frac{1}{\upsilon(n)}}=\sqrt{n}$. Ahora, por definición, la media armónica de n es $H(n)=\frac{\upsilon(n)}{\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_{\upsilon(n)}}}=\frac{\upsilon(n)}{\sum_{d|n}\frac{1}{d_i}}$ pero como $n\cdot\sum_{d|n}\frac{1}{d_i}=\frac{n}{d_1}+\frac{n}{d_2}+\cdots+\frac{n}{d_{\upsilon(n)}}=\sum_{d|n}d_i$ entonces $\sum_{d|n}\frac{1}{d_i}=\frac{1}{n}\sum_{d|n}d_i$. Sustituyendo $\sum_{d|n}\frac{1}{d_i}$ en $H(n)$ se halla que $H(n)=\frac{\upsilon(n)}{\frac{1}{n}\sum_{d|n}d_i}$, es decir, $H(n)=\frac{n\upsilon(n)}{\sigma(n)}$. De esta manera y por ser n un número perfecto se deduce que $H(n)=\frac{n\upsilon(n)}{2n}=\frac{\upsilon(n)}{2}$, por lo tanto, la media armónica de los divisores del número perfecto n es un entero ■

UNA REFLEXIÓN FINAL

El camino que se ha recorrido para la búsqueda de los números perfectos ha sido largo, ya se vio que comenzó con Euclides en el año 300 a.C. cuando demuestra que todo número que tiene la forma $2^{P-1}(2^P-1)$ con 2^P-1 primo tiene que ser perfecto par. También sabemos que tuvieron que transcurrir casi dos mil años para que Leonhard Euler —a mediados del siglo XVIII— nos quitara la duda acerca de si era verdad el inverso del resultado euclidiano, es decir, que si un número es perfecto par entonces sólo puede ser de la forma $2^{P-1}(2^P-1)$ con 2^P-1 primo. Así, se percibe que los primeros pasos en el camino de los perfectos pares no fueron inmediatos, se requirieron casi dos mil años considerando que los matemáticos griegos ya tenían conocimiento de la existencia de casos concretos como el 6, 28, 496 y 8128.

A partir de las aportaciones de Euclides y Euler, los perfectos pares adquieren un título de identidad que les permitió a los matemáticos poder auscultarlos con mayor certidumbre y, como consecuencia de ello, se pudo desarrollar la teoría de los números perfectos pares así como otras que tomaron su propio rumbo, un ejemplo de esto, es el caso de los números primos de Mersenne. Como ya se mencionó, los perfectos pares tomaron vida propia y la cantidad de trabajos escritos por los matemáticos en las últimas décadas acerca de ellos es realmente considerable. El rumbo que posteriormente tomó la investigación sobre los números perfectos se dirigió al estudio de los multiperfectos, superperfectos, cuasiperfectos, seudoperfectos e hiperperfectos, entre otros.[1] En dichos números se han encontrado resultados de gran interés, para conocerlos, se pueden consultar los trabajos de: Cattaneo [1951], Spira [1961], McDaniel [1973], Hausman [1987] y Mitrinovíc–Sándor [1995].

No obstante la certidumbre que se ha logrado en el estudio de los perfectos pares antes mencionada, ésta no ha traspasado a otra clase de números perfectos y nos referimos al caso de los impares.

---

[1]Número Multiperfecto: N es multiperfecto si existe un entero positivo $k=1$ tal que $\sigma(N)=kN$.
Número Superperfecto: N es superperfecto si $\sigma(\sigma(N))=2N$.
Número Cuasiperfecto: N es cuasiperfecto si $\sigma(N)=2N+1$.
Número Seudoperfecto: N es seudoperfecto si es igual a la suma de algunos de sus divisores.
Número Hiperperfecto: N es hiperperfecto si $N=1+k[\sigma(N)-N-1]$.

1. LOS IMPARES.

Llegamos a los números perfectos impares, con los cuales, sí tenemos una incertidumbre considerable porque partimos del hecho de que no conocemos uno solo. Por tanto, con ellos no podíamos esperar que el camino se tornase más directo como lo fue para los pares. De hecho, como no se ha encontrado ninguno las opiniones acerca de su existencia se dividen en dos: Una, que supone que no existen y, la otra, los que creen que cada día estamos más cerca de verificar su existencia, ambas posiciones tienen un sustento experimental y teórico. Esto es, los que piensan que no existen tienen en mente que si ya se verificó que no hay ningún perfecto impar entre los enteros del intervalo $[1,\ 10^{500}]$ entonces es altamente probable que no existan. Por el otro lado están los que creen que este intervalo es "grande" pero si se le compara con el conjunto de los naturales no lo es tanto, además, como se han demostrado una gran cantidad de propiedades que deberían poseer tales números en caso de existir y resulta que entre ellas no se encuentra contradicción, entonces se incrementa la posibilidad de pensar que sí existen. Sin embargo, ambas posturas no constituyen todavía una prueba formal de existencia o inexistencia, incluso, aunque la mayoría de los resultados hallados sobre los perfectos impares se han expuesto en un marco de rigor matemático se deben considerar sólo como parciales porque ninguno de estos nos ha llevado aún a una prueba final en alguno de los dos sentidos.

