UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

Construcción de medidas SRB
en difeomorfismos hiperbólicos.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA

Rafael Alcaraz Barrera

DIRECTOR DE TESIS: Dr. Germán Aubin Arroyo Camacho

MÉXICO,D.F. Febrero, 2010

Construcción de medidas SRB en difeomorfismos hipérbolicos

Rafael Alcaraz Barrera

2009

Agradecimientos

En las buenas y en las malas
los amigos y los colores siempre están.

Este trabajo es para los primeros.

Estas últimas líneas están dedicadas a las personas que directa o indirectamente me han ayudado a realizar y terminar este trabajo.

En primer lugar, quiero agradecerle a todas las personas que conforman la Unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas de la UNAM. Hicieron que el instituto se convirtiera en mi casa.

Quiero agradecerle a Aubin por su paciencia, por el cariño que le dedicó a mi trabajo y por la amistad que me ha brindado. Además por enseñarme a armar rompecabezas, a valerme matemáticamente por mí mismo y sobre todo a relajarme cuando es realmente necesario. Gracias Jefe.

A Carlos Cabrera y a Adolfo Guillot, porque siempre estuvieron al pendiente de mi trabajo y de mi persona.

A Roberto Markarián, por darme un empujoncito (aunque creo que no se dió cuenta) para adentrarme en el estudio de la Teoría Ergódica.

A mis sinodales, por la paciencia que han tenido conmigo, así como por la rapidez con la que leyeron mi tesis y con la que me dieron las correcciones.

A mi esposa Paola, quien ha vivido conmigo todo el desarrollo de este trabajo.

Sin su paciencia y cariño no hubiera realizado este sueño, ni pensado en el siguiente. Te Amo.

A los amigos que hice en Cuernavaca. A Sofía y Obed, mis hermanitos académicos, con quienes compartí algo mas que el gusto por los sistemas dinámicos y el dominó. A Daniel, Ronald, El Pare, Gustavo, Hugo, Oscar, Héctor, Ere, Yadira, Aurelio, Alma, Magda, Toño, Lulú, Elsa, Chucho, Bety, Felipe, Tintos, a Regis y a los que se me olvidaron. Ustedes se convirtieron en mi familia. En especial quiero agradecerle a José Luis y a Haydeé por darme un lugar en su casa, por prestarme la computadora donde este trabajo comenzó a escribirse, por presentarme el delicioso Marmite, por dejarme cuidar a sus gatos, pero sobre todo, por el cariño que me han dado.

A los amigos que dejé en el D.F. cuando comencé mi aventura. En especial a Violeta, Yadira, Ángel y a Sergio. Siempre estuvieron al pendiente de mi vida dentro y fuera de las matemáticas. Valió la pena extrañarlos.

A los amigos de fuera, Fermín y Nacho. Siempre los tengo presentes, matemática y futbolísticamente.

A mi familia, la cual creció en noviembre del año pasado. Siempre me han brindado su apoyo para lograr mis sueños y su respeto hacia mis decisiones.

Y al Barba (como Maradona lo bautizó). Aún cuando no entiendo del todo que pasa contigo, no dejas de sorprenderme.

Gracias

Rafa.

Índice general

Introducción.

Una de las teorías matemáticas más ricas en herramientas y conexiones con distintas áreas de la matemática es la teoría de los *Sistemas Dinámicos*. Uno de los objetivos de estudiarlos es comprender sus propiedades asintóticas, es decir, estudiar las propiedades del sistema cuando el tiempo tiende a infinito. Muchas veces, aún cuando la regla de correspondencia de la transformación es muy simple, ocurren comportamientos dinámicos complicados.

Estamos interesados en estudiar las propiedades representativas de un sistema dinámico, es decir qué comportamientos son típicos. Como estudiaremos las características de transformaciones definidas en variedades diferenciables compactas de dimensión arbitraria, los comportamientos típicos son los que obtenemos en todas las órbitas en un conjunto abierto de M, o bien, en un conjunto de órbitas de medida de Lebesgue positiva de M.

Una manera interesante de estudiar la dinámica de una transformación es tomar una observación del sistema y así describir cuánto tiempo en promedio pasa un conjunto de orbitas típicas en diferentes regiones del espacio donde la transformación está definida. Al estudio de los sistemas dinámicos desde esta perspectiva es parte de la *Teoría Ergódica*. Matemáticamente, una observación es una función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ y los promedios de una transformación $f : M \to M$ son la cantidad

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x)).$$

A estos promedios los conocemos como *medias temporales*.

En la Teoría Ergódica, los comportamientos típicos son los que se muestran μ-casi todo punto con respecto a una medida f-invariante μ. Una medida μ es f-invariante si da el mismo valor a un conjunto y a su preimagen bajo f. El Teorema de Birkhoff nos retrata uno de los comportamientos más importantes de las medidas invariantes. Éste garantiza que las medias temporales convergen para casi todo punto con respecto a una medida invariante μ a una función $\tilde{\varphi}$ bien definida, es decir

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)),$$

con $\varphi \in L_1(\mu)$ y que además

$$\int \tilde{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu.$$

Por otro lado, podemos considerar a las *medias espaciales* con respecto a φ, dadas por

$$\int \varphi d\mu,$$

con respecto a una medida μ. Cuando una medida f-invariante μ da el valor 0 o 1 a los conjuntos f-invariantes decimos que es ergódica. El comportamiento característico de una medida ergódica es que las medias espaciales convergen a las medias temporales: es decir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu;$$

para μ-casi todo punto $x \in M$.

Medidas Físicas

Cuando trabajamos con transformaciones diferenciables, la medida de Lebesgue no siempre es invariante bajo una transformación diferenciable f, entonces no podemos obtener directamente estas conclusiones. A las medidas ergódicas en las que las medias espaciales convergen a las medias temporales en un conjunto de medida de Lebesgue positiva, las conocemos como *medidas físicas.*

Una medida de probabilidad μ, f-invariante, definida sobre los Borelianos de M es una *medida física* si para un conjunto de medida de Lebesgue positiva $B(\mu)$ de $x \in M$ se cumple que, para todo $x \in B(\mu)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=o}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu$$

para cualquier función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ continua. Al conjunto $B(\mu)$ lo llamamos *la cuenca de Birkhoff de μ*. Encontrar o caracterizar a las transformaciones que admiten medidas físicas es un problema relevante en sistemas dinámicos [ABV00, pág 352], [You02, págs 749-751]. Es de nuestro interés encontrar propiedades de las transformaciones diferenciables que nos garanticen la existencia de estas medidas. Al trabajar con difeomorfismos, utilizaremos la información que nos proporciona la derivada de la transformación, para así estudiar sus propiedades dinámicas. A este estudio lo conocemos como *Teoría Ergódica Diferenciable.*

La propiedad de la derivada que estudiaremos es la *hiperbolicidad*. Un conjunto Λ es hiperbólico si el haz tangente $T\Lambda$ se descompone en dos subhaces donde la derivada expande y contrae respectivamente. Cuando un conjunto Λ es hiperbólico, podemos definir la variedad estable de un punto x como:

$$W^s(x) = \{x \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \to 0, \text{ cuando } n \to \infty\};$$

y la variedad inedestable de un punto x como

$$W^u(x) = \{x \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to 0, \text{ cuando } n \to \infty\}.$$

Dado un punto x la variedad estable (inestable) de x es el conjunto de puntos donde la distancia de sus iterados futuros (pasados) tiende asintóticamente a cero. Como mostramos en el Lema 5.1.1, para casi todo y en $W^s(x)$, las medias temporales coinciden, $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(y)$. En particular estudiaremos a los atractores hiperbólicos. Estos conjuntos invariantes tienen la propiedad de que las órbitas de un conjunto abierto (su fosa de atracción) convergen al atractor. Además, si un atractor es hiperbólico, este está formado por variedades inestables y su fosa por variedades estables (Proposición 2.2.7). Así, podemos concluir que, como el comportamiento típico topológico de un sistema es conocido mediante el estudio de la dinámica de su atractor, podemos obtener la información que nos da el Teorema de Birkhoff analizando sólamente al atractor en un conjunto de medida de Lebesgue positiva. No obstante, como los atractores no siempre tienen medida de Lebesgue positiva, es necesario construir un mecanismo adecuado para entender los promedios en los atractores y en un su fosa. Utilizando la información que nos da la derivada, podemos construir a las *medidas SRB*.

Medidas SRB

Dado un difeomorfismo $f : M \to M$, una medida de probabilidad μ, f-invariante sobre los Borelianos de M, es una *medida de SRB* si las medidas condicionales de μ sobre las variedades inestables de f son absolutamente continuas respecto a la medida de Lebesgue en las variedades inestables. Estas medidas son uno de los objetos de estudio más interesantes en Teoría Ergódica Diferenciable. Su nombre de debe a que fueron desarrolladas por Sinaí, Ruelle y Bowen en los años setentas y tuvieron su origen en el estudio de la mecánica estadística. La construcción y estudio de estas medidas es uno de los objetos de investigación actual más activos.

Estudiaremos además condiciones de hiperbolicidad de endomorfismos y difeomorfismos locales. Trabajaremos con transformaciones *uniformemente expansoras*; es decir, transformaciones donde para todo punto x en M la derivada expande en un factor $\sigma \geq 1$, y una de sus generalizaciones, las transformaciones *asintóticamente expansoras.* Una transformación es asintóticamente expansora si para casi todo punto x, la derivada de f expande en promedio a lo largo de la órbita de x, es decir:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \left\| D_{f^j(x)} f^{-1} \right\| < -1.$$

Mostraremos los siguientes teoremas, los cuales nos dicen que, bajo "buenas" hipótesis de hiperbolicidad, nuestro sistema tendrá una medida física, o una medida SRB.

3.2.7 Teorema. *Si f es una transformación uniformemente expansora con* $\det Df$ *una función Hölder continua, entonces existe una medida física; de hecho, existe una única medida absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, ergódica.*

Este teorema es muy conocido en Teoría Ergódica Diferenciable (ver [Mañ83, Teorema 1.1, pág 214]), no obstante, nos permitirá describir una de las herramientas desarrolladas en este trabajo: *las bolas prehiperbólicas.* Las bolas prehiperbólicas son subconjutos de M, en donde podemos observar expansión uniforme en un número finito de pasos. Esta herramienta aparece por primera vez en la literatura en el artículo [ALP05].

Una propiedad fundamental de las bolas prehiperbólicas que nos permite construir medidas físicas y de medidas SRB es la *distorisión uniformemente acotada*. Escencialmente f tiene distorsión uniformemente acotada si dados dos subconjuntos Lebesgue medibles A y B con $A \subset B$, su proporción no cambia a lo largo del tiempo, es decir: existe una constante positiva C tal que:

$$C^{-1}\frac{m(A)}{m(B)} \leq \frac{m(f^n(A))}{m(f^n(B))} \leq C\frac{m(A)}{m(B)},$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Cuando $\det Df$ es una transformación Hölder garantizamos que las bolas prehiperbólicas tienen distorsión uniformemente acotada.

Al trabajar con transformaciones asintóticamente expansoras, necesitamos otra herramienta para construir una medida física: los *tiempos hiperbólicos*, desarrollados por J. F. Alves en su tesis doctoral [Alv00]. Un número $n \in \mathbb{N}$ es un tiempo hiperbólico si $D_{f^n(x)}f^k$ contrae exponencialmente para $1 \leq k \leq n$. Mostraremos que la existencia de un tiempo hiperbólico para x implica la existencia de una bola prehiperbólica para x (Teorema 4.2.1). Además, necesitamos que existan "suficientes" tiempos hiperbólicos para construir nuestra medida y que aparezcan con frecuencia positiva. Utilizando el Lema de Pliss (Lema 4.2.7), mostraremos que cuando f es una transformación asintóticamente expansora, existen una infinidad de tiempos hiperbólicos con frecuencia mayor que $\theta > 0$ (Corolario 4.2.8). Este hecho nos permitirá mostrar el siguiente resultado:

4.2.9 Teorema. *Si f es una transformación asintóticamente expansora con* $\det Df$ *una función Hölder continua, entonces existen $\mu_1, \ldots, \mu_n$ medidas físicas, absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue; si f es topológicamente transitiva, esta medida es única.*

Utilizando el Teorema de la Variedad Estable (Teorema 2.1.2), así como el hecho de que las variedades inestables locales son bolas prehiperbólicas (Proposición 5.1.2) y la estructura de los atractores hiperbólicos (Proposición 2.2.7), mostraremos el siguiente teorema:

5.1.5 Teorema. *Sean f un difemorfismo de clase C^2 y Λ un atractor de f. Si Λ es un atractor hiperbólico, entonces existe una única medida SRB, tal que el soporte de μ es Λ y $B(\mu) = U$ salvo en un conjunto de medida de Lebesgue cero. Además μ es física.*

Como veremos a lo largo del trabajo, la hipótesis de que $\det Df$ es una función Hölder es necesaria para poder acotar la distorsión. De hecho, la distorsión acotada implica el siguiente teorema, el cual generaliza a los anteriores:

4.2.5 Teorema. *Si f es una transformación con $\det Df$ una función Hölder continua y existen tiempos hiperbólicos con frecuencia mayor que $\theta > 0$, entonces existe una medida física.*

En el primer capítulo definimos las nociones de Teoría de la Medida y Teoría Ergódica necesarias en nuestro estudio, veremos algunas de sus relaciones con la dinámica topológica de un sistema, así como una discusión detallada del concepto de Medida Física. En el segundo capítulo mostramos las herramientas básicas de Dinámica Hiperbólica, contexto en el cual podemos encontrar medidas SRB, las definimos y mostramos sus diferencias con las medidas físicas. El tercer capítulo muestra una parte fundamental la herramienta utilizada, las bolas prehiperbólicas. Mostrando su existencia construiremos una medida física para funciones uniformemente expansoras. En el cuarto capítulo utilizaremos los tiempos hiperbólicos para construir medidas físicas en transformaciones asintóticamente expansoras. Y en el quinto capítulo construimos una medida SRB cuando f tiene un atractor uniformemente hiperbólico.

Capítulo 1

Medidas Invariantes

Explicaremos los conceptos básicos de la Teoría de la Medida que utilizaremos durante el trabajo, para así comenzar con el estudio de las medidas invariantes y de la Teoría Ergódica. Mostraremos algunas de las construcciones clásicas de la Teoría Ergódica, además de mostrar algunas de sus concecuencias dinámicas. Concluiremos el capítulo con una discusión detallada del concepto de *Medida Física*.

1.1. Teoría de la Medida y Topología

En esta sección hablaremos de las herramientas básicas necesarias de Teoría de la Medida que utilizaremos a lo largo de nuestro trabajo. Esta teoría estudia a los espacios *espacios medibles*. Un *espacio medible* consta de un conjunto M y una σ-álgebra de subconjuntos de M, $\mathcal{B}(M)$. A los elementos $A \in \mathcal{B}(M)$ los llamamos conjuntos medibles. En particular, cuando M es un espacio topológico podemos considerar a *la σ-álgebra de Borel* $\mathcal{B}(M)$, la cual es la σ-álgebra más pequeña que contiene a los conjuntos abiertos de M.

Dado un espacio medible $(M, \mathcal{B}(M))$ podemos definir medidas. Una *medida para* M es una función definida en $\mathcal{B}(M)$, aditiva, que le asocia a cada elemento de $\mathcal{B}(M)$ un número no negativo y que además cumple la noción natural de área: si $A \cap B = \emptyset$ entonces

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),$$

y $\mu(\emptyset) = 0$. Cuando $\mu(M) < \infty$ decimos que μ es una *medida finita*. Cuando $\mu(M) = 1$ diremos que μ es una *medida de probabilidad*. Observemos que dada una medida finita μ podemos definir una medida de probabilidad μ' dada por $\mu'(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(M)}$. Siempre trabajaremos con medidas de probabilidad.

En las variedades diferenciables existe una clase de medidas naturales: la *clase de medidas de Lebesgue en M*. Estas medidas están generadas por formas locales de volumen ω_p tales que

$$m(B) = \int_B d\omega_p.$$

Las medidas de Lebesgue están definidas de manera única salvo una constante, es decir $\omega_p \sim k\omega_p$, lo cual implica que cualesquiera dos medidas de Lebesgue son equivalentes. Consideraremos a una medida de Lebesgue y la denotaremos por m.

Denotemos por $\mathbb{P}(M)$ al conjunto de medidas de probabilidad en M sobre la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(M)$.

Decimos que una medida μ en M es una *medida regular*, cuando para cualquier subconjunto cerrado A de M, y para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto abierto U y un subconjunto cerrado C tal que $C \subset A \subset U$ y $\mu(U \setminus C) < \varepsilon$. Además, para cualquier conjunto $B \in \mathcal{B}(M)$ se cumple que

$$\mu(B) = \sup\{\mu(C) \mid C \text{ es cerrado y } C \subset B\}$$

y

$$\mu(B) = \text{ínf}\{\mu(U) \mid U \text{ es abierto y } C \subset U\}.$$

Si M es un espacio métrico compacto, cualquier medida definida sobre la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(M)$ es *regular* [Wal82, pág. 167].

El siguiente resultado nos dice que cualquier medida μ en $\mathbb{P}(M)$ está completamente determinada por la manera que integran a las funciones continuas.

1.1.1 Lema. *Consideremos dos medidas μ y $\nu \in \mathbb{P}(M)$. Si*

$$\int \varphi d\mu = \int \varphi d\nu,$$

para cualquier función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ continua, entonces $\mu = \nu$.

Demostración. Basta demostrar que $\mu(C) = \nu(C)$ para cualquier subconjunto $C \in \mathcal{B}(M)$ cerrado. Tomemos C cerrado y $\varepsilon > 0$. Dado que ν es una medida regular, existe un abierto U tal que $\nu(U \setminus C) < \varepsilon$. Definamos $\varphi : M \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in M \setminus U; \\ \dfrac{d(x, M \setminus U)}{d(x, M \setminus U) + d(x, C)} & \text{si } x \in U. \end{cases} \tag{1.1}$$

Observemos que φ es una función bien definida y continua. Notemos que $\varphi \mid_{M \setminus U} \equiv 0$, $\varphi \mid_C \equiv 1$ y que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ para toda $x \in M$. De aquí se tiene que:

$$\mu(C) = \int \chi_C d\mu \leq \int \varphi d\mu = \int \varphi d\nu \leq \nu(U) < \nu(C) + \varepsilon.$$

Ésto implica que $\mu(C) \leq \nu(C) + \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Análogamente se tiene que $\nu(C) \leq \mu(C) + \varepsilon$. Por lo tanto $\mu(C) = \nu(C)$.

Q.E.D.

Sea M un espacio métrico y compacto. Denotemos por $C(M, \mathbb{R})$ al espacio vectorial de funciones continuas $\varphi : M \to \mathbb{R}$ con la norma:

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| \mid x \in M\}.$$

Éste es un espacio métrico (con la distancia $d(\varphi, \psi) = \|\varphi - \psi\|$) y es separable [Mañ83, pág 64]. De esta manera, podemos dotar a $\mathbb{P}(M)$ con *la topología débil**, usando la siguiente función distancia: $d : \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}(M) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$d(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|\varphi_n\|} \left| \int \varphi_n d\mu - \int \varphi_n d\nu \right|$$

donde $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ es un subconjunto denso y numerable de $C(M, \mathbb{R})$.

Para verificar que d es una distancia para $\mathbb{P}(M)$ tomemos cualesquiera dos medidas μ y $\nu \in \mathbb{P}(X)$, tales que $d(\mu, \nu) = 0$. De aquí se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left| \int \varphi_n d\mu - \int \varphi_n d\nu \right|}{2^n \|\varphi_n\|} = 0.$$

Ésto implica que:

$$\left| \int \varphi_n d\mu - \int \varphi_n d\nu \right| = 0, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Como $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un subconjunto denso de $C(X, \mathbb{R})$ se tiene que $\displaystyle\int \varphi d\mu = \int \varphi d\nu$ para cualquier función continua f. Por el Lema 1.1.1 se tiene que $\mu = \nu$. El recíproco de esta afirmación, así como la simetría y la desigualdad del triángulo, son claros de la definición de d.

Otra manera de introducir a la topología débil* es mediante sucesiones de medidas en $\mathbb{P}(M)$. Diremos que una sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{P}(M)$ converge a una medida μ si

$$\int \varphi d\mu_n \to \int \varphi d\mu$$

para cualquier función $\varphi \in C(M, \mathbb{R})$ [Alv08, pág 3]. Ambas deficiones son equivalentes [Wal82].

