Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

DE LA MEDIDA DE LEBESGUE A LOS CARDINALES GRANDES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A:

J U D I T H C A M P O S C O R D E R O

DIRECTORA DE TESIS:
Dra. Gabriela Campero Arena

2010

Hoja de datos del jurado

1.	Datos del alumno Campos Cordero Judith 55 94 78 17 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 302500691
2.	Datos del asesor Dra. Gabriela Campero Arena
3.	Datos del sinodal 1 Dr. Javier Páez Cárdenas
4.	Datos del sinodal 2 Dra. Mónica Alicia Clapp Jiménez - Labora
5.	Datos del sinodal 3 Dr. José Alfredo Amor Montaño
6.	Datos del sinodal 4 M. en C. Rodrigo Jesús Hernández Gutiérrez
7.	Datos de la tesis De la Medida de Lebesgue a los cardinales grandes 150 pp. 2010

Agradecimientos

A mi mamá, Judith Cordero, por el inmenso amor que me da cada día, por ser mi amiga y mi fuerza. Por ser el ejemplo más valioso y porque mi admiración hacia ella cada vez crece más. Porque además de todo esto, desea siempre me felicidad y me ayuda en cada paso que doy.

A Asaf Paris, por lo maravilloso que es caminar por la vida a su lado. Por las incontables risas. Por su amor tan grande y por recibir el mío. Por los sueños que hemos creado juntos. Por recordarme que en el fondo siempre hay color y hay que sonreír ante el porvenir. Porque además de todo, es también mi mejor amigo.

A Gabriela Campero, porque ha sido un verdadero placer trabajar a su lado. Por transmitir siempre cuánto disfruta dar clases. Por enseñarme tanto desde los primeros días que estuve en la Facultad y hasta el momento en que revisamos las últimas páginas de esta tesis. Por impulsarme a crecer y a enfrentarme a mí misma. Por la fortuna que ha sido encontrar su amistad.

A Mónica Clapp y a Javier Páez, por todo lo que me han enseñado (que ha sido mucho más que Análisis y Cálculo), por sus valiosos consejos, su paciencia y las pláticas tan agradables. Por transmitir tan fervientemente su pasión por las matemáticas. Por su interés constante en ayudar a los demás.

A José Alfredo Amor, por la fortuna que ha sido conocerlo como profesor y como persona. Por su interés tan grande en los alumnos (y en el Axioma de Elección). Porque siempre tiene una sonrisa amable y porque desde que lo conozco he sentido un gran apoyo en él.

A Rodrigo Hernández, porque siempre recomienda ser feliz. Por su entusiasmo constante y por leer todas estas páginas además de todas las que tuvo que revisar cuando fue mi ayudante.

A todos mis sinodales, por acceder a revisar esta tesis y por todas sus correcciones tan valiosas.

A Nils Ackermann, por el inmenso apoyo que me ha brindado. Por sus magníficas clases en las que pude aprender cosas tan bonitas. Por ser una gran persona además de un gran profesor.

A Alejandro Illanes, por recibirnos tantas veces en su cubículo con dudas que no siempre fueron de topología. Por sus magníficas clases y por lo mucho que aprendí en ellas.

A Ángel Tamariz, por acceder a darnos clase de topología. Por sus sonrisas cálidas y por la motivación que da a sus estudiantes.

A mis padres, por darme la vida y porque sé que siempre quieren lo mejor para mí.

A tío Rubén y tía Margarita, por estar siempre presentes. Por ser tan cariñosos cada día desde que tengo memoria. Por las risas que surgen a la hora de la comida y por sus constantes muestras de apoyo.

A Rosa María Cordero y Judith Valdés, por permitirme ser parte de sus vidas. Porque una de mis partes favoritas de la semana son las películas y las pláticas de los sábados. Por su gran cariño y su ejemplo.

A mis primos, Rosita, Ernesto y Zeus, porque las reuniones familiares me encantan pues puedo convivir con ellos. Porque siempre aprendo algo nuevo a su lado.

A Gilberto, Raymundo, Lety F. y Lilí, por ser una parte tan importante de mi familia y porque siempre me hacen sonreír.

A mi tío Pepe, porque sigue estando presente en cada lugar. Por cuidarme tanto, por su inmenso cariño y por el gran corazón que tuvo siempre.

A tía Lety, por su enorme cariño y ternura. Por estar siempre cerca y por sus constantes detalles tan dulces.

A Aarón David y Ray, por sus sonrisas siempre sinceras. Porque me hace feliz saber que la nobleza seguirá siempre presente en su forma de ser.

A Soledad Sánchez, porque representa uno de los amores más grandes que he recibido. Por haberme cuidado desde el primer momento y porque su manera de ver la vida con sonrisas y dulces es lo mejor que pudo haberme enseñado.

A Katya Mandoki, por abrirme siempre las puertas de su casa. Por su afecto y por compartir conmigo sus anécdotas y su fascinante manera de percibir al mundo.

A Ana Patricia Kuri, por haberme acercado a las matemáticas. Porque a pesar de lo que diga, fue una gran influencia para mí al elegir qué carrera iba a estudiar. Por su cariño y su gran amistad.

A Noriko, Paty, Heiblum, Alejandro y Marduk, porque además del placer que ha sido aprender tantas cosas a su lado, su amistad cada día representa una nueva enseñanza. Por su apoyo, su cariño y por lo valiosos que son como personas. Por los cumpleaños sorpresa (y los que no fueron tanto). Porque los mejores recuerdos que tengo de la Facultad, sin duda son a su lado.

A Osvaldo, por las valiosas observaciones y correcciones que hizo a mi tesis. Por creer que existen los cardinales grandes y por el apoyo brindado en el poco tiempo que he tenido oportunidad de tratarlo.

A Vicente, por lo agradable que ha sido conocerlo. Por los paseos por Cholula y lo divertido que ha sido compartir vivencias en las que tratamos de decidir el futuro.

A Juan Carlos y a Jessica, por permitirme conocerlos, por las confidencias y las pláticas que hemos tenido que siempre me han dejado con una sonrisa.

A Diegoche, por su amistad tan sincera. Por los boliches y las risas compartidas. Por estar tan cerca en los momentos agradables y en los difíciles también.

A Norma, a Daniela y a Luege, porque siguen estando presentes. Por los hermosos recuerdos y por sus muestras de cariño.

A Manuel, por su sonrisa tan cálida. Por su amistad tan valiosa y el placer que ha sido conocerlo. Por los días de comer rosca o tamales en el cubículo de José Alfredo.

A Paula, por haber compartido su dulzura conmigo, por su cariño sincero. Porque sé que siempre estará en mis recuerdos.

A aquellas personas de las que he tenido el placer de ser ayudante, porque han hecho que los martes y los jueves sean más divertidos. Por lo mucho que he aprendido de todos y cada uno de ellos.

A Joaquín, porque su sonrisa endulzó más de una vez las revisiones de esta tesis.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y, en particular, a la Facultad de Ciencias, por recibir cada día a tantas personas tan deseosas de enseñar y de aprender algo nuevo de los demás y por permitirme ser parte de eso.

Índice general

Introducción

Haciendo uso de que el presente trabajo ha sido escrito con el propósito de ser una tesis de licenciatura, resulta oportuno recordar que el inicio de la carrera de Matemáticas consiste, a grandes rasgos, en aprender que el objetivo de esta disciplina no es el de obtener verdades absolutas. Lejos de esto, la actividad matemática radica en establecer deducciones a partir de una serie de axiomas y mediante reglas de inferencia, en donde lo importante será la validez del razonamiento, más que la verdad o falsedad de los enunciados con los que se está trabajando.

Así, quizá uno de los ejemplos más famosos para introducir a un estudiante de Matemáticas al método axiomático, sea aquella formulación de los cinco postulados en Geometría planteada por los griegos de la antigüedad. Dicha axiomatización resulta particularmente relevante pues no sólo fue el inicio de la formalización de las matemáticas, sino porque en el siglo XIX se demostró que, contrario a lo que suponían los griegos, el quinto de esos postulados no se puede deducir mediante una prueba lógica a partir de los otros cuatro.[1] La demostración de esta *imposibilidad* de probar el quinto postulado se debió principalmente a los trabajos de Gauss, Bolyai, Lobachevsky y Riemann. Además, su trascendencia para las matemáticas no sólo descansaba en el hecho de que habían resuelto un problema que había asediado a muchas generaciones de matemáticos, sino que planteaba por primera vez que se puede demostrar que un axioma es *independiente* de otra colección de enunciados.[2]

En este mismo contexto histórico se habían venido desarrollando nuevas ramas de las matemáticas que tenían una base axiomática aparentemente sólida y, para ramas ya conocidas como la del estudio de los números naturales, los matemáticos buscaban construir también un sistema axiomático adecuado.

[1] Una versión del quinto postulado establece que, dados una línea recta y un punto fuera de ella, es posible trazar una única recta paralela a la primera.

[2] Véase [Dau79] para profundizar en la historia alrededor de este tema.

Paralelamente, en 1874 el matemático alemán Georg Cantor publicó un artículo en el que demostró formalmente que hay distintas clases de conjuntos infinitos, en el sentido de que no todos los conjuntos infinitos son biyectables entre sí. Posteriormente, probó que los números racionales son tantos como los naturales, pero que no es posible establecer una correspondencia biunívoca entre los racionales y los reales. Estos resultados fueron severamente criticados por matemáticos como Kronecker y causaron gran turbulencia dentro del mundo científico de la época. Sin embargo, fueron el origen de la Teoría de Conjuntos y, entre otras cosas, permitieron a Cantor crear una teoría de los números transfinitos, además de plantear uno de los problemas que más fascinación han causado a lo largo de la historia de las matemáticas y que radica en preguntarse si existirá un subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ tal que no sea biyectable con los números naturales ni con los números reales. Cantor intentó durante años demostrar que tal conjunto no puede existir, pero nunca logró (ni hubiera podido lograr) probar esta suposición a la que él denominó *Hipótesis del Continuo*.

Así, en medio de esta pregunta sin resolver y de la creciente necesidad de formalizar las matemáticas, a finales del siglo XIX y principios del XX surgieron las primeras propuestas para axiomatizar la recientemente creada Teoría de Conjuntos. El objetivo principal era fundamentar a todas las matemáticas y uno de los primeros intentos para lograr esta axiomatización fue dado por el matemático alemán Gottlob Frege. Sin embargo, en 1901 Bertrand Russell demostró que los axiomas de Frege conducían a una contradicción. Este resultado es conocido como la Paradoja de Russell.[3] Posteriormente, en 1904, Ernst Zermelo formuló por primera vez de manera formal el Axioma de Elección y, cuatro años más tarde, propuso un sistema de axiomas para la Teoría de Conjuntos pero que no permitía construir a los números transfinitos definidos por Cantor. Fue hasta 1922 cuando, reuniendo las ideas de Zermelo con las de otro matemático alemán, de nombre Abraham Fraenkel, se logró sintetizar lo que actualmente se conoce como el sistema axiomático de ZFE (Zermelo-Fraenkel con Elección), y que es la base sobre la que está fundamentada la Teoría de Conjuntos como la conocemos.

A lo largo de este trabajo, frecuentemente haremos referencia al significado del sistema axiomático ZFE y de que un enunciado sea *indecidible* para esta teoría. Sin embargo, el objetivo central de esta tesis está dado por un problema que surgió en matemáticas a principios del siglo XX, varios años antes de que siquiera se considerara la posibilidad de que la Hipótesis del Continuo resultara un enunciado ni demostrable ni refutable.

La historia de este problema comienza en 1902, cuando el matemático francés Henri Lebesgue intentaba extender las nociones de integración desarrolladas antes por Riemann y comenzó a buscar una función que asignara un tamaño a cada conjunto de números reales, pero no en un sentido de cardinalidad como el que había motivado el trabajo de Cantor, sino desde una perspectiva más geométrica y que fuera congruente con las nociones de longitud que la humanidad había trazado desde sus inicios. En el Capítulo 1 de este trabajo expondremos

[3] Véase [HJ99] pág. 3.

este planteamiento de Lebesgue denominado *Problema de la Medida*. Además, hablaremos de cómo poco tiempo después de que Lebesgue se preguntara si es posible medir a todos los conjuntos de números reales mediante una función que cumpliera ciertas características, el matemático italiano Giuseppe Vitali demostró que la respuesta a esta pregunta es negativa, originando así una crisis en las matemáticas. Lebesgue tuvo que solucionar esta crisis replanteando la manera en la que debía abordarse el Problema de la Medida, dando así pie a la construcción de la Medida de Lebesgue como es conocida actualmente y que también expondremos en el Capítulo 1 de este trabajo.

Después de la Primera Guerra Mundial y tras la reunificación de Polonia, en este país se formó un grupo de matemáticos muy interesados en los fundamentos de la matemática desde el punto de vista de la Teoría de Conjuntos. Personajes como Banach, Tarski, Ulam y Kuratowski, hicieron numerosas aportaciones entre las que estuvieron retomar el Problema de la Medida planteado por Lebesgue inicialmente, pero esta vez desde un enfoque teórico conjuntista, dando pie a una de las ramas más prominentes dentro de esta área de las matemáticas. En el Capítulo 2 del presente trabajo introduciremos una generalización del Problema de la Medida tal y como fue planteada por Banach, así como su relación con la Hipótesis del Continuo. Cabe destacar que para ese momento histórico, estos problemas representaban dos de las grandes preguntas que las matemáticas tenían que encargarse de contestar, pero los límites entre el enfoque analítico que se da actualmente a la Medida de Lebesgue, y el teórico conjuntista que se da a la Hipótesis del Continuo, en ese entonces eran aún muy difusos.

Prueba de lo anterior es que el Capítulo 3 de este trabajo, titulado *Cardinales medibles*, es una síntesis del desarrollo que se dio a partir de las investigaciones por parte de Banach, Ulam, Kuratowski y otros matemáticos de la época que, intentando dar una solución al Problema de la Medida replanteado por Banach, recurrieron a la investigación en los números cardinales y dieron así origen a conceptos como el de cardinal medible o el de cardinal inaccesible. Más aún, Ulam demostró que bajo ciertas condiciones y renunciando a la invariancia bajo traslaciones en la Medida de Lebesgue, es posible extender dicha medida a todos los subconjuntos de números reales. Así, el corazón de este trabajo se encuentra en el Capítulo 3, alrededor de todos los conceptos que surgieron a raíz del Problema de la Medida y mediante los que fue posible demostrar que no se puede resolver este problema desde los axiomas de ZFE, pues la existencia de una solución al Problema de la Medida implica la existencia de cardinales que no podemos encontrar en la Teoría de Conjuntos bajo los postulados usuales.

Sin embargo, para muchos matemáticos la suposición de que existen tales números cardinales resulta no sólo fascinante sino plausible desde un punto de vista platónico, de modo que se ha desarrollado toda una teoría en la que se supone que hay tales cardinales grandes y se analizan las consecuencias que esto pueda tener para la Teoría de Conjuntos e incluso para otras ramas de las matemáticas como la topología. Dicha teoría es llamada de los *cardinales grandes* y, aunque el tema es muy fructífero, en este trabajo sólo lo expondremos brevemente en el Capítulo 4, en donde se hablará de la relación que existe entre el Problema de la Medida y la existencia de algunos cardinales grandes, que fueron definidos de manera independiente a los trabajos hechos alrededor del enlace entre la Teoría de la Medida y la Teoría de Conjuntos.

En la presente tesis aparecen al final dos apéndices que tienen como objetivo brindar al lector todos los conceptos y resultados utilizados a lo largo del trabajo y que corresponden al conocimiento que se adquiere en los cursos introductorios de Teoría de Conjuntos y a las propiedades de los números reales que se estudian en los cursos de Cálculo y Análisis Matemático.

Finalmente, antes de dar comienzo al desarrollo del que hemos hablado en esta introducción, sólo queda mencionar que el objetivo de este trabajo es reunir nuevamente a dos problemas que desde siempre han concernido al ser humano que se refieren a *medir* y a *contar*, pero sobre todo es nuestro propósito recordar que muchas veces es necesario traspasar los límtes que se han trazado entre un área de las matemáticas y otra, pues las diferentes perspectivas desde las que se puede abordar un mismo problema son las que enriquecen y dan origen al avance en el conocimiento matemático.

CAPÍTULO 1

La Medida de Lebesgue

El conjunto de los números reales junto con la relación $<$ que usualmente establecemos entre ellos es un orden lineal en el que podemos considerar al cero como un elemento distinguido. Esto nos permite, por ejemplo, definir quiénes son los números positivos y los negativos. Así surge inmediatamente el concepto del *valor absoluto* de un número real, que básicamente establece *qué tan lejos* se encuentra ese número del cero. Además, el concepto de valor absoluto nos permite definir la noción de *distancia* entre cualesquiera dos números reales x y y mediante el número real dado por $|x-y|$.

El concepto de distancia brinda la posibilidad de ver al conjunto de los números reales ya no sólo como un orden lineal, sino también como un espacio topológico en el que es posible estudiar a los subconjuntos de números reales mediante sus propiedades morfológicas y geométricas.[1] Una clase importante de conjuntos en la que se reunen las propiedades topológicas y de orden lineal con las que se ha dotado al conjunto de números reales es la de los *intervalos*. Recordemos que si I es un subconjunto de $\mathbb{R}$, decimos que I es un **intervalo** si y sólo si para cualesquiera $x, y \in I$, si $x < y$ y $z \in \mathbb{R}$ es tal que $x < z < y$, entonces $z \in I$.

Los siguientes conjuntos son ejemplos de intervalos y de la notación que utilizamos para referirnos a ellos:

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

[1] El lector puede consultar en la Sección B.3 del Apéndice B las definiciones más importantes de la topología de los números reales que serán utilizadas a lo largo de este trabajo.

Por otra parte, podemos observar que si a es un número real, el conjunto $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ satisface la definición de intervalo. En esta expresión, el símbolo de ∞ tiene el único propósito de fungir como notación. Sin embargo, para el desarrollo que haremos de la Medida de Lebesgue resulta conveniente darle a esta simbología un significado más profundo, viendo a ∞ como un elemento de un conjunto que extienda a los números reales. Así, podemos considerar la siguiente definición.

Definición 1.1 *Definimos el sistema de* ***números reales extendidos*** *como aquel que consiste del campo ordenado $\mathbb{R}$ junto con los símbolos de ∞ y $-\infty$ estableciendo las siguientes convenciones:*

(i) *El orden entre los elementos de $\mathbb{R}$ se preserva como es usual;*

(ii) *para todo $x \in \mathbb{R}$ convenimos que $-\infty < x < \infty$. Además, $-\infty < \infty$; y*

(iii) *si $x \in \mathbb{R}$, establecemos que $x + \infty = \infty$, $x + (-\infty) = -\infty$; si $x = 0$, entonces $x \cdot \infty = 0 = x \cdot (-\infty)$; si $x > 0$, entonces $x \cdot \infty = \infty$ y $x \cdot (-\infty) = -\infty$ y si $x < 0$, entonces $x \cdot \infty = -\infty$ y $x \cdot (-\infty) = \infty$.*

Observación 1.2 *En el sistema de los reales extendidos cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ tiene un supremo y un ínfimo siendo ∞ y $-\infty$ cotas superior e inferior respectivamente.*

De aquí en adelante, cuando hablemos del símbolo ∞ estaremos pensando en el sistema de los reales extendidos junto con las propiedades heredadas por el campo ordenado $\mathbb{R}$. Además, siguiendo la notación de la que hablábamos para los intervalos, podremos considerar, por ejemplo, intervalos de la forma $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ para algún número real b.

Con base en lo anterior, dados dos números $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, resulta natural definir la longitud de un intervalo de la forma $(a, b]$ como el número real $b - a$ y decir que para intervalos de la forma $(-\infty, b]$, (a, ∞) y $(-\infty, \infty)$, su longitud toma el valor ∞. De manera más general, también resulta natural pensar que si $a_0 < b_0 < a_1 < ... < a_n < b_n \in \mathbb{R}$, entonces la longitud de la unión de los intervalos ajenos de la forma $(a_i, b_i]$ es la suma de las longitudes de cada uno, es decir, la longitud del conjunto $\bigcup_{i=0}^{n}(a_i, b_i]$ es el número $\sum_{i=0}^{n}(b_i - a_i)$.

Asignar de esta manera un número a un conjunto de números reales corresponde a empezar a abstraer el concepto de *medir*. Esta tarea comenzó a inquietar a matemáticos como Borel y Baire. Sin embargo, fue hasta 1901 cuando Henri Lebesgue concretó de manera más formal estas ideas al construir lo que hoy conocemos como la *Medida de Lebesgue*. Al año siguiente, Lebesgue publicó en su tesis doctoral el llamado *Problema de la Medida*, que en el caso de la recta real, consiste en preguntarse si existirá una función m, a la que llamaremos medida, tal que a cada conjunto acotado de números reales le asocie un número real no negativo bajo las siguientes condiciones:

(a) m no sea la función constante cero;

(b) m sea invariante bajo traslaciones, es decir, si $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ son tales que existe un número real r con la propiedad de que $Y = \{x + r : x \in X\}$, entonces $m(X) = m(Y)$; y

(c) m sea numerablemente aditiva, es decir, si $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de conjuntos ajenos por parejas cuya unión es un conjunto acotado de números reales, entonces

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(X_n).$$

Para referirnos a esta última propiedad también diremos que m es **σ-aditiva**.

Lebesgue intentó dar una respuesta afirmativa al Problema de la Medida. Su mayor motivación para *medir* conjuntos era construir una integral que estuviera libre de algunas limitaciones como las que tenía la integral de Riemann, mediante la que no era posible, por ejemplo, asignar un tamaño geométrico al conjunto de números racionales. Intuitivamente, dicho conjunto debía ser muy pequeño pues consta de una unión numerable de conjuntos de números reales que podemos pensar como intervalos de la forma $[x, x]$ cuya longitud nos gustaría que fuera cero. Así, la medida que Lebesgue construyera debía además extender la noción de longitud de la que hablamos al inicio de este capítulo.

A continuación expondremos la construcción clásica de la Medida de Lebesgue, así como sus propiedades más importantes y los problemas a los que Lebesgue se enfrentó a lo largo de su desarrollo.

1.1. Aproximación mediante intervalos

Dado que lo único que sabemos medir hasta ahora son intervalos de números reales, tendremos que utilizar esta herramienta para decidir cuánto van a medir los demás subconjuntos de $\mathbb{R}$. Sin embargo, estos conjuntos pueden resultar de naturalezas muy variadas y complicadas, así que al igual que muchas otras cosas en matemáticas, decidiremos cuál es la medida de estos conjuntos *aproximándonos* a ellos mediante los intervalos que sí sabemos medir.

Para hablar más fácilmente de los intervalos en $\mathbb{R}$ resulta conveniente establecer la siguiente notación.

Notación 1.3 *De aquí en adelante, denotaremos con $\mathcal{E}$ al siguiente conjunto de intervalos*

$$\{(a, b], (a, \infty), (-\infty, b], (-\infty, \infty) : a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a \leq b\}.$$

Nótese que al permitir el caso $a = b$ en la notación anterior, estamos incluyendo al conjunto vacío dentro de la familia $\mathcal{E}$. Por otra parte, como tenemos muy claro cuánto queremos que midan los conjuntos de esta colección, podemos considerar la siguiente definición.

Definición 1.4 *Definimos la **longitud para los intervalos en** $\mathcal{E}$ como la función $\ell : \mathcal{E} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que*

$$\ell(E) := \begin{cases} b - a & \text{si } E = (a, b] \text{ y } a < b \\ 0 & \text{si } E = \emptyset \\ \infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Obsérvese que el conjunto $\mathcal{E}$ no es cerrado bajo uniones finitas pues, por ejemplo, $(0,1],(2,3] \in \mathcal{E}$ y $(0,1] \cup (2,3] \notin \mathcal{E}$. Sin embargo, tenemos una idea intuitiva de cuánto debe medir un conjunto que es unión finita de intervalos como los que hemos considerado hasta ahora, así que extenderemos esta familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$ de la siguiente manera.

Notación 1.5 *Sea $\mathcal{E}$ como en la Notación 1.3. De aquí en adelante llamaremos $\mathcal{F}$ al conjunto*

$$\mathcal{F} := \left\{ F \subseteq \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N}\ \exists E_0, ..., E_m \in \mathcal{E} \left(F = \bigcup_{n=0}^{m} E_n \right) \right\}.$$

De esta forma, $\mathcal{F}$ es el conjunto de uniones finitas de elementos de $\mathcal{E}$.

El siguiente concepto nos ayudará a establecer más claramente las propiedades de la familia $\mathcal{F}$.

Definición 1.6 *Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Decimos que $\mathcal{A}$ es un* ***álgebra*** *de subconjuntos de X si ocurre que:*

(a) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;

(b) si $A \in \mathcal{A}$, entonces $X - A \in \mathcal{A}$; y

(c) si $\{A_n : 0 \leq n \leq k\}$ es una colección finita de elementos de $\mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n=0}^{k} A_n \in \mathcal{A}$.

A continuación enunciaremos algunas propiedades de $\mathcal{F}$ que son sencillas de verificar y que tendrán mucha relevancia en la construcción de la Medida de Lebesgue.

Observación 1.7 *La familia $\mathcal{F}$ satisface las siguientes propiedades.*

(1) $\mathcal{F}$ es un álgebra.

(2) Si $F \in \mathcal{F}$, entonces podemos escribir a F como unión finita de intervalos en $\mathcal{E}$ que además sean ajenos dos a dos.

Hechas estas observaciones, podemos extender de manera natural la noción de longitud de un intervalo para asignar una medida también a conjuntos como los que aparecen en la familia $\mathcal{F}$. Con este propósito enunciaremos la siguiente definición.

Definición 1.8 *Definimos la* ***longitud para los conjuntos en*** *$\mathcal{F}$ como la función $\mathcal{L} : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de forma que si $F \in \mathcal{F}$ satisface que la colección $\{E_n : 0 \leq n \leq m\} \subseteq \mathcal{E}$ es tal que $F = \bigcup_{n=0}^{m} E_n$ y para cualesquiera $0 \leq n < k \leq m$ se tiene que $E_n \cap E_k = \emptyset$, entonces $\mathcal{L}(F)$ está dada por:*

$$\mathcal{L}(F) := \sum_{n=0}^{m} \ell(E_n).$$

Obsérvese que dado un conjunto $F \in \mathcal{F}$, éste puede tener representaciones distintas al verlo como unión de intervalos ajenos. Sin embargo, la función $\mathcal{L}$ está bien definida por la Observación 1.7 y por las propiedades de ℓ.

Para poner en concreto las propiedades de $\mathcal{L}$ consideraremos primero la siguiente definición.

Definición 1.9 *Sea $\mathcal{X}$ un álgebra de conjuntos de X. Decimos que una función $\phi : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es* ***aditiva*** *si para cualesquiera conjuntos $A, B \in \mathcal{X}$ tales que $A \cap B = \emptyset$ se tiene que $\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B)$.*

Proposición 1.10 *Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

(a) Si $E, F \in \mathcal{F}$ son tales que $E \subseteq F$, entonces $\mathcal{L}(E) \leq \mathcal{L}(F)$.

(b) $\mathcal{L}$ es una función aditiva.

(c) Si $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de conjuntos en $\mathcal{F}$ tal que siempre que $n \neq m$, se tiene que $F_n \cap F_m = \emptyset$, y además $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{F}$, entonces

$$\mathcal{L}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(F_n).$$

(d) Si $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de conjuntos en $\mathcal{F}$ tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{F}$, entonces

$$\mathcal{L}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(F_n).$$

Demostración.

(a) Esta propiedad es consecuencia de la definición de $\mathcal{L}$ como una extensión a la noción de longitud para los intervalos.

(b) Esta propiedad se sigue del hecho de que $\mathcal{L}$ está definida en función de ver a los elementos de $\mathcal{F}$ como uniones finitas de intervalos ajenos.

(c) Para verificar esa propiedad, nótese que cada conjunto en $\mathcal{F}$ se puede ver como unión de una cantidad finita de intervalos ajenos. Así, si $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$ es una colección de conjuntos ajenos dos a dos tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{F}$, entonces existen $E_0, E_1, ..., E_m \in \mathcal{E}$ tales que $E_i \cap E_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$ y con la propiedad de que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{j=0}^{m} E_j.$$

De este modo, podemos asegurar que cada E_j es una unión a lo más numerable de conjuntos en $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$, digamos $\{F_{n,j} : n \in \mathbb{N}\}$ y donde

$$\{F_{n,j} : n \in \mathbb{N} \text{ y } 1 \leq j \leq m\} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}. \tag{1.1}$$

Así, si demostramos que para cada $0 \leq j \leq m$ se cumple que

$$\mathcal{L}(E_j) = \mathcal{L}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{n,j}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(F_{n,j}),$$

habremos concluído la demostración, pues para el caso general sólo habrá que observar que

$$\mathcal{L}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \mathcal{L}\left(\bigcup_{j=0}^{m} E_j\right) = \sum_{j=0}^{m} \mathcal{L}(E_j) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(F_{n,j}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(F_n),$$

donde la segunda igualdad en la expresión anterior se da por la definición de $\mathcal{L}$ y la última es consecuencia de la ecuación (1.1).

De este modo, para simplificar la notación demostraremos que si $\{G_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$ es una familia de conjuntos ajenos por parejas y $E \in \mathcal{E}$ es un intervalo tal que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$, entonces $\mathcal{L}(E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(G_n)$.

Caso I. Supongamos que $E = (a, b] \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $(a, b] = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(a_i, b_i]$, donde $(a_i, b_i] \cap (a_j, b_j] = \emptyset$ siempre que $i \neq j$. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ la colección finita $(a_0, b_0], (a_1, b_1], ..., (a_n, b_n]$ de tales intervalos y supongamos sin perder generalidad que $a \leq a_0 < b_0 \leq a_1 < ... \leq a_n < b_n \leq b$. Obsérvese que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \mathcal{L}((a_j, b_j]) &= \sum_{j=0}^{n}(b_j - a_j) \\
&\leq b_n - a_0 \\
&\leq b - a = \mathcal{L}((a, b]).
\end{aligned}$$

Como esto es válido para cualquier $n \in \mathbb{N}$, concluimos que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{L}((a_j, b_j]) \leq \mathcal{L}((a, b]). \tag{1.2}$$

Para ver la otra desigualdad, tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < 2(b - a)$ y para cada $j \in \mathbb{N}$ fijemos $\varepsilon_j := \frac{\varepsilon}{2^{j+3}}$. Asimismo, definamos a los intervalos $I_j := (a_j - \varepsilon_j, b_j + \varepsilon_j)$. Se sigue que la colección $\{I_j : j \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta para el intervalo compacto $[a + \frac{\varepsilon}{2}, b]$, así que podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que $[a + \frac{\varepsilon}{2}, b] \subseteq \bigcup_{j=0}^{m} I_j$ e incluso podemos suponer que $a_0 - \varepsilon_0 < a + \frac{\varepsilon}{2}$, $b < b_m + \varepsilon_m$ y que $a_j - \varepsilon_j < b_{j-1} + \varepsilon_{j-1}$ para $1 \leq j \leq m$.

De estas desigualdades se sigue que

$$\begin{aligned} b-\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right) &\leq (b_m+\varepsilon_m)-(a_0-\varepsilon_0)\\ &\leq \sum_{j=0}^{m}[(b_j+\varepsilon_j)-(a_j-\varepsilon_j)]\\ &= \sum_{j=0}^{m}[(b_j-a_j)+2\varepsilon_j]\\ &\leq \sum_{j\in\mathbb{N}}(b_j-a_j)+\frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

De aquí se sigue que $b-a \leq \sum_{j\in\mathbb{N}}(b_j-a_j)+\varepsilon$ y, como esto ocurre para todo $\varepsilon \in (0,2(b-a))$, $\mathcal{L}((a,b]) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}}\mathcal{L}((a_j,b_j])$. De esta desigualdad y de la establecida en (1.2), podemos concluir que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathcal{L}((a_j,b_j]) = \mathcal{L}((a,b]),$$

que es lo que queríamos demostrar.

Caso II. Si $E=(a,\infty)$ y $\{(a_j,b_j] : j\in\mathbb{N}\}$ es una colección de intervalos ajenos por parejas tal que $(a,\infty) = \bigcup_{n=0}^{\infty}(a_j,b_j]$, para cada $n\in\mathbb{N}$ y cada $\varepsilon>0$, podemos utilizar la compacidad del intervalo $[a+\frac{\varepsilon}{2},a+n]$ y, mediante un argumento similar al del caso anterior, obtener que para todo $\varepsilon>0$ y para todo $n\in\mathbb{N}$, $n=\mathcal{L}((a,a+n]) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}}(b_j-a_j)+\varepsilon$. Por lo tanto, para todo $n\in\mathbb{N}$, $n\leq\sum_{j\in\mathbb{N}}(b_j-a_j)$. Esto implica que $\sum_{j\in\mathbb{N}}(b_j-a_j)=\infty=\mathcal{L}((a,\infty))$.

Caso III. Si el intervalo E es de la forma $(-\infty,b)$ ó $(-\infty,\infty)$, el argumento es análogo al del caso anterior.

(d) Sea $\{F_n : n\in\mathbb{N}\}$ una sucesión de conjuntos en $\mathcal{F}$ tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n\in\mathcal{F}$. Con el objetivo de utilizar el inciso anterior, definimos por recursión la siguiente sucesión de conjuntos:

$$\begin{aligned} G_0 &:= F_0,\\ G_n &:= F_n-\left(\bigcup_{k<n}F_k\right) \text{ si } n\geq 1. \end{aligned}$$

Obsérvese que de esta forma $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}G_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n \in \mathcal{F}$ y, además, $G_n\cap G_m=\emptyset$ si $n\neq m$. Por otra parte, como $\mathcal{F}$ es un álgebra y para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $G_n\subseteq F_n$, el inciso (a) nos dice que para todo $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{L}(G_n)\leq\mathcal{L}(F_n)$. De esta forma, el inciso (c) nos permite concluir que

$$\mathcal{L}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n\right)=\mathcal{L}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}G_n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{L}(G_n)\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{L}(F_n),$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Es importante observar que hasta ahora $\mathcal{L}$ sí cumple las propiedades que Lebesgue planteó en el Problema de la Medida. Sin embargo, resta extender esta noción de longitud a una función que sea capaz de medir una colección más grande de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Para lograr este objetivo procederemos mediante un método de aproximación que nos permita establecer la medida de un conjunto a partir de conocer la medida de intervalos que sean muy *parecidos* a él. La manera en la que Lebesgue consiguió dicha aproximación queda asentada en la siguiente definición.

Definición 1.11 *Definimos la función $\mathcal{L}^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ como*

$$\mathcal{L}^*(B) := \text{ínf} \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(E_j) \,:\, (\forall j \in \mathbb{N}(E_j \in \mathcal{F})) \text{ y } B \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j \right\}.$$

*A $\mathcal{L}^*$ se le llama **medida exterior**.*

La función $\mathcal{L}^*$ de la definición anterior fue la propuesta por Lebesgue para ser la función m presentada al inicio de este capítulo para resolver afirmativamente el Problema de la Medida. Esta función tiene la ventaja de estar definida para todos los conjuntos en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y además su construcción resulta muy natural dado que el propósito era construir una función que extendiera la noción de longitud de un intervalo. Lamentablemente, la función $\mathcal{L}^*$ no resulta ser numerablemente aditiva.[2] Sin embargo, se aproxima bastante a la función m que Lebesgue plantea en el Problema de la Medida. Algunas de las propiedades que tiene $\mathcal{L}^*$ quedan asentadas en el siguiente resultado.

Lema 1.12 *La medida exterior $\mathcal{L}^*$ satisface las siguientes propiedades:*

(a) $\mathcal{L}^*(\emptyset) = 0$.

(b) $\mathcal{L}^*(B) \geq 0$ *para todo* $B \subseteq \mathbb{R}$.

*(c) Si $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\mathcal{L}^*(A) \leq \mathcal{L}^*(B)$. A esta propiedad se le conoce como **monotonía**.*

(d) Si $B \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{L}^*(B) = \mathcal{L}(B)$. En particular, si $(a, b]$ es un intervalo no vacío de $\mathbb{R}$, se tiene que $\mathcal{L}^*((a, b]) = b - a$.

(e) Si $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{L}^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^*(B_n).$$

*A esta propiedad se le llama **σ-subaditividad**.*

Demostración. Las propiedades (a), (b) y (c) son consecuencias inmediatas de la definición de $\mathcal{L}^*$.

[2] La demostración de este hecho no es trivial, por lo que será pospuesta hasta la Sección 1.3.

(d) Sea $B \in \mathcal{F}$. Por un lado, consideremos la sucesión de conjuntos dada por

$$E_n := \begin{cases} B & \text{si } n = 0 \\ \emptyset & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Claramente $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$, $E_n \in \mathcal{F}$, por lo que $\mathcal{L}^*(B) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(E_n) = \mathcal{L}(B)$. Por otra parte, si $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{F}$ tal que $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, entonces $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(B \cap E_n)$. Luego, de las propiedades de la función $\mathcal{L}$ se sigue que

$$\mathcal{L}(B) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(B \cap E_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(E_n).$$

Por la definición de $\mathcal{L}^*$, esto implica que $\mathcal{L}(B) \leq \mathcal{L}^*(B)$ y se sigue la afirmación.

(e) Sea $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Para demostrar esta propiedad, tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrario y observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, la definición de $\mathcal{L}^*(B_n)$ nos permite elegir una sucesión $\{E_k^{(n)} : k \in \mathbb{N}\}$ tal que:

- $B_n \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k^{(n)}$ y
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^*(E_k^{(n)}) \leq \mathcal{L}^*(B_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Como $\{E_k^{(n)} : n, k \in \mathbb{N}\}$ es una colección numerable de conjuntos en $\mathcal{F}$ cuya unión contiene a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, de la definición de $\mathcal{L}^*$ se sigue que

$$\mathcal{L}^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(E_k^{(n)}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^*(B_n) + \varepsilon.$$

Finalmente, como esto ocurre para todo $\varepsilon > 0$, se obtiene la desigualdad buscada. □

Cabe destacar que el inciso (d) del lema anterior nos dice que la medida exterior definida por Lebesgue realmente extiende a la función $\mathcal{L}$ en el sentido de que a cada intervalo le asocia su longitud. Además, $\mathcal{L}^*$ es una función que puede tomar el valor de ∞, pues el ínfimo con el que está definida puede corresponder al de un conjunto que sólo tenga el valor ∞. Esto coincide con la idea de que un intervalo de la forma (a, ∞) no debe tener una medida finita, si dicha medida extiende a la noción de longitud.

1.2. Invariancia bajo traslaciones

Para Lebesgue, las propiedades de $\mathcal{L}^*$ demostradas en la sección anterior representaron un avance de gran importancia en el Problema de la Medida. Sin embargo, recordemos que Lebesgue construyó esta medida para generalizar la noción de longitud de los intervalos a conjuntos más complicados de números reales. Esta motivación se basa en el hecho de que la *longitud* tal como la conocemos tiene propiedades que resultan muy intuitivas para los conjuntos en los que está definida. Una de estas propiedades es que si consideramos a un intervalo de la forma (a,b) y a la *traslación* de este conjunto por un número real c, $(a+c,b+c)$, la longitud de ambos intervalos será el mismo número real: $b-a$. A esta característica se le conoce como *invariancia bajo traslaciones.*

A continuación demostraremos que $\mathcal{L}^*$ también satisface esta propiedad y es por esto que la invariancia bajo traslaciones aparece como condición en el Problema de la Medida planteado por Lebesgue.

Definición 1.13 *Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Definimos la **traslación** de E por c, como el conjunto*

$$c \oplus E := \{c + x \in \mathbb{R} : x \in E\}.$$

Teorema 1.14 *Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto de números reales y sea $\mathcal{L}^*$ la medida exterior de la Definición 1.11. Entonces, para todo $c \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\mathcal{L}^*(c \oplus E) = \mathcal{L}^*(E).$$

Demostración. De acuerdo con la Definición 1.11, tenemos que

$$\mathcal{L}^*(E) = \text{ínf}\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(E_j) : (\forall j \in \mathbb{N}(E_j \in \mathcal{F})) \text{ y } E \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\right\},$$

donde $\mathcal{F}$ es el álgebra definida en la Notación 1.5.

Obsérvese que si $\{E_j : j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$ es una cubierta para el conjunto E, entonces la colección $\{c \oplus E_j : j \in \mathbb{N}\}$ también es un subconjunto de $\mathcal{F}$ y es una cubierta para $c \oplus E$. Además, dado que cada elemento de $\mathcal{F}$ es unión finita de intervalos, podemos suponer sin perder generalidad que cada E_j es un intervalo. Así, por las observaciones hechas al principio de esta sección, sabemos que para todo $j \in \mathbb{N}$ se cumple que $\ell(E_j) = \ell(c \oplus E_j)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^*(c \oplus E) &\leq \text{ínf}\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(c \oplus E_j) : (\forall j \in \mathbb{N}(E_j \in \mathcal{F})) \text{ y } E \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(E_j) : (\forall j \in \mathbb{N}(E_j \in \mathcal{F})) \text{ y } E \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\right\} = \mathcal{L}^*(E).
\end{aligned}$$

Por otra parte, notemos que $E = -c \oplus (c \oplus E)$, de modo que repitiendo el argumento anterior para el conjunto $-c \oplus (c \oplus E)$, concluimos que $\mathcal{L}^*(E) = \mathcal{L}^*(-c \oplus (c \oplus E)) \leq \mathcal{L}^*(c \oplus E)$. Juntando ambas desigualdades obtenemos que $\mathcal{L}^*(E) = \mathcal{L}^*(c \oplus E)$, como queríamos demostrar. □

1.3. Conjuntos no medibles

En las secciones anteriores demostramos que la medida exterior $\mathcal{L}^*$ satisface todas las condiciones del Problema de la Medida salvo por la σ-aditividad, ya que en el Lema 1.12 sólo demostramos que $\mathcal{L}^*$ es σ-subaditiva. Sin embargo, el hecho de que no hayamos podido probar la aditividad numerable de $\mathcal{L}^*$ no significa aún que no exista una manera de demostrarla.

Este cuestionamiento quedó abierto después de la publicación del trabajo de Lebesgue y se mantuvo así hasta 1905, cuando Giuseppe Vitali publicó un artículo en el que demostraba que ninguna función que cumpliera las condiciones del Problema de la Medida podía tener como dominio a todo el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. La demostración de Vitali consistió en construir un conjunto que no podía estar en el dominio de una función como la pedida por Lebesgue en el Problema de la Medida. Dicha construcción fue la primera que utilizó la formulación formal del Axioma de Elección dada por Zermelo en 1904, así que para Lebesgue este resultado más que poner en duda una solución afirmativa para el Problema de la Medida, ponía en serio cuestionamiento al Axioma de Elección. Sin embargo, al poco tiempo se evidenció que cuestionar el Axioma de Elección pondría en duda una gran cantidad de resultados del Análisis Matemático que se desprenden de él y que en gran parte habían motivado al Problema de la Medida, por lo que las matemáticas se encontraron inmersas en una crisis que algunos matemáticos comparan con aquella que vivieron los pitagóricos al toparse con los números irracionales.[3]

En esta sección damos la demostración de Vitali, comenzando por enunciar la siguiente definición.

Definición 1.15 *Sea $\sim\subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ la relación de equivalencia cuya regla de correspondencia está dada por $x\sim y$ si y sólo si $x-y\in\mathbb{Q}$.*

Dado que el conjunto cociente $\mathbb{R}/\sim$ es una partición de $\mathbb{R}$, por el *Axioma de Elección* sabemos que existe un conjunto que tiene exactamente un elemento de cada clase de equivalencia. A un conjunto de este estilo se le conoce como *conjunto de Vitali*. La siguiente proposición nos da algunas propiedades de este tipo de conjuntos.

Proposición 1.16 *Sea $\mathbb{R}/\sim$ el conjunto cociente dado por la relación $\sim$. Entonces:*

(a) Para todo $C\in\mathbb{R}/\sim$ se tiene que $|C|=\aleph_0$, es decir, cada clase de equivalencia es numerable.

(b) $|\mathbb{R}/\sim|=2^{\aleph_0}$, es decir, la relación $\sim$ induce $2^{\aleph_0}$ clases de equivalencia sobre $\mathbb{R}$, de manera que si V es un conjunto de Vitali, entonces $|V|=2^{\aleph_0}$.

Demostración.

(a) Como $C\neq\emptyset$, podemos tomar $x_0\in C$ y definir la función $f:\mathbb{Q}\to C$ como $f(q):=q+x_0$. La función f está bien definida pues C es la clase de equivalencia de x_0 según $\sim$ y claramente es biyectiva, así que $|C|=|\mathbb{Q}|=\aleph_0$.

(b) Sea $\kappa:=|\mathbb{R}/\sim|$ y supongamos que $\mathbb{R}/\sim=\{C_\alpha:\alpha<\kappa\}$. Como $C_\alpha\cap C_\beta=\emptyset$ siempre que $\alpha\neq\beta$, las propiedades de aritmética cardinal[4] nos dicen que

[3] Ver el artículo de Ciesilski [Cie89].

[4] Ver Teorema A.54.

$2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| = \left|\bigcup_{\alpha<\kappa} C_\alpha\right| = \sum_{\alpha<\kappa} |C_\alpha| = \text{máx}\ \{\kappa, \aleph_0\}$. Por lo tanto, $\kappa = 2^{\aleph_0}$, como queríamos demostrar. $\square$

Notación 1.17 *Sea V un conjunto de Vitali. Para cada $q \in \mathbb{Q}$, denotamos por V_q al conjunto $q \oplus V$.*

Lema 1.18 *Sea $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$ y sea V un conjunto de Vitali. Entonces para cualesquiera $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $i \neq j$ se tiene que $V_{q_i} \cap V_{q_j} = \emptyset$ y además*

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_{q_i}.$$

En particular esto implica que cada número real x tiene una representación única de la forma $x = q_i + v$ con $q_i \in \mathbb{Q}$ y $v \in V$.

Demostración. Para ver que si $i \neq j$, entonces $V_{q_i} \cap V_{q_j} = \emptyset$, supongamos que $V_{q_i} \cap V_{q_j} \neq \emptyset$. Esto implica que existen $v_i, v_j \in V$ tales que $q_i + v_i = q_j + v_j$ y, por lo tanto, $v_i - v_j = q_j - q_i \in \mathbb{Q}$. Así, $v_i \sim v_j$ y, por la manera en la que construimos al conjunto de Vitali, esto implica que $v_i = v_j$. Por tanto también $q_i = q_j$ y entonces $i = j$.

Para demostrar la segunda parte del lema, tomemos $x \in \mathbb{R}$ arbitrario. Recordemos que $\mathbb{R}/\sim$ es una partición de $\mathbb{R}$, así que existe una única clase de equivalencia $[v] \in \mathbb{R}/\sim$ tal que $x \in [v]$, o equivalentemente, existe un único $v \in V$ tal que $x \sim v$, es decir, tal que $x - v \in \mathbb{Q}$. Esto significa que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x = q_i + v$ y, por tanto, $x \in V_{q_i}$.

Finalmente, el hecho de que esta representación sea única se sigue de que $V_{q_i} \cap V_{q_j} = \emptyset$ siempre que $i \neq j$. $\square$

Después de establecer estos resultados, estamos listos para demostrar la existencia de un conjunto no medible usando el Axioma de Elección. En el siguiente teorema demostraremos no sólo el hecho de que la medida exterior $\mathcal{L}^*$ no es σ-aditiva, sino que cualquier función m que además de satisfacer las condiciones (a), (b) y (c) que nos pide Problema de la Medida, extienda la noción de longitud que tenemos para los intervalos, no podrá tener en su dominio a los conjuntos de Vitali. Como dichos conjuntos han sido construidos usando el Axioma de Elección, esto significa que desde ZFE *no* es posible dar una solución al Problema de la Medida planteado por Lebesgue.

Teorema 1.19 (Vitali) *No existe una función $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ tal que:*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$*;*

(b) si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a < b$, entonces $\mu((a, b]) = b - a$;

(c) para cualesquiera $x \in \mathbb{R}$ y $X \subseteq \mathbb{R}$, $\mu(x \oplus X) = \mu(X)$ y

(d) μ sea σ-aditiva, es decir, si $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ ajenos por parejas, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(X_n).$$

Demostración. La prueba se hará por reducción al absurdo, así que comenzaremos suponiendo que existe una función $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ que satisface las propiedades (a), (b) y (c) que enuncia el teorema.

Utilizando el Axioma de Elección, supongamos que V es un conjunto de Vitali. Afirmamos que $\mu(V) > 0$. Por el Lema 1.18 tenemos que si $\{q_i : i \in \mathbb{N}\}$ es una enumeración de los números racionales, entonces $\mathbb{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_{q_i}$ y además $V_{q_i} \cap V_{q_j} = \emptyset$, siempre que $i \neq j$. De este modo, utilizando la σ-aditividad y la invariancia bajo traslaciones de μ, si $\mu(V) = 0$, entonces también tendríamos que

$$\mu(\mathbb{R}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(V_{q_i}) = 0.$$

Sin embargo, esto no puede ser ya que, nuevamente por la σ-aditividad, tenemos que $\mu(\mathbb{R}) = \mu((0, 1]) + \mu(\mathbb{R} - (0, 1]) = 1 + \mu(\mathbb{R} - (0, 1]) > 0$.

Lo anterior implica que $\mu(V) > 0$. Obsérvese ahora que

$$V = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V \cap (n, n+1],$$

que es una unión numerable de conjuntos ajenos. Como μ es σ-aditiva y $\mu(V) > 0$, existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $\mu(V \cap (N, N+1]) > 0$.

Sea $W := V \cap (N, N+1]$. Entonces

$$\mathcal{W} := \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} (W \oplus q) \subseteq (N, N+2]. \tag{1.3}$$

Utilizando nuevamente el Lema 1.18, tenemos que $\mathcal{W}$ es unión numerable de conjuntos ajenos por parejas, pues si $q, r \in \mathbb{Q}$ son tales que $q \neq r$, entonces $(W \oplus q) \cap (W \oplus r) \subseteq V_q \cap V_r = \emptyset$. Además, para cada $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, tenemos que $\mu(W \oplus q) = \mu(W) > 0$, así que por la σ-aditividad, $\mu(\mathcal{W}) = \infty$. Sin embargo, esto junto con la contención dada en (1.3) implicaría que

$$\mu((N, N+2]) = \mu(\mathcal{W}) + \mu((N, N+2]) - \mathcal{W}) = \infty,$$

contradiciendo el hecho de que $\mu((N, N+2]) = 2$. Esto nos permite concluir que $V \notin dom(\mu)$. $\square$

El teorema anterior tiene dos consecuencias de gran importancia para el Problema de la Medida. La primera es que dado que la función $\mathcal{L}^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definida en la sección anterior cumple las condiciones (a) y (b) del teorema, $\mathcal{L}^*$ no puede ser σ-aditiva y, por lo tanto, no es solución para el Problema de la Medida. La siguiente consecuencia, aún más devastadora para Lebesgue, es que el Teorema de Vitali no sólo demuestra que $\mathcal{L}^*$ no es solución al Problema de la Medida, sino que *no* existe una función que resuelva este problema y además coincida con la función longitud para los intervalos.

Como hemos mencionado, estos resultados estremecieron a las matemáticas y el hecho de que se desprendan del Axioma de Elección provocó que Lebesgue pusiera en duda este poderoso axioma que, hasta ese momento histórico, había sido utilizado sin mucha conciencia por parte de los matemáticos. Sin embargo, una vez que empezó a ser claro que una gran cantidad de resultados en diversas áreas de las matemáticas dependían del Axioma de Elección, renunciar a él no representaba una buena salida para resolver el Problema de la Medida. Es por esto que dicho problema se transformó y a partir de ese momento se buscaba determinar cómo se podían relajar los requerimientos para encontrar una función que "midiera" a los subconjuntos de $\mathbb{R}$, aunque no cumpliera todas las condiciones pedidas inicialmente.

Banach propuso una medida en la que la condición de σ-aditividad pedida por Lebesgue era relajada pidiendo simplemente la aditividad (en el sentido de la Definición 1.9). Esta propuesta de Banach resulta especialmente sorprendente pues definida sobre el conjunto $\mathcal{P}([0,1])$ satisface todas las demás condiciones planteadas en el Problema de la Medida de Lebesgue. Sin embargo, tiene el inconveniente de que no puede ser extendida al caso general de $\mathbb{R}^n$. De hecho, Banach y Tarski demostraron que en $\mathbb{R}^3$ podría ser construido, usando el Axioma de Elección, un análogo al conjunto de Vitali para esta medida, dando así pie a la famosa paradoja de Banach-Tarski.[5] Sin embargo, dado que para Lebesgue era importante en términos de su teoría de integración que la medida definida pudiera generalizarse a $\mathbb{R}^n$, él había dado ya una solución diferente al problema que será desarrollada a continuación.

1.4. Conjuntos Lebesgue medibles

Ya hemos demostrado que la función $\mathcal{L}^*$ no es numerablemente aditiva. Esto se debe principalmente a que las cubiertas numerables con intervalos de la forma $(a, b]$ de los conjuntos no siempre se parecen suficientemente a ellos como para darnos una buena aproximación de su longitud. Esto nos lleva a preguntarnos si existirá una subcolección de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ en la cual $\mathcal{L}^*$ tenga las propiedades aditivas que estamos buscando y, si es el caso, ¿qué necesitamos pedirle a un conjunto para que pertenezca a esa colección? Para contestar estas preguntas necesitaremos antes las siguientes definiciones.

Definición 1.20 *Dado un conjunto X, decimos que una familia $\mathcal{X}$ de subconjuntos de X es una **σ-álgebra** si satisface las siguientes condiciones:*

(a) $\emptyset, X \in \mathcal{X}$;

(b) si $A \in \mathcal{X}$, entonces $X - A \in \mathcal{X}$; y

(c) si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión en $\mathcal{X}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{X}$.

Observación 1.21 *Una consecuencia directa de la Definición 1.20 y de las leyes de De Morgan es que dada una σ-álgebra $\mathcal{X}$, si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión en $\mathcal{X}$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{X}$.*

Definición 1.22 *Sea X un conjunto y sea $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una colección de subconjuntos de X cerrada bajo uniones numerables, es decir, tal que si*

[5] El lector interesado en este fascinante tema puede consultar [Alv03] para ver el panorama general ó [Zor08] para un estudio más detallado.

*$\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto de $\mathcal{X}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{X}$. Decimos que una función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ es **σ-aditiva sobre** $\mathcal{X}$ si cumple que para cualquier colección $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{X}$ de conjuntos ajenos por parejas,*

$$f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(E_n).$$

Nótese que bajo esta definición, toda función σ-aditiva es también aditiva.

Por otro lado, recordemos que a Lebesgue le interesaba medir a los subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$. Así, en su búsqueda por encontrar las condiciones que debían cumplir los conjuntos que formaran una colección para la que $\mathcal{L}^*$ fuera σ-aditiva, estableció la definición de que un conjunto acotado A es medible si y sólo si para cualquier intervalo (a, b) tal que $A \subseteq (a, b)$, se tiene que $\mathcal{L}^*(A) + \mathcal{L}^*((a, b) - A) = b - a$. La definición que aquí daremos fue establecida por Carathédory algunos años después y, aunque es similar a la de Lebesgue, resulta más general y nos facilitará su manejo.

Definición 1.23 *Decimos que un subconjunto E de $\mathbb{R}$ es **Lebesgue medible** si para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ se satisface que:*

$$\mathcal{L}^*(A) = \mathcal{L}^*(A \cap E) + \mathcal{L}^*(A - E).$$

A la colección de todos los subconjuntos medibles de X la denotamos por $\mathfrak{M}$.

En ocasiones diremos simplemente que un conjunto es medible para referirnos a que es Lebesgue medible.

