



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Implicaciones de la gravedad modificada  
"MOND": las galaxias M33 y NGC 4605  
como casos particulares

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
FÍSICO

PRESENTA:  
ELIUT ARRIAGA CUALI

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. FRANCISCO JAVIER SÁNCHEZ SALCEDO



2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de Datos del Jurado

<p>1. Datos del alumno                  Apellido paterno                  Apellido materno                  Nombre(s)                  Teléfono                  Universidad Nacional Autónoma de México                  Facultad de Ciencias                  Carrera                  Número de cuenta</p>	<p>1. Datos del alumno                  Arriaga                  Cualí                  Eliut                  01 594 95 7 54 30                  Universidad Nacional Autónoma de México                  Facultad de Ciencias                  Física                  094031881</p>
<p>2. Datos del tutor                  Grado                  Nombre(s)                  Apellido paterno                  Apellido materno</p>	<p>2. Datos del tutor                  Dr.                  Francisco Javier                  Sánchez                  Salcedo</p>
<p>3. Datos del sinodal 1                  Grado                  Nombre(s)                  Apellido paterno                  Apellido materno</p>	<p>3. Datos del sinodal 1                  Dr.                  Roberto Allan                  Sussman                  Livosky</p>
<p>4. Datos del sinodal 2                  Grado                  Nombre(s)                  Apellido paterno                  Apellido materno</p>	<p>4. Datos del sinodal 2                  Dr.                  Axel Ricardo                  De La Macorra                  Petterson Moriel</p>
<p>5. Datos del sinodal 3                  Grado                  Nombre(s)                  Apellido paterno                  Apellido materno</p>	<p>5. Datos del sinodal 3                  Dr.                  José Antonio                  de Diego                  Orsurbe</p>
<p>6. Datos del sinodal 4                  Grado                  Nombre(s)                  Apellido paterno                  Apellido materno</p>	<p>6. Datos del sinodal 4                  Dr.                  Mario Alberto                  Rodríguez                  Meza</p>
<p>7. Datos del trabajo escrito.                  Título                  Subtítulo                   Número de páginas                  Año</p>	<p>7. Datos del trabajo escrito.                  Implicaciones de la gravedad modificada "MOND"                  las galaxias M33 y NGC 4605 como casos                  particulares                   122 p                  2010</p>

## **Agradecimientos**

Al Instituto de Astronomía de la UNAM por brindarme la oportunidad para realizar mi tesis.

Al Dr. Francisco Javier Sánchez Salcedo por brindarme la oportunidad, por su infinita paciencia y por que me dedico gran parte de su tiempo.

A mis sinodales Dr. Roberto Allan Sussman, Dr. Axel Ricardo De La Macorra, Dr. José Antonio de Diego y Dr. Mario Alberto Rodríguez por que las platicas que sostuve con ellos y sus criticas me han servido de mucho.

## **Dedicatorias**

Principalmente quiero dedicar esta tesis a mi familia, por que creyeron en mi, por que me apoyaron incondicionalmente. Y por que gracias a ellos estoy alcanzando esta meta.

A mis hermanos Heriberto, Berenice y Erendira que son parte importante de mi vida, por que amigos como ellos solo una vez en la vida... gracias por estar siempre para mi.

A mis papas que fueron los que me inculcaron principios, los que me formaron como persona, los que me dieron tanto sin pedir nada a cambio. A mi "Ma" Javiera por que me ha dado cosas tan valiosas en la vida como el cariño y amor de una madre. Por que me enseñó a ver que la vida siempre tiene un lado bueno, y por que me ha enseñado a dar todo el cariño posible a mis semejantes. A mi "Pa" Heriberto por que ha sido un gran ejemplo para mi, por que me ha enseñado tantas cosas, por que me impulso a seguir adelante, por que fue él quien despertó y alimento mi curiosidad por saber más, y fue él quien me inculco el habito de la lectura... gracias a los dos.

A mis sobrinos que ocupan un lugar muy importante en mi corazón: a Lupita, Regina, Miros, Uises, Alondra y Citlali... los quiero muchísimo... siempre los llevo conmigo.

A mis cuñados Laura y Gabriel "el totuga", gracias por su amistad y por permitirme conocerlos y convivir con ustedes como hermanos.

A mis amigos Kike, Miriam y Jonathan por todas esas noches increíbles que pasamos estudiando, que me permitieron conocerlos mas, por que ellos son parte importante de esta meta.

A Mary, gracias por tu amor y comprensión en todo este tiempo, por permitirme conocerte y por ser tu misma. Gracias por creer en mí ... Te amo hermosa.

La ventaja de la vida es que llegas a conocer personas que de algún modo te dejan algo de ellos que contribuye para que puedas crecer como persona.

Quiero agradecer especialmente a Don Vicente y a la Sra. Mari por brindarme la hospitalidad de su hogar y permitirme vivir y compartir con ellos tantos momentos gratos, y en particular gracias por su amistad.

A Lalo y Miri por permitirme la entrada a su casa y por su hospitalidad y amistad, gracias.

# Índice

0.1. Resumen . . . . .	1
<b>1. Antecedentes, materia oscura y MOND</b>	<b>1</b>
1.1. Materia oscura . . . . .	2
1.2. El contenido de materia oscura en galaxias Curvas de rotación . . . . .	4
1.3. Otra evidencia: lentes gravitacionales . . . . .	7
1.4. Tipos de materia oscura . . . . .	9
1.5. Éxitos y decepciones del modelo de materia oscura fría . . . .	11
1.6. Teorías alternativas a la materia oscura . . . . .	13
1.7. Dinámica Newtoniana Modificada: MOND . . . . .	14
1.8. MOND en galaxias espirales . . . . .	20
1.8.1. MOND y las curvas de rotación . . . . .	20
1.8.2. ¿Es más fácil de confrontar MOND que el modelo de materia oscura? . . . . .	22
1.9. MOND en sistemas esferoidales . . . . .	24
1.9.1. MOND en galaxias elípticas . . . . .	24
1.9.2. MOND en galaxias esferoidales enanas . . . . .	26
1.10. Otras consecuencias y predicciones de MOND . . . . .	27

1.11. Halos esféricos de materia oscura versus MOND . . . . .	29
1.12. MOND en los cúmulos de galaxias . . . . .	31
1.13. Algunos supuestos problemas de MOND . . . . .	32
1.14. Objetivos de la tesis . . . . .	33
<b>2. La ecuación de Poisson modificada y sus implicaciones</b>	<b>35</b>
2.1. Una introducción a la ecuación algebraica . . . . .	36
2.2. Ecuación algebraica y sus inconsistencias en los cúmulos glob- ulares . . . . .	38
2.2.1. Cúmulos globulares: Generalidades . . . . .	38
2.2.2. Dinámica interna de los cúmulos globulares lejanos .	39
2.2.3. Dinámica interna y externa de los cúmulos globulares . . . . .	40
2.3. Ecuación de Poisson modificada . . . . .	44
2.4. Grados de libertad y condiciones de frontera . . . . .	46
2.4.1. Campo gravitacional Newtoniano . . . . .	47
2.4.2. Campo gravitacional de MOND y la no-linealidad . .	52
2.4.3. Linealización de la ecuación de campo en MOND . .	53
2.5. Validez de la ecuación algebraica: Teorema . . . . .	56
2.6. Campos de fuerza paralelos . . . . .	56
2.6.1. Campos de fuerza paralelos en el caso Newtoniano . .	57
2.6.2. Corolario . . . . .	59
2.7. Ecuación de Poisson modificada en un disco . . . . .	60
<b>3. Aplicando MOND a la galaxia espiral M33</b>	<b>63</b>
3.1. Características más relevantes de M33 . . . . .	64
3.2. Componentes bariónicas de M33 . . . . .	65

3.3. Procedimiento para estudiar la dinámica . . . . .	69
3.4. MOND en M33 . . . . .	71
3.5. Componentes radiales y verticales en M33 . . . . .	76
<b>4. La galaxia NGC 4605</b>	<b>79</b>
4.1. Características relevantes de la galaxia	
NGC 4605 . . . . .	81
4.1.1. Propiedades generales . . . . .	81
4.1.2. Curva de rotación . . . . .	82
4.1.3. Componente estelar . . . . .	83
4.2. MOND en NGC 4605 . . . . .	86
4.2.1. Curvas predichas para diferentes valores de la $M/L_R$	86
4.2.2. Incertidumbres en la distancia de NGC 4605 . . . . .	89
4.2.3. Variaciones de $a_0$ . . . . .	90
4.2.4. La forma de la función de interpolación . . . . .	91
4.3. La estabilidad del disco de NGC 4605 en MOND: Cotas a la	
$M/L$ . . . . .	92
4.3.1. El parámetro de Toomre . . . . .	94
4.3.2. El valor esperado de $Q$ en galaxias espirales . . . . .	96
4.3.3. Cota inferior a la dispersión de velocidades radial . . . . .	97
4.3.4. Verosimilitud de la dispersión de velocidades . . . . .	98
4.3.5. Discusión . . . . .	102
<b>5. Conclusiones.</b>	<b>103</b>
<b>A. Clasificación de las galaxias.</b>	<b>107</b>
<b>B. Teorema del Virial.</b>	<b>109</b>
<b>C. Función de interpolación de Famaey &amp; Binney.</b>	<b>113</b>



# Índice de figuras

- 1.1. Se muestra el comportamiento de la velocidad de rotación, en una galaxia espiral, como función de su distancia al centro galáctico. La curva A muestra como se comporta la velocidad de rotación de regirse por la dinámica Newtoniana y si no hubiera materia oscura. La curva B representa el comportamiento de la velocidad de rotación observada. . . . . 6
- 1.2. La imagen muestra la trayectoria que sigue la luz al pasar por objetos masivos, fenómeno conocido como lente gravitacional. Así es posible ver objetos que, en la línea de visión, se encuentran detrás de objetos masivos. En ocasiones se encuentran más de una imagen del mismo objeto. 8
- 1.3. Formación de arcos en los lentes gravitacionales. Kneib et al. (2004) fueron capaces de detectar la galaxia más lejana conocida hasta entonces, gracias al efecto de lente gravitacional ejercida por el cúmulo Abell 2218. 9
- 1.4. Ejemplo de la relación Tully-Fisher de las galaxias espirales de la Osa Mayor (Sanders & Verheijen 1998). La velocidad de rotación que se tomó es la asintótica y está en unidades de  $\text{km s}^{-1}$ . La luminosidad está en  $10^{10} L_{\odot}$ . Los puntos blancos son galaxias que presentan campos de velocidad significativamente perturbados. La línea continua es el ajuste por mínimos cuadrados para los datos y tiene una pendiente de  $3.9 \pm 0.18$ . 16

1.5. Curva de rotación de la galaxia espiral NGC 1560. Los puntos con sus barras de error es la velocidad de rotación observada en HI. Se muestran también la contribución del disco (línea discontinua), del gas (línea punteada) y del halo de materia oscura (línea conformada por rayas y puntos alternando). . . . .	21
1.6. Dispersión de velocidades a lo largo de la línea de visión ( $\sigma_l$ ) versus radio característico de los sistemas soportados por “presión” ( $r$ ). Los puntos en forma de estrella son cúmulos globulares (Pryor & Meylen 1993, Trager et al. 1993), los puntos representan nubes moleculares masivas en la Galaxia (Solomon et al. 1987), los triángulos son las galaxias satélites esferoidales enanas de la Galaxia (Mateo 1998), los guiones horizontales son galaxias elípticas compactas (Bender et al. 1992), las cruces son galaxias elípticas masivas (Jørgensen 1999), y los cuadrados son cúmulos de galaxias emitiendo rayos X (White et al. 1997). Por último, la línea continua muestra la relación $\sigma_l^2/r = a_0$ , y las líneas discontinuas son una variación de un factor de 5 de esta relación. . . . .	25
2.1. Se muestra la posición del plano de la órbita de las estrellas dentro del cúmulo globular respecto del plano galaáctico. El plano orbital de las estrellas es perpendicular a la línea de visión. . . . .	41
3.1. La galaxia M33. Se localiza en la constelación del triángulo. Esta galaxia es pequeña en comparación con nuestra Galaxia y forma parte del Grupo Local. . . . .	64
3.2. En color amarillo se muestran las regiones de M33 donde hay mayor densidad de HI (tomada de Deul & van der Hulst 1987). Podemos ver que las regiones de mayor densidad coinciden con las regiones donde se encuentran las condensaciones de gas molecular. . . . .	67
3.3. Curva de rotación observada de M33. . . . .	68

---

3.4. La figura compara las regiones donde se encuentran las condensaciones de gas molecular de M33 con las regiones H II, mostrando que algunas nubes de gas molecular siguen los brazos espirales de M33. El tamaño de los círculos azules son proporcionales a la masa de gas molecular de la nube (imagen de Cheng et al. 1996). . . . .	69
3.5. Curva de rotación de M33, y la contribución del disco estelar según la dinámica Newtoniana para una $M/L_B = 1.2$ (curva discontinua superior) y para $M/L_B = 0.15$ (curva discontinua inferior), las cuales denotamos por $v_{c,N}$ . . . . .	72
3.6. Velocidad de rotación de M33 según lo predicho por Newton, junto con la contribución del disco estelar para una $M/L_B = 1.2$ (curva discontinua superior) y la contribución del gas (curva discontinua inferior). . . . .	73
3.7. Aceleración radial que tendría una partícula prueba en órbita circular en el disco de M33 como función del radio. La recta corresponde al valor de $a_0$ . Para aceleraciones por debajo del valor de $a_0$ , la dinámica que rige el comportamiento de M33 es la MONDiana. . . . .	74
3.8. Curvas de rotación según MOND para un disco exponencial de estrellas suponiendo $M/L_B = 1.2$ (derecha) y para una $M/L_B = 0.15$ (izquierda). Las líneas discontinuas representan la curva de rotación según Newton. . . . .	75
3.9. Curvas de rotación predichas por MOND (líneas continuas) considerando las contribuciones del gas (línea a rayas y puntos) y de las estrellas (líneas discontinuas), suponiendo $M/L_B = 0.15$ (panel de la izquierda) y para una $M/L_B = 1.2$ (panel de la derecha). . . . .	76
3.10. Mejor ajuste dejando libre el parámetro $M/L$ del disco estelar, el cual corresponde a $(M/L)_B = 0,92$ . . . . .	77
4.1. La línea continua muestra la curva de rotación observada de NGC 4605. Las barras verticales representan las incertidumbres en la velocidad de rotación. La curva discontinua representa la contribución Newtoniana a la curva de rotación para $M/L_R = 1.01$ . . . . .	85

4.2. Comparación de las curvas de rotación para una $M/L_R = 1.01$ (panel de la izquierda) y para $M/L_R = 2.31$ (panel de la derecha). En ambos casos usamos la función de interpolación estándar. . . . .	87
4.3. Curva de rotación para la galaxia enana NGC 4605. La curva punteada representa la curva de rotación para un disco según la dinámica Newtoniana para una $M/L_R = 2.9$ y sin materia oscura. . . . .	89
4.4. Comparación del ajuste obtenido al variar la distancia de la galaxia. En la gráfica de la izquierda se ha tomado el doble de la distancia estándar y una $M/L_R = 1.65$ . Para la gráfica de la derecha se ha tomado la mitad de la distancia estándar y una $M/L_R = 2.7$ . En ambas se ha usado la función de interpolación estándar. . . . .	90
4.5. Curva de rotación predicha por MOND con $a_0 = 6.6 \times 10^{-8} \text{ cm s}^{-2}$ y usando la función de interpolación estándar para una $M/L_R = 0.65$ . La línea discontinua muestra la contribución Newtoniana del disco. . . . .	91
4.6. Curvas de rotación para una $M/L_R = 1.58$ con la función de interpolación de Famaey & Binney (curva continua), y con la estándar (curva punteada). La curva discontinua representa la contribución estelar (usando la dinámica Newtoniana). . . . .	93
4.7. La gráfica muestra el ajuste a la curva de rotación predicha por MOND (usando la función de interpolación de Famaey and Binney y una $M/L_R = 1.58$ ) con una función analítica. La gráfica inferior muestra la diferencia entre el valor real y el ajuste analítico. . . . .	98
4.8. En el panel superior se muestra la dispersión de velocidades radial en función del radio galactocéntrico para asegurar estabilidad del disco ( $Q_M = 1.6$ ). En el panel inferior se compara el valor de la dispersión de velocidades inferida, con la curva de rotación. Se usó la función de interpolación de Famaey & Binney. . . . .	99
A.1. Clasificación de Hubble para las galaxias. . . . .	108

## 0.1. Resumen

En esta tesis se exploran algunas implicaciones de modificar la ley de la gravitación como propuso inicialmente Milgrom (1983) en forma sencilla y que, posteriormente, formuló con más precisión con la ecuación de campo modificada. En el Capítulo 1, se da una visión del problema de la masa faltante en el Universo, y se describe en qué se basan tanto la hipótesis de materia oscura como la hipótesis de modificar la ley de la gravitación con MOND. En el Capítulo 2, nos enfocamos en entender la naturaleza de la ecuación de Poisson modificada. Se comparan las diferencias conceptuales que entraña cambiar la ecuación de Poisson por la modificada de MOND. Se discute bajo qué condiciones se puede usar la ecuación algebraica que relaciona la fuerza de gravedad de MOND con la Newtoniana. Se ilustra que la ecuación algebraica de MOND no es compatible con la dinámica de los cúmulos globulares. También se discute la no linealidad de la ecuación de Poisson modificada y se presenta el análisis lineal del campo gravitacional creado por una perturbación en un campo externo dado.

En el Capítulo 3 se describe la forma de estudiar las curvas de rotación de las galaxias espirales y se discuten los parámetros libres y las fuentes de incertidumbres. Se presenta el estudio de la curva de rotación de la galaxia vecina M33 usando MOND (sin materia oscura). Hemos seleccionado esta galaxia para averiguar si MOND tiene dificultades para explicar la tendencia ascendente de la curva de rotación de M33. Se discute si la dinámica vertical de las estrellas en el disco de M33 es compatible con la curva de rotación.

En el Capítulo 4 estudiamos si MOND reproduce correctamente la curva de rotación de la galaxia NGC 4605. Consideramos para ello un cociente masa-luminosidad del disco estelar de acuerdo al inferido de los modelos de síntesis estelares a partir de los índices de color observados. Encontramos que la curva de rotación predicha en ese caso está muy por debajo de la curva de rotación observada. Discutimos el efecto de incluir las incertidumbres en la distancia, en el valor de  $a_0$  y en la forma de la función de interpolación. Por último, se estudia la estabilidad de esta galaxia. Para el cociente masa-

luminosidad que se deriva del ajuste de la curva de rotación con MOND, se deriva el perfil radial de la dispersión de velocidades estelar para garantizar que el disco sea estable frente a inestabilidades gravitacionales, usando el parámetro de Toomre generalizado en MOND. Se discute si los valores de la dispersión de velocidades obtenidos para garantizar estabilidad son plausibles o no. Para ello se compara con observaciones de otras galaxias.

---

# 1

## Antecedentes, materia oscura y MOND

A principios del siglo XX se consideraba que la materia del Universo estaba formada por protones, neutrones y electrones, principalmente formando las estrellas. Sin embargo, un siglo más tarde se habla de que el contenido de la llamada materia oscura en el Universo es, al menos, cinco veces el contenido de materia bariónica. Es importante aclarar que la materia oscura no podemos detectarla directamente, al menos no hasta el momento. En el paradigma más aceptado actualmente, la materia oscura son partículas masivas débilmente interaccionantes. El presente Capítulo muestra una vista general del problema de la existencia de materia oscura, sus características y los datos observacionales que apoyan su existencia. Sin embargo, es lícito preguntarse si existen modelos alternativos que tengan el mismo éxito que

el paradigma de materia oscura. De hecho, todavía no ha habido una sólo detección directa en los experimentos que se están llevando a cabo. Además, no todas las predicciones del modelo estándar parecen estar de acuerdo con las observaciones a escalas galácticas. Esto ha llevado a la propuesta de nuevas ideas alternativas a la hipótesis de la existencia de vastas cantidades de materia oscura. Después de describir brevemente las diferentes alternativas, veremos en qué consiste la Dinámica Newtoniana Modificada (MOND, por sus siglas en inglés de Modified Newtonian Dynamics), la cual intenta explicar las observaciones sin aludir a la materia oscura.

## **1.1. Materia oscura**

Durante el siglo XIX un grupo de astrónomos observó que la órbita de Urano se desviaba de la órbita predicha por la mecánica Newtoniana. En 1846 el astrónomo francés Leverrier postuló la existencia de Neptuno como un octavo planeta, con el cual, al colocarlo en el lugar preciso, se reproducía la órbita de Urano. Podemos entonces ver al hipotético planeta Neptuno como un ejemplo de “materia oscura”, del cual, en ese tiempo, sólo se podía suponer su existencia debido a la interacción gravitacional con Urano. Es decir, se postuló la existencia de un objeto oscuro por sus efectos gravitacionales. Lógicamente en este tiempo, todavía no se hablaba de materia oscura.

En 1922 el astrónomo Ernst Opik, tomando como referencia datos recopilados por Vesto Slipher (1912) y Francis Pease (1917), encontró que la galaxia espiral compañera de la Vía Láctea, Andrómeda (M31), debería de tener más masa que aquella que podía ser detectada visualmente. Opik pensó que la inconsistencia se debía a errores en algunas de las determinaciones, como incertidumbres en la distancia a la galaxia.

En 1933 Fritz Zwicky, del Instituto Tecnológico de California, investigando el movimiento de las galaxias en el cúmulo de Coma Berenices, (situado aproximadamente en el centro de la región que encierra las constelaciones

de Leo, Bóotes, Osa Mayor y Virgo) aplicó el teorema del virial para determinar la masa del cúmulo. Encontró que las velocidades a las que se movían las galaxias eran muy elevadas y, por lo tanto, con la materia que podía ser observada, las galaxias deberían salir tangencialmente de su órbita a gran velocidad, dando como resultado que el cúmulo se desintegraría en un tiempo muy corto, lo cual está en contra de las observaciones que muestran que el tiempo de vida de los cúmulos de galaxias es mucho mayor al tiempo de virialización. Zwicky calculó la masa estimada dinámicamente y la comparó con la observada (tomando la luminosidad total del cúmulo) encontrando que la masa calculada dinámicamente era 400 veces mayor que la directamente observada. Basándose en esto infirió que para que el cúmulo se mantuviera ligado debería tener algún otro tipo de materia no luminosa que aportara la suficiente masa (y por lo tanto, gravedad) al cúmulo. En el modelo más aceptado actualmente, esta materia que no emite luz o “materia oscura” es uno de los componentes más importantes del Universo en términos de cantidad de masa y, paradójicamente, su naturaleza es prácticamente desconocida.

Desde el punto de vista teórico, pronto surgió la necesidad de hablar de materia oscura. La materia oscura es importante para entender la formación de estructuras en el Universo y su evolución. De acuerdo a la evidencia astronómica, podemos decir que la mayor parte de la materia presente en el Universo es oscura (Rubin, 1983). La materia oscura tuvo que jugar un papel significativo en la evolución del Universo, ya que sin ella la formación de estructuras galácticas no habría tenido tiempo de desarrollarse. Cuando se introduce la materia oscura, se resuelve el problema de la formación de estructuras, siempre y cuando interactúe muy débilmente o nada con los fotones, ya que forma los pozos de potencial que posteriormente harán confluir al gas para formar las galaxias. Sin esta materia, el crecimiento de las fluctuaciones de densidad hubiera sido demasiado lento como para generar tanta subestructura como la observada actualmente.

En particular, las fluctuaciones en la radiación cósmica de fondo (Spergel et al., 2003), que corresponden a la etapa en que el Universo era un plasma de núcleos atómicos y electrones y donde la materia bariónica sólo interactuaba con fotones, reflejan ciertas inhomogeneidades en la distribución de materia oscura.

## 1.2. El contenido de materia oscura en galaxias

### Curvas de rotación

Aunque constantemente nos están atravesando partículas de materia oscura que pertenecen al halo de nuestra Galaxia, la densidad de materia oscura es tan pequeña<sup>1</sup> que su efecto es despreciable en estudios de la dinámica de los planetas. Debemos ir a escalas galácticas para que la masa de materia oscura sea comparable a la masa de materia visible. En nuestra Galaxia la necesidad de invocar la presencia de materia oscura surge al estudiar la dinámica de las partes externas, a distancias galactocéntricas  $> 12$  kpc.

Para determinar el contenido de materia oscura de una cierta galaxia necesitamos alguna forma de estimar la masa total de la galaxia, incluyendo la que no emite radiación, y que no podemos observar directamente. Los astrónomos determinan la masa total de un sistema, estudiando su dinámica, generalmente en términos del teorema del virial que relaciona la velocidad característica de un sistema, su tamaño característico y su masa total (véase el Apéndice B). La materia visible suele determinarse a partir de la luminosidad observada.

La forma tradicional de obtener la distribución de masa de una galaxia espiral como función del radio es estudiando el movimiento del gas (habitualmente se observa el hidrógeno neutro). Se hace uso del hecho de que el gas en las partes externas se mueve en órbita prácticamente circular alrededor

---

<sup>1</sup>Un valor típico para la densidad de materia oscura a la distancia galactocéntrica del Sol de  $\sim 8$  kpc, es de  $\sim 0.01 M_{\odot}/\text{pc}^3$ .

del centro galáctico y que, además, no hay otras fuerzas actuando sobre él más que la fuerza gravitacional que es la responsable de mantener al gas en esa órbita circular. Para determinar la masa se necesita medir la velocidad a la que rota el gas (velocidad circular de rotación,  $v_c$ ) como función de su distancia al centro galáctico,  $R$ . A la curva  $v_c(R)$  se le llama curva de rotación. El gas de una galaxia es en su mayoría hidrógeno atómico neutro, y alcanza distancias hasta de  $\sim 40$  kpc del centro de la galaxia.

Si no hubiera materia oscura, uno esperaría que en las partes más externas de las galaxias, la curva de rotación decayera de manera Kepleriana con respecto al radio galactocéntrico  $R$ , esto es, que  $v_c^2 \approx (GM)/R$ , donde  $M$  es la masa de la galaxia. Sin embargo, eso no es lo que se observa en una galaxia espiral típica (Shostak 1973, Roberts & Whitehursts 1975, Bosma 1978, Rubin et al. 1980); se observa que la velocidad circular se mantiene aproximadamente constante a partir de un cierto radio (ver Fig. 1.1). En efecto, una de las principales manifestaciones que contribuyeron a fortalecer el concepto de materia oscura fue la planicidad de las curvas de rotación de galaxias espirales y galaxias de baja luminosidad (galaxias LSB). Para poder explicar la planicidad de las curvas de rotación necesitamos la existencia de algún tipo de materia que, aunque no hemos podido detectarla en experimentos terrestres, contribuye con masa y gravedad al sistema. Se supone la existencia de un halo esférico de materia oscura que envuelve las galaxias espirales, cuya densidad de masa decaerá con la distancia al centro de la galaxia. En 1983, Kalnajs hace la suposición de que el halo sigue una distribución pseudo-isotérmica, es decir, supone una densidad de materia oscura de la forma:

$$\rho_{dm}(r) = \frac{\rho_0}{1 + (r/r_c)^2}, \quad (1.1)$$

donde  $r$  es la distancia al centro galáctico,  $\rho_0$  es la densidad central y  $r_c$  el radio del núcleo. La masa total de una galaxia será la suma de la materia luminosa y de la materia oscura. Para determinar la masa luminosa se necesita el cociente masa luminosidad  $\gamma_\star = M_\star/L_\star$ . Así, tendremos tres parámetros libres a fijar  $\gamma_\star$ ,  $\rho_0$  y  $r_c$  (e.g. Begeman, Broeils, y Sanders 1991). Usualmente,

estos parámetros se dejan variar libremente y se seleccionan aquellos que dan un mejor ajuste a la curva de rotación de una cierta galaxia. A veces se habla de la **hipótesis de disco máximo** para indicar el caso en el que la  $\gamma_*$  es la máxima permitida que se le puede atribuir al disco consistente con la curva de rotación.

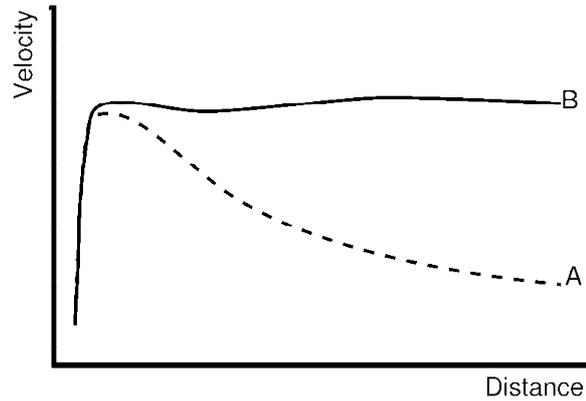


Figura 1.1: Se muestra el comportamiento de la velocidad de rotación, en una galaxia espiral, como función de su distancia al centro galáctico. La curva A muestra como se comporta la velocidad de rotación de regirse por la dinámica Newtoniana y si no hubiera materia oscura. La curva B representa el comportamiento de la velocidad de rotación observada.

Para caracterizar el contenido de materia de una galaxia definimos el cociente masa-luminosidad como:

$$\frac{M}{L} = \frac{M_{dm}(r) + M_*(r)}{L(r)}, \quad (1.2)$$

donde  $L$  es la luminosidad en una cierta banda y  $M_{dm}(R)$  y  $M_*(R)$  son las masas de materia oscura y de las estrellas, respectivamente, dentro de una esfera de radio  $R$ . Si este cociente es del orden de 1, significaría que toda la masa del sistema puede ser explicada por su masa visible. Sin embargo, valores del orden de 100 implican que casi 100 veces de la masa es no visible, es decir, materia oscura.

Una cuestión que surge es cuál es la escala más pequeña en la que tenemos evidencia de materia oscura. Se ha encontrado que las galaxias esferoidales

enanas y las galaxias LSB están dominadas a cualquier radio por materia oscura. Como ejemplo, la galaxia esferoidal enana, Draco, que es una galaxia satélite de la Vía Láctea, tiene una relación masa-luminosidad en la banda  $V$  de  $M/L_V \geq 100$  en un radio aproximado de 200 pc.

### 1.3. Otra evidencia: lentes gravitacionales

Otra de las observaciones que apoyan la existencia de la materia oscura, es la desviación de la luz bajo la presencia de campos gravitacionales, en fenómenos llamados lentes gravitacionales. Las lentes gravitacionales fueron predichas por la teoría de la relatividad general de Einstein. Estas fueron confirmadas en 1919 durante un eclipse solar por Arthur Eddington. Básicamente la teoría de la relatividad de Einstein predice que un cuerpo masivo modifica el espacio-tiempo curvándolo, así al pasar la luz por un objeto masivo, ésta curvará su trayectoria. Las lentes gravitacionales se forman cuando la luz procedente de objetos distantes y brillantes como cuásares o galaxias se curva alrededor de un objeto masivo situado entre el objeto emisor y el receptor (Fig. 1.2). Estos objetos masivos pueden ser desde planetas, estrellas, objetos compactos, agujeros negros, hasta grumos de materia oscura, galaxias y cúmulos galácticos. Ya que es un efecto gravitacional, la curvatura de la luz es debida tanto a la masa bariónica como a la materia oscura. Por lo tanto, el efecto de lente gravitacional se puede usar para estimar la masa de las galaxias y cúmulos de galaxias de una manera completamente independiente a los estudios dinámicos. Para estimar la masa de una lente gravitacional se necesita un modelo de distribución de la masa. Para el caso de galaxias se suele tomar un modelo de esfera isotérmica, y una distribución Navarro-Frenk-White (ver Sección 1.5) en cúmulos. También los elipsoides isotérmicos esferoidales proporcionan buenos ajustes. Las estimaciones de masa que se han hecho hasta ahora están en total acuerdo con los resultados dinámicos. En algunos casos, como los cúmulos de galaxias, los resultados obtenidos por lente gravitacional se consideran los más fiables.

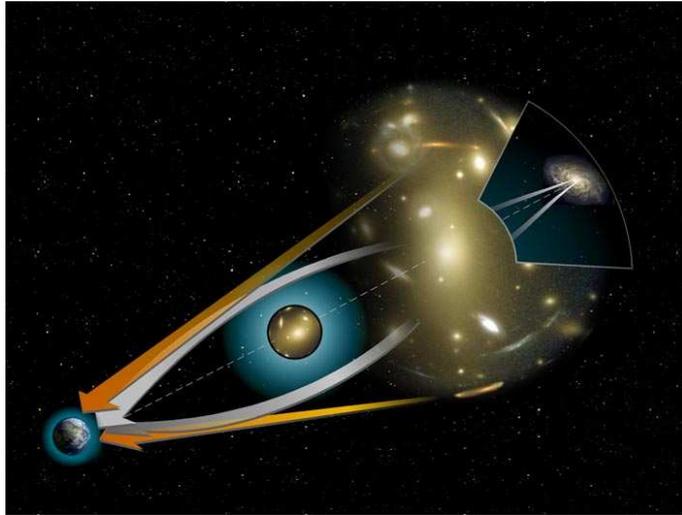


Figura 1.2: La imagen muestra la trayectoria que sigue la luz al pasar por objetos masivos, fenómeno conocido como lente gravitacional. Así es posible ver objetos que, en la línea de visión, se encuentran detrás de objetos masivos. En ocasiones se encuentran más de una imagen del mismo objeto.

Es importante mencionar que las lentes gravitacionales actúan con cualquier tipo de radiación electromagnética. Las lentes gravitacionales pueden utilizarse como en un telescopio para observar la luz procedente de objetos muy lejanos. El efecto más espectacular que se observa en las lentes gravitacionales es la formación de arcos y anillos de Einstein (Fig. 1.3). Los arcos y anillos de Einstein se forman como consecuencia de lente fuerte. Este efecto sólo puede medirse en las regiones centrales de los cúmulos, en escalas del radio de Einstein. En regiones más lejanas se utiliza el efecto de lente débil, mucho más difícil de observar y medir. La predicción teórica nos dice que si están perfectamente alineados, la fuente, el objeto masivo (lente) y nosotros, se formará un anillo de Einstein. Pero si no están perfectamente alineados, se formarán arcos.