El siguiente teorema nos da una biyección entre las medidas de probabilidad y los funcionales lineales, y nos dice que siempre podemos representar a cualquier medida de probabilidad como un funcional lineal acotado. El *Teorema de Representación de Riesz* es un teorema clásico de la Teoría del Análisis Funcional. Su demostración se puede consultar en [Rud87].

1.1.2 Teorema de Representación de Riesz. *Sea $J : C(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ un funcional lineal acotado que cumple que $J(\varphi) \geq 0$ si $\varphi \geq 0$ y que $J(1) = 1$. Entonces existe una única medida $\mu \in \mathbb{P}(M)$ tal que $J(\varphi) = \displaystyle\int \varphi d\mu$ para toda $f \in C(M, \mathbb{R})$*

Utilizando el el Teorema de Representación de Riesz, mostraremos la compacidad de $\mathbb{P}(M)$ dotado de la topología débil* cuando M es un espacio métrico y compacto. La idea de la demostración de este hecho es mostrar que dada una sucesión de medidas μ_n en $\mathbb{P}(M)$, ésta tiene una subsucesión convergente. Para ello vamos a considerar el proceso de la diagonal de Cantor aplicado a una sucesión de medidas. A esta sucesión de medidas le asociaremos un funcional lineal acotado, utilizando la propiedad de que $C(M, \mathbb{R})$ es separable, y usando el Teorema de Riesz encontraremos el punto de acumulación que deseamos.

1.1.3 Teorema. *Si M es un espacio métrico compacto, entonces $\mathbb{P}(M)$ es compacto con la topología débil*.*

Demostración. Sea $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{P}(M)$. Mostraremos que dicha sucesión tiene una subsucesión convergente. Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ un subconjunto denso y numerable de $C(M, \mathbb{R})$. Consideremos la sucesión de números $\mu_n(\varphi_1) = \displaystyle\int f_1 d\mu_n$ con $n \geq 0$.

Esta sucesión está acotada por $\|f_1\|_\infty$, lo cual implica que tiene una subsucesión convergente $\mu_{n_k}(\varphi_1)$, a la cual llamaremos $\{\mu_n^1\}$. Integrando a φ_2 en $\{\mu_n^1\}$ obtenemos que también $\{\mu_n^1(\varphi_2)\}$ es una sucesión acotada, por tanto tiene una subsucesión convergente. Denotemos a dicha subsucesión como $\{\mu_n^2\}$. Observemos que $\{\mu_n^2(\varphi_1)\}$ también converge. Este proceso lo podemos aplicar para cada φ_i, obteniendo así la sucesión $\{\mu_n^i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Notemos que $\{\mu_n^i\} \subset \{\mu_n^{i-1}\} \subset \dots \{\mu_n^1\} \subset \{\mu_n\}_{n=1}^\infty$. Así $\{\mu_n^i(\varphi_j)\}$ converge para toda $j = 1, \dots, i$. Consideremos la sucesión $\{\mu_n^n\}_{n=1}^\infty$. Notemos que esta sucesión converge para toda $i \in \mathbb{N}$. Como $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ es denso en $C(M, \mathbb{R})$ se tiene que $\{\mu_n^n(f)\}$ converge para cualquier funcion continua $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$. Definimos el funcional $J : C(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ como $J(\varphi) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n^n(\varphi)$. Notemos que este funcional es lineal y acotado. Por el Teorema 1.1.2 se tiene que existe una medida $\mu \in \mathbb{P}(X)$ tal que $J(\varphi) = \displaystyle\int \varphi d\mu$ para toda $\varphi \in C(M, \mathbb{R})$. Así se cumple que $\{\mu_n^n\}_{n=1}^\infty$ converge a μ.

Q.E.D.

Relaciones entre medidas

Buscamos encontrar relaciones entre las medidas de probabilidad sobre un espacio métrico M. La relación de igualdad entre dos medidas μ y ν es restrictiva. Por otro lado, cuando dos medidas son distintas, queremos saber qué tanto varían una de la otra. Por ejemplo, que dos medidas no den valor cero a los mismos conjuntos, o bien, que compartan los mismos conjuntos de medida cero.

Denotemos por $L_1(\mu)$ al espacio vectorial de funciones medibles $\varphi : M \to \mathbb{R}$ tales que $\displaystyle\int |\varphi|\, d\mu$ es finita, dotado con la norma $\|\varphi\|_1 = \displaystyle\int |\varphi|\, d\mu$. A este espacio también lo conocemos como el espacio de funciones integrables. El conjunto $C(M, \mathbb{R})$ es denso en $L_1(\mu)$ [Rud87, pág 69].

Formalmente decimos que una medida $\mu \in \mathbb{P}(M)$ es *absolutamente continua respecto a* $\nu \in \mathbb{P}(M)$, denotado por $\mu \ll \nu$, si $\mu(B) = 0$ siempre que $\nu(B) = 0$. Diremos que μ y ν son *medidas equivalentes*, denotado por $\mu \equiv \nu$ si $\mu \ll \nu$ y $\nu \ll \mu$. Y decimos que dos medidas μ y ν son *mutuamente singulares* denotado como $\mu \perp \nu$ si existe un conjunto $B \in \mathbb{P}(M)$ tal que $\mu(B) = 0$ y $\nu(M \setminus B) = 0$.

Intuitivamente, dos medidas son absolutamente continuas cuando una es proporcional a la otra. Esta proporción, está dada por funciones integrables. De hecho caracterizamos a la continuidad absoluta mediante integrales [Wal82]. A este teorema lo conocemos como el Teorema de Radon-Nykodim.

1.1.4 Teorema de Radon-Nykodym. *Sea $(M, \mathcal{B}(M))$ un espacio de medida. Consideremos dos medidas de probabilidad μ y ν sobre $\mathcal{B}(M)$. Entonces $\nu \ll \mu$ si y sólo si existe una función $\varphi \in L_1(\mu)$, positiva y $\int \varphi d\mu = 1$ tal que $\nu(B) = \int_B \varphi d\mu$ para todo $B \in \mathcal{B}(M)$. De hecho la función φ es única μ-casi todo punto.*

Cuando $\nu \ll \mu$, a la función φ la conocemos como *la derivada de Radon-Nykodym de ν respecto a μ*, y la denotamos por $\frac{d\nu}{d\mu}$.

La continuidad absoluta entre medidas y las medidas mutuamente singulares nos permiten expresar a cada medida como combinación convexa de medidas. A este teorema lo conocemos como el Teorema de Descomposición de Lebesgue [Wal82].

1.1.5 Teorema de Descomposición de Lebesgue. *Sean μ y $m \in \mathbb{P}(M)$. Entonces existen $p \in [0,1]$ y dos medidas μ_1 y $\mu_2 \in \mathbb{P}(M)$ tales que*

$$\mu(B) = p\mu_1(B) + (1-p)\mu_2(B)$$

para todo $B \in \mathcal{B}(M)$, $\mu_1 \ll m$ y $\mu_2 \perp m$. Además, p, μ_1 y μ_2 estan determinados de manera única.

El siguiente lema técnico nos muestra que cuando una sucesión de medidas es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue m y la derivada de Radon-Nykodym $\frac{d\mu_n}{dm}$ esta acotada por una función integrable φ para toda $n \geq 1$, el límite de la sucesión también cumple esa propiedad.

1.1.6 Lema. *Sean $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de medidas de probabilidad que convergen en la topología débil* a una medida μ, y m la medida de Lebesgue en M. Si existe una función integrable φ tal que $\frac{d\mu_n}{dm} \leq \varphi$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mu \ll m$.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{B}(M)$ tal que $m(A) = 0$. Mostraremos que $\mu(A) = 0$. Supongamos que $\mu(A) > 0$. Dado que μ es una medida regular existe $K \subset M$ compacto, tal que $K \subset A \subset U$ y $\mu(K) > 0$. Por otro lado $m(A) = 0$, esto implica que $\int_A \varphi dm = 0$ para cualquier función $\varphi \in L_1(\mu)$. Además, dado que m es una medida regular, existe un abierto U tal que $A \subset U$ y

$$\int_U \varphi dm < \mu(K). \tag{1.2}$$

Notemos que K y $M \setminus U$ son subconjuntos compactos de M y que $K \cap M \setminus U = \emptyset$. Definimos $\varphi : M \to [0,1]$ como:

$$\varphi(x) = \frac{d(x, M \setminus U)}{d(x,K) + d(x, M \setminus (U))}.$$

Notemos que φ es una función bien definida y es continua. Además se cumple que

$$\chi_K \leq \varphi \leq \chi_B.$$

De aquí se tiene que

$$\begin{aligned}\mu(K) = \int \chi_K d\mu \leq \int \varphi d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi d\mu_n \leq \limsup \int \chi_U d\mu_n \\ \leq \limsup \mu_n(U) \leq \int \varphi dm,\end{aligned}$$

lo que contradice la ecuación (1.2)

Q.E.D.

Medidas condicionales

El Teorema de Radon-Nykodym 1.1.4 nos permitirá definir la noción de *medidas condicionales*. Deseamos encontrar una manera de descomponer una medida en el espacio ambiente por "submedidas", de tal suerte que la medida original esté dada por integrar las submedidas construidas. Para pensar en ésto, primero definiremos el operador de *esperanza condicional*.

Consideremos $\mathcal{C}$ una subálgebra de $\mathcal{B}(M)$. Sea $\varphi \in L^1(m)$ una función no negativa. Definimos

$$\mu_\varphi(C) = a^{-1} \int_C \varphi dm$$

donde $a = \int \varphi dm$. Notemos que μ_φ es una medida absolutamente continua con respecto a m y esta defininda en $\mathcal{C}$. Por el Teorema de Radon-Nikodym sabemos que existe una única función m-casi todo punto, no negativa $E(\varphi\mid_{\mathcal{C}})$ que cumple que

$$\int_C E(\varphi\mid_{\mathcal{C}})dm = \int_C \varphi dm$$

para todo $C \in \mathcal{C}$. Ahora bien si φ toma valores reales, podemos realizar esta construcción tomando las partes positiva y negativa de φ.

Ésto nos permite definir el operador de *esperanza condicional*

$$E(\cdot\mid_{\mathcal{C}}) : L^1(M, \mathcal{B}(M), m) \to L^1(M, \mathcal{C}, m)$$

como la única función $\mathcal{C}$-medible que cumple que, para $\varphi \in L^1(M, \mathcal{B}(M), m)$,

$$\int_C E(\varphi\mid_{\mathcal{C}})dm = \int_C \varphi dm$$

para todo $C \in \mathcal{C}$.

Para los propósitos que deseamos, queremos que estas subálgebras partan al espacio para así descomponer la medida original en submedidas.

1.1.7 Defినción. Sea η una particion de M. Decimos que η es una *partición medible de M* existe una suceción $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de particiones finitas de M, formadas por conjuntos medibles, tales que $\eta = \bigvee_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i$.

1.1.8 Defínción. Sean m una medida de probabilidad sobre $\mathcal{B}(M)$ y η una particion medible de M. Decimos que una familia $\{\mu_x^\eta \mid x \in M\}$ es una *familia de medidas condicionales asociado a* η si cumple las siguientes propiedades:

1. Para cada $x \in M$, μ_x^η es una medida de probabilidad soportada en $\eta(x)$, donde $\eta(x)$ es el elemento de η que contiene a x;
2. para cada $E \in \mathcal{B}(M)$, la asociación $x \mapsto \mu_x^\eta(E)$ es medible, y;
3. para cada $E \in \mathcal{B}(M)$, se tiene que $m(E) = \displaystyle\int \mu_x^\eta(E)dm(x)$.

Por ejemplo, cuando $M = I \times I$ y μ es cualquier medida sobre los Borelianos de M, a la partición formada por $\eta(x, y) = \{x\} \times I$ con $x \in I$ podemos construir medidas condicionales asociadas a $\eta = \{\eta(x, y)\}$, [You95].

1.2. Teoría Ergódica

El objeto de estudio de la Teoría Ergódica son las medidas que se preservan bajo la acción de una transformación $f : M \to M$. A estas medidas se les denomina como *medidas invariantes*.

El Push Forward de una medida

Una función $f : M \to M$ medible induce una transformación natural en $\mathbb{P}(M)$: $f_* : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(X)$ definida como $f_*\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$ para cada $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$. A esta transformación la conocemos como *el push forward de una medida* μ. Intuitivamente, el push forward nos permite transportar la medida por las iteraciones de f.

Una de sus propiedades más imporantes es que el push-forward f_* es una función continua con la topología débil* siempre que f sea una función continua en un espacio métrico compacto. Para mostrar este hecho, observemos que $\displaystyle\int_A d(f_* d\mu) = \int_{f^{-1}(A)} d\mu$ para todo $A \in \mathcal{B}(M)$, lo cual nos dice que

$$\int_A d(f_*\mu) = \int f d\mu.$$

Consideremos $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{P}(M)$ una sucesión convergente a una medida $\mu \in \mathbb{P}(M)$ con respecto a la topología débil*. Sea $f : M \to M$ una función continua. Como $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w*} \mu$ con respecto a la topología débil* y f es una función continua se tiene que

$$\int \varphi \circ f d\mu_n \to \int \varphi \circ f d\mu.$$

Por lo tanto $f_*(\mu_n) \to f_*(\mu)$, y así mostramos que f_* es una función continua.

1.2.1 Definición. Sean $(M, \mathcal{B}(M), \mu)$ un espacio de medida y $f : M \to M$ una transformación medible. Decimos que μ es una *medida f-invariante* si $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}(M)$.

Es fácil notar directamente de la Definición 1.2.1 que una medida μ es invariante si y sólamente si $f_*(\mu) = \mu$.

Así, la Teoría Ergódica estudia sistemas de la forma $(M, \mathcal{B}(M), \mu, f)$ donde M es nuestro *espacio de estados*, $\mathcal{B}(M)$ es una *σ-álgebra de conjuntos de M*, f nuestra regla de evolución del sistema, es decir una transformación medible y μ una medida f-invariante.

El siguiente es un ejemplo clásico. Sea $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ y consideremos $(I, \mathcal{B}(I), m)$ donde, $\mathcal{B}(I)$ es la σ-álgebra de Borel en I y m es la medida de Lebesgue. Consideremos la transformación $f : [0,1] \to [0,1]$, dada por:

$$f(x) = 2x \mod 1 = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 2x - 1. & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} .$$

Notemos que f^{-1} tiene dos ramas, que denotaremos por $\varphi_0 = \dfrac{x}{2}$ y $\varphi_1 = \dfrac{x}{2} - 1$. Consideremos $A \in \mathcal{B}(I)$. Notemos que

$$m(f^{-1}(A)) = \int_{f^{-1}(A)} dm = \int_{\varphi_0(A)} dm + \int_{\varphi_1(A)} dm.$$

Utilizando el Teorema de Cambio de Variable tenemos que,

$$\mu(f^{-1}(A)) = \int_A \varphi_0' dm + \int_A \varphi_1' dm = \int_A \frac{1}{2} dm + \int_A \frac{1}{2} dm = \int_A dm = m(A).$$

Por lo tanto la medida de Lebesgue en I es f-invariante.

Denotemos como $\mathbb{M}(f) \subset \mathbb{P}(M)$ al espacio de medidas de probabilidad f-invariantes.

Veamos a continuación una propiedad importante de las medidas invariantes: al integrar funciones φ en $L_1(\mu)$ con respecto a una medida $\mu \in \mathbb{M}(f)$ obtenemos lo mismo que al integrar $\varphi \circ f$ con respecto a μ. Ésto es natural debido a que μ es invariante por f.

1.2.2 Lema. *Sean $(M, \mathcal{B}(M))$ un espacio de medida y $f : M \to M$ una transformación medible. Entonces $\mu \in \mathbb{M}(f)$ si y sólo si $\int \varphi d\mu = \int \varphi \circ f d\mu$, para cualquier función $\varphi \in L^1(\mu)$.*

Demostración. Supongamos que $\int \varphi d\mu = \int \varphi \circ f d\mu$ para cualquier función $\varphi \in L_1(\mu)$. Tomemos $A \in \mathcal{B}(M)$ un conjunto medible y χ_A la función caracterísitica en A. Así tenemos que:

$$\mu(A) = \int \chi_A d\mu = \int \chi_A \circ f d\mu = \mu(f^{-1}(A)).$$

Por lo tanto, μ es f-invariante. Supongamos ahora que μ es f-invariante. Consideremos a φ como $\varphi = \chi_A$ para algún $A \in \mathcal{B}$. Entonces, $\displaystyle\int_A d\mu = \mu(A)$. Como μ es una medida f-invariante se tiene que

$$\int \chi_A d\mu = \int_A d\mu = \mu(A) = \mu(f^{-1}(A)) = \int_{f^{-1}(A)} d\mu = \int_A \chi \circ f d\mu.$$

Por lo tanto $\displaystyle\int \varphi d\mu = \int \varphi \circ f d\mu$ si φ es una función caracterísitca. Consideremos ahora a φ como una función simple, esto es:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x), \text{ con } \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Integrando a φ obtenemos que

$$\begin{aligned}\int \varphi d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int \alpha_i \chi_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(f^{-1}(A_i)) \\ = \sum_{i=1}^{n} \int \alpha_i \chi_{f^{-1}(A_i)} d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{f^{-1}(A_i)} d\mu = \int \varphi \circ f d\mu.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el resultado es cierto para funciones simples. Consideremos ahora cualquier $\varphi \in L^1(\mu)$. Entonces, existe una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples tal que $\displaystyle\int s_n d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int \varphi d\mu$. Por otro lado mostramos que como μ es una medida f invariante se cumple que $\displaystyle\int s_n d\mu = \int s_n \circ f d\mu$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Además

$$\int s_n \circ f d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int \varphi \circ f d\mu.$$

Por tanto $\displaystyle\int \varphi d\mu = \int \varphi \circ f d\mu$.

Q.E.D.

Podemos preguntamos acerca de las condiciones suficientes para garantizar la existencia de una medida f-invariante. Las propiedades topológicas de $\mathbb{P}(M)$ y el push forward de una medida nos ayudarán a construir una medida invariante para una transformación $f : M \to M$ continua cuando M es un espacio métrico compacto.

1.2.3 Teorema. *Si $f : M \to M$ es una transformación continua definida en un espacio métrico compacto, entonces M tiene una medida f-invariante. Es decir, $\mathbb{M}(f) \neq \emptyset$.*

Demostración. Dada $\mu \in \mathbb{P}(M)$ una medida cualquiera definimos la sucesión

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_*^j \mu.$$

Notemos que $\{\mu_k\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{P}(X)$. Dado que $\mathbb{P}(M)$ es compacto con la topología débil* (Teorema 1.1.3), existe una subsucesión convergente $\mu_{n_k} \to \mu_* \in \mathbb{P}(X)$. Mostraremos que μ_* es una medida f-invariante. Sea $\varphi \in C(M, \mathbb{R})$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\left|\int \varphi \circ f d\mu_* - \int f d\mu_*\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\int \varphi \circ f d\mu_{n_k} - \int f d\mu_{n_k}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\left|\sum_{j=0}^{n_k-1}\int \varphi\circ f^{j+1}d\mu - \int \varphi \circ f^j d\mu\right| \\
&\leq \lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\left|\int \varphi\circ f^{n_k} - \varphi d\mu\right| \\
&\leq \lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\int |\varphi \circ f^{n_k} - \varphi d\mu| \leq \lim_{k\to\infty} 2\frac{\|\varphi\|}{n_k} = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto μ es una medida f-invariante.

Q.E.D.

Consecuencias dinámicas

Uno de los teoremas que relaciona a las medidas invariantes con la estructura topológica de un espacio es el Teorema de Recurrencia de Poincaré. Éste concluye que para cualquier conjunto A de medida positiva μ y esta medida es invariante para una tranformación f entonces la órbita de casi todo punto respecto a μ regresa a A.

1.2.4 Teorema. *Sean $(M, \mathcal{B}(M))$ un espacio medible, $f : M \to M$ una transformación que preserva medida y μ una medida f-invariante. Si $A \in \mathcal{B}(M)$ con $\mu(A) > 0$, entonces para μ casi todo punto en A existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(x) \in A$. Es decir,* $\mu(\{x \in A \mid f^n(x) \in A$ para una infinidad de $n \in \mathbb{N}\}) = \mu(A)$

Demostración. Sea $A \in \mathcal{B}$ de medida positiva. Consideremos $A_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} f^{-j}(A)$. Notemos que $B = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ es el conjunto de puntos que regresan a A una infinidad de veces. Tomando $A \cap B$ tenemos el conjunto deseado.