Aunado a lo anterior, tenemos que considerar que en nuestro caso particular de los números perfectos, se puede aplicar el hecho de que ciertos principios matemáticos contradicen abiertamente nuestra intuición. Recordemos que algunos matemáticos de la antigüedad hicieron varias suposiciones sobre los perfectos pares que se basaron en su aparente comportamiento y que resultaron falsas, por ejemplo, dado que los primeros cuatro eran de la forma: $(2^2-1)\cdot 2=6$, $(2^3-1)\cdot 4=28$, $(2^5-1)\cdot 16=496$, $(2^7-1)\cdot 64=8128$ donde 2^P-1 es un primo con $P=2, 3, 5\ y\ 7$ respectivamente, entonces, algunos proponían que el quinto número perfecto par estaría formado por el factor $(2^{11}-1)$ lo cual no era posible debido a que tal factor no es primo. También, puede observarse que dichos perfectos 6, 28, 496 y 8128 tienen entre uno y cuatro dígitos consecutivamente por lo que se esperaría que entre 10000 y 100000 se encontrará el quinto, pero, hoy sabemos que este tiene ocho dígitos: $(2^{13}-1)\cdot 4096=33550336$. Otra propiedad que se asumió sobre los perfectos

pares afirmaba que el último dígito se alternaba entre los números seis y ocho hasta que se halló que el quinto (33550336) y el sexto (8589869056) terminaban simultáneamente en seis.
De lo anterior, podemos concluir que no es difícil caer en la precipitación de proponer conclusiones con base en resultados que parecen ser de carácter general, pero que al final no lo son.

Regresando a las propiedades de los números perfectos impares, ya mencionamos que a pesar de que éstas no han ayudado a demostrar su existencia o a generar inconsistencias que pudiesen llevar a la conclusión de su inexistencia, sí han contribuido para que tengamos un panorama más específico acerca de los perfectos impares. Por ejemplo, ahora los podemos considerar como "números grandes" (del orden de 10^{500}) y con bastantes factores primos (al menos 37), de hecho, hay quienes esperan que un cálculo computacional sea el medio por el que se resuelva la cuestión acerca de su existencia. Sabemos que las computadoras han sido una herramienta útil para facilitar el camino hacia algunas demostraciones (por ejemplo, en los años 80 el último teorema de Fermat fue probado vía computadora para millones de enteros sin que se encontrase falla alguna), sin embargo, las demostraciones actuales de los teoremas matemáticos requieren de un marco totalmente teórico. Cabe mencionar aquí, que cálculos computacionales han disminuido obstáculos en la búsqueda de los perfectos impares y además han arrojado ciertas aproximaciones que nos dan esperanza para la existencia de estos números. En tal dirección, se podría hacer todo un estudio de cómo han avanzado los perfiles computacionales y algorítmicos para la búsqueda de los perfectos impares consultando los artículos relacionados con el tema que se han publicado en la revista *Mathematics of Computations* editada desde los años 40.

En este tenor, me inclino a considerar que una forma de exhibir —si es que existe— un número perfecto impar será a través de cálculos computacionales. Aunque cabe comentar que hoy en día definir un algoritmo que pruebe a los números impares uno por uno hasta hallar un perfecto es aún no computable porque al crearlo éste contaría con un número no finito de posibilidades que nos llevaría a no obtener respuesta en algún momento, lo que los expertos en la materia llaman *entscheidungsproblem*.[2]

---

[2]El *Entscheidungsproblem* (problema de decisión) fue el reto en lógica simbólica de encontrar un algoritmo general que decidiera si una fórmula del cálculo de primer orden es un teorema. En 1936, de manera independiente, Alonzo Church y Alan Turing demostraron que es imposible escribir tal algoritmo. Como consecuencia, es también imposible decidir con un algoritmo si ciertas frases concretas de la aritmética son ciertas o falsas.

Por el lado de una demostración teórica para mostrar la existencia de los perfectos impares pienso que ésta podría llegar por caminos más filosóficos, como ocurrió con Galileo cuando definió al movimiento alejándose totalmente del sentido común.

Por los elementos con los que actualmente contamos para los perfectos impares podría parecer inconcebible el que se siga queriendo demostrar la existencia de algo que quizá no existe, siendo que las teorías que se construyen en matemáticas parten de una existencia.

Y en este contexto recordemos el problema que propuso Edward Waring: *Todo entero es una suma de enésimas potencias,*[3] donde una primera respuesta la dio Hilbert que demostró que en efecto todo entero es suma de enésimas potencias, sin embargo, hasta la fecha se conoce muy poco acerca de cuántas enésimas potencias se requieren. Por ejemplo, Lagrange demostró que para los cuadrados se necesitan cuatro, se conoce para los cubos y a partir de los números elevados a la sexta potencia ya no se sabe mucho, esto es, sabemos que sí es posible expresar a los enteros como suma de enésimas potencias pero no conocemos cómo son esas sumas. Es decir, no se sabe cuantas enésimas potencias se requieren, pero se tiene la certidumbre de que sí es posible. Para el caso de los números perfectos impares no se tiene seguridad de nada respecto a su existencia.

El medio que despeje la incógnita de la existencia o no de los perfectos impares además de aportar gratas consecuencias al desarrollo de la Teoría de los Números, también, podría darnos el beneficio de obtener otras maneras de hacer demostraciones que se podrían adherir a nuevas formas de abordar problemas matemáticos. Esto último se piensa porque como no contamos con las suficientes bases para poder probar la existencia de los perfectos impares quizá sea necesario considerar la otra opción, esto es, negar la existencia de estos números.

