UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

EXTENSIONES COMPACTAS DE TIPO WALLMAN

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA

ALEJANDRO DORANTES ALDAMA

DIRECTOR DE TESIS
DR. ÁNGEL TAMARIZ MASCARÚA

2010

Índice general

Introducción

Los espacios compactos juegan un papel muy importante en diversas ramas de las matemáticas. En Cálculo, por ejemplo, el Teorema fundamental del cálculo, el teorema del valor medio y el teorema de Dini dependen de la compacidad, también las funciones continuas y realvaluadas alcanzan máximos y mínimos locales y son uniformemente continuas en los intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$. De hecho, varias de las propiedades de los compactos en $\mathbb{R}$ fueron la guía para definir compacidad en los espacios topológicos en general. Es por esta razón que cuando un espacio X no es compacto, resulta interesante construir alguna compactación de X.

A lo largo de los años se han propuesto varios métodos para encontrar extensiones compactas de espacios topológicos. Tychonoff demostró que son los espacios completamente regulares y sólo ellos los que tienen alguna extensión Hausdorff compacta. Stone y Ĉech construyeron independientemente una compactación de un espacio X en la cual X esta C^*-encajado y es la única compactación con esa propiedad. Wallman utilizó los ultrafiltros de cerrados de un espacio normal para construir la misma compactación que encontraron Stone y Ĉech. Frink generalizó la idea de Wallman al construir extensiones compactas de espacios completamente regulares utilizando bases normales, las cuales adoptaron el nombre de "bases de Wallman".

El presente trabajo surgió a partir del curso de Posgrado en Ciencias Matemáticas de la UNAM impartido por el Dr. Ángel Tamariz Mascarúa durante el primer semestre de 2008, el cual estaba basado en el libro *Extensions and absolutes of Hausdorff spaces* de Jack R. Porter y R. Grant Woods que en su capítulo 4 aborda el tema de las extensiones compactas.

Capítulo 1

Extensiones de espacios topológicos

1.1. Filtros y retículas

Los conceptos de *retícula* y *filtro* jugarán un papel muy importante a lo largo de la tesis y a continuación los recordaremos. **Todos los espacios topológicos que utilicemos serán espacios Hausdorff.**

1.1 Definición. Un *orden parcial* en un conjunto X es una relación binaria "$\leq$."en X, es decir un subconjunto de $X \times X$, que satisface las siguientes condiciones:

1. (Reflexividad) si $x \in X$, entonces $x \leq x$;
2. (Antisimetría) si $x, y \in X, x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$;
3. (Transitividad) si $x, y, z \in X, x \leq y, y \leq z$, entonces $x \leq z$.

Al conjunto X junto con la relación binaria $\leq$ será llamado *conjunto parcialmente ordenado.*

1.2 Ejemplo. Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, donde $\mathcal{P}(X)$ es la colección de todos los subconjuntos de X. Si para $A, B \in \mathcal{A}$ definimos $A \leq B$ por $A \subseteq B$, entonces $\subseteq$ satisface las condiciones arriba mencionadas. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es un conjunto parcialmente ordenado.

1.3 Definición. Sea $\leq$ un orden parcial en un conjunto A. Sea B un subconjunto de A, un elemento $a \in A$ es llamado *cota superior* de B si $b \leq a$ para cualquier elemento $b \in B$; a es llamado *cota inferior* de B si $a \leq b$ para todo $b \in B$. Un elemento $c \in A$ es llamado *supremo* de B, denotado por $\sup B$, si c es una cota superior de B y si d es otra cota superior de B entonces $c \leq d$; $c \in A$ es llamado *ínfimo* de B, denotado por $\inf B$, si c es una cota inferior de B y si d es otra cota inferior de B entonces $d \leq c$, Es pertinente observar que las cotas superiores e inferiores no siempre existen para todos los subconjuntos de conjuntos parcialmente ordenados.

1.4 Definición. El conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ será llamado retícula si para cualquier par de elementos $a, b \in A$, los elementos $\sup\{a, b\}$ e $\inf\{a, b\}$ existen en A. Si $B \subseteq A$, entonces B es subretícula de A si para cada $a, b \in B$, los elementos $\sup\{a, b\}$ e $\inf\{a, b\}$ existen y pertenecen a B.

1.5 Ejemplo. Sea X un conjunto. Por 1.2, $\mathcal{P}(X)$ se ordena parcialmente por medio de la relación binaria $\subseteq$. Si $\varnothing \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ entonces $\sup \mathcal{A} = \cup\mathcal{A}$ e $\inf \mathcal{A} = \cap\mathcal{A}$. Por lo tanto $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es una retícula.

1.6 Ejemplo. Sea X un espacio topológico y sea $\tau(X)$ el conjunto de abiertos de X. Entonces $(\tau(X), \subseteq)$ es una retícula. En efecto, si A, B son abiertos en X, entonces $\sup\{A, B\} = A \cup B$ e $\inf\{A, B\} = A \cap B$. Notemos que además $\tau(X)$ es subretícula de $\mathcal{P}(X)$.

1.7 Ejemplo. Sea X un espacio y $\mathcal{Z}(X) = \{Z(f) : f \in C(X)\}$, donde $Z(f)$ es la imagen inversa del punto 0 bajo f. Entonces $\mathcal{Z}(X)$ es subretícula de $\mathcal{P}(X)$. En efecto, si $Z(f), Z(g) \in \mathcal{Z}(X)$ entonces $Z(f) \cup Z(g) = Z(fg)$ y $Z(f) \cap Z(g) = Z(|f| + |g|)$, por lo tanto $\sup\{Z(f), Z(g)\} = Z(f) \cup Z(g)$ e $\inf\{Z(f), Z(g)\} = Z(f) \cap Z(g)$.

Sea $\mathcal{L}$ una subretícula de $\mathcal{P}(X)$, diremos que un subconjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$ es un $\mathcal{L}$-filtro si

1. $\mathcal{F} \neq \varnothing$,
2. $\varnothing \notin \mathcal{F}$,
3. si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$ y
4. si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{L}$ son tales que $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

Observemos que si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$ cumple las primeras tres condiciones, entonces $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{L} : F \subseteq A$ para algún $F \in \mathcal{F}\}$ es un $\mathcal{L}$-filtro.

1.8 Definición. Diremos que $\mathcal{F}$ es $\mathcal{L}$-ultrafiltro si es $\mathcal{L}$-filtro maximal.

1.9 Proposición. *Sea $\mathcal{L}$ una subretícula de $\mathcal{P}(X)$ para algún conjunto X. Entonces, si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{L}$-filtro existe un $\mathcal{L}$-ultrafiltro que contiene a $\mathcal{F}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{L}$-filtro, definamos $\mathfrak{G} = \{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{L} : \mathcal{G}$ es $\mathcal{L}$-filtro y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}$. Como $\mathcal{F} \in \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} \neq \varnothing$. Sea C una cadena en $\mathfrak{G}$, entonces $\cup\mathsf{C}$ es un $\mathcal{L}$-filtro que pertenece a $\mathfrak{G}$. Por el Lema de Zorn existe un elemento maximal en $\mathfrak{G}$ y la proposición queda demostrada. $\square$

1.10 Proposición. *Sea $\mathcal{L}$ una subretícula de $\mathcal{P}(X)$ para algún conjunto X. Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{L}$-filtro entonces, son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ es un $\mathcal{L}$-ultrafiltro;*

2. *si $A \in \mathcal{L}$ es tal que $A \cap B \neq \varnothing$ para todo $B \in \mathcal{F}$, entonces $A \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{L}$-ultrafiltro. Sea $A \in \mathcal{L}$ tal que $A \cap B \neq \varnothing$ para todo $B \in \mathcal{F}$. Consideremos $\mathcal{H} = \{C \in \mathcal{L} : A \cap B \subseteq C$ para algún $B \in \mathcal{F}\}$. Podemos observar que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$. Si $C_1, C_2 \in \mathcal{H}$, entonces existen $B_1, B_2 \in \mathcal{F}$ tales que $A \cap B_1 \subseteq C_1$ y $A \cap B_2 \subseteq C_2$; notamos que $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$ y $A \cap (B_1 \cap B_2) \subseteq C_1 \cap C_2$. Por lo tanto $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{H}$. Si $C \in \mathcal{H}$ y $D \in \mathcal{L}$ tal que $C \subseteq D$, entonces existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap B \subseteq C \subseteq D$, lo que implica que $D \in \mathcal{H}$. Como $\varnothing \notin \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ es $\mathcal{L}$-filtro, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{H}$. Como $A \in \mathcal{H}$, concluimos que $A \in \mathcal{F}$.

Ahora supongamos que se cumple la condición 2. Sea $\mathcal{H}$ un $\mathcal{L}$-filtro tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$. Sean $A \in \mathcal{H}$ y $B \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$, entonces $A \cap B \neq \varnothing$. Por hipótesis $A \in \mathcal{F}$, por lo tanto $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$. Concluimos que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{L}$-ultrafiltro. □

1.11 Corolario. *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son $\mathcal{L}$-ultrafiltros distintos, entonces existen conjuntos $F \in \mathcal{F}$ y $G \in \mathcal{G}$ tales que $F \cap G = \varnothing$.*

Demostración. Como $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son distintos, existe $F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$. Supongamos que para cada elemento $G \in \mathcal{G}$ se cumple que $F \cap G \neq \varnothing$. Entonces $F \in \mathcal{G}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $F \cap G = \varnothing$. □

1.12 Corolario. *Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{L}$-ultrafiltro. Si $A, B \in \mathcal{L}$ y $A \cup B \in \mathcal{F}$ entonces $A \in \mathcal{F}$ ó $B \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Si $A \notin \mathcal{F}$ entonces existe $C \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap C = \varnothing$, entonces $B \supset B \cap C = (B \cup A) \cap C \in \mathcal{F}$. Concluimos que $B \in \mathcal{F}$. □

1.13 Definición. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{L}$ una subretícula de $\mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{L}$-filtro. El conjunto $\cap\{\mathrm{cl}_X F : F \in \mathcal{F}\}$ es llamado el conjunto de *adherencia* de $\mathcal{F}$ y es denotado por $a(\mathcal{F})$. Si $a(\mathcal{F}) = \varnothing$, $\mathcal{F}$ es llamado *libre*, de otra forma $\mathcal{F}$ es llamado *fijo*. Se dice que $\mathcal{F}$ converge a un punto $p \in X$ si $\mathcal{N}(p) \cap \mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$, donde $\mathcal{N}(p)$ es el conjunto de vecindades de p. Denotaremos por $c(\mathcal{F})$ al conjunto de puntos a los cuales $\mathcal{F}$ converge.

1.14 Proposición. *Si $\mathcal{L} = \mathcal{P}(X)$ ó $\tau(X)$, $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{L}$-filtro y $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{L}$-ultrafiltro entonces:*

1. $c(\mathcal{F}) \subseteq a(\mathcal{F})$,
2. $c(\mathcal{U}) = a(\mathcal{U})$,
3. *$c(\mathcal{F})$ contiene a lo más un punto,*
4. *si X es compacto y $a(\mathcal{F}) = \{p\}$, con $p \in X$, entonces $c(\mathcal{F}) = \{p\}$.*

Demostración. (1). Sea $p \in c(\mathcal{F})$. Entonces $\mathcal{N}(p) \cap \mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$. Sean $F \in \mathcal{F}$ y $U \in \mathcal{N}(p)$ abierto. Entonces $U \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $F \cap U \neq \varnothing$ y $p \in a(\mathcal{F})$.

(2). Sea $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{L}$-ultrafiltro. Por (1), $c(\mathcal{U}) \subseteq a(\mathcal{U})$. Sean ahora $p \in a(\mathcal{U})$ y $A \in \mathcal{N}(p) \cap \mathcal{L}$. Entonces $p \in \mathrm{int}_X A$. En consecuencia, $A \cap F \supset \mathrm{int}_X A \cap F \neq \varnothing$ para todo $F \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es $\mathcal{L}$-ultrafiltro, $A \in \mathcal{U}$. Por lo tanto $p \in c(\mathcal{U})$.

(3). Supongamos que existe $p \in c(\mathcal{F})$ y sea $q \in X$ tal que $p \neq q$. Existen abiertos $U \in \mathcal{N}(p)$ y $V \in \mathcal{N}(q)$ tales que $U \cap V = \varnothing$. Como $U \in \mathcal{F}$, $V \notin \mathcal{F}$. Por lo tanto $q \notin c(\mathcal{F})$.

(4). Por (1), $c(\mathcal{F}) \subseteq \{p\}$. Sea U un abierto tal que $p \in U$. Entonces $\cap\{\mathrm{cl}_X F : F \in \mathcal{F}\} \subseteq U$. Como X es compacto, existe una cantidad finita $F_1, \ldots, F_n$ de elementos de $\mathcal{F}$ tales que $\mathrm{cl}_X F_1 \cap \ldots \cap \mathrm{cl}_X F_n \subseteq U$. Por lo tanto $U \in \mathcal{F}$ y $p \in c(\mathcal{F})$. □

1.2. Extensiones, conceptos básicos

Un espacio Y es una extensión de un espacio X si X es denso en Y. Denotaremos a la familia de funciones de X a Y por $F(X,Y)$, a la familia de funciones continuas de X a Y por $C(X,Y)$.

1.15 Definición. Sean Y_1, Y_2 dos extensiones de los espacios X_1 y X_2 respectivamente. Sea $f \in F(X_1, X_2)$. Una función $F \in F(Y_1, Y_2)$ es llamada una extensión de f si $F|X_1 = f$.

Si Y es una extensión de X, el espacio $Y \setminus X$ es llamado el *residuo* de X en Y.

1.16 Proposición. *Sea Y una extension del espacio X, y sea Z otro espacio topológico. Si $f \in C(X,Z)$, entonces f tiene a lo más una extensión $F \in C(Y,Z)$.*

Demostración. Sea $f \in C(X,Z)$, y supongamos que f tiene dos extensiones $F, G \in C(Y,Z)$. Sea $A = \{y \in Y : F(y) = G(y)\}$, como F y G son extensiones de f entonces $X \subseteq A$. Claramente A es un subespacio cerrado de Y. Como X es denso concluimos que $A = Y$. □

1.17 Proposición. *Si Y es una extensión de X, entonces $|Y| \leq 2^{2^{|X|}}$.*

Demostración. Para cada $y \in Y$, definamos $O^y = \{U \cap X : U$ es abierto en Y y $y \in U\}$. Ahora sean $y, z \in Y$ con $y \neq z$. Existen abiertos $U, V \subseteq Y$, tales que $y \in U, z \in V$ y $U \cap V = \varnothing$. Entonces $U \cap X \in O^y \setminus O^z$. Por lo tanto la función $e : Y \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ definida por $e(y) = O^y$ es inyectiva, lo cual demuestra que $|Y| \leq 2^{2^{|X|}}$. □

1.18 Definición. Dos extensiones Y_1, Y_2 de un espacio X son equivalentes si existe un homeomorfismo $h : Y_1 \to Y_2$ tal que $h(x) = x$ para cada $x \in X$. Si Y_1 e Y_2 son equivalentes lo denotaremos por $Y_1 \equiv_X Y_2$.

1.19 Definición. Sea X un espacio y $\mathcal{E}(X)$ una colección de extensiones de X tales que distintos miembros de $\mathcal{E}(X)$ no son equivalentes y cualquier extensión de X es equivalente a alguna extensión de $\mathcal{E}(X)$.

1.20 Definición. Para un espacio X y dos extensiones $Y, Z \in \mathcal{E}(X)$, diremos que Y es proyectivamente más grande que Z si existe una función continua $f : Y \to Z$ tal que f restringida a X es la función identidad en X. En tal caso escribiremos $Y \geq Z$.

1.21 Proposición. *Para un espacio X, $(\mathcal{E}(X), \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.*

Demostración. Sean $W, Y, Z \in \mathcal{E}(X)$. Claramente $W \leq W$, ya que la función identidad es continua. Supongamos que $Y \leq Z$ y $Z \leq Y$. Existen funciones continuas $f : Z \to Y$ y $g : Y \to Z$ tales que $f(x) = g(x) = x$ si $x \in X$. Entonces $f \circ g : Y \to Y$ es continua y $f \circ g|X$ es la función identidad en Y restringida a X. Por 1.16 $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. De forma análoga $g \circ f = \mathrm{id}_Z$. Por lo tanto $g = f^{-1}$, y F es un homeomorfismo. Entonces $Y \equiv_X Z$.

Ahora supongamos que $W \leq Y, Y \leq Z$. Existen funciones continuas $f : W \to Y$ y $g : Y \to Z$ tales que $f(x) = g(x) = x$ si $x \in X$. Entonces $f \circ g : W \to Z$ es continua y $f(g(x)) = x$ para todo $x \in X$. Por lo tanto $W \leq Z$. □

1.22 Proposición. *Sea $Y \in \mathcal{E}(X)$ para un espacio X. Sean Z un espacio regular y $f \in C(X, Z)$. Entonces son equivalentes:*

1. *Existe una función $F \in C(Y, Z)$ tal que $F|X = f$, y*
2. *para cada $y \in Y$, el filtro $\mathcal{F}_y = \{A \subseteq Z : f[U] \subseteq A$ para algún $U \in O^y\}$ converge, donde $O^y = \{U \cap X : U$ es abierto en Y y $y \in U\}$.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$.) Supongamos que existe una función $F \in C(Y, Z)$ tal que $F|X = f$, y sea $y \in Y$. Sea W un abierto en Z que contenga a $F(y)$. Como F es continua, existe un abierto $U \subseteq Y$ tal que $y \in U$ y $F[U] \subseteq W$. Entonces $f[U \cap X] = F[U \cap X] \subseteq W$, como $U \cap X$ pertenece a O^y, $f[U \cap X]$ pertenece a $\mathcal{F}_y$. Por lo tanto $\mathcal{F}_y$ converge a $F(y)$.

$2 \Rightarrow 1$.) Supongamos que para cada $y \in Y$, $\mathcal{F}_y$ converge a algún punto z_y. Por 1.14, z_y es el único punto al cual $\mathcal{F}_y$ converge. Definamos $F : Y \to Z$ por $F(y) = z_y$. Demostraremos que F es continua. Sean $y \in Y$ y W un abierto en Z tal que $F(y) \in W$.

Como Z es regular, existe un abierto V en Z tal que $F(y) \subseteq V \subseteq \mathrm{cl}_Z V \subseteq W$. Como $\mathcal{F}_y$ converge a $F(y)$, $V \in \mathcal{F}_y$. Entonces existe un abierto U en Y tal que $y \in U$ y $f[U \cap X] \subseteq V$. Queremos demostrar que $F[U] \subseteq W$. Sean $p \in U$ y T un abierto en Z tal que $F(p) \in T$. Como $\mathcal{F}_p$ converge a $F(p)$, $T \in \mathcal{F}_p$, entonces existe un abierto R en Y tal que $p \in R$ y $f[R \cap X] \subseteq T$, observamos que $\varnothing \neq f[U \cap R \cap X] \subseteq V \cap T$. Por lo tanto $F(p) \in \mathrm{cl}_Z V \subseteq W$, demostrando la continuidad de F.

Falta demostrar que $F|X = f$.

Sea $x \in X$. Demostraremos que $\mathcal{F}_x$ converge a $f(x)$ y como $\mathcal{F}_x$ converge a $F(x)$ entonces, por 1.14, $F(x) = f(x)$. Sea W un abierto en Z tal que $f(x) \in W$. Como f es continua existe un abierto U en X tal que $x \in U$ y $f[U] \subseteq$W. Entonces existe un abierto V en Y tal que $U = V \cap X$, y por lo tanto $f[V \cap X]$ pertenece a $\mathcal{F}_x$ y está contenido en W. Resulta entonces que $W \in \mathcal{F}_x$. □

1.23 Proposición. *Sea X un espacio, $e : X \to Y$ un encaje denso, Z un espacio compacto y $f \in C(X, Z)$. Entonces, existe una función continua $F : Y \to Z$ tal* *que $F \circ e = f$ si y sólo si para cada par de conjuntos cerrados ajenos B y C en Z, se tiene que $cl_Y e[f^{-1}[B]] \cap cl_Y e[f^{-1}[C]] = \varnothing$.*

Demostración. Sea X un espacio, $Y \in \mathcal{E}(X)$, Z un espacio compacto y $f \in C(X,Z)$. Supongamos que existe una función continua $F : Y \to Z$ tal que $F|X = f$. Sean A, B cerrados ajenos en Z. Como $F^{-1}[B]$ es cerrado y $f^{-1}[B] \subseteq F^{-1}[B]$, entonces $\mathrm{cl}_Y f^{-1}[B] \subseteq F^{-1}[B]$. Como $B \cap C = \varnothing$, concluimos que $\mathrm{cl}_Y f^{-1}[B] \cap \mathrm{cl}_Y f^{-1}[C] \subseteq F^{-1}[B] \cap F^{-1}[C] = \varnothing$.

Ahora supongamos que para cada par de cerrados disjuntos B, C en Z se cumple $\mathrm{cl}_Y f^{-1}[B] \cap \mathrm{cl}_Y f^{-1}[C] = \varnothing$. Sea $y \in Y$ y consideremos $\mathcal{F}_y = \{A \subseteq Z : f[U] \subseteq A$ para algún $U \in O^y\}$ donde $O^y = \{U \cap X : U$ es abierto en Y y $y \in U\}$. Como Z es compacto entonces $a(\mathcal{F}_y) = \cap\{\mathrm{cl}_Z f[U] : U \in O^y\} \neq \varnothing$. Supongamos que $p, q \in a(\mathcal{F}_y)$ son tales que $p \neq q$. Como Z es regular existen abiertos V, W en Z tales que $p \in V, q \in W$ y $cl_Z V \cap \mathrm{cl}_Z W = \varnothing$. Por hipótesis, $\mathrm{cl}_Y f^{-1}[cl_Z V] \cap \mathrm{cl}_Y f^{-1}[cl_Z W] = \varnothing$, pero $y \in \mathrm{cl}_Y f^{-1}[cl_Z V] \cap \mathrm{cl}_Y f^{-1}[cl_Z W]$, lo cual es una contradicción. En efecto, sea D un abierto en Y tal que $y \in D$. Entonces $D \cap X$ pertenece a O^y, y $f[D \cap X]$ pertenece a $\mathcal{F}_y$. Como $p \in V$ y $p \in a(\mathcal{F}_y)$ entonces $V \cap f[D \cap X] \neq \varnothing$ y $f^{-1}[V] \cap D \cap X \neq \varnothing$. Por lo tanto $y \in \mathrm{cl}_Y f^{-1}[V] \cap \mathrm{cl}_Y f^{-1}[W]$.

Entonces $\{p\} = a(\mathcal{F}_y)$ para algún $p \in Z$. Demostraremos que $\mathcal{F}_y$ converge a p. Sea W un abierto en Z tal que $p \in W$. Como $Z \setminus W$ es compacto y $Z \setminus W \subseteq \cup\{Z \setminus \mathrm{cl}_Z F : F \in \mathcal{F}_y\}$, entonces existe una subfamilia finita $S \subseteq \mathcal{F}_y$ tal que $Z \setminus W \subseteq \cup\{Z \setminus \mathrm{cl}_Z F : F \in S\} \subseteq Z \setminus \cap S$. Como $\cap S \in \mathcal{F}_y$ y $\cap S \subseteq W$, entonces $\mathcal{F}_y$ converge a p. Por 1.22 existe una función continua $F : Y \to Z$ tal que $F|X = f$. □

1.24 Proposición. *Sea X un espacio Tychonoff. Sean Y, Z dos espacios compactos Hausdorff y $e : X \to Y, i : X \to Z$ encajes densos. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$Y \geq Z$,*
2. *si $A, B \subseteq X$ son conjuntos tales que $cl_Z i[A] \cap cl_Z i[B] = \varnothing$, entonces $cl_Y e[A] \cap cl_Y e[B] = \varnothing$,*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Sean $A, B \subseteq X$ conjuntos tales que $\mathrm{cl}_Z i[A] \cap \mathrm{cl}_Z i[B] = \varnothing$. Por hipótesis existe una función continua $F : Y \to Z$ tal que $F \circ e = i$. Por 1.23,

$$\mathrm{cl}_Y e[i^{-1}[\mathrm{cl}_Z i[A]]] \cap \mathrm{cl}_Y e[i^{-1}[\mathrm{cl}_Z i[B]]] = \varnothing.$$

Por lo tanto $\mathrm{cl}_Y e[A] \cap \mathrm{cl}_Y e[B] = \varnothing$.
$2 \Rightarrow 1$. Sean B, C cerrados disjuntos en Z, entonces los subconjuntos $i^{-1}[B]$, $i^{-1}[C]$ de X tienen cerraduras disjuntas en Z. Por hipótesis $\mathrm{cl}_Y e[i^{-1}[B]] \cap \mathrm{cl}_Y e[i^{-1}[C]] = \varnothing$. Por 1.23, existe una función continua $F : Y \to Z$ tal que $F \circ e = i$. □

Capítulo 2

Compactaciones

2.1. Compactación de Stone-Čech

Una compactación de un espacio X es una pareja (Y, e) donde Y es un espacio compacto Hausdorff y $e : X \to Y$ es un encaje denso. En 1930, Tychonoff caracterizó a los subespacios de los espacios compactos en el siguiente teorema. Recordemos que todos los espacios mencionados se consideran espacios Hausdorff.

2.1 Teorema (Tychonoff)**.** *Un espacio X es Tychonoff si y sólo si existe una compactación de X.*

Para demostrar el teorema anterior es conveniente utilizar un resultado más general y que nos ayudará a construir la compactación de Stone-Ĉech.

2.2 Definición. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones evaluadas en un espacio X distingue puntos si para cada par $x, y \in X$, existe una función $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. La familia $\mathcal{F}$ distingue puntos de cerrados si para cada conjunto cerrado $F \subseteq X$ y cada $x \in X \setminus F$, existe una función $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \notin \mathrm{cl} f[F]$.