Mostraremos que $\mu(A \cap B) = \mu(A)$. Observemos que

$$f^{-1}(A_n) = f^{-1}(\bigcup_{j=n}^{\infty} f^{-j}(A)) = \bigcup_{j=n}^{\infty} f^{-1}(f^{-j}(A)) = \bigcup_{j=n+1}^{\infty} f^{-j}(A) = A_{n+1}.$$

Como μ es una medida f-invariante, se tiene que $\mu(A_n) = \mu(A_{n+1})$, y así obtenemos que $\mu(A_0) = \mu(A_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Observemos que $\{A_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión anidada. Esto implica que $\mu(A_0) = \mu(B)$. Además $A \subset A_0$ y así obtenemos que $\mu(A \cap B) = \mu(A \cap A_0) = \mu(A)$.

Q.E.D.

Consideremos M un espacio métrico compacto. Decimos que un punto $x \in M$ es *recurrente* si para cualquier abierto U de x existe un iterado de f que pertenece a U, es decir, $f^n(x) \in U$ para algún n.

Si μ es una medida f-invariante y positiva sobre abiertos, podemos concluir que casi todo punto $x \in M$ con respecto a μ es recurrente. Ésta es la versión topológica del Teorema de Recurrencia de Poincaré cuya demostración puede ser consultada en [Mañ83].

1.2.5 Teorema. *Sea $f : M \to M$ una transformación continua en un espacio métrico compacto. Si μ es una medida finita sobre $\mathcal{B}(M)$ f-invariante y positiva sobre abiertos, se cumple que μ casi todo punto es recurrente.*

El Teorema de Recurrencia de Poincaré (1.2.4) afirma que casi todo punto $x \in M$ es recurrente con respecto a una medida f-invariante μ. Así nos preguntamos cuánto tiempo en promedio pasa la órbita de un punto x en un conjunto de medida positiva A. Ésto lo podemos plantear como la siguiente expresión:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(f^j(x)), \tag{1.3}$$

la cual conocemos como el *tiempo medio de estadía de x en A.*

Observemos que esta información la obtenemos mediante la función caracteristica de un conjunto A. De manera más general, podemos obtener información de un sistema dinámico $f : M \to M$ al considerar cualquier función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ integrable y tomar los promedios con respecto a ella como en la expresión (1.3). Ésto es:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)).$$

A estos límites los conocemos como las *medias temporales* o como las *medias de Birkhoff*.

En presencia de una medida f-invariante μ, el Teorema de Birkhoff afirma que las medias temporales convergen μ-casi todo punto a una función bien definida $\tilde{\varphi}$ en $L_1(\mu)$.

1.2.6 Teorema de Birkhoff. *Sea $f : M \to M$ una transformación medible y μ una medida f-invariante en M. Entonces, dada cualquier función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ integrable, se cumple que el límite*

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

existe para μ-casi todo punto $x \in M$. Además, $\tilde{\varphi} \in L_1(\mu)$ y

$$\int \tilde{\varphi}(x) d\mu = \int \varphi(x) d\mu.$$

La demostración de este hecho la podemos encontrar en el libro de Mañé [Mañ83].

Notemos que el Teorema de Birkhoff nos dice que el tiempo medio de estadía (1.3) existe para casi todo punto respecto a una medida f-invariante.

Ergodicidad

Al estudiar Sistemas Dinámicos estamos interesados también en el comportamiento de los *conjuntos invariantes*. Dada una transformación $f : M \to M$ decimos que un conjunto $A \subset M$ es *invariante por f*, o bien *f-invariante* si $f^{-1}(A) = A$.

Recordemos que una función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ es *f-invariante* si para todo $x \in M$ se tiene que $\varphi(f(x)) = \varphi(x)$.

La relación entre las medias de Birkhoff, los conjuntos invariantes y las funciones invariantes la mostramos en el siguiente teorema.

1.2.7 Teorema. *Sean $f : M \to M$ una transformación medible y μ una medida f-invariante. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Para cualquier función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ integrable se cumple que*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu;$$
2. *Cualquier conjunto f-invariante A cumple que $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$;*
3. *Cualquier función f-invariante $\varphi : M \to \mathbb{R}$ es constante μ casi todo punto $x \in M$.*

Demostración. Supongamos que $\tilde{\varphi}(x) = \displaystyle\int \varphi d\mu$ para cualquier función φ integrable y para μ casi todo punto $x \in M$. Consideremos un conjunto f-invariante A y χ_A su función característica. Por hipótesis se tiene que

$$\mu(A) = \int \chi_A d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(f^j(x)).$$

Notemos que como A es un conjunto f-invariante se tiene que $x \in A$ si y sólo si $f(x) \in A$. Ésto implica que para toda $x \in A$ se tiene que $\chi_A(f^j(x)) = \chi_A(x)$ para toda $j \in \mathbb{N}$. Como $\chi_A(x) = 0$ o 1 se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(f^j(x)) = \chi_A(x),$$

lo cual implica que $\mu(A) = 0$ o 1.

Supongamos ahora que μ es una medida que cumple 2. Sea $\varphi : M \to \mathbb{R}$ una función f invariante. Consideremos $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cualquiera y $\varphi^{-1}([a, b])$. Como φ es una función f-invariante se tiene que $\varphi^{-1}([a, b]) = f^{-1}(\varphi^{-1}([a, b]))$. Como μ es una medida ergódica se tiene que $\mu(\varphi^{-1}([a, b])) = 0$ o 1. Definimos

$$X(k, n) = \varphi^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)$$

con $k \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Observemos que para n fijo, se tiene que $M = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} X(k, n)$ y que $X(k, n) \cap X(j, n) = \emptyset$ para $k \neq j$. Ésto implica que

$$1 = \mu(M) = \mu(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} X(k, n)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(X(k, n)).$$

Como μ cumple que para todo conjunto f-invariante A, $\mu(A) = 0$ o 1, se tiene que existe un único $k(n) \in \mathbb{Z}$ tal que $\mu(X(k(n), n)) = 1$. Definimos $Y = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X(k(n), n)$. Notemos que $\mu(Y) = 1$ y que por construcción φ es constante en Y.

Ahora bien, supongamos que cualquier función f-invariante es constante. Sea $\varphi : M \to \mathbb{R}$ una función integrable cualquiera. Consideremos:

$$\widetilde{\varphi}(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)).$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(f(x)) &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(f(x))) \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(f^j(x)) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \widetilde{\varphi}(x). \end{aligned}$$

Así hemos mostrado que $\widetilde{\varphi}$ es una función f invariante. Por hipótesis se tiene que $\widetilde{\varphi}$ es constante μ casi todo punto. Como μ es una medida de probabilidad se tiene que

$$\widetilde{\varphi}(x) = \int \widetilde{\varphi} d\mu.$$

Además, por hipótesis:

$$\widetilde{\varphi}(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)).$$

Por el Teorema de Birkhoff (Teorema 1.2.6) se tiene que

$$\widetilde{\varphi}(x) = \int \widetilde{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu$$

para μ casi todo punto $x \in M$.

Q.E.D.

Ahora definimos el concepto central de la Teoría Ergódica: *la ergodicidad*. Ésta nos define una relación entre las medidas invariantes y los conjuntos invariantes.

1.2.8 Definición. Sea $f : M \to M$ una transformación medible. Decimos que una medida f-invariante μ es una *medida ergódica para* f o bien que f es una *transformación ergódica* si, para todo conjunto f-invariante A, se cumple que

$$\mu(A) = 0 \text{ ó } \mu(M \setminus A) = 0.$$

Esta definición nos dice que con respecto a una medida ergódica, el espacio no está separado en dos partes dinámicamente relevantes, es decir, los conjuntos invariantes tienen medida total o tienen medida cero. Además, el Teorema 1.2.7 nos dice que, en precencia de una medida ergódica μ, las medias temporales convergen a la media espacial. Tomando a $\varphi = \chi_A$ para algún A medible con respecto a μ se tiene que el tiempo medio de estadía converge a la proporción que tiene A en M con respecto a μ es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(f^j(x)) = \mu(A).$$

Denotemos por $L_2(\mu)$ al espacio vectorial de funciones medibles $\varphi : M \to \mathbb{R}$ que cumplen que $\int |\varphi|^2 \, d\mu$ es finita. Observemos que el inciso 3. del Teorema 1.2.7 implica que si μ es una medida ergódica para f, entonces cualquier función $\varphi \in L_2(\mu)$, f-invariante es constante μ casi todo punto. De hecho, ésto es equivalente a que m sea una medida ergódica [Wal82, pág 28].

Consideremos a $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$. Cualquier función $\varphi : S^1 \to \mathbb{C}$ en $L_2(m)$ tiene una expresión única en Series de Fourier [Wal09, Lecture 3, pág 12].

Sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y consideremos la rotación irracional de ángulo α en S^1:

$$R_\alpha : S^1 \to S^1$$

$$R_\alpha(z) = e^{i\alpha} z.$$

Dado que $|e^{i\alpha}| = 1$ la medida de Lebesgue en S^1 es invariante bajo f [Wal82]. Como α no es racional, $e^{i\alpha}$ no es una raiz de la unidad.

Mostraremos que la medida de Lebesgue es ergódica respecto a cualquier rotacion irracional. Para esto, consideremos $\varphi : S^1 \to \mathbb{C}$ en $L_2(m)$ una función R_α-invariante y probaremos que es constante para Lebesgue casi todo $z \in S^1$.

Sea

$$\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$$

la expresion en serie de Fourier de $\varphi(z)$. Entonces:

$$\varphi(R_\alpha(z)) = \varphi(e^{i\alpha} z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\alpha} z^n.$$

Como φ es una función R_α-invariante se tiene que

$$\varphi(R_\alpha(z)) = \varphi(z).$$

Entonces:

$$0 = \varphi(z) - \varphi(R_\alpha(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\alpha} z^n,$$

es decir $b_n(1 - e^{in\alpha}) = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. Como α no es una raiz de la unidad, entonces $e^{in\alpha} \neq 1$ para toda $n \neq 0$. Por lo tanto $b_n = 0$ para toda $n \neq 0$. Por tanto $\varphi = b_0$ en Lebesgue casi todo $z \in S^1$. Por lo tanto φ es una función constante. Por el Teorema 1.2.7 se tiene que m es una medida ergódica para f.

Denotamos como $\mathbb{E}(f)$ al conjunto de medidas ergódicas para f. Recordemos que

$$\mathbb{E}(f) \subset \mathbb{M}(f) \subset \mathbb{P}(M).$$

Así como nos preguntamos acerca de la existencia de medidas invariantes, es natural preguntarnos bajo qué condiciones podemos garantizar la existencia de medidas ergódicas. Observemos que $\mathbb{M}(f)$ es un conjunto convexo, dado que, si μ y $\nu \in \mathbb{M}(f)$ y tomamos un $0 < \alpha < 1$ se tiene que la combinación convexa

$$\eta = \alpha\mu + (1-\alpha)\nu$$

es f-invariante. De hecho:

$$\eta(f^{-1}(A)) = \alpha\mu(f^{-1}(A)) + (1-\alpha)\nu(f^{-1}(A)) = \alpha\mu(A) + (1-\alpha)\nu(A) = \eta(A).$$

Recordemos que un punto x en un conjunto convexo C es un *punto extremo*, si x no puede escribirse como una combinación no trivial de elementos en C. Es decir, si $x = \alpha y + (1-\alpha)z$ con y y $z \in C$, entonces $x = y = z$.

El siguiente teorema caracteriza a las medidas ergódicas como los puntos extremos de las medidas invariantes. Una demostración de este hecho la podemos encontrar en [PY98, pág 93]

1.2.9 Lema. *Sea $f : M \to M$ una transformación continua de un espacio métrico compacto M. Entonces, μ es una medida ergódica si y sólo si μ es un punto extremo de $\mathbb{M}(f)$.*

El Lema 1.2.9 nos garantiza que $\mathbb{E}(f)$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{M}(f)$, ya que las medidas ergódicas son los puntos extremos de $\mathbb{M}(f)$ y $\mathbb{M}(f) \neq \emptyset$. Lo resumimos en el siguiente Teorema, cuya demostración la podemos encontrar en [PY98, pág 93].

1.2.10 Teorema. *Dada cualquier transformaciíon continua $f : M \to M$ en un espacio métrico compacto, existe al menos una medida ergódica para f.*

Ergodicidad y Transitividad Topológica

Recordemos que una transformación $f : M \to M$ es *topológicamente transitiva* si para cualquier par de conjuntos abiertos U y V de M, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Intuitivamente, la transitividad topológica nos dice que es imposible descomponer un sistema dinámico en dos suconjuntos con interior no vacío que no interactuen entre ellos. La transitividad topológica el análogo topológico de la ergodicidad.

Cuando M es un espacio métrico compacto sin puntos aislados, f es topológicamente transitivo si y sólo si existe un punto $x \in M$ con órbita densa. Además, este hecho es equivalente a la existencia de un punto $x \in M$ cuyo conjunto ω-límite sea denso [BS02, pág 31]

El siguiente enunciado nos da formalmente una relación entre la ergodicidad y la transitividad topológica. Cuando una μ medida es ergódica y positiva sobre los abiertos de M, se concluye que f es topológicamente transitiva. Ésto lo enunciamos en el siguiente teorema.

1.2.11 Teorema. *Si $f : M \to M$ una transformación continua y suprayectiva, y existe $\mu \in \mathbb{E}(f)$, que da valores positivos a los subconjuntos abiertos de M, entonces f es topológicamente transitiva.*

Demostración. Como M es un espacio métrico compacto, existe $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base numerable para la topología de M. Notemos que

$$\{x \in M \mid \overline{O_f(x)} = M\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(U_i).$$

Observemos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, el conjunto $\bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(U_i)$ es un subconjunto abierto de M. Además,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(U_i)\right) \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(U_i).$$

Como μ es una medida ergódica positiva sobre abiertos se tiene que

$$\mu\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(U_i)\right) = 1$$

para toda $i \in \mathbb{N}$. Esto implica que $\mu(\{x \in M \mid \overline{O_f(x)} = M\}) = 1$. Por lo tanto, existe al menos un $x \in M$ cuya órbita bajo f es densa.

Q.E.D.

De hecho, hemos mostrado un enunciado más fuerte: si μ es una medida ergódica y positiva sobre abiertos, entonces el conjunto de puntos con órbita densa tiene medida total.

1.3. Medidas Físicas

Sea M una variedad diferenciable. Hemos mostrado que si $f : M \to M$ una transformación diferenciable siempre existen medidas f-invariantes (Teorema 1.2.3) así como medidas ergódicas para f (Teorema 1.2.10). Recordemos que dada una medida $\mu \in \mathbb{M}(f)$ decimos que un punto $x \in M$ es *regular para f con respecto a μ* si, para cualquier función $\varphi \in L_1(\mu)$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu.$$

El Teorema de Birkhoff nos dice que: el conjunto de puntos regulares respecto a una medida ergódica μ tiene medida total. Una situación relevante a estudiar es saber cuándo el conjunto de puntos regulares de f con respecto a μ tiene medida de Lebesgue positiva o total. Así, introducimos el concepto de *Medida Física*.

1.3.1 Definición. Sea $f : M \to M$ una transformación medible. Decimos que una medida de probabilidad μ, f-invariante, es una *medida física* si para un conjunto de medida de Lebesgue positiva $B(\mu)$ se cumple que, para todo $x \in B(\mu)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=o}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu,$$

para cualquier función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ continua. Al conjunto $B(\mu)$ lo llamamos *la cuenca de Birkhoff de* μ.

Observemos que, por definición, las medidas físicas siempre son ergódicas. Además la cuenca de Birkhoff de una medida física se puede escribir como:

$$B(\mu) = \left\{ x \in M \mid \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu \text{ con respecto a la topología débil*} \right\},$$

donde δ_x es la medida δ soportada en x.

Dada una medida μ sobre los Borelianos de M definimos el *soporte de* μ como el conjunto cerrado más pequeño con medida total.

Consideremos el siguiente ejemplo. Sea $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ en coordenadas cartesianas. Y consideremos a S^1 centrado en el punto $(0,1)$, llamemos a $N = (0,2)$ el polo norte y a $S = (0,0)$ el polo sur. Consideremos a $\phi : S^1 \setminus \{N\}$ a la proyección estereográfica de S^1. Definimos $f : S^1 \to S^1$ como

$$f(x) = \begin{cases} \phi^{-1}(\frac{1}{2}\phi(x)) & \text{si } x \in S^1 \setminus \{N\}; \\ N & \text{si } x \in N. \end{cases}$$

A esta transformación la conocemos como la transformación *polo norte - polo sur*. Observemos que $f(N) = N$ y que $f(S) = S$. Además, para todo $x \in S^1 \setminus \{N\}$ se tiene que $f^n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S$. Notemos que para toda función $\varphi \in C(S^1, \mathbb{R})$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(f^j(x)) = f(S) = \int \varphi d\delta_S$$

para toda $x \in U$. Observemos que $m(U) = 1$, por lo tanto δ_S es una medida física. Además $B(\delta_S) = U$ y que el soporte de δ_S es $\{S\}$.

Notemos que en este ejemplo δ_S no es una medida absolutamente continua con la medida de Lebesgue.

Por otro lado, consideremos la transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$L(x, y) = \lambda(x, y)$$

con $0 < \lambda < 1$). Observemos que la órbita futura de cualquier punto converge al origen. Es decir el origen es un punto fijo atractor. Notemos que la medida dada por la función $\delta_{(0,0)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to [0, 1]$ dada por

$$\delta_{(0,0)}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A; \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

es ergódica para f, pero el conjunto de puntos regulares tiene medida cero con respecto a la medida de Lebesgue ya que sólo es el origen.

El Teorema de Birkhoff nos garantiza que cualquier medida ergódica μ absolutamente continua con la medida de Lebesgue es una medida física y que su cuenca tiene medida de Lebesgue total. Así, podemos considerar a las medidas físicas como las medidas ergódicas que son compatibles con la medida de Lebesgue cuando ésta no se preserva bajo una función diferenciable ya que nos dan la información del Teorema de Birkhoff en un conjunto de medida de Lebesgue positiva de puntos. Otra situación relevante a estudiar es saber si la medida de Lebesgue m es ergódica para f, pero este hecho no se da a menudo.

Nos interesa saber qué condiciones son suficientes para garantizar la existencia de una medida física absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y cómo construirla.

Capítulo 2

Dinámica Hiperbólica

El objeto de estudio de la *Dinámica Hiperbólica* son las propiedades dinámicas que se pueden obtener mediante la información que da la derivada del sistema. Conocer los comportamientos asintóticos de la derivada nos ayudará a comprender muchos comportamientos topológicos complicados de un sistema dinámico.

En la siguiente sección definiremos los conceptos básicos de dinámica hiperbólica y enunciaremos algunos resultados necesarios para el desarrollo de nuestro trabajo. Definiremos también el concepto de atractor y su relación con la definición de medida SRB.

2.1. Conjuntos hiperbólicos

Utilizaremos ahora la estructura de *variedad Riemanniana*. Esta estructura es la que nos da la información necesaria para comparar las normas de vectores en el espacio tangente. Así podremos conocer el comportamiento de la derivada y sus consecuencias.

Formalmente una *métrica Riemanniana* para una variedad diferenciable M es un producto interno $<,>_x$ en cada espacio tangente T_xM, que varía diferenciablemente en los puntos de M. A una variedad diferenciable M, dotada con una métrica Riemanniana, la conocemos como *variedad Riemanniana*. Así, para cada vector $v \in T_xM$ podemos definir su *norma* como $\|v\| = (< v, v >_x)^{\frac{1}{2}}$. Recordemos que toda variedad diferenciable admite una métrica Riemanniana y que cualesquiera dos métricas Riemannianas en una variedad M, $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_*$, son equivalentes. Así que fijaremos una nuestra métrica Riemmaniana $\|\cdot\|$ a lo largo de nuestro estudio.

Comenzaremos con la noción base de la Dinámica Hiperbólica: *los conjuntos hiperbólicos*. Esta definición nos habla del comportamiento asintótico de la derivada de un sistema dinámico diferenciable $f : M \to M$. Fue introducida por S. Smale en 1967 en [Sma67].