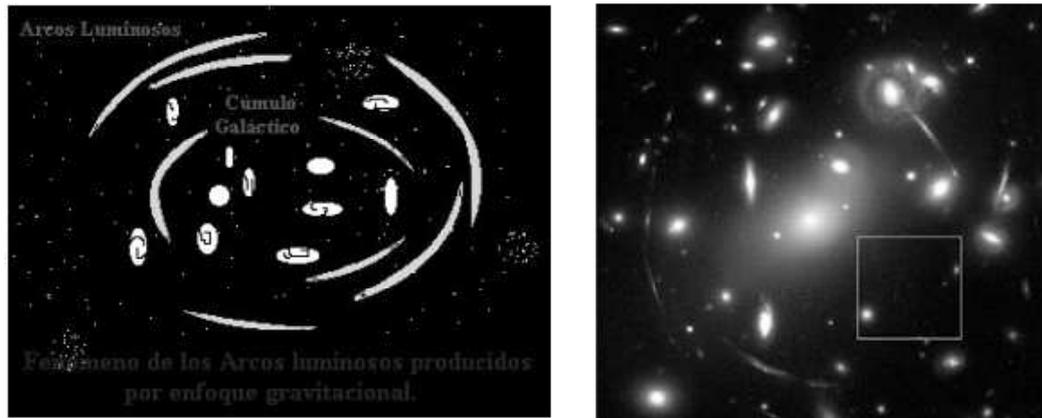


Figura 1.3: Formación de arcos en los lentes gravitacionales. Kneib et al. (2004) fueron capaces de detectar la galaxia más lejana conocida hasta entonces, gracias al efecto de lente gravitacional ejercida por el cúmulo Abell 2218.

## 1.4. Tipos de materia oscura

La materia oscura se clasifica en dos grandes grupos según su naturaleza: bariónica y no bariónica. Cuando decimos *materia oscura bariónica* nos referimos a aquella que está compuesta de materia ordinaria, es decir, formada por quarks. Un ejemplo de materia oscura bariónica serían estrellas enanas o cafés que estuvieran poblando el halo y que emitieran radiación electromagnética tan débilmente que no pudieramos detectar su emisión, o gas molecular muy frío (a temperaturas de varios grados Kelvin) Por materia oscura no bariónica nos referimos a alguna partícula neutra, es decir, sin carga eléctrica, que no estaría descrita, en principio, en el modelo estándar de partículas.

Dentro de este tipo de objetos de materia oscura bariónica se encuentran objetos conocidos como Objetos Compactos Masivos del Halo o MACHO's por sus siglas en inglés. En este tipo de objetos encontramos estrellas enanas blancas, enanas cafés, estrellas de neutrones o planetas gaseosos gigantes del tipo de Júpiter. Existe evidencia que indica que los halos galácticos podrían estar formados hasta en un 30 % de MACHO's. El método más usado

para la detección de estos objetos consiste en la búsqueda de microlentes gravitacionales formadas por la luz proveniente de estrellas distantes.

Otro candidato a este tipo de materia que ha fascinado a los físicos teóricos son los agujeros negros. Se han impuesto severas restricciones a la masa que podrían tener los agujeros negros. Sin embargo, un halo oscuro formado por agujeros negros con masas entre  $10^2 M_{\odot}$  y  $10^3 M_{\odot}$  todavía resulta ser una interesante posibilidad. Estos agujeros negros se podrían formar en el Universo temprano.

La *materia oscura no bariónica* la podemos clasificar en tres grandes grupos: materia oscura fría “Cold Dark Matter”(CDM), materia oscura tibia “Warm Dark Matter” (WDM) y materia oscura caliente “Hot Dark Matter”(HDM). Se dice que es fría si la velocidad característica de las partículas de materia oscura cuando se desacoplan del resto de la materia es no relativista, mientras que se dice caliente si es relativista. Cada uno de estos tipos de materia oscura produce evoluciones muy diferentes de las fluctuaciones en la densidad.

La principal interacción de las partículas de materia oscura es la gravitacional pero podrían interaccionar con otras a través de la interacción débil. A las partículas de materia oscura masivas y, por lo tanto, frías, se las denominó WIMP’s (Weakly Interactive Massive Particles). Su rango de masa es  $> 1$  GeV y se supone que son partículas de larga vida o estables. Estas partículas podrían ser fósiles de los momentos iniciales del Universo en un número suficiente para contribuir en una fracción significativa a la densidad de materia oscura. Los neutralinos son partículas WIMP predichas en teorías supersimétricas, las cuales se consideran como un fuerte candidato a formar los halos galácticos.

La materia oscura caliente es mucho más ligera que la fría. Estas partículas se moverían a velocidades relativistas desde el momento del desacoplo. Se pensó que las tres clases de neutrinos y sus correspondientes antineutrinos, podrían contribuir a la masa de materia oscura. Por su naturaleza, estas partículas no interactúan por medio de la fuerza nuclear fuerte ni

electromagnéticamente, es por eso que atraviesan la Tierra sin sufrir perturbación alguna. Sin embargo, estas partículas tendrían escasa contribución a la densidad de materia en el Universo, y contribuirían poco a la materia oscura (Lesgourgues & Pastor, 2006).

Los axiones son partículas hipotéticas extremadamente ligeras, candidatos para formar la materia oscura no bariónica. Tales partículas fueron propuestas independientemente en 1978 por Steven Weinberg de la Universidad de Texas y Franck Wilzcek de Princeton. Los axiones se podrían haber producido de manera abundante durante el Universo temprano.

Finalmente, entre la CDM y HDM tenemos la materia oscura tibia. Las principales partículas candidatas para este tipo de materia oscura son el gravitino, que es la pareja supersimétrica del gravitón, y el neutrino estéril.

Los campos escalares (spin cero) y el inflatón, postulado por muchos modelos inflacionarios como el causante del periodo de expansión exponencial del Universo temprano, también se han postulado como candidatos de materia oscura.

## 1.5. Éxitos y decepciones del modelo de materia oscura fría

Las grandes supercomputadoras son capaces de simular la evolución cosmológica de las estructuras de materia oscura. Estas simulaciones consisten en evolucionar las partículas de materia oscura como un sistema sin colisiones. Como condiciones iniciales se suele introducir un espectro de perturbaciones que normalmente es Gaussiano. Aunque estas simulaciones no incluyen la componente bariónica (es decir, disipativa), dan mucha información sobre la manera en que se distribuye la masa en el Universo, nos dan una idea de la función de distribución de masa de los halos, y de cómo y cuándo se formaron, por ejemplo, los cúmulos de galaxias o la historia de acreción de masa de una galaxia.

Los resultados de las simulaciones se pueden comparar con los catálogos de galaxias a gran escala. A escalas grandes, el éxito del modelo estándar fue espectacular. Cuando se comparaban la distribución espacial de millones de galaxias con la obtenida en las simulaciones, la semejanza era total. De hecho, por su gran poder predictivo, algunos observadores usaban los resultados de las simulaciones para confeccionar sus propuestas de observación y estimar la probabilidad de detección de sus objetos.

A escalas galácticas aparecieron varias inconsistencias entre las predicciones del modelo y las observaciones que incluso se llegó a hablar de la “crisis” del modelo estándar. La primera inconsistencia se refería a la sobreabundancia de galaxias satélites que se obtenían en las simulaciones. Por ejemplo, para una galaxia de masa como la Vía Láctea, las simulaciones predecían que debería poseer alrededor de 500 galaxias satélites, mientras que el número de galaxias no supera la veintena.

Entre 1996 y 2001, las simulaciones alcanzaron suficiente resolución como para predecir la forma del perfil de los halos de materia oscura, que hasta entonces se había propuesto como la esfera pseudoisotérmica (véase Sección 1.2). Las simulaciones mostraron que los halos de materia oscura siguen un perfil denominado de Navarro, Frenk & White (1996, 1997; perfil NFW) que tiene la siguiente forma:

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2}, \quad (1.3)$$

donde  $\rho_s$  y  $r_s$  son la densidad y el radio característicos, respectivamente. Se vió que el perfil de densidad de NFW no daba un buen ajuste a las curvas de rotación de las galaxias de bajo brillo superficial y de las galaxias enanas. Incluso ajustando los parámetros libres del perfil, los perfiles de NFW sobreestimaban la velocidad circular en las partes centrales de estas galaxias, es decir, el perfil de densidad de materia oscura de NFW es demasiado angosto hacia el centro de las galaxias porque va como  $\rho(r) \sim r^{-1}$ .

Se han buscado soluciones a estas discrepancias entre las observaciones y las predicciones del modelo estándar. Todo indica que el uso de las curvas de

rotación en las partes centrales es más sutil que lo que se pensaba. También la física de los bariones puede ser crucial en este debate. Podría ser que tales discrepancias no reflejan un problema fundamental en el modelo sino nuestra falta de poder computacional para incluir correctamente la física de los bariones.

No obstante, uno se puede preguntar si el modelo estándar es la única manera de explicar la naturaleza. Algunos investigadores mantienen que mientras no haya una detección directa de partículas de materia oscura debemos mantener una posición escéptica frente al modelo. Lógicamente, la búsqueda de modelos alternativos a la materia oscura no sólo es una vía legítima sino que además puede incluso resaltar los éxitos del modelo estándar de materia oscura (con constante cosmológica). Hay que descartar cualquier modelo alternativo para estar completamente seguros de que estamos en el camino correcto.

## 1.6. Teorías alternativas a la materia oscura

Las curvas de rotación de las galaxias espirales se han tomado como la evidencia observacional más sólida de la existencia de materia oscura (ver Sección 1.2). Por esta razón se ha hecho un gran esfuerzo en ver si la planicidad de las curvas de rotación se puede explicar por otras razones físicas sin invocar grandes cantidades de materia oscura. No queremos hacer aquí una revisión exhaustiva de todas las propuestas. De hecho, la mayor parte de ellas se desecharon poco después de proponerlas. Sólo, como ilustración, mencionaremos algunas.

González-Serrano y Valentinj (1991) propusieron que el disco de las galaxias espirales podría ser opaco y, por lo tanto, la luminosidad del disco podría no describir completamente la densidad de masa. En otras palabras, la suposición de que la relación  $M/L$  del disco es constante a lo largo de la galaxia sería incorrecta. Posteriormente, se demostró empíricamente que los discos galácticos se pueden considerar para todos los efectos como “transparentes”.

Nelson (1988) y Battaner et al. (1992), afirmaron que los campos magnéticos no pueden ser ignorados en la ecuación radial de movimiento. Battaner y Florido (2000) propusieron que la tensión magnética podría explicar las curvas de rotación observadas de las galaxias espirales sin la necesidad de la materia oscura. Sin embargo, Cuddeford y Binney (1993) demostraron que los campos magnéticos requeridos para explicar las curvas de rotación sin materia oscura deberían ser tan intensos que el disco sufriría de un excesivo hinchamiento vertical, debido a la presión magnética en la dirección vertical. Sánchez-Salcedo y Reyes-Ruiz (2004), usando el teorema del Virial, mostraron rigurosamente que si las galaxias tuvieran solamente estrellas y gas, los campos magnéticos sólo podrían aumentar la velocidad de rotación unos  $10 \text{ km s}^{-1}$  en la periferia de los discos de H I (i.e. en el último punto de detección de H I). En conclusión, la alternativa magnética es inviable.

La única alternativa que todavía sobrevive y que cada vez está teniendo más seguidores es una modificación a la ley de la gravedad de Newton. Ya que esta propuesta es el objeto principal de investigación de esta tesis, pasamos a describirla a continuación con mayor detalle.

## 1.7. Dinámica Newtoniana Modificada: MOND

La discrepancia entre la masa total (derivada dinámicamente) y la masa observable en galaxias y cúmulos de galaxias tiene dos posibles explicaciones: (1) que estos sistemas contienen grandes cantidades de materia no visible; (2) que la ley de la gravedad según Newton no es válida a escalas galácticas. Aunque la mayoría de la atención se ha centrado en la primera de estas explicaciones (materia oscura), las modificaciones a la gravedad son interesantes por sí mismas y deberían ser exploradas.

En 1916 Einstein extendió los conceptos de la relatividad especial para explicar la atracción gravitacional entre masas. En la visión geométrica de Einstein la presencia de una masa produce una curvatura en el espacio-tiempo que se manifiesta como la gravedad. En el límite de campo débil se debe recuperar la dinámica newtoniana. Se puede modificar la ley de la gravedad en el límite del campo débil introduciendo nuevos términos a la acción. En el transcurso de los años, un número de investigadores han propuesto modificaciones a la ley gravitacional como sustitutos para la materia oscura. El principal objetivo es aumentar la fuerza de gravedad a escalas galácticas y poder explicar la dinámica de los sistemas galácticos usando solamente la materia bariónica.

La ley gravitacional del cuadrado del inverso y su generalización relativista ha superado muchas pruebas a diferentes escalas. Experimentos de precisión en el laboratorio y en el sistema solar apoyan esta ley (Adelberger et al., 2003 y Will, 2006). Del sistema solar conocemos muy bien su distribución de masa y por lo tanto se puede utilizar para poner restricciones a las posibles modificaciones de la gravedad de Newton. Talmage et al. (1988) pusieron varios límites a la variación del comportamiento  $1/r^2$  de la gravedad a partir del análisis de datos planetarios astrométricos, restricciones experimentales a la cantidad de materia no luminosa dentro de la órbita de la tierra se pueden encontrar a partir de consideraciones de la tercera ley de Kepler, (Anderson et al., 1989,1995) o estudiando la precesión de los perihelios (Gron y Soleng, 1996). Recientemente Sereno y Jetzer (2006) han considerado variaciones de la ley de Newton usando el movimiento de los planetas, las mejores restricciones vienen de la precesión de los perihelios de la tierra y Marte. Desviaciones a la gravedad de la forma  $1/r^2$  son insignificativas en las regiones internas del sistema solar, por ejemplo una modificación del tipo Yukawa solo podría contribuir a la aceleración gravitacional en menos de una parte entre  $10^{11}$ .

Si uno elige modificar la dinámica o la gravedad Newtoniana, se abre un gran abanico de posibilidades para explicar la planicidad de las curvas de rotación. Cualquier propuesta de modificar la gravedad debe explicar los diversos aspectos de las observaciones con el menor número de parámetros adicionales como sea posible. Más concretamente, para ser satisfactoria, una teoría modificada debe explicar dos hechos observacionales en galaxias espirales: (1) que las curvas de rotación de galaxias espirales son asintóticamente planas, y (2) la relación empírica entre la velocidad de rotación asintótica de galaxias espirales y la luminosidad,  $V_\infty \propto L^{1/4}$ , llamada la ley de Tully-Fisher (Fig. 1.4).

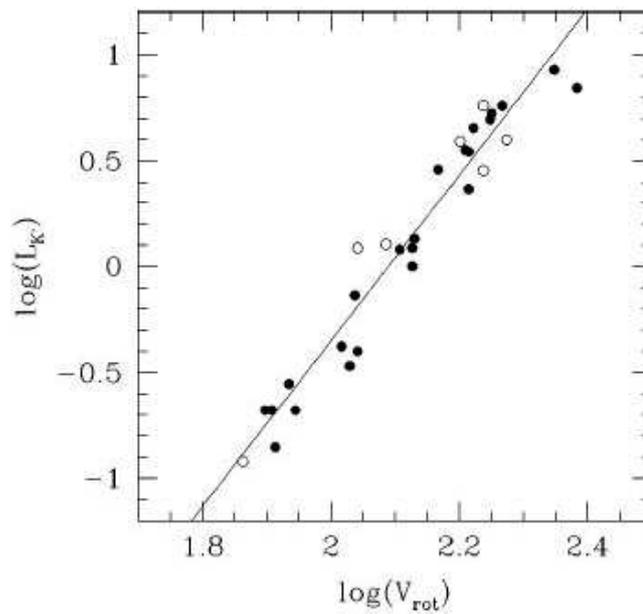


Figura 1.4: Ejemplo de la relación Tully-Fisher de las galaxias espirales de la Osa Mayor (Sanders & Verheijen 1998). La velocidad de rotación que se tomó es la asintótica y está en unidades de  $\text{km s}^{-1}$ . La luminosidad está en  $10^{10} L_\odot$ . Los puntos blancos son galaxias que presentan campos de velocidad significativamente perturbados. La línea continua es el ajuste por mínimos cuadrados para los datos y tiene una pendiente de  $3.9 \pm 0.18$ .

Los intentos por encontrar una modificación a la ley de gravedad han sido numerosos (e.g., Rodrigo-Blanco y Pérez-Mercader 1998). Es importante aclarar que para poner a prueba cualquier teoría modificada de la gravedad, se requiere un número significativo de galaxias,  $\geq 10$ , ya que se ha visto que si la muestra es pequeña, se pueden encontrar que diferentes fórmulas para la fuerza gravitatoria pueden explicar las curvas de rotación. Las incertidumbres en el cociente masa-luminosidad de la componente estelar, los errores en la inclinación y en la distancia de la galaxia podrían llevarnos a conclusiones incorrectas.

Una primera modificación a la ley de la gravedad para explicar la planicidad de las curvas de rotación es proponer que la atracción gravitacional tome la forma  $1/r$ , a escalas galácticas. Supongamos que la ley modificada de atracción generada por una masa puntual  $M$  es de la forma:

$$F = \frac{GM}{r^2} f\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad (1.4)$$

donde  $r_0$  es del orden de pocos kpc,  $f(x)$  es una función cuyo comportamiento asintótico es  $f(x) = 1$  para  $x \ll 1$  y  $f(x) = x$  para  $x \gg 1$ . Aunque esta ley explicaría la planicidad de las curvas de rotación, esta modificación no es aceptable porque al igualar la aceleración centrípeta a la gravitacional en el límite cuando  $r \gg r_0$  se obtiene una velocidad asintótica que es incompatible con  $L \propto V_\infty^4$ .

Otra posibilidad es añadir a la aceleración Newtoniana clásica creada por una partícula de masa  $M$  un nuevo término que llegue a ser dominante para radios grandes, es decir:

$$g = \frac{GM}{r^2} + Ma(r), \quad (1.5)$$

donde  $a(r) = A/r$  es una función que explicaría la planicidad de las curvas de rotación. Hay que notar que la función  $a(r)$  no puede ser independiente de  $M$ , de lo contrario, la relación observada de Tully-Fisher para galaxias espirales que relaciona la masa luminosidad de la galaxia con la velocidad asintótica,  $M \propto V_\infty^\gamma$ , con  $\gamma = 3.5-4$ , no sería posible. En efecto, la forma que

explicaría tanto la planicidad de las curvas de rotación para radios grandes como la relación de Tully-Fisher simultáneamente es:

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} + \frac{BM^{\frac{1}{2}}}{r}, \quad (1.6)$$

donde  $B$  es una cierta constante universal. De la Ec. (1.6) se deduce que el cambio introducido a la ley de la gravedad es importante para aceleraciones menores a una cierta aceleración  $a_0 \approx B^2/G$ . La conclusión de Milgrom fue que la única modificación viable es una en la cual la desviación de la ley de Newton aparece a aceleraciones bajas (menores a  $a_0$ ). Como vamos a ver en más detalle a continuación, Milgrom (1983) propuso una expresión para la fuerza que no dependía de la distancia sino de la aceleración. Sin embargo, Milgrom no usó la ecuación (1.6) sino otra más compacta que pasaremos a describir.

En un principio la modificación que propuso Milgrom se puede ver como una modificación de la inercia o bien como una modificación de la gravedad. Así, en el primer caso, la aceleración de una partícula con masa  $m$  bajo la influencia de una fuerza externa estaría dada por:

$$m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a} = \vec{F}, \quad (1.7)$$

donde  $a_0$  es una nueva constante física universal con unidades de aceleración del orden de  $10^{-8}\text{cm s}^{-2}$  y  $\mu(x)$  es una función sin especificar, pero debe tener la forma asintótica  $\mu(x) \approx x$  cuando  $x \ll 1$  y  $\mu(x) \approx 1$  cuando  $x \gg 1$ .

Si se interpreta como una modificación a la gravedad tenemos que la relación entre la verdadera aceleración gravitacional  $\vec{g}$  y la aceleración Newtoniana  $\vec{g}_N$  es de la siguiente forma:

$$\mu\left(\frac{|\vec{g}|}{a_0}\right)\vec{g} = \vec{g}_N. \quad (1.8)$$

A altas aceleraciones  $g \gg a_0$ , se tendrá que  $\mu \approx 1$ , y entonces  $\vec{g} = \vec{g}_N$ , es decir, ambas coinciden. Consideremos que ocurre ahora a bajas aceleraciones. Para ello consideremos una partícula puntual  $M$ . Muy lejos de la partícula la aceleración Newtoniana cada vez será menor. A partir de una cierta

distancia las aceleraciones serán menores que  $a_0$ . En el límite de muy bajas aceleraciones podemos tomar  $\mu \approx x$  y la fuerza gravitacional eficaz es de la forma  $g = \sqrt{g_N a_0}$ . Como la aceleración de una partícula en órbita circular es  $v_c^2/r = g$ , entonces tenemos que a distancias suficientemente grandes, la velocidad circular es constante y viene dada por:

$$v_c^4 = GMa_0. \quad (1.9)$$

Ya que en las partes externas de las galaxias, el régimen es de bajas aceleraciones, uno espera, de acuerdo a la Ec. (1.9) que las curvas de rotación de galaxias aisladas sean asintóticamente planas. Pero, además, aparece de forma natural una relación entre la masa o luminosidad y la velocidad circular asintótica de la forma:

$$M \propto L \propto v_c^4, \quad (1.10)$$

que es precisamente la relación de Tully-Fisher. De acuerdo a MOND, la relación derivada entre la masa y la velocidad de rotación (ver Ec. 1.9) implica que la relación Tully-Fisher es absoluta. Se predice que la relación Tully-Fisher se debe cumplir para galaxias independientemente de su tipo o brillo superficial. MOND predice que la pendiente logarítmica de la relación masa-velocidad debe ser 4. Es importante aclarar que, de acuerdo a MOND, hay una relación unívoca entre la masa bariónica total de una galaxia y la velocidad rotacional asintótica, mas no para el máximo de la curva de rotación (véase McGaugh & de Blok 1998b y McGaugh et al. 2000 para una discusión de este punto).

Aunque, en principio,  $a_0$  y  $\mu(x)$  son parámetros libres, una vez que se determinan son universales. *Debido a que MOND tiene sólo un parámetro libre (la relación masa-luminosidad del disco estelar), entonces debe ser más fácil verificarla que la hipótesis de la materia oscura que tiene tres parámetros libres.* Como ejemplo, tan sólo que se encontrara una galaxia aislada con una curva de rotación que decayera de forma Kepleriana para distancias grandes, MOND sería muy problemática.

Nótese que, al no estar fundamentada en principios básicos, *MOND no puede ser aplicado directamente a los problemas de cosmología, formación*

de estructuras o efecto lente gravitacional. Sin embargo, se ha empezado a especular sobre una “cosmología de MOND”, a partir de la teoría de TeVeS desarrollada por Bekenstein (2004).

## 1.8. MOND en galaxias espirales

### 1.8.1. MOND y las curvas de rotación

Las curvas de rotación de las galaxias espirales constituyen una pieza observacional clave que se ha usado con mucha frecuencia para poner a prueba la teoría de MOND (Begeman et al. 1991, Sanders 1996, McGaugh & de Blok 1998b, Sanders & Verheijen 1998). Ya que en MOND se supone que no hay materia oscura, la curva de rotación de una galaxia se infiere de la distribución observada de estrellas y gas. Como dijimos en la Sección (1.7), una vez que se fija el valor de  $a_0$  y se adopta una función de interpolación, sólo queda un parámetro libre para realizar el ajuste a las curvas de rotación. En el artículo de Sanders & McGaugh (2002) mencionan que para un centenar de galaxias con observaciones precisas de la curva de rotación, sólo para un 10 % la curva de rotación predicha difiere significativamente de la observada. Ellos argumentan que a todas las galaxias con un ajuste pobre se les puede encontrar alguna razón que justifique el mal ajuste. La razón más común es que las órbitas del gas no son circulares sino que están perturbadas, es decir, no se puede suponer que la velocidad observada nos está trazando el potencial gravitacional correctamente.

Las galaxias ricas en gas son de particular interés, ya que incluso el único parámetro libre del modelo (la relación  $M/L$  del disco estelar) pasa a ser irrelevante. Para las galaxias del cúmulo de Virgo donde la distancia para todas las galaxias se puede suponer la misma, los valores obtenidos para  $M/L$  parecen estar de acuerdo con los modelos de síntesis de poblaciones (Sanders & Verheijen 1998). Sin embargo, tenemos la sospecha de que para ciertas galaxias enanas los valores derivados para  $M/L$  son demasiado bajos

(e.g., Sánchez-Salcedo & Hidalgo-Gómez 1999).

Es interesante notar que para algunas galaxias en las que la curva de rotación muestra cierta subestructura como es el caso de NGC 1560 (presenta máximos y mínimos locales), el ajuste con MOND es incluso mejor que con un halo de materia oscura porque MOND es capaz de reproducir la subestructura, mientras que no es posible con la dinámica Newtoniana y materia oscura.

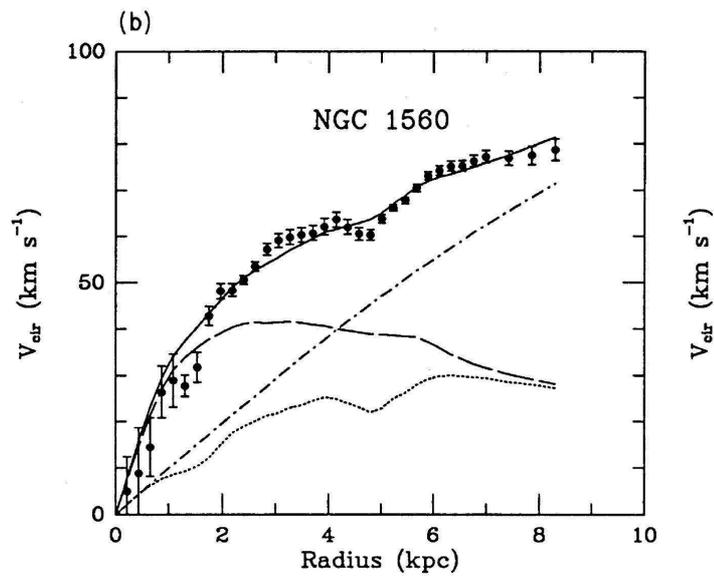


Figura 1.5: Curva de rotación de la galaxia espiral NGC 1560. Los puntos con sus barras de error es la velocidad de rotación observada en H I. Se muestran también la contribución del disco (línea discontinua), del gas (línea punteada) y del halo de materia oscura (línea conformada por rayas y puntos alternando).

El valor de  $a_0$ , que debe ser universal, se derivó de una muestra muy selecta de 9 galaxias con curvas de rotación bien determinadas (Begeman et al. 1991). El valor encontrado fue de  $1.2 \pm 0.27 \times 10^{-8} \text{ cm s}^{-2}$ . Hay, sin embargo, una relación entre el valor derivado de  $a_0$  y la escala asumida de distancias porque la aceleración centrípeta escala como el inverso de la distancia. Como las contribuciones relativas de las componentes estelares y gaseosas varían en función de la distancia de manera diferente, el efecto neto que tiene en las curvas de rotación el variar la distancia no es trivial. Para una muestra de galaxias ricas en gas el valor derivado de  $a_0$  escala como  $H_0^2$  (donde  $H_0$  es el parametro de Hubble para el ritmo actual de expansión del Universo), y para una muestra de galaxias de alto brillo superficial (HSB) dominadas por la componente estelar  $a_0 \propto H_0$ . Para que MOND sea consistente con las curvas de rotación,  $H_0$  debe estar en la rango de  $50 - 80 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

En los últimos cinco años ha sido posible acotar el valor de  $a_0$  y de restringir la función de interpolación estudiando un número significativo de curvas de rotación de galaxias espirales (Bottema et al. 2002; Famaey et al. 2007; Sanders & Noordermeer 2007). Para una función de interpolación de la siguiente forma:

$$\mu(x) = \frac{x}{(1 + x^n)^{1/n}}. \quad (1.11)$$

$a_0$  tiene que estar en el rango  $(0.9-1.6) \times 10^{-8} \text{ cm s}^{-2}$  y  $n$  entre 0.85 y 2.

### 1.8.2. ¿Es más fácil de confrontar MOND que el modelo de materia oscura?

Se afirma frecuentemente que MOND es una teoría que puede ser falsificada fácilmente porque una vez fijada la aceleración universal, queda solamente un parámetro libre, la proporción entre la masa y la luminosidad del disco estelar, para ajustar la curva de rotación. Se dice que bastaría una curva de rotación que se desvíe de las predicciones de MOND para eliminarlo. En la práctica, incertidumbres tales como desviaciones del gas del movimiento circular, los errores en la distancia a la galaxia, correcciones imprecisas en la

inclinación de la galaxia, u otras deformaciones como los alabeos, hacen que sea difícil que se pueda descartar MOND. Por ejemplo, MOND no puede explicar satisfactoriamente las curvas de la rotación de las galaxias DDO 168, NGC 3521 y NGC 7793, pero esto puede deberse a los efectos de la barra o de estructuras asimétricas (Sanders 1996). En la muestra de las galaxias presentadas en Sanders (1996), hay algunas galaxias que necesitan un cociente entre la masa estelar y la luminosidad menor a  $0.3 M_{\odot}/L_{\odot}$ , pero, al parecer, nadie se preocupa de estos valores tan extremadamente bajos. Para la gran espiral Sb NGC 2841, MOND requiere una distancia 20 % mayor que la distancia basada en las Cefeidas (Bottema et al. 2002). Los defensores de MOND atribuyen esta discrepancia al método de Cefeidas.

Incluso si se encontrara un caso en el que MOND funcionara muy mal en una cierta galaxia particular, esto no lo contradeciría, siempre que la curva de rotación de MOND subestime la curva de rotación observada, porque uno siempre puede argumentar que *tal galaxia* tiene una componente de materia bariónica no visible en forma de hidrógeno molecular frío o una componente estelar esferoidal que no observamos directamente. Por lo tanto, para contradecir MOND necesitaríamos galaxias con distancias medidas a través de Cefeidas, y que las curvas de MOND sobreestimen, muy por encima de los errores, la curva de rotación observada. Pensamos que hay una posibilidad de buscar galaxias que no cumplan con MOND. Somos de la opinión de que la creencia general de que MOND explica todas las curvas de rotación no está bien fundamentada (*véase los Capítulos 3 y 4 en los que aplicamos MOND a las galaxias M33 y NGC 4605*).

## 1.9. MOND en sistemas esferoidales

### 1.9.1. MOND en galaxias elípticas

Debido a que las galaxias elípticas carecen prácticamente de gas y de rotación, se hace mucho más difícil el estudio de la consistencia de MOND en estas galaxias. Desde un punto de vista práctico uno no esperaría, de acuerdo con MOND, que la discrepancia entre la masa y su luminosidad sea grande, puesto que las galaxias elípticas son objetos de alto brillo superficial. Es decir, MOND predice que las galaxias elípticas no necesitarán suponer la existencia de materia oscura dentro de un cierto radio para poder explicar su dinámica (e.g. Saglia et al. 1992).

A falta de medidas de la dispersión de velocidades para radios galactocéntricos suficientemente grandes en galaxias elípticas<sup>2</sup>, Sanders (2000) estudió la localización de las galaxias en el plano, *dispersión de velocidades central*  $\sigma_1$  versus *radio característico*  $r$ , y se dio cuenta de que si los sistemas soportados por presión fueran esferas isotérmicas e isotrópicas, entonces este tipo de objetos quedarían por debajo de la línea continua de la Fig. 1.6. Por lo tanto, Sanders (2000) señaló que para ser consistente con la distribución observada en el plano ( $r - \sigma_1$ ), las galaxias elípticas no pueden ser representadas como esferas isotérmicas e isotrópicas de MOND, sino que la dispersión de velocidades debe disminuir hacia el exterior y deben mostrar una anisotropía radial.

Recientemente, se ha encontrado que la dispersión de velocidades de las nebulosas planetarias decae con la distancia galactocéntrica hasta 5, o incluso 7 radios efectivos (Douglas et al. 2007), lo que se interpretaría como que no poseen materia oscura en absoluto, lo cual sería un problema para el modelo estándar de materia oscura. A pesar de la aparente similitud entre MOND y Newton con materia oscura, un perfil descendente de la dispersión de velocidades como el encontrado en la galaxia elíptica NGC 3379

---

<sup>2</sup>En la actualidad ya se disponen de los perfiles de dispersión de velocidades hasta 7 radios efectivos para un conjunto de galaxias.