2.3 Lema. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas tal que cada miembro $f \in \mathcal{F}$ es una función del espacio X al espacio Y_f. Entonces:*

1. *La función evaluación $e : X \to \Pi Y_f$ definida por $\pi_f \circ e(x) = f(x)$, para toda $f \in \mathcal{F}$ y todo punto $x \in X$, es continua;*
2. *si $\mathcal{F}$ distingue puntos de cerrados entonces la función evaluación es una función abierta sobre su imagen;*
3. *la función evaluación es inyectiva si y sólo si $\mathcal{F}$ distingue puntos;*
4. *si $\mathcal{F}$ distingue puntos y puntos de cerrados entonces la función evaluación es un encaje.*

Demostración. 1. La función evaluación e compuesta con cada proyección es continua, y por lo tanto e es continua,

2. Sean U un abierto en X, y $x \in U$, por hipótesis existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \notin \mathrm{cl}_{Y_f} f[X \setminus U]$. Entonces $e(x) \in \pi_{Y_f}^{-1}(Y_f \setminus \mathrm{cl}_{Y_f} f[X \setminus U])$. Sea $z \in X$ tal que $e(z) \in \pi_{Y_f}^{-1}(Y_f \setminus \mathrm{cl}_{Y_f} f[X \setminus U])$. Entonces $f(z) \in Y_f \setminus \mathrm{cl}_{Y_f} f[X \setminus U]$. En consecuencia $z \in U$, y por lo tanto $e[U]$ es abierto en $e[X]$.

3. Sean $x, y \in X$, dos puntos distintos. La función e es inyectiva si y sólo si $e(x) \neq e(y)$, si y sólo si existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

4. Esta afirmación es consecuencia de 2 y 3.

$\square$

Gracias a este lema, el Teorema de Tychonoff es sencillo de abordar. Si X es Tychonoff, la familia de funciones $C^*(X) = \{f : X \to I | f \text{ es continua}\}$ separa puntos y puntos de cerrados. Por lo tanto la función evaluación $e : X \to \Pi_{f \in C^*(X))} I_f$ es un encaje. En consecuencia, $(\mathrm{cl}_{I^{C^*(X)}} e[X], e)$ es una compactación de X.

2.4 Definición. La compactación de Stone-Čech βX de un espacio Tychonoff X, se define por $\beta X = \mathrm{cl}_{I^{C^*(X)}} e[X]$, donde $e : X \to I^{C^*(X)}$ es la función evaluación.

Al estudiar el espacio βX encontramos que el conjunto de nulos $\mathcal{Z}(X)$ nos ayuda a caracterizar a βX.

2.5 Teorema. *Sea X un espacio Tychonoff. Entonces la familia de nulos $\mathcal{Z}(X)$ es una base para los cerrados y la familia $\{intZ : Z \in \mathcal{Z}(X)\}$ es una base para los abiertos de X.*

Demostración. Sea $x \in X$ y U un abierto en X tal que $x \in U$. Entonces $X \setminus U$ es cerrado en X. Como X es Tychonoff existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(x) = 0$ y $f(X \setminus U) \subseteq \{1\}$. Sean $Z_1 = f^{-1}([0, 1/2])$ y $Z_2 = f^{-1}(1)$. Entonces $x \in \mathrm{int} Z_1 \subseteq Z_1 \subseteq U$, $X \setminus U \subseteq Z_2$ y $x \notin Z_2$, demostrando el teorema. $\square$

El siguiente teorema nos ofrece caracterizaciones de βX.

2.6 Teorema. *La compactación de Stone-Čech βX, de un espacio Tychonoff X, cumple las siguientes propiedades equivalentes:*

1. *Para cualquier función continua $f : X \to Y$, donde Y es un compacto, existe una única función continua $\beta f : \beta X \to Y$, tal que $\beta f \circ e = f$;*

2. *para cualquier función continua $f : X \to [0, 1]$ existe una única función continua $\beta f : \beta X \to [0, 1]$ tal que $\beta f \circ e = f$;*

3. *cualesquiera dos nulos ajenos de X tienen cerraduras ajenas en βX;*

4. *para cualesquiera dos nulos Z_1, Z_2 en X se tiene $cl_{\beta X}(Z_1 \cap Z_2) = cl_{\beta X} Z_1 \cap cl_{\beta X} Z_2$.*

   Además, si T es una compactación de X que cumpla alguna de las condiciones anteriores, y por lo tanto todas, entonces $T \equiv_X \beta X$.

Demostración. Primero demostraremos que las condiciones son equivalentes.

$1 \Rightarrow 2$. Sea $f \in C^*(X)$. Entonces $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(f[X])$ es un compacto. Aplicando 1 demostramos 2.

$2 \Rightarrow 3$. Sean $Z(f), Z(g)$ dos nulos ajenos de X. La función $h : X \to I$ definida por $h = |f|/(|f| + |g|)$ es continua y $Z(f) = h^{-1}(0)$ y $Z(g) = h^{-1}(1)$. Por hipótesis existe una extensión H de h a todo βX. Por lo tanto, $Z(f) = h^{-1}(0) \subseteq H^{-1}(0)$ y $Z(g) = h^{-1}(1) \subseteq H^{-1}(1)$. Como $H^{-1}(0)$ y $H^{-1}(1)$ son cerrados ajenos en βX, $\mathrm{cl}_{\beta X} Z(f) \cap \mathrm{cl}_{\beta X} Z(g) = \varnothing$.

$3 \Rightarrow 4$. Sea $p \in \mathrm{cl}_{\beta X} Z_1 \cap \mathrm{cl}_{\beta X} Z_2$, sea Z un nulo en βX tal que $p \in \mathrm{int}_{\beta X} Z$. Como X es denso en βX, $p \in \mathrm{cl}_{\beta X}(Z \cap Z_1) \cap \mathrm{cl}_{\beta X}(Z \cap Z_2)$. Los conjuntos $Z \cap Z_1$ y $Z \cap Z_2$ son nulos en X cuyas cerraduras no son ajenas en βX, por hipótesis, $Z \cap Z_1 \cap Z_2 \neq \varnothing$. Por lo tanto $p \in \mathrm{cl}_{\beta X}(Z_1 \cap Z_2)$.

$4 \Rightarrow 1$. Sea Y un espacio compacto y $f : X \to Y$ una función continua. Sean B, C cerrados ajenos en Y. Entonces existe una función $g : Y \to I$ tal que $B \subseteq g^{-1}(0)$ y $C \subseteq g^{-1}(1)$. Como los conjuntos $(g \circ f)^{-1}(0)$ y $(g \circ f)^{-1}(1)$ son nulos en X, por hipótesis,

$$\mathrm{cl}_{\beta X}(g \circ f)^{-1}(0) \cap \mathrm{cl}_{\beta X}(g \circ f)^{-1}(0) = \mathrm{cl}_{\beta X}((g \circ f)^{-1}(0) \cap (g \circ f)^{-1}(0)) = \varnothing.$$

En consecuencia, $\mathrm{cl}_{\beta X}(f^{-1}[B]) \cap \mathrm{cl}_{\beta X}(f^{-1}[C]) = \varnothing$. Por 1.23, existe una única función continua $\beta f : \beta X \to Y$, tal que $\beta f \circ e = f$.

Ahora demostraremos que βX cumple 2. Sea $f : X \to I$ una función continua. Definamos $g = \pi_f|_{\beta X}$, es decir, g es la restricción a βX de la proyección $\pi_f : I^{C^*(X)} \to I$. Entonces $g : \beta X \to I$ es una función continua. Sea $x \in X$ entonces $e(x) \in \beta X$ y $g(e(x)) = \pi_f(e(x)) = f(x)$, lo que se quería demostrar.

Sea (T, i) una compactación de X que cumpla la condición 1. Como $e : X \to \beta X$ es continua, existe $\tilde{e} : T \to \beta X$ tal que $\tilde{e} \circ i = e$. De manera semejante, como $i : X \to T$ es continua y $(\beta X, e)$ también cumple 1, existe $\tilde{i} : \beta X \to T$ tal que $\tilde{i} \circ e = i$. Por 1.21, $T \equiv_X \beta X$. □

El siguiente teorema nos dice que para cada espacio siempre podemos encontrar alguna compactación sin aumentar el peso. Recordemos que el peso de un espacio topológico X se define como $w(X) = \mathrm{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ es base para la topología de $X\}$.

2.7 Teorema. *Sea X un espacio Tychonoff. Entonces existe una compactación Y de X tal que $w(Y) \leq w(X)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base para los abiertos de X tal que $|\mathcal{B}| = w(X)$. Definamos $(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = \{(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$: existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f[U] \subseteq \{0\}$ y $f[X \setminus V] \subseteq \{1\}\}$. El conjunto $(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ es no vacío. En efecto, sea $x \in X$ y $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V$. Existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(x) = 0$ y $f[X \setminus V] \subseteq \{1\}$. Entonces existen $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq f^{-1}[[0, 1/2)]$, y una función continua $g : I \to I$ tal que $g[[0, 1/2)] \subseteq \{0\}$ y $g(1) = 1$. En consecuencia $g \circ f : X \to I$ es continua, $(g \circ f)[U] \subseteq \{0\}$ y $(g \circ f)[X \setminus V] \subseteq \{1\}$. Entonces el conjunto $(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ es no vacío. De hecho demostramos que para cada $V \in \mathcal{B}$ y para cada $x \in V$, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$ y $(U, V) \in (\mathcal{B}, \mathcal{B})$.

Para cada $(U,V) \in (\mathcal{B},\mathcal{B})$ seleccionemos una función continua $f_{U,V} : X \to I$ tal que $f_{U,V}[U] \subseteq \{0\}$ y $f_{U,V}[X \setminus V] \subseteq \{1\}$. Sea $\mathcal{C} = \{f_{U,V} \in C(X,I) : (U,V) \in (\mathcal{B},\mathcal{B})\}$ Definamos $Y = I^{\mathcal{C}}$, y una función $e : X \to Y$ por $e(x)(f_{U,V}) = f_{U,V}(x)$ para todo $x \in X$. Entonces $(\mathrm{cl}_Y e[X], e)$ es una compactación de X. Primero demostraremos que e es inyectiva. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V$ e $y \in X \setminus V$. Entonces existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$ y $(U,V) \in (\mathcal{B},\mathcal{B})$. Evaluemos $e(x)(f_{U,V}) = f_{U,V}(x) = 0$ y $e(y)(f_{U,V}) = f_{U,V}(y) = 1$, por lo tanto e es inyectiva.

Para cada $V \in \mathcal{B}$ no vacío, el conjunto $\mathcal{B}_V = \{U \in \mathcal{B} : (U,V) \in (\mathcal{B},\mathcal{B})\}$ es no vacío. Definamos $\mathcal{C}_V = \{f_{U,V} : U \in \mathcal{B}_V\}$. Sea $W_V = \cup_{f \in \mathcal{C}_V} \pi_f^{-1}[[0,1/2)]$ el cual es abierto en Y. Demostraremos que $V = e^{-1}(W_V)$. En efecto, sea $x \in V$, entonces existen $U \in \mathcal{B}_V$ y $f \in \mathcal{C}_V$, tales que $x \in U$. Como $e(x)(f) = f(x) = 0$, $e(x) \in W_V$. Ahora sea $x \in X$ tal que $e(x) \in W$, existe $f \in \mathcal{C}_V$ tal que $e(x) \in pi_f^{-1}[[0,1/2)]$, entonces $f(x) = e(x)(f) \in [0,1/2)$. Si $x \in X \setminus V$, entonces $f(x) = 1$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $x \in V$, que es lo que queríamos demostrar. Como e es inyectiva entonces $e[V] = W_V \cap e[X]$, por lo tanto e es abierta en su imagen. Concluimos que $(\mathrm{cl}_Y e[X], e)$ es una compactación de X y $w(\mathrm{cl}_Y e[X]) \leq w(Y) = |\mathcal{C}| \leq |\mathcal{B}| = w(X)$. □

2.8 Corolario. *Si X es Tychonoff y $w(X) = \tau$ entonces X es homeomorfo a un subespacio de I^τ.*

2.9 Corolario. *Si X es Tychonoff y segundo numerable entonces X es metrizable.*

2.2. Compactaciones de Wallman

En 1938, H. Wallman, construyó la compactación de Stone-Čech de un espacio normal utilizando los ultrafiltros de cerrados. En 1964, O. Frink generalizó la idea de Wallman, y construyó compactaciones para cualquier espacio Tychonoff utilizando bases normales, demostró que las compactaciones de Stone-Čech y las compactaciones por un punto (cuando existen), pueden ser construidas por este método y se preguntó si cualquier compactación se podría construir de esta forma. En 1977, V. M. Ul'janov dió una respuesta negativa a esta pregunta.

En esta sección estudiaremos el método de Frink para construir extensiones compactas de espacio completamente regulares.

Sea X un conjunto y $\mathcal{L}$ una retícula de subconjuntos de X. Definamos $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X = \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L} : \mathcal{F}$ es $\mathcal{L}$-ultrafiltro$\}$. Para $A \in \mathcal{L}$ sea $S(A) = \{\mathcal{F} \in W_{\mathcal{L}}X : A \in \mathcal{F}\}$.

2.10 Proposición. *Si $A, B \in \mathcal{L}$ entonces $S(A \cup B) = S(A) \cup S(B), S(A \cap B) = S(A) \cap S(B), S(\varnothing) = \varnothing$ y $S(X) = \mathcal{W}_{\mathcal{L}}X$.*

Demostración. Por el corolario 1.12 se puede observar que las siguientes igualdades se cumplen:

$S(A \cup B) = \{\mathcal{F} \in W_{\mathcal{L}}X : (A \cup B) \in \mathcal{F}\} = \{\mathcal{F} \in W_{\mathcal{L}}X : A \in \mathcal{F}\} \cup \{\mathcal{F} \in W_{\mathcal{L}}X : B \in \mathcal{F}\} = S(A) \cup S(B)$.

$S(A \cap B) = \{\mathcal{F} \in W_{\mathcal{L}}X : (A \cap B) \in \mathcal{F}\} = \{\mathcal{F} \in W_{\mathcal{L}}X : A \in \mathcal{F}\} \cap \{\mathcal{F} \in W_{\mathcal{L}}X : B \in \mathcal{F}\} = S(A) \cap S(B)$.

Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{L}$-ultrafiltro entonces $\varnothing \notin \mathcal{F}$, lo que implica que $\mathcal{F} \notin S(\varnothing)$. Por lo tanto $S(\varnothing) = \varnothing$. De manera similar, si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{L}$-ultrafiltro entonces $X \in \mathcal{F}$, lo que implica que $\mathcal{F} \in S(X)$. Por lo tanto $S(X) = \mathcal{W}_{\mathcal{L}}X$. □

De esa forma, la colección $\{S(A) : A \in \mathcal{L}\}$ forma una base para los cerrados de alguna topología en $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X$. Consideraremos al espacio $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X$ con la topología generada por $\{\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X \setminus S(A) : A \in \mathcal{L}\}$

2.11 Definición. Sea X un espacio y $\mathcal{L}$ una subretícula de $\mathcal{P}(X)$.

1. $\mathcal{L}$ es base para los cerrados de X si para cada A cerrado en X y para cada $x \in X - A$ existe $B \in \mathcal{L}$ tal que $A \subseteq B$ y $x \notin B$.
2. $\mathcal{L}$ es retícula regular si dados $A \in L$ y $x \in X - A$, existe $B \in \mathcal{L}$ tal que $x \in B \subseteq X - A$.
3. $\mathcal{L}$ es retícula normal si dados $A, B \in \mathcal{L}$ y $A \cap B = \varnothing$, entonces existen $C, D \in \mathcal{L}$ tales que $A \subseteq X - C \subseteq D \subseteq X - B$.

Definamos $e : X \to \mathcal{P}(X)$ por $e(x) = \mathcal{U}_x = \{A \in \mathcal{L} : x \in A\}$.

2.12 Proposición. *Sean X un espacio Tychonoff y $\mathcal{L}$ una subretícula de $\mathcal{P}(X)$. Entonces son equivalentes:*

1. *$\mathcal{U}_x \in \mathcal{W}_{\mathcal{L}}X$ para todo $x \in X$, $e : X \to \mathcal{W}_{\mathcal{L}}X$ es encaje denso, $S(A) = cl_{\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X} e[A]$ para todo $A \in \mathcal{L}$ y $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X$ es compacto Hausdorff.*
2. *$\mathcal{L}$ es base para los cerrados en X, es retícula regular y es retícula normal.*

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$. Sea $A \in \mathcal{L}$ y $x \in X - A$, entonces $A \in \mathcal{L} - \mathcal{U}_x$. Como $\mathcal{U}_x$ es $\mathcal{L}-$ultrafiltro, por 1.10, existe $B \in \mathcal{U}_x$ tal que $B \cap A = \varnothing$, por lo tanto $\mathcal{L}$ es retícula regular.

Sea C un cerrado en X y $x \in X - C$. Como e es cerrada, existe un cerrado $\mathcal{D}$ en $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X$ tal que $e[C] = \mathcal{D} \cap e[X]$. Como e es inyectiva, $e(x) \notin e[C]$. Como $e(x) \in e[X]$, $e(x) \notin \mathcal{D}$. Como $\{S(A) : A \in \mathcal{L}\}$ es base para los cerrados de $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X$, existe $A_0 \in \mathcal{L}$ tal que $\mathcal{D} \subseteq S(A_0)$ y $e(x) \notin S(A_0)$. Entonces $A_0 \notin \mathcal{U}_x$ y $x \notin A_0$. Como $e[C] \subseteq S(A_0) \cap e[X]$, $C \subseteq e^{-1}[S(A_0) \cap e[X]]$. Observando que $x \in A$ si y sólo si $A \in e(x)$ si y sólo si $e(x) \in S(A)$, se tiene que $e^{-1}[S(A_0) \cap e[X]] = A_0$. Por lo tanto $C \subseteq A_0$ y $x \notin A_0$. Entonces $\mathcal{L}$ es base para los cerrados.

Sean $A, B \in \mathcal{L}$ disjuntos. Como $\varnothing = S(\varnothing) = S(A \cap B) = S(A) \cap (B)$ y $S(A), S(B)$ son cerrados en $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X$, existen $C, D \in \mathcal{L}$ tales que $S(A) \subseteq \mathcal{W}_{\mathcal{L}} - S(C)$, $S(B) \subseteq \mathcal{W}_{\mathcal{L}} - S(D)$ y $S(C) \cup S(D) = \mathcal{W}_{\mathcal{L}}X$, entonces $C \cup D = X$ y $A \subseteq X - C \subseteq D \subseteq X - B$. Por lo tanto $\mathcal{L}$ es una retícula normal.

Supongamos ahora que la condición 2 se cumple. Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{L}-$filtro tal que $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$. Supongamos que existe $A \in \mathcal{F} - \mathcal{U}_x$. Entonces $x \notin A$ y existe $B \in \mathcal{L}$ tal que $x \in B \subseteq X - A$, lo que implica que $B \in \mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$, lo cual es una contradicción puesto que $\varnothing = A \cap B \in \mathcal{F}$. Concluimos que $\mathcal{U}_x$ es un $\mathcal{L}-$ultrafiltro.

Sean $x, y \in X$, $x \neq y$. Como $\{y\}$ es cerrado y $\mathcal{L}$ es base para los cerrados, existe $A \in \mathcal{L}$ tal que $y \in A$ pero $x \notin A$, entonces $A \in e(y) - e(x)$. Por lo tanto e es inyectiva.

Sea $A \in \mathcal{L}$, como e es inyectiva y $e^{-1}[S(A) \cap e[X]] = A$, entonces $S(A) \cap e[X] = e[A]$. Como $\mathcal{L}$ es base para los cerrados, e es continua y cerrada en su imagen.

Sean $A, B \in \mathcal{L}$ tales que $e[A] \cap (\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X - S(B)) = \varnothing$. Entonces $A \subseteq B$. En efecto, sea $x \in A$, como $e(x) \in e[A]$, $e(x) \notin (\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X - S(B))$, entonces $e(x) \in S(B)$, por lo tanto $x \in B$.

Sea $B \in \mathcal{B}, B \neq X$. Entonces $X \nsubseteq B$. Por lo tanto $e[X] \cap (\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X - S(B)) \neq \varnothing$. Concluimos que cualquier abierto básico no vacío intersecta a la imagen de X bajo e.

Sea $A \in \mathcal{L}$, como $e[A] \subseteq S(A)$, y $S(A)$ es cerrado, $\mathrm{cl}_{\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X} e[A] \subseteq S(A)$. Sea $\mathcal{F} \in S(A)$ y $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X - S(B)$ abierto básico que contiene a $\mathcal{F}$. Entonces $A \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{B} \notin \mathcal{F}$, lo que implica que $A \nsubseteq B$, por lo tanto $e[A] \cap (\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X - S(B)) = \varnothing$, y $\mathcal{F} \in \mathrm{cl}_{\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X} e[A]$.

Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{W}_{\mathcal{L}}X$, tales que $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$. Sea $A \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$, por 1.10, existe $B \in \mathcal{V}$ tal que $A \cap B = \varnothing$. Como $\mathcal{L}$ es retícula normal, existen $C, D \in \mathcal{L}$ tales que $A \subseteq X \setminus C$, $B \subseteq X \setminus D$ y $C \cup D = X$. Por lo tanto $\mathcal{U} \in \mathcal{W}_{\mathcal{L}}X \setminus S(C)$, $\mathcal{V} \in \mathcal{W}_{\mathcal{L}}X \setminus S(D)$, y $(\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X \setminus S(C)) \cap (\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X \setminus S(D)) = \varnothing$. Concluimos que $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X$ es Hausdorff.

Para demostrar que $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X$ es compacto consideremos un filtro de cerrados $\mathcal{F}$ en $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X$. Como cada elemento $F \in \mathcal{F}$ es cerrado, entonces se puede escribir como intersección de cerrados básicos, es decir, $F = \cap\{S(A) : F \subseteq S(A), A \in \mathcal{L}\}$, de esta forma el conjunto $\mathcal{G} = \{S(A) : F \subseteq S(A), F \in \mathcal{F}, A \in \mathcal{L}\}$, es cerrado bajo intersecciones finitas y $\cap\mathcal{G} = \cap\mathcal{F}$. Si definimos $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{L} : S(A) \in \mathcal{G}\}$ entonces $\mathcal{B}$ es un $\mathcal{L}$-filtro y está contenido en algún $\mathcal{L}$-ultrafiltro $\mathcal{W}$. Observemos que si $S(A) \in \mathcal{G}$, entonces $A \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$ y $\mathcal{W} \in S(A)$. Por lo tanto $\mathcal{W} \in \cap\mathcal{G} = \cap\mathcal{F}$, demostrando que $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X$ es compacto. □

2.13 Definición. Sea X un espacio completamente regular. Sea $\mathcal{L}$ una subretícula de $\mathcal{P}(X)$ tal que $\mathcal{L}$ es base para los cerrados de X, es retícula regular y normal. Entonces diremos que $\mathcal{L}$ es una *base de Wallman* para X y que el espacio $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X$ es una compactación de tipo Wallman para X.

2.14 Teorema. *La compactación de Stone-Ĉech es de tipo Wallman*

En efecto, sean X un espacio completamente regular y $\mathcal{L} = \mathcal{Z}(X)$. En 1.7, demostramos que $\mathcal{L}$ es una subretícula de $\mathcal{P}(X)$.

Sea $A \subseteq X$ cerrado y $x \in X \setminus A$. Existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(x) = 0$, y $f[A] \subseteq \{1\}$. Sean $B = f^{-1}[[0, 1/2]]$ y $C = f^{-1}[1/2, 1]$. Entonces $B, C \in \mathcal{L}$, $A \subseteq C$, $x \in B \subseteq X \setminus A$ y $x \notin C$, lo cual implica que $\mathcal{L}$ es base para los cerrados de X y es retícula regular.

Ahora sean $A, B \in \mathcal{L}$ tales que $A \cap B = \varnothing$. Existen $f, g : X \to I$ continuas tales que $A = f^{-1}(0)$ y $B = g^{-1}(0)$. Consideremos la función continua $h : X \to I$ definida por

$$h(x) = \frac{(f(x))^2}{(f(x))^2 + (g(x))^2}.$$

Sean $C = h^{-1}[1/2, 1]$ y $D = h^{-1}[0, 1/2]$, entonces $A \subseteq X \setminus C \subseteq D \subseteq X \setminus B$. Entonces $\mathcal{L}$ es una base de Wallman.

Demostraremos ahora que $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}(X) \equiv_X \beta X$. Sean Z_1, Z_2 nulos de X. Entonces $Z_1, Z_2 \in \mathcal{L}$ y

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X}(Z_1) \cap \mathrm{cl}_{\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X}(Z_2) = S(Z_1) \cap S(Z_2) = S(Z_1 \cap Z_2) = \mathrm{cl}_{\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X}(Z_1 \cap Z_2).$$

Por 2.6, $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}(X)$ es equivalente a la compactación de Stone-Ĉech.

2.15 Teorema. *Sea X un espacio localmente compacto no compacto.Si $\mathcal{L} = \{Z(f) : f \in C(X)$ y existe $C \subseteq X$ compacto y existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(X - C) = \{a\}\}$, entonces $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}X \equiv_X \alpha X$.*

Demostración. Observemos que $\varnothing$ y X pertenecen a $\mathcal{L}$ puesto que la función idéntica 1 y la función idéntica 0 son continuas. Si $Z(f), Z(g) \in \mathcal{L}$, entonces existen dos conjuntos compactos $C, D \subseteq X$ y dos números reales a, b tales que $f(X - C) = a$ y $g(X - D) = b$. Como $Z(f) \cap Z(g) = Z(f^2 + g^2)$ y $(f^2 + g^2)(X - (C \cup D)) = a^2 + b^2$ entonces $Z(f) \cap Z(g)$ pertenece a $\mathcal{L}$. Como $Z(f) \cup Z(g) = Z(fg)$ y $(fg)(X - (C \cup D)) = ab$ entonces $Z(f) \cup Z(g)$ pertenece a $\mathcal{L}$. Por lo tanto $\mathcal{L}$ es una subretícula de $\mathcal{P}(X)$.