2.1.1 Definición. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo. Decimos que un conjunto compacto Λ y f-invariante es un *conjunto hiperbólico* si existen $\lambda \in (0,1)$ y una descomposición continua del haz tangente a M, sobre Λ, $T_\Lambda M$, en suma directa de dos subhaces $E^s \oplus E^u$, tales que, para toda $x \in \Lambda$:

1. $D_x f(E^s_x) = E^s_{f(x)}$ y $D_x f(E^u_x) = E^u_{f(x)}$;
2. $\|D_x f^n(v_s)\| \leq \lambda^n \|v_s\|$ para toda $v_s \in E^s_x$ y para toda $n \geq 0$;
3. $\|D_x f^{-n}(v_u)\| \leq \lambda^n \|v_u\|$ para toda $v_s \in E^u_x$ y para toda $n \geq 0$.

Al haz E^s lo llamamos *haz estable* y a E^u *haz inestable*.

Esta definición nos dice que el haz tangente de Λ tiene dos comportamientos: en el espacio estable E^s_x, la derivada contrae y en el espacio inestable E^u_x la derivada expande. En la literatura, encontraremos que la definición original de conjunto hiperbólico va acompañada de una constante extra $C > 0$, la cual actúa multiplicando a la norma. Podemos adaptar la norma de tal suerte que $C = 1$. Siempre trabajaremos la norma adaptada [BS02, pág 109].

El siguiente ejemplo es clásico en Dinámica Hiperbólica. Consideremos la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es el toro bidimensional. Consideremos la proyección natural $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$. Como la transformación T preserva a la latiz $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, T induce un difeomorfismo en $\mathbb{T}^2$, dado por

$$\widetilde{T}([x]) = \pi\left(T(\pi^{-1}([x]))\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mód } 1.$$

Observemos que esta matriz tiene dos valores propios, λ_s y λ_u dados por:

$$\lambda_u = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \lambda_s = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

y sus correspondientes espacios propios son

$$E^u = \left\langle (2, 1+\sqrt{5}) \right\rangle \text{ y } E^s = \left\langle (2, -(1+\sqrt{5}) \right\rangle$$

respectivamente. Notemos que $0 < \lambda_s < 1$ y $\lambda_u > 1$. Además la pendiente de los espacios propios es un número irracional. Ésto implica la imagen bajo π de E^s y E^u son curvas densas en $\mathbb{T}^2$. Notemos además que

$$D_{[x]}\widetilde{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ para toda } [x] \in \mathbb{T}^2.$$

Por lo tanto todo $\mathbb{T}^2$ es un conjunto hiperbólico para $\widetilde{T}$.

En general cuando toda la variedad M es un conjunto hiperbólico para una difeomorfismo $f : M \to M$ diremos que f es de *Anosov*.

Variedades Estables e Inestables

Sean $f : M \to M$ un difeomorfismo y $\varepsilon > 0$. Definimos *la variedad estable local en* x, como el conjunto de todos los puntos que acompañan a x hacia el futuro, esto es:

$$W^s_\varepsilon(x) = \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon \text{ para toda } n \geq 0\}.$$

Y *la variedad inestable local en* x, como el conjunto de todos los puntos que acompañaron a x en el pasado, esto es:

$$W^u_\varepsilon(x) = \{y \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \varepsilon \text{ para toda } n \geq 0\}.$$

Estos conjuntos están definidos de manera topológica y dependen de la dinámica de f. Si Λ es un conjunto hiperbólico para f, entonces todo punto $x \in \Lambda$ tiene a $W^s_\varepsilon(x)$ y a $W^s_\varepsilon(x)$ como subvariedades diferenciables (tanto como f) encajadas en M. Ésto es consecuencia del Teorema de existencia de las variedades estables e inestables (Teorema 2.1.2).

2.1.2 Teorema de la Variedad Inestable. *Sea Λ un conjunto hiperbólico para un difeomorfismo $f : M \to M$ de clase C^1. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in \Lambda$, las variedades estable e inestable locales $W^s_\varepsilon(x)$ $W^u_\varepsilon(x)$ respectivamente, son subvariedades encajadas en M. Además cumplen:*

1. $T_x W^s_\varepsilon(x) = E^s_x$, $T_x W^u_\varepsilon = E^u_x$;
2. $f^n(W^s_\varepsilon(x)) \subset W^s_{\lambda^n \varepsilon}(f^n(x))$, $f^{-n}(W^u_\varepsilon(x)) \subset W^u_{\lambda^n \varepsilon}(f^{-n}(x))$;
3. *Si* $y, y' \in W^s_\varepsilon(x)$, *entonces* $d(f^n(y), f^n(y')) \leq \lambda^n d(y, y')$, *análogamente, si* $y, y' \in W^u_\varepsilon(x)$, *entonces* $d(f^{-n}(y), f^{-n}(y')) \leq \lambda^n d(y, y')$, *para toda* $n \leq 0$.

Este es un teorema clásico de la Dinámica Hiperbólica el cual podemos encontrar en el libro [KH95].

Notemos que al iterar a $W^s_\varepsilon(x)$ y a $W^u_\varepsilon(x)$ bajo f y f^{-1} respectivamente, están contenidas en $W^s_\varepsilon(f(x))$ y en $W^u_\varepsilon(f^{-1}(x))$ respectivamente. Además, para cualquier $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, obtendremos la conclusión del Teorema de la Variedad Inestable.

2.1.3 Corolario. *Para toda $x \in \Lambda$, existe $\sigma > 1$ tal que $f \mid_{W^u_\varepsilon(x)}: W^u_\varepsilon(x) \to f(W^u_\varepsilon(x))$ cumple que*

$$\left\| D_x f \mid_{E^u_x} \right\| \geq \sigma.$$

Demostración. Del Teorema de la Variedad Inestable (Teorema 2.1.2) se tiene $D_x f \mid W^u_\varepsilon(x) : T_x W^u_\varepsilon(x) \to T_{f(x)} W^u_\varepsilon(f(x))$, y por la hiperbolicidad de Λ (Definición 2.1.1) se tiene que $\|D_x f^{-n}(v_u)\| \leq \lambda^n \|v_u\|$ para toda $n \geq 0$. Tomando $n = 1$ y $\sigma = \lambda^{-1}$ obtemos que $\|D_x f(v_u)\| \geq \sigma \|v_u\|$.

Q.E.D.

2.2. Atractores

Las variedades estables e inestables locales nos ayudarán a conocer a uno de los conjuntos invariantes más importantes en la Dinámica Hiperbólica, los *atractores uniformemente hiperbólicos*. Primero definimos a los atractores.

2.2.1 Definición. Sea $f : M \to M$ una transformación continua en una variedad M. Decimos que un subconjunto compacto y f-invariante $\Lambda \subset M$ es un *atractor* si existe un subconjunto abierto U tal que $f(\overline{U}) \subset U$ y $\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(\overline{U})$. Al conjunto U lo llamamos *la fosa de atracción de* Λ.

Los atractores son los conjuntos donde las órbitas de un conjunto abierto se acumulan topológicamente. Así, observamos que las órbitas de los puntos en la fosa de atracción U de un atractor Λ tendrán el mismo comportamiento en el futuro que las órbitas de puntos en el atractor.

Diremos que un atractor Λ es un *atractor uniformemente hiperbólico* si Λ es un conjunto hiperbólico y además $f\mid_\Lambda$ es topológicamente transitivo. Pedimos la transitividad topol´ï¿½gica para considerar al atractor como una sola pieza.

El ejemplo clásico de un atractor hiperbólico es el Solenoide de Smale [Sma67], el cual describimos a continuación.

Consideremos al toro lleno $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$ con coordenadas cilíndricas, homeomorfo a $D^2 \times S^1$ donde, $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ y S^1 es el círculo. Definimos $f : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ como

$$f(z, \theta) = (\frac{1}{10}z + \frac{1}{2}e^{i\theta}, 2\theta).$$

Esta transformación está bien definida dado que

$$\left|\frac{z}{10} + \frac{1}{2}e^{i\theta}\right| \le \left|\frac{z}{10}\right| + \frac{1}{2}\left|e^{i\theta}\right| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \le 1.$$

De hecho, ésto implica que $f(\overline{\mathcal{T}}) \subset \mathrm{int}\mathcal{T}$. Ésto nos dice que el conjunto

$$\Lambda = \bigcap_{n\ge 0} f^n(\overline{\mathcal{T}})$$

es un atractor para f.

La función actúa en $\mathcal{T}$ de la siguiente forma. Notemos que S^1 da dos vueltas dentro de $\mathcal{T}$, además los discos $D^2 \times \{\theta\}$ van a los discos $D^2 \times \{2\theta\}$, es decir:

$$f(D^2 \times \{\theta\}) \subset D^2 \times \{2\theta\},$$

lo cual nos dice que para toda $x \in \Lambda$, una variedad estable local W^s_{loc} para x es el disco $D^2 \times \{2\theta\}$. Además, cualquier variedad inestable local $W^u_{\mathrm{loc}}(x)$ contenida en

Λ y es un intervalo. Localmente el atractor Λ es homeomorfo a $C \times [0,1]$ donde C es un conjunto de Cantor. De hecho, Λ es homeomorfo al *solenoinde diádico* definido como el límite inverso de la transformación $z^2 : S^1 \to S^1$:

$$\mathbb{S} = \varprojlim \{z^2, S^1\},$$

[CV98, pág 167] el cual es un continuo indescomponible [CV98, pág 240].

Notemos que la derivada de un punto (z, θ) es:

$$D_{(z,\theta)} f = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{i}{2} e^{i\theta} & 2 \end{pmatrix}.$$

Así podemos descomponer a $T\mathcal{T} = TD^2 \oplus TS^1$. Observemos que el haz $T_\Lambda D^2$ es Df invariante. Notemos que

$$\left\| D_{(z,\theta)} f \mid_{D^2} \right\| = \frac{1}{10}.$$

Además notemos que

$$\| Df \mid_{S^1} \| \geq \sqrt{2}.$$

Con lo cual podemos concluir que Λ es un atractor hiperbólico. Una demostración completa de la hiperbolicidad del solenoide la podemos consultar en [KH95, pág 534].

Los atractores hiperbólicos han sido objeto de investigación desde los años setentas. Ellos, además de tener una estructura topológica rica, admiten una estructura caótica, en el sentido de que tienen al menos una órbita densa. Las variedades estables e inestables locales nos permitirán describir la dinámica en los atractores. Definimos ahora a las *variedades estables e inestables globales*.

Sean $f : M \to M$ un difeomorfismo y $x \in M$. Definimos *la variedad estable en* x, $W^s(x)$ como el conjunto

$$W^s(x) = \{x \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty\}.$$

Y *la variedad inestable en* x, $W^u(x)$ como el conjunto

$$W^u(x) = \{x \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty\}.$$

El siguiente teorema nos dice que las variedades estables e inestables están caracterizadas en términos de las variedades estables e inestables locales.

2.2.2 Proposición. *Dada una transformación diferenciable $f : M \to M$, se cumple que:*

1. $W^s(x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(W^s_\varepsilon(f^n(x)))$
2. $W^u(x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{n}(W^u_\varepsilon(f^{-n}(x)))$

Demostración. Sea $y \in W^s(x)$. Entonces

$$d(f^n(x), f^n(y)) \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Sea ε dada por el Teorema de la Variedad Inestable. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq N$ se tiene que

$$d(f^k(x), f^k(y)) < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Escribiendo a k como $k = N + j$ se tiene que

$$d(f^{N+j}(x), f^{N+j}(y)) = d(f^j(f^N(x)), f^j(f^N(y))) < \varepsilon.$$

Por lo tanto $f^N(y) \in W^s_\varepsilon(f^N(x))$ y asi $y \in f^{-N}(W^s_\varepsilon(f^N(x)))$.

Tomemos ahora $z \in \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(W^s_\varepsilon(f^n(x)))$. Entonces, existe $n \geq 0$ tal que $z \in f^{-n}(W^s_\varepsilon(f^n(x)))$, esto implica que $f^n(z) \in W^s_\varepsilon(f^n(x))$ es decir

$$d(f^k(f^n(x)), f^k(f^n(y))) < \varepsilon$$

para toda $k \geq 0$. Por el Teorema de la Variedad Inestable se tiene que

$$f^k(f^n(y)) \in W_{\lambda^n \varepsilon}(f^{k+n}(x))$$

para toda $k \geq 0$ lo cual implica que

$$d(f^k(f^n(x)), f^k(f^n(y))) \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Por tanto $y \in W^s(x)$.

Sustituyendo n por $-n$ en el argumento anterior se muestra que

$$W^u(x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(W^u_\varepsilon(f^{-n}(x))).$$

Q.E.D.

Decimos que un conjunto compacto Λ, f-invariante es un conjunto *maximal invariante para* f si existe un abierto V tal que $\Lambda \subset V$ y $\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(V)$. Mostraremos ahora que los atractores son conjuntos maximales invariantes.

2.2.3 Proposición. *Sean $f : M \to M$ un difeomorfismo y Λ un atractor para f. Entonces existe un abierto V tal que $\Lambda \subset V \subset U$ y $\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(V)$. Es decir, Λ es un conjunto maximal invariante para f.*

Para mostrar este hecho, primero mostraremos la siguiente afirmación:

Afirmación: Si Λ es un atractor, entonces existe un abierto V tal que $\Lambda \subset V \subset U$ y si $f^{-n}(x) \in V$ para toda $n \geq 0$ entonces $x \in \Lambda$.

Definimos $K_n = f^n(\overline{U})$. Notemos que como $\overline{U}$ es compacto y f es un difeomorfismo se tiene que K_n es compacto para toda $n \geq 0$. Además, sabemos que $\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ y que $\overline{U} = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n \backslash K_{n+1}$. Supongamos que $x \in \overline{U}\backslash\Lambda$, es decir $x \in \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n \setminus K_{n+1}\right)\backslash\Lambda$. Esto implica que existe $N \geq 0$ tal que $x \in (K_N\backslash K_{N+1})$. De donde $f^{-N}(x) \in \overline{U}\backslash f(\overline{U})$. Sea $V = f(U)$. Supongamos que $f^n(x) \in V$ para toda $n \geq 0$. Si $x \notin \Lambda$ se tiene que $N \geq 0$ tal que $x \in (K_N \setminus K_{N+1})$. De donde $f^{-N}(x) \in \overline{U} \setminus f(\overline{U})$ y $\overline{U} \setminus f(\overline{U}) \cap V = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por tanto $x \in \Lambda$.

Ahora demostraremos la Proposición 2.2.3

Demostración. Sea $V = f(U)$ Observemos que $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(V) \subset \Lambda$. Por la afirmación anterior se tiene que $\Lambda \subset \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(V)$, lo cual implica que $\Lambda \subset \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(V)$.

Q.E.D.

Veamos ahora otra propiedad de los conjuntos hiperbólicos. Decimos que un conjunto hiperbólico Λ tiene *estructura de producto local* si para $\varepsilon > 0$ pequeña existe $\delta > 0$ tal que: para cada x, $y \in \Lambda$, si $d(x, y) < \delta$ entonces

$$[x, y] = W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y) \neq \emptyset \text{ y } [y, x] = W^u_\varepsilon(x) \cap W^s_\varepsilon(y) \neq \emptyset,$$

y cada una de las dos intersecciones consiste exactamente de un punto en Λ.

Mostraremos que los conjuntos maximales invariantes e hiperbólicos tienen estructura de producto local.

2.2.4 Teorema. *Si Λ es un conjunto maximal invariante para f y es hiperbólico, entonces Λ tiene estructura de producto local.*

Demostración. Sean $x, y \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ dada por el Teorema de la Variedad Inestable y $z \in W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$. Mostraremos que $z \in \Lambda$. Como $z \in W^s_\varepsilon(x)$ se tiene que:

$$d(f^n(z), f^n(x)) < \varepsilon$$

para toda $n \geq 0$. Como $z \in W^u_\varepsilon(y)$ se cumple que

$$d(f^{-n}(z), f^{-n}(y)) < \varepsilon,$$

para toda $n \geq 0$.

Consideremos $\bigcup_{x\in\Lambda} B_\varepsilon(x)$. Observemos que $\bigcup_{x\in\Lambda} B_\varepsilon(x) \subset U$ y que $z \in \bigcup_{x\in\Lambda} B_\varepsilon(x)$. Como Λ es maximal invariante se tiene que $f^n(z) \in U$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, por tanto $z \in \Lambda$.

Mostraremos ahora que z es único. Sea $\varepsilon > 0$ dada por el Teorema de la Variedad Inestable. Supongamos que existe $z' \in W^s_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap W^u_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$. Como $z \in W^s_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap W^u_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$ se tiene que

$$d(f^n(z), f^n(z')) < \varepsilon$$

para toda $n \geq 0$ y

$$d(f^{-n}(z), f^{-n}(z')) < \varepsilon$$

para toda $n \geq 0$. Como $z \in \Lambda$ se tiene que $z' \in W^s_\varepsilon(z)$ y $z' \in W^u_\varepsilon(z)$. Así

$$z' \in W^s_\varepsilon(z) \cap W^u_\varepsilon(z) = \{z\}.$$

Por tanto $z = z'$.

Q.E.D.

Decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una *ε-pseudo-órbita finita* si existen a y $b \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$, con $a \leq b$ tales que $d(f(x_i), x_{i+1}) \leq \varepsilon$ para todo $a \leq i \leq i-1$ y $x_{i+n} = f^n(x_b)$ para toda $i+n > b$, $n > 0$ y $x_{i-n} = f^n(x_a)$ para toda $i-n \leq a$ $n < 0$; decimos que es una *ε-pseudo-órbita positiva* si $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$ para toda $i \leq 0$ y $x_i = f^i(x_0)$ para toda $i < 0$; y decimos que es una *ε-pseudo-órbita* si $d(f(x_n), x_{n+1}) < \varepsilon$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. Dado $\delta > 0$ decimos que una órbita de un punto x δ-sombrea a una ε-pseudo-órbita si $d(f^n(x), x_n) < \delta$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. Notemos que tanto las pseudo-órbitas finitas, y las pseudo-órbitas positivas son pseudo-órbitas.

2.2.5 Definición. Decimos que un conjunto Λ tiene *la propiedad del sombreado* si para toda $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que, para toda δ-pseudo-órbita $\{x_n\}$ en Λ existe $z \in \Lambda$ tal que la órbita de z ε-sombrea a $\{x_n\}$.

Una consecuencia de la estructura de producto local es que los conjuntos maximales invariantes hiperbólicos tienen la propiedad del sombreado.

2.2.6 Teorema. *Si $f : M \to M$ es un difeomorfismo y Λ es un conjunto maximal invariante e hiperbólico para f, entonces Λ tiene la propiedad del sombreado.*

La demostración del Teorema 2.2.6 si bien está basada en la estructura de producto local de Λ, es muy técnica. Para ver la demostración referimos al lector a [Rob95, pág 378].

Usando la propiedad del sombreado de los conjuntos maximales invariantes hiperbólicos podemos mostrar que la fosa de atracción de un atractor Λ está formada por las variedades estables de los puntos del atractor. Además los atractores están formados por variedades inestables.

2.2.7 Lema. *Sea Λ un atractor hiperbólico de una función $f : M \to M$. Entonces se cumple que:*

1. $\Lambda = \bigcup_{x\in\Lambda} W^u(x)$
2. $\bigcup_{x\in\Lambda} W^s(x)$ *es abierto en M y $U \subset \bigcup_{x\in\Lambda} W^s(x)$*

Demostración. Mostraremos el inciso 1. Observemos que $\Lambda \subset \bigcup_{x\in\Lambda} W^u(x)$. Sea $x \in \Lambda$ y $y \in W^u(x)$. Supongamos que $y \notin \Lambda$, esto implica que $y \notin f^n(U)$ para alguna $n \geq$

0 grande. De donde se tiene que $f^{-n}(y) \notin U$. Esto implica que $d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \not\to 0$ cuando $n \to \infty$, lo cual es una contradicción. Por tanto $y \in \Lambda$ y así mostramos que $\bigcup\limits_{x \in \Lambda} W^u(x) \subset \Lambda$.

Para mostrar el inciso 2, tomemos $x \in U$. Observemos que $f^n(x) \in U$ para toda $n \geq 0$ y que $d(f^n(y), \Lambda) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Recordemos que como M es compacto, f es una función uniformemente continua.