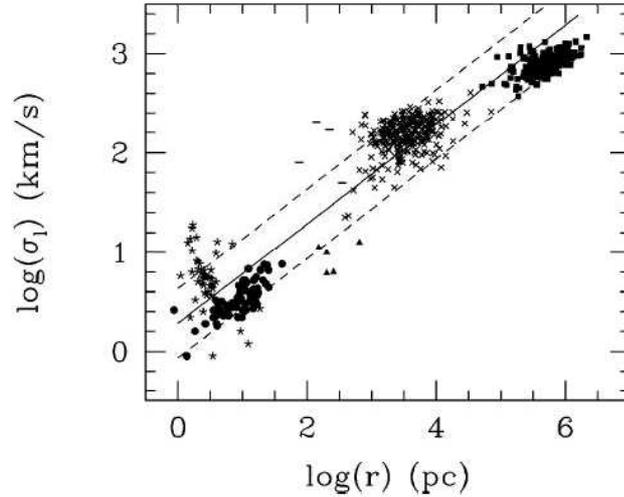


Figura 1.6: Dispersión de velocidades a lo largo de la línea de visión ( $\sigma_l$ ) versus radio característico de los sistemas soportados por “presión” ( $r$ ). Los puntos en forma de estrella son cúmulos globulares (Pryor & Meylen 1993, Trager et al. 1993), los puntos representan nubes moleculares masivas en la Galaxia (Solomon et al. 1987), los triángulos son las galaxias satélite esferoidales enanas de la Galaxia (Mateo 1998), los guiones horizontales son galaxias elípticas compactas (Bender et al. 1992), las cruces son galaxias elípticas masivas (Jørgensen 1999), y los cuadrados son cúmulos de galaxias emitiendo rayos X (White et al. 1997). Por último, la línea continua muestra la relación  $\sigma_l^2/r = a_0$ , y las líneas discontinuas son una variación de un factor de 5 de esta relación.

no contradice MOND (Milgrom & Sanders 2003). Posteriormente, Dekel et al. (2005) mostraron que los datos de NGC 3379 eran todavía compatibles con los modelos usuales de materia oscura siempre y cuando las nebulosas planetarias tuvieran órbitas bastante radiales, generadas probablemente en alguna fusión reciente.

En un trabajo posterior, Richtler et al. (2008) estudiaron la galaxia central elíptica del cúmulo de Fornax NGC 1399. Partieron de una base de datos con las velocidades radiales de 656 cúmulos globulares, que es la mayor muestra de este tipo hasta la fecha. Intentaron ajustar la cinemática de los cúmulos globulares tanto con MOND como con materia oscura para el caso isotrópico y encontraron que mientras que el modelo de materia oscura

podía explicar las observaciones, MOND necesitaba todavía una componente de materia oscura. El incluir una anisotropía realista, tampoco resuelve el problema.

Debemos concluir que, por ahora, hay pocos resultados concluyentes del estudio de las galaxias elípticas que claramente contradigan las predicciones de MOND. Gracias a las observaciones de la dispersión de velocidades de nebulosas planetarias y de velocidades radiales de cúmulos globulares, las galaxias elípticas pueden ser objetos de gran interés para validar o invalidar MOND.

Por otra parte, las estrellas en las galaxias elípticas enanas tienen aceleraciones considerablemente mayores que  $a_0$  (los guiones horizontales de la Fig. 1.6). Por lo que MOND predice que no habrá discrepancia alguna entre la masa luminosa y la dinámica.

### 1.9.2. MOND en galaxias esferoidales enanas

Dentro de la teoría MONDiana se espera que los sistemas galácticos con aceleraciones menores que  $a_0$  sean los que presenten mayores discrepancias entre su masa y su luminosidad (los objetos por debajo de la línea continua de la Fig. 1.6). En el caso de las galaxias esferoidales enanas las aceleraciones pueden ser de  $0.1a_0$ . Milgrom (1983b) predijo que estos sistemas deberían tener una masa de 10 o más veces mayor que la que describen sus estrellas. Sin embargo, en un estudio reciente de Sánchez-Salcedo & Hernandez (2007), incluyendo la muestra más completa hasta la fecha, muestran que MOND no es capaz de explicar la cinemática observada en estas galaxias. *MOND también necesita invocar un halo de materia oscura en estos objetos, lo cual le hace perder interés a la teoría.*

## 1.10. Otras consecuencias y predicciones de MOND

Las consecuencias astrofísicas de la gravedad modificada han sido exploradas principalmente por Milgrom. A continuación destacamos las más relevantes para nuestro estudio (véase Sanders & McGaugh 2002).

1. Existe un valor crítico de la densidad superficial  $\Sigma_m \approx a_0/G$ , de tal manera que si una galaxia espiral tiene una densidad superficial de materia mayor que  $\Sigma_m$ , entonces las aceleraciones internas dentro del radio óptico son mayores que  $a_0$  y, por lo tanto, el sistema está cerca del régimen Newtoniano. Los sistemas con  $\Sigma \geq \Sigma_m$  (galaxias HSB) deberían presentar pequeñas discrepancias entre la masa visible y la masa dinámica dentro del disco óptico. Pero en galaxias con  $\Sigma \ll \Sigma_m$  (galaxias LSB), la aceleración interna es baja, así que la discrepancia entre la masa visible y la masa dinámica deberá ser grande si MOND es cierta. Antes del descubrimiento de las galaxias LSB, MOND predijo que la discrepancia entre la masa observable y la masa dinámica dentro del disco luminoso sería más severa en tales sistemas. Esta predicción fue verificada posteriormente en los trabajos de McGaugh & de Blok (1998a,b) y de Blok & McGaugh (1998).

Aquellas galaxias espirales con una densidad superficial media por encima de  $\Sigma_m$  (galaxias HSB) estarían, dentro del disco óptico, en el régimen Newtoniano. Así, si MOND es cierto, uno esperaría que la curva de rotación descendiera de una manera cercana a la Kepleriana desde su máximo hasta el valor asintótico. En galaxias LSB con densidad superficial media debajo de  $\Sigma_m$ , la predicción es que las curvas de rotación deben ir ascendiendo continuamente hasta el valor asintótico final. Así MOND predice que debería haber una diferencia en el comportamiento de la forma de las curvas de rotación entre las galaxias LSB y HSB (Sanders & McGaugh 2002).

2. Es bien conocido desde el trabajo de Ostriker y Peebles (1973) que los discos galácticos tienden a ser inestables a modos no axisimétricos, lo que conduce a la formación de barras y al rápido calentamiento dinámico del disco. En el contexto de MOND estos sistemas inestables serían aquellos con  $\Sigma > \Sigma_m$ . Esto sugiere que  $\Sigma_m$  debería aparecer como un límite superior en la densidad superficial de sistemas soportados rotacionalmente. Esta densidad superficial crítica corresponde a  $860 M_\odot \text{ pc}^{-2}$ . Un valor más apropiado de la densidad superficial dentro de un radio efectivo sería  $\Sigma_m/2\pi$ , es decir,  $140 M_\odot \text{ pc}^{-2}$ , y tomando  $M/L_B \approx 2$ , esto correspondería a un brillo superficial de cerca de  $22 \text{ mag/arc sec}^2$ . Es interesante ver que, en efecto, se ha observado que la mayoría de las galaxias tiene un brillo superficial menor, por lo que se considera a éste un límite superior que se conoce como la ley de Freeman (Freeman 1970, Allen & Shu 1979). El punto es que la existencia de tal densidad superficial máxima (McGaugh 1996) es absolutamente natural en el contexto de MOND.

3. En la dinámica Newtoniana, los sistemas autogravitantes soportados por presión que son casi isotérmicos tienen una masa infinita. Sin embargo, bajo MOND es simple demostrar que tales sistemas isotérmicos son de masa finita con una densidad a radios grandes que decae aproximadamente como  $r^{-4}$  (Milgrom 1984). Veámos ahora qué implica esto. La ecuación de equilibrio para un sistema isotrópico isotérmico se lee:

$$\sigma_r^2 \frac{d\rho}{dr} = -\rho g, \quad (1.12)$$

donde  $\sigma_r$  es la dispersión de velocidades radial,  $\rho$  es la densidad de masa, y  $M_r$  es la masa encerrada dentro del radio  $r$ . En el límite de bajas aceleraciones,  $g = \sqrt{GM_r a_0}/r$ . Si la densidad decae rápidamente con  $r$ , por ejemplo como  $r^{-4}$ , entonces podemos suponer que  $M_r = M = \text{cte}$ , y de la ecuación anterior, usando que  $g = \sqrt{GM a_0}/r$ , implica

$$\sigma_r^2 \left( \frac{r}{\rho} \right) \frac{d\rho}{dr} = \sqrt{GM a_0}. \quad (1.13)$$

Elevando al cuadrado

$$\sigma_r^4 = GMa_0 \left( \frac{d \ln \rho}{d \ln r} \right)^{-2}. \quad (1.14)$$

Por lo tanto, en las regiones exteriores, donde la densidad decae como  $r^{-4}$  (por lo tanto, como ya hemos dicho,  $M$  se puede suponer constante),

$$M/10^{11} M_\odot = (\sigma_r/100 \text{ km s}^{-1})^4. \quad (1.15)$$

Esta relación es similar a la relación observada de Faber-Jackson (1976) para galaxias elípticas. Según esta relación, una esfera isotérmica con dispersión de velocidades de 100-300 km s<sup>-1</sup> tendrá masas galácticas.

Si MOND es correcto, la relación  $M - \sigma_r$  anterior debería encontrarse en todos los sistemas soportados por presión, desde cúmulos globulares hasta cúmulos de galaxias, aunque con la considerable dispersión debida a desviaciones en la isotropía (Sanders 2000).

## 1.11. Halos esféricos de materia oscura versus MOND

Una pregunta que se presenta es: ¿Puede ser que la fenomenología de MOND sea simplemente una manera de reproducir las propiedades de los halos oscuros que emergen de las simulaciones cosmológicas de N-cuerpos con fluctuaciones iniciales del espectro dadas por CDM? Esto es importante porque el éxito fenomenológico de MOND puede darnos claves sobre la distribución de materia oscura en galaxias y la existencia de una relación estrecha entre los parámetros del perfil de densidad de los halos.

Tal interrogante fue considerada primero por Begeman et al. (1991), quienes exploraron si el éxito de MOND nos está diciendo que debe haber un acoplamiento entre los parámetros del halo y del disco. Sin ninguna justificación física, ajustaron el radio del núcleo de los halos isotérmicos y su

velocidad circular asintótica con la escala de longitud del disco y con la velocidad de rotación máxima del disco para dar una aceleración característica. Vieron que este tipo de acoplamiento da ajustes de peor calidad que MOND.

La idea de que los halos pueden tener una aceleración característica fue llevada más lejos por Sanders & Begeman (1994) cuando los primeros cálculos de N-cuerpos con alta resolución (Dubinski y Carlberg 1991) indicaron que los halos de CDM no eran en absoluto similares a una esfera isotérmica con una densidad constante en el núcleo. Los objetos que emergían de las simulaciones exhibían una ley de densidad  $\propto r^{-1}$  en las partes internas del halo, y como  $r^{-3}$  en las regiones externas. La densidad se podía describir por el modelo de Hernquist (1990):

$$\rho(r) = \frac{\Sigma_0}{r} \left(1 + \frac{r}{r_0}\right)^{-2}. \quad (1.16)$$

Sanders & Begeman (1994) notaron que si se fijaba  $\Sigma_0$  a un cierto valor constante y sólo se permitía variar a  $r_0$ , entonces aparecía una aceleración universal,  $a_h = 2\pi G\Sigma_0$ , para cualquier halo. Vieron que una ley de densidad para el halo de esta forma proporciona un ajuste razonable a las curvas de rotación de varias galaxias HSB (comparables a la de MOND).

Sin embargo, surgen dos problemas con esta idea de que MOND no es más que el resultado de un acoplamiento entre los parámetros del halo. Primero, un  $\Sigma_0$  fijo implica que ninguna galaxia podría exhibir una aceleración en las regiones internas menor que  $a_0$ ; lo cual no es verdad para galaxias LSB (McGaugh & de Blok 1998b). Este problema era ya evidente en los ajustes a las galaxias LSB puesto que tales ajustes no eran buenos. En segundo lugar, los halos que surgen de las simulaciones cosmológicas de N-cuerpos no presentan la misma  $\Sigma_0$ . En otras palabras, no aparece una densidad de superficie característica o una aceleración característica de forma evidente en estos objetos. El problema básico de intentar explicar una aceleración universal en los halos de las galaxias en términos de formación de galaxias es que el proceso es estocástico: Cada galaxia tiene su propia historia de formación-evolución-interacción. Uno esperaría que estos efectos borrarán

cualquier escala intrínseca de aceleración en vez de realzarla. En el paradigma de materia oscura se puede tratar las tendencias generales pero no se pueden explicar las idiosincrasias individuales de cada curva de rotación.

A estas ideas de que el éxito de MOND es debido al hecho de que los halos formados en CDM posean un único parámetro, Milgrom (2002) respondió señalando que  $a_0$  desempeña varios papeles en el contexto de MOND: No sólo es una aceleración de la transición debajo de la cual Newton no es válida, sino que además define la velocidad asintótica de la rotación de galaxias espirales (vía  $v^4 = GMa_0$ ) y de tal modo determina el punto cero de la relación Tully-Fisher ( $v \propto L^{1/4}$ ). Además determina el límite superior en la densidad superficial de las espirales (es decir,  $\Sigma_m$ ); y determina la dinámica desde grupos de galaxias pequeños hasta los supercúmulos. En el contexto de la materia oscura, estas propiedades son independientes y cada una requeriría una explicación separada.

## 1.12. MOND en los cúmulos de galaxias

MOND fue diseñado para predecir la forma de las curvas de rotación de galaxias espirales con una contribución nula de la materia oscura. The & White (1988) observaron que, para explicar la discrepancia entre la masa observada y la masa virial tradicional en el cúmulo de Coma, la aceleración de MOND debería ser un factor cuatro veces más grande que el valor implicado por las curvas de rotación de galaxias. Gerbal et al. (1992) llegaron a la misma conclusión pero con observaciones en rayos X para una muestra de 8 cúmulos de galaxias: aunque MOND reduce la discrepancia Newtoniana, todavía hay necesidad de materia oscura incluso en MOND. La solución que se le ha dado es que a escalas de los cúmulos de galaxias, hay materia oscura, probablemente neutrinos que no pudieron formar parte de los halos galácticos, pero contribuyen con una masa importante sólo en los cúmulos de galaxias. Los neutrinos forman parte del modelo estándar, por lo que no tendríamos que recurrir a partículas exóticas.

Esta discrepancia de masa que ocurre en MOND es especialmente severa en el cúmulo de la bala 1E0657-56. Angus y McGaugh (2008) argumentan que si bien esta discrepancia es problemática para MOND, no constituye una falsificación de la teoría como tal. De hecho, dado que la necesidad de masa extra en cúmulos ya se había establecido, hubiera sido sorprendente que no se hubiera manifestado en el cúmulo de la bala. Estos autores encuentran que la velocidad relativa de la colisión que se ha derivado observacionalmente es extremadamente difícil explicarla también con CDM. Según ellos, las observaciones utilizadas para falsificar a MOND no tienen sentido en términos de materia oscura. Por el contrario, velocidades de impacto consistentes con una velocidad de choque de  $4700 \text{ km s}^{-1}$  se pueden explicar de manera natural en MOND.

### 1.13. Algunos supuestos problemas de MOND

Scott et al. (2001), en un artículo hasta ahora no publicado pero accesible en arXiv, enfatizaron las dificultades cosmológicas y empíricas de MOND. Aunque MOND parece tener problemas a la hora de explicar el número observado de cascarones y su distribución radial en NGC 3923 sin materia oscura (Hernquist y Quinn 1987), o los isocontornos de rayos X de la galaxia elíptica NGC 720 (Buote & Cañizares 1994), éstos no son suficientes para descartar MOND (e.g., McGaugh & de Blok 1998). En efecto, hay muchas cuestiones que no llegamos a entender bien y que no son fáciles de explicar ni en el modelo estándar de materia oscura.

Sin embargo, hay otros que parecen esenciales. A escalas galácticas es importante mencionar los más relevantes: el disco de las galaxias enanas ricas en gas sería excesivamente inestable (Sánchez-Salcedo & Hidalgo-Gómez 1999), MOND tiene dificultades en explicar el exponente de la relación de Tully-Fisher (van den Bosch & Dalcanton 2000a, 2000b), el problema de la fricción dinámica de los cúmulos globulares en las galaxias enanas se agrava (Sánchez-Salcedo et al. 2006). Un triunfo de MOND fue la predicción de que

las galaxias enanas deben contener más cantidades de materia oscura que las galaxias normales. Pero MOND también predice, por un razonamiento similar, que el grosor de los discos de las pequeñas debería ser comparable a la de galaxias normales. Esto contradice las observaciones que sugieren que los discos de las enanas son considerablemente más gruesos que en las espirales normales.

## 1.14. **Objetivos de la tesis**

A lo largo del presente Capítulo se ha visto que el éxito de MOND explicando las curvas de rotación de las galaxias espirales demuestra claramente que una aceleración característica  $a_0$  está siempre detrás a la hora de interpretar los datos pero, al mismo tiempo, las observaciones también indican que MOND no se puede considerar como una teoría establecida para la ley gravitacional.

El objetivo principal de esta tesis es entender mejor las implicaciones que conlleva el proponer una modificación a la ley de la gravitación de acuerdo a MOND. Queremos avanzar en la comprensión de las sutilezas de MOND a nivel conceptual, pero poniendo énfasis en las implicaciones que tendría MOND a escala galáctica y, en particular, en las galaxias de disco. Empezaremos considerando la ecuación algebraica que nos liga la aceleración creada por una distribución de masa según MOND en función de la aceleración Newtoniana. Esta relación algebraica descrita en la Sección 1.7, aunque se usa extensivamente para modelar las curvas de rotación de las galaxias espirales, no cumple con ciertos requisitos mínimos para que sea una teoría físicamente bien construida. En efecto, Milgrom (1983) ya discute este problema que no tardó en resolver derivando una ecuación diferencial para el campo a partir de un Lagrangiano.

Hasta hace muy poco, prácticamente la gran mayoría de los trabajos realizados para refutar o validar MOND se basaban en ver si era capaz de explicar las curvas de rotación usando la relación algebraica. En esta tesis se

propone ir más allá. Se busca entender bajo qué circunstancias la ecuación diferencial de MOND, que llamaremos ecuación de Poisson modificada, y la algebraica son equivalentes; bajo qué condiciones la ecuación algebraica es una buena aproximación a la ecuación diferencial o cuando dan valores completamente diferentes. Asimismo, queremos entender la naturaleza de la ecuación de campo en MOND, y sus principales diferencias con la ecuación de Poisson.

El siguiente objetivo será ver cómo podemos usar las curvas de rotación de las galaxias para poner a prueba las teorías de gravedad modificada. Para ello aplicaremos MOND en dos galaxias: M33 y NGC 4605. Estas dos galaxias no se eligieron por azar, sino que se tomaron por tener unas ciertas propiedades que las hacen de gran interés. En M33 nos enfocaremos en analizar si MOND es capaz de reproducir la forma ascendente (no completamente plana) de su curva de rotación. El caso de NGC 4605 es interesante porque tiene una aceleración interna del orden de  $\sim a_0$  o mayor. Por lo discutido en la Sección 1.10, si la teoría de MOND es correcta, estaríamos frente a una galaxia para la cual los modelos Newtonianos no requerirán materia oscura. Sin embargo, los trabajos que se han realizado para esta galaxia muestran que necesita materia oscura. El objetivo es averiguar si esta incongruencia inicial no es tal, y ver si MOND es capaz de explicar la curva de rotación de esta galaxia. Se discutirá si los valores requeridos para el cociente masa-luminosidad son realistas. Como último objetivo de la tesis se explorará si la dinámica de las estrellas en la dirección vertical al plano galáctico, u otras consideraciones referentes a la estabilidad de la galaxia, pueden ayudarnos a descartar o confirmar el éxito de MOND.

---

# 2

## La ecuación de Poisson modificada y sus implicaciones

En este el presente Capítulo analizaremos las implicaciones matemáticas y las consecuencias de añadir el factor  $\mu$  a la ecuación de Poisson convencional. Presentaremos un ejemplo que demuestra que la ecuación algebraica entre la aceleración de MOND y la Newtoniana no sólo no está bien fundamentada sino que no podría explicar la dinámica de los cúmulos globulares. Intentaremos aclarar algunos puntos que se han prestado a confusión en la literatura especializada con respecto a la aplicabilidad de la relación algebraica. Buscaremos las diferencias entre la ecuación de Poisson convencional y la modificada según MOND, y discutiremos en qué ocasiones y bajo qué condiciones se puede usar la ecuación algebraica. Ilustraremos la complejidad del problema no lineal.

## 2.1. Una introducción a la ecuación algebraica

Como vimos en el Capítulo 1, para explicar la forma de las curvas de rotación de las galaxias espirales, Milgrom en 1983 propuso que la fuerza real que siente un cuerpo dentro de un campo gravitacional no es, en general, la que predice la ley de Newton sino que ambas están vinculadas a través de una relación algebraica del tipo  $\vec{g}_M = f(\vec{g}_N)$ , donde  $\vec{g}_M$  y  $\vec{g}_N$  son las fuerzas por unidad de masa según la teoría de MOND y según Newton, respectivamente. Más concretamente, la relación algebraica propuesta por Milgrom para explicar las curvas de rotación de las galaxias espirales fue:

$$\mu(x)\vec{g}_M = \vec{g}_N, \quad (2.1)$$

donde  $x \equiv |\vec{g}_M|/a_0$  y  $a_0$  es una constante con dimensiones de aceleración del orden de  $\sim 10^{-8}\text{cm s}^{-2}$  como ya se mencionó en el Capítulo I. Recordemos que la función de interpolación  $\mu$  debe satisfacer que  $\mu \rightarrow 1$  cuando  $x \gg 1$  y que  $\mu \approx x$  cuando  $x \ll 1$ . Ya que  $\mu$  es un escalar,  $\vec{g}_M$  y  $\vec{g}_N$  son paralelos de acuerdo a la ecuación (2.1). La función  $\mu$  que se ha utilizado con más frecuencia y que reproduce muy bien la forma de las curvas de rotación es  $\mu(x) = x/\sqrt{1+x^2}$  (veáse la Sección 1.7). Si nos encontramos en una situación tal que  $x \gg 1$  entonces  $\vec{g}_M = \vec{g}_N$  y diremos que estamos en el régimen Newtoniano, mientras que si  $x \ll 1$  nos encontramos en la situación opuesta, donde las intensidades de las fuerzas gravitacionales  $\vec{g}_M$  y  $\vec{g}_N$  claramente difieren, y lo llamaremos régimen “profundo” de MOND. Notemos que en el régimen profundo no es muy relevante la forma exacta de  $\mu$ . En el caso particular de las galaxias, se pasa muy rápidamente del límite Newtoniano al de MOND profundo. Por esa razón, hasta hace muy poco, no se fue capaz de determinar la forma exacta de  $\mu(x)$  a partir de las observaciones. Sólo hasta muy recientemente ha habido intentos de determinar  $\mu(x)$  a partir de las curvas de rotación de las galaxias (Famaey & Binney 2005; Famaey et al. 2007; Sanders & Noordermeer 2007).

La ecuación (2.1) es muy fácil de aplicar y se usa habitualmente para calcular la curvas de rotación según la teoría de MOND. Para ejemplificar lo simple que es calcular la curva de rotación en MOND basta ver que la velocidad circular del gas será  $v_c^2 = v_{c,M}^2 = g_M R = g_N R / \mu = v_{c,N}^2 / \mu$ , donde  $v_{c,M}$  es la velocidad circular a la que esperamos que rote el gas si MOND es correcta, y  $v_{c,N}$  es la velocidad circular a la que rotaría el gas si aplicáramos la ley de Newton sin añadir materia oscura. Así pues:

$$v_{c,M} = v_{c,N} / \sqrt{\mu}. \quad (2.2)$$

Es decir, simplemente hay que incluir el factor corrector  $\mu^{-1/2}$  para tener la velocidad predicha por MOND.

Puesto que la receta algebraica se puede implementar fácilmente en los algoritmos numéricos desarrollados en gravedad Newtoniana, uno está tentado a usarlas para estudiar la dinámica en MOND. Sin embargo, inmediatamente aparece una duda: ¿hasta qué punto es válido usar una relación algebraica? Para convencernos de que tal relación algebraica no es en general satisfactoria, consideremos un sistema binario de masas  $M_1$  y  $M_2$ . Es fácil ver que si las masas son diferentes entonces la fuerza gravitacional que produce la masa 2 sobre la masa 1 será diferente a la fuerza que produce la masa 1 sobre la masa 2 y, por lo tanto, no habría conservación del momento lineal total. En la próxima Sección queremos ilustrar de la forma más gráfica posible y en un contexto astronómico cuándo la ecuación algebraica tiene serios problemas y se verá por qué no se puede usar la ecuación algebraica para hacer simulaciones de formación de estructura a gran escala. Las inconsistencias de la ecuación algebraica motivarán el uso de una ecuación de campo construida a través de un Lagrangiano.

## 2.2. Ecuación algebraica y sus inconsistencias en los cúmulos globulares

De los estudios de la curva de rotación para nuestra galaxia, la Vía Láctea, se deduce que o bien tiene un halo esférico de materia oscura de  $\sim 10^{12} M_{\odot}$ , o se viola la ley de la gravitación de Newton. En las partes externas, la velocidad circular para la Vía Láctea se estima que es de  $\sim 200\text{--}220 \text{ km s}^{-1}$ , lo que implica que a una distancia de 30 kpc, la aceleración es de  $0.5 \times 10^{-8} \text{ cm s}^{-2}$ . Tomando  $a_0 \simeq 10^{-8} \text{ cm s}^{-2}$ , resulta que en las partes externas no se aplica el régimen Newtoniano.

En el halo de nuestra galaxia se encuentran los cúmulos globulares. Queremos ver qué podemos aprender de la dinámica de los cúmulos globulares. Para ello empezaremos con algunas de las propiedades más relevantes de los cúmulos globulares.

### 2.2.1. Cúmulos globulares: Generalidades

Los cúmulos globulares son agrupaciones de estrellas viejas unidas gravitacionalmente que han nacido de la misma nube en un brote de formación estelar, por lo que comparten generalmente la misma composición, y su edad varía típicamente entre 9 y 13 Gyr. Suelen tener de  $10^4$  a  $10^6$  estrellas extendidas en una esfera con un radio de “core” (el radio al que la luminosidad superficial ha caído a la mitad de su valor central) de varios parsecs. Se tiene constancia que ya en 1665 A. Ihle apuntó su telescopio al cúmulo globular M22. William Herschel fue quien bautizó estos objetos con el nombre de cúmulos globulares debido a que en las imágenes de los telescopios de entonces aparecían como “globos” de estrellas muy condensados y redondos. Los cúmulos globulares se distribuyen en el halo de la galaxia, y orbitan alrededor del centro de la galaxia, tardando cientos de millones de años para completar sus órbitas. Nuestra galaxia contiene cerca de 160 cúmulos globulares, una fracción de ellos llega a alcanzar distancias tan lejanas como

60 kpc del centro Galáctico, y algunos pueden llegar hasta distancias de 100 kpc. Por lo tanto, es interesante estudiar su dinámica interna y externa para poder restringir posibles modificaciones a la gravitación. Queremos investigar si una modificación a la ley de Newton a pequeñas aceleraciones es compatible con la dinámica observada de los cúmulos globulares.

### 2.2.2. Dinámica interna de los cúmulos globulares lejanos

En el modelo estandar de CDM, se espera que tanto los cúmulos globulares como las galaxias enanas de marea tengan un contenido muy bajo de materia oscura, por lo que sus M/L serían del orden 1 a 3. De las observaciones de tres galaxias enanas de marea alrededor de NGC 5291, Gentile et al.(2007) encontraron que MOND ajusta adecuadamente su dinámica, mientras que CDM no logra explicar su dinámica. Para cúmulos globulares lejanos y con aceleraciones internas menores a  $a_0$  MOND predice una aceleración gravitacional mayor que en CDM, por lo tanto son ideales para distinguir entre MOND y materia oscura.

Lane et al. (2009) encontraron que el perfil de la dispersión de velocidades de las estrellas del cúmulo globular M53, que está a una distancia de 18.3 kpc del centro galáctico, se puede explicar sin necesidad de introducir materia oscura y sin modificar la ley de la gravedad. Jordi et al. (2009) analizaron datos de 17 estrellas del cúmulo globular Palomar 14, y afirman que la predicción de MOND para la dispersión de velocidades es demasiado alta. Y que la predicción Newtoniana sin materia oscura es consistente con las observaciones. Sin embargo, Gentile et al. (2009) concluyen que una muestra tan pequeña no es suficiente para estimar correctamente la dispersión de velocidades. Como ejemplo, Olszewski et al. (1993) encontraron una dispersión de velocidades de  $2.7 \pm 0.8 \text{ km s}^{-1}$  usando 12 estrellas en el cumulo globular NGC 2419. Posteriormente Baumgardt et al. (2009) dio un valor de  $4.1 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1}$  usando 40 estrellas. Dos sigma más grande que la original. Para el caso del cúmulo globular Palomar 14, Gentile et al. (2009) consideran que los datos actuales

son insuficientes para diferenciar entre ambos contextos y que se necesitarían alrededor de 80 estrellas para ser capaces de diferenciar entre ellos.

### 2.2.3. Dinámica interna y externa de los cúmulos globulares

Los cúmulos globulares están ligados a la galaxia porque están sometidos a una *fuerza externa* debida al potencial creado por el resto de la galaxia donde se encuentran inmersos. A su vez, cada estrella dentro del cúmulo globular siente una *aceleración interna*,  $\vec{g}_{int}$  debido al resto de estrellas del propio cúmulo. La relación algebraica (2.1) nos dice que, de acuerdo a MOND, la aceleración del centro de masa del cúmulo globular dependerá también de las aceleraciones internas. Dicho de otro modo, el movimiento orbital de un objeto puntual (que, por lo tanto, no tiene aceleraciones internas) alrededor del centro galáctico es distinto al de un objeto compuesto de partículas con ciertas aceleraciones internas. Como un caso particular consideremos el caso  $g_{int} \gg a_0 \gg g_{ext}$  (donde  $g_{ext}$  es la aceleración debida a la fuerza externa). Vamos a ver que, mientras que para un objeto puntual la aceleración del centro de masa es  $g_{ext} = g_{ext,N}/\mu$ , el centro de masa de un objeto con aceleraciones internas sentirá una fuerza de intensidad  $g_{ext} = g_{ext,N}$ , incluso aunque la fuerza externa estuviera en el régimen profundo  $g_{ext} \ll a_0$ . A continuación, vamos a estudiar esta situación con más detalle y seremos capaces de descartar, a partir de las observaciones de los cúmulos globulares, la relación algebraica (2.1).

Por simplicidad, hagamos la aproximación de que las órbitas de las estrellas dentro del cúmulo globular son circulares. Con ello asignamos a las estrellas una aceleración interna característica  $g_{int,M}$ . Para hacer el problema todavía más tratable, supondremos que el plano orbital de las estrellas es perpendicular a la dirección de la aceleración externa  $g_{ext,M}$  (es decir, la aceleración producida por el resto de la galaxia). Una representación de esta situación (no a escala) se presenta en la Fig. 2.1. El modelo que proponemos

parece de antemano un poco simplista, de hecho modelamos un cúmulo globular como un disco! Sin embargo, es suficiente para estudiar las implicaciones de tener una aceleración interna y otra externa.

A partir de ahora, usaremos el subíndice  $r$  para indicar la componente radial con respecto al centro de la Galaxia y  $p$  para las componentes perpendiculares. Por ejemplo,  $g_{N,r}$  será la aceleración radial calculada con la dinámica Newtoniana. En nuestro caso, como hemos supuesto que el plano de la órbita de las estrellas dentro del cúmulo es perpendicular a la dirección de la aceleración externa, la componente radial coincide con la externa y la componente perpendicular coincide con la interna, lo que simplifica la notación.

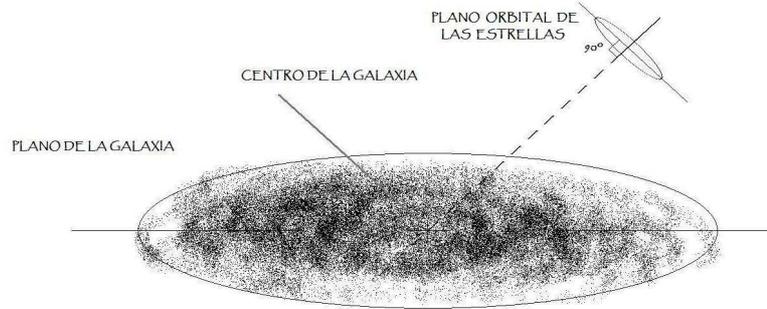


Figura 2.1: Se muestra la posición del plano de la órbita de las estrellas dentro del cúmulo globular respecto del plano galaáctico. El plano orbital de las estrellas es perpendicular a la línea de visión.

Así identificamos  $g_M = \sqrt{g_{M,r}^2 + g_{M,p}^2}$ , y, entonces, según la definición anterior de  $x$ , tenemos:

$$x = \frac{\sqrt{g_{M,r}^2 + g_{M,p}^2}}{a_0}, \quad (2.3)$$

y se satisfecerá que:

$$\mu(x)\vec{g}_M = \vec{g}_N. \quad (2.4)$$

Nuestro propósito ahora es calcular  $\vec{g}_M$  (la aceleración real que siente una partícula según el modelo de MOND) en función de  $\vec{g}_N$ . Debido a la geometría que hemos establecido, podemos identificar la aceleración del centro de masa como  $\vec{g}_{M,r}$ .