Sea C un cerrado en X y $x \in X - C$. Como $X - C$ es abierto, entonces existe una vecindad compacta $D \subseteq X$ tal que $x \in \mathrm{int}(D) \subseteq D \subseteq X - C$. Existe $f \in C(X)$ tal que $f(x) = 1$ y $f(X - \mathrm{int}(D)) \subseteq \{0\}$. Por lo tanto $C \subseteq X - D \subseteq X - \mathrm{int}(D) \subseteq Z(f)$, $Z(f) \in \mathcal{L}$ y $x \notin Z(f)$ demostrando que $\mathcal{L}$ es base para los cerrados de X.

Sea $Z(f)$ un elemento en $\mathcal{L}$ y $x \notin Z(f)$. Como $X - Z(f)$ es abierto entonces existe una vecindad compacta $D \subseteq X$ tal que $x \in \mathrm{int}(D) \subseteq D \subseteq X - Z(f)$. Existe $g \in C(X)$ tal que $g(x) = 0$ y $g(X - \mathrm{int}(D)) \subseteq \{1\}$. Por lo tanto $Z(f) \subseteq X - D \subseteq X - \mathrm{int}(D) \subseteq X - Z(g)$ y $x \in Z(g)$. Como $g(X - D) \subseteq \{1\}$, $Z(g) \in \mathcal{L}$, $x \in Z(g)$ y $Z(g) \cap Z(f) = \varnothing$. Concluimos que $\mathcal{L}$ es una retícula regular.

Sean $Z(f), Z(g)$ dos elementos de $\mathcal{L}$ disjuntos. Entonces existen dos conjuntos compactos $C, D \subseteq X$, y dos números reales a, b tales que $f(X - C) = a$ y $g(X - D) = b$. Sea

$$h = \frac{f^2}{f^2 + g^2},$$

entonces $h : X \to I$ es continua, $h(X - (C \cup D))) = \frac{a^2}{a^2+b^2}$ y

$$Z(f) \subseteq X - h^{-1}([1/2, 1]) \subseteq h^{-1}([0, 1/2]) \subseteq X - Z(g).$$

Definamos las siguientes funciones

$$h'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x - 1 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$h''(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Resulta que $h^{-1}([1/2,1]) = Z(h'' \circ h)$ y $h^{-1}([0,1/2]) = Z(h' \circ h)$. Por lo tanto, los conjuntos nulos $Z(h' \circ h)$ y $Z(h'' \circ h)$ pertenecen a $\mathcal{L}$, demostrando así que $\mathcal{L}$ es una retícula normal.

Ahora sea $\mathcal{F} = \{Z(f) \in \mathcal{L} : X - C \subseteq Z(f), C \text{ compacto } \}$. Como X no es compacto resulta ser que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{L}$-filtro.

Demostraremos que $\mathcal{F}$ es el único $\mathcal{L}$-ultrafiltro libre en X. Sea $Z(g) \in \mathcal{L}$. existe un compacto C tal que $g(X - C) \subseteq \{a\}$ para alguna $a \in \mathbb{R}$. Si $a \neq 0$ entonces la función $g - a$ evaluada en cualquier punto de $X - C$ es cero, es decir $X - C \subseteq Z(g - a)$, lo cual implica que $Z(g - a) \in \mathcal{F}$ y $Z(g - a) \cap Z(g) = \varnothing$.

Concluimos que si $Z(g) \in \mathcal{L}$ y $Z(g) \cap F \neq \varnothing$ para todo elemento $F \in \mathcal{F}$, entonces $a = 0$, $Z(g) \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es $\mathcal{L}$-ultrafiltro.

Tomemos $x \in X$ y C una vecindad compacta de x. Existe $f \in C(X)$ tal que $f(x) = 1$ y $f(X - \text{int}(C)) \subseteq 0$, entonces $X - C \subseteq Z(f)$, por lo tanto $Z(f) \in \mathcal{F}$ y $x \notin Z(f)$ demostrando que $\mathcal{F}$ es libre.

Sea $\mathcal{G}$ un $\mathcal{L}$-ultrafiltro, supongamos que existe $Z(f) \in \mathcal{G} - \mathcal{F}$, entonces existe un compacto C tal que $f(X - C) = a$ para algún número real a, como $Z(f) \notin \mathcal{F}$, $a \neq 0$ lo que implica que $X - C \subseteq X - Z(f)$. Por lo tanto $Z(f) \subseteq C$. Como C es compacto, $Z(f)$ es compacto y $\mathcal{G}$ es fijo. Concluimos que $\mathcal{F}$ es el único $\mathcal{L}$-ultrafiltro libre en X. □

2.16 Proposición. *Sean X un espacio Tychonoff y $\mathcal{L} = \{X \setminus U : U \textit{es abierto en } X\}$. Entonces $\mathcal{L}$ es base de Wallman si y sólo si X es normal.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{L}$ es base de Wallman. Sean C, D subconjuntos cerrados disjuntos de X. Entonces C y D pertenecen a $\mathcal{L}$. Como $\mathcal{L}$ es base de Wallman, existen E, F elementos de $\mathcal{L}$ tales que $C \subseteq X \setminus E, D \subseteq X \setminus F$ y $E \cup F = X$. Como los abiertos $X \setminus E$ y $X \setminus F$ son ajenos entoces X es normal.

Supongamos ahora que X es normal. Sean $C, D \in \mathcal{L}$ disjuntos, entonces existen abiertos disjuntos U, V tales que $C \subseteq U$ y $D \subseteq V$. Tomando $E = X \setminus U$ y $F = X \setminus V$, entonces $\mathcal{L}$ es base de Wallman. □

2.3. Compactaciones de Fan-Gottesman

En [3], Fan y Gottesman propusieron un método para contruir extensiones compactas. En esta sección estudiaremos dicho método. Sea X un espacio regular. Una FG-base $\mathcal{B}$ es una base de abiertos de X que satisface:

1. $\varnothing, X \in \mathcal{B}$,
2. si $U, V \in \mathcal{B}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{B}$,
3. si $U \in \mathcal{B}$, entonces $X \setminus \text{cl}_X U \in \mathcal{B}$ y
4. para cada abierto U en X y $V \in \mathcal{B}$ tal que $\text{cl}_X V \subseteq U$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $\text{cl}_X V \subseteq W \subseteq \text{cl}_X W \subseteq U$.

2.17 Proposición. *Sea $\mathcal{B}$ una FG-base en X. Sean $U, V \in \mathcal{B}$ y W un abierto tales que $cl_X U \cap cl_X V \subseteq W$, entonces existe $R \in \mathcal{B}$ tal que $cl_X U \cap cl_X V \subseteq R \subseteq cl_X R \subseteq W$.*

Demostración. Sean $U, V \in \mathcal{B}$ y W abierto tales que $\mathrm{cl}_X U \cap \mathrm{cl}_X V \subseteq W$, entonces $\mathrm{cl}_X U \subseteq W \cup (X \setminus \mathrm{cl}_X V)$. Por definición de $\mathcal{B}$, existe $R_1 \in \mathcal{B}$ tal que $\mathrm{cl}_X U \subseteq R_1 \subseteq \mathrm{cl}_X R_1 \subseteq W \cup (X \setminus \mathrm{cl}_X V)$, lo cual implica que $\mathrm{cl}_X V \subseteq W \cup (X \setminus \mathrm{cl}_X R_1)$. De nuevo por definición de $\mathcal{B}$, existe R_2 tal que $\mathrm{cl}_X V \subseteq R_2 \subseteq \mathrm{cl}_X R_2 \subseteq W \cup (X \setminus \mathrm{cl}_X R_1)$. Por lo tanto $R = R_1 \cap R_2$ cumple con las condiciones pedidas. $\square$

2.18 Corolario. *Sea $\mathcal{B}$ una FG-base en X. Sean $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{B}$ y W abierto tales que $cl_X U_1 \cap \ldots \cap cl_X U_n \subseteq W$, entonces existe $R \in \mathcal{B}$ tal que $cl_X U_1 \cap \ldots \cap cl_X U_n \subseteq R \subseteq cl_X R \subseteq W$.*

Una familia no vacía $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ es una familia *encuadernada* si para cada $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, se cumple $\mathrm{cl}_X F_1 \cap \ldots \cap \mathrm{cl}_X F_n \neq \varnothing$. Sea $b_{\mathcal{B}} X = \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} : \mathcal{F}$ es una familia encuadernada maximal$\}$. Para cada $U \in \mathcal{B}$, sea $S(U) = \{\mathcal{F} \in b_{\mathcal{B}} X : \mathrm{cl}_X V \subseteq U$ para algún $V \in \mathcal{F}\}$.

2.19 Proposición. $S(\varnothing) = \varnothing, S(X) = b_{\mathcal{B}} X$.

Demostración. Es claro que $\varnothing \subseteq S(\varnothing)$ y $S(X) \subseteq b_{\mathcal{B}} X$. Sea $\mathcal{F} \in b_{\mathcal{B}} X$, entonces $\varnothing \notin \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \notin S(\varnothing)$, por lo tanto $b_{\mathcal{B}} X \subseteq b_{\mathcal{B}} X \setminus S(\varnothing)$. Sean $\mathcal{F} \in b_{\mathcal{B}} X$ y $V \in \mathcal{F}$, entonces $\mathrm{cl}_X V \subseteq X$ y $\mathcal{F} \in S(X)$, por lo tanto $b_{\mathcal{B}} X \subseteq S(X)$. Además, si $S(A) = \varnothing$ entonces $A = \varnothing$. En efecto, sean A un elemento de $\mathcal{B}$ no vacío y $x \in A$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq \mathrm{cl}_X B \subseteq A$. Como B pertenece a alguna familia encuadernada maximal, $S(A)$ no es vacío. $\square$

2.20 Proposición. *Si U y V son elementos de $\mathcal{B}$ entonces $S(U \cap V) = S(U) \cap S(V)$.*

Demostración. Sean $U, V \in \mathcal{B}$, y $\mathcal{F} \in S(U \cap V)$. Por definición existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{cl}_X F \subseteq U \cap V$. Por lo tanto $\mathcal{F} \in S(U) \cap S(V)$. Ahora sea $\mathcal{G} \in S(U) \cap S(V)$. Existen $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ tales que $\mathrm{cl}_X G_1 \subseteq U$ y $\mathrm{cl}_X G_2 \subseteq V$. Entonces $\mathrm{cl}_X G_1 \cap \mathrm{cl}_X G_2 \subseteq U \cap V$. Por definición de $\mathcal{B}$, existe $R \in \mathcal{B}$ tal que $\mathrm{cl}_X G_1 \cap \mathrm{cl}_X G_2 \subseteq R \subseteq \mathrm{cl}_X R \subseteq U \cap V$. Como $\mathcal{G}$ es maximal, es claro que $R \in \mathcal{G}$. Por lo tanto $\mathcal{G} \in S(U \cap V)$. $\square$

La proposición anterior también demuestra que $\{S(U) : U \in \mathcal{B}\}$ es una base para alguna topología $\tau_{\mathcal{B}}$ en $b_{\mathcal{B}} X$.

2.21 Proposición. *Sean $\mathcal{U} \in b_{\mathcal{B}} X, U \in \mathcal{B}$ y $U \notin \mathcal{U}$. Entonces existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $cl_X U \cap cl_X V = \varnothing$. En particular $\mathcal{U} \in S(X \setminus cl_X U)$.*

Demostración. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{U}$ se cumple que

$$\mathrm{cl}_X F_1 \cap \ldots \cap \mathrm{cl}_X F_n \cap \mathrm{cl}_X U \neq \varnothing.$$

Entonces es claro que $\mathcal{U} \cup \{U\}$ es una familia encuadernada. Como $\mathcal{U}$ es maximal, entonces $U \in \mathcal{U}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe una familia finita $\{F_1, \ldots, F_n\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\mathrm{cl}_X F_1 \cap \ldots \cap \mathrm{cl}_X F_n \cap \mathrm{cl}_X U = \varnothing$. Entonces $\mathrm{cl}_X F_1 \cap \ldots \cap \mathrm{cl}_X F_n \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X U$. Por definición de $\mathcal{B}$, existe $R \in \mathcal{B}$ tal que

$$\mathrm{cl}_X F_1 \cap \ldots \cap \mathrm{cl}_X F_n \subseteq R \subseteq \mathrm{cl}_X R \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X U.$$

Es claro que $\mathcal{U} \cup \{R\}$ es una familia encuadernada, y por lo tanto $R \in \mathcal{U}$. Concluimos que $\mathrm{cl}_X R \cap \mathrm{cl}_X U = \varnothing$ y $\mathcal{U} \in S(X \setminus \mathrm{cl}_X U)$. □

2.22 Proposición. *El espacio $b_{\mathcal{B}}X$ con la topología $\tau_{\mathcal{B}}$ generada por $\{S(U) : U \in \mathcal{B}\}$ es Hausdorff.*

Demostración. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in b_{\mathcal{B}}X$ tales que $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$. Existen $U \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$ y $V \in \mathcal{V}$ tales que $\mathrm{cl}_X U \cap \mathrm{cl}_X V = \varnothing$. Entonces $\mathrm{cl}_X U \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X V$. Por definición de $\mathcal{B}$, existe $R \in \mathcal{B}$ tal que $\mathrm{cl}_X U \subseteq R \subseteq \mathrm{cl}_X R \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X V$. Por lo tanto $\mathcal{U} \in S(R)$. Además, es fácil notar que $R \notin \mathcal{V}$ porque $\mathrm{cl}_X R \cap \mathrm{cl}_X V = \varnothing$. Por la proposición 2.21 tenemos que $\mathcal{V} \in S(X \setminus \mathrm{cl}_X R)$. Como $S(R) \cap S(X \setminus \mathrm{cl}_X R) = \varnothing$, concluimos que $b_{\mathcal{B}}X$ es Hausdorff.

□

2.23 Proposición. *Para cada $x \in X$, la familia $\mathcal{U}_x = \{U \in \mathcal{B} : x \in cl_X U\}$ es una familia encuadernada maximal.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} \in b_{\mathcal{B}}X$ tal que $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$ y supongamos que existe $V \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{U}_x$. Entonces $x \in X \setminus \mathrm{cl}_X V$, por lo tanto existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq \mathrm{cl}_X B \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X V$. Observamos que $B \in \mathcal{U}_x$, como $\mathrm{cl}_X B \cap \mathrm{cl}_X V = \varnothing$, entonces $B \notin \mathcal{F}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{U}_x \in b_{\mathcal{B}}X$. □

2.24 Corolario. *Sea $A \in \mathcal{B}$. Si $S(A) = \varnothing$ entonces $A = \varnothing$.*

Demostración. Sea A un elemento de $\mathcal{B}$ no vacío. Sea $x \in A$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq \mathrm{cl}_X B \subseteq A$. Por lo tanto $B \in \mathcal{U}_x$ y $\mathcal{U}_x \in S(A)$. □

2.25 Proposición. *Definamos una función $e : X \to b_{\mathcal{B}}X$ por $e(x) = \mathcal{U}_x$ para cada $x \in X$. Entonces e es un encaje denso.*

Demostración. Para demostrar que e es inyectiva, consideremos dos elementos $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ e $y \notin \mathrm{cl}_X B$. Por lo tanto $B \in \mathcal{U}_x \setminus \mathcal{U}_y$.

Ahora sea $\varnothing \neq U \in \mathcal{B}$, y $x \in U$. Existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq \mathrm{cl}_X B \subseteq U$. Entonces $B \in \mathcal{U}_x$ y $\mathcal{U}_x \in S(U)$. Por lo tanto $e(x) \in S(U)$ para todo $x \in U$. Ahora supongamos que existe $x \in X$ tal que $\mathcal{U}_x \in S(U)$, por definición existe $V \in \mathcal{U}_x$ tal que $\mathrm{cl}_X V \subseteq U$, como $x \in \mathrm{cl}_X V$ entonces $x \in U$. Las dos últimas afirmaciones demuestra que $U = e^{-1}[S(U)]$. Como e es inyectiva, obtenemos que $e[U] = S(U) \cap e[X]$ lo que demuestra también que $e[X]$ es denso en $b_{\mathcal{B}}X$ y que e es continua y abierta sobre su imagen. □

2.26 Corolario. *Para cada $U \in \mathcal{B}$ se tiene que $cl_{b_{\mathcal{B}}X} e[U] = cl_{b_{\mathcal{B}}X} S[U]$.*

Demostración. Sean $\mathcal{U} \in \mathrm{cl}_{b_{\mathcal{B}}X} S[U]$ y $B \in \mathcal{B}$ tales que $\mathcal{U} \in S(B)$. Entonces $U \in \mathcal{U}$ y existe $C \in \mathcal{U}$ tal que $\mathrm{cl}_X C \subseteq B$. Por lo tanto $\mathrm{cl}_X U \cap \mathrm{cl}_X C \neq \varnothing$. En consecuencia

$$\varnothing \neq e[\mathrm{cl}_X U] \cap e[\mathrm{cl}_X C] \subseteq \mathrm{cl}_{b_{\mathcal{B}}X} e[U] \cap e[B] \subseteq \mathrm{cl}_{b_{\mathcal{B}}X} e[U] \cap S(B).$$

Concluimos que $\mathcal{U} \in \mathrm{cl}_{b_{\mathcal{B}}X} e[U]$ La inclusión inversa siempre se cumple y el corolario queda demostrado. $\square$

2.27 Proposición. *Si $U \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{U} \in b_{\mathcal{B}}X$, entonces $U \in \mathcal{U}$ si y sólo si $\mathcal{U} \in$ $cl_{b_{\mathcal{B}}X} S(U)$*

Demostración. Sean $U \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{U} \in b_{\mathcal{B}}X$. Supongamos que $\mathcal{U}$ no se encuentra en $\mathrm{cl}_{b_{\mathcal{B}}X} S(U)$. Por lo tanto existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{U} \in S(B)$ y $S(B) \cap S(U) = \varnothing$. Entonces $B \cap U = \varnothing$, y $B \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X U$. Como $\mathcal{U} \in S(B)$, existe $R \in \mathcal{U}$ tal que $R \subseteq \mathrm{cl}_X R \subseteq B \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X U$. Por lo tanto $\mathrm{cl}_X R \cap \mathrm{cl}_X U \subseteq \varnothing$ y U no pertenece a $\mathcal{U}$. Ahora si $U \notin \mathcal{U}$, por 2.21, $\mathcal{U}$ se encuentra en $S(X \setminus \mathrm{cl}_X U)$. Como $X \setminus \mathrm{cl}_X U \cap U = \varnothing$, entonces $\mathcal{U} \notin \mathrm{cl}_{b_{\mathcal{B}}X} S(U)$. $\square$

2.28 Proposición. *Si $\mathcal{B}$ es una FG-base en un espacio X entonces $b_{\mathcal{B}}X$ es compacto.*

Demostración. Sea $\mathfrak{C}$ un filtro de cerrados en $b_{\mathcal{B}}X$ y supongamos que $\cap\mathfrak{C} = \varnothing$. Sea

$$\mathcal{G} = \{V \in \mathcal{B} : \text{existen } \mathcal{C} \in \mathfrak{C} \text{ y } R \in \mathcal{B} \text{ tales que } \mathcal{C} \subseteq S(R) \text{ y } \mathrm{cl}_X R \subseteq V\}.$$

Entonces $\mathcal{G}$ es una familia encuadernada. En efecto, sean $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{G}$, existen $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n \in \mathfrak{C}$ y $R_1, \ldots, R_n \in \mathcal{B}$ tales que $\mathcal{C}_i \subseteq S(R_i)$ y $\mathrm{cl}_X R_i \subseteq V_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Como $\mathfrak{C}$ es filtro, $\varnothing \neq \cap_{i=1}^n \mathcal{C}_i \subseteq S(\cap_{i=1}^n R_i)$, entonces $\varnothing \neq \cap_{i=1}^n R_i \subseteq \cap_{i=1}^n V_i$. Por lo tanto $\mathcal{G}$ es una familia encuadernada y por el Lema de Zorn existe una familia encuadernada maximal $\mathcal{W}$ tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{W}$.

Como $\cap\mathfrak{C} = \varnothing$, existe $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$ tal que $\mathcal{W} \notin \mathcal{C}$, como $\mathcal{C}$ es cerrado, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{W} \in S(B) \subseteq b_{\mathcal{B}}X \setminus \mathcal{C}$. Por definición de $S(B)$, existe $U \in \mathcal{W}$ tal que $\mathrm{cl}_X U \subseteq B$. Por definición de $\mathcal{B}$, existen $R, T \in \mathcal{W}$ tales que

$$\mathrm{cl}_X U \subseteq R \subseteq \mathrm{cl}_X R \subseteq T \subseteq \mathrm{cl}_X T \subseteq B.$$

Tomando complementos tenemos

$$X \setminus B \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X T \subseteq X \setminus T \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X R \subseteq X \setminus R \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X U.$$

Entonces $\mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X T) \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X R$. Como $\mathrm{cl}_{b_{\mathcal{B}}} X S(T) \subseteq S(B)$, entonces $\mathcal{C} \subseteq b_{\mathcal{B}}X \setminus \mathrm{cl}_{b_{\mathcal{B}}X} S(T) = S(X \setminus \mathrm{cl}_X T)$. Por lo tanto $X \setminus \mathrm{cl}_X R$ pertenece a $\mathcal{W}$, lo cual es una contradicción puesto que $\mathrm{cl}_X U \cap X \setminus \mathrm{cl}_X R \subseteq \mathrm{cl}_X U \cap X \setminus \mathrm{cl}_X U = \varnothing$. finalmente podemos concluir que $b_{\mathcal{B}}X$ es compacto. $\square$

2.29 Corolario. *Cualquier espacio X en el que exista una FG-base es un espacio Tychonoff.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una FG-base en X. Entonces X está encajado en el espacio compacto $b_{\mathcal{B}}X$. Por lo tanto X es espacio Tychonoff. $\square$

2.30 Definición. Una compactación Y de un espacio X es llamada *compactación de Fan-Gottesman* si existe una FG-base en X tal que $Y \equiv_X b_{\mathcal{B}}X$.

2.31 Proposición. *Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ dos FG-bases para un espacio X tales que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. Entonces $b_{\mathcal{B}}X \leq b_{\mathcal{C}}X$.*

Demostración. Definamos una función $f : b_{\mathcal{C}}X \to b_{\mathcal{B}}X$ dada por $f(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \cap \mathcal{B}$. Demostraremos que $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cap \mathcal{B}$ es una familia encuadernada maximal en $\mathcal{B}$. Es claro que $\mathcal{V}$ es familia encuadernada en $\mathcal{B}$. Sea $\mathcal{F}$ una familia encuadernada en $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}$. Supongamos que existe $V \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{V}$, entonces V no pertenece a $\mathcal{U}$. Por 2.21, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\mathrm{cl}_X V \cap \mathrm{cl}_X U = \varnothing$. Entonces $\mathrm{cl}_X V \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X U$. Por definición de $\mathcal{B}$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $\mathrm{cl}_X V \subseteq W \subseteq \mathrm{cl}_X W \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X U$. Tomando complementos tenemos $\mathrm{cl}_X U \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X W \subseteq X \setminus W \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X V$, por lo tanto $X \setminus \mathrm{cl}_X W \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}$, lo cual es una contradicción puesto que $\mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X W) \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X V$ y V pertenece a $\mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{V}$ es una familia encuadernada maximal en $\mathcal{B}$.

Ahora demostraremos que f es continua. Sean $\mathcal{U} \in b_{\mathcal{C}}X$ y $U \in \mathcal{B}$ tales que $f(\mathcal{U}) \in S_{\mathcal{B}}(U)$. Como $f(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \cap \mathcal{B}$, existe $V \in \mathcal{U} \cap \mathcal{B}$ tal que $\mathrm{cl}_X V \subseteq U$. Por definición de $\mathcal{B}$ existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $\mathrm{cl}_X V \subseteq W \subseteq \mathrm{cl}_X W \subseteq U$. Observando que $W \in \mathcal{C}$ obtenemos que $\mathcal{U} \in S_{\mathcal{C}}(W)$. Demostraremos ahora que $f[S_{\mathcal{C}}(W)] \subseteq S_{\mathcal{B}}(U)$. Sea $\mathcal{V} \in S_{\mathcal{C}}(W)$, existe $F \in \mathcal{V}$ tal que $\mathrm{cl}_X F \subseteq W$, entonces $W \in \mathcal{V} \cap \mathcal{B} = f(V)$. Por lo tanto $f(V) \in S_{\mathcal{B}}(U)$. Concluimos que f es continua.