Sea $\delta > 0$ con . Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f^n(y), \Lambda) < \frac{1}{N} \leq \delta$$

para toda $n \leq N$. Como Λ es un conjunto compacto existe $x_1 \in \Lambda$ tal que

$$d(f^N(y), x_1) = \text{mín}\{d(f^N(y), \Lambda), \delta'\}$$

con $\delta' = \delta'(\delta)$ de la continuidad uniforme de f. Sea $x_2 \in \Lambda$ tal que

$$d(f^{N+1}(x), x_2) = \text{mín}\{d(f^{N+1}(x), \Lambda), \delta'\}.$$

Observemos que $d(f^{N+1}(x), x_2) < \delta$. Así, construimos x_n tal que

$$d(f^{N+n}(x), x_{n+1}) < \delta.$$

Por la continuidad uniforme de f se tiene que

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta.$$

Por lo tanto $\{x_n\}$ es una δ-pseudo-órbita positiva en Λ. Observemos que como f es uniformemente continua existe $\delta' > 0$ tal que si $d(w, w_0) < \delta'$ entonces $d(f(w), f(w_0)\delta$.

Por la propiedad del sombreado, existe $\varepsilon_0 > 0$ y $z \in \Lambda$ tal que la órbita de z ε-sombrea a $\{x_n\}$. Por tanto

$$d(f^N(f^n(x)), f^n(z)) \leq \varepsilon.$$

Esto implica que

$$d(f^n(x), f^{n-N}(z)) \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Por lo tanto $x \in W^s(z)$.

Q.E.D.

2.3. Medidas SRB

Uno de los conceptos más interesantes de la Teoría Ergódica Diferenciable es la noción desarrollada en los años setentas por Sinaí, Ruelle y Bowen, las *medida SRB*. Estas medidas relacionan la estructura topológica y geométrica de los atractores hiperbólicos, con las medidas invariantes.

Recordemos el ejemplo construido en la Sección 2.1, la transformación

$$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mod 1.$$

definida en el toro bidimensional $\mathbb{T}^2$.

Usando el Teorema de cambio de variable observamos que la medida de Lebesgue en $\mathbb{T}^2$ es $\widetilde{T}$-invariante, ya que:

$$m(\widetilde{T}^{-1}(A)) = \int_A \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| dm = \int_A 1 dm = m(A).$$

Además, el Teorema de la Variedad Inestable nos garantiza que cada punto x en $\mathbb{T}^2$ tiene variedades estables e inestables locales. Este hecho permite mostrar que la medida de Lebesgue es ergódica. De hecho, la medida de Lebesgue es ergódica para cualquier difeomorfismo de Anosov de clase C^2 que la preserve [BS02, pág 141-152]. La idea de la prueba es utilizar el argumento de Hopf. Este permite mostrar que cualquier función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ es constante $\mod 0$ en las variedades estables e inestables. Así, se puede descomponer la medida de Lebesgue en medidas condicionales en las variedades estables e inestables para así ver a la medida de Lebesgue como una medida producto.

En las situaciones dinámicas que estudiaremos, la medida de Lebesgue no siempre se preserva. Una de ellas es entender qué propiedades ergódicas podemos obtener al estudiar atractores. En general, los atractores no tienen medida de Lebesgue positiva [You95]. Por ello, deseamos construir una medida f-invariante, de tal manera que podamos aplicar un argumento parecido al argumento de Hopf en los atractores. Estas son las *medidas SRB*.

2.3.1 Definición. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo. Decimos que una medida de probabilidad μ sobre los Borelianos de M, f-invariante, es una *medida de Sinaí-Ruelle-Bowen (SRB)* si μ las medidas condicionales sobre las variedades inestables

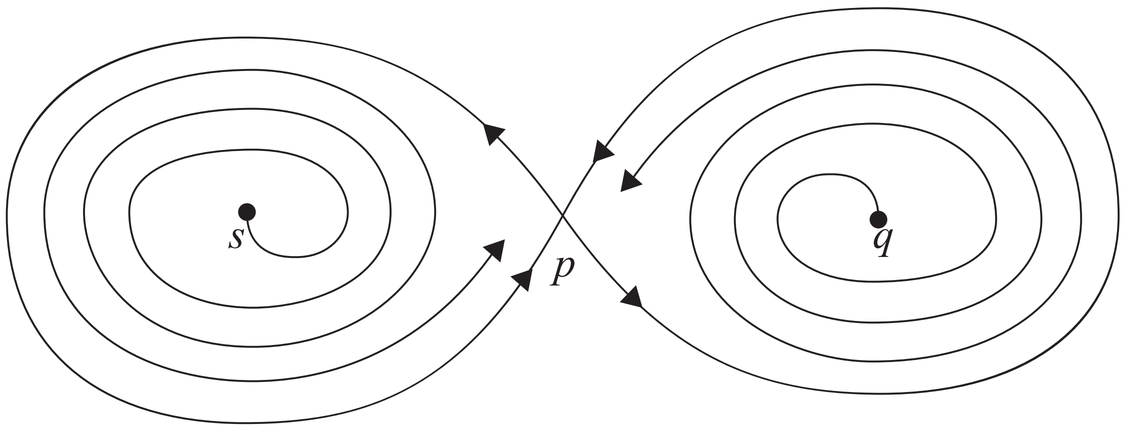

Figura 2.1: Los ojos de Bowen.

de f absolutamente continuas respecto a la medida de Lebesgue en las variedades inestables.

Cabe resaltar que algunos autores definen de la misma manera Medidas Físicas y Medidas SRB, no obstante, estos conceptos son distintos. R. Bowen desarrolló un ejemplo conocido como *el atractor de la figura ocho* o como *los ojos de Bowen*, que muestra las diferencias entre dichos conceptos.

El solenoide de Smale

$$\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^n(\overline{\mathcal{T}})$$

que estudiamos en la Sección 2.2 es un atractor hiperbólico de medida de Lebesgue cero en $\mathcal{T}$. Consideremos $\varphi \in C(\mathcal{T}, \mathbb{R})$. Observemos que para toda $x \in \mathcal{T}$ existe $\tilde{\varphi}(x)$. Como veremos en el Lema 5.1.1 del Capítulo 5 para casi toda $y \in W^s_{\text{loc}}(x)$ con respecto a la medida de Lebesgue se tiene que $\tilde{\varphi}(y) = \tilde{\varphi}(x)$ con $x \in \Lambda$. En el Capítulo 5.1 construiremos una medida μ ergódica, soportada en Λ que no es absolutamente continua con la medida de Lebesgue en $\mathcal{T}$, pero μ es absolutamente continua con la medida de Lebesgue en las variedades inestables, es decir, una medida SRB.

Capítulo 3

Transformaciones Uniformemente Expansoras

El primer contexto donde construiremos medidas físicas es el de las transformaciones uniformemente expansoras.

3.0.2 Definición. Decimos que una transformación $f : M \to M$ diferenciable es *uniformemente expansora* si existe $\sigma > 1$ tal que $\|D_x f(v)\| \geq \sigma \|v\|$ para toda $x \in M$ y para todo $v \in T_x M$.

Notemos que la contracción en $D_x f^{-1}$ corresponde a la expansión en $D_x f$, es decir $\|D_x f^{-1}(v)\| \leq \sigma^{-1} \|v\|$. Siempre utilizaremos la contracción de f^{-1} para describir la expansión de f.

Recordemos que el *grado de una función f en un punto x,* denotado por $\deg(f, x)$ se define como la cardinalidad $f^{-1}(x)$. Cuando una transformación f es continua se tiene que la función grado es localmente constante. En este caso la llamaremos el *grado de f* y la denotaremos por $\deg(f)$.

Las transformaciones uniformemente expansoras cumplen que $\deg(f) = k \geq 2$ y que, si ε_1 es suficientemente pequeña, entonces para cualquier bola de radio ε en M, f^{-n} tiene exactamente k^n ramas de la inversa bien definidas para toda $n \in \mathbb{N}$.

El teorema principal de la sección es el suguiente:

Teorema. *Si $f : M \to M$ es una transformación de clase C^1, uniformemente expansora y* $\det Df$ *es Hölder continua, entonces f admite una única medida física,* *absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue en M, $m(B(\mu)) = 1$ y* $\mathrm{sop}(\mu) = M$.

Su demostración nos permitirá describir a las *bolas prehiperbólicas* que nos serán útiles para construir medidas físicas en transformaciones uniformemente expansoras y en otros contextos.

3.1. Bolas prehiperbólicas y Distorsión

La noción de bola prehiperbólica fue introdicida en el artículo [ALP05].

3.1.1 Definición. Sea $f : M \to M$ una transformación diferenciable. Consideremos $\delta > 0$ pequeño y $0 < \sigma < 1$. Dado $n \in \mathbb{N}$ y $x \in M$, decimos que una vecindad $V_n(x)$ es una (σ, δ)-*bola prehiperbólica de tiempo* n si:

1. $f^n : V_n(x) \to B_\delta(f^n(x))$ es un difeomorfismo;
2. Para cada $y \in V_n(x)$ y para $1 \leq k \leq n$ se cumple que $\left\| D_{f^n(x)} f^{-k} \right\| \leq \sigma^k$.

Notemos que si f no es diferenciable en $x_0 \in M$ no hay manera de definir una bola prehiperbólica para x_0.

Las constantes δ, σ y n que aparecen en la Definición 3.1.1 nos dicen lo siguiente: δ es el tamaño de las vecindades, σ es la tasa de expansión del dominio a lo largo de iteraciones futuras y n nos dice el tiempo iterado donde se tiene expansión.

Para definir una (σ, δ)-bola prehiperbólica, sólo se mencionan condiciones sobre la derivada en ciertas vecindades de $x \in M$. Además de tener estas condiciones, pediremos que la constante de expansión σ asociada a las bolas prehiperbólicas sea uniforme, es decir, que todas las bolas prehiperbólicas de todos los tiempos tengan el mismo tamaño y la misma tasa de expansión. En el caso de las transformaciones uniformemente expansoras ésto es consecuencia de la compacidad de M como veremos en el Lema 3.2.1.

Una consecuencia de que $V_n(x)$ sea una (σ, δ)-bola prehiperbólica es que se cumple que $f^k(V_n(x))$ es una (σ, δ)-bola prehiperbólica de $f^{n-k}(x)$ de tiempo $n - k$ para toda $1 \leq k \leq n$; donde $f^k(V_n(x))$ es difeomorfa a $B_\delta(f^n(x))$ bajo f^{n-k}.

Para medir la distancia entre dos puntos en una variedad tenemos que calcular la longitud de las curvas que los unen. Dada una curva diferenciable $\gamma : [0,1] \to M$ podemos calcular su *longitud*, denotada como $\ell(\gamma)$ de la siguiente manera:

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

3.1.2 Teorema. *Si $V_n(x)$ es una (σ,δ)-bola prehiperbólica para f, entonces para toda $y \in V_n(x)$ y para $1 \le k \le n$ tenemos que*

$$d(f^{n-k}(x), f^{n-k}(y)) \le \sigma^k d(f^n(x), f^n(y))$$

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $y \in V_n(x)$. Consideremos $\gamma_n : [0,1] \to M$ una curva que une a $f^n(x)$ con $f^n(y)$. Supongamos además que es de longitud mínima. Notemos que cada $\gamma_n \subset B_\delta(f^n(x))$ para cada n. Fijemos un $k \in \{1,\dots,n\}$ y tomemos la única curva $\gamma_{n-k} : [0,1] \to f^{n-k}(V_n(x))$ tal que $\gamma_{n-k}(0) = f^{n-k}(x)$, $\gamma_{n-k}(1) = f^{n-k}(y)$ y $(f^k \circ \gamma_{n-k})(t) = \gamma_n(t)$. Al calcular la longitud de γ_n se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\ell(\gamma_n) &= \int_0^1 \|\gamma_n'(t)\|\, dt = \int_0^1 \left\|D_{\gamma_{n-k}(t)} f^k(\gamma_{n-k}'(t))\right\| dt \ge \int_0^1 \sigma^{-k} \left\|\gamma_{n-k}'(t)\right\| dt \\
&= \sigma^{-k} \int_0^1 \left\|\gamma_{n-k}'(t)\right\| dt = \sigma^{-k} \ell(\gamma_{n-k}).
\end{aligned}$$

Ésto implica que,

$$d(f^{n-k}(x), f^{n-k}(y)) \le \ell(\gamma_{n-k}) \le \sigma^k \ell(\gamma_n) = \sigma^k d(f^n(x), f^n(y)),$$

y así obtenemos la conclusión deseada.

Q.E.D.

De la conclusión de este teorema observamos inmediatamente que, si bien

$$f^{-n} : B_\delta(f^n(x)) \to V_n(x)$$

contrae tanto como el factor σ^n entonces f^n expande con tasa σ^{-n}. Ésto nos dice que las distancias dentro de las bolas prehiperbólicas estan acotadas por el factor $\sigma^n\delta$. Además, para cada $1 \le k \le n$, f^k aumenta las distancias en $V_n(x)$ tanto como σ^{-k}.

El hecho de que $\det Df$ sea una función Hölder continua nos garantiza que Df tiene *distorsión uniformemente acotada*. Como veremos más adelante, esta nos permitirá construir las medida físicas.

3.1.3 Definición. *Diremos que una (σ,δ)-bola prehiperbólica $V_n(x)$ tiene distorsión uniformemente acotada si existe una constante $C_1>0$ tal que*

$$C_1^{-1} \leq \frac{|\det D_z f^n|}{|\det D_w f^n|} \leq C_1$$

para cualesquiera $z,w\in V_n(x)$.

3.1.4 Teorema. *Sea $f: M\to M$ una transformación diferenciable y supongamos que* $\det Df$ *es una función Hölder continua. Si un punto $x\in M$ tiene una (σ,δ)-bola prehiperbólica de tiempo n, $V_n(x)$, entonces $V_n(x)$ tiene distorsión uniformemente acotada.*

Demostración. Sea $V_n(x)$ una (σ,δ)-bola prehiperbólica. Como por hipótesis $\det Df$ es una función Hölder continua y como la función log también lo es, entonces existen $C>0$ y $\alpha>0$ tales que para cualesquiera $z,w\in M$ se cumple que:

$$|\log|\det D_z f| - \log|\det D_w f|| \leq Cd(z,w)^\alpha.$$

Usando la regla de la cadena se tiene que, para toda $x\in M$:

$$|\det D_x f^n| = \left|\det \prod_{j=o}^{n-1} D_{f^j(x)} f\right| = \prod_{j=o}^{n-1} \left|\det D_{f^j(x)} f\right|.$$

Sea $x\in M$ y tomemos $z,w\in V_n(x)$. Aplicando logaritmo tenemos que:

$$\begin{aligned}
\log\frac{|\det D_z f^n|}{|\det D_w f^n|} &= \sum_{j=0}^{n-1}\log\frac{\left|\det D_{f^j(z)} f\right|}{\left|\det D_{f^j(w)} f\right|}\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\log\frac{\left|\det D_{f^j(z)} f\right|}{\left|\det D_{f^j(x)} f\right|}\frac{\left|\det D_{f^j(x)} f\right|}{\left|\det D_{f^j(w)} f\right|}\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\log\frac{\left|\det D_{f^j(z)} f\right|}{\left|\det D_{f^j(x)} f\right|}+\sum_{j=0}^{n-1}\log\frac{\left|\det D_{f^j(x)} f\right|}{\left|\det D_{f^j(w)} f\right|}
\end{aligned}$$

Como consecuencia del Teorema 3.1.2 se tiene que:

$$\begin{aligned}
\log\frac{|\det D_z f^n|}{|\det D_w f^n|} &\leq \sum_{j=o}^{n-1} Cd(f^j(z), f^j(x))^\alpha + \sum_{j=o}^{n-1} Cd(f^j(x), f^j(w))^\alpha \\
&\leq \sum_{j=o}^{n-1} C(\sigma^{n-j} d(f^n(z), f^n(x)))^\alpha + \sum_{j=o}^{n-1} C(\sigma^{n-j} d(f^n(x), f^n(w)))^\alpha \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} C\sigma^{(n-j)\alpha}(d(f^n(z), f^n(x)) + d(f^n(x), f^n(w))) \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} 2C\sigma^{(n-j)\alpha} \leq \sum_{j=0}^{n-1} 2\text{diám}(M)C\sigma^{(n-j)\alpha} \leq 2C\text{diám}(M)\sum_{k=0}^{\infty}\sigma^{k\alpha}.
\end{aligned}$$

Tomando $C_1 = \exp(2C\text{diám}(M)\sum_{k=0}^{\infty}\sigma^{k\alpha})$ tenemos el resultado deseado.

Q.E.D.

La distorsión uniformemente acotada nos permite controlar la proporción del volumen infinitesimal entre los conjuntos contenidos en bolas prehiperbólicas al iterarlos un número finito de pasos. Cuando una bola prehiperbólica, o una familia de bolas prehiperbólicas, tiene distorsión uniformemente acotada, podemos controlar cómo varía el volumen de sus subconjuntos bajo iteraciones (hasta el tiempo asociado a la bola prehiperbólica) mediante una constante y el volumen original de sus subconjuntos. Este hecho lo utilizaremos muchas veces a lo largo del trabajo, y es el contenido de la siguiente proposición.

3.1.5 Proposición. *Si $\{V_n(x)\}$ es una familia de (σ,δ)-bolas prehiperbólicas de x con distorsión uniformemente acotada, entonces existe $C_2 > 0$ tal que para cualesquiera conjuntos medibles $A, B \subset V_n(x)$ se cumple que:*

$$\frac{1}{C_2}\frac{m(A)}{m(B)} \leq \frac{m(f^n(A))}{m(f^n(B))} \leq C_2\frac{m(A)}{m(B)}.$$

Demostración. Sean $A, B \subset V_n(x)$ dos conjuntos medibles. Recordemos que el Teorema de Cambio de Variable, nos dice que $m(f^n(A)) = \int_A |\det D_x f^n dm|$ para todo $A \in \mathcal{B}(M)$. Sea $z \in A$ fijo. Entonces:

$$m(f^n(A)) = \int_A |\det D_x f^n dm(x)| = \int_A \frac{|\det D_x f^n|}{|\det D_z f^n|}\,|\det D_z f^n|\,dm(x).$$

Como $V_n(x)$ tiene distorsión uniformemente acotada (Teorema 3.1.4), existe $C_1 > 0$ tal que:

$$C_1^{-1} m(A) \left|\det D_z f^n\right| \leq m(f^n(A)) \leq C_1 m(A) \left|\det D_z f^n\right|.$$

Esto implica que:

$$\frac{1}{C_1 m(A) \left|\det D_z f^n\right|} \leq \frac{1}{m(A)} \leq \frac{C_1}{m(A) \left|\det D_z f^n\right|}.$$

Tomando $w \in B$, fijo, obtenemos que:

$$(C_1^{-1})^2 \frac{m(A) \left|\det D_z f^n\right|}{m(B) \left|\det D_w f^n\right|} \leq \frac{m(f^n(A))}{m(f^n(B))} \leq C_1^2 \frac{m(A) \left|\det D_z f^n\right|}{m(B) \left|\det D_w f^n\right|}.$$

Utilizando de nuevo la distorsión acotdada de $V_n(x)$ se tiene que:

$$(C_1^{-1})^3 \frac{m(A)}{m(B)} \leq \frac{m(f^(A))}{m(f^n(B))} \leq C_1^3 \frac{m(A)}{m(B)}.$$

Q.E.D.

3.2. Construcción de Medidas Físicas

En esta sección construiremos una medida física para una transformación uniformemente expansora arbitraria, mostrando la existencia de (σ, δ)-bolas prehiperbólicas con distorsión uniformemente acotada para toda $n \in \mathbb{N}$. Además, ésta será única y absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

3.2.1 Lema. *Si $f : M \to M$ es una transformación uniformemente expansora, entonces existe $\delta > 0$ tal que para toda $x \in M$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ existe una (σ, δ)-bola prehiperbólica de tiempo n.*

Demostración. Probaremos el Lema por inducción sobre n. Demostraremos que todo punto tiene una (σ, δ)-bola prehiperbólica de tiempo $n = 1$. Como f es un difeomorfismo local, se cumple que para cada $x \in M$, existen $\delta_x > 0$ y una vecindad $V(x)$ de x tal que $f : V(x) \to B_{\delta_x}(f(x))$ es un difeomorfismo. Notemos que $\{V(x)\}_{x \in M}$ es una cubierta abierta de M. Como M es compacta, existen puntos $x_1, \ldots, x_n \in M$ tales que $M = \bigcup_{j=1}^{n} V(x_j)$. Esto implica que existen $\delta_1 > 0, \ldots, \delta_n > 0$ tales que $M = \bigcup_{j=1}^{n} B_{\delta_j}(f(x_j))$. Tomemos $\delta = \text{máx}\{\delta_j\}$. Ahora bien, dado que f es uniformemente expansora se cumple que $\left\|D_{f(y)}f^{-1}\right\| \leq \sigma$ para toda $y \in V(x)$. Por lo tanto, el resultado es válido para $n = 1$.

