UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Aplicación del análisis secuencial en estudios observacionales

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A:

SUSANA HERNÁNDEZ ALQUICIRA

DIRECTOR DE TESIS:

M. EN C. INOCENCIO RAFAEL MADRID RÍOS

México, D.F., noviembre de 2009.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Susana Hernández Alquicira

FECHA: 12-noviembre-2009

FIRMA:

A mi mamá

Agradecimientos

La presente tesis fue realizada bajo la dirección académica del Maestro en Ciencias Inocencio Rafael Madrid Ríos, a quien agradezco infinitamente su entrega en forma sustancial e importante para la culminación de este trabajo la cual fue gracias a sus conocimientos relacionadas con el tema, así como, de sus consejos para mi desarrollo profesional y sobre todo, por la transmisión de su amplia experiencia.

A todas aquellas personas que explícita o implícitamente me auxiliaron para el desarrollo y comprensión de algunos temas desarrollados en este trabajo.

Así mismo, agradezco a los sinodales: Dr. Ignacio Méndez, a los M. en C. Patricia Romero y José Antonio Flores y a la Mat. Margarita Chávez Cano por sus importantes comentarios realizados sobre este trabajo, así como su valioso tiempo que invirtieron en la revisión del mismo.

A mi mamá por todo su apoyo en todo momento, a mi papá† por todos su sabios consejos.

A mis hijas, Ale y Fer por su comprensión.

Y a Federico ... por todo...

Prefacio

Este trabajo nació de la idea de elaborar un material de consulta y apoyo para el análisis y la interpretación de datos estadísticamente, cuando se realiza un muestreo de aceptación secuencial en estudios observacionales.

Así entonces, el propósito de este trabajo es mostrar un método de inferencia estadística para la resolución e interpretación de problemas estadísticos y obtener conclusiones a partir de datos muestrales.

Se consideró que la enseñanza de la estadística debe ir acompañada del cómputo como una herramienta para facilitar el análisis y la interpretación. Por ello es que, aquí se utiliza el paquete de cómputo MATHEMATICA V.5., como una herramienta para el desarrollo de programas para mostrar la aplicación de la metodología del análisis.

Este escrito será una fuente de referencia de información práctica acerca de los conceptos fundamentales y de la metodología del análisis secuencial en estudios observacionales, proporcionando información tanto de la teoría como de la práctica de la metodología y destacando la elaboración de programas para el análisis e interpretación de la información.

Para mostrar algunas aplicaciones del método, se consideraron dos tipos de poblaciones bajo estudio, la distribución binomial y la normal.

El capítulo uno trata sobre qué es el muestreo de aceptación secuencial en estudios observacionales y se compara con el muestreo para muestra fija. También se hace referencia a la cronología histórica sobre el surgimiento del análisis secuencial.

En el capítulo dos se presenta la teoría del muestreo de aceptación secuencial por atributos para el caso de la distribución binomial, así como, por variables para el caso de la normal.

Por otro lado, el paquete MATHEMATICA, es explicado en forma general, en el capítulo tres, donde se hace referencia a la programación.

En el capítulo cuatro, se comenta la aplicación del método, las cuestiones relativas a sus ventajas, así como los aspectos viables para su uso.

En el capítulo cinco se presentan las conclusiones de este trabajo.

Finalmente, en el glosario se listan los términos básicos de estadística que se van a utilizar en la metodología del análisis secuencial y durante el escrito se hace referencia a algunos de éstos realzándolos con letras negrillas.

Adicionalmente, se consideran algunos apéndices y anexos los cuales se pueden consultar en el disco compacto, complementario a este trabajo.

Índice

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Capítulo 1

Introducción

A pesar de la diversidad de metodologías de carácter cualitativo y cuantitativo para analizar datos, prevalece en las investigaciones de los años recientes el desarrollo de un enfoque común, el cual es, el del análisis secuencial.

Tradicionalmente el tipo de muestreo que se utiliza es el llamado de muestra fija, donde al determinar el tamaño de muestra n, se procede a medir la característica bajo estudio y después con todos los datos obtenidos se lleva a cabo el proceso de inferencia.

Hoy en día se sostiene que, en la toma de decisiones, la mayoría de las metodologías contemporáneas emplean una alternativa, que se conoce con el nombre de análisis secuencial, en el que se efectúan los cálculos para inferir, conforme se van recogiendo los datos y se compara el resultado obtenido hasta ese momento con dos umbrales establecidos, para aceptar o rechazar la hipótesis H_0, en este momento se termina el muestreo, en otro caso, continúa si alguna de estas dos decisiones no ocurre.

El análisis secuencial puede pensarse como un procedimiento común a la mayoría de las metodologías, sin embargo, como concepto ha crecido más allá de la interpretación de datos, proporciona las herramientas y elementos necesarios para exponer las posibilidades que éste tiene.

La aplicación inmediata del análisis secuencial está relacionado con el control de calidad en la industria, en donde los ensayos destructivos son frecuentes, en los que, la pieza que se analiza o se mide queda inservible después del proceso de observación. Sin embargo, existen otras aplicaciones en otros ámbitos como lo son en pruebas clínicas en laboratorios, estudios sociales, entre otros, donde los ensayos también son destructivos.

Actualmente los métodos secuenciales han cobrado auge, por ejemplo, en epidemiología genética y también en muchos ensayos clínicos donde se lleva a cabo en forma habitual el análisis intermedio de los datos, con el fin de determinar si los resultados obtenidos hasta ese momento hacen inaceptable, desde un punto de vista ético, la continuidad del estudio, porque se ha encontrado una diferencia de efectos inesperadamente grande o porque, por ejemplo, la tasa de efectos secundarios es anormalmente alta. En estos casos es necesario también prefijar las condiciones para suspender el estudio.

Supóngase que se está comparando un tratamiento nuevo contra un procedimiento estándar y que el resultado analizado es dicotómico, por ejemplo, el paciente se cura o no. En un ensayo secuencial se fija entonces un umbral superior para la diferencia de proporciones de curación (P_1-P_0) entre las tasas de los grupos de nuevo tratamiento y el de control, si el umbral es superado, fijando un valor para decidir si es aceptado, entonces se detiene el estudio considerando que hay ya suficiente evidencia para aceptar el nuevo tratamiento como mejor.

Así mismo, habrá un umbral inferior, donde la diferencia de proporciones sea menor a la anterior, con lo que se considerará probado que el nuevo tratamiento no es mejor y se detendrá también el estudio, por lo que habitualmente se puede llegar a una conclusión más rápidamente que en un diseño clásico con muestra fija[1]. Lo que en determinadas situaciones lo hace muy deseable ya que, por ejemplo, puede evitar a tiempo que los pacientes estén recibiendo un tratamiento que empeora su salud, o bien que cuanto antes usen el tratamiento que fue efectivo.

Otra cuestión interesante que se puede plantear es, cuál es la influencia que tiene el tamaño de la muestra en la opinión clínica general. El intervalo de confianza de la magnitud de un efecto depende de dicho tamaño y de la varianza. ¿Hasta qué punto sería recibido con escepticismo un ensayo en el que, como consecuencia de la detección de una gran diferencia en el efecto, éste se detiene a la mitad de su desarrollo cuando se llevan incluidos apenas la mitad de los pacientes previstos?. Si existiera una tendencia a sobrevalorar una gran medida de muestra como garante de evidencia de un resultado, sería necesario incluir en el cálculo de las reglas de interrupción no sólo criterios puramente estadísticos sino además otros que cuantificasen de alguna manera el peso de la evidencia necesaria para alterar la práctica clínica, sin embargo, se debe de tener bien claro que los estudios con muestras grandes sólo son necesarios para demostrar pequeños efectos ó, divergencias pequeñas en los efectos y que aunque las grandes cifras de la medida de la muestra de esos estudios impresionan, el tamaño no lo es todo, ya que en los resultados también influye la calidad y características del diseño y esto siempre es mucho más difícil de garantizar en los estudios con muestras grandes, que en estudios con pocas muestras que son mejor controlados.

[1] Donde se debe tener o saber los resultados del tamaño de muestra para realizar el análisis.

Ahora bien, en la metodología clásica de contraste de hipótesis, en su planeación, surge la pregunta ¿qué tamaño de muestra se necesita para verificar la hipótesis planteada?, para lo cual existe una diversidad de tablas o gráficas publicadas y expresiones estadísticas para su cálculo.

Uno de los problemas del contraste estadístico de hipótesis es que, por pequeña que sea una diferencia, ésta será estadísticamente significativa siempre que el tamaño de muestra sea suficientemente grande, de ahí el interés del concepto de relevancia clínica de una desigualdad observada. Dado que al investigador lo que le interesa es encontrar diversidades con una magnitud de cierta importancia práctica y dado que el costo de un estudio aumenta con la cantidad de información que se recabe, o lo que es lo mismo disminuye su viabilidad, ese orden de magnitud de la discrepancia mínima que se desea detectar permitirá acotarla lo necesario para un estudio. La declaración de principios es que se busca la menos posible, pero no tanto que no se pueda detectar una disparidad de una magnitud tal que tenga interés práctico, es decir, que si se observa un experimento se desearía tener un tamaño de muestra suficiente para poder afirmar que es estadísticamente significativa.

A diferencia de las investigaciones con muestreo fijo, con el análisis secuencial cada que se toma una muestra se mide y se analiza junto con las muestras previamente obtenidas, aplicando reglas preestablecidas para determinar si el muestreo continúa o bien el muestreo termina concluyendo con el rechazo o aceptación de H_0.

Procedimiento de **prueba de hipótesis** para el enfoque secuencial.

Para inferir se toma una primera **muestra** y se confronta la hipótesis nula H_0, si la información obtenida no es suficiente para decidir si se acepta o se rechazar H_0, entonces se concluye que es insuficiente dicho tamaño de muestra para tomar una decisión sobre H_0, por lo cual se toma una segunda muestra; se observa la información obtenida de esta última y de la anterior, de nuevo si con las observaciones realizadas no se tiene información suficiente para elegir una decisión se toma una tercera pues el resultado con dos observaciones sigue siendo incierto, se observa el resultado de una tercera muestra y las dos anteriores y nuevamente se lleva a cabo el proceso de decisión; éste continuará hasta que, por primera vez se acepte o se rechace la hipótesis H_0. Este procedimiento se puede generalizar considerando la observación m la cual es una variable aleatoria y su tamaño dependerá de la ocurrencia de las $(m-1)$ observaciones anteriores. Debe señalarse que el espacio muestral m-dimensional, Д_m, para este método de muestreo esta dado por la totalidad de las posibles muestras de tamaño m denominadas admisibles.

Una **muestra admisible de tamaño** m, se define como aquella muestra donde se puede decidir continuar o terminar el proceso de muestreo, en este último caso aceptando o rechazando el lote, siempre y cuando, en una muestra anterior $(m-1)$ no se haya terminado el proceso de muestreo. Esta definición será aplicada más adelante en el Capítulo 2.

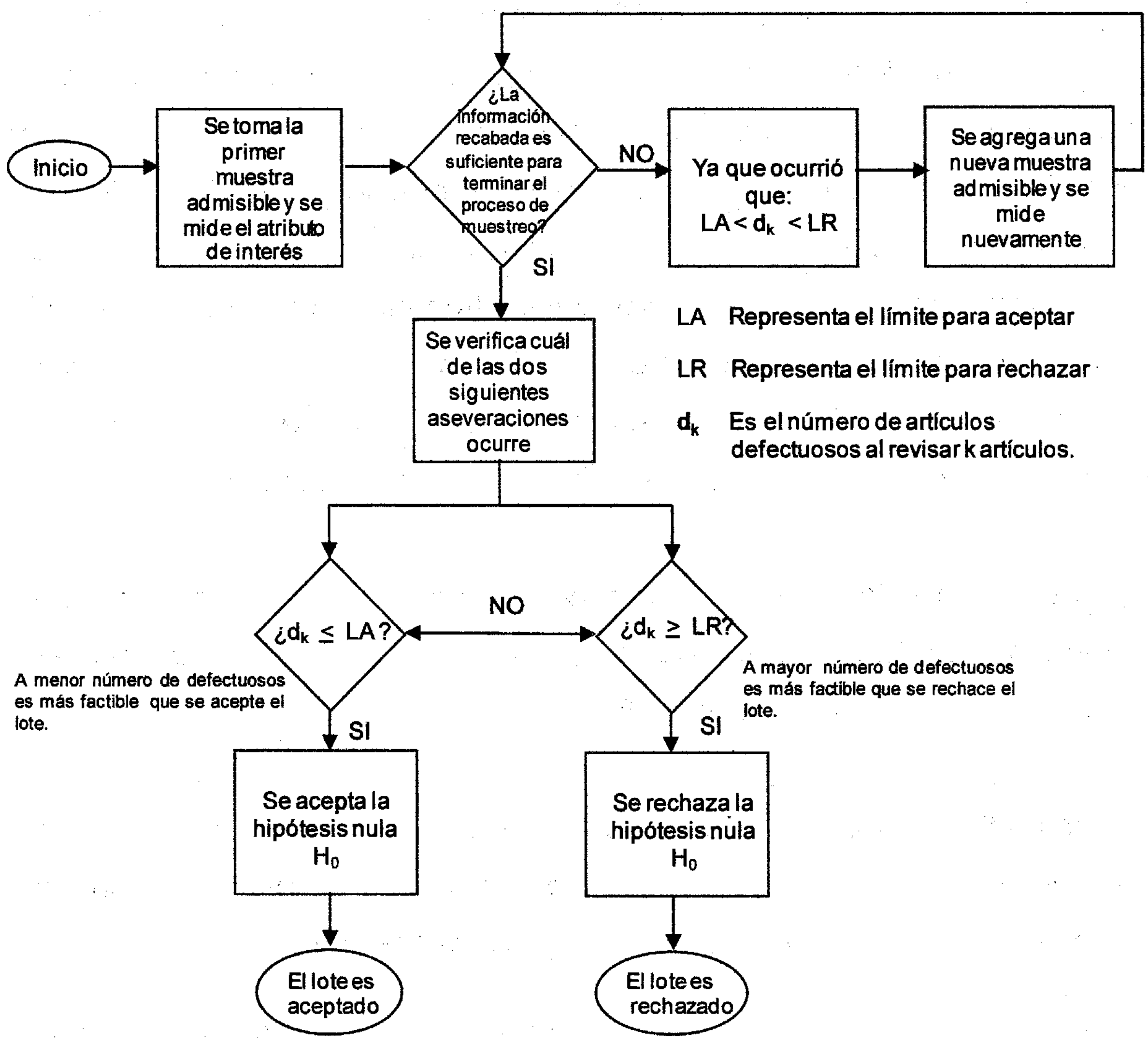
El procedimiento de análisis secuencial inicia considerando la función característica de operación de la prueba (FCOP), la que precisa la calidad de prueba de hipótesis que quiere llevarse a cabo, con lo que se procede a determinar los valores esperados de muestras requeridas con la función tamaño esperado de muestra (FTEM), para probar la hipótesis nula, H_0, en consideración y finalmente se realiza el muestreo secuencial para determinar cuándo el proceso debe terminar aceptando o rechazando la hipótesis nula H_0, al considerar las zonas de decisión.

A continuación se presenta en el Diagrama 1 un resumen del procedimiento a seguir para realizar la toma de decisiones con un muestreo de aceptación secuencial por atributos.

Diagrama 1: Procedimiento en la toma de decisiones para el muestreo de aceptación secuencial por atributos

$H_0 : P=P_0$ vs $H_1 : P=P_1$ $P_1>P_0$

: El lote es aceptado : El lote es rechazado



Nota: En control de calidad, un atributo puede ser un agregado de características que determinan que un producto o artículo se considere aceptable o no, a este último se le denomina disconforme[2], puede ser medido en forma cualitativa y/o cuantitativa, permite considerar diferentes características de calidad al mismo tiempo para determinar si es aprobado, y se concluye que es tolerable si cumple con el atributo de calidad pedido.

[2] Disconformidad: Desviación de una característica de calidad respecto del nivel o estado que se pretende, y que ocurre con una magnitud suficiente para hacer que un producto o servicio relacionado no cumpla con un requisito de especificación.

Orígenes del análisis secuencial. 1657-1943.

Los orígenes del análisis secuencial se encuentran en los trabajos de Huyghens (1657)[3], Bernoulli (1713)[4], Montmort (1714)[5], DeMoivre (1711,1756)[6], Lagrange (1770-1773)[7], y Laplace (1774,1812)[8]. Todos ellos estudiaron variaciones del problema conocido como ruina del jugador el cual consiste en que dos individuos juegan una partida en la que hay cierta probabilidad de éxito en cada tirada. Ambos comienzan con una determinada cantidad de dinero y apuestan una moneda a la vez. El juego termina cuando a uno de los competidores se le acaba el dinero. El **muestreo aleatorio** se puede considerar como una partida. La analogía de la ruina del jugador con el muestreo de aceptación secuencial se completa si se considera que el cruzar la línea de aceptación o rechazo se queda sin dinero uno u otro jugador.

El primer intento del que se tiene conocimiento de la aplicación del método secuencial fue hecho por H. F. Dodge y H. G. Romig (1929)[9] que construyeron un procedimiento de doble muestreo[10].

Walker Bartky (1943)[11] ideo un esquema de muestreo múltiple para el caso particular de la prueba sobre la proporción de una distribución binomial. Su esquema está relacionado a la prueba del procedimiento que resulta de la

[3] Huyghens, C.(1657). De Ratiociniis in Ludo Aleae. Exercitationum Mathematicarum Libre quinque, 519-534, Ed. F. van Schooten. Elsevier, Leiden.
[4] Bernoulli, J. (1713). Ars Conjetandi. Thurnisorium, Basel.
[5] Montmort, P.R. (1714). Essai d´Analyse sur les Jeux de Hazards. Second Edirion, J. Quillau, Paris.
[6] DeMoivre, A. (1711,1756). De Mensura Sortis, seu, de Probabilitae Eventuum in Ludis a casu Fortuito Pendentibus. Phil. Trans. Roy. Soc. 27, 213-264; The Doctrine of chances, Third edition, Millar London.
[7] Lagrange, J.L. (1770-1773). Mémoire sur l´utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations; dans lequel on examine les avantaje de celte méthode par le calcul des probabilités; et oú l´on résoud différens problémes relatifs á celte matiére. Miscellanea Taurinensia 5, 167-232.
[8] Laplace, P.S. (1774). Mémoire sur les suites récurro-récurrentes et su leurs usages dans la théorie des hassards. Mémoires de l´Académie royale des sciences presentés por divers savanas 6, 353-371. (1812) Théorie analytique des Probabilités. Courcier, Paris.
[9] Dodge, H.F. and Romig, H.G. (1929) A method of Sampling inspection. Bell Syst. Tech. J. 8, 613-631.
[10] Como antecedente se sabe que el muestreo secuencial es una extensión del concepto de muestreo doble o múltiple.
[11] Bartky W. (1943) Multiple sampling with constant probability. Ann. Math. Statist. 14, 363-377

aplicación de la prueba de razón de probabilidad secuencial (PRPS)[12] a un caso particular. La razón de que Dodge y Romig introdujeran su método de muestreo doble, y Bartky su esquema de muestreo múltiple fue de hecho, el reconocimiento de que ellos requerían en promedio, un número de observaciones menor que en el muestreo simple.

La práctica frecuente de diseñar experimentos en etapas sucesivas puede ser considerando como un precursor del análisis secuencial para estudios observacionales.

El procedimiento por atributos, llamado también prueba secuencial, fue desarrollado por Wald en 1943 llamado, prueba de razón de probabilidad secuencial (PRPS), propone que las observaciones requeridas para tomar una decisión sean consideradas una a una, permitiendo con ello un análisis de los resultados después de cada una de ellas.

Nacimiento del concepto. 1943-1950.