Si $e_{\mathcal{B}} : X \to b_{\mathcal{B}}X$ es el encaje definido por $e_{\mathcal{B}}(x) = \{U \in \mathcal{B} : x \in \mathrm{cl}_X U\}$, y $e_{\mathcal{C}} : X \to b_{\mathcal{C}}X$ es el encaje definido por $e_{\mathcal{C}}(x) = \{V \in \mathcal{C} : x \in \mathrm{cl}_X V\}$, entonces $e_{\mathcal{B}}(x) = e_{\mathcal{C}}(x) \cap \mathcal{B}$. Por lo tanto $f(e_{\mathcal{C}}(x)) = e_{\mathcal{B}}(x)$ para todo $x \in X$. Concluimos que $b_{\mathcal{B}}X \leq b_{\mathcal{C}}X$. $\square$

2.32 Proposición. *Sea X un espacio localmente compacto no compacto y $\mathcal{B} = \{U \subseteq X : U$ es abierto y $cl_X U$ ó $X \setminus U$ es compacto $\}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una FG-base para X y $b_{\mathcal{B}}X$ es la compactación por un punto de X.*

Demostración. Primero demostraremos que $\mathcal{B}$ es una FG-base. Es claro que $\varnothing$ y X pertenecen a $\mathcal{B}$. Sea $U \subseteq X$ y $x \in U$. Como X es localmente compacto existe un abierto V tal que $x \in V \subseteq \mathrm{cl}_X V \subseteq U$ y $\mathrm{cl}_X V$ es compacto. Como $V \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ es base para los abiertos de X. Sean U, V elementos de $\mathcal{B}$. Si los conjuntos $X \setminus U$ y $X \setminus V$ son compactos entonces $X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ es compacto, en consecuencia $U \cap V$ es un elemento de $\mathcal{B}$. Si $\mathrm{cl}_X U$ es compacto, $\mathrm{cl}_X(U \cap V) \subseteq \mathrm{cl}_X U$ es compacto. Por lo tanto $U \cap V$ es un elemento de $\mathcal{B}$. Sea $U \in \mathcal{B}$, por demostrar $X \setminus \mathrm{cl}_X U$ pertenece a $\mathcal{B}$. Si $\mathrm{cl}_X U$ es compacto, $X \setminus \mathrm{cl}_X U \in \mathcal{B}$ puesto que su complemento es compacto. Si $X \setminus U$ es compacto, como $\mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X U) \subseteq \mathrm{cl}_X(X \setminus U) = X \setminus U$, entonces $\mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X U)$ es compacto, por lo tanto $X \setminus \mathrm{cl}_X U$ pertenece a $\mathcal{B}$. Ahora sea U abierto en X y $V \in \mathcal{B}$ tal que $\mathrm{cl}_X V \subseteq U$. Si $\mathrm{cl}_X V$ es compacto, existe una cantidad finita $F_1, \ldots, F_n$ de elementos de la base $\mathcal{B}$ tal que

$$\mathrm{cl}_X V \subseteq F_1 \cup \ldots \cup F_n \subseteq \mathrm{cl}_X(F_1 \cup \ldots \cup F_n) \subseteq U.$$

Sea $B = F_1 \cup \ldots \cup F_n$, como $\mathcal{B}$ es cerrado bajo intersecciones finitas, $B \in \mathcal{B}$, por lo tanto $\mathrm{cl}_X V \subseteq B \subseteq \mathrm{cl}_X B \subseteq U$. Ahora, si $X \setminus V$ es compacto, $X \setminus U$ es compacto ya que $X \setminus U \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X V \subseteq V$, es un subespacio cerrado de un compacto. Aplicando el argumento anterior, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que

$$X \setminus U \subseteq B \subseteq \mathrm{cl}_X B \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X V.$$

Tomando complementos y observando que $X \setminus B$ es cerrado tenemos que

$$\mathrm{cl}_X V \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X B \subseteq \mathrm{cl}_X (X \setminus \mathrm{cl}_X B) \subseteq X \setminus B \subseteq U.$$

Concluimos que $\mathcal{B}$ es una FG-base en X.

Ahora demostraremos que $b_{\mathcal{B}} X$ es la compactación por un punto de X. Demostraremos que $|b_{\mathcal{B}} X \setminus e[X]| = 1$, donde $e : X \to b_{\mathcal{B}} X$ es el encaje definido en 2.25. Definamos $\mathcal{F} = \{U \in \mathcal{B} : X \setminus U \text{ es compacto}\}$. Sean $U_1, \ldots, U_n$ elementos de $\mathcal{F}$. Si $\cap_{i=1}^n \mathrm{cl}_X U_i = \varnothing$, entonces

$$X = \cup_{i=1}^n (X \setminus \mathrm{cl}_X U_i) \subseteq \cup_{i=1}^n (X \setminus U_i).$$

Como X no es compacto entonces $\cap_{i=1}^n \mathrm{cl}_X U_i \neq \varnothing$,. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es una familia encuadernada. Veamos ahora que $\mathcal{F}$ es maximal. Sea $\mathcal{G}$ una familia encuadernada tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Supongamos que existe $G \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. Entonces $\mathrm{cl}_X G$ es compacto. Como X es localmente compacto, existe un abierto B tal que $\mathrm{cl}_X B$ es compacto y $\mathrm{cl}_X G \subseteq B \subseteq \mathrm{cl}_X B$. Como X no es compacto, el conjuno $X \setminus \mathrm{cl}_X B$ no es vacío y $\mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X B) \cap \mathrm{cl}_X G = \varnothing$. Lo que nos lleva a una contradicción puesto que $\mathcal{G}$ es una familia encuadernada que contiene a los conjuntos $X \setminus \mathrm{cl}_X B$ y $\mathrm{cl}_X G$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es una familia encuadernada maximal. Ahora demostraremos que $\mathcal{F}$ no es imagen bajo el encaje e de algún $x \in X$. En efecto, sea $x \in X$. Existe B abierto tal que $x \in B$ y $\mathrm{cl}_X B$ es compacto, entonces $X \setminus \mathrm{cl}_X B$ es un elemento de $\mathcal{F}$ cuya cerradura no contiene a x, en consecuencia $\mathcal{F} \neq e(x)$.

Demostraremos ahora que $b_{\mathcal{B}} X \setminus e[X] = \{\mathcal{F}\}$. Supongamos que existe una familia encuadernada $\mathcal{G} \in b_{\mathcal{B}} X \setminus e[X]$ diferente de $\mathcal{F}$. Entonces $\cap\{\mathrm{cl} G : G \in \mathcal{G}\} = \varnothing$ y existen abiertos $A, B \in \mathcal{B}$ tales que $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$ y $\mathrm{cl}_X A \cap \mathrm{cl}_X B = \varnothing$.

Como $A \in \mathcal{F}$, $X \setminus A$ es compacto. Como $\mathrm{cl}_X B \subseteq X \setminus A$, $\mathrm{cl}_X B$ es compacto. Como $\mathrm{cl}_X B \subseteq \cup\{X \setminus \mathrm{cl}_X G : G \in \mathcal{G}\}$, existe una cantidad finita $\{G_1, \ldots, G_n\}$ de elementos de $\mathcal{G}$ tales que $\mathrm{cl}_X B \subseteq \cup\{X \setminus \mathrm{cl}_X G_i : i = 1, \ldots, n\}$. Entonces $\mathrm{cl}_X B \cap_{i=1}^n \mathrm{cl}_X G_i = \varnothing$. Lo que es una contradicción ya que $\mathcal{G}$ es una familia encuadernada. □

2.33 Proposición. *Sean X un espacio normal, $\mathcal{B}$ la familia de los abiertos de X y $\mathcal{C}$ la familia de los cerrados de X. Entonces $\mathcal{B}$ es una FG-base y $b_{\mathcal{B}} X$ es equivalente a la compactación de Wallman $\mathcal{W}_{\mathcal{C}} X$.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ una familia encuadernada maximal. Sea $\mathcal{G} = \{\mathrm{cl}_X B : B \in \mathcal{F}\}$. Entonces $\mathcal{G}$ es una familia de cerrados con la propiedad de intersección finita. Por el Lema de Zorn, existe un $\mathcal{C}$-ultrafiltro $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$. Demostraremos que $\mathcal{H}$ es único. Sea $\mathcal{H}'$ un $\mathcal{C}$-ultrafiltro tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}'$. Supongamos que existe $C \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}'$. Por 1.10 existe $D \in \mathcal{H}'$ tal que $C \cap D = \varnothing$. Como X es normal existen dos conjuntos abiertos U, V tales que $C \subseteq U, D \subseteq V$ y $\mathrm{cl}_X U \cap \mathrm{cl}_X V = \varnothing$. Es fácil observar que $\mathcal{F}$ contiene a los conjuntos U y V, lo cual es una contradicción, demostrando que existe un único $\mathcal{C}$-ultrafiltro $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ tal que $\{\mathrm{cl}_X B : B \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{H}_{\mathcal{F}}$.

Definamos una función $h : b_{\mathcal{B}} X \to \mathcal{W}_{\mathcal{C}} X$ dada por $h(\mathcal{F}) = \mathcal{H}_{\mathcal{F}}$. Demostraremos ahora que h es inyectiva. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos familias encuadernadas maximales distintas. Por 2.21, existen dos conjuntos $U, V \in \mathcal{B}$ tales que $U \in \mathcal{F}, V \in \mathcal{G}$ y $\mathrm{cl}_X U \cap \mathrm{cl}_X V = \varnothing$. Por lo tanto $\mathrm{cl}_X U \in h(\mathcal{F}) \setminus h(\mathcal{G})$, demostrando que h es inyectiva. Demostraremos que h es biyectiva. Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{C}$-ultrafiltro. Es claro que la familia $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{B} : \mathrm{cl}_X A \in \mathcal{F}\}$ es encuadernada. Sea $\mathcal{G}'$ una familia encuadernada tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}'$ y supongamos que existe $A \in \mathcal{G}' \setminus \mathcal{G}$. Por definición, $\mathrm{cl}_X A \notin \mathcal{F}$. Por 1.10, existe $C \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{cl}_X A \cap C = \varnothing$. Como X es normal, existen dos abiertos U, V tales $\mathrm{cl}_X A \subseteq U$, $C \subseteq V$ y $\mathrm{cl}_X U \cap \mathrm{cl}_X V = \varnothing$. Por lo tanto $V \in \mathcal{G}$, pero $\mathrm{cl}_X A \cap \mathrm{cl}_X V = \varnothing$ lo que es una contradicción. En consecuencia $\mathcal{G} \in b_{\mathcal{B}} X$. Como $\{\mathrm{cl}_X B : B \in \mathcal{G}\} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $h(\mathcal{G}) = \mathcal{F}$. Por lo tanto h es biyectiva.

Recordemos que $\{T(C) : C \in \mathcal{C}\}$, donde $T(C) = \{\mathcal{G} \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}} : C \in \mathcal{G}\}$, es una base para los abiertos de $\mathcal{W}_{\mathcal{C}} X$. Demostraremos que h es continua. Sea $\mathcal{F} \in b_{\mathcal{B}} X$ y $C \in \mathcal{C}$ tales que $h(\mathcal{F}) \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}} X \setminus T(C)$. Entonces $C \notin h(\mathcal{F})$. Por 1.10, existe $D \in h(\mathcal{F})$ tal que $C \cap D = \varnothing$. Como X es normal, existen $U, V \in \mathcal{B}$ tales que $C \subseteq U, D \subseteq V$, y $\mathrm{cl}_X U \cap \mathrm{cl}_X V = \varnothing$. Entonces $V \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \in S(X \setminus \mathrm{cl}_X U)$. Demostraremos que $h(S(X \setminus \mathrm{cl}_X U)) \subseteq \mathcal{W}_{\mathcal{C}} X \setminus T(C)$. Sea $\mathcal{G} \in S(X \setminus \mathrm{cl}_X U)$, por definición, existe $W \in \mathcal{G}$ tal que $\mathrm{cl}_X W \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X U$. Observando que $\mathrm{cl}_X W \cap C \subseteq (X \setminus \mathrm{cl}_X U) \cap C = \varnothing$, obtenemos que C no puede ser elemento de $h(\mathcal{G})$, dado que $\mathrm{cl}_X W$ sí lo es. Por lo tanto $h(\mathcal{G}) \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}} X \setminus T(C)$, lo que demuestra que h es continua, Como los espacios $b_{\mathcal{B}} X$ y $\mathcal{W}_{\mathcal{C}} X$ son compactos, h es un homeomorfismo.

Por último demostraremos que h conserva a los elementos de X. Sea $x \in X$, recordemos que $\mathcal{V}_x = \{C \in \mathcal{C} : x \in C\}$ es un elemento de $\mathcal{W}_{\mathcal{C}} X$ y $\mathcal{U}_x = \{U \in \mathcal{B} : x \in \mathrm{cl}_X U\}$ es un elemento de $b_{\mathcal{B}} X$. Pero $\{\mathrm{cl}_X B : B \in \mathcal{U}_x\} \subseteq \mathcal{V}_x$, por lo tanto $h(\mathcal{U}_x) = \mathcal{V}_x$. Concluimos que las compactaciones $b_{\mathcal{B}} X$ y $\mathcal{W}_{\mathcal{C}} X$ son equivalentes. □

2.4. Compactaciones de Freudenthal

Como veremos más adelante la Compactación de Freudenthal es un caso particular de la Compactación de Fan-Gottesman.

Recordemos que la frontera de un conjunto Y en un espacio X está definida por $\mathrm{cl}_X Y \cap \mathrm{cl}_(X \setminus Y)$ y es denotada por bd_Y.

2.34 Definición. Una extensión Y de un espacio X tiene *residuo relativamente cero dimensional* si el conjunto $\{W \subseteq Y : W$ es abierto y $\mathrm{bd}_Y W \subseteq X\}$ es base para los abiertos de Y. Un espacio X es *rimcompacto* si X admite una base cuyos elementos tienen frontera compacta.

2.35 Proposición. *Sea Y una compactación de un espacio X. Si $W \subseteq Y$ es un abierto tal que $\mathrm{bd}_Y W \subseteq X$ entonces $\mathrm{bd}_X(W \cap X)$ es compacto.*

Demostración. Observemos que

$$\mathrm{bd}_X(W \cap X) = \mathrm{cl}_X(W \cap X) \cap \mathrm{cl}_X(X \setminus (W \cap X)) =$$

$$\mathrm{cl}_Y W \cap X \cap (X \setminus W) = \mathrm{bd}_Y W \cap X = \mathrm{bd}_Y W.$$

La primera igualdad es consecuencia de la definición, la segunda se obtiene porque W es abierto y X es denso, y la última es por hipótesis. □

2.36 Corolario. *Si Y es compactación de X e Y tiene residuo relativamente cero dimensional, entonces X es rimcompacto.*

2.37 Definición. Sea Y una extensión compacta de X. Decimos que Y es *compactación de Freudenthal* de X, si Y tiene residuo relativamente cero dimensional.

2.38 Proposición. *Sea Y una compactación de Freudenthal de X y $\mathcal{B} = \{W \cap X : W$ es abierto en Y y $\mathrm{bd}_Y W \subseteq X\}$. Entonces $\mathcal{B}$ es cerrado bajo uniones finitas y es una FG-base en X.*

Demostración. Sean $U \cap X$ y $V \cap X$ elementos de $\mathcal{B}$. Como $\mathrm{bd}_Y(U \cup V) \subseteq \mathrm{bd}_Y U \cup \mathrm{bd}_Y V \subseteq X$ entonces $(U \cup V) \cap X$ es un elmento de $\mathcal{B}$.

Por 2.36, $\mathcal{B}$ es una base para los abiertos de X cuyos elementos tienen frontera compacta. Es claro que $\varnothing$ y X pertenecen a $\mathcal{B}$. Sean $U \cap X$ y $V \cap X$ elementos de $\mathcal{B}$. Entonces

$$\mathrm{bd}_Y(U \cap V) = \mathrm{cl}_Y(U \cap V) \cap \mathrm{cl}_Y(Y \setminus (U \cap V)) \subseteq$$

$$\mathrm{cl}_Y(U) \cap \mathrm{cl}_Y(V) \cap (Y \setminus U) \cup (Y \setminus V)) \subseteq \mathrm{bd}_Y U \cup \mathrm{bd}_Y V \subseteq X.$$

Por lo tanto $(U \cap X) \cap (V \cap X)$ pertenece a $\mathcal{B}$. Sea $U \cap X$ un elemento de $\mathcal{B}$. Como $\mathrm{cl}_X(U \cap X) = \mathrm{cl}_Y(U \cap X) \cap X = \mathrm{cl}_Y U \cap X$, entonces $X \setminus \mathrm{cl}_X(U \cap X) = Y \setminus \mathrm{cl}_Y U \cap X$. Además $\mathrm{bd}_Y(Y \setminus \mathrm{cl}_Y U) = \mathrm{bd}_Y(\mathrm{cl}_Y U) \subseteq \mathrm{bd}_Y U \subseteq X$. Por lo tanto $X \setminus \mathrm{cl}_X(U \cap X) = Y \setminus \mathrm{cl}_Y U \cap X$ pertenece a $\mathcal{B}$.

Ahora sea U un abierto en X y $V \cap X$ un elemento de $\mathcal{B}$ tales que $\mathrm{cl}_X(V \cap X) \subseteq U$. Por 2.35, $\mathrm{cl}_X(V \cap X)$ es compacto, y como $\mathcal{B}$ es cerrado bajo uniones finitas, entonces existe un elemento $W \cap X$ de $\mathcal{B}$ tal que $\mathrm{cl}_X(V \cap X) \subseteq W \cap X \subseteq \mathrm{cl}_X(W \cap X) \subseteq U$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es una FG-base en X. □

2.39 Proposición. *Sea Y una compactación de Freudenthal de X y $\mathcal{B} = \{W \cap X : W$ es abierto en Y y $\mathrm{bd}_Y W \subseteq X\}$. Entonces $Y \equiv_X b_{\mathcal{B}} X$.*

Demostración. Para cada $y \in Y$ sea $\mathcal{W}_y = \{W \cap X : W$ es abierto en $Y, \mathrm{bd}_Y W \subseteq X$ e $y \in \mathrm{cl}_Y W\}$. Es claro que $\mathcal{W}_y$ es una familia encuadernada. Sea $\mathcal{F}$ una familia encuadernada tal que $\mathcal{W}_y \subseteq \mathcal{F}$. Supongamos que existe $W \cap X \in \mathcal{B}$ tal que $W \cap X$ pertenece a $\mathcal{F}$ pero no a $\mathcal{W}_y$. Entonces $y \notin \mathrm{cl}_Y W$, como Y tiene residuo relativamente cero dimensional, entonces existe un abierto $U \subseteq Y$ tal que $\mathrm{bd}_Y U \subseteq X$ e $y \in U \subseteq \mathrm{cl}_Y U \subseteq Y \setminus \mathrm{cl}_Y W$. Entonces $y \in \mathrm{cl}_Y(U \cap X)$, en consecuencia $U \cap X$ pertenece a $\mathcal{W}_y \subseteq \mathcal{F}$, lo que nos lleva a una contradicción, ya que $\mathrm{cl}_X(U \cap X) \cap \mathrm{cl}_X(W \cap X) = \varnothing$. Concluimos que $\mathcal{W}_y$ es una familia encuadernada maximal.

Definamos una función $h : Y \to b_{\mathcal{B}}X$ por $h(y) = \mathcal{W}_y$. Es claro que la función h es inyectiva. Demostraremos que la función h es continua. Sea $y \in Y$ y $U \cap X \in \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{W}_y \in S(U \cap X)$. Por defineción, existe $V \cap X \in \mathcal{W}_y$ tal que $\mathrm{cl}_X(V \cap X) \subseteq U \cap X$. Además, como $\mathcal{B}$ es base, existe $W \cap X \in \mathcal{B}$ tal que

$$\mathrm{cl}_X(V \cap X) \subseteq W \cap X \subseteq \mathrm{cl}_X(W \cap X) \subseteq U \cap X.$$

En consecuencia $y \in W \cap X$. Ahora sea $z \in W \cap X$. Entonces $W \cap X \in \mathcal{W}_z$, lo que implica que $\mathcal{W}_z$ pertenece a $S(U \cap X)$. Por lo tanto h es continua y por lo tanto cerrada. Ahora demostraremos que la función es suprayectiva. Sean $\mathcal{F}$ una familia encuadernada maximal y $\mathcal{A} = \{\mathrm{cl}_Y W : W \cap X \in \mathcal{F}\}$, entonces $\mathcal{A}$ es una familia de cerrados en el compacto Y con la propiedad de la intersección finita, en consecuencia $\cap\mathcal{A} \neq \varnothing$. Si existen $y, z \in Y$ tales que $y, z \in \cap\mathcal{A}$. Como $\mathcal{B}$ es base para los abiertos de X, existe $U \cap X$ tal que $y \in U$ y $z \notin \mathrm{cl}_Y U$, entonces existe $V \cap X \in \mathcal{B}$ tal que $z \in V \mathrm{cl}_V \subseteq Y \setminus \mathrm{cl}_Y U$ lo que nos lleva a una contradicción ya que

$$\mathrm{cl}_X(U \cap X) \cap \mathrm{cl}_X(V \cap X) \subseteq \mathrm{cl}_Y U \cap \mathrm{cl}_Y V = \varnothing.$$

Por lo tanto $y = z$. Sea $\{y\} = \cap\mathcal{A}$, entonces $h(y) = \mathcal{F}$. Concluimos que Y es equivalente a $b_{\mathcal{B}}X$. □

2.5. Compactaciones de Smirnov

Smirnov utilizó la teoria de las proximidades para construir extensiones compactas. Njastad aprovechó esta teoría para caracterizar a las compactaciones de tipo Wallman.

Sea X un conjunto. Una relación binaria $\ll$ en $\mathcal{P}(X)$ es llamada *proximidad* si para cualesquiera subconjuntos $A, B, C \subseteq X$, se satisfacen las siguientes propiedades:

P1. $\varnothing \ll \varnothing$,

P2. $A \ll B$ implica $A \subseteq B$,

P3. $A \ll B$ implica $X - B \ll X - A$,

P4. $A \ll (B \cap C)$ si y sólo si $A \ll B$ y $A \ll C$,

P5. $A \ll B$ implica que existe $D \subseteq X$ tal que $A \ll D$ y $D \ll B$,

P6. Si $x, y \in X$ y $x \neq y$ entonces $\{x\} \ll X - \{y\}$.

2.40 Proposición. *Si $A \subseteq B \ll C \subseteq D$ entonces $A \ll D$*

Demostración. Como $B \ll C$ y $C = C \cap D$ entonces $B \ll D$. Por P3 tenemos que $X - D \ll X - B$, como $X - B = (X - B) \cap (X - A)$, entonces $X - D \ll X - A$, concluimos que $A \ll D$. $\square$

2.41 Corolario. *Si $A \subseteq X$ entonces $\varnothing \ll A$.*

Demostración. Como $\varnothing \ll \varnothing$ y $\varnothing \subseteq A$ entonces $\varnothing \ll A$. $\square$

2.42 Proposición. *Si $A_i \ll B_i$ para $i \in J$, $J \subseteq \mathbb{N}$, J finito, entonces $\cap_{i \in J} A_i \ll \cap_{i \in J} B_i$ y $\cup_{i \in J} A_i \ll \cup_{i \in J} B_i$.*

Demostración. Sea $j \in J$, como $A_j \ll B_j$ y $B_j \subseteq \cup_{i \in I} B_i$ entonces $A_j \ll \cup_{i \in I} B_i$. Por P3 tenemos que $X - (\cup_{i \in I} B_i) \ll X - A_j$ para cada $j \in J$. Por P4 tenemos que $X - (\cup_{i \in J} B_i) \ll \cap_{i \in J}(X - A_j) = X - (\cup_{i \in J} A_i)$. Usando nuevamente P3 concluimos que $\cup_{i \in J} A_i \ll \cup_{i \in J} B_i$. La otra parte de la demostración es análoga. $\square$

Sea $\tau(\ll) = \{U \subseteq X : \{x\} \ll U \text{ si } x \in U\}$

2.43 Proposición. *El conjunto $\tau(\ll)$ es una topología en X y si $F \subseteq X$ entonces $int_X F = \{x \in X : \{x\} \ll F\}$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Como $\varnothing \ll X - \{x\}$, $\{x\} \ll X$. Entonces $X \in \tau(X)$. Por vacuidad, $\varnothing \in \tau(X)$. Sean $A, B \in \tau(X)$ y $x \in A \cap B$. Entonces $\{x\} \ll A$ y $\{x\} \ll B$. Por P4 tenemos que $\{x\} \ll A \cap B$, lo que significa que $A \cap B \in \tau(X)$. Sean $\{A_i : i \in J\} \subseteq \tau(X)$ y $x \in \cup_{i \in J} A_i$. Existe $j \in J$ tal que $x \in A_j$, en consecuencia $\{x\} \ll A_j$. Como $A_j \subseteq \cup_{i \in J} A_i$ entonces $\{x\} \ll \cup_{i \in J} A_i$. Por lo tanto $\cup_{i \in J} A_i \in \tau(X)$, demostrando así que $\tau(X)$ es una topología en X.

Ahora, sea $H = \{x \in X : \{x\} \ll F\}$. Si $y \in H$ entonces $\{y\} \ll F$. Por P2 tenemos que $\{y\} \subseteq F$, lo cual implica que $H \subseteq F$. Sea $U \in \tau(\ll)$ tal que $x \in U \subseteq F$. Observamos que $\{x\} \ll U$ y $\{x\} \ll F$, y por lo tanto $x \in H$ y $U \subseteq H$.

Demostraremos ahora que H es abierto. Consideremos $x \in H$. Por definición de H tenemos que $\{x\} \ll F$. Por P5 existe $D \subseteq X$ tal que $\{x\} \ll D$ y $D \ll F$. Observemos que $y \in D$ implica que $\{y\} \subseteq D \ll F$. Por lo tanto $\{y\} \ll F$ y entonces $y \in H$, demostrando que $D \subseteq H$. Como $\{x\} \ll D$, entonces $\{x\} \ll H$. Concluimos que H es abierto y por lo tanto $H = \mathrm{int}_X F$. $\square$

La topología $\tau(\ll)$ es llamada la topología de *proximidad* generada por $\ll$. Gracias al teorema anterior podemos observar que si $F \subseteq X$, entonces $\mathrm{int}_X F = \{x \in X : \{x\} \ll int_X F\}$.

2.44 Proposición. *Sea $\ll$ una proximidad en $\mathcal{P}(X)$. Si $x \ll B$, entonces existe un elemento $A \in \tau(\ll)$ en X tal que $x \ll A$ y $A \ll B$.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $B \subseteq X$ tal que $x \ll B$. Por P5 existe un conjunto $D \subseteq X$ tal que $x \ll D$ y $D \ll B$. Entonces $x \in \mathrm{int}_X(D)$, por la observación anterior tenemos que $x \ll \mathrm{int}_X(D)$ e $\mathrm{int}_X(D) \ll B$. $\square$

2.45 Proposición. *Si $A, B \subseteq X$, entonces $A \ll B$ si y sólo si $cl_X A \ll int_X B$.*

Demostración. Supongamos que $\mathrm{cl}_X A \ll \mathrm{int}_X B$. Como $A \subseteq \mathrm{cl}_X A$ e $\mathrm{int}_X B \subseteq B$, aplicando la proposición 2.40, tenemos que $A \ll B$.

Sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \ll B$. Por la propiedad P5, existen subconjuntos $D, E \subseteq X$ tales que $A \ll D, D \ll E$ y $E \ll B$. Si $x \in E$, entonces $\{x\} \subseteq E \ll B$ y $\{x\} \ll B$, demostrando que $x \in \mathrm{int}_X B$ y por lo tanto $E \subseteq \mathrm{int}_X B$. Si $x \in X \setminus D$, entonces $D \subseteq X \setminus \{x\}$. Como $A \ll D$, $A \ll X \setminus \{x\}$. Por P3 tenemos que $\{x\} \ll X \setminus A$, lo que implica que $\{x\} \in \mathrm{int}_X(X \setminus A) = X \setminus \mathrm{cl}_X(A)$. Por lo tanto $\mathrm{cl}_X(A) \subseteq D$. Como $D \ll E$, la proposición queda demostrada. □

Para demostrar que el espacio $(X, \ll)$ es Tychonoff primero demostraremos el siguiente resultado.

2.46 Lema. *Para un espacio X y F, G subconjuntos de X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *existe una familia $\{U_t\}_{t \in \mathbb{Q} \cap I}$ de abiertos en X tal que $F \subseteq U_0, U_1 = X$ y si $t < t' < 1$ entonces $U_t \subseteq cl_X U_t \subseteq U_{t'} \subseteq X \setminus G$.*

2. *F y G están completamente separados.*

Demostración. Sean F y G subconjuntos cerrados en X. Sea $\{U_t\}_{t \in \mathbb{Q} \cap I}$ una familia de abiertos en X que cumple las propiedades de la condición 1. Definamos una función $f : X \to I$ por $f(x) = \text{ínf}\{t \in I : x \in U_t\}$. Demostraremos que f es continua. Sean $r_0, s_0 \in \mathbb{Q}$, $r_0 < s_0$ y $x \in f^{-1}[(r_0, 1]]$. Existen $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tales que $r_0 < r_1 < r_2 < f(x)$. Como $f(X)$ es un ínfimo, $x \notin U_{r_2}$. Entonces $x \in X \setminus \mathrm{cl}_X U_{r_1} = V$. Sea $y \in V$, si $f(y) \leq r_0$, existe $t < r_1$ tal que $y \in U_t \subseteq U_{r_1}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $V \subseteq f^{-1}[(r_0, 1]]$. Demostrando que $f^{-1}[(r_0, 1]]$, es abierto. Ahora sea $x \in f^{-1}[[0, s_0)]$. Entonces $f(x) < s_0$, existe $s_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $s_1 < s_0$ y $x \in U_{s_1} \subseteq f^{-1}[[0, s_0)]$. Por lo tanto $f^{-1}[(r_0, s_0)]$ es abierto en X, demostrando que la función es continua. Observemos que $f[F] \subseteq \{0\}$ y $f[G] \subseteq \{1\}$.

Ahora supongamos que F y G están completamente separados. Existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f[F] \subseteq \{0\}$ y $f[G] \subseteq \{1\}$. Para $t \in I$ definamos $U_t = f^{-1}[[0, (1/2)t + 1/2)]$ si $0 \leq t < 1$ y $U_t = X$ si $t = 1$. Es fácil observar que la familia de abiertos $\{U_t\}_{t \in I}$ cumple las propiedades pedidas. □

2.47 Proposición. *Si $A \ll B$, entonces A y $X - B$ están completamente separados.*

Demostración. Sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \ll B$. Existe $U, V \subseteq X$ abiertos tales que $A \ll U$, $U \ll V$ y $V \ll B$. Sean $U_0 = U$, $U_1 = X$ y $U_{1/2} = V$. Existen $W, Y \subseteq X$ abiertos tales que $U \ll W, W \ll V, V \ll Y$ e $Y \ll B$. Sean $U_{1/4} = W$ y $U_{3/4} = Y$. Por inducción la familia $\{U_{n/2^m} : n, m \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 2^m\}$ cumple las condiciones del lema 2.46. Por lo tanto A y $X \setminus B$ están completamente separados. □

2.48 Proposición. *$(X, \ll)$ es Tychonoff.*

Demostración. Primero hay que demostrar que X es T_1. Sean $x \in X$ e $y \in X - \{x\}$, entonces $y \neq x$. Por P6 tenemos que $\{y\} \ll X - \{x\}$, por lo tanto $y \in \text{int}_X(X - \{x\})$, en consecuencia $\{x\}$ es cerrado.

Para demostrar que X es Tychonoff tomemos $x \in X$ y A un cerrado en X tal que $x \in X - A$. Como $X - A$ es abierto, por definición, tenemos que $\{x\} \ll X - A$. Por 2.47, $\{x\}$ y A están completamente separados demostrando así que X es Tychonoff. $\square$

2.49 Definición. Sea $Y \subseteq X$. Para $A, B \subseteq Y$ denotaremos por $A \ll_Y B$ a la relación $A \ll X - (Y - B) = (X - Y) \cup B$.

2.50 Proposición. *Sea $Y \subseteq X$. La relación binaria $\ll_Y$ definida en $\mathcal{P}(Y)$ satisface P1-P5.*

Demostración. Sean $A, B, C \subseteq Y \subseteq X$.

P1. Como $\varnothing \ll X - Y$ entonces $\varnothing \ll_Y \varnothing$.

P2. Supongamos que $A \ll_Y B$. Por definición $A \ll X - (Y - B)$. Como $X - (Y - B) = (X - Y) \cup B$ y $A \subseteq Y$, entonces $A \subseteq B$.

P3. Observemos que $Y - B \ll_Y Y - A$ si y sólo si $Y - B \ll X - (Y - (Y - A)) = X - A$, si y sólo si $A \ll X - (Y - B)$ si y sólo si $A \ll_Y B$.

P4. $A \ll_Y B$ y $A \ll_Y C$ si y sólo si $A \ll X - (Y - B)$ y $A \ll X - (Y - C)$ si y sólo si $A \ll (X - (Y - B)) \cap (X - (Y - C))$ si y sólo si $A \ll X - (Y - (B \cap C))$ si y sólo si $A \ll_Y B \cap C$.

P5. Supongamos que $A \ll_Y B$, entonces $A \ll X - (Y - B)$. Por lo tanto existe $D \subseteq X$ tal que $A \ll D$ y $D \ll X - (Y - B)$. Como $D \subseteq X - (Y - (D \cap Y))$, entonces $A \ll X - (Y - (D \cap Y))$ y $A \ll_Y D \cap Y$. Observando que $D \cap Y \subseteq D$, concluimos que $D \cap Y \ll_Y B$.

P6. Sean $x, y \in Y$ con $x \neq y$, entonces $\{x\} \ll X - \{y\}$. Observando que $X - \{y\} = X - (Y - (Y - \{y\}))$ tenemos que $\{x\} \ll_Y Y - \{y\}$. $\square$

2.51 Proposición. *La topología de subespacio inducida en Y por $\tau(\ll)$ es la misma que la topología $\tau(\ll_Y)$.*

Demostración. Recordemos que $\tau(\ll_Y) = \{V \subseteq Y : \{y\} \ll_Y V \text{ si } y \in V\}$ y $\tau_Y(\ll) = \{U \cap Y : U \in \tau(\ll)\}$. Demostraremos que $\tau(\ll_Y) = \tau_Y(\ll)$.

Sean $U \in \tau(\ll)$ y $x \in U \cap Y$, entonces $\{x\} \ll U \subseteq U \cup (X - Y)$ lo que implica que $\{x\} \ll X - (Y - (U \cap Y))$. Por lo tanto $\{x\} \ll_Y U \cap Y$ y $U \cap Y \in \tau(\ll_Y)$.

Ahora sea $V \in \tau(\ll_Y)$. Si definimos $U = \{x \in X : \{x\} \ll X - (Y - V)\}$, observamos que $U \in \tau(\ll)$. Queremos demostrar que $V = U \cap Y$. Sea $x \in Y$, veamos que $x \in V$ si y sólo si $\{x\} \ll_Y V$, si y sólo si $\{x\} \ll X - (Y - V)$ si y sólo si $x \in U \cap Y$. Concluimos que $\tau(\ll_Y) = \tau_Y(\ll)$. $\square$

2.52 Proposición. *Si X es un espacio Tychonoff y se define una relación binaria $\ll$ en $\mathcal{P}(X)$ como $A \ll B$ si A y $X - A$ están completamente separados, entonces $\ll$ es una proximidad en X y $\tau(X) = \tau(\ll)$.*

Demostración. P1. Por vacuidad, $\varnothing$ y X están completamente separados, entonces $\varnothing \ll \varnothing$.

P2. Si $A \ll B$, entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(A) \subseteq \{0\}$ y $f(X - B) \subseteq \{1\}$. Entonces

$$A \subseteq f^{-1}(\{0\}) \subseteq X - f^{-1}(\{1\}) \subseteq B.$$

P3. Si $A \ll B$, entonces A y $X - B$ están completamente separados. Como $A = X - (X - A)$ concluimos que $X - B \ll X - A$.

P4. Si $A \ll (B \cap C)$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(A) \subseteq \{0\}$ y $f((X - B) \cup (X - C)) \subseteq \{1\}$. Entonces $A \ll B$ y $A \ll C$.

Si $A \ll B$ y $A \ll C$, existen dos funciones continuas $f, g : X \to [0,1]$ tales que $f(A) \subseteq \{0\}$, $f(X - B) \subseteq \{1\}$, $g(A) \subseteq \{0\}$ y $g(X - C) \subseteq \{1\}$. Definamos $h = \text{mín}\{f + g, 1\}$, entonces $h : X \to [0,1]$ es una función continua tal que $h(A) \subseteq \{0\}$ y $h((X - B) \cup (X - C)) \subseteq \{1\}$. Por lo tanto A y $B \cap C$ están completamente separados. Concluimos que $A \ll (B \cap C)$.

P5. Si $A \ll B$, entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(A) \subseteq \{0\}$ y $f(X - B) \subseteq \{1\}$. Sea $D = f^{-1}[0, 1/2]$, entonces $f(D) \subseteq [0, 1/2]$ y $f(X - D) \subseteq (1/2, 1]$. Por lo tanto $A \ll D$ y $D \ll B$.

P6. Sean $x, y \in X$, con $x \neq y$. Como X es Tychonoff existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. Por lo tanto $\{x\}$ y $\{y\}$ están completamente separados. Concluimos que $\{x\} \ll X - \{y\}$.

Ahora demostraremos que $\tau(X) = \tau(\ll)$. Sea $U \in \tau(X)$ y $x \in U$. Como X es Tychonoff, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(X - U) \subseteq \{1\}$. Entonces $\{x\}$ y $X \setminus U$ están completamente separados. Por lo tanto $\{x\} \ll U$, y $U \in \tau(\ll)$.

Ahora sea $U \in \tau(\ll)$ y $x \in U$. Entonces $\{x\} \ll U$, por lo tanto $\{x\}$ y U están completamente separados. Por definición existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(X - U) \subseteq \{1\}$. Observamos que $x \in f^{-1}([0, 1/2))$ y $f^{-1}([0, 1/2)) \subseteq U$. Como f es continua, concluimos que $U \in \tau X$. $\square$

2.53 Proposición. *Si Z es un espacio compacto entonces existe una única proximidad $\ll$ en $\mathcal{P}(Z)$ tal que la topología en Z es la misma que la topología inducida por $\ll$, es decir, $\tau(Z) = \tau(\ll)$.*

Demostración. En 2.52 definimos una proximidad $\ll$ en $\mathcal{P}(X)$, tal que $\tau(Z) = \tau(\ll)$. Supongamos que $\sqsubseteq$ es otra proximidad tal que $\tau(Z) = \tau(\sqsubseteq)$. Sean $A, B \subseteq Z$ tales que $A \ll B$. Por 2.45, $\text{cl}_Z A \subseteq \text{int}_Z B$. Sea $p \in \text{cl}_Z A$, entonces $p \in \text{int}_Z B$. Como $\text{int}_Z B \in \tau(Z) = \tau(\sqsubseteq)$, tenemos que $\{p\} \sqsubseteq \text{int}_Z B$. Por 2.44, existe un abierto U_p en Z tal que $\{p\} \sqsubseteq U_p \sqsubseteq \text{int}_Z B$. Como $\text{cl}_Z A$ es compacto, existe un conjunto finito $\{p_1, \ldots, p_n\}$ tal que $\text{cl}_Z A \subseteq \cup_{i=1}^n U_p$. Sea $U = \cup_{i=1}^n U_p$. Por 2.5, $U \sqsubseteq \text{int}_Z B$. Como $A \subseteq \text{cl}_Z A$ e $\text{int}_Z B$, por 2.40, concluimos que $A \sqsubseteq B$.

Ahora si $A \sqsubseteq B$, como $\sqsubseteq$ es proximidad, por 2.47 tenemos que A y $X - B$ están completamente separados, por 2.52 concluimos que $A \ll B$. $\square$

Observamos que si Z es una compactación de X y $\ll^Z$ es la única proximidad en Z tal que $\tau(Z) = \tau(\ll^Z)$, entonces la proximidad $\ll^Z_X$ tiene la propiedad de que $\tau(X) = \tau(\ll^Z_X)$.

2.54 Proposición. *Sean X un espacio, Y, Z espacios compactos, y $e : X \to Y$, $i : X \to Z$ encajes densos. Entonces $Y \geq Z$ si y sólo si $i[A] \ll^Z_{i[X]} i[B]$ implica $e[A] \ll^Y_{e[X]} e[B]$ para todo $A, B \subseteq X$.*

Demostración. Supongamos que $Y \geq Z$. Sean A, B subconjuntos de X tales que $i[A] \ll^Z_{i[X]} i[B]$, entonces $i[A]$ e $i[X \setminus B]$ están completamente separados en Z, por 1.24, $e[A]$ e $e[X \setminus B]$ están completamente separados en Y, por 2.53, $i[A] \ll^Z_{i[X]} i[B]$.

Sean ahora A, B subconjuntos de X tales que $\mathrm{cl}_Z i[A] \cap \mathrm{cl}_Z i[B] = \varnothing$. Entonces $i[A]$ e $i[B]$ están completamente separados en Z. Por 2.53, $i[A] \ll^Z_{i[X]} i[X \setminus B]$. Por hipótesis $e[A] \ll^Y_{e[X]} e[X \setminus B]$. Entonces $e[A]$ y $e[B]$ están completamente separados en Y. Por lo tanto $\mathrm{cl}_Y e[A] \cap \mathrm{cl}_Y e[B] = \varnothing$. Por 1.24, $Y \geq Z$. □

2.55 Definición. Sea X un espacio Tychonoff, y sea $\ll$ una proximidad en X tal que $\tau(X) = \tau(\ll)$. Un filtro $\mathcal{F}$ en X es llamado un *p-filtro* si para cada $A \in \mathcal{F}$, existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \ll A$. Un *p-ultrafiltro* es un p-filtro maximal.

2.56 Proposición. *Si $\mathcal{G}$ es un filtro y $\ll$ es una proximidad en X, entonces $\mathcal{G}' = \{A \subseteq X : G \ll A$ para algún $G \in \mathcal{G}\}$ es un p-filtro.*

Demostración. Por definición $\mathcal{G}'$ es un filtro en X. Queda por demostrar que $\mathcal{G}'$ es un p-filtro. Sea $A \in \mathcal{G}'$, existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $G \ll A$. Por P5 existe $B \subseteq X$ tal que $G \ll B$ y $B \ll A$. Entonces $B \in \mathcal{G}'$ y por lo tanto $\mathcal{G}'$ es p-filtro. □

2.57 Proposición. *Sea $\mathcal{F}$ un p-filtro. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *$\mathcal{F}$ es un p-ultrafiltro;*
2. *Si $A \ll B$, entonces $B \in \mathcal{F}$ ó existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap F = \varnothing$;*
3. *Si $A \ll B$, entonces $B \in \mathcal{F}$ ó $X - A \in \mathcal{F}$.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$). Supongamos que $\mathcal{F}$ es un p-ultrafiltro y $A \cap F \neq \varnothing$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Sean $\mathcal{G} = \{G \cap F : A \ll G, F \in \mathcal{F}\}$ y $\mathcal{H} = \{H \subseteq X : G \ll H$ para algún $G \in \mathcal{G}\}$. Entonces $\mathcal{G}$ es filtro en X y por 2.56 $\mathcal{H}$ es p-filtro.

Observamos que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$. En efecto, si $G \cap F \in \mathcal{G}$, entonces $A \ll G$ y $F \in \mathcal{F}$. Por P5 y por definición de p-filtro, existen $G', F' \subseteq X$ tales que $A \ll G'$, $G' \ll G$ y $F' \ll F$. Por lo tanto $G' \cap F' \in \mathcal{G}$. Por 2.5, $(G' \cap F') \ll (G \cap F)$. Concluimos que $G \cap F$ pertenece a $\mathcal{H}$.

Demostraremos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Sea $C \in \mathcal{F}$, como $A \ll X$ y $C = X \cap C$ entonces C pertenece a $\mathcal{G}$. Por lo tanto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$. Como $\mathcal{F}$ es p-ultrafiltro tenemos que $\mathcal{F} = \mathcal{H}$. Como $X \in \mathcal{F}$, $B = B \cap X$ pertenece a $\mathcal{G}$, lo que implica que $B \in \mathcal{F}$.

$2 \Rightarrow 3$). Sean A, B subconjuntos de X, tales que $A \ll B$. Supongamos que $B \notin \mathcal{F}$. Por hipótesis existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap F = \varnothing$, entonces $F \subseteq X - A$. Como $\mathcal{F}$ es filtro en X concluimos que $X - A$ pertenece a $\mathcal{F}$.

$3 \Rightarrow 1$). Sea $\mathcal{G}$ un p-filtro tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Supongamos que existe un conjunto $B \subseteq X$ que pertenece a $\mathcal{G}$ pero no pertenece a $\mathcal{F}$. Existe $A \in \mathcal{G}$ tal que $A \ll B$.

Como B no está en $\mathcal{F}$, por hipótesis se tiene que $X - A$ pertenece a $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Por lo tanto A y $X - A$ pertences a $\mathcal{G}$, lo que es una contradicción. Concluimos que $\mathcal{F}$ es un p-ultrafiltro. $\square$

Para cada $x \in X$ denotemos por $\mathcal{N}(x)$ al conjunto de vecindades de x.

2.58 Proposición. *Consideremos a X con la topología $\tau(\ll)$. Entonces para cada $x \in X$, $\mathcal{N}(x)$ es un p-ultrafiltro.*

Demostración. Sea $x \in X$. Claramente $\mathcal{N}(x)$ es un filtro en X. Sea $A \in \mathcal{N}(x)$, entonces $x \in \operatorname{int}_X A$. Como $\tau(X) = \tau(\ll)$, $\{x\} \ll A$. Por 2.44 existe un abierto D en X tal que $\{x\} \ll D$ y $D \ll A$. Por lo tanto $D \in \mathcal{N}(x)$ y $\mathcal{N}(x)$ es un p-filtro. Queda por demostrar que $\mathcal{N}(x)$ es un p-ultrafiltro. Sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \ll B$. Por 2.45, $\operatorname{cl}_X A \ll \operatorname{int}_X B$. Supongamos que B no pertenece a $\mathcal{N}(x)$. Entonces $x \in X \setminus \operatorname{int}_X B$, lo que implica que $x \in X - \operatorname{cl}_X A = \operatorname{int}_X(X - A)$. por lo tanto $X - A$ pertenece a $\mathcal{N}(x)$. Concluimos que $\mathcal{N}(x)$ es un p-ultrafiltro en X. $\square$

Sea cX el conjunto de los p-ultrafiltros en X. Para $A \subseteq X$, definamos $o(A) = \{\mathcal{U} \in cX : A \in \mathcal{U}\}$. Definamos una relación binaria $\lhd$ en cX por $\mathsf{A} \lhd \mathsf{B}$ si existen $A, B \subseteq X$ tales que $A \ll B$, $\mathsf{A} \subseteq o(A)$ y $cX - \mathsf{B} \subseteq o(X - B)$.

2.59 Proposición. *La relación binaria $\lhd$ es una proximidad en cX.*

Demostración. Sean $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C} \subseteq cX$. P1. Como $\varnothing \ll \varnothing, \varnothing \subseteq o(\varnothing)$ y $cX \subseteq o(X)$, entonces $\varnothing \lhd \varnothing$.

P2. Supongamos que $\mathsf{A} \lhd \mathsf{B}$. Por definición existen $A, B \subseteq X$ tales que $A \ll B$, $\mathsf{A} \subseteq o(A)$ y $cX - \mathsf{B} \subseteq o(X - B)$. Observamos que se cumple la siguiente relación:

$$\mathsf{A} \subseteq o(A) \subseteq o(B) \subseteq cX - o(X - B) \subseteq \mathsf{B}.$$

En efecto, si $\mathcal{F} \in o(A)$ entonces $\mathcal{F}$ es un p-ultrafiltro que contiene a A. Como $A \subseteq B$, $\mathcal{F}$ contiene a B, entonces $\mathcal{F}$ no puede contener a $X - B$, por lo tanto pertenece a B.

P3. Supongamos que $\mathsf{A} \lhd \mathsf{B}$. Entonces existen $A, B \subseteq X$ tales que $A \ll B$, $\mathsf{A} \subseteq o(A)$ y $cX - \mathsf{B} \subseteq o(X - B)$. Entonces $X - B \ll X - A$, por lo tanto $cX - \mathsf{B} \lhd cX - \mathsf{A}$.

P4. Supongamos que $\mathsf{A} \lhd (\mathsf{B} \cap \mathsf{C})$. Entonces existen $A, D \subseteq X$ tales que $A \ll D$, $\mathsf{A} \subseteq o(A)$ y $cX - (\mathsf{B} \cap \mathsf{C}) \subseteq o(X - D)$. Como $cX - \mathsf{B} \subseteq o(X - D)$ y $cX - \mathsf{C} \subseteq o(X - D)$, entonces $\mathsf{A} \lhd \mathsf{B}$ y $\mathsf{A} \lhd \mathsf{C}$.

Ahora si $\mathsf{A} \lhd \mathsf{B}$ y $\mathsf{A} \lhd \mathsf{C}$, existen $A_1, A_2, B, C \subseteq X$, tales que $A_1 \ll B$, $A_2 \ll C$, $\mathsf{A} \subseteq o(A_1)$, $cX - \mathsf{B} \subseteq o(X - B)$, $\mathsf{A} \subseteq o(A_2)$, $cX - \mathsf{C} \subseteq o(X - C)$. Entonces $(A_1 \cap A_2) \ll (B \cap C)$, $\mathsf{A} \subseteq o(A_1 \cap A_2)$ y $cX - (\mathsf{B} \cap \mathsf{C}) \subseteq o(X - (B \cap C))$. Por lo tanto $\mathsf{A} \lhd (\mathsf{B} \cap \mathsf{C})$.

P5. Si $\mathsf{A} \lhd \mathsf{B}$. Entonces existen $A, B \subseteq X$ tales que $A \ll B$, $\mathsf{A} \subseteq o(A)$ y $cX - \mathsf{B} \subseteq o(X - B)$. Entonces existen $D, E \subseteq X$ tales que $A \ll D, D \ll E$ y $E \ll B$. Queremos demostrar que $\mathsf{A} \lhd o(E)$ y $o(E) \lhd \mathsf{B}$.

En efecto, sea $\mathcal{F} \in cX - o(E)$, entonces $\mathcal{F}$ es un p-ultrafiltro que no contiene a E. Por 2.57, $X - D$ pertenece a $\mathcal{F}$. Entonces $cX - o(E) \subseteq o(X - D)$. Como

$\mathsf{A} \subseteq o(A)$ y $A \ll D$, entonces $\mathsf{A} \lhd o(E)$. Como $o(E) \subseteq o(E)$, y $E \ll B$, entonces $o(E) \lhd \mathsf{B}$.

P6. Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in cX$, tales que $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$. Entonces existe $A \in \mathcal{G}$ que no pertenece a $\mathcal{F}$. Afirmamos que $\{\mathcal{G}\} \lhd cX - \{\mathcal{F}\}$. Como $\mathcal{G}$ es p-filtro existen $B, C \in \mathcal{G}$ tales que $C \ll B$ y $B \ll A$. Como A no pertenece a $\mathcal{F}$, por 2.57, $X - B \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $\{\mathcal{G}\} \subseteq o(C), \{\mathcal{F}\} \subseteq o(X - B)$ y $C \ll B$, lo que demuestra la afirmación. $\square$

Consideraremos a cX equipado con la topología $\tau(\lhd)$ generada por la proximidad $\lhd$.

2.60 Proposición. *Si A es un subconjunto de X entonces $o(A)$ es abierto en cX y la familia $\mathcal{B} = \{o(A) : A$ es abierto en $X\}$ es una base para los abiertos de cX.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} \in o(A)$. Se quiere demostrar que $\{\mathcal{F}\} \lhd o(A)$. Por definición A pertenece a $\mathcal{F}$, como $\mathcal{F}$ es p-filtro existen $B, C \in \mathcal{F}$ tales que $C \ll B$ y $B \ll A$. Observemos que si un p-ultrafiltro no contiene a A entonces, por 2.57, contiene a $X - B$. Entonces $cX \setminus o(A) \subseteq o(X \setminus B)$ y $\{\mathcal{F}\} \subseteq o(C)$. Por lo tanto $\{\mathcal{F}\} \lhd o(A)$.