[3]Es decir, m en los enteros es suma de números cuadrados, cúbicos, de cuartas potencias, de quintas y así de cualquier potencia.

Un ejemplo que muestra un mecanismo similar lo podemos encontrar en el *Manuscrito Voynich*[4] (documento anónimo de 230 páginas de hace más de cuatro siglos, escrito en un alfabeto nunca visto) que ha tratado de ser descifrado por toda clase de criptógrafos y aunque sin éxito ha favorecido el surgimiento de abordar contenidos a partir de la posible inexistencia de los mismos, en otras palabras, se trata de desarrollar marcos teóricos que proporcionen elementos para poder demostrar la inexistencia de ciertas situaciones que en su problemática inicial cuentan con pocos componentes.

Dado que en el desarrollo de la teoría de los perfectos impares se especifican atributos de números que acaso no existen, nos encontramos con una de las grandes características de la matemática: Su potencial como estímulo para el juego mental que nos permite razonar sobre un ente que se ajusta a ciertas reglas sin que su existencia sea un hecho real. En esta dirección, que nos aleja de la construcción de la "Ciencia Clásica" o comprensión de lo real donde el sentido común denota lo existente como realidad y considerando que la existencia en el pensamiento no implica la concordancia del tiempo, espacio y acción, entonces, cómo abordar el caso de los perfectos impares desde la "Nueva Ciencia" en la cual se afronta la existencia de una manera deductiva y abstracta. Por ejemplo, las leyes del movimiento son deducidas sin recurrir siempre a la experiencia de los cuerpos reales porque para Galileo lo preciso no es comprender el hecho de la caída de los cuerpos sino la esencia del movimiento de la caída, apuntando así, al ser y no a la certeza. De esta manera y como sabemos que los números que buscamos no son hechos de la naturaleza, aunque sus proposiciones sí podrían tener validez universal, entonces, ¿sería posible llevar a los perfectos impares al plano del pensamiento de la idea pura?.

[4]El *Manuscrito Voynich* es un documento que fue encontrado en el año de 1912 por el estadounidense Wilfrid Voynich en una biblioteca jesuita cercana a Roma. Durante décadas se ha intentado descifrar el contenido de este manuscrito que data del siglo XVI, incluso, durante la segunda mitad del siglo XX los mejores criptógrafos del mundo ya intentaron descubrir el misterio de su contenido (hasta criptógrafos que participaron en la Segunda Guerra Mundial) y aunque se han usado los mejores algoritmos para intentar leerlo, estos esfuerzos no han sido suficientes para encontrar su traducción. Por lo que algunos expertos en la materia se plantearon la posibilidad de que el manuscrito no diga nada. Con esta hipótesis, fue necesario cambiar el marco lógico del manejo de las condiciones originales que en un principio buscaban encontrar la verdad del documento, esto es, ahora se aborda al problema buscando demostrar la imposibilidad de que el manuscrito diga algo. Véase el artículo de Rugg [2004].

2. EL EXISTIR.

Sin perder de vista que la existencia de los números perfectos impares ha sido una parte importante que rondó nuestra cabeza en este trabajo de tesis, ahora, para terminar reflexionemos un poco sobre la existencia: ¿Qué es existir?. Para algunos en un sentido práctico es simplemente la comprobación de que no se está muerto. Por su parte los filósofos naturalistas buscaban la materia primaria que formó todo lo que existe porque asumían que de la nada no se puede existir, por ejemplo: Demócrito limita la existencia al llegar a sus partes mínimas (átomos), Anaximandro cree que se existe por un derecho natural, Aristóteles afirma que lo existente es lo que percibimos con los sentidos, según Plotonio la materia en si no tiene existencia alguna, Platón nos argumenta que nada de lo que existe en el mundo de los sentidos permanece ya que define a la existencia como aquello que vemos con la razón como es el caso de las matemáticas, Tomás de Aquino concibe la existencia como "la suma de la razón y las observaciones de los sentidos" …. Después de tan variadas interpretaciones, entonces, ¿qué significaría existir en ese tiempo?. Para la época del Renacimiento —siglo XV— el conocimiento (y como caso particular la concepción de lo existente) transforma su método al pasar de la experiencia o método empírico al método científico, cuyo objetivo principal es tratar de ser independiente de las condiciones de la naturaleza. Recordemos dos citas renacentistas donde se nota tal cambio:

1) "Mide lo que se pueda medir, y lo que no se pueda medir, hazlo medible" Galileo.

2) "El yo pensante es más real que el mundo físico que se capta con los sentidos" Descartes.

Filósofos posteriores a esta época renacentista nos ayudan a ver la existencia desde una nueva perspectiva: Berkeley niega la existencia de un mundo material fuera de la conciencia del hombre, Kant distingue entre las cosas "en sí" y "para mí" dividiendo el conocimiento en material (lo que se percibe) y en formal (la ley causal), Hegel y Kierkegaard exponen que la realidad es subjetiva porque en todo conocimiento interviene la razón humana, para los naturalistas la realidad es la naturaleza y el mundo perceptible, Freud afirma que el camino a la realidad es el subconsciente, los existencialistas creen que la existencia es contraria al ser ya que ésta precede a la esencia o naturaleza, Sartre nos dice que existir es crear la propia existencia …

Retornando a nuestro asunto, la existencia de los números perfectos impares, donde no se ha podido exhibir alguno aunque sí se ha desarrollado una teoría hasta ahora consistente para ellos. Sería conveniente considerar en este caso que nuestra manera científica de pensar se encuentra posiblemente ante un cambio de paradigmas, por lo que, la solución a este problema tenga que replantearse.