Wallis(1980)[13] y Friedman(1948)[14] tuvieron la idea de que se podría establecer un procedimiento tal que si se observa una muestra $X_1, X_2, \ldots$ sucesivamente se acepta o se rechaza H_0 o se continúa el muestreo, dependiendo de la evidencia proporcionada por los datos acumulados. Argumentaban intuitivamente que cualquier pérdida de potencia estaría compensada por la reducción en el tamaño promedio de la muestra. Se acercaron a Wald con su

[12] Término en inglés: "Sequential Probability Ratio Test" (SPRT).
[13] Wallis, A. W. (1980) The statistical research group J. Amar. Statist. Assoc. 75, 320-334
[14] Friedman, M. and Wallis, W.A. (1948) Sampling Inspection, Mc Graw Hill, New York.

idea a principios de abril de 1943. Él estaba poco entusiasmado al principio, pero después les habló para admitir que la conjetura que tenían era correcta. En un encuentro posterior explicó las reglas del nuevo procedimiento: rechazar H_0 si ocurre que, $\Lambda_m \leq k_0$, aceptar H_0 si ocurre que, $\Lambda_m \geq k_1$, de lo contrario continuar el muestreo para m=1,2,..., donde Λ_m es el cociente entre las funciones de densidad, cuando la variable es continua, correspondientes al caso en que la **hipótesis nula** sea cierta y el caso en que la **hipótesis alternativa** sea cierta y k_0 y k_1 son dos constantes adecuadamente escogidas. Así nació la PRPS; aparentemente, Hotelling[15] acuñó el término secuencial para identificar el procedimiento de Wald.

Como se verá en el desarrollo de este trabajo, el objetivo del estudio que aquí se presenta mostrará la ventaja que el método del análisis secuencial en estudios observacionales tiene sobre el uso del método tradicional de muestra fija.

[15] Hotelling, H. (1941) Experimental determination of the maximum of a function, Ann. Math. Statist. 12, 20-45.

Capítulo 2

Análisis secuencial en estudios observacionales

2.1 Muestreo de aceptación secuencial por atributos, cuando se usa la distribución binomial.

El uso de métodos estadísticos en la manufactura de productos metálicos, de madera, textiles, eléctricos, electrónicos, químicos, alimenticios, farmacéuticos, en las industrias tales como: la automotriz, la cementera, la papelera, la vidriera, la azucarera, entre otras áreas, implica el acopio de información. Los datos se recaban, resumen, reportan y almacenan para un análisis cuidadoso. Sin embargo, existe una gran diferencia entre recabar sólo información y hacerlo para inferir estadísticamente. Esto último ha producido un número enorme de herramientas analíticas que faculta comprender mejor los sistemas que generan los datos, principalmente el uso de técnicas que permiten ir más allá de sólo reportar datos sino, más bien, posibilita obtener conclusiones sobre una o varias **poblaciones**.

Se tienen dos tipos de estudios dentro de la inferencia estadística de acuerdo a como la información es obtenida: los observacionales que son tema de esta tesis y los experimentales.

Los estudios observacionales son aquellos donde el investigador sólo puede estudiar el fenómeno tal como se encuentra en la naturaleza, por lo tanto, no puede modificar a voluntad propia ninguno de los factores que intervienen en el proceso bajo estudio.

Por ejemplo: un científico silvicultor (que estudia el cultivo y conservación de los bosques) está interesado en el estudio de los factores (tales como tipo de suelo, humedad, fertilizantes, equilibrio ecológico) que influyen en la densidad de la madera en cierta clase de árbol, en este caso los datos se acopian en el campo, pero no se pueden seleccionar de antemano los niveles de los factores, y el científico está a merced de lo que pueda encontrar.

Los estudios experimentales en cambio, son aquellos en donde el investigador puede cambiar de manera sistemática los niveles de los factores que intervienen en el estudio de acuerdo con algún diseño experimental. Por ejemplo: un ingeniero puede estudiar el efecto de las condiciones de un cierto proceso, supóngase por ejemplo diversas temperaturas, humedades y cantidades de un ingrediente particular, sobre la producción de un artículo.

Claramente en este caso se puede notar que el ingeniero cambia a voluntad para sus propósitos los niveles de los factores que intervienen en el estudio.

Por otra parte, la inferencia estadística se divide en estimación y prueba de hipótesis, ésta última se trata en este trabajo y consiste en la determinación de un procedimiento de decisión que se basa en los datos para verificar la validez o falsedad de una hipótesis sobre el parámetro de alguna población.

Los estadísticos hacen uso de las leyes fundamentales de probabilidad e inferencia estadística para proponer conclusiones sobre los parámetros de las poblaciones en estudio.

En este contexto resulta natural pensar en crear procedimientos que permitan incorporar al análisis la información tan pronto como sea posible y como consecuencia de ello modificar conjeturas, criterios e incluso métodos de una manera dinámica que lleve a una eficaz caracterización de los fenómenos aprovechando adecuadamente los recursos.

Los primeros métodos estadísticos secuenciales tuvieron como intención efectuar muestreos más eficientes que los conocidos como clásicos o de muestra fija. La idea era principalmente dar una respuesta satisfactoria al siguiente problema: Si se quiere caracterizar una población a través de las propiedades de una muestra y se tiene capacidad para obtener una muestra hasta de tamaño n, ¿se deben extraer todos los n elementos? es decir, ¿no basta con sólo la información de una muestra de tamaño m donde $m<n$?. Una respuesta afirmativa a esta última pregunta implicaría una reducción en el costo del muestreo. La primera aproximación, que dio una solución parcial a este problema y cuya aplicación se ubica en problemas de control de calidad, se debe a H. F. Dodge y H. G. Romig (1929) a quienes se les reconoce como los pioneros en la aplicación del muestreo de aceptación a un problema estadístico, ellos desarrollaron el muestreo de inspección conocido como muestreo doble para probar la aceptación de lotes en control de calidad industrial, dicho procedimiento tiene por objeto obtener información sobre los productos que entran o salen de una planta y con base en ella tomar la decisión respecto a la aceptación o rechazo de dichos productos.

El muestreo de aceptación se diseñó y probó quince años antes de comenzar la II Guerra Mundial. La curva de "probabilidad de aceptación" o "**función característica de operación**"[1] como se conoce actualmente, fue la base del criterio de dicho muestreo. Conceptos tales como: el riesgo que debe asumir el fabricante o productor y el riesgo del consumidor se pueden identificar en la gráfica de dicha función. Además se perfeccionaron los programas de muestreo doble y múltiple. La producción de grandes cantidades de material con una fuerza limitada de trabajo y en un periodo sumamente corto fue la prueba de fuego a la que se enfrentó el nuevo procedimiento de control de calidad. Sin embargo, el muestreo no se aceptó de inmediato. Para la mayoría de los fabricantes representaba un cambio demasiado radical el sustituir la inspección del 100% de los artículos por la técnica de **muestreo de aceptación secuencial**. Otros la adoptaron hasta un determinado porcentaje, por ejemplo, siempre debería inspeccionarse un 10% del lote de entrada.

Al terminar la guerra, el control de calidad estadístico se perfeccionó y la técnica ya tenía numerosos adeptos. Los programas de muestreo demostraron su efectividad y llegó el momento de mejorarlos. Esto se logró con la codificación de los procedimientos militares estándares de **muestreo de aceptación por atributos**. El refinamiento del método pasó por cuatro etapas principales y culminó en 1963 con la elaboración de la norma denominada Mil-Std. 105-D. En 1971 fue adoptada por el "American National Standards Institute" como ANSI Standar Z1.4 y en 1973, salvo por pequeños cambios editoriales, fue adoptada por la "International Organization for Standarization" referida como ISO 2859.

[1] En algunas referencias bibliográficas se le encuentra como: ""Operating characteristic function". Burr[18]. Curva de operación característica (OC). Kenett [15].The operating characteristic (OC) curve". Wald [1].Curva característica de operación. Mendehall [9].

Ahora bien, en la prueba de hipótesis con el enfoque secuencial, a diferencia del enfoque clásico, el tamaño de muestra m no es fijo y tiene las siguientes características: no es una constante, no está predeterminada, depende de las ocurrencias de las observaciones anteriores y es una variable aleatoria.

La prueba de hipótesis con el enfoque secuencial considera una de las tres siguientes decisiones para cada una de las muestras efectivas admisibles útiles: detener el proceso de muestreo cuando se acepta o se rechaza la hipótesis H_0, o continuar dicho desarrollo haciendo una observación adicional lo cual puede suceder en cualquier momento del transcurso del muestreo. Cabe señalar que para este enfoque, como se refirió en la introducción, se requiere de **muestras admisibles**.

Ahora, véase un caso:

Considérese un lote con un número determinado de unidades de productos manufacturados y se quieren probar las siguientes hipótesis simples, con una proporción de artículos defectuosos, donde la distribución de la variable en este caso, se refiere a la *binomial.*

Las hipótesis se plantean como:

H_0	:	Se acepta el lote		H_1	:	Se rechaza el lote
	:	$P = P_0$	vs.		:	$P = P_1$ con $P_1 > P_0$
	:	cumple con la calidad establecida el lote			:	no cumple con la calidad establecida el lote
	:	el lote es bueno, se acepta			:	el lote no es bueno, se rechaza

Cabe hacer mención que en ningún momento se descarta la posibilidad de que el verdadero valor del parámetro, P, sea diferente a P_0 y P_1, [2]de aquí que, el espacio parametral es $\Omega = \{P \leq P_0, P > P_0\}$, $P_0=[0,1]$ es decir:

$$H_0 \;:\; P \leq P_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 \;:\; P > P_0$$

Y por otra parte existen los riesgos de α y β[3] al rechazar o aceptar H_0, respectivamente, así como un nivel de calidad aceptable, P_0, que es el máximo porcentaje de defectuosos que un productor acepta en su proceso. Y una proporción de defectuosos tolerables por lote, P_1, que es la mínima cantidad de defectuosos que un consumidor acepta.

Ahora bien, es importante señalar que, cuando se planea la investigación para llevar a cabo una prueba de hipótesis secuencial el procedimiento será el siguiente:

I. Estadísticamente lo que se busca es tener menos posibilidad de error, para ello se determina la calidad de la prueba de la hipótesis que se quiere probar, para lo cual se usa la función característica de operación de la prueba (FCOP), que se denotará como: L(P).

II. Se evalúa el costo asociado a dicha calidad, en términos del tamaño de muestra a considerar, y así, una vez determinada la calidad de la prueba, se requiere saber cuál es el costo asociado a la misma el cual se obtendrá con la función tamaño esperado de muestra (FTEM), que se denotará como: E[m/P][4].

[2] Wald [1]; Mendoza [6].
[3]Ver glosario.
[4]Término en inglés: Average Sample Number (ASN) Function.

Estos dos últimos incisos se esquematizan como sigue:

Plan de muestreo de aceptación secuencial: FCOP y FTEM

$H_0{:}P=P_0$ vs $H_1{:}P=P_1$

: Se acepta el lote : Se rechaza el lote

FCOP

$1 \leftarrow L(P)$ $\ldots L(P_0)=1-\alpha$ $L(P_1)=\beta$ $\ldots L(P)\rightarrow 0$

FTEM

$n_0 \leftarrow \ldots\, n_{P_0}$ $n_{P_1} \rightarrow \ldots n_1$

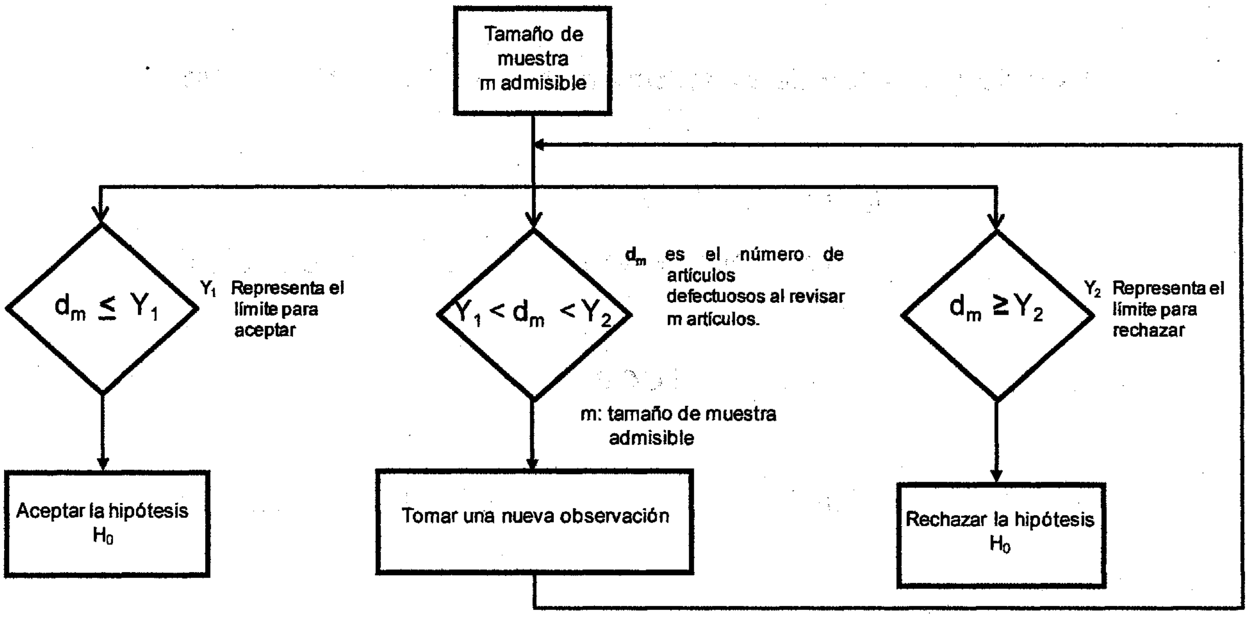
III. Finalmente se determinan las zonas de decisión, para saber si el proceso de muestreo se continúa o no.

Para la aplicación del plan de muestreo de aceptación secuencial se indican los criterios para la determinación de las zonas de decisión (DZD)[5] de acuerdo a la calidad predeterminada de la prueba de hipótesis (FCOP), y el costo asociado (FTEM), para saber cuando el muestreo secuencial continúa o bien termina considerando la aceptación o el rechazo del lote.

Lo anterior se puede ver en el siguiente Diagrama 2. Aplicación del plan de muestreo de aceptación secuencial por atributos: Determinación de las zonas de decisión.

[5] Término en inglés: acceptance and rejection regions.

Diagrama 2. Aplicación del plan de muestreo de aceptación secuencial por atributos: Determinación de las zonas de decisión



Cabe hacer hincapié que, en la práctica cuando se quiere probar la hipótesis, se procede de una manera distinta a cuando se hace la planeación. Primeramente se determinan las zonas muestrales que tengan más probabilidades para aceptar o rechazar la hipótesis H_0, o bien continuar con el proceso de muestreo, determinación de las zonas de decisión, en las cuales se considera la calidad preestablecida en la función característica de operación, destacando los riesgos α y β utilizados.

Y por último se establece el costo asociado, FTEM, en términos del tamaño de muestra de acuerdo a la calidad del lote en revisión, propicio al rechazo, a la aceptación o a la incertidumbre.

Recuérdese que se quiere probar la siguiente hipótesis unilateral derecha:

$H_0: P = P_0$ vs $H_1: P = P_1$ con $P_1 > P_0$

: Se acepta el lote : Se rechaza el lote

donde los riesgos en la toma de decisiones son:

α es el riesgo del productor al rechazar H_0 erróneamente.

β es el riesgo del consumidor al aceptar H_0 erróneamente.

Niveles de calidad:

P_0 nivel aceptable de calidad.

P_1 nivel no aceptable de calidad.

A continuación atendiendo a lo explicado arriba se detallará el procedimiento secuencial considerando la FCOP y la FTEM en la DZD.

2.1.1 Determinación de la función característica de operación de la prueba (FCOP), L(P).

Refiriéndose al caso en estudio, de productos manufacturados, y considerando que el muestreo por atributos separa las unidades defectuosas (no aceptables) de las no defectuosas (aceptables) halladas en una muestra tomada aleatoriamente de una población o lote.

Sea entonces Y una variable aleatoria *binomial* con parámetros m y P, con y el número de artículos defectuosos y $(m-y)$ los no defectuosos al revisar m de ellos, seleccionados aleatoriamente y, donde su función de distribución de probabilidad (*f.d.p.*), está dada por:

$$f_Y(y) = f_Y(y;m,P) = \begin{cases} \binom{m}{y} P^y (1-P)^{m-y} & y = 0,1,\ldots,m \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

con *P* proporción de artículos defectuosos en el lote por revisar bajo estudio.

Vale recordar que $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$ donde $X_1, X_2, \ldots, X_m$ es una muestra aleatoria de un lote bajo estudio con distribución de probabilidad $X_i \sim$ *Bernoulli*(P), en donde X_i es la medición del artículo i-ésimo para saber si es defectuoso o no y su *f.d.p.* se expresa como:

$$f_{X_i}(x_i) = f_{X_i}(x_i, P) = \begin{cases} P^{x_i}(1-P)^{1-x_i} \,; x_i = 0,1 \\ 0 \qquad\qquad e.o.c \end{cases} \quad \forall \ muestra\ i$$

donde P es la proporción desconocida de artículos defectuosos en la población.

Entonces la variable aleatoria Y, número de éxitos en m experimentos independientes *bernoulli* se distribuye como una *binomial*.

Para llevar a cabo el muestreo de aceptación se requiere determinar explícitamente la calidad de la prueba, para ello se utiliza la FCOP.

Para determinar esta función de acuerdo a la metodología que sigue Wald[1], atendiendo a la riqueza de la información que proporciona la misma, se consideran algunas generalidades de este método de prueba secuencial de hipótesis simples para valores de P distintos de P_0 y P_1. La FCOP debe definirse en función de la importancia que representa el aceptar una hipótesis cuando sea falsa y la exactitud que se pretende en la decisión final, con lo cual se procede a la selección de dos valores como representantes, P_0 y P_1 , del conjunto de puntos consistentes con la hipótesis. De aquí que se plantea una prueba auxiliar de hipótesis simple vs simple, H*, distinta de la original H, pero que permite definir dos hipótesis equivalentes para la determinación de la FCOP. Para esta prueba no se excluye que el verdadero valor del parámetro sea distinto a P_0 y P_1 de aquí que es importante conocer el comportamiento de la FCOP para pruebas de hipótesis compuestas para cualquier punto del espacio parametral que pueden ser no sólo los valores utilizados en la prueba de hipótesis simples equivalentes. Así que, tomando los resultados de Wald[1] se procede a la determinación de la FCOP para lo cual se requiere de la función $h(P)$, vale destacar que está en función de P y en particular se requiere los casos $h(P) \neq 0$ y $h(P) = 0$

Para ello, primero considérese la función $h(P)$ con las siguientes propiedades:

i) $h(P)\neq 0 \quad \forall P\in\Omega$; $Д_m=\{\underline{X}_m\}=\{(X_1,X_2,...X_m)\}$; $m=1,2,...$ espacio de muestras admisibles

ii) $E_p\left[\left\{\dfrac{f(P_0;x)}{f(P_1;x)}\right\}^{h(P)}\right]=1$; donde E_p significa valor esperado con respecto a $f(P;x)$

Como $h(P)$ está en función de P, por economía en la notación se tomará $h(P)=h$.

Por las propiedades que se tienen al considerar X como una variable aleatoria discreta

$$E_p\left[\left\{\frac{f(P_0;x)}{f(P_1;x)}\right\}^{h}\right]=\sum_{x=0}^{1}\left\{\frac{f(P_0;x_i)}{f(P_1;x_i)}\right\}^{h}f(P;x)$$

$$=\sum_{x=0}^{1}f^{*}(P;x)=1$$

ello indica que el término genérico en la suma es:

$$f^{*}(P;x)=\left\{\frac{f(P_0;x)}{f(P_1;x)}\right\}^{h}f(P;x)$$

es positivo y como la suma es igual con 1, existe una función de distribución de probabilidad para cada valor fijo de P.