Primero calcularemos  $\mu$  en función de  $\vec{g}_N$  y  $a_0$ , para finalmente encontrar  $\vec{g}_M$  como  $\vec{g}_M = \vec{g}_M(\vec{g}_N, a_0)$ . Al multiplicar por  $\mu$  la Ec. (2.4) y dividirla entre  $a_0$ , tenemos:

$$\frac{|\vec{g}_M|}{a_0} = \frac{|\vec{g}_N|}{a_0\mu}. \quad (2.5)$$

Por lo tanto,

$$\mu \left( \frac{|\vec{g}_M|}{a_0} \right) = \mu \left( \frac{|\vec{g}_N|}{\mu a_0} \right). \quad (2.6)$$

Definamos  $\lambda \equiv |\vec{g}_N|/a_0$ , y calculemos el segundo miembro de la Ec. (2.6) usando la función de interpolación habitual  $\mu(x) = x/\sqrt{1+x^2}$ . Obtenemos:

$$\mu \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) = \frac{\lambda/\mu}{\sqrt{1+\lambda^2/\mu^2}}, \quad (2.7)$$

y, por lo tanto, obtenemos una ecuación que relaciona  $\mu$  y  $\lambda$ :

$$\mu = \frac{\lambda/\mu}{\sqrt{1+\lambda^2/\mu^2}}, \quad (2.8)$$

para de esta forma poder obtener:

$$\lambda = \mu\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}, \quad (2.9)$$

lo cual implica que  $\mu^4 + \mu^2\lambda^2 - \lambda^2 = 0$ . Resolviendo esta ecuación de segundo grado para  $\mu^2$  se encuentra:

$$\mu^2 = -\frac{\lambda}{2} \left( \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4} \right). \quad (2.10)$$

Debido a que sólo nos interesa el caso cuando  $\mu^2 > 0$ , nos quedamos con la siguiente solución:

$$\mu^2 = \frac{\lambda}{2} \left( -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4} \right) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4/\lambda^2}}. \quad (2.11)$$

La última expresión la obtuvimos multiplicando numerador y denominador por  $-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4}$ . Después usando  $\lambda \equiv \sqrt{g_{N,r}^2 + g_{N,p}^2}/a_0$  obtenemos:

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0^2}{g_{N,r}^2 + g_{N,p}^2}} \right). \quad (2.12)$$

Una vez encontrado  $\mu$ , la Ec. (2.4), es decir  $\vec{g}_M = \vec{g}_N/\mu(x)$ , nos permite calcular la aceleración del centro de masa  $g_{M,CDM} \equiv g_{M,r}$  y la aceleración interna  $g_{M,p}$ :

$$g_{M,CDM} = g_{N,CDM} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0^2}{g_{N,r}^2 + g_{N,p}^2}} \right)^{1/2}, \quad (2.13)$$

$$g_{M,p} = g_{N,p} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0^2}{g_{N,r}^2 + g_{N,p}^2}} \right)^{1/2}. \quad (2.14)$$

Como ya habíamos adelantado y a diferencia de lo que ocurre en dinámica Newtoniana, vemos que la aceleración del centro de masa depende también de la aceleración interna. A su vez, la aceleración interna depende de igual modo de la aceleración externa. Antes de discutir las consecuencias de este resultado, verifiquemos que recuperamos los resultados ya conocidos para el caso de una partícula puntual en el régimen de MOND profundo, es decir, cuando  $g_{N,p} = 0$  y  $g_{N,r} \ll a_0$ . Bajo esas condiciones obtenemos

$$g_{M,CDM} = g_{N,CDM} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{4a_0^2}{g_{N,r}^2} \right)^{1/4} = \sqrt{a_0 g_{N,CDM}}, \quad (2.15)$$

que es exactamente la dependencia en el régimen de MOND profundo. Por otro lado, en el régimen Newtoniano,  $g_{N,r}, g_{N,p} \gg a_0$ , obtenemos  $g_{M,CDM} = g_{N,CDM}$ , como se esperaba.

Veámos ahora el caso de que la aceleración externa sea mucho menor que  $a_0$  pero la aceleración interna mucho mayor, es decir,  $g_{N,p} \gg a_0 \gg g_{N,r}$ . En ese caso se tiene de nuevo que la aceleración del centro de masas es idéntica a la esperada de forma Newtoniana  $g_{M,CDM} = g_{N,CDM}$ . En este caso se encuentran la mayor parte de los cúmulos globulares de nuestra Galaxia.

Para esos cúmulos globulares se tiene que  $g_{M,p} \gg a_0$  de lo que se deduce, de acuerdo con nuestros resultados, que entonces  $g_{M,CDM} = g_{N,CDM} = v_{c,N}^2/R$ , donde  $v_{c,N}$  es la velocidad que tendría el cúmulo globular en su órbita alrededor del centro Galáctico usando la ley de Newton y sin añadir un halo de materia oscura. Es decir, esperamos que la velocidad de esos cúmulos globulares corresponda a la Newtoniana *sin materia oscura!* La predicción es que los cúmulos que tuvieran órbitas aproximadamente circulares con radios de 40–80 kpc deberían tener una velocidad de rotación de entre 100 (para los que están a 40 kpc) y 70 km s<sup>-1</sup> (para los que están a 80 kpc), en contra de las velocidades observadas de  $\sim 200$  km s<sup>-1</sup>.

Concluimos que:

(1) La ecuación algebraica se puede descartar combinando las observaciones de la dinámica interna y externa de los cúmulos globulares de nuestra galaxia.

(2) Las simulaciones cosmológicas de Knebe & Gibson (2004) que usan la ecuación algebraica no podrían explicar, por ejemplo, la dinámica de los cúmulos globulares. Volveremos a discutir el trabajo de Knebe & Gibson (2004) en la próxima Sección.

(3) Para rescatar la idea de MOND se debe proponer una teoría que satisfaga que en el caso  $g_{int} \gg a_0 \gg g_{ext}$ , la aceleración del centro de masas no dependa de las aceleraciones internas.

### 2.3. Ecuación de Poisson modificada

Independientemente de la ley de gravedad que se use, la fuerza gravitacional por unidad de masa,  $\vec{g}$ , se obtiene tomando el gradiente del potencial gravitacional  $\Phi$ , es decir  $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$ . Conocida la densidad de masa, podemos derivar el potencial  $\Phi$  a través de la ecuación de campo que liga la distribución de masa  $\rho$  y el potencial gravitacional. Por ejemplo, si suponemos que la dinámica gravitacional la rige la ley de Newton, entonces  $\rho$  y  $\Phi$  están ligadas por la ecuación de Poisson  $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ .

Bekenstein & Milgrom (1984) propusieron, a partir de una teoría Lagrangiana, la siguiente ecuación de campo para MOND:

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla} \Phi) = 4\pi G\rho. \quad (2.16)$$

Comúnmente los físicos teóricos se refieren a ella como AQUAL. Cabe destacar que, debido a que se infirió de un Lagrangiano, el potencial  $\Phi$  que se deriva de esta ecuación no sufre los problemas discutidos en la Sección 2.1. En particular, se puede demostrar que las fuerzas mutuas que sienten las partículas en un sistema binario son idénticas, como se requiere en mecánica clásica (Milgrom 1986).

También se puede demostrar rigurosamente que la aceleración del centro de masa de un sistema sujeto a un campo gravitacional externo constante es independiente de cualquier característica interna del sistema. Este resultado resuelve el problema que encontramos cuando estudiamos los cúmulos globulares. En efecto, la ecuación anterior satisface que, si el tamaño del cúmulo globular es suficientemente pequeño para considerar el campo creado por la Vía Láctea como constante, la aceleración del centro de masa del cúmulo globular no depende de si la aceleración intrínseca dentro del cúmulo globular es grande o pequeña (Bekenstein y Milgrom 1984). Esta nueva ecuación es consistente con la existencia de cúmulos globulares con velocidades orbitales de  $\sim 200 \text{ km s}^{-1}$  y con aceleraciones internas altas. El uso de la relación algebraica en vez de la ecuación diferencial no lineal completa conduciría a resultados incorrectos. Como corolario, las simulaciones cosmológicas que han usado la relación algebraica, como en el artículo de Knebe y Gibson (2004), no son creíbles y dudosamente representan la dinámica de MOND, porque se están ignorando los términos no lineales de la ecuación modificada de Poisson!

Hay un efecto nuevo que aparece debido a la forma propuesta para la ecuación de campo (Eq. 2.16) y que se denomina **efecto de campo externo**. Aunque este efecto se considera con más detalle en la Sección 2.4.3, vamos a describir en qué consiste. De la ecuación (2.16) esperamos que el campo de aceleraciones externo deba tener un efecto sobre la aceleración interna de un

subsistema (por ejemplo, el campo de la galaxia sobre la dinámica interna de un cúmulo de estrellas) y que, en general, la aceleración interna en cualquier subsistema sea afectada por el campo externo en el cual se encuentra. Este efecto implica que la teoría sobre la cual se basa MOND no respeta el principio de equivalencia en su forma más estricta (que no implica que MOND viole la universalidad de la caída libre, que podemos decir que es la versión débil del principio de equivalencia, la cual es la más valorada y restringida experimentalmente). Este efecto se presenta debido a la no linealidad de MOND.

## 2.4. Grados de libertad y condiciones de frontera

Si suponemos una cierta distribución de densidad de masa  $\rho(\vec{r})$  podemos calcular el potencial que crea esa distribución con la ecuación de Poisson o con la ecuación de Poisson modificada. Así, tomando la notación que hemos venido usando, las ecuaciones  $\nabla^2\Phi_N = 4\pi G\rho$  y  $\vec{g}_N = -\vec{\nabla}\Phi_N$  describen el campo de fuerzas usando la ley de Newton. De la misma forma,  $\vec{\nabla} \cdot (\mu\vec{\nabla}\Phi_M) = 4\pi G\rho$  y  $\vec{g}_M = -\vec{\nabla}\Phi_M$  son las ecuaciones que rigen la dinámica según MOND.

Dada la densidad  $\rho(\vec{r})$ , ¿cuál es la relación entre  $\Phi_N$  y  $\Phi_M$  o entre  $\vec{g}_M$  y  $\vec{g}_N$ ? Ingenuamente uno podría pensar que, dada la similitud entre la ecuación de Poisson y la modificada, existe una relación simple que las une de la forma  $\mu\vec{g}_M = \vec{g}_N$ . Sin embargo, esto sólo ocurre para casos muy especiales, como por ejemplo cuando tenemos simetría esférica o axial. En lo que resta de Capítulo queremos profundizar más en entender cómo se comparan las soluciones de la ecuación de Poisson clásica respecto a las soluciones de la ecuación de Poisson modificada. Para ello, vamos a empezar investigando bajo qué condiciones  $\vec{g}_M$  es paralela a  $\vec{g}_N$  en todos los puntos del dominio en  $\vec{r}$ . Es decir, queremos responder a la siguiente pregunta: ¿cuándo se cumple que  $\vec{g}_M = \lambda^{-1}\vec{g}_N$  con  $\lambda(\vec{r})$  un escalar que, en principio, puede depender de

la posición? Nótese que sólo exigimos que sean paralelos pero no necesariamente con la misma proporción en todos los puntos (o sea, que no se exige que sean linealmente dependientes).

### 2.4.1. Campo gravitacional Newtoniano

Para entender bien las diferencias más relevantes que se introducen al cambiar la ecuación de Poisson clásica por la modificada debemos entender bien las propiedades de la ecuación de Poisson convencional.

Las dos condiciones que tiene que cumplir el campo gravitacional  $\vec{g}$  en el caso Newtoniano son

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho, \quad (2.17)$$

y si se exige que sea conservativo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0. \quad (2.18)$$

Ya que estas ecuaciones son diferenciales, si queremos determinar el campo gravitacional  $\vec{g}$  en una cierta región interior a una superficie cerrada  $S$  necesitamos conocer no sólo la distribución de masa dentro de  $S$ , sino que también necesitamos conocer o la distribución de masa en todos los puntos del espacio  $\rho(\vec{r})$ , o bien la distribución dentro de  $S$  y el valor del potencial gravitacional en la frontera de  $S$  (condición de Dirichlet). Es importante tener claras las implicaciones de estas afirmaciones para poder entender el caso de MOND. A continuación estudiaremos los grados de libertad con más detalle.

Una solución general para la Ec. (2.17) es:

$$\vec{g} = \vec{g}_0 + \vec{\nabla} \times \vec{h}, \quad (2.19)$$

donde  $\vec{g}_0$  es una solución particular de las ecuaciones (2.17) y (2.18), y donde según la ecuación (2.18) el campo  $\vec{h}$  tiene que satisfacer:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{h} = 0. \quad (2.20)$$

Para ver con más claridad la naturaleza del problema, supongamos que toda la masa está contenida dentro de un volumen delimitado por una superficie cerrada que denotaremos por  $S_p$ . Es decir, suponemos que no hay masa en el infinito. Esta propiedad de que a partir de una cierta distancia la densidad de masa es cero nos ayuda a simplificar la discusión sobre el comportamiento de  $\Phi$  cuando  $|\vec{r}| \rightarrow \infty$  ya que en ese caso  $\Phi \rightarrow 0$  en el infinito. Nótese que  $S_p$  y  $S$  son, en principio, superficies diferentes:  $S$  determina la superficie en la que vamos a poner las condiciones de frontera y  $S_p$  es una superficie que contiene toda la masa del sistema. Podríamos tener que la superficie  $S$  está contenida en  $S_p$  o viceversa. A continuación estudiamos los grados de libertad del problema.

Recordemos que la Ec. (2.20) puede escribirse como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{h}) - \nabla^2 \vec{h} = 0, \quad (2.21)$$

lo que implica que

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{h}) = \nabla^2 \vec{h}. \quad (2.22)$$

Para ver mejor lo que implica esta ecuación, la escribiremos en componentes, es decir:

$$\partial_i \partial_j h_j = \partial_j \partial_j h_i, \quad (2.23)$$

donde usamos el convenio de que índices repetidos están sumados. Intercambiando índices en el lado izquierdo de la Ec. (2.23) obtenemos:

$$\partial_j \partial_i h_j = \partial_j \partial_j h_i. \quad (2.24)$$

A continuación definimos los siguientes vectores  $\vec{e}^{(i)} \equiv \partial_i \vec{h}$  y  $\vec{l}^{(i)} \equiv \vec{\nabla} h_i$  donde  $i = 1, 2, 3$  y así la expresión anterior la podemos escribir como:

$$\partial_j \vec{e}_j^{(i)} = \partial_j \vec{l}_j^{(i)}. \quad (2.25)$$

Por lo tanto,  $\vec{e}^{(i)}$  y  $\vec{l}^{(i)}$  sólo se diferencian por el rotacional de otro vector arbitrario  $\vec{k}^{(i)}$ , es decir:

$$\vec{e}^{(i)} = \vec{l}^{(i)} + \vec{\nabla} \times \vec{k}^{(i)}. \quad (2.26)$$

Usando las definiciones de los vectores  $\vec{e}^{(i)}$  y  $\vec{l}^{(i)}$ , la ecuación anterior la podemos escribir en componentes de la siguiente forma:

$$\partial_i h_j - \partial_j h_i = \varepsilon_{jlm} \partial_l k_m^{(i)} \quad (2.27)$$

donde  $\varepsilon_{jlm}$  es el tensor de Levi-Civita antisimétrico en sus tres índices. Podemos ver que el lado izquierdo de la ecuación es antisimétrico bajo intercambio de los índices  $i \leftrightarrow j$ . Ya que el lado derecho de la ecuación debe tener la misma antisimetría,  $\vec{k}^{(i)}$  no es independiente sino que obedece:

$$\left( \vec{\nabla} \times \vec{k}^{(i)} \right)_j = - \left( \vec{\nabla} \times \vec{k}^{(j)} \right)_i, \quad (2.28)$$

De acuerdo a esta ecuación, el tensor de rango  $3 \times 3$  definido como  $\tilde{w}_{i,j} = \left( \vec{\nabla} \times \vec{k}^{(i)} \right)_j$  debe ser un tensor antisimétrico y, por lo tanto, los elementos de su diagonal son cero (es decir, que satisfacen  $\left( \vec{\nabla} \times \vec{k}^{(i)} \right)_i = 0$ ). Por ello, la matriz  $\tilde{w}$  será de la forma:

$$\tilde{w} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial k_x^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial k_z^{(1)}}{\partial x} & \frac{\partial k_y^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial k_x^{(1)}}{\partial y} \\ -\frac{\partial k_x^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial k_z^{(1)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial k_y^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial k_x^{(2)}}{\partial y} \\ -\frac{\partial k_y^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial k_x^{(1)}}{\partial y} & -\frac{\partial k_y^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial k_x^{(2)}}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}$$

Así nos quedan 3 grados de libertad que son los tres elementos independientes de una matriz antisimétrica, y donde las ecuaciones a resolver son:

- Para  $i = 1$  y  $j = 2$

$$\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} = \frac{\partial k_x^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial k_z^{(1)}}{\partial x} \quad (2.29)$$

- Para  $i = 1$  y  $j = 3$

$$\frac{\partial h_z}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial z} = \frac{\partial k_y^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial k_x^{(1)}}{\partial y} \quad (2.30)$$

- Para  $i = 2$  y  $j = 3$

$$\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} = \frac{\partial k_y^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial k_x^{(2)}}{\partial y} \quad (2.31)$$

Estas ecuaciones tienen infinitas soluciones, y entre ellas, hay un grupo infinito de soluciones que son no triviales, es decir, que nos darían un campo  $\vec{g} \neq 0$ . En efecto, las ecuaciones anteriores se pueden escribir como:

$$g_z = g_{0,z} + \left( \vec{\nabla} \times \vec{h} \right)_z = \left( \vec{\nabla} \times \vec{k}^{(1)} \right)_y, \quad (2.32)$$

$$g_y = g_{0,y} + \left( \vec{\nabla} \times \vec{h} \right)_y = - \left( \vec{\nabla} \times \vec{k}^{(1)} \right)_z, \quad (2.33)$$

$$g_x = g_{0,x} + \left( \vec{\nabla} \times \vec{h} \right)_x = \left( \vec{\nabla} \times \vec{k}^{(2)} \right)_z. \quad (2.34)$$

Por sustitución se puede verificar que la  $\vec{g}$  dada por las tres ecuaciones anteriores satisface  $\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0$  siempre y cuando los  $\vec{k}^{(i)}$  satisfagan  $\left( \vec{\nabla} \times \vec{k}^{(i)} \right)_i = 0$ , como ya hemos visto.

Caso I): Consideremos el caso “trivial”  $\rho = 0$  en todos los puntos del espacio. Intuitivamente esperamos que el resultado sea  $\vec{g} = 0$  pero, ¿se puede demostrar esta afirmación de las ecuaciones anteriores? Hemos visto que manipulando la ecuación de Poisson y la propiedad de que el campo es conservativo, no llegamos a fijar  $\vec{h}$ . La respuesta es que además de imponer  $\rho = 0$  hay que imponer condiciones en una frontera o, lo que es equivalente, imponer la simetría del problema. Este ejemplo nos ilustrará la necesidad de “imponer” condiciones de frontera. En efecto, ya que  $\rho$  es invariante bajo traslaciones espaciales, también  $\Phi$  debe serlo, lo que implica  $\Phi = \text{cte}$ , por lo que  $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi = 0$ . En otras palabras, la simetría del problema nos dice que necesariamente se debe cumplir  $\vec{\nabla} \times \vec{h} = 0$ .

Caso II): Para enfatizar todavía más en la necesidad de imponer condiciones de frontera, así como entender en qué consisten, consideremos un plano infinito e infinitesimalmente delgado con una densidad de superficie  $\Sigma = \text{cte}$ , situado de tal forma que coincida con el plano  $z = 0$ . Por simetría,  $\Phi(z) = \Phi(-z)$ . En  $z \neq 0$  la ecuación de Poisson se reduce a

la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.35)$$

Impongamos la condición de que  $\Phi(z)$  sea continuo en  $z$  y que:

$$\Phi(z = 0) = 0, \quad (2.36)$$

entonces la solución tiene que ser de la forma:

$$\Phi(z) = c_+ z \quad z > 0, \quad (2.37)$$

$$\Phi(z) = c_- z \quad z < 0, \quad (2.38)$$

donde  $c_+$  y  $c_-$  son constantes. De nuevo uno tiene que recurrir a argumentos de simetría para concluir que  $c_+ = -c_-$ .

Caso III): Consideremos una partícula puntual de masa  $M$ , con la condición de frontera  $\Phi(r_0) = \text{cte}$ , donde  $r_0$  es un cierto radio. La forma habitual de proceder es partir de la ecuación de Poisson:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho, \quad (2.39)$$

la cual implica que:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g} \, d^3\vec{r} = -4\pi GM, \quad (2.40)$$

donde  $M$  es la masa encerrada en el volumen  $V$ . Al aplicar el teorema de Gauss, llegamos a la siguiente expresión que nos liga una integral de  $\vec{g}$ , sobre una superficie  $S$ , con la masa interior a esa superficie:

$$\int_S \vec{g} \cdot d^2\vec{S} = -4\pi GM. \quad (2.41)$$

Y si la condición de frontera, como ya hemos mencionado, es que los isopotenciales son esféricos, entonces en coordenadas esféricas  $\vec{g} = (g_r, 0, 0)$ . Por lo que:

$$4\pi r^2 g_r = -4\pi GM, \quad (2.42)$$

y así obtenemos finalmente  $g_r(r)$ :

$$g_r = -\frac{GM}{r^2}, \quad (2.43)$$

la fórmula para la fuerza que ya conocemos. Hay que notar que para poder calcularla establecimos condiciones de frontera.

## 2.4.2. Campo gravitacional de MOND y la no-linealidad

Consideremos ahora si hay alguna diferencia sustancial en el caso de MOND respecto al caso Newtoniano. Las ecuaciones del campo gravitacional en MOND son:

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{g}) = -4\pi G\rho, \quad (2.44)$$

y

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0. \quad (2.45)$$

Usando la regla de la cadena, la primera de estas ecuaciones se puede expresar como:

$$\vec{\nabla} \mu \cdot \vec{g} + \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho. \quad (2.46)$$

Es decir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -\frac{4\pi G}{\mu} \rho - (\vec{\nabla} \ln \mu) \cdot \vec{g}. \quad (2.47)$$

Se asemeja a la ecuación de Poisson convencional si identificamos al lado derecho de la ecuación con una densidad efectiva. Sin embargo, esta densidad efectiva depende de  $\vec{g}$ , lo cual no es gran ganancia puesto que hay que encontrar la solución para saber cuál es la densidad efectiva que hay que poner en la ecuación de Poisson.

Para comparar la solución de Newton  $\vec{g}_N$  y la de MOND  $\vec{g}_M$ , dada la distribución de densidad  $\rho(\vec{r})$ , es más práctico notar que  $\vec{g}_N$  satisface

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}_N = -4\pi G\rho, \quad (2.48)$$

y  $\vec{g}_M$  satisface

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{g}_M) = -4\pi G\rho. \quad (2.49)$$

Por lo tanto, si hacemos la diferencia de estas dos ecuaciones:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{g}_N - \mu \vec{g}_M) = 0. \quad (2.50)$$

Un campo vectorial cuya divergencia es cero satisface que viene del rotacional de otro campo vectorial, por lo que se concluye que

$$\vec{g}_N = \mu \vec{g}_M + \vec{\nabla} \times \vec{h}. \quad (2.51)$$

Es decir, aunque conozcamos  $\vec{g}_N$  por algún método convencional para resolver la ecuación de Poisson, eso no nos fija el valor de  $\vec{\nabla} \times \vec{h}$  (véase la Sección 2.4.1 para una discusión de las propiedades de  $\vec{h}$ ). Consecuentemente, dada la distribución de densidad  $\rho$  en todos los puntos del espacio, podemos determinar el campo gravitatorio Newtoniano. Sin embargo, no es trivial ni fácil, salvo en algunas excepciones, derivar el campo gravitatorio en MOND puesto que desconocemos el término rotacional. Lo que sí vemos al comparar la ecuación (2.51) con (2.19) es que toda la discusión sobre grados de libertad e imposición de condiciones de frontera de la Sección anterior es aplicable igualmente en MOND porque la ecuación diferencial es del mismo tipo.

La mayor diferencia entre la ecuación de Poisson y la de MOND es que la primera es lineal y la segunda es no-lineal. Recordemos que decimos que una ecuación es lineal cuando se cumple que si  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son soluciones con una fuente  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , respectivamente, entonces  $\Phi_1 + \Phi_2$  es solución de la ecuación con una fuente  $\rho_1 + \rho_2$ . El **efecto de campo externo** discutido en la Sección 2.3 es consecuencia de esta no-linealidad de la ecuación de Poisson modificada. El hecho de que la ecuación de MOND sea no-lineal hace que la resolución de la ecuación se haga más difícil. A continuación presentamos el efecto de campo externo en teoría lineal.

### 2.4.3. Linealización de la ecuación de campo en MOND

Sea  $\Phi_0$  el potencial de MOND que es creado por una distribución de masa  $\rho_0$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \mu_0 \vec{\nabla} \Phi_0 \right) = 4\pi G \rho_0, \quad (2.52)$$

donde  $\mu_0 = \mu(|\vec{\nabla} \Phi_0|/a_0)$ . Queremos ver la ecuación de campo que satisface una perturbación a dicha distribución. Haremos un desarrollo de todas las variables en  $\epsilon$  de la siguiente manera:

$$\rho = \rho_0 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^2 \rho_2 + \dots \quad (2.53)$$

$$\Phi = \Phi_0 + \epsilon \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2 + \dots \quad (2.54)$$

$$\mu = \mu_0 + \epsilon\mu_1 + \epsilon^2\mu_2 + \dots \quad (2.55)$$

Los diferentes términos son diferentes grados de aproximación a la solución. Si  $\epsilon$  es muy pequeño nos podemos quedar hasta orden 1 (teoría lineal) en  $\epsilon$ . Sustituyendo en la ecuación de Poisson modificada y quedándonos hasta primer orden en  $\epsilon$  queda:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \mu_0 \vec{\nabla} \Phi_1 + \mu_1 \vec{\nabla} \Phi_0 \right] = 4\pi G \rho_1. \quad (2.56)$$

La variable  $\mu$  no es independiente de  $\Phi$ : para obtener una ecuación diferencial para  $\Phi_1$  necesitaremos expresar  $\mu_1$  en función de  $\Phi_1$ . Para ello notemos que

$$\begin{aligned} \mu \left( \frac{|\vec{\nabla} \Phi_0 + \epsilon \vec{\nabla} \Phi_1|}{a_0} \right) &\simeq \mu \left( \frac{\sqrt{|\vec{\nabla} \Phi_0|^2 + 2\epsilon \vec{\nabla} \Phi_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi_1}}{a_0} \right) = \\ &\mu \left( \frac{|\vec{\nabla} \Phi_0|}{a_0} \left[ 1 + 2\epsilon \vec{e}_0 \cdot \frac{\vec{\nabla} \Phi_1}{|\vec{\nabla} \Phi_0|} \right]^{1/2} \right) \simeq \mu \left( \frac{|\vec{\nabla} \Phi_0|}{a_0} \left[ 1 + \epsilon \vec{e}_0 \cdot \frac{\vec{\nabla} \Phi_1}{|\vec{\nabla} \Phi_0|} \right] \right), \end{aligned}$$

donde  $\vec{e}_0$  es el vector unitario en cada punto  $\vec{r}$  del campo gravitatorio sin perturbar, es decir,  $\vec{\nabla} \Phi_0 = |\vec{\nabla} \Phi_0| \vec{e}_0$ . Ahora hacemos uso de la siguiente aproximación  $\mu(x + \delta x) \simeq \mu(x) + \delta x \frac{d\mu}{dx} \Big|_x$ , a primer orden. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mu \left( \frac{|\vec{\nabla} \Phi_0 + \epsilon \vec{\nabla} \Phi_1|}{a_0} \right) &\simeq \mu \left( \frac{|\vec{\nabla} \Phi_0|}{a_0} \left[ 1 + \epsilon \vec{e}_0 \cdot \frac{\vec{\nabla} \Phi_1}{|\vec{\nabla} \Phi_0|} \right] \right) \simeq \\ &\mu \left( \frac{|\vec{\nabla} \Phi_0|}{a_0} \right) + \epsilon \vec{e}_0 \cdot \frac{\vec{\nabla} \Phi_1}{a_0} \frac{d\mu}{dx} \Big|_0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Es decir:

$$\mu = \mu_0 + \epsilon \vec{e}_0 \cdot \frac{\vec{\nabla} \Phi_1}{a_0} \frac{d\mu}{dx} \Big|_0 \quad (2.58)$$

Comparando con la Ec. (2.55), ya hemos encontrado el valor de  $\mu_1$ :

$$\mu_1 = \vec{e}_0 \cdot \frac{\vec{\nabla} \Phi_1}{a_0} \frac{d\mu}{dx} \Big|_0. \quad (2.59)$$

Sustituyendo en la Eq. (2.56), la ecuación de campo en teoría lineal es:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \mu_0 \vec{\nabla} \Phi_1 + \vec{e}_0 \cdot \frac{\vec{\nabla} \Phi_1}{a_0} \frac{d\mu}{dx} \Big|_0 \frac{\vec{\nabla} \Phi_0}{a_0} \right] = 4\pi G \rho_1. \quad (2.60)$$

Escribiendo de nuevo  $\vec{\nabla}\Phi_0 = |\vec{\nabla}\Phi_0|\vec{e}_0$  entonces tenemos que

$$\left.\frac{d\mu}{dx}\right|_0 \frac{\vec{\nabla}\Phi_0}{a_0} = x_0 \left.\frac{d\mu}{dx}\right|_0 \vec{e}_0. \quad (2.61)$$

Usando este resultado en la Eq. (2.60) y sacando factor común  $\mu_0$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \mu_0 \left( \vec{\nabla}\Phi_1 + [\vec{e}_0 \cdot \vec{\nabla}\Phi_1]L_0\vec{e}_0 \right) \right] = 4\pi G\rho_1, \quad (2.62)$$

donde  $L_0 \equiv \left.\frac{d\ln\mu}{d\ln x}\right|_0$ . Esta expresión se puede escribir de la siguiente manera:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \mu_0 \left( 1 + L_0\tilde{\mathcal{E}}_0 \right) \cdot \vec{\nabla}\Phi_1 \right] = 4\pi G\rho_1, \quad (2.63)$$

donde  $\tilde{\mathcal{E}}_0$  es una matriz  $3 \times 3$  con los siguiente elementos  $\tilde{\mathcal{E}}_{i,j} = e_{0,i}e_{0,j}$ . Vemos que el potencial perturbado  $\Phi_1$  depende del potencial sin perturbar a través de  $\mu_0$ ,  $L_0$  and  $\vec{e}_0$ , y que el potencial será anisotrópico debido a que el factor  $\mu_0 \left( 1 + L_0\tilde{\mathcal{E}}_0 \right)$  no es un escalar. Milgrom (1986) dió la Ec. (2.63) pero omitió su demostración.

Usando el resultado de la Ec. (2.63) se puede demostrar que un sub-sistema con aceleración interna  $g_{\text{int}}$  inferior a  $a_0$  exhibirá una dinámica interna Newtoniana si la aceleración externa  $g_{\text{ext}}$  excede  $a_0$ , es decir, en el caso  $g_{\text{int}} < a_0 < g_{\text{ext}}$ . Si la aceleración interna y externa son menores de  $a_0$  y  $g_{\text{int}} < g_{\text{ext}} < a_0$ , entonces la dinámica del subsistema será Newtoniana pero con una constante eficaz de gravedad dada por  $G/\mu(g_{\text{ext}}/a_0)$ . Si  $g_{\text{ext}} < g_{\text{int}} < a_0$  la dinámica sigue MOND pero la aceleración aumenta un factor máximo de  $[\mu(g_{\text{ext}}/a_0)]^{-1}$  respecto a la Newtoniana.

## 2.5. Validez de la ecuación algebraica:

### Teorema

Para empezar enunciaremos el teorema que demostraremos a continuación. Dada una distribución de masa  $\rho$ , si los campos Newtoniano y el de MOND son paralelos en todos los puntos, entonces el factor que relaciona ambos es  $\mu$ .

*Demostración:* Como el campo dado por MOND,  $\vec{g}_M$ , y el Newtoniano,  $\vec{g}_N$ , son paralelos en todos los puntos, entonces existe un escalar que depende del punto tal que  $\lambda\vec{g}_M = \vec{g}_N$ . Por otro lado, tenemos que se cumple la ecuación de MOND:  $\vec{\nabla} \cdot (\mu\vec{g}_M) = \vec{\nabla} \cdot \vec{g}_N$ . Esto implica que  $\vec{\nabla} \cdot ((\mu/\lambda)\vec{g}_N) = \vec{\nabla} \cdot \vec{g}_N$ , o que  $\vec{\nabla} \cdot ((\mu/\lambda - 1)\vec{g}_N) = 0$ . Es decir,  $\vec{\nabla}(\mu/\lambda) \cdot \vec{g}_N - (\mu/\lambda - 1)4\pi G\rho = 0$ . Fuera del dominio acotado siempre podemos encontrar una región con  $\rho = 0$ , por lo que, como  $\vec{g}_N \neq 0$  entonces  $\mu = \lambda$ . Y como ésta última igualdad se cumple en la frontera de una superficie cerrada, el teorema de la unicidad nos dice que se cumple para todo el espacio.

## 2.6. Campos de fuerza paralelos

De acuerdo a la ecuación (2.51), dada una distribución de densidad, el campo de fuerzas Newtoniano y el de MOND, no son en general paralelos, se diferencian por un término rotacional. Una pregunta importante a contestar es: ¿cuándo el término rotacional es nulo o despreciable? o, dicho de otro modo: ¿hasta qué punto es buena aproximación suponer que el campo Newtoniano y el de MOND son paralelos? Como vemos, juega un papel relevante el concepto de campos de fuerza paralelos. Es conveniente comenzar por el caso Newtoniano y buscar cuándo dos distribuciones de densidad  $\rho_1$  y  $\rho_2$  producen un campo de fuerzas paralelo en todos los puntos, con un factor de proporcionalidad  $\mu$ , que puede depender de la posición ( $\vec{g}_1 = \mu\vec{g}_2$ ). Si fuera cierto que los campos gravitatorios en MOND y en Newton son aproximadamente paralelos, entonces MOND sería como añadir materia oscura con

una densidad efectiva  $\rho_2 - \rho_1$  (en algunos puntos la densidad efectiva podría, en principio, ser negativa) . En la próxima Sección intentaremos describir qué se requiere para que en el caso Newtoniano, dos campos de fuerza sean paralelos en todos los puntos.