Observación 1.24 *Para cualesquiera conjuntos $A, E \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que $A = (A \cap E) \cup (A - E)$. Así, como por el Lema 1.12 $\mathcal{L}^*$ es monótona y σ-subaditiva, siempre podemos asegurar que*

$$\mathcal{L}^*(A) \leq \mathcal{L}^*(A \cap E) + \mathcal{L}^*(A - E).$$

De este modo, pedir que un conjunto E sea Lebesgue medible es equivalente a pedir que para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}$ se cumpla que

$$\mathcal{L}^*(A \cap E) + \mathcal{L}^*(A - E) \leq \mathcal{L}^*(A).$$

La Definición 1.23 puede entenderse, a grandes rasgos, como que un conjunto es medible si él y su complemento están lo suficientemente "separados" como para dividir a *cualquier* conjunto con esta propiedad aditiva. Así, en cierto sentido resulta natural esta condición para asegurar que la medida que estamos construyendo sea σ-aditiva sobre el conjunto de los Lebesgue medibles. De hecho, como veremos a continuación, este conjunto es una σ-álgebra y esto representa uno de los resultados que hemos estado esperando, pues no basta que $\mathcal{L}^*$ se porte bien con los conjuntos medibles, sino también queremos que los conjuntos medibles se porten bien entre sí.

Teorema 1.25 *La colección $\mathfrak{M}$ de conjuntos Lebesgue medibles es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{F}$ y además $\mathcal{L}^* \restriction_{\mathfrak{M}}$ es σ-aditiva.*

Demostración. Veamos primero que $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra. De la Definición 1.23 es inmediato que $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathfrak{M}$ y que si $E \in \mathfrak{M}$, entonces $X - E \in \mathfrak{M}$.

El siguiente paso será probar que $\mathfrak{M}$ es cerrado bajo intersecciones finitas, pues necesitaremos este hecho para concluir que es una σ-álgebra. Tomemos $E, F \in \mathfrak{M}$. Por un lado, como E es medible, esto significa que para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ se cumple que

$$\mathcal{L}^*(A \cap F) = \mathcal{L}^*(A \cap F \cap E) + \mathcal{L}^*((A \cap F) - E).$$

Por otra parte, como F es medible, también tenemos que

$$\mathcal{L}^*(A) = \mathcal{L}^*(A \cap F) + \mathcal{L}^*(A - F).$$

Ahora, definamos $B := A - (E \cap F)$. Entonces $B \cap F = (A \cap F) - E$ y $B - F = A - F$. Así, utilizando nuevamente el hecho de que F es medible, podemos decir que

$$\mathcal{L}^*(A - (E \cap F)) = \mathcal{L}^*((A \cap F) - E) + \mathcal{L}^*(A - F).$$

De las tres ecuaciones anteriores obtenemos que

$$\mathcal{L}^*(A) = \mathcal{L}^*(A \cap E \cap F) + \mathcal{L}^*(A - (E \cap F))$$

y, por lo tanto, que $E \cap F$ es medible.

Un argumento inductivo demuestra que $\mathfrak{M}$ es cerrado bajo intersecciones finitas y, como también es cerrado bajo complementos, es cerrado bajo uniones finitas.

Por otra parte, obsérvese que si $E, F \in \mathfrak{M}$ son tales que $E \cap F = \emptyset$ y $A \subseteq \mathbb{R}$, podemos aplicar la igualdad de la Definición 1.23 al conjunto $A \cap (E \cup F)$ para obtener que, como E es medible,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*(A \cap (E \cup F)) &= \mathcal{L}^*((A \cap (E \cup F)) \cap E) + \mathcal{L}^*((A \cap (E \cup F)) - E) \\ &= \mathcal{L}^*(A \cap E) + \mathcal{L}^*(A \cap F). \end{aligned}$$

Mediante un proceso inductivo podemos obtener, a partir de la ecuación anterior, que si $n \in \mathbb{N}$ y $\{E_j : 0 \leq j \leq n\}$ es una colección finita de conjuntos medibles ajenos por parejas, entonces para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que

$$\mathcal{L}^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=0}^{n} E_j\right)\right) = \sum_{j=0}^{n} \mathcal{L}^*(A \cap E_j). \tag{1.4}$$

Además, si en la ecuación anterior consideramos al conjunto $A = \mathbb{R}$, obtenemos que la función $\mathcal{L}^* \restriction_{\mathfrak{M}}$ es aditiva.

Dadas las herramientas que hemos demostrado, estamos listos para probar que $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra y que $\mathcal{L}^*$ es σ-aditiva sobre $\mathfrak{M}$. Para ello tomemos $\{E_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathfrak{M}$ una sucesión de conjuntos medibles. Sea $E := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$. Como queremos demostrar que $E \in \mathfrak{M}$, podemos suponer que la sucesión consta de conjuntos ajenos por parejas, ya que en caso de no serlo, podemos encontrar una sucesión en $\mathfrak{M}$ cuya unión sea E y en la que los conjuntos sean disjuntos dos a dos. Por lo demostrado antes sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$F_n := \bigcup_{k=0}^n E_k \in \mathfrak{M}$. Además, la ecuación (1.4) nos dice que si A es cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{L}^*(A) = \mathcal{L}^*(A \cap F_n) + \mathcal{L}^*(A - F_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{L}^*(A \cap E_k) + \mathcal{L}^*(A - F_n). \tag{1.5}$$

Luego, como $F_n \subseteq E$, $A - E \subseteq A - F_n$, por lo que $\mathcal{L}^*(A - E) \leq \mathcal{L}^*(A - F_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considerando esto y la ecuación (1.5), obtenemos que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \mathcal{L}^*(A \cap E_k) + \mathcal{L}^*(A - E) &\leq \sum_{k=0}^{n} \mathcal{L}^*(A \cap E_k) + \mathcal{L}^*(A - F_n) \\ &= \mathcal{L}^*(A). \end{aligned}$$

Utilizando la σ-subaditividad de $\mathcal{L}^*$[6] y tomando límite cuando $n \to \infty$ en la expresión anterior obtenemos que

$$\mathcal{L}^*(A \cap E) + \mathcal{L}^*(A - E) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^*(A \cap E_k) + \mathcal{L}^*(A - E) \leq \mathcal{L}^*(A).$$

Además, la Observación 1.24 nos dice que

$$\mathcal{L}^*(A) \leq \mathcal{L}^*(A \cap E) + \mathcal{L}^*(A - E).$$

A partir de las tres desigualdades anteriores podemos concluir que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*(A) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^*(A \cap E_k) + \mathcal{L}^*(A - E) \\ &= \mathcal{L}^*(A \cap E) + \mathcal{L}^*(A - E) \end{aligned}$$

Esto demuestra que E es medible. Por otro lado, si aplicamos la igualdad anterior al conjunto $A = E$, obtenemos la σ-aditividad de $\mathcal{L}^*$ en $\mathfrak{M}$.

Sólo resta probar que $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Por el inciso (d) del Lema 1.12 tenemos que, si $E \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}^*(E)$. Sin embargo, aún tenemos que demostrar que E es Lebesgue medible. Tomemos A un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}$. La Observación 1.24 nos dice que

$$\mathcal{L}^*(A) \leq \mathcal{L}^*(A \cap E) + \mathcal{L}^*(A - E).$$

Para establecer la otra desigualdad, sólo es necesario verificar el caso en el que $\mathcal{L}^*(A) < \infty$, así que bajo esta suposición, tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrario y $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión en $\mathcal{F}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ y

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(F_n) \leq \mathcal{L}^*(A) + \varepsilon.$$

[6] Véase el Lema 1.12.

Como $A \cap E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(F_n \cap E)$ y $A - E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(F_n - E)$, del inciso (e) del Lema 1.12 se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^*(A \cap E) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(F_n \cap E) \text{ y} \\
\mathcal{L}^*(A - E) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(F_n - E),
\end{aligned}$$

donde podemos hablar de $\mathcal{L}(F_n \cap E)$ y de $\mathcal{L}(F_n - E)$ ya que $F_n \cap E, F_n - E \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, las desigualdades anteriores implican que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^*(A \cap E) + \mathcal{L}^*(A - E) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{L}(F_n \cap E) + \mathcal{L}(F_n - E)) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(F_n) \text{ ($\mathcal{L}$ es aditiva por la Proposición 1.10)} \\
&\leq \mathcal{L}^*(A) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como esto es válido para cualquier $\varepsilon > 0$, concluimos la igualdad deseada y entonces el conjunto E es Lebesgue medible. □

Aunque hemos visto que en todo el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ $\mathcal{L}^*$ no es σ-aditiva, el teorema anterior nos dice que en $\mathfrak{M} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ sí lo es. Con esto hemos logrado una función que en su dominio se comporta como Lebesgue pretendía al plantear el Problema de la Medida, así que estamos listos para la siguiente definición.

Definición 1.26 *Sea $\mathfrak{L} : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ la función definida como $\mathfrak{L}(X) := \mathcal{L}^*(X)$ para todo $X \in \mathfrak{M}$. A $\mathfrak{L}$ se le denomina la* ***Medida de Lebesgue****.*

Observación 1.27 *Dado que $\mathfrak{L}$ es una restricción de la función $\mathcal{L}^*$, todas las propiedades demostradas para $\mathcal{L}^*$ en el Lema 1.12 son heredadas por la Medida de Lebesgue.*

A continuación demostraremos otras propiedades fundamentales de la Medida de Lebesgue.

Lema 1.28 *Sean $E, F \in \mathfrak{M}$ tales que $E \subseteq F$ y $\mathfrak{L}(E) < \infty$. Entonces $\mathfrak{L}(F - E) = \mathfrak{L}(F) - \mathfrak{L}(E)$.*

Demostración. Sean E y F como en las hipótesis. Obsérvese que $F = E \cup (F - E)$ y que $E \cap (F - E) = \emptyset$. Entonces, por la σ-aditividad de $\mathfrak{L}$, tenemos que $\mathfrak{L}(F) = \mathfrak{L}(E) + \mathfrak{L}(F - E)$. Así, como $\mathfrak{L}(E) < \infty$, podemos restar esta cantidad de ambos lados de la igualdad anterior, obteniendo que $\mathfrak{L}(F) - \mathfrak{L}(E) = \mathfrak{L}(F - E)$, como se quería demostrar. □

Lema 1.29 *Las siguientes afirmaciones son verdaderas respecto a la Medida de Lebesgue.*

(a) Si $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión $\subseteq$-creciente de conjuntos en $\mathfrak{M}$, entonces

$$\mathfrak{L}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}(E_n).$$

(b) Si $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión $\subseteq$-decreciente de conjuntos en $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{L}(F_1) < \infty$, entonces

$$\mathfrak{L}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}(F_n).$$

Demostración.

(a) Para el caso en el que $\mathfrak{L}(E_n) = \infty$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ la afirmación se sigue de manera trivial, pues entonces ambos lados de la igualdad buscada valen ∞. Supongamos entonces que $\mathfrak{L}(E_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definamos recursivamente una sucesión $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos en $\mathcal{X}$ de la siguiente manera:

- $A_0 := E_0$, y
- para $n \geq 0$, $A_{n+1} := E_{n+1} - E_n$.

Como $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión creciente, $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión en $\mathfrak{M}$ de conjuntos ajenos tal que

$$E_n = \bigcup_{j=0}^{n} A_j \qquad \text{y} \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{L}(A_n) \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \mathfrak{L}(A_n) \\
&= \lim_{m\to\infty} \mathfrak{L}\left(\bigcup_{n=0}^{m} A_n\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \mathfrak{L}(E_m),
\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se da porque $\mathfrak{L}$ es σ-aditiva.

(b) Para demostrar esta afirmación, definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ al conjunto $E_n := F_1 - F_n$. De esta forma, $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión creciente de conjuntos en $\mathcal{X}$, así que, por lo demostrado en el inciso (a), tenemos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) &= \lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}(E_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} [\mathfrak{L}(F_1) - \mathfrak{L}(F_n)] \\ &= \mathfrak{L}(F_1) - \lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}(F_n), \end{aligned} \tag{1.6}$$

donde la última igualdad es válida pues $\mathfrak{L}(F_1) < \infty$ y porque la sucesión $\{\mathfrak{L}(F_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es decreciente y acotada inferiormente en $\mathbb{R}$, así que existe el límite en cuestión. Por otro lado, como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = F_1 - \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, por el Lema 1.28, se tiene que

$$\mathfrak{L}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \mathfrak{L}(F_1) - \mathfrak{L}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\right). \tag{1.7}$$

Finalmente, de las ecuaciones (1.6) y (1.7) se sigue que

$$\mathfrak{L}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}(F_n),$$

como queríamos demostrar. □

1.4.1. Conjuntos borelianos

La Medida de Lebesgue que construimos en la sección anterior no sólo es capaz de medir a los intervalos de la forma (a, b), sino también a todos los conjuntos que se obtienen como unión numerable de intervalos de este tipo, es decir, a los conjuntos abiertos. Además, dado que la Medida de Lebesgue está definida sobre una σ-álgebra, con ella también podemos medir a todos los conjuntos cerrados y a aquellos que se obtengan mediante uniones e intersecciones numerables de abiertos y cerrados. Bajo esta motivación, definiremos a los *conjuntos borelianos*[7] como aquellos conjuntos de números reales que se obtienen de los abiertos y los cerrados, mediante la aplicación repetida de uniones e intersecciones numerables.

Para establecer formalmente quiénes son los conjuntos borelianos haremos uso del siguiente resultado.

Proposición 1.30 *Sea $\mathcal{A}$ una colección no vacía de subconjuntos de un conjunto X. Entonces existe una mínina σ-álgebra de subconjuntos de X que contiene a $\mathcal{A}$. Dicha σ-álgebra es llamada la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{X} := \bigcap\{\mathcal{Y} : \mathcal{Y}$ es una σ-álgebra para X y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Y}\}$. Esta intersección está bien definida pues claramente $\mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra para X y

[7] Llevan su nombre en honor a Émile Borel, matemático francés cuyo trabajo fue uno de los pilares en los que se basó Lebesgue para construir su medida.

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Así, por propiedades de la intersección, $\mathcal{X}$ es en efecto una σ-álgebra y es claro que es la mínima que contiene a $\mathcal{A}$. $\square$

Definición 1.31 *Sea $B := \{(a,b) \subseteq \mathbb{R} : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ y sea $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ generada por B según la Proposición 1.30. Entonces decimos que $\mathcal{B}$ es la **σ-álgebra de Borel**. Asimismo, dado $X \subseteq \mathbb{R}$ decimos que X es un conjunto boreliano si y sólo si $X \in \mathcal{B}$.*

La definición anterior se puede generalizar debido a que, para hablar de conjuntos borelianos, lo único que necesitamos es un espacio topológico, pues al establecer quiénes son los subconjuntos abiertos de un conjunto, es posible hablar de la mínima σ-álgebra que tiene a todos ellos. Así, el estudio los conjuntos borelianos resulta trascendente en diversas áreas de las matemáticas, como por ejemplo, la Topología de Conjuntos. De hecho, en 1905 Lebesgue construyó una jerarquía de los conjuntos borelianos en la que utilizó a los números ordinales para clasificar a los borelianos según su complejidad. Más aún, utilizando esa jerarquía, es posible demostrar que existen $2^{\aleph_0}$ subconjuntos borelianos de $\mathbb{R}$.[8] Así, dado que $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{2^{\aleph_0}}$, de aquí se sigue que la gran mayoría de subconjuntos de $\mathbb{R}$ no son borelianos. Establecer estos resultados formalmente nos desviaría del objetivo de este trabajo, por lo que nos limitaremos a hablar de las propiedades de los borelianos relacionadas con la Medida de Lebesgue.[9]

Dada la importancia que tienen los conjuntos borelianos en las matemáticas y en particular en el análisis real, nos gustaría que todos ellos fueran conjuntos Lebesgue medibles, pues si hemos construido una medida suficientemente buena, lo menos que podemos pedirle es que sea capaz de determinar de qué "tamaño" son este tipo de conjuntos que con tanta frecuencia aparecen ante nosotros. El siguiente teorema establece que efectivamente los conjuntos borelianos están en el dominio de $\mathfrak{L}$.

Teorema 1.32 *Todos los conjuntos borelianos son Lebesgue medibles. En otras palabras, $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{M}$.*

Demostración. Recordemos del Teorema 1.25 que $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{F}$.

Por otra parte, obsérvese que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a < b$, podemos escribir al intervalo (a, b) como una unión numerable de elementos en $\mathcal{E}$ de la siguiente forma:

$$(a,b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \left(a, b - \frac{1}{n}\right].$$

Así, como $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra, $\{(a,b) \subseteq \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b\} \subseteq \mathfrak{M}$. Esto implica que la mínima σ-álgebra que contiene a $\{(a,b) \subseteq \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b)\}$ está a su vez contenida en $\mathfrak{M}$ y, por la Definición 1.31, esto significa que $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{M}$, como queríamos demostrar. $\square$

[8] Véase el libro [Bar95] pág. 154.

[9] El lector interesado puede consultar el Capítulo 11 del libro [Jec02] para conocer el panorama general de la jerarquía de los conjuntos borelianos o el libro [Kec95] para un estudio más profundo acerca del tema.

Observación 1.33 *Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a < b$, entonces la Medida de Lebesgue de los intervalos (a,b), $[a,b)$ y $[a,b]$ es $b-a$. En efecto, como cualquier intervalo como los mencionados se puede poner como unión o intersección numerable de intervalos de la forma $(c,d]$ con $c < d$, este hecho se sigue a partir de que $\mathfrak{L}(c,d] = d-c$ y del Lema 1.29. Como ejemplo, recordemos que, para $a < b$, $(a,b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \left(a, b - \frac{1}{n}\right]$, donde los intervalos $(a, b-\frac{1}{n}]$ forman una sucesión creciente y para cada $n \geq \frac{1}{b-a}$ se tiene que $\mathfrak{L}(a, b-\frac{1}{n}] = b - a - \frac{1}{n}$, de manera que por el Lema 1.29 obtenemos que $\mathfrak{L}(a,b) = \lim_{n\to\infty} \left(b - a - \frac{1}{n}\right) = b - a$.*

Corolario 1.34 *Todos los conjuntos abiertos y todos los conjuntos cerrados son Lebesgue medibles. Además, si $K \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto compacto, entonces $\mathfrak{L}(K) < \infty$.*

Demostración. Tanto los subconjuntos de $\mathbb{R}$ abiertos como los cerrados son borelianos, así que por el teorema anterior son Lebesgue medibles. Por otra parte, si $K \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto compacto, por el Teorema de Heine Borel es cerrado y acotado,[10] así que es Lebesgue medible. Además, existe $R > 0$ tal que $K \subseteq (-R, R)$, de modo que por la monotonía de la Medida de Lebesgue (Observación 1.27), tenemos que $\mathfrak{L}(K) \leq \mathfrak{L}(-R,R) < \infty$. □

Observación 1.35 *Sabemos que $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra y, por lo tanto, que $\mathbb{R} \in \mathfrak{M}$. Sin embargo, cabe hacer la observación de que $\mathfrak{L}(\mathbb{R}) = \infty$. Una manera de argumentar esto es usando la monotonía de la Medida de Lebesgue y el hecho de que $(0,n] \subseteq \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

1.4.2. Caracterización de los conjuntos Lebesgue medibles

A continuación estableceremos algunos resultados que caracterizan a los conjuntos en $\mathfrak{M}$ y que nos serán de gran utilidad más adelante.

Proposición 1.36 *Sea A un subconjunto Lebesgue medible de $\mathbb{R}$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe un conjunto abierto G_ε tal que $A \subseteq G_\varepsilon$ y*

$$\mathfrak{L}(A) \leq \mathfrak{L}(G_\varepsilon) \leq \mathfrak{L}(A) + \varepsilon.$$

Demostración. Sea A un conjunto Lebesgue medible y tomemos $\varepsilon > 0$ arbitraria.

Caso I. Supongamos que $\mathfrak{L}(A) < \infty$. Como $\varepsilon > 0$, de la definición de $\mathfrak{L}$ se sigue que existe una sucesión de conjuntos $\{E_j : j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$ y

$$\mathcal{L}^*(A) < \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(E_j) < \mathfrak{L}(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $\mathfrak{L}(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(E_j) < \infty$ y cada elemento en $\mathcal{F}$ es unión finita de intervalos, podemos suponer que para todo $j \in \mathbb{N}$

[10] Véase el Teorema B.16 en el Apéndice B.

existen $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ tales que $E_j = (a_j, b_j]$. Definamos entonces $F_j := (a_j, b_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+2}})$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y sea $G_\varepsilon := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_j$. Claramente tenemos que $A \subseteq G_\varepsilon$, así que sólo resta observar que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_j\right) &\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathfrak{L}(F_j) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \Big((b_j - a_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+2}}\Big) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\mathcal{L}(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+2}}\Big) \\
&< \mathfrak{L}(A) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \mathfrak{L}(A) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Caso II. Si $\mathfrak{L}(A) = \infty$, tomamos $G_\varepsilon = \mathbb{R}$ y se cumple la desigualdad deseada. □

Una propiedad dual a la proposición anterior es la siguiente.

Proposición 1.37 *Si B es un conjunto medible y acotado en $\mathbb{R}$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un compacto K_ε tal que $K_\varepsilon \subseteq B$ y*

$$\mathfrak{L}(K_\varepsilon) \leq \mathfrak{L}(B) \leq \mathfrak{L}(K_\varepsilon) + \varepsilon.$$

Demostración. Sean B y ε como en las hipótesis. Como B es acotado, sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $I_n := [-n, n]$, entonces $B \subseteq I_n$. Sea $A := I_n - B$. Como I_n y B son Lebesgue medibles, A también lo es, así que por la proposición anterior existe un abierto G_ε tal que $A \subseteq G_\varepsilon$ y $\mathfrak{L}(A) \leq \mathfrak{L}(G_\varepsilon) \leq \mathfrak{L}(A) + \varepsilon$.

Luego, como $I_n - B \subseteq G_\varepsilon$, se tiene que $I_n - G_\varepsilon \subseteq B$. Además, $I_n - G_\varepsilon$ es compacto, pues es cerrado y acotado. Por otro lado, obsérvese que $I_n \cup G_\varepsilon = (I_n - G_\varepsilon) \cup G_\varepsilon$ y, por tanto, $\mathfrak{L}(I_n) \leq \mathfrak{L}(I_n \cup G_\varepsilon) = \mathfrak{L}(I_n - G_\varepsilon) + \mathfrak{L}(G_\varepsilon)$, así que

$$\mathfrak{L}(G_\varepsilon) \leq \mathfrak{L}(I_n - B) + \varepsilon = \mathfrak{L}(I_n) - \mathfrak{L}(B) + \varepsilon.$$

Usando estas dos observaciones, tenemos que

$$\mathfrak{L}(B) \leq \mathfrak{L}(I_n) - \mathfrak{L}(G_\varepsilon) + \varepsilon \leq \mathfrak{L}(I_n - G_\varepsilon) + \varepsilon,$$

así que haciendo $K_\varepsilon := I_n - G_\varepsilon$, obtenemos el compacto que buscábamos. □

Una consecuencia importante de las proposiciones anteriores es la siguiente, ya que nos brinda una caracterización muy útil de la Medida de Lebesgue.

Teorema 1.38 *Si A es un subconjunto Lebesgue medible de $\mathbb{R}$, entonces*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(A) &= \text{ínf}\{\mathfrak{L}(G) : A \subseteq G \text{ y } G \text{ es abierto}\}, \text{ y} \\
\mathfrak{L}(A) &= \sup\{\mathfrak{L}(K) : K \subseteq A \text{ y } K \text{ es compacto}\}.
\end{aligned}$$

Demostración. Demostraremos primero la igualdad

$$\mathfrak{L}(A) = \text{ínf}\{\mathfrak{L}(G) : A \subseteq G \text{ y } G \text{ es abierto}\}.$$

Obsérvese que dado un conjunto abierto G tal que $A \subseteq G$, por la monotonía de la Medida de Lebesgue, tenemos que $\mathfrak{L}(A) \leq \mathfrak{L}(G)$, así que $\mathfrak{L}(A)$ es cota inferior de $\{\mathfrak{L}(G) : A \subseteq G \text{ y } G \text{ es abierto}\}$. Por otra parte, la Proposición 1.36 nos dice que para todo $\varepsilon > 0$ existe un abierto G_ε que contiene a A y tal que $\mathfrak{L}(A) \leq \mathfrak{L}(G_\varepsilon) + \varepsilon$, así que efectivamente $\mathfrak{L}(A)$ es la máxima cota inferior del conjunto en cuestión y, por lo tanto, es su ínfimo. Nótese que esta demostración es válida tanto si $\mathfrak{L}(A) < \infty$, como si $\mathfrak{L}(A) = \infty$.

Por otra parte, para demostrar que

$$\mathfrak{L}(A) = \sup\{\mathfrak{L}(K) : K \subseteq A \text{ y } K \text{ es compacto}\},$$

utilizaremos ahora la Proposición 1.37. Con este propósito, definamos para cada $k \in \mathbb{Z}$ al conjunto $B_k := A \cap (-k, k]$, que es acotado, y supongamos que $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una enumeración de la colección $\{B_k : k \in \mathbb{Z}\}$. Obsérvese que, de este modo,

(i) $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$;

(ii) $A_n \cap A_m = \emptyset$ siempre que $n \neq m$ y

(iii) para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{L}(A_n) = \sup\{\mathfrak{L}(K) : K \subseteq A_n \text{ y } K \text{ es compacto}\}$.

Nótese también que, como A no necesariamente es acotado, la medida de A podría no ser finita, así que tenemos los siguientes casos.

Caso I. Si $\mathfrak{L}(A) < \infty$, por las observaciones (i) y (ii) se sigue que

$$\mathfrak{L}(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{L}(A_n) < \infty.$$

Así, si tomamos $\varepsilon > 0$ arbitraria, la convergencia de la serie anterior nos permite asegurar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n\geq N+1} \mathfrak{L}(A_n) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.8}$$

Por otra parte, la observación (iii) nos permite asegurar que, para cada $0 \leq n \leq N$, existe un conjunto compacto K_n tal que $K_n \subseteq A_n$ y

$$\mathfrak{L}(A_n) - \frac{\varepsilon}{2N} < \mathfrak{L}(K_n) < \mathfrak{L}(A_n). \tag{1.9}$$

Obsérvese que, como cada $K_n \subseteq A_n$, entonces $K_n \cap K_m = \emptyset$ siempre que $0 \leq n < m \leq N$. Además, si definimos $K := \bigcup_{0\leq n\leq N} K_n$, K es unión finita de compactos y, por tanto, es un conjunto compacto. Además, es claro que $K \subseteq A$. Así, las ecuaciones (1.8) y (1.9) nos permiten asegurar que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(A) - \varepsilon &= \mathfrak{L}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) - \varepsilon \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{L}(A_n) - \varepsilon \\
&= \sum_{0\leq n\leq N} \mathfrak{L}(A_n) - \varepsilon + \sum_{n\geq N+1} \mathfrak{L}(A_n) \\
&< \sum_{0\leq n\leq N} \mathfrak{L}(A_n) - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \sum_{0\leq n\leq N} \mathfrak{L}(A_n) - \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \sum_{0\leq n\leq N} \left(\mathfrak{L}(A_n) - \frac{\varepsilon}{2N}\right) \\
&< \sum_{0\leq n\leq N} \mathfrak{L}(K_n) \\
&= \mathfrak{L}\left(\bigcup_{0\leq n\leq N} K_n\right) \\
&= \mathfrak{L}(K).
\end{aligned}$$

Esto nos permite concluir la identidad deseada, es decir, que $\mathfrak{L}(A) = \sup\{\mathfrak{L}(K) : K \subseteq A \text{ y } K \text{ es compacto}\}$.

Caso II. Si $\mathfrak{L}(A) = \infty$, entonces la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{L}(A_n)$ es divergente y, como todos los sumandos son positivos, esto implica que para todo $J \in \mathbb{N}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$J + 1 \leq \sum_{0\leq n\leq N} \mathfrak{L}(A_n). \tag{1.10}$$

Por otro lado, de manera análoga al caso anterior podemos asegurar que, para cada $0 \leq n \leq N$, existe un conjunto compacto K_n tal que $K_n \subseteq A_n$ y con la propiedad de que

$$\mathfrak{L}(A_n) - \frac{1}{N} < \mathfrak{L}(K_n) < \mathfrak{L}(A_n). \tag{1.11}$$

Así, si definimos $K := \bigcup_{0\leq n\leq N} K_n$, nuevamente K es un conjunto compacto tal que $K \subseteq A$. Como además tenemos que $K_n \cap K_m = \emptyset$ siempre que $0 \leq n < m \leq N$, las desigualdades (1.10) y (1.11) implican que

$$\begin{aligned} J &\leq \sum_{0\leq n\leq N}\left(\mathfrak{L}(A_n)-\frac{1}{N}\right) \\ &\leq \sum_{0\leq n\leq N}\mathfrak{L}(K_n) \\ &= \mathfrak{L}(K). \end{aligned}$$

De aquí se sigue que $\sup\{\mathfrak{L}(K) : K \subseteq A$ y K es compacto$\} = \infty = \mathfrak{L}(A)$, con lo que queda concluida la demostración. □

Al hecho de que la Medida de Lebesgue satisfaga las propiedades dadas por el resultado anterior se le conoce como que $\mathfrak{L}$ es **regular**.

1.4.3. Conjuntos nulos

En esta sección hablaremos de una especie muy particular de conjuntos Lebesgue medibles que son aquellos cuya medida es cero. Estos conjuntos, a pesar de ser tan "pequeños" respecto a la Medida de Lebesgue, son de gran importancia pues determinan muchas de las propiedades que caracterizan a esta medida. Además, las propiedades de ellos mismos nos permitirán demostrar varios resultados interesantes como el hecho de que existen $2^{2^{\aleph_0}}$ conjuntos Lebesgue medibles.

Definición 1.39 *Sea A un conjunto de números reales tal que $\mathcal{L}^*(A) = 0$. Entonces decimos que A es un **conjunto nulo**.*

Obsérvese que para definir a los conjuntos nulos hemos utilizado la medida exterior en vez de la Medida de Lebesgue. Esto se debe a que bajo esta definición se puede demostrar que todos los conjuntos nulos son Lebesgue medibles, como veremos a continuación.

Proposición 1.40 *Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto nulo, entonces $A \in \mathfrak{M}$ y $\mathfrak{L}(A) = 0$.*

Demostración. Sea A un conjunto nulo y sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cualquiera. Para verificar que A es medible, queremos ver que se satisface la condición de Carathédory, es decir, que $\mathcal{L}^*(E) = \mathcal{L}^*(E \cap A) + \mathcal{L}^*(E - A)$. Por un lado, la Observación 1.24 nos dice que

$$\mathcal{L}^*(E) \leq \mathcal{L}^*(E \cap A) + \mathcal{L}^*(E - A).$$

Por otra parte, como $E \cap A \subseteq A$ y $\mathcal{L}^*$ es monótona por el Lema 1.12, se sigue que $0 \leq \mathcal{L}^*(E \cap A) \leq \mathcal{L}^*(A) = 0$ y que $\mathcal{L}^*(E - A) \leq \mathcal{L}^*(E)$. Así, también tenemos la desigualdad

$$\mathcal{L}^*(E \cap A) + \mathcal{L}^*(E - A) \leq \mathcal{L}^*(E)$$

y, por lo tanto, A es Lebesgue medible. El hecho de que $\mathfrak{L}(A) = 0$ se sigue de la definición de $\mathfrak{L}$. □

A continuación enunciamos otras propiedades de los conjuntos nulos que nos serán de utilidad más adelante.

Proposición 1.41 *Las siguientes afirmaciones respecto a los conjuntos nulos son verdaderas.*

(a) Para todo número real a se tiene que el conjunto unitario $\{a\}$ es nulo.

(b) Si A es un conjunto nulo y $B \subseteq A$, entonces B es un conjunto nulo.

(c) Si $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de conjuntos nulos, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ es un conjunto nulo.

(d) Si $E \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $|E| \leq \aleph_0$, entonces E es nulo.

Demostración.

(a) Sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\{a\} \subseteq (a - \frac{1}{n}, a]$. Así, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $0 \leq \mathcal{L}^*(\{a\}) \leq \mathcal{L}^*((a - \frac{1}{n}, a]) = \frac{1}{n}$ y, por lo tanto, $\mathcal{L}^*(\{a\}) = 0$. Esto demuestra que $\{a\}$ es nulo.

(b) Sea A un conjunto nulo y sea $B \subseteq A$. Por el Lema 1.12, tenemos que $0 \leq \mathcal{L}^*(B) \leq \mathcal{L}^*(A) = 0$, así que B es nulo.

(c) Si $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de conjuntos nulos, por el Lema 1.12, tenemos que $0 \leq \mathcal{L}^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^*(E_n) = 0$, así que se sigue la afirmación.

(d) Sea E un subconjunto a lo más numerable de $\mathbb{R}$. Entonces existe una enumeración (no necesariamente inyectiva) $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ para los elementos de E de manera que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$ y, por los incisos (a) y (c), concluimos que E es un conjunto nulo. □

El siguiente teorema pone de manifiesto la manera en la que los conjuntos nulos y los borelianos caracterizan a la Medida de Lebesgue. Recordemos que $\mathcal{B}$ denota a la colección de todos los subconjuntos borelianos de $\mathbb{R}$.

Teorema 1.42 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto Lebesgue medible. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) Existe un conjunto $B \in \mathcal{B}$ tal que $A \subseteq B$ y $\mathfrak{L}(B - A) = 0$. Si además $\mathfrak{L}(A) < \infty$, entonces B se puede obtener como la intersección de una familia numerable de conjuntos abiertos.[11]

(b) Existen conjuntos $D \subseteq \mathbb{R}$ y $E \subseteq \mathbb{R}$ tales que $D \in \mathcal{B}$, $\mathfrak{L}(E) = 0$ y $A = D \cup E$.

[11] A los conjuntos que resultan de intersectar una cantidad numerable de abiertos se les denomina conjuntos G_δ.

Demostración.

(a) Demostraremos primero el caso en el que $\mathfrak{L}(A) < \infty$. Bajo esta condición, la Proposición 1.36 nos permite decir que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto abierto G_n tal que $A \subseteq G_n$ y $\mathfrak{L}(G_n) \leq \mathfrak{L}(A) + \frac{1}{n}$. Así, si definimos al conjunto $B := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$, tenemos que $A \subseteq B$ y B es la intersección de una familia numerable de conjuntos abiertos, por lo que, en particular, es boreliano. Además, por la monotonía de la Medida de Lebesgue tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{L}(B) \leq \mathfrak{L}(G_n) \leq \mathfrak{L}(A) + \frac{1}{n}$, por lo que $\mathfrak{L}(B) \leq \mathfrak{L}(A)$. Por otro lado, como $\mathfrak{L}(A) < \infty$, el Lema 1.28 nos dice que $\mathfrak{L}(B - A) = \mathfrak{L}(B) - \mathfrak{L}(A) = 0$, como queríamos demostrar.

Para el caso en el que $\mathfrak{L}(A) = \infty$, definamos para cada $n \in \mathbb{Z}$ al conjunto $A_n := A \cap (n, n+1]$. Cada A_n es medible, pues tanto A como $(n, n+1]$ lo son. Como $A_n \subseteq (n, n+1]$, por el caso anterior tenemos que existe un conjunto boreliano B_n tal que $A_n \subseteq B_n$ y $\mathfrak{L}(B_n - A_n) = 0$, así que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} B_n$. De este modo, si definimos $B := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} B_n$, tenemos que

$$\begin{aligned} B - A &= \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} B_n\right) - \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n\right) \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(B_n - \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n\right) \\ &\subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (B_n - A_n). \end{aligned}$$

Así, como $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(B_n - A_n)$ es unión numerable de conjuntos nulos, es un conjunto nulo y, por tanto, $A - B$ también lo es.

(b) Sabemos que si A es un conjunto Lebesgue medible, $\mathbb{R} - A$ también lo es, así que, por el inciso (a), existe un conjunto boreliano B tal que $\mathbb{R} - A \subseteq B$ y $\mathfrak{L}(B - (\mathbb{R} - A)) = 0$. Esto implica que $\mathbb{R} - B$ es un conjunto boreliano tal que $\mathbb{R} - B \subseteq A$ y, por tanto, $A = (\mathbb{R} - B) \cup (A - (\mathbb{R} - B))$. Por otro lado, por propiedades de conjuntos, tenemos que $B - (\mathbb{R} - A) = A - (\mathbb{R} - B)$, así que $A - (\mathbb{R} - B)$ es un conjunto nulo. Haciendo $D := \mathbb{R} - B$ y $E := A - (\mathbb{R} - B)$, concluimos la demostración. □

1.5. Unicidad de la Medida de Lebesgue

En esta sección estableceremos un resultado que nos permite asegurar que la Medida de Lebesgue es la única manera que tenemos de extender la noción de longitud de un intervalo a una medida para los conjuntos en $\mathfrak{M}$. Además, demostraremos que la colección de conjuntos medibles es realmente la máxima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{F}$ en la que la función $\mathcal{L}^*$ es σ-aditiva. Estos dos resultados manifiestan que la Medida de Lebesgue no sólo fue un gran logro en términos de extender la noción de longitud, sino que, en cierto sentido, es la única y la mejor manera de conseguir ese propósito.

Antes de pasar a los resultados centrales de esta sección, necesitaremos enunciar las siguientes propiedades que, aunque ya han sido demostradas para la Medida de Lebesgue, pueden generalizarse y de hecho serán utilizadas con mucha frecuencia en los capítulos subsecuentes de este trabajo.

Así, comenzaremos por demostrar que si una función definida en un álgebra es aditiva y positiva, entonces es **monótona** en el mismo sentido que la Medida de Lebesgue.[12]

Lema 1.43 *Sean X un conjunto arbitrario, $\mathcal{X}$ un álgebra de subconjuntos de X y $\nu : \mathcal{X} \to [0, \infty]$ una función aditiva. Entonces, para cualesquiera $A, B \in \mathcal{X}$ tales que $A \subseteq B$, se tiene que $\nu(A) \leq \nu(B)$. De hecho, si además se tiene que $\nu(A) < \infty$, entonces $\nu(B - A) = \nu(B) - \nu(A)$.*

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{X}$ tales que $A \subseteq B$. De aquí se sigue que $B = A \cup (B - A)$ y $A \cap (B - A) = \emptyset$. Así, por la aditividad de ν se sigue que

$$\nu(B) = \nu(A) + \nu(B - A) \tag{1.12}$$

y, como $\nu(B - A) \geq 0$, $\nu(A) \leq \nu(B)$.

Por otro lado, si $\nu(A) < \infty$, podemos restar el número real $\nu(A)$ de ambos lados de la ecuación (1.12) para obtener que $\nu(B - A) = \nu(B) - \nu(A)$, con lo que queda concluida la demostración. □

La siguiente propiedad se refiere a funciones positivas definidas en una σ-álgebra y establece que una función con estas características que además es σ-aditiva, es también **σ-subaditiva**.

Lema 1.44 *Sean X un conjunto arbitrario, $\mathcal{X}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X y $\nu : \mathcal{X} \to [0, \infty]$ una función σ-aditiva. Si $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos de X, entonces*

$$\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(X_n).$$

Demostración. Dado que la única herramienta que tenemos es la σ-aditivdad de ν, sería conveniente obtener una colección de subconjuntos ajenos por parejas de X cuya unión fuera precisamente $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Para ello definimos la siguiente sucesión de conjuntos:

$$\begin{aligned} Y_0 &:= X_0, \\ Y_n &:= X_n - \left(\bigcup_{k<n} X_k\right), \text{ si } n \geq 1. \end{aligned}$$

Obsérvese que, de esta forma, $Y_n \cap Y_m = \emptyset$, si $n \neq m$. Además, podemos ver que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n.$$

[12]Esta propiedad se demostró en el Lema 1.12.

Esto se debe a que dado $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ como el mínimo número natural tal que $x \in X_N$ y, por lo tanto, también se tiene que $x \in Y_N$, así que $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$.

Por otra parte, como para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $Y_n \subseteq X_n$, el Lema 1.43 nos dice que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\nu(Y_n) \leq \nu(X_n)$. Hechas estas observaciones, sólo resta utilizar el hecho de que ν es σ-aditiva para concluir que

$$\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(Y_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(X_n),$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Ya que hemos establecido estas herramientas, estamos listos para demostrar el teorema que establece que existe una sola función σ-aditiva que extiende la noción de longitud a una más general para los conjuntos en $\mathfrak{M}$

Teorema 1.45 *Sea $\mathcal{L}$ como en la Definición 1.8. Entonces existe una única extensión de $\mathcal{L}$ a una función σ-aditiva y cuyo dominio sea $\mathfrak{M}$.*

Demostración. El Teorema 1.25 nos permite asegurar que la Medida de Lebesgue, a la que denotamos como $\mathfrak{L}$, extiende a la función $\mathcal{L}$ al conjunto $\mathfrak{M}$, por lo que sólo hace falta demostrar la unicidad.

Para ello, supongamos que ν es una función σ-aditiva definida sobre $\mathfrak{M}$ tal que $\nu \restriction_{\mathcal{F}} = \mathcal{L}$ y tomemos un conjunto arbitrario $E \in \mathfrak{M}$. Queremos demostrar que $\nu(E) = \mathfrak{L}(E)$.

Supongamos primero que E es un conjunto acotado. Esto implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $E \subseteq X := (-N, N]$ y, como ν es monótona y coincide con $\mathcal{L}$ en $\mathcal{F}$, $\nu(E) \leq \nu((-N, N]) = 2N < \infty$. Por otro lado, si $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión arbitraria en $\mathcal{F}$ tal que $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, como ν es σ-aditiva y coincide con $\mathcal{L}$ en $\mathcal{F}$, los Lemas 1.43 y 1.44 nos permiten asegurar que

$$\nu(E) \leq \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(E_n).$$

Por la definición de $\mathfrak{L}$, esto implica que

$$\nu(E) \leq \mathfrak{L}(E) \tag{1.13}$$

y el mismo razonamiento nos permite asegurar que

$$\nu(X - E) \leq \mathfrak{L}(X - E). \tag{1.14}$$

Además, ambas desigualdades son válidas para todo $E \in \mathfrak{M}$. Luego, como $\mathfrak{L}$ y ν son aditivas y por hipótesis coinciden en $\mathcal{F}$, tenemos que

$$\mathfrak{L}(E) + \mathfrak{L}(X - E) = \mathfrak{L}(X) = \nu(X) = \nu(E) + \nu(X - E), \tag{1.15}$$

así que si $\nu(E) < \mathfrak{L}(E)$ para algún $E \in \mathfrak{M}$, tendríamos por las expresiones (1.14) y (1.15) que $\mathfrak{L}(E) + \mathfrak{L}(X - E) = \nu(E) + \nu(X - E) < \mathfrak{L}(E) + \mathfrak{L}(X - E)$, lo cual es una contradicción. De aquí se sigue que $\nu(E) = \mathfrak{L}(E)$.

Para el caso en el que E no es acotado, supongamos que $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una enumeración de la colección de intervalos ajenos $\{(k, k+1] : k \in \mathbb{Z}\}$. Esto nos permite asegurar que $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una partición numerable de $\mathbb{R}$, de manera que podemos escribir

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E \cap F_n).$$

Por otra parte, como para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $E \cap F_n$ es un conjunto medible y acotado, el párrafo anterior nos dice que $\mathfrak{L}(E \cap F_n) = \nu(E \cap F_n)$. Así, la σ-aditividad de $\mathfrak{L}$ y de ν nos permiten concluir que

$$\mathfrak{L}(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{L}(E \cap F_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(E \cap F_n) = \nu(E).$$

Como la igualdad anterior es válida para todo $E \in \mathfrak{M}$, hemos demostrado que $\mathfrak{L} = \nu \restriction_{\mathfrak{M}}$. □

Concluimos esta sección con el siguiente teorema, que establece que $\mathfrak{M}$ es en realidad la máxima σ-álgebra sobre la que $\mathcal{L}^*$ se comporta como una medida σ-aditiva que extiende la noción de longitud.

Teorema 1.46 *Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ y $\mathcal{L}^*$ es σ-aditiva en $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{M}$.*[13,14]

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra como en las hipótesis del teorema. Razonando por contradicción, supongamos que $\mathcal{A} \nsubseteq \mathfrak{M}$. Esto significa que existe $E \in \mathcal{A} - \mathfrak{M}$. Como E no es medible, de la Observación 1.24 se sigue que existe $B \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{L}^*(B) < \mathcal{L}^*(B \cap E) + \mathcal{L}^*(B - E).$$

Por la definición de $\mathcal{L}^*$ aplicada al conjunto B, esto implica que existe una sucesión $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$ tal que

$$B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \quad \text{y} \tag{1.16}$$

$$\mathcal{L}^*(B) < \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^*(B_n) < \mathcal{L}^*(B \cap E) + \mathcal{L}^*(B - E). \tag{1.17}$$

Además, de la expresión (1.16) y de la monotonía y σ-subaditividad de $\mathcal{L}^*$, se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*(B \cap E) + \mathcal{L}^*(B - E) &\leq \mathcal{L}^*\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_j\right) \cap E\right) + \mathcal{L}^*\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_j\right) - E\right) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^*(B_n \cap E) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^*(B_n - E) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{L}^*(B_n \cap E) + \mathcal{L}^*(B_n - E)), \end{aligned} \tag{1.18}$$

[13] Recordemos que $\mathcal{F}$ es el álgebra que consiste de todas las uniones finitas de intervalos de la forma $(a, b], (-\infty, b]$ y (a, ∞) con $a, b \in \mathbb{R}$.

[14] Agradezco a Osvaldo Guzmán haberme planteado la pregunta que dio pie a este teorema en la tesis.

donde la última igualdad es cierta pues todos los sumandos en cuestión son no negativos. Finalmente, como para todo $n \in \mathbb{N}$ $B_n = (B_n \cap E) \cup (B_n - E)$ y como $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{F}$, la hipótesis de que $\mathcal{L}^*$ es aditiva en $\mathcal{A}$ nos permite asegurar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}^*(B_n \cap E) + \mathcal{L}^*(B_n - E) = \mathcal{L}^*(B_n). \tag{1.19}$$

Reuniendo lo obtenido en (1.17), (1.18) y (1.19), se sigue que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^*(B_n) < \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^*(B_n),$$

lo cual es una contradicción. Así, podemos concluir que $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{M}$, que es lo que queríamos demostrar. □

Los dos teoremas anteriores dejan ver que la Medida de Lebesgue es la única función σ-aditiva que extiende la noción de longitud a la σ-álgebra $\mathfrak{M}$ y, además, $\mathfrak{M}$ es la máxima colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ en la que la medida exterior $\mathcal{L}^*$ puede lograr esto conservando la σ-aditividad.

1.6. Cardinalidad y conjuntos medibles

Hasta ahora hemos podido establecer puntos de encuentro entre los conjuntos Lebesgue medibles y algunos números cardinales al observar que la σ-aditividad de $\mathfrak{L}$ tiene como consecuencia que los conjuntos de cardinalidad a lo más numerable son de medida cero. En esta sección profundizaremos en las conexiones que se pueden establecer entre la cardinalidad de un conjunto y su Medida de Lebesgue. Además, esto nos llevará a determinar también cuántos conjuntos Lebesgue medibles y cuántos no Lebesgue medibles existen suponiendo el Axioma de Elección.

Conjuntos de medida positiva

Nuestro primer objetivo será demostrar una fuerte generalización del inciso (d) de la Proposición 1.41, en el que probamos que todo conjunto cuya Medida de Lebesgue sea positiva tiene que ser no numerable. Sin embargo, si rechazáramos la Hipótesis del Continuo, podríamos preguntarnos si existirán conjuntos de Medida de Lebesgue positiva cuya cardinalidad sea estrictamente mayor que $\aleph_0$ y menor que $2^{\aleph_0}$. Sorprendentemente, la respuesta a esta pregunta es que no es posible encontrar conjuntos con tales características, de modo que es condición necesaria que un conjunto tenga la cardinalidad del continuo para que su Medida de Lebesgue sea positiva. La demostración de este hecho requerirá algunos resultados y conceptos que enunciaremos a continuación y que resultan de gran valor teórico por sí mismos.

Comenzaremos estableciendo quiénes son los llamados *conjuntos perfectos*. Las propiedades de este tipo de conjuntos nos serán de gran utilidad más adelante, ya que demostraremos que todo conjunto de medida positiva contiene a un subconjunto perfecto.

Definición 1.47 *Sea F un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Decimos que F es un* ***conjunto perfecto*** *si y sólo si F es cerrado y no tiene puntos aislados, es decir, si y sólo si $F = F'$.*[15]

La siguiente notación nos permitirá referirnos más fácilmente a los conjuntos perfectos.

Notación 1.48 *Denotamos por $\mathbb{P}$ a la colección de todos los conjuntos perfectos en $\mathbb{R}$, es decir, $\mathbb{P} := \{F \subseteq \mathbb{R} : F = F'\}$.*

Para llegar a nuestro objetivo final, necesitaremos demostrar que todo conjunto perfecto tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$. Con este propósito en mente estableceremos algunos resultados previos.

El siguiente lema de "separación" establece que todo conjunto perfecto contiene dos subconjuntos perfectos ajenos.

Lema 1.49 *Existen funciones G_0 y G_1 de $\mathbb{P}$ en $\mathbb{P}$ tales que para todo $F \in \mathbb{P}$, $G_0[F] \subseteq F$, $G_1[F] \subseteq F$ y $G_0[F] \cap G_1[F] = \emptyset$.*

Demostración. La demostración consistirá en probar que para cualquier conjunto perfecto F existen $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $r < s$ y tanto $F \cap (-\infty, r]$ como $F \cap [s, \infty)$ son conjuntos perfectos.

Definamos $\alpha := \begin{cases} \inf(F) & \text{si } F \text{ está acotado inferiormente,} \\ -\infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Similarmente, sea $\beta := \begin{cases} \sup(F) & \text{si } F \text{ está acotado superiormente,} \\ \infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Entonces ocurre alguna de las siguientes situaciones:

Caso I. Si $(\alpha, \beta) \subseteq F$, tomamos $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $\alpha < r < s < \beta$. Estos números racionales cumplen la propiedad deseada, ya que si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $F \cap (-\infty, r] = [\alpha, r]$, y si $\alpha = -\infty$, $F \cap (-\infty, r] = (-\infty, r]$, de modo que en ambos casos obtenemos un intervalo infinito, cerrado y no vacío, que es un conjunto perfecto. De manera totalmente análoga se ve que $F \cap [s, \infty)$ es un intervalo infinito, cerrado y no vacío, por lo que es también un conjunto perfecto.

Caso II. Si $(\alpha, \beta) \nsubseteq F$, entonces existe $a \in (\alpha, \beta)$ tal que $a \notin F$. Luego, como F es perfecto, en particular es cerrado, así que su complemento es abierto. Por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \cap F = \emptyset$. Obsérvese que $\alpha < a - \delta$, ya que si $\alpha = \inf(F)$, entonces existe $x \in F$ tal que $\alpha < x < a$ y si $\alpha = \infty$, trivialmente tenemos la desigualdad. Análogamente, podemos ver que $a + \delta < \beta$.

Así, utilizando la densidad de los racionales en $\mathbb{R}$, tomemos $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $a - \delta < r < a < s < a + \delta$. Los números r y s tienen la propiedad deseada, pues el conjunto $F \cap (-\infty, r]$ es cerrado y no vacío, ya que $\alpha < r$. Además, si este conjunto tuviera un punto aislado $b \in \mathbb{R}$, podríamos tomar $0 < \varepsilon \leq \delta$ tal que

$$((b - \varepsilon, b + \varepsilon) - \{b\}) \cap (F \cap (-\infty, r]) = \emptyset,$$

[15] Véase la Definición B.8 en el Apéndice B.

por lo que para todo $x \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon) - \{b\}$ se tendría que

$$x < b+\varepsilon \leq r+\varepsilon < a+\varepsilon \leq a+\delta,$$

así que $x \in (-\infty, a+\delta)$. Sin embargo, como

$$x \notin F \cap (-\infty, r] = F \cap (-\infty, a+\delta),$$

$x \notin F$, de manera que $((b-\varepsilon, b+\varepsilon) - \{b\}) \cap F = \emptyset$, es decir, b sería un punto aislado de F y esto contradiría el hecho de que F es perfecto.

Para concluir la prueba del lema, consideremos $\{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ y definamos para cada $F \in \mathbb{P}$, $G_0(F) := F \cap (-\infty, r_n]$ y $G_1(F) := F \cap [s_n, \infty)$, donde $n \in \mathbb{N}$ es el mínimo natural tal que $r_n < s_n$ y tanto $F \cap (-\infty, r_n]$ como $F \cap [s_n, \infty)$ son conjuntos perfectos. $\square$

La siguiente definición nos ayudará a establecer que todo conjunto perfecto contiene un subconjunto perfecto tan pequeño como queramos en el sentido de la Medida de Lebesgue.[16]

Definición 1.50 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado y no vacío. Definimos el* ***diámetro*** *de A como el número real $diam(A) := \sup(A) - \inf(A)$*

Bajo esta definición, el siguiente lema nos dice que los conjuntos perfectos tienen subconjuntos perfectos de diámetro arbitrariamente pequeño.

Lema 1.51 *Existe una función $H : \mathbb{P} \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{P}$ tal que para cada $(F, n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^+$, $H(F, n) \subseteq F$ y $diam(H(F, n)) \leq \frac{1}{n}$.*

Demostración. Sean $F \in \mathbb{P}$ y $n \in \mathbb{N}^+$. Afirmamos que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $|F \cap (\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n})| \geq 2$. Si por el contrario, para todo $m \in Z$ $|F \cap (\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n})| \leq 1$, tendríamos que para cualquier $x \in F$, si x es de la forma $\frac{m}{n}$ con $m \in Z$ y $n \in \mathbb{N}^+$, entonces $|F \cap (\frac{m-1}{n}, \frac{m+1}{n})| \leq 3$ y x sería un punto aislado de F. Del mismo modo, si x no es de esa forma, entonces existen $m \in Z$ y $n \in \mathbb{N}^+$ tales que $F \cap (\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}) = \{x\}$, de manera que x también sería un punto aislado de F, contradiciendo que F es perfecto.

Demostrada esta afirmación, sabemos que existe un entero m tal que $|m|$ es el mínimo número natural con la propiedad de que $|F \cap (\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n})| \geq 2$. Definamos entonces $a := \inf(F \cap (\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}))$ y $b := \sup(F \cap (\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}))$. Nótese que como $F \cap (\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n})$ tiene al menos dos elementos, podemos asegurar que $a < b$. Sea $H(F, n) := F \cap [a, b]$. Claramente, $\frac{m}{n} \leq a < b \leq \frac{m+1}{n}$, así que $b - a \leq \frac{1}{n}$ y, por lo tanto, $diam(H(F, n)) \leq \frac{1}{n}$. Además, $H(F, n)$ es cerrado, pues es intersección de cerrados y es no vacío por la elección de a y b.

Finalmente, para ver que $H(F, n)$ es perfecto, observemos que dado $x \in F \cap [a, b]$ y dada $\delta > 0$ tendremos alguno de los siguientes casos:

Caso I. Si $x = a$, tomamos $0 < \delta' < \delta$ tal que $a + \delta' < b$. Entonces, como F es perfecto, por la definición de a existe $y \in F \cap [a, a + \delta') \subseteq (F \cap [a, b]) \cap (a - \delta', a + \delta')$, así que x no es un punto aislado de $H(F, n)$.

[16] Cabe destacar que dado que los conjuntos perfectos son cerrados, entonces son borelianos y, por lo tanto, son Lebesgue medibles.

Caso II. Si $x = b$, la demostración es análoga a la del Caso I.

Caso III. Si $x \in (a, b)$, la demostración de que x no es punto aislado es análoga a la del Caso II del Lema 1.49.

Esto conluye la demostración de que $H(F, n)$ es un conjunto perfecto, por lo que H es la función buscada. $\square$

Los lemas anteriores tienen como propósito ayudarnos a determinar la cardinalidad de un conjunto perfecto arbitrario que, como veremos a continuación, resulta ser $2^{\aleph_0}$. Sin embargo, antes de proceder a este resultado necesitamos establecer algunas convenciones.