Además, como estamos ante una situación matemática (abstracta) considero necesario que nos interroguemos acerca de su origen: ¿Las matemáticas se inventan o se descubren?, según la ideología griega se inventan, afirmación de la que soy partidaria.[5]

Los griegos son los primeros en afrontar "absurdos de la razón" cuando lo racional se aleja de lo real y deducen que el origen es el primer conocimiento proporcionado por la razón, así, las matemáticas no tratarán sólo de lo real y se aplicarán también a lo que está fuera de nuestra percepción sensorial. Por ejemplo, recordemos que a pesar de que los egipcios fueron los primeros en hacer mediciones en el espacio real es a los griegos a quienes se les considera los creadores de la geometría porque ellos lograron abstraer el espacio, es decir, mientras que la medición de una pirámide por sombras (a la manera egipcia) produciría algún error, Herodoto logra definir objetos independientemente de su existencia real (crea o inventa objetos que sólo se producen por el conocimiento) convirtiendo a la matemática en un espacio abstracto de objetos ideales que ocasionalmente coincidirán con la realidad, con esto, la matemática obtiene además un carácter universal ya que los objetos matemáticos no sólo existirán por el interés que el colectivo les dé.

Otra consideración a la que nos enfrentamos en nuestro estudio de los perfectos impares es la ambivalencia de los números dado que algunos pueden o no encajar dentro del mundo físico, por ejemplo, los números reales que son un ingrediente esencial para nuestra comprensión del mundo nos permiten medir cualquier distancia y sin embargo no se tiene evidencia física directa de distancias que requieran escalas arbitrariamente grandes o pequeñas (actualmente la menor que se ocupa es del orden de $10^{-35}m$ en la teoría de la gravitación cuántica de la escala de Planck).

---

[5]Descubrir: Manifestar, hacer patente. Destapar lo tapado o cubierto. Hallar lo ignorado o escondido. Registrar o alcanzar a ver. Enterarse de alguna cosa. Hallazgo, encuentro de una tierra ignorada.

Inventar: Hallar o descubrir una cosa nueva. Crear. Fingir hechos falsos. Hallazgo, engaño, ficción.

En conclusión, el tema de los números perfectos impares es un claro ejemplo del poder creativo de las matemáticas ya que sin importar que su definición surgiera de manera casi natural, hoy en día, ésta se ha complicado al grado de convertirse en un problema que lleva más de dos mil años sin solución, además, los perfectos impares confirman que las ideas matemáticas se alejan de su supuesto objetivo inicial de reflejar el comportamiento del mundo físico porque los conceptos matemáticos superan la realidad. A diferencia del arte y la literatura, la matemática otorga un horizonte inesperado donde un hallazgo todo lo condensa en una consonancia ya que en ella ninguna existencia reside en la peculiaridad de un cuerpo, en nuestro caso y sin importar la conclusión que se obtenga, seguir tratando de encontrar un objeto desconocido que se cree que existe es una virtud que en muchas ocasiones ha sido el peldaño sobre el que se construye el edificio matemático.

> *"Los Números Perfectos, han dejado una palabra en la historia abierta a futuras generaciones de matemáticos: IMPAR. Hasta ahora todos los Números Perfectos encontrados son pares. Aquel que encuentre el primer impar, o que por el contrario, demuestre que no hay ninguno escribirá su nombre con letras de oro en el maravilloso libro de la historia de las Matemáticas"*

APÉNDICE

❖ Demostración de la Proposición 36 del Libro IX de los *Elementos* de Euclides.

Proposición 36: *Si tantos números como se quiera a partir de una unidad se disponen en proporción duplicada hasta que su [suma] total resulte [un número] primo, y el total multiplicado por el último produce algún número, el producto será [número] perfecto.*

Demostración.

Sean los números 1, A, B, G y D en proporción duplicada siendo su conjunto E un número primo y sea ZH el producto de E por D. Digo que ZH es un número perfecto.

A__ B___ G____ D________ E__________

Z ______________________________ H

Tómense tantos números E, TK, L, M como A, B, G, D en proporción duplicada empezando por E y entonces será A a D como E a M y por tanto el producto de E por D será igual al de A por M, pero, el producto de E por D es ZH; luego el de A por M será también ZH y por consiguiente M mide a ZH según A y como A es la díada, ZH es doble de M y por estar M, L, TK y E en proporción duplicada, también, lo estarán E, TK, L, M y ZH.

E__________

T ______________ K

L___________________

M_________________________

Z ______________________________ H

Ahora bien, si del segundo número TK y del último ZH quitamos los números TN y ZO, ambos iguales a E, el exceso del segundo (TK) será al primero (E) como el exceso del último (ZH) al conjunto de los anteriores (M, L, TK, E) y por tanto NK es a E como OH al conjunto M, L, TK, E y como NK es igual a E será OH igual al conjunto M, L, TK, E; y por ser ZO igual a E y E igual a 1, A, B, G, D el conjunto ZH es igual a 1, E, TK, L, M y está medido por ellos.