Vale la pena comentar que X ~ *bernoulli donde* $\{f(P;x):\ P\in[0,1]\}$ pero se desconoce el verdadero valor de P.

Sea P un valor fijo, para calcular, la función característica de operación de la prueba, $L(P)$.

Considérese la función $h \neq 0$, supóngase $h > 0$ y considérese ahora el planteamiento de una prueba auxiliar de hipótesis simple vs simple, H*, distinta de la original H, pero que permite definir dos hipótesis equivalentes para la determinación de la FCOP.

Prueba auxiliar:	H_0*: f*(P_0;x) : Se acepta el lote	vs.	H_1: f(P_1;x) : Se rechaza el lote
Prueba original:	H_0: f(P_0;x) : Se acepta el lote	vs.	H_1: f(P_1;x) : Se rechaza el lote

H*: f*(P;x) es la verdadera función de probabilidad de X
vs.
H : f (P;x) es la verdadera función de probabilidad. de X

Una prueba secuencial definida para las constantes k_0^h y k_1^h que corresponden a la determinación de las zonas de decisión, cuyo desarrollo se verá más adelante en el apartado 2.1.3, donde $k_0 = \frac{\alpha}{1-\beta}$ y $k_1 = \frac{1-\alpha}{\beta}$, son los puntos críticos o umbrales, para aceptar o rechazar H_0 respectivamente que garantizan la calidad preestablecida de la prueba de hipótesis en consideración, tanto para cualquier tamaño de muestra admisible m requerido como para cualquier calidad del lote por revisar. Así mismo, se verá cómo se establece si el proceso de muestreo se termina o se continúa, en particular la desigualdad que se debe cumplir para continuar en la prueba auxiliar de hipótesis es:

$$k_0^h < \prod_{i=1}^{m} \frac{f^*\left(P;x_i\right)}{f\left(P;x_i\right)} < k_1^h \qquad \ldots(2.1.1.1)$$

de donde se acepta H* si:

$$\frac{f^*\left(P;x_1,\ldots,P;x_m\right)}{f\left(P;x_1,\ldots,P;x_m\right)} \geq k_1^h$$

o se acepta H si:

$$\frac{f^*\left(P;x_1,\ldots,P;x_m\right)}{f\left(P;x_1,\ldots,P;x_m\right)} \leq k_0^h$$

Pero como:

$$\frac{f^*\left(P;x\right)}{f\left(P;x\right)} = \frac{\left\{\dfrac{f\left(P_0;x\right)}{f\left(P_1;x\right)}\right\}^h f(P;x)}{f(P;x)}$$

$$= \left\{\frac{f\left(P_0;x\right)}{f\left(P_1;x\right)}\right\}^h$$

de (2.1.1.1), considerando $h > 0$ y calculando la potencia $\frac{1}{h} > 0$ en cada uno de los términos se obtiene:

$$k_0^h < \frac{f^*\left(P;x_1,\ldots,P;x_m\right)}{f\left(P;x_1,\ldots,P;x_m\right)} < k_1^h \qquad \Leftrightarrow \qquad k_0 < \frac{f\left(P_0;x_1,\ldots,P_0;x_m\right)}{f\left(P_1;x_1,\ldots,P_1;x_m\right)} < k_1$$

$$\frac{f^*(P;x_1,...,P;x_m)}{f(P;x_1,...,P;x_m)} \geq k_1^h \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(P_0;x_1,...,P_0;x_m)}{f(P_1;x_1,...,P_1;x_m)} \geq k_1$$

$$\frac{f^*(P;x_1,...,P;x_m)}{f(P;x_1,...,P;x_m)} \leq k_0^h \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(P_0;x_1,...,P_0;x_m)}{f(P_1;x_1,...,P_1;x_m)} \leq k_0$$

De donde se obtiene:

$$k_0 < \prod_{i=1}^{m} \frac{f(P_0;x_i)}{f(P_1;x_i)} < k_1$$

que se refiere a la desigualdad para continuar el muestreo en la prueba de hipótesis original, H.

Entonces la FCOP, puede calcularse del modo siguiente, considerando que:

Rechazar H_0 es equivalente a rechazar H* de la misma manera aceptar H_1 es equivalente a aceptar H.

En forma similar para el caso cuando $h < 0$, se tiene que:

$$k_0^h > \prod_{i=1}^{m} \frac{f^*(P;x_i)}{f(P;x_i)} > k_1^h \; ;$$

de donde se toma como cota inferior a k_1^h y como cota superior a k_0^h, y al hacer los cálculos, nuevamente de (2.1.1.1) se tiene:

$$k_0^h > \prod_{i=1}^{m} \frac{\left\{\frac{f(P_0;x_i)}{f(P_1;x_i)}\right\}^h f(P;x_i)}{f(P;x_i)} > k_1^h \quad \Rightarrow \quad k_1^h < \prod_{i=1}^{m} \left\{\frac{f(P_0;x)}{f(P_1;x)}\right\}^h < k_0^h;$$ calculando la potencia $\frac{1}{h} < 0$ en cada uno de los términos:

$$k_1 > \prod_{i=1}^{m} \frac{f(P_0;x_i)}{f(P_1;x_i)} > k_0$$

Por lo tanto para $h > 0$ y $h < 0$:

$$k_0 < \prod_{i=1}^{m} \left\{\frac{f(P_0;x_i)}{f(P_1;x_i)}\right\} < k_1 \qquad \forall\ h \in \mathbb{R} - \{0\} \qquad \text{... (2.1.1.2)}$$

que como se puede ver se refiere a la misma desigualdad para continuar el muestreo, en la prueba de hipótesis original.

Entonces la FCOP, puede calcularse de la siguiente forma:

Sea $L(P_1) = \Pr(\text{aceptar } H_0 / P_1) = \Pr(\text{aceptar } H^*/H) = \beta^* \doteq \beta$

$L(P_0) = \Pr(\text{aceptar } H_0 / P_0) = \Pr(\text{aceptar } H^*/H^*) = 1-\alpha^* \doteq 1-\alpha$

donde las probabilidades de errores de tipo I y II, α^*y β^* respectivamente, son para la prueba de hipótesis auxiliar equivalente, considerada para este cálculo.

Ya que $k_0^h = \dfrac{\alpha^*}{1-\beta^*}$ y $k_1^h = \dfrac{1-\alpha^*}{\beta^*}$

despejando de cada igualdad a α*:

$$\left(1-\beta^*\right)k_0^h=\alpha^*;\quad \beta^* k_1^h=1-\alpha^* \quad \Rightarrow \quad \alpha^*=1-\beta^* k_1^h$$

igualando las dos expresiones de α* y factorizando se obtiene $L(P)$, como a continuación se indica:

$$\beta^*\left[k_1^h-k_0^h\right]=1-k_0^h \Rightarrow \beta^*=\frac{1-k_0^h}{k_1^h-k_0^h}=L(P)=\beta$$

∴ si $h\neq 0$, la FCOP evaluada en P queda como:

$$L(P)=\frac{1-k_0^h}{k_1^h-k_0^h} \qquad \text{... (2.1.1.3)}$$

donde

$$k_0=\frac{\alpha}{1-\beta} \quad \text{y} \quad k_0=\frac{1-\alpha}{\beta}$$

Por otro lado para el caso de $h=0$, $L(P)$ en (2.1.1.3) está indeterminada, entonces para obtener $L(P)$ se recurre a la aplicación de la Regla de L´Hôpital[6] (que sirve para encontrar el límite de una función racional cuyo numerador y denominador tienden a cero en un punto) considerando las siguientes transformaciones:

Sean $Y_0=k_0^h$; $Y_1=k_1^h$ sustituyendo en (2.1.1.3)

[6] Ver libro de Calculus Vol. 1; Tom M. Apostol; 2ª. Edición; Editorial Reverté; España; 2000; pp. 357-362,

$$L(P)=\frac{1-k_0^h}{k_1^h-k_0^h}=\frac{1-Y_0}{Y_1-Y_0}$$

por la Regla de L´Hôpital se tiene

$$L(P)=\frac{1-Y_0'}{Y_1'-Y_0'}$$

Aplicando logaritmo natural a $Y_0=k_0^h$ se tiene $\ln[Y_0]=h\ln[k_0]$ de donde, despejando h queda:

$$h=\left(\frac{\ln[Y_0]}{\ln[k_0]}\right)$$

De igual forma para $Y_1=k_1^h$ se tiene $\ln[Y_1]=h\ln[k_1]$ y

$$h=\left(\frac{\ln[Y_1]}{\ln[k_1]}\right)$$

Ahora bien, considerando la derivada en las expresiones obtenidas:

$$h'=\left(\frac{\ln[Y_0]}{\ln[k_0]}\right)'=\frac{1}{\ln[k_0]}\frac{Y_0'}{Y_0}\Rightarrow Y_0'=\ln[k_0]Y_0h'$$

$$h'=\left(\frac{\ln[Y_1]}{\ln[k_1]}\right)'=\frac{1}{\ln[k_1]}\frac{Y_1'}{Y_1}\Rightarrow Y_1'=\ln[k_1]Y_1h'$$

Continuando

$$L(P)=\frac{-\ln[k_0]Y_0h'}{\ln[k_1]Y_1h'-\ln[k_0]Y_0h'}=\frac{-\ln[k_0]Y_0}{\ln[k_1]Y_1-\ln[k_0]Y_0}$$

como $h=0$ se tiene que $\quad Y_0=k_0^0=1$; $\quad Y_1=k_1^0=1$

de donde se obtiene para $h=0$:

$$L(P)=\frac{-\ln[k_0]}{\ln[k_1]-\ln[k_0]} \qquad \text{...(2.1.1.4)}$$

Entonces, al considerar las expresiones (2.1.1.3) y (2.1.1.4) es claro que, para valores particulares de h se puede obtener la FCOP.

Pero, para saber qué valor de P le corresponde a cada h, (y cuál de P le corresponde a la FCOP) se requiere conocer la relación entre P y h.

Considérese $h\neq 0$.

Para determinar esa relación, recuérdese que $E_p\left[\left\{\frac{f(P_0;x)}{f(P_1;x)}\right\}^h\right]=1$

Sea: $f(P_0,x)=P_0^x(1-P_0)^{1-x}$ y $f(P_1,x)=P_1^x(1-P_1)^{1-x}$

entonces:

$$E_p\left[\left\{\frac{f(P_0,x)}{f(P_1,x)}\right\}^h\right]=E\left[\left(\frac{P_0^x(1-P_0)^{1-x}}{P_1^x(1-P_1)^{1-x}}\right)^h\right]=E\left[\left(\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^x\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^{1-x}\right)^h\right]=1$$

Por una parte se tiene para x=0:

$$\left(\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^x\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^{1-x}\right)^h=\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^h$$

Y para x=1:

$$\left(\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^x\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^{1-x}\right)^h=\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^h$$

como:

$$E\left[\left(\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^x\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^{1-x}\right)^h\right]=1$$

entonces

$$\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^h(1-P)+\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^h P=1$$

$$\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^h-\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^h P+\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^h P=1$$

factorizando:

$$P\left[\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^h-\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^h\right]+\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^h=1$$

$$P\left[\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^h - \left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^h\right] = 1 - \left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^h$$

despejando a P se obtiene la siguiente relación entre P y h, para $h \neq 0$

$$P = \frac{1-\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^h}{\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^h - \left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^h} \qquad \text{...(2.1.1.5)}$$

Para $h = 0$ el cociente, en esta última expresión, está indeterminado por ello se utilizará la Regla de L´Hôpital para hallar la solución.

Sea $r_0 = \left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^h$ y $r_1 = \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^h$

Sustituyendo r_0 y r_1 en (2.1.1.5) se tiene:

$$P = \frac{1-r_0}{r_1 - r_0}$$

Aplicando la Regla de L´Hôpital

$$\Rightarrow \qquad P = \frac{(1-r_0)'}{(r_1-r_0)'} = \frac{-r_0'}{r_1' - r_0'} \qquad \text{...(2.1.1.6)}$$

Aplicando logaritmo natural a $r_0 = \left(\frac{1-P_0}{1-P_1} \right)^h$

$$\Rightarrow \qquad \ln[r_0] = h \ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right] \Rightarrow h = \frac{\ln[r_0]}{\ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right]}$$

Considerando la derivada:

$$\Rightarrow \qquad h' = \frac{r_0'}{\ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right] r_0} \qquad \text{...(2.1.1.7)}$$

Se procede de igual forma para r_1:

Aplicando logaritmo natural a $r_1 = \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^h$

$$\Rightarrow \qquad \ln[r_1] = h \ln\left[\frac{P_0}{P_1}\right] \Rightarrow h = \frac{\ln[r_1]}{\ln\left[\frac{P_0}{P_1}\right]}$$

Derivando:

$$\Rightarrow \qquad h' = \frac{r_1'}{\ln\left[\frac{P_0}{P_1}\right] r_1} \qquad \text{...(2.1.1.8)}$$

De (2.1.1.7) y (2.1.1.8) se tiene que:

$$r_0' = h'\ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right]r_0 \qquad\qquad r_1' = h'\ln\left[\frac{P_0}{P_1}\right]r_1$$

Sustituyendo en (2.1.1.6):

$$P = \frac{-h'\ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right]r_0}{h'\ln\left[\frac{P_0}{P_1}\right]r_1 - h'\ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right]r_0} = \frac{-h'\left[\ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right]r_0\right]}{h'\left[\ln\left[\frac{P_0}{P_1}\right]r_1 - \ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right]r_0\right]}$$

$\Rightarrow$

$$P = \frac{-\ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right]r_0}{\ln\left[\frac{P_0}{P_1}\right]r_1 - \ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right]r_0}$$

De donde: $r_0 = \left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^h$ y $r_1 = \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^h$ con $h=0 \;\Rightarrow\; r_0 = 1$ y $r_1 = 1$

por lo tanto, para $h=0$ se obtiene la siguiente relación entre P y h,

$$P = \frac{-\ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right]}{\ln\left[\frac{P_0}{P_1}\right] - \ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right]} \qquad \text{...(2.1.1.9)}$$

Así entonces el procedimiento que se sigue para calcular $L(P)$:

Para un valor de h determinado, se calcula $L(P)$, sin embargo, como no se sabe a qué valor de P corresponde $L(P)$, se obtienen las relaciones entre P y h para un valor de h.

Una vez considerada la relación entre h y P se calcula la $L(P)$, considerando h para el cálculo y P como el punto donde se está evaluando la probabilidad de aceptación.
Continuando con la planeación de la investigación en cuestión, para llevar a cabo la prueba de hipótesis secuencial, una vez que se ha determinado la calidad de la prueba de la hipótesis con la FCOP se determinará ahora el costo asociado a la misma, lo cual se obtendrá mediante la FTEM.

2.1.2 Determinación de la función tamaño esperado de muestra (FTEM).

Para la determinación de la FTEM, considérese las siguientes hipótesis subsidiarias[7]:

Sea m una variable aleatoria que se refiere al tamaño de muestra admisible requerido que cumple lo siguiente:

i. La probabilidad de que $m=\infty$ es cero. $\mathrm{P}(m=\infty)=0$.

ii. Los umbrales para m, que determinará el rechazo o la aceptación de H_0 son una buena aproximación a los valores que toma el cociente de probabilidades, cuando termina el proceso de muestreo.

Sea n un entero fijo, de una muestra admisible, donde termina el proceso de muestreo, tal que $\mathrm{P}(m<n)\doteq 0$, es decir supóngase $(m<n)$ (que el entero n exista, lo garantiza la hipótesis subsidiaria i)

Entones se puede escribir:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = z_1+z_2+\ldots+z_n = \left[z_1+z_2+\ldots+z_m\right]+\left[z_{m+1}+z_{m+2}+\ldots+z_n\right]$$

donde $z_i=\ln\left[\dfrac{f(P_0;x_i)}{f(P_1;x_i)}\right]$ i=1,2,... m y

[7] Suposiciones auxiliares que se formulan dentro de una teoría verdadera.

como $z_1, z_2, \ldots, z_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas al calcular el valor esperado se tiene :

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} z_i\right] = E\left[\sum_{i=1}^{m} z_i + \sum_{i=m+1}^{n} z_i\right] = E\left[\sum_{i=1}^{m} z_i\right] + E\left[\sum_{i=m+1}^{n} z_i\right] \qquad \ldots(2.1.2.1)$$

$$\Rightarrow \qquad nE[z] = E[z_1 + z_2 + \ldots + z_m] + \mathrm{E}[z_{m+1} + z_{m+2} + \ldots + z_n] \qquad \ldots(2.1.2.2)$$

En el segundo término de ésta última igualdad, $\mathrm{E}[z_{m+1} + z_{m+2} + \ldots + z_n]$, el número de términos en la suma es aleatorio, pues depende de m que es aleatorio.

Y ya que la esperanza incondicional es igual a la esperanza incondicional de una esperanza condicional[8] se tiene que:

$$\mathrm{E}[z_{m+1} + z_{m+2} + \ldots + z_n] = E_m E_{z/m}[z_{m+1} + z_{m+2} + \ldots + z_n]$$

Dado que la muestra es aleatoria, entonces,

$$E[z_{m+1} + z_{m+2} + \ldots + z_n] = E_m E[(n-m)z] = E_m[(n-m)E[z]]$$

Al resolver el valor esperado para las variables aleatorias m y z se requiere de la esperanza condicional.

$$\mathrm{E}[z_{m+1} + z_{m+2} + \ldots + z_n] = E_m\left[\sum_{i=m+1}^{n} E_{z/m}[z_i]\right] = E_m[(n-m)E_{z/m}[z]]$$

[8] García Álvarez Miguel Ángel, Introducción a la Teoría de la Probabilidad, Segundo Curso, Fondo de Cultura Económica, México 2005, Capítulo IV. Esperanzas Condicionadas.

puesto que la prueba ya terminó, entonces:

$$E\left[\sum_{i=m+1}^{n} z_i\right] = E_m\left[(n-m)E_z[z]\right] = \left(E_m(n) - E_m[m]\right)E_m\left(E_z[z]\right) = E_m(n)E_z[z] - E_m[m]E_z[z]$$

$$= \left(E_m(n)E_m\left(E_z[z]\right) - E_m[m]E_m\left(E_z[z]\right)\right) = nE_m\left(E_z[z]\right) - E_m[m]E_m\left(E_z[z]\right)$$

como n es fijo

$$E\left[\sum_{i=m+1}^{n} z_i\right] = nE_z[z] - E_m[m]E_z[z]$$

sustituyendo esta expresión en el segundo término de (2.1.2.1):

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} z_i\right] = E\left[\sum_{i=1}^{m} z_i\right] + nE_z[z] - E_m[m]E_z[z]$$

$$nE[z] = E\left[\sum_{i=1}^{m} z_i\right] + nE_z[z] - E_m[m]E_z[z]$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{m} z_i\right] - E_m[m]E_z[z] = 0$$

$$\Rightarrow \qquad E_m[m] = \frac{E\left[\sum_{i=1}^{m} z_i\right]}{E_z[z]}$$

$$\therefore \qquad E_m[m] = \frac{\mathrm{E}\left[z_1 + z_2 + \ldots + z_m\right]}{E[z]}$$

siempre que $E[z] \neq 0$ y donde z es cualquier z_i.