Notación 1.52 *Si A y B son dos conjuntos arbitrarios, utilizaremos la notación*

$$^{A}B := \{f : A \to B : f \textit{ es función}\}.$$

Para ejemplificar lo anterior, recordemos que según la definición formal de número natural,[17] dado $n \in \mathbb{N}$, $n := \{m \in \mathbb{N} : m < n\}$, de modo que para un conjunto arbitrario A, la notación anterior nos dice que si $n \geq 1$, entonces

$$^{n}A = \{f : \{0, 1, ..., n-1\} \to A : f \text{ es función}\},$$

mientras que si $n = 0$, entonces simplemente $^{n}A = \emptyset$. Para facilitar la escritura en algunas demostraciones, dada $f \in {}^{n}A$ con $n \geq 1$ nos referiremos a ella como la n-ada ordenada $\langle f(0), ..., f(n-1)\rangle$.

Además, si f es una función en ^{n}A, diremos que f es una **sucesión de longitud n de elementos de A** o bien, una **n-ada de elementos de A**.

Por otra parte, si $x \in A$, podríamos querer definir una sucesión de longitud $n+1$ que *contenga* a f y tal que su $(n+1)$-ésimo elemento sea precisamente x. Esto da pie a la siguiente notación, que será utilizada en diferentes contextos a lo largo de este trabajo.

Notación 1.53 *Sean A un conjunto arbitrario y n un número natural. Si $f \in {}^{n}A$ y $x \in A$, definimos la sucesión $f^\frown x \in {}^{n+1}A$ de tal manera que:*

$$(f^\frown x)(k) := \begin{cases} f(k) & \textit{si } 0 \leq k < n \\ x & \textit{si } k = n. \end{cases}$$

De esta forma, $f^\frown x$ representa a una sucesión de longitud $n+1$ que contiene a f y tal que al número natural n lo manda a x. Bajo estas circunstancias, frecuentemente diremos que $f \subseteq f^\frown x$. Esta notación está basada en el hecho de que, por definición, una función es un conjunto de pares ordenados.

A continuación estableceremos otra convención que utilizaremos en diversas ocasiones para referirnos al conjunto de todas las sucesiones finitas de ceros y unos.

Notación 1.54 *Definimos al conjunto*

$$Seq(\{0,1\}) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}^{n}\{0,1\}.$$

[17] Véase la Definición A.7 en el Apéndice A.

Obsérvese que $Seq(\{0,1\})$ es una unión numerable de conjuntos finitos, así que por propiedades de aritmética cardinal, resulta ser un conjunto numerable.[18]

Hechas estas aclaraciones, estamos listos para enunciar el resultado que ya hemos anunciado respecto a la cardinalidad de los conjuntos perfectos. La demostración consistirá en construir, para un conjunto perfecto dado F, una colección numerable de subconjuntos perfectos tales que al tomar todas las cadenas maximales posibles de elementos de esta colección *encerremos* a algún elemento del conjunto perfecto inicial, estableciendo así una asociación inyectiva entre ${}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ y el conjunto F. De este modo podremos concluir que

$$2^{\aleph_0} = |{}^{\mathbb{N}}\{0,1\}| \leq |F| \leq |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}.$$

Teorema 1.55 *Todo conjunto perfecto tiene cardinalidad* $2^{\aleph_0}$*.*

Demostración. Sea F un conjunto perfecto y sea $S := Seq(\{0,1\})$. Con base en las funciones G_1, G_2 y H de los Lemas 1.49 y 1.51 construiremos un sistema $\{F_s : s \in S\}$ de subconjuntos perfectos de F indexados por los elementos en S de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F_{\emptyset} &:= F, \\ F_{<s_0,\ldots,s_{n-1},i>} &:= H(G_i(F_{<s_0,\ldots,s_{n-1}>}), n) \qquad \text{para } i \in \{0,1\}. \end{aligned}$$

Obsérvese que si $r, s \in S$ son tales que $r \subseteq s$, entonces $F_s \subseteq F_r$.

Ahora, para cada $f \in {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$, definamos $F_f := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{f\restriction_n}$. Como para cualesquiera $m < n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f \restriction_m \subseteq f \restriction_n$, por la observación anterior podemos decir que $F_{f\restriction_n} \subseteq F_{f\restriction_m}$. Esto implica que la colección $\{F_{f\restriction_n} : n \in \mathbb{N}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita,[19] pues cualquier subconjunto finito de esta colección está formado por una cadena finita de conjuntos no vacíos. Así, como F_f es intersección de una colección de intervalos cerrados y acotados con la propiedad de la intersección finita, podemos asegurar que $F_f \neq \emptyset$.[20] De hecho, es posible afirmar que $|F_f| = 1$, ya que si $x, y \in F_f$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}^+$ tenemos que $|x-y| \leq diam(F_f) \leq diam(F_{f\restriction_n}) \leq \frac{1}{n}$, por lo que $x = y$. Así, si para cada $f \in {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ denotamos por d_f al único elemento que hay en F_f, podemos definir $\phi : {}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \to F$ como

$$\phi(f) := d_f.$$

Esta asociación es inyectiva, pues si $f \neq g$, podemos tomar $m \in \mathbb{N}$ como el mínimo número natural tal que $f(m) \neq g(m)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f(m) = 0$ y que $g(m) = 1$. Entonces

$$F_{f\restriction_m \frown m} = H(G_0(F_{f\restriction_m}), m) \subseteq G_0(F_{f\restriction_m}),$$

y del mismo modo,

$$F_{g\restriction_m \frown m} = H(G_1(F_{g\restriction_m}), m) \subseteq G_1(F_{f\restriction_m}),$$

[18]Véase la Proposición A.43 en el Apéndice A.
[19]Véase la Definición B.17 en el Apéndice B.
[20]Véase el Teorema B.18 en el Apéndice B.

donde $G_0(F_{f\restriction_m}) \cap G_1(F_{f\restriction_m}) = \emptyset$ por la construcción hecha en el Lema 1.49. Esto implica que $F_f \cap F_g = \emptyset$, así que $F_f \neq F_g$ y, como cada uno de estos conjuntos consta de un sólo elemento, $\phi(f) = d_f \neq d_g = \phi(g)$.

Lo anterior demuestra que $2^{\aleph_0} \leq |F|$. Además, como $F \subseteq \mathbb{R}$, $|F| \leq 2^{\aleph_0}$, así que por el Teorema de Cantor-Schröeder-Bernstein,[21] $|F| = 2^{\aleph_0}$. $\square$

Nuestro siguiente propósito es demostrar que los conjuntos cerrados se comportan en armonía con la Hipótesis del Continuo, en el sentido de que si su cardinalidad es estrictamente mayor que $\aleph_0$, entonces son biyectables con el conjunto de números reales. Para obtener este resultado necesitaremos la siguiente definición y una secuencia de lemas que nos permitirán establecer un teorema incluso más fuerte.

Definición 1.56 *Sea A un conjunto de números reales. Decimos que $a \in \mathbb{R}$ es un **punto de condensación** de A si y sólo si $\forall \delta > 0$ $|\{x \in A : |x - a| < \delta\}| > \aleph_0$. Denotamos por A^c al conjunto de puntos de condensación de A.*

Observación 1.57 *De la definición anterior es inmediato que en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ todo punto de condensación de A es punto de acumulación de A.*

Lema 1.58 *Sea A un conjunto de números reales. Entonces A^c es un conjunto cerrado.*

Demostración. Como un conjunto es cerrado si y sólo si tiene a todos sus puntos de acumulación, es suficiente demostrar que todo punto de acumulación de A^c está en A^c. Así, sea a un punto de acumulación de A^c y sea $\delta > 0$. Entonces existe $x \in A^c$ tal que $0 < |x - a| < \delta$. Sea $\varepsilon := \delta - |x - a| > 0$. Por definición de A^c, sabemos que $|\{y \in A : |y - x| < \varepsilon\}| > \aleph_0$. Por otra parte, nuestra elección de ε garantiza que si $|y - x| < \varepsilon$, entonces $|y - a| \leq |y - x| + |x - a| < \varepsilon + |x - a| = \delta$. Por lo tanto, $\aleph_0 < |\{y \in A : |y - x| < \varepsilon\}| \leq |\{y \in A : |y - x| < \delta\}|$, así que $a \in A^c$, como queríamos demostrar. $\square$

El siguiente lema establece que en un conjunto cerrado, los puntos que no son de condensación forman un conjunto a lo más numerable.

Lema 1.59 *Sea $F \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cerrado y sea $C := F - F^c$. Entonces $|C| \leq \aleph_0$.*

Demostración. Demostraremos que C está contenido en una unión numerable de conjuntos numerables, por lo que la cardinalidad de C será a lo más numerable.[22]

Afirmamos que $C \subseteq \bigcup\{F \cap (r, s) : r, s \in \mathbb{Q},\ r < s \text{ y } |F \cap (r, s)| \leq \aleph_0\}$. Para demostrar esto, tomemos $a \in C$ arbitrario y observemos que como $a \notin F^c$, existe $\delta > 0$ tal que $|F \cap (a - \delta, a + \delta)| \leq \aleph_0$. Por otro lado, la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ garantiza que existen $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $a - \delta < r < a < s < a + \delta$. Esto significa que para cada $a \in C$ existe un intervalo (r, s) con extremos racionales tal que

[21] Véase el Teorema A.29 en el Apéndice A.

[22] El hecho de que la unión numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable, es consecuencia del Axioma de Elección.

$a \in F\cap(r,s)$ y $|F\cap(r,s)| \leq \aleph_0$, por lo que se sigue la afirmación. Finalmente, como $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, el conjunto $\bigcup\{F\cap(r,s) : r,s \in \mathbb{Q},\ r < s$ y $|F\cap(r,s)| \leq \aleph_0\}$ es una unión numerable de conjuntos numerables, así que efectivamente se tiene que $|C| \leq \aleph_0$. □

Utilizando los resultados anteriores, estamos listos para enunciar el siguiente teorema que será el eslabón principal para determinar la cardinalidad de los conjuntos de Medida de Lebesgue positiva.

Teorema 1.60 (Cantor-Bendixon (1883)) *Si F es un conjunto cerrado de números reales y $|F| > \aleph_0$, entonces podemos escribir a F como $F = P \cup C$, donde P es un conjunto perfecto y $|C| \leq \aleph_0$.*[23]

Demostración. Sea F un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ tal que $|F| > \aleph_0$. Demostraremos que F^c es un conjunto perfecto.

Por el Lema 1.58, sabemos que F^c es un conjunto cerrado. Por otro lado, $F^c \neq \emptyset$ ya que de lo contrario, por el Lema 1.59, tendríamos que $|F| = |F - F^c| \leq \aleph_0$, contradiciendo nuestra hipótesis. De esta forma, resta probar que F^c no tiene puntos aislados para concluir que es un conjunto perfecto. Razonando por contradicción, supongamos que existe $a \in F^c$ tal que a es punto aislado de F^c. Por definición esto implica que existe $\delta > 0$ tal que $(B(a,\delta) - \{a\}) \cap F^c = \emptyset$, o en otras palabras, $B(a,\delta) \cap F \subseteq F - (F^c \cup \{a\})$. Sin embargo, el Lema 1.59 implica que $|F - (F^c \cup \{a\})| \leq \aleph_0$ y, por lo tanto, $|B(a,\delta) \cap F| \leq \aleph_0$, contradiciendo el hecho de que $a \in F^c$.

Esto concluye la prueba de que F^c es perfecto. Finalmente, como F es cerrado, la Observación 1.57 implica que $F^c \subseteq F$, así que $F = F^c \cup (F - F^c)$, donde $|F - F^c| \leq \aleph_0$ por el Lema 1.59, con lo que queda demostrado el teorema. □

El siguiente resultado es una consecuencia directa del teorema anterior. Sin embargo, resulta relevante, pues los conjuntos cerrados tienen una relación más directa con la Medida de Lebesgue que los conjuntos perfectos.

Corolario 1.61 *Todo conjunto cerrado de números reales o bien tiene cardinalidad a lo más numerable o tiene la cardinalidad del continuo.*

Demostración. Sea $F \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cerrado. Si $|F| > \aleph_0$, el Teorema 1.60 nos dice que F tiene un subconjunto perfecto, digamos C. Por otra parte, por el Teorema 1.55, sabemos que $|C| = 2^{\aleph_0}$, así que $2^{\aleph_0} \leq |F|$. De esta forma, como $F \subseteq \mathbb{R}$, el Teorema de Cantor-Schröeder-Bernstein[24] nos permite concluir que $|F| = 2^{\aleph_0}$, como queríamos demostrar. □

Dado que los conjuntos cerrados se comportan de acuerdo a la Hipótesis del Continuo, sólo hace falta recordar que la Medida de Lebesgue de un conjunto se puede aproximar mediante las medidas de sus subconjuntos cerrados para determinar que los conjuntos de medida positiva también tienen que ser *grandes*

[23] Georg Cantor demostró, sin hacer uso del Axioma de Elección, que todo conjunto cerrado de números reales contiene un subconjunto perfecto. La construcción que lo llevó a tal resultado fue lo que motivó el desarrollo de su teoría de los números transfinitos u *ordinales*.

[24] Véase el Teorema A.29 en el Apéndice A.

en términos de cardinalidad. Esto quedará establecido formalmente en el siguiente resultado.

Teorema 1.62 *Si E es un conjunto Lebesgue medible tal que $\mathfrak{L}(E) > 0$, entonces* $|E| = 2^{\aleph_0}$.

Demostración. Sea E un conjunto tal que su Medida de Lebesgue es distinta de cero. Recordemos del Teorema 1.38 que

$$\mathfrak{L}(E) = \sup\{\mathfrak{L}(K) : K \subseteq E \text{ y } K \text{ es compacto}\}.$$

Así, como $\mathfrak{L}(E) > 0$, esto implica que existe un conjunto compacto $K \subseteq E$ tal que $\mathfrak{L}(K) > 0$. El inciso (d) de la Proposición 1.41 nos dice entonces que $|K| > \aleph_0$. Además, como K es compacto, en particular es cerrado, así que el Corolario 1.61 nos dice que $|K| = 2^{\aleph_0}$ y, por lo tanto, $|E| \geq 2^{\aleph_0}$. Sin embargo, como $E \subseteq \mathbb{R}$, el Teorema de Cantor-Schröeder-Bernstein nos permite concluir que $|E| = 2^{\aleph_0}$, como queríamos demostrar. $\square$

Conjunto de Cantor

Para finalizar el estudio de la relación que existe entre la Medida de Lebesgue de un conjunto y su cardinalidad, recurriremos al muy conocido conjunto de Cantor para dar un ejemplo de un conjunto de cardinalidad $2^{\aleph_0}$ que es nulo. Este sorprendente hecho revela que, en contraste con el Teorema 1.62, la cardinalidad de un conjunto no es suficiente para determinar propiedades acerca del *tamaño* del mismo asignado por la Medida de Lebesgue. Además, manifiesta que el recíproco del inciso (d) de la Proposición 1.41 no es cierto, es decir, no todo conjunto nulo es numerable. De hecho, Solovay probó que no se puede demostrar desde ZFE que todos los conjuntos Lebesgue medibles no numerables tienen cardinalidad $2^{\aleph_0}$.[25]

Sea $S := Seq(\{0,1\})$ como en la Notación 1.54. Construimos una familia de intervalos cerrados $\mathcal{D} := \{D_s : s \in S\}$ de la siguiente manera:

- $D_\emptyset := [0,1]$
- $D_{\langle 0\rangle} := \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\qquad D_{\langle 1\rangle} := \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.
- $D_{\langle 0,0\rangle} := \left[0, \frac{1}{9}\right]$, $D_{\langle 0,1\rangle} := \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, $D_{\langle 1,0\rangle} := \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$, $D_{\langle 1,1\rangle} := \left[\frac{8}{9}, 1\right]$, etc.
- En general, si $D_{\langle s_0,\ldots,s_{n-1}\rangle} = [a,b]$, definimos
  $D_{\langle s_0,\ldots,s_{n-1},0\rangle} := \left[a, a + \frac{1}{3}(b-a)\right]$ y $D_{\langle s_0,\ldots,s_{n-1},1\rangle} := \left[a + \frac{2}{3}(b-a), b\right]$, es decir, tomamos de $[a,b]$ su primer y su último tercios.

La existencia del sistema $\mathcal{D}$ está justificada mediante el Teorema de Recursión para naturales.[26]

[25]Véase el libro [HJ99] pág. 198.
[26]Véase el Teorema A.8 en el Apéndice A.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos al conjunto

$$F_n := \bigcup \{D_s : s \in {}^n\{0,1\}\}, \tag{1.20}$$

de manera que $F_0 = [0,1]$, $F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, etc. Obsérvese que cada F_n es un conjunto cerrado, pues es unión de una cantidad finita de intervalos cerrados. Tras esta construcción, podemos definir al conjunto de Cantor como:

$$F := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n. \tag{1.21}$$

El conjunto F también resulta cerrado, pues es intersección de conjuntos cerrados.

El siguiente resultado establece que el conjunto de Cantor tiene la cardinalidad del continuo. La prueba será muy similar a la seguida en el Teorema 1.55.

Teorema 1.63 *El conjunto de Cantor tiene cardinalidad* $2^{\aleph_0}$.

Demostración. La prueba consistirá en construir una función biyectiva $\phi : {}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \to F$. Sin embargo, antes necesitamos establecer algunas consideraciones.

Para cada $f \in {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$, definimos al conjunto $D_f := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_{f \restriction_n}$. Obsérvese que por la manera en la que definimos a cada D_s, si $n, m \in \mathbb{N}$ son tales que $n < m$, entonces $D_{f \restriction_m} \subseteq D_{f \restriction_n}$. Esto tendrá algunas consecuencias importantes que enlistaremos a continación:

- La colección $\{D_{f \restriction_n} : n \in \mathbb{N}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita, pues cualquier subconjunto finito de esta familia es en realidad una familia finita de intervalos anidados no vacíos. En particular esto implica que $D_f \neq \emptyset$.[27]

- $D_f \subseteq F$, pues dado $x \in D_f$ se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \in D_{f \restriction_n} \subseteq F_n$, así que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = F$.

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $D_{f \restriction_n}$ consta de un intervalo de longitud $\frac{1}{3^n}$, así que $\mathfrak{L}(D_{f \restriction_n}) = \frac{1}{3^n}$ y, como la sucesión $\{D_{f \restriction_n} : n \in \mathbb{N}\}$ es creciente, el Lema 1.29 nos dice que

$$\mathfrak{L}(D_f) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3^n} = 0.$$

  Sin embargo, como D_f es un intervalo no vacío, esto implica que existe $d_f \in \mathbb{R}$ tal que $D_f = \{d_f\}$.

Hechas estas observaciones, podemos definir $\phi : {}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \to F$ de la siguiente manera:

$$\phi(f) := d_f.$$

Esta asociación es inyectiva, pues si $f, g \in {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ son tales que $f \neq g$, entonces existe un mínimo número natural, digamos m, tal que $f(m) \neq g(m)$ y podemos suponer sin perder generalidad que $f(m) = 0 < 1 = g(m)$. Esto implica que $D_{f \restriction_m} = D_{g \restriction_m}$ y que $D_{f \restriction_{m+1}} = D_{\langle f(0), \ldots, f(m) \rangle}$ y $D_{g \restriction_{m+1}} = D_{\langle g(0), \ldots, g(m) \rangle}$ son los dos subintervalos que tomamos de $D_{f \restriction_m}$, así que estos intervalos son ajenos, de

[27] Véase el Teorema B.18 en el Apéndice B.

modo que si $\{d_f\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_{f\restriction_n}$, entonces $d_f \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_{g\restriction_n}$ y, por lo tanto, $d_f \neq d_g$, como queríamos demostrar.

Finalmente, podemos ver que ϕ es sobre F, pues dado $a \in F$, si definimos $f := \bigcup\{s \in Seq(\{0,1\}) : a \in D_s\}$, se puede verificar que $a = d_f$, o equivalentemente, que $\phi(f) = a$.

Esto concluye la demostración de que $|F| = 2^{\aleph_0}$. □

El siguiente resultado muestra que el recíproco del Teorema 1.62 no es válido, pues deja ver que el conjunto cuya cardinalidad acabamos de equiparar con la del continuo, es Lebesgue medible y tiene medida cero.

Teorema 1.64 *El conjunto de Cantor es un conjunto nulo.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea F_n como en la ecuación (1.20) y sea F el conjunto de Cantor como en (1.21). Bajo esta construcción, se tiene que cada F_n consta exactamente de 2^n intervalos ajenos de longitud $\frac{1}{3^n}$, de modo que $\mathfrak{L}(F_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $F_{n+1} \subseteq F_n$, así que por el Lema 1.29 podemos concluir que

$$\mathfrak{L}(F) = \mathfrak{L}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}(F_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0,$$

que es lo que queríamos demostrar. □

El teorema anterior tiene como consecuencia dos resultados muy sorprendentes acerca de la cardinalidad de $\mathfrak{M}$ y de $\mathcal{P}(\mathbb{R}) - \mathfrak{M}$, con los que daremos por concluida esta sección y las relaciones que se pueden establecer entre la Medida de Lebesgue y algunos cardinales *pequeños* como $\aleph_1$ y $2^{\aleph_0}$.

Lo primero que demostraremos será que hay tantos conjuntos medibles como subconjuntos de números reales. Sabemos que esto de ninguna manera se contradice con el hecho de que existan conjuntos no medibles. Sin embargo, este resultado garantiza al menos que no habrá más conjuntos no medibles que medibles, por lo que la Medida de Lebesgue también resulta ser bastante buena en términos de cuántos conjuntos es capaz de medir.

Corolario 1.65 *Existen* $2^{2^{\aleph_0}}$ *conjuntos Lebesgue medibles.*

Demostración. Queremos demostrar que $|\mathfrak{M}| = 2^{2^{\aleph_0}}$. Por un lado, obsérvese que como $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$,

$$|\mathfrak{M}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{2^{\aleph_0}}. \tag{1.22}$$

Por otra parte, por el Teorema 1.63, sabemos que si F es el conjunto de Cantor, entonces $|F| = 2^{\aleph_0}$ y, por lo tanto, $|\mathcal{P}(F)| = 2^{2^{\aleph_0}}$. Además, en el Teorema 1.64 demostramos que F es un conjunto nulo, así que por las Proposiciones 1.40 y 1.41 podemos concluir que si $B \subseteq F$, entonces B es un conjunto nulo y en particular medible, es decir, $\mathcal{P}(F) \subseteq \mathfrak{M}$ y, por lo tanto,

$$2^{2^{\aleph_0}} = |\mathcal{P}(F)| \leq |\mathfrak{M}|. \tag{1.23}$$

De las desigualdades (1.22) y (1.23) podemos concluir que $|\mathfrak{M}| = 2^{2^{\aleph_0}}$, o dicho de otra forma, hay tantos conjuntos Lebesgue medibles como subconjuntos de números reales. $\square$

A partir de este corolario se puede deducir, mediante argumentos puramente conjuntistas, otro resultado que nos habla de la complejidad que pueden tener los conjuntos Lebesgue medibles, pues si utilizamos el hecho de que existen $2^{\aleph_0}$ conjuntos borelianos, como por el resultado anterior tenemos que hay $2^{2^{\aleph_0}}$ conjuntos medibles, podemos concluir que $\mathcal{B} \subsetneq \mathfrak{M}$, es decir, hay conjuntos Lebesgue medibles que no son borelianos.[28]

Los siguientes resultados son la contraparte del Teorema 1.65, pues aunque ya establecimos que no pueden existir más conjuntos no medibles que conjuntos medibles, aún queda abierta la posibilidad de que haya tantos de una especie como de la otra. Lo que demostraremos a continuación es que la existencia de un conjunto de Vitali (suponiendo el Axioma de Elección), implica que hay tantos conjuntos no medibles como conjuntos medibles.

Teorema 1.66 *Sea V un conjunto de Vitali. Sean $\mathbb{B} := \{A \subseteq V : A \in \mathfrak{M}\}$ y $\mathbb{C} := \{A \subseteq V : A \notin \mathfrak{M}\}$. Entonces $|\mathbb{B}| \leq |\mathbb{C}|$.*

Demostración. Definamos una función $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ de la siguiente manera:

$$f(A) := V - A.$$

La función f está bien definida, pues dado $A \in \mathbb{B}$, como $A \subseteq V$, $V = (V - A) \cup A$, así que si $V - A$ fuera medible, entonces V sería medible, contradiciendo al Teorema 1.19. Esto implica que $V - A \in \mathbb{C}$. Por otra parte, la función f es inyectiva, pues si $A, A' \in \mathbb{B}$ son tales que $V - A = f(A) = f(A') = V - A'$, como $A, A' \subseteq V$, $A = A'$. Por lo tanto, existe una función inyectiva de $\mathbb{B}$ en $\mathbb{C}$ y entonces $|\mathbb{B}| \leq |\mathbb{C}|$. $\square$

El teorema anterior nos dice que en un conjunto de Vitali *al menos* hay tantos subconjuntos no medibles como subconjuntos Lebesgue medibles. Sin embargo, como ya hemos probado que la cardinalidad de $\mathfrak{M}$ es la máxima que podría tener una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$, el siguiente corolario resulta bastante natural.

Corolario 1.67 *Hay $2^{2^{\aleph_0}}$ conjuntos no Lebesgue medibles.*

Demostración. Nuestro propósito es demostrar que $|\mathcal{P}(\mathbb{R}) - \mathfrak{M}| = 2^{2^{\aleph_0}}$. Para ello, supongamos que V es un conjunto de Vitali y sean $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ como en el teorema anterior.

Por un lado, la Proposición 1.16 nos dice que $|V| = 2^{\aleph_0}$ y, por tanto, $|\mathcal{P}(V)| = 2^{2^{\aleph_0}}$. Por otra parte, como $\mathcal{P}(V) = \mathbb{B} \cup \mathbb{C}$, utilizando las propiedades de aritmética cardinal[29] y la desigualdad obtenida en el Teorema 1.66, podemos decir que

$$2^{2^{\aleph_0}} = |\mathcal{P}(V)| = \text{máx}\{|\mathbb{B}|, |\mathbb{C}|\} = |\mathbb{C}|. \tag{1.24}$$

[28] Se puede demostrar este resultado de manera más directa, definiendo explícitamente conjuntos Lebesgue medibles que no son borelianos. En [Bar95] págs. 171-174 se puede consultar una de estas construcciones.

[29] Véase el Teorema A.51 en el Apéndice A.

Además, dado que claramente $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) - \mathfrak{M}$, $|\mathbb{C}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{R}) - \mathfrak{M}|$. Esto junto con la ecuación (1.24) nos permite asegurar que

$$2^{2^{\aleph_0}} \leq |\mathcal{P}(\mathbb{R}) - \mathfrak{M}|. \tag{1.25}$$

Finalmente, como $\mathcal{P}(\mathbb{R}) - \mathfrak{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $|\mathcal{P}(\mathbb{R}) - \mathfrak{M}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{2^{\aleph_0}}$, así que esta desigualdad junto con la expresada en (1.25), implican que hay $2^{2^{\aleph_0}}$ conjuntos no Lebesgue medibles. □

Con los resultados anteriores daremos por concluído este capítulo en el que no sólo hemos establecido el problema que motivará todo el desarrollo de este trabajo, sino que también nos ha permitido ser testigos de la manera en la que la Medida de Lebesgue y el estudio de la cardinalidad de los subconjuntos de $\mathbb{R}$, se entrelazan trascendiendo los límites entre la Teoría de la Medida y la Teoría de Conjuntos. Así, esta última sección no sólamente nos permite suavizar la transición entre el primer y el segundo capítulo de la tesis, sino que tiene como objetivo concretizar propiedades de la Medida de Lebesgue que serán citadas frecuentemente para hacer comparaciones cuando hablemos de medidas para números cardinales. Estos puntos de encuentro resultarán fascinantes por sí mismos y unificarán las distintas secciones que conforman nuestra investigación.

CAPÍTULO 2

Generalización del Problema de la Medida

Tras la aparición de los conjuntos de Vitali y la aceptación de que renunciar al Axioma de Elección no era un buen camino para resolver los problemas que éste ocasionaba, lo único certero fue que el Problema de la Medida no tenía solución de la manera en que Lebesgue lo había planteado. Esto no representó noticias realmente devastadoras para el Análisis Matemático, pues la Medida de Lebesgue, aún cuando su dominio era sólo un subconjunto propio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, fue suficiente para crear una nueva teoría de integración que permitió fundamentar un área muy fructífera dentro del Análisis que ya se venía desarrollando desde varios años atrás.

Sin embargo, poco más de dos décadas después del trabajo mencionado de Vitali, Banach propuso una generalización del Problema de la Medida en la que la invariancia bajo traslaciones pedida por Lebesgue fue reemplazada por la condición de que para cualquier número real x se tuviera que $m(\{x\}) = 0$.[1] La definición del capítulo anterior no pedía esta condición. Sin embargo, esta restricción evita que tengamos soluciones triviales como sería, por ejemplo, μ definida para un conjunto arbitrario $S \neq \emptyset$ de manera que para un $a \in S$ fijo, $\mu : \mathcal{P}(S) \to \{0,1\}$ está dada por $\mu(A) := \begin{cases} 0 \text{ si } a \notin A \\ 1 \text{ si } a \in A. \end{cases}$

El objetivo de replantear de esta forma el problema radicaba en investigar si bajo estas nuevas condiciones era posible extender la Medida de Lebesgue a una

[1]Para profundizar en los detalles históricos del Problema de la Medida, el lector puede consultar el libro [Kan03] o el artículo [Tal83].

función definida en todo el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Banach trató de definir una medida sobre el conjunto $\mathcal{P}([0,1])$ en vez de sobre todo $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, buscando después utilizar la σ-aditividad para extender dicha medida a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Más aún, al no pedir invariancia bajo traslaciones, el planteamiento de Banach elimina cualquier consideración geométrica del problema, por lo que el intervalo $[0,1]$ puede ser reemplazado por cualquier conjunto S. En este caso, si $m(S) > 0$, podemos normalizar para suponer que $m(S) = 1$.

En este capítulo daremos a conocer este replanteamiento del Problema de la Medida y algunos de los primeros resultados que se pueden obtener alrededor de él. Para ello necesitaremos considerar la siguiente definición de medida.

Definición 2.1 *Sea S un conjunto no vacío. Decimos que una función $\mu : \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ es una* ***medida*** *para S si y sólo si satisface las siguientes condiciones:*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(S) = 1$;

(b) μ *es no trivial, es decir,* $\mu(\{a\}) = 0$ *para todo* $a \in S$; *y*

(c) μ *es σ-aditiva, es decir, si* $\{X_n : n \in \omega\}$ *es una sucesión de subconjuntos de S ajenos por parejas, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} X_n\right) = \sum_{n\in\omega} \mu(X_n).$$

Asimismo, decimos que un conjunto S ***admite una medida*** *si y sólo si existe una medida para S.*

De este modo, a partir de ahora hablar del Problema de la Medida significará preguntarnos si existe algún conjunto S que admita una medida como la que acabamos de definir.

Por otra parte, esta nueva definición de medida es claramente una generalización a la planteada por el Problema de la Medida de Lebesgue, así que resulta natural pensar que muchas de las propiedades que tiene la Medida de Lebesgue y que incluso motivaron su construcción, se puedan demostrar también en este caso más general.

Observación 2.2 *Dado que para cualquier conjunto S se tiene que $\mathcal{P}(S)$ es una σ-álgebra, una consecuencia inmediata de los Lemas 1.43 y 1.44 es que si μ es una medida para S, entonces μ es monótona y σ-subaditiva. Además, como en la definición de medida está implícito que $\mu(X) \in [0,1]$ para todo $X \subseteq S$, también se sigue del Lema 1.43 que si $X \subseteq Y \subseteq S$, entonces $\mu(Y - X) = \mu(Y) - \mu(X)$.*

Otra propiedad inmediata que surge a partir de la Definición 2.1 es la siguiente.

Proposición 2.3 *Si S es un conjunto y μ es una medida para S, entonces cualquier subconjunto de S de cardinalidad a lo más numerable tiene medida cero.*

Demostración. La prueba se sigue directamente de las condiciones (b) y (c) de la Definición 2.1 y es análoga a la del inciso (d) de la Proposición 1.41. □

El resultado anterior junto con el inciso (a) de la Definición 2.1 tienen como consecuencia que para poder hablar de una medida para un conjunto S, éste tiene que ser no numerable. Esto ya representa una restricción respecto a la cardinalidad de los conjuntos para los que podemos definir una medida, pues nos dice que éstos tienen que ser suficientemente "grandes". Así, podemos rescatar que entonces el Problema de la Medida planteado por Banach radica en preguntarse si existirá un conjunto no numerable $S \neq \emptyset$ para el cual exista una medida como la de la Definición 2.1.

Por otra parte, estas propiedades dejan ver que muchas de las características más elementales de la Medida de Lebesgue pueden ser vistas desde una perspectiva más abstracta. Esto resulta de particular importancia pues permitió abordar el Problema de la Medida utilizando nuevos enfoques y herramientas de otras áreas de las matemáticas además del Análisis.

Concluimos esta sección con el siguiente resultado observado por Banach y que es una de las razones fundamentales por las que el Problema de la Medida encontró cabida dentro del estudio de los números cardinales, pues establece que el hecho de que exista una medida para un conjunto S depende únicamente de su cardinalidad.

Proposición 2.4 *Sean S y S' dos conjuntos no vacíos tales que $|S| = |S'|$. Entonces existe una medida para S si y sólo si la existe para S'.*

Demostración. Demostraremos que si μ es una medida para S, entonces existe una medida para S', ya que la prueba del recíproco es análoga. La demostración se basa en el hecho de que si $F : S \to S'$ es una función biyectiva entre S y S', entonces podemos "copiar" a los subconjuntos de S' en S y asignarles una medida mediante los valores de μ. Así pues, consideremos a la función $\nu : \mathcal{P}(S) \to [0, 1]$ definida como

$$\nu(X) := \mu(F^{-1}[X]).$$

Obsérvese que ν está bien definida, pues $ran(\nu) \subseteq ran(\mu) \subseteq [0, 1]$. Veamos entonces que ν es una medida para S':

(a) Como F es función, tenemos que $F^{-1}[\emptyset] = \emptyset$. Además, como F va de S en S', $F^{-1}[S'] = S$, así que $\nu(\emptyset) = 0$ y $\nu(S') = 1$.

(b) Por otro lado, dado $s' \in S'$, como F es biyectiva, sabemos que hay algún $s \in S$ tal que $F^{-1}[\{s'\}] = \{s\}$, así que $\nu(\{s'\}) = \mu(F^{-1}[\{s'\}]) = \mu(\{s\}) = 0$.

(c) Finalmente, si $\{X_n : n \in \omega\}$ es una sucesión de subconjuntos de S' tal que $X_n \cap X_m = \emptyset$ siempre que $n \neq m$, por propiedades de la imagen inversa tenemos que $\{F^{-1}[X_n] : n \in \omega\}$ es una sucesión de subconjuntos de S tal que $F^{-1}[X_n] \cap F^{-1}[X_m] = \emptyset$ si $n \neq m$. Así, utilizando que μ es σ-aditiva, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{n\in\omega} X_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n\in\omega} F^{-1}[X_n]\right)\\
&= \sum_{n\in\omega}\mu(F^{-1}[X_n])\\
&= \sum_{n\in\omega}\nu(X_n)
\end{aligned}$$

y, por lo tanto, ν es σ-aditiva. □

La proposición anterior pone en una plataforma meramente conjuntista al Problema de la Medida, pues establece que la existencia de una medida para un conjunto arbitrario es equivalente a la existencia de una medida para algún número cardinal.[2] Sin embargo, dado que la motivación para abstraer el Problema de la Medida seguía siendo investigar qué ocurría para la recta real, veremos cuál es la relación entre la Hipótesis del Continuo y la existencia de una medida para el conjunto de números reales.

2.1. El Problema de la Medida y la Hipótesis del Continuo

A partir de este momento utilizaremos todas las propiedades de ordinales y cardinales que hemos resumido en el Apéndice A, pues a raíz del replanteamiento de Banach del Problema de la Medida, la Teoría de Conjuntos adquirió un papel protagónico en la investigación alrededor de este tema.

Cabe recordar que a finales del siglo XIX, Cantor formuló la famosa *Hipótesis del Continuo* (HC), según la cual no existe un subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ que no sea biyectable ni con el conjunto de números naturales ni con el de todos los números reales. Formalmente, dicho enunciado establece que

$$\neg(\exists A \subseteq \mathbb{R}(|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|)).$$

Otra manera de formular la Hipótesis del Continuo surge si, bajo el Axioma de Elección, asociamos un número cardinal concreto al conjunto de números reales. De este modo, dado que $\mathbb{R}$ es biyectable con el conjunto de sucesiones ${}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$,[3] decimos que la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es el número ordinal $|{}^{\mathbb{N}}\{0,1\}| = |\{0,1\}|^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}$. Por otra parte, sabemos que el primer cardinal no numerable es llamado $\aleph_1$, de modo que, como $\mathbb{R}$ es un conjunto infinito no numerable, $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$. De este modo, la Hipótesis del Continuo es equivalente al enunciado

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0},$$

[2]Esta afirmación está hecha utilizando el Axioma de Elección, pues sólo así sabemos que todo conjunto es biyectable con algún número cardinal.

[3]Véase el Teorema B.19 en el Apéndice B.

es decir, establece que $2^{\aleph_0}$ es el primer cardinal no numerable.

Durante años Cantor intentó demostrar dicha afirmación. Además, en medio de este problema sin resolver era cada vez mayor la necesidad que se sentía de formalizar las matemáticas, de modo que a finales del siglo XIX y principios del XX surgieron las primeras propuestas para axiomatizar la recientemente creada Teoría de Conjuntos. Sin embargo, dichas propuestas trajeron consigo problemas como la famosa Paradoja de Russell,[4] siendo hasta 1922 cuando, reuniendo las ideas de los matemáticos alemanes Ernst Zermelo y Abraham Fraenkel, se logró sintetizar lo que actualmente se conoce como el sistema axiomático de ZFE (Zermelo-Fraenklel con Elección) y que es la base sobre la que está fundamentada la Teoría de Conjuntos como la conocemos.

Posteriormente, en 1930, el célebre matemático austrohúngaro Kurt Gödel, revolucionó nuevamente la concepción que se tenía de las matemáticas, pues demostró que la suposición que reinaba hasta el momento de que era posible crear un sistema de axiomas a partir del cual se pudiera demostrar todo aquello que es verdadero, no era una posición sostenible. El trabajo de Gödel consistió en probar que en cualquier formalización de las matemáticas en la que no haya inconsistencias y que sea lo suficientemente compleja como para definir el concepto de números naturales, se puede construir una afirmación que no se puede ni demostrar ni refutar dentro de ese sistema.

Sin embargo, ¿qué significa que un enunciado no pueda ser demostrado ni refutado a partir de un sistema axiomático? Dado que frecuentemente haremos referencia a esta noción a lo largo de este trabajo, a continuación expondremos un ejemplo, mucho más simple que el de considerar a los axiomas de ZFE, pero que ilustra muy claramente esta idea. Así, consideremos un conjunto arbitrario A y una relación $<$ definida sobre A. Podemos pensar entonces que una estructura $(A, <)$ es un conjunto ordenado si y sólo si satisface los siguientes axiomas:

- Axioma de Asimetría: No existen a, b tales que $a < b$ y $b < a$.
- Axioma de Transitividad: Para cualesquiera a, b, c, si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

En otras palabras, podemos decir que el Axioma de Asimetría y el Axioma de Transitividad conforman una *teoría axiomática del orden* y que los conjuntos ordenados son *modelos* de esta teoría. Por otra parte, podemos considerar un axioma más al respecto de una relación dada sobre un conjunto y que está dado por el siguiente enunciado.

- Axioma de Linealidad: Para cualesquiera a, b se tiene que $a < b$, o $a = b$, o bien $b < a$.

La pregunta que podemos formular es entonces si es posible deducir al Axioma de Linealidad a partir de los de Asimetría y Transitividad. Si así fuera, podríamos asegurar entonces que cualquier modelo de la teoría del orden en el que se

[4] Véase el libro [HJ99] pág. 3.

satisfagan los Axiomas de Asimetría y Transitividad, debería ser tal que también se cumpla el Axioma de Linealidad, o dicho de una manera más coloquial, deberíamos poder demostrar que todo modelo de la teoría del orden, es un orden lineal. Sin embargo, podemos ver que si consideramos al conjunto $A := \mathcal{P}(\{0, 1\})$ y a la relación $\subseteq$ definida sobre A, entonces $(A, \subseteq)$ es un modelo de la teoría del orden que no es un orden lineal. En otras palabras, esto significa que el Axioma de Linealidad *no se puede deducir* a partir de los de Asimetría y Transitividad.

Por otro lado, si el Axioma de Linealidad pudiera ser refutado en la "teoría del orden", entonces todo modelo de dicha teoría debería satisfacer también la negación de tal axioma, es decir, todo orden debería ser no lineal. Sin embargo, esto nuevamente es una afirmación falsa, ya que el conjunto $B := \{0, \{0\}\}$ junto con la relación $\in$, proporciona un modelo de la teoría del orden en el que el Axioma de Linealidad es verdadero. Así, lo anterior nos permite concluir que el Axioma de Linealidad es *indecidible* dentro de la teoría del orden.

De manera más general, un enunciado puede resultar indecidible dentro de la Teoría de Conjuntos basada en los axiomas de ZFE, pues aunque no es posible construir un conjunto que modele el universo de todos los conjuntos, mediante el uso de fórmulas lógicas se puede establecer con toda formalidad el significado de que en un conjunto dado, se satisfagan algunos axiomas de nuestra teoría.

De este modo, en un contexto en el que la Hipótesis del Continuo parecía cada vez más lejos de poderse demostrar o refutar, Kurt Gödel construyó el primer modelo no trivial de la Teoría de Conjuntos de modo que en él, la Hipótesis del Continuo fuera verdadera. Esto significaba, si no que dicho enunciado fuera indecidible para ZFE, sí que al menos no podía refutarse. Fue hasta 1963 cuando Paul Cohen dio fin al problema cuando con ideas totalmente nuevas respecto a las que se habían trabajado anteriormente, logró construir un modelo de ZFE en el que la Hipótesis del Continuo fuera falsa, de modo que este enunciado tampoco puede ser demostrado dentro de la Teoría de Conjuntos.[5]

El Problema de la Medida surgió varias décadas antes de que se demostrara la independencia de la Hipótesis del Continuo de los axiomas de ZFE en los que se basa la Teoría de Conjuntos. En este contexto, ambos problemas resultaban de gran interés para los matemáticos de la época.

En 1929, Banach y Kuratowski hicieron la primera aportación significativa al Problema de la Medida al demostrar que si la Hipótesis del Continuo es verdadera, este replanteamiento del problema tampoco tenía solución *para el conjunto de los números reales*. Esto significaba que dos de las grandes preguntas no resueltas hasta ese momento se encontraban en disputa, ya que resolver afirmativamente alguna de ellas representaba refutar la otra. Sería hasta treinta años más tarde que se demostraría que no es posible dar una respuesta afirmativa al Problema de la Medida desde ZFE. Esta discusión será retomada en el siguiente capítulo a partir de las herramientas que ahí mismo desarrollaremos.

[5]La demostración de estas afirmaciones puede consultarse en el libro [Kun80].

En esta sección exhibiremos el resultado de Banach y Kuratowski que relaciona a la Hipótesis del Continuo con el Problema de la Medida. Para ello necesitaremos la siguiente definición.

Definición 2.5 *Definimos la relación* $\lhd \subseteq^{\omega} \omega \times^{\omega} \omega$ *de tal forma que* $f \lhd g$ *si y sólo si* $f(n) < g(n)$ *para todo* $n \in \omega$ *salvo por una cantidad finita, es decir, si* $|\{n \in \omega : f(n) \not< g(n)\}| < \aleph_0$.

Es sencillo ver que la relación $\lhd$ es transitiva, ya que si $f, g, h : \omega \to \omega$ son tales que $f \lhd g$ y $g \lhd h$, entonces $|\{n \in \omega : g(n) \leq f(n)\}| < \aleph_0$ y $|\{n \in \omega : h(n) \leq g(n)\}| < \aleph_0$. Así, como $\{n \in \omega : h(n) \leq f(n)\} \subseteq \{n \in \omega : g(n) \leq f(n)\} \cup \{n \in \omega : h(n) \leq g(n)\}$, $|\{n \in \omega : h(n) \leq f(n)\}| < \aleph_0$, por lo que $f \lhd h$.

A continuación demostraremos el resultado de Banach y Kuratowski, que será enunciado considerando una medida definida únicamente para los subconjuntos del intervalo $[0, 1]$, ya que esto nos permitirá manejar los conceptos con mayor facilidad y, dada la Proposición 2.4, resulta equivalente encontrar una medida para $[0, 1]$ que para $\mathbb{R}$. Además, al restringirnos a este intervalo dejamos abierta la posibilidad de que la medida construida coincida con la de Lebesgue en los conjuntos Lebesgue medibles.

Teorema 2.6 *Si existe una medida para el intervalo* $[0, 1]$*, entonces la Hipótesis del Continuo es falsa.*

Demostración. La demostración se hará por reducción al absurdo, suponiendo que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ y que existe una medida μ definida sobre $\mathcal{P}([0, 1])$.

Con el objetivo de llegar a una contradicción, construiremos una familia de funciones indexada por el ordinal ω_1, a saber $\{f_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$, y tal que satisfaga las siguientes condiciones:

(i) si $\beta < \alpha$, entonces $f_\beta \lhd f_\alpha$; y

(ii) para toda $g : \omega \longrightarrow \omega$, existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $g \lhd f_\alpha$.

A una familia de funciones con esas características se le llama ω_1**-escala**.

Para construirla, observemos primero que por las propiedades de aritmética cardinal[6] se tiene que $|{}^{\omega}\omega| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, y como además estamos suponiendo la Hipótesis del Continuo, podemos decir que $|{}^{\omega}\omega| = \aleph_1$. Por lo tanto, podemos considerar una enumeración biyectiva de estas funciones de manera que ${}^{\omega}\omega = \{g_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

A continuación utilizaremos la enumeración anterior para construir recursivamente una ω_1-escala.[7] Así pues, supongamos que para todo $\beta < \alpha$ hemos definido a la función $f_\beta : \omega \longrightarrow \omega$. Definiremos a $f_\alpha : \omega \longrightarrow \omega$ mediante un método de diagonalización, considerando los siguientes casos:

[6] Véase la Proposición A.52 en el Apéndice A.

[7] La formalización de la idea de recursión transfinita aparece en el Teorema A.21 del Apéndice A.

- Si $\alpha \in \omega$, definimos

$$f_\alpha(k) := \sum_{\beta<\alpha}[f_\beta(k) + g_\beta(k)] + 1,$$

de manera que para todo $k \in \omega$ y para todo $\beta < \alpha$, se tiene que $f_\beta(k) < f_\alpha(k)$ y que $g_\beta(k) < f_\alpha(k)$, por lo que efectivamente $f_\beta \lhd f_\alpha$ y $g_\beta \lhd f_\alpha$.

- Si α es tal que $\omega \leq \alpha < \omega_1$, entonces por Axioma de Elección existe una función biyectiva $h_\alpha : \omega \longrightarrow \alpha$, así que en este caso, definimos

$$f_\alpha(k) := \max\{f_{h_\alpha(s)}(k), g_{h_\alpha(s)}(k) : s \leq k\} + 1.$$

De esta forma tenemos que si $\beta < \alpha$, entonces existe $s \in \omega$ tal que $\beta = h_\alpha(s)$, así que para todo $k \geq s$, tendremos que $f_\beta(k) = f_{h_\alpha(s)}(k) < f_\alpha(k)$ y de la misma manera obtenemos que $g_\beta(k) < f_\alpha(k)$, por lo que nuevamente $f_\beta \lhd f_\alpha$ y $g_\beta \lhd f_\alpha$ para todo $\beta < \alpha$.

Como para cualquier función $g \in {}^\omega\omega$ existe $\beta \in \omega_1$ tal que $g = g_\beta$, mediante la construcción anterior queda asegurado que la familia $\{f_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ cumple los puntos (i) y (ii) que requiere para ser una ω_1-escala.

El siguiente paso será utilizar esta ω_1-escala para construir un sistema de subconjuntos del intervalo $[0, 1]$; podemos pensar en este sistema como una matriz infinita que tiene $\aleph_0$ renglones y $\aleph_0$ columnas. Así, como queremos que las entradas de nuestra matriz sean conjuntos de números reales, necesitamos primero considerar una enumeración biyectiva del intervalo $[0, 1]$, de tal manera que $[0, 1] = \{a_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$. Podemos hablar de esta enumeración nuevamente porque estamos suponiendo la Hipótesis del Continuo.

Así, nuestra matriz de conjuntos consiste en asociar a cada par ordenado $(n, k) \in \omega \times \omega$ el conjunto dado por

$$A_{n,k} := \{a_\alpha \in [0, 1] : \alpha \in \omega_1 \text{ y } f_\alpha(n) = k\}. \tag{2.1}$$

Nótese que de esta manera estamos "copiando" el buen orden de ω_1 sobre el intervalo $[0, 1]$ para conseguir así un arreglo de conjuntos de números reales utilizando la ω_1-escala construida anteriormente.

$$\begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & A_{0,2} & \cdots \\ A_{1,0} & A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots \\ A_{2,0} & A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Además, obsérvese que para todo $n \in \omega$ y para todo $a_\alpha \in [0, 1]$, como $\alpha \in \omega_1$, podemos definir $k := f_\alpha(n) \in \omega$, de manera que $a_\alpha \in A_{n,k}$. Esto demuestra que para todo $n \in \omega$ ocurre que

$$\bigcup_{k\in\omega} A_{n,k} = [0, 1]. \tag{2.2}$$

Por otra parte, si $n, j, k \in \omega$ son tales que $j \neq k$, entonces se tiene que $A_{n,j} \cap A_{n,k} = \emptyset$, ya que si existiera $y \in A_{n,j} \cap A_{n,k}$, también existiría $\alpha \in \omega_1$

tal que $y = a_\alpha$ y, por tanto, $j = f_\alpha(n) = k$, contradiciendo el hecho de que f_α es función.

A partir de estas afirmaciones podemos asegurar ahora que para cada $n \in \omega$ existe $k_n \in \omega$ tal que

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{k_n} A_{n,k}\right) \geq 1 - \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Esto se debe a que como μ es σ-aditiva, las ecuaciones (2.1) y (2.2) nos permiten decir que

$$1 = \mu([0,1]) = \mu\left(\bigcup_{k\in\omega} A_{n,k}\right) = \sum_{k\in\omega} \mu(A_{n,k}),$$

de manera que para todo $n \in \omega$, existe $k_n \in \omega$ tal que $\sum_{k\geq k_n+1} \mu(A_{n,k}) < \frac{1}{2^{n+2}}$, por lo que las condiciones (a) y (c) de medida implican que

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{k_n} A_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{k_n} \mu(A_{n,k}) \geq 1 - \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Así, si para cada $n \in \omega$ definimos $B_n := \bigcup_{k=0}^{k_n} A_{n,k}$ y $B := \bigcap_{n\in\omega} B_n$, entonces tenemos que $-\mu(B_n) \leq \frac{1}{2^{n+2}} - 1$. Utilizando esto y los Lemas 1.43 y 1.44, obtenemos la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned}
\mu([0,1] - B) &= \mu\left(\bigcup_{n\in\omega}([0,1] - B_n)\right)\\
&\leq \sum_{n\in\omega} \mu([0,1] - B_n)\\
&= \sum_{n\in\omega}(1 - \mu(B_n))\\
&\leq \sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^{n+2}}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Esto implica que $\mu(B) \geq \frac{1}{2} > 0$.

Ahora, consideremos a la función $g : \omega \longrightarrow \omega$ definida como

$$g(n) := k_n.$$

Nótese que para cualquier $y \in B$, si $y = a_\alpha$, las definiciones de B y de la matriz $\{A_{n,k} : n, k \in \omega\}$ nos dicen que para todo $n \in \omega$,

$$f_\alpha(n) \leq k_n = g(n).$$

Esto implica que $g \ntriangleleft f_\alpha$. Sin embargo, como $\mu(B) > 0$ y $B \subseteq [0,1]$, utilizando la σ-aditividad de μ podemos concluir que $\aleph_0 < |B|$, por lo que B es no numerable y entonces $g \ntriangleleft f_\alpha$ para una colección no numerable de $\alpha's$. Ahora, si existiera

$\beta \in \omega_1$ tal que $g \lhd f_\beta$, entonces por la transitividad de $\lhd$ tendríamos que para todo α tal que $a_\alpha \in B$, $f_\beta \ntrianglelefteq f_\alpha$. Además, como las funciones forman una ω_1-escala, $\beta \nless \alpha$, es decir, $\alpha \leq \beta$ para una cantidad no numerable de α's, pero esto contradice que $\beta \in \omega_1$, es decir, que β sea un ordinal numerable. De esta forma, hemos demostrado que para todo $\beta \in \omega_1$ se tiene que $g \ntriangleleft f_\beta$, contradiciendo el hecho de que $\{f_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es una ω_1-escala. Así, hemos concluido la prueba de que bajo la Hipótesis del Continuo no puede existir una medida para el intervalo $[0,1]$. $\square$

A pesar de saber que la Hipótesis del Continuo no se puede demostrar ni refutar desde ZFE, el resultado anterior resulta de particular interés para nosotros pues deja ver la importancia que tiene el papel de la cardinalidad en el Problema de la Medida.

2.2. Aditividad y el ideal de los conjuntos nulos

El trabajo de Banach siguió dando frutos aún después de establecer las bases para el Problema de la Medida, pues descubrió que si consideramos al mínimo cardinal para el cual podemos definir una medida, entonces ésta tendría que cumplir una condición más fuerte que la σ-aditividad. Para hablar de esta condición necesitaremos antes extender la noción que tenemos respecto a las sumas infinitas de números reales positivos. Así pues, consideremos la siguiente definición.

Definición 2.7 *Dado un conjunto de índices I y una colección $\{r_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, definimos **la suma de los** r_i como*

$$\sum_{i \in I} r_i := \sup \left\{ \sum_{i \in E} r_i : E \text{ es un subconjunto finito de } I \right\}.$$

Cabe hacer la observación de que según la definición anterior, el valor de la suma $\sum_{i \in I} r_i$ podría ser ∞ si el conjunto al que le estamos tomando supremo no está acotado superiormente. De hecho, si la suma de la definición anterior es un número real, entonces a lo más una cantidad *numerable* de $i \in I$ son tales que $r_i \neq 0$. Para ver esto, definamos para cada $n \in \omega$ al conjunto

$$S_n = \{i \in I : r_i > \tfrac{1}{n}\}.$$

Entonces cada S_n es finito, pues si existiera $N \in \omega$ tal que $|S_N| \geq \aleph_0$, tendríamos que

$$\infty = \textstyle\sum_{i \in \, S_N} \frac{1}{N} \leq \sum_{i \in S_N} r_i \leq \sum_{i \in I} r_i.$$

Así, el conjunto $\{i \in I : r_i > 0\} = \bigcup_{n \in \omega} S_n$ es unión numerable de conjuntos finitos y, por lo tanto, es a lo más numerable.

Una vez que hemos generalizado el concepto de *suma infinita*, podemos establecer la condición de aditividad que Banach definió al investigar las propiedades de las medidas introducidas al inicio de este capítulo.

Definición 2.8 *Sea κ un cardinal no numerable y sea μ una medida para un conjunto S. Decimos que μ es* ***κ-aditiva*** *si y sólo si para todo $\gamma < \kappa$ y para toda colección $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ de subconjuntos ajenos de S, se tiene que*

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha\right) = \sum_{\alpha<\gamma} \mu(X_\alpha).$$

Nótese que bajo esta definición, ser una medida σ-aditiva es equivalente a ser $\aleph_1$-aditiva. De manera más general, una medida κ-aditiva es aquella para la que la medida de una unión de menos que κ conjuntos ajenos, está "bien distribuida" respecto a la suma de las medidas de cada uno.