La hipótesis de inducción es la siguiente: para cada $x \in M$ existe una (σ, δ)-bola prehiperbólica de tiempo n, $V_n(x)$. Mostraremos que todo $x \in M$ tiene una (σ, δ)-bola prehiperbólica de tiempo $n+1$. Sea $x \in M$. Por la hipótesis de inducción existe $V_n(f(x))$ una (σ, δ)-bola prehiperbólica de tiempo n para $f(x)$. Sea $y \in V_n(f(x))$. Observemos que por el Teorema 3.1.2 se tiene que

$$d(f^{n-k}(y), f^{n-k}(f(x))) \leq \sigma^k d(f^n(y), f^{n+1}(x)),$$

para toda $k \in \{1, \ldots, n\}$. Tomando $k = n$ obtenemos que

$$d(y, f(x)) \leq \sigma^n d(f^n(y), f^{n+1}(x)) \leq \sigma^n \delta,$$

lo cual demuestra que $V_n(f(x)) \subset B_\delta(f(x))$. Luego, existe una vecindad de x, $V_{n+1}(x) \subset V_1(x)$, difeomorfa por f a $V_n(f(x))$. Así,

$$f : V_{n+1}(x) \to V_n(f(x)) \subset B_\delta(f(x))$$

es un difeomorfismo. Por lo tanto hemos mostrado que:

$$f^{n+1} : V_{n+1}(x) \to B_\delta(f^{n+1}(x))$$

es un difeomorfismo. Utilizando la regla de la cadena y el hecho de que f es uniformemente expansora obtenemos que $\left\|D_{f^{n+1}(y)}f^{-k}\right\| \leq \sigma^k$ para toda $1 \leq k \leq n+1$ y para toda $y \in V_{n+1}(x)$.

Q.E.D.

Hemos definido la herramienta principal de la construccuón de Alves [Alv08] para encontrar medidas físicas y hemos mostrado la existencia de las (σ, δ)-bolas prehiperbólicas en transformaciones expansoras. Describiremos la construcción de las medida físicas a partir de las bolas prehiperbólicas.

Sea $f : M \to M$ una transformación uniformemente expansora. Consideremos la siguiente sucesión de medidas:

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j m. \tag{3.1}$$

y consideremos a μ un punto de acumulación de dicha sucesión. El siguiente lema nos permitirá mostrar que cualquier punto de acumulación de la suceción 3.1 es una medida absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

3.2.2 Lema. *Sea $f : M \to M$ una transformación uniformemente expansora tal que* $\det Df$ *sea una función Hölder. Entonces, existe $C_3 > 0$ tal que para todo subconjunto $A \in \mathcal{B}(M)$ y para toda $n \in \mathbb{N}$,*

$$f_*^n m(A) \leq \int_{f^{-n}(A)} dm \leq C_3 m(A).$$

Demostración. Sea $A \in \mathcal{B}(M)$. Recordemos que todo $A \in \mathcal{B}(M)$ está contenido en una unión numerable de conjuntos abiertos, así basta probar el resultado para $A \subset B_\delta(y)$ donde $B_\delta(y)$ es la bola de radio $\delta > 0$ alrededor de un punto $y \in M$. Sea $\{x_1, \ldots, x_k\} = \{f^{-n}(y)\}$ y consideremos $V_n(x_i)$ las (σ, δ)-bolas prehiperbólicas de cada x_i $(i = 1, \ldots, k)$ de tiempo n. El Teorema 3.2.1 nos garantiza la existencia de éstas para cualquier tiempo $n \in \mathbb{N}$. Observemos que son disjuntas, es decir,

$$V_n(x_i) \cap V_n(x_j) = \emptyset \text{ si } i \neq j.$$

En cada $V_n(x_i)$ con $1 \leq i \leq k$, tomamos A_i tal que $f^n(A_i) = A$. Estos subconjuntos existen dado que $f^n : V_n(x_i) \to B_\delta(y)$ son difeomorfismos. De aqui se tiene que:

$$f_*^n(A) = m(f^{-n}(A)) = m\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} m(A_i).$$

Dado que $V_n(X_i)$ tiene distorsión uniformemente acotada (Corolario 3.1.5) obtenemos que se existe $C_2 > 0$ tal que

$$\frac{1}{C_2}\frac{m(A_i)}{m(V_n(x_i))} \leq \frac{m(A)}{m(B_\delta(y))} \leq C_2 \frac{m(A_i)}{m(V_n(x_i))}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, lo cual implica que:

$$m(A_i) \leq C_2 \frac{m(A)}{m(B_\delta(y))} m(V_n(x_i)).$$

Dado que $\{V_n(x_i)\}_{i=1}^k$ es una familia disjunta, tomando $C_3 = \dfrac{C_2}{m(B_\delta(y))} \sum_{i=1}^{k} m(V_n(x_i))$ obtenemos que:

$$f^n_*(A) = m(f^{-n}(A)) = m(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} m(A_i) \leq C_3 m(A),$$

que es la conclusión deseada.

Q.E.D.

Observemos que en el Lema 3.2.2 es necesario que las (σ, δ)-bolas prehiperbólicas tengan distorsión uniformemente acotada. Mostraremos ahora que cualquier punto de acumulación μ de la sucesión definida en la ecuación (3.1) es una medida f-invariante y absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

3.2.3 Teorema. *Si f es uniformemente expansora, entonces existe una medida μ f-invariante y absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.*

Demostración. Por construcción μ es una medida f-invariante. El Lema 3.2.2 nos garantiza que, para cada $n \in \mathbb{N}$ las medidas μ_n son absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue y que existe una constante C_3 tal que $\mu_n(A) < C_3$ para toda $n \in \mathbb{N}$, donde A es cualquier conjunto medible. Observemos que si consideramos a la función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ $\varphi \equiv C_3$ se satisfacen todas las hipótesis del Lema 1.1.6, que nos permite concluir que cualquier punto de acumulación de $\{\mu_n\}$ es una medida absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue en M.

Q.E.D.

El siguiente lema dinámico nos muestra que las funciones uniformemente expansoras cumplen una propiedad importante que garantiza que los puntos de acumulación de la suceción 3.1 son medidas ergódicas. Mostraremos que cuando f es uniformemente expansora, es eventualmente suprayectiva. Es decir, para cada vecindad pequeña de cualquier punto x en M, existe un iterado bajo el cual la imagen de la vecindad cubre a toda la variedad. A esta propiedad la llamaremos *la propiedad Markoviana*.

3.2.4 Lema. *Sea $f : M \to M$ una transformación uniformemente expansora de factor $\sigma > 1$. Entonces, para cualquier $p \in M$ y $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, $N = N(\varepsilon)$ tal que $f^N(B_\varepsilon(p)) = M$.*

Demostración. Sea $p \in M$ y $\varepsilon > 0$ arbitraria. Supongamos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $f^n(B_\varepsilon(p)) \neq M$. Tomemos $y_n \in M \setminus f^n(B_\varepsilon(p))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\gamma_n : [0,1] \to M$

una curva suave tal que $\gamma_n(0) = y_n$ y $\gamma_n(1) = f^n(p)$. Sin pérdida de generalidad, supogamos que $\ell(\gamma_n) \leq \text{diám}M$. Como f es un difeomorfismo local, existe una única curva $\hat{\gamma_n}$ tal que $\hat{\gamma_n}(0) = x$ para algún $x \in M$, $\hat{\gamma_n}(1) = p$ y $f^n \circ \hat{\gamma_n} = \gamma_n$. Observemos que $\ell(\gamma_n) \geq \varepsilon$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\ell(\gamma_n) &= \int_0^1 \|\gamma_n'(t)\|\, dt = \int_0^1 \|(f^n \circ \hat{\gamma_n})'(t)\|\, dt = \int_0^1 \left\|D_{\hat{\gamma_n}(t)} f^n(\hat{\gamma_n}'(t))\right\| dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{1}{\sigma^n} \|\hat{\gamma_n}'(t)\|\, dt = \frac{1}{\sigma^n} \int_0^1 \|\hat{\gamma_n}'(t)\|\, dt = \frac{1}{\sigma^k} \ell(\hat{\gamma_n}) \geq \frac{1}{\sigma^n}\varepsilon.\end{aligned}$$

lo cual es una contradición.

Q.E.D.

Hemos mostrado que las transformaciones uniformemente expansoras tienen la propiedad Markoviana. Ahora, mostraremos que cuando existe una infinidad de bolas prehiperbólicas para f, entonces f tiene la propiedad Markoviana en los conjuntos invariantes hacia el frente, es decir $f(A) = A$ y de medida de Lebesgue positiva.

3.2.5 Teorema. *Supongamos que Lebesgue casi todo punto en M tiene una infinidad de (σ, δ)-bolas prehiperbólicas. Entonces para cualquier subconjunto A de M, f-invariante hacia el frente con $m(A) > 0$, existe una bola B de radio $\frac{\delta}{4}$ tal que $m(B \setminus A) = 0$.*

Demostración. Mostraremos que existe una bola B de radio $\frac{\delta}{4}$ tal que:

$$m(A \cap B) = 1.$$

Dado que m casi todo punto tiene una infinidad de (σ, δ)-bolas prehiperbólicas, y que $\{x \in M \mid x \text{ tiene } (\sigma, \delta)-\text{bolas prehiperbólicas de tiempo } n\}$ es invariante hacia el frente, podemos suponer que todo punto en A tiene (σ, δ)-bolas prehiperbólicas. Sea $\varepsilon > 0$. Como la medida de Lebesge m es una medida regular, existen un abierto U y un compacto K tales que $K \subset A \subset U$ y

$$m(U \setminus K) < \varepsilon.$$

Sea n_0 tal que para cada x en A cualquier (σ, δ)-bola prehiperbólica $V_n(x)$ con $n \geq n_0$ está completamente contenida en U. Sea $W_n(x) \subset V_n(x)$ tal que $W_n(x)$ es difeomorfa a $B_{\frac{\delta}{4}}(f^n(s))$. Notemos que $\{W_{n_x}(x)\}_{x \in K}$ es una cubierta abierta de K. Como K es compacto existen $x_1, \ldots, x_r$ y $n_{x_1}, \ldots, n_{x_r} \geq n_0$ tales que $A \subset \bigcup_{j=1}^{r} W_{n_{x_i}}(x_i)$. Supongamos que $\{n_1 \ldots n_r\} = \{n_1^*, \ldots, n_s^*\}$ con $n_1^* < \ldots < n_s^*$. Consideremos $I_1 \subset \mathbb{N}$ el máximo subconjunto de $\{1, \ldots, r\}$ con la propieded de que $n_i = n_1^*$ y $W_{n_i}(x_i) \cap W_{n_j}(x_j) = \emptyset$ para cada $j \in I_1$ distinta de i. De manera inductiva definimos I_k con $2 \leq s$ como un conjunto máximo de $\{1, \ldots, r\}$ tal que para cada $i \in I_k$, $n_i = n_k^*$ y $W_{n_i}(x_i) \cap W_{n_j}(x_j) =$ para cada $j \in \bigcup_{\ell=1}^{k} I_\ell$ con $j \neq i$. Sea $I = \bigcup_{\ell=1}^{s} I_\ell$. Por construcción se tiene que la familia $\{W_i(x_i)\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos ajenos dos a dos.

Consideremos un $W_{n_j}(x_j)$ en $\{W_{n_{x_i}}(x_i)\}_{i=1}^{s}$. Por la construcción de I existe $i \in I$ con $n_{x_i} \leq n_{x_j}$ tal que $W_{n_{x_i}}(x_i) \cap W_{n_{x_j}}(x_j) \neq \emptyset$. De aquí obtenemos que

$$f^{n_{x_i}}(W_{n_{x_j}}(x_j)) \cap B_{\frac{\delta}{4}}(f^{n_{x_i}}(x_i)) \neq \emptyset.$$

Por el Teorema 3.1.2 tenemos que:

$$\text{diám}(f^{n_{x_i}}(W_{n_{x_j}}(x_j))) \leq \frac{\delta}{2}\sigma^{\frac{1}{2}(n_{x_j}-n_{x_i})} \leq \frac{\delta}{2},$$

y por tanto

$$f^{n_{x_i}}(W_{n_{x_j}}(x_j)) \subset B_{\frac{\delta}{4}}(f^{n_{x_i}}(x_i)).$$

Por tanto $W_{n_j}(x_{n_j}) \subset V_i(x_i)$. Tomando la subcubierta finita $\{W_{n_{x_i}}(x_i)\}_{i=1}^{s}$ se tiene que $\{V_i(x_i)\}_{i \in I}$ también es una cubierta de K. Por la Proposición 3.1.5 se tiene que existe una constante $\tau > 0$ tal que $m(W_{n_{x_i}}(x_i)) \geq \tau m(V_i(x_i))$ para toda $i \in I$. De donde obtenemos que:

$$m(\bigcup_{i \in I} W_{n_i}(x_{n_i})) = \sum_{j \in I} m(W_{n_i}(x_{n_i})) \geq \tau \sum_{i \in I} m(V_i(x_i)) \geq \tau m(\bigcup_{i \in I} V_i(x_i)) \geq \tau m(K).$$

Recordemos que $m(U \setminus K) \leq \varepsilon m(A)$. De aquí obtenemos que $m(K) > (1-\varepsilon)m(A)$. Observemos que τ no depende de ε. Tomando $\varepsilon < \frac{1}{2}$ se tiene que:

$$m(\bigcup_{i \in I} W_{n_i}(x_{n_i})) > \frac{\tau}{2}.$$

Mostraremos ahora que:

$$\frac{m(W_{n_i}(x_{n_i}) \setminus A)}{m(W_{n_i}(x_{n_i}))} < \frac{2\varepsilon}{\tau}, \tag{3.2}$$

para algunas $i \in I$. Supongamos que no es cierto, es decir:

$$\frac{m(W_{n_i}(x_{n_i}) \setminus A)}{m(W_{n_i}(x_{n_i}))} \geq \frac{2\varepsilon}{\tau},$$

para toda i. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}\varepsilon m(A) > m(U \setminus K) \leq m\left(\left(\bigcup_{i\in I} W_{n_i}(x_{n_i})\right) \setminus A\right) \\ \leq \frac{2\varepsilon}{\tau} m\left(\bigcup_{i\in I} W_{n_i}(x_{n_i})\right) > \varepsilon m(A).\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción. Utilizando la ecuación (3.2), podemos considerar $B = f^{n_{x_i}}(W_{n_i}(x_{n_i}))$, el cual es un disco de radio $\frac{\delta}{4}$. Dado que A es invariante hacia el frente y por el Corolario 3.1.5 se tiene que

$$\frac{m(B \setminus A)}{m(B)} \leq \frac{m(f^{n_{x_i}}(W_{n_i}(x_{n_i}) \setminus A))}{m(f^{n_{x_i}}(W_{n_i}(x_{n_i})))} \leq C_2 \frac{m(W_{n_i}(x_{n_i}) \setminus A)}{m(W_{n_i}(x_{n_i}))} < \frac{2C_2\varepsilon}{\tau}.$$

Como ε es arbitraria, deducimos nuestro resultado.

Q.E.D.

La propiedad Markoviana de las transformaciones uniformemente expansoras nos muestra que el complemento de los conjuntos f-invariantes de medida de Lebesgue posisitva tienen medida de Lebesgue cero, como veremos en el siguiente lema.

3.2.6 Lema. *Si $f : M \to M$ es una función uniformemente expansora y $A \in \mathcal{B}(M)$ es un conjunto invariante hacia el frente bajo f, de medida de Lebesgue positiva, entonces $m(M \setminus A) = 0$.*

Demostración. Como f es uniformemente expansora, entonces por el Lema 3.2.1, Lebesgue casi todo punto $x \in M$ tiene (σ, δ)-bolas prehiperbólicas de tiempo n para toda $n \in \mathbb{N}$. Como A es invariante hacia el frente, por el Teorema 3.2.5, existe una bola B de radio $\dfrac{\delta}{4}$ tal que $m(B \setminus A) = 0$. Por el Lema 3.2.4 existe $N = N(\frac{\delta}{4})$ tal que $f^N(B) = M$. Dado que f^N es un difeomorfismo local se cumple que

$$M \setminus A = f^N(B) \setminus f^N(A) \subset f^N(B \setminus A),$$

de donde se tiene que

$$m(M \setminus A) \leq m(f^N(B \setminus A)) = 0.$$

Q.E.D.

Con ésto tenemos la herramienta suficiente para mostrar la existencia de una única medida física para transformaciones uniformemente expansoras.

3.2.7 Teorema. *Si $f : M \to M$ es una transformación de clase C^1, uniformemente expansora y $\det Df$ es Hölder continua, entonces f admite una única medida física, absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue en M. Además su soporte es M y $m(B(\mu)) = 1$.*

Demostración. Consideremos a μ un punto de acumulación de la sucesión

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j(m).$$

Recordemos que el Teorema 3.2.3 nos dice que μ es una medida f-invariante y $\mu \ll m$. Por otro lado, tomemos un conjunto A invariante hacia el frente de medida de Lebesgue positiva. Recordemos que cualquier conjunto invariante A es invariante hacia el frente, entonces se cumplen las hipótesis del Corolario 3.2.6, así $m(M \setminus A) = 0$. Dado que $\mu \ll m$ se tiene que $\mu(M \setminus A) = 0$ y por tanto obtenemos la ergodicidad de μ. Notemos que $B(\mu)$ y $\mathrm{sop}(\mu)$ cumplen que $\mu(B(M)) = 1$ y que $\mu(\mathrm{sop}(\mu)) = 1$, lo cual implica que $m(B(\mu)) > 0$ y $m(\mathrm{sop}(\mu)) > 0$. Dado que $B(\mu)$ y $\mathrm{sop}(\mu)$ son conjuntos f-invariantes se tiene que, por el Corolario 3.2.6, tienen medida de Lebesgue total. Dado que $\mathrm{sop}(\mu)$ es cerrado, se tiene que $\mathrm{sop}(\mu) = M$. Supongamos que existe otra medida ν que cumple las propiedades de μ. Dado que $B(\mu)$ y $B(\nu)$ tienen medida de Lebesgue total, existe un punto $x \in B(\mu) \cap B(\nu)$. Sea $\varphi : M \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces se tiene que

$$\int \varphi d\mu = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\nu.$$

Así, por el Teorema 1.1.1 se obtiene que $\mu = \nu$.

Q.E.D.

Capítulo 4

Transformaciones asintóticamente expansoras

Hemos estudiado a las (σ, δ)-bolas prehiperbólicas y mostrado que son una buena herramienta para construir medidas físicas. Ahora las trasladaremos a un contexto más general. Vamos a relejar las condiciones de expansividad de una transformación f.

4.0.8 Definición. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo local de clase C^1. Decimos que f es una función *asintóticamente expansora* si existe $\lambda > 0$ tal que para Lebesgue casi todo $x \in M$ se cumple que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \log \left\| D_{f^j(x)} f^{-1} \right\| < -\lambda.$$

Las transformaciones asintóticamente expansoras tienen relación con los *exponentes de Lyapunov.* Un *exponente de Lyapunov para* x es un número $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\liminf \frac{1}{n} \left\| D_x f^n(v) \right\| = \lambda_0.$$

Observemos que si f es asintóticamente expansora entonces x tiene un exponente de Lyapunov positivo para toda $x \in M$. De hecho, si $\dim M = 1$, entonces ser una función asintóticamente expansora es equivalente a la existencia de un exponente de Lyapunov positivo para toda $x \in M$. Si $\dim M = n$, la existencia de n exponentes de Lyapunov positivos no implica que f sea asintóticamente expansora.[Alv08].

Problema. ¿Si $f : M \to M$ tiene $\dim M$ exponentes de Lyapunov positivos Lebesgue casi todo punto, entonces f es asintóticamente expansora Lebesgue casi todo punto?

Estudiariemos la construcción de medidas físicas para transformaciones asintóticamente expansoras. Prorebamos que existen un número finito de medidas físicas absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue, si f es asintóticamente expansora. Si f además es topológicamente transitiva entonces la medida física es única.