Ahora $z_1+z_2+...+z_m$ es la suma de los logaritmos de los cocientes al momento de terminar la prueba de hipótesis. Haciendo uso de la hipótesis subsidiaria ii se tiene que:

$$\mathrm{E}[z_1+z_2+...+z_m] \doteq \ln[k_0]\Pr[\text{Rechazar } \mathrm{H}_0 / \mathrm{P}]+\ln[k_1]\Pr[\text{Aceptar } \mathrm{H}_0 / \mathrm{P}]$$

$$\doteq \ln[k_0](1\text{-}L(P))+\ln[k_1](L(P))$$

Tomando como resultado que en la PRPS de Wald el proceso de muestreo termina cuando ocurre que:

$\ln\Lambda_m=z_1+z_2+...+z_m \leq \ln[k_0]$ rechazando H_0,

de donde $z_1+z_2+...+z_m$ es próximo a $\ln[k_0]$

o bien si ocurre que :

$\ln\Lambda_m=z_1+z_2+...+z_m \leq \ln[k_1]$ aceptando H_0

de donde $z_1+z_2+...+z_m$ es próximo a $\ln[k_1]$ y por la hipótesis subsidiaria ii al tomar las igualdades con los umbrales, no se altera de manera sensible $\ln\Lambda_m = \sum_{i=1}^{m} z_i$

Así entonces se considera la aproximación adecuada por lo que:

$$\mathrm{E}[z_1+z_2+...+z_m] = \ln[k_0][1-L(P)]+\ln[k_1][L(P)]$$

donde

$$k_0 = \frac{\alpha}{1-\beta} \qquad \text{y} \qquad k_1 = \frac{1-\alpha}{\beta}$$

Es importante considerar que, los puntos de la FTEM se refiere a los distintos valores de P que pueden ocurrir al muestrear un lote en particular.

Así entonces, para el cálculo de la FTEM al considerar lo anterior se tiene que:

$$\mathrm{E}[m/P] \doteq \frac{E[\ln\Lambda_m / P]}{\mathrm{E}[z/P]} = \frac{E[z_1 + ... + z_m / P]}{\mathrm{E}[z/P]} \qquad ...(2.1.2.3)$$

Para el numerador:

Suponiendo H_0 cierta se tiene:

$$\mathrm{E}[\ln\Lambda_m / \mathrm{P}_0] = \ln[k_0]\Pr[\text{Rechazar } \mathrm{H}_0 / \mathrm{P}_0] + \ln[k_1]\Pr[\text{Aceptar } \mathrm{H}_0 / \mathrm{P}_0]$$

$$= \ln[k_0](1\text{-}\mathrm{L}(\mathrm{P}_0)) + \ln[k_1]\mathrm{L}(\mathrm{P}_0)$$

$$= \ln[k_0](\alpha) + \ln[k_1](1-\alpha)$$

Y suponiendo H_1 cierta se tiene:

$$\mathrm{E}[\ln\Lambda_m / \mathrm{P}_1] = \ln[k_0]\Pr[\text{Rechazar } \mathrm{H}_0 / \mathrm{P}_1] + \ln[k_1]\Pr[\text{Aceptar } \mathrm{H}_0 / \mathrm{P}_1]$$

$$= \ln[k_0](1\text{-}\mathrm{L}(\mathrm{P}_1)) + \ln[k_1]\mathrm{L}(\mathrm{P}_1)$$

$$= \ln[k_0](1-\beta) + \ln[k_1](\beta)$$

Y para el denominador, recuérdese que como:

$$\Lambda_m = \frac{L(P_0;X_1,X_2,...,X_m)}{L(P_1;X_1,X_2,...,X_m)} = \frac{f(P_0;\dot{X}_1),f(P_0;X_2),...,f(P_0;X_m)}{f(P_1;X_1),f(P_1;X_2),...,f(P_1;X_m)} = \prod_{i=1}^{m} \frac{P_0^{x_i}(1-P_0)^{1-x_i}}{P_1^{x_i}(1-P_1)^{1-x_i}}$$

$$\Lambda_m = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{x_i} \left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^{1-x_i}$$

Aplicando logaritmo natural:

$$\ln \Lambda_m = \sum_{i=1}^{m} \ln\left[\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{x_i} \left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^{1-x_i}\right]$$

Si

$$z_i = \ln\left[\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{x_i} \left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^{1-x_i}\right]$$

entonces

$$\ln \Lambda_m = \sum_{i=1}^{m} z_i$$

además como:

$$z_i = (x_i)\ln\left[\frac{P_0}{P_1}\right] + (1-x_i)\ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right] = \ln\left[\frac{P_0}{P_1}\right](x_i) + \ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right](1-x_i)$$

por lo tanto:

$$E[z_i / P] = \ln\left[\frac{P_0}{P_1}\right] E[x_i] + \ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right] E[1-x_i]$$

Como X∽*Bernoulli* (P), entonces se tiene que:

$$E[z / P] = \ln\left[\frac{P_0}{P_1}\right] P + \ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right](1-P)$$

por lo tanto si $P = P_0$, es decir H_0 cierta:

$$E[z / P_0] = \ln\left[\frac{P_0}{P_1}\right] P_0 + \ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right](1-P_0)$$

Y para $P=P_1$, es decir H_1 cierta

$$E[z / P_1] = \ln\left[\frac{P_0}{P_1}\right] P_1 + \ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right](1-P_1)$$

Ahora, retomándose a las expresiones anteriores y sustituyendo en (2.1.2.3) para $P = P_0$ y $P = P_1$

Si (H_0: $P = P_0$) cierta:

$$E[m / P_0] = \frac{\ln[k_1](1-\alpha) + \ln[k_0](\alpha)}{\ln\left[\frac{P_0}{P_1}\right] P_0 + \ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right](1-P_0)} \qquad \text{... (2.1.2.4)}$$

Si (H_1: $P = P_1$) cierta:

$$E[m/P_1] = \frac{\ln[k_1](\beta) + \ln[k_0](1-\beta)}{\ln\left[\frac{P_0}{P_1}\right]P_1 + \ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right](1-P_1)} \qquad ...(2.1.2.5)$$

De donde para el caso general se tiene:

$$E[m/P] \doteq \frac{\ln[k_1]L(P) + \ln[k_0](1-L(P))}{\ln\left[\frac{P_0}{P_1}\right]P + \ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right](1-P)} \qquad ...(2.1.2.6)$$

donde $P = 0 \ldots, P_0, \ldots, P_1, \ldots 1$

Una vez establecido el plan de muestreo a través de la determinación de $L(P)$ y la FTEM, se procede a su aplicación, lo cual se considera con la determinación de las zonas de decisión.

2.1.3 Determinación de las zonas de decisión (DZD).

Considerando el tipo de muestras que se usan en el Enfoque Secuencial:

Sea $\text{Д}_m = \{\underline{X}_m\} = \{(X_1, X_2, ... X_m)\}$; $m = 1, 2, ...$ espacio muestral de tamaño m admisible, si con la muestra m se puede tomar la decisión de parar o continuar el proceso de muestreo, siempre y cuando en una más chica no se haya terminado.

Una regla para tomar una de las tres decisiones en cualquier momento del proceso de muestreo es a partir de las muestras admisibles, sea de tamaño m, de la siguiente forma:

Para cada valor entero m, el espacio de muestras admisibles Д_m será dividido en tres subconjuntos Д_m^0, Д_m^1 y Д_m mutuamente excluyentes y exhaustivos, es decir:

$$\text{Д}_m = \{\underline{X}_m\} = \{(X_1, X_2, ... X_m)\} = \text{Д}_m \cup \left(\text{Д}_m^0 \cup \text{Д}_m^1\right)$$

Las muestras que sirven para tomar una de las tres decisiones en el muestreo secuencial, siempre deben ser admisibles.

Así entonces se puede tomar la decisión de terminar el muestreo con muestras de al menos de tamaño m de la siguiente forma:

Primera decisión:

Si $(X_1, X_2, ... X_m) \in Д_m^0$ termina el proceso de muestreo, aceptando la hipótesis H_0 (se rechaza H_1).

Segunda decisión:

Si $((X_1, X_2, ... X_m) \in Д_m^1$ termina el proceso de muestreo, rechazando la hipótesis H_0 (se acepta H_1).

Tercera decisión:

Si $((X_1, X_2, ... X_m) \in Д_m$ continúa el proceso de muestreo, se toma una nueva muestra (la muestra $m+1$).

Las muestras admisibles serán de utilidad para continuar o bien para, terminar el proceso de muestreo en cuyo caso se acepta H_0 o se acepta H_1.

Continuando con el problema original de probar las hipótesis:

H_0: P = P_0 vs H_1: P = P_1 con $P_1 > P_0$

:Se acepta el lote :Se rechaza el lote

Basándose en el resultado del teorema de Neyman-Pearson[9], se tiene:

$$\Lambda_m = \frac{L(P_0; X_1, X_2, ..., X_m)}{L(P_1; X_1, X_2, ..., X_m)} = \frac{f(P_0; X_1), f(P_0; X_2), ..., f(P_0; X_m)}{f(P_1; X_1), f(P_1; X_2), ..., f(P_1; X_m)} = \prod_{i=1}^{m} \frac{f(P_0; X_i)}{f(P_1; X_i)}$$

9 Ver Introduction to the Theory of Statistics; Third Edition; M. Mood Alexander; A. Graybill Franklin;, Mc Graw Hill;Boston, Massachusetts burr Ridge, Illinois; 1974, pp 411-414 .

Aplicando el logaritmo natural:

$$\ln \Lambda_m = \sum_{i=1}^{m} \ln \frac{f(P_0;X_i)}{f(P_1;X_i)}$$

de donde si

$$z_i = \ln \frac{f(P_0;X_i)}{f(P_1;X_i)}$$

entonces

$$\ln \Lambda_m = \sum_{i=1}^{m} z_i \qquad \text{para i=1,2,...,m}$$

El proceso de muestreo continúa si:

$$k_0 < \Lambda_m < k_1 \qquad \text{...(2.1.3.1)}$$

sea k_0 y k_1 los valores críticos o umbrales, donde $0 < k_0 < 1$; $k_1 > k_0$;

¿ pero cómo se obtienen estas constantes críticas?, véase:

k_0 y k_1 son constantes positivas y corresponden a los umbrales para aceptar o rechazar H1, respectivamente, las cuales están relacionadas directamente con los riesgos α y β para la toma de decisiones, con lo que se puede ver que los umbrales serán más extremos cuando se consideran los tamaños de error pequeños y serán menos excesivos cuando sean más grandes, esto es así ya que las cotas o umbrales que se tienen para determinar la aceptación o el rechazo de H_0 equivocadamente consideran la magnitud de los riesgos α y β correspondientes, véase Anexo 1.

Considérese $Д_m = \{\underline{X}_m\} = \{(X_1, X_2, ... X_m)\} = Д_m \cup (Д_m^0 \cup Д_m^1)$ y la función característica de operación de la prueba (FCOP), $L(P)$, que se refiere a la probabilidad de aceptar H_0 en los valores que pueda tomar P, en particular cuando es evaluada en P_0 y P_1 se tiene:

$L(P_0) =$ Pr(aceptar $H_0 / P = P_0$)

=Pr(aceptar H_0/H_0 Cierta)=1-Pr(rechazar H_0/H_0 Cierta)= $1-\alpha$

$L(P_1) =$ Pr(aceptar $H_0 / P = P_1$)=Pr(aceptar H_0/H_1 Cierta)

=Pr(aceptar H_0/H_0 Falsa)= β

Donde la FCOP, es la que se utiliza en la industria y está definida como el indicador del comportamiento de la prueba con respecto a los posibles errores y aciertos que se puedan cometer al tomar la decisión final de aceptar H_0.

Considerando $Д_m^1$ que define la zona de aceptación de H_1 (rechazo de H_0). En particular cuando la variable es de tipo discreto (para variable continua el desarrollo es el mismo), entonces:

Pr(aceptar H_1) = Pr(rechazar H_0)

que puede escribirse equivalentemente como:

Pr(aceptar H_1/P_0)=1-Pr(aceptar H_0/P_0) $=1-L(P_0)$=1-(1-α)

$$=\text{Pr(rechazar } H_0/P_0)=\alpha=\sum_{m=1}^{\infty}\sum\nolimits_{A_m^1} L(P_0;\underline{x}_m) \qquad ...(2.1.3.2)$$

Pr(aceptar H_1/P_1) = 1-Pr(aceptar H_0/P_1)= $1-L(P_1)$

$$= \text{Pr(rechazar } H_1/P_1)=1-\beta=\sum_{m=1}^{\infty}\sum\nolimits_{A_m^1} L(P_1;\underline{x}_m) \qquad ...(2.1.3.3)$$

De igual forma para $Д_m^0$ se tiene que la Pr(aceptar H_0)=Pr(rechazar H_1) puede expresarse equivalentemente como:

Pr(aceptar H_0/P_0)=$L(P_0)$=1-α

= Pr(rechazar H_1/P_0)

$$=1-\text{Pr(rechazar } H_0/P_0)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum\nolimits_{A_m^0} L(P_0;\underline{x}_m) \qquad ...(2.1.3.4)$$

Pr(aceptar H_0/P_1) =$L(P_1)$ = β

=Pr(rechazar H_1/P_1)

$$=1-\text{Pr(rechazar } H_0/P_1)=1-(1-\beta)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum\nolimits_{A_m^0} L(P_1;\underline{x}_m) \qquad ...(2.1.3.5)$$

Tomando en cuenta lo anterior se tiene que:

Por un lado se rechaza H_0 o se acepta H_1 cuando $\underline{x}_m \in Д_m^1$, es decir es una muestra la cual permite decidir la aceptación o el rechazo, o bien si $\Lambda_m = \dfrac{L(P_0;\underline{x}_m)}{L(P_1;\underline{x}_m)} \le k_0$

$\Rightarrow L(P_0;\underline{x}_m) \leq k_0 L(P_1;\underline{x}_m)$; es claro que: por (2.1.3.4) y (2.1.3.5)

Pr(rechazar H_0/P_0)$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{A_m^1} L(P_0;\underline{x}_m) \leq k_0$ Pr(rechazar H_0/P_1) $=k_0\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{A_m^1} L(P_1;\underline{x}_m)$

$\Rightarrow$ $$\alpha \leq k_0(1-\beta)$$

$\therefore$ $$\frac{\alpha}{1-\beta} \leq k_0$$

y por otro lado se acepta H_0 (o se rechaza H_1) cuando: $\underline{x}_m \in Д_m^0$ (o bien si $\Lambda_m \geq k_1$)

equivalentemente

$$L(P_0;\underline{x}_m) \geq k_1 L(P_1;\underline{x}_m)$$

entonces por (2.1.3.4) y (2.1.3.5) se tiene que

Pr(aceptar H_0/P_0)$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{A_m^0} L(P_0;\underline{x}_m) \geq k_1$ Pr(aceptar H_0/P_1) $=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{A_m^0} L(P_1;\underline{x}_m)$

$\Rightarrow$ $$1-\alpha \geq k_1\beta$$

$\therefore$ $$\frac{1-\alpha}{\beta} \geq k_1$$

De lo anterior

$$0<\alpha,\beta<1; \quad k_0,k_1>0; \quad k_1>k_0$$

$$k_0 \geq \frac{\alpha}{1-\beta} \quad \text{y} \quad k_1 \leq \frac{1-\alpha}{\beta}$$

Ahora bien considérese α_a y β_a como valores preasignados a k_0 y k_1 (algunos valores típicos son 0.01, 0.05, 0.10) entonces:

$$k_0 = \frac{\alpha_a}{1-\beta_a}, \qquad k_1 = \frac{1-\alpha_a}{\beta_a}$$

sustituyendo estos valores en las desigualdades anteriores, se tiene que:

$$\frac{\alpha}{1-\beta} \leq \frac{\alpha_a}{1-\beta_a} \; ; \qquad \frac{1-\alpha_a}{\beta_a} \leq \frac{1-\alpha}{\beta}$$

equivalentemente:

$$\alpha(1-\beta_a) \leq \alpha_a(1-\beta) \; ; \qquad (1-\alpha_a)\beta \leq (1-\alpha)\beta_a$$

$$\alpha - \alpha\beta_a \leq \alpha_a - \alpha_a\beta \; ; \qquad \beta - \alpha_a\beta \leq \beta_a - \alpha\beta_a$$

sumando los términos miembro a miembro de las dos desigualdades anteriores se tiene:

$$\alpha - \alpha\beta_a + \beta - \alpha_a\beta \leq \alpha_a - \alpha_a\beta + \beta_a - \alpha\beta_a$$

Lo cual da

$$\alpha + \beta \leq \alpha_a + \beta_a$$

es decir, la suma de las probabilidades de los dos tipos de errores está acotada por la suma de $\alpha_a + \beta_a$ de los valores preasignados.

Nótese que:

Para $\frac{\alpha}{1-\beta} \leq k_0 = \frac{\alpha_a}{1-\beta_a}$

como $\alpha < \frac{\alpha}{1-\beta}$ ya que $0 < 1-\beta < 1$ entonces $\alpha < \frac{\alpha}{1-\beta} \doteq \alpha(1+\beta)$, esto indica que α no es mayor que $\alpha(1+\beta)$ o bien que α no es mayor que un factor $(1+\beta)$.

Por lo tanto

$$\alpha < \frac{\alpha}{1-\beta} \leq \frac{\alpha_a}{1-\beta_a} \doteq \alpha_a(1+\beta_a),$$

entonces α no es mayor que un factor $(1+\beta_a)$

Para $\frac{1-\alpha_a}{\beta_a} = k_1 \leq \frac{1-\alpha}{\beta} \Rightarrow \frac{\beta_a}{1-\alpha_a} \geq \frac{\beta}{1-\alpha} \Rightarrow \frac{\beta}{1-\alpha} \leq \frac{\beta_a}{1-\alpha_a}$

como $\beta < \frac{\beta}{1-\alpha}$ ya que $0<1-\alpha<1$ y $\beta < \frac{\beta}{1-\alpha} \doteq \beta(1+\alpha)$, esto indica que β no es mayor que β(1+α) o bien que β no es mayor que un factor (1+α).

Por lo tanto

$$\beta < \frac{\beta}{1-\alpha} \leq \frac{\beta_a}{1-\alpha_a} \doteq \beta_a(1+\alpha_a),$$

entonces β no es mayor que un factor $(1+\alpha_a)$

Con los dos resultados anteriores se determina una cota superior para los valores de α y β que son respectivamente k_0 y $\frac{1}{k_1}$ respectivamente.

Varios investigadores de la prueba de razón de probabilidad secuencial de Wald (PRPS)[10], sobre el tema reportan que en muchos casos prácticos los valores de α y β son muy próximos a α_a y β_a. Esto permite aproximar:

La FCOP en los puntos P_0 y P_1 por $1-\alpha_a$ y β_a.