El siguiente resultado generaliza la idea de σ-subaditividad, que como hemos visto, resulta una herramienta muy útil cuando estamos trabajando con medidas.

Proposición 2.9 *Sea κ un cardinal no numerable y sea μ una medida κ-aditiva para un conjunto S. Supongamos que $\gamma < \kappa$ es un cardinal que indexa a la colección $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ que está compuesta por subconjuntos de S (no necesariamente ajenos por parejas). Entonces se tiene que*

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha\right) \leq \sum_{\alpha<\gamma} \mu(X_\alpha).$$

Demostración. Sea $\gamma < \kappa$ un cardinal que indexa a una colección $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ de subconjuntos de S.

Definimos una colección de subconjuntos de S de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Y_0 &:= X_0, \\ Y_\alpha &:= X_\alpha - \left(\bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta\right), \text{ si } 0 < \alpha < \gamma. \end{aligned}$$

De este modo hemos construido una colección $\{Y_\alpha : \alpha < \gamma\}$ de subconjuntos de S tal que $Y_\alpha \cap Y_\beta = \emptyset$, siempre que $\alpha \neq \beta$. Además, de la misma manera que en el Lema 1.44, podemos ver que

$$\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha = \bigcup_{\alpha<\gamma} Y_\alpha.$$

Esto se debe a que el cardinal γ es un conjunto bien ordenado con la relación $<$ y, por tanto, para cada $x \in \bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ podemos tomar al mínimo ordinal β tal que $x \in X_\beta$. Esto nos permite concluir que $x \in Y_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha<\gamma} Y_\alpha$.

Así, como para cada $\alpha < \gamma$ se tiene que $Y_\alpha \subseteq X_\alpha$, utilizando la monotonía y la κ-aditividad de μ podemos concluir que

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha\right) = \mu\left(\bigcup_{\alpha<\gamma} Y_\alpha\right) = \sum_{\alpha<\gamma} \mu(Y_\alpha) \leq \sum_{\alpha<\gamma} \mu(X_\alpha),$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Las siguientes definiciones están encaminadas a estudiar algunas de las propiedades de las medidas definidas al inicio de este capítulo. En particular, tienen como objetivo analizar el comportamiento de los subconjuntos nulos de un conjunto para el que se ha definido una medida.

Definición 2.10 *Sea S un conjunto no vacío. Un **ideal** sobre S es una colección I de subconjuntos de S que satisface las siguientes condiciones:*

(a) $\emptyset \in I$ y $S \notin I$;

(b) si $X \in I$ y $Y \in I$, entonces $X \cup Y \in I$; y

(c) si $Y \in I$ y $X \subseteq Y$, entonces $X \in I$.

Un ejemplo trivial de ideal sobre cualquier conjunto S es aquel que sólo tiene al vacío, es decir, $I := \{\emptyset\}$. Por otra parte, dado un conjunto S y un subconjunto $A \subsetneq S$, se puede verificar fácilmente que la colección

$$I := \{X \subseteq S : X \subseteq A\}$$

forma un ideal sobre S. Esto nos permite establecer la siguiente definición.

Definición 2.11 *Sea S un conjunto y sea $A \subsetneq S$. Al ideal $I := \{X \subseteq S : X \subseteq A\}$ se le llama **ideal principal generado por** A. Asimismo, si I es un ideal sobre S decimos que I es **no principal** si y sólo si para todo conjunto A se tiene que $I \neq \{X \subseteq S : X \subseteq A\}$.*

Los siguientes conceptos tienen como objetivo analizar, desde el punto de vista de los ideales, algunas propiedades que surgen a partir de la condición de σ-aditividad de una medida.

Definición 2.12 *Sea I un ideal sobre un conjunto S. Decimos que I es **σ-completo** si y sólo si para cualquier familia $\{X_n : n \in \omega\}$ de conjuntos en I se tiene que $\bigcup_{n\in\omega} X_n \in I$, es decir, si I es cerrado bajo uniones numerables.*

Definición 2.13 *Sea I un ideal sobre un conjunto S. Decimos que I es **σ-saturado** si y sólo si satisface las siguientes condiciones:*

(i) $\{x\} \in I$ para todo $x \in S$; y

(ii) toda familia de subconjuntos $X \subseteq S$ disjuntos y que no están en I, es a lo más numerable.

Intuitivamente, podemos pensar que ser un ideal σ-saturado significa que no es posible partir al conjunto sobre el que está definido en una colección no numerable de subconjuntos que escapen del ideal. Por otra parte, a partir de la definición anterior se puede demostrar que todo ideal σ-saturado es no principal. Esto quedará asentado en el siguiente lema.

Lema 2.14 *Sea I un ideal sobre un conjunto S. Si para todo $x \in S$ se tiene que $\{x\} \in I$, entonces I es no principal.*

Demostración. Razonando por contrapositiva, supongamos que I es un ideal principal sobre un conjunto S. Esto significa que existe $A \subseteq S$ tal que $I = \{X \subseteq S : X \subseteq A\}$. Por otra parte, como I es ideal, $S \notin I$, así que podemos asegurar que $A \neq S$. De aquí se sigue que existe $x_0 \in S$ tal que $\{x_0\} \nsubseteq A$. Así, la hipótesis implica que $\{x_0\} \notin I$, que es lo queríamos demostrar. □

A partir de los conceptos que acabamos de definir el lector podrá vislumbrar que tanto el concepto de ideal σ-saturado como el de ideal σ-completo están íntimamente relacionados con aquellos conjuntos que miden cero respecto a una medida sobre un conjunto dado. El siguiente resultado establece este hecho de manera concreta y será parte fundamental para el desarrollo que haremos más adelante.

Proposición 2.15 *Sea μ una medida σ-aditiva y no trivial para un conjunto S. Entonces, el conjunto*

$$I_\mu := \{X \subseteq S : \mu(X) = 0\} \tag{2.3}$$

es un ideal σ-completo, σ-saturado y no principal sobre S.

Demostración.

(i) Veamos en primer lugar que efectivamente I_μ es un ideal.

(a) Claramente $\emptyset \in I_\mu$ y $S \notin I_\mu$.

(b) Dados $X \in I_\mu$ y $Y \in I_\mu$, por el Lema 1.44, tenemos que $0 \leq \mu(X \cup Y) \leq \mu(X) + \mu(Y) = 0$, así que efectivamente $X \cup Y \in I_\mu$.

(c) Si $Y \in I_\mu$ y $X \subseteq Y$, entonces, por el Lema 1.43, se tiene que $0 \leq \mu(X) \leq \mu(Y) \leq 0$, así que $X \in I_\mu$.

Esto concluye la prueba de que I_μ es un ideal.

(ii) Veamos ahora que I_μ es σ-completo. Sea $\{X_n : n \in \omega\} \subseteq I_\mu$. Entonces tenemos nuevamente por la σ-subaditividad de μ que

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} X_n\right) \leq \sum_{n\in\omega} \mu(X_n) = 0,$$

así que $\bigcup_{n\in\omega} X_n \in I_\mu$ y se sigue la afirmación.

(iii) Para ver que I_μ es σ-saturado, observemos que la no trivialidad de μ nos dice que para todo $x \in S$, $\{x\} \in I_\mu$. Por otro lado, si $\mathcal{A} := \{Y_\xi : \xi < \alpha\}$ es una familia de subconjuntos ajenos de S de medida positiva, definamos para cada $n \in \omega$ al conjunto $S_n := \{Y \in \mathcal{A} : \mu(Y) \geq \frac{1}{n}\}$ y observemos que

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n\geq 1} S_n.$$

Ahora, para cada $n \in \omega$, $|S_n| \leq n$, ya que si existiera algún S_n con más de n elementos, podríamos encontrar $Y_0, Y_1, ..., Y_n \in S_n$ conjuntos ajenos de medida mayor que $\frac{1}{n}$ y por la σ-aditividad, esto implicaría que $\mu(\bigcup_{k=0}^{n} Y_k) = \sum_{k=0}^{n} \mu(Y_k) \geq \frac{n+1}{n} > 1$, contradiciendo el hecho de que $ran(\mu) \subseteq [0,1]$. De esta forma, el conjunto $\mathcal{A}$ es unión numerable de conjuntos finitos y, por tanto, es numerable.

(iv) El hecho de que I_μ es un ideal no principal se sigue del inciso (iii) y del Lema 2.14. □

El resultado anterior sintetiza en lenguaje de ideales algunos de los resultados que establecimos respecto a los conjuntos nulos para la Medida de Lebesgue, como el hecho de que la unión numerable de conjuntos nulos es un conjunto nulo. Además, esta proposición va más allá, pues nos dice que si dividimos a un conjunto S en subconjuntos ajenos, a lo más una cantidad numerable de ellos aportan una medida significativa para el conjunto total y el resto serán sumamente pequeños respecto a la medida que se ha asignado al conjunto.

A continuación expondremos un nuevo concepto que surge con el propósito de extender la noción de ser un ideal σ-completo de la misma manera en la que lo hicimos al extender la idea de σ-aditividad. Esta definición nos permitirá demostrar algunas propiedades importantes de los ideales que surgen a partir de la Definición 2.1 de medida.

Definición 2.16 *Sea I un ideal sobre un conjunto S, decimos que I es **κ-completo** si y sólo si para todo $\gamma < \kappa$ y para cualquier familia $\{X_\alpha : \alpha \in \gamma\}$ de conjuntos en I se tiene que $\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in I$, es decir, si I es cerrado bajo uniones de cardinalidad menor a κ.*

A partir de la definición anterior podemos enunciar un resultado que nos da la relación precisa que existe entre la noción de κ-aditividad y el concepto de ideal κ-completo. De esta manera podremos empezar a abordar el Problema de la Medida desde una perspectiva en la que para determinar si es posible definir una medida para un conjunto dado, será más importante estudiar las propiedades de sus subconjuntos que la naturaleza de los elementos que conforman al conjunto en sí.

Proposición 2.17 *Si μ es una medida para un conjunto S, entonces μ es κ-aditiva si y sólo si el ideal I_μ de los conjuntos nulos de μ es κ-completo.*

Demostración. Supongamos que μ es una medida κ-aditiva para un conjunto S y tomemos un cardinal $\gamma < \kappa$ y una familia $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ de conjuntos en I_μ. Entonces, por la Proposición 2.9, tenemos que $0 \leq \mu\left(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha\right) \leq \sum_{\alpha<\gamma} \mu(X_\alpha) = 0$, así que $\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in I_\mu$ y, por tanto, I_μ es κ-completo.

Recíprocamente, supongamos que μ es una medida para S y que el ideal I_μ de los conjuntos nulos de μ es κ-completo. Para ver que μ es κ-aditiva, tomemos un cardinal $\gamma < \kappa$ y $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ una familia de subconjuntos ajenos de S. Por la Proposición 2.15, sabemos que I_μ es un ideal σ-saturado. Así, como los X_α

son ajenos, a lo más una cantidad numerable de ellos tiene medida positiva, de modo que podemos dividir a nuestra colección de conjuntos en dos familias de la siguiente manera

$$\{X_\alpha : \alpha < \gamma\} = \{Y_n : n \in \omega\} \cup \{Z_\alpha : \alpha < \gamma\},$$

donde $\mu(Z_\alpha) = 0$ para todo $\alpha < \gamma$. A partir de esto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha\right) &= \mu\left(\bigcup_{n\in\omega} Y_n\right) + \mu\left(\bigcup_{\alpha<\gamma} Z_\alpha\right) \\
&= \sum_{n\in\omega} \mu(Y_n) + \mu\left(\bigcup_{\alpha<\gamma} Z_\alpha\right) \quad \text{(por la } \sigma\text{-aditividad)} \\
&= \sum_{n\in\omega} \mu(Y_n) + 0 \quad \text{(pues } I_\mu \text{ es } \kappa\text{-completo)} \\
&= \sum_{n\in\omega} \mu(Y_n) + \sum_{\alpha<\kappa} \mu(Z_\alpha) \\
&= \sum_{\alpha<\kappa} \mu(X_\alpha).
\end{aligned}$$

Esto demuestra que μ es κ-aditiva. □

En lo que resta de este capítulo nuestro objetivo será establecer algunas de las condiciones necesarias para que un número cardinal admita una medida. El siguiente lema está encaminado a esta tarea y recurriremos a él en diversas ocasiones en el siguiente capítulo de este trabajo. Su esencia radica en que mediante él es posible definir medidas para ciertos conjuntos, a partir de medidas ya dadas para otros conjuntos.

Lema 2.18 *Sean μ una medida para un conjunto S e I un conjunto cuyos elementos indexan a una partición $\{Z_i : i \in I\}$ de S formada por subconjuntos nulos. Asimismo, sean J un conjunto tal que $I \subseteq J$ y $g : S \longrightarrow J$ la función definida de tal forma que*

$$g(x) := j \textit{ si y sólo si } x \in Z_j.$$

Entonces, la función $\nu : \mathcal{P}(J) \longrightarrow [0,1]$ dada por

$$\nu(Z) := \mu(g^{-1}[Z]),$$

es una medida para J.[8]

Demostración. Obsérvese primero que g es efectivamente una función, pues $\{Z_i : i \in I\}$ es partición de S y, por tanto, para todo $x \in S$ existe una única $i \in I \subseteq J$ tal que $x \in Z_i$.

Por otra parte, ν está bien definida pues $ran(\nu) \subseteq ran(\mu) \subseteq [0,1]$, así que sólo hace falta verificar que efectivamente ν es una medida no trivial y σ-aditiva sobre J.

[8]Frecuentemente utilizaremos este lema para el caso en el que $I = J$. En estas circunstancias, g es de hecho una función sobreyectiva.

(a) Por un lado, podemos ver que $\nu(\emptyset) = \mu(g^{-1}[\emptyset]) = \mu(\emptyset) = 0$ y, además, $\nu(J) = \mu(g^{-1}[J]) = \mu(S) = 1$.

(b) Para verificar la no trivialidad, tomemos $j \in J$ arbitrario y notemos que

$$\nu(\{j\}) = \mu(g^{-1}[\{j\}]) = \begin{cases} \mu(Z_j) & \text{si } j \in I \\ \mu(\emptyset) & \text{si } j \notin I. \end{cases}$$

Así, como $\emptyset$ y Z_j son conjuntos nulos para toda $j \in I$, lo anterior implica que $\nu(\{j\}) = 0$ para cualquier $j \in J$.

(c) Finalmente, ν es σ-aditiva, pues si $\{Y_n : n \in \omega\}$ es una familia numerable de subconjuntos disjuntos de J, entonces

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{n\in\omega} Y_n\right) &= \mu\left(g^{-1}\left[\bigcup_{n\in\omega} Y_n\right]\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n\in\omega} g^{-1}[Y_n]\right) \\ &= \sum_{n\in\omega} \mu(g^{-1}[Y_n]) \\ &= \sum_{n\in\omega} \nu(Y_n), \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se da por la σ-aditividad de μ y el hecho de que las imágenes inversas de conjuntos disjuntos son a su vez disjuntas. □

La siguiente proposición tiene como objetivo encontrar las propiedades que debe cumplir un cardinal para que admita una medida y, como mencionamos al inicio de esta sección, está encaminada a demostrar cierta propiedad de aditividad que deberán cumplir los conjuntos para los que pudiera existir una medida.

Proposición 2.19 *(i) Si κ es el mínimo cardinal que admite una medida y μ es dicha medida, entonces el ideal I_μ de conjuntos nulos es κ-completo.*

(ii) Si κ es el mínimo cardinal con la propiedad de que hay un ideal I σ-completo y σ-saturado sobre κ, entonces I es κ-completo.

Demostración.

(i) Supongamos que I_μ no es κ-completo. Entonces existen $\gamma < \kappa$ y un subconjunto $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\} \subseteq I_\mu$ tales que $\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha \notin I_\mu$ o, equivalentemente, tales que $\mu\left(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha\right) > 0$.

Podemos suponer sin perder generalidad que los conjuntos X_α son ajenos y no vacíos, ya que, de lo contrario, podemos definir para cada α al conjunto $Y_\alpha := X_\alpha - (\bigcup_{\beta<\gamma,\beta\neq\alpha} X_\beta)$ y la colección $\{Y_\alpha : \alpha < \gamma\} \cup \{\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha\}$ cumple con las mismas características, si nos deshacemos de todos los conjuntos que en esta construcción quedaron vacíos.

Así, llamemos $X := \bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ y sea $m := \mu(X)$. Se puede verificar que entonces la función $\nu : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ definida como

$$\nu(Y) := \frac{1}{m}\mu(Y)$$

es una medida para el conjunto X. Así, definamos una función $f : X \to \gamma$ de tal manera que

$$f(x) := \alpha \text{ si y sólo si } x \in X_\alpha.$$

Como la colección $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ forma una partición de subconjuntos nulos de X, por el Lema 2.18 sabemos que existe una medida ν_1 para el cardinal γ y, como $\gamma < \kappa$, esto es una contradicción a la minimalidad de κ, por lo que podemos concluir que I_μ es un ideal κ-completo.

(ii) La prueba de esta parte de la proposición es muy similar a la del inciso (i). Razonando por contradicción, supongamos que I no es κ-completo. Entonces hay $\gamma < \kappa$ y un subconjunto $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\} \subseteq I$ tales que $\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha \notin I$. Consideremos al ideal J sobre γ dado por

$$J := \{Z \subseteq \gamma : f^{-1}[Z] \in I\},$$

donde f está definida como en el inciso (i). Se puede verificar que J es efectivamente un ideal. Además, es σ-completo pues si $\{X_n : n \in \omega\} \subseteq J$, entonces $\{f^{-1}[X_n] : n \in \omega\} \subseteq I$, así que $f^{-1}[\bigcup_{n\in\omega} X_n] = \bigcup_{n\in\omega} f^{-1}[X_n] \in I$ y, por tanto, $\bigcup_{n\in\omega} X_n \in J$.

Para ver que J es σ-saturado nótese que, por un lado, para todo $\alpha < \gamma$, $f^{-1}[\{\alpha\}] = X_\alpha \in I$, de manera que $\{\alpha\} \in J$. Por otra parte, si $\{Z_\beta : \beta < \theta\}$ es una familia de subconjuntos disjuntos de γ que no están en J, entonces $\{f^{-1}[X_\beta] : \beta < \theta\}$ es una familia de subconjuntos disjuntos de X que no están en I, así que θ es a lo más numerable. A partir de esto podemos concluir que J es un ideal σ-saturado y σ-completo sobre $\gamma < \kappa$, contradiciendo el hecho de que κ es el mínimo cardinal que acepta un ideal de esas características. Así, I es κ-completo, como queríamos demostrar. □

La proposición anterior revela que así como los conjuntos de medida cero determinan muchas de las características de la Medida de Lebesgue, en el ámbito de las medidas abstractas el ideal de los conjuntos nulos también resulta determinante, pues si κ es el mínimo cardinal que admite una medida, es suficiente que la unión de menos que κ subconjuntos nulos sea un conjunto nulo, para que toda la medida resulte ser κ-aditiva. En este contexto, estamos listos para demostrar el tan anunciado resultado de Banach y que fue el que en un principio motivó la idea de la κ-aditividad.

Corolario 2.20 (Banach) [9] *Si κ es el mínimo cardinal que admite una medida μ, entonces μ es κ-aditiva.*

[9] La demostración que aquí daremos es diferente a la que construyó Banach, ya que él no utilizó el concepto de ideal que para nosotros ha sido parte central de la investigación. Sin embargo, hemos optado por el uso de estas heramientas, pues nos han permitido establecer resultados muy interesantes que serán utilizados más adelante.

Demostración. Supongamos que κ es el mínimo cardinal que admite una medida μ que es σ-aditiva y no trivial. Entonces, por la Proposición 2.19, tenemos que el ideal I_μ es κ-completo, de manera que la Proposición 2.17 nos dice que μ es κ-aditiva, como queríamos demostrar. $\square$

Resultados como el anterior fueron elementales para motivar conceptos que permitieron profundizar en el Problema de la Medida durante la época de Banach. Así, a pesar de que la relación dada en este capítulo entre dicho problema y la Hipótesis del Continuo ya arroja luz respecto a que no es posible construir una medida para $\mathbb{R}$ desde ZFE, resulta importante recalcar que el desconocimiento en aquel contexto histórico de la independencia de la Hipótesis del Continuo, sin lugar a dudas permitió que muchos matemáticos se sintieran atraídos por construir una medida para el conjunto de números reales, pues eso representaba también una oportunidad para refutar por completo la Hipótesis del Continuo. Tal motivación trajo consigo muchos frutos cuyo análisis será el corazón de este trabajo y de los cuales hablaremos en el siguiente capítulo, en el que uno de los conceptos centrales surgirá precisamente a partir del Corolario 2.20.

CAPÍTULO 3

Cardinales medibles

En el capítulo anterior hablamos del Problema de la Medida y del resultado mediante el que Banach probó que de existir una solución al problema, podríamos encontrar algún cardinal κ para el que existiera una medida κ-aditiva. Fue precisamente este resultado el que originó una nueva rama de la Teoría de Conjuntos que se enfocó al estudio de las medidas definidas para números cardinales, pues aunque el objetivo seguía siendo lograr una extensión no invariante bajo traslaciones de la Medida de Lebesgue, las consecuencias que surgieron de suponer la existencia de una medida sobre un cardinal arbitrario adquirieron un valor teórico propio que captó la atención de muchos matemáticos a principios de la década de los treinta.

En el presente capítulo daremos a conocer los conceptos de *cardinal de medida real* y de *cardinal medible* que surgieron a raíz del Problema de la Medida. Además, veremos la forma en la que están conectados con la teoría de los cardinales grandes.

3.1. Cardinales de medida real

Comenzaremos introduciendo un concepto que se refiere a aquellos cardinales κ para los que es posible definir una especie de medidas que satisfacen la κ-aditividad. Basándonos en el resultado de Banach con el que concluímos el capítulo anterior, esta nueva definición nos permitirá aproximarnos a determinar qué condiciones se necesitarían para que el Problema de la Medida tuviera solución, pues al hablar de cardinales que cumplan esta restricción, estaríamos hablando también de conjuntos para los que es posible definir una medida σ-aditiva.

Definición 3.1 *Sea κ un cardinal no numerable. Decimos que κ es de* ***medida***

real *si y sólo si existe una medida κ-aditiva μ definida sobre $\mathcal{P}(\kappa)$. En este caso, μ es llamada una medida real para κ.*

Recordemos que para la Medida de Lebesgue construida en el Capítulo 1 es posible demostrar que una condición necesaria mas no suficiente para que un conjunto tenga medida positiva, es que éste tenga la cardinalidad de los reales. Motivados por este hecho, demostraremos que si κ es un cardinal de medida real, también es necesario que un subconjunto de κ tenga cardinalidad κ para que su medida sea distinta de cero.

Proposición 3.2 *Si κ es un cardinal y μ es una medida real para κ, entonces para todo $X \subseteq \kappa$ tal que $|X| < \kappa$ se tiene que $\mu(X) = 0$.*

Demostración. Sea κ un cardinal de medida real μ y sea $X \subseteq \kappa$ tal que $|X| = \gamma < \kappa$. Considérese $\{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$ una enumeración de los elementos de X y obsérvese que como $X = \bigcup_{\alpha<\gamma}\{x_\alpha\}$ y μ es κ-aditiva, $\mu(X) = \sum_{\alpha<\gamma}\mu(\{x_\alpha\}) = 0$.
$\square$

Cabe hacer notar que la prueba de la proposición anterior no es más que una generalización de la manera en la que demostramos para la Medida de Lebesgue que todos los conjuntos numerables son de medida cero, ya que en este caso tenemos la κ-aditividad como hipótesis. No obstante, recordemos que para demostrar que si $|X| < 2^{\aleph_0}$, $\mathfrak{L}(X) = 0$, tuvimos que utilizar muchas propiedades de los números reales además de la σ-aditividad. De hecho, se puede probar que no es posible establecer la $2^{\aleph_0}$-aditividad para la Medida de Lebesgue desde ZFE, por lo que el resultado citado anteriormente, no podría obtenerse de manera análoga a lo hecho en la Proposición 3.2.[1]

3.1.1. Cardinales regulares y débilmente inaccesibles

En la teoría de los números cardinales, una de las maneras que tenemos para conocer sus propiedades es clasificándolos según su comportamiento respecto a otros cardinales.

En esta sección estableceremos una manera de estudiar a los cardinales identificando si poseen cierta propiedad de regularidad que veremos a continuación. Asimismo, introduciremos la noción de *cardinal débilmente inaccesible*, que será nuestro primer acercamiento con los cardinales grandes y veremos su relación con aquellos de medida real.

En este contexto, empezaremos definiendo algunos conceptos.

Definición 3.3 *Dada una sucesión transfinita $\{\alpha_\nu : \nu < \vartheta\}$ de números ordinales, decimos que tal sucesión es* ***creciente*** *si y sólo si $\alpha_\nu < \alpha_\mu$ siempre que $\nu < \mu < \vartheta$. Asimismo, decimos que la sucesión es* ***no decreciente*** *si y sólo si $\alpha_\nu \leq \alpha_\mu$ siempre que $\nu < \mu < \vartheta$.*

[1] Martin y Solovay demostraron en 1970 que si suponemos el Axioma de Martin, sí es posible demostrar la $2^{\aleph_0}$-aditividad de la Medida de Lebesgue. Véase el libro [Jec02] pág. 531.

De la misma manera que las definiciones anteriores resultan similares a las dadas en cálculo para sucesiones de números reales, podemos utilizarlas para definir un nuevo concepto referente a los números ordinales, que también será análogo a la noción de límite que se establece en cálculo y de hecho estará basado en la idea del supremo.

Definición 3.4 *Si ϑ es un ordinal límite y si $\{\alpha_\nu : \nu < \vartheta\}$ es una sucesión no decreciente de números ordinales, definimos*

$$\lim_{\nu<\vartheta} \alpha_\nu := \sup\{\alpha_\nu : \nu < \vartheta\}.^2$$

*Al ordinal dado por $\lim_{\nu<\vartheta} \alpha_\nu$ lo llamamos el **límite** de la sucesión dada.*

La definición anterior nos permite finalmente establecer uno de los conceptos centrales de esta sección.

Definición 3.5 *Sea κ un cardinal infinito. Decimos que κ es **regular** si y sólo si no existe una sucesión creciente $\{\alpha_\nu : \nu < \gamma\}$ de ordinales α_ν tal que γ es un ordinal límite con la propiedad de que $\omega \leq \gamma < \kappa$ y $\kappa = \lim_{\nu<\gamma} \alpha_\nu$.*

*Un cardinal infinito es llamado **singular** si no es regular.*

La idea de regularidad dada por la definición anterior consiste en dividir a los números cardinales en dos grupos, dependiendo de si es posible o no "alcanzarlos" mediante una sucesión de longitud menor que el cardinal en cuestión que consta de números ordinales también menores que él.

Con el propósito de conocer más a fondo a los cardinales regulares, podemos considerar la siguiente definición.

Definición 3.6 *Sea κ un cardinal y sea X un subconjunto de κ. Decimos que X es **acotado** en κ si y sólo si $\sup(X) < \kappa$ y decimos que X es **no acotado** en κ si y sólo si $\sup(X) = \kappa$.*

El siguiente resultado da una caracterización muy útil de los conjuntos no acotados.

Proposición 3.7 *Sea κ un cardinal y sea $X \subseteq \kappa$. Entonces X es no acotado en κ si y sólo si para todo $\alpha < \kappa$ existe $\beta > \alpha$ tal que $\beta \in X$.*

Demostración. Sea $X \subseteq \kappa$. Razonando por contrapositiva, supongamos primero que existe $\alpha < \kappa$ tal que para todo $\beta > \alpha$, $\beta \notin X$. Esto implica que $\kappa - \alpha \subseteq \kappa - X$ y, por lo tanto, $X \subseteq \alpha$. Así, α es cota superior para X y, por lo tanto, $\sup(X) \leq \alpha < \kappa$.

Recíprocamente, si suponemos que X es acotado en κ, entonces existe $\alpha < \kappa$ tal que $\sup(X) = \alpha$ y, por la definición del supremo, para todo $\beta > \alpha$ se tiene que $\beta \notin X$, así que nuevamente la afirmación que buscamos se sigue por contrapositiva. □

El siguiente teorema nos proporciona algunas de las propiedades más notables de los cardinales regulares en relación con los conjuntos acotados.

[2]Recordemos que si X es un conjunto de números ordinales, entonces $\sup X = \bigcup X$, que también resulta ser un número ordinal. Véase el Lema A.16 en el Apéndice A.

Teorema 3.8 *Sea κ un cardinal regular. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

(a) Si $X \subseteq \kappa$ es tal que $|X| < \kappa$, entonces X es acotado. Dicho de otro modo, cualquier subconjunto no acotado en κ tiene cardinalidad κ.

(b) Si λ es un cardinal tal que $\lambda < \kappa$ y $f : \lambda \to \kappa$ es una función, entonces $f[\lambda]$ es acotado en κ.

Demostración.

(a) Sea $X \subseteq \kappa$ tal que $|X| < \kappa$. Si X tiene un elemento máximo el resultado es inmediato, así que supongamos que X no tiene un elemento máximo. Como X es bien ordenable, esto implica que $(X, \in)$ es isomorfo a un ordinal límite,[3] digamos ϑ, así que podemos suponer que $\{\alpha_\nu : \nu \in \vartheta\}$ es una enumeración creciente de los elementos de X. Así, como $|\vartheta| = |X| < \kappa$, tenemos que $\vartheta < \kappa$ y, como κ es un cardinal regular, $\sup(X) = \text{lím}_{\nu<\vartheta} \alpha_\nu < \kappa$, es decir, X es acotado en κ.

(b) Sea λ un cardinal tal que $\lambda < \kappa$ y sea $f : \lambda \to \kappa$. Como f es función, tenemos que $|f[\lambda]| \leq \lambda < \kappa$, así que por el inciso (a), $f[\lambda]$ es acotado. □

Una equivalencia muy útil que nos permite identificar a los cardinales singulares (y por tanto a los regulares) está dada por el siguiente resultado.

Proposición 3.9 *Un cardinal infinito κ es singular si y sólo si es la suma de menos que κ cardinales menores que κ, es decir, si existen un cardinal $\lambda < \kappa$ y una familia $\{\kappa_i : i < \lambda\}$ tal que para todo $i < \kappa$, $\kappa_i < \kappa$ y $\kappa = \sum_{i<\lambda} \kappa_i$.*

Demostración. Sea κ un cardinal infinito.

Supongamos primero que κ es singular. Entonces existe un ordinal límite $\vartheta < \kappa$ y una sucesión creciente $\{\alpha_\nu : \nu < \vartheta\}$ tal que $\kappa = \text{lím}_{\nu<\vartheta} \alpha_\nu$. Luego, dado que el límite de una sucesión de ordinales está dada por la unión de los mismos,[4] podemos reformular esto como

$$\kappa = \bigcup_{\nu<\vartheta} \alpha_\nu = \bigcup_{\nu<\vartheta} (\alpha_\nu - \bigcup_{\xi<\nu} \alpha_\xi).$$

Para cada $\nu < \vartheta$ definamos al conjunto $A_\nu := \alpha_\nu - \bigcup_{\xi<\nu} \alpha_\xi$. Entonces $\{A_\nu : \nu < \vartheta\}$ es una sucesión de menos que κ subconjuntos ajenos por parejas y tales que $\kappa_\nu := |A_\nu| = |\alpha_\nu - \bigcup_{\xi<\nu} \alpha_\xi\}| \leq |\alpha_\nu| < \kappa$. Por lo tanto, $\kappa = \sum_{\nu<\vartheta} \kappa_\nu$, como queríamos demostrar.

Para la prueba del recíproco, supongamos que λ es un cardinal menor que κ y que $\{\kappa_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de cardinales tales que para todo $\alpha < \lambda$ se tiene

[3] Esto se conoce como Teorema de Enumeración. Véase el Teorema A.18 en el Apéndice A.
[4] Véase el Lema A.16 en el Apéndice A.

que $\kappa_\alpha < \kappa$ y $\kappa = \sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$. Por propiedades de aritmética cardinal,[5] esto nos dice que $\kappa = \text{máx}\{\lambda, \sup_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha\}$. Así, como $\lambda < \kappa$,

$$\kappa = \sup_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha. \tag{3.1}$$

Utilizando esto y la Proposición 3.7, podemos construir por recursión transfinita una subsucesión creciente cuyo límite sea κ. Para ello, definamos $\lambda_0 := \kappa_0$. Luego, supongamos que $\gamma < \lambda$ es tal que para todo $\beta < \gamma$ hemos definido λ_β de modo que, si $\xi < \beta < \gamma$, entonces $\lambda_\xi < \lambda_\beta$. Así, definamos, mientras sea posible,

$$\lambda_\alpha := \text{mín}\{\kappa_\xi : \forall \beta < \gamma(\lambda_\beta < \kappa_\xi)\}.$$

Esta sucesión está bien definida por lo dicho en la ecuación (3.1). Además, es claro que esta sucesión es creciente y que su longitud es un ordinal límite $\vartheta \leq \lambda$. Por otra parte, de la construcción de $\{\lambda_\alpha : \alpha < \vartheta\}$ se sigue que

$$\kappa = \lim_{\alpha<\vartheta} \lambda_\alpha,$$

con lo que queda demostrado que κ es un cardinal singular. $\square$

Observación 3.10 *A partir del resultado anterior podemos concluir también que un cardinal κ es regular si y sólo si no se puede escribir como la suma de menos que κ cardinales menores que κ.*

Ya que hemos puesto sobre la mesa todas estas herramientas, podemos retomar el concepto central de esta sección, el de cardinal de medida real, y profundizar en la investigación de sus características mediante el siguiente resultado.

Proposición 3.11 *Si κ es un cardinal de medida real, entonces es un cardinal regular.*

Demostración. Sea κ un cardinal de medida real y supongamos que μ es una medida κ-aditiva y no trivial definida sobre $\mathcal{P}(\kappa)$. Razonando por contradicción, obsérvese que si κ fuera singular sería la unión de menos que κ subconjuntos de cardinalidad menor a κ, es decir, existirían $\gamma < \kappa$ y una colección $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ tales que $\kappa = \bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ y $|X_\alpha| < \kappa$ para todo α. Por la Proposición 3.2, esto implica que $\mu(X_\alpha) = 0$ para todo $\alpha < \gamma$ y, como μ es κ-subaditiva, $\mu(\kappa) \leq \sum_{\alpha<\kappa} \mu(X_\alpha) = 0$, lo cual es una contradicción a la condición (a) de la definición de medida. $\square$

El siguiente concepto nos permitirá entablar una de las propiedades más importantes de los cardinales de medida real.

Definición 3.12 *Sea κ un cardinal no numerable. Decimos que κ es* ***débilmente inaccesible*** *si y sólo si es regular y es un cardinal límite.*

[5] Véanse los Teoremas A.51 y A.54 en el Apéndice A.

Obsérvese que si nos limitamos a pedir que un cardinal infinito sea regular y cardinal límite para decir que es débilmente inaccesible, entonces $\aleph_0$ cumpliría con esta definición. De hecho, resulta que al pedir que un cardinal débilmente inaccesible sea estrictamente mayor que $\aleph_0$, estos cardinales resultan tan "inalcanzables" para los que son menores a él, como $\aleph_0$ resulta imposible de construir *sin el Axioma de Infinito* a partir de los números naturales. Esta analogía se puede establecer formalmente como que no es posible probar desde ZFE la existencia de cardinales débilmente inaccesibles.[6] Es por esto que los débilmente inaccesibles son considerados *cardinales grandes*. Por otra parte, dada la similitud que existe entre la imposibilidad de construir cardinales débilmente inaccesibles a partir de ZFE y la imposibilidad de construir a $\aleph_0$ sin el Axioma de Infinito, para muchos teórico conjuntistas resulta natural pensar que debemos agregar axiomas a ZFE que nos permitan estar en un mundo en el que existen los cardinales débilmente inaccesibles.

Estas nociones no eran conocidas en la época en la que Banach se encontraba trabajando en el Problema de la Medida y de hecho él demostró que suponiendo la Hipótesis Generalizada del Continuo, todo cardinal de medida real es débilmente inaccesible. Sin embargo, en 1930 Ulam probó este mismo resultado sin utilizar dicha hipótesis. Nuestro propósito ahora es exhibir su demostración, que estará basada en un argumento combinatorio utilizando matrices de conjuntos, por lo que para simplificar la prueba, definiremos qué tipo de objetos representan estas matrices.

Definición 3.13 *Dados un cardinal κ y un cardinal λ, decimos que una coleción*

$$\{A_{\alpha,\beta} : \alpha < \kappa,\ \beta < \lambda\}$$

*de subconjuntos de κ es una (κ, λ)-**matriz de Ulam** si y sólo si satisface las siguientes condiciones:*

(i) Si $\alpha \neq \gamma$, entonces $A_{\alpha,\beta} \cap A_{\gamma,\beta} = \emptyset$ para todo $\beta < \lambda$; y

(ii) para cada $\alpha < \kappa$, $|\kappa - \bigcup_{\eta<\lambda} A_{\alpha,\eta}| \leq \lambda$.

El siguiente resultado es una generalización de lo demostrado por Banach y Kuratowski respecto a la relación entre el Problema de la Medida y la Hipótesis del Continuo.[7] Sin embargo, aquí lo enunciamos para exhibir el camino que siguió Ulam al demostrar que los cardinales de medida real son débilmente inaccesibles.

Lema 3.14 *No existe una medida σ-aditiva para $\aleph_1$. Más aún, no existe un ideal σ-completo y σ-saturado sobre $\aleph_1$.*

Demostración. El primer paso será demostrar que existe una $(\aleph_1, \aleph_0)$-matriz de Ulam de subconjuntos de $\aleph_1$. Dicha matriz se verá de la forma

$$\{A_{\alpha,n} : \alpha \in \omega_1, n \in \omega\}.$$

[6] La prueba de este resultado se puede consultar en el libro [Kun80] pág. 177.
[7] Véase el Teorema 2.6.

Sabemos que para cada $\xi < \omega_1$ existe una función f_ξ cuyo dominio es ω y tal que $\xi \subseteq ran f_\xi$. Recurriendo al Axioma de Elección, elijamos una f_ξ para cada ξ y definamos para cada $\alpha < \omega_1$ y cada $n \in \omega$ al conjunto

$$A_{\alpha,n} := \{\xi < \omega_1 : f_\xi(n) = \alpha\}.$$

Afirmamos que este arreglo de subconjuntos de ω_1 es una $(\aleph_1, \aleph_0)$-matriz de Ulam. En efecto, si existe $\xi \in A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n}$, entonces $f_\xi(n) = \alpha$ y $f_\xi(n) = \beta$ y, por lo tanto, si $\alpha \neq \beta$, entonces $A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n} = \emptyset$.

Por otro lado, para cada $\alpha < \omega_1$, el conjunto $\omega_1 - \bigcup_{n\in\omega} A_{\alpha,n}$ es a lo más numerable, pues está contenido en el conjunto $\alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$, ya que si $\xi \notin A_{\alpha,n}$ para todo $n \in \omega$, entonces $\alpha \notin ran f_\xi$ y, por lo tanto, $\xi \leq \alpha$.

Así, para demostrar el teorema, supongamos que existe una medida μ para $\aleph_1$.

La primera afirmación que podemos hacer es que para cada $\alpha < \omega_1$ existe $n_\alpha \in \omega$ tal que $\mu(A_{\alpha,n_\alpha}) > 0$, pues de lo contrario, $\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} A_{\alpha,n}\right) = 0$ y, como $\omega_1 - \bigcup_{n\in\omega} A_{\alpha,n}$ es numerable, $\mu\left(\omega_1 - \bigcup_{n\in\omega} A_{\alpha,n}\right) = 0$. Así, como $\omega_1 = \left(\bigcup_{n\in\omega} A_{\alpha,n}\right) \cup \left(\omega_1 - \bigcup_{n\in\omega} A_{\alpha,n}\right)$, $\mu(\omega_1) = 0$, contradiciendo el hecho de que μ es una medida.

Ahora, como hay una cantidad no numerable de $\alpha < \omega_1$ y sólo una cantidad numerable de $n \in \omega$, existe $N \in \omega$ tal que el conjunto $\{\alpha < \omega_1 : n_\alpha = N\}$ es no numerable. Intuitivamente, N nos señala una columna de la matriz en la que hay una cantidad no numerable de conjuntos de medida positiva. Así, sea

$$\mathcal{S} := \{A_{\alpha,N} : n_\alpha = N\}.$$

Por la propiedad (i) de las matrices de Ulam, $\mathcal{S}$ es una colección de subconjuntos disjuntos de ω_1. Además, $\mathcal{S}$ es no numerable y $\mu(A_{\alpha,n}) > 0$ para todo $A_{\alpha,n} \in \mathcal{S}$, pero esto es una contradicción a la Proposición 2.15, de manera que no existe una medida para $\aleph_1$.

Para ver que no hay ningún ideal σ-completo y σ-saturado sobre $\aleph_1$, sólo hay que hacer la observación de que en la prueba anterior, lo único que utilizamos fue el hecho de que el ideal I_μ de subconjuntos nulos de ω_1 es σ-completo y σ-saturado, por lo que la misma demostración nos proporciona este resultado más general. □

Una ligera modificación a la prueba del lema anterior nos lleva a demostrar el siguiente resultado que nos permitirá finalmente concluir que todo cardinal de medida real es débilmente inaccesible.

Lema 3.15 *Si κ es un cardinal sucesor infinito, entonces no hay un ideal κ-completo y σ-saturado sobre κ.*

Demostración. Supongamos que existe un cardinal λ tal que $\kappa = \lambda^+$. De manera análoga al lema anterior, para cada $\xi < \lambda^+$ elijamos una función f_ξ definida sobre λ y tal que $\xi \subseteq ran(f_\xi)$. Por otra parte, para cada $\alpha < \lambda^+$ y cada $\eta < \lambda$, sea

$$A_{\alpha,\eta} := \{\xi < \lambda^+ : f_\xi(\eta) = \alpha\}.$$

La colección $\{A_{\alpha,\eta\,:\,\alpha<\lambda^+,\eta<\lambda}\}$ es una (λ^+, λ)-matriz de Ulam y la prueba es totalmente análoga a la que hicimos en el Lema 3.14, de manera que se cumplen las siguientes propiedades:

(i) Si $\alpha \neq \beta$, entonces $A_{\alpha,\eta} \cap A_{\beta,\eta} = \emptyset$ para todo $\eta < \lambda$.

(ii) Para cada $\alpha < \lambda^+$, $|\lambda^+ - \bigcup_{\eta<\lambda} A_{\alpha,\eta}| \leq \lambda$.

Supongamos ahora que I es un ideal κ-completo y σ-saturado sobre κ. Para llegar a una contradicción, utilizaremos argumentos muy similares a los de la prueba del Lema 3.14, siguiendo la idea de que un ideal consta de los subconjuntos "pequeños" de un conjunto dado.

Afirmamos que para cada $\alpha < \lambda^+$, existe $\eta_\alpha < \lambda$ tal que $A_{\alpha,\eta_\alpha} \notin I$. Para ver esto, supongamos la afirmación contraria, es decir, supongamos que $\alpha < \lambda^+$ es tal que $\{A_{\alpha,\eta} : \eta < \lambda\}$ es una colección de λ subconjuntos que están en el ideal. Como $\lambda < \kappa$ e I es κ-completo, esto implica que

$$\bigcup_{\eta<\lambda} A_{\alpha,\eta} \in I. \tag{3.2}$$

Por otra parte, la propiedad (ii) de las matrices de Ulam nos dice que $\left|\kappa - \bigcup_{\eta<\lambda} A_{\alpha,\eta}\right| \leq \lambda < \kappa$, así que, usando nuevamente el hecho de que I es κ-completo y que $\{x\} \in I$ para todo $x \in \kappa - \bigcup_{\eta<\lambda} A_{\alpha,\eta}$, podemos concluir que

$$\kappa - \bigcup_{\eta<\lambda} A_{\alpha,\eta} \in I. \tag{3.3}$$

Así, como I es un ideal, de las expresiones (3.2) y (3.3) se sigue que

$$\kappa = \bigcup_{\eta<\lambda} A_{\alpha,\eta} \cup \left(\kappa - \bigcup_{\eta<\lambda} A_{\alpha,\eta}\right) \in I,$$

lo cual es una contradicción a la definición de ideal. Esto concluye la prueba de que para todo $\alpha < \lambda^+$, existe $\eta_\alpha < \lambda$ tal que $A_{\alpha,\eta_\alpha} \notin I$.

Por otra parte, como $\lambda < \lambda^+ = \kappa$, existe $\vartheta < \lambda$ tal que el conjunto $\{\alpha < \kappa : \eta_\alpha = \vartheta\}$ tiene cardinalidad κ. De esta forma, ϑ nos señala una columna en la matriz de Ulam en la que hay κ conjuntos que no están en el ideal. Así, podemos definir una colección $\mathcal{S}$ de conjuntos en la columna ϑ que no están en I. De manera concreta, definimos

$$\mathcal{S} := \{A_{\alpha,\vartheta} : \eta_\alpha = \vartheta\}.$$

De este modo, la propiedad (i) de la (λ^+, λ)-matriz de Ulam que hemos construido, nos dice que $\mathcal{S}$ es una colección de λ^+ conjuntos disjuntos que no están en el ideal. Sin embargo, esto contradice el hecho de que I es σ-saturado, pues como λ es infinito, $\lambda^+ \geq \aleph_1$.

Esto conluye la demostración de que si κ es un cardinal sucesor infinito, entonces no hay un ideal κ-completo y σ-saturado sobre κ. □

Concluimos esta sección con un resultado de Ulam, que resulta muy significativo pues mediante él queda establecida una de las conexiones más importantes entre el Problema de la Medida y los cardinales grandes.

Teorema 3.16 *Todo cardinal de medida real es débilmente inaccesible.*

Demostración. Sea κ un cardinal tal que μ es una medida real para κ. Entonces, por las Proposiciones 2.15 y 2.17, si I_μ es el ideal de conjuntos nulos de μ, I_μ es κ-completo y σ-saturado.

Por un lado, esto implica que κ es no numerable, pues todo subconjunto de cardinalidad menor a κ tiene medida cero. Por otra parte, la Proposición 3.11 nos dice que κ es un cardinal regular.

Finalmente, κ es un cardinal límite pues, por el Lema 3.15, si κ fuera un cardinal sucesor, entonces no habría un ideal κ-completo y σ-saturado sobre κ, pero ya hemos dicho que I_μ sí lo es. Por lo tanto, κ es débilmente inaccesible. □

El teorema anterior nos permite argumentar, sin usar la independencia de la Hipótesis del Continuo y el Teorema 2.6, que dado que no es posible demostrar desde ZFE que existen los cardinales débilmente inaccesibles, tampoco se puede probar, a partir de los axiomas usuales, que existen cardinales de medida real. En particular, esto implica que es imposible construir una extensión de la Medida de Lebesgue a todo $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, aún si eliminamos la condición de la invariancia bajo traslaciones. No obstante, en la siguiente sección exhibiremos un resultado de Ulam que surgió antes de que se conocieran estas propiedades acerca de los cardinales inaccesibles, y que proporciona condiciones bajo las que sería posible extender la Medida de Lebesgue *si aceptamos como verdadero el hecho de que exista una medida para algún conjunto S arbitrario.*

3.2. La Dicotomía de Ulam

Además del resultado que acabamos de demostrar en la sección anterior, una de las aportaciones fundamentales que hizo Ulam en torno al Problema de la Medida en su tesis doctoral fue un teorema cuya demostración será uno de los objetivos principales de esta sección. A grandes rasgos, dicho resultado establece que si existe una medida σ-aditiva para un conjunto arbitrario S, entonces o bien es posible construir una medida no invariante bajo traslaciones que extienda a la de Lebesgue, o bien existe otra especie de cardinales que serán llamados *fuertemente inaccesibles* y cuya existencia implica la de los cardinales débilmente inaccesibles. Como hemos mencionado, esto tiene implicaciones muy fuertes y devastadoras para el Problema de la Medida, pues significa que no es posible construir, desde ZFE, un conjunto para el que se pueda definir una medida. Sin embargo, en el área de la Teoría de Conjuntos, esto resulta particularmente interesante pues, aunque no se pueda demostrar la existencia de los cardinales fuertemente inaccesibles, a partir de ellos surgen elementos muy interesantes dentro de la Teoría de Conjuntos.

Para nosotros el principal objetivo ahora será demostrar el Teorema de Ulam. Sin embargo, en el camino para lograrlo estudiaremos conceptos y resultados que han cobrado importancia por sí mismos, como la noción de filtro de la que hablaremos a continuación.

3.2.1. Filtros y ultrafiltros

En esta sección presentaremos una de las herramientas fundamentales que fueron utilizadas por Ulam para estudiar el Problema de la Medida y que se refiere a la noción de filtro. Cabe destacar que muchos de los conceptos y resultados que presentaremos ahora no sólo surgieron a partir del Problema de la Medida, sino que se convirtieron en herramientas de gran utilidad para muchos otros temas más allá de la Teoría de Conjuntos.

Definición 3.17 *Sea S un conjunto no vacío. Decimos que F es un* ***filtro*** *sobre S si y sólo si F es una colección de subconjuntos de S tal que:*

(a) $\emptyset \notin F$ y $S \in F$;

(b) si $X \in F$ y $Y \in F$, entonces $X \cap Y \in F$; y

(c) si $X \in F$ y $X \subseteq Y \subseteq S$, entonces $Y \in F$.

Los conceptos de filtro y de ideal están íntimamente ligados debido a que si F es un filtro sobre un conjunto S, entonces el conjunto

$$I := \{S - X : X \in F\}$$

es un ideal sobre S. Recíprocamente, si I es un ideal sobre un conjunto S, entonces

$$F := \{S - X : X \in I\}$$

es un filtro sobre S. En estos casos, el filtro y el ideal definidos anteriormente son llamados *duales* el uno respecto al otro. Esta dualidad permitirá que los ejemplos y definiciones alrededor de los filtros resulten muy familiares.

Un ejemplo trivial de un filtro sobre un conjunto S es el conjunto $\{S\}$, que claramente satisface la definición anterior y además está contenido en cualquier otro filtro sobre S.

Por otra parte, dado un subconjunto no vacío A de un conjunto S, el conjunto

$$F_A := \{X \subseteq S : A \subseteq X\}$$

es un filtro sobre S. Esta afirmación es sencilla de verificar y nos permite establecer el siguiente concepto que estará íntimamente relacionado con la condición de no trivialidad de una medida.

Definición 3.18 *Sea A un subconjunto no vacío de un conjunto S y sea $F_A := \{X \subseteq S : A \subseteq X\}$. Entonces F_A es llamado el* ***filtro principal sobre S generado por*** *A.*

Un caso particular de la definición anterior es cuando $A = \{a\}$ para algún $a \in S$. En este caso, el filtro principal generado por A resulta ser el conjunto

$$F_{\{a\}} = \{X \subseteq S : a \in X\}.$$

Este filtro tiene la peculiaridad de que es maximal con respecto a la propiedad de ser filtro, es decir, no hay ningún filtro F' sobre S tal que $F_{\{a\}} \subsetneq F'$. Esto se debe a que si hubiera $X \in F' - F_{\{a\}}$, entonces $a \notin X$, pero, como $\{a\} \in F'$, esto implicaría que $\emptyset = X \cap \{a\} \in F_{\{a\}}$, contradiciendo la condición (a) de la Definición 3.17.

A continación definiremos una clase muy particular de filtros en los que estará basada gran parte de la investigación en torno al Teorema de Ulam del que hablamos al inicio de esta sección.

Definición 3.19 *Sea U un filtro sobre un conjunto S. Decimos que U es un **ultrafiltro** sobre S si y sólo si es maximal respecto a la propiedad de ser filtro, es decir, si para cualquier filtro F sobre S, $U \subseteq F$ sólo si $U = F$.*

Una de las caracterizaciones más importantes que podemos dar para los ultrafiltros es que coinciden precisamente con los filtros que si no tienen a algún conjunto, entonces tienen a su complemento. A continuación demostraremos este resultado que tiene muchas implicaciones en el estudio de los ultrafiltros.

Teorema 3.20 *Sea U un filtro sobre un conjunto S. Entonces U es un ultrafiltro si y sólo si para todo $X \subseteq S$ se tiene que $X \in U$ ó $S - X \in U$.*

Demostración. Sea S un conjunto y sea U un filtro sobre S. Razonando por contrapositiva, supongamos primero que U es un filtro sobre S para el cual existe $X \subseteq S$ tal que $X \notin U$ y $S - X \notin U$. Veamos que en este caso U no es un ultrafiltro. Para ello, sea $F := U \cup \{X\}$ y sea

$$G := \{Y \subseteq S : \exists n \in \omega \text{ y } \exists X_0, X_1, ..., X_n \in F(X_0 \cap \cdots \cap X_n \subseteq Y)\}.$$

Obsérvese que $U \subseteq F \subseteq G$. A continuación demostraremos que G es un filtro sobre S. De hecho, podemos pensar a G como el filtro *generado* por la colección de conjuntos en F.

(a) Por un lado, como U es filtro, $S \in U$ y, por tanto, $S \in G$. Veamos ahora que $\emptyset \notin G$. Esto es así pues, de lo contrario, existirían $X_0, X_1, ..., X_n \in F$ tales que $X_0 \cap \cdots \cap X_n = \emptyset$ y, como U es un filtro, esto implicaría que $X_i = X$ para algún $0 \leq i \leq n$. Sin perder generalidad, supongamos que $X_n = X$ y que $X_0, ..., X_{n-1} \in U$. Sea $A := X_0 \cap \cdots \cap X_{n-1}$. Entonces $A \subseteq S - X$ y utilizando nuevamente que U es un filtro, tenemos que $S - X \in U$, contradiciendo nuestra suposición, por lo que efectivamente podemos concluir que $\emptyset \notin G$.

(b) Demostremos ahora que si $A, B \in G$, entonces $A \cap B \in G$. Así pues, sean A y B subconjuntos de S tales que existen $X_0, X_1, ...X_n \in F$ y $Y_0, Y_1..., Y_m \in F$ con la propiedad de que $X_0 \cap \cdots \cap X_n \subseteq A$ y $Y_0 \cap \cdots \cap Y_m \subseteq B$. Esto significa que $X_0 \cap \cdots \cap X_n \cap Y_0 \cdots \cap Y_m \subseteq A \cap B$, con $X_0, ..., X_n, Y_0, ..., Y_m \in F$, por lo que podemos decir que $A \cap B \in G$.

(c) Finalmente, si $A \in G$ y $A \subseteq B \subseteq S$, entonces existen $X_0, X_1, ..., X_n \in F$ tales que $X_0 \cap \cdots \cap X_n \subseteq A \subseteq B$, de modo que $B \in G$ por definición.

Hasta aquí hemos demostrado que G es un filtro tal que $U \subseteq G$. Además, como $X \in F - U$ y $F \subseteq G$, esto implica que $U \subsetneq G$ y, por lo tanto, U no es un ultrafiltro.

Así, efectivamente si U es un ultrafiltro sobre S y X es cualquier conjunto tal que $X \notin U$, entonces $S - X \in U$.