T __________ N ____ K

Z __________ O ____________________ H

Digo además que ZH no puede estar medido por ningún otro número excepto estos, porque si fuera posible que algún número P midiera a ZH según Q no siendo P ninguno de los números A, B, G, D, E, TK, L, M el producto de Q por P sería ZH.

Z ______________________________ H

P___________

Q__________________

Pero el producto de E por D es también ZH; luego E es a Q como P a D y puesto que 1, A, B, G, D están en proporción continua, D no puede ser medido por ningún número excepto A, B, G, ninguno de los cuales es P por hipótesis, luego P no mide a D y por ser P a D como E a Q tampoco E mide a Q pero E es primo y un número primo es primo con cualquier número que no sea múltiplo suyo, luego E y Q son primos entres sí y son los menores y E es a Q como P a D; luego E mide a P el mismo número de veces que Q a D y como D no esta medido por ningún número excepto A, B, G tiene que ser Q uno de estos. Sea B y como B, G, D son tantos como E, TK, L empezando por E y estos E, TK, L tienen la misma razón con B, G, D será B a D como E a L, y por tanto, el producto de B por L es igual al de D por E, pero este producto de D por E es igual al de Q por P; luego el producto de Q por P es igual al de B por L y por consiguiente Q es a B como L a P y por ser Q igual a B, es L igual a P, lo cual es imposible porque por hipótesis P no es ninguno de esos números; luego ningún número mide a ZH excepto 1, A, B, G, D, E, TK, L, M y como ZH es igual al conjunto de estos números, ZH es un número perfecto ■

❖ Demostración del Teorema de los Números Primos de Mersenne.

Teorema: *Si un número de la forma $2^P - 1$ es primo, entonces, P es primo.*

Demostración.

Supóngase que P no es primo, es decir, P es un número compuesto. Sin perdida de generalidad, sea $P = a \cdot b$ tal que $a > 1$ y $b > 1$. Sustituyendo P en $2^P - 1$ se tiene que: $2^P - 1 = 2^{a \cdot b} - 1 = \left(2^a\right)^b - 1$.

Por otro lado, como la diferencia $\left(2^a\right)^b - 1$ es igual a la serie telescópica: $\left(2^a - 1\right)\left(\left(2^a\right)^{b-1} + \left(2^a\right)^{b-2} + \left(2^a\right)^{b-3} + \ldots + \left(2^a\right)^1 + \left(2^a\right)^0\right)$.

Entonces, $2^P - 1 = \left(2^a - 1\right)\left(\left(2^a\right)^{b-1} + \left(2^a\right)^{b-2} + \left(2^a\right)^{b-3} + \cdots + 2^a + 1\right)$.

De esta manera, $2^P - 1$ tendrá como factor a $\left(2^a - 1\right) \geq 3$. Concluyéndose así que $2^P - 1$ no es un número primo. Por lo tanto, se demostró por contrapuesta que si $2^P - 1$ es primo, entonces, P es un número primo ■

❖ Aplicación del Test de Fermat.

Test: *Si P es un número primo y $2^P - 1$ no tiene ningún divisor propio de la forma $2Pm + 1$ donde $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ entonces $2^P - 1$ es primo.*

Este Test de Fermat facilita la búsqueda de los números primos de Mersenne (y por ende de los perfectos pares), es decir, de aquellos primos que tienen la forma $(2^P - 1)$ donde *P* es un primo.

a) Por ejemplo, ¿el número $2^7 - 1$ es primo?.
   En este caso el número primo *P* es tal que $P = 7$ y como $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$. Entonces, los posibles divisores propios de la forma $2Pm + 1$ donde $P = 7$ y $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$ del número 127 serían: $15, 29, 43, 57, 71, 85, 99$ y 113. Sin embargo, ninguno de estos números es divisor propio de 127. Por lo tanto, por el Test de Fermat, 127 es un número primo.

b) Por ejemplo, ¿el número $2^{11} - 1$ es primo?.
   En este caso el número primo *P* es tal que $P = 11$ y como $2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047$. Entonces, dado que 23 es un divisor propio del número 2047 y además es de la forma $2Pm + 1$, es decir, $23 = 2 \cdot 11 \cdot 1 + 1$. Por lo tanto, por el Test de Fermat, 2047 no es un número primo.
   (De hecho, $2047 = 23 \times 89$).

❖ Demostración del Teorema de Euclides–Euler.

Teorema: *n es un número perfecto par si y sólo si* $n=2^{P-1}\left(2^P-1\right)$ *con* 2^P-1 *primo.*

Demostración.

Euclides $(\Rightarrow)$.

Sea n un número par de la forma $2^{P-1}\left(2^P-1\right)$ donde 2^P-1 es un primo. Dado que la función suma de los divisores de n es $\sigma(n)=\left(1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{P-1}\right)\left(1+\left(2^P-1\right)\right)$ y como inducción matemática se demuestra que $1+2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{P-1}=2^P-1$, entonces, $\sigma(n)=2^P\left(2^P-1\right)$ de lo cual se implica que $\dfrac{2\times 2^P\left(2^P-1\right)}{2}=2\left(2^{P-1}\left(2^P-1\right)\right)$ pero $2\left(2^{P-1}\left(2^P-1\right)\right)=2n$. Por lo tanto, por definición, n es un número perfecto par ■

Euler $(\Leftarrow)$.