Una vez que ya se vio cómo se determinan las constantes críticas o umbrales, procédase a la determinación de las zonas de decisión:

Recordando que $X_i \sim$ *Bernoulli* (P), y además que

$$\Lambda_m = \prod_{i=1}^{m} \frac{f(P_0;X_i)}{f(P_1;X_i)} \qquad \text{y} \qquad k_0 < \Lambda_m < k_1$$

sea k_0 y k_1 los valores críticos o umbrales, donde $0 < k_0 < 1$; $k_1 > k_0$;

[10] Término en inglés: Sequential Probability Ratio Test (SPRT)

Entonces se tiene que

$$\Lambda_m = \prod_{i=1}^{m} \frac{P_0^{x_i}\left(1-P_0\right)^{1-x_i}}{P_1^{x_i}\left(1-P_1\right)^{1-x_i}} = \prod_{i=1}^{m}\left[\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{x_i}\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^{1-x_i}\right]$$

aplicando logaritmo natural

$$\ln \Lambda_m = \ln\left[\Lambda_m\right]$$

entonces:

$$\ln\left[\Lambda_m\right] = \ln\left[\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{x_i}\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^{1-x_i}\right]$$

$\Rightarrow$

$$\ln\left[\Lambda_m\right] = \sum_{i=1}^{m}\ln\left[\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{x_i}\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^{1-x_i}\right]$$

donde si:

$$z_i = \ln\left[\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{x_i}\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^{1-x_i}\right]$$

entonces por un lado

$$\ln\left[\Lambda_m\right] = \sum_{i=1}^{m} z_i$$

o bien como

$$\Lambda_m = \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\sum_{i=1}^{m} x_i}\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^{m-\sum_{i=1}^{m} x_i}$$

y

$$\ln[\Lambda_{\mathrm{m}}] = \sum_{i=1}^{m} x_i \ln\left[\frac{P_0}{P_1}\right] + \left(m - \sum_{i=1}^{m} x_i\right)\ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right]$$

factorizando

$$\ln[\Lambda_{\mathrm{m}}] = m\ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right] + \sum_{i=1}^{m} x_i\left[\ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right) - \ln\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)\right]$$

entonces:

$$\ln[\Lambda_{\mathrm{m}}] = m\ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right] + \ln\left[\frac{P_0(1-P_1)}{P_1(1-P_0)}\right]\sum_{i=1}^{m} x_i$$

Sea

$$\mathrm{Q} = \ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right] \qquad \text{y} \qquad \Bbbk = \ln\left[\frac{P_0(1-P_1)}{P_1(1-P_0)}\right]$$

entonces:

$$\ln[\Lambda_{\mathrm{m}}] = m\mathrm{Q} + \Bbbk\sum_{i=1}^{m} x_i$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{m} z_i = m\mathrm{Q} + \Bbbk\sum_{i=1}^{m} x_i = \ln[\Lambda_{\mathrm{m}}]$$

y sustituyendo en (2.1.3.1) se tiene, que el muestreo continúa si:

$$\ln[k_0] < \ln[\Lambda_m] < \ln[k_1] \qquad \text{...(2.1.3.6)}$$

donde

$$\ln[\Lambda_m] = m\mathrm{Q} + \Bbbk\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} z_i$$

sustituyendo en (2.1.3.6) se tiene:

$\ln[k_0] < \mathrm{mQ} + \Bbbk\sum_{i=1}^{m} x_i < \ln[k_1]$, y para tener una estadística en términos de $\sum_{i=1}^{m} x_i$ se tiene que

$$\ln[k_0]\text{-mQ} < \Bbbk\sum_{i=1}^{m} x_i < \ln[k_1] - \mathrm{mQ}$$

Se sabe que $P_1 > P_0 \Rightarrow 1 - P_1 < 1 - P_0$

$$\Rightarrow \mathrm{Q}>0; \qquad \frac{1-P_1}{1-P_0} < 1; \qquad \frac{P_0}{P_1} < 1 \Rightarrow \left(\frac{P_0(1-P_1)}{P_1(1-P_0)}\right) < 1$$

$\Rightarrow \Bbbk < 0$ por lo que:

$$\frac{\ln[k_1] - \mathrm{mQ}}{\Bbbk} < \sum_{i=1}^{m} x_i < \frac{\ln[k_0]\text{-mQ}}{\Bbbk}$$

donde:

$$C_0(m) = \frac{\ln[k_1] - \mathrm{mQ}}{\Bbbk} < \sum_{i=1}^{m} x_i < \frac{\ln[k_0]\text{-mQ}}{\Bbbk} = C_1(m) \qquad \text{...(2.1.3.7)}$$

Entonces si sucede lo anterior se continúa el proceso de muestreo.

De (2.1.3.1), (2.1.3.6) y (2.1.3.7) el proceso de muestreo puede continuar o terminar como a continuación se indica[11]:

Continuar el proceso de muestreo:

Si al elegir un inciso y al considerar la muestra admisible de tamaño m la desigualdad se cumple.

(a) $k_0 < \Lambda_m < k_1$

(b) $\ln[k_0] < \ln \Lambda_m = \sum_{i=1}^{m} z_i < \ln[k_1]$

(c) $C_0(m) = \dfrac{\ln[k_1] - mQ}{\Bbbk} < \sum_{i=1}^{m} x_i < \dfrac{\ln[k_0]\text{-}mQ}{\Bbbk} = C_1(m)$

donde $Q = \ln\left[\dfrac{1-P_0}{1-P_1}\right]$; $\Bbbk = \ln\left[\dfrac{P_0(1-P_1)}{P_1(1-P_0)}\right]$ y $C_0(m)$ y $C_1(m)$ son rectas cuyas ordenadas al origen se establecen con los valores de $\dfrac{\ln[k_1]}{\Bbbk}$, $\dfrac{\ln[k_0]}{\Bbbk}$ respectivamente, y la pendiente está determinada por el valor de $\dfrac{Q}{\Bbbk}$ para ambas.

11 Sin embargo puede haber otros, en este caso, por ejemplo considerar proporciones o bien diferencias de proporciones (la muestra y la P propuesta en H_0 y, estudiar cuando discrepan estadísticamente estas proporciones)

Concluir el proceso de muestreo:

Se rechaza H_0, si al elegir un inciso y al considerar la muestra admisible de tamaño m la desigualdad se cumple.

(a) $\Lambda_m \leq k_0$; (b) $\sum_{i=1}^{m} z_i \leq \ln[k_0]$; (c) $\sum_{i=1}^{m} x_i \geq C_1(m)$ [12]

Se acepta H_0, si al elegir un inciso y al considerar la muestra admisible de tamaño m la desigualdad se cumple.

(a) $\Lambda_m \geq k_1$; (b) $\sum_{i=1}^{m} z_i \geq \ln[k_1]$; (c) $\sum_{i=1}^{m} x_i \leq C_0(m)$ [13]

Con lo que se da por concluido un plan de muestreo, el cual consistió en la determinación de la calidad de la prueba de hipótesis así como del costo asociado y de las zonas para decidir terminar el proceso de muestreo, para la variable discreta binomial y el cual se resume finalmente con los resultados ya obtenidos, en la siguiente tabla:

[12] Rechazando H_0, si cuando el número de defectuosos hasta la muestra m sea al menos de C_1(m).
[13] Aceptando H_0, cuando el número de artículos defectuosos hasta la muestra m sea a lo mucho de C_0(m).

Muestreo de aceptación secuencial por atributos cuando se usa la distribución binomial.
Prueba unilateral derecha.

Hipótesis: $H_0: P = P_0$ vs $H_1: P = P_1$ $P_1 > P_0$

:el lote se acepta :el lote se rechaza

Calidad de la prueba: FCOP, L(P).

- Para h $\neq 0$, $L(P) = \dfrac{1-k_0^h}{k_1^h - k_0^h}$; donde $k_0 = \dfrac{\alpha}{1-\beta}$, y $k_1 = \dfrac{1-\alpha}{\beta}$

y luego obtener P a partir de h usando la relación:

$$P = \frac{1-\left(\dfrac{1-P_0}{1-P_1}\right)^h}{\left(\dfrac{P_0}{P_1}\right)^h - \left(\dfrac{1-P_0}{1-P_1}\right)^h}$$

h=[-1,-0.8,-0.6,-0.4,-0.2,0.2;0.4,0.6,0.8,1]

- Para h = 0, $L(P)$ está indeterminado, por lo que se utiliza la Regla de L´Hôpital y se obtiene

$$L(P) = \frac{-\ln[k_0]}{\ln[k_1] - \ln[k_0]}$$ para $$P = \frac{-\ln\left[\dfrac{1-P_0}{1-P_1}\right]}{\ln\left[\dfrac{P_0}{P_1}\right] - \ln\left[\dfrac{1-P_0}{1-P_1}\right]}$$

Tamaño esperado de la muestra: FTEM, E[m/P].

$$E[m/P] \doteq \frac{\ln[k_1]L(P) + \ln[k_0](1-L(P))}{\ln\left[\dfrac{P_0}{P_1}\right]P + \ln\left[\dfrac{1-P_0}{1-P_1}\right](1-P)}$$ donde P=0...,P_0,...,P_1,...1

Determinación de las zonas de decisión, DZD.

Continuar con el proceso de muestreo si ocurre que:

$$\frac{\ln[k_1] - mQ}{\mathbb{k}} = C_0(m) < \sum_{i=1}^{m} x_i < C_1(m) = \frac{\ln[k_0]\text{-}mQ}{\mathbb{k}};$$ donde

$$Q = \ln\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right]; \quad \mathbb{k} = \ln\left[\frac{P_0(1-P_1)}{P_1(1-P_0)}\right];$$ m: muestra admisible

Concluir el proceso de muestreo:

Se rechaza H_0 si ocurre que $\sum_{i=1}^{m} x_i \geq C_1(m)$.

Se acepta H_0 si ocurre que $\sum_{i=1}^{m} x_i \leq C_0(m)$.

2.2 Muestreo de aceptación secuencial por variables cuando se usa la distribución normal.

Dentro del campo de la estadística, se considera que una de las distribuciones continuas de probabilidad más importante, es la distribución normal. Su gráfica tiene forma de campana, la cual describe una gran variedad de fenómenos que ocurren en la industria, en la investigación y en la propia naturaleza. En el denominado muestreo de aceptación secuencial por variables a las unidades se les mide una característica cuantitativamente, a diferencia del muestreo por atributos para el caso de la distribución b*inomial* comprende dos categorías de clasificación aceptables o no.

Para la distribución normal, se pueden considerar los casos correspondientes para la prueba de hipótesis para la media y para la varianza de la población bajo estudio. En el presente trabajo se verá solamente el caso para la media.

Para aprovechar la riqueza numérica del muestreo de aceptación secuencial por variables, es necesario contar con un instrumento de medición que haya sido probado y aceptado por una comunidad por su capacidad para medir la característica de interés. Por ejemplo, se puede calcular el tiempo de duración de un foco antes de que se funda, asimismo la densidad del yeso para construcción, entre otras característica de un lote.

No sólo es necesario que la característica de la unidad observacional bajo estudio se pueda medir en forma cuantitativa, sino que además, se supone que las mediciones tienden a distribuirse normalmente.

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_m$ una muestra aleatoria con distribución $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, y su función de distribución de probabilidad se expresa como:

$$f(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}};x\in(-\infty,\infty),\mu\in(-\infty,\infty),\sigma^2>0$$

con μ desconocida y σ conocida.

Y las hipótesis unilateral derecha se plantean como:

H_0: $\mu = \mu_0$ vs H_1: $\mu = \mu_1$ con $\mu_1 > \mu_0$

: El lote es aceptado : El lote es rechazado

Donde, para realizar la prueba de hipótesis con el enfoque secuencial se considerará el procedimiento bajo la planeación vista para la distribución *binomial*.

Primeramente se determinará la calidad preestablecida de la prueba de la hipótesis usando la función característica de operación de la Prueba (FCOP), estableciendo el costo asociado, destacando los riesgos α y β utilizados en términos del tamaño de muestra (FTEM), de acuerdo a la calidad del lote en revisión propicio al rechazo, a la aceptación o a la incertidumbre para el rechazo o la aceptación.

Finalmente se determinarán las zonas muestrales que tengan más posibilidades para aceptar o rechazar el lote o continuar el proceso de muestreo.

2.2.1 Determinación de la función característica de operación de la prueba (FCOP), L(μ).

Sea $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$, con las consideraciones ya señaladas.

Para el cálculo de la FCOP, al igual que para el caso de la distribución *binomial*, se tomarán las consideraciones ya señaladas.

i) $h(\mu) \neq 0 \quad \forall \quad \mu \in \mathbb{R}$; y $Д_m = \{\underline{X}_m\} = \{(X_1, X_2, \ldots, X_m)\}$; $m = 1,2,\ldots$ espacio de muestras admisibles

ii) $E_\mu\left[\left\{\frac{f(\mu_0;x)}{f(\mu_1;x)}\right\}^{h(\mu)}\right] = 1$; donde E_μ significa el valor esperado respecto a $f(\mu;x)$

Tomando $\mu = \mu_0$ y $\mu = \mu_1$ entonces se tiene:

$$\mathrm{f}(\mu_0,\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp - \frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma^2}$$

$$\mathrm{f}(\mu_1,\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp - \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}$$

de donde:

$$\frac{\mathrm{f}(\mu_0,x)}{\mathrm{f}(\mu_1,x)} = \exp\left[-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma^2} + \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right] = \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\{(x-\mu_0)^2-(x-\mu_1)^2\}\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{-2x(\mu_0-\mu_1)+(\mu_0^2-\mu_1^2)\right\}\right]$$

Sustituyendo en (ii)

$$E\left[\left(\frac{f(\mu_0,x)}{f(\mu_1,x)}\right)^{h(\mu)}\right] = E\left[\left\{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2x(\mu_0-\mu_1)+(\mu_0^2-\mu_1^2)\right)\right]\right\}^{h(\mu)}\right]=1$$

donde $h(\mu)=h$, ya que $h(\mu)$ está en función de μ, , y de las propiedades que se tienen al considerar x_i una variable aleatoria continua:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left[-2x(\mu_0-\mu_1)+(\mu_0^2-\mu_1^2)\right]\right]\right\}^h \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]dx \quad \text{...(2.2.1.1)}$$

Asociando términos sobre el exponente y sin considerar $\frac{1}{2\sigma^2}$, se tiene:

$$-2hx(\mu_0-\mu_1)+(\mu_0^2-\mu_1^2)h+x^2\text{-}2\mu x+\mu^2 \;=\; x^2-2x((\mu_0-\mu_1)h+\mu)+\mu^2+(\mu_0^2-\mu_1^2)h$$

Para completar un binomio cuadrado perfecto se suma y se resta lo siguiente:

$$-(\mu_0-\mu_1)^2h^2+(\mu_0-\mu_1)2\mu h$$

a continuación se ordenan los términos obteniendo:

$$x^2-2x((\mu_0-\mu_1)h+\mu)+(\mu_0-\mu_1)^2h^2+\mu^2+(\mu_0-\mu_1)2\mu h-(\mu_0-\mu_1)^2h^2-(\mu_0-\mu_1)2\mu h+(\mu_0^2-\mu_1^2)h$$

Sea $\mathrm{w} = (\mu_0-\mu_1)h+\mu$ y sustituyendo esta última expresión en (2.2.1.1) se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-w)^2\right]\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-h^2(\mu_0-\mu_1)^2-(\mu_0-\mu_1)2h\mu+(\mu_0^2-\mu_1^2)h\right)\right]dx=1$$

$$\Rightarrow \qquad \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-(\mu_0-\mu_1)^2h^2-(\mu_0-\mu_1)2h\mu+(\mu_0^2-\mu_1^2)h\right)\right]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-w)^2}{2\sigma^2}\right]dx=1$$

De aquí se tiene que como

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-w)^2}{2\sigma^2}\right]dx=1$$

entonces

$$\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-(\mu_0-\mu_1)^2h^2-(\mu_0-\mu_1)2h\mu+(\mu_0^2-\mu_1^2)h\right)\right]=1$$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{1}{2\sigma^2}\left(-(\mu_0-\mu_1)^2h^2-(\mu_0-\mu_1)2h\mu+(\mu_0^2-\mu_1^2)h\right)=0$$

$$\Rightarrow \qquad -(\mu_0-\mu_1)^2h^2-(\mu_0-\mu_1)2h\mu+(\mu_0^2-\mu_1^2)h=0$$

factorizando:

$$\Rightarrow \qquad h\left[-(\mu_0-\mu_1)^2h-(\mu_0-\mu_1)2\mu+(\mu_0^2-\mu_1^2)\right]=0$$

De aquí

$$h=0 \qquad \text{ó} \qquad -(\mu_0-\mu_1)^2h-(\mu_0-\mu_1)2\mu+(\mu_0^2-\mu_1^2)=0$$

De esta última expresión al dividir por $(\mu_1-\mu_0)$ que es mayor que cero, por ser $\mu_1>\mu_0$

$$\Rightarrow \qquad \frac{-(\mu_0-\mu_1)^2 h}{(\mu_1-\mu_0)}-\frac{(\mu_0-\mu_1)2\mu}{(\mu_1-\mu_0)}+\frac{(\mu_0-\mu_1)(\mu_0+\mu_1)}{(\mu_1-\mu_0)}=0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{-(\mu_0-\mu_1)(\mu_0-\mu_1)h}{(\mu_1-\mu_0)}-\frac{(\mu_0-\mu_1)2\mu}{(\mu_1-\mu_0)}+\frac{(\mu_0-\mu_1)(\mu_0+\mu_1)}{(\mu_1-\mu_0)}=0$$

$$\frac{(\mu_1-\mu_0)(\mu_0-\mu_1)h}{(\mu_1-\mu_0)}+\frac{(\mu_1-\mu_0)2\mu}{(\mu_1-\mu_0)}-\frac{(\mu_1-\mu_0)(\mu_0+\mu_1)}{(\mu_1-\mu_0)}=0$$

$$\Rightarrow \qquad (\mu_0-\mu_1)h+2\mu-(\mu_0+\mu_1)=0 \qquad \Rightarrow (\mu_0-\mu_1)h=-2\mu+(\mu_0+\mu_1)$$

que se refiere a la relación entre h y μ, donde

$$h=\frac{(\mu_0+\mu_1)-2\mu}{\mu_0-\mu_1} \qquad \text{....(2.2.1.2)}$$

y

$$\mu=\frac{(\mu_0+\mu_1)}{2}-\frac{h}{2}(\mu_0-\mu_1) \qquad \text{...(2.2.1.3)}$$

Nótese que para este caso a diferencia del muestreo por atributos se pueden calcular sin dificultad los valores de h y de μ.

Cabe señalar que, para obtener la FCOP, se procede de manera similar a como se calculó para el caso de la distribución *binomial*, es decir, se plantea una prueba de hipótesis auxiliar, H*, distinta de la original, H, con dos hipótesis equivalentes y $h(\mu)>0$.

Por las propiedades que se tienen al considerar X como una variable aleatoria continua

$$E_{\mu}\left[\left\{\frac{f(\mu_0;x)}{f(\mu_1;x)}\right\}^h\right]=\int\left\{\frac{f(\mu_0;x)}{f(\mu_1;x)}\right\}^h f(\mu;x)dx$$

$$=\int f^*(\mu;x)dx=1$$

ello indica que el término genérico en el integrando es:

$$f^*(\mu;x)=\left\{\frac{f(\mu_0;x)}{f(\mu_1;x)}\right\}^h f(\mu;x) \qquad \text{... (2.2.1.4)}$$

es positivo y como la integral es igual con 1, existe una función de distribución de probabilidad para cada valor μ fijo.

Sea μ un valor fijo, para calcular la FCOP.

Una prueba secuencial definida para las constantes k_0^h y k_1^h donde $k_0=\frac{\alpha}{1-\beta}$; y $k_1=\frac{1-\alpha}{\beta}$ son los puntos críticos o umbrales, para aceptar o rechazar H_1, respectivamente, para la prueba de hipótesis original.

Por otro lado en el desarrollo de la determinación de las zonas de decisión, DZD, véase (2.2.3), se considera cómo determinar el fin del proceso de muestreo ó la continuación del mismo.

En particular la desigualdad para continuar con el proceso de muestreo, para la prueba de hipótesis equivalente es:

$$k_0^h < \prod_{i=1}^{m} \frac{f^*(\mu; x_i)}{f(\mu; x_i)} < k_1^h$$

de (2.2.1.4) se tiene:

$$k_0^h < \prod_{i=1}^{m} \frac{\left\{\frac{f(\mu_0; x)}{f(\mu_1; x)}\right\}^h f(\mu; x_i)}{f(\mu; x_i)} < k_1^h$$

$$\Rightarrow \qquad k_0^h < \prod_{i=1}^{m} \left\{\frac{f(\mu_0; x)}{f(\mu_1; x)}\right\}^h < k_1^h$$

calculando la potencia $\frac{1}{h} > 0$ en cada uno de los términos se obtiene

$$k_0 < \prod_{i=1}^{m} \frac{f(\mu_0; x)}{f(\mu_1; x)} < k_1 \qquad \text{... (2.2.1.5)}$$

que se refiere a la desigualdad para continuar el muestreo en la prueba de hipótesis original.