Recíprocamente, supongamos que U es un filtro con la propiedad de que para todo $X \subseteq S$, se tiene que $X \in U$ ó $S - X \in U$. Veamos que U es un ultrafiltro. Así, sea F un filtro sobre S tal que $U \subseteq F$. Con el objetivo de demostrar que $F \subseteq U$, tomemos $X \in F$ un conjunto arbitrario. Como $X \subseteq S$, por hipótesis tenemos que $X \in U$ ó $S - X \in U$. Sin embargo, si ocurriera que $S - X \in U$, entonces $S - X \in F$ y, como F es filtro, $\emptyset = X \cap (S - X) \in F$, contradiciendo la condición (a) de la definición de filtro. De este modo, $X \in U$ y, por tanto, $F = U$, como queríamos demostrar. $\Box$

Uno de los resultados más importantes que surgieron en torno a los ultrafiltros a raíz del Problema de la Medida es el siguiente teorema, que fue demostrado por Tarski en 1930 cuando intentaba encontrar un cardinal para el que se pudiera definir una medida. Paradójicamente, la demostración de Tarski hace un fuerte uso del Lema de Zorn, un enunciado equivalente al Axioma de Elección que tanta turbulencia causó desde el inicio en el Problema de la Medida de Lebesgue.[8]

Teorema 3.21 (Tarski) *Sea S un conjunto arbitrario. Entonces para todo filtro F_0 sobre S existe un ultrafiltro U sobre S tal que $F_0 \subseteq U$, es decir, todo filtro sobre S puede ser extendido a un ultrafiltro.*

Demostración. Sea F_0 un filtro sobre el conjunto S. Utilizaremos el Lema de Zorn para encontrar un filtro maximal U tal que $F_0 \subseteq U$. Con este objetivo en mente, definamos al conjunto P como la colección

$$P := \{F \subseteq \mathcal{P}(S) : F_0 \subseteq F \text{ y } F \text{ es un filtro sobre S }\}.$$

Ahora, sea $C \subseteq P$ una cadena no vacía de filtros en P y veamos que $\bigcup C$ es un filtro sobre S.

(a) Por un lado, como $C \neq \emptyset$, existe $F \in C$ y, como F es un filtro sobre S, $S \in F$ y, por lo tanto, $S \in \bigcup C$. Además, $\emptyset \notin \bigcup C$, ya que de lo contrario existiría $F \in C$ tal que $\emptyset \in C$, contradiciendo la definición de filtro.

(b) Por otra parte, si $X, Y \in \bigcup C$, entonces existen $F, H \in C$ tales que $X \in F$ y $Y \in H$. Además, como C es una cadena, necesariamente ocurre que $F \subseteq H$ ó $H \subseteq F$. Supongamos, sin perder generalidad, que $H \subseteq F$, de donde $X, Y \in F$. Como F es filtro, $X \cap Y \in F$ y entonces $X \cap Y \in \bigcup C$, satisfaciendo así la segunda condición de filtro.

(c) Finalmente, si X y Y son tales que $X \in \bigcup C$ y $X \subseteq Y \subseteq S$, entonces existe $F \in C$ tal que $X \in F$ y, por lo tanto, como F es filtro, también tenemos que $Y \in F$. Así, $Y \in \bigcup C$.

[8] El Lema de Zorn establece que, si $(A, <)$ es un orden parcial no vacío tal que toda cadena $C \subseteq A$ está acotada superiormente en A, entonces existe un elemento $m \in A$ que es $<$-maximal en $(A, <)$. El lector puede consultar las definiciones correspondientes a orden parcial y cadena, en la Sección A.1 del Apéndice A. Asimismo, la prueba de que el Lema de Zorn es equivalente al Axioma de Elección puede encontrarse en [Amo08] págs. 98-102.

Esto demuestra que $\bigcup C$ es un filtro sobre S y, por lo tanto, es una cota superior para C bajo la relación $\subseteq$. Como C fue una cadena arbitraria en P, por el Lema de Zorn podemos decir que $(P, \subseteq)$ tiene un elemento maximal, digamos U. Esto implica que $F_0 \subseteq U$. Además, U resulta ser un filtro maximal, pues si G es un filtro tal que $U \subseteq G$, entonces $G \in P$ y, por lo tanto, $U = G$. De esta forma, U es un ultrafiltro que extiende a F_0, con lo que queda concluida la demostración. □

El teorema anterior tiene múltiples aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas como la Teoría de Conjuntos y la Topología, pues la maximalidad de un ultrafiltro es una propiedad que representa muchas ventajas. Para el estudio de las medidas definidas sobre cardinales, los ultrafiltros cobran especial importancia que será revelada en la siguiente sección, donde veremos que la existencia de una medida con ciertas características es equivalente a la existencia de un ultrafiltro con propiedades muy particulares. Por esto resulta natural entender la motivación de Tarski para extender los filtros, que siempre podemos definir sobre un conjunto, a ultrafiltros que se acercaran a resolver el Problema de la Medida.

El siguiente resultado nos muestra una propiedad bastante útil que aparece en los ultrafiltros.

Proposición 3.22 *Sea U un ultrafiltro sobre un conjunto S y sean $X, Y \subseteq S$ tales que $X \cup Y \in U$. Entonces $X \in U$ ó $Y \in U$.*

Demostración. Sean X y Y subconjuntos de S. Por contrapositiva, supongamos que $X \notin U$ y $Y \notin U$. Entonces, como U es ultrafiltro, por el Teorema 3.20 tenemos que $S - X \in U$ y $S - Y \in U$. Así, por la propiedad (b) de la Definición 3.17, tenemos que $S - (X \cup Y) = (S - X) \cap (S - Y) \in U$, de modo que $X \cup Y \notin U$, como queríamos demostrar. □

Otra característica importante que podemos resaltar de los ultrafiltros en relación a los filtros principales queda asentada en el siguiente resultado.

Proposición 3.23 *Sea U un ultrafiltro sobre un conjunto S. Entonces U es un filtro principal si y sólo si existe $a \in S$ tal que $\{a\} \in U$.*

Demostración. Sea U un ultrafiltro sobre un conjunto S. Supongamos primero que U es un filtro principal. Esto implica que existe $A \subseteq S$ tal que

$$U = \{X \subseteq S : A \subseteq X\}.$$

Además, como $A \in U$ y U es un filtro, $A \neq \emptyset$, así que podemos tomar $a \in A$. Obsérvese que

$$U = \{X \subseteq S : A \subseteq X\} \subseteq \{X \subseteq S : a \in X\}.$$

Como $\{X \subseteq S : a \in X\}$ es un filtro sobre S y U es un filtro maximal, $U = \{X \subseteq S : a \in X\}$, que es lo que queríamos demostrar.

Recíprocamente, si existe $a \in S$ tal que $\{a\} \in U$, como U es un filtro, sabemos que para cualquier X tal que $\{a\} \subseteq X$ tendremos que $X \in U$, de manera que $\{X \subseteq S : a \in X\} \subseteq U$. Por otra parte, si Y es un conjunto arbitrario en U, como $\{a\} \in U$ y U es filtro, $Y \cap \{a\} \neq \emptyset$, es decir, $a \in Y$. De aquí se sigue que $U \subseteq \{X \subseteq S : a \in X\}$. Las dos contenciones anteriores nos dicen que $U = \{X \subseteq S : a \in X\}$, de modo que U es un filtro principal, como queríamos demostrar. $\square$

La siguiente definición, como su nombre lo indica, estará relacionada con la condición de σ-aditividad que hemos puesto en la definición de medida.

Definición 3.24 *Sea F un filtro sobre un conjunto S. Decimos que F es **σ-completo** si y sólo si para cualquier familia a lo más numerable $\{X_n : n \in \omega\}$ de conjuntos en F se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} X_n \in F$, es decir, si F es cerrado bajo intersecciones finitas y numerables.*

El desarrollo logrado por Ulam en el Problema de la Medida estaba basado principalmente en los fundamentos que Banach había sembrado pocos meses antes, de modo que para Ulam también resultó importante hablar de aquella noción de κ-aditividad que definimos en el capítulo anterior. La siguiente definición tendrá como objetivo relacionar este concepto con el de ultrafiltro.

Definición 3.25 *Sea F un filtro sobre un conjunto S y sea κ un cardinal no numerable. Decimos que F es **κ-completo** si y sólo si para todo $\gamma < \kappa$ y para cualquier familia $\{X_\alpha : \alpha \in \gamma\}$ de conjuntos en F, se tiene que $\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in F$, es decir, si F es cerrado bajo intersecciones de cardinalidad menor a κ.*

Al igual que ocurre con la κ-aditividad, podemos notar que bajo la definición anterior ser un filtro σ-completo es equivalente a ser $\aleph_1$-completo.

El siguiente resultado nos permite vislumbrar el significado de la κ-completitud en ultrafiltros y nos será de gran utilidad más adelante.

Proposición 3.26 *Sea U un ultrafiltro sobre un conjunto S. Entonces U es κ-completo si y sólo si para todo $\gamma < \kappa$ y para toda partición $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ de S, existe $\alpha < \gamma$ tal que $X_\alpha \in U$.*

Demostración. Razonando por contradicción, supongamos que U es un ultrafiltro κ-completo sobre S y que existen $\gamma < \kappa$ y $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ una partición de S tales que para todo $\alpha < \gamma$, se tiene que $X_\alpha \notin U$. Como U es ultrafiltro, por el Teorema 3.20 tenemos que para todo $\alpha < \gamma$, $S - X_\alpha \in U$ y, como U es κ-completo,

$$\emptyset = S - \left(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha<\gamma} (S - X_\alpha) \in U,$$

pero esto contradice a la condición (a) de la definición de filtro.

Demostraremos la otra implicación por contrapositiva. Supongamos que existen $\gamma < \kappa$ y $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ una colección de conjuntos tales que para todo $\alpha < \gamma$, $X_\alpha \in U$ y, sin embargo, $\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha \notin U$. Nótese que, como U es ultrafiltro, el Teorema 3.20 implica que

$$\bigcup_{\alpha<\gamma} (S - X_\alpha) = S - \left(\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha\right) \in U.$$

Construiremos una partición de S de cardinalidad menor o igual a γ cuyos elementos no estén en U, con lo que habremos concluido la demostración. Para ello, definamos

$$\begin{aligned} Y_0 &:= S - X_0 \\ Y_\alpha &:= (S - X_\alpha) - \bigcup_{\delta<\alpha} (S - X_\delta), \text{ para cada } 0 < \alpha < \gamma. \end{aligned}$$

Para construir la partición de S, eliminaremos a aquellos $S - X_\alpha$ que sean vacíos y tomaremos el complemento de su unión, es decir, consideraremos al conjunto $\left(\{Y_\alpha : \alpha < \gamma\} \cup \left\{S - \bigcup_{\alpha<\gamma}(S - X_\alpha)\right\}\right) - \{\emptyset\}$. De este modo, podemos tomar un cardinal $\delta \leq \gamma$ tal que $\{Z_\alpha : \alpha < \delta\}$ es una enumeración de la colección anterior de subconjuntos de S en la que claramente todos sus elementos son no vacíos y además

$$S = \bigcup_{\alpha<\delta} Z_\alpha.$$

Por otra parte, la manera en la que construimos a cada Y_α nos permite asegurar que para cualesquiera $\alpha < \beta < \delta$ se tiene que $Z_\alpha \cap Z_\beta = \emptyset$, de modo que esta colección es efectivamente una partición de S. Finalmente, obsérvese que para cada $\alpha < \delta$, si Z_α es de la forma $S - X_\alpha - \bigcup_{\delta<\alpha}(S - X_\delta)$, entonces $Z_\alpha \subseteq S - X_\alpha \notin U$, así que $Z_\alpha \notin U$, por la condición (c) de la definición de filtro. Por otra parte, si $Z_\alpha = S - \bigcup_{\alpha<\gamma}(S - X_\alpha)$, como $\bigcup_{\alpha<\gamma}(S - X_\alpha) \in U$, entonces $Z_\alpha \notin U$, de modo que para todo $\alpha < \delta$ tenemos que $Z_\alpha \notin U$. Así, hemos construido la partición de S que estábamos buscando. $\square$

Esta proposición establece que si un ultrafiltro es κ-completo sobre un conjunto S, entonces no es posible partir al conjunto en menos que κ subconjuntos sin que alguno de ellos sea “atrapado” por el ultrafiltro.

3.2.2. Medidas con átomos

Ya que hemos introducido la definición de ultrafiltro, podemos empezar a desarrollar los resultados que nos permitirán demostrar el Teorema de Ulam. Dicho resultado surgió a partir de una dicotomía que Ulam planteó para estudiar el Problema de la Medida y que aparece a raíz del concepto que definiremos a continuación.

Definición 3.27 *Dada una medida μ para un conjunto S, decimos que un subconjunto A de S es un* ***átomo*** *de μ si y sólo si $\mu(A) > 0$ y para todo $X \subseteq A$ se tiene que $\mu(X) = 0$ ó $\mu(X) = \mu(A)$.*

A partir de esta definición, Ulam obtuvo resultados muy importantes tanto bajo la suposición de que exista una medida con átomos como bajo la suposición de que exista una medida sin átomos. De aquí que haya surgido la sensación de una dicotomía en el Problema de la Medida que empezaremos a analizar a partir de ahora. Para nosotros el primer paso será estudiar a las medidas que sí tienen átomos y las propiedades que podemos extraer de ellas. Cabe hacer la aclaración de que algunos de los resultados que aquí expondremos fueron desarrollados por

Ulam y Tarski después de la tesis doctoral en la que Ulam profundizó ampliamente sobre las medidas sin átomos. Sin embargo, para los propósitos de este trabajo resulta más conveniente la secuencia que aquí presentaremos, estudiando primero los conceptos y propiedades de las medidas con átomos y posteriormente de las medidas sin átomos.

A continuación expondremos un resultado observado por Ulam, que permitió abordar el Problema de la Medida desde una perspectiva novedosa y muy prolífica de la que hablaremos más adelante.

Proposición 3.28 *Si μ es una medida para un conjunto S y A es un átomo de μ, entonces la función $\nu : \mathcal{P}(S) \longrightarrow [0,1]$ definida como*

$$\nu(X) := \frac{\mu(X \cap A)}{\mu(A)}$$

es una medida con la propiedad de que $ran(\nu) = \{0,1\}$.

Demostración. Lo primero que vale la pena observar es que la función ν está bien definida, pues como A es un átomo, $\mu(A) > 0$. Además, para cualquier $X \subseteq S$ se tiene que $X \cap A \subseteq A$, así que, por el Lema 1.43, $\mu(X \cap A) \leq \mu(A)$ y, por tanto, $\nu(X) \in [0,1]$. A continuación verificaremos que ν es efectivamente una medida para S.

(a) La primera condición de medida se da, pues $\nu(\emptyset) = \frac{\mu(\emptyset \cap A)}{\mu(A)} = 0$ y $\nu(S) = \frac{\mu(S \cap A)}{\mu(A)} = \frac{\mu(A)}{\mu(A)} = 1$.

(b) Para ver la no trivialidad, notemos que dado $x \in S$, tenemos que

$$\begin{aligned} \nu(\{x\}) &= \frac{\mu(\{x\} \cap A)}{\mu(A)} \\ &= \begin{cases} \frac{\mu(\emptyset)}{\mu(A)} & \text{si } x \notin A \\ \frac{\mu(\{x\})}{\mu(A)} & \text{si } x \in A \end{cases} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(c) Por otra parte, ν es σ-aditiva pues, si $\{X_n : n \in \omega\}$ es una colección de subconjuntos de S ajenos por parejas y definimos $Y_n := X_n \cap A$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{Y_n : n \in \omega\}$ también es una sucesión de conjuntos ajenos por parejas, de manera que, por la σ-aditividad de μ, tenemos que

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{n\in\omega} X_n\right) &= \frac{\mu\left(\left(\bigcup_{n\in\omega} X_n\right) \cap A\right)}{\mu(A)} \\ &= \frac{\mu\left(\bigcup_{n\in\omega}(X_n \cap A)\right)}{\mu(A)} \\ &= \sum_{n\in\omega} \frac{\mu(X_n \cap A)}{\mu(A)} \\ &= \sum_{n\in\omega} \nu(X_n). \end{aligned}$$

Lo anterior demuestra que ν es una medida y que $\{0,1\} \subseteq ran(\nu)$. Finalmente, para ver que $ran(\nu) \subseteq \{0,1\}$ sólo tenemos que observar que, como para todo $X \subseteq S$ se tiene que $X \cap A \subseteq A$ y A es un átomo de μ, $\mu(X \cap A) \in \{0, \mu(A)\}$, de manera que $\nu(X) \in \{0,1\}$. $\square$

A partir de esta proposición tiene sentido establecer la siguiente definición.

Definición 3.29 *Sea μ una medida según la Definición 2.1. Decimos que μ es una* ***medida bivaluada*** *si y sólo si $ran(\mu) = \{0,1\}$.*

Las medidas bivaluadas cobran tanta importancia dentro de la investigación que nos atañe, pues permitieron atacar al Problema de la Medida desde un enfoque nuevo dentro de la Teoría de Conjuntos considerando familias de conjuntos tales como los ultrafiltros.

La razón por la que resulta tan importante hablar de ultrafiltros para investigar las propiedades de las medidas con átomos radica en que es equivalente la existencia de una medida bivaluada para un conjunto S a la existencia de un ultrafiltro σ-completo y no principal sobre dicho conjunto. De hecho, Ulam estableció un resultado un poco más general que esto y es el que demostraremos a continuación.

Teorema 3.30 *Sea μ una medida bivaluada y κ-aditiva para un conjunto S y sea*

$$U := \{X \subseteq S : \mu(X) = 1\}.$$

Entonces U es un ultrafiltro κ-completo y no principal sobre S.

Recíprocamente, si U es un ultrafiltro κ-completo y no principal sobre S, entonces la función $\mu : \mathcal{P}(S) \to \{0,1\}$ definida como

$$\mu(X) := \begin{cases} 1 & si\ X \in U \\ 0 & si\ X \notin U \end{cases}$$

es una medida bivaluada y κ-aditiva para S.

Demostración. Supongamos que μ es una medida bivaluada y κ-aditiva para un conjunto S y que U está definido como en el enunciado del teorema. Veamos que U es un filtro sobre S.

(i) De la definición de medida se sigue directamente que $\emptyset \notin U$ y que $S \in U$.

(ii) Por otra parte, si $X \in U$ y $X \subseteq Y$, como por el Lema 1.43 μ es una medida monótona, tenemos que $1 = \mu(X) \leq \mu(Y) \leq 1$, así que $\mu(Y) = 1$ y, por tanto, $Y \in U$.

(iii) Para ver que U es cerrado bajo intersecciones finitas, tomemos X y Y subconjuntos de S tales que $\mu(X) = \mu(Y) = 1$. Entonces, como $X = (X - Y) \cup (X \cap Y)$ y $Y = (Y - X) \cup (X \cap Y)$, si $\mu(X \cap Y) = 0$, tendríamos que $\mu(X - Y) = \mu(Y - X) = 1$ y, por tanto, $\mu(X \cup Y) = \mu(X - Y) + \mu(Y - X) + \mu(X \cap Y) = 2$, contradiciendo el hecho de que $ran(\mu) \subseteq \{0,1\}$. Así, $\mu(X \cap Y) = 1$.

Esto demuestra que U es un filtro sobre S. De esta forma, para ver que es ultrafiltro sólo resta observar que dado $X \subseteq S$, si $X \notin U$, entonces $\mu(X) = 0$ y, por tanto, $1 = \mu(S) = \mu((S - X) \cup X) = \mu(S - X) + \mu(X) = \mu(S - X)$, de manera que $S - X \in U$ y, por el Teorema 3.20, se sigue la afirmación.
Por otra parte, nótese que como μ es una medida no trivial, para todo $a \in S$ se tiene que $\mu(\{a\}) = 0$ y, por tanto, $\{a\} \notin U$. Así, como U es ultrafiltro, la Proposición 3.23 nos permite asegurar que U es no principal.
Finalmente, para ver que U es κ-completo, obsérvese que como la medida es κ-aditiva y $\mu(S) = 1$, no existe una partición de S en una sucesión $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ tal que $\gamma < \kappa$ y $X_\alpha \notin U$ para todo $\alpha < \gamma$, así que la afirmación se sigue de la Proposición 3.26.

Para el recíproco, supongamos que U es un ultrafiltro κ-completo y no principal sobre S y verifiquemos que la función μ definida en el enunciado del teorema es una medida κ-aditiva para S.

(a) Por un lado, como U es un filtro, $\emptyset \notin U$ y $S \in U$, así que $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(X) = 1$.

(b) El hecho de que $\mu(\{a\}) = 0$ para todo $a \in S$ se sigue de que U es un ultrafiltro no principal y de la Proposición 3.23.

(c) Finalmente, si $\gamma < \kappa$ y $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ es una sucesión de subconjuntos de S ajenos dos a dos, tendremos los siguientes casos:

Caso I. Si existe $\alpha < \gamma$ tal que $X_\alpha \in U$, como para todo $\beta \neq \alpha$ se tiene que $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$, para todo $\beta \neq \alpha$ ocurre que $X_\beta \subseteq S - X_\alpha$. Dado que U es un filtro, esto implica que para todo $\beta \neq \alpha$ $X_\beta \notin U$. Así, en este caso, $\mu(X_\alpha) = 1$ y $\mu(X_\beta) = 0$ para todo $\beta \neq \alpha$.

Por otra parte, como $X_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta<\gamma} X_\beta$ y U es un filtro, $\bigcup_{\beta<\gamma} X_\beta \in U$, así que

$$\mu\left(\bigcup_{\beta<\gamma} X_\beta\right) = 1 = \sum_{\beta<\gamma} \mu(X_\beta).$$

Caso II. Si para todo $\alpha < \gamma$ se tiene que $X_\alpha \notin U$, afirmamos que $\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha \notin U$. De lo contrario, como U es filtro, tendríamos que $S - \left(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha\right) \notin U$ y, por lo tanto, aquellos conjuntos en la colección

$$\{X_\alpha : \alpha < \gamma \text{ y } X_\alpha \neq \emptyset\} \cup \left\{S - \bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha\right\}$$

que no sean vacíos, formarían partición de S en a lo más γ subconjuntos tal que ninguno de sus elementos está en U, pero por la Proposición 3.26, esto contradiría el hecho de que U es κ-completo. De lo anterior se sigue que

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha\right) = 0 = \sum_{\alpha<\kappa} \mu(X_\alpha).$$

Lo anterior demuestra que μ es una medida κ-aditiva para S y, por la manera en la que está definida, claramente es bivaluada. □

Una consecuencia del resultado anterior nos permite retomar el concepto de átomo para establecer ahora una relación directa entre las medidas con átomos y los ultrafiltros.

Corolario 3.31 *Si μ es una medida κ-aditiva para un conjunto S y A es un átomo de μ, entonces el conjunto*

$$U := \{X \subseteq S : \mu(X \cap A) = \mu(A)\} \tag{3.4}$$

es un ultrafiltro κ-completo no principal sobre S.

Demostración. La prueba se sigue directamente de que $\frac{\mu(X\cap A)}{\mu(A)} = 1$ si y sólo si $X \in U$ y del Teorema 3.30 y la Proposición 3.28. □

3.2.3. Cardinales medibles

En el contexto en el que nos hemos puesto al estudiar el Problema de la Medida mediante el análisis de los ultrafiltros y sus propiedades, podemos observar que si κ es el mínimo cardinal que admite una medida σ-aditiva no trivial y bivaluada, entonces κ es no numerable y es el mínimo cardinal en el que se puede definir un ultrafiltro σ-completo no principal. De hecho, dicho ultrafiltro resulta ser κ-completo, como veremos en el siguiente lema, que representa un resultado dual al visto en el Corolario 2.20.

Lema 3.32 *Si κ es el mínimo cardinal en el que se puede definir un ultrafiltro U σ-completo y no principal, entonces U es κ-completo.*

Demostración. Sea U como en las hipótesis y supongamos que U no es κ-completo. Entonces existen $\gamma < \kappa$ y una partición $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ de κ tales que $X_\alpha \notin U$ para todo $\alpha < \gamma$. Utilizaremos esta partición para construir un ultrafiltro σ-completo y no principal sobre γ, contradiciendo la minimalidad de κ.
Consideremos la función sobreyectiva $f : \kappa \to \gamma$ dada por

$$f(x) := \alpha \text{ si y sólo si } x \in X_\alpha.$$

En efecto, f está bien definida y es sobreyectiva, pues el conjunto $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ es partición de κ. Ahora, consideremos el conjunto $D \subseteq \mathcal{P}(\gamma)$ definido como

$$D := \{Z \subseteq \gamma : f^{-1}[Z] \in U\}.$$

Demostraremos que D es un ultrafiltro σ-completo y no principal sobre γ.

El hecho de que D es un filtro sobre γ se sigue directamente de que U es filtro y f es función.

Veamos que D es un ultrafiltro. Sea $X \subseteq \gamma$ tal que $\gamma - X \notin D$. Esto implica que $f^{-1}[\gamma - X] \notin U$. Así, como U es ultrafiltro sobre κ, el Teorema 3.20 nos dice que $\kappa - f^{-1}[\gamma - X] \in U$. Además, como f es sobreyectiva, podemos asegurar que

$f^{-1}[X] = \kappa - f^{-1}[\gamma - X]$, de modo que $f^{-1}[X] \in U$ y, por tanto, $X \in D$. Así, nuevamente por el Teorema 3.20, podemos concluir que D es un ultrafiltro sobre γ.

Por otra parte, D es σ-completo pues, si $\{Z_n : n \in \omega\}$ es una colección de conjuntos en D, entonces $\{f^{-1}[Z_n] : n \in \omega\}$ es una colección de conjuntos en U. De esta forma, como U es σ-completo, $f^{-1}\left[\bigcap_{n\in\omega} Z_n\right] = \bigcap_{n\in\omega} f^{-1}[Z_n] \in U$. Esto implica que $\bigcap_{n\in\omega} Z_n \in D$ y, por tanto, D es σ-completo.

Así, sólo resta verificar que D es no principal. Razonando por contradicción, supongamos que D es un ultrafiltro principal. Por la Proposición 3.23, existe $\alpha < \gamma$ tal que $\{\alpha\} \in D$ y, por lo tanto, $X_\alpha \in U$, contradiciendo que $X_\alpha \notin U$ para todo $\alpha < \gamma$. Así, D es un ultrafiltro σ-completo no principal sobre γ, contradiciendo finalmente a la minimalidad de κ. Esto concluye la demostración de que U es κ-completo. □

En términos del Problema de la Medida, el lema anterior nos dice que si existiera un conjunto para el cual pudiéramos definir una medida bivaluada, entonces tomando al mínimo cardinal, digamos κ, para el que se satisficiera esa condición, encontraríamos un ultrafiltro κ-completo y no principal. A partir de esto, en la época de Ulam surgió la pregunta de si era posible encontrar ultrafiltros con tales características. En este tenor podemos enunciar la siguiente definición, que representa uno de los conceptos centrales de este capítulo.

Definición 3.33 *Decimos que un cardinal no numerable κ es* ***medible*** *si y sólo si existe una medida bivaluada y κ-aditiva para κ.*

De la definición anterior en particular se sigue que un cardinal κ es medible si y sólo si existe un ultrafiltro no principal y κ-completo sobre κ, por lo que preguntarnos por la existencia de cardinales medibles es equivalente a preguntarnos por la existencia de ultrafiltros no principales y κ-completos. Además, en este mismo sentido el Lema 3.32 nos dice que el mínimo cardinal para el que se puede definir una medida σ-aditiva y bivaluada es medible.

Dado que claramente los cardinales medibles son un caso particular de los cardinales de medida real, concluimos esta sección con el siguiente corolario que es consecuencia directa de resultados anteriores.

Corolario 3.34 *Si U es un ultrafiltro κ-completo y no principal sobre el cardinal κ, entonces todo conjunto $X \in U$ tiene cardinalidad κ.*

Demostración. Sea U un ultrafiltro κ-completo y no principal sobre el cardinal κ. Sea $X \in U$. Entonces, utilizando la medida μ definida en el Teorema 3.30, tenemos que $\mu(X) = 1 \neq 0$. Así, si suponemos que $|X| < \kappa$, como μ es una medida real para κ, la Proposición 3.2 implica que $\mu(X) = 0$, lo cual es una contradicción. □

3.2.4. Cardinales fuertemente inaccesibles

En el año de 1930, mientras Ulam y Tarski trabajaban en el Problema de la Medida, descubrieron que los cardinales medibles deben ser sorprendentemente grandes. De hecho, resultan inalcanzables bajo las operaciones usuales entre conjuntos que conocemos, como la unión o incluso la de tomar el conjunto potencia, que como bien sabemos por el Teorema de Cantor,[9] ya representa dar un salto relativamente grande en términos de cardinalidad. Este fue el origen de los llamados *cardinales fuertemente inaccesibles*, que se convirtieron en un eslabón muy importante entre el Problema de la Medida y los cardinales grandes.

A continuación introduciremos los conceptos que surgieron paralelamente al trabajo de Ulam y que desembocaron en la definición de cardinal fuertemente inaccesible que fue establecida formalmente por Tarski y Sierpinski.

Definición 3.35 *Sea κ un cardinal infinito. Decimos que κ es un* ***cardinal fuerte*** *si y sólo si para cualquier cardinal $\lambda < \kappa$ se tiene que $2^\lambda < \kappa$.*

Observación 3.36 *De la definición anterior se sigue que si κ es un cardinal fuerte, entonces es un cardinal límite. Esto se debe a que si κ es un cardinal sucesor, entonces existe un cardinal λ tal que $\kappa = \lambda^+$. Luego, como $\lambda < 2^\lambda$,[10] $\lambda^+ \leq 2^\lambda$ y, por tanto, no ocurre que $2^\lambda < \lambda^+ = \kappa$, así que κ no es fuerte.*

Definición 3.37 *Sea κ un cardinal no numerable. Decimos que κ es* ***fuertemente inaccesible*** *si y sólo si es regular y es un cardinal fuerte.*

Observación 3.38 *De la definición anterior es sencillo verificar que si un cardinal es fuertemente inaccesible, entonces es también débilmente inaccesible. Además, bajo la Hipótesis Generalizada del Continuo, todo cardinal débilmente inaccesible es fuertemente inaccesible.*

Las dos definiciones anteriores pueden ser interpretadas si recordamos la relación entre las operaciones cardinales y las operaciones entre conjuntos que motivan su definición pues, por ejemplo, nos dejan claro que los cardinales fuertemente inaccesibles son mucho más grandes que cualquier conjunto potencia de los cardinales menores a él. En el siguiente resultado quedará establecido formalmente que, como su nombre lo indica, los cardinales fuertemente inaccesibles no pueden ser obtenidos mediante las operaciones teórico conjuntistas que utilizamos normalmente.

Teorema 3.39 *Sea κ un cardinal fuertemente inaccesible y sea X un conjunto tal que $|X| < \kappa$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) $|\mathcal{P}(X)| < \kappa$.

(b) Si para todo $Y \in X$ se tiene que $|Y| < \kappa$, entonces $|\bigcup X| < \kappa$.

(c) Si $f : X \to \kappa$ es una función, entonces $\sup(f[X]) < \kappa$.

Demostración.

(a) Esta propiedad se sigue de la definición de cardinal fuertemente inaccesible y del Teorema A.31.

[9] Véase el Teorema A.27 en el Apéndice A.
[10] Véase el Teorema A.50.

(b) Sea $\lambda := |X|$ y sea $\nu := \sup(\{|Y| : Y \in X\})$. Como κ es regular, por el inciso (a) del Teorema 3.8 tenemos que $\nu < \kappa$ y, por lo tanto, $|\bigcup X| \leq \lambda \cdot \nu = \text{máx}\{\lambda, \nu\} < \kappa$.

(c) Esta propiedad es consecuencia del inciso (b) del Teorema 3.8. □

El siguiente teorema es mediante el cual Ulam y Tarski profundizaron en la investigación que buscaba determinar qué tan grandes son los cardinales medibles.

Teorema 3.40 *Todo cardinal medible es fuertemente inaccesible.*

Demostración. Sea κ un cardinal medible. Entonces κ es un cardinal de medida real, así que la Proposición 3.11 nos dice que κ es regular, por lo que sólo falta demostrar que κ es fuerte. Razonando por contradicción, supongamos que existe $\lambda < \kappa$ tal que $2^\lambda \geq \kappa$.

Sea $S \subseteq {}^\lambda\{0,1\}$ tal que $|S| = \kappa$, es decir, S es un conjunto de funciones que van de λ en $\{0,1\}$ de cardinalidad κ. Ahora, como κ es medible y $|S| = \kappa$, podemos tomar un ultrafiltro, digamos U, que sea κ-completo y no principal sobre S. Por otra parte, como U es ultrafiltro, para cada $\alpha < \lambda$ el Teorema 3.20 nos dice que, o bien $\{f \in S : f(\alpha) = 0\} \in U$, o bien $\{f \in S : f(\alpha) = 1\} \in U$. Así, para cada $\alpha < \lambda$, podemos definir a un conjunto X_α de manera que

$$X_\alpha := \begin{cases} \{f \in S : f(\alpha) = 0\} & \text{si } \{f \in S : f(\alpha) = 0\} \in U \\ \{f \in S : f(\alpha) = 1\} & \text{si } \{f \in S : f(\alpha) = 1\} \in U. \end{cases}$$

De igual forma, definamos

$$\varepsilon_\alpha := \begin{cases} 0 & \text{si } \{f \in S : f(\alpha) = 0\} \in U \\ 1 & \text{si } \{f \in S : f(\alpha) = 1\} \in U. \end{cases}$$

Nótese que como U es κ-completo, el conjunto $X := \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in U$. Por otra parte, dada $F \in X$ se tiene que $F \in X_\alpha$ para todo $\alpha < \lambda$. De aquí que $F \in \{f \in S : f(\alpha) = \varepsilon_\alpha\}$ para todo $\alpha < \lambda$. Por lo tanto, X tiene a lo más un elemento, a saber, la función $f : \lambda \to \{0,1\}$ tal que para cada $\alpha < \lambda$, $f(\alpha) = \varepsilon_\alpha$. Así, haciendo uso de la Proposición 3.23, podemos concluir que U es un ultrafiltro principal, contradiciendo nuestra suposición. □

El estudio de los cardinales medibles siguió dando muchos frutos dentro de la Teoría de Conjuntos y en particular en la investigación en torno a los cardinales grandes. Sin embargo, por ahora retomaremos la dicotomía en la que Ulam puso al Problema de la Medida y pospondremos un estudio más profundo de los cardinales medibles hasta el siguiente capítulo.

3.2.5. Medidas sin átomos

En esta sección nos enfocaremos a determinar qué consecuencias tiene para el Problema de la Medida la existencia de una medida sin átomos.

En el capítulo anterior hablamos de la manera en la que los subconjuntos nulos de un conjunto respecto a una medida dada forman un ideal y definimos conceptos como el de ideal κ-completo que nos permitieron estudiar las propiedades de estos ideales con mayor facilidad. En esta sección profundizaremos en el estudio de este tipo de ideales.

Para los resultados subsecuentes será necesaria la siguiente definición de carácter combinatorio y que se refiere a ciertos objetos matemáticos a los que llamamos *árboles*. En lo que resta de este trabajo podremos constatar cómo esta herramienta ha permitido ver a los problemas desde enfoques totalmente distintos a los que hemos manejado anteriormente, por lo que su uso ha cobrado gran importancia dentro de las matemáticas.

Definición 3.41 *Sean T un conjunto y $<$ una relación binaria sobre T. Decimos que $(T, <)$ es un* ***árbol*** *si y sólo si $(T, <)$ es un orden parcial tal que para todo $x \in T$, el conjunto $\bar{x} := \{y \in T : y < x\}$ es un buen orden con la relación $<$.*

Dado un árbol T, podemos utilizar sus propiedades para definir los siguientes conceptos.

Definición 3.42 *Sea $(T, <)$ un árbol.*

(i) Para cada $x \in T$, la ***altura*** *$h(x)$ de x es el tipo de orden de $\bar{x}$,*[11] *de modo que $h(x) := \sup(\{h(y) + 1 : y < x\})$.*

(ii) Para cada ordinal α, el ***nivel*** *α de T es el conjunto $T_\alpha := \{x \in T : h(x) = \alpha\}$.*

(iii) Para un subconjunto $X \subseteq T$, definimos la ***altura*** *de X como*

$$h(X) := \sup(\{h(x) : x \in X\}).$$

En particular, $h(T)$ es la altura del árbol T.

(iv) Sea $b \subseteq T$. Decimos que b es una ***rama*** *de T si y sólo si $(b, <\restriction_b)$ es un orden lineal maximal en T. Asimismo, definimos la* ***longitud*** *de b como el tipo de orden de $(b, <\restriction_b)$.*

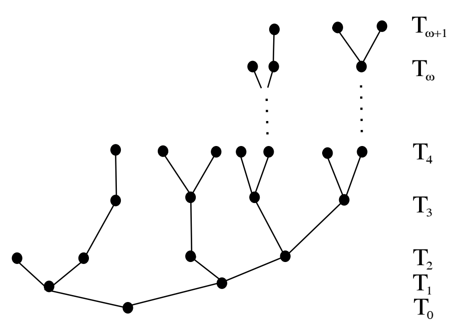


Figura 3.1: Árbol

[11] Recordemos que el tipo de orden de un conjunto bien ordenado es el único ordinal al cual es isomorfo. Véase la Definición A.19 en el Apéndice A.

El siguiente resultado será fundamental para demostrar el teorema principal que surge a partir de la dicotomía de Ulam, pues nos proporciona una consecuencia muy precisa de la existencia de una medida sin átomos.

Lema 3.43 *Sea S un conjunto cualquiera y supongamos que existe una medida σ-aditiva, no trivial y sin átomos para S. Entonces existe una medida σ-aditiva, no trivial y sin átomos para algún cardinal $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$.*

Demostración. Sea μ una medida σ-aditiva, no trivial y sin átomos sobre un conjunto S. Construiremos un árbol T de subconjuntos de S de medida positiva parcialmente ordenado por la contención inversa ($\supseteq$). Como μ es una medida sin átomos, sabemos que dado un conjunto de medida positiva X, existen conjuntos, digamos Y y Z tales que:

- $X = Y \cup Z$;
- $Y \cap Z = \emptyset$;
- $\mu(Y) > 0$ y $\mu(Z) > 0$.

Así, por el Axioma de Elección, a cada $X \subseteq S$ de medida positiva le podemos asociar un par de subconjuntos ajenos, digamos Y_X y Z_X, cuya medida también sea positiva y $X = Y_X \cup Z_X$. Definamos recursivamente los niveles del árbol T como sigue:

$$T_0 := \{S\};$$

una vez definido el nivel T_α para algún ordinal α, definimos el nivel $T_{\alpha+1}$ como

$$T_{\alpha+1} := \{W \subseteq S : \exists X \in T_\alpha (W = Y_X \text{ ó } W = Z_X)\};$$

finalmente, si λ es un ordinal límite y T_ξ ha sido definido para todo $\xi < \lambda$, definimos

$$T_\lambda := \left\{ X \subseteq S : X = \bigcap_{\xi<\lambda} X_\xi,\ \forall \xi < \lambda\ X_\xi \in T_\xi \text{ y } \mu(X) > 0 \right\}.$$

Una observación importante que podemos hacer, es que todas las ramas de T son conjuntos cuyo tipo de orden es un ordinal límite. Esto se debe a que si b fuera una rama de T con un elemento máximo, digamos X, y β fuera un ordinal tal que $X \in T_\beta$, podríamos asegurar que el nivel $T_{\beta+1}$ no tendría ningún elemento de b. Sin embargo, esto sería equivalente a decir que X es un átomo de μ, contradiciendo nuestra suposición. De este modo, podemos concluir que el tipo de orden de b, es un ordinal límite.

Veamos ahora que cada rama de T tiene longitud a lo más numerable. Si $\{X_\xi : \xi < \alpha\}$ es una rama de T, entonces el conjunto $\{Y_\xi : \xi < \alpha\}$ donde $Y_\xi := X_\xi - X_{\xi+1}$ para cada ξ, es una colección de $|\alpha|$ conjuntos ajenos de medida positiva, por lo que la Proposición 2.15 implica que $|\alpha| < \omega_1$ y se sigue la afirmación.

Esto prueba que efectivamente todas las ramas de T son numerables y, por tanto, la altura del árbol T es menor o igual que ω_1.

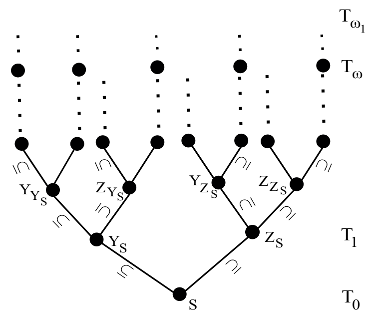


Figura 3.2: Árbol (T,$\supseteq$)

Un argumento similar nos permite asegurar que cada nivel de T es a lo más numerable, pues para cada α, el nivel T_α es una colección de subconjuntos de S ajenos por parejas y de medida positiva.

Una consecuencia de estas afirmaciones es que $|T| \leq \aleph_1$, pues como los niveles de un árbol son conjuntos ajenos dos a dos, las propiedades de sumas cardinales nos dicen que[12]

$$\begin{aligned} |T| &= \left| \bigcup_{\alpha<\omega_1} T_\alpha \right| \\ &= \sum_{\alpha<\omega_1} |T_\alpha| \\ &= \aleph_1 \cdot \sup_{\alpha<\omega_1} |T_\alpha| \\ &\leq \aleph_1 \cdot \aleph_0 \\ &= \aleph_1. \end{aligned}$$

Dicho esto, podemos afirmar que T tiene a lo más $2^{\aleph_0}$ ramas. Para demostrarlo, consideremos $\{b_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una enumeración de dichas ramas de T y definamos una función $f : \{b_\alpha : \alpha < \lambda\} \longrightarrow {}^\omega T$ dada por

$$f(b_\alpha) := f_\alpha,$$

donde f_α es alguna enumeración de los elementos de b_α. La función f está bien definida, pues ya hemos visto que todas las ramas de T tienen cardinalidad a lo más numerable. Además, f es inyectiva, pues si b_α y b_β son dos ramas de T tales que $f(b_\alpha) = f(b_\beta)$, en particular tendremos que $ran(f_\alpha) = ran(f_\beta)$, es decir, $b_\alpha = b_\beta$. Esto significa que $|\{b_\alpha : \alpha < \lambda\}| \leq |{}^\omega T|$ y entonces podemos concluir que $|\{b_\alpha : \alpha < \lambda\}| \leq |T|^{\aleph_0} \leq \aleph_1^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.[13]

De esta forma, podemos decir que existen $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ y una enumeración $\{b_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de todas las ramas $b := \{X_\xi : \xi < \gamma\}$ tales que $\bigcap b \neq \emptyset$, donde $\bigcap b = \bigcap_{\xi<\gamma} X_\xi$. Así, para cada $\alpha < \kappa$, sea $Z_\alpha := \bigcap\{X : X \in b_\alpha\}$.

[12]Véanse la Definición A.53 y el Teorema A.54 en el Apéndice A.

[13]La Proposición A.52 del Apéndice A nos da esta propiedad de la aritmética cardinal.

Veamos que para cada $\alpha < \kappa$, $\mu(Z_\alpha) = 0$. Tomemos $\alpha < \kappa$ arbitrario y supongamos que λ es el tipo de orden de la rama b_α. Como ya hemos observado, las propiedades de μ implican que λ es un ordinal límite. Así, si $\mu(Z_\alpha) > 0$, la definición de T_λ nos diría que $Z_\alpha \in T_\lambda$. Más aún, como la relación de orden que tiene T es la contención, tendríamos que $Z_\alpha \in b_\alpha \cap T_\lambda$. Esto implicaría que $\{X \in T : X \subseteq Z_\alpha\}$ es un subconjunto de b_α de tipo de orden $\lambda+1$, contradiciendo el hecho de que b_α tiene tipo de orden λ.

Por otro lado, podemos verificar que la colección $\{Z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una partición de S:

- Cada Z_α es no vacío pues así lo elegimos.
- Si $\alpha \neq \beta$, podemos tomar ξ como el mínimo ordinal tal que $T_\xi \cap b_\alpha \neq T_\xi \cap b_\beta$ y si $\{X_\xi\} = T_\xi \cap b_\alpha$ y $\{Y_\xi\} = T_\xi \cap b_\beta$, entonces $Z_\alpha \cap Z_\beta \subseteq X_\xi \cap Y_\xi$. Así, como los conjuntos de cada nivel de T son ajenos por parejas, $Z_\alpha \cap Z_\beta \subseteq X_\xi \cap Y_\xi = \emptyset$.
- Dado $x \in S$, podemos construir recursivamente una rama b_α de subconjuntos de S tal que $x \in Z_\alpha$. Para ello, definimos

  $$X_0 := S.$$

  Una vez definido X_α, si $X_\alpha = Y \cup Z$ con $Y, Z \in T$ ajenos y de medida positiva, definimos

  $$X_{\alpha+1} := \begin{cases} Y & \text{si } x \in Y \\ Z & \text{si } x \in Z. \end{cases}$$

  Finalmente, si λ es un ordinal límite y X_α ha sido definido para todo $\alpha < \lambda$, definimos

  $$X_\lambda := \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha$$

  siempre y cuando $X_\lambda \in T$, es decir, si $\mu(X_\lambda) > 0$, pues en caso contrario, en este paso nos detenemos y obtenemos una rama de longitud λ.

  De esta forma, hemos construido una rama $b_\alpha := \{X_\xi : \xi < \gamma\}$ tal que $x \in \bigcap b_\alpha$ y esto concluye la prueba de que la colección $\{Z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una partición de S en κ subconjuntos de medida cero.

Ahora, considérese $F : S \longrightarrow \kappa$ definida como

$$F(x) := \alpha \text{ si y sólo si } x \in Z_\alpha.$$

Como $\{Z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una partición de subconjuntos nulos de S, el Lema 2.18 nos dice que la función $\nu : \mathcal{P}(\kappa) \longrightarrow [0,1]$ dada por

$$\nu(Z) := \mu(F^{-1}[Z])$$

es una medida para κ.

Hasta aquí hemos demostrado que de existir una medida sin átomos en S, existe un cardinal $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ en el que hay una medida σ-aditiva y no trivial. Sin embargo, si tomamos a κ como el mínimo con esta propiedad, el Corolario 2.20 nos dice que la medida ν es κ-aditiva. Así, podemos concluir que ν es una medida sin átomos, ya que si ν tuviera un átomo, por el Corolario 3.31 tendríamos que κ es un cardinal medible y, por el Teorema 3.40, eso implica que κ es fuertemente inaccesible, pero como $\aleph_0 < \kappa$, $2^{\aleph_0} < \kappa$, esto contradice el hecho de que $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$. $\square$

Observación 3.44 *La demostración del Lema 3.43 muestra que si μ es una medida sin átomos, entonces hay una partición de S en a lo más $2^{\aleph_0}$ conjuntos nulos. Esto significa que μ no es $(2^{\aleph_0})^+$-aditiva y, por tanto, si κ admite una medida sin átomos y κ-aditiva, entonces $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ y tenemos el siguiente corolario.*

Corolario 3.45 *Si κ es un cardinal de medida real, entonces κ es medible ó $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$.*

Demostración. Sea κ un cardinal de medida real y supongamos que $\kappa > 2^{\aleph_0}$. Entonces existe una medida μ no trivial y κ-aditiva para κ. Así, por la Observación 3.44, μ tiene algún átomo, de manera que κ es medible por el Corolario 3.31. $\square$

Proposición 3.46 *Si hay una medida σ-aditiva, no trivial y sin átomos para algún $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$, entonces hay una para $2^{\aleph_0}$.*

Demostración. Sea $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ y sea ν una medida sin átomos para κ. Definimos $\mu : \mathcal{P}(2^{\aleph_0}) \longrightarrow \mathbb{R}$ como
$$\mu(X) := \nu(X \cap \kappa).$$
El hecho de que μ es una medida para $2^{\aleph_0}$ en el sentido de la Definición 2.1 se sigue directamente de que ν lo es para κ. Para ver que μ no tiene átomos, tomemos $X \subseteq 2^{\aleph_0}$ tal que $\mu(X) > 0$, esto signfica que $\nu(X \cap \kappa) > 0$. Luego, como ν es una medida sin átomos, existen $Y, Z \subseteq X \cap \kappa$ tales que $\nu(Y) > 0$ y $\nu(Z) > 0$. Como $Y, Z \subseteq \kappa$, concluimos que $\mu(Y) > 0$ y $\mu(Z) > 0$ con $Y, Z \subseteq X$, por lo que X no es un átomo de μ. $\square$

La proposición anterior y el Lema 3.43 nos permiten concluir que *de existir una medida sin átomos en algún conjunto S*, también existiría una medida σ-aditiva, no trivial y sin átomos para el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales. Así, aunque sabemos que la existencia de ninguna de estas medidas se puede demostrar desde ZFE, para Ulam esto representó un avance muy significativo en el Problema de la Medida y, de hecho, uno de los resultados más sorprendentes de este capítulo es que incluso se puede lograr que la medida que exista para $\mathbb{R}$ sea una extensión de la Medida de Lebesgue. A continuación daremos los detalles de esta construcción.

3.2.6. Una extensión de la Medida de Lebesgue

En esta sección daremos explícitamente la construcción de una extensión para la Medida de Lebesgue a partir de suponer la existencia de una medida sin átomos. La idea de la construcción será esencialmente la misma que la del Lema 3.43 salvo por algunos detalles técnicos que nos permitirán asegurar que la medida resultante coincide con la de Lebesgue en los intervalos abiertos contenidos en el

$[0,1]$. Utilizando esto, podremos argumentar que coincide con la de Lebesgue en todos los conjuntos medibles.

Comenzaremos con el siguiente lema al que le daremos atención especial pues lo utilizaremos de nuevo más adelante.

Lema 3.47 *Si μ es una medida sin átomos para un conjunto S, entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

(a) Para todo $\varepsilon > 0$ y todo $X \subseteq S$ tal que $\mu(X) > 0$ existe $Y \subseteq X$ tal que $0 < \mu(Y) \leq \varepsilon$.

(b) Para todo $X \subseteq S$ existe $Y \subseteq X$ tal que $\mu(Y) = \frac{1}{2}\mu(X)$.

Demostración.

(a) Sea $X \subseteq S$. Construiremos una sucesión $\{X_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos de X tal que $0 < \mu(X_n) \leq \frac{1}{2^n}\mu(X)$ para todo $n \in \omega$. Dicha sucesión estará dada como sigue:

- $X_0 := X$.
- Una vez definido X_n tal que $0 < \mu(X_n) \leq \frac{1}{2^n}\mu(X)$, como X_n no es un átomo, existe $Y \subseteq X_n$ tal que $\mu(Y) > 0$ y $\mu(X_n - Y) > 0$. Además, como $\mu(X_n) = \mu(Y) + \mu(X_n - Y)$ pues μ es σ-aditiva, podemos definir

$$X_{n+1} := \begin{cases} Y & \text{si } \mu(Y) \leq \frac{1}{2}\mu(X_n) \\ X_n - Y & \text{si } \mu(X_n - Y) \leq \frac{1}{2}\mu(X_n). \end{cases}$$

De esta definición se sigue que $\mu(X_{n+1}) \leq \frac{1}{2}\mu(X_n)$ y, por tanto, para todo $n \in \omega$, $0 < \mu(X_n) \leq \frac{1}{2^n}\mu(X)$. De aquí se sigue la afirmación pues dada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n \in \omega$ tal que $\frac{1}{2^n}\mu(X) < \varepsilon$.

(b) Sea $X \subseteq S$. El caso en el que $\mu(X) = 0$ es trivial, así que supongamos $m := \mu(X) > 0$.

La idea de la demostración será tomar primero un subconjunto $Y_0 \subseteq X$ cuya medida sea menor o igual que $\frac{m}{2}$. Posteriormente, definiremos por recursión una familia $\{Y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de subconjuntos disjuntos de X, para ir uniendo tantos de ellos como sea necesario al conjunto inicial Y_0, hasta obtener un conjunto de medida $\frac{m}{2}$.

Así, utilizaremos el inciso (a) para definir la familia $\{Y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de la siguiente manera:

- Utilizando (a), tomemos $Y_0 \subseteq X$ tal que $0 < \mu(Y_0) \leq \frac{m}{2}$.
- Dado $0 < \alpha < \omega_1$, supongamos que para todo $\beta < \alpha$ hemos definido un conjunto $Y_\beta \subseteq X$ de manera que $\mu\left(\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta\right) \leq \frac{m}{2}$. Si $\mu\left(\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta\right) = \frac{m}{2}$, tal unión será el subconjunto de X buscado. Así bien, supongamos que $\mu\left(\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta\right) < \frac{m}{2}$. Utilizando nuevamente el inciso (a), tomemos $Y_\alpha \subseteq X - \bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta$ tal que $0 < \mu(Y_\alpha) \leq \frac{m}{2} - \mu\left(\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta\right)$.

Esto implica que $\mu\left(\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta\right) + \mu(Y_\alpha) \leq \frac{m}{2}$ y, como $Y_\alpha \cap \left(\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta\right) = \emptyset$, la σ-aditividad de μ nos permite concluir que $\mu\left(\bigcup_{\beta<\alpha+1} Y_\beta\right) \leq \frac{m}{2}$.

Así, hemos construido una familia $\{Y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de subconjuntos de X de medida positiva que además son ajenos por parejas. Entonces, la Proposición 2.15 implica que esta colección de conjuntos tiene cardinalidad a lo más numerable. De aquí que esta construcción se debe detener en algún número ordinal menor que ω_1 y, por lo tanto, debe existir $\alpha < \omega_1$ tal que $\mu\left(\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta\right) = \frac{m}{2}$. $\square$

El lema anterior expresa la esencia de lo que significa que una medida no tenga átomos, pues manifiesta que, bajo estas condiciones, no sólo podemos subdividir a un conjunto de medida positiva infinitas veces, sino que de hecho podemos hacerlo teniendo control sobre el tamaño de los subconjuntos obtenidos.

A continuación enunciamos un par de lemas que enuncian algunos de los detalles técnicos que nos permitirán establecer con todo rigor la existencia de una medida que extienda a la de Lebesgue en el intervalo $[0,1]$ bajo la suposición de que existe una medida sin átomos.

Lema 3.48 *Sean $m \in \mathbb{N}^+$ y $0 \leq k < 2^m$ con $k \in \omega$. Entonces existe una única sucesión $s \in {}^m\{0,1\}$ tal que $\frac{k}{2^m} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{s(n)}{2^{n+1}}$. Recíprocamente, si $s \in {}^m\{0,1\}$, entonces existe $k \in \omega$ tal que $0 \leq k < 2^m$ y $\frac{k}{2^m} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{s(n)}{2^{n+1}}$.*

Demostración. La idea de la demostración será construir una función inyectiva que vaya del conjunto de todas las sucesiones en ${}^m\{0,1\}$, al conjunto $\{\frac{k}{2^m} : 0 \leq k < 2^m\}$. Esto nos dará el resultado deseado, pues ambos conjuntos tienen la misma cardinalidad y, al ser finitos, la función construída será de hecho una biyección.

Sea $m \in \mathbb{N}^+$ y sea $K_m := \left\{\frac{k}{2^m} : k \in \mathbb{N} \text{ y } 0 \leq k < 2^m\right\}$. Sea $f : {}^m\{0,1\} \longrightarrow K_m$ definida como

$$f(s) := \sum_{n=0}^{m-1} \frac{s(n)}{2^{n+1}}.$$

Veamos por inducción sobre $m \in \mathbb{N}^+$ que f está bien definida y que es inyectiva.

- Si $m = 1$, entonces $K_m = \{0, \frac{1}{2}\}$ y $m = \{0\}$, por lo que si $s \in {}^m\{0,1\}$, de la definición de f se sigue que $f(s) = \frac{s(0)}{2} \in K_m$. Esto nos dice que f está bien definida. Para ver que es inyectiva, supongamos que $s_0, s_1 \in {}^m\{0,1\}$ son tales que $f(s_0) = f(s_1)$. Entonces se tiene que

$$\frac{s_0(2)}{2} = f(s_0) = f(s_1) = \frac{s_1(0)}{2}.$$

De aquí se sigue que $s_0(0) = s_1(0)$ y, como el dominio de s_0 y de s_1 es el conjunto $\{0\}$, entonces $s_0 = s_1$, así que, efectivamente, f es inyectiva.