### 2.6.1. Campos de fuerza paralelos en el caso Newtoniano

Sea una distribución de masa descrita por la densidad  $\rho_1$ . Queremos encontrar la familia de distribuciones de densidad que satisface que los campos de fuerza creados por ellas son paralelos en todos sus puntos, aunque su magnitud puede depender de la posición,  $\vec{g}_2 = \lambda^{-1}\vec{g}_1$  con  $\lambda(\vec{r})$ . De acuerdo a la ecuación de Poisson, el potencial generado por la distribución  $\rho_1$  vendrá dado por:

$$\nabla^2\Phi_1 = 4\pi G\rho_1. \quad (2.64)$$

Del mismo modo, una distribución de masa  $\rho_2$  satisface la misma ecuación en el contexto Newtoniano:

$$\nabla^2\Phi_2 = 4\pi G\rho_2. \quad (2.65)$$

Lo que buscamos es una  $\rho_2$  que cumpla que  $\vec{g}_2 = \lambda^{-1}\vec{g}_1 = -\lambda^{-1}\vec{\nabla}\Phi_1$ . Ya que  $\vec{g}_2 = -\vec{\nabla}\Phi_2$ , entonces podemos escribir  $\vec{\nabla}\Phi_2 = \lambda^{-1}\vec{\nabla}\Phi_1$ . Y así sustituyendo este valor en la Ec. (2.65) obtenemos  $\vec{\nabla}(\lambda^{-1}\vec{\nabla}\Phi_1) = 4\pi G\rho_2$ , donde hemos usado  $\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ . Haciendo uso de la regla de la cadena,

$$\vec{\nabla}\lambda^{-1} \cdot \vec{\nabla}\Phi_1 + 4\pi G\lambda^{-1}\rho_1 = 4\pi G\rho_2. \quad (2.66)$$

Despejando  $\rho_2$ , encontramos la distribución de masa que estabamos buscando:

$$\rho_2 = \frac{1}{4\pi G}\vec{\nabla}\lambda^{-1} \cdot \vec{\nabla}\Phi_1 + \lambda^{-1}\rho_1 = -\frac{1}{4\pi G}\vec{\nabla}\lambda^{-1} \cdot \vec{g}_1 + \lambda^{-1}\rho_1, \quad (2.67)$$

donde además  $\rho_1$  y  $\Phi_1$  están relacionados a través de la ecuación de Poisson.

Por otro lado,  $\lambda$  debe satisfacer que  $\lambda^{-1}\vec{g}_1$ , sea un campo conservativo, es decir:

$$\vec{\nabla} \times (\lambda^{-1}\vec{g}_1) = 0. \quad (2.68)$$

Desarrollando el primer término de la ecuación anterior tenemos:

$$\vec{\nabla} \times (\lambda^{-1} \vec{g}_1) = \lambda^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{g}_1 + \vec{\nabla} \lambda^{-1} \times \vec{g}_1 = -\frac{1}{\lambda^2} \vec{\nabla} \lambda \times \vec{g}_1 = 0, \quad (2.69)$$

donde hemos usado que  $\vec{\nabla} \times \vec{g}_1 = 0$ . Así, la condición de campo conservativo implica que el gradiente de  $\lambda$  es paralelo al campo de fuerzas (tanto a  $\vec{g}_1$  como a  $\vec{g}_2$ ), lo cual nos permite escribir  $\vec{\nabla} \lambda^{-1} = \xi \vec{g}_1$ , donde  $\xi$  puede depender de la posición. Con ello, la Ec. (2.67) podemos escribirla como:

$$\rho_2 = -\frac{1}{4\pi G} \vec{\nabla} \lambda^{-1} \cdot \vec{g}_1 + \lambda^{-1} \rho_1 = -\frac{1}{4\pi G} \xi g_1^2 + \lambda^{-1} \rho_1. \quad (2.70)$$

El caso obvio corresponde a  $\lambda = \lambda_0 = \text{cte}$ . En este caso  $\xi = 0$  y, por lo tanto, la Ec. (2.70) nos dice que  $\rho_2 = \lambda_0^{-1} \rho_1$ .

Otro caso interesante es el caso esférico, es decir,  $\vec{g}_1(r)$ . En ese caso,  $\lambda$  y  $\rho_2$  también siguen una distribución esférica, es decir,  $\lambda(r)$  y  $\rho_2(r)$ . Es importante observar que mientras que  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son variables locales, el valor de  $g_1^2$  depende del resto de la distribución de masa y, por lo tanto, para encontrar su valor es necesario conocer la distribución de masa  $\rho_1$  en todos los puntos. Para asegurarnos que siempre se puede encontrar una solución independiente de  $\lambda(\vec{r})$ , deberíamos demostrar que  $\rho_2 \geq 0$  en todos los puntos. Si imponemos esa condición en Ec. (2.70), significa que  $\lambda$  no puede ser un campo completamente arbitrario.

Se ha dicho que  $\vec{\nabla} \lambda$  tiene que ser paralelo a  $\vec{g}_1$ . Eso significa que los isocontornos de  $\lambda$  son iguales a los isocontornos de potencial y, por lo tanto,  $\lambda$  tiene que ser una función del potencial  $\lambda = \lambda(\Phi_1)$ . Ahora consideremos una superficie equipotencial  $S_{ep}$ . Usando el teorema de Gauss:

$$\int_{S_{ep}} \vec{g} \cdot d^2 \vec{S} = -4\pi GM, \quad (2.71)$$

y aplicándolo a  $\vec{g}_1$  y a  $\vec{g}_2$ :

$$\int_{S_{ep}} \vec{g}_1 \cdot d^2 \vec{S} = -4\pi GM_1, \quad (2.72)$$

$$\int_{S_{ep}} \vec{g}_2 \cdot d^2 \vec{S} = \lambda_{ep}^{-1} \int_{S_{ep}} \vec{g}_1 \cdot d^2 \vec{S} = -4\pi G \lambda_{ep}^{-1} M_1 = -4\pi GM_2, \quad (2.73)$$

donde  $M_1$  y  $M_2$  son las masas contenida dentro de la superficie  $S_{ep}$ . Por lo tanto, dentro de las superficies equipotenciales

$$\lambda_{ep}^{-1} M_1 = M_2. \quad (2.74)$$

Un valor dado de  $\Phi_1$  nos define una superficie equipotencial y una masa dentro de esa superficie  $M_1$ . Por lo tanto, se puede encontrar una función que relacione  $M_1$  con  $\Phi_1$ ,  $M_1 = M_1(\Phi_1)$ . La ecuación (2.74) nos asegura que  $M_2(\Phi_1) = \lambda_{ep}^{-1}(\Phi_1)M_1(\Phi_1)$ . La condición de que la densidad sea positiva implica que  $dM_2/d\Phi_1 \geq 0$ . Derivando  $M_2(\Phi_1)$  respecto a  $\Phi_1$  e imponiendo que sea mayor o igual que cero, se obtiene la condición:

$$\frac{M_1}{\lambda_{ep}^2} \frac{d\lambda_{ep}}{d\Phi_1} \leq \frac{1}{\lambda_{ep}} \frac{dM_1}{d\Phi_1}. \quad (2.75)$$

Supongamos que  $\lambda_{ep} > 0$ , entonces debe satisfacer:

$$\frac{d \ln \lambda_{ep}}{d\Phi_1} \leq \frac{d \ln M_1}{d\Phi_1}. \quad (2.76)$$

Ahora ya conocemos qué condición debe cumplir  $\lambda$  para que el problema tenga solución física y sabemos construir la distribución de densidad  $\rho_2$  para que el campo gravitacional que crea sea paralelo al que crea la distribución de densidad  $\rho_1$ .

### 2.6.2. Corolario

En la Sección anterior hemos visto que  $\lambda$  tenía que depender de  $\Phi_1$  para que existiera un nuevo campo gravitacional paralelo. En el caso de MOND  $\mu$  hace el papel de  $\lambda$ . Aunque  $\mu$  depende de  $x$  que es función de  $|\vec{\nabla}\Phi_M|$ , se puede invertir y escribir  $\mu$  en función de  $|\vec{\nabla}\Phi_N|$ . Encontramos el siguiente corolario: Para que el campo de fuerzas en MOND y en Poisson sean paralelos,  $\mu$  tiene que ser a su vez una función de  $\Phi_N$ . Dicho de otro modo, el campo de fuerza Newtoniano debe satisfacer:

$$|\vec{\nabla}\Phi_N| = f(\Phi_N), \quad (2.77)$$

para que  $\vec{g}_M = \vec{g}_N/\mu$ . Se concluye que sólo las configuraciones que cumplen la relación anterior satisfacerán que el campo en MOND vendrá dado por la relación algebraica.

## 2.7. Ecuación de Poisson modificada en un disco

En los próximos capítulos usaremos la relación algebraica para calcular la curva de rotación. Esto necesariamente es una aproximación a la solución puesto que un disco exponencial de materia no satisface la relación (2.77). En otras palabras, las curvas de rotación calculadas a partir de la ecuación algebraica se deben considerar como una aproximación a la curva de rotación exacta. Ahora queremos ver si modelando una galaxia espiral como un disco axisimétrico y ligeramente delgado, podemos ir simplificando la ecuación de Poisson modificada hasta identificar aquellos términos que la hacen diferente de la ecuación de Poisson estándar.

Partamos de la ecuación de Poisson modificada;

$$\vec{\nabla} \left( \mu(x) \vec{\nabla} \Phi \right) = 4\pi G \rho \quad \text{donde} \quad x = |\vec{\nabla} \Phi| / a_0 \quad (2.78)$$

Al aplicar la regla de la cadena en el término de la izquierda de la ecuación anterior, obtenemos:

$$\vec{\nabla} \mu(x) \cdot \vec{\nabla} \Phi + \mu(x) \nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (2.79)$$

Debido a que supondremos como primera aproximación que los discos galácticos son axisimétricos, sólo consideraremos el caso  $\rho(R, z)$ . En coordenadas cilíndricas:

$$\mu(x) \nabla^2 \Phi + \frac{d\mu}{dx} \frac{\partial x}{\partial R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{d\mu}{dx} \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 4\pi G \rho. \quad (2.80)$$

Es clara la dificultad de tratar esta ecuación. Para extraer información, vamos a considerar primero las condiciones en las partes externas de una galaxia espiral típica. En las partes externas,  $g_R \approx v_c^2/R$  y  $g_z(R) \approx \pi G \Sigma(R)/\mu$ . A  $R$  suficientemente grandes  $\Sigma$  decae rápidamente, por lo que podemos suponer que  $g_R \gg g_z$ . Siempre y cuando  $g_{N,R} \gg \pi G \Sigma$ , tendremos también que se satisface  $g_{M,R} \gg g_{M,z}$ . En ese caso  $x = |\vec{\nabla} \Phi|/a_0 = \sqrt{g_R^2 + g_z^2}/a_0 \simeq g_R/a_0 (1 + g_z^2/(2g_R^2)) \simeq g_R/a_0$ . Tomando esta relación para sustituirla en la Ec. (2.80) y despreciando el tercer término pues  $g_R \gg g_z$ , obtenemos:

$$\mu(x) \nabla^2 \Phi + \frac{1}{2a_0} \frac{d\mu}{dx} \frac{\partial g_R^2}{\partial R} = 4\pi G \rho. \quad (2.81)$$

O, escrita de otra manera:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{4\pi G \rho}{\mu} - \frac{1}{2a_0} \frac{d \ln \mu}{dx} \frac{\partial g_R^2}{\partial R}. \quad (2.82)$$

Comparando esta ecuación con la de Poisson estándar, vemos que no sólo hay que reemplazar  $G \rightarrow G/\mu$ , sino que además hay que añadir otro término fuente (el segundo sumando de la derecha de la ecuación anterior). Se puede ver fácilmente que este nuevo término es positivo, puesto que  $d \ln \mu / dx > 0$  y  $\partial g_R^2 / \partial R < 0$ .

En los próximos capítulos queremos calcular la curva de rotación en dos galaxias particulares. En principio, podríamos usar la ecuación (2.82) como una aproximación mejor que la ecuación algebraica. Sin embargo, Brada & Milgrom (1995) mostraron numéricamente que la relación algebraica es bastante buena para estimar la curva de rotación en discos exponenciales, aunque no encuentran por qué. Debido a la complejidad que entraña resolver la ecuación (2.82), usaremos la relación algebraica.



---

# 3

## Aplicando MOND a la galaxia espiral M33

En este capítulo veremos brevemente las características más relevantes de la galaxia M33. Debido a su cercanía, esta galaxia tiene buenas determinaciones de distancia y de inclinación. Además, su curva de rotación presenta una peculiaridad muy interesante; no es plana sino que va ascendiendo en la partes más externas. Analizaremos la dinámica de la galaxia, tomando la teoría gravitacional Newtoniana y la teoría gravitacional de MOND. Ilustraremos la necesidad de introducir un halo de materia oscura si usamos la gravedad de Newton. Analizaremos qué tan buenos son los ajustes a la curva de rotación cuando se usa MOND.

### 3.1. Características más relevantes de M33

M33, a veces llamada galaxia del Triángulo por pertenecer a la constelación del Triángulo, es una de las galaxias espirales más pequeñas del Grupo Local. Debemos notar que es pequeña en comparación con nuestra galaxia, la Vía Láctea, y su compañera Andrómeda (M31). Sin embargo, supera el tamaño medio de las galaxias espirales en el Universo. M33 tiene una magnitud de  $M_V = 5.7$  mag y puede apreciarse a simple vista bajo condiciones excepcionalmente buenas; es el objeto más lejano que se puede llegar a ver a simple vista. M33 logra destacarse con unos buenos binoculares, pero como su brillo total se distribuye por un área cuatro veces mayor que la cubierta por la Luna llena, su brillo superficial es extremadamente bajo.

De acuerdo con R. B. Tully, M33 se aproxima hacia nuestro Sistema Solar a una velocidad de  $182 \text{ km s}^{-1}$ . Ahora bien, si se corrige por el efecto de nuestro movimiento en torno al Centro Galáctico de la Vía Láctea, M33 se aproxima a nuestra Galaxia a una velocidad de  $\sim 24 \text{ km s}^{-1}$ .



Figura 3.1: La galaxia M33. Se localiza en la constelación del triángulo. Esta galaxia es pequeña en comparación con nuestra Galaxia y forma parte del Grupo Local.

M33, cuya imagen en el visible presentamos en la Fig. 3.1, fue catalogada por Charles Messier el 25 de agosto de 1764. Sin embargo, William Herschel, quien habitualmente procuraba evitar numerar los objetos de Messier en su catálogo, le asignó el número HV.17, en base a una observación con fecha 11

de septiembre de 1784. La región H II más brillante y grande (nebulosa difusa de emisión que contiene hidrógeno ionizado) situada en la parte noroeste de la galaxia y otros objetos en los brazos espirales de M33 han recibido sus propios números del catálogo NGC.

La galaxia del Triángulo (M33) es de tipo Sc (los tipos de galaxias se describen en el Apéndice A). Debido a que tiene características de galaxia muy “tardía”, Tully la clasificó como Scd (en el Catálogo de Galaxias Cercanas). Sus brazos pronunciados muestran numerosas regiones H II rojizas, como NGC 604, así como nubes azuladas de estrellas jóvenes.

Los resultados del satélite Hipparcos han llevado a una revisión de la escala de las distancias cósmicas, afectando por consiguiente nuestra distancia a M33: el valor revisado es alrededor de 920 kpc. Las investigaciones de las Cefeidas en M33 de 1991 (Freedman et al. 1991) revelaron que M33 está a una distancia ligeramente mayor de nosotros que la galaxia de Andrómeda (M31).<sup>1</sup> Nosotros tomaremos una distancia a M33 de 840 kpc (Freedman et al. 2001), después de la nueva recalibración de las distancias a través de las Cefeidas.

Está tan cerca que su dimensión angular en el cielo es gigantesca, 73 minutos de arco en el eje mayor, alrededor de 2.5 veces el diámetro de la Luna. Su diámetro físico es aproximadamente la mitad del de la Vía Láctea. Se ha estimado que M33 tiene una masa entre  $(1-4) \times 10^{10} M_{\odot}$ .

Debido a que estamos interesados en MOND, pasaremos a describir sólo las componentes luminosas en la siguiente Sección.

## 3.2. Componentes bariónicas de M33

Se distinguen 4 componentes luminosas en M33, la componente estelar, el gas atómico neutro, el ionizado y el gas molecular, con las siguientes propiedades:

---

<sup>1</sup>La distancia existente entre M33 y M31 es cerca de 230 kpc.

- La **componente estelar**. Las estrellas en una galaxia espiral se distribuyen en: una *componente de bulbo* (en ocasiones se habla de componente esferoidal o pseudobulbo), una *componente de disco* y una *componente de halo estelar*. Sin embargo la componente del halo es despreciable en masa frente a las demás. Para M33 el bulbo es muy pequeño y poco masivo por lo que podemos ignorarlo (Corbelli & Salucci 1999).

La luminosidad de M33 en la banda azul es de  $L_B = 5 \times 10^9 L_\odot$  (Sandage & Tammann 1981). En la banda K, el disco sigue un perfil exponencial con una longitud de escala de  $R_d \simeq 5.8$  arcmin  $\simeq 1.2 \pm 0.2$  kpc (Regan & Vogel 1994). El trabajo preliminar de Ferguson et al. (2006) muestra que el disco de M33 no se separa de uno exponencial hasta un radio de 40 arcmin. A partir de los 40 arcmin, sólo se tiene el brillo para las estrellas en la rama de gigante roja y su distribución sigue una ley exponencial que cae más rápidamente que el que se tendría en las bandas K e I si se extrapolara a esas distancias. El brillo superficial central en las bandas I y B es de  $19.7$  mag arc $^{-2}$ . Sin embargo, este brillo está dominado por el brillo del pseudobulbo. Si se eliminara el bulbo, el brillo superficial central del disco sería de  $\mu_B \approx 21.2$  mag arc $^{-2}$ .

- La mayor parte de la componente gaseosa reside en **hidrógeno atómico neutro** (véase Fig. 3.2). La masa total de HI es de alrededor de  $2.2 \times 10^9 M_\odot$  (tomando una distancia  $D = 0.84$  Mpc), donde el 25 % de esta masa reside en la afueras del disco galáctico, es decir, más allá del radio con la isofota 25,  $R_{25}$  (Corbelli & Salucci 1999). La densidad central de HI es de  $8 M_\odot \text{ pc}^{-2}$ , llega a  $13.3 M_\odot \text{ pc}^{-2}$  a un radio de  $\sim 2.2$  kpc para después decaer rápidamente a partir de un radio de 7 kpc. La amplitud de la curva de rotación para esta galaxia es de  $\sim 130 \text{ km s}^{-1}$ . Para esta galaxia se ha llegado a observar la curva de rotación hasta una distancia de 13 escalas radiales del disco, la cual la hace ideal para poner a prueba las teorías de gravedad modificada. En la Fig. 3.3 podemos ver la curva de rotación observada para M33.

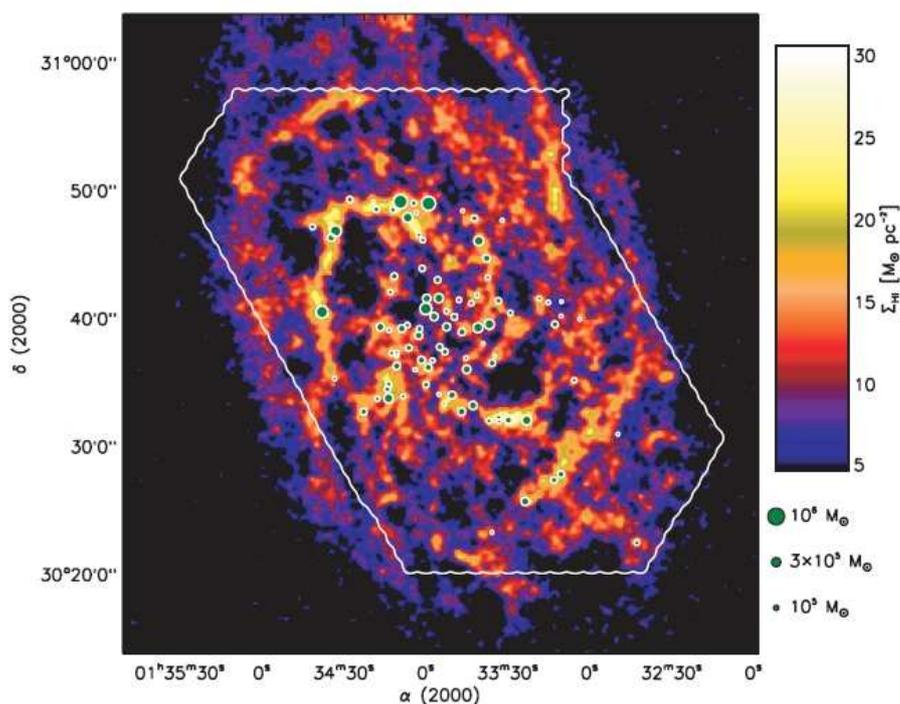


Figura 3.2: En color amarillo se muestran las regiones de M33 donde hay mayor densidad de HI (tomada de Deul & van der Hulst 1987). Podemos ver que las regiones de mayor densidad coinciden con las regiones donde se encuentran las condensaciones de gas molecular.

- Gas ionizado tibio.** Las cuentas de la radiación de fondo de HI para M33 muestran un valor de  $3 \times 10^{19} \text{ cm}^{-2}$  (Corbelli & Salpeter 1993), por lo que  $\sigma_{HII} = 0.26 M_{\odot} \text{pc}^{-2}$ . Corbelli & Salpeter (1993) dedujeron que la masa de gas ionizado es de  $1.9 \times 10^8 M_{\odot}$ . Como es aproximadamente de sólo un 10% de la masa de HI, despreciaremos esta masa como contribución al potencial gravitacional. Podría haber más gas ionizado en las partes externas de la galaxia debido a que la radiación UV metagaláctica es capaz de ionizar completamente el hidrógeno cuando la densidad superficial del gas es menor a  $10^{19} \text{ cm}^{-2}$ . Sin embargo, la presencia de esa componente sólo aumentaría la velocidad de rotación en  $1\text{--}2 \text{ km s}^{-1}$ .

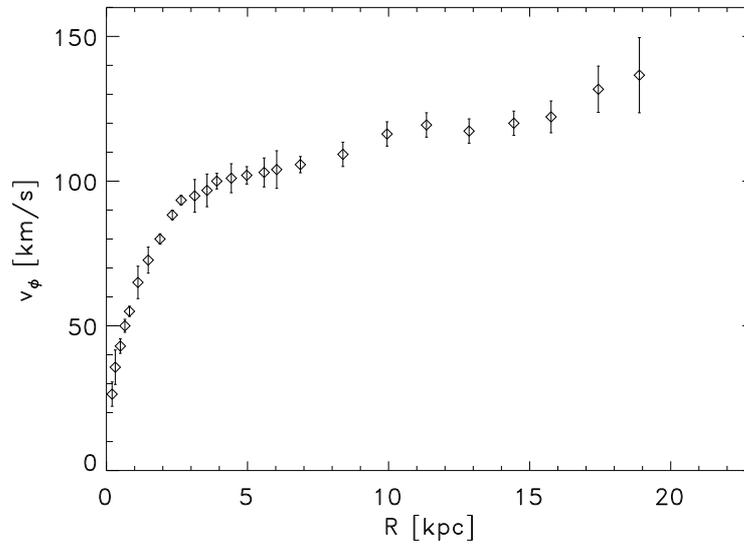


Figura 3.3: Curva de rotación observada de M33.

- **Gas molecular.** En general, la contribución del gas molecular a la masa de las galaxias es pequeña. A esto hay que añadir que, como es bien sabido, M33 es una galaxia deficiente en gas molecular. Sin embargo, existen grandes complejos de gas molecular con masas del orden de  $(10^5 - 10^6) M_\odot$ , los cuales son más abundantes cerca del centro galáctico (e.g. Young & Scoville 1982; Wilson & Scoville 1989), tal y como se muestra en la Fig. 3.4. Dentro de los primeros kiloparsecs la densidad columnar de  $H_2$  se mantiene constante en  $R$  y es del mismo orden que la densidad columnar de HI, pero para radios grandes la fracción relativa disminuye rápidamente. Así, la masa de  $H_2$  interior a un radio de 2.5 kpc es de  $6 \times 10^7 M_\odot$ , la cual está cerca de la mitad de la masa de HI.

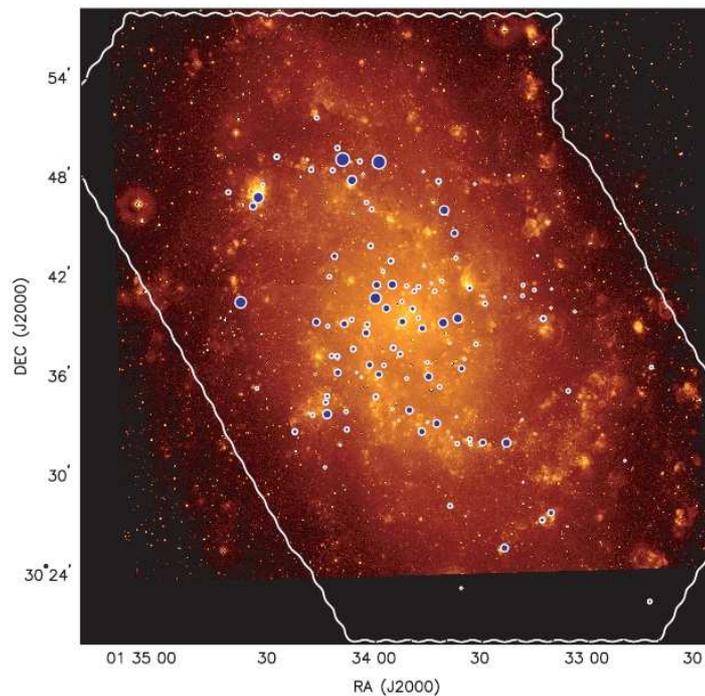


Figura 3.4: La figura compara las regiones donde se encuentran las condensaciones de gas molecular de M33 con las regiones H II, mostrando que algunas nubes de gas molecular siguen los brazos espirales de M33. El tamaño de los círculos azules son proporcionales a la masa de gas molecular de la nube (imagen de Cheng et al. 1996).

### 3.3. Procedimiento para estudiar la dinámica

A partir de observaciones de la línea de 21 cm, se puede derivar la curva de rotación de la galaxia. Una de las propiedades interesantes del gas neutro es que se extiende más allá del disco óptico, por lo que se puede explorar la distribución de masa en un rango mayor que si consideráramos la componente estelar. Debido a que la presión del gas es muy pequeña, la velocidad de rotación inferida se supone que es una medida de la velocidad circular, es decir, a la que se mueve una partícula prueba en órbita circular alrededor del centro galáctico (véase el Capítulo I). Uno supone que el movimiento del gas es una rotación coplanar alrededor del centro de la galaxia en cuestión. Éste no es siempre el caso porque hay distorsiones al campo de la velocidad en las

galaxias espirales causadas por las barras y otras deformaciones verticales del disco de gas. Aunque estas distorsiones se pueden modelar (Bosma 1978, Begeman 1989), las curvas de rotación óptimas son esas en las cuales no hay evidencia de la presencia de desviaciones significativas del movimiento circular coplanario. No todas las curvas de rotación trazan perfectamente la distribución radial de la fuerza.

Como es habitual suponemos que la única fuerza que mantiene al gas en rotación es la gravedad. Como ya sabemos, MOND propone que la única masa que contribuye a la fuerza gravitacional es la masa bariónica, también llamada masa visible o luminosa.

Para las estrellas sólo contamos con el perfil del brillo superficial que es la luminosidad por unidad de área como función de la distancia galactocéntrica. La pregunta es: ¿Cuál es la masa del disco de M33? El procedimiento que vamos a seguir es estándar en la literatura astronómica. A continuación detallamos la forma de proceder:

1. Se supone un cociente masa-luminosidad constante, es decir, independiente de  $R$ , para el disco estelar. Aunque se observan gradientes de color en las galaxias espirales, por lo que un cociente  $M/L$  constante no puede ser absolutamente cierto, el efecto en la dinámica debe de ser pequeño. Si bien los estudios de poblaciones estelares pueden restringir en cierta medida la proporción masa-luminosidad del disco estelar, se toma como un parámetro libre en los ajustes de las curvas de rotación.

La opinión general es que el perfil de brillo en el infrarrojo cercano es el trazador óptimo de la distribución de masa estelar subyacente en las galaxias espirales porque la población vieja de estrellas de baja masa, que en conjunto son las que dominan la masa en estrellas de la galaxia, es la que más contribuye a esta emisión, y el infrarrojo cercano no está muy afectado por absorción por el polvo. Por lo tanto, la fotometría en el infrarrojo cercano es preferible.

2. Al determinar la distribución de la materia visible uno debe corregir la contribución del hidrógeno neutro observado escalando por un factor apropiado, típicamente 1.3 -1.4, para incluir la contribución del helio primordial. La contribución del gas al potencial puede ser dominante en algunas galaxias, generalmente en galaxias de baja luminosidad.
3. Una vez conocida la distribución de masa, la aceleración gravitacional newtoniana en el plano ecuatorial de la galaxia, se calcula vía la ecuación clásica de Poisson, bajo la suposición de que el disco estelar y gaseoso son suficientemente delgados. Puede ser necesario agregar un bulbo esferoidal si la distribución de luz indica la presencia de tal componente. En el caso de M33 no es necesario porque no presenta bulbo.
4. Dada la distribución radial de la aceleración Newtoniana, la ‘verdadera’ aceleración gravitacional,  $g$ , según propone MOND, se calcula a partir de  $g_N$  usando la fórmula algebraica de MOND ( $\mu(|g|/a_0)\vec{g} = \vec{g}_N$ ) con  $a_0$  fijo. Entonces, dejando la  $M/L$  del disco estelar como único parámetro libre, se busca el mejor ajuste a la curva de rotación observada. Por ello, en MOND, la  $M/L$  del disco es el único parámetro libre (a menos que presente también un bulbo).

### 3.4. MOND en M33

Consideremos la curva de rotación observada de M33 y dibujemos sobre ella la velocidad de rotación,  $v_{c,N}$ , esperada según la ley de gravedad Newtoniana, si sólo tuviéramos el disco estelar sin materia oscura (Fig. 3.5). Vemos que incluso variando la  $M/L$  del disco, no se puede reproducir la curva de rotación observada, ya que después de alcanzar su máximo, la velocidad de rotación debida sólo al disco estelar decae, en contradicción al

comportamiento observado para M33. Así, tomando unidades solares<sup>2</sup>, para  $M/L_B = 1.2$ , la curva de rotación se asemeja a la observada sólo hasta un radio de  $\sim 3$  kpc, para finalmente decaer con  $R$ .

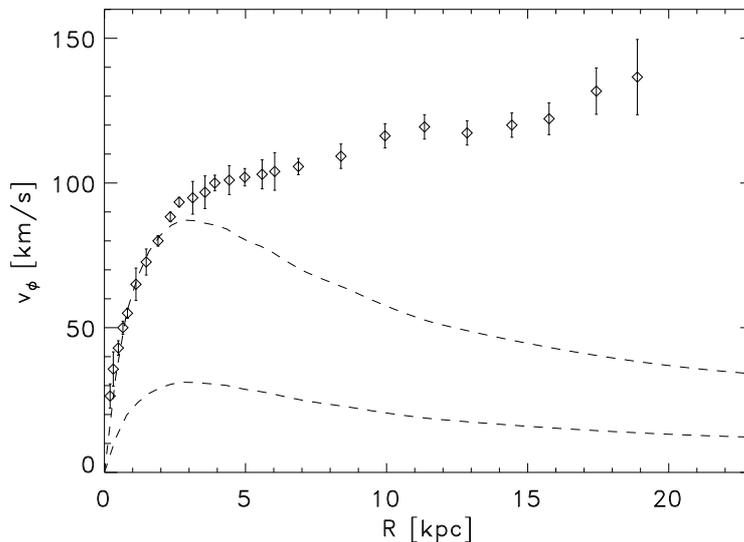


Figura 3.5: Curva de rotación de M33, y la contribución del disco estelar según la dinámica Newtoniana para una  $M/L_B = 1.2$  (curva discontinua superior) y para  $M/L_B = 0.15$  (curva discontinua inferior), las cuales denotamos por  $v_{c,N}$ .

Incluimos ahora la contribución del gas a la curva de rotación, incluyendo el hidrógeno atómico, y el helio e hidrógeno molecular. La curva de rotación total, incluyendo la contribución del gas se presenta en la Fig. 3.6. Se ve que, suponiendo todavía una gravedad Newtoniana, la inclusión del gas aumenta el valor de la velocidad de rotación unos  $20 \text{ km s}^{-1}$ , que es todavía claramente insuficiente.

Para cuantificar el efecto que tendría el introducir MOND, veámos cuál es la aceleración centrípeta,  $v_c^2/R$ , a la que está sometida una partícula en órbita circular, en función de la distancia al centro galáctico (Fig. 3.7). Vemos

<sup>2</sup>A lo largo de toda la tesis usaremos las unidades solares de masa y luminosidad en la respectiva banda para  $M/L$ . Sin embargo, por brevedad, omitiremos las unidades.

que a partir de un radio de  $\sim 3$  kpc la aceleración se hace menor al valor de la aceleración universal  $a_0 \sim 10^{-8} \text{ cm s}^{-2}$ . Por lo tanto, de acuerdo a los capítulos anteriores, la fuerza gravitacional radial será mayor en MOND que en Newton a radios galactocéntricos mayores a  $\sim 3$  kpc, mientras que el efecto de introducir MOND será pequeño a radios menores.