Entonces la FCOP, puede calcularse de la misma forma que se hizo para la distribución binomial concluyendo de igual forma que:

Rechazar H_0 es equivalente a rechazar H* de la misma manera aceptar H_1 es equivalente a aceptar H.

De igual manera para el caso cuando $h(\mu)<0$, se tiene que:

$$k_0^h > \prod_{i=1}^{m} \frac{f^*(\mu;x_i)}{f(\mu;x_i)} > k_1^h$$

de donde se toma como cota inferior a k_1^h y como cota superior a k_0^h, y al hacer los cálculos, nuevamente de (2.2.1.4) se tiene:

$$k_0^h > \prod_{i=1}^{m} \frac{\left\{\frac{f(\mu_0;x)}{f(\mu_1;x)}\right\}^h f(\mu;x_i)}{f(\mu;x_i)} > k_1^h$$

$$\Rightarrow \qquad k_1^h < \prod_{i=1}^{m} \left\{\frac{f(\mu_0;x)}{f(\mu_1;x)}\right\}^h < k_0^h$$

calculando la potencia $\frac{1}{h}<0$ en cada uno de los términos:

$$\Rightarrow \qquad k_1 > \prod_{i=1}^{m} \frac{f(\mu_0;x)}{f(\mu_1;x)} > k_0$$

$$\therefore \qquad k_0 < \prod_{i=1}^{m} \frac{f(\mu_0;x)}{f(\mu_1;x)} < k_1 \qquad \forall \ h \in \mathbb{R}\text{-}\{0\}$$

Sea $h(\mu)\neq 0$ y $L(\mu)$ evaluada en μ_0 y μ_1:

Sea $L(\mu_1)$ = Pr(aceptar H_0/μ_1) = Pr(Aceptar H^*/H) = $\beta^* \doteq \beta$

$L(\mu_0)$ = Pr(aceptar H_0/μ_0) = Pr(Aceptar H^*/H^*) = $1-\alpha^* \doteq 1-\alpha$

donde las probabilidades de errores de tipo I y II, α*y β* respectivamente, son para la prueba de hipótesis auxiliar equivalente, considerada para este cálculo.

Además se sabe que: $k_0^h = \dfrac{\alpha *}{1-\beta *}$ y $k_1^h = \dfrac{1-\alpha *}{\beta *}$ son los puntos críticos o umbrales.

De aquí se tiene que, despejando a α*, e igualando las dos expresiones de α* y factorizando se tiene la FCOP, evaluada en μ.

∴ si $h \neq 0$

$$L(\mu) = \frac{1-k_0^h}{k_1^h - k_0^h} \qquad \text{...(2.2.1.6)}$$

donde

$$k_0 = \frac{\alpha}{1-\beta}; \quad \text{y} \quad k_1 = \frac{1-\alpha}{\beta}$$

Así mismo, para el caso de $h=0$, como $L(\mu)$, está indeterminada, se utiliza la Regla de L´Hôpital obteniendo:

$$L(\mu) = \frac{-\ln[k_0]}{\ln[k_1] - \ln[k_0]} \qquad \text{...(2.2.1.7)}$$

y finalmente para obtener μ cuando $h=0$ de (2.2.1.3):

$$\mu = \frac{(\mu_0 + \mu_1)}{2} \qquad \text{...(2.2.1.8)}$$

Con lo que se concluye la determinación de la calidad de la prueba de hipótesis con la FCOP, y ahora se determinará el costo asociado a la misma, a través de la FTEM.

2.2.2 Determinación de la función tamaño esperado de muestra (FTEM).

Considérese la siguiente expresión para la distribución normal.

Sea $$\mathrm{E}[m/\mu] \doteq \frac{E[\ln\Lambda_{\mathrm{m}}/\mu]}{\mathrm{E}[z/\mu]} = \frac{E[z_1+...+z_m/\mu]}{\mathrm{E}[z/\mu]} \quad ...(2.2.2.1)$$

Recuérdese que, para obtener esta expresión se hizo el desarrollo matemático considerando dos hipótesis subsidiarias, véase apartado 2.1.2.

Suponiendo H_0 cierta (H_0:$\mu=\mu_0$), para el numerador se tiene:

$$E[\ln\Lambda_m/\mu_0] = \ln[k_0]\,\Pr(\text{Rechazar } H_0/\mu_0) + \ln[k_1]\,\Pr(\text{Aceptar } H_0/\mu_0)$$

$$= \ln[k_0]\,(1-L(\mu_0)) + \ln[k_1](L(\mu_0))$$

$$= \ln[k_0](\alpha) + \ln[k_1](1-\alpha) \quad ...(2.2.2.2)$$

Ahora, suponiendo H_1 cierta (H_1:$\mu=\mu_1$) se tiene :

$$E[\ln\Lambda_m/\mu_1] = \ln[k_0]\,\Pr(\text{Rechazar } H_0/\mu_1) + \ln k_1\,\Pr(\text{Aceptar } H_0/\mu_1)$$

$$= \ln[k_0]\,(1-L(\mu_1) + \ln[k_1](L(\mu_1)$$

$$= \ln[k_0](1-\beta) + \ln[k_1](\beta) \quad ...(2.2.2.3)$$

Y para el denominador recuérdese que:

$$\Lambda_{\mathrm{m}}=\frac{L(\mu_0;X_1,X_2,...,X_m)}{L(\mu_1;X_1,X_2,...,X_m)}=\frac{f(\mu_0;X_1),f(\mu_0;X_2),...,f(\mu_0;X_m)}{f(\mu_1;X_1),f(\mu_1;X_2),...,f(\mu_1;X_m)}=\prod_{i=1}^{m}\frac{f(\mu_0;X_i)}{f(\mu_1;X_i)}$$

donde $\mathrm{X}_i \sim N(\mu,\sigma^2)$, con las consideraciones ya señaladas.

por tanto:

$$\Lambda_{\mathrm{m}}=\prod_{i=1}^{m}\frac{f(\mu_0;X_i)}{f(\mu_1;X_i)}=\left[\frac{\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}{\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp-\frac{(x_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}}\right]$$

aplicando el logaritmo natural:

$$\ln[\Lambda_{\mathrm{m}}]=\ln\prod_{i=1}^{m}\frac{f(\mu_0;X_i)}{f(\mu_1;X_i)}=\ln\left[\frac{\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}{\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp-\frac{(x_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}}\right]$$

$$=\ln\exp-\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}+\sum_{i=1}^{m}\frac{(x_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right]=\left[-\sum_{i=1}^{m}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}+\sum_{i=1}^{m}\frac{(x_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Desarrollando los binomios en el corchete:

$$=-\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^2-2\sum_{i=1}^{m}x_i\mu_0+m\mu_0^2\right)}{2\sigma^2}+\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^2-2\sum_{i=1}^{m}x_i\mu_1+m\mu_1^2\right)}{2\sigma^2}$$

$$= \frac{-\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{m} x_i\mu_0 - m\mu_0^2 + \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m} x_i\mu_1 + m\mu_1^2}{2\sigma^2}$$

$$= \frac{2\sum_{i=1}^{m} x_i\left(\mu_0 - \mu_1\right)}{2\sigma^2} - \frac{m\left(\mu_0^2 - \mu_1^2\right)}{2\sigma^2} = \frac{\left(\mu_0 - \mu_1\right)}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m} x_i - \frac{m}{2}\frac{\left(\mu_0^2 - \mu_1^2\right)}{\sigma^2}$$

donde

$$\sum_{i=1}^{m} z_i = \frac{\left(\mu_0 - \mu_1\right)}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m} x_i - \frac{m}{2}\frac{\left(\mu_0^2 - \mu_1^2\right)}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\left(\mu_0 - \mu_1\right)}{\sigma^2}x_i - \frac{1}{2}\frac{\left(\mu_0^2 - \mu_1^2\right)}{\sigma^2}\right) = \ln\Lambda_m$$

$$\Rightarrow \qquad z_i = x_i\left[\frac{\left(\mu_0 - \mu_1\right)}{\sigma^2}\right] - \frac{1}{2}\frac{\left(\mu_0^2 - \mu_1^2\right)}{\sigma^2}$$

por lo tanto

$$E\left[z_i / \mu\right] = E\left[x_i\right]\left(\frac{\left(\mu_0 - \mu_1\right)}{\sigma^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\left(\mu_0^2 - \mu_1^2\right)}{\sigma^2}$$

Como $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ entonces:

$$E\left[z_i / \mu\right] = \mu\left(\frac{\left(\mu_0 - \mu_1\right)}{\sigma^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\left(\mu_0^2 - \mu_1^2\right)}{\sigma^2}$$

factorizando:

$$E\left[z_i / \mu\right] = \left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma^2}\right)\left(\mu - \frac{\left(\mu_0 + \mu_1\right)}{2}\right)$$

Por tanto si H_0 cierta:

$$E[m/\mu_0]=\left[\left(\frac{(\mu_0-\mu_1)}{\sigma^2}\right)\left(\mu_0-\frac{(\mu_0+\mu_1)}{2}\right)\right] \quad ...(2.2.2.4)$$

Y si H_1 cierta:

$$E[m/\mu_1]=\left[\left(\frac{(\mu_0-\mu_1)}{\sigma^2}\right)\left(\mu_1-\frac{(\mu_0+\mu_1)}{2}\right)\right] \quad ...(2.2.2.5)$$

Sustituyendo los incisos (2.2.2.2),(2.2.2.3),(2.2.2.4) y (2.2.2.5) en (2.2.2.1) se tiene:

Si H_0: $\mu=\mu_0$ es cierta:

$$\frac{E\left[(z_1+...+z_m)/\mu_0\right]}{E[z/\mu_0]}=\frac{\ln[k_0](\alpha)+\ln[k_1](1-\alpha)}{\left[\left(\frac{(\mu_0-\mu_1)}{\sigma^2}\right)\left(\mu_0-\frac{(\mu_0+\mu_1)}{2}\right)\right]} \quad ...(2.2.2.6)$$

Si H_1: $\mu=\mu_1$ es cierta:

$$\frac{E\left[(z_1+...+z_m)/\mu_1\right]}{E[z/\mu_1]}=\frac{\ln[k_0](1-\beta)+\ln[k_1](\beta)}{\left[\left(\frac{(\mu_0-\mu_1)}{\sigma^2}\right)\left(\mu_1-\frac{(\mu_0+\mu_1)}{2}\right)\right]} \quad ...(2.2.2.7)$$

De donde podemos obtener que para el caso general la expresión queda de la siguiente manera:

$$E[m/\mu]=\frac{\ln[k_1]L(\mu)+\ln[k_0](1-L(\mu))}{\left[\left(\frac{(\mu_0-\mu_1)}{\sigma^2}\right)\left(\mu-\frac{(\mu_0+\mu_1)}{2}\right)\right]} \quad ...(2.2.2.8)$$

Con lo que se concluye la determinación de la FTEM. Y ahora para aplicar el plan de muestreo que se ha determinado a través de la FCOP y la FTEM, se procede a la determinación de las zonas para poder decidir cuando terminar con el proceso.

2.2.3. Determinación de las Zonas de Decisión (ZD).

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_m$ una muestra aleatoria con distribución $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, y su función de distribución de probabilidad se expresa como:

$$f(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; x \in (-\infty, \infty), \mu \in (-\infty, \infty), \sigma^2 > 0$$

con μ desconocida y σ conocida.

Se quiere probar las siguientes hipótesis simples:

$H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu = \mu_1$ donde $\mu_1 > \mu_0$

: El lote es aceptado[14] : El lote es rechazado

Considerando el resultado del teorema de Neyman-Pearson, se tiene que:

$$\Lambda_m = \frac{L(\mu_0; X_1, X_2, \ldots, X_m)}{L(\mu_1; X_1, X_2, \ldots, X_m)} = \frac{f(\mu_0; X_1), f(\mu_0; X_2), \ldots, f(\mu_0; X_m)}{f(\mu_1; X_1), f(\mu_1; X_2), \ldots, f(\mu_1; X_m)} = \prod_{i=1}^{m} \frac{f(\mu_0; X_i)}{f(\mu_1; X_i)}$$

El proceso de muestreo continúa si:

$$k_0 < \Lambda_m < k_1 \qquad \ldots (2.2.3.1)$$

donde $k_0 = \frac{\alpha}{1-\beta}, k_1 = \frac{1-\alpha}{\beta}$ son los valores críticos o umbrales.

[14] Este planteamiento de muestreo por variables es sólo uno de los posibles, lo mismo ocurre en el caso que se presentó de muestreo por atributos (Caso *Binomial*).

Entonces se tiene que:

$$\Lambda_m = \prod_{i=1}^{m} \frac{f(\mu_0; X_i)}{f(\mu_1; X_i)} = \frac{\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp - \frac{(x_i - \mu_0)^2}{2\sigma^2}}{\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp - \frac{(x_i - \mu_1)^2}{2\sigma^2}}$$

aplicando logaritmo natural a Λ_m se tiene que:

$$\ln[\Lambda_m] = \ln\left[\prod_{i=1}^{m} \frac{f(\mu_0; X_i)}{f(\mu_1; X_i)}\right] = \ln\left[\frac{\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp - \frac{(x_i - \mu_0)^2}{2\sigma^2}}{\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp - \frac{(x_i - \mu_1)^2}{2\sigma^2}}\right]$$

$$= \ln \exp\left[-\sum_{i=1}^{m} \frac{(x_i - \mu_0)^2}{2\sigma^2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{(x_i - \mu_1)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$= \left[-\sum_{i=1}^{m} \frac{(x_i - \mu_0)^2}{2\sigma^2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{(x_i - \mu_1)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Desarrollando los binomios:

$$= -\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m} x_i\mu_0 + m\mu_0^2\right)}{2\sigma^2} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m} x_i\mu_1 + m\mu_1^2\right)}{2\sigma^2}$$

$$= \frac{-\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{m} x_i\mu_0 - m\mu_0^2 + \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m} x_i\mu_1 + m\mu_1^2}{2\sigma^2}$$

factorizando:

$$= \frac{2\sum_{i=1}^{m} x_i \left(\mu_0 - \mu_1\right)}{2\sigma^2} - \frac{m\left(\mu_0^2 - \mu_1^2\right)}{2\sigma^2} = \frac{\left(\mu_0 - \mu_1\right)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} x_i - \frac{m}{2} \frac{\left(\mu_0^2 - \mu_1^2\right)}{\sigma^2}$$

donde

$$\sum_{i=1}^{m} z_i = \frac{\left(\mu_0 - \mu_1\right)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} x_i - \frac{m}{2} \frac{\left(\mu_0^2 - \mu_1^2\right)}{\sigma^2} = \ln \Lambda_m$$

alternativamente entonces el muestreo continúa si:

$$\ln k_0 < \ln \Lambda_m < \ln k_1 \qquad \text{...(2.2.3.2)}$$

donde

$$\ln \Lambda_m = \frac{\left(\mu_0 - \mu_1\right)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} x_i - \frac{m}{2} \frac{\left(\mu_0^2 - \mu_1^2\right)}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{m} z_i$$

en (2.2.3.2) se tiene:

$$\ln k_0 < \frac{\left(\mu_0 - \mu_1\right)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} x_i - \frac{m}{2} \frac{\left(\mu_0^2 - \mu_1^2\right)}{\sigma^2} < \ln k_1$$

despejando $\sum_{i=1}^{m} x_i$

$$\ln k_0 + \frac{m}{2} \frac{\left(\mu_0^2 - \mu_1^2\right)}{\sigma^2} < \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\left(\mu_0 - \mu_1\right)}{\sigma^2} < \ln k_1 + \frac{m}{2} \frac{\left(\mu_0^2 - \mu_1^2\right)}{\sigma^2}$$

Se sabe que $\mu_0 - \mu_1 < 0$ entonces:

$$\frac{\ln k_1}{\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma^2}} + \frac{\frac{m}{2}\frac{\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right)}{\sigma^2}}{\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma^2}} < \sum_{i=1}^{m} x_i < \frac{\ln k_0}{\frac{\left(\mu_0-\mu_1\right)}{\sigma^2}} + \frac{\frac{m}{2}\frac{\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right)}{\sigma^2}}{\frac{\left(\mu_0-\mu_1\right)}{\sigma^2}}$$

$$\frac{\sigma^2 \ln k_1}{\left(\mu_0-\mu_1\right)} + \frac{m\sigma^2\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right)}{2\sigma^2\left(\mu_0-\mu_1\right)} < \sum_{i=1}^{m} x_i < \frac{\sigma^2 \ln k_0}{\left(\mu_0-\mu_1\right)} + \frac{m\sigma^2\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right)}{2\sigma^2\left(\mu_0-\mu_1\right)}$$

$$\frac{\sigma^2 \ln k_1}{\left(\mu_0-\mu_1\right)} + \frac{m}{2}\frac{\sigma^2\left(\mu_0+\mu_1\right)\left(\mu_0-\mu_1\right)}{\sigma^2\left(\mu_0-\mu_1\right)} < \sum_{i=1}^{m} x_i < \frac{\sigma^2 \ln k_0}{\left(\mu_0-\mu_1\right)} + \frac{m}{2}\frac{\sigma^2\left(\mu_0+\mu_1\right)\left(\mu_0-\mu_1\right)}{\sigma^2\left(\mu_0-\mu_1\right)}$$

Donde:

$$\frac{\sigma^2 \ln k_1}{\left(\mu_0-\mu_1\right)} + \frac{\left(\mu_0+\mu_1\right)}{2}m = C_0(m) < \sum_{i=1}^{m} x_i < C_1(m) = \frac{\sigma^2 \ln k_0}{\left(\mu_0-\mu_1\right)} + \frac{\left(\mu_0+\mu_1\right)}{2}m$$

Entonces si sucede que:

$$\frac{\sigma^2 \ln k_1}{\left(\mu_0-\mu_1\right)} + \frac{\left(\mu_0+\mu_1\right)}{2}m = C_0(m) < \sum_{i=1}^{m} x_i < C_1(m) = \frac{\sigma^2 \ln k_0}{\left(\mu_0-\mu_1\right)} + \frac{\left(\mu_0+\mu_1\right)}{2}m \quad \ldots(2.2.3.3)$$

se continúa el proceso de muestreo.

Resumiendo, de (2.2.3.1), (2.2.3.2) y (2.2.3.3), el proceso de muestreo continúa si al elegir un inciso y al considerar la muestra admisible de tamaño m la desigualdad se cumple, para el caso $\mu_1 > \mu_0$:

(a) $k_0 < \Lambda_m < k_1$ $k_0 < \Lambda_m < k_1$

(b) $\ln k_0 < \ln \Lambda_m = \sum_{i=1}^{m} z_i < \ln k_1$

(c) $C_0(m) = \frac{\sigma^2 \ln k_1}{(\mu_0 - \mu_1)} + \frac{(\mu_0 + \mu_1)}{2} m < \sum_{i=1}^{m} x_i < \frac{\sigma^2 \ln k_0}{(\mu_0 - \mu_1)} + \frac{(\mu_0 + \mu_1)}{2} m = C_1(m)$

Concluir el proceso de muestreo,

Se rechaza H_0 si al elegir un inciso y al considerar la muestra admisible de tamaño m la desigualdad se cumple.

(a) $\Lambda_m \leq k_0$; (b) $\sum_{i=1}^{m} z_i \leq \ln k_0$; (c) $\sum_{i=1}^{m} x_i \geq C_1(m)$

o bien

Se acepta H_0 si al elegir un inciso y al considerar la muestra admisible de tamaño m la desigualdad se cumple.