- Supongamos ahora que $m \in \mathbb{N}^+$ y que si $f : {}^m\{0,1\} \to K_m$ está dada como antes, entonces f está bien definida y es inyectiva. Para el paso inductivo consideremos la función $g : {}^{m+1}\{0,1\} \to K_{m+1}$ dada por
$$g(s) := \sum_{n=0}^{m} \frac{s(n)}{2^{n+1}}.$$
Obsérvese que si $s \in {}^{m+1}\{0,1\}$, entonces $s \restriction_m \in {}^m\{0,1\}$, de modo que, por definición de f,
$$\begin{aligned} f(s \restriction_m) &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{s \restriction_m(n)}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{s(n)}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$
Así, como por hipótesis de inducción sabemos que $f(s \restriction_m) \in K_m$, podemos asegurar que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k_0 < 2^m$ y $\sum_{n=0}^{m-1} \frac{s(n)}{2^{n+1}} = \frac{k_0}{2^m}$. Por lo tanto,
$$g(s) = \frac{k_0}{2^m} + \frac{s(m)}{2^{m+1}} = \frac{2k_0 + s(m)}{2^{m+1}}.$$
Luego, como $s(m) \in \{0,1\}$ y como $0 \leq k_0 \leq 2^m - 1$, se tiene que
$$0 \leq 2k_0 + s(m) \leq (2^{m+1} - 2) + 1 = 2^{m+1} - 1.$$
De aquí podemos concluir que $g(s) \in \{\frac{k}{2^{m+1}} : 0 \leq k < 2^{m+1}\} = K_{m+1}$ y, por tanto, g está bien definida.
Para ver que g es inyectiva, supongamos que $s_0, s_1 \in {}^{m+1}\{0,1\}$ son tales que $g(s_0) = g(s_1)$. Esto significa que
$$\sum_{n=0}^{m} \frac{s_0(n)}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{m} \frac{s_1(n)}{2^{n+1}}. \tag{3.5}$$
Para ver que $s_0 = s_1$, veamos primero que $s_0(m) = s_1(m)$. Razonando por contradicción, supongamos sin perder generalidad que $s_0(m) = 0$ y que $s_1(m) = 1$. Por la ecuación (3.5), esto significa que
$$\sum_{n=0}^{m-1} \frac{s_0(n)}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{s_1(n)}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{m+1}}.$$
Por otro lado, utilizando nuevamente que $s_0 \restriction_m, s_1 \restriction_m \in {}^m\{0,1\}$ y el hecho de que f está bien definida por hipótesis inductiva, podemos asegurar que existen $k_0, k_1 \in K_m$ tales que
$$\begin{aligned} \frac{k_0}{2^m} &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{s_0(n)}{2^{n+1}} \text{ y} \\ \frac{k_1}{2^m} &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{s_1(n)}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

De las tres ecuaciones anteriores se sigue que

$$\frac{k_0}{2^m} = \frac{k_1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}}$$

y, por tanto,

$$\frac{2(k_0 - k_1)}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^{m+1}},$$

así que $k_0 - k_1 = \frac{1}{2}$. Sin embargo, esto es una contradicción, ya que k_0 y k_1 son números naturales. De aquí podemos concluir que, en efecto,

$$s_0(m) = s_1(m). \tag{3.6}$$

Esto junto con la ecuación (3.5) tiene como consecuencia que

$$\sum_{n=0}^{m-1} \frac{s_0(n)}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{s_1(n)}{2^{n+1}},$$

así que aplicando nuevamente la hipótesis inductiva, pero esta vez usando que f es inyectiva, podemos concluir que

$$s_0 \restriction_m = s_1 \restriction_m \tag{3.7}$$

De las ecuaciones (3.6) y (3.7) podemos concluir que $s_0 = s_1$ y, por tanto, g es inyectiva. Esto termina la demostración. □

Lema 3.49 *Sea $G \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abierto. Entonces G se puede escribir como unión numerable de intervalos ajenos por parejas de la forma $\left[\frac{a}{2^k}, \frac{a+1}{2^k}\right)$, donde $a \in \mathbb{Z}$ y $k \in \omega$.*

Demostración. Sea G un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$. Definiremos por recursión sobre ω una familia de conjuntos de números enteros que den pie a una colección de intervalos ajenos por parejas que sean de la forma $\left[\frac{a}{2^k}, \frac{a+1}{2^k}\right)$ y con la propiedad de que su unión sea el conjunto G.

Comenzaremos definiendo al conjunto

$$D_0 := \{a \in \mathbb{Z} : [a, a+1) \subseteq G\}.$$

Ahora, suponiendo que hemos construido al conjunto D_j para todo $j < n$, definamos

$$D_n := \left\{a \in \mathbb{Z} : \left[\frac{a}{2^n}, \frac{a+1}{2^n}\right) \subseteq G \text{ y } \forall j < n \forall b \in D_j \left[\frac{b}{2^j}, \frac{b+1}{2^j}\right) \cap \left[\frac{a}{2^n}, \frac{a+1}{2^n}\right) = \emptyset\right\}.$$

Afirmamos que

$$G = \bigcup_{n \in \omega} \left(\bigcup_{a \in D_n} \left[\frac{a}{2^{n+1}}, \frac{a+1}{2^{n+1}}\right) \right).$$

Claramente tenemos que para todo $n \in \omega$, si $a \in D_n$, entonces $\left[\frac{a}{2^{n+1}}, \frac{a+1}{2^{n+1}}\right) \subseteq G$, por lo que sólo falta demostrar que para todo $x \in G$ existen $n \in \omega$ y $a \in D_n$ tales que $x \in \left[\frac{a}{2^{n+1}}, \frac{a+1}{2^{n+1}}\right)$.

Tomemos entonces $x \in G$ arbitrario y sea $k \in \omega$ un número natural tal que $\frac{1}{2^k} < d(x, \mathbb{R} - G)$,[14] que sabemos que existe porque $d(x, \mathbb{R} - G) > 0$. Ahora, sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in \left[\frac{a}{2^k}, \frac{a+1}{2^k}\right)$. Como $\frac{1}{2^k} < d(x, \mathbb{R} - G)$, esto implica que $\left[\frac{a}{2^k}, \frac{a+1}{2^k}\right) \subseteq G$, de modo que tenemos los siguientes casos:

Caso I. Si $a \in D_k$, entonces hemos terminado pues esto significa que $x \in \bigcup_{n \in \omega} \left(\bigcup_{a \in D_n} \left[\frac{a}{2^{n+1}}, \frac{a+1}{2^{n+1}}\right)\right)$.

Caso II. Si $a \notin D_k$, entonces por definición de D_k existen $j < k$ y $b \in D_j$ tales que $\left[\frac{b}{2^j}, \frac{b+1}{2^j}\right) \cap \left[\frac{a}{2^k}, \frac{a+1}{2^k}\right) \neq \emptyset$ y, como ambos son intervalos y $\frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^j}$, esto implica que $\left[\frac{a}{2^k}, \frac{a+1}{2^k}\right) \subseteq \left[\frac{b}{2^j}, \frac{b+1}{2^j}\right)$, por lo que $x \in \left[\frac{b}{2^j}, \frac{b+1}{2^j}\right)$. Por lo tanto, x está en la unión correspondiente. $\square$

Dadas estas herramientas, estamos listos para enunciar el tan anunciado resultado que fue demostrado por Ulam en su intento por resolver el Problema de la Medida y construir una extensión de la Medida de Lebesgue.

Teorema 3.50 *Si existe una medida σ-aditiva, no trivial y sin átomos en un conjunto S, entonces existe una medida en $[0,1]$ que extiende a la Medida de Lebesgue.*

Demostración. Sea μ una medida σ-aditiva, no trivial y sin átomos para un conjunto S. De manera similar a como lo hicimos en el Lema 3.43, construiremos recursivamente una familia de conjuntos indexada por los elementos en el espacio $Seq(\{0,1\})$. Para ello, definamos:

$X_\emptyset := S$.

Una vez definido X_s, podemos definir $X_{s^\frown 0}$ utilizando el inciso (b) del Lema 3.47 de manera que

- $X_{s^\frown 0} \subseteq X_s$;
- $\mu(X_{s^\frown 0}) = \frac{1}{2}\mu(X_s)$.

Luego, definimos $X_{s^\frown 1} := X_s - X_{s^\frown 0}$.

Observación 3.51 *Bajo esta definición, tendremos las siguientes propiedades para los conjuntos X_s:*

(a) $X_s = X_{s^\frown 0} \cup X_{s^\frown 1}$,

(b) $X_{s^\frown 0} \cap X_{s^\frown 1} = \emptyset$, *y*

(c) $\mu(X_{s^\frown 0}) = \mu(X_{s^\frown 1}) = \frac{1}{2}\mu(X_s)$.

Con esta construcción tenemos que, para todo $s \in Seq(\{0,1\})$, si la longitud de s es n, o equivalentemente, si $s \in {}^n\{0,1\}$, entonces $\mu(X_s) = \frac{1}{2^n}$.

Ahora, para cada $f \in {}^\omega\{0,1\}$, definamos el conjunto

$$X_f := \bigcap_{n \in \omega} X_{f \restriction_n}.$$

[14] Véase la Definición B.12 en el Apéndice B.

Afirmación 3.52 *Afirmamos que $\{X_f : f \in {}^{\omega}\{0,1\}$ y $X_f \neq \emptyset\}$ es una partición de conjuntos nulos de S.*[15]

Como nos estamos restringiendo a los conjuntos X_f que son no vacíos, sólo hace falta verificar las siguientes propiedades.

(i) Veamos que $S = \bigcup\{X_f : f \in {}^{\omega}\{0,1\}\}$. Para verificar esto, nótese que dado $x \in S$, podemos definir la función $f : \omega \longrightarrow \{0,1\}$ como

$$f(n) := i \text{ si y sólo si } x \in X_{s^\frown i} \text{ y } long(s) = n.$$

f está bien definida por las propiedades establecidas en la Observación 3.51. Además, para cada $n \in \omega$ tenemos que $x \in X_{f\restriction_n}$, de modo que $x \in \bigcap_{n\in\omega} X_{f\restriction_n} = X_f$.

(ii) Veamos ahora que si $f \neq g$, entonces $X_f \cap X_g = \emptyset$. Si n es el mínimo natural tal que $f(n) \neq g(n)$, entonces $f\restriction_n = g\restriction_n$. Por tanto, si $X_s = X_{f\restriction_n} = X_{g\restriction_n}$, tenemos nuevamente por el inciso (b) de la Observación 3.51 que $X_{f\restriction_{s(n)}} \cap X_{g\restriction_{s(n)}} = \emptyset$, pues estos conjuntos forman una partición de X_s. En consecuencia tenemos que $X_f \cap X_g = \left(\bigcap_{n\in\omega} X_{f\restriction_n}\right) \cap \left(\bigcap_{n\in\omega} X_{g\restriction_n}\right) \subseteq X_{f\restriction_{s(n)}} \cap X_{g\restriction_{s(n)}} = \emptyset$.

(iii) Por otro lado, nótese que $\mu(X_f) = 0$ para cualquier $f \in {}^{\omega}\{0,1\}$, pues para todo $n \in \omega$ se tiene que $\mu(X_f) \leq \mu(X_{f\restriction_n}) = \frac{1}{2^n}$.

Así, hemos demostrado que $\{X_f : f \in {}^{\omega}\{0,1\}$ y $X_f \neq \emptyset\}$ forma una partición de conjuntos nulos de S.

De manera análoga a como lo hicimos en el Lema 3.43, consideremos la partición de S que acabamos de construir y definamos la función $g : S \longrightarrow {}^{\omega}\{0,1\}$ de manera que

$$g(x) := f \text{ si y sólo si } x \in X_f.$$

Entonces, por el Lema 2.18, la función $\nu_1 : \mathcal{P}({}^{\omega}\{0,1\}) \longrightarrow [0,1]$ dada por

$$\nu_1(Z) := \mu(g^{-1}[Z]) = \mu\left(\bigcup\{X_f : f \in Z\}\right),$$

es una medida para ${}^{\omega}\{0,1\}$.

Ahora, consideremos a la función $F : {}^{\omega}\{0,1\} \longrightarrow [0,1]$ definida como

$$F(f) := \sum_{n\in\omega} \frac{f(n)}{2^{n+1}}$$

y definamos $\nu : \mathcal{P}([0,1]) \longrightarrow [0,1]$ como

$$\nu(Y) := \nu_1(F^{-1}[Y]).$$

[15]Esto tiene como consecuencia que, si $|S| < |{}^{\omega}\{0,1\}| = 2^{\aleph_0}$, entonces necesariamente existe $g \in {}^{\omega}\{0,1\}$ tal que $X_g = \emptyset$, por lo que tiene sentido restringirnos a aquellos conjuntos X_f que son no vacíos.

Por un lado, la función F está bien definida, pues para toda $f \in {}^{\omega}\{0,1\}$ se tiene que, para todo $n \in \omega$, $0 \leq f(n) \leq 1$, así que

$$0 \leq F(f) = \sum_{n\in\omega} \frac{f(n)}{2^{n+1}} \leq \sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^{n+1}} = 1.$$

De aquí se sigue que ν también está bien definida.

Afirmamos ahora que ν es una medida σ-aditiva y no trivial para el intervalo [0,1] que, además, coincide con la de Lebesgue.

Antes de proceder a la prueba de esta afirmación, vale la pena aclarar que la idea detrás de construir a ν de esta manera radica en que, en un primer paso, estamos *copiando* mediante la función g la medida existente en S al conjunto de funciones ${}^{\omega}\{0,1\}$. Posteriormente, *copiamos* al intervalo $[0,1]$ la medida generada para ${}^{\omega}\{0,1\}$ y para ello utilizamos a la función F. Más aún, como para cada $n \in \omega$ y cada $s \in {}^{n}\{0,1\}$ hemos construido un conjunto X_s de medida $\frac{1}{2^n}$, el objetivo de las funciones g y F es enviar a estos conjuntos en intervalos de la forma $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$, cuya longitud es $\frac{1}{2^n}$. Para verificar esto, tomemos $m \in \mathbb{N}^+$ y $0 \leq k < 2^m$. Por el Lema 3.48, sabemos que existe una única sucesión $s \in {}^{m}\{0,1\}$ tal que $\frac{k}{2^m} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{s(n)}{2^{n+1}}$.

Afirmamos que $X_s \subseteq \bigcup\{X_f : \sum_{n\in\omega} \frac{f(n)}{2^{n+1}} \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]\}$.

Para demostrar esto, sea $x \in X_s$ y definamos $f : \omega \longrightarrow \{0,1\}$ como

$$f(n) := \begin{cases} s(n) & \text{si } 0 \leq n < m \\ i & \text{si } x \in X_{f\restriction_{n-1}\frown i} \text{ y } m \leq n. \end{cases}$$

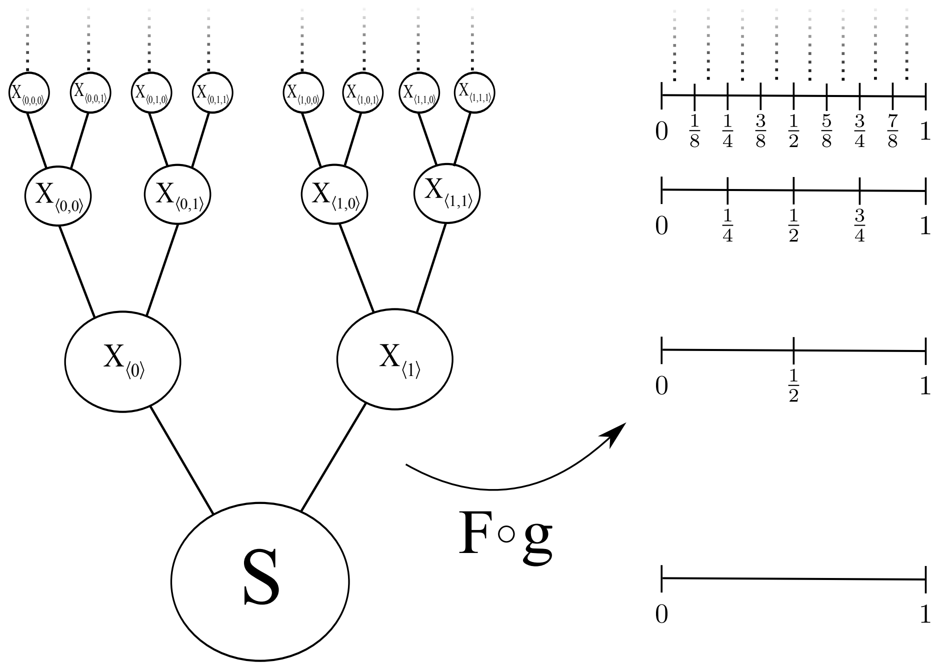
f está bien definida por las propiedades de los conjuntos de la forma X_r con $r \in Seq(\{0,1\})$ y, claramente, $x \in X_f$. Además,

$$\begin{aligned} \frac{k}{2^m} &= \sum_{n<m} \frac{s(n)}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n<m} \frac{f(n)}{2^{n+1}} \\ &\leq \sum_{n<m} \frac{f(n)}{2^{n+1}} + \sum_{n\geq m} \frac{f(n)}{2^{n+1}} \\ &\leq \sum_{n<m} \frac{f(n)}{2^{n+1}} + \sum_{n\geq m} \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n<m} \frac{f(n)}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^m} \\ &= \frac{k+1}{2^m}. \end{aligned}$$

En conclusión, $\sum_{n\in\omega} \frac{f(n)}{2^{n+1}} \in \left[\frac{k}{2^m} \frac{k+1}{2^m}\right]$ y, por tanto,

$$X_s \subseteq \bigcup \left\{X_f : \sum_{n\in\omega} \frac{f(n)}{2^{n+1}} \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]\right\} = g^{-1}\left[F^{-1}\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]\right]. \quad (3.8)$$

De aquí se sigue que $(F \circ g)[X_s] \subseteq \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]$, que es lo que queríamos demostrar.



Hechas estas aclraciones, demostraremos que efectivamente ν es una medida para el intervalo $[0,1]$ que, además, extiende a la Medida de Lebesgue.

(i) Es claro que $\nu(\emptyset) = \nu_1(F^{-1}[\emptyset]) = \nu_1(\emptyset) = 0$ y también tenemos la condición $\nu([0,1]) = \nu_1(F^{-1}[0,1]) = \nu_1({}^{\omega}\{0,1\}) = 1$.

(ii) Para ver que ν es no trivial, observemos que

$$\begin{aligned}\nu(\{a\}) &= \nu_1(F^{-1}[\{a\}]) \\ &= \mu\left(\bigcup\{X_f : f \in F^{-1}[\{a\}]\}\right) \\ &= \mu\left(\bigcup\left\{X_f : a = \sum_{n\in\omega} \frac{f(n)}{2^{n+1}}\right\}\right).\end{aligned}$$

Obsérvese que si no existe f tal que $a = \sum_{n\in\omega} \frac{f(n)}{2^{n+1}}$, entonces $\nu(\{a\}) = \mu(\emptyset) = 0$. Así, sólo hace falta verificar el caso en el que existe $f \in {}^{\omega}\{0,1\}$ tal que $a = \sum_{n\in\omega} \frac{f(n)}{2^{n+1}}$.

Demostraremos que el conjunto

$$F^{-1}[\{a\}] = \left\{g \in {}^{\omega}\{0,1\} : a = \sum_{n\in\omega} \frac{g(n)}{2^{n+1}}\right\}$$

tiene a lo más dos elementos. Con esto habremos terminado, pues si $F^{-1}[\{a\}] = \{f, g\}$ con $f \neq g$, entonces por la σ-aditividad de μ y por la Afirmación 3.52, tendremos que

$$\begin{aligned} \nu(\{a\}) &= \nu_1(\{f,g\}) \\ &= \mu\left(X_f \cup X_g\right) \\ &= \mu(X_f) + \mu(X_g) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Del mismo modo, si $F^{-1}[\{a\}] = \{f\}$, entonces $\nu(\{a\}) = \mu(X_f) = 0$.

Así bien, tomemos $f \in {}^{\omega}\{0,1\}$ fija tal que $a = \sum_{n\in\omega} \frac{f(n)}{2^{n+1}}$ y $g \neq f$ con la misma propiedad. Sea $m \in \omega$ el mínimo número natural tal que $f(m) \neq g(m)$ y supongamos, sin perder generalidad, que $f(m) = 0 < 1 = g(m)$.

Caso I. Si para todo $n \geq m+1$ $f(n) = 1$ y $g(n) = 0$, entonces tenemos que

$$g(n) = \begin{cases} f(n) & \text{si } 0 \leq n \leq m-1 \\ 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \geq m+1 \end{cases}$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\omega} \frac{f(n)}{2^{n+1}} &= \sum_{n<m} \frac{f(n)}{2^{n+1}} + \sum_{n\geq m+1} \frac{f(n)}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n<m} \frac{g(n)}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} \\ &= \sum_{n\leq m} \frac{g(n)}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n\leq m} \frac{g(n)}{2^{n+1}} + \sum_{n\geq m+1} \frac{g(n)}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n\in\omega} \frac{g(n)}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Caso II. Si existe $n \geq m+1$ tal que $f(n) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\omega} \frac{f(n)}{2^{n+1}} &= \sum_{n<m} \frac{f(n)}{2^{n+1}} + \sum_{n\geq m+1} \frac{f(n)}{2^{n+1}} \\ &< \sum_{n<m} \frac{g(n)}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} \\ &= \sum_{n\leq m} \frac{g(n)}{2^{n+1}} \\ &\leq \sum_{n\leq m} \frac{g(n)}{2^{n+1}} + \sum_{n\geq m+1} \frac{g(n)}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n\in\omega} \frac{g(n)}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

El hecho de que la primer desigualdad sea estricta, nos dice que este caso no se puede dar bajo nuestra hipótesis.

Caso III. Si existe $n \geq m+1$ tal que $g(n) = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\omega} \frac{f(n)}{2^{n+1}} &= \sum_{n<m} \frac{f(n)}{2^{n+1}} + \sum_{n\geq m+1} \frac{f(n)}{2^{n+1}} \\
&\leq \sum_{n<m} \frac{g(n)}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{m} \frac{g(n)}{2^{n+1}} \\
&< \sum_{n\leq m} \frac{g(n)}{2^{n+1}} + \sum_{n\geq m+1} \frac{g(n)}{2^{n+1}} \\
&= \sum_{n\in\omega} \frac{g(n)}{2^{n+1}},
\end{aligned}$$

de manera que este caso tampoco se puede dar.

Por lo tanto, el único caso posible es el I. Esto significa que si $g \neq f$ y $\sum_{n\in\omega} \frac{f(n)}{2^{n+1}} = \sum_{n\in\omega} \frac{g(n)}{2^{n+1}}$, entonces g está totalmente determinada por el primer valor en el que difiere de f. Además, mediante este argumento hemos demostrado también que, de existir f y g con esta propiedad, entonces f y g son sucesiones que a partir de un momento se vuelven constantes. Más aún, hemos establecido que si $m \in \omega$ es el primer número natural tal que $f(m) \neq g(m)$, entonces $m+1$ es el mínimo número natural tal que para toda $n \geq m+1$, $f(n) = f(m+1)$ y $g(n) = g(n+1)$, con $f(m+1) \neq g(m+1)$.[16] De esta manera, lo anterior nos permite concluir que, para todo $a \in [0,1]$, $|F^{-1}[\{a\}]| \leq 2$, que es lo que queríamos demostrar.

(iii) Ahora, utilizando nuevamente la σ-aditividad de ν_1 y el hecho de que F es función, tenemos que si $\{A_n : n \in \omega\}$ es una colección de subconjuntos ajenos del intervalo $[0,1]$, entonces

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) &= \nu_1\left(F^{-1}\left[\bigcup_{n\in\omega} A_n\right]\right) \\
&= \nu_1\left(\bigcup_{n\in\omega} F^{-1}[A_n]\right) \\
&= \sum_{n\in\omega} \nu_1(F^{-1}[A_n]) \\
&= \sum_{n\in\omega} \nu(A_n).
\end{aligned}$$

[16] En particular esto significa que los únicos $a \in [0,1]$ para los que que hay $f \neq g$ tales que $a = \sum_{n\in\omega} \frac{f(n)}{2^{n+1}} = \sum_{n\in\omega} \frac{g(n)}{2^{n+1}}$, son aquellos de la forma $a = \frac{k}{2^m}$ para $0 \leq k < 2^m$, ya que, por el Lema 3.48, si f es una sucesión que a partir de un momento vale 0, entonces $\sum_{n\in\omega} \frac{f(n)}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^m}$ para algunos $k, m \in \omega$.

Esto concluye la prueba de que ν es una medida para el intervalo $[0,1]$, de manera que sólo resta verificar que coincide con la Medida de Lebesgue en todos los subconjuntos medibles del $[0,1]$.

El primer paso para demostrar esto, será ver que μ coincide con la Medida de Lebesgue en todos los intervalos de la forma $\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right) \subseteq [0,1]$ con $k \in \omega$ es decir, que para todo $m \in \mathbb{N}^+$ y todo $0 \leq k < 2^m$, se tiene que $\nu\left(\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right)\right) = \frac{1}{2^m}$.

Para ver esto, nótese que para toda sucesión s de longitud m, la Observación (3.51) y la contención dada en (3.8) implican que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^m} &= \mu(X_s) \\
&\leq \mu\left(\bigcup\left\{X_f : \sum_{n\in\omega} \frac{f(n)}{2^{n+1}} \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]\right\}\right) \\
&= \nu_1\left(\left\{f \in {}^{\omega}\{0,1\} : \sum_{n\in\omega} \frac{f(n)}{2^{n+1}} \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]\right\}\right) \\
&= \nu_1\left(F^{-1}\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]\right) \\
&= \nu\left(\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como ν es no trivial y σ-aditiva, $\nu\left(\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]\right) = \nu\left(\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right)\right)$, de manera que dado $m \in \mathbb{N}^+$, para todo $0 \leq k < 2^m$ tenemos que $\frac{1}{2^m} \leq \nu\left(\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right)\right)$. Nuevamente la σ-aditividad de ν nos permite asegurar que todas estas desigualdades son en realidad igualdades, ya que si para algún $0 \leq k < 2^m$ se tuviera que $\frac{1}{2^m} < \nu\left(\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right)\right)$, entonces

$$\begin{aligned}
\nu([0,1]) = \nu([0,1)) &= \nu\left(\bigcup_{k=0}^{2^m-1}\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{2^m-1} \nu\left(\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right)\right) \\
&< \sum_{k=0}^{2^m-1} \frac{1}{2^m} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción a la condición (a) de la definición de medida.

Hasta aquí hemos demostrado que ν coincide con la Medida de Lebesgue en todos los intervalos de la forma $[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m})$, con $k \in \omega$ y $m \in \mathbb{N}^+$. Demostraremos ahora que ν coincide con $\mathfrak{L}$ en todos los conjuntos Lebesgue medibles. Para ello, verificaremos primero que si $G \subseteq [0,1]$ es un intervalo abierto, entonces $\nu(G) = \mathfrak{L}(G)$. Posteriormente utilizaremos el Teorema 1.45 para concluir que $\nu \restriction_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{L}$.

Para la primera parte de nuestra afirmación, tomemos G un intervalo abierto en $[0,1]$ y observemos que, por el Lema 3.49, G se puede escribir como unión numerable de intervalos ajenos por parejas de la forma $[\frac{a}{2^k}, \frac{a+1}{2^k})$, donde $a \in \mathbb{Z}$ y $k \in \omega$. Como ν es σ-aditiva, esto implica en particular que $\nu(G) = \mathfrak{L}(G)$.

Para el siguiente paso, notemos que utilizando lo anterior y el hecho de que $\nu(\{a\}) = 0$ para todo $a \in [0,1]$, como ν es σ-aditiva, podemos concluir que $\nu \restriction_{\mathcal{F}\cap\mathcal{P}([0,1])} = \mathfrak{L}$, donde $\mathcal{F}$ es el álgebra de conjuntos definida en la Notación 1.5. De aquí que una versión análoga al Teorema 1.45 de la unicidad de la Medida de Lebesgue, pero considerando ahora únicamente al intervalo $[0,1]$ como espacio de medida, nos asegura que $\nu \restriction_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{L}$, como queríamos demostrar. □

El resultado anterior proporcionó por primera vez la posibilidad de la existencia de un cardinal débilmente inaccesible, ya que si se lograra extender la Medida de Lebesgue, $2^{\aleph_0}$ resultaría ser un cardinal de medida real y, por el Teorema 3.16, tendríamos que es débilmente inaccesible. Más aún, para Ulam este resultado representaba una posibilidad de refutar definitivamente la Hipótesis del Continuo, según lo demostrado en el Teorema 2.6.

3.2.7. El Teorema de Ulam

Todo el trabajo hecho a lo largo de este capítulo nos permite finalmente demostrar el resultado más importante que tenemos respecto al Problema de la Medida en la Teoría de Conjuntos, que es el teorema mediante el que Ulam sintetizó todos los resultados obtenidos a partir de los dos caminos posibles: medidas con átomos y medidas sin átomos.

Teorema 3.53 (Ulam) *Si existe una medida σ-aditiva no trivial para un conjunto S, entonces se cumple alguna de las siguientes afirmaciones:*

(i) Existe una medida bivaluada para S y $|S|$ es mayor o igual al mínimo cardinal fuertemente inaccesible, o bien,

(ii) existe una medida sin átomos para $2^{\aleph_0}$ y $2^{\aleph_0}$ es mayor o igual al mínimo cardinal débilmente inaccesible.

Demostración. Supongamos que μ es una medida σ-aditiva y no trivial para un conjunto S. Entonces se tiene alguno de los siguientes casos:

Caso I. Si existe $A \subseteq S$ tal que A es un átomo de μ, entonces por el Corolario 3.31 existe un ultrafiltro σ-completo y no principal sobre S. De aquí que también hay uno sobre $|S|$, de manera que $|S|$ es medible y, por el Teorema 3.40, esto implica que $|S|$ es fuertemente inaccesible. Así, $|S|$ es mayor o igual al mínimo cardinal fuertemente inaccesible.

Caso II. Si μ es una medida sin átomos, entonces el Lema 3.43 nos dice que existe una medida σ-aditiva, no trivial y sin átomos para algún $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$. Luego, por la Proposición 3.46, esto implica que hay una medida para $2^{\aleph_0}$. Por tanto, si λ es el mínimo cardinal que admite una medida σ-aditiva y no trivial, entonces $\lambda \leq 2^{\aleph_0}$ y, por el Corolario 2.20, λ es un cardinal de medida real. Así, el Teorema 3.16 implica que λ es débilmente inaccesible y, por tanto, $2^{\aleph_0}$ es mayor o igual que el mínimo cardinal débilmente inaccesible. □

En este capítulo hemos desarrollado uno de los objetivos centrales de esta tesis, que es el de establecer, motivados por el Problema de la Medida, el concepto de cardinal medible y toda la teoría que surgió a raíz de este problema. En este contexto, cabe destacar que el Teorema de dicotomía de Ulam pone fin a la pregunta de si es posible encontrar un conjunto (o equivalentemente, un número cardinal) para el que se pueda definir una medida σ-aditiva y no trivial. La respuesta que nos da el teorema anterior, junto con el hecho de que no es posible demostrar la existencia de cardinales débilmente inaccesibles desde los axiomas de ZFE, es que tampoco es posible dar una solución afirmativa al Problema de la Medida a partir de estos axiomas. Sin embargo, lo cierto es que hasta ahora tampoco hemos encontrado elementos para decir que sería inconsistente con ZFE suponer la existencia de algún cardinal medible. Además, hemos comentado que, para muchos especialistas en Teoría de Conjuntos, resulta natural suponer la existencia de este tipo de cardinales, ya que el compromiso ontológico que es necesario adquirir para definirlos, es análogo al que se da al establecer el Axioma de Infinito, que es indispensable para poder ver a la colección de números naturales como un conjunto. De esta forma, resulta interesante preguntarse qué consecuencias puede tener sobre la Teoría de Conjuntos la suposición de que existen cardinales medibles. El siguiente capítulo tiene como objetivo establecer algunas de estas consecuencias en el marco de la teoría de los cardinales grandes.

CAPÍTULO 4

Otros cardinales grandes

Hasta ahora hemos demostrado que todo cardinal medible es fuertemente inaccesible y, por lo tanto, es considerado un cardinal grande, ya que su existencia no se puede demostrar desde los axiomas de ZFE. Sin embargo, de todos los cardinales grandes que se han definido hasta ahora, los débilmente inaccesibles y los fuertemente inaccesibles resultan ser los más pequeños pues su existencia se puede demostrar a partir de suponer la existencia de los otros cardinales grandes de los que hemos hablado, que son los medibles. En contraste, estos últimos resultarán estar por arriba de otros tipos de cardinales que, como ellos, se han definido a partir de ideas que surgen en diversas áreas de las matemáticas y finalmente convergen en la teoría de los cardinales grandes.

En este capítulo daremos a conocer aquellos cardinales grandes que resultan ser *más pequeños* que los medibles y expondremos de manera muy general las relaciones que existen entre ellos.

4.1. Cardinales de Mahlo

La primera especie de cardinales grandes que estudiaremos fueron introducidos por Paul Mahlo en 1911.[1] Antes de motivar su definición, necesitaremos dar a conocer algunas definiciones que surgen a partir de ideas topológicas. Al igual que como en los números reales lo único que necesitamos para hablar de conjuntos abiertos o cerrados es el orden lineal de $\mathbb{R}$, en los números ordinales y cardinales podemos establecer conceptos análogos aprovechando el buen orden inducido por la relación $\in$. Así pues, podemos considerar la siguiente definición.

[1] Véase [Jec02] pág. 105.

Definición 4.1 *Sea κ un cardinal regular no numerable y sea $C \subseteq \kappa$. Decimos que C es **cerrado** en κ si y sólo si dados un ordinal límite $\gamma < \kappa$ y una sucesión no decreciente $\{\alpha_\xi : \xi < \gamma\} \subseteq C$, se tiene que $\lim_{\xi<\gamma} \alpha_\xi \in C$.*

La siguiente definición se refiere a una especie muy particular de intersección de conjuntos y será de gran importancia para llegar al concepto de *cardinal de Mahlo*.

Definición 4.2 *Sea $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una κ-sucesión de subconjuntos de κ. Definimos la **intersección diagonal** de esta sucesión como el conjunto*

$$\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha := \left\{ \xi < \kappa : \xi > 0 \ y \ \xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} X_\alpha \right\}.$$

La siguiente observación nos permitirá ver con más facilidad qué tipo de conjunto representa una intersección diagonal.

Observación 4.3 *Si $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una κ-sucesión de subconjuntos de κ, entonces*

(i) $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \bigcap_{\alpha<\kappa} (X_\alpha \cup \{\xi < \kappa : \xi \leq \alpha\})$ *y*

(ii) $\bigcap_{\alpha<\kappa} X_\alpha \subseteq \triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha$.

A continuación enunciaremos un resultado que nos deja ver algunas de las propiedades de los conjuntos que son cerrados y no acotados.[2] Para evitar ambigüedad en los enunciados, cuando hablemos de un conjunto cerrado no acotado nos estaremos refiriendo a uno que es cerrado *y* no acotado.

Proposición 4.4 *Sea κ un cardinal regular no numerable. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas.*

(a) La intersección de menos de κ conjuntos que son cerrados no acotados en κ es un conjunto cerrado no acotado en κ.

(b) La intersección diagonal de κ conjuntos cerrados no acotados en κ es nuevamente un conjunto cerrado no acotado en κ.

Demostración. Sea κ un cardinal regular no numerable.

(a) Para demostrar esta afirmación, tomemos $0 < \gamma < \kappa$ y $\{C_\alpha : \alpha < \gamma\}$ una colección de subconjuntos cerrados no acotados de κ. Demostraremos por inducción sobre γ que su intersección es cerrada y no acotada en κ.

- Para $\gamma = 1$ el resultado es claro.

[2] Recordemos de la Definición 3.6 que $X \subseteq \kappa$ es no acotado si y sólo si $\sup(X) = \kappa$. Este es otro ejemplo de un concepto que surge de la topología y que podemos establecer para cardinales haciendo uso del buen orden que hay entre ellos.

- Supongamos que la afirmación es cierta para β y consideremos $\{C_\alpha : \alpha < \beta + 1\}$ una familia de subconjuntos cerrados no acotados de κ. Entonces $\bigcap_{\alpha<\beta+1} C_\alpha = \left(\bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha\right) \cap C_\beta$ es intersección de dos cerrados en κ y es claro que es cerrado en κ. Así, sólo resta verificar que este conjunto es no acotado. Para ello, tomemos $\alpha < \kappa$. Como por hipótesis inductiva $\bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha$ es no acotado, existe $\alpha_0 > \alpha$ tal que $\alpha_0 \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha$. Análogamente, como C_β también es no acotado en κ, existe $\alpha_1 > \alpha_0$ tal que $\alpha_1 \in C_\beta$. De esta manera, podemos construir por recursión sobre $n \in \omega$ una sucesión creciente $\{\alpha_n : n \in \omega\}$ tal que $\alpha < \alpha_0$ y donde $\alpha_{2k} \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha$ y $\alpha_{2k+1} \in C_\beta$ para todo $k \in \omega$.
  Así, si $\lambda := \text{lím}_{n<\omega} \alpha_n = \text{lím}_{k<\omega} \alpha_{2k} = \text{lím}_{k<\omega} \alpha_{2k+1}$, entonces, como los intersecandos son cerrados, $\lambda \in \left(\bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha\right) \cap C_\beta = \bigcap_{\alpha<\beta+1} C_\alpha$ y $\lambda > \alpha$.
- Por último, supongamos que γ es un ordinal límite tal que para todo $\alpha < \gamma$ se tiene que $\bigcap_{\xi<\alpha} C_\xi$ es cerrado no acotado. Ahora, para cada $\alpha < \gamma$ definamos al conjunto $D_\alpha := \bigcap_{\xi\leq\alpha} C_\xi$. Obsérvese que:
  (1) por el paso inductivo anterior, para todo $\alpha < \gamma$, D_α es cerrado no acotado, pues tanto $\bigcap_{\xi<\alpha} C_\xi$ como C_α lo son;
  (2) $\{D_\alpha : \alpha < \gamma\}$ es una cadena $\subseteq$-descendente de subconjuntos de κ, es decir, $D_0 \supseteq D_1 \supseteq ... \supseteq D_\alpha \supseteq ...$;
  (3) $\bigcap_{\alpha<\gamma} D_\alpha = \bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha$.

  Denotemos por $\mathcal{C} := \bigcap_{\alpha<\gamma} D_\alpha$. Es claro que $\mathcal{C}$ es un conjunto cerrado. Para ver que $\mathcal{C}$ es no acotado, tomemos $\alpha < \kappa$ y definamos recursivamente una sucesión $\{\beta_\xi : \xi < \gamma\}$ tal que:
  (i) $\beta_0 \in D_0$, $\beta_0 > \alpha$ y
  (ii) para cada $0 < \xi < \gamma$, $\beta_\xi \in D_\xi$ es tal que $\beta_\xi > \sup\{\beta_\eta : \eta < \xi\}$.

  Nótese que como κ es regular y $\gamma < \kappa$, esta sucesión tiene que ser acotada en κ, así que si $\beta =: \text{lím}_{\xi<\gamma} \beta_\xi$, entonces $\beta < \kappa$.
  Luego, para cada $\eta < \gamma$ se tiene que $\beta = \text{lím}_{\eta\leq\xi<\gamma} \beta_\xi$, donde $\{\beta_\xi : \eta \leq \xi < \gamma\} \subseteq D_\eta$. Así, como D_η es cerrado, $\beta \in D_\eta$, por lo que $\beta \in \bigcap_{\eta<\gamma} D_\eta$ y además $\beta > \alpha$. Esto significa que $\mathcal{C} = \bigcap_{\eta<\gamma} D_\eta$ es no acotado, como queríamos demostrar.

(b) Para esta afirmación, sea $\{C_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una sucesión de κ subconjuntos cerrados no acotados de κ. Obsérvese que

$$\begin{aligned}
\triangle_{\eta<\kappa} C_\eta &= \left\{\xi < \kappa : \xi > 0 \text{ y } \xi \in \bigcap_{\eta<\xi} C_\eta\right\} \\
&= \left\{\xi < \kappa : \xi > 0 \text{ y } \xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} \bigcap_{\eta\leq\alpha} C_\eta\right\} \\
&= \triangle_{\alpha<\kappa} \left(\bigcap_{\eta\leq\alpha} C_\eta\right).
\end{aligned}$$

Así, si para cada $\alpha < \kappa$ definimos $D_\alpha := \bigcap_{\eta \leq \alpha} C_\eta$, por el inciso (a) tenemos que D_α es cerrado no acotado en κ. Por otra parte, se cumple que:

(i) $\triangle_{\eta<\kappa} C_\eta = \triangle_{\eta<\kappa} D_\eta$ y

(ii) la colección $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una cadena descendente de subconjuntos de κ, es decir, $D_0 \supseteq D_1 \supseteq ... \supseteq D_\alpha \supseteq ....$

Sea $D := \triangle_{\alpha<\kappa} D_\alpha$. Afirmamos que D es cerrado. Para demostrarlo, sea $\gamma < \kappa$ un ordinal límite y sea $\{\alpha_\xi : \xi < \gamma\}$ una sucesión no decreciente de elementos de D. Queremos demostrar que $\text{lím}_{\xi<\gamma} \alpha_\xi \in D$, es decir, que $\text{lím}_{\xi<\gamma} \alpha_\xi \in D_\eta$ para todo $\eta < \text{lím}_{\xi<\gamma} \alpha_\xi$.

Así, tomemos $\eta < \text{lím}_{\xi<\gamma} \alpha_\xi$ y sea $X_\eta := \{r \in D : \eta < r < \text{lím}_{\xi<\gamma} \alpha_\xi\}$. Veamos que X_η satisface que $X_\eta \subseteq D_\eta$. Obsérvese que si $r \in X_\eta$, entonces $r \in D$ y, por definición de intersección diagonal, $r \in \bigcap_{\alpha<r} C_\alpha$. Además, como $\eta < r$, $\bigcap_{\alpha<r} C_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha\leq\eta} C_\alpha = D_\eta$, así que $r \in D_\eta$, como queríamos demostrar.

Además, $\text{lím}_{\xi<\gamma} \alpha_\xi = \bigcup\{X_\eta : \eta < \text{lím}_{\xi<\gamma} \alpha_\xi\} \in C_\eta$ para todo $\eta < \text{lím}_{\xi<\gamma} \alpha_\xi$. Por lo tanto, $\text{lím}_{\xi<\gamma} \alpha_\xi \in D$ y entonces D es cerrado.

Veamos ahora que D es no acotado. Sea $\alpha < \kappa$ y construyamos recursivamente una sucesión $\{\beta_n : n \in \omega\}$ de tal manera que:

(i) $\beta_0 \in D_0$ y $\beta_0 > \alpha$ (podemos hacer esto pues D_0 es no acotado en κ) y

(ii) para cada $n \in \omega$, utilizando el hecho de que D_{β_n} es no acotado, tomamos $\beta_{n+1} > \beta_n$ tal que $\beta_{n+1} \in D_{\beta_n}$.

Afirmamos que $\beta := \text{lím}_{n<\omega} \beta_n \in D$. Para mostrar esto, notemos que para cada $\xi < \beta$ existe $n \in \omega$ tal que $\xi < \beta_n$. Sin embargo, si $k > n$, la condición (ii) nos dice que $\beta_k \in D_{\beta_n}$, que es un conjunto cerrado, así que $\beta = \sup\{\beta_k : n < k < \omega\} \in D_{\beta_n}$. Luego, como $\xi < \beta_n$, $D_\xi \supseteq D_{\beta_n}$, de manera que $\beta \in D_\xi$ para todo $\xi < \beta$, es decir, $\beta \in \bigcap_{\xi<\beta} D_\xi$. Esto demuestra que $\beta \in D$ y, como $\beta > \alpha$, podemos concluir que D es no acotado. □

En relación a los conjuntos cerrados no acotados, podemos establecer la siguiente definición.

Definición 4.5 *Dado un cardinal κ regular y no numerable, decimos que un conjunto $S \subseteq \kappa$ es **estacionario** si y sólo si $S \cap C \neq \emptyset$ para todo C cerrado no acotado en κ.*

Nótese que si κ es un cardinal como en la definición anterior y α es un número ordinal tal que $\alpha < \kappa$, entonces el conjunto $S := \{\gamma < \kappa : \alpha < \gamma\}$ tiene intersección no vacía con cualquier conjunto no acotado en κ. Así, en particular tenemos que S es estacionario. Para establecer más claramente las propiedades los conjuntos estacionarios, enunciaremos la siguiente proposición.

Proposición 4.6 *Sea κ un cardinal regular no numerable. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas.*

(a) Todo cerrado no acotado en un cardinal κ es estacionario en κ y todo subconjunto de κ que contenga a un estacionario, es estacionario.

(b) Todo conjunto estacionario en κ es no acotado en κ.

(c) Si $E \subseteq \kappa$ es estacionario y C es cerrado no acotado en κ, entonces $E \cap C$ es estacionario en κ.

Demostración.

(a) Sean $C, D \subseteq \kappa$ dos conjuntos cerrados no acotados en κ. Por el inciso (a) de la Proposición 4.4, tenemos que $C \cap D$ es cerrado no acotado en κ, así que en particular $C \cap D \neq \emptyset$. Esto demuestra que C es estacionario. La afirmación de que todo subconjunto de κ que contiene a un estacionario es estacionario es inmediata.

(b) Sea E un conjunto estacionario en κ y sea $\alpha < \kappa$. Como $\{\xi < \kappa : \xi > \alpha\}$ es cerrado no acotado en κ, existe $\beta \in E \cap \{\xi < \kappa : \xi > \alpha\}$, es decir, existe $\alpha < \beta < \kappa$ tal que $\beta \in E$.

(c) Sea E un conjunto estacionario y sean C y C' dos cerrados no acotados en κ. Entonces $C \cap C'$ es cerrado no acotado por la Proposición 4.4, de manera que, como E es estacionario, $(E \cap C) \cap C' = E \cap (C \cap C') \neq \emptyset$, así que $E \cap C$ es estacionario. □

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del resultado anterior y de las propiedades de los cardinales regulares.

Corolario 4.7 *Si κ es un cardinal regular no numerable y $E \subseteq \kappa$ es un conjunto estacionario, entonces $|E| = \kappa$.*

Demostración. La prueba se sigue del hecho de que E es no acotado en κ y κ es regular. □

Los resultados anteriores nos dicen que los conjuntos estacionarios son aquellos no acotados que aunque no necesariamente son cerrados, tienen mucho en común con todos los cerrados no acotados contenidos en un cardinal dado.

La siguiente proposición establece una relación muy importante entre los cardinales fuertemente inaccesibles y los conjuntos cerrados no acotados.

Proposición 4.8 *Si κ es un cardinal fuertemente inaccesible, entonces el conjunto de cardinales fuertes menores que κ es cerrado no acotado en κ.*

Demostración. Sea $C := \{\lambda < \kappa : \forall \mu < \lambda (2^\mu < \lambda)\}$.

Veamos que C es un conjunto cerrado. Para ello, notemos que si $\gamma < \kappa$ es un ordinal límite y $\{\lambda_\xi : \xi < \gamma\}$ es una sucesión no decreciente de elementos en C, entonces $\lim_{\xi<\gamma} \lambda_\xi < \kappa$, ya que para cada ξ, $\lambda_\xi < \kappa$ y κ es regular. Por otro lado, $\lim_{\xi<\gamma} \lambda_\xi$ es fuerte, ya que si $\mu < \lim_{\xi<\gamma} \lambda_\xi$, entonces $\mu < \lambda_\xi$ para algún $\xi < \gamma$, de manera que $2^\mu < \lambda_\xi \leq \lim_{\xi<\gamma} \lambda_\xi$. Esto demuestra que C es cerrado.

Ahora, para ver que C es no acotado, consideremos $\alpha < \kappa$. Definamos por recursión sobre ω la siguiente sucesión de números cardinales.

$$\begin{array}{rcll} \lambda_0 & := & |\alpha|^+; & \\ \lambda_{n+1} & := & 2^{\lambda_n} & \text{para cada } n \in \omega. \end{array}$$

Nótese que $\{\lambda_n : n \in \omega\}$ es una sucesión creciente de números cardinales. Así, podemos definir $\lambda := \lim_{n\in\omega} \lambda_n$. Como κ es un cardinal fuerte y $\alpha < \kappa$, la Observación 3.36 nos permite concluir que $\alpha < |\alpha|^+ < \kappa$. De esta manera, mediante un argumento inductivo podemos ver que, para todo $n \in \omega$, $\lambda_n < \kappa$ y, como κ es regular y mayor que $\aleph_0$, κ no puede ser unión de $\aleph_0$ subconjuntos de cardinalidad menor que κ. Así, como $\lambda = \bigcup_{n\in\omega} \lambda_n$, $\lambda < \kappa$. Además, λ es un cardinal fuerte pues, si $\mu < \lambda$, entonces existe $m \in \omega$ tal que $\mu < \lambda_m$ y, por tanto, $2^\mu \leq 2^{\lambda_m} = \lambda_{m+1} < \lambda$. Esto demuestra que $\lambda \in C$ y, como $\alpha < |\alpha|^+ < \lambda$, se sigue que C es no acotado en κ. □

Observación 4.9 *Es importante notar que si κ es el mínimo cardinal fuertemente inaccesible, entonces todos los cardinales fuertes menores que κ son singulares. Así, la proposición anterior implica que, en este caso, el conjunto de todos los cardinales fuertes singulares menores que κ es cerrado no acotado en κ.*

Esta observación nos permite ver que si κ es el primer cardinal inaccesible fuerte, entonces el conjunto de cardinales regulares menores que κ no forman un conjunto estacionario en κ, ya que de ser así, dicho conjunto tendría que intersectar al cerrado no acotado de cardinales singulares menores que κ. De hecho, podemos establecer un resultado aún más fuerte que enunciaremos a continuación. Esto motivará la definición central de esta sección, que es la de cardinal de Mahlo.

Proposición 4.10 *Si κ es un cardinal fuertemente inaccesible y es el α-ésimo tal, entonces $\alpha \leq \kappa$. Más aún, si $\alpha < \kappa$, entonces el conjunto de cardinales regulares menores que κ no es estacionario en κ.*

Demostración. Supongamos que κ y α son tales que κ es el α-ésimo cardinal fuertemente inaccesible. El hecho de que $\alpha \leq \kappa$ se sigue de que

$$\{\lambda < \kappa : \lambda \text{ es fuertemente inaccesible}\} \subseteq \kappa.$$

Así, la cardinalidad de este conjunto es menor o igual que κ y, por tanto, al enumerar de manera creciente a los cardinales fuertemente inaccesibles menores o iguales que κ, tendremos que hacerlo con un número ordinal menor o igual que κ.

Para la segunda parte de la proposición, supongamos que κ es el α-ésimo cardinal fuertemente inaccesible con $\alpha < \kappa$. Razonando por contradicción, supongamos también que el conjunto de cardinales regulares menores que κ es estacionario en κ. Esto junto con el inciso (c) de la Proposición 4.6 y la Proposición 4.8 implican que el conjunto de cardinales fuertemente inaccesibles menores que κ es estacionario. Por otro lado, como κ es el α-ésimo cardinal fuertemente inaccesible, podemos suponer que $\{\lambda_\gamma : \gamma < \alpha\}$ es una enumeración biyectiva del conjunto $\{\lambda < \kappa : \lambda \text{ es un cardinal fuertemente inaccesible}\}$. De este modo, $|\{\lambda_\gamma : \gamma < \alpha\}| = |\alpha| < \kappa$. Sin embargo, esto es una contradicción pues, por el Corolario 4.7, todo conjunto estacionario en κ tiene cardinalidad κ. $\square$

La proposición anterior resulta tan importante pues motiva por fin la siguiente definición.

Definición 4.11 *Decimos que un cardinal κ es de **Mahlo** si y sólo si κ es fuertemente inaccesible y el conjunto de cardinales regulares menores que κ es estacionario en κ.*

Una caracterización muy útil de los cardinales de Mahlo es la siguiente, pues nos permite intercambiar la regularidad de los cardinales menores que κ en la definición anterior, por una condición más fuerte.

Proposición 4.12 *κ es un cardinal de Mahlo si y sólo si es fuertemente inaccesible y el conjunto de cardinales fuertemente inaccesibles menores que κ es estacionario en κ.*

Demostración. Sea κ un cardinal de Mahlo. Por la Proposición 4.8 tenemos que el conjunto de cardinales fuertes menores que κ es cerrado no acotado en κ. Por otro lado, por definición tenemos que los cardinales regulares menores que κ forman un conjunto estacionario, así que por el inciso (c) de la Proposición 4.6, tenemos que el conjunto de cardinales fuertemente inaccesibles menores que κ es estacionario en κ.

La implicación recíproca se sigue directamente del inciso (a) de la Proposición 4.6. $\square$

El siguiente corolario establece que los cardinales de Mahlo son estrictamente más grandes que los fuertemente inaccesibles.

Corolario 4.13 *Si κ es un cardinal de Mahlo, entonces κ es el κ-ésimo cardinal fuertemente inaccesible. Más aún, no todo cardinal fuertemente inaccesible es de Mahlo.*

Demostración. Supongamos que κ es un cardinal de Mahlo. La Proposición 4.10 establece entonces que para todo $\alpha < \kappa$, si κ fuera el α-ésimo cardinal fuertemente inaccesible, el conjunto de cardinales regulares menores que κ no sería estacionario, contradiciendo la definición de cardinal de Mahlo. Así, podemos concluir que κ es el κ-ésimo cardinal fuertemente inaccesible.
Para demostrar la segunda parte de este corolario, obsérvese que si κ_0 es el mínimo cardinal de Mahlo, entonces es también el κ_0-ésimo cardinal fuertemente inaccesible y, por tanto, hay cardinales fuertemente inaccesibles menores que κ_0 que, por elección de κ_0, no son de Mahlo. $\square$

4.1.1. Medidas normales

Dado que el objetivo principal de este capítulo es establecer relaciones entre algunos cardinales grandes y los medibles, comenzaremos por demostrar que todos los cardinales medibles son de Mahlo. Sin embargo, para ello necesitaremos definir una especie particular de ultrafiltros κ-completos mediante los que también es posible caracterizar a los cardinales medibles. Estos ultrafiltros serán llamados *normales* y estarán determinados por su comportamiento respecto a las intersecciones diagonales definidas anteriormente.

Definición 4.14 *Sea F un filtro sobre un cardinal κ. Decimos que F es* ***normal*** *si y sólo si es cerrado bajo intersecciones diagonales, es decir, si $X_\alpha \in F$ para todo $\alpha < \kappa$, entonces $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha \in F$.*

Con el objetivo de caracterizar a los ultrafiltros normales en términos de las propiedades de cierto tipo de funciones definidas sobre números cardinales, será necesario establecer el siguiente concepto.

Definición 4.15 *Sea β un ordinal y sea $f : \beta \to \beta$ una función. Decimos que f es una* ***función regresiva*** *sobre un conjunto $S \subseteq \beta$ si y sólo si $f(\alpha) < \alpha$ para todo $\alpha \in S$ tal que $\alpha > 0$.*

El lema que enunciaremos a continuación establece cuál es la relación que existe entre los ultrafiltros normales y las funciones regresivas que acabamos de definir.