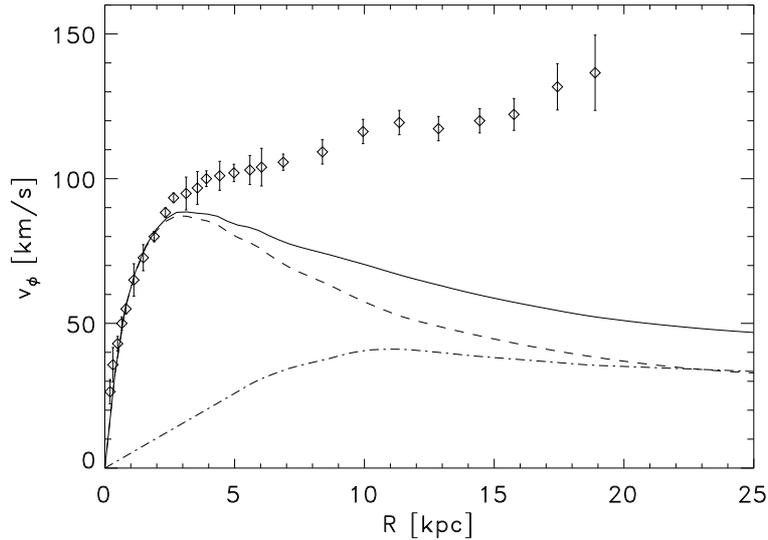


Figura 3.6: Velocidad de rotación de M33 según lo predicho por Newton, junto con la contribución del disco estelar para una  $M/L_B = 1.2$  (curva discontinua superior) y la contribución del gas (curva discontinua inferior).

Pasemos a calcular cómo es la curva de rotación para un disco exponencial de masa (disco estelar) según MOND. En la Fig. 3.8 presentamos las curvas de rotación en MOND, donde hemos tomado el disco de estrellas de M33 con una  $M/L_B = 1.2$  y una  $M/L_B = 0.15$ . Es claro que con MOND, independientemente del valor de  $M/L_B$ , las curvas de rotación se vuelven planas, aunque no completamente planas. Por ejemplo, para  $M/L_B = 1.2$ , la curva desciende  $\sim 10 \text{ km s}^{-1}$  desde su máximo hasta el punto más lejano observado. Esta tendencia descendente no se observa en la curva de rotación observada, pero todavía falta por incluir la contribución de masa de la componente gaseosa. Por otro lado, para una  $M/L_B = 0.15$  el comportamiento

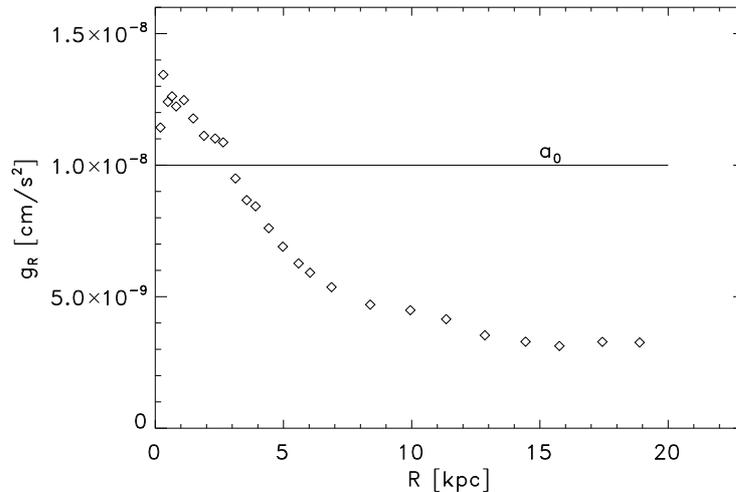


Figura 3.7: Aceleración radial que tendría una partícula prueba en órbita circular en el disco de M33 como función del radio. La recta corresponde al valor de  $a_0$ . Para aceleraciones por debajo del valor de  $a_0$ , la dinámica que rige el comportamiento de M33 es la MONDiana.

de la curva de rotación es parecido al caso de la  $M/L_B = 1.2$ , sólo que para  $M/L_B = 0.15$  la velocidad de rotación no supera los  $60 \text{ km s}^{-1}$ . Por ejemplo, el máximo de la curva de rotación se encuentra en el mismo  $R$  para los dos valores de  $M/L_B$ .

En la Fig. 3.9 se presentan las curvas de rotación para M33 según MOND incluyendo la contribución del gas y el disco exponencial de estrellas para  $M/L_B = 1.2$  y para  $M/L_B = 0.15$ . Aunque, como era ya de esperarse, una  $M/L_B = 1.2$  se asemeja más con lo observado, la curva de rotación con una  $M/L_B$  ocho veces menor, alcanza valores de  $\sim 90\text{--}100 \text{ km s}^{-1}$  a partir de 10 kpc. Es decir, las curvas de rotación esperadas según MOND no son tan diferentes a  $R > 10$  kpc. Para  $M/L_B = 0.15$ , la contribución del gas es más importante que la contribución de las estrellas a  $R > 9$  kpc. Como vemos claramente en la Fig. 3.9, esto hace que para esos valores de la  $M/L_B$  tan bajos, la curva de rotación predicha tenga prácticamente la misma forma que la contribución a la curva de rotación del gas. Curiosamente, hay galaxias

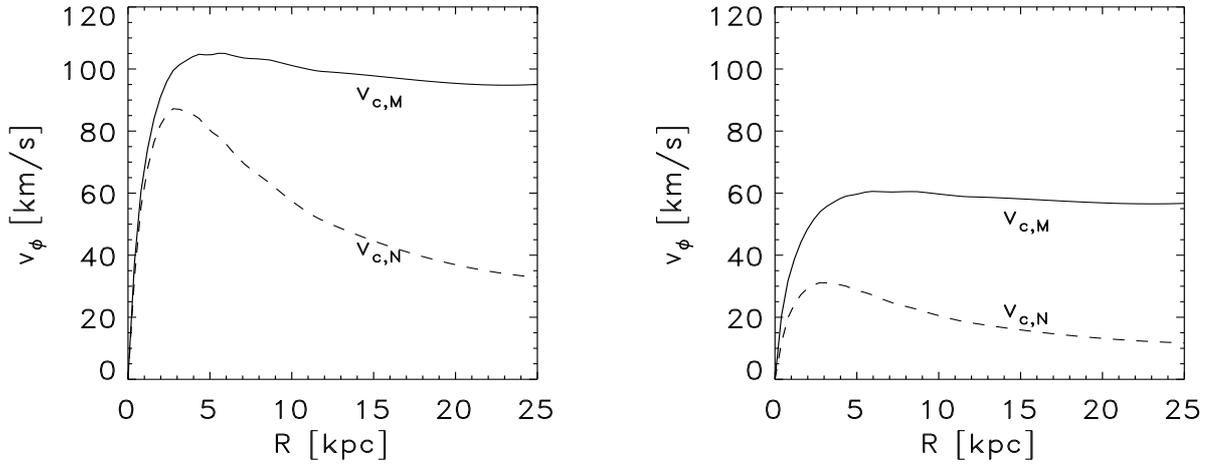


Figura 3.8: Curvas de rotación según MOND para un disco exponencial de estrellas suponiendo  $M/L_B = 1.2$  (derecha) y para una  $M/L_B = 0.15$  (izquierda). Las líneas discontinuas representan la curva de rotación según Newton.

enanas que cumplen esto: la curva de rotación total es una versión a escala de la curva de rotación si sólo estuviera el disco de gas. Cuando ocurre esto se dice que la galaxia satisface la relación de Bosma, por ser Bosma el primer en darse cuenta de este hecho. Sin embargo, hay claros ejemplos de galaxias enanas que no siguen la relación de Bosma.

Si dejamos libre el parámetro  $M/L$ , y buscamos el ajuste a la curva de rotación que minimiza el coeficiente  $\chi^2$  reducido encontramos  $M/L_B = 0,92$  (ver Fig. 3.10). La curva de rotación predicha por MOND es muy plana, mientras que la observada muestra un comportamiento ascendente. De hecho, la velocidad predicha por MOND difiere  $2\sigma$  de los valores observados en los últimos cuatro puntos. Es probable que los errores asociados a estos puntos sean mayores ya que no se han incluido los errores sistemáticos. Por lo tanto, podemos concluir que mejores observaciones de M33 a distancias  $R$  grandes con un buen modelaje del warp, podrían constituir un test observacional definitivo para MOND. Nótese que a esas distancias  $R \geq 15$  kpc, las aceleraciones son mucho menores a  $a_0$  como vimos en la Fig. 3.7 y, por lo tanto, los valores predichos por MOND no dependen de la forma exacta

de la función de interpolación.

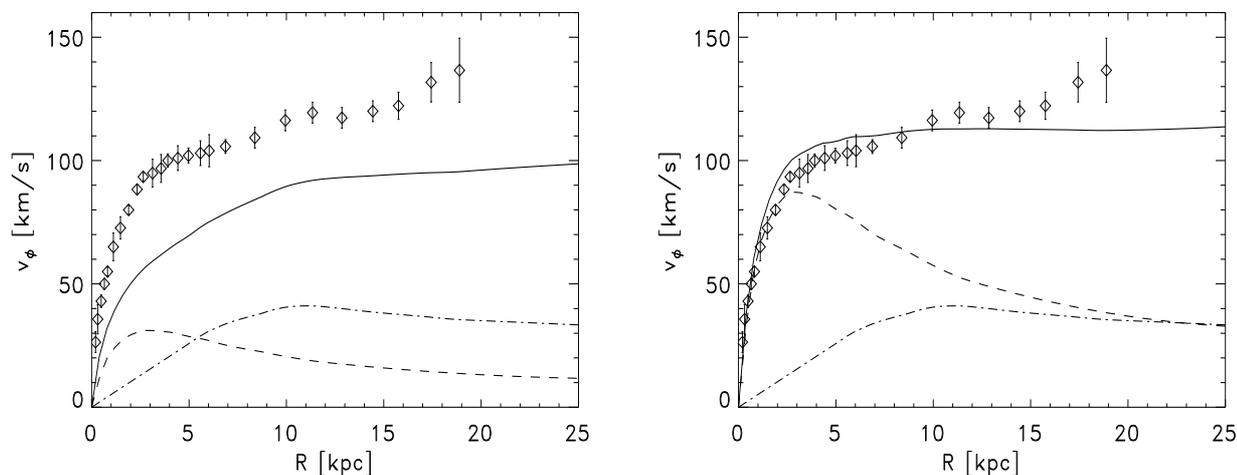


Figura 3.9: Curvas de rotación predichas por MOND (líneas continuas) considerando las contribuciones del gas (línea a rayas y puntos) y de las estrellas (líneas discontinuas), suponiendo  $M/L_B = 0.15$  (panel de la izquierda) y para una  $M/L_B = 1.2$  (panel de la derecha).

Cuando ya se había concluido este Capítulo, apareció en la literatura un estudio similar al nuestro por Corbelli & Salucci (2007). Estos autores fueron capaces además de explorar qué ángulos de posición se necesitan para reducir lo máximo la discrepancia entre la curva de rotación observada y la predicha por MOND y concluyen que, debido a que la inclinación de M33 no es muy grande, la presencia del alabeo (warp) produce una degeneración en la deconvolución de las observaciones que hace que M33 sea todavía marginalmente compatible con MOND.

### 3.5. Componentes radiales y verticales en M33

Stubbs & Garg (2005) han propuesto un método para poner a prueba las teorías de gravedad modificada usando los discos de las galaxias y lo aplicaron a M33. La idea básicamente consiste en comparar  $\mu$  inferida usando dos métodos independientes y ver si hay acuerdo. La primera forma de

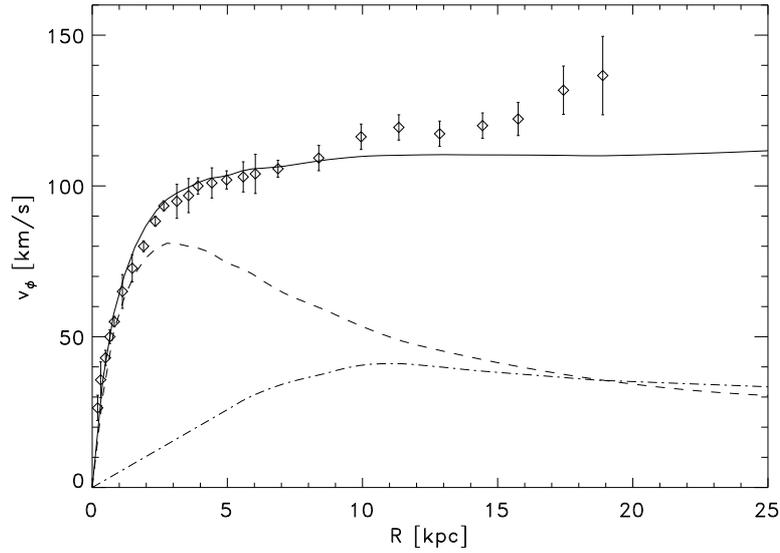


Figura 3.10: Mejor ajuste dejando libre el parámetro  $M/L$  del disco estelar, el cual corresponde a  $(M/L)_B = 0,92$ .

inferir  $\mu$  es estudiando la componente radial, es decir, conociendo la curva de rotación podemos estimar  $\mu$  como el cociente entre la aceleración real en la dirección radial y la aceleración Newtoniana:  $\mu = g_{M,R}/g_{N,R}$ , donde  $g_{M,R} = v_c^2/R$ . Al valor de  $\mu$  deducido de esta manera lo denotaron por  $\mu_R$ . Otra forma independiente de estimar  $\mu$  es a través de consideraciones en la dirección vertical al disco. Al valor así inferido lo denotaron por  $\mu_z$ . Más específicamente, Stubbs & Garg infirieron  $\mu_z$  tomando que la relación entre la densidad superficial del disco ( $\Sigma$ ), dispersión de velocidades ( $\sigma_z$ ) y altura del disco ( $z_0$ ) viene dada en MOND por:  $\sigma_z^2(R) = \pi G \Sigma(R) z_0 / \mu_z$ . Stubbs & Garg (2005) argumentan que, si MOND es correcta,  $\mu_R = \mu_z$ , por lo que  $CP(R) \equiv \mu_R(R)/\mu_z(R) = 1$ . Desviaciones de  $CP$  de este valor indicarían que MOND no es correcta.

Si bien el valor de  $\mu_R(R)$  se puede encontrar fácilmente siguiendo lo dicho en este Capítulo, estimar  $\mu_z$  es más complicado porque no tenemos acceso a observar directamente todas las variables que se necesitan en una

misma galaxia. Stubbs & Garg estimaron  $CP(R)$  entre  $R = 0$  y  $R = 10$  kpc para M33, tomando diferentes suposiciones para el valor desconocido de  $z_0$ , puesto que el grosor del disco no se puede observar de manera sencilla en M33 por su baja inclinación. Sólo pueden llegar hasta ese radio y no hasta  $\sim 20$  kpc porque la  $\sigma_z$  sólo ha sido deducida hasta ese punto. Conociendo la densidad superficial del disco  $\Sigma(R)$ , y la dispersión de velocidades  $\sigma_z$ , adoptando valores realistas para  $z_0$ , estimaron  $\mu_z(R)$  en M33 usando la fórmula anterior. Stubbs & Garg (2005) encuentran que  $CP$  varía enormemente en ese intervalo radial, va aumentando de manera monótona de  $CP = 0.2$  en las partes centrales de la galaxia, hasta 1.5 a radios de  $R \simeq 10$  kpc.

En el Capítulo 2 ya se discutió formalmente que no es correcto suponer que  $\mu_R = \mu_z$  porque eso implicaría asumir que  $\vec{g}_M$  y  $\vec{g}_N$  son paralelos, lo cual no es cierto en un disco. Por lo tanto, habría que incluir un término correctivo que incluyera este hecho para poder comparar  $\mu_R$  y  $\mu_z$ . Otra limitación que pone en tela de juicio los resultados de Stubbs & Garg es que la dispersión de velocidades vertical tampoco es un observable, sino que se debe inferir indirectamente. El valor de  $\sigma_z$  lo tomaron de un artículo en el que observan la dispersión de velocidades de las nebulosas planetarias a lo largo de la línea de visión y a través de argumentos de estabilidad dan una cota inferior para  $\sigma_z$ . El error asociado a  $\sigma_z$  es suficientemente grande como para justificar las diferencias entre los valores inferidos de  $CP$  y el esperado. Si bien la dinámica en la dirección vertical puede ser relevante para verificar si MOND es una teoría correcta, concluimos que no hay ninguna evidencia proveniente de estudios de este tipo que contradiga MOND. Más bien, los trabajos realizados en esta dirección para nuestra Galaxia sugieren lo contrario (Famaey & Binney 2004; Sánchez-Salcedo et al. 2008; McGaugh 2008).

---

# 4

## La galaxia NGC 4605

En el Capítulo anterior estudiamos la curva de rotación de M33. Nos enfocamos principalmente en ver si MOND podía explicar la amplitud de la velocidad de rotación en las partes más externas, con una  $M/L$  para el disco estelar razonable. Consideramos sólo las partes más externas porque allí se hace más evidente la discrepancia entre Newton (sin materia oscura) y MOND. Esta ha sido la filosofía de todos los trabajos sobre MOND en galaxias espirales. Por ejemplo, en los trabajos más conocidos sobre MOND, Begeman et al. (1991), Sanders (1996) y, más recientemente, Sanders & Noordermeer (2007) y Milgrom & Sanders (2008), se centran en ver si MOND es capaz de explicar la dinámica en las regiones en las que la aceleración es  $< a_0$ . Existen otras razones técnicas por las que se suele ignorar el estudio de las regiones centrales. Por ejemplo, en el caso de observaciones de HI,

hay efectos de “beam smearing”<sup>1</sup> en las regiones internas, que hacen que se disminuya de manera artificial gradientes en las curvas de rotación. Además, el ajuste en esta zona es muy sensible a la incertidumbre en la relación  $M/L$  del disco estelar. Por último, en las partes centrales de las galaxias es donde el gas está dinámicamente más perturbado por posible barras, brazos espirales y regiones de formación estelar que producen cascarones de gas en expansión. Esto hace que no sea fácil derivar de manera sencilla la curva de rotación puesto que hay que “eliminar” los movimientos no circulares del gas.

Sin embargo, la situación ha cambiado en los últimos 10 años. La llamada crisis del modelo estándar, esto es, la evidencia de que los halos de las galaxias necesitan un núcleo de densidad aproximadamente constante (core) para explicar las curvas de rotación en oposición a lo que se obtiene en las simulaciones cosmológicas, ha motivado el análisis detallado de la dinámica de las partes internas de las galaxias espirales. Nos hacemos las siguientes preguntas: ¿Qué nos dice la dinámica de las partes internas de las galaxias sobre MOND? ¿Es compatible ésta dinámica con MOND?

Supongamos que existiera una galaxia enana con un brillo superficial bastante alto. Si tiene brillo superficial alto, uno espera que tenga una densidad superficial también alta, es decir, que la velocidad circular sea mayor que otra galaxia con brillo más bajo. Si es una galaxia ‘pequeña’ significa que estamos considerando valores de  $R$  relativamente pequeños. Como la aceleración característica es  $v_c^2/R$  esperamos que, en esa hipotética galaxia, el régimen de aceleraciones sea Newtoniano. Más específicamente, la aceleración característica para esta galaxia se espera que sea alta, puesto que es del orden de  $\sim G\Sigma$ . Si MOND es la teoría correcta, no debemos esperar discrepancia entre MOND y Newton, o, dicho en términos de materia oscura, MOND predice que esta galaxia no deberá requerir materia oscura para

---

<sup>1</sup>Debido a que el haz tiene una anchura finita, se produce un suavizamiento de los gradientes por falta de resolución espacial. En inglés, este efecto se conoce por ‘beam smearing’.

explicar su dinámica. Para ver si esto es realmente una predicción, nos dimos a la tarea de buscar alguna galaxia cuya aceleración interna fuera la mayor posible (comparada con  $a_0$ ) y que, a su vez, contara con datos de su curva de rotación y fotométricos de buena resolución. No tardamos en encontrar una muestra de 4 galaxias con estas características. En esta tesis sólo tomaremos una de ellas, NGC 4605, aunque planeamos hacer un estudio similar para las tres restantes.

## 4.1. Características relevantes de la galaxia NGC 4605

### 4.1.1. Propiedades generales

NGC 4605 fue clasificada como una galaxia enana de tipo SBc. Sin embargo, estudios posteriores de mayor precisión no han mostrado la existencia de barra alguna (Simon et al. 2002). Se estima que esta galaxia está a una distancia de  $\sim 4.6$  Mpc según Karachentsev & Tikhonov (1994) y  $4.26 \pm 0.64$  Mpc según Pierce (2001). Tiene un tamaño de  $R_{25} \sim 3'$  (3.6 kpc), y una magnitud absoluta corregida por extinción de  $M_B = -18.10$ , similar a la magnitud y al tamaño de la Gran Nube de Magallanes (LMC) –posteriormente, usaremos este hecho–. El brillo superficial central es de  $\mu_B = 21$  mag arcsec $^{-2}$ , por lo que se puede considerar que es de alto brillo superficial. Debido a su bajo brillo para radios  $> 2.3$  kpc, estos valores de tamaño y luminosidad confirman que NGC 4605 es efectivamente una galaxia enana.

Presenta una inclinación de  $i \sim 69^\circ$ , un ángulo suficiente como para tener una buena determinación de la curva de rotación. El ancho de línea de HI corregido por inclinación al 20 % de intensidad máxima,  $W_{20}$ , es de  $\approx 198$  km s $^{-1}$  (Bottinelli et al. 1985), el cual es de nuevo similar al de LMC. Para galaxias con una curva de rotación ascendente, como es el caso de NGC 4605, este valor se considera como un límite inferior al doble de

la velocidad máxima de rotación. A continuación pasaremos a describir la curva de rotación con mayor detalle.

### 4.1.2. Curva de rotación

Las primeras observaciones de la curva de rotación en HI de NGC 4605 fueron reportadas por Rubin et al. (1980). No aparecieron más datos sobre esta galaxia hasta Bolatto et al. (2002), donde dieron observaciones en CO, HI y H $\alpha$ . Una de las razones para incluir esta galaxia en la tesis es que contamos con datos de buena resolución en las tres bandas arriba mencionadas (resoluciones de  $\sim 100$  pc para el CO, y  $\sim 60$  pc para H $\alpha$ ). Debemos destacar que lo ideal es combinar observaciones en las tres longitudes de onda puesto que ninguna está exenta de problemas. Por ejemplo, uno de los problemas potenciales de tomar sólo las observaciones de H $\alpha$  son los efectos debido a la extinción y la expansión de las regiones HII que pueden ser importantes cuando se observan las regiones centrales donde hay formación estelar. La curva de rotación combinada se muestra en la Fig. 4.1. Vemos que hay un cambio en la pendiente de la curva de rotación a una distancia galactocéntrica de  $\sim 1$  kpc. Además, en las partes más externas observadas, parece que la curva de rotación siguiera ascendiendo. En otras palabras, no está clara cuál es la velocidad de rotación asintótica para esta galaxia.

De la muestra de Simon et al. (2005), NGC 4605 es la que muestra más claramente desviaciones de axisimetría. Se observan estas desviaciones tanto fotométricamente como cinemáticamente. En las imágenes ópticas de banda ancha, esta galaxia presenta una elongación desplazada del núcleo. Esta componente elíptica persiste en la banda K, aunque es cada vez más débil conforme nos movemos a longitudes de onda más largas. Ya que esta asimetría aparece también en H $\alpha$  y CO, Simon et al. (2005) concluyen que debe estar asociada a formación estelar reciente. Simon et al. (2005) estiman que la velocidad no circular radial para esta galaxia aumenta linealmente con el radio hasta alcanzar un valor de  $\sim 8$  km s $^{-1}$  a 20'' ( $\sim 0.4$  kpc), para luego mantenerse constante hasta 80'' ( $\sim 1.7$  kpc). Simon et al. (2005)

determinaron cuán sensible es la curva de rotación a cambios en la elipticidad de las isofotas y en la inclinación de la galaxia y encontraron que la curva de rotación se modificaba bastante poco (ver Sección 3.5.1 de Simon et al. 2005). Ya que las otras galaxias de la muestra de Simon et al. (2005) presentan velocidades radiales menores, el estudio que planeamos hacer para las otras tres galaxias será de gran importancia para estar seguros de que, en efecto, nuestras conclusiones para NGC 4605 son sólidas.

### 4.1.3. Componente estelar

Simon et al. (2005) observaron la galaxia NGC 4605 en los filtros B, V, R, e I con el telescopio Perkins de 1.8 m en el Observatorio Lowell. También tomaron para su estudio las imágenes en el infrarrojo en las bandas H, J y K del Two Micron All Sky Survey (2MASS). Estudiaron el centro, ángulo de posición y elipticidad de las isofotas para cada longitud de onda. Posteriormente promediaron los valores en todas las longitudes de onda para dar el perfil del brillo del disco. Se encontró un ángulo de posición para NGC 4605 de  $119^{\circ}$ , una inclinación de  $71.5^{\circ}$  y una elipticidad de 0.63. Una vez que se tiene el perfil de brillo superficial en cada banda, se puede calcular la contribución de la componente estelar a la curva de rotación suponiendo una cierta  $M/L$  en esa banda.

A lo largo de toda la tesis hemos considerado siempre la  $M/L$  del disco estelar como un parámetro que se deja libre hasta encontrar el mejor ajuste a la curva de rotación observada. Se habla de ajuste de “disco máximo” cuando, en vez de dejarlo libre, se toma el mayor valor de  $M/L$  compatible con la curva de rotación. Podría ocurrir que la  $M/L$  inferida en el ajuste de disco máximo fuera un valor mayor (o menor) al esperado para una población estelar “normal” (en general, entendemos que, por ejemplo, los valores de  $M/L_B$  son normales cuando se encuentran entre 0.6 y 3.0). Sin embargo, se puede ir más allá; usando modelos de síntesis de población estelar, Bell & de Jong (2001) mostraron que hay una correlación entre el índice de color de una galaxia y la  $M/L$  del disco estelar. En ese caso, si disponemos de

índices de color para una galaxia, la  $M/L$  ya deja de ser un parámetro libre. Esta forma de proceder es crucial puesto que se elimina el que era el único parámetro libre en MOND!

Para el caso de NGC 4605, disponemos de los índices de color  $B - V$  y  $B - R$ . Con los índices de color observados y usando las relaciones color- $M/L$  de Bell et al. (2003), se pueden estimar, por ejemplo, los valores esperados para  $M/L_R$  y  $M/L_K$ . De los modelos de síntesis de población estelar de Bell et al. (2003) y usando el índice de color observado en NGC 4605,  $B - V = 0.45$ , se obtienen los siguientes valores  $M/L_R = 0.94$  y  $M/L_K = 0.72$  en unidades solares. Ahora bien, si se usa el otro índice de color,  $B - R = 0.82$ , los modelos predicen valores ligeramente diferentes,  $M/L_R = 1.09$  y  $M/L_K = 0.71$ , que reflejan que los modelos tienen ciertas incertidumbres, pero a su vez nos dan una idea del error asociado.

Es lógico preguntarse si estos valores inferidos a partir de modelos de síntesis de población estelar son compatibles con la dinámica de esta galaxia, es decir, ¿son las  $M/L$  obtenidas menores a las inferidas bajo la hipótesis de disco máximo? Si no fueran menores entonces deberíamos sospechar o de los modelos de síntesis de poblaciones o de la correcta derivación de la curva de rotación. Simon et al. (2005) derivaron la  $M/L$  bajo la hipótesis de disco máximo. La definición operacional de cómo encontrar la  $M/L$  suponiendo disco máximo varía dependiendo de los autores. Simon et al. encontraron la  $M/L$  del disco máximo aumentando paulatinamente la  $M/L$  del disco hasta que la curva de rotación estelar excede la observada en los cinco primeros puntos observados. Con este procedimiento, Simon et al. (2005) encuentran un valor para la  $M/L$  bajo la hipótesis de disco máximo de  $M/L_R = 1.36$  en unidades solares, que es mayor al valor predicho por los modelos de síntesis de población. Por lo tanto, no hay inconsistencia alguna entre los valores de  $M/L_R$  inferidos de los índices de color con la cota máxima inferida dinámicamente.

Al igual que hicieron Simon et al. (2005) cuando estudiaron la forma del perfil de densidad del halo de materia oscura en esta galaxia, tomaremos una  $M/L_R = 1.01$ , que no es más que el promedio entre el valor predicho por los modelos de síntesis en las dos bandas anteriormente mencionadas. Nótese que en todo su análisis, Simon et al. (2005) dejan fijo el valor de  $M/L_R$ , lo cual simplifica mucho el análisis del problema.

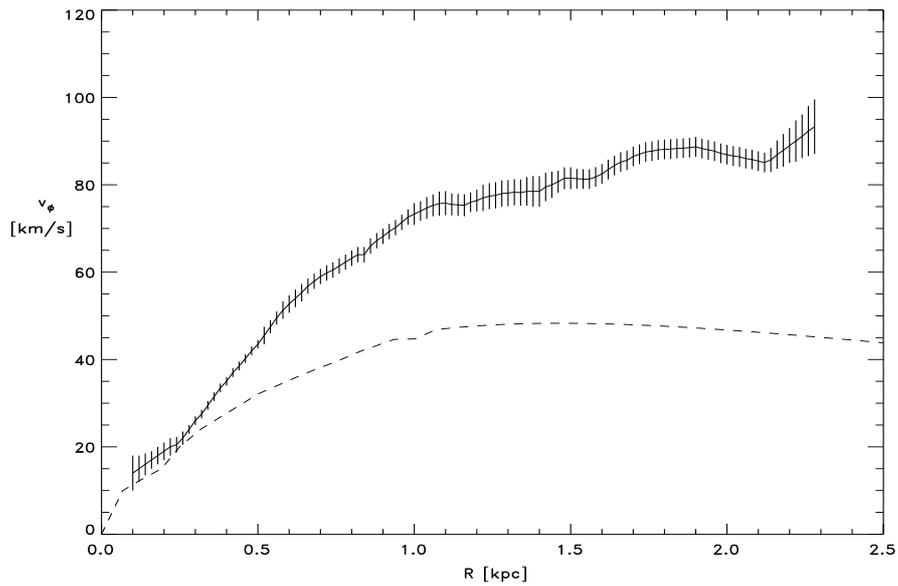


Figura 4.1: La línea continua muestra la curva de rotación observada de NGC 4605. Las barras verticales representan las incertidumbres en la velocidad de rotación. La curva discontinua representa la contribución Newtoniana a la curva de rotación para  $M/L_R = 1.01$ .

En la Figura 4.1 presentamos la curva de rotación obtenida por Simon et al. (2005) junto a la contribución (Newtoniana) del disco para una  $M/L_R = 1.01$ , la sugerida de acuerdo a los índices de color. Claramente vemos que, o bien necesitamos que haya un halo de materia oscura, o bien necesitamos cambiar la ley de gravitación para explicar la curva de rotación observada.

## 4.2. MOND en NGC 4605

### 4.2.1. Curvas predichas para diferentes valores de la $M/L_R$

En el disco tenemos una componente estelar y una componente gaseosa, principalmente de gas neutro, gas molecular y gas ionizado. Es bien sabido que la contribución a la masa del gas ionizado se puede despreciar. Desafortunadamente, para esta galaxia no se tienen datos fiables de la densidad superficial de HI, por lo que su contribución a la curva de rotación se ignorará a lo largo de este estudio. Sin embargo, para este tipo de galaxias, el disco estelar siempre contribuye mucho más que el gas y el efecto de incluir el gas correspondería a un cambio del 20 % en la  $M/L$  del disco bariónico.

Fijada la  $M/L_R = 1.01$ , ya conocemos la contribución Newtoniana del disco estelar a la curva de rotación. Si suponemos que no hay materia oscura como predica MOND y que  $a_0 = 10^{-8} \text{ cm s}^{-2}$ , entonces ya podemos calcular la curva predicha por MOND; no quedan parámetros libres en MOND, excepto las incertidumbres en distancia y en inclinación de la galaxia.

En la Figura 4.2 presentamos la predicción de MOND para esta galaxia si se usa el valor más probable de la  $M/L_R$  estelar (discutido en la Sección anterior). Vemos que el aumento en la fuerza que se introduce en MOND no es suficiente para poder reproducir la curva de rotación observada. La diferencia es de  $\sim 20 \text{ km s}^{-1}$  en un rango de distancias galactocéntricas considerable, de  $R = 0.5 \text{ kpc}$  hasta  $R = 2.2 \text{ kpc}$ . Obviamente, no se puede atribuir el fracaso de MOND a los errores observacionales en la determinación de la curva de rotación. MOND predice una velocidad máxima de  $65 \text{ km s}^{-1}$ , mucho menor a la observada  $\sim 90 \text{ km s}^{-1}$ . Es interesante percatarse de que MOND sólo es capaz de aumentar la velocidad de rotación respecto a la Newtoniana en  $10\text{--}15 \text{ km s}^{-1}$  debido a que, como ya dijimos, las aceleraciones para esta galaxia son comparables a  $a_0$ . Esta fue una de las razones por las que elegimos esta galaxia.

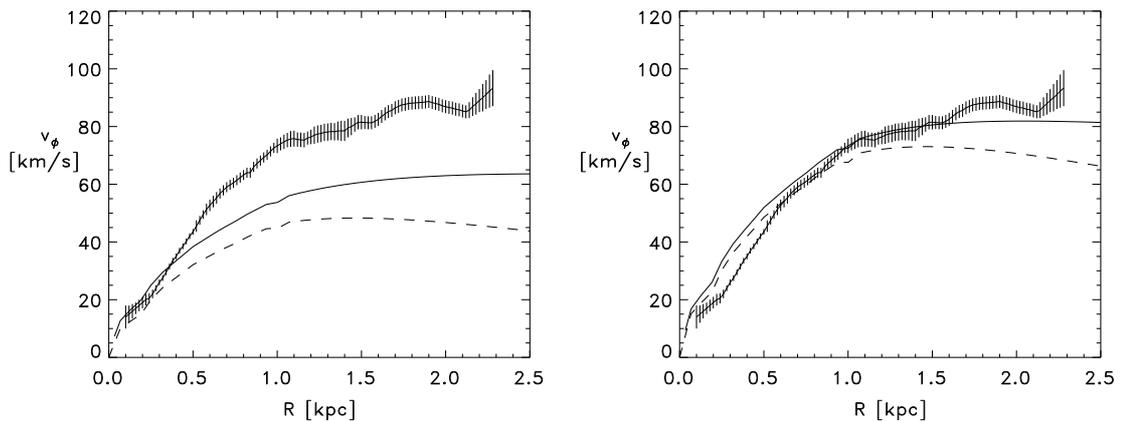


Figura 4.2: Comparación de las curvas de rotación para una  $M/L_R = 1.01$  (panel de la izquierda) y para  $M/L_R = 2.31$  (panel de la derecha). En ambos casos usamos la función de interpolación estándar.