(a) $\Lambda_m \geq k_1$; (b) $\sum_{i=1}^{m} z_i \geq \ln k_1$; (c) $\sum_{i=1}^{m} x_i \leq C_0(m)$

Con lo que se da por concluido un plan de muestreo, el cual consistió en la determinación de la calidad de la prueba de hipótesis así como el costo asociado y de las zonas para decidir terminar el proceso de muestreo.

A continuación se presenta de manera resumida, en una tabla, la FCO, la FTEM y la DZD, para la prueba de hipótesis unilateral derecha.

Muestreo de aceptación secuencial por variables cuando se usa la distribución normal.
Prueba unilateral derecha.

Hipótesis: $H_0: \mu=\mu_0$ vs $H_1: \mu=\mu_1$ donde $\mu_1>\mu_0$

:se acepta el lote : se rechaza el lote

Calidad de la prueba: FCO, L(μ).

- Para h≠0 $L(\mu)=\dfrac{1-k_0^h}{k_1^h-k_0^h}$; donde $k_0=\dfrac{\alpha}{1-\beta}$, $k_1=\dfrac{1-\alpha}{\beta}$

y luego obtener μ a partir de h usando la siguiente relación:

$$\mu=\frac{\mu_0+\mu_1}{2}-\frac{\mathrm{h}}{2}(\mu_0-\mu_1)$$

h=[-1,-0.8,-0.6,-0.4,-0.2,0.2,0.4,0.6,0.8,1]

- Para h=0, L(μ) está indeterminado por lo que se utilizó la Regla de L´Hôpital y se obtiene:

$$\mathrm{L}(\mu)=\frac{-\ln[\mathrm{k}_0]}{\ln[\mathrm{k}_1]\text{-}\ln[\mathrm{k}_0]} \quad \text{con} \quad \mu=\frac{(\mu_0+\mu_1)}{2}$$

Tamaño esperado de muestra: FTEM, E[m/μ].

$$E[m/\mu]=\frac{\ln[k_1]L(\mu)+\ln[k_0](1-L(\mu))}{\left[\left(\frac{(\mu_0-\mu_1)}{\sigma^2}\right)\left(\mu-\frac{(\mu_0+\mu_1)}{2}\right)\right]}$$

donde μ=...μ₀,...μ₁,...

Determinación de las zonas de decisión, DZD.

Continuar el proceso de muestreo si ocurre que:

$$\left(\frac{\sigma^2\ln[\mathrm{k}_1]}{(\mu_0-\mu_1)}+\frac{(\mu_0+\mu_1)}{2}m\right)=C_0(m)<\sum_{i=1}^{m}x_i<C_1(m)=\left(\frac{\sigma^2\ln[\mathrm{k}_0]}{(\mu_0-\mu_1)}+\frac{(\mu_0+\mu_1)}{2}m\right)$$

m: muestra admisible

Concluir el proceso de muestreo:

Se rechaza H_0 si ocurre que $\sum_{i=1}^{m}x_i \geq C_1(m)$

Se acepta H_0 si ocurre que $\sum_{i=1}^{m}x_i \leq C_0(m)$

Capítulo 3

Paquete Mathematica v.5.0, para la elaboración de programas

3.1 ¿Porqué MATHEMATICA?.

Se eligió el paquete computacional MATHEMATICA en su versión 5.0, para elaborar los programas para el análisis y la interpretación del muestreo de aceptación secuencial, por ser una herramienta interactiva especializada, cuyo lenguaje de programación de alto nivel, el cual se basa en la re-escritura de términos (computación numérica y simbólica), permite la visualización y manipulación de datos, gráficas y objetos; así como realizar cálculos y simulaciones mediante el uso de la librería de funciones matemáticas y computacionales; la captura de expresiones a través del teclado o de las paletas (programables) y fórmulas con formato automático, la utilización de bloques de código de librerías, la amplia manipulación de expresiones algebraicas y por ser uno de los sistemas de cálculo simbólico, numérico y gráfico de software para matemáticas; además de que presenta la posibilidad de potenciar la experiencia educativa, volviendo más productivos a sus usuarios.

Se considera importante que, para el uso óptimo y satisfactorio del paquete, es necesario contar con conocimientos a un nivel medio alto en matemáticas, así como haber realizado programas de cómputo, para poder apreciar las ventajas que ofrece MATHEMATICA.

A continuación se presenta en forma sucinta la descripción del paquete, y para aquellas personas que deseen contar con una información más completa se puede consultar la siguiente página de internet:

http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/MathLinkAPI.html.

3.2 Descripción del paquete.

Usa como plataforma el ambiente Windows, lo que le permite gozar de todas las ventajas que ofrece este entorno de Microsoft. El cual es amigable y fácil de manejar, cuenta con iconos que permiten empezar un documento nuevo, abrir uno ya existente, salvar el documento en disco e imprimirlo; utiliza un menú con órdenes para buscar y reemplazar texto, dividir y mezclar celdas y opciones para cambiar el estilo, cuenta además con aquellos que realizan operaciones típicas de Windows como lo son cortar, copiar, pegar y deshacer; hace factible el uso de diferentes tipos y tamaños de letra, 'complementar' las gráficas con títulos y leyendas, y los iconos propios de MATHEMATICA ofrecen las opciones de evaluar una expresión algebraica, habilitar animación y sonido, hacer gráficas en color; generación de documentos interactivos, con textos, imágenes, expresiones matemáticas, botones e "hyperlinks"; rápida y fácil importación y exportación de datos, que incluye imágenes y sonido, en más de veinte formatos.

Cabe hacer mención que a esta fecha se encuentra en el mercado la versión 7.0.

3.3 Atribuciones del paquete.

Algunas de las atribuciones del paquete son:

Realiza cálculos exactos con la precisión que sea necesaria.

Cuenta con cerca de 900 funciones implementadas.

Realiza gráficos de curvas planas (bidimensionales) y superficies (tridimensionales) y puede agruparlos y listar los datos. Posibilita la representación de cualquier función matemática, incluso si está definida a trozos o tiene saltos al infinito en su campo de definición. Puede combinar colores, rejillas y marcos en las gráficas. Permite las representaciones en coordenadas implícitas, explícitas y paramétricas. A partir de éstas pueden generarse animaciones así como ser exportadas a otros programas.

Posee el paquete estadístico "Statistics", dividido en varios subpaquetes, cada uno de los cuales trata un amplio tema de esta materia, entre los cuales están estadística descriptiva; medidas de centralización y de dispersión; probabilidad, regla de Laplace; distribuciones discretas, continuas; intervalos de confianza; contrastes de hipótesis; regresión; regresión no lineal; funciones de probabilidad inversas y programación lineal entre otras.

Para familiarizarse con la notación utilizada en los programas que se presentan se tienen las siguientes notas que ayudarán a una mejor comprensión en la elaboración de los mismos.

3.4 Características generales.

En MATHEMATICA, el lenguaje es interpretado por un kernel o núcleo del programa que desempeña los cálculos. Al entrar al área de trabajo se está en posición de introducir expresiones para ser evaluadas por éste mismo.

Al introducir la primera expresión de una sesión para ser evaluada por el programa y pulsar las teclas de mayúsculas y "Enter", o la de "Intro", se activa su núcleo y se carga en memoria.

Cada entrada que da el usuario consiste es un "input" encabezado con In[n] y la respuesta del paquete es encabezada con un Out[n].

El núcleo se carga la primera vez que se ejecuta una expresión al iniciar una sesión de un programa y las siguientes instrucciones se ejecutarán directamente, pues el contenido del núcleo del programa permanece en memoria hasta salir de MATHEMATICA o se puede borrar con la instrucción "Quit Kernel".

El conjunto de entradas y salidas de una sesión de trabajo, se puede almacenar en un fichero específico, éste suele denominarse "notebook" (libro de notas), lo que permite al programa facilitar la impresión de áreas de trabajo con escritura matemática y se pueden cargar en la memoria en cualquier momento, para ser ampliados o modificados. Su unidad básica de estructura de organización es la celda, que juega el papel de un párrafo en un texto normal y puede contener diferentes clases de información. texto, input u output o gráficos.

Cada celda puede tener su propio estilo y sus propios atributos de texto (fuente, tamaño, color, etcétera). El paquete reconoce en un programa, su contenido sólo como comentarios cuando se abre un paréntesis seguido de un asterisco con la cantidad de texto deseado y para indicarle que se ha terminado con el comentario se pone un asterisco seguido del paréntesis que cierra.

MATHEMATICA utiliza los símbolos convencionales usados en el cálculo matemático, utiliza palabras del idioma inglés, pero permite referirse a las funciones matemáticas estándar mediante símbolos como +, -, *, /, <, ó > en lugar de las palabras reservadas para programación: Plus, Minus, Times, Divide, Less ó Greater.

Permite definir y manejar las variables de modo muy simple, reconoce a toda expresión que no sea número, palabras reservadas del lenguaje o un comando de MATHEMATICA teniendo cuidado en su escritura, diferenciando entre mayúsculas y minúsculas, por ejemplo Sin[x] es distinto que sin[x]. Los nombres de todas las funciones incorporadas empiezan con mayúscula. El tipo de paréntesis o llaves, la cantidad de espacios y la puntuación (comas y puntos y comas) tienen su propio sentido.

Hay que poner espacios entre variables que deben ser multiplicadas, y no los debe de haber en los nombres de las órdenes, ni en símbolos de más de una letra ni en los nombres de las funciones. En los demás casos, no se toman en cuenta.

Los nombres de todas las funciones, variables, opciones, comandos y constantes incorporadas en MATHEMATICA empiezan con letras mayúsculas, por ejemplo, Table es un comando que genera una lista de datos en forma de tabla o de vector; Print[ ] imprime el contenido de los corchetes y que se escribe entre comillas y generalmente son textos que aparecerán como títulos; si un nombre consiste de dos o más palabras, la primera letra de cada palabra va en mayúscula, por ejemplo, ListPlot es un comando con el que se construye una curva o una superficie a través de una lista de puntos dados por el usuario; GridLines incorpora una cuadrícula en los ejes de las gráficas.

MATHEMATICA cuenta con una herramienta muy útil para el manejo de los símbolos matemáticos. Permite que el usuario pueda introducir en forma sencilla dentro del programa los símbolos tales como integral, suma y producto con su correspondiente corrimiento de índices, exponentes, cocientes, subíndices, matrices, raíz n-ésima, alfabeto griego en mayúsculas ó minúsculas entre otros. La forma de utilizarla es a través del comando File donde se encuentra la opción de Palettes, se elige la paleta deseada y aparecerá sobre puesta en la pantalla donde se está trabajando una ventana con las opciones posibles a elegir, el usuario se posicionara en el símbolo deseado y aparecerá este último en seguida se tecleará la información correspondiente trátese de números o de letras.

3.5 Descripción concisa de los programas para el muestreo de aceptación secuencial en estudios observacionales.

Los programas que se utilizan para la aplicación del tema de esta tesis, se encuentran en el Apéndice 1, y es importante destacar los siguientes puntos que son de observancia general para los mismos.

i. Cabe hacer énfasis en la importancia que tiene el kernel, ya que, para los programas que se ejecutan en el tema en cuestión, los valores de las variables pueden tener diferentes interpretaciones, por lo que se debe tener cuidado tanto en su definición como en los valores sean los correctos, por lo que se hace necesario limpiar el kernel cuando se corran programas diferentes.

ii. Por lo que respecta a la notación de las funciones, la de logaritmo que se utiliza en esta tesis está en base 10, y se está escribiendo como ln, y en los programas el logaritmo en base 10 se escribe como log.

iii. Como ya se había comentado, MATHEMATICA reconoce como variable toda expresión que no sea palabra reservada del lenguaje, en particular se están utilizando dos palabras reservadas que son: FALSE y TRUE, como se verá en la ejecución de los programas.

iv. Se incorporaron comentarios en los programas haciendo uso de un paréntesis seguido de asteriscos y se introdujo el texto deseado y para indicar que se ha terminado con el comentario se puso asteriscos seguidos del paréntesis que cierra. Existen comentarios para el programador y para los reportes, los cuales se están realizando con el comando de Print[ ].

v. El comando de Table genera una lista de datos en forma de tabla o de vector, el cual está mostrando precisamente el comportamiento de la información en forma tabular y para completar esta información se utilizan los comandos de ListPlot y GridLines con los que se construyen las gráficas correspondientes a los datos.

En este momento, vale recordar que, cuando se planea la investigación observacional para llevar a cabo una prueba de hipótesis secuencial el procedimiento a seguir es el siguiente:

Primero se determina la calidad de la prueba de hipótesis a través de la FCOP, la cual se realizará con la ejecución de los programas AP1.1.1. y AP1.2.1., para la determinación de la función característica de operación para las funciones de distribución binomial y normal, respectivamente, que como se puede observar en los programas anexos se utilizan varias de las expresiones obtenidas en el capítulo 2, y de las cuales se puede ver claramente su aplicación directa.

Continuando con el proceso, el siguiente paso es evaluar el costo asociado a dicha calidad, en términos del tamaño de muestra a considerar el cual se obtendrá con los programas identificados como AP1.1.2. y AP1.2.2., determinación de la función tamaño esperado de muestra, que al igual que los dos primeros programas, se puede ver la aplicación de las expresiones obtenidas en el capítulo 2, para las funciones de distribución binomial y normal respectivamente.

Finalmente, una vez que se tiene la calidad, FCOP, y el costo asociado, FTEM, se procede a la aplicación del plan de muestreo propuesto a través de la determinación de las zonas de decisión, DZD, lo cual se realizará con los programas AP1.1.3., y AP1.2.3., determinación de las zonas de decisión donde se consideran previamente los programas con los que se obtuvieron la FCO y la FTEM, es decir, la calidad y el costo, con lo que permitirá saber si continúa o termina el proceso de muestreo, lo cual se puede ver más claramente en los programas anexos.

Lo anterior permitirá realizar el análisis e interpretación de la información, y es lo que se presenta en el siguiente capítulo.

Cabe señalar que los programas se encuentran impresos en el Apéndice 1.

Capítulo 4

Aplicación del análisis secuencial en estudios observacionales

En todo estudio de inferencia estadística es común y factible obtener conclusiones sobre un conjunto de unidades de una población o universo sin que, necesariamente, se estudie exhaustivamente a todas, en particular cuando la población es demasiado grande.

Al utilizar un método estadístico para probar hipótesis puede suceder que se elija cualquiera de dos procedimientos de muestreo:

1. Determinar cuántos artículos (o unidades) se revisan de acuerdo a la calidad de la prueba establecida considerando el tiempo utilizado, el esfuerzo, el costo al escoger tal número de elementos al azar dentro del lote, a este procedimiento se le llama muestreo fijo, y con ello se puede inferir, por ejemplo, sobre el valor de la proporción de artículos defectuosos para determinar si un lote de artículos bajo estudio se acepta o se rechaza.

2. Extraer artículos, uno por uno de manera aleatoria, del lote bajo estudio, de acuerdo a la calidad de prueba establecida, evaluando la información que se tiene después de cada extracción hasta que sea posible

tomar una decisión para aceptar o rechazar el lote, a esta alternativa se le llama muestreo de aceptación secuencial.

Como se recordará una de las áreas de la inferencia estadística, es la prueba de hipótesis donde se encuentran los procedimientos que conducen a la aceptación o rechazo de hipótesis estadísticas en las cuales se hacen afirmaciones, en particular sobre un parámetro bajo estudio de una población.

Es entonces a través de la prueba de hipótesis empleando el muestreo de aceptación secuencial, que se desarrollarán dos aplicaciones que a continuación se describen.

Para los casos de las distribuciones de la binomial y la normal que se analizarán en este material, el muestreo de aceptación secuencial dentro de las pruebas de hipótesis siguen la misma metodología, donde la aceptación para el caso de la función binomial se da a partir de una medida de atributos binaria que posibilita tener como parámetro una proporción (P) y para el caso de la normal, la aceptación es a partir de una medida continua, donde el parámetro de interés es la media (μ).

La hipótesis que se pretende probar en ambos casos es la siguiente:

H_0: Se acepta el lote vs H_1: Se rechaza el lote

Con:

α = El riesgo del productor, es la Pr(rechazar H_0 dado que H_0 es cierta).

β = El riesgo del consumidor, es la Pr(aceptar H_0 dado que H_1 es cierta).

El procedimiento de planeación y análisis de la información del muestreo secuencial considera tres aspectos:

1) Determinar la calidad del procedimiento de prueba donde se establece la probabilidad de aceptar la hipótesis nula para diferentes valores del parámetro y esto se representa a través de la función característica de operación de la prueba (FCOP).

2) Se determina la función tamaño esperado de la muestra (FTEM), con el propósito de evaluar el costo asociado a la calidad del procedimiento de prueba.

3) Se determinan las zonas de decisión (DZD) que definen los umbrales, que determinan las zonas para la toma de decisión, esto es, tanto para rechazar o aceptar H_0 como para continuar el muestreo cuando no existe evidencia para tomar alguna de las decisiones anteriores, para distintos tamaños de muestra.

Estos tres aspectos se pueden presentar tanto tabularmente como gráficamente.

4.1 Muestreo de aceptación secuencial por atributos cuando se usa la distribución binomial.

Una vez revisados los conocimientos de planeación y análisis, se tienen los elementos necesarios para llevar a cabo una prueba de hipótesis con un enfoque de muestreo de aceptación secuencial. A continuación se analiza un caso[1].

Ejemplo 4.1 Compra al mayoreo de latas de sardina en aceite vegetal.

Una tienda comercial como Wal Mart, Comercial Mexicana o Soriana, desea comprar latas de sardina en aceite vegetal con un contenido de 425 gr. de masa drenada[2], para introducirlas al mercado con su propia marca. La tienda comercial lo que busca es, básicamente "buena" calidad y precio adecuado. Para ello, el dueño de la tienda decide publicar una convocatoria para un concurso, en donde las diversas empresas interesadas presenten el producto solicitado, en la cual se establece que el periodo de abastecimiento será de al menos un año. Asimismo se comentan las condiciones que debe cumplir el lote de sardinas para que se acepte.

Con el propósito de tomar la mejor decisión para la adquisición del producto se considerarán las medidas que sean necesarias para garantizar que las sardinas enlatadas, cumplan con la información comercial, sanitaria y en particular con la "calidad" preferida, la cual se define a continuación:

---

[1] Este ejemplo fue tomado del libro de Duncan, considerando los valores de las medidas reales, así como las Normas oficiales mexicanas vigentes

[2] Cantidad de materia sólida o semisólida que representa el contenido de un envase, después de que el líquido ha sido removido por un método previamente establecido.

a) Que la sardina sea aceptable al consumirse, es decir que tenga buen sabor y olor.

b) Que la etiqueta describa y presente en forma veraz e inequívoca la información y que no induzca a error al consumidor con respecto a la naturaleza y características del producto.

c) Que las latas no tengan ninguno de los siguientes inconvenientes:

que estén abombadas,
que presenten restos de óxido,
que estén abolladas,
que salga espuma al abrirse o
que los datos de la etiqueta sean ilegibles.

Dicha información está contenida de manera detallada, en las siguientes cinco normas oficiales mexicanas vigentes, las cuales pueden consultarse en el Apéndice 2.

I. NOM-002-SCFI Productos preenvasados-contenido neto-tolerancia y métodos de verificación.

II. NOM-008-SCFI Sistema General de Unidades de Medida.

III. NOM-030-SCFI Información comercial. Declaración de cantidad en la etiqueta. Especificaciones.

IV. NOM-028-SSA1 Bienes y servicios. Productos de la pesca. Pescados en conserva. Especificaciones sanitarias.

V. NOM-086-SSA1 Bienes y servicios. Alimentos y bebidas no alcohólicas con modificaciones en su composición. Especificaciones nutrimentales.