Lema 4.16 *Sea U un ultrafiltro κ-completo sobre un cardinal κ. Entonces U es normal si y sólo si para todo $S_0 \in U$ y para toda función regresiva f sobre S_0, existe un conjunto $S \subseteq S_0$ tal que $S \in U$ y f es constante sobre S.*

Demostración. Sea U un ultrafiltro κ-completo sobre κ. Supongamos primero que U es normal y que $f : \kappa \to \kappa$ es una función regresiva sobre un conjunto $S_0 \in U$. Razonando por contradicción, supongamos que f no es constante sobre S para todo $S \in U$ tal que $S \subseteq S_0$. Esto implica que para todo $\gamma < \kappa$, el conjunto $Y_\gamma := \{\alpha \in S_0 : f(\alpha) = \gamma\} \notin U$, ya que f es constante en Y_γ y $Y_\gamma \subseteq S_0$. Como U es ultrafiltro, de aquí se sigue que $\kappa - Y_\gamma \in U$. Además, obsérvese que $Y_\gamma = S_0 \cap \{\alpha \in \kappa : f(\alpha) = \gamma\}$, por lo que $\kappa - Y_\gamma = (\kappa - S_0) \cup \{\alpha \in S_0 : f(\alpha) \neq \gamma\}$. Así, la Proposición 3.22 nos dice que, como $\kappa - S_0 \notin U$, $\{\alpha \in S_0 : f(\alpha) \neq \gamma\} \in U$ para todo $\gamma < \kappa$. De aquí que, si para cada $\gamma < \kappa$ definimos al conjunto $X_\gamma := \{\alpha \in S_0 : f(\alpha) \neq \gamma\}$, como U es normal, $\triangle_{\gamma<\kappa} X_\gamma \in U$. Así, en particular tenemos que $\triangle_{\gamma<\kappa} X_\gamma \neq \emptyset$. Sin embargo, si $\alpha \in \triangle_{\gamma<\kappa} X_\gamma$, entonces $\alpha \in \bigcap_{\gamma<\alpha} X_\gamma$, así que $f(\alpha) \neq \gamma$ para todo $\gamma < \alpha$ y, por tanto, $f(\alpha) \geq \alpha$. Esto contradice el hecho de que f es regresiva sobre S_0, por lo que se sigue la afirmación.

Recíprocamente, supongamos que para toda función $f : \kappa \to \kappa$ regresiva sobre un conjunto $S_0 \in U$, existe $S \subseteq S_0$ tal que $S \in U$ y f es constante en S. Para ver que U es normal, sea $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq U$ una sucesión en U de subconjuntos de κ. Razonando nuevamente por contradicción, supongamos que $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha \notin U$. Entonces, como U es ultrafiltro, nuevamente por el Teorema 3.20 se tiene que el conjunto $S_0 := \kappa - \triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha \in U$. De este modo, para cada $\alpha \in S_0$ podemos tomar

ξ_α como el mínimo ordinal tal que $\xi_\alpha < \alpha$ y $\alpha \notin X_{\xi_\alpha}$. Así, definamos una función $f : \kappa \to \kappa$ como

$$f(\alpha) := \begin{cases} \xi_\alpha & \text{si } \alpha \in S_0 \\ 0 & \text{si } \alpha \notin S_0. \end{cases}$$

Por construcción, la función f es regresiva sobre $S_0 \in U$. Sin embargo, por hipótesis existen $\gamma < \kappa$ y $S \subseteq S_0$ tales que $S \in U$ y $f(\alpha) = \gamma$ para todo $\alpha \in S$. Así, como para todo $\alpha \in S$ se tiene que $\alpha \notin X_{f(\alpha)} = X_\gamma$, $X_\gamma \cap S = \emptyset$. Esto es una contradicción ya que $X_\gamma, S \in U$ y U es un filtro, por lo que podemos concluir que $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha \in U$ y, por tanto, U es normal. □

A continuación definiremos una especie muy importante de funciones entre números cardinales cuyas propiedades serán utilizadas posteriormente para establecer algunas características de los filtros normales. Nuevamente, los conceptos que definiremos a continuación surgen a partir de ideas motivadas en el Análisis Matemático pero que han encontrado una vasta cantidad de aplicaciones dentro de la Teoría de Conjuntos.

Definición 4.17 *Sean κ un cardinal regular no numerable y $f : \kappa \to \kappa$ una función. Decimos que f es* ***continua*** *si y sólo si para todo ordinal límite $\alpha < \kappa$, se tiene que $f(\alpha) = \text{lím}_{\xi<\alpha} f(\xi)$.*

Definición 4.18 *Sean κ un cardinal regular no numerable y $f : \kappa \to \kappa$ una función. Decimos que f es* ***normal*** *si y sólo si es creciente y continua.*

La razón por la que las funciones normales son de gran interés dentro del estudio que estamos realizando queda entablada en el siguiente resultado.

Lema 4.19 *Sea κ un cardinal regular y no numerable. Si $C \subseteq \kappa$ es un conjunto cerrado no acotado, entonces existe una única función normal que enumera a los elementos de C.*

Demostración. Sean κ un cardinal regular no numerable y $C \subseteq \kappa$ un conjunto cerrado no acotado. Dado que $(\kappa, <)$ es un buen orden, $(C, <\restriction_C)$ es un buen orden y, por tanto, el Teorema de enumeración[3] nos dice que existe un único isomorfismo entre $(C, <\restriction_C)$ y algún ordinal $(\lambda, <)$.[4] Consideremos $f : \kappa \to C$ definida recursivamente como sigue

$$f(0) := \text{mín}\, C$$

y si $f(\beta)$ ha sido definido para todo $\beta < \alpha$,

$$f(\alpha) := \text{mín}\{\gamma \in C : \forall \beta < \alpha(f(\beta) < \gamma)\}.$$

La función f está bien definida pues, como $C \neq \emptyset$ y $(\kappa, <)$ es un buen orden, existe $\text{mín}\, C$. Además, como κ es regular, $\sup_{\beta<\alpha} f(\beta) < \kappa$ y, como C es no acotado, existe $\gamma \in C$ tal que, para todo $\beta < \alpha$, $f(\beta) \leq \sup_{\beta<\alpha} f(\beta) < \gamma$. De este modo,

[3] Véase el Teorema A.18.

[4] Recordemos que una función $f : \lambda \to C$ es un isomorfismo si y sólo si f es biyectiva y para cualesquiera $\alpha < \beta < \lambda$ se cumple que $f(\alpha) < f(\beta)$.

tiene sentido hablar de $\min\{\gamma \in C : \forall\beta < \alpha(f(\beta) < \gamma)\}$ y, por tanto, f está bien definida. El hecho de que f es sobreyectiva es consecuencia de que en realidad $(\kappa, <)$ es isomorfo a $(C, <\restriction_C)$ y f coincide con el único isomorfismo que hay entre estos dos buenos órdenes.[5] Así, para concluir la prueba del lema sólo resta ver que f es una función normal, ya que de este modo estaremos probando también que f es creciente y, por tanto, inyectiva. Así, obsérvese que si $\beta < \alpha < \kappa$, la definición de f establece directamente que $f(\alpha) < f(\beta)$, de manera que f es en efecto una función creciente. Finalmente, para ver que f es continua supongamos que $\eta < \kappa$ es un ordinal límite. Como f es creciente, es claro que

$$\lim_{\beta<\eta} f(\beta) := \sup\{f(\beta) : \beta < \eta\} \leq f(\eta).$$

Razonando por contradicción, supongamos que

$$\sup\{f(\beta) : \beta < \eta\} < f(\eta).$$

Esto implica que existe un ordinal γ_0 tal que para todo $\beta < \eta$,

$$f(\beta) \leq \gamma_0 < f(\eta). \tag{4.1}$$

Afirmamos que para todo $\beta < \eta$, $f(\beta) < \gamma_0 < f(\eta)$. Esto es así pues, como η es un ordinal límite, para todo $\beta < \eta$ existe un número ordinal ξ tal que $\beta < \xi < \eta$. Como f es creciente, esto junto con la ecuación (4.1) implica que $f(\beta) < f(\xi) \leq \gamma_0$. De este modo, por definición de $f(\eta)$ tenemos que $f(\eta) \leq \gamma_0$, pero esto contradice el hecho de que $\gamma_0 < f(\eta)$. Así, hemos demostrado que γ_0 es tal que para todo $\beta < \eta$, $f(\beta) < \gamma_0$, por lo que la definición de f establece que entonces $f(\eta) \leq \gamma_0$. Esto es una contradicción ya que, por elección de γ_0, $\gamma_0 < f(\eta)$. Así, podemos concluir que

$$\lim_{\beta<\eta} f(\beta) = f(\eta)$$

y, por tanto, f es normal. □

El siguiente resultado profundiza en el estudio de los filtros normales.

Lema 4.20 *Sea κ un cardinal regular y no numerable. Si F es un filtro normal sobre κ que tiene a todos los segmentos finales de la forma $\{\alpha < \kappa : \alpha_0 < \alpha\}$ para algún $\alpha_0 \in \kappa$, entonces F tiene a todos los conjuntos cerrados no acotados de κ.*

Demostración. Lo primero que afirmamos es que si C_0 es el conjunto de todos los ordinales límite menores a κ, entonces $C_0 \in F$. Para ver esto, definamos para cada $\alpha < \kappa$ al conjunto $X_\alpha := \{\xi : \alpha + 1 < \xi < \kappa\}$. Cada $X_\alpha \in F$ por hipótesis, así que, como F es normal, $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha \in F$. Sin embargo, $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \{\xi < \kappa : \forall\alpha < \xi(\alpha + 1 < \xi < \kappa)\} = C_0$ y se sigue nuestra afirmación.

Para demostrar el lema, supongamos que $C \subseteq \kappa$ es un cerrado no acotado en κ. Por el Lema 4.19 podemos suponer que $\{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es la única enumeración creciente y continua de los elementos de C. Ahora, definamos para cada $\alpha < \kappa$ al conjunto $Y_\alpha := \{\xi : a_\alpha < \xi < \kappa\}$. Entonces para cada α, $Y_\alpha \in F$ por la hipótesis de los segmentos finales y, por tanto, $\triangle_{\alpha<\kappa} Y_\alpha \in F$.

[5] Véase el libro [HJ99] pág. 111.

Por otro lado, afirmamos que $C_0 \cap (\triangle_{\alpha<\kappa} Y_\alpha) \subseteq C$, ya que si $\xi \in C_0 \cap \triangle_{\alpha<\kappa} Y_\alpha$, entonces ξ es un ordinal límite y $\xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} Y_\alpha$, es decir, $\forall \alpha < \xi (a_\alpha < \xi < \kappa)$. Esto implica que $\lim_{\alpha<\xi} a_\alpha = a_\xi \leq \xi$. Luego, como la enumeración es creciente, tenemos que $\xi \leq a_\xi$, así que $\xi = a_\xi \in C$. Así, efectivamente $C_0 \cap (\triangle_{\alpha<\kappa} Y_\alpha) \subseteq C$ y, como $C_0 \cap (\triangle_{\alpha<\kappa} Y_\alpha) \in F$ y F es filtro, $C \in F$, que es lo que queríamos demostrar. $\square$

El lema que desarrollaremos a continuación nos permite establecer una relación entre los ya estudiados conjuntos estacionarios y las medidas que pudieran existir sobre un cardinal dado. Antes de formalizar dicho resultado, enunciaremos la siguiente definición que se refiere a aquellos ultrafiltros que son inducidos por una medida y que además son normales.

Definición 4.21 *Sea κ un cardinal medible y sea D un ultrafiltro κ-completo no principal sobre κ. Decimos que D es una* ***medida normal*** *para κ si y sólo si D es un filtro normal.*

Bajo esta noción, estamos listos para establecer el siguiente lema, que establece que los subconjuntos *grandes* de un cardinal respecto a una medida normal son estacionarios.

Lema 4.22 *Si D es una medida normal sobre un cardinal κ, entonces todo conjunto en D es estacionario.*

Demostración. Recordemos que si D es un ultrafiltro κ-completo y no principal sobre un cardinal κ, entonces todo subconjunto de κ de cardinalidad menor a κ tiene medida cero en la medida inducida por D. Equivalentemente, todo subconjunto de cardinalidad menor que κ no está en D. Esto implica que todos los segmentos iniciales de κ no están en D y, como D es ultrafiltro, todos los segmentos finales están en D. Ahora, sea $S \in D$ un elemento cualquiera del ultrafiltro y sea C un cerrado no acotado en κ. Entonces, por el Lema 4.20, $C \in D$ y, como D es filtro, $C \cap S \in D$. Por lo tanto, $C \cap S \neq \emptyset$ y entonces S es estacionario. $\square$

El lema anterior nos conducirá a establecer un resultado que nos dice que pedir una medida normal para un cardinal κ es equivalente a pedir una medida bivaluada y κ-aditiva como las trabajadas en el capítulo anterior. Así, al hablar de medidas normales no nos hemos alejado del Problema de la Medida generalizado por Banach.

Teorema 4.23 *Si κ es un cardinal medible, entonces existe una medida normal sobre κ. De hecho, si U es un ultrafiltro κ-completo y no principal sobre κ, entonces existe una función $f_* : \kappa \to \kappa$ tal que*

$$D_U^{f_*} := \{X \subseteq \kappa : {f_*}^{-1}[X] \in U\}$$

es una medida normal para κ.

Demostración. Sea U un ultrafiltro κ-completo no principal sobre κ. Definamos, para $f, g \in {}^{\kappa}\kappa$, la relación de equivalencia dada por

$$f \equiv g \text{ si y sólo si } \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U.$$

Es sencillo verificar que $\equiv$ es en efecto una relación de equivalencia sobre ${}^{\kappa}\kappa$, por lo que omitiremos los detalles. Sin embargo, obsérvese que la idea detrás de esta definición radica en que en términos de la medida dada para el cardinal κ dos funciones que están relacionadas coinciden en los valores que toman salvo por un conjunto de medida cero, por lo que mediante esta relación de equivalencia podemos restringirnos a considerar únicamente un representante de cada función que tiene un comportamiento significativamente distinto al de las demás.[6]

Ahora, si denotamos por $[f]$ a la clase de equivalencia de $f \in {}^{\kappa}\kappa$, podemos definir un orden en el conjunto ${}^{\kappa}\kappa/\equiv$ de la siguiente manera:

$$[f] < [g] \text{ si y sólo si } \{\alpha < \kappa : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in U.$$

Esta relación de orden está bien definida pues, si $f_1, f_2, g_1, g_2 \in {}^{\kappa}\kappa$ son tales que $[f_1] = [f_2]$, $[g_1] = [g_2]$ y $[f_1] < [g_1]$, entonces, si definimos

$$\begin{aligned} F &:= \{\alpha < \kappa : f_1(\alpha) = f_2(\alpha)\}; \\ G &:= \{\alpha < \kappa : g_1(\alpha) = g_2(\alpha)\} \text{ y} \\ H &:= \{\alpha < \kappa : f_1(\alpha) < g_1(\alpha)\}, \end{aligned}$$

por hipótesis tenemos que $F, G, H \in U$ y, como U es filtro, $F \cap G \cap H \in U$. Además, obsérvese que

$$F \cap G \cap H \subseteq \{\alpha < \kappa : f_2(\alpha) < g_2(\alpha)\},$$

por lo que usando nuevamente que U es un filtro, podemos concluir que $\{\alpha < \kappa : f_2(\alpha) < g_2(\alpha)\} \in U$ y, por tanto, $[f_2] < [g_2]$. Esto demuestra que la relación $<$ que hemos establecido entre las clases de equivalencia, está bien definida.

Veamos ahora que $<$ es un buen orden para ${}^{\kappa}\kappa/\equiv$.

(i) Por un lado, la relación $<$ es antirreflexiva pues, como U es filtro y $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) < f(\alpha)\} = \emptyset$, $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) < f(\alpha)\} \notin U$, por lo que efectivamente $[f] \not< [f]$.

(ii) Por otra parte, $<$ es una relación transitiva, pues si $[f] < [g]$ y $[g] < [h]$, entonces $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in U$ y $\{\alpha < \kappa : g(\alpha) < h(\alpha)\} \in U$, de modo que $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) < g(\alpha)\} \cap \{\alpha < \kappa : g(\alpha) < h(\alpha)\} \in U$.

Luego, como $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) < g(\alpha)\} \cap \{\alpha < \kappa : g(\alpha) < h(\alpha)\} \subseteq \{\alpha < \kappa : f(\alpha) < h(\alpha)\}$, $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) < h(\alpha)\} \in U$, es decir, $[f] < [h]$.

[6] El lector famliarizado con el desarrollo de la integral de Lebesgue recordará que este mismo proceso de las clases de equivalencia se lleva a cabo para definir la integral de una función y con ello la de todas las que coinciden con ella salvo por un conjunto de medida cero. Véase el libro [Bar95] pág. 54.

(iii) Por otro lado, $<$ es una relación tricotómica, pues si $[f] \neq [g] \in {}^{\kappa}\kappa/\equiv$, entonces $f \not\equiv g$, es decir, $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \notin U$. Como U es ultrafiltro, el Teorema 3.20 implica que $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) \neq g(\alpha)\} \in U$ y, por la Proposición 3.22, tenemos que $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in U$ ó $\{\alpha < \kappa : g(\alpha) < f(\alpha)\} \in U$ y sólo una de estas condiciones es cierta pues los conjuntos son ajenos. Esto significa que $[f] < [g]$ ó $[g] < [f]$ y sólo una, es decir, $<$ es tricotómica.

Hasta aquí hemos demostrado que $<$ es un orden lineal.

(iv) Para ver que $<$ es un buen orden, supondremos que existe una sucesión infinita decreciente en ${}^{\kappa}\kappa/\equiv$ para llegar a una contradicción.[7] Así pues, supongamos que $\{[f_n] : n \in \omega\}$ es una sucesión infinita decreciente en ${}^{\kappa}\kappa/\equiv$. Entonces, para cada $n \in \omega$ podemos definir al conjunto $X_n := \{\alpha < \kappa : f_n(\alpha) > f_{n+1}(\alpha)\}$. Cada $X_n \in U$ por hipótesis, así que, como U es κ-completo y $\kappa \geq \aleph_1$ por ser medible, $X := \bigcap_{n\in\omega} X_n \in U$. Esto implica que $X \neq \emptyset$, así que existe $\alpha < \kappa$ tal que la sucesión $\{f_n(\alpha) : n \in \omega\}$ es infinita decreciente en κ, pero esto es una contradicción a que $(\kappa, \in)$ es un buen orden.

Ya que hemos probado que $<$ es un buen orden para ${}^{\kappa}\kappa/\equiv$, notemos ahora que la función identidad $I : \kappa \to \kappa$ definida como $I(\alpha) := \alpha$, cumple que para todo $\gamma < \kappa$, $\{\alpha < \kappa : I(\alpha) \neq \gamma\} = \kappa - \{\gamma\} \in U$, pues U es no principal. De esta forma, el conjunto $\{[f] \in {}^{\kappa}\kappa : \forall\gamma < \kappa\{\alpha < \kappa : f(\alpha) \neq \gamma\} \in U\}$ es no vacío. Como las clases están bien ordenadas, podemos tomar $f_* : \kappa \to \kappa$ tal que $[f_*]$ sea la mínima clase con la propiedad de que para todo $\gamma < \kappa$, $\{\alpha < \kappa : f_*(\alpha) \neq \gamma\} \in U$.

Hecho esto, estamos listos para definir una medida normal para el cardinal κ. Sea $D_U^{f_*} := \{X \subseteq \kappa : {f_*}^{-1}[X] \in U\}$. Veamos que $D_U^{f_*}$ es una medida normal:

- El hecho de que $D_U^{f_*}$ es un ultrafiltro κ-completo sobre κ se sigue directamente de que U lo es y de las propiedades de la imagen inversa.
- $D_U^{f_*}$ es no principal, pues para todo $\gamma < \kappa$, ${f_*}^{-1}[\{\gamma\}] = \{\alpha < \kappa : f_*(\alpha) = \gamma\} \notin U$, ya que $\{\alpha < \kappa : f_*(\alpha) \neq \gamma\} \in U$ por elección de f_*. Esto significa que $\{\gamma\} \notin D_U^{f_*}$, como queríamos demostrar.
- Finalmente, para ver que $D_U^{f_*}$ es normal utilizaremos el Lema 4.16. Así, sea $h : \kappa \to \kappa$ una función regresiva sobre un conjunto $X \in D_U^{f_*}$. Probaremos que h es constante en algún conjunto en $D_U^{f_*}$ contenido en X.

  Sea $g : \kappa \to \kappa$ dada por
  $$g(\alpha) := h(f_*(\alpha)).$$
  Obsérvese que, como h es regresiva sobre X, para todo $\alpha \in {f_*}^{-1}[X]$ se tiene que $g(\alpha) = h(f_*(\alpha)) < f_*(\alpha)$ y, como ${f_*}^{-1}[X] \in D_U^{f_*}$, esto implica que $[g] < [f_*]$.

[7]En la Proposición A.9 del Apéndice A se demuestra, utilizando el Axioma de Elección, que dado un orden lineal R que éste sea un buen orden con el hecho de que no exista una sucesión infinta R-decreciente en el conjunto en cuestión.

Por otro lado, la minimalidad de $[f_*]$ nos dice que existe $\gamma < \kappa$ tal que $\{\alpha < \kappa : g(\alpha) \neq \gamma\} \notin U$ y, como U es ultrafiltro, podemos concluir que existe $\gamma < \kappa$ tal que $\{\alpha < \kappa : g(\alpha) = \gamma\} \in U$. Así, si $Y := \{\alpha < \kappa : g(\alpha) = \gamma\}$, entonces, para todo $\alpha \in Y$ se tiene que $\gamma = g(\alpha) = h(f_*(\alpha))$, por lo tanto, h es constante en $f_*[Y]$ y $f_*[Y] \in D_U^{f_*}$, pues $Y \subseteq {f_*}^{-1}[f_*[Y]]$ y $Y \in U$.

Esto concluye la prueba de que $D_U^{f_*}$ es una medida normal sobre κ. □

Concluiremos esta sección con un teorema que expresa directamente la manera en la que el Problema de la Medida ha motivado el estudio de cardinales grandes desde el punto de vista de los cardinales medibles. Sin embargo, antes de establecer la relación entre los cardinales de Mahlo y los medibles, necesitaremos la siguiente definición que aunque surge a partir del estudio de los cardinales regulares, su aparición no había sido pertinente hasta ahora.

Definición 4.24 *Sea α un ordinal límite. Definimos la* ***cofinalidad*** *de α como el mínimo número ordinal ϑ tal que α es el límite de una sucesión creciente de ordinales de longitud ϑ. Denotamos a la cofinalidad de α como $cf(\alpha)$.*

Un resultado sencillo de verificar es que para cualquier ordinal α, $cf(\alpha) \leq \alpha$ y de hecho, $cf(\alpha) = \alpha$ si y sólo si α es un cardinal regular.[8] Esta propiedad de la cofinalidad nos permitirá finalmente demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.25 *Todo cardinal medible es un cardinal de Mahlo.*

Demostración. Sea κ un cardinal medible. El Teorema 3.40 nos dice que κ es un cardinal fuertemente inaccesible, así que sólo resta probar que el conjunto de cardinales regulares menores que κ es estacionario en κ.

Con este propósito en mente, tomemos D una medida normal sobre κ que sabemos que existe por el Teorema 4.23. Afirmamos que $\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ es regular }\} \in D$. Razonando por contradicción, supongamos que $S := \{\alpha < \kappa : \alpha \text{ no es regular}\} = \{\alpha < \kappa : \alpha < cf(\alpha)\} \in D$. Nótese que si definimos a la función $f : \kappa \to \kappa$ como $f(\alpha) := cf(\alpha)$, tenemos que f es una función regresiva sobre el conjunto $S \in D$, así que, por la normalidad de D y el Lema 4.16, existe $\lambda < \kappa$ tal que el conjunto $E_\lambda := \{\alpha < \kappa : cf(\alpha) = \lambda\} \in D$. Ahora, para cada $\alpha \in E_\lambda$, sea $\{\alpha_\xi : \xi < \lambda\}$ una sucesión creciente tal que $\alpha = \text{lím}_{\xi<\lambda}\, \alpha_\xi$. Dicha sucesión existe pues $cf(\alpha) = \lambda$. Por otra parte, para cada $\xi < \lambda$, definamos una función $h_\xi : \kappa \to \kappa$ de tal manera que

$$h_\xi(\alpha) := \begin{cases} \alpha_\xi & \text{si } \alpha \in E_\lambda, \\ 0 & \text{si } \alpha \notin E_\lambda. \end{cases}$$

De esta forma, para cada $\xi < \lambda$ la función h_ξ es regresiva sobre $E_\lambda \in D$. Luego, como D es normal, existe $A_\xi \subseteq E_\lambda$ de medida uno tal que h_ξ es constante en A_ξ, o dicho de otra forma, existen $A_\xi \in D$ y $y_\xi \in \kappa$ tales que $h_\xi(\alpha) = \alpha_\xi = y_\xi$ para todo $\alpha \in A_\xi$.

Ahora, sea $A := \bigcap_{\xi<\lambda} A_\xi$. Por un lado tenemos que $A \in D$, pues D es κ completo y $\lambda < \kappa$. Sin embargo, podemos ver que A tiene a lo más un

[8] Véase el libro [HJ99] pág. 164.

elemento, ya que si $\alpha \in A$, entonces para todo $\xi < \lambda$ se tiene que $\alpha_\xi = y_\xi$, así que $\alpha = \text{lím}_{\xi\to\lambda}\alpha_\xi = \text{lím}_{\xi\to\lambda}y_\xi$. Esto es una contradicción al hecho de que D es un ultrafiltro no principal, de manera que podemos concluir que $\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ es regular }\} \in D$. Como D es una medida normal, el Lema 4.22 nos dice que $\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ es regular }\}$ es estacionario, como queríamos demostrar. □

Este resultado es particularmente importante pues demuestra también que hay cardinales fuertemente inaccesibles que no son medibles, ya que todos los cardinales medibles son de Mahlo, pero por el Corolario 4.13 sabemos que no todos los cardinales fuertemente inaccesibles son de Mahlo. La pregunta acerca de si todos los cardinales fuertemente inaccesibles son medibles estuvo abierta desde 1930, cuando Ulam demostró que todo cardinal medible es fuertemente inaccesible, hasta 1962, año en el que Tarski trabajaba con una especie de cardinales grandes a los que denominó *débilmente compactos* y que definiremos en la Sección 4.3, pero que lo llevaron a descubrir que la implicación contraria al resultado de Ulam no es cierta.[9]

4.2. Combinatoria infinita

A partir de la década de los cincuenta en el siglo XX, matemáticos como Erdös, Rado y Hajnal desarrollaron una teoría de combinatoria infinita basada en el análisis de las propiedades que tienen las particiones de ciertos conjuntos, como pueden ser las distintas maneras que tenemos de *clasificar* según su cardinalidad a los subconjuntos de un conjunto dado.

Estas nuevas ideas se convirtieron en una poderosa herramienta para establecer las propiedades de algunos cardinales grandes que ya habían sido definidos con anterioridad, por lo que en las secciones subsecuentes de este trabajo utilizaremos este enfoque que nos permitirá establecer algunos resultados más fácilmente.

Antes de introducir los conceptos en los que estará centrada esta sección, recordemos que dado un conjunto S, una partición para S es una colección P de conjuntos no vacíos y ajenos dos a dos tal que $S = \bigcup P$. Para el trabajo que desarrollaremos en este capítulo alrededor de los cardinales grandes, resulta conveniente observar que si S es un conjunto e I es un conjunto de índices, podemos asociar a cada partición $P := \{X_i : i \in I\}$ de S (donde $i \neq j$ implica que $X_i \cap X_j = \emptyset$) una función $F : S \to I$ de tal manera que $F(x) = i$ si y sólo si $x \in X_i$. De esta manera, para cada $i \in I$ se tiene que $X_i = F^{-1}[\{i\}]$. Así, también podemos hacer el proceso inverso y para cada función sobreyectiva $F : S \to I$, la colección $\{F^{-1}[\{i\}] : i \in I\}$ resulta una partición para S indexada por el conjunto I. A menudo nos referiremos a una partición de un conjunto simplemente como la función inducida por ésta como mencionamos anteriormente.

La siguiente convención tiene como objetivo hablar de cierto tipo de particiones que clasifican a los subconjuntos finitos de un conjunto dado según su cardinalidad.

Notación 4.26 *Dado un conjunto A, denotamos como $[A]^n$ a la colección de*

[9]El lector puede encontrar más detalles teóricos e históricos alrededor del desarrollo de los cardinales grandes en el artículo [KM78].

subconjuntos de A que tienen exactamente n elementos, es decir,

$$[A]^n := \{X \subseteq A : |X| = n\}.$$

Del mismo modo, utilizamos el símbolo $[A]^{<\omega}$ para denotar a la colección de todos los subconjuntos finitos de A, es decir,

$$[A]^{<\omega} := \bigcup_{n\in\omega} [A]^n = \{X \subseteq A : |X| < \aleph_0\}.$$

Las siguientes definiciones se refieren al comportamiento de los subconjuntos de un conjunto dado A y sus respectivos subconjuntos de cardinalidad finita respecto a alguna partición dada ya sea de $[A]^n$ para algún número natural n, o de $[A]^{<\omega}$.

Definición 4.27 *Sean λ un cardinal, $n \in \omega$ y $F : [A]^n \to \lambda$ una partición de $[A]^n$ en λ partes. Dado $H \subseteq A$, decimos que H es **homogéneo** para F si y sólo si $|F[[H]^n]| = 1$, es decir, si todos los subconjuntos de cardinalidad n de H están en el mismo elemento de la partición.*

Definición 4.28 *Sean λ un cardinal, $F : [A]^{<\omega} \to \lambda$ una partición de $[A]^{<\omega}$ en λ partes y sea $H \subseteq A$. Decimos que H es **homogéneo** para F si y sólo si para todo $n \in \omega$ $|F[[H]^n]| = 1$.*

La definición anterior significa que si F es una partición de la colección de subconjuntos finitos de A, $H \subseteq A$ es homogéneo para F si para todo $n \in \omega$ se tiene que $[H]^n$ está contenido en uno de los elementos de la partición. Obsérvese que no necesariamente todos los subconjuntos finitos de H están en el mismo conjunto de la partición. De hecho, esta definición de que H sea homogéneo no es compatible con pedir que $|F[[H]^{<\omega}]| = 1$, pues, por ejemplo, en la partición $F : [A]^{<\omega} \to \lambda$ definida como $F(X) = |X|$ se tiene que todo subconjunto de A es homogéneo y, sin embargo, $|F[[H]^{<\omega}]| = \aleph_0$ para todo H infinito.

A continuación estableceremos otra notación que es muy utilizada en el estudio de los cardinales grandes en la Teoría de Conjuntos. Dicha notación se refiere a las propiedades que pueden tener determinadas particiones de conjuntos de la forma $[\kappa]^n$, donde κ es un cardinal infinito.

Notación 4.29 *Sean κ y λ números cardinales infinitos. Sean $n \in \omega$ y m un cardinal que puede ser finito o infinito. Utilizamos la **notación flecha** de manera que el símbolo*

$$\kappa \to (\lambda)^n_m$$

significa que toda partición de $[\kappa]^n$ en m partes tiene un conjunto homogéneo de cardinalidad λ.

Cuando $m = 2$, escribimos simplemente $\kappa \to (\lambda)^n$ para denotar $\kappa \to (\lambda)^n_2$.

En otras palabras, la notación $\kappa \to (\lambda)^n_m$ significa que para toda función sobreyectiva $F : [\kappa]^n \to m$, existe algún subconjunto $H \subseteq \kappa$ tal que $|H| = \lambda$ y F es constante sobre $[H]^n$. En particular, esto tiene como consecuencia que la expresión $\kappa \to (\lambda)^n_m$ sólo tiene sentido si $\lambda \leq \kappa$.

Para ejemplificar esta notación podemos pensar en un conjunto S con seis elementos y considerar a todos los subconjuntos de S de cardinalidad dos. Si relacionamos a cada elemento de S con un punto y a cada elemento de $[S]^2$ con una línea ya sea roja o azul al azar que una a los dos puntos que conforman al conjunto de cardinalidad dos, la intuición nos permitirá ver que la gráfica resultante necesariamente tiene un triángulo formado por segmentos de un solo color. Esto se puede interpretar como que toda partición de $[S]^2$ en dos clases, tiene un conjunto homogéneo de cardinalidad tres, o en otras palabras, $6 \to (3)^2$.

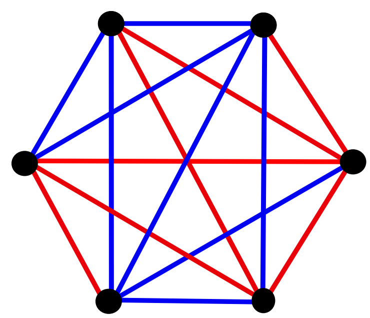


Figura 4.1: $6 \to (3)^2$

La idea detrás de la aparentemente misteriosa notación flecha radica en que la relación dada por $\kappa \to (\lambda)^n_m$ se preserva siempre que consideremos cardinales más grandes que κ del lado izquierdo, o cardinales más pequeños que λ, m ó n del lado derecho de la flecha. En otras palabras, esto nos dice que si se cumple la relación $\kappa \to (\lambda)^n_m$, entonces también se tiene que $\eta \to (\lambda)^n_m$ para cualquier $\eta > \kappa$, $\kappa \to (\Lambda)^n_m$ para cualquier $\Lambda < \lambda$, $\kappa \to (\lambda)^n_i$ para cualquier $i < m$ y $\kappa \to (\lambda)^j_m$ para cualquier $j < n$.

A pesar de que la notación flecha fue acuñada varios años después, en la década de los años veinte Frank P. Ramsey demostró que para cualesquiera números naturales positivos k, r y s, existe un número natural n tal que

$$n \to (k)^r_s.$$

Posteriormente, en 1930 fue publicado el llamado *Teorema de Ramsey*, en el que quedó establecido que para cualesquiera $r, s \in \mathbb{N}^+$ se cumple la propiedad de partición

$$\aleph_0 \to (\aleph_0)^r_s.$$

Tres años más tarde, Sierpinski demostró que para cualquier cardinal infinito κ se tiene que $2^\kappa \not\to (\kappa^+)^2$, por lo que las propiedades de partición no son un concepto trivial.

En este trabajo no incluiremos las demostraciones de estas afirmaciones. Sin embargo, el lector interesado puede consultarlas en el libro [Jec02] págs. 107-110.

4.3. Cardinales débilmente compactos

La notación que introducimos en la sección anterior nos permitirá definir una nueva clase de cardinales grandes que son los llamados *débilmente compactos*. Este concepto surgió a partir de un famoso teorema de lógica que es conocido como el *Teorema de Compacidad*.[10] Sin embargo, aquí daremos una definición equivalente que se desarrolló a principios de los años sesenta y que utiliza la notación flecha, ya que esto nos permitirá relacionar más fácilmente a los cardinales débilmente compactos con los medibles.

Definición 4.30 *Decimos que un cardinal κ es* ***débilmente compacto*** *si y sólo si es no numerable y satisface la propiedad de partición $\kappa \to (\kappa)^2$.*

A partir de esta definición resulta sencillo obtener el resultado que demostraremos a continuación, que establece que los cardinales medibles son al menos tan grandes como los débilmente compactos. La idea de la demostración será aprovechar la medida que es posible definir para un cardinal medible κ de modo que dada una partición $P := \{P_1, P_2\}$ del conjunto $[\kappa]^2$, podamos extraer un subconjunto de κ que sea *suficientemente grande* como para encontrar en él un conjunto homogéneo para la partición P. Estas ideas quedarán formalizadas en el siguiente teorema.

Teorema 4.31 *Todo cardinal medible es débilmente compacto.*

Demostración. Sea κ un cardinal medible. Demostraremos que toda partición de $[\kappa]^2$ en dos clases, tiene un conjunto homogéneo de cardinalidad κ. Supongamos entonces que $P := \{P_1, P_2\}$ es una partición arbitraria de $[\kappa]^2$ y recordemos que, como κ es medible, el Teorema 3.30 nos dice que existe un ultrafiltro U sobre κ que es κ-completo y no principal. Así pues, para cada $\alpha \in \kappa$ definamos a los conjuntos

$$\begin{aligned} S^1_\alpha &:= \{\beta \in \kappa : \beta \neq \alpha \text{ y } \{\alpha, \beta\} \in P_1\}; \\ S^2_\alpha &:= \{\beta \in \kappa : \beta \neq \alpha \text{ y } \{\alpha, \beta\} \in P_2\}. \end{aligned}$$

Obsérvese que para cada $\alpha < \kappa$ se tiene que $S^1_\alpha \cup S^2_\alpha = \kappa - \{\alpha\}$ y $S^1_\alpha \cap S^2_\alpha = \emptyset$. Así, como U es un filtro no principal sobre κ, $S^1_\alpha \cup S^2_\alpha \in U$ y, por tanto, la Proposición 3.22 implica que exactamente uno de los conjuntos S^1_α ó S^2_α pertenece a U, de manera que podemos definir a los siguientes conjuntos de ordinales:

$$Z_1 := \{\alpha < \kappa : S^1_\alpha \in U\};$$
$$Z_2 := \{\alpha < \kappa : S^2_\alpha \in U\}.$$

De esta forma, como $Z_1 \cup Z_2 = \kappa$, nuevamente por la Proposición 3.22 tenemos que $Z_1 \in U$ ó $Z_2 \in U$, así que podemos suponer sin perder generalidad que $Z_1 \in U$. Utilizando esto, construiremos un conjunto $H := \{\alpha_\xi : \xi < \kappa\} \subseteq \kappa$ tal que $[H]^2 \subseteq P_1$, por lo que H será un conjunto de cardinalidad κ homogéneo para la partición P y habremos concluido la demostración.

[10] El Teorema de Compacidad establece que si Σ es un conjunto de fórmulas de primer orden, entonces existe un modelo para los enunciados que lo conforman si y sólo si hay uno para cada subconjunto finito de Σ. Véase el libro [End04] pág. 208.

Definiremos a los elementos de H utilizando recursión transfinita. Para el primer paso, obsérvese que como $Z_1 \in U$, entonces $Z_1 \neq \emptyset$, así que podemos definir al ordinal α_0 como cualquier elemento del conjunto Z_1.

Ahora supongamos que para un ordinal $\gamma < \kappa$ hemos construido una sucesión creciente

$$\{\alpha_\xi : \xi < \gamma\}$$

de elementos de Z_1 tal que para cualesquiera ξ, η, si $\xi < \eta < \gamma$, entonces

$$\alpha_\eta \in S^1_{\alpha_\xi}. \tag{4.2}$$

De esta forma, como $Z_1 \in U$, $S^1_{\alpha_\xi} \in U$ para todo $\xi < \gamma$ y U es κ-completo, también tenemos que $Z_1 \cap \left(\bigcap_{\xi<\gamma} S^1_{\alpha_\xi}\right) \in U$. Luego, como U es un ultrafiltro κ-completo y no principal sobre κ, el Corolario 3.34 nos dice que $\left|Z_1 \cap \left(\bigcap_{\xi<\gamma} S^1_{\alpha_\xi}\right)\right| = \kappa$, así que, como κ es regular, podemos asegurar que existe $\alpha \in Z_1 \cap \left(\bigcap_{\xi<\gamma} S^1_{\alpha_\xi}\right)$ tal que para todo $\xi < \gamma$, $\alpha > \alpha_\xi$. Así pues, sea

$$\alpha_\gamma := \text{mín}\left\{\alpha \in Z_1 \cap \left(\bigcap_{\xi<\gamma} S^1_{\alpha_\xi}\right) : \forall\xi < \gamma(\alpha > \alpha_\xi)\right\}.$$

De esta definición se sigue que la relación dada en (4.2) se cumple para cualesquiera $\xi < \eta \leq \gamma$, por lo que hemos construido un α_ξ con esta propiedad para cada $\xi < \kappa$ y podemos definir al conjunto $H := \{\alpha_\xi : \xi < \kappa\}$. Entonces, claramente $|H| = \kappa$ y además, para cualesquiera $\xi < \eta < \kappa$ se tiene que $\alpha_\eta \in S^1_{\alpha_\xi}$, por lo que $\{\alpha_\xi, \alpha_\eta\} \in P_1$. Esto implica que $[H]^2 \subseteq P_1$ y, por lo tanto, H es un conjunto homogéneo para la partición P, que es lo queríamos demostrar para concluir que $\kappa \to (\kappa)^2$. $\square$

De esta forma queda demostrado que un cardinal medible es igual o más grande que cualquier débilmente compacto. De hecho, Hanf y Scott demostraron en 1961 que el primer cardinal medible es estrictamente mayor que el primer débilmente compacto, por lo que el primer cardinal débilmente compacto no es medible. El resultado que hemos expuesto aquí fue demostrado por primera vez por Tarski en 1962. Por otra parte, cabe destacar que es posible probar que todos los cardinales débilmente compactos son de Mahlo y que si κ es débilmente compacto, entonces hay κ cardinales de Mahlo menores que κ, por lo que hay cardinales de Mahlo que no son débilmente compactos. Las demostraciones de estas afirmaciones requieren un estudio más detallado en las propiedades de los cardinales grandes que no expondremos aquí. Sin embargo, el lector puede consultarlas en [Amo84] págs. 35, 36 y 49.

4.4. Cardinales de Ramsey

En esta última sección dedicada a los grandes cardinales daremos una generalización del Teorema de Ramsey enunciado en la Sección 4.2, pues será la motivación para definir una especie de cardinales más grandes que los débilmente compactos. Para ello necesitaremos antes la siguiente convención que generaliza a la Notación 4.29.

Notación 4.32 *Sea κ un cardinal tal que $\kappa \geq \omega$. Sean α y λ cardinales tales que $\omega \leq \alpha \leq \kappa$ y $2 \leq \lambda < \kappa$. Utilizamos la notación flecha de manera que $\kappa \to (\alpha)^{<\omega}_{\lambda}$ significa que toda partición de $[\kappa]^{<\omega}$ en λ partes tiene un conjunto homogéneo de cardinalidad α.*[11]

Definición 4.33 *Decimos que κ es un cardinal de* ***Ramsey*** *si y sólo si $\kappa \to (\kappa)^{<\omega}_2$.*

Observación 4.34 *ω no es un cardinal de Ramsey, es decir, $\omega \not\to (\omega)^{<\omega}_2$, ya que si $F : [\omega]^{<\omega} \to 2$ está dada por*

$$F(X) := \begin{cases} 0 & si\ |X| \notin X \\ 1 & si\ |X| \in X, \end{cases}$$

entonces si $H \subseteq \omega$ es tal que $|H| = \omega$, podemos tomar $n \in H$ tal que $n > 0$. Luego, como $n \in H$, existen $X, Y \in [H]^n$ tales que $n \in X - Y$. Así, como $|X| = n = |Y|$, $F(X) = 1$ y $F(Y) = 0$, por lo que H no es homogéneo para F.

Hecha esta observación, podemos utilizar las definiciones anteriores para enunciar el siguiente teorema que establece la relación que existe entre los cardinales medibles y los cardinales de Ramsey.

Teorema 4.35 *Sea κ un cardinal medible, sea D una medida normal sobre κ y sea F una partición de $[\kappa]^{<\omega}$ en menos de κ partes. Entonces existe $H \in D$ homogéneo para F. En particular esto implica que todo cardinal medible es de Ramsey.*

Demostración. Sea D una medida normal sobre κ, sea $\lambda < \kappa$ y sea F una partición de $[\kappa]^{<\omega}$ en λ partes. El primer paso será demostrar que para cada $n \in \omega$ existe $H_n \in D$ tal que F es constante en $[H_n]^n$. Posteriormente utilizaremos este hecho para construir un conjunto H homogéneo para F.

Así pues, comenzaremos por probar por inducción sobre n con $1 \leq n < \omega$ que toda partición de $[\kappa]^n$ en menos que κ partes es constante en $[J]^n$ para algún $J \in D$.

- Para el caso $n = 1$, sea $\lambda < \kappa$ y supongamos que $G : [\kappa]^1 \to \lambda$ es una partición de $[\kappa]^1$ en λ partes. Definamos la función $\Psi : \kappa \to \lambda$ como

  $$\Psi(\alpha) := G(\{\alpha\}).$$

  De esta forma, si para cada $\xi < \lambda$ definimos $A_\xi := \Psi^{-1}[\{\xi\}]$, entonces la colección $\{A_\xi : \xi < \lambda\}$ es claramente una partición de κ. En particular, esto implica que $\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} A_\xi \in D$ y, como D es κ-completo, la Proposición 3.26 implica que existe $\xi < \lambda$ tal que $A_\xi \in D$. Además, G es constante en $[A_\xi]^1$, ya que si $x \in [A_\xi]^1$, entonces x es de la forma $\{\alpha\}$ para algún $\alpha \in A_\xi$, por lo que $G(x) = G(\{\alpha\}) = \Psi(\alpha) = \xi$ y se sigue la afirmación.

[11] Cabe destacar que la noción de homogéneo que estamos considerando aquí es la establecida en la Definición 4.28.

- Para el paso inductivo, supongamos que el resultado es válido para $m \geq 1$ y sea $G : [\kappa]^{m+1} \to \lambda$ una partición en λ partes con $\lambda < \kappa$. Para cada $\alpha < \kappa$, definamos a la función $G_\alpha : [\kappa]^m \to \lambda$ como sigue:

$$G_\alpha(x) := \begin{cases} G(x \cup \{\alpha\}) & \text{si } x \in [\kappa - \{\alpha\}]^m \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

  Nótese que cada G_α está bien definida. Además, si para cada $\alpha < \kappa$ definimos al conjunto de ordinales $I_\alpha := G_\alpha[[\kappa]^m]$, tenemos que $|I_\alpha| \leq \lambda$. De aquí que $G_\alpha : [\kappa]^m \to I_\alpha$ y, así definida, resulta ser sobreyectiva, por lo que representa a una partición de $[\kappa]^m$ en menos que κ partes. Por hipótesis inductiva, esto implica que para cada $\alpha < \kappa$ existe $H_\alpha \in D$ tal que H_α es homogéneo para G_α y, en particular, existe $\xi_\alpha \in I_\alpha$ tal que $G_\alpha[[H_\alpha]^m] = \{\xi_\alpha\}$.

  Ahora, sea X la intersección diagonal dada por $X := \{\alpha < \kappa : \alpha \in \bigcap_{\gamma<\alpha} H_\gamma\}$. Tenemos que $X \in D$, pues D es normal. Luego, como $\kappa = \bigcup_{\xi_\alpha \in I_\alpha}\{\alpha < \kappa : G_\alpha[[H_\alpha]^m] = \{\xi_\alpha\}\} \in D$ y $|I_\alpha| \leq \lambda < \kappa$, la κ-completud de D y la Proposición 3.26 nos dicen que existe $\xi_0 < \lambda$ tal que el conjunto $C := \{\alpha < \kappa : G_\alpha[[H_\alpha]^m] = \{\xi_0\}\} \in D$.

  Dicho esto, definamos al conjunto $J := C \cap X$. Claramente $J \in D$. Además, J es homogéneo para G, pues si $\gamma < \alpha_1 < ... < \alpha_m \in J \subseteq X$, entonces $\{\alpha_1, ..., \alpha_m\} \in [H_\gamma]^m$ y $\gamma \in C$, así que:

$$\begin{aligned} G(\{\gamma, \alpha_1, ..., \alpha_m\}) &= G_\gamma(\{\alpha_1, ..., \alpha_m\}) \\ &= \xi_0, \end{aligned}$$

  es decir, $G[[J]^{m+1}] = \{\xi_0\}$ por lo que J es homogéneo para G.

Esto concluye la prueba de que para todo $n \in \omega$, cualquier partición de $[\kappa]^n$ en menos que κ partes es constante en $[J]^n$ para algún $J \in D$.

Ahora, para cada $1 \leq n < \omega$ definamos a la partición $G_n := F \restriction_{[\kappa]^n}$. Entonces, por la afirmación que acabamos de demostrar, sabemos que existe $H_n \in D$ tal que G_n es constante en el conjunto $[H_n]^n$ y, por tanto, también tenemos que $|F[[H_n]^n]| = 1$.

De este modo, para concluir la demostración del teorema sólo resta encontrar un conjunto homogéneo para F. Consideremos entonces a la colección

$$H := \bigcap_{1 \leq n < \omega} H_n$$

y veamos que efectivamente H es un conjunto homogéneo para nuestra partición. Obsérvese primero que para $m = 0$ la afirmación es trivial, ya que en este caso $|F[[H]^m]| = F[\{\emptyset\}] = 1$. Por otra parte, dado $1 \leq m < \omega$, se tiene que $|F[[H]^m]| \leq 1$. Para ver esto, tomemos $X \in [H]^m$ y notemos que, como $X \subseteq H \subseteq H_m$, entonces $X \in [H_m]^m$. Esto implica que $[H]^m \subseteq [H_m]^m$ y, por lo tanto, $F[[H]^m] \subseteq F[[H_m]^m]$, de modo que $|F[[H]^m]| \leq |F[[H_m]^m]| = 1$. Por otro lado, para verificar que $|F[[H]^m]| \geq 1$ es suficiente observar que, como D es κ-completo, $H = \bigcap_{1 \leq n < \omega} H_n \in D$, de manera que $|H| = \kappa > \aleph_0$. Por lo tanto, $[H]^m \neq \emptyset$, así que también se tiene que $F[[H]^m] \neq \emptyset$. Esto prueba que para todo

$m \in \omega$, $|F[[H]^m]| = 1$, así que H es homogéneo para la partición F. Así, hemos demostrado que si κ es un cardinal medible, entonces para todo $\lambda < \kappa$ se cumple la propiedad de partición $\kappa \to (\kappa)^{<\omega}_\lambda$. De aquí se sigue que en particular $\kappa \to (\kappa)^{<\omega}_2$, es decir, κ es un cardinal de Ramsey. $\square$

El resultado anterior significa que si consideramos una partición en menos que κ partes de todos los subconjuntos finitos de κ, entonces debe existir un conjunto homogéneo H de medida uno para esa partición, interpretando por esto que cada colección de la forma $[H]^n$ con $n \in \omega$, debe estar concentrada "homogéneamente" en algún elemento de la partición.

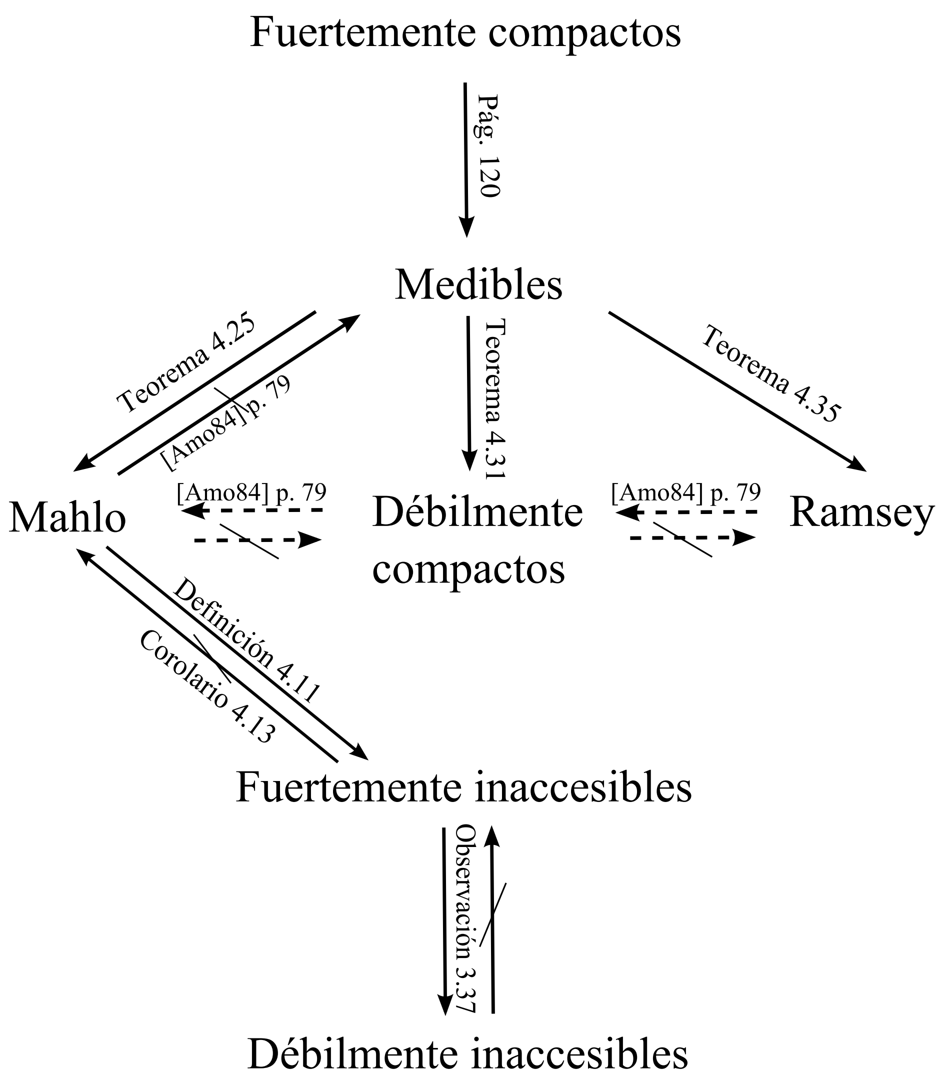
Al respecto de los cardinales que hemos estudiado en esta sección, se puede probar también que hay cardinales medibles que no son de Ramsey. La demostración utiliza herramientas que fueron ampliamente desarrolladas por Scott en 1961, año en el que también demostró que la existencia de cardinales medibles tiene implicaciones directas sobre la naturaleza misma del universo conjuntista.[12] Este fue el punto de partida para profundizar en los diferentes mundos que se pueden construir a partir de suponer o no la existencia de cardinales medibles y, aunque no podemos demostrar la existencia de estos mundos, surgen con un valor estético indiscutible y tienen la tarea de seguir reuniendo a distintas ramas de las matemáticas en esta perspectiva que fundamenta a cada una de ellas y que es la Teoría de Conjuntos.

Por otra parte, resulta importante destacar que la teoría de los cardinales grandes está lejos de tener como cota superior a los cardinales medibles. De hecho, es posible definir cardinales como los *fuertemente compactos*, que son aquellos cardinales κ con la propiedad de que para cualquier conjunto S sobre el que exista un filtro κ-completo, dicho filtro puede extenderse a un ultrafiltro κ-completo sobre S. De esta definición se sigue que todos los cardinales fuertemente compactos son medibles, por lo que podemos considerar que los cardinales fuertemente compactos son "más grandes" que los medibles.

En esta tesis hemos ya caminado un trayecto que personajes como Lebesgue, Vitali, Banach y Ulam se encargaron de trazar a lo largo de muchos años y que, a pesar de recorrer la matemática partiendo de la Medida de Lebesgue y llegando a los cardinales grandes, está muy lejos de ser un camino *linealmente ordenado*. Por el contrario, nos recuerda que las matemáticas están hechas de incontables ramas entretejidas de una manera maravillosa, que están siempre a la espera de ser observadas desde alguna nueva perspectiva y continuar así creciendo como si intentaran alcanzar a un cardinal medible.

[12] Scott demostró que si existen cardinales medibles, entonces $V \neq L$, donde V es la clase de todos los conjuntos y L es el universo de los conjuntos construibles. Véase [Cam98] para un análisis detallado de L y la demostración del Teorema de Scott.

Diagrama de algunos cardinales grandes[13]



[13]Basado en el diagrama de *Pequeños Grandes Cardinales* en [Amo84] pág. 79.

APÉNDICE A

Ordinales y cardinales

Desde siempre para los seres humanos ha sido importante ser capaces de enumerar a los elementos de una colección de objetos o decir cuántos elementos tiene ésta. En la práctica matemática, esta necesidad se extiende incluso para hablar al respecto de conjuntos infinitos. Sin embargo, aunque intuitivamente parece sencillo formarnos una idea del significado de ser finito o infinito, para Cantor y otros matemáticos del siglo XIX representó un gran reto formalizar todas estas ideas. Más interesante aún es que dicha formalización representó el inicio de la Teoría de Conjuntos y estuvo motivada en problemas fundamentales del Análisis Matemático que buscaban entender las propiedades de los números reales. En este apéndice veremos la manera en la que Cantor fundó las bases de los *números transfinitos* que posteriormente fueron formalizadas por John von Neumann mediante la construcción de los *números ordinales* y dieron pie a la definición de *número cardinal*.

Para ello necesitaremos formalizar primero la idea de *ordenar* a los elementos de un conjunto, por lo que en la siguiente sección estableceremos todas las definiciones necesarias para lograrlo.

A.1. Órdenes parciales y órdenes lineales

Dado un conjunto cualquiera, podemos establecer relaciones entre sus elementos para darle cierta estructura u orden. Las siguientes definiciones establecen diferentes especies de orden que se pueden brindar a un conjunto.