Teorema. *Sea $f : M \to M$ una transformación asintóticamente expansora. Entonces existen $\mu_1, \ldots, \mu_p$ medidas físicas, absolutamente continuas respecto a la medida de Lebesgue cuyas cuencas tienen medida de Lebesgue total. Además, si f es topológicamente transitiva, entonces existe una única medida física.*

Cuando estudiamos a las transformaciones expansoras en el Capítulo 3 observamos que las condiciones de expansión se dan en cada iterado con la misma tasa para todos los puntos de M. Una modificación a esta situación es que en algunos iterados de una órbita la tasa de hiperbolicidad cambie. Así podemos pensar en que la tasa de hiperbolicidad se preserve en promedio para la órbita, o bien, para un número finito de iterados. Esta idea es la que nos lleva a introducir la noción de *tiempos hiperbólicos*: n es un tiempo hiperbólico de x si $D_{f^n(x)}f^k$ contrae exponencialmente para $1 \leq k \leq n$.

Los tiempos hiperbólicos nos permitirán la construcción de bolas hiperbólicas, para así construir medidas físicas. Si existen suficientes tiempos hiperbólicos, podremos mostrar la existencia de bolas prehiperbólicas y podremos extender la construcción del capítulo anterior, y mostraremos que cuando f es asintóticamente expansora, sus puntos tendrán suficientes tiempos hiperbólicos para mostrar la existencia de medidas físicas.

4.1. Tiempos hiperbólicos

Definimos formalmente la noción de tiempo hiperbólico. Esta herramienta fue desarrollada originalmente por José F. Alves en [Alv00].

4.1.1 Definición. Sea $f : M \to M$ una función diferenciable. Dado $0 < \sigma < 1$, decimos que $n \in \mathbb{N}$ es un *σ-tiempo hiperbólico* para $x \in M$ si

$$\prod_{j=n-k+1}^{n} \left\| D_{f^j(x)} f^{-1} \right\| \leq \sigma^k$$

para toda $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Cuando f es uniformemente expansora, sucede que $\|D_x f^{-n}\| \leq \sigma^n$ para algún $0 < \sigma < 1$ y para toda $n \geq 0$. Ésto es equivalente a que todo $n \in \mathbb{N}$ es un σ-tiempo hiperbólico para cualquier x. Si Λ es un conjunto hiperbólico (Definición 2.1.1) y $x \in \Lambda$ entonces:

$$\left\|D_x f^{-n} \mid_{E_x^u}\right\| \leq \sigma^n,$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, toda $n \in \mathbb{N}$ es un σ-tiempo hiperbólico de x en la dirección inestable, para toda $x \in \Lambda$.

Observemos que la existencia de un σ-tiempo hiperbólico n para un punto x, no nos garantiza que x tienga todos los tiempos anteriores $1 \leq k < n$. Esto nos lleva a buscar para que iterados anteriores a n hay un tiempo hiperbólico y cada cuando aparecen. Así, definiremos la *frecuencia de los tiempos hiperbólicos*, la cual nos dará una manera de encontrar tiempos intermedios para un σ-tiempo hiperbólico n dado.

4.1.2 Definición. Consideremos $\theta > 0$. Decimos que la *frecuencia de los σ-tiempos hiperbólicos de $x \in M$ es mayor que θ* si, para $n \in \mathbb{N}$ grande, existen $\ell \geq \theta n$ y $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}$, $1 \leq n_1 \leq \ldots \leq n_\ell \leq n$ tales que para cada $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, n_i es un σ-tiempo hiperbólico para x. Análogamente definimos la frecuencia de una (σ, δ)-bola prehiperbólica de tiempo n para x.

Diremos que un difeomorfismo local $f : M \to M$ es *prehiperbólico* si existe $\theta > 0$ tal que para casi todo punto $x \in M$, con respecto a la medida de Lebesgue, x tiene tiempos hiperbólicos con frecuencia mayor que θ.

Los tiempos hiperbólicos y la frecuencia nos permitirán mostrar el siguiente teorema, cuya demostración veremos en la Sección 4.2.

Teorema. *Si $f : M \to M$ es prehiperbólico y $\det Df$ es una función Hölder continua, entonces existen un número finito de medidas físicas absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue cuyas cuencas de Birkhoff tienen medida de Lebesgue total. Más aún, si f es transitivo, entonces esta medida es única.*

4.2. Construcción de medidas físicas

Mostraremos ahora que la existencia de un σ-tiempo hiperbólico n, nos da la existencia de una bola prehiperbólica de tiempo n con constante de expansión $\sqrt{\sigma}$.

4.2.1 Teorema. *Sea $f: M \to M$ un difeomorfismo local. Si $n \in \mathbb{N}$ es un σ-tiempo hiperbólico para $x \in M$, entonces existen $\delta > 0$ y $V_n(x)$ una $(\sigma^{\frac{1}{2}}, \delta)$-bola prehiperbólica de tiempo n para x.*

Demostración. Sea $x \in M$. Dado que f es un difeomorfismo local, se tiene que existe $\delta_x > 0$ y una vecindad $V(x)$ de x tal que f es un difeomorfismo entre $V(x)$ y $B_{\delta_x}(f(x))$. La compacidad de M implica que existe $\delta > 0$ uniforme (ver Proposición 3.1.5). Tomaremos δ tal que:

$$\text{si } d(x,y) < \delta \text{ se tiene que } \left\|D_{f(y)}f^{-1}\right\| \leq \sigma^{-\frac{1}{2}} \left\|D_{f(x)}f^{-1}\right\|.$$

Sea $x \in M$ y supongamos que 1 es un σ-tiempo hiperbólico. Dada la elección de δ, existe $V_1(x)$, una vecindad de x, tal que f es un difeomorfismo entre $V(x)$ y $B_{\delta_x}(f(x))$. Además para $y \in V_1(x)$ se cumple que $\left\|D_{f(y)}f^{-1}\right\| \leq \sigma^{\frac{1}{2}} \left\|D_{f(x)}f^{-1}\right\|$. Como 1 es un σ-tiempo hiperbólico para x obtenemos que

$$\left\|D_{f(y)}f^{-1}\right\| \leq \sigma^{-\frac{1}{2}} \left\|D_{f(x)}f^{-1}\right\| \leq \sigma^{-\frac{1}{2}}\sigma = \sigma^{\frac{1}{2}}.$$

Así que x tiene una 1-bola prehiperbólica de tiempo 1.

La hipótesis de inducción es: si n es un σ-tiempo hiperbólico para x, entonces existe una $(\sigma^{\frac{1}{2}}, \delta)$-bola prehiperbólica de tiempo n para x, $V_n(x)$. Supongamos que $n+1$ es un σ-tiempo hiperbólico para x. Así,

$$\prod_{j=n+1-k+1}^{n+1} \left\|D_{f^j(x)}f^{-1}\right\| \leq \sigma^k$$

para toda $1 \leq k \leq n+1$. Tomando $k = n$ obtenemos que:

$$\left\|D_{f^{n+1}(x)}f^{-n}\right\| = \prod_{j=2}^{n+1} \left\|D_{f^j(x)}f^{-1}\right\| = \prod_{j=n+1-n=1}^{n+1} \left\|D_{f^j(x)}f^{-1}\right\| < \sigma^k.$$

Ésto implica que n es un σ-tiempo hiperbólico para $f(x)$. Por la hipótesis de inducción, $f(x)$ tiene una $\sigma^{\frac{1}{2}}$-bola prehiperbólica de tiempo n, $V_n(f(x))$. Sea z en $V_n(f(x))$. Por el Teorema 3.1.2, se tiene que:

$$d(z, f(x)) = d(f^{n-n}(z), f^{n-n}(f(x))) \leq \sigma^{\frac{1}{2}n} d(f^n(z), f^{n+1}(x)) < \sigma^{\frac{1}{2}n}\delta.$$

Por tanto $V_n(f(x)) \subset B_\delta(f^{n+1}(x))$. Dada la elección de δ, existe una vecindad $V_{n+1}(x)$ de x tal que $f : V_{n+1}(x) \to V_n(f(x))$ es un difeomorfismo, lo cual implica que $f^{n+1} : V_{n+1}(x) \to B_\delta(f^{n+1}(x))$ es un difeomorfismo.

Tomemos $y \in V_{n+1}(x)$. Como $f(y) \in V_n(x)$ se tiene que:

$$\prod_{j=n-k+1}^{n} \left\| D_{f^{j+1}(y)} f^{-1} \right\| \leq \sigma^{\frac{1}{2}n},$$

para toda $1 \leq k \leq n$. Mostraremos que:

$$\prod_{j=1}^{n+1} \left\| D_{f^j(y)} f^{-1} \right\| \leq \sigma^{\frac{1}{2}n+1}.$$

Por el Teorema 3.1.2 se tiene que $f^j(V_{n+1}(x)) \subset B_\delta(f^j(x))$ para toda $j \in \{0, \ldots, n\}$. De donde se tiene que:

$$\prod_{j=1}^{n+1} \left\| D_{f^j(y)} f^{-1} \right\| \leq \prod_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\sigma^{\frac{1}{2}}} \left\| D_{f^j(x)} f^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\sigma^{\frac{n+1}{2}}} \prod_{j=1}^{n+1} \left\| D_{f^j(x)} f^{-1} \right\|.$$

Dado que $n+1$ es un σ-tiempo hiperbólico para x se da que

$$\prod_{j=1}^{n+1} \left\| D_{f^j(y)} f^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\sigma^{\frac{n+1}{2}}} \sigma^{n+1} = \sigma^{\frac{n+1}{2}},$$

y por tanto $V_{n+1}(x)$ es una $(\sqrt{\sigma}, \delta)$-bola prehiperbólica.

Q.E.D.

Notemos que la afirmación recíproca es cierta: Si V_n es una (σ, δ)-bola prehiperbólica de tiempo n, entonces para toda $y \in V_n(x)$, n es un σ-tiempo hiperbólico para y. Ésto es consecuencia directa de la definición de (σ, δ)-bola prehiperbólica (Definición 3.1.1). Tomando cualquier $y \in V_n(x)$ la regla de la cadena implica que:

$$\prod_{j=n-k+1}^{n} \left\| D_{f^j(x)} f^{-1} \right\| = \left\| D_{f^n(x)} f^{-k} \right\| \leq \sigma^k.$$

Lo cual nos dice que n es un σ-tiempo hiperbólico para y.

El Teorema 4.2.1 implica además el siguiente corolario:

4.2.2 Corolario. *Si $f : M \to M$ es prehiperbólico, entonces existen $(\sqrt{\sigma}, \delta)$-bolas prehiperbólicas con frecuencia mayor que θ para Lebesgue casi todo $x \in M$.*

Construcción de medidas físicas para transformaciones prehiperbólicas

Probaremos los hechos que nos permiten construir medidas físicas cuando f es una transformación prehiperbólica con $\det Df$ Hölder continua.

Consideremos $f : M \to M$ prehiperbólico. Definimos:

$$H_n = \{x \in M \mid x \text{ tiene una } (\sigma,\delta)\text{-bola prehiperbólica de tiempo } n\}.$$

4.2.3 Lema. *Sea $f : M \to M$ prehiperbólico tal que $\det Df$ Hölder continua. Entonces existe $C_3 > 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$:*

$$\frac{d}{dm} f_*^n(m\mid_{H_n}) \leq C_3.$$

Demostración. Mostraremos que existe $C_3 > 0$ uniforme, tal que, para todo $A \in \mathcal{B}(M)$ tal que diám$A < \dfrac{\delta}{2}$ se cumple que:

$$m(f^{-n}(A) \cap H_n) < C_3 m(A).$$

Sean B una bola de radio δ tal que $A \subset B$ y fijemos $n \in \mathbb{N}$. Sean $\{B_k\}_{k\geq 1}$ las componentes conexas de $f^{-n}(B)$, es decir,

$$f^{-n}(B) = \bigcup_{k\geq 1} B_k$$

donde $B_j \cap B_r = \emptyset$ para $j \neq r$.

Consideremos sólo las B_k tales que $B_k \cap H_n \neq \emptyset$. Sea $x_k \in B_k \cap H_n$ y consideremos su (σ,δ)-bola prehiperbólica de tiempo n, $V_n(x_k)$. Notemos que

$$f^n(x_k) \in B \subset B_\delta(f^n(x_k)).$$

De aquí se tiene que $B_k \subset V_n(f^n(x_k))$ ya que, tomando cualquier $y \in B_k$, $f^n(y) \in B$ y $y \in f^{-n}(B_\delta(f^n(x_k))) = V_n(x_k)$. Como $\det Df$ es Hölder continua podemos aplicar el Lema 3.1.5, el cual nos dice que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\frac{1}{C_2}\frac{m(f^{-n}(A) \cap B_k)}{m(B_k)} \leq \frac{m(f^n(f^{-n}(A) \cap B_k))}{m(f^n(B_k))} \leq C_2 \frac{m(f^{-n}(A) \cap B_k))}{m(B_k)}$$

para toda k. Observemos que

$$f^{-n}(A) \cap H_n \subset f^{-n}(A) \cap \bigcup_{k \geq 1} B_k.$$

De aquí obtenemos que existe $C_3 > 0$ tal que:

$$m(f^{-n}(A) \cap H_n) \leq \sum_{k \geq 1} m(f^{-n}(A) \cap B_k) \leq C_2 m(A).$$

Q.E.D.

4.2.4 Lema. *Sy $f : M \to M$ es prehiperbólico y $\det Df$ es Hölder continua, entonces para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande se cumple que*

$$\frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} m(H_j) \geq \theta.$$

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos la medida ξ_n sobre el conjunto $\{1, \dots, n\}$ como:

$$\xi_n(J) = \frac{\# J}{n}.$$

Sea $B \in \mathcal{B}(M)$ entonces:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m(H_j \cap B) = \int \left(\int_B \chi(x,i) d\xi_i \right) dm$$

donde $\chi(x,i)$ es la función característica en H_i.

Aplicando el Teorema de Fubini y el hecho de que m casi todo punto tiene (σ, δ)-bolas prehiperbólicas con frecuencia mayor que θ, se cumple que

$$\begin{aligned} \int \left(\int_B \chi(x,i) d\xi_i \right) dm &= \int \left(\int_B \chi(x,i) dm \right) d\xi_i \\ &= \int_B \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{n} dm \geq \int_B \sum_{i=1}^{n} \frac{\ell}{n} dm = \theta m(B). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Mostraremos ahora que cuando existen (σ, δ)-bolas prehiperbólicas con frecuencia mayor que algún $\theta > 0$, entonces existe una medida física absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

Recordemos que tanto los difeomorfismos locales como los difeomorfismos cumplen la propiedad de que $m(f^{-1}(A)) = 0$ y $m(f(A)) = 0$, siempre que $m(A) = 0$.

4.2.5 Teorema. *Si $f : M \to M$ es pre-hiperbólico y* $\det Df$ *es una función Hölder continua, entonces existe una medida f-invariante, absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue.*

Demostración. Consideremos la sucesion $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ que construimos para mostrar la existencia de una medida física para transformaciones expansoras (Teorema 3.2.7) y la sucesión $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por $\nu_n = \dfrac{1}{n}\sum_{j=0}^{\infty} f_*^j(m\ |_{H_j})$. Notemos que tanto $\{\mu_n\}$ como $\{\nu_n\}$ son sucesiones en $\mathbb{P}(M)$. Por lo tanto, tienen puntos de acumulación. Sin pérdida de generalidad, consideremos $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ de tal manera que cuando $k \to \infty$ se cumple que $\mu_{n_k} \to \mu$ y $\nu_{n_k} \to \nu$. Por construcción, μ es una medida f-invariante. Notemos además que ν es una medida absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue en M.

Por el Lema 4.2.4 $\nu(M) > 0$. Utilizando el Teorema de Descomposición de Lebesgue (Teorema 1.1.5) sabemos que existen μ_1, $\mu_2 \in \mathbb{P}(M)$ únicas y $p \in [0,1]$ tales que

$$\mu = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$$

con $\mu_1 \ll m$ y $\mu_2 \perp m$. Además dado que ν es una submedida de μ y que $\nu \ll m$ se tiene que $\mu = \nu + \eta$, para alguna medida $\eta \in \mathbb{P}(M)$. Ésto implica que $p\mu_1 = \nu + \eta_{abs}$ y que $(1-p)\mu_2 = \eta_{sing}$ donde $\eta_{abs} \ll m$ y $\eta_{sing} \perp m$. Llamaremos a $p\mu_1 = \mu_{abs}$ y a $(1-p)\mu_2 = \mu_{sing}$.

Notemos que, como μ es una medida f-invariante, se cumple que

$$\mu_{abs}(A) + \mu_{sing}(A) = \mu_{abs}(f^{-1}(A)) + \mu_{sing}(f^{-1}(A))$$

para todo $A \in \mathcal{B}(M)$. Para mostrar este hecho consideremos $A \in \mathcal{B}(M)$ tal que $m(A) = 0$. Como f es una función no singular $m(f^{-1}(A)) = 0$ lo cual nos dice que $\mu_{ac}(f^{-1}(A)) = 0$ y por tanto: $f_*(\mu_{ac}) \ll m$. Por otro lado, dado que $\mu_{sing} \perp m$, existe un conjunto $B \in \mathcal{B}(M)$ tal que $m(B) = 0$ y $\mu_{sing}(B) = 1$. Como f es no singular se tiene que:

$$m(B) = 0 = m(f^{-1}(B)) \text{ y } \nu(B) = 1 = \nu(f^{-1}(B)),$$

lo cual implica que $\mu_{sing} \perp m$. Como la descomposición de Lebesgue es única se tiene que $f_*(\mu_{ac}) = \mu_{ac}$ y $f_*(\mu_{sing}) = \mu_{sing}$.

Además notemos que $\mu_{ac}(M) \geq \nu(M) > 0$. Considerando μ_{ac} normalizada obtenemos una medida f-invariante, absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

Q.E.D.

Mostraremos ahora que la medida que construimos en el Teorema 4.2.5 sólo tiene un número finito de componentes físicas. Más aún, si f es transitiva, entonces la medida es única.

4.2.6 Teorema. *Si $f : M \to M$ es prehiperbólico y $\det Df$ es una función Hölder continua, entonces existen un número finito de medidas físicas absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue cuyas cuencas de Birkhoff tienen medida de Lebesgue total. Más aún, si f es transitivo, entonces esta medida es única.*

Demostración. En el Teorema 4.2.5 mostramos la existencia de una medida μ, f-invariante y absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue cuando f cumple nuestras hipótesis. Sea pues μ con estas caracteristicas. Si μ no es ergódica, entonces existen dos subconjuntos H_1 y H_2 de M, f-invariantes tales que $M = H_1 \cup H_2$, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ y de medida positiva. Como $\mu \ll m$ se tiene que $m(H_1)$ y $m(H_2) > 0$. Consideremos $\mu_i(A) = \dfrac{\mu(A \cap H_i)}{m(H_i)}$ para $i = 1, 2$. Observemos que μ_1 y μ_2 son medidas f invariantes, de probabilidad y absolutamente continuas con la medida de Lebesgue. Si μ_1 y μ_2 no son ergódicas, las descomponemos de la misma forma que lo hicimos con μ. Siguiendo este proceso, encontramos una familia de conjuntos $\{H_i\}$, f-invariantes y de medida de Lebesgue positiva que cubren a M. Por el Teorema 3.2.5 existen una familia de discos $\{D_i\}$ de radio fijo tales que $m(D_i \setminus H_i) = 0$. Como M es compacta, entonces sólo existen un número finito de discos, llamémoslos $D_{i_1}, \cdots D_{i_k}$. Esto implica que $\mu = \sum_{j=1}^{k} \mu_{H_{i_j}} \mu_{i_j}$, donde $\{H_{i_j}\}_{j=1}^{k}$ es una cubierta de M por conjuntos f-invariantes y de medida de Lebesgue positiva y μ_{i_j} es una medida ergódica para toda $1 \leq j \leq k$.