Ahora demostraremos que $\mathcal{B}$ es base para los abiertos de cX. Para esto consideramos un abierto $\mathsf{A} \subseteq cX$ y un p-ultrafiltro $\mathcal{F} \in \mathsf{A}$. Por definición $\{\mathcal{F}\} \lhd \mathsf{A}$. entonces existen $A, B \subseteq X$ tales que

$$A \ll B, \{\mathcal{F}\} \subseteq o(A) \text{ y } cX \setminus \mathsf{A} \subseteq o(X - B).$$

Por 2.44 existe un abierto $D \subseteq X$ tal que $A \ll D$ y $D \ll B$. Entonces

$$\mathcal{F} \in o(A) \subseteq o(B) \subseteq cX \setminus o(X - B) \subseteq \mathsf{A}.$$

Por lo tanto $\mathcal{B}$ es base para los abiertos de cX. $\square$

2.61 Proposición. *Definamos una función $\lambda : X \to cX$ por $\lambda(x) = \mathcal{N}(x)$. Entonces λ es un encaje denso.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ pero $y \notin U$. Entonces $U \in \mathcal{N}(x) \setminus \mathcal{N}(y)$. Por lo tanto λ es inyectiva.

Ahora demostraremos que $\lambda^{-1}[o(A) \cap \lambda[X]] = A$ para cualquier abierto $A \subseteq X$.

En efecto, $x \in A$ si y sólo si $A \in \mathcal{N}(x) = \lambda(x)$, si y sólo si $\lambda(x) \in o(A) \cap \lambda[X]$.

Como λ es inyectiva, entonces $o(A) \cap \lambda[X] = \lambda[A]$. Por lo tanto λ, es continua y abierta en su imagen.

Si A es abierto en X y $x \in A$, entonces $\mathcal{N}(x) \in o(A)$. Por lo tanto, la imagen de X bajo λ es densa en cX. $\square$

2.62 Proposición. *Sean A, B subconjuntos de X. Entonces $A \ll B$ si y sólo si $\lambda(A) \lhd_{\lambda[X]} \lambda(B)$.*

Demostración. Supongamos que $A \ll B$. Existen $C, D \subseteq X$, tales que $A \ll C$, $C \ll D$ y $D \ll B$. Por 2.45, $A \subseteq \text{int}_X C$ y $\text{cl}_X D \subseteq B$. Sea $x \in A$, entonces $x \in \text{int}_X C$, lo que implica que $C \in \lambda(x)$. Por lo tanto, $\lambda(x) \in o(C)$ y en consecuencia $\lambda(A) \subseteq o(C)$. Ahora sea $x \in X \setminus B$, entonces $x \in X \setminus \text{cl}_X D$, lo que implica que $X \setminus D \in \lambda(x)$. Por lo tanto, $\lambda(x) \in o(X \setminus D)$ y en consecuencia $\lambda(X \setminus B) \subseteq o(X \setminus D)$. Por definición $\lambda(A) \triangleleft cX \setminus (\lambda[X] \setminus \lambda[B])$. Concluimos que $\lambda(A) \triangleleft_{\lambda[X]} \lambda(B)$.

Ahora supongamos que $\lambda(A) \triangleleft_{\lambda[X]} \lambda(B)$. Por definición $\lambda(A) \triangleleft cX \setminus (\lambda[X] \setminus \lambda(B))$. Existen $C, D \subseteq X$ tales que $C \ll D$, $\lambda(A) \subseteq o(C)$, y $\lambda(X \setminus B) \subseteq o(X \setminus D)$. Es claro que $A \subseteq C$ y $X \setminus B \subseteq X \setminus D$. Por lo tanto $A \ll B$. $\square$

2.63 Proposición. *El espacio* $(cX, \tau(\triangleleft))$ *es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro de cerrados en cX. Supongamos que $\cap\mathcal{F} = \varnothing$. Sea $\mathcal{A} = \{V \subseteq X : \text{existe } F \in \mathcal{F}, R \subseteq X \text{ tal que } F \subseteq o(R) \text{ y } R \ll V\}$. Es claro que $\mathcal{A}$ es p-filtro. Por el Lema de Zorn, existe $\mathcal{W} \in cX$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$. Como $\cap\mathcal{F} = \varnothing$, existe $\mathsf{C} \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{W} \notin \mathsf{C}$. Como A es cerrado, $\{\mathcal{W}\} \triangleleft cX \setminus \mathsf{C}$. Por definición de $\triangleleft$, existen subconjuntos $A, B \subseteq X$ tales que

$$A \ll B, \{\mathcal{W}\} \subseteq o(A) \text{ y } \mathsf{C} \subseteq (X \setminus B).$$

Por propiedades de la proximidad $\ll$, existen $C, D \subseteq X$ tales que $A \ll C$ y $D \ll B$. Entonces $X \setminus B \ll X \setminus D$, en consecuencia $X \setminus D \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$, lo cual es una contradicción, ya que $A \cap (X \setminus D) = \varnothing$, y $A \in \mathcal{W}$. Concluimos que $(cx, \tau(\triangleleft))$ es compacto. $\square$

2.64 Definición. Al espacio $(cX, \tau(\triangleleft))$ le llamaremos *compactación de Smirnov* de X.

2.65 Proposición. *Sean Z una compactación de X, $\ll^Z$ la única proximidad en Z tal que $\tau(Z) = \tau(\ll^Z)$ y cX la compactación de Smirnov que se construye usando la proximidad $\ll^Z_X$. Entonces $Z \equiv_X cX$.*

Demostración. Sean A, B subconjuntos de X. Observemos que A y B están completamente separados en Z si y sólo si $A \ll^Z Z \setminus B$, si y sólo si $A \ll^Z_X X \setminus B$, si y sólo si, por 2.62, $\lambda(A) \triangleleft_{\lambda[X]} \lambda(X \setminus B)$, si y sólo si $\lambda(A) \triangleleft cX \setminus \lambda(B)$, si y sólo si $\lambda(A)$ y $\lambda(B)$ están completamente separados en cX. Por 1.24, concluimos que $Z \equiv_X cX$. $\square$

2.66 Corolario. *Toda extensión compacta de espacio Tychonoff es compactación de Smirnov.*

Capítulo 3

Espacios compactos que son compactaciones de tipo Wallman

3.1. Las compactaciones de Fan-Gottesman son de tipo Wallman

En esta sección estudiaremos algunas relaciones entre los tipos de compactaciones vistas hasta ahora.

Hemos visto en el capítulo 2, varias formas de construir compactaciones de espacios Tychonoff. Se demostró también en las seccion 2.4 que las compactaciones de Freudenthal son de tipo Fan-Gottesman. En este capítulo estudiaremos una caracterización de las compactaciones de tipo Wallman y veremos algunas clases de espacios compactos que son extensiones de tipo Wallman para sus subespacios densos.

3.1 Definición. Sean X un espacio topológico y $\ll$ una proximidad en X. Una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una base para la proximidad $\ll$ si:

1. $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $A \cap B = \varnothing$, se cumple $A \ll X \setminus B$ y
2. si $A \ll X \setminus B$ entonces existen $C, D \in \mathcal{A}$ tales que $A \ll X \setminus C, D \ll X \setminus B$, y $C \cup D = X$.

Recordemos que si Z es un espacio compacto, por 2.53, existe una única proximidad en Z que genera la misma topología en el espacio. A esta proximidad la denotaremos por $\ll^Z$. En este caso $A \ll^Z X \setminus B$ si y sólo si A y B están completamente separados en Z.

3.2 Lema. *Una base de Wallman $\mathcal{B}$ en X es una base para la proximidad $\ll_X^{\mathcal{W}_{\mathcal{B}}X}$.*

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{B}$ tales que $A \cap B = \varnothing$, entonces $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B = \varnothing$, donde las cerraduras se consideran en $\mathcal{W}_\mathcal{B}X$. Como $\mathcal{W}_\mathcal{B}X$ es compacto entonces A y B están completamente separados en $\mathcal{W}_\mathcal{B}X$. Por lo tanto $A \ll^{\mathcal{W}_\mathcal{B}X} \mathcal{W}_\mathcal{B}X \setminus B$. Concluimos que $A \ll_X^{\mathcal{W}_\mathcal{B}X} X \setminus B$.

Ahora sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \ll_X^{\mathcal{W}_\mathcal{B}} X \setminus B$. Entonces A y B están completamente separados en $\mathcal{W}_\mathcal{B}X$, por lo tanto $\mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}B = \varnothing$. Sea $x \in \mathrm{cl}A$. Como $\{\mathrm{cl}B : B \in \mathcal{B}\}$ es base para los cerrados de $\mathcal{W}_\mathcal{B}X$, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $\mathrm{cl}B \subseteq \mathrm{cl}B_x$ y $x \notin \mathrm{cl}B_x$. Observemos que $\mathrm{cl}A \subseteq \cup_{x \in \mathrm{cl}A}(\mathcal{W}_\mathcal{B}X \setminus \mathrm{cl}B_x)$. Como $\mathcal{W}_\mathcal{B}X$ es compacto, existe una cantidad finita $x_1, \ldots, x_n$ de elementos de $\mathrm{cl}A$ tales que $\mathrm{cl}A \subseteq \cup_{i=1}^n(\mathcal{W}_\mathcal{B}X \setminus B_{x_i})$. Como $\mathcal{B}$ es cerrada bajo intersecciones finitas, se cumple que $\mathrm{cl}B \subseteq \cap_{i=1}^n \mathrm{cl}B_{x_i} = \mathrm{cl}B'$, para $B' = \cap_{i=1}^n B_{x_i}$.

De forma análoga podemos demostrar que existe $A' \in \mathcal{B}$ tal que $\mathrm{cl}A \subseteq \mathrm{cl}A'$ y $\mathrm{cl}A' \cap \mathrm{cl}B' = \varnothing$. Como $\mathcal{B}$ es base de Wallman en X, existen $C, D \in \mathcal{B}$ tales que $A' \subseteq X \setminus C, B' \subseteq X \setminus D$ y $C \cup D = X$. Por lo tanto $A' \ll_X^{\mathcal{W}_\mathcal{B}X} X \setminus C$ y $D \ll_X^{\mathcal{W}_\mathcal{B}X} X \setminus B'$. □

Hemos visto que al considerar bases de Wallman requerimos familias que sean cerradas bajo uniones e intersecciones finitas, para este efecto, dada una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de un conjunto X, definiremos el *anillo* R generado por $\mathcal{B}$ como la familia $\mathcal{R} = \{\cup_{j=1}^n \cap_{i=1}^m A_{ij} : A_{ij} \in \mathcal{B}, m, n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\mathcal{R}$ contiene a $\mathcal{B}$ y es cerrada bajo uniones e intersecciones finitas.

3.3 Lema. *Si una proximidad $\ll$ en un espacio X tiene una base $\mathcal{B}$ formada por cerrados y es cerrada bajo intersecciones finitas, entonces el anillo $\mathcal{R}$ generado por $\mathcal{B}$ es una base de Wallman en X.*

Demostración. Sean $A \subseteq X$ cerrado y $x \in X \setminus A$. Por 2.43, $\{x\} \ll X \setminus A$. Como $\mathcal{B}$ es base para la proximidad, existen $C, D \in \mathcal{B}$ tales que $\{X\} \ll X \setminus C, D \ll X \setminus A$ y $C \cup D = X$. Es fácil notar que $x \in X \setminus C$ y $A \subseteq C$, lo que demuestra que $\mathcal{B}$ es base para los cerrados de X. Además, $x \in D$ y $D \cap A = \varnothing$.

Ahora sean A, B elementos disjuntos de $\mathcal{R}$. Existe una cantidad finita $A_1, \ldots,$ A_m y $B_1, \ldots, B_n$ de elementos de $\mathcal{B}$ tales que $A = \cup_{i=1}^m A_i, B = \cup_{j=1}^n B_j$. Entonces $A_i \cap B_j = \varnothing$ para cada i y cada j. Como $\mathcal{B}$ es base para la proximidad tenemos que $A_i \ll X \setminus B_j$ para cada i y cada j. Dada una i fija tenemos que $A_i \ll X \setminus B_j$ para toda j, en consecuencia $A_i \ll \cap_{j=1}^n (X \setminus B_j) = X \setminus B$, de esta forma $A = \cup_{i=1}^m A_i \ll X \setminus B$. Como $\mathcal{B}$ es base, existen $C, D \in \mathcal{B}$ tales que $A \ll X \setminus C, D \ll X \setminus B$ y $C \cup D = X$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es una base de Wallman de X. □

3.4 Teorema. *Una compactación γX de X es de tipo Wallman si y sólo si la proximidad $\ll_X^{\gamma X}$ admite una base formada por cerrados y cerrada bajo intersecciones finitas.*

Demostración. Sea γX una compactación de X. Si γX es una compactación de tipo Wallman, existe una base de Wallman $\mathcal{B}$ tal que $\gamma X \equiv_X \mathcal{W}_\mathcal{B}X$. Por el lema 3.2, $\mathcal{B}$ es base para la proximidad $\ll_X^{\mathcal{W}_\mathcal{B}X} = \ll_X^{\gamma X}$.

Supongamos que la proximidad $\ll_X^{\gamma X}$ admite una base $\mathcal{B}$ formada por cerrados y cerrada bajo intersecciones finitas. Por el lema 3.3, el anillo $\mathcal{R}$ generado por $\mathcal{B}$ es una base de Wallman en X. Demostraremos que las proximidades $\ll_X^{\gamma X}$ y $\ll_X^{\mathcal{W}_{\mathcal{B}} X}$ son equivalentes. Recordemos que $\mathcal{B}$ es base para ambas proximidades.

Sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \ll_X^{\gamma X} X \setminus B$. Existen $C, D \in \mathcal{B}$ tales que

$$A \ll_X^{\gamma X} (X \setminus C), D \ll_X^{\gamma X} (X \setminus B), \text{ y } C \cup D = X.$$

De la misma forma existen C_1, C_2, D_1 y D_2 tales que $A \ll_X^{\gamma X} (X \setminus C_1), C_2 \ll_X^{\gamma X} (X \setminus C), D \ll_X^{\gamma X} (X \setminus D_1)$, $D_2 \ll_X^{\gamma X} (X \setminus B)$ y $C_1 \cup C_2 = X = D_1 \cup D_2$.

Observamos que $C_2 \cap C = \varnothing$, y ambos conjuntos pertenecen a $\mathcal{B}$, entonces $C_2 \ll_X^{\mathcal{W}_{\mathcal{B}} X} (X \setminus C)$. Como $A \subseteq C_2$ y $X \setminus C \subseteq X \setminus B$, concluimos que $A \ll_X^{\mathcal{W}_{\mathcal{B}} X} (X \setminus B)$.

De forma análoga se puede demostrar que si $A \ll_X^{\mathcal{W}_{\mathcal{B}} X} (X \setminus B)$, entonces $A \ll_X^{\gamma X} (X \setminus B)$. Por 2.54, las compactaciones γX y $\mathcal{W}_{\mathcal{B}} X$ son equivalentes. □

3.5 Proposición. *Sea γX una compactación de X. Sea $\mathcal{B}$ una base para los cerrados de X, cerrada bajo intersecciones finitas. Si:*

1. *$A, B \in \mathcal{B}$ y $A \cap B = \varnothing$ implica $\mathrm{cl}_{\gamma X} A \cap \mathrm{cl}_{\gamma X} B = \varnothing$ y*

2. *existe una base $\mathcal{A}$ para los cerrados de γX, cerrada bajo intersecciones finitas, tal que $\mathcal{B} = \{A \cap X : A \in \mathcal{A}\}$,*

entonces $\mathcal{B}$ es base para la proximidad $\ll_X^{\gamma X}$.

Demostración. Por la condición 1, es claro que si $A, B \in \mathcal{B}$ y $A \cap B = \varnothing$ entonces $A \ll_X^{\gamma X} X \setminus B$. Ahora sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \ll_X^{\gamma X} X \setminus B$. Entonces $\mathrm{cl}_{\gamma X} A \cap \mathrm{cl}_{\gamma X} B = \varnothing$ y existen abiertos C, D en γX tales que $\mathrm{cl}_{\gamma X} A \subseteq C, \mathrm{cl}_{\gamma X} B \subseteq D$ y $C \cap D = \varnothing$. Como $\mathcal{A}$ es base para los cerrados de γX, para cada $x \in \mathrm{cl}_{\gamma X} A$ existe $A_x \in \mathcal{A}$ tal que $x \in \gamma X \setminus A_x \subseteq C$. Como $\mathrm{cl}_{\gamma X} A$ es compacto, existe una cantidad finita $x_1, \ldots, x_m$ de elementos de $\mathrm{cl}_{\gamma X} A$ tales que $\mathrm{cl}_{\gamma X} A \subseteq \cup_{i=1}^{n} (\gamma X \setminus A_{x_i}) \subseteq C$. Como $\mathcal{A}$ es cerrada bajo intersecciones finitas, $A' = \cap_{i=1}^{n} A_{x_i}$ es un elemento de $\mathcal{A}$. Entonces $\mathrm{cl}_{\gamma X} A \subseteq \gamma X \setminus A' \subseteq C$. De manera análoga existe $B' \in \mathcal{A}$ tal que $\mathrm{cl}_{\gamma X} B \subseteq \gamma X \setminus B' \subseteq D$. Por 2.53,

$$\mathrm{cl}_{\gamma X} A \ll^{\gamma X} \gamma X \setminus A', B' \ll^{\gamma X} \gamma X \setminus \mathrm{cl}_{\gamma X} B \text{ y } A' \cup B' = \gamma X.$$

Por lo tanto

$$A \ll_X^{\gamma X} X \setminus (A' \cap X), (B' \cap X) \ll_X^{\gamma X} X \setminus B \text{ y } (A' \cap X) \cup (B' \cap X) = X.$$

Concluimos que $\mathcal{B}$ es base para la proximidad $\ll_X^{\gamma X}$. □

3.6 Corolario. *Una compactación γX es de tipo Wallman para X si y sólo si existe un anillo base $\mathcal{B}$ para los cerrados de γX tal que $A = \mathrm{cl}_{\gamma X}(A \cap X)$ para todo $A \in \mathcal{B}$.*

Demostración. Sea γX una compactación de X. Sea $\mathcal{B}$ un anillo base para los cerrados de γX tal que $A = \mathrm{cl}_{\gamma X}(A \cap X)$ para todo $A \in \mathcal{B}$. Sean $B, C \in \mathcal{B}$ tales que $B \cap C \cap X = \varnothing$. Entonces

$$\mathrm{cl}_{\gamma X}(B \cap X) \cap \mathrm{cl}_{\gamma X}(C \cap X) = B \cap C = \mathrm{cl}_{\gamma X}(B \cap C \cap X) = \varnothing.$$

Sea $\mathcal{B}' = \{A \cap X : A \in \mathcal{B}\}$. Por 3.5, $\mathcal{B}'$ es base para la proximidad $\ll_X^{\gamma X}$. Por 3.4, γX es compactación de tipo Wallman para X. □

3.7 Teorema. *Las compactaciones de Fan-Gottesman son de tipo Wallman.*

Demostración. Sea γX una compactación de Fan-Gottesman de X, entonces existe una FG-base $\mathcal{A}$ de abiertos en X tal que $\{S(A) : A \in \mathcal{A}\}$ es base para los abiertos de γX, donde $S(A)$ se define como en 2.18. Sean $\mathsf{A} = \cap_{i=1}^m \mathrm{cl}_{\gamma X} S(A_i) \cap e[X]$ y $\mathsf{B} = \cap_{j=1}^n \mathrm{cl}_{\gamma X} S(B_j) \cap e[X]$ tales que $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \varnothing, A_i, B_j \in \mathcal{A}$. Si existe $\mathcal{F} \in (\cap_{i=1}^m \mathrm{cl}_{\gamma X} S(A_i)) \cap (\cap_{j=1}^n \mathrm{cl}_{\gamma X} S(B_j))$, por 2.27, $A_i \in \mathcal{F}$ para toda i, y $B_j \in \mathcal{F}$ para toda j. Entonces existe $x \in (\cap_{i=1}^m \mathrm{cl}_X A_i) \cap (\cap_{j=1}^n \mathrm{cl}_X B_j)$. Por lo tanto $\mathcal{U}_x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$, lo cual es una contradicción. En consecuencia

$$(\cap_{i=1}^m \mathrm{cl}_{\gamma X} S(A_i)) \cap (\cap_{j=1}^n \mathrm{cl}_{\gamma X} S(B_j)) = \varnothing.$$

Observando que $\mathrm{cl}_{\gamma X} \mathsf{A} \subseteq \cap_{i=1}^m \mathrm{cl}_{\gamma X} S(A_i)$, obtenemos que $\mathrm{cl}_{\gamma X} \mathsf{A} \cap \mathrm{cl}_{\gamma X} \mathsf{B} = \varnothing$. Por el teorema 3.5, la familia

$$\mathcal{B} = \{\cap_{i=1}^m \mathrm{cl}_{\gamma X} S(A_i) \cap e[X] : A_i \in \mathcal{A}, m \in \mathbb{N}\}$$

es una base para la proximidad $\ll_{e[X]}^{\gamma X}$. Por el teorema 3.4, la compactación γX es de tipo Wallman. □

Como consecuencia del teorema anterior y del teorema 2.39 obtenemoes el siguiente resultado.

3.8 Corolario. *Las compactaciones de Freudenthal son de tipo Wallman.*

3.2. Espacios Γ y Δ

En esta sección estudiaremos algunas clases de espacios compactos que son extensiones compactas de tipo Wallman de cualquiera de sus subespacios densos.

3.9 Definición. Un espacio compacto X es Γ si X tiene una base $\mathcal{B}$ para los cerrados, cerrada bajo intersecciones finitas y formada por conjuntos cerrados regulares. En dicho caso diremos que $\mathcal{B}$ es base Γ de X.

3.10 Ejemplo. Los espacios compactos 0-dimensionales son espacios Γ.

3.11 Ejemplo. El espacio $I = [0,1]$ es un espacio Γ. En efecto, sean $D = \{i/2^k : i, k \in \mathbb{N}, 0 < i < 2^k\}$ y $\mathcal{B} = \{(d - 1/3^j, d + 1/3^j) \cap I : d \in D, j \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\mathcal{C} = \{I \setminus B : B \in \mathcal{B}\}$ es una base Γ en I.

Veremos ahora que la propiedad Γ es productiva.

3.12 Proposición. *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia de espacios Γ, entonces el espacio producto $X = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ es un espacio Γ.*

Demostración. Para cada $\alpha \in J$ sea $\mathcal{B}_\alpha$ una base Γ de X_α. Consideremos los conjuntos $\mathcal{C} = \{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in J, U_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha\}$ y $\mathcal{B} = \{\cup_{i=1}^m \cap_{j=1}^n C_{ij} : C_{ij} \in \mathcal{C}, m, n \in \mathbb{N}\}$. Demostraremos que $\mathcal{B}$ es base Γ de X. Es claro que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo intersecciones finitas. Sean $x = \{x_\alpha\}_{\alpha\in J} \in X$ y $Z \subseteq X$ un cerrado que no contiene a x. Entonces existe un subconjunto finito $K \subseteq J$ tal que $x \in \cap_{\alpha\in K}\pi_\alpha^{-1}(A_\alpha^K) \subseteq X\setminus Z$, donde A_α^K es abierto en X_α. Para cada $\alpha \in K$, $x_\alpha \in A_\alpha^K$, entonces existe $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ tal que $X \setminus A_\alpha^K \subseteq B_\alpha$ y $x_\alpha \notin B_\alpha$. Por lo tanto $Z \subseteq \cup_{\alpha\in K}\pi_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus A_\alpha^K) \subseteq \cup_{\alpha\in K}\pi_\alpha^{-1}(B_\alpha) = B$. Como x no es elemento de B, $\mathcal{B}$ es base para los cerrados de X. Como $\mathcal{B}$ está formado por cerrados regulares entonces X es un espacio Γ. $\square$

3.13 Teorema. *Cualquier espacio compacto Γ es una compactación de tipo Wallman de cualquiera de sus subespacios densos.*

Demostración. Sea X un espacio compacto Γ. Sea $Y \subseteq X$ un subespacio denso. Por 2.53, existe una única proximidad $\ll^X$ que genera la misma topología en X. Por 2.65, la compactación de Smirnov cY que se obtiene a partir de $\ll_Y^X$ es equivalente a X. Sea $\mathcal{B}$ una base para los cerrados de X, cerrada bajo intersecciones finitas y formada por cerrados regulares. Demostraremos que $\mathcal{B}\cap Y = \{B\cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ es base para $\ll_Y^X$. Sean $A\cap Y, B\cap Y \in \mathcal{B}\cap Y$ tales que $(A\cap Y)\cap(B\cap Y) = \varnothing$. Como $\mathcal{B}$ es cerrada bajo intersecciones finitas y está formada por cerrados regulares, $A \cap B$ pertenece a $\mathcal{B}$ y es un cerrado regular, lo que implica que $A\cap B = \varnothing$. Por lo tanto $\mathrm{cl}_X(A\cap Y)\cap \mathrm{cl}_X(B\cap Y) \subseteq A\cap B = \varnothing$. Por el teorema 3.5, la familia $\mathcal{B} \cap Y$ es base para la proximidad $\ll_Y^X$. Por el teorema 3.4, X es compactación de tipo Wallman de Y. $\square$

3.14 Ejemplo. Sea κ un cardinal. Los espacios 2^κ e I^κ son compactaciones de tipo Wallman para cualquiera de sus subespacios densos.

En lo que resta de la sección estudiaremos una propiedad que nos ayudará a demostrar que todo espacio métrico compacto es compactación de tipo Wallman de cualquiera de sus subespacios densos.