Sea n un número perfecto par tal que $n=2^{P-1}(r)$ donde r es un impar y $P>1$. Dado que $\left(2^{P-1}, r\right)=1$ (son primos relativos entre si) se aplica la multiplicidad de la función σ y se tiene que $\sigma(n)=\sigma\left(2^{P-1}\right)\sigma(r)$. Y como por inducción matemática se demuestra que $1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{P-1}=2^P-1$, entonces, $\sigma(n)=\left(2^P-1\right)\sigma(r)$ pero $\sigma(n)=2\left(2^{P-1}(r)\right)=2^P r$ por ser n un perfecto. Por otro lado, sea la función σ del impar r tal que $\sigma(r)=r+s$ donde s representa a la suma de todos los divisores positivos de r menores que r. Sustituyendo $\sigma(r)$:

$$\sigma(n)=\sigma\left(2^{P-1}\right)\sigma(r)=\left(2^P-1\right)(r+s)=2^P r$$
$$\Rightarrow\ s\left(2^P-1\right)=r\left(2^P\right)-r\left(2^P-1\right)$$
$$\Rightarrow\ r=s\left(2^P-1\right).$$

Entonces, por definición de divisibilidad, $s|r$. Pero, s es la suma de todos los divisores positivos de r menores que r, por lo que, $s=1$ y $r=\left(2^P-1\right)$ donde r es un número primo porque $\sigma(r)=r+1$. Por lo tanto, el número perfecto par n es de la forma $2^{P-1}\left(2^P-1\right)$ con 2^P-1 primo ■

❖ Tabla de los 44 Números Perfectos Pares que se han encontrado hasta el año 2006.[1]

No.	*Número Perfecto Par*	*Descubridor (es)*	*Año*	*Número de dígitos*
1	$2^{1}(2^{2}-1)$	Pitágoras	600 a.C.	1
2	$2^{2}(2^{3}-1)$	Pitágoras	600 a.C.	2
3	$2^{4}(2^{5}-1)$	Nicómaco de Gerasia	100	3
4	$2^{6}(2^{7}-1)$	Nicómaco de Gerasia	100	4
5	$2^{12}(2^{13}-1)$	Jámblico, Curtze y Regiomontano	1461	8
6	$2^{16}(2^{17}-1)$	Cataldi y Regiomontano	1603	10
7	$2^{18}(2^{19}-1)$	Cataldi	1603	12
8	$2^{30}(2^{31}-1)$	Euler	1753	19
9	$2^{60}(2^{61}-1)$	Pervusin y Seelhoff	1883	37
10	$2^{88}(2^{89}-1)$	Powers	1911	54
11	$2^{106}(2^{107}-1)$	Powers	1914	65
12	$2^{126}(2^{127}-1)$	Lucas	1876	77
13	$2^{520}(2^{521}-1)$	Robinson	1952	314
14	$2^{606}(2^{607}-1)$	Robinson	1952	366
15	$2^{1,278}(2^{1,279}-1)$	Robinson	1952	770
16	$2^{2,202}(2^{2,203}-1)$	Robinson	1952	1,327
17	$2^{2,280}(2^{2,281}-1)$	Robinson	1952	1,373
18	$2^{3,216}(2^{3,217}-1)$	Riesel	1957	1,937
19	$2^{4,252}(2^{4,253}-1)$	Hurwitz	1961	2,561

[1]El año en que se hallaron los primeros cuatro números perfectos pares debe considerarse sólo como un aproximado. (*) Indica que a partir del número perfecto par 38 la tabla se vuelve provisional ya que a la fecha no se sabe si existen más números primos de Mersenne entre el 38 y el 44. Cabe mencionar, que en aproximadamente dos mil años se encontraron sólo doce números perfectos pares y que los restantes treinta y dos se hallaron en poco menos cien de años.