A continuación buscamos el valor de la  $M/L_R$  del disco que necesitamos en MOND para explicar la amplitud observada de la curva de rotación. En la Figura 4.2 mostramos el mejor ajuste a la curva de rotación dejando la  $M/L_R$  como un parámetro libre. Obtuvimos una  $M/L_R = 2.31$  en unidades solares. Este valor es mayor al valor de disco máximo ( $M/L_R = 1.36$ ). Este resultado, de que nuestro valor encontrado con el mejor ajuste es mayor al de disco máximo no es una contradicción como veremos a continuación. En efecto, nosotros hemos buscado el mejor ajuste global a la curva de rotación sin importar qué ocurre a  $R$  pequeños. Vemos que la curva de rotación predicha por MOND en este caso sobreestima la curva de rotación a radios  $R < 1$  kpc, por lo tanto, el valor de la  $M/L_R$  es mayor al que se obtiene bajo la suposición de disco máximo. Lógicamente, esta contribución excesiva del disco en las partes internas es preocupante. De hecho, hay algunos autores que argumentan que el disco no debe contribuir más que el 84% a la curva de rotación a una distancia de 2.2 escalas del disco (allí es donde la curva de rotación del disco tiene el máximo). En nuestro caso, el mejor ajuste de MOND necesita que a ese radio el disco contribuya con un 91%.

Tomando el mejor ajuste, MOND predice que la velocidad asintótica tiene que ser de  $80 \text{ km s}^{-1}$ . Este valor difiere drásticamente del valor que se tiene para el caso del mejor modelo de materia oscura ( $109 \text{ km s}^{-1}$ ) estudiado por Simon et al. (2005). Eso significa que si se tuvieran observaciones de la curva de rotación a radios mayores, a 5 kpc por ejemplo, se podría poner a prueba tanto MOND como el modelo de materia oscura. Desafortunadamente, en la literatura no se ha reportado ningún valor para la velocidad de rotación a distancias mayores de 2.5 kpc para NGC 4605.

McGaugh (2005) a partir de un estudio estadístico para una muestra de galaxias concluye que hay una correlación muy estrecha entre la masa bariónica en el disco  $M_d$  y la velocidad asintótica  $v_a$ . Esta relación se expresa de la siguiente manera  $M_d = 50v_a^4$ , donde  $v_a$  se debe expresar en  $\text{km s}^{-1}$  y  $M_d$  resulta en  $M_\odot$ . Si aplicamos esa fórmula con  $v_a = 80 \text{ km s}^{-1}$  se obtiene que  $M_d = 2 \times 10^9 M_\odot$ . Sin embargo, MOND necesita una  $M_d = 3.1 \times 10^9 M_\odot$ . Esta galaxia no satisfecería esa correlación.

Valores  $M/L_R > 1.5$ , como el requerido en el mejor ajuste con MOND, son muy difíciles de justificar de acuerdo a los modelos convencionales de síntesis de población estelar. En particular, el valor requerido por MOND de  $M/L_R = 2.31$  sólo se podría explicar introduciendo una serie de cambios dramáticos en la función inicial de masas, pero habría que explicar por qué esta galaxia se comporta de manera tan diferente a lo esperado, puesto que no tiene ninguna propiedad que la haga tan particular. Una posible solución menos radical con la física convencional sería decir que, por alguna razón, esta galaxia tiene también una componente de materia oscura. Lógicamente, el tener que suponer que esta galaxia necesita materia oscura no descarta a MOND como teoría fundamental de la naturaleza pero le quita credibilidad. El punto más atractivo de MOND es poder explicar la dinámica de los objetos galácticos sin materia oscura. Esta galaxia espiral pone en entredicho esta explicación.

Aún suponiendo que una  $M/L_R = 2.31$  no se pudiera descartar, el ajuste obtenido no es malo, pero tampoco es muy preciso. Para cercionarnos de la calidad del ajuste, en la Figura 4.3 mostramos que un ajuste similar se puede obtener con gravedad Newtoniana y *sin materia oscura*. En efecto, una  $M/L_R = 2.9$  podría explicar la curva de rotación observada sin invocar ni materia oscura ni MOND, con la misma calidad que lo hace MOND. Por lo tanto, se podría decir que, si permitimos valores  $M/L_R$  cualesquiera, entonces, podríamos concluir que un modelo Newtoniano sin materia oscura es tan exitoso como MOND.

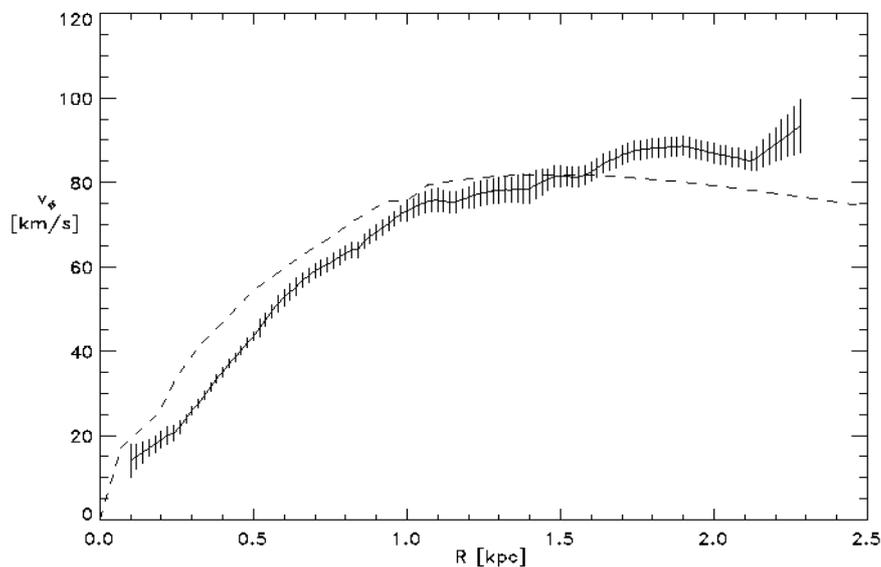


Figura 4.3: Curva de rotación para la galaxia enana NGC 4605. La curva punteada representa la curva de rotación para un disco según la dinámica Newtoniana para una  $M/L_R = 2.9$  y sin materia oscura.

#### 4.2.2. Incertidumbres en la distancia de NGC 4605

Exploramos el efecto de cambiar la distancia aparente a la galaxia e intentamos averiguar si bajo cambios en la distancia se puede explicar la forma de la curva de rotación con una  $M/L_R$  más próxima al valor esperado.

En el Capítulo III ya se explicó cuál es el efecto de variar la distancia. La distancia estándar a la galaxia NGC 4605 que hemos supuesto hasta ahora es de 1.46 Mpc. La Fig. 4.4 muestra los ajustes que se obtienen si se duplica la distancia a la galaxia y si se reduce a la mitad. Vemos que necesitamos duplicar la distancia supuesta de la galaxia para obtener una  $M/L_R = 1.65$ , la cual todavía resulta grande. Una reducción de la distancia va en la dirección no deseada, es decir, necesitamos una  $M/L_R$  mayor (de 2.7) y además el ajuste global es de peor calidad al disminuir la distancia.

Teniendo en cuenta que la incertidumbre típica en la distancia es  $< 30\%$ , concluimos que la incertidumbre en la distancia no es una solución plausible para explicar la diferencia entre la curva observada y la predicha en MOND.

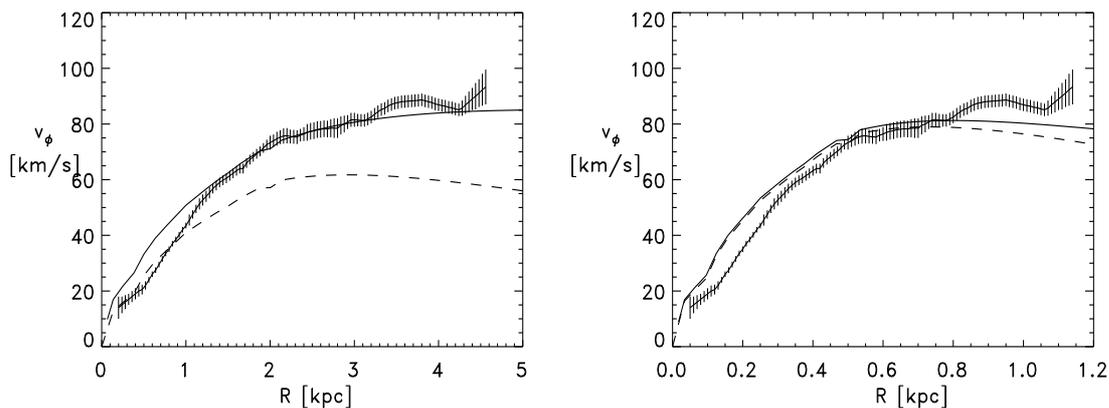


Figura 4.4: Comparación del ajuste obtenido al variar la distancia de la galaxia. En la gráfica de la izquierda se ha tomado el doble de la distancia estándar y una  $M/L_R = 1.65$ . Para la gráfica de la derecha se ha tomado la mitad de la distancia estándar y una  $M/L_R = 2.7$ . En ambas se ha usado la función de interpolación estándar.

### 4.2.3. Variaciones de $a_0$

Hemos explorado también cuál tendría que ser el valor de  $a_0$  para que se pudiera explicar la curva de rotación observada con una  $M/L_R$  razonable. Como ya hemos discutido, el valor de  $a_0$  se ha ido fijando con el tiempo conforme se analizaban las curvas de rotación de otras galaxias, así que queda

muy poca libertad en  $a_0$ . Obtuvimos que, en efecto, es matemáticamente posible explicar aceptablemente (aunque no de manera precisa) la curva de rotación con una  $M/L_R = 0.65$ , pero para ello tuvimos que aumentar  $a_0$  por un factor de casi  $\sim 7$  (ver Figura 4.5). Ciertamente, necesitamos que NGC 4605 esté en un régimen de MOND “profundo” y ello se consigue aumentando  $a_0$ . Las observaciones de la dinámica de otras galaxias no permiten un valor de  $a_0$  como el requerido.

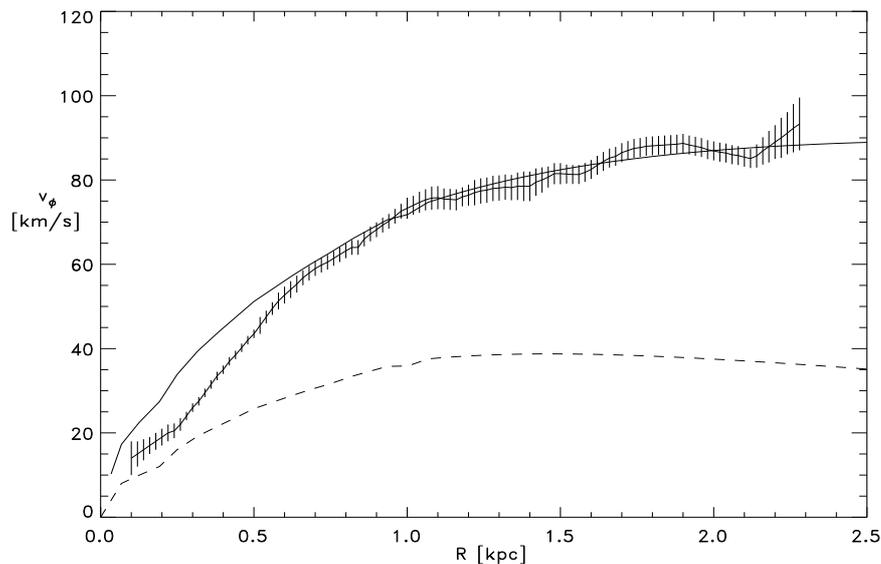


Figura 4.5: Curva de rotación predicha por MOND con  $a_0 = 6.6 \times 10^{-8} \text{ cm s}^{-2}$  y usando la función de interpolación estándar para una  $M/L_R = 0.65$ . La línea discontinua muestra la contribución Newtoniana del disco.

#### 4.2.4. La forma de la función de interpolación

Todas las curvas de rotación anteriores fueron calculadas con la función de interpolación estándar propuesta por Milgrom (1983). Como ya vimos, recientemente se ha visto del análisis de las curvas de rotación de las galaxias espirales y de la Vía Láctea que la función de interpolación de Famaey & Binney  $\mu(x) = x/(1+x)$  es más ventajosa. Como ya discutimos,

que la función de interpolación de Famaey & Binney sea más ventajosa no significa que se puede descartar la estándar como función de interpolación. De hecho, lo que debemos entender es que, cualquier función de interpolación intermedia entre la estándar y la de Famaey & Binney es aceptable.

En la Fig. 4.6 vemos el ajuste a la curva de rotación dejando la  $M/L_R$  como parámetro libre, para la función de interpolación de Famaey and Binney. Derivamos una  $M/L_R = 1.58$ , que es menor a la que se necesitaba para la función de interpolación estándar. Para poder comparar, mostramos en la misma figura cuál sería la curva de rotación según MOND para la función de interpolación estándar y la misma  $M/L_R = 1.58$ . En resumen, ya que los modelos de síntesis de poblaciones indican que el valor de  $M/L_R$  es alrededor de 1, llegamos a la conclusión de que la función de interpolación de Famaey & Binney también es favorecida en este estudio. Por lo tanto, en lo que resta del Capítulo usaremos prioritariamente la función de interpolación de Famaey & Binney. Sin embargo, debemos hacer notar que la calidad del mejor ajuste, dejando la  $M/L_R$  libre, es la misma para ambas funciones de interpolación (compárense Figs. 4.2 y 4.6).

### 4.3. La estabilidad del disco de NGC 4605 en MOND: Cotas a la $M/L$

Ya se ha discutido que hay varias formas de derivar el cociente  $M/L$  para el disco estelar. Con gran frecuencia se observa en la literatura que tanto en el escenario de materia oscura como en MOND, se deja  $M/L$  del disco como un parámetro libre que se le asigna un valor al tomar el mejor ajuste estadístico a la curva de rotación. Sólo recientemente se está procediendo de manera un tanto diferente: se estima la  $M/L$  a partir de los modelos de síntesis de población. Una de las cuestiones que algunos investigadores han puesto de relieve es que la  $M/L$  inferida del mejor ajuste a la curva de rotación no tiene por qué ser compatible con la dinámica interna. Esto es, hay una restricción dinámica a los posibles valores que puede tomar la  $M/L$  ya que el disco debe

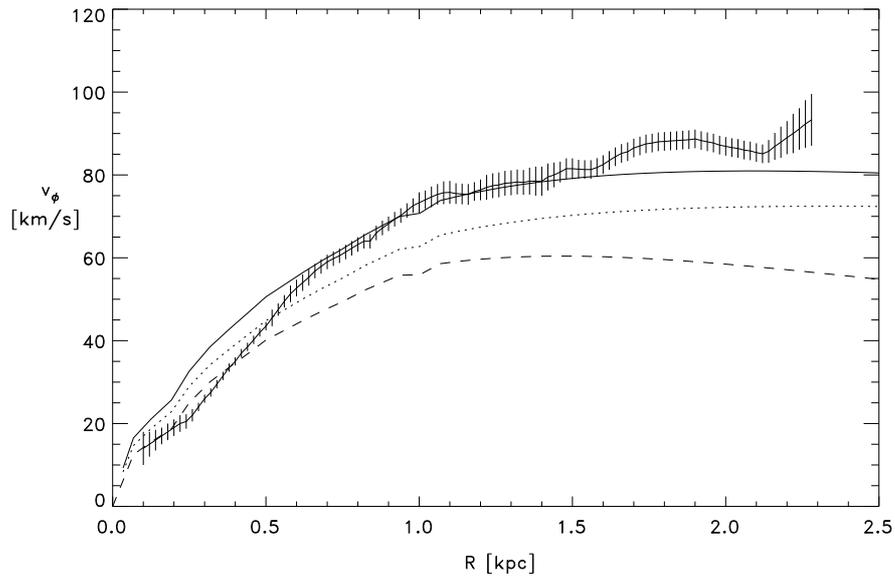


Figura 4.6: Curvas de rotación para una  $M/L_R = 1.58$  con la función de interpolación de Famaey & Binney (curva continua), y con la estándar (curva punteada). La curva discontinua representa la contribución estelar (usando la dinámica Newtoniana).

satisfacer que sea gravitacionalmente estable. En efecto, una  $M/L$  grande implica mucha masa en el disco y que sea inestable gravitacionalmente. Una galaxia que no presenta ni brazos espirales, ni barra, y una tasa de formación estelar “normal”, claramente nos está indicando que es gravitacionalmente estable. De lo contrario, observaríamos los efectos de la inestabilidad. Lo que aquí se propone es ver si la  $M/L_R$  requerida en MOND para explicar la curva de rotación es compatible con los requerimientos de estabilidad.

En particular, en el caso que nos ocupa, las características tanto globales como locales de NGC 4605 nos indican que es gravitacionalmente estable. ¿Qué implicaciones tiene el imponer que es gravitacionalmente estable? En lo que sigue vamos a intentar responder a esta pregunta.

### 4.3.1. El parámetro de Toomre

Para entender la inestabilidad gravitacional en un disco en rotación debemos primero recordar el caso más simple y familiar: la inestabilidad gravitacional de Jeans, que aparece en un medio homogéneo e infinito a temperatura  $T$ . Supongamos que en ese medio aumentamos ligeramente la densidad en un lugar. Este aumento llevará asociado un aumento en la fuerza gravitacional local, pero también un aumento en la presión que se opondrá a la fuerza gravitacional atractiva que intenta colapsar a la región perturbada. Del análisis lineal que hizo Jeans se encuentra que todos los modos con longitudes de onda:

$$\lambda > \lambda_J \equiv \left( \frac{\pi c_s^2}{G\rho} \right)^{1/2}, \quad (4.1)$$

son inestables y colapsarán. Hemos denotado por  $\rho$  la densidad del medio y  $c_s$  la velocidad del sonido. Esto es, para perturbaciones de gran longitud de onda, la gravedad gana a la fuerza de presión. A escalas menores de la de Jeans  $\lambda < \lambda_J$  la presión es capaz de contrarrestar la fuerza gravitacional y así tener estabilidad.

En vez de un medio homogéneo e infinito queremos estudiar la estabilidad cuando hacemos una perturbación a un disco autogravitante y en rotación. El problema es más complicado porque además de la fuerza de presión y de la fuerza de gravedad hay otros efectos debido a la rotación. Toomre (1964) hizo el estudio de la estabilidad de un disco infinitesimalmente delgado y encontró que hay un parámetro, llamado desde entonces el parámetro de Toomre, que mide el grado de estabilidad de un disco infinitesimalmente delgado.

Como en la inestabilidad de Jeans, se espera que a escalas suficientemente pequeñas, la naturaleza expansiva de la presión sea capaz de oponerse a la fuerza atractiva de la gravedad y por lo tanto que el disco sea siempre estable si hacemos perturbaciones con una longitud de onda por debajo de una cierta longitud de onda mínima  $\lambda_{\min}$ . Sin embargo, la rotación introduce un cambio conceptual respecto a la inestabilidad de Jeans. En efecto, supongamos que

queremos hacer colapsar una cierta región relativamente grande en un disco. La región que estamos intentando comprimir tenderá a conservar el momento angular respecto a su centro. Por lo tanto, como el momento angular se debe conservar, se refleja en que esencialmente tendremos una fuerza centrífuga hacia afuera que intenta compensar el incremento en la fuerza gravitacional. El estudio de Toomre refleja claramente que la rotación del disco contribuye a dar estabilidad a escalas (longitudes de onda) grandes, por encima de una cierta longitud de onda máxima  $\lambda_{\max}$ . Por lo tanto, hay inestabilidad si  $\lambda_{\min} < \lambda_{\max}$ , es decir, si hay un rango de valores para  $\lambda$  que no son estables ni por el efecto “recuperador” de la presión ni por el de la rotación del disco. Cuando se tiene que  $\lambda_{\min} > \lambda_{\max}$ , el disco es estable para cualquier perturbación, sea de la longitud de onda que sea.

Toomre (1964) encontró un parámetro,  $Q$ , para un disco *estelar* delgado y en dinámica Newtoniana, que nos dice si hay alguna longitud inestable (recomendamos la Sección 5.3.1 de Binney & Tremaine 1987). El parámetro de Toomre  $Q$  para un disco estelar se define así:

$$Q = \frac{\sigma_R \kappa}{3.36 G \Sigma}, \quad (4.2)$$

donde, como habitualmente,  $\sigma_R$  es la dispersión de velocidades radial,  $\Sigma$  la densidad estelar del disco,  $G$  la constante de gravedad de Newton y  $\kappa$  la frecuencia radial que se puede expresar como:

$$\kappa^2 = \left( R \frac{d\Omega^2}{dR} + 4\Omega^2 \right), \quad (4.3)$$

donde  $\Omega \equiv v_c/R$  es la velocidad angular del disco. Debemos notar que todas las variables ( $Q$ ,  $\Sigma$ ,  $\sigma_R$ ,  $\Omega$ ) dependen en general del radio  $R$ . Se tiene que el disco es localmente inestable para ciertas longitudes de onda si y sólo si  $Q < 1$ , y es estable para cualquier longitud de onda si  $Q > 1$ .

Milgrom (1989) derivó el parámetro  $Q$  bajo las mismas premisas que Toomre pero para el caso de MOND. La expresión es muy parecida a la del caso Newtoniano:

$$Q = \mu^+ \frac{\sigma_R \kappa}{3.36 G \Sigma}, \quad (4.4)$$

donde  $\mu^+$  es la función de interpolación evaluada en  $(R, z^+)$ . Por  $z^+$  entendemos que es el valor de  $\mu$  justo por encima del disco, es decir a  $z \rightarrow 0$ , que es diferente al valor que tiene a  $z = 0$  si el disco es infinitesimalmente delgado. A efectos prácticos el valor de  $\mu^+$  se estimará evaluando  $\mu$  en  $(g_R^2 + g_z^2)^{1/2}/a_0$ , con  $g_z$  la aceleración en  $z \rightarrow 0$ .

### 4.3.2. El valor esperado de $Q$ en galaxias espirales

De los estudios tanto numéricos como observacionales de galaxias, se ha visto que las galaxias espirales no pueden tomar valores arbitrarios de  $Q$ . El valor de  $Q$  está ligado con su tipo morfológico. La imagen cualitativa que tenemos es la siguiente. En las regiones en que una galaxia tenga un parámetro de Toomre  $Q \geq 1.8-2$  será estable y no presentará brazos espirales (ni siquiera barra si  $Q$  es mayor a 1.8 en las partes centrales). Sólo aquellas galaxias con valores de  $1.2 < Q < 1.5$  en sus partes centrales presentarán barras y brazos espirales debido a que, aunque son estables, la autogravedad del disco es suficiente para mantener cierta coherencia estructural a gran escala. Aquellas galaxias con valores de  $Q \sim 1.1-1.2$  pueden estar en una fase de estallido de formación estelar ('starburst'). Sin embargo, no hay galaxias con  $Q < 1.1$  puesto que antes de llegar a esta situación, los procesos internos responden rápidamente para tener siempre  $Q > 1$ . En efecto, los brazos espirales, por ejemplo, son un mecanismo para calentar al disco dinámicamente y poder conseguir que  $Q$  se mantenga en valores de  $\sim 1.4$ .

Como NGC 4605 no presenta barra ni brazos espirales, podemos suponer que  $Q > 1.5$ . Como ya hemos descrito en la Sección 4.1.2, NGC 4605 presenta desviaciones de la axisimetría pero parece que ha sido por alguna perturbación reciente. Si imponemos que  $Q > 1.6$  a lo largo de todo el disco podemos usar la Ec. (4.4) y encontrar una cota inferior a la dispersión de velocidades radial  $\sigma_R$  para que haya estabilidad gravitacional como exigen las observaciones. Esto lo haremos en la próxima Sección.

### 4.3.3. Cota inferior a la dispersión de velocidades radial

Como se ha justificado en la Sección anterior impongamos que  $Q > 1.6$ , por lo cual, de la ec. (4.4), se infiere que:

$$\sigma_R > 5.37 \frac{G\Sigma}{\kappa}. \quad (4.5)$$

Queremos derivar qué valores de  $\sigma_R$  necesitamos para ver qué tan realista es el valor de la  $M/L_R$  que obtuvimos en el ajuste de la curva de rotación con MOND. Podemos encontrar  $\kappa(R)$  a partir de la curva de rotación y la densidad superficial,  $\Sigma(R)$ , la cual podemos derivar fácilmente una vez que fijamos el valor de  $M/L_R = 1.58$ .

El valor de  $\kappa(R)$  lo hemos calculado de la siguiente manera. Para tener mayor consistencia con el modelo, hemos tomado la curva de rotación predicha por MOND con la función de interpolación de Famaey & Binney para el mejor ajuste, es decir,  $M/L_R = 1.58$ . No tomamos la observada para tener consistencia dentro del modelo. Para calcular  $\kappa$ , que como vimos depende de derivadas de  $\Omega$ , ajustamos la curva de rotación predicha con una función analítica que denotamos  $v_{\text{fit}}$ . Como mostramos en la Figura 4.7, excepto en la región  $R < 140$  pc, la diferencia entre la curva predicha y el ajuste analítico es menor a  $2 \text{ km s}^{-1}$ , que es más que suficiente para nuestros propósitos. El valor de  $\kappa$  en función de  $R$  se derivó usando  $v_{\text{fit}}$  en la Ec. (4.3).

En la Figura 4.8 se muestra el valor mínimo de la dispersión de velocidades radial en función del radio galactocéntrico para garantizar la estabilidad gravitacional. Se necesita una dispersión de velocidades radial central superior a  $45 \text{ km s}^{-1}$ , y tiene que ser mayor a  $30 \text{ km s}^{-1}$  en todo el intervalo radial  $R < 1.4 \text{ kpc}$ . En la próxima Sección discutiremos la plausibilidad de la dispersión de velocidades requerida.

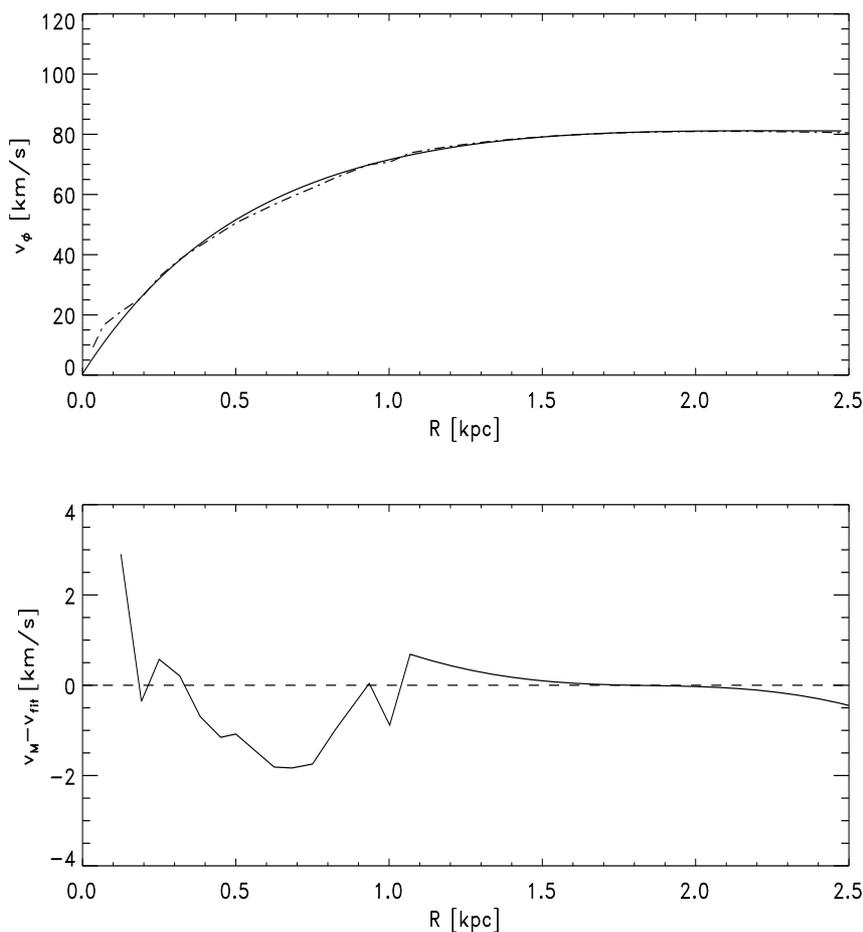


Figura 4.7: La gráfica muestra el ajuste a la curva de rotación predicha por MOND (usando la función de interpolación de Famaey and Binney y una  $M/L_R = 1.58$ ) con una función analítica. La gráfica inferior muestra la diferencia entre el valor real y el ajuste analítico.

#### 4.3.4. Verosimilitud de la dispersión de velocidades

Desafortunadamente, no existen observaciones de la dispersión de velocidades estelar para la galaxia NGC 4605. Sería de gran interés tener observaciones de la dispersión de velocidades para esta galaxia puesto que serviría como prueba de fuego de MOND. Hay que notar que debido a su alta inclinación, la dispersión de velocidades que se midiera sería un promedio a

lo largo de la línea de visión, por lo que no correspondería ni a  $\sigma_z$  ni a  $\sigma_R$ . Aún con esa dificultad intrínseca, animamos a observarla puesto que si se encontrara una dispersión de velocidades a lo largo de la línea de visión claramente por debajo de  $25 \text{ km s}^{-1}$  sería difícil de explicar para MOND.

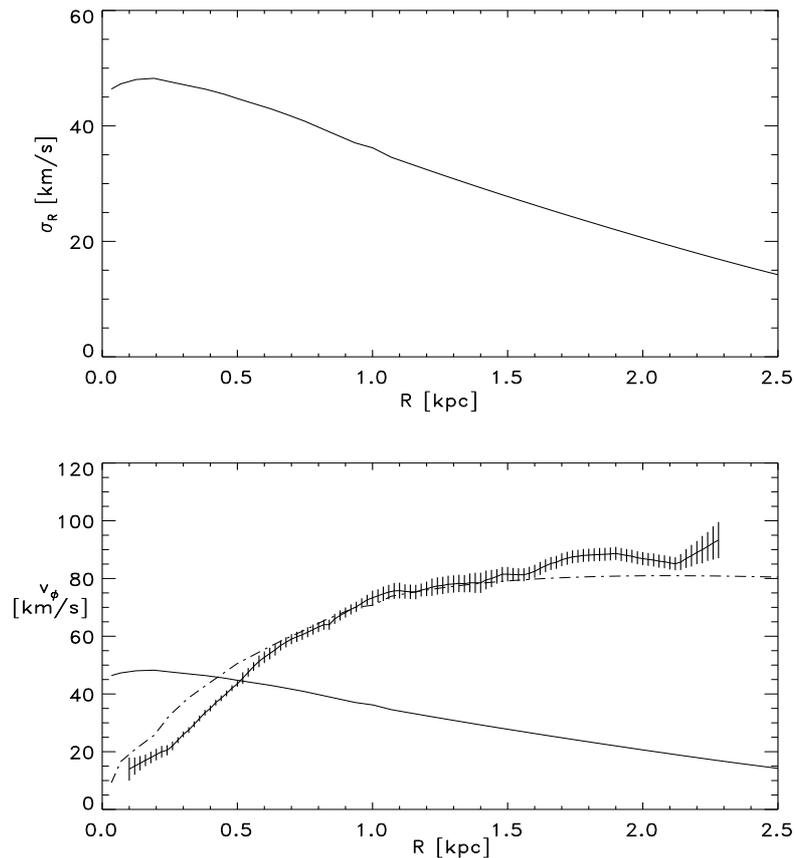


Figura 4.8: En el panel superior se muestra la dispersión de velocidades radial en función del radio galactocéntrico para asegurar estabilidad del disco ( $Q_M = 1.6$ ). En el panel inferior se compara el valor de la dispersión de velocidades inferida, con la curva de rotación. Se usó la función de interpolación de Famaey & Binney.

Ahora nos hacemos la siguiente pregunta: ¿Cuál es la dispersión de velocidades radial esperada para una galaxia como NGC 4605? Para contestar a esta pregunta vamos a usar dos caminos. El primero de ellos es usar la correlación encontrada por Bottema (1993) entre dispersión de velocidades

y magnitud en la banda  $B$ . El segundo es recopilar los datos de la dispersión de velocidades que se tengan para aquellas galaxias que sean lo más parecidas a NGC 4605.

Antes de pasar a estudiar la dispersión de velocidades para galaxias particulares debemos hacer un inciso aclaratorio. Las galaxias ideales para observar la dispersión de velocidades estelar son las vistas de cara porque así se evitan problemas de efectos de proyección que habría que modelar. Sin embargo, el problema es que la dispersión de velocidades que se encuentra no es la radial sino la vertical, es decir  $\sigma_z$ . En principio, la dispersión de velocidades radial y vertical son independientes. Depende de la naturaleza de los diferentes procesos de ‘calentamiento’ dinámico del disco estelar para que se pueda suponer que son comparables o, si el calentamiento es por ondas de densidad, la componente radial sea mayor que la vertical. En la vecindad solar se conocen muy bien las diferentes componentes y su evolución temporal, es decir,  $\sigma_R(t), \sigma_\phi(t), \sigma_z(t)$ . Para galaxias externas sólo se ha conseguido tener medidas de la dispersión de velocidades con buena precisión para medio centenar de galaxias.