3.15 Definición. Sean A, B subconjuntos de un espacio X. Definimos

$$\Delta(A, B) = \mathrm{cl}_X(A \setminus B) \cap \mathrm{cl}_X(B \setminus A).$$

3.16 Proposición. *Sea X un espacio Tychonoff. Para cualesquiera $A, B \subseteq X$ se cumple lo siguiente:*

1. $\Delta(cl_X A, cl_X B) \subseteq \Delta(A, B)$;

2. $\Delta(X \setminus A, X \setminus B) = \Delta(A, B)$;

3. $\Delta(int_X\, cl_X A, int_X\, cl_X B) = cl_X[(int_X\, cl_X A) \setminus cl_X B] \cap cl_X[(int_X\, cl_X B) \setminus cl_X A]$

Demostración. 1). Sean $x \in \Delta(\mathrm{cl}_X A, \mathrm{cl}_X B)$ y $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U$. Entonces $U \cap \mathrm{cl}_X A \cap (X \setminus \mathrm{cl}_X B) \neq \varnothing$. Como el complemento de un cerrado es abierto, $\varnothing \neq U \cap A \cap (X \setminus \mathrm{cl}_X B) \subseteq U \cap A \cap (X \setminus B)$. Por lo tanto $x \in \mathrm{cl}_X(A \setminus B)$. De forma amáloga se demuestra que $x \in \mathrm{cl}_X(B \setminus A)$. Concluimos que $x \in \Delta(A, B)$.

2). Observando que $A \setminus B = (X \setminus B) \setminus (X \setminus A)$ se obtiene la igualdad $\triangle(A \cap Y, B \cap Y) \subseteq \triangle(A, B)$.

3). Observando que $X \setminus \mathrm{int}_X \mathrm{cl}_X A = \mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X A)$ se obtiene la igualdad. □

3.17 Definición. Sea X un espacio topológico. Una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una familia Δ si $\Delta(F_1, F_2) = \varnothing$ para $F_1, F_2 \in \mathcal{A}$.

3.18 Definición. Un espacio compacto X es llamado un espacio Δ si existe una familia Δ que es base para los cerrados de X.

3.19 Proposición. *Sea X un espacio topológico. Si $\mathcal{A}$ es una familia Δ, entonces la familia $\mathcal{B} = \{cl_X\, int_X A : A \in \mathcal{A}\}$ también es una familia Δ.*

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{B}$ y supongamos que $x \in \Delta(\mathrm{cl}_X \mathrm{int}_X A, \mathrm{cl}_X \mathrm{int}_X B)$. Sea U un abierto en X tal que $x \in U$. Entonces

$$\varnothing \neq U \cap \mathrm{int}_X A \cap (X \setminus \mathrm{cl}_X \mathrm{int}_X B) \subseteq$$

$$\subseteq U \cap \mathrm{int}_X A \cap (X \setminus \mathrm{int}_X B) = U \cap \mathrm{int}_X A \cap \mathrm{cl}_X(X \setminus B).$$

En consecuencia $U \cap \mathrm{int}_X A \cap (X \setminus B) \neq \varnothing$. De manera similar se demuestra que $U \cap \mathrm{int}_X B \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$. Por lo tanto $x \in \Delta(A, B)$, lo que es una contradicción. □

3.20 Proposición. *Sea X un espacio. Si $\mathcal{A}$ es una familia Δ formada por cerrados regulares, entonces el anillo generado por $\mathcal{A}$ también está formado por cerrados regulares.*

Demostración. Como sabemos que la unión finita de cerrados regulares es un cerrado regular, es suficiente demostrar que la unión finita de elementos de $\mathcal{A}$ es un cerrado regular. Sean $A, B \in \mathcal{A}$, y $x \in A \cap B$. Como $\Delta(A, B) = \varnothing$, podemos suponer que $x \in X \setminus \mathrm{cl}_X(A \setminus B) = \mathrm{int}_X((X \setminus A) \cup B)$. Entonces existe un abierto V en X tal que $x \in V \subseteq (X \setminus A) \cup B$. Por hipótesis $x \in A = \mathrm{cl}_X \mathrm{int}_X A$, entonces

$$\varnothing \neq V \cap \mathrm{int}_X A \subseteq ((X \setminus A) \cup B) \cap A = A \cap B.$$

Por lo tanto, $V \cap \mathrm{int}_X A \subseteq \mathrm{int}_X(A \cap B)$. Ahora, sea U un abierto en X tal que $x \in U$, entonces $U \cap \mathrm{int}_X(A \cap B) \supset U \cap V \cap \mathrm{int}_X A \neq \varnothing$. Concluimos que $A \cap B = \mathrm{cl}_X \mathrm{int}_X(A \cap B)$. Por lo tanto, el anillo generado por $\mathcal{A}$ también está formado por cerrados regulares. □

3.21 Proposición. *Sea X un espacio. Si $\mathcal{A}$ es una familia Δ, entonces el anillo generado por $\mathcal{A}$ también es una familia Δ.*

Demostración. Sean $\{A_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, m, n \in \mathbb{N}\}$ y $\{B_{rs} : 1 \leq r \leq p, 1 \leq s \leq q, r, s \in \mathbb{N}\}$ dos subfamilias finitas de $\mathcal{A}$. Supongamos que existe $x \in \Delta(\cup_{j=1}^{n} \cap_{i=1}^{m} A_{ij}, \cup_{s=1}^{q} \cap_{r=1}^{p} B_{rs})$ y sea U abierto en X tal que $x \in U$.

Entonces existen $y \in U \cap (\cup_{j=1}^{n} \cap_{i=1}^{m} A_{ij}) \cap (\cap_{s=1}^{q} \cup_{r=1}^{p} (X \setminus B_{rs}))$ y $z \in U \cap (\cup_{s=1}^{q} \cap_{r=1}^{p} B_{rs}) \cap (\cap_{j=1}^{n} \cup_{i=1}^{m} (X \setminus A_{ij}))$. Existe j_0 tal que $y \in \cap_{i=1}^{m} A_{ij_0}$, como $z \in \cup_{i=1}^{m}(X \setminus A_{ij_0})$, existe i_0 tal que $z \in X \setminus A_{i_0 j_0}$ y entonces $y \in A_{i_0 j_0}$. De manera análoga existen r_0, s_0 tales que $y \in X \setminus B_{r_0,s_0}$ y $z \in B_{r_0,s_0}$. Por lo tanto $y \in U \cap A_{i_0 j_0} \cap (X \setminus B_{r_0,s_0})$ y $z \in U \cap B_{r_0,s_0} \cap (X \setminus A_{i_0 j_0})$. Concluimos que $\Delta(A_{i_0 j_0}, B_{r_0,s_0}) \neq \varnothing$, lo que es una contradicción. Por lo tanto el anillo generado por $\mathcal{A}$ también es una familia Δ. $\square$

Gracias a las proposiciones 3.19,3.20 y 3.21 tenemos la siguiente

3.22 Proposición. *Todo espacio compacto Δ es Γ.*

3.23 Proposición. *La propiedad Δ se hereda a subespacios cerrados.*

Demostración. Sea Y un espacio Δ y X un subespacio cerrado de Y. Existe una base $\Delta, \mathcal{B}$, de Y. Sea $\mathcal{C} = \{X \cap B : B \in \mathcal{B}\}$. Supongamos que existen $A, B \in \mathcal{B}$ tales que $x \in \mathrm{cl}_X((A \cap X) \setminus (B \cap X)) \cap \mathrm{cl}_X((B \cap X) \setminus (A \cap X))$. Sea U un abierto en Y tal que $x \in U$. Entonces $U \cap X$ es abierto en X y $(U \cap X) \cap (A \cap X) \cap (X \setminus B) \neq \varnothing$. En consecuencia, $U \cap A \cap Y \setminus B \neq \varnothing$. De forma análoga, $U \cap B \cap Y \setminus A \neq \varnothing$. Por lo tanto, $A, B \notin \mathcal{B}$ lo que es una contradicción. Se sigue que $\mathcal{C}$ es una familia Δ en X. Como X es compacto concluimos que X es un espacio Δ. $\square$

El siguiente lema es un resultado preliminar para demosrar que todo espacio compacto métrico es compactación de Wallman de cualquiera de sus subespacios densos.

3.24 Lema. *Sea Y un espacio compacto y $\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ una familia Δ de conjuntos cerrados. Entonces para cada par de conjuntos cerrados ajenos $D, E \subseteq Y$, existe un conjunto cerrado A tal que $A \cap D = \varnothing$, $E \subseteq A$ y $\Delta(A, B_i) = \varnothing$ para toda $i \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $h : Y \to I$ una función continua tal que $h[E] \subseteq \{0\}$ y $h[D] \subseteq \{1\}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, definamos $h_i(y) = 1/3^i$ si $y \in B_i$ y $h_i(y) = 0$ si $y \notin B_i$. Definamos $g(y) = \Sigma_{i \in \mathbb{N}} h_i(y)$ y $f(y) = g(y) - h(y)$. Sea $A = \{y \in Y : f(y) \geq 0\}$. Si $y \in E$, $f(y) = g(y) \geq 0$, es decir $E \subseteq A$. Si $z \in D$, $f(z) = g(z) - 1 \leq 1/2$, es decir $D \cap A = \varnothing$. Afirmamos que la función g es semicontinua superiormente. En efecto sea $x \in Y$ y $r \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) < r$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\Sigma_{i \geq N} 1/3^i < r - g(x)$. Sea $B = \cup\{B_i : i < N \text{ e } x \notin B_i\}$. Entonces $U = Y \setminus B$ es un abierto que contiene a x. Sean $z \in U$ e $i < N$, si $h_i(x) = 0$, $x \notin B_i$, entonces $B_i \subseteq B$ e $Y \setminus B \subseteq Y \setminus B_i$. Como $z \in U$, $h_i(z) = 0$, por lo tanto $h_i(z) \leq h_i(x)$. En conclusión si $z \in U$ entonces

$$g(z) = \Sigma_{i=1}^{N-1} h_i(z) + \Sigma_{i \geq N} h_i(z) < \Sigma_{i=1}^{N-1} h_i(x) + r - g(x) \leq r.$$

Entonces g es semicontinua superiormente lo que implica que f también lo es y que A es cerrado en X.

Ahora falta demostrar que $\Delta(A, B_i) = \varnothing$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y \in \Delta(A, B_m)$. Para cada vecindad V de y, seleccionemos puntos $a_V \in V \cap A \cap Y \setminus B_m$ y $b_V \in V \cap B_m \cap Y \setminus A$.

Afirmación 1: Si $y \in B_{n_1} \cap \ldots \cap B_{n_p}$ y si existe un abierto $W \subseteq Y$ tal que $y \in W$ e $y \in V \subseteq W$ implica $a_V \in Y \setminus B_{n_1} \cap \ldots \cap Y \setminus B_{n_p}$, entonces $f(y) \geq 1/3^{n_1} + \ldots + 1/3^{n_p}$.

En efecto, supongamos que $y \in B_{n_1} \cap \ldots \cap B_{n_p}$ y existe un abierto $W \subseteq Y$ tal que $y \in W$ e $y \in V \subseteq W$ implica $a_V \in Y \setminus B_{n_1} \cap \ldots \cap Y \setminus B_{n_p}$. Sean $d > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\Sigma_{i \geq N} 1/3^i < d$. Sean $B = \cup\{B_i : i < N$ e $y \notin B_i\}$ y $U = Y \setminus B$. Sea $T = W \cap U \cap \{z : h(z) > h(y) - d\}$. Entonces T es un abierto que contiene a y. Como $a_T \in Y \setminus B_{n_1} \cap \ldots \cap Y \setminus B_{n_p}$ e $y \in B_{n_1}, \ldots, B_{n_p}$, $h_{n_k}(a_T) = 0$ y $h_{n_k}(y) = 1/3^{n_k}$, para $k = 1, \ldots p$. También observemos que $h_i(a) \leq h_i(y)$, para $i < N$. Denotemos por s a la suma $1/3^{n_1} + \ldots + 1/3^{n_p}$ y calculemos:

$$g(y) - g(a_W) = s + \Sigma_{i=1, i \neq n_k}^{N-1}(h_i(y) - h_i(a_W)) + \Sigma_{i>N}(h_i(y) - h_i(a_W))$$

$$\geq s + \Sigma_{i>N}(h_i(y) - h_i(a_W)) > 1/3^m - d$$

La última desigualdad se cumple porque $(h_i(a_W) - h_i(y)) \leq 1/3^i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como $a_W \in W$, entonces $h(a) - h(y) > -d$. En consecuencia

$$f(y) \geq f(y) - f(a_W) = g(y) - h(y) - g(a_W) + h(a_W) > s - d - d = s - 2d.$$

Como $f(y) \geq s - 2d$ cualquier $d > 0$ tenemos que la afirmación es cierta.

Afirmación 2: Si existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_V \in B_{m_0}$ para todo abierto V que contiene a y y $f(x) \geq 1/3^{m_1} + \ldots + 1/3^{m_p} + 1/3^{m_0}$, entonces existe $n < m_0, n \neq m_1, \ldots, m_p$ tal que $y \in B_n$ e $y \in \mathrm{cl}_Y(B_m \setminus B_n)$.

Demostraremos la afirmación 2 por contradicción. Supongamos que para todo $n < m_0$ con $n \neq m_1, \ldots, m_p$ e $y \in B_n$ se cumple que $y \notin \mathrm{cl}_Y(B_{m_0} \setminus B_n)$. Como h es continua, existe un abierto $W \subseteq Y$ tal que $y \in W$ y si $z \in W$ entonces $|h(z) - h(y)| < (1/2)(1/3^{m_0})$. Sea $M = \{n < m_0 : n \neq m_1, \ldots, m_p$ e $y \in B_n\}$. Por hipótesis, para cada $n \in M$ existe un abierto $W_n \subseteq Y$ tal que $y \in W_n \subseteq B_n \cup (Y \setminus B_{m_0})$. Definamos $T = W \cap (\cap_{n \in M} W_n)$. Observemos que T es un abierto que contiene a y y $b_T \in B_n$ para cada $n \in M$. Entonces

$$\Sigma_{i < m_0, i \neq m_1, \ldots, m_p}(h_i(y) - h_i(b_T)) \leq 0$$

Como $\Sigma_{i > m_0}(h_i(y) - h_i(b_T)) \leq \Sigma_{i > m_0} 1/3^i = (1/2)(1/3^{m_0})$, entonces

$$g(y) - g(b_T) = \Sigma_{i \in \mathbb{N}}(h_i(y) - h_i(b_T)) \leq \Sigma_{i<m}(h_i(y) - h_i(b_T)) + (1/2)(1/3^{m_0})$$

$$\leq 1/3^{m_1} + \ldots + 1/3^{m_p} + \Sigma_{i \neq m_1, \ldots, m_p}(h_i(y) - h_i(b_T)) + (1/2)(1/3^{m_0})$$

$$\leq 1/3^{m_1} + \ldots + 1/3^{m_p} + (1/2)(1/3^{m_0}).$$

Como $b_T \in W \cap Y \setminus A$, entonces $f(b_T) < 0$, y

$$f(y) < f(y) - f(b_T) = g(y) - g(b_T) + h(b_T) - h(y)$$

$$\leq 1/3^{m_1} + \ldots + 1/3^{m_p} + (1/2)(1/3^{m_0}) + (1/2)(1/3^{m_0}).$$

Por lo tanto $f(y) < 1/3^{m_1} + \ldots + 1/3^{m_p} + 1/3^{m_0}$, lo que es una contradicción.

Usaremos las afirmaciones 1 y 2 para obtener una contradicción. Como y pertenece a $\Delta(A, B_m) = \mathrm{cl}_Y(A \setminus B_m) \cap \mathrm{cl}_Y(B_m \setminus A)$, la afirmación 1 implica que $f(y) \geq 1/3^m$. Por la afirmación 2, existe $n_1 < m$ tal que $y \in B_{n_1}$ e $y \in \mathrm{cl}_Y(B_m \setminus B_{n_1})$. Como $\Delta(B_m, B_{n_1}) = \varnothing$, $y \notin \mathrm{cl}_Y(B_{n_1} \setminus B_m)$. Entonces existe $W_1 \subseteq Y$ abierto tal que $y \in W_1 \subseteq Y \setminus B_{n_1} \cup B_m$. Sea $V \subseteq W_1$ abierto tal que $y \in V \subseteq W_1$, entonces $a_V \in Y \setminus B_m \cap Y \setminus B_{n_1}$, por la afirmación 1, $f(y) \geq 1/3^m + 1/3^{n_1}$. La afirmación 2 implica que existe $n_2 < m, n_2 \neq n_1$ tal que $y \in B_{n_2}$ e $y \in \mathrm{cl}_Y(B_m \setminus B_{n_2})$. Continuando de esta forma encontraremos una cantidad numerable de naturales distintos entre sí y menores que m, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\Delta(A, B_m) = \varnothing$ para toda $m \in \mathbb{N}$. $\square$

3.25 Teorema. *Sea X un espacio compacto con $w(X) \leq \aleph_1$, entonces X es un espacio Δ.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una base para los cerrados de X cerrada bajo uniones e intersecciones finitas de cardinalidad menor o igual que $\aleph_1$. Entonces existen a lo más $\aleph_1$ parejas de elementos disjuntos de $\mathcal{A}$. Bien ordenemos a estas parejas $\{(D_i, E_i) : D, E \in \mathcal{A}, D \cap E = \varnothing, i < \lambda\}$, con $\lambda < \omega_1$.

Sea $\mathcal{B}_0 = \{D_0, E_0\}$. Sea $i < \lambda$ y supongamos que $\mathcal{B}_j$ está definido para $0 \leq j < i$ tal que $|\mathcal{B}_j| \leq \aleph_0, \Delta(A, B) = \varnothing$ para todo $A, B \in \mathcal{B}_j$ y $\mathcal{B}_j \subseteq \mathcal{B}_{j'}$ si $j \leq j'$.

Entonces $\mathcal{C} = \cup\{\mathcal{B}_j : j < i\}$ es una familia Δ numerable. Por 3.24 existe un conjunto cerrado $A_i \subseteq X$, tal que $A_i \cap D_i = \varnothing, E_i \subseteq A_i$ y $\Delta(A_i, C) = \varnothing$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

Sea $\mathcal{B}_i = \mathcal{C} \cup \{A_i\}$. Entonces $\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{B}_i : i < \lambda\}$ es una base para los cerrados de X tal que $\Delta(A, B) = \varnothing$. En efecto, sean C un subcinjunto cerrado en X y $x \notin C$. Como $\mathcal{A}$ es una base para los cerrados de X, existe $E \in \mathcal{A}$ tal que $C \subseteq E$ y $x \notin E$. Como X es compacto, existe $D \in \mathcal{A}$ tal que $x \in D$ y $E \cap D = \varnothing$. En consecuencia, existe $i < \lambda$ tal que $(D, E) = (D_i, E_i)$. Como $A_i \in \mathcal{B}_i$ y se cumple que $A_i \cap D_i = \varnothing, E_i \subseteq A_i$, entonces $\mathcal{B}$ es una base para los cerrados de X.

Por lo tanto X es un espacio Δ. $\square$

De los teoremas 3.13 y 3.25 se tienen los siguientes corolarios.

3.26 Corolario. *Cualquier espacio compacto de peso menor o igual a $\aleph_1$ es una compactación de Wallman de cualquiera de sus subespacios densos.*

3.27 Corolario. *Cualquier espacio compacto métrico es una compactación de Wallman de cualquiera de sus subespacios densos.*

Capítulo 4

Compactaciones que no son de tipo Wallman

4.1. Ejemplo de un espacio compacto que no es espacio Δ

En esta sección estudiaremos una clase de espacios compactos que no son espacios Δ cuya demostración se debe a L.B. Sapiro, cuya referencia puede encontrarse en [9].

4.1 Definición. Sea γ un ordinal y definamos $L(\gamma)$ como el espacio $([0,\gamma) \times [0,1)) \cup \{(\gamma,0)\}$ con la topología generada por el orden lexicográfico, donde $[0,\gamma)$ es el conjunto de ordinales menores que γ.

De la definición observamos que el espacio $L(\gamma)$ es linealmente ordenado. El siguiente resultado es bien conocido y puede encontrarse en [3].

4.2 Lema. *Un espacio topológico X linealmente ordenado es compacto si y sólo si cualquier subconjunto no vacío tiene supremo e ínfimo.*

4.3 Proposición. *El espacio $L(\gamma)$ es compacto.*

Demostración. Sea A un subconjunto no vacío de $L(\gamma)$. Demostraremos que $\inf A$ y $\sup A$ existen. Si $(\gamma,0) \in A, (\gamma,0) = \sup A$. Supongamos que $(\gamma,0) \notin A$. Sea $a = \sup\{\alpha \in [0,\gamma) : (\alpha,r) \in A$ para algún $r \in [0,1)\}$. Si $a = \gamma$, $(\gamma,0) = \sup A$.

Supongamos que $a < \gamma$. Si $(a \times [0,1)) \cap A \neq \varnothing$, sea $r = \sup\{r \in [0,1) : (a,r) \in A\}$. Si $r = 1, (a+1,0) = \sup A$. Si $r < 1, (a,r) = \sup A$.

Ahora supongamos que $(a \times [0,1)) \cap A = \varnothing$, entonces $(a,0) = \sup A$. En efecto, sea $(\delta,\epsilon) \in L(\gamma)$ tal que $(\delta,\epsilon) \geq (\alpha,\beta)$ para todo $(\alpha,\beta) \in A$. Supongamos que $(a,0) > (\delta,\epsilon)$, entonces $a > \delta$, luego existe $\eta \in [0,\gamma)$ tal que $(\eta,r) \in A$ para algún $r \in [0,1)$ y $\delta < \eta \leq a$. Por lo tanto $(\delta,\epsilon) < (\eta,r)$, lo cual es una contradicción. Como $L(\gamma)$ es linealmente ordenado, $(\delta,\epsilon) \geq (\eta,r)$. La demostración de que A tiene ínfimo es análoga. Por lo tanto $L(\gamma)$ es compacto. $\square$

Observemos que en el espacio $L(\gamma)$ el intervalo $((\alpha, 0), (\alpha + 1, 0))$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. De esta forma podemos considerar a $L(\gamma)$ como el espacio que se obtiene a partir del espacio de ordinales menores o igual a γ pegando el intervalo $[0, 1]$ entre los ordinales α y $\alpha + 1$ para cada α menor que γ.

Recordaremos un teorema conocido cuya demostración puede encontrarse en [3].

4.4 Teorema. *Sean $X = [0, 1]^T$ y U un subconjunto abierto de X. Entonces existen un subconjunto abierto $V \subseteq U$ y un subconjunto L de T tales que L es numerable, $cl_X V = cl_X U$ y $\pi_L^{-1} \pi_L V = V$.*

4.5 Corolario. *Sea $X = [0, 1]^T$. Si $U = cl_X int_X U$, entonces U es de tipo G_δ en X.*

A continuación veremos un ejemplo de un espacio compacto que no es $\triangle$.

4.6 Proposición. *Existe un espacio compacto que no es Δ.*

Demostración. Supongamos que $\mathrm{cf}(\gamma) \geq \omega_1$. Sea $F \subseteq L(\gamma) \times [0, 1]$ un subespacio cerrado de tipo G_δ tal que $L(\gamma) \times \{0\} \subseteq F$ y $F \cap (L(\gamma) \times \{1\}) = \varnothing$.

Afirmación: existe un ordinal $\alpha < \gamma$ y un número real $t_0 \in \mathbb{R}$ tales que $[\alpha, \gamma] \times \{t_0\} \subseteq F$ y $([\alpha, \gamma] \times (t_0, 1]) \cap F = \varnothing$.

En efecto, sea $t_0 = \sup\{t \in [0, 1] : (\gamma, t) \in F\}$. Entonces $(\gamma, t_0) \in F$, por que F es cerrado y $t_0 < 1$. Como F es de tipo G_δ, existe una familia numerable $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de abiertos en $L(\gamma) \times [0, 1]$ tal que $F = \cap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un ordinal $\alpha_n < \gamma$ y un real ε_n tales que

$$(\gamma, t_0) \in [\alpha_n, \gamma] \times (t_0 - \varepsilon_n, t_0 + \varepsilon_n) \subseteq U_n.$$

Sea $\beta = \sup \alpha_n$, entonces $\beta < \gamma$ y

$$(\gamma, t_0) \in [\beta, \gamma] \times \{t_0\} \subseteq \cap_{n \in \mathbb{N}} ([\alpha_n, \gamma] \times (t_0 - \varepsilon_n, t_0 + \varepsilon_n)) \subseteq F.$$

Por otro lado se tiene que, para cada $t \in (t_0, 1]$, $(\gamma, t) \notin F$ y existe una vecindad $W_t = (\beta_t, \gamma] \times V_t$ de (γ, t) tal que $W_t \cap F = \varnothing$, donde V_t es una vecindad de t en $(t_0, 1]$. Observemos que la familia $\{V_t : t \in (t_0, 1]\}$ es una cubierta de $(t_0, 1]$ y por lo tanto podemos extraer una subcubierta numerable $\{V_{t_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $\alpha = \text{máx}\{\beta, \sup_{n \in \mathbb{N}} \beta_{t_n} + 1\}$. Como $\gamma > \alpha > \beta$, es claro que $[\alpha, \gamma] \times \{t_0\} \subseteq F$. Ahora sea $(\xi, t) \in [\alpha, \gamma] \times (t_0, 1]$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t \in V_{t_n}$, en consecuencia $(\xi, t) \in W_{t_n}$, lo que implica que $(\xi, t) \notin F$, lo que demuestra la afirmación.