20	$2^{4,422}\left(2^{4,423}-1\right)$	Hurwitz	1961	2,663
21	$2^{9,688}\left(2^{9,689}-1\right)$	Gillies	1963	5,834
22	$2^{9,940}\left(2^{9,941}-1\right)$	Gillies	1963	5,985
23	$2^{11,212}\left(2^{11,213}-1\right)$	Gillies	1963	6,751
24	$2^{19,936}\left(2^{19,937}-1\right)$	Tuckerman	1971	12,003
25	$2^{21,700}\left(2^{21,701}-1\right)$	Noll y Nickel	1978	13,066
26	$2^{23,208}\left(2^{23,209}-1\right)$	Noll	1979	13,973
27	$2^{44,496}\left(2^{44,497}-1\right)$	Nelson y Slowinski	1979	26,790
28	$2^{86,242}\left(2^{86,243}-1\right)$	Slowinski	1982	51,924
29	$2^{110,502}\left(2^{110,503}-1\right)$	Colquitt y Welsh	1988	66,530
30	$2^{132,048}\left(2^{132,049}-1\right)$	Slowinski	1983	79,502
31	$2^{216,090}\left(2^{216,091}-1\right)$	Slowinski	1985	130,100
32	$2^{756,838}\left(2^{756,839}-1\right)$	Slowinski y Gage	1992	455,663
33	$2^{859,432}\left(2^{859,433}-1\right)$	Slowinski y Gage	1994	517,430
34	$2^{1,257,786}\left(2^{1,257,787}-1\right)$	Slowinski y Gage	1996	757,263
35	$2^{1,398,268}\left(2^{1,398,269}-1\right)$	Armengaud, Woltman, *et. al.*	1996	841,842
36	$2^{2,976,220}\left(2^{2,976,221}-1\right)$	Spence, Woltman, *et. al.*	1997	1,791,864
37	$2^{3,021,376}\left(2^{3,021,377}-1\right)$	Clarkson, Woltman, Kurowski, *et. al.*	1998	1,819,050
38	$2^{6,972,592}\left(2^{6,972,593}-1\right)$	Hajratwala, Woltman, Kurowski, *et. al.*	1999	4,197,919
*39	$2^{13,466,916}\left(2^{13,466,917}-1\right)$	Cameron, Woltman, Kurowski, *et. al.*	2001	8,107,892
*40	$2^{20,996,010}\left(2^{20,996,011}-1\right)$	Shafer, Woltman, Kurowski, *et. al.*	2003	12,640,858
*41	$2^{24,036,582}\left(2^{24,036,583}-1\right)$	Findley, Woltman, Kurowski, *et. al.*	2004	14,471,465
*42	$2^{25,964,950}\left(2^{25,964,951}-1\right)$	Nowak	2005	15,632,459
*43	$2^{30,402,456}\left(2^{30,402,457}-1\right)$	Cooper B., Woltman, Kurowski, *et. al.*	2005	
*44	$2^{32,582,656}\left(2^{32,582,657}-1\right)$	Cooper B., Woltman, Kurowski, *et. al.*	2005	

REFERENCIAS

Bernhard H. A. 1949. *On the least possible odd perfect number.* Amer. Math. Monthly. 6:628-629.

Brauer A. 1943. *On the non-existence of odd perfect numbers of form* $p^{\alpha} q_1^2 \cdots q_{t-1}^2 q_t^4$. Bull. A.M.S. 49:712-718.

Brent R. P., Cohen G. L. y Te Riele H. J. J. 1991. *Improved techniques for lower bounds for odd perfect numbers*. Math. Comp. 57:857-868.

McCarthy P. J. 1957. *Odd perfect numbers*. Scripta. Math. 23:43-47.

McCarthy P. J. 1957. *Remarks concerning the non-existence of odd perfect numbers.* Amer. Math. Monthly. 64:257-258.

Chein J. F. Z. 1979. *An odd perfect numbers has at least 8 prime factors.* Ph. D. Thesis, Pennsylvania State Univ.

McDaniel W. L. 1970. *The non-existence of odd perfect number of a certain form.* Arch. Math. 21:52-53.

Dickson L. E. 1913. *Finiteness of the odd perfect and primitive abundant numbers with n distinct prime divisors*. Amer. J. Math. 35:413-422.

Dickson L. E. 1999. *History of the theory of numbers*. Chelsea. Vol. 1. 4ª ed.

Dunham Williams. 2000. *Euler. El maestro de todos los matemáticos.* Madrid: Nivola.

Durán Meza, Alberto. 2002. *The cardinality of even perfect numbers*. En: International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 777-781.

Euclides. 1994. *Elementos*. Libros V-IX. Traducción y notas: M. Luisa Puerta. No. de colección:191. Madrid:Gredos.

Euler L. *Commentationes arithmeticae collectae*. Vol. II. (E152).

Euler L. 1849. *Tractus de numerorum doctrina*. (E657).

Euler L. 1862. *Opera postuma*. Vol. 1. 14-15.

Fibonacci. 2002. *Fibonacci's Liber Abaci*. New York:Springer Berlag.

Gradstein I. S. 1925. *Odd perfect numbers*. Math. Sb. 32:476-510.

Hagis Peter Jr. y McDaniel W. L. 1972. *A new result concerning the structure of odd perfect number*. Proc. Amer. Math. Soc. 32:13-15.

Hagis Peter Jr. y McDaniel W. L. 1975. *Some results concerning non-existence of odd perfect numbers of form* $p^{\alpha} \cdot m^{2B}$. The J. Fibonnacci Quart. No. 1. 13:25-28.

Hagis Peter Jr. 1975. *Every odd perfect number has at least 8 prime factors.* Notices Amer. Math. Soc. 22:A-60.

Hagis Peter Jr. 1980. *Outline of a Proof that every odd perfect number has at least eight prime factors*. Math. Comp. 35:1027-1032.

Hagis Peter Jr. 1980. *On the second largest prime divisor of an odd perfect number*. Analytic number theory. Proc. Conf. Temple Univ. May 12-15.

Hagis Peter Jr. 1983. *Sketch of a proof that an odd perfect number relatively prime to three has at least eleven prime factors*. Math. Comp. 40:399-404.

Hagis Peter Jr. y Cohen G. L. 1998. *Every odd perfect number has a prime factor which exceeds 10^6*. Math. Comp. 67:1323-1330.

Heath-Brown D. R. 1994. *Odd perfect numbers*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 115:191-196.

Holdener Judy A. 2002. *A theorem of Touchard on the form of odd perfect numbers*. The American Mathematical Monthly. No. 7. 109:661-663.

Iannucci D. E. 1999. *The second largest prime divisor of an odd perfect number exceeds ten thousand*. Math. Comp. No. 228. 68:1749-1760.