En nuestra Galaxia, el cociente  $\sigma_z/\sigma_R \approx 0.7$ . Curiosamente, los modelos realizados en las cuatro galaxias tempranas estudiadas por Noordermeer et al. (2008) también sugieren valores de 0.7. Así pues, aunque no se puede descartar que para NGC 4605  $\sigma_z/\sigma_R$  pudiera ser mayor (incluso  $\approx 1$ ), tomaremos el valor más favorable  $\sigma_R = \sigma_z/0.7$ .

Bottema (1993) observó la dispersión de velocidades para una docena de galaxias entre  $-18.5$  y  $-22$  magnitudes en la banda  $B$ . Encontró una correlación entre  $\sigma_z$  y  $M_B$ , de manera que, conocida  $M_B$ , podemos predecir el valor de  $\sigma_z$  y, por lo tanto, de  $\sigma_R$ . Para una galaxia de  $M_B = -18.1$  como NGC 4605, la dispersión de velocidades (vertical) central sería de  $28 \text{ km s}^{-1}$ , con lo cual  $\sigma_R = 40 \text{ km s}^{-1}$ . Este valor está por debajo, aunque sólo ligeramente, del valor que necesitamos para tener estabilidad en NGC 4605 ( $\sigma_R \approx 46 \text{ km s}^{-1}$ ).

Además, Bottema (1993) encontró que si denotamos por  $v_{\max}$  a la velocidad de rotación máxima, entonces  $v_{\max}/\sigma_z$  toma valores entre 3 y 5 para las de más bajo brillo. De acuerdo con MOND, NGC 4605 tiene  $v_{\max} = 80 \text{ km s}^{-1}$ , por lo que  $\sigma_z$  debe estar en el rango de 16 y 27  $\text{km s}^{-1}$ ; esto equivale a  $\sigma_R = 23$  y 38.5  $\text{km s}^{-1}$ . De comparar con el trabajo de Bottema, concluimos que el valor requerido para garantizar estabilidad es bastante alto.

Desde el trabajo de Bottema (1993) se han observado con buena precisión la dispersión de velocidades central para otras galaxias de magnitud similar a la de NGC 4605. Tenemos constancia de cuatro galaxias con tales medidas: NGC 2552 (de tipo Sm, y  $M_B = -17.5$ ), NGC 4449 (de tipo Irr, y  $M_B = -18.2$ ), LMC (de tipo Im,  $M_B = -18.1$ ) y M33 (de tipo Sc,  $M_B = -18.6$ ). Sólo para NGC 4449 y M33, la dispersión de velocidades es de 29  $\text{km s}^{-1}$ , exactamente el esperado de acuerdo a la relación de Bottema. Para las otras dos galaxias, la dispersión de velocidades (central) vertical es de  $\sigma_z \simeq 20 \text{ km s}^{-1}$  (por lo que esperaríamos  $\sigma_R = 28.5 \text{ km s}^{-1}$ ). Todo apunta a que para las galaxias de magnitudes alrededor de  $-18$ , la relación de Bottema es una cota superior.

Si tomamos el caso más optimista y suponemos que NGC 4605 se comporta exactamente como NGC 4449, entonces, podemos usar el cociente  $v_{\max}/\sigma_z$  que encuentran Hunter et al. (2005) para esta galaxia,  $v_{\max}/\sigma_z = 3$ , donde  $\sigma_z$  representa el valor de la dispersión de velocidades en  $R \approx 0$ . Si eso es cierto, esperamos que NGC 4605 tenga una dispersión de velocidades central  $\sigma_R \simeq 38.5 \text{ km s}^{-1}$ .

Hunter et al. (2005) encuentran que para NGC 4449, la velocidad circular del gas a 1.3 escalas del disco es 32  $\text{km s}^{-1}$  mientras que la dispersión de velocidades vertical es de 19  $\text{km s}^{-1}$ , por lo que  $v_c/\sigma_z = 1.7$  a 1.3 escalas del disco. Para NGC 4605, 1.3 escalas del disco corresponde a  $\sim 830 \text{ pc}$ . En ese punto  $v_c = 62 \text{ km s}^{-1}$ . Por lo tanto, si suponemos el mismo cociente, obtenemos un valor esperado para  $\sigma_z = 62/1.68 = 37 \text{ km s}^{-1}$ . Desde este punto de vista, un valor de  $\sigma_R = 40 \text{ km s}^{-1}$  en NGC 4605, como el requerido para que haya estabilidad, sería satisfactorio.

### 4.3.5. Discusión

Si mejores modelos de población estelar y mejores observaciones confirmaran que la  $M/L$  del disco estelar de NGC 4605 es de 1, como dedujeron Simon et al. (2005), entonces MOND necesitaría una contribución de materia oscura en esta galaxia para explicar su dinámica. Si además se confirmara que la dispersión de velocidades radial en la parte central es del orden de  $\sim 30 \text{ km s}^{-1}$ , entonces la materia oscura tendría que estar en una componente esférica y no siguiendo al disco, porque si toda la masa faltante se pusiera en el disco como materia oscura, sería demasiado inestable.

Por último, debemos hacer notar que sólo hemos considerado para el análisis de estabilidad la masa de las estrellas. El disco será más inestable si se tiene en cuenta que un porcentaje de la masa del disco está en forma gaseosa, el disco será más inestable porque el gas tiene una dispersión de velocidades menor. Por ejemplo, Yang et al. (2007) estudiaron el parámetro de Toomre convencional en la LMC. Para este estudio tomaron una dispersión de velocidades para el gas de  $5 \text{ km s}^{-1}$ . Como  $Q \propto \sigma/\Sigma$  eso significa que tan sólo con que el 20% de la masa del disco estuviera en fase gaseosa, el gas sería inestable  $Q_g \simeq 0.8$ , donde  $Q_g$  es el parámetro de Toomre para el gas. No cabe duda de que disponer de observaciones de la densidad superficial de HI para esta galaxia también ayudaría a estimar de manera más precisa la estabilidad del disco total incluyendo las dos componentes (estelar y gaseosa).

---

# 5

## Conclusiones.

Veinticinco años después de que se propuso la modificación a la ley de gravedad para explicar las curvas de rotación de las galaxias espirales sin tener que introducir materia oscura, no hay una demostración observacional inapelable que la contradiga (aunque hay algunos resultados que hacen dudar de que sea la explicación correcta). El interés por confirmar o descartar este tipo de teorías es cada vez mayor. El objetivo de esta tesis era doble. Por un lado nos planteamos entender las diferencias conceptuales más notorias entre la gravedad Newtoniana y MOND. Por otro lado, se buscaron nuevas formas de confrontar MOND con las observaciones, a través del estudio de la curva de rotación de dos galaxias: M33 y NGC 4605.

En primer lugar hemos propuesto un “experimento” pensado que ilustra perfectamente que la ecuación algebraica, inicialmente propuesta por Milgrom que nos relaciona  $\vec{g}$  con  $\vec{g}_N$ , no es congruente con la dinámica de

los cúmulos globulares en nuestra galaxia. Si la ecuación algebraica describiera la naturaleza, entonces la mayoría de los cúmulos globulares del halo de nuestra galaxia deberían moverse a velocidades significativamente menores a las observadas.

Ya que la ecuación algebraica no es en general una buena descripción de la ecuación de Poisson modificada, hemos investigado las diferencias más relevantes entre la ecuación de Poisson clásica, con la que estamos más familiarizados, y la ecuación de Poisson modificada. Se encontró que, para la misma distribución de masa, la fuerza gravitacional según MOND y según Newton difieren por un término rotacional. Para entender la importancia del término rotacional, se ha requerido estudiar cuidadosamente la naturaleza y grados de libertad de estas ecuaciones diferenciales. Al igual que en el caso Newtoniano hay un término rotacional que queda determinado con las condiciones de frontera, el término rotacional por el que difiere la fuerza según MOND y según Newton también es fijado por las condiciones de frontera.

Se hizo el análisis lineal del campo gravitacional creado por una pequeña perturbación en un campo externo dado, y se obtuvo la ecuación de campo lineal, demostrando de forma rigurosa la propuesta por Milgrom. Se vio que si la aceleración gravitacional interna es menor a la externa y ambas son menores a  $a_0$ , la dinámica del subsistema será Newtoniana con una constante de gravedad efectiva dada por  $G/\mu_0$ , con  $\mu_0 = \mu(g_{\text{ext}}/a_0)$ .

Se demostró que, dada una distribución de masa, el campo Newtoniano y el de MOND están ligados por la ecuación algebraica si y sólo si los campos de fuerzas son paralelos en todos los puntos. De allí surgió el interés por entender cuando dos distribuciones de masa generan campos de fuerzas paralelos en todos los puntos.

Como corolario del análisis, se encontró que el campo gravitacional Newtoniano debe satisfacer la condición  $|\vec{\nabla}\Phi_N| = f(\Phi_N)$  para tener garantía de que el campo gravitacional de MOND es paralelo al de Newton y, por lo tanto, su magnitud se reescala por un factor  $1/\mu$ .

---

Se han estudiado las curvas de rotación de dos galaxias: M33 y NGC 4605, bajo la teoría de MOND. Se quiso ilustrar qué forma tendría la curva de rotación sin materia oscura en gravedad Newtoniana y cómo MOND eleva la velocidad de rotación. Mostramos cómo cambia la forma de la curva de rotación al variar la relación  $M/L$  del disco estelar.

Estábamos principalmente interesados en averiguar si la tendencia ascendente que presenta la curva de rotación en M33 se puede explicar en MOND. Encontramos que MOND predice una curva de rotación excesivamente plana, en contra del comportamiento observado. Sin embargo, las incertidumbres en la curva de rotación para M33 en las partes externas ( $> 10$  kpc), debido a la presencia del alabeo (warp), son todavía grandes. Desafortunadamente, debido a que la inclinación con la que observamos M33 no es muy grande, es prematuro concluir que MOND no es capaz de reproducir la curva de rotación observada de M33.

Se discutió la propuesta de poner a prueba MOND comparando el valor de  $\mu$  necesario en la dirección radial con el valor necesario en la dirección vertical. Concluimos que no hay ninguna evidencia proveniente de estos estudios que contradiga a MOND.

Si bien el estudio de la curva de rotación de M33 nos sirvió para entender cómo usar las curvas de rotación para poner a prueba MOND, quisimos ir más allá; quisimos responder a la siguiente pregunta: ¿hasta qué punto la dinámica interna de una galaxia es compatible con el cociente masa-luminosidad del disco estelar ( $M/L$ ) que se necesita para explicar su curva de rotación? Se propuso que las galaxias pequeñas pero de alto brillo superficial podían ser ideales para dicho estudio puesto que al tener aceleraciones altas, el factor correctivo que introduce MOND es menor, y por lo tanto, se necesitarán  $M/L$ 's del disco estelar bastante altas. Pero si la  $M/L$  es alta, entonces se espera que el disco tenga un alto grado de inestabilidad gravitacional. Por estas razones elegimos la galaxia NGC 4605. Si bien debemos admitir que los movimientos no circulares para esta galaxia no son despreciables, tiene otras características que la hacen de interés. Lógicamente, planeamos hacer

un estudio semejante al hecho para NGC 4605 para una muestra más amplia (4-6 galaxias).

Encontramos que la curva de rotación para el valor más probable de la  $M/L$  de acuerdo a los índices de color observados para esta galaxia está muy por debajo de la curva de rotación observada. Mostramos que las incertidumbres en la distancia, en el valor de  $a_0$ , y en la forma de la función de interpolación, no son suficientes como para dar cuenta de la diferencia entre las curvas de rotación predicha y observada para la  $M/L$  inferida de los índices de color.

Se derivó el perfil radial de la dispersión de velocidades estelar para garantizar que el disco sea estable frente a inestabilidades gravitacionales, usando el parámetro de Toomre generalizado en MOND. Se encontró que los valores requeridos de la dispersión de velocidades son altos, aunque marginalmente compatibles con las que se esperarían. Sin embargo, la necesidad de que esta galaxia requiera tanto una  $M/L$  del disco estelar como una dispersión de velocidades tan elevadas pone en jaque a MOND. Si bien se puede argumentar que esta galaxia es peculiar (por razones que nosotros ignoramos), será importante estudiar una muestra más amplia de galaxias para tener pruebas más concluyentes.



## Clasificación de las galaxias.

Hubble propuso en 1926 una clasificación morfológica de las galaxias con tres categorías: elípticas, espirales e irregulares (Fig. A.1).

Las galaxias *elípticas* tienen forma de elipsoide (triaxial) o de esferoide (biaxial). Hubble subdividió las elípticas de acuerdo a la elongación de la imagen proyectada sobre el plano del cielo. Así que si  $\alpha$  y  $\beta$  son los semiejes mayor y menor de la elipse aparente, el grado de la elongación se expresa como:

$$n = 10 \left( \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \right). \quad (\text{A.1})$$

Para clasificar las elípticas se usa la notación  $En$ . De tal forma que una galaxia E0 aparece circular.

Las galaxias elípticas no tienen eje de rotación. En estas galaxias, las estrellas se mueven siguiendo trayectorias aleatorias.

Las galaxias espirales constan de una prominencia central (similar a una

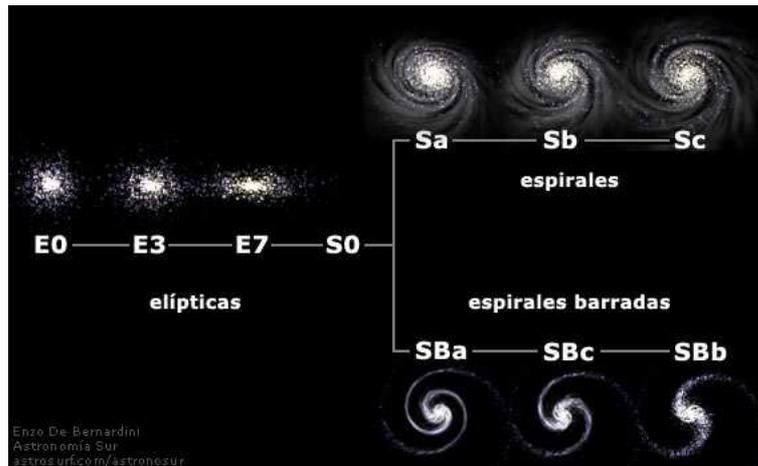


Figura A.1: Clasificación de Hubble para las galaxias.

galaxia elíptica), llamado bulbo, y de un disco aplanado que contiene estrellas, gas y polvo. Lo más llamativo de estas galaxias son sus estructura en forma de espiral, llamados brazos espirales. Si el disco no presenta brazos, se habla de galaxias espirales tipo S0, también llamadas lenticulares. Hay dos secuencias de espirales: normales (Sa, Sb, Sc) y barradas (SBa, SBb, SBc). La ubicación de una galaxia dentro de la secuencia de las espirales (normales o barradas), es decir, si son de tipo a, b, o c, se determina por tres criterios. Los tipos más tardíos (tipo c) tienen una prominencia central más pequeña, brazos espirales más delgados y una forma espiral más abierta. En las barradas hay una especie de barra central que atraviesa el núcleo, de manera que los brazos espirales nacen de los extremos de esta barra.

Las galaxias *irregulares* no tienen estructura ni simetría de ningún tipo. Un ejemplo de galaxia irregular son las Nubes de Magallanes. Las formas irregulares pueden deberse a la interacción con otra galaxia por las fuerzas de marea.

---

# B

## Teorema del Virial.

Este teorema trata de las medias temporales de distintas magnitudes mecánicas. Consideremos un sistema de partículas descritas por los vectores de posición  $\mathbf{r}_i$ , que sienten una fuerza  $\mathbf{F}_i$ . Las ecuaciones fundamentales del movimiento serán:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i. \quad (\text{B.1})$$

Nos interesa la cantidad  $G$  definida por

$$G = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i. \quad (\text{B.2})$$

La suma se extiende a todas las partículas del sistema. Así la derivada total de esta cantidad es:

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{p}_i + \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{r}_i = 2T + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i. \quad (\text{B.3})$$

Tomemos ahora la media temporal de la ecuación (B.3) para un intervalo de tiempo  $\tau$ . La obtenemos integrando respecto a  $t$  entre 0 y  $\tau$  y dividiendo por  $\tau$ , es decir:

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt = \frac{\overline{dG}}{\overline{dt}} = \overline{2T} + \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i}, \quad (\text{B.4})$$

o sea

$$\overline{2T} + \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i} = \frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)]. \quad (\text{B.5})$$

Si el movimiento es periódico, y si tomamos  $\tau$  como el período, el segundo miembro se anulará. Aún si el movimiento no fuera periódico podemos llegar a un a conclusión análoga, conque las coordenadas y velocidades de todas las partículas se mantengan finitas de tal forma que haya un acota superior de  $G$ . Tomando  $\tau$  suficientemente largo, podemos hacer tan pequeño como queramos el lado derecho de la ecuación (B.5). Así pues:

$$\overline{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i}. \quad (\text{B.6})$$

Esta última ecuación es la que se conoce como el teorema del virial (Goldstein 1996).

Como caso particular vamos a derivar la relación entre la masa, la dispersión de velocidades y el tamaño característico para un sistema esférico aislado en el régimen de bajas aceleraciones en MOND. Para este caso la aceleración gravitacional viene dada por:

$$g_M = \frac{[Ga_0 M(r)]^{1/2}}{r} \quad (\text{B.7})$$

Usando está ecuación y el termino de la derecha de la ecuación (B.6) se puede calcular el promedio de la energía cinética para una distribución de densidad estelar  $\rho(r)$ , es decir:

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty 4\pi r^2 \rho(r) g_M(r) r dr = \frac{1}{2} \int_0^\infty 4\pi r^2 \rho(r) [Ga_0 M(r)]^{1/2} dr \quad (\text{B.8})$$

---

Donde al expresar  $M(r)$  en terminos de  $\rho(r)$  finalmente nos queda:

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{(Ga_0)^{1/2} \left[ \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \right]^{1/2}}{r} 4\pi r^2 \rho(r) r dr \quad (\text{B.9})$$

entonces, haciendo uso de la siguiente entidad:

$$\frac{d}{dr} \left[ \int_0^\infty 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \right]^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \left[ \int_0^r 4\pi r'^2 \rho dr' \right]^{\frac{1}{2}} 4\pi r^2 \rho(r) \quad (\text{B.10})$$

llegamos al siguiente resultado para la energía cinética promedio, que en nuestro caso es:

$$\bar{T} = T = \frac{1}{2} M_T \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} \sqrt{Ga_0} [M_T]^{\frac{3}{2}} \quad (\text{B.11})$$

y asi para el caso de MOND llegamos al a siguiente relación para la masa total del sistema.

$$M_T = \frac{9 \langle v^2 \rangle^2}{4 Ga_0} \quad (\text{B.12})$$



---

# C

## Función de interpolación de Famaey & Binney.

En este Apéndice damos la deducción de  $g_M$  en función de  $g_N$  para la función de interpolación  $\mu(x) = x/(1+x)$ . Como mencionamos al principio del Capítulo II, definimos  $x = \frac{g_M}{a_0}$ , entonces al sustituir en  $\mu(x)$ , tenemos:

$$\mu(x) = \mu\left(\frac{g_M}{a_0}\right) = \frac{g_M/a_0}{1 + g_M/a_0}. \quad (\text{C.1})$$

Tomando la Ec. (C.1) y la ecuación de MOND  $\mu(x)g_M = g_N$ , obtenemos:

$$\frac{\frac{g_M}{a_0}}{1 + \frac{g_M}{a_0}}g_M = \lambda a_0, \quad (\text{C.2})$$

donde  $\lambda = g_N/a_0$  tal y como se definió en el Capítulo 2.

Al desarrollar la Ec. (C.2), obtenemos la siguiente ecuación de segundo

grado para  $g_M$ :

$$g_M^2 - \lambda a_0 g_M - \lambda a_0^2 = 0, \quad (\text{C.3})$$

cuya solución está dada por:

$$g_M = \frac{\lambda a_0}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\lambda}} \right). \quad (\text{C.4})$$

Entonces podemos sustituir  $\lambda$  en la Ec. (C.4) y obtenemos:

$$g_M = \frac{g_N}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0}{g_N}} \right). \quad (\text{C.5})$$

Esta ecuación se puede escribir en términos de la velocidad circular  $v_\phi$ , ya que  $g_N = v_{\phi,N}^2/R$ :

$$v_{\phi,M}^2 = \frac{v_{\phi,N}^2}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0 R}{v_{\phi,N}^2}} \right). \quad (\text{C.6})$$

La Ec. (C.6) nos da la velocidad circular de MOND en función de la velocidad circular Newtoniana. En el Capítulo 4 se vió que la función de interpolación de Famaey & Binney requería un cociente masa-luminosidad más pequeño que el que se requería usando la función de interpolación estándar.

## Bibliografía

- Adelberger E.G., Heckel B.R. & Nelson A.E., 2003. *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **53**, 77
- Aguirre A., Schaye J., Quataert E., 2002. *ApJ*, **561**, 550
- Allen R.J. & Shu F.H., 1979. *ApJ*, **227**, 67
- Anderson J.D., Lau E.L., Taylor A.H., Dicus D.A., Teplitz D.C. & Teplitz V.L., 1989. *ApJ*, **342**, 539
- Anderson J.D., Lau E.L., Krisher T.P., Dicus D.A., Rosenbaum D.C. & Teplitz V.L., 1989. *ApJ*, **448**, 885
- Angus G.W. & McGaugh S.S., 2008 *MNRAS*, **383**, 471
- Battaner, E., Garrido, J.L., Membrado, M., & Florido, E., 1992. *Nature*, **360**, 652
- Battaner, E. & Florido, E., 2000. *Fund. Cosmic Phys.*, **21**, 1
- Baumgardt H. et al., 2009 *MNRAS*, **396**, 2051
- Begeman, K.G., 1989. *A&A*, **223**, 47
- Begeman, K.G., Broeils, A.H. & Sanders, R.H., 1991. *MNRAS*, **249**, 523
- Bekenstein, J., 2004. *astro-ph/0403694*

- Bekenstein, J.D. & Milgrom, M., 1984. *ApJ*, **286**, 7
- Bell, E.F. & de Jong, R.S., 2001. *ApJ*, **550**, 212
- Bender, R., Burstein, D. & Faber, S.M., 1992. *ApJ*, **399**, 462
- Binney, J., & Tremaine, S., 1987. *Galactic Dynamics (Princeton: Princeton Univ. Press)*
- Bolatto, A.D., Simon, J.D., Leroy, A., & Blitz, L., 2002. *ApJ*, **565**, 238
- Bosma, A. 1978. *The distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types*, PhD thesis. Univ. Groningen, The Netherlands
- Bottema, R., Pestaña, J.L.G., Rothberg, B., & Sanders, R.H., 2002. *A&A*, **393**, 453
- Bottinelli, L., Gougenheim, L., Paturel, G., & de Vaucouleurs, G., 1985. *ApJS*, **59**, 43
- Buote, D.A. & Cañizares, C.R., 1994. *ApJ*, **427**, 86
- Cheng, E.S. et al., 1996. *ApJ*, **456**, L71
- Corbelli, E. & Salpeter, E.E., 1993. *ApJ*, **419**, 104
- Corbelli, E., & Salucci, P., 1999. *MNRAS*, **311**, 441
- Corbelli, E. & Salucci, P., 2007. *MNRAS*, **374**, 1051
- Christodoulou, D.M., Tohline, J.E., & Steiman-Cameron, T.Y., 1993. *AJ*, **96**, 1307
- Cuddeford, P. & Binney, J., 1993. *Nature*, **365**, 20
- Bell, E.F., McIntosh, D.H., Katz, N., & Weinberg, M.D., 2003a. *ApJ*, **585**, L117

- Bell, E.F., McIntosh, D.H., Katz, N., & Weinberg, M.D., 2003b. *ApJS*, **149**, 289
- de Blok, W.J.G. & Bosma, A., 2002. *A&A*, **385**, 816
- de Blok, W.J.G. & McGaugh, S.S., 1998. *ApJ*, **508**, 132
- de Blok, W.J.G. & Walter, F., 2006. *ApJ*, **131**, 363
- Dekel, A. et al., 2005. *Nature*, **437**, 707
- Deul, E. R. & van der Hulst, J. M., 1987. *A&AS*, **67**, 509
- Dib, S., Bell, E., & Burkert, A., 2006. *ApJ*, **638**, 797
- Douglas, N.G. et al., 2007., *ApJ*, **664**, 257
- Dubinski, J., & Carlberg, R. G., 1991. *ApJ*, **378**, 496
- Elmegreen, B.G. & Hunter, D. A., 2006. *ApJ*, **363**, 712
- Faber, S.M. & Jackson, R.E., 1976. *ApJ*, **204**, 668
- Famaey, B. & Binney, J., 2005. *MNRAS*, **361**, 633
- Famaey, B., Gentile, G., Bruneton, J.-P., & Zhao, H., 2007a. *Phys. Rev. D*, **75**, 063002
- Famaey, B., Bruneton, J.-P., & Zhao, H. 2007b. *MNRAS*, **377**, L79
- Ferguson, A. et al., 2006. *In Island Universes - Structure and Evolution of Disk Galaxies*, editor R.S. de Jong (Springer: Dordrecht). *astro-ph/0601121*
- Freeman, K.C., 1970. *ApJ*, **160**, 811
- Freedman, W.L., Wilson, C.D., & Madore, B.F., 1991, *ApJ*, **372**, 455
- Freedman, W.L. et al., 2001. *ApJ*, **553**, 47

- Gentile G. et al., 2007 *A&A*, **472**, L25
- Gentile G., Famaey B., Angus G. & Kroupa P., 2009 *astro-ph/0911.4485*
- Gerbal, D., Durret, F., Lachieze, M., & Lima-Neto, G., 1992. *A&A*, **262**, 395
- Gerhard, O.E. & Spergel, D.N., 1992. *ApJ*, **397**, 38
- Goldstein, H., 1996. *Mecánica clásica*
- González-Serrano, J.I. & Valentinj, E.A., 1991. *A&A*, **242**, 334
- Gron O. & Soleng H.H., 1996 *ApJ*, **456**, 445
- Hernquist, L., 1990. *ApJ*, **356**, 359
- Hernquist, L., & Quinn, P.J., 1987. *ApJ*, **312**, 17
- Jordi K. et al., 2009 *AJ*, **137**, 4586
- Jørgensen, I., 1999. *MNRAS*, **306**, 607
- Kalnajis, A.J. 1983. *Internal Kinematics of Galaxies*, IAU Symp. ed. E. Athanassoula, (Dordrecht: Reidel), 87
- Karachentsev, I.D. & Tikhonov, N.A., 1994. *A&A*, **286**, 718
- Knebe, A. & Gibson, B., 2004. *MNRAS*, **347**, 1055
- Kneib, J.-P., van der Werf, P., Knudsen, K. K., et al., 2004. *MNRAS*, **349**, 1211
- Kuijken, K., & Gilmore, G., 1989. *MNRAS*, **239**, 605
- Lesgourgues, J. & Pastor, S., 2006. *Physics Reports*, **429**, 307
- Mac Low, M.-M. & Klessen, R.S., 2004. *Rev. Mod. Phys.*, **76**, 125
- Mateo M., 1998. *ARA&A*, **36**, 435

- Matos, T., Núñez, D., Guzmán, F.S. & Ramírez, E., 2002. *Gen. Rel. Grav.*, **34**, 283
- McGaugh, S.S., 1996. *MNRAS*, **280**, 337
- McGaugh, S.S., 2005. *ApJ*, **632**, 859
- McGaugh, S.S., 2008. *ApJ*, **683**, 137
- McGaugh, S.S. & de Blok, W.J.G., 1998a. *ApJ*, **499**, 41
- McGaugh, S.S. & de Blok W.J.G., 1998b. *ApJ*, **499**, 66
- McGaugh, S.S., Schombert, J.M., Bothun, G.D. & de Blok, W.J.G., 2000. *ApJ*, **533**, L99
- Milgrom, M., 1983a. *ApJ*, **270**, 365
- Milgrom, M., 1983b. *ApJ*, **270**, 371
- Milgrom, M., 1983c. *ApJ*, **270**, 384
- Milgrom, M., 1984. *ApJ*, **287**, 571
- Milgrom, M., 1986. *ApJ*, **302**, 617
- Milgrom, M., 1988. *ApJ*, **333**, 689
- Milgrom, M., 1989. *Comm. on Astroph.*, **13**, 215
- Milgrom, M., 1994. *ApJ*, **429**, 540
- Milgrom, M., 2002. *ApJ*. **577**, L75
- Milgrom, M. & Sanders, R.H., 2003. *ApJ*, **599**, L25
- Milgrom, M. & Sanders, R.H., 2008. *ApJ*, **678**, 131
- Navarro, J.F., Frenk, C.S. & White, S.D.M., 1996. *ApJ*, **462**, 563
- Nelson, A.H., 1988. *MNRAS*, **233**, 115

- Olszewski E.W., Pryor C. & Shommer R.B., 1993 *ASP Conf. Series*, **48**, 99
- Ostriker, J.P., Peebles, P.J.E., 1973. *ApJ*, **186**, 467
- Pryor, C. & Meylan, G., 1993. *In Structure and Dynamics of Globular Clusters, ASP Conf. Ser.*, Vol. 50, ed. S.G. Djorgovski, G. Meylan, pp. 357, San Francisco: Astron. Soc. Pac.
- Regan, M. W. & Vogel, S. N., 1994. *ApJ*, **434**, 536
- Richtler, T. et al., 2008. *A&A*, **478**, L23
- Roberts, M.S. & Whitehurst, R.N., 1975. *ApJ*, **201**, 327
- Rodrigo-Blanco, C. & Pérez-Mercader, J., 1998. *A&*, **330**, 474
- Rubin, V.C., 1983. *Science*, **220**, 1339
- Rubin, V.C., Ford, W.K. & Thonnard, N. 1980. *ApJ*, **238**, 471
- Sánchez-Salcedo, F.J. & Hernandez X., 2007. *ApJ*, **667**, 878
- Sánchez-Salcedo, F.J. & Hidalgo-Gómez, A.M., 1999. *A&A*, **345**, 36
- Sánchez-Salcedo, F.J., Reyes-Iturbide, J. & Hernandez, X., 2006. *MNRAS*, **370**, 1829
- Sánchez-Salcedo, F.J., & Reyes-Ruiz, M., 2004. *ApJ*, **607**, 247
- Sánchez-Salcedo, F.J., Saha, K. & Narayan, C.A., 2008. *MNRAS*, 223
- Saglia, R.P., Bertin, G. & Stiavelli, M., 1992. *ApJ*, **384**, 433
- Sandage, A., & Tammann, G.A., 1981. *A Revised Shapley-Ames Catalog of Bright Galaxies*, Carnegie Inst. Washington Publ. 635, Washington, Carnegie Inst.
- Sanders, R.H., 1984. *A&A*, **136**, L21
- Sanders, R.H., 1996. *ApJ*, **473**, 117

- Sanders, R.H., 2000. *MNRAS*, **313**, 767
- Sanders, R.H. & Begeman, K.G., 1994. *MNRAS*, **266**, 360
- Sanders, R.H. & McGaugh, S.S., 2002. *ARA&A*, **40**, 263
- Sanders, R.H. & Noordermeer, E., 2007. *MNRAS*, **379**, 702
- Sanders, R.H. & Verheijen, M.A.W., 1998. *ApJ*, **503**, 97
- Schuberth, Y. et al., 2006. *A&A*, **459**, 391
- Scott, D., White, M., Cohn, J.D., & Pierpaoli, E., 2001. *astro-ph/0104435*
- Sereno M. & Jetzer Ph., 2006 *MNRAS*, **371**, 626
- Shostak, G.S., 1973. *A&A*, **24**, 411
- Simon, J., Verde, L. & Jiménez, R., 2005. *Phys. Rev. D*, **71**, 123001
- Simon, J.D. & Blitz, L., 2002. *ApJ*, **574**, 726
- Solomon, P.M., Rivolo, A.R., Barrett, J. & Yahil, A., 1987. *ApJ*, **319**, 730
- Spergel, D.N., et al., 2003. *ApJS*, **148**, 175
- Stubbs, C.W. & Garg, A., 2005. *astro-ph/0512067*
- Talmadge C., Berthias J.P., Hellings R.W. & Standish E.M., 1988 *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 1159
- The, L.S., & White, S.D.M., 1988. *AJ*, 95, 1642
- Tiret, O., Combes, F., Angus, G.W., Famaey, B. & Zhao, H.S., 2007. *A&A*, **476**, L1
- Toomre, A., 1964. *ApJ*, **139**, 1217
- Trager, S.C., Djorgovski, S. & King, I.R., 1993. *In Structure and Dynamics of Globular Clusters*, APS Ser. V. 50, 347, San Francisco, Astron. Soc. Pac.

- van den Bosch, F.C. & Dalcanton, J.J., 2000. *ApJ*, **534**, 146
- Walter, F. & Brinks, E., 1999. *AJ*, **118**, 273
- Weinberg, S., 1978. *Phys. Rev. Lett.*, **40**, 223
- White, D.A., Jones, C. & Forman, W., 1997. *MNRAS*, **292**, 419
- Wilczek, F., 1978. *Phys. Rev. Lett.*, **40**, 279
- Wilson, C.D. & Scoville, N., 1989. *ApJ*, **347**, 743
- Yang, C.-C. et al., 2007. *ApJ*, **671**, 374
- Young, J.S. & Scoville, N.Z., 1982. *ApJ*, **258**, 467
- Zwicky, F., 1933. *Helvetica Phys.*, Acta 6, 110