Supongamos ahora que f es transitiva. Supongamos que existen dos medidas μ_1 y μ_2 ergódicas y absolutamente continuas respecto a la medida de Lebesgue distintas. Sean $B(\mu_1)$ y $B(\mu_2)$ sus cuencas de Birkhoff. Recordemos que $B(\mu_1)$ y $B(\mu_2)$ son conjuntos invariantes hacia el frente de medida de Lebesgue positiva. Por el Teorema 3.2.5 existen dos discos D_1 y D_2 tales que $m(D_i \subset B(\mu_i)) = 0$ para $i = 1, 2$. Además como $B(\mu_1)$ y $B(\mu_2)$ tienen medida de Lebesgue positiva y son cerrados, dado que

m es una medida regular, existen U y V abiertos, de medida de Lebesgue positiva tales que $U \subset B(\mu_1)$ y $V \subset B(\mu_2)$. Como f es topológicamente transitiva, existe n tal que $f^n(U) \cap V = \emptyset$, de donde se tiene que $B(\mu_1) \cap B(\mu_2) \neq \emptyset$, lo cual implica que existe $x \in B(\mu_1) \cap B(\mu_2)$ tal que para cualquier función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ continua se tiene que $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$ converge a $\int \varphi d\mu_1$ y a $\int \varphi d\mu_1$ simultaneamente.

Esto implica que $\mu_1 = \mu_2$ (Teorema 1.1.1).

Q.E.D.

Existencia de medidas físicas para transformaciones asintóticamente expansoras

Nuestro objetivo es utilizar el Teorema 4.2.6 para encontrar medidas físicas en transformaciones asintóticamente expansoras. Mostraremos que si f es asintóticamente expansora, entonces f es prehiperbólica.

Para mostrar que una transformación asintóticamente expansora f es prehiperbólica necesitamos utilizar el siguiente resultado mostrado por Pliss [Pli72].

4.2.7 Lema (Pliss). *Consideremos $0 < c < A$. Sea $\theta = \frac{c}{A}$. Supongamos que $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ cumplen que $a_j \leq A$ para toda $1 \leq j \leq N$ y*

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \geq cN.$$

Entonces existen $\ell \geq \theta n$ y $n_1, \ldots n_\ell, \in \mathbb{N}$, $1 \leq n_1 < \ldots < n_\ell \leq n$ tales que

$$\sum_{j=n}^{n_i} a_j \geq 0$$

para cada $1 \leq n < n_i$ y $1 \leq i \leq \ell$.

Demostración. Definamos para cada $1 \leq n \leq N$,

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

y $S_0 = 0$. Consideremos $n_0 = 0$ y $1 \leq n_1 < \cdots < n_\ell \leq N$ la sucesión máxima tal que $S_{n_i} \geq S_n$ para toda $0 \leq n \leq n_i$ y $1 \leq i \leq \ell$. Observemos que $\ell \geq 1$, dado que $S_N > 0$. Por la elección de S_{n_i} se cumple que, para cada $1 \leq i \leq \ell$,

$$\sum_{j=n}^{n_i} a_j > 0,$$

para toda $1 \geq n \geq n_i$.

Observemos que, por la construcción de n_i, se cumple que, para toda $1 \leq i \leq \ell$, $S_{n_i} \leq S_{n_i-1}$. Por hipótesis $a_{n_i} \leq A$. Escribimos $a_{n_i} = S_{n_i} - S_{n_i-1}$. Notemos además que $S_{n_\ell} \geq S_N$. Ésto implica que:

$$cN \leq S_{n_\ell} = \sum_{i=1}^{\ell} (S_{n_i} - S_{n_i-1}) \leq \ell A,$$

lo cual muestra que:

$$\ell \geq \theta N.$$

Q.E.D.

4.2.8 Corolario. *Si $f : M \to M$ es una transformación asintóticamente expansora, entonces f es prehiperbólica.*

Demostración. Notemos que como f es asintóticamente expansora, existe N suficientemente grande tal que, para Lebesgue casi todo $x \in M$ se cumple que:

$$\sum_{j=1}^{N} -\log \left\| D_{f^j(x)} f^{-1} \right\| \geq \lambda N.$$

Consideremos la sucesión definida por:

$$a_j = -\log \left\| D_{f^j(x)} f^{-1} \right\| + \frac{\lambda}{2},$$

con $c = \dfrac{\lambda}{2}$ y $A = \max_{x \in M} \left\{ -\log \left\| D_{f(x)} f^{-1} \right\| + \dfrac{\lambda}{2} \right\}$. Observemos que a_j, c y A cumplen las hipótesis del Lemma 4.2.7, lo que implica que existen $\ell \geq \theta N$ y una sucesión finita $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_\ell \leq N$ tales que:

$$\sum_{j=n}^{n_i} -\log \left\| D_{f^j(x)} f^{-1} \right\| + \frac{\lambda}{2} \geq 0, \tag{4.1}$$

con $\theta = \dfrac{\lambda}{2A}$ para toda $1 \leq n \leq n_i$ y para cada $1 \leq i \leq \ell$. Mostraremos que n_i es un σ-tiempo hiperbólico con $\sigma = e^{-\frac{\lambda}{2}}$ para cada $1 \leq i \leq N$. Usando la ecuación (4.1) se tiene que:

$$\sum_{j=n}^{n_i} -\log \left\| D_{f^j(x)} f^{-1} \right\| + \frac{\lambda}{2} \geq 0,$$

para cada $1 \leq i \leq N$ y para cada $1 \leq n \leq n_i$. Esto implica que:

$$\prod_{j=n}^{n_i} \log \left\| D_{f^j(x)} f^{-1} \right\| \leq e^{-\frac{\lambda}{2}(n_i - n)},$$

para toda $1 \leq n \leq n_i$. Haciendo $n_i - n = k$ se tiene que:

$$\prod_{j=n_i-k}^{n_i} \log \left\| D_{f^j(x)} f^{-1} \right\| \leq e^{-\frac{\lambda}{2}k}. \tag{4.2}$$

Observemos que $0 \leq k \leq n_i - 1$. Aplicando la desigualdad obtenida en (4.2) a $f(x)$, obtenemos que n_i es un tiempo hiperbólico.

Q.E.D.

Así, enunciamos y probamos el teorema principal del capítulo.

4.2.9 Teorema. *Sea $f : M \to M$ una transformación asintóticamente expansora. Entonces existen $\mu_1, \ldots, \mu_p$ medidas físicas, absolutamente continuas respecto a la medida de Lebesgue cuyas cuencas tienen medida de Lebesgue total. Además, si f es topológicamente transitiva, entonces existe una única medida física.*

Demostración. Como f es asintóticamente expansora, entonces f es prehiperbólica (Corolario 4.2.8). Aplicando el Teorema 4.2.6 obtenemos nuestro resultado.

Q.E.D.

Capítulo 5

Atractores uniformemente hiperbólicos

Mostraremos que existe una medida SRB cuando f tiene un atractor hiperbólico. En general, mostrar la existencia de una medida SRB para una transformación diferenciable arbitraria es un problema complicado [You95, pág 331], [BP02, pág 139]. El primer resultado acerca de la existencia de medidas SRB fue obtenido por Sinaí para difeomormismos de Anosov, y despúes generalizado por Ruelle y Bowen para difeomorfismos que tienen atractores hiperbólicos [Bow08, Rue76]. Las construcciones y propiedades de estas medidas han sido objeto de investigación actual, además de estar relacionadas con las medidas físicas.

5.1. Construcción de medidas SRB

Sea Λ un atractor hiperbólico de $f : M \to M$ un difeomorfismo de clase C^1 con $\det Df$ Hölder continua. El siguiente lema realciona a las variedades estables e inestables con las medidas invariantes. Éste dice que en presencia de una medida f-invariante los promedios sobre las variedades estables son iguales a los de los puntos regulares (como los definimos en la Sección 1.3 del Capítulo 1) en atractores.

5.1.1 Lema. *Sean Λ un atractor hiperbólico para f, μ una medida f-invariante en U y $x \in \Lambda$ un punto regular. Entonces, para toda función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ continua se tiene:*

1. Para toda $y \in W^s(x)$ se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(y)).$$

2. Para toda $y \in W^u(x)$ se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^{-j}(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^{-j}(y)).$$

Demostración. Mostraremos el inciso 1, la misma prueba funciona para el inciso 2 sustituyendo j por $-j$. Sea $y \in W^s(x)$. Como x es un punto regular, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$ existe. Sea $\varepsilon > 0$. Como φ es una función uniformemente continua se tiene que existe $\delta > 0$ tal que si $d(z,w) < \delta$ entonces $|\varphi(z) - \varphi(w)| < \varepsilon$. Tomando cualquier $y \in W^s(x)$ se tiene que $d(f^n(x), f^n(y)) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \left|\varphi(f^j(x)) - \varphi(f^j(y))\right| \leq \varepsilon.$$

Ésto implica que

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(y)).$$

Q.E.D.

Recordemos que el Lema 3.2.1 muestra la existencia de (σ,δ)-bolas prehiperbólicas de tiempo n para toda $n \in \mathbb{N}$ cuando f es uniformemente expansora. En este Lema, la hipótesis de que la variedad donde actúa f es compacta es necesaria. En nuestro caso, las variedades inestables locales no son necesariamente compactas, lo cual complicaría los argumentos que queremos utilizar para la construcción de una medida SRB. No obstante, mostraremos que eso no sucede (Proposición 5.1.2).

Notemos que, gracias a que Λ está formado de variedades inestables, podemos afirmar que cualquier punto del atractor está contenido en una variedad inestable local. Como veremos a continuación, las preimágenes de las variedades inestables locales son (λ,ε)-bolas prehiperbólicas (Definición 3.1.1) con respecto a la norma restringida al haz inestable.

5.1.2 Proposición. *Para toda $x \in \Lambda$, $V_n(x) = f^{-n}(W^u_\varepsilon(f^n(x)))$ es una (λ, ε)-bola prehiperbólica de tiempo n.*

Demostración. Notemos que $f^n : V_n(x) \to W^u_\varepsilon(f^n(x))$ es un difeomorfismo. Como consecuencia del Teorema de la Variedad Estable (Teorema 2.1.2) V_n es difeomorfa a un disco de radio ε. Por otro lado el Teorema de la Variedad Estable garantiza que

$$\left\| D^n_f(x) f^{-k} \right\| \leq \lambda^k$$

para toda $k \geq 0$, por ende se cumple la condición para toda $1 \leq k \leq n$.

Q.E.D.

Además, si f es de clase C^1 y $\det Df$ es una función Hölder continua, el Teorema 3.1.4 implica que las variedades inestables son (λ, ε)-bolas prehiperbólicas con distorsión uniformemente acotada.

De la conclusión de la Proposición 2.2.7 y el Teorema de la Variedad estable notamos que, tomando las variedades estables e inestables locales de los puntos de un atractor hiperbólico, hacen un entramado de la fosa de atracción de Λ. Ésto nos lleva a recordar el siguiente concepto geométrico.

5.1.3 Definición. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Una *foliación de M de dimensión k* es un atlas máximo $\mathcal{F}$ de M con las siguientes propiedades:

1. Si $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ entonces $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ donde U_1 y U_2 son discos abiertos en $\mathbb{R}^k$ y $\mathbb{R}^{n-k}$ respectivamente.

2. Si (U, φ) y $(V, \psi) \in \mathcal{F}$ son tales que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces el cambio de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es de la forma $\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$, donde h_1 y h_2 son difeomorfismos.

A los conjuntos de la forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$ con $c \in U_2$ son llamados *hojas de $\mathcal{F}$*, y a los conjuntos de la forma $\varphi^{-1}(\{z\} \times U_2)$ con $z \in U_1$ son llamadas *transversales locales de $\mathcal{F}$*.

Un hecho importante acerca de la geometría de los atractores es que la fosa de atracción U de un atractor uniformemente hiperbólico Λ está foliada por variedades estables y que sus transversales locales son variedades inestables locales. Además el hecho de que $f^n(W^s_\varepsilon(x)) \subset W^s_{\lambda^n\varepsilon}(f^n(x))$, $f^{-n}(W^u_\varepsilon(x)) \subset W^u_{\lambda^n\varepsilon}(f^{-n}(x))$ nos habla de que la foliación se preserva bajo f. Es decir es una foliación invariante por f.

Sean $\mathcal{F}$ una foliación con hojas suaves y Σ_1 y Σ_2 dos transversales a $\mathcal{F}$. Una *holonomía* $p : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ es una función continua tal que para toda x, $p(x) \in \mathcal{F}(x) \cap \Sigma_2$, donde $\mathcal{F}(x)$ es la hoja de $\mathcal{F}$ que contiene a x. Notemos que las holonomías son una manera de transportar la medida de Lebesgue entre transversales. En nuestro caso, podemos transportar la medida de Lebesgue en una variedad inestable local a otra mediante holonomías, ésta es una condición particular de algunas foliaciones llamadas foliaciones absolutamente continuas. Decimos que $\mathcal{F}$ es una *foliación absolutamente continua* si para cualesquiera Σ_1 y Σ_2 transversales a $\mathcal{F}$ y cualquier holonomía $p : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ se cumple que $m_{\Sigma_1}(A) = 0$ si y sólo si $m_{\sigma_2}(p(A)) = 0$ para todo $A \subset \Sigma_1$.

5.1.4 Teorema. *La foliación estable W^s de un atractor uniformemente hiperbólico de un difeomorfismo f de clase C^2 es absolutamente continua.*

La demostración de este hecho la podemos encontrar en [You95]. Es necesaria la hipótesis de que f sea de clase C^2 ya que si no, entonces no podemos garantizar la continuidad absoluta de la foliación estable [You95]. Con ello observemos que si construimos una medida μ_x en una variedad inestable $W^u_\varepsilon(x)$ absolutamente continua con la medida de Lebesgue en $W^u_\varepsilon(x)$, usando cualquier holonomía $p : W^u_\varepsilon(x) \to \Sigma$, entonces los conjuntos de medida μ_x cero en $W^u_\varepsilon(x)$ van bajo holonomías a conjuntos de medida de Lebesgue cero en Σ.

Sean Λ un conjunto hiperbólico para f, $x \in \Lambda$ y consideremos $\Sigma = W^s_\varepsilon(x)$ Definimos un *rectángulo* denotado por $\mathcal{C}(\Sigma)$ como

$$\mathcal{C}(\Sigma) = \bigcup \{W^u_\varepsilon(y) \mid y \in \Sigma \cap \Lambda\}.$$

Para simplificar la notación, llamaremos a las variedades inestables que forman a los rectángulos como D_α.

Ahora realizaremos la construcción de la medida.

5.1.5 Teorema. *Sean f un difemorfismo de clase C^2 y Λ un atractor de f. Si Λ es un atractor hiperbólico, entonces existe una única medida SRB, tal que el soporte de μ es Λ y $B(\mu) = U$, salvo en un conjunto de medida de Lebesgue cero. Además μ es física.*

Demostración. Como $f\mid_\Lambda$ es topológicamente transitiva, sabemos que existe $x \in \Lambda$ tal que su órbita es densa en Λ. Tomemos esa x y consideremos $\overline{W^u_\varepsilon(x)}$ la cerradura de su variedad inestable de tamaño ε.

Consideremos $m_{\overline{W^u_\varepsilon(x)}}$ la medida de Lebesgue en $\overline{W^u_\varepsilon(x)}$. Recordemos que $f\mid_{W^u_\varepsilon(x)}$ es uniformemente expansora. Además recordemos que $f^{-n}(W^u_\varepsilon(x))$ es una (λ, ε)-bola prehiperbólica de tiempo n Por el Teorema 3.2.7 sabemos que existe una medida física, absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en $\overline{W^u_\varepsilon(x)}$, μ, donde μ es un punto de acumulación de la sucesión:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f^j_*(m_{\overline{W^u_\varepsilon(x)}}).$$

Veremos ahora que esta medida esta definida en todo el atractor y es SRB. Consideremos $y \in \Lambda$, distinto de x, y un rectángulo $\mathcal{C}(\Sigma, \varepsilon)$. Como la órbita de x es densa en Λ se tiene que existe n tal que

$$f^n(x) \in \mathcal{C}(\Sigma, \varepsilon).$$

Definimos

$$\mathcal{N}_n = \bigcup \{D_\alpha \subset \mathcal{C}(\Sigma, \varepsilon) \mid D_\alpha \subset f^n(W^u_\varepsilon(x))\}.$$

Como consecuencia del Teorema 3.1.2 se tiene que que si $D_\alpha \in \mathcal{N}_n$ se tiene que

$$d(f^{-n}(y), \partial W^u_\varepsilon(x)) \leq \varepsilon\lambda^n.$$

Definimos:

$$\hat{\mu_n}(A) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_{\mathcal{N}_i}(A)\cdot \mu_n$$

para todo $A \in \mathcal{B}(U)$. Como:

$$d(f^{-n}(y), \partial W^u_\varepsilon(x)) \leq \varepsilon\lambda^n,$$

se tiene que:

$$\mu_n(\mathcal{C}(\Sigma, \varepsilon)) - \hat{\mu}_n(\mathcal{C}(\Sigma, \varepsilon)) \to 0,$$

cuando $n \to \infty$. Ésto implica que cualquier punto de acumulación de $\hat{\mu}_n$ es μ. Así, μ está definida sobre todo el atractor y tiene medidas condicionales absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue, en las variedades inestables. Por lo tanto μ es una medida SRB.

Por la Proposición 2.2.7 se tiene que para toda $y \in U$ existe $x \in \Lambda$ tal que $y \in W^s(x)$. Por el Lema 5.1.1 se tiene que para casi toda $y \in W^s(x)$ se cumple que $\tilde{\varphi}(y) = \tilde{\varphi}(x)$. Así, hemos extendido a μ en toda la fosa de atracción de Λ.

Mostraremos que es μ es física. Sea $W^u_\varepsilon(x)$ una variedad inestable local. Notemos que:

$$\mu(\{y \in W^u_\varepsilon(x) \mid y \notin B(\mu)\}) = 0.$$

Llamemos a:

$$\{y \in W^u_\varepsilon(x) \mid y \notin B(\mu)\} = A.$$

Sea Σ_0 una transversal local. Como $\mu \ll m \mid_{W^u_\varepsilon(x)}$ se tiene que para cualquer holonomía $p : W^u_\varepsilon(x) \to \Sigma_0$ se tiene que $m_{\Sigma_0}(p(A)) = 0$. Por lo tanto

$$m(\{y \in W^u_\varepsilon(x) \mid y \notin B(\mu)\}) = 0.$$

Q.E.D.

Bibliografía

[ABV00] José F. Alves, Christian Bonatti y Marcelo Viana. SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding. *Invent. Math.*, 140(2):351–398, 2000.

[ALP05] José F. Alves, Stefano Luzzatto, y Vilton Pinheiro. Markov structures and decay of correlations for non-uniformly expanding dynamical systems. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 22(6):817–839, 2005.

[Alv00] José F. Alves. SRB measures for non-hyperbolic systems with multidimensional expansion. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 33(1):1–32, 2000.

[Alv08] José F. Alves. Physical Measures for Non-Uniformy Expanding Maps. Notas, 2008.

[Bow08] Rufus Bowen. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, volumen 470 del *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[BP02] Luis Barreira y Yakov B. Pesin. *Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*, volumen 23 de *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[BS02] Michael Brin y Garrett Stuck. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[CE06] Pierre Collet y Jean-Pierre Eckmann. *Concepts and results in chaotic dynamics: a short course*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[CV98] Charles O. Christenson y William L. Voxman. *Aspects of topology*. BCS Associates, Moscow, ID, segunda edición, 1998.

[KH95] Anatole Katok y Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Mañ83] Ricardo Mañé. *Introdução à teoria ergódica*, volumen 14 del *Projeto Euclides* . Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1983.

[Pli72] V. A. Pliss. On a conjecture of Smale. *Differencial′nye Uravnenija*, 8:268–282, 1972.

[Pol93] Mark Pollicott. *Lectures on ergodic theory and Pesin theory on compact manifolds*, volumen 180 del *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[PY98] Mark Pollicott y Michiko Yuri. *Dynamical systems and ergodic theory*, volumen 40 del *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[Rob95] Clark Robinson. *Dynamical Systems: Stability, Simbolic Dynamics, and Chaos*. CRC Press, Inc, Boca Raton, FL, 1995.

[Rud87] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, tercera edición, 1987.

[Rue76] David Ruelle. A measure associated with axiom-A attractors. *Amer. J. Math.*, 98(3):619–654, 1976.

[Sma67] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:747–817, 1967.

[Wal82] Peter Walters. *An introduction to ergodic theory*, volumen 79 del *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[Wal09] Charles Walkden. MAGIC: Ergodic Theory. Notas.

[You95] Lai-Sang Young. Ergodic theory of differentiable dynamical systems. En *Real and complex dynamical systems (Hillerød, 1993)*, volumen 464 de *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, págs. 293–336. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.

[You02] Lai-Sang Young. What are SRB measures, and which dynamical systems have them? *J. Statist. Phys.*, 108(5-6):733–754, 2002.

Índice alfabético