Iannucci D. E. y Sorli R. M. 2003. *On the total number of prime factors of an odd perfect number*. Math. Comp. No. 224. 72:2078-2084.

Jones Gareth y Jones Mary. 1999. *Elementary Number Theory*. London: Springer Verlag.

Kanold H. J. 1939. *Über eine notwendige Bedingung für die Existenz einer ungeraden vollkommenen Zahl*. Deutsche. Math. 4:53-57.

Kanold H. J. 1941. *Untersuchungen über ungerade vollkommene Zahlen*. J. Reine Angew. Math. 183:98-109.

Kanold H. J. 1942. *Verscharfung einer notwendigen Bedingung für die Existenz einer ungeraden vollkommene Zahl*. J. für Math. 184:116-124.

Kanold H. J. 1944. *Folgerungen aus den Vorkommen einer Gauss'schen Primzahl in der Primfaktorenzerelung einer ungeraden vollkommene Zahl*. J. für Math. 189:25-29.

Kanold H. J. 1947. *Kreisteilungspolynome und ungerade vollkommene Zahlen*. Ber Math. Tagung Tübingen. 1946:84-87.

Kanold H. J. 1950. *Satze über Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige Zahlentheoretische Probleme*. J. für Math. 187:169-182. 188:129-146.

Kanold H. J. 1953. *Einige neuere Bedingung für die Existenz ungerader vollkommenen Zahlen*. J. für Math. 192:24-34.

Kanold H. J. 1956. *Über einen Satz von L. E. Dickson*. Math. Ann. 131:167-179.

Kanold H. J. 1990. *Über eine neue Verallgemeinerung eines Satzes von L. E. Dickson*. Arch. Math. (Basel) 54:448-454.

Kishore M. 1978. *Odd integers n with five distinct prime factors for which* $2-10^{12}<\sigma(n)/n<2+10^{12}$. Math. Comp. 32:303-309.

Kishore M. 1981. *On odd perfect, quasiperfect and almost perfect numbers*. Math. Comp. 36:583-586.

Kishore M. 1983. *Odd perfect numbers not divisible by three are divisible by at least eleven distinct primes*. Math. Comp. 40:405-411.

Kühnel U. 1949. *Verschärfung der notwendigen Bedingungen für die Existenz von ungeraden vollkommenen Zahlen*. Math. Zeit. 52:202-211.

Levit R. J. 1947. *The non-existence of a certain type of odd perfect number*. Bull. A.M.S. 53:392-396.

Muskat J. B. 1966. *On divisors of odd perfect numbers*. Math. Comp. 20:141-144.

Ore, Oystein. 1948. *Number Theory and its History*. New York:Dover.

Pomerance C. 1973/74. *Odd perfect numbers are divisible by at least seven distinct primes*. Acta. Arith. 25:265-300.

Pomerance C. 1975. *The second largest prime factor of an odd perfect numbers*. Math. Comp. 26:914-921.

Robbins N. 1972. *The non-existence of odd perfect numbers with less than seven distinct prime factors*. Notices Amer. Math. Soc. 19:A-52.

Robbins N. 1975. *Lower bounds for the largest prime factor of an odd perfect numbers which is divisible by a Fermat prime*. J. Reine Angew. Math. 278/279:14-21.

Rugg, Gordon. 2004. *El Misterio del Manuscrito Voynich*. En: Scientific American Latinoamérica. 26:174-179.

Satyanarayana M. 1959. *Odd perfect numbers*. Math. Student. No. 1 y 2. 27:17-18.

Shapiro H. N. 1949. *Note on a theorem of Dickson*. Bull. A.M.S. 55:450-452.

Shapiro H. N. 1968. *On primitive abundant numbers*. Comm. Pure Appl. Math. 21:111-118.

Starni P. 1991. *On the Euler's factor of an odd perfect number*. J. Number Theory. 37:366-369.

Starni P. 1993. *Odd perfect numbers: a divisor related to the Euler'r factor*. J. Number Theory. 44:58-59.

Suryanarayana D. 1963. *On odd perfect numbers*. II. Proc. A.M.S. 14:896-904.

Suryanarayana D. y Hagis Peter. 1970. *A theorem concerning odd perfect numbers*. Fibonacci Quart. 8:337-346, 374.

Steuerwald R. 1937. *Verscharfung einer notwendigen Bedingung für die Existenz einer ungeraden vollkommenen Zahl*. S.-B. Math.-Nat. Abt. Bayer, Akad. Wiss. 68-72.

Tannery Adam y Tannery Paul. 1996. *Oeuvres de Descartes*. Tomo II. París: Librairie Philosophique J. Vrin.

Touchard Jacques. 1953. *On prime numbers and perfect numbers*. Scripta Math. 19:35-39.

Van der Waall R. W. 1970. *On a theorem of Leopoldt and on perfect numbers*. Nieuw Arch. Wiskunde (3). 18:159-161.

Wall Ch. R. 1972. *Bi-unitary perfect numbers*. Proc. A.M.S. 33:39-42.

Webber G. C. 1951. *Non-existence of odd perfect numbers of the form* $3^{2\beta} p^{\alpha} s_1^{2\beta_1} s_2^{2\beta_2} s_3^{2\beta_3}$. Duke Math. J. 18:741-749.