Debido a que la compra de latas de sardina se desea hacer al mayoreo, entonces se determinó que los **lotes** bajo estudio serán contenedores para usos generales y carga sólida de aproximadamente 2 1/2 toneladas (correspondientes a 5 000 latas de sardina) y cada lata lleva marcada la identificación del lote al que pertenece, con una clave, de acuerdo a lo establecido en la Norma IV.

Los contenedores tendrán facilidad de estiba como se especifica en el tipo de contenedor "Waste Cube", véase figura 1.

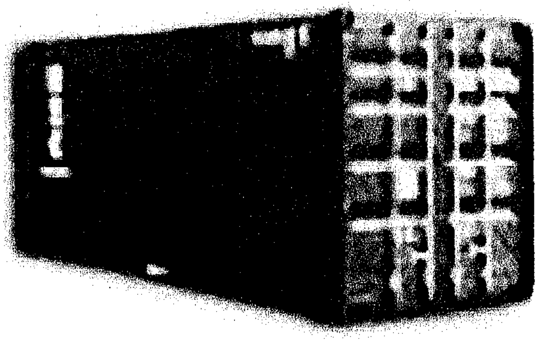


Figura 1
Tipo de contenedor Waste Cube: espacio que se utiliza dentro del mismo y facilidad para ser desplazado

Se solicita que las latas de sardina vengan acomodadas, por ejemplo, en un contenedor interno plegable, como de la figura 2.

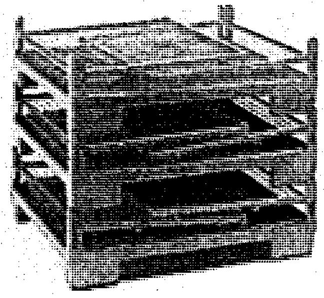


Figura 2
Tipo de contenedor plegable.

Ahora bien, considérese que un proveedor ante la convocatoria señalada, reflexiona de la siguiente manera:

Si el nivel de calidad se mide de acuerdo a la proporción de latas defectuosas en el lote, sería necesario revisar cuántas contiene el contenedor pero, sucede que éste está formado por 5,000, las cuales son demasiadas como para revisarlas todas, por ello, sólo se medirá la calidad en una muestra.

Es importante destacar que para estimar la proporción de latas defectuosas es necesario destruirlas.

Así entonces la muestra admisible de latas se seleccionará aleatoriamente de manera secuencial y con ello se determinará si el lote se acepta o no.

Entonces, el proveedor y el comprador deben decidir cuándo un lote de sardina cumple con la calidad establecida. Comentan varios planes de muestreo de aceptación que satisfagan la calidad de prueba requerida y el costo para éstos.

Una vez que han determinado la calidad específica del lote, el proveedor enviará los lotes que cumplan con los requerimientos de calidad establecida previamente.

A su vez el comprador para ver si acepta o no el lote para ser adquirido, lleva a cabo la aplicación del plan de muestreo acordado, es decir, el lote será sometido a una inspección de aceptación, donde cada lata será clasificada en dos categorías: defectuosa y no defectuosa. Como la proporción de latas defectuosas en el lote es desconocida, será estimada secuencialmente.

De acuerdo a los criterios para rechazar un lote bueno, el riesgo de la toma de la decisión se consideró del 2%, α=0.02, y corresponde al riesgo del productor "o proveedor de las sardinas". Por otro lado para aceptar un lote malo el riesgo en la toma de la decisión se consideró del 8%, β=0.08, y se refiere al riesgo del consumidor (o de quien compra el lote). Así mismo, se considera como nivel de calidad aceptable la proporción de defectuosos P_0=0.01 (1%), y el por ciento de defectuoso no tolerables de P_1=0.05 (5%).

Así entonces, las hipótesis que se pretenden probar pueden establecerse como[3]:

H_0:	$P \leq P_0$	vs H_1:	$P > P_0$
:	$P = P_0=0.01$	:	$P = P_1=0.05 \quad (P_1 > P_0)$
:	cumple con la calidad establecida el lote	:	no cumple con la calidad establecida el lote
:	el lote es bueno, se acepta	:	el lote no es bueno, se rechaza

Dentro del procedimiento de muestreo secuencial, las muestras o latas serán tomadas aleatoriamente una a una, tomando cualquiera de las siguientes decisiones aceptar o rechazar H_0, situaciones donde se suspende el muestreo, o bien continuar muestreando, en este último caso se toma una muestra admisible más.

A continuación se presentan los resultados finales de la aplicación de la teoría, haciendo uso del paquete MATHEMATICA.

[3] Wald [1]; Mendoza [6].

Para ello se utilizaron los tres siguientes reportes gráfico-tabular, para la determinación de la función característica de operación de la prueba, de la función tamaño esperado de muestra y de las zonas de decisión, respectivamente.

4.1.1 Determinación de la FCOP

En el reporte 4.1.1, se presenta la FCOP tanto gráfica como tabularmente, esta función se refiere a la probabilidad de aceptar el lote, para los diferentes valores de la proporción P de latas defectuosas en éste, entre P_0 y P_1 inclusive, y con ello se mide la calidad de la prueba de hipótesis para la aceptación o el rechazo del lote bajo el plan de muestreo propuesto.

Así entonces, para el plan de muestreo se fija P_0=0.01 y P_1=0.05 y la calidad de la prueba de hipótesis se determina considerando los riesgos en la toma de decisiones para el rechazo de H_0, riesgo del productor $\alpha = \Pr(\text{rechazar } H_0/P_0) = K(P_0) = 1 - L(P_0) = 0.02$, y para la aceptación de H_0, riesgo del consumidor $\beta = \Pr(\text{aceptar } H_0/P_1) = 0.08$.

En la forma tabular aparece una columna, h(P), la cual está en función de P_0 y P_1 que permite determinar el valor de la proporción de defectuosos para diferentes valores entre P_0 y P_1, inclusive. En particular, cuando los valores de h son próximos a 1 el valor de la proporción de los defectuosos será próximo a P_1 específicamente si h=1 la proporción de defectuosos en el plan de muestreo considerado es exactamente P_1 que es del 5%, lo que significa tomar la decisión de rechazar el lote cuando la probabilidad de defectuosos es de P_1 = 0.05 y el riesgo para el productor es del 2% (α); y cuando h= -1 la proporción de defectuosos es exactamente P_0 que es del 1%, es decir el lote se acepta cuando la probabilidad de aceptación del lote es de $P_0=0.01$ con un riesgo del consumidor de 8% (β).

Se pueden considerar otros planes de muestreo, que posibilitan determinar otra calidad para la prueba de hipótesis, para ello, se determina qué riesgo se acepta tanto para el productor (α), como para el consumidor (β), y por otro lado también se determina la probabilidad de artículos defectuosos tanto para la aceptación del lote (P_0), como para el rechazo del lote (P_1).

Reporte 4.1.1: Determinación de la función característica de operación de la prueba

Plan de muestreo de aceptación secuencial por atributos cuando se usa la distribución binomial.

Caso unilateral derecho.

$H_0: P=P_0$ vs $H_1: P=P_1$ $(P_1>P_0)$

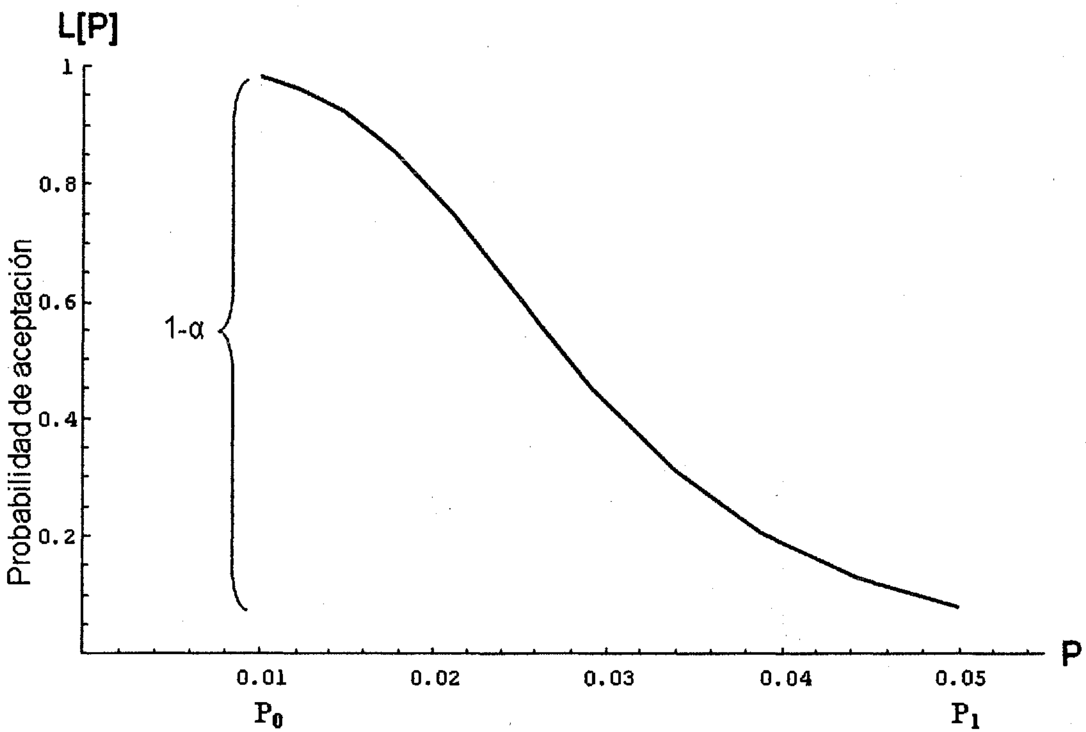
: el lote de sardinas se acepta : el lote de sardinas se rechaza

$P_0=0.01$ Probabilidad de aceptación $P_1=0.05$ Probabilidad de rechazo

$\beta=0.08$ riesgo del consumidor $\alpha=0.02$ riesgo del proveedor

P: Probabilidad de artículos defectuosos

Forma gráfica



Nota:

L[P]= Pr (Aceptar H_0 /P)

Forma tabular

h(P)	P		L [P]
- 1.0	P_0=0.01	(α =0.02)	0.98=1-α
-0.8	0.0122182		0.959291
-0.6	0.0148047		0.92003
-0.4	0.0177843		0.851349
-0.2	0.0211749		0.744844
0.0	0.0249854		0.604443
0.2	0.0292156		0.451272
0.4	0.0338552		0.312502
0.6	0.0388849		0.204607
0.8	0.0442777		0.129253
1.0	P_1=0.05		0.08=β
			(1-β =0.92)

4.1.2 Determinación de la FTEM

En el reporte 4.1.2, se muestra gráfica y tabularmente la FTEM, dicha función se refiere al tamaño esperado de la muestra admisible que se requiere para que el proceso de muestreo termine, dependiendo del por ciento de latas defectuosas P que tenga el lote por revisar que puede estar entre P_0 y P_1 inclusive, o bien de valores menores que P_0 o mayores que P_1.

Así entonces, se puede determinar qué tamaño esperado de muestra se requerirá para rechazar o aceptar el lote de sardinas, ante diferentes valores de P. Ahora bien analícese diferentes casos.

Rechazo del lote de sardina, ante diferentes valores de P:

Supóngase: $P=0.01=P_0$, $P=P_0+0.02=0.03$; $P=0.05=P_1$, $P=P_1+0.05=0.10$

Véase de acuerdo a cada plan de muestreo el tamaño de muestra admisible que se esperaría tener para rechazar H_0.

Si $1\text{-}L(P=P_0)=Pr(\text{rechazar } H_0/P=0.01=P_0)=K(0.01)=0.02$ que es el valor de alfa	El tamaño de muestra es aproximadamente de 96
Sí $1\text{-}L(P=P_0+0.02)=Pr(\text{rechazar } H_0/P=0.03)=K(P_0+0.02)=K(0.03)$ será mayor que el valor de alfa(>0.02).	El tamaño de muestra es aproximadamente de 137
Sí $1\text{-}L(P=P_1)=Pr(\text{rechazar } H_0/P=0.05=P_1)=K(0.05)$ será aún más grande que el valor de alfa (>>> 0.02).	El tamaño de muestra es aproximadamente de 80
Sí $1\text{-}L(P=P_1+0.05)=Pr(\text{rechazar } H_0/P=0.10)=K(P_1+0.05)=K(0.10)$ todavía más grande que el valor de alfa (>>>>>>>>0.02)	El tamaño de muestra será mucho menor de 80

Como pudo observarse cuando se rechaza H_0, partiendo del mínimo riesgo para rechazar, $\alpha = 0.02$, en general el tamaño de muestra que se requiere es menor conforme el valor de P aumentó, pero también el riesgo va a ser mayor, excepto, cuando la P se encuentra entre P_0 y P_1, por ejemplo para P=.03. Lo último ocurre ya que la posibilidad del rechazar H_0 es incierto, ya que también pudiera ser posible el aceptar H_0.

Aceptación del lote de sardina, ante diferentes valores de P:

Suponiendo que $P=0.05=P_1$, $P=.03= P_1-0.02$; $P=0.01=P_0$, $P=0.005= P_0-0.005$

Véase para cada caso qué tamaño de muestra admisible se requiere para aceptar H_0.

Sí $L(P=0.05=P_1)= Pr(\text{aceptar } H_0/P=0.05=P_1)=0.08$ que es el valor de beta.	El tamaño de muestra es aproximadamente de 80
Sí $L(P=P_1-0.02=0.03)= Pr(\text{aceptar } H_0/P=0.03=P_1-0.02)$ que será mayor que el valor de beta (>0.08).	El tamaño de muestra es aproximadamente de 137
Sí $L(P=P_0=0.01)= Pr(\text{aceptar } H_0/P=0.01=P_0)$ será aún más grande que el valor de beta (>>> 0.08).	El tamaño de muestra es aproximadamente de 96
Sí $L(P=P_0-0.05=0.005)= Pr(\text{aceptar } H_0/P=0.005=P_0-0.005)$ todavía más grande que el valor de beta (>>>>>>>>0.08).	El tamaño de muestra será mucho menor de 96

Como pudo observarse cuando se acepta H_0 en general el tamaño de muestra que se requiere es menor que m=96, conforme el valor de P es inferior que P_0 y cuando la P se encuentra entre P_0 y P_1, por ejemplo P=0.03, se requiere m>96. Lo último ocurre ya que la posibilidad de aceptar H_0 es incierta, ya que también pudiera ser posible el rechazo de H_0.

Por otro lado cuando se rechaza H_0, en general el tamaño de muestra m que se requiere es menor que 80 conforme el valor de P es mayor que P_1 y cuando P se encuentra entre P_0 y P_1, por ejemplo P=0.3 se requiere m>80, ya que la probabilidad de rechazar es incierta ya que también pudiera ser posible la aceptación de H_0.

Reporte 4.1.2: Determinación de la función tamaño esperado de muestra

Plan de muestreo de aceptación secuencial por atributos cuando se usa la distribución binomial.
Caso unilateral derecho.

$H_0 : P=P_0$ vs $H_1 : P= P_1$ $(P_1>P_0)$

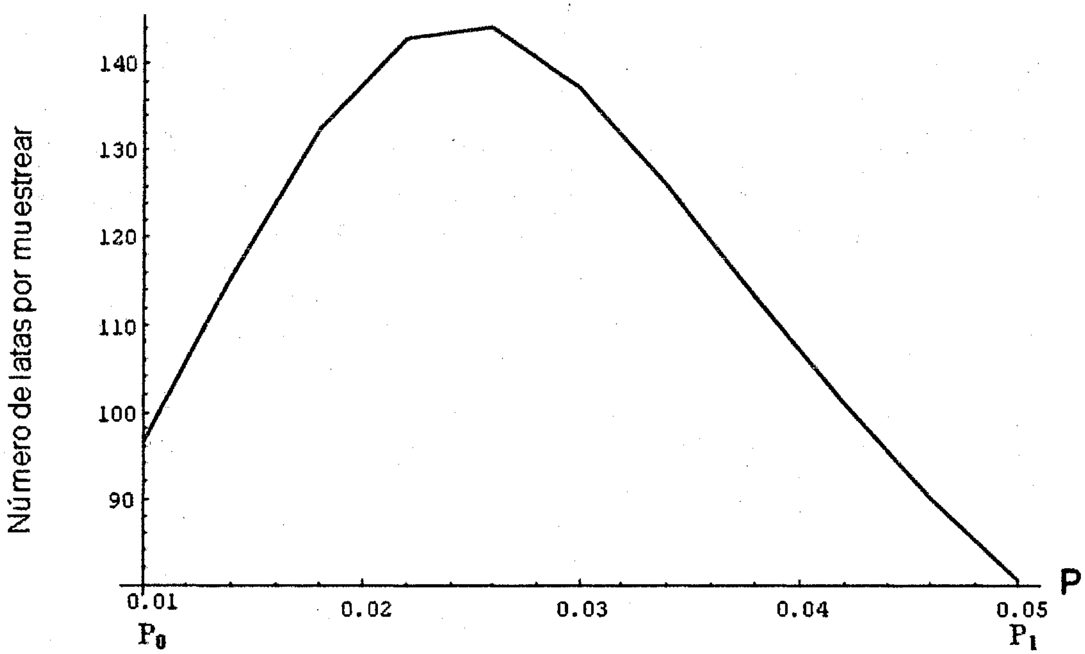
: el lote de sardinas se acepta : el lote de sardinas se rechaza

$P_0=0.01$ Probabilidad de aceptación $P_1=0.05$ Probabilidad de rechazo

$\beta=0.08$ riesgo del consumidor $\alpha=0.02$ riesgo del proveedor

P: Probabilidad de artículos defectuosos

Forma gráfica



Nota:

TEM [m/P]= TEM(P)=m

Forma tabular

	P	TEM(P)=m
$P_0=$	0.01	96.1687
	0.014	115.184
	0.018	132.365
	0.022	142.803
	0.026	143.942
	0.03	137.144
	0.034	125.853
	0.038	113.17
	0.042	100.942
	0.046	89.9679
$P_1=$	0.05	80.451

4.1.3 Determinación de las ZD

En el reporte 4.1.3. se determinan las zonas de decisión y los umbrales bajo el plan de muestreo propuesto donde en el eje de las x se refiere al número de unidades inspeccionadas (latas de sardina)y en el eje de las y el número de latas de sardinas defectuosas.

La gráfica está formada por dos líneas rectas paralelas, que se refieren a lo umbrales para la toma de las decisiones, la línea de color rojo, $C_1(m)$, es la línea de decisión superior, cuya pendiente es 0.0249854 y ordenada al origen 2.31943, determina que sobre y arriba de esta línea se encuentra la región de rechazo de H_0, en tanto que la línea de color verde, $C_0(m)$, es la línea de decisión inferior con pendiente 0.0249854 y ordenada al origen -1.51787, determina que abajo y sobre de esta línea se encuentra la región de aceptación de Ho, finalmente la zona que se encuentra entre las dos líneas es la zona de indecisión para rechazar o aceptar H_0.

El muestreo comenzará con un tamaño de muestra admisible m =1, viendo la gráfica las trayectorias que pueden graficarse son de un sólo punto(SD(si defectuoso), ND(no defectuoso)) como estas trayectorias caen dentro de zona de indecisión (no rechazar Ho, no aceptar Ho) por lo tanto se toma un nueva muestra admisible y ahora se tiene m=2, en este caso las trayectorias pudieran ser (SD, SD),(SD, ND), (ND, SD), (ND, ND) y nuevamente todas las trayectorias se encuentran en la zona de indecisión, por lo tanto se toma nuevamente una muestra admisible. Para m=3 se tienen las siguientes trayectorias T1=(SD, SD, SD), T2=(SD, ND, SD), T3=(ND, SD, SD), T4=(ND, ND, SD) T5=(SD, SD, ND), T6=(SD, ND, ND), T7=(ND, SD, ND) y T8= (ND, ND, ND), de estas