Definición A.1 *Sea P un conjunto y sea $<$ una relación binaria sobre P. Decimos que $(P, <)$ es un* ***orden parcial*** *si y sólo si:*

(i) *la relación $<$ es antirreflexiva sobre P, es decir, para todo $p \in P$ $p \not< p$; y*

(ii) *la relación $<$ es transitiva, es decir, para cualesquiera $p, q, r \in P$, si $p < q$ y $q < r$, entonces $p < r$.*

Definición A.2 *Decimos que $(P, <)$ es un* ***orden lineal*** *si y sólo si $(P, <)$ es un orden parcial y la relación $<$ es tricotómica, es decir, para cualesquiera $p, q, r \in P$, se tiene que $p < q$ ó $q < p$ ó $p = q$ y sólo se da una de las condiciones anteriores.*

A partir de las definiciones anteriores podemos observar que dado un orden parcial $(P, <)$, es posible encontrar subconjuntos de P en los que la relación $<$ establezca un orden lineal. De esta forma, podemos establecer la siguiente definición, que resulta muy útil para enunciar algunos resultados importantes en matemáticas que involucran órdenes parciales.

Definición A.3 *Sea $(P, <)$ un orden parcial y sea $C \subseteq P$. Decimos que C es una* ***cadena*** *en P si y sólo si $(C, <\restriction_C) := (C, < \cap (C \times C))$ es un orden lineal.*

A continuación definiremos una serie de conceptos que se refieren a aquellos elementos de un orden parcial que podemos distinguir por tener alguna propiedad especial respecto a la relación de orden y el resto de los elementos del conjunto.

Definición A.4 *Sean $(P, <)$ un orden parcial, X un sobconjunto no vacío de P y $a \in P$, entonces decimos que:*

(a) *a es un elemento* ***maximal*** *de X si y sólo si $a \in X$ y $\forall x \in X (a \not< x)$;*

(b) *a es un elemento* ***minimal*** *de X si y sólo si $a \in X$ y $\forall x \in X (x \not< a)$;*

(c) *a es un* ***máximo*** *de X si y sólo si $a \in X$ y $\forall x \in X (x \leq a)$;*

(d) *a es un* ***mínimo*** *de X si y sólo si $a \in X$ y $\forall x \in X (a \leq x)$;*

(e) *a es una* ***cota superior*** *de X si y sólo si $\forall x \in X (x \leq a)$;*

(f) *a es una* ***cota inferior*** *de X si y sólo si $\forall x \in X (a \leq x)$;*

(g) *a es el* ***supremo*** *de X si y sólo si a es la mínima cota superior de X, es decir, si para cualquier cota superior b de X se tiene que $a \leq b$. Denotamos al supremo del conjunto X como $\sup(X)$; y*

(h) *a es el* ***ínfimo*** *de X si y sólo si a es la máxima cota inferior de X, es decir, si para cualquier cota inferior b de X se tiene que $b \leq a$. Denotamos al ínfimo de X como $\inf(X)$.*

A.2. Números ordinales

Aún antes de su formulación como objetos matemáticos construibles a partir de los axiomas de la Teoría de Conjuntos, los números naturales han sido utilizados para enumerar a los elementos de colecciones finitas de objetos. Sin embargo, en el siglo XIX, Cantor se encontraba trabajando con conjuntos de números reales que pusieron ante él la necesidad de enumerar conjuntos infinitos y con ello introducir una nueva especie de números que son los *números transfinitos.*

Posteriormente, John von Neumann logró formalizar las ideas de Cantor a partir de los Axiomas de Zermelo-Fraenkel (sin Elección) y definió formalmente la idea de *número natural* que consiste en definir a cada número natural como el conjunto de números naturales anteriores a él. Siguiendo esta idea, definió también a los *números ordinales* mediante los que fue posible hablar de recursiones e inducciones transfinitas.

En esta sección veremos las definiciones de von Neumann, para lo que antes necesitamos el siguiente concepto que se refiere a una clase muy importante de órdenes lineales que son los buenos órdenes.

Definición A.5 *Sea P un conjunto y sea $<$ una relación binaria sobre P. Decimos que $(P, <)$ es un* ***buen orden*** *si y sólo si es un orden lineal y todo subconjunto no vacío de P tiene un elemento mínimo.*

La siguiente definición será central en la formalización del concepto de número natural y posteriormente, de número ordinal.

Definición A.6 *Sea T un conjunto. Decimos que T es* ***transitivo*** *si y sólo si todo elemento de T es a su vez un subconjunto de T, es decir, si $\bigcup T \subseteq T$, o equivalentemente, $T \subseteq \mathcal{P}(T)$.*

Bajo esta definición, un conjunto es transitivo si todos los elementos de los elementos del conjunto vuelven a estar en el conjunto.

Dado que queremos construir a cada número natural como el conjunto de los números anteriores a él y el único conjunto que no tiene elementos es el conjunto $\emptyset$, podemos definir $0 := \emptyset$, $1 := \{0\}$, $2 := \{0, 1\}$, etc. Sorprendentemente, la siguiente definición será suficiente para garantizar no sólo la existencia de cada número natural con estas propiedades, sino que cualquier conjunto que se pueda constuir de esta manera, será un número natural.

Definición A.7 *Sea x un conjunto. Decimos que x es un* ***número natural*** *si y sólo si:*

(i) *x es transitivo;*

(ii) *$(x, \in)$ es un buen orden; y*

(iii) *todo subconjunto no vacío de x tiene un $\in$-máximo (un máximo respecto a la relación pertenencia).*

De esta manera los números naturales son los conjuntos de la forma $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, etc. de modo que podemos definir $0 := \emptyset$, $1 := \{\emptyset\}$, $2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ y así sucesivamente.

Se puede demostrar desde los axiomas de Zermelo-Fraenkel que la colección de todos los números naturales es un conjunto.[1] Dicho conjunto será denotado como $\mathbb{N}$ y de hecho resulta ser un buen orden bajo la relación $\in$.

[1] Véase el libro [Amo08] pág. 37.

Una de las aplicaciones más frecuentes que se basan en la estructura de los números naturales es el Teorema de Recursión, que nos permite construir funciones cuyo dominio es $\mathbb{N}$ y su contradominio es una colección de conjuntos. A este tipo de funciones se les denomina **sucesiones**. La idea del Teorema de Recursión es poder definir dichas sucesiones de modo que la imagen de cada $n \in \mathbb{N}^+$ esté definida a partir de conocer la imagen de su predecesor. Dado que $(\mathbb{N}, \in)$ es un buen orden, la idea intuitiva de esto es muy clara. Sin embargo, el fundamento de estas ideas se concentra en el siguiente resultado.

Teorema A.8 (Teorema de Recursión para naturales) *Sean A un conjunto arbitrario, $a \in A$ un elemento fijo y $g : A \to A$ una función. Entonces existe una única función $h : \mathbb{N} \to A$ tal que:*

(i) $h(0) = a$; *y*

(ii) *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $h(n+1) = g(h(n))$.

Demostración. La demostración de este teorema se puede encontar en [HJ99] pág. 47. □

Una caracterización muy útil de los buenos órdenes está dada por la siguiente proposición. Vale la pena observar que para demostrar la implicación de regreso se necesita el Axioma de Elección.

Proposición A.9 *Sea P un conjunto y sea $<$ una relación binaria sobre P tal que $(P, <)$ es un orden lineal. Entonces $(P, <)$ es un buen orden si y sólo si no existe una sucesión $<$-decreciente sobre P, es decir, si para toda sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq P$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n+1} \not< x_n$.*

Demostración. Supongamos primero que $(P, <)$ es un buen orden y que existe una sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq P$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} < x_n$ para llegar a una contradicción. Así, como $(P, <)$ es un buen orden, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ $x_N < x_n$ ó $x_N = x_n$. En particular se tiene que $x_N < x_{N+1}$ ó $x_N = x_{N+1}$. Sin embargo, como la sucesión es decreciente, sabemos que $x_{N+1} < x_N$, así que en cualquiera de los dos casos concluimos que $x_{N+1} < x_{N+1}$, contradiciendo que $<$ es una relación antirreflexiva.
Haremos la prueba de la implicación recíproca por contrapositiva. Supongamos entonces que $(P, <)$ es un orden lineal pero no un buen orden. En particular esto implica que $P \neq \emptyset$, así que existe algún $x_0 \in P$. Por otro lado, usando el Axioma de Elección supongamos que $F : \mathcal{P}(P) - \{\emptyset\} \to \bigcup(\mathcal{P}(P) - \{\emptyset\})$ es una función de elección para $\mathcal{P}(P) - \emptyset$ y definamos $f : P \to P$ como

$$f(x) := F(\{y \in P : y < x\}).$$

La función f está bien definida, pues para todo $x \in P$, el conjunto $\{y \in P : y < x\}$ es no vacío, ya que en particular sabemos que P no tiene un elemento mínimo, es decir, para todo $x \in P$ existe $y \in P$ tal que $y < x$.

Ahora, utilizando recursión para números naturales, definamos $h : \mathbb{N} \to P$ de manera que

$$\begin{array}{rcl} h(0) & := & x_0 \\ h(n+1) & := & f(h(n)) \\ & = & F(\{y \in P : y < h(n)\}) \in \{y \in P : y < h(n)\} \end{array}$$

Esto significa que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $h(n+1) < h(n)$, así que si definimos $x_n := h(n)$, hemos construido una sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ que es $<$-decreciente y esto es lo que estábamos buscando. $\Box$

Ya que hemos definido a los números naturales y que sabemos que la colección de todos ellos es un conjunto, podríamos esperar que de definir a un *número* mayor a todos ellos según la relación $\in$, dicho número tendría que ser precisamente el conjunto de todos los números naturales, es decir, $\mathbb{N}$. Del mismo modo, el siguiente número mayor que $\mathbb{N}$ tendría que ser el conjunto $\mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$. Con esta motivación, podemos considerar la siguiente definición.

Definición A.10 *Dado un conjunto X, definimos el* ***sucesor*** *de X como el conjunto $X \cup \{X\}$ y lo denotamos por $s(X)$.*

A partir de la discusión anterior podemos pensar que una vez definido el conjunto $\mathbb{N}$ como un *número* mayor que todos los números naturales, podemos nuevamente aplicar indefinidamente la operación sucesor para obtener una colección más grande de números *transfinitos*. Además, ya hemos visto que al considerar todos los sucesores de un conjunto dado, llega un momento en el que es necesario recurrir a un *paso límite* mediante el que definamos un número mayor que una infinidad de números ya definidos, tal como hemos dicho que tendríamos que hacerlo para agregar a $\mathbb{N}$ por encima de todos sus elementos con la relación $\in$ preservando el buen orden. Intuitivamente, este es el procedimiento que se sigue para construir a todos los *números ordinales*. Sin embargo, es necesaria una definición formal que no consista en aplicar simplemente una operación una cantidad infinita de veces. A continuación enunciaremos dicha definición que coincide con la idea intuitiva de ordinal que hemos venido discutiendo.

Definición A.11 *Sea α un conjunto. Decimos que α es un* ***número ordinal*** *si y sólo si es α es transitivo y $(\alpha, \in)$ es un buen orden.*

Notación A.12 *Denotamos como OR a la clase de todos los números ordinales.*[2]

Siguiendo la idea que utilizamos para definir a los números naturales, el orden que damos entre cualesquiera dos números ordinales está dado de la siguiente manera.

Definición A.13 *Dados dos números ordinales α y β, decimos que $\alpha < \beta$ si y sólo si $\alpha \in \beta$.*

[2]Se puede demostrar que la clase OR no es un conjunto. Véase, por ejemplo, el libro [ACM].

Bajo las definiciones anteriores, se puede demostrar que el conjunto $\mathbb{N}$ es un número ordinal y según el orden que hemos establecido entre ordinales, es el primero en no ser un número natural. Cuando nos refiramos al conjunto de números naturales como un número ordinal, lo denotaremos como ω. Este número ordinal no es como los números naturales, ya que para todo natural distinto de cero no sólo hay un sucesor sino que también hay un antecesor y claramente ω no cumple esta propiedad. Esta característica motiva las siguientes definiciones.

Definición A.14 *Sea α un número ordinal tal que existe un ordinal β con la propiedad de que $\alpha = s(\beta)$. Entonces decimos que α es un **ordinal sucesor**. En ocasiones escribimos $\alpha = \beta + 1$ para denotar a $s(\beta)$.*

Definición A.15 *Sea α un ordinal tal que $\alpha \neq 0$ y α no es un ordinal sucesor. Entonces decimos que α es un **ordinal límite**.*

A continuación expondremos algunas de las propiedades más representativas de los números ordinales.

Lema A.16 *Las siguientes afirmaciones al respecto de la clase de los números ordinales son verdaderas:*

(a) El conjunto $\emptyset$ es un número ordinal y lo denotamos por 0.

(b) Si α y β son números ordinales, entonces $\alpha \in \beta$ si y sólo si $\alpha \subsetneq \beta$.

(c) La "relación" $<$ se comporta como un orden lineal sobre la clase de números ordinales.

(d) Para cada ordinal α, $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$.

*(e) Si C es una clase no vacía de ordinales, entonces $\bigcap C$ es un número ordinal y $\bigcap C \in C$. A este resultado se le conoce como el **Principio del mínimo ordinal**, ya que nos dice que la clase de ordinales se comporta como un buen orden con la relación $<$.*

(f) Para todo ordinal α, $s(\alpha)$ es un ordinal y $s(\alpha) = \inf\{\beta : \beta > \alpha\}$.

(g) Si X es un conjunto de ordinales entonces $\sup(X)$ es un número ordinal y además $\sup(X) = \bigcup X$.

Demostración. La demostración de estas propiedades se puede consultar en [Jec02] págs. 19 y 20. □

Por definición sabemos que todo número ordinal es un conjunto bien ordenado por la relación $\in$. Sin embargo, ocurre algo mucho más fuerte y es que de hecho en la clase de todos los números ordinales están representados todos los buenos órdenes que puede haber si dejamos de considerar la naturaleza de sus elementos. Para concretizar este resultado, consideremos primero la siguiente definición.

Definición A.17 *Sean $(A, <)$ y $(B, \lessdot)$ dos ordenes lineales. Decimos que $(A, <)$ y $(B, \lessdot)$ son **isomorfos** si y sólo si existe una función $f : A \to B$ tal que f es biyectiva y tiene la propiedad de que para cualesquiera $x, y \in A$, $x < y$ si y sólo si $f(x) \lessdot f(y)$. En este caso, escribimos $(A, <) \cong (B, \lessdot)$ para denotar que los órdenes en lineales en cuestión son isomorfos.*

Esta definición nos permite enunciar el siguiente teorema, que establece que cualquier conjunto bien ordenado por una relación puede ser visto como un número ordinal mediante un isomorfismo.

Teorema A.18 (Teorema de Enumeración) *Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único número ordinal.*

Demostración. La demostración de este teorema se puede consultar en [HJ99] pág. 111. $\square$

El teorema anterior, como su nombre lo indica, nos da un conjunto específico, a saber, un ordinal, que representa la *forma* en la que están bien ordenados sus elementos, por lo que tiene sentido enunciar la siguiente definición.

Definición A.19 *Sea $(A, <_A)$ un buen orden. Definimos el **tipo de orden** de $(A, <_A)$ como el único número ordinal α tal que $(A, <_A) \cong (\alpha, \in)$.*

Los siguientes teoremas son generalizaciones de la inducción y recursión que conocemos para los números naturales.

Teorema A.20 (Inducción transfinita) *Sea C una clase de ordinales tal que:*

(i) $\emptyset \in C$;

(ii) *si* $\alpha \in C$, *entonces* $s(\alpha) \in C$; *y*

(iii) *si* α *es un ordinal límite y* $\beta \in C$ *para todo* $\beta < \alpha$, *entonces* $\alpha \in C$.

Entonces C es la clase de todos los números ordinales.

Demostración. La demostración de este teorema se puede consultar, por ejemplo, en [Jec02] pág. 21. $\square$

Teorema A.21 (Recursión transfinita) *Si G es un funcional definido sobre el universo de conjuntos V,*[3] *entonces podemos definir un único funcional F tal que:*

(i) *el "dominio"*[4] *de F es la clase OR y*

(ii) *para cualquier* $\alpha \in OR$, $(F(\alpha)) = G(F\restriction_\alpha)$.

Demostración. La demostración de este teorema se puede consultar en [Jec02] pág. 22. $\square$

[3]Llamamos a G *funcional* para establecer que G simboliza en realidad una propiedad que se comporta como función, en el sentido de que a cada conjunto x de la clase V le asocia un y sólo un conjunto, denotado como $G(x)$. Sin embargo, es importante notar que G no es una función pues, de serlo, sería un conjunto y, por tanto, V también lo sería.

[4]Dado que OR no es un conjunto sino una clase, F no es una función como tal y, por tanto, no podemos hablar formalmente de su dominio. Sin embargo, para efectos de simplicidad y claridad en la redacción, podemos pensar en el "dominio" de F como la clase en la que F actúa como una función asociando a cada elemento de esta clase un y sólo un elemento del universo conjuntista.

A.3. Números cardinales

Una de las mayores aplicaciones que se da a los números ordinales definidos en la sección anterior es la de *enumerar* a los elementos de un conjunto. Utilizando el Axioma de Elección, podemos decir que cualquier conjunto es bien ordenable y, por tanto, a cualquier conjunto le podemos asociar alguna enumeración. Sin embargo, para conjuntos infinitos dicha enumeración hasta ahora no nos dice mucho acerca de cuántos elementos tiene el conjunto. En esta sección hablaremos de la definición formal de *cardinalidad* de un conjunto y de algunas de las propiedades más importantes que podemos extraer de este concepto.

A.3.1. Equipotencia, finitud y dominancia

La noción de cardinalidad surge al tratar de determinar *cuántos* elementos tiene un conjunto. Así, dado que queremos relacionar de algún modo a los conjuntos que tengan la misma cantidad de elementos, resulta natural pensar que la primera idea intuitiva que podemos definir respecto a la cardinalidad de un conjunto es la siguiente.

Definición A.22 *Sean X y Y dos conjuntos. Decimos que X y Y tienen la* ***misma cardinalidad*** *o son* ***equipotentes*** *si y sólo si existe una función $f : X \to Y$ tal que f es biyectiva. Para denotar que X y Y son conjuntos equipotentes escribimos $X \sim Y$.*

Observación A.23 *La "relación" [5] entre conjuntos dada por $X \sim Y$ es una "relación de equivalencia". Sin embargo, no determina aún cuál es la cardinalidad de un conjunto dado. Un primer intento para formalizar este concepto podría ser elegir a un representante de cada "clase de equivalencia" de modo que dicho conjunto sea el cardinal de todos aquellos que son biyectables con él. Sin embargo, la clase de todos los conjuntos biyectables con un conjunto no vacío no es un conjunto,[6] por lo que ésta no parece ser una buena definición.*

Definiremos a los *números cardinales* haciendo uso de los ordinales introducidos en la sección anterior, de modo que su existencia como objetos matemáticos quedará totalmente formalizada dentro de ZFE. Sin embargo, antes podemos introducir varios conceptos fundamentados únicamente en el concepto de equipotencia.

Definición A.24 *Dado un conjunto X, decimos que X es* ***finito*** *si y sólo si existe un número natural n tal que $X \sim n$. En este caso decimos que X tiene n elementos.*

Definición A.25 *Dado un conjunto X, decimos que X es* ***infinito*** *si no es finito.*

[5] No es una relación en el sentido estricto ya que la clase de todos los conjuntos no es conjunto. Esto significa que ésta es una clase que se comporta como relación.

[6] La prueba de esta afirmación radica en que si x es un conjunto no vacío y C es la colección de todos los conjuntos biyectables con x, entonces para todo conjunto y existe un conjunto $z \in C$ tal que $y \in z$. Así, si C fuera un conjunto, entonces $\bigcup C$ sería también un conjunto, pero esto no puede ser pues, por el argumento anterior, $\bigcup C$ es la clase de todos los conjuntos.

Definición A.26 *Dados dos conjuntos X y Y, decimos que X está* ***dominado*** *por Y si y sólo si existe una función inyectiva $f : X \to Y$. Denotamos esto como $X \preceq Y$.*

Por otro lado, decimos que X está ***estrictamente dominado*** *por Y si y sólo si $X \preceq Y$ y $X \not\sim Y$, es decir, si existe una función inyectiva de X a Y pero no hay una función de X sobre Y. En este caso escribimos $X \prec Y$.*

Las relaciones *estar dominado* o *estrictamente dominado* surgen de la idea intuitiva de que un conjunto tenga menos elementos que otro. Esta es una noción muy sencilla para los conjuntos finitos. Sin embargo, el siguiente teorema demostrado por Cantor cuando trabajaba en determinar "de qué tamaño" era el conjunto de números reales, establece que el concepto de dominancia para conjuntos infinitos no es trivial, es decir, no todos los conjuntos infinitos son biyectables entre sí y por tanto hay conjuntos infinitos "más grandes" que otros. Este hecho causó mucha turbulencia dentro de las matemáticas y es realmente lo que motivó todo el desarrollo posterior en torno a la formalización del concepto de cardinalidad.

Teorema A.27 (Cantor) *Para cualquier conjunto X, $X \prec \mathcal{P}(X)$.*

Demostración. Por un lado, obsérvese que la función $f : X \to \mathcal{P}(X)$ dada por $f(x) = \{x\}$ es inyectiva, así que $X \preceq \mathcal{P}(X)$.

Por otra parte, si g es una función que va de X en $\mathcal{P}(X)$, entonces podemos ver que el conjunto

$$Y := \{x \in X : x \notin g(x)\}$$

no está en la imagen de g. Esto es así pues, si existiera $z \in X$ tal que $g(z) = Y$, entonces $z \in Y$ si y sólo si $z \notin Y$, que es una contradicción. De aquí se sigue que $Y \in \mathcal{P}(X) - Im(g)$. Por lo tanto, no hay funciones sobreyectivas que vayan de X en $\mathcal{P}(X)$, de modo que $X \not\sim \mathcal{P}(X)$. $\square$

El siguiente par de resultados manifiestan que $\preceq$ se comporta como un "orden parcial" sobre la clase de todos los conjuntos.[7]

Teorema A.28 *Sean A, B y C conjuntos tales que $A \preceq B$ y $B \preceq C$. Entonces $A \preceq C$.*

Demostración. Sean A, B y C conjuntos tales que $A \preceq B$ y $B \preceq C$. Entonces existen funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ tales que f y g son inyectivas, así que $g \circ f : A \to C$ es una función inyectiva. Por lo tanto, $A \preceq C$, como queríamos demostrar. $\square$

Teorema A.29 (Cantor-Schröeder-Bernstein) *Si A y B son conjuntos tales que $A \preceq B$ y $B \preceq A$, entonces $A \sim B$.*

[7] Así como hemos tenido cuidado al hablar de *funcionales* en vez de *funciones* cuando estamos trabajando en una clase de conjuntos que no es a su vez un conjunto, cabe destacar que el "orden parcial" del que hablamos aquí se refiere a la manera en la que se comporta la propiedad $\preceq$, ya que formalmente ésta no puede ser considerada un orden parcial, al no ser en sí misma un conjunto.

Demostración. La demostración de este teorema se puede consultar en [Jec02] pág. 28. □

Cabe destacar que hasta aquí hemos hablado de que $\preceq$ se comporta como una relación antisimétrica y transitiva, que no es exactamente lo que definimos como un orden parcial. Esto se debe a que la definición de $\preceq$ admite que para cualquier conjunto X, $X \preceq X$, es decir, $\preceq$ se comporta como una relación reflexiva. Sin embargo, esto no debe ser motivo de alarma, ya que se puede demostrar que es equivalente que $(A, <)$ sea un orden parcial, con el hecho de que la relación $< \cup \{(a,a) \in A \times A : a \in A\}$ sea reflexiva, transitiva y antisimétrica sobre el conjunto A.

Siguiendo con esta noción ligeramente distinta de orden parcial, se puede generalizar lo anterior para demostrar, utilizando el Axioma de Elección, que $\preceq$ se comporta incluso como un "orden lineal" sobre la clase de todos los conjuntos.

Teorema A.30 *Para cualesquiera conjuntos A y B se tiene que $A \preceq B$ ó $B \preceq A$*

Demostración. La demostración de este teorema se puede consultar en [Amo08] pág. 97. □

Utilizando nuevamente el Axioma de Elección, el teorema anterior puede generalizarse a algo incluso más fuerte, que es el hecho de que la "relación" $\preceq$ es un buen orden sobre la clase de todos los conjuntos. El lector interesado en ver la demostración de este resultado puede consultar el artículo [Amo09].

A continuación haremos uso de la Notación 1.52 dada en el Capítulo 1, mediante la cual se utiliza el símbolo ${}^{A}B$ para denotar al conjunto de todas las funciones que van de A en B. De este modo, como $2 = \{0, 1\}$, en particular tenemos que ${}^{A}2 = \{f : A \to \{0, 1\}\}$. Esto nos permite enunciar el siguiente teorema, que está enfocado a mostrar una relación más precisa entre la cardinalidad de un conjunto y la de su conjunto potencia.

Teorema A.31 *Para cualquier conjunto A se tiene que $\mathcal{P}(A) \sim {}^{A}2$*

Demostración. Sea A un conjunto arbitrario. Sea $F : \mathcal{P}(A) \to {}^{A}2$ la función definida de manera que para cada $X \in \mathcal{P}(A)$ y para cada $a \in A$

$$F(X)(a) := \begin{cases} 0 & \text{si } a \notin X \\ 1 & \text{si } a \in X. \end{cases}$$

Claramente $F(X) \in {}^{A}2$. Por otra parte, si $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ son tales que $F(X) = F(Y)$, entonces por definición de F se tiene que para todo $x \in A$, $x \in X$ si y sólo si $F(X)(x) = 1$ y, como $F(X) = F(Y)$, esto ocurre si y sólo si $F(Y)(x) = 1$, es decir, si y sólo si $x \in Y$. Por lo tanto, $X = Y$ y podemos concluir que F es inyectiva. Finalmente, dada una función $f \in {}^{A}2$, si definimos $X := f^{-1}[\{1\}]$ se tiene que $F(X) = f$ y, por lo tanto, F es sobreyectiva. Esto demuestra que $\mathcal{P}(A)$ es equipotente con ${}^{A}2$. □

A.3.2. La jerarquía de los álefs

En esta sección introduciremos la formalización a la idea de cardinalidad que nos permitirá establecer con exactitud qué objetos matemáticos representarán al cardinal de cada conjunto en el universo. La idea es definir a los números cardinales como números ordinales que cumplan ciertas características, ya que de acuerdo con las nociones de la sección anterior, distintos números ordinales pueden tener la misma cardinalidad, como es el caso de ω y $\omega + 1$. En este contexto, podemos enunciar la siguiente definición.

Definición A.32 *Sea α un número ordinal. Decimos que α es un* ***número cardinal*** *si y sólo si no es equipotente con ningún $\beta < \alpha$.*

Usualmente utilizaremos las letras griegas κ, λ y μ para referirnos a números cardinales.

Observación A.33 *Todo número natural es un número cardinal. Así mismo, ω es un número cardinal y es el mínimo cardinal infinito.*

Un enunciado equivalente al Axioma de Elección es que todo conjunto es bien ordenable.[8] Utilizando esto, podemos dar sentido al siguiente resultado que nos permitirá terminar de establecer qué objeto matemático representa a la cardinalidad de un conjunto.

Teorema A.34 *Todo conjunto X es equipotente a un único número cardinal.*

Demostración. La demostración de este teorema se puede consultar, por ejemplo, en [HJ99] pág. 130. □

Bajo esta motivación podemos establecer el siguiente concepto.

Definición A.35 *El* ***cardinal de X*** *(denotado por $|X|$), es el único número cardinal equipotente a X.*

Una pregunta que surge ahora es si existirán números cardinales distintos a los números naturales y a ω. El siguiente resultado establece que no sólo hay una gran cantidad de números cardinales, sino que los hay arbitrariamente grandes.

Teorema A.36 *(i) Para todo ordinal α existe un número cardinal mayor que α.*

(ii) Si X es un conjunto de números cardinales, entonces $\bigcup X$ es un número cardinal.

Demostración. La demostración de este teorema se puede consultar en [Jec02] pág. 29. □

Observación A.37 *Junto con el principio del mínimo ordinal, el teorema anterior tiene como consecuencia que para todo número cardinal κ hay un mínimo número cardinal, al que denotaremos por κ^+, tal que $\kappa < \kappa^+$.*

[8] Véase el libro [Amo08] pág. 96.

Notación A.38 *Denotamos por CAR a la clase de todos los números cardinales infinitos.*

Nótese que, dado que la clase OR no es un conjunto y todo número cardinal es, a su vez, un número ordinal, entonces la clase CAR tampoco es un conjunto.

Observación A.39 *Cualquier cardinal $\alpha \in CAR$ es un ordinal límite.*

Utilizando la Observación A.37 podemos definir una enumeración creciente de todos los números cardinales infinitos, a los que denominaremos *álefs*.

Definición A.40 *Utilizando recursión para ordinales definimos al funcional $\aleph : OR \to CAR$ como el único que cumple:*

(i) $\aleph_0 := \omega$

(ii) $\aleph_{\alpha+1} := \aleph_\alpha^+$

(iii) $\aleph_\alpha := \bigcup\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$ *si α es ordinal límite.*

En el contexto de la definición anterior podemos establecer los siguientes conceptos.

Definición A.41 *(i) Si X es un conjunto tal que $|X| = \aleph_0$, decimos que X es **numerable**. Así mismo, si X es finito o numerable decimos que es **a lo más numerable**.*

*(ii) Un cardinal de la forma $\aleph_{\alpha+1}$ es llamado **cardinal sucesor**.*

*(iii) Finalmente, si γ es un ordinal límite, decimos que $\aleph_\gamma$ es un **cardinal límite**.*

Notación A.42 *Un cardinal que a menudo cobra particular importancia en la teoría de conjuntos es el cardinal sucesor a $\aleph_0 (= \omega)$. Utilizando la definición A.40, a dicho cardinal se le denota como $\aleph_1$ y corresponde al **primer ordinal no numerable**, al que denotaremos por ω_1.*

Cabe destacar que la notación de los álefs se utiliza para dejar claro cuando se está hablando de números cardinales y sus propiedades cuando los vemos como una jerarquía bien ordenada por la clase de números ordinales, mientras que en general se utilizan las letras griegas α, β, γ u ω_α cuando se trabaja con números ordinales y sus características.

Dado que los números naturales forman un conjunto numerable, las propiedades de los conjuntos equipotentes con ω son de gran importancia en las matemáticas, ya que frecuentemente necesitamos reducir nuestros problemas a analizar conjuntos finitos o numerables cuyas propiedades podamos manejar con más libertad.

Algunas propiedades que utilizaremos a lo largo de este trabajo respecto a la numerabilidad quedan establecidas en el siguiente resultado.

Proposición A.43 *(i) Si A es un conjunto a lo más numerable y $B \subseteq A$, entonces B es a lo más numerable.*

(ii) *Si A es un conjunto y $F : \omega \to A$ es una función, entonces $F[\omega]$ es a lo más numerable.*

(iii) *Si S es un conjunto a lo más numerable tal que para todo $A \in S$ se tiene que A es a lo más numerable, entonces $\bigcup S$ es a lo más numerable.*

Demostración. Las demostraciones a las afirmaciones anteriores se pueden consultar, por ejemplo, en [HJ99] págs. 74-77. □

El siguiente resultado establece que la clase de todos los *álefs* de la Definición A.40 es igual a CAR.

Teorema A.44 *(i)* *Para todo ordinal α se tiene que $\aleph_\alpha$ es un cardinal infinito.*

(ii) *Si Ω es un cardinal infinito, entonces existe $\alpha \in OR$ tal que $\Omega = \aleph_\alpha$.*

Demostración. Se puede consultar la demostración de este teorema en [HJ99] pág. 131. □

A.3.3. Aritmética cardinal

En esta sección definiremos las distintas operaciones que podemos establecer entre números cardinales. Las definiciones de suma, multiplicación y exponenciación entre números cardinales estarán motivadas por las operaciones que podemos efectuar entre conjuntos, pues al igual que ocurre con los números naturales, son éstas operaciones las que motivan la idea de operar entre sí a los números cardinales.

Definición A.45 *Sean κ y λ números cardinales. Definimos la* ***suma entre cardinales*** *como*

$$\kappa + \lambda := |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|.$$

Las siguientes propiedades son inmediatas de la definición anterior.

Teorema A.46 *Sean κ, λ, μ y η números cardinales. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(i) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$;

(ii) $\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$;

(iii) $\kappa \leq \kappa + \lambda$; *y*

(iv) *si $\kappa \leq \lambda$ y $\mu \leq \eta$ entonces $\kappa + \mu \leq \lambda + \eta$.*

Demostración. La demostración de estas propiedades se puede encontrar, por ejemplo, en [HJ99] pág. 94. □

Definición A.47 *Sean κ y λ números cardinales. Definimos la* ***multiplicación entre cardinales*** *como*

$$\kappa \cdot \lambda := |\kappa \times \lambda|.$$

Las siguientes propiedades respecto a la multiplicación cardinal son fáciles de demostrar a partir de la definición anterior.

Teorema A.48 *Sean κ, λ, μ y η números cardinales. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(i) $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$;

(ii) $\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$;

(iii) $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$;

(iv) *si* $\lambda > 0$, *entonces* $\kappa \leq \kappa \cdot \lambda$;

(v) *si* $\kappa \leq \lambda$ *y* $\mu \leq \eta$ *entonces* $\kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \eta$;

(vi) $\kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa$; *y*

(vii) *si* $\kappa \geq 2$, *entonces* $\kappa + \kappa \leq \kappa \cdot \kappa$.

Demostración. La demostración de estas propiedades se puede encontrar, por ejemplo, en [HJ99] pág. 94. □

Otra operación importante que se puede definir entre números cardinales es la *exponenciación*. De hecho, así como el producto de números cardinales está íntimamente relacionado con la cardinalidad del producto cartesiano de dos conjuntos, la definición de exponenciación estará basada en la cardinalidad que tiene la colección de funciones que van de un conjunto a otro. Esto quedará asentado a continuación.

Definición A.49 *Sean κ y λ números cardinales. Definimos la* ***exponenciación entre cardinales*** *de tal manera que*

$$\kappa^{\lambda} := |{}^{\lambda}\kappa|.$$

Las propiedades generales respecto a la exponenciación cardinal quedan establecidas en el siguiente resultado.

Teorema A.50 *Sean κ, λ, μ y η números cardinales. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(i) *si* $\lambda > 0$, *entonces* $\kappa \leq \kappa^{\lambda}$;

(ii) *si* $\kappa > 1$, *entonces* $\lambda \leq \kappa^{\lambda}$;

(iii) *si* $\kappa \leq \lambda$ *y* $\mu \leq \eta$ *entonces* $\kappa^{\mu} \leq \lambda^{\eta}$;

(iv) $\kappa \cdot \kappa = \kappa^2$;

(v) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$;

(vi) $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$;

(vii) $(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} \cdot \lambda^{\mu}$; *y*

(vii) $\kappa < 2^\kappa$.

Demostración. Se puede consultar la demostración de estas propiedades en [HJ99] págs. 95 y 96. □

La aritmética entre cardinales infinitos difiere substancialmente de la aritmética para cardinales finitos. De hecho, el comportamiento de la suma y multiplicación entre álefs es bastante sencillo. Se tiene por ejemplo que $n + \aleph_0 = \aleph_0$ para todo número natural n y que $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. Más aún, se tienen los siguientes resultados.

Teorema A.51 *Para cualesquiera ordinales α y β se tiene que, si $\alpha \leq \beta$, entonces*

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \text{máx}\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\} = \aleph_\beta.$$

En particular se tiene que para cualquier ordinal α, $\aleph_\alpha + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

Demostración. La demostración de este resultado se puede consultar en [HJ99] págs. 134-136. □

Proposición A.52 *Si κ y λ son cardinales tales que $2 \leq \kappa \leq \lambda$ y $\aleph_0 \leq \lambda$, entonces $2^\lambda = \kappa^\lambda = (\lambda^+)^\lambda$.*

Demostración. Sean κ y λ cardinales tales que $2 \leq \kappa \leq \lambda$ y $\aleph_0 \leq \lambda$. Entonces, dado que λ^+ es el mínimo cardinal mayor que λ, por el Teorema de Cantor tenemos que $2 \leq \lambda < \lambda^+ \leq 2^\lambda$. Así, utilizando los Teoremas A.50 y A.51, tenemos que

$$2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq \lambda^\lambda \leq (\lambda^+)^\lambda \leq (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda \cdot \lambda} = 2^\lambda,$$

de modo que, por el Teorema de Cantor-Schröeder-Bernstein, podemos concluir que $2^\lambda = \kappa^\lambda = (\lambda^+)^\lambda$. □

Otra aplicación del Axioma de Elección también cobra importancia sobre las propiedades que se pueden demostrar respecto a sumas infinitas de cardinales.

Definición A.53 *Sea λ un cardinal y sea $\{\kappa_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ una familia de cardinales indexados por λ. Definimos*

$$\sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha := \left| \bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha \right|,$$

donde $\{X_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ es una familia de conjuntos ajenos por parejas tal que $|X_\alpha| = \kappa_\alpha$ para cada $\alpha \in \lambda$.

El hecho de que esta definición no depende de la elección de los conjuntos X_i, es consecuencia del Axioma de Elección.

La siguiente propiedad de aritmética cardinal es una de las herramientas más útiles para determinar el valor de una suma infinita de números cardinales.

Teorema A.54 *Sean λ un cardinal infinito y $\{\kappa_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ una familia de cardinales distintos de cero. Entonces*

$$\sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha = \lambda \cdot \sup_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha.$$

Demostración. Sea $\kappa := \sup_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$. Por un lado, obsérvese que para todo $\alpha < \lambda$ se tiene que $\kappa_\alpha \leq \kappa$, así que

$$\sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha \leq \sum_{\alpha<\lambda} \kappa = \lambda \cdot \kappa. \tag{A.1}$$

Por otra parte, podemos ver que como cada $\kappa_\alpha \neq 0$, $\lambda = \sum_{\alpha<\lambda} 1 \leq \sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$. Además, dado que $\sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$ es cota superior para $\{\kappa_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ y κ es la mínima cota superior, $\kappa \leq \sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$. Por el Teorema A.51, las dos desigualdades anteriores implican que

$$\lambda \cdot \kappa = \text{máx}\{\kappa, \lambda\} \leq \sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha. \tag{A.2}$$

A partir de las desigualdades (A.1) y (A.2) concluimos que $\sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha = \lambda \cdot \kappa$, que es lo que queríamos demostrar. $\square$

APÉNDICE B

Los números reales

El conjunto de los números reales es probablemente uno de los conjuntos de mayor importancia dentro de las matemáticas. Prueba de ello es que sus propiedades han sido objeto de estudio de grandes disciplinas como el álgebra, el análisis, la topología y por supuesto, la teoría de conjuntos. Utilizaremos este apéndice para establecer algunos conceptos y resultados referentes a los números reales que han sido utilizados ampliamente en este trabajo.

B.1. Campos ordenados

En la Sección A.2 del apéndice anterior vimos que dado un conjunto F, podemos definir entre sus elementos una relación de orden que nos permita compararlos entre sí. Además, también podemos dotarlo de una estructura algebraica mediante operaciones a las que solemos llamar suma y multiplicación. La siguiente definición tiene como objetivo establecer qué tipo de estructura conformarán los números reales con las operaciones antes mencionadas.

Definición B.1 *Sea F un conjunto y sean $+ : F \times F \to F$ y $\cdot : F \times F \to F$ dos funciones a las que llamaremos suma y multiplicación respectivamente. Decimos que $(F, +, \cdot)$ es un* ***campo*** *si se satisfacen las siguientes propiedades:*

Axiomas para la suma

(A1) la suma es conmutativa, es decir, $\forall x, y \in F \; x + y = y + x$;

(A2) la suma es asociativa, es decir, $\forall x, y, z \in F \; (x + y) + z = x + (y + z)$;

(A3) existe $0 \in F$ tal que 0 es un elemento neutro para la suma, es decir, tal que $\forall x \in F$, $0 + x = x$;

(A4) *Para cada $x \in F$ existe un inverso aditivo, es decir, existe $-x \in F$ tal que $x + (-x) = 0$.*

Axiomas para la multiplicación

(M1) *la multiplicación es conmutativa, es decir, $\forall x, y \in F$ $x \cdot y = y \cdot x$;*

(M2) *la multiplicación es asociativa, es decir, $\forall x, y, z \in F$ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;*

(M3) *existe $1 \in F$ tal que $0 \neq 1$ y 1 es un elementro neutro para la multiplicación, es decir, tal que $\forall x \in F$, $1 \cdot x = x$;*

(M4) *Para cada $x \in F - \{0\}$ existe un inverso multiplicativo, es decir, existe $\frac{1}{x} \in F$ tal que $x \cdot (\frac{1}{x}) = 1$.*

Ley distributiva

(D1) *$\forall x, y, z \in F$ se cumple que $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.*

La siguiente definición reúne los dos tipos de estructura de los que hemos hablado hasta ahora, que son la de orden y la algebraica.

Definición B.2 *Un **campo ordenado** es un conjunto F dotado de un orden $<$ y dos operaciones $+$ y $\cdot$ tales que, $(F, <)$ es un orden lineal, $(F, +, \cdot)$ es un campo y además:*

(i) *para cualesquiera $x, y, z \in F$ se tiene que si $x < y$, entonces $x + z < y + z$;*

(ii) *si $x, y \in F$ son tales que $x > 0$ y $y > 0$, entonces $x \cdot y > 0$.*

El siguiente resultado sintetiza la importancia para los números reales de todas las nociones definidas anteriormente y en él se centra por qué el estudio de los números reales ha sido tan importante en la historia de las matemáticas.

Teorema B.3 *Existe un campo ordenado $\mathbb{R}$ con la propiedad de que cualquier subconjunto acotado superiormente tiene supremo.*

Demostración. La demostración de este teorema se puede consultar en [Rud76] pág. 17. □

Por supuesto, el campo al que se refiere el resultado anterior es el de los números reales con el orden y las operaciones que le brindamos usualmente. La prueba de su existencia se refiere a la construcción conjuntista que nos permite ver a la colección de números reales como un objeto matemático construido a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos.

B.2. Sumas numerables

Cuando trabajamos con conjuntos infinitos de números reales, a menudo requeriremos hablar de sumas generalizadas o infinitas. Estas nociones se pueden estudiar de manera muy profunda en libros de Cálculo o de Análisis Matemático.[1]

[1] El lector puede consultar el libro de Rudin [Rud76] para tener una perspectiva más profunda de este tema.

Sin embargo, aquí introduciremos la definición únicamente para el caso particular en el que estemos sumando sólo cantidades positivas, dentro de las que podrá estar el símbolo de ∞ mencionado en la Definición 1.1.

Definición B.4 *Dada una sucesión $\{r_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$, definimos la* ***suma infinita*** *de los r_n como*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} r_n := \sup \left\{ \sum_{n=0}^{m} r_n : m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Asimismo, por las propiedades de sumas numerables y de límites podemos expresar a estas sumas infinitas como un límite de la siguiente manera:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} r_n = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{m} r_n = \sup \left\{ \sum_{n=0}^{m} r_n : m \in \mathbb{N} \right\}.$$

B.3. Topología de los números reales

Las definiciones que estableceremos a continuación caracterizan a algunos conjuntos de números reales con base en propiedades meramente topológicas.

Definición B.5 *Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $r \in \mathbb{R}^+$. Definimos a la* ***bola de radio*** *r* ***con centro en*** *x como el intervalo $(x - r, x + r)$ y la denotamos por $B(x, r)$.*

Definición B.6 *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y sea $x \in A$. Decimos que x es un* ***punto interior*** *de A si existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(x, r) \subseteq A$. Al conjunto de puntos interiores de A lo denotamos por $int(A)$.*

Definición B.7 *Sea A un subconjunto de los números reales. Decimos que A es* ***abierto*** *si $int(A) = A$, es decir, si todos sus puntos son interiores.*

Definición B.8 *Sea F un subconjunto de los números reales y sea $x \in \mathbb{R}$. Decimos que x es un* ***punto de acumulación*** *de F si y sólo si para cualquier $r \in \mathbb{R}^+$ se tiene que $(B(x, r) - \{x\}) \cap F \neq \emptyset$, es decir, si cualquier bola con centro en x a la que le quitemos su centro intersecta a F. Al conjunto de puntos de acumulación lo denotamos por F'.*

Definición B.9 *Sea F un subconjunto de los números reales. Decimos que F es* ***cerrado*** *si y sólo si contiene a todos sus puntos de acumulación, es decir, si $F' \subseteq F$.*

Definición B.10 *Sea F un subconjunto de los números reales. Definimos la* ***cerradura*** *de F como el conjunto $F \cup F'$ y la denotamos por $\overline{F}$.*

El siguiente teorema nos da algunas equivalencias muy útiles respecto a qué significa que un conjunto sea cerrado.

Teorema B.11 *Sea $F \subseteq \mathbb{R}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) F *es cerrado;*

(b) *el complemento de* F *es abierto;*

(c) F *es igual a su cerradura, es decir,* $F = \overline{F}$.

Demostración. La equivalencia entre (a) y (b) se puede consultar en [Rud76] pág. 34. La equivalencia entre (a) y (c) se sigue directamente de la definición de cerradura. □

Hasta ahora hemos definido a dos de las clases de conjuntos de números reales más importantes que son las de los abiertos y los cerrados. Una noción que aparece frecuentemente al trabajar con este tipo de conjuntos, es la de *distancia* entre dos subconjuntos de $\mathbb{R}$. A continuación definiremos este concepto que resulta muy útil cuando estamos manejando conjuntos de números reales.

Definición B.12 *Sean* X *y* Y *dos subconjuntos no vacíos de* $\mathbb{R}$*. Definimos la* ***distancia*** *de* X *a* Y *como el número real*

$$d(X,Y) := \text{ínf}\{|x-y| : x \in X \text{ y } y \in Y\}.$$

En el caso particular en el que X *es de la forma* $X = \{x\}$*, escribimos* $d(x,Y)$ *para denotar la distancia de* X *a* Y.

Obsérvese que el ínfimo de la definición anterior está bien definido y es un número real pues X y Y son no vacíos y el conjunto al que estamos tomando ínfimo está acotado inferiormente por el 0. Nótese también que si G es un conjunto abierto y $x \in G$, entonces $d(x, \mathbb{R} - G) > 0$.

Una especie de conjuntos que tienen propiedades particularmente importantes en el estudio de la topología de los números reales son los conjuntos compactos que definiremos a continuación, aunque para ello necesitaremos del siguiente concepto preliminar.

Definición B.13 *Sea* F *un conjunto de números reales y sea* $\mathcal{G}$ *una familia de subconjuntos abiertos de* $\mathbb{R}$*. Decimos que* $\mathcal{G}$ *es una* ***cubierta abierta para*** F *si y sólo si* $F \subseteq \bigcup \mathcal{G}$.

Definición B.14 *Sea* F *un conjunto de números reales. Decimos que* F *es* ***compacto*** *si y sólo si para toda cubierta abierta* $\mathcal{G}$ *para* F *existe una subcubierta finita para* F*, es decir, existe un subconjunto finito* $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ *tal que* $F \subseteq \bigcup \mathcal{H}$.

La siguiente definición nos permitirá entender mejor las propiedades de los conjuntos compactos.

Definición B.15 *Sea* F *un conjunto de números reales. Decimos que* F *es* ***acotado*** *si y sólo si existe* $M > 0$ *tal que* $F \subseteq (-M, M)$.

A partir de este concepto podemos enunciar el siguiente teorema, que brinda una caracterización muy útil de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Teorema B.16 (Teorema de Heine Borel) *Sea K un conjunto de números reales. Entonces K es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Demostración. La demostración de este famoso resultado se puede consultar, por ejemplo, en [Rud76] pág. 40. $\square$

Concluimos esta sección con una definición y un resultado que se utilizan frecuentemente para demostrar propiedades de algunos conjuntos de números reales.

Definición B.17 *Sea $\mathcal{S}$ una familia no vacía de conjuntos. Decimos que $\mathcal{S}$ tiene la **propiedad de la intersección finita** si para cualquier subfamilia finita y no vacía $\mathcal{R}$ de $\mathcal{S}$ se tiene que $\bigcap \mathcal{R} \neq \emptyset$.*

Teorema B.18 *Si $\mathcal{I}$ es una familia de intervalos cerrados y acotados en $\mathbb{R}$ con la propiedad de la intersección finita, entonces $\bigcap \mathcal{I}$ es un intervalo no vacío.*

Demostración. Sea $\mathcal{I}$ una familia de intervalos cerrados y acotados con la propiedad de la intersección finita y sea $A := \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}([x, y] \in \mathcal{I})\}$ el conjunto de extremos izquierdos de los intervalos en $\mathcal{I}$. Demostraremos que A es un conjunto acotado superiomente. Sea $[a, b]$ un intervalo cualquiera en la familia $\mathcal{I}$. Obsérvese que para todo $x \in A$ se tiene que $x \leq b$, ya que de lo contrario existiría $y \in \mathbb{R}$ tal que $[x, y] \in \mathcal{I}$ y $a \leq b < x \leq y$, por lo que $[a, b] \cap [x, y] = \emptyset$ contradiciendo que $\mathcal{I}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Esto significa que b es una cota superior para A y, como $A \neq \emptyset$, existe $\overline{a} \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{a} = \sup(A)$. De este modo, si $[a, b] \in \mathcal{I}$, como $a \in A$ y b es una cota superior de A, se tiene que $a \leq \overline{a} \leq b$. Así, $\overline{a} \in [a, b]$ para cualquier $[a, b] \in \mathcal{I}$ y, por tanto, $\overline{a} \in \bigcap \mathcal{I}$, de modo que este conjunto es no vacío. El hecho de que $\bigcap \mathcal{I}$ es un intervalo se sigue directamente de las definiciones de intervalo e intersección.[2] $\square$

B.4. El cardinal del continuo

Dado que los números reales han sido uno de los objetos más estudiados por parte de los matemáticos, no debe resultar sorprendente que también hayan sido los causantes de algunas de las controversias más escandalosas en las matemáticas del siglo XIX, época en la cual Cantor demostró que los números reales *no pueden ser biyectados* con el conjunto de los números racionales. Ésta fue la primera vez que los matemáticos se enfrentaron a aceptar que hay conjuntos infinitos más grandes que otros y por supuesto muchos contemporáneos atacaron fervientemente estas ideas. Sin embargo, Cantor utilizó esto como motivación para construir un nuevo panorama dentro de las matemáticas.

La manera más común de hablar de la cardinalidad de los números reales consiste en utilizar su expresión en notación binaria para construir una función biyectiva entre $\mathbb{R}$ y ${}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}$. De hecho, dadas las herramientas conjuntistas que

[2]Recordemos que $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo si y sólo si para cualesquiera $x, y \in I$, si $x < y$ y $z \in \mathbb{R}$ es tal que $x < z < y$, entonces $z \in I$.

hemos construido en el Apéndice A.2, se puede establecer el resultado considerando únicamente la expansión decimal de los números reales, ya que la Proposición A.52 nos dice que ${}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \sim {}^{\mathbb{N}}\{n \in \mathbb{N} : 0 \leq n < 9\}$. De manera concreta podemos establecer el siguiente teorema.

Teorema B.19 *El conjunto de números reales es equipotente con* ${}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$.

Demostración. La demostración consiste en probar que $\mathbb{R} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y que ${}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \preceq \mathbb{R}$, de modo que utilizando el Teorema A.31 y el Teorema A.29 de Cantor-Schröeder-Bernstein, se sigue el resultado. Los detalles de la prueba requieren herramientas que se salen del objetivo de esta tesis, sin embargo, el lector los puede consultar en [HJ99] pág. 91. □

El teorema anterior nos dice que utilizando el Axioma de Elección, podemos hablar de la cardinalidad del conjunto $\mathbb{R}$, que correspondería al número cardinal $2^{\aleph_0}$.

Bibliografía

[Alv03] Álvarez Velasco, Ana. *Axioma de elección y Teoría de la Medida.* Tesis de Licenciatura. UNAM. 2003.

[Amo09] Amor Montaño, José Alfredo. *Dominancia conjuntista es un buen orden.* Laberintos e Infinitos. ITAM. (No. 19), 10-15. 2009.

[Amo84] Amor Montaño, José Alfredo. *Pequeños grandes cardinales. (Los menos grandes de los cardinales grandes).* Tesis de Maestría. UAM Iztapalapa. 1984.

[Amo08] Amor Montaño, José Alfredo. *Teoría de Conjuntos para estudiantes de Ciencias.* Segunda edición. México. Las prensas de Ciencias. 2008.

[ACM] Amor Montaño, José Alfredo, Campero Arena, Gabriela y Miranda Perea, Favio Ezequiel. *Teoría de Conjuntos, curso intermedio.* Por aparecer en Las Prensas de Ciencias.

[BN00] Bachman, George and Narici, Lawrence. *Functional Analysis.* Estados Unidos de Norteamérica. Dover. 2000.

[Bar95] Bartle, Robert G. *The elements of Integration and Lebesgue Measure.* Estados Unidos de Norteamérica. John Wiley and Sons. 1995.

[BS79] Briggs, James M. and Schaffter, Thomas. *Measure and cardinality.* The American Mathematical Monthly. Vol. 86. (No. 10), 852-855. 1979.

[Cam98] Campero Arena, Gabriela. *¿Es V distinto de L? Independencia del Axioma de Constructibilidad y algunas reflexiones sobre la No-Constructibilidad del Universo Conjuntista.* Tesis de Licenciatura. UNAM. 1998.

[Cie89] Ciesilski, Krysztof. *How good is Lebesgue measure?*. The Mathematical Intelligencer. Vol. 11. (No. 2), 54-58. New York. 1989.

[Dau79] Dauben, Joseph W. *Georg Cantor: his mathematics and philosophy of the infinite*. Princeton University Press. 1979.

[End04] Enderton, Herbert B. *Una introducción matemática a la lógica.* 2a. edición. México. Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM. 2004.

[Gra09] Grabinsky, Guillermo. *Teoría de la medida.* México. Las prensas de Ciencias. 2009.

[Hal74] Halmos, Paul R. *Measure Theory.* New York. Springer-Verlag. 1974.

[HJ99] Hrbacek, Karel and Jech, Thomas. *Introduction to Set Theory.* Third Edition, revised and expanded. USA. Taylor and Francis Group. 1999.

[Jec02] Jech, Thomas. *Set Theory.* 3rd. Millennium edition revised and expanded. Berlin. Springer. 2002.

[Kan03] Kanamori, Akihiro. *The Higher Infinite.* Second edition. Berlin. Springer. 2003.

[KM78] Kanamori, A. and Magidor M. *The evolution of large cardinal axioms in set theory.* In Higher Set Theory. Berlin. 1978.

[Kec95] Kechris, Alexander S. *Classical Descriptive Set Theory.* New York. Springer Verlag. 1995.

[Kun80] Kunen, Kenneth. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* USA. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Vol. 102. 1980.

[NN59] Nagel, Ernst y Newman, James R. *La prueba de Gödel.* México. Centro de estudios filosóficos. UNAM. 1959.

[Oxt80] Oxtoby, John C. *Measure and Category.* Second Edition. New York. Springer Verlag. 1980.

[Rud76] Rudin, Walter. *Principles of Mathematical Analysis.* Third Edition. Singapur. McGraw-Hill. 1976.

[Sol70] Solovay, Robert M. *A model of Set Theory in which every set of reals is Lebesgue Measurable.* The Annals of Mathematics, Second Series. Vol. 92, (No. 1), 1970. pp. 1-56.

[Tal83] Tall, Franklin D. *Applying Set Theory to Measure Theory.* In Measure Theory and its applications. Berlin. Springer. 1983.

[Zor08] Zorrilla Noriega, Manuel. *La Paradoja de Banach-Tarski.* Tesis de Licenciatura. UNAM. 2008.