Supongamos que $\mathcal{U}$ es una base Δ para el espacio compacto $X = L(\omega_2) \times L(\omega_1)$, formada por cerrados regulares. Por 4.5, la base $\mathcal{U}$ está formada por conjuntos de tipo G_δ. Para cada ordinal $\alpha < \omega_1$, seleccionemos un elemento $F_\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $L(\omega_2) \times [0, \alpha] \subseteq F_\alpha$ y $F_\alpha \cap (L(\omega_2) \times [\alpha + 1, \omega_1]) = \varnothing$. Por lo demostrado en la afirmación anterior, para cada α menor que ω_1, seleccionemos un ordinal $\beta_\alpha < \omega_2$ y un número real $t_\alpha \in [\alpha, \alpha+1]$ tales que $[\beta_\alpha, \omega_2] \times \{t_\alpha\} \subseteq F_\alpha$ y $([\beta_\alpha, \omega_2] \times (t_\alpha, \omega_1]) \cap F_\alpha = \varnothing$. Sea $\beta = \sup \beta_\alpha$. Entonces $\beta < \omega_2$ y seleccionemos un elemento $F_\beta \in \mathcal{U}$ tal que $[0, \beta] \times L(\omega_1) \subseteq F_\beta$ y $([\beta+1, \omega_2] \times L(\omega_1)) \cap F_\beta = \varnothing$. Usando nuevamente la demostración, seleccionemos un ordinal $\gamma_\beta < \omega_1$ y un número real $t_\beta \in [\beta, \beta+1]$ tal que $\{t_\beta\} \times [\gamma_\beta, \omega_1] \subseteq F_\beta$ y $((t_\beta, \omega_2] \times [\gamma_\beta, \omega_1]) \cap F_\beta = \varnothing$. Demostraremos que $(t_\beta, t_{\gamma_\beta}) \in \Delta(F_\beta, F_{\gamma_\beta})$. En efecto, sea $U \times V$ un abierto básico de X tal que $(t_\beta, t_{\gamma_\beta}) \in U \times V$. Sea $r \in V$ tal que $r > t_{\gamma_\beta}$. Como $t_{\gamma_\beta} \in [\gamma_\beta, \gamma_\beta + 1]$, entonces $r > \gamma_\beta$ y $(t_\beta, r) \in F_\beta$. Como $t_\beta > \beta$ tenemos que $t_\beta > \beta_{\gamma_\beta}$ y $(t_\beta, r) \notin F_{\gamma_\beta}$. Entonces $(t_\beta, t_{\gamma_\beta}) \in \mathrm{cl}_X(F_\beta \setminus F_{\gamma_\beta})$. De manera análoga sea $s \in U$ tal que $s > t_\beta$. Entonces $(s, t_{\gamma_\beta}) \in F_{\gamma_\beta} \cap (X \setminus F_\beta)$. Por lo tanto $(t_\beta, t_{\gamma_\beta}) \in \Delta(F_\beta, F_{\gamma_\beta})$. Concluimos que X no es un espacio Δ. $\square$

4.7 Teorema. *Si $\tau \geq \aleph_2$, entonces I^τ no es un espacio Δ.*

Demostración. El espacio compacto $X = L(\omega_2) \times L(\omega_1)$ es un subespacio cerrado de $I^{\aleph_2}$, ya que X tiene peso igual a $\aleph_2$, pero X no es espacio Δ, por lo tanto I^τ no es espacio Δ para $\tau \geq \aleph_2$. $\square$

4.8 Teorema. *Sea X un espacio compacto e Y un subespacio cerrado de X que no es de tipo Δ. Entonces para cualquier base $\mathcal{U}$ para los cerrados de X, existen $F_1, F_2 \in \mathcal{U}$ tales que*

$$Y \cap \Delta(int_X F_1, int_X F_2) \neq \varnothing.$$

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una base para los cerrados de X. Entonces $\mathcal{V} = \{\mathrm{cl}_X \mathrm{int}_X U : U \in \mathcal{U}\}$ es una base para los cerrados de X. Por lo tanto $\mathcal{V}' = \{V \cap Y : V \in \mathcal{V}\}$ es base para los cerrados de Y. Como Y no es Δ, existen $y \in Y$ y $F_1, F_2 \in \mathcal{V}'$ tales que $y \in \mathrm{cl}_Y[(F_1 \cap Y) \setminus F_2] \cap \mathrm{cl}_Y[(F_1 \cap Y) \setminus F_2]$.

Sea $U \subseteq X$ un abierto tal que $y \in U$. Entonces $U \cap (F_1 \cap Y) \cap (X \setminus F_2) \neq \varnothing$. Por lo tanto $U \cap \mathrm{int}_X F_1 \cap (X \setminus \mathrm{int}_X F_2) \neq \varnothing$. $\square$

4.2. Ejemplo de un espacio Tychonoff con una compactación que no es de tipo Wallman

En esta sección veremos cómo Ul'janov construyó un espacio compacto que no es compactación de Wallman de algún subespacio denso. Para esto construiremos una familia de espacios compactos.

Sean X un espacio compacto y Λ un conjunto de índices. Para cada $\alpha \in \Lambda$, sean Z_α un espacio compacto, G_α un subespacio cerrado propio de X y $g_\alpha : X \setminus G_\alpha \to Z_\alpha$ una función continua.

Para cada $\alpha \in \Lambda$, definamos $X_\alpha = (X \setminus G_\alpha) \cup (G_\alpha \times Z_\alpha)$, con la topología generada por los conjuntos de la forma

$$V(U, H) = (U \cap g^{-1}[H]) \cup ((U \cap G_\alpha) \times H).$$

Donde $U \subseteq X$ y $H \subseteq Z_\alpha$ son abiertos arbitrarios. Entonces X_α es compacto para cada $\alpha \in \Lambda$.

Para cada $\alpha \in \Lambda$ definamos una función ${}^\alpha\pi : X_\alpha \to X$ dada por:

$$ {}^\alpha\pi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X \setminus G_\alpha \\ x_1 & \text{si } x = (x_1, x_2) \in G_\alpha \times Z_\alpha \end{cases} $$

Es fácil notar que la funcion ${}^\alpha\pi$ es continua en X_α para cada α.

Definamos

$$ X_\Lambda = X_\Lambda(X, \{Z_\alpha\}, \{G_\alpha\}, \{g_\alpha\}, \Lambda) = $$

$$ = \{\{x_\alpha\} \in \Pi X_\alpha :^\alpha \pi x_\alpha =^\beta \pi x_\beta \text{ para toda } \alpha, \beta \in \Lambda\}. $$

Entonces X_Λ es un subespacio cerrado de ΠX_α, y por lo tanto compacto.

Definamos ${}^\Lambda\pi : X_\Lambda \to X$ por ${}^\Lambda\pi(\{x_\alpha\}) =^\beta \pi(x_\beta)$. Como $\{x_\alpha\}$ pertenece a X_Λ, la función ${}^\Lambda\pi$ no depende de la elección de $\beta \in \Lambda$.

La función ${}^\Lambda\pi$ es continua, ya que es la composición de dos funciones continuas, es decir, ${}^\Lambda\pi =^\alpha \pi \circ \pi_\alpha$, donde $\pi_\alpha : \Pi X_\alpha \to X_\alpha$, es la proyección natural.

4.9 Lema. *Sea $Z \subseteq X$. Si $Z \subseteq X \setminus G_\alpha$ para toda $\alpha \in \Lambda$, entonces la función ${}^\Lambda\pi$ restringida a $({}^\Lambda\pi)^{-1}[Z]$ es un homeomorfismo sobre Z. Si Z es denso en X entonces $X_\Lambda = cl_{X_\Lambda} Z$.*

Demostración. Sean $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in ({}^\Lambda\pi)^{-1}[Z]$ puntos diferentes. Existe $\beta \in \Lambda$ tal que $x_\beta \neq y_\beta$. Entonces ${}^\Lambda\pi(\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}) = x_\beta \neq y_\beta =^\Lambda \pi(\{y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$. Por lo tanto ${}^\Lambda\pi$ es inyectiva.

Sea ahora $z \in Z$. Entonces $\{z\}_{\alpha\in\Lambda} \in X_\Lambda \cap ({}^\Lambda\pi)^{-1}[Z]$. Por lo tanto ${}^\Lambda\pi$ es suprayectiva.

Sea

$$ V = X_\Lambda \cap (\cap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}[(U_\alpha \cap g^{-1}[H_\alpha]) \cup ((U_\alpha \cap G_\alpha) \times H_\alpha)]) $$

un abierto básico no vacío de X_Λ, donde F es un subcunjunto finito de Λ y $U_\alpha \subseteq X$, $H_\alpha \subseteq Z_\alpha$ son abiertos.

Entonces ${}^\Lambda\pi[V \cap ({}^\Lambda\pi)^{-1}[Z]] = (\cap_{\alpha\in F}(U_\alpha \cap g^{-1}[H_\alpha])) \cap Z$.

Si Z es denso y V es no vacío entonces $\cap_{\alpha\in F}(U_\alpha \cap g^{-1}[H_\alpha])$ es un abierto no vacío en X. Por lo tanto $V \cap ({}^\Lambda\pi)^{-1}[Z]$ es no vacío. □

El lema anterior nos dice que si $Z \subseteq X \setminus G_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$ y Z es denso en X, entonces X_Λ es una compactación de Z.

4.10 Ejemplo. Veremos un caso particular de la contrucción de X_Λ vista en esta sección.

Sean τ un cardinal y T un conjunto tal que $|T| = 2^\tau$.

Sean $X = [0,1]^T$, donde $|T| = 2^\tau$. Sea $Y = [1/2, 1]^T, Z = (0,1]^T$, y sea $S \subseteq Z$ un denso de cardinalidad τ.

Definamos $\mathcal{U} = \{(A, B) : A \cap B \subseteq S$ y $\Delta(\text{int}_X\text{cl}_X A, \text{int}_X\text{cl}_X B) \cap Y \neq \varnothing\}$. Entonces $|\mathcal{U}| = 2^\tau$. Bien ordenemos a la familia $\mathcal{U}$ y sea $(A_\alpha, B_\alpha) \in \mathcal{U}$. Por 4.4, existen abiertos

$$V_\alpha \subseteq \text{int}_X\text{cl}_X A_\alpha \setminus \text{cl}_X B_\alpha$$

y

$$W_\alpha \subseteq \text{int}_X\text{cl}_X B_\alpha \setminus \text{cl}_X A_\alpha$$

y un subconjunto a lo más numerable $L_\alpha \subseteq T$ tales que

$$\text{cl}_X V_\alpha = \text{cl}_X[\text{int}_X\text{cl}_X A_\alpha \setminus \text{cl}_X B_\alpha],$$

$$\text{cl}_X W_\alpha = \text{cl}_X[\text{int}_X\text{cl}_X B_\alpha \setminus \text{cl}_X A_\alpha],$$

$\pi_{L_\alpha}^{-1}\pi_{L_\alpha} V_\alpha = V_\alpha$ y $\pi_{L_\alpha}^{-1}\pi_{L_\alpha} W_\alpha = W_\alpha$

Sea $t_1 \in T \setminus L_1$ y definamos $T_1 = L_1 \cup \{t_1\}$. Para cada $\alpha \in T$, seleccionemos $t_\alpha \in T \setminus ((\cup_{\beta<\alpha} T_b) \cup L_\alpha)$, y definamos $T_\alpha = L_\alpha \cup \{t_\alpha\}$. Sea $\alpha \in T$. Por la propiedad 3, y la definición de V_α y W_α tenemos que $\text{cl}_X V_\alpha \cap \text{cl}_X W_\alpha \cap Y = \Delta(\text{int}_X\text{cl}_X A, \text{int}_X\text{cl}_X B) \cap Y \neq \varnothing$.

Sea $y_\alpha \in \text{cl}_X V_\alpha \cap \text{cl}_X W_\alpha \cap Y$. Definamos un punto $x_\alpha \in X$ por $\pi_{t_\alpha} x_\alpha = 0$ y $\pi_t x_\alpha = \pi_t y_\alpha$ para $t \in T \setminus \{t_\alpha\}$. Entonces $x_\alpha \in \text{cl}_X V_\alpha \cap \text{cl}_X W_\alpha$. Definiendo $X(\alpha) = \Pi_{t\in T_\alpha}[0, 1]$, tenemos que, $\pi_{T_\alpha} x_\alpha \in \text{cl}_{X(\alpha)}(\Pi_{t\in T_\alpha} V_\alpha) \cap \text{cl}_{X(\alpha)}(\Pi_{t\in T_\alpha} W_\alpha)$. Como $X(\alpha)$ es métrico, existen sucesiones distintas $\{v_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Pi_{t\in T_\alpha} V_\alpha$ y $\{w_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Pi_{t\in T_\alpha} W_\alpha$ que convergen a $\pi_{T_\alpha} x_\alpha$. Sea $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de todos los racionales en el intervalo $(0, 1]$.

Como el espacio $X(\alpha) \setminus \{\pi_{T_\alpha} x_\alpha\}$ es normal y los espacios $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ son cerrados y discretos en $X(\alpha) \setminus \{\pi_{T_\alpha} x_\alpha\}$, existe una función continua $f_\alpha : X(\alpha) \setminus \{\pi_{T_\alpha} x_\alpha\} \to [0, 1]$, tal que $f_\alpha(v_n) = f_\alpha(w_n) = r_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $(X(\alpha) \setminus \{\pi_{T_\alpha} x_\alpha\}) \setminus \pi_{T_\alpha}(V_\alpha \cup W_\alpha) \subseteq f^{-1}(0)$. Sea $G_\alpha = \pi_{T_\alpha}^{-1}\pi_{T_\alpha} x_\alpha$ y $g_\alpha = f_\alpha \pi_{T_\alpha | X\setminus G_\alpha}$.

Entonces podemos definir el espacio $X_\alpha = (X \setminus G_\alpha) \cup (G_\alpha \times [0, 1])$ y la proyección ${}^\alpha\pi_\alpha \to X$.

Consideremos el espacio $X_\Lambda = X_\Lambda(X, \{[0, 1]\}, \{G_\alpha\}, \{g_\alpha\}, T)$. Entonces la función ${}^\Lambda\pi$ restringida a $({}^\Lambda\pi)^{-1}[Z]$ es un homeomorfismo. Como $Z \subseteq X \setminus G_\alpha$ para toda $\alpha \in \Lambda$, $X_\Lambda = \text{cl}_{X_\Lambda} Z = \text{cl}_{X_\Lambda} S$. Por lo tanto X_Λ es conexo ya que Z lo es.

4.11 Lema. *Sea X_Λ como se contruyó en el ejemplo 4.10. Si $(x, h) \in G_\alpha \times (0, 1]$, entonces*

$$(x, h) \in (cl_{X(\alpha)} A_\alpha \cap cl_{X(\alpha)} B_\alpha) \setminus (cl_{X(\alpha)}(A_\alpha \cap B_\alpha)).$$

Demostración. Sea $V(U, H) = (U \cap g_\alpha^{-1}(H)) \cup ((U \cap G_\alpha) \times H)$ una vecindad básica del punto $(x, h) \in X(\alpha)$, donde $x \in U \subseteq X, h \in H \subseteq (0, 1]$. Entonces

$$U \cap g_\alpha^{-1}(H) \subseteq V_\alpha \cup W_\alpha \subseteq X_\alpha \setminus (A_\alpha \cap B_\alpha),$$

$$((U \cap G_\alpha) \times H) \cap (A_\alpha \cup B_\alpha) = \varnothing, U \cap g_\alpha^{-1}(H) \cap A_\alpha \neq \varnothing$$

$$\text{y } U \cap g_\alpha^{-1}(H) \cap B_\alpha \neq \varnothing.$$

□

4.12 Teorema. *Supongamos que $2^\tau \geq \aleph_2$. Sean X_Λ y S como se construyeron en 4.10. Entonces X_Λ es una compactación conexa de S que no es de tipo Wallman.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base para los cerrados en X_Λ tal que $F = \mathrm{cl}_{X_\Lambda}(F \cap ({}^\Lambda\pi)^{-1}[S])$ para cada $F \in \mathcal{B}$. Por 4.7, Y no es un espacio Δ. Como $({}^\Lambda\pi)^{-1}[Y] \subseteq X_\Lambda$, por 4.8, existen $F_1, F_2 \in \mathcal{B}$ tales que $\Delta(\mathrm{int}_{X_\Lambda} F_1, \mathrm{int}_{X_\Lambda} F_2) \cap Y \neq \varnothing$. Entonces existe $(A_\alpha, B_\alpha) \in \mathcal{U}$ tal que $A_\alpha = S \cap^\Lambda \pi[F_1]$ y $B_\alpha = S \cap^\Lambda \pi[F_2]$. Sea $h \in (0,1]$, entonces $(x_\alpha, h) \in \mathrm{cl}_{X_\alpha} A_\alpha \cap \mathrm{cl}_{X_\alpha} B_\alpha \setminus \mathrm{cl}_{X_\alpha}(A_\alpha \cap B_\alpha)$. Por lo tanto

$$F_1 \cap F_2 \neq \mathrm{cl}_{X_\Lambda}(F_1 \cap F_2 \cap ({}^\Lambda\pi)^1[S]).$$

Por lo tanto la familia $\mathcal{B}$ no es cerrada bajo intersecciones finitas y entonces X_Λ no es compactación de tipo Wallman para S. $\square$

4.13 Corolario. *Cualquier extensión compacta Hausdorff de cualquier espacio separable es de tipo Wallmann si y sólo si se cumple la hipótesis del continuo.*

Demostración. Supongamos que se cumple la hipótesis del continuo. Sea Y un espacio separable y sea X una extensión compacta Hausdorff de Y. Entonces $w(X) \leq 2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Por 3.25, X es compactación de tipo Wallman para Y.

Ahora supongamos que la hipótesis del continuo no se cumple, entonces $2^{\aleph_0} > \aleph_2$, por 4.12, existe un espacio S de cardinalidad $\aleph_0$ y una extensión compacta αS, de S, que no es compactación de tipo Wallman. $\square$

4.14 Teorema. *Sea κ un cardinal. Si cualquier compactación del espacio discreto de cardinalidad κ es de tipo Wallman, entonces cualquier compactación de cualquier espacio Tychonoff de cardinalidad κ sin puntos aislados es de tipo Wallman.*

Demostración. Sea X un espacio completamente regular de cardinalidad κ sin puntos aislados y sea αX una compactación arbitraria de X. Sea $\phi : Y \to \alpha X$ una función inyectiva tal que $Y \cap \alpha X = \varnothing$ y $\phi[Y] = X$. Equipemos al conjunto $T = Y \cup \alpha X$, con la topología duplicada de Aleksandrov, es decir, para todo punto $y \in Y$, el conjunto $\{y\}$ es abierto, y una vecindad básica V_y para el punto $y \in \alpha X$ es

$$V_y = O_y \cup \phi^{-1}[O_y \setminus \{y\}],$$

donde O_y es un abierto en αX que contiene a y. Como X no tiene puntos aislados y es denso en αX, $X \cap (O_y \setminus \{y\})$ es diferente del vacío para todo $y \in \alpha X$. Por lo tanto $\phi^{-1}[O_y \setminus \{y\}] \neq \varnothing$ y $\mathrm{cl}_T Y = T$.

Entonces T es una compactación del espacio discreto Y de cardinalidad κ. Por hipótesis, existe una base $\mathcal{B}$ para los cerrados de T cerrada bajo uniones e intersecciones finitas tal que $\mathrm{cl}_T(F \cap Y) = F$ para todo $F \in \mathcal{B}$.

Para cada $F \in \mathcal{B}$, definamos $P_F = (F \cap \alpha X) \cup \phi(F \cap Y)$. Entonces $P_F = \mathrm{cl}_T(\phi(F \cap Y))$.

En efecto, sea $y \in P_F \setminus \phi(F \cap Y)$. Sea $O_y \subseteq \alpha X$ un abierto tal que $y \in O_y$. Como $y \in F$ y $F = \mathrm{cl}_T(F \cap Y)$, $\phi^{-1}[O_y \setminus \{y\}] \cap F \cap Y \neq \varnothing$. Lo que implica que $Oy \setminus \{y\} \cap \phi[F \cap Y] \neq \varnothing$. Por lo tanto $y \in \mathrm{cl}_T(\phi(F \cap Y))$.

Ahora sea $y \in \mathrm{cl}_T(\phi(F \cap Y)) \setminus \phi[F \cap Y]$. Sea $O_y \subseteq \alpha X$ abierto tal que $y \in O_y$. Entonces $O_y \cap \phi(F \cap Y) \neq \varnothing$, como $y \notin \phi[F \cap Y]$, $O_y \setminus \{y\} \cap \phi[F \cap Y] \neq \varnothing$. Existe $f \in F \cap Y$ tal que $\phi(f) \in O_y \setminus \{y\}$, luego $\phi^{-1}[O_y \setminus \{y\}] \cap F \cap Y \neq \varnothing$, entonces $y \in \mathrm{cl}_T(F \cap Y) = F$. Por lo tanto $P_F = cl_T(\phi(F \cap Y)) = cl_T(P_F \cap X)$.

Observemos que si $F, G \in \mathcal{B}$, entonces $P_F \cap P_G = P_{F \cap G} \cup (F \cap \phi[G \cap Y]) \cup (G \cap \phi[F \cap Y])$. Demostraremos que $P_F \cap P_G = \mathrm{cl}_T(P_F \cap P_G \cap X)$.

Sea $x \in P_F \cap P_G$. Supongamos que x pertenece a $P_{F \cap G}$. Sea $O_x \subseteq \alpha X$, un abierto que contiene a x. Como $P_{F \cap G} = \mathrm{cl}_T(\phi[F \cap G \cap Y])$, se tiene que

$$\varnothing \neq O_x \cap \phi(F \cap G \cap Y) \subseteq O_x \cap P_F \cap P_G \cap X,$$

entonces $x \in \mathrm{cl}_T(P_F \cap P_G \cap X)$.

Si $x \in F \cap \phi(G \cap Y)$, entonces $x \in P_F \cap P_G \cap X$. Por lo tanto $P_F \cap P_G = \mathrm{cl}_T(P_F \cap P_G \cap X)$.

Definamos $\mathcal{B}' = \{P_{F_1} \cap \ldots \cap P_{F_n} : n \in \mathbb{N}, F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{B}\}$ y sea

$$\mathcal{C} = \{A \setminus S : A \in \mathcal{B}', S \subseteq \alpha X, |S| < \aleph_0, \mathrm{cl}_T(A \setminus S) = A \setminus S\}.$$

Observemos que $A \setminus S = \mathrm{cl}_T((A \setminus S) \cap X)$, si $A \setminus S \in \mathcal{C}$.

Sean $A_1 \setminus S_1, \ldots, A_n \setminus S_n \in \mathcal{C}$, entonces

$$\mathrm{cl}_T(\cap_{i=1}^n (A_i \setminus S_i)) \subseteq \cap_{i=1}^n \mathrm{cl}_T(A_i \setminus S_i) = \cap_{i=1}^n (A_i \setminus S_i)$$

y

$$\mathrm{cl}_T(\cup_{i=1}^n (A_i \setminus S_i)) = \cup_{i=1}^n \mathrm{cl}_T(A_i \setminus S_i) = \cup_{i=1}^n (A_i \setminus S_i)$$

Por lo tanto $\mathcal{C}$ es cerrado bajo uniones e intersecciones finitas.

Ahora demostraremos que $\mathcal{C}$ es base para los cerrados de αX.

Sea $y \in \alpha X$ y $O_y \subseteq \alpha X$ un abierto que contiene a y. Entonces $y \in V_y = O_y \cup \phi^{-1}[O_y \setminus \{y\}]$. Como $\mathcal{B}$ es base para los cerrados de T, existe $F \in \mathcal{B}$ tal que $y \notin F$ y $T \setminus V_y \subseteq F$.

Sea $D = P_F \setminus \phi\phi^{-1}(y)$. Sea $z \in \alpha X \setminus O_y$, luego $z \notin V_y$, entonces $z \in F \cap \alpha X$, por lo tanto $\alpha X \setminus O_y \subseteq P_F \setminus \phi\phi^{-1}(y)$. Es claro que $y \notin D$, y $D \in \mathcal{C}$. En consecuencia $\mathcal{C}$ es una base para los cerrados de αX, cerrada bajo uniones e intersecciones finitas y $\mathrm{cl}_{\alpha X}(A \cap X) = A$ para todo $A \in \mathcal{C}$. Concluimos que αX es compactación de tipo Wallman para X. □

Los teoremas 4.12 y 4.14 nos dicen que para cualquier espacio discreto de cardinalidad κ tal que $2^\kappa \geq \aleph_2$, existe una compactación $\alpha\kappa$ que no es de tipo Wallman para κ.

Si consideramos la negación de la hipótesis del continuo, el teorema 4.12 nos construye un espacio S de cardinalidad ω y una extensión compacta y conexa υS que no es de tipo Wallman de S. Como υS es conexo, S no tiene puntos aislados. Entonces el espacio $T = \omega \cup \upsilon S$ definido en 4.14, no es compactación de tipo Wallman de ω.

En cambio, la afirmación de la hipótesis del continuo nos dice que el peso de cualquier compactación $\alpha\omega$ de ω es menor o igual a $\aleph_1$. Por 3.26, el espacio T es compactación de tipo Wallman de ω.

Por lo tanto, tenemos el siguiente teorema.

4.15 Teorema. *Toda extensión compacta de ω es de tipo Wallman si y sólo si se cumple la hipótesis del continuo.*

Bibliografía

[1] Aló, Richard y Shapiro, Harvey, *Normal bases and compactifications.* Math. Annalen 175, 337-340 (1968).

[2] Bandt, Christoph, *On Wallman-Shanin compactifications.* Math. Nachr. 77, 333-351 (1977).

[3] Engelking, R., *General Topology.* Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[4] Fan, Ky y Gottesman, Noel, *On compactification of Freudenthal and Wallman.* Indag. Math. 14, 504-510, (1952).

[5] García-Maynes, A. y Tamariz-Mascarúa, A., *Topología General.* Porrúa 1988.

[6] Njastad, Olav, *On Wallman type compactifications.* Math Zeitschr. 91, 267-276, (1996).

[7] Porter, Jack R. y Woods, R. Grant, *Extensions and absolutes of Hausdorff spaces.* Springer Verlag, 1997.

[8] Sapiro, L. B., *Reduction of the main problem on compactifications of Wallman type.* Soviet Math. Dokl., Vol 15, 1020-1023 (1974),

[9] Ul'janov, V.M., *Solution of a basic problem on compactification of Wallman type.* Soviet Math. Dokl., Vol 18, 567-571 (1977),

[10] Walker, R.C., *The Stone-Čech compactification.* Springer Verlag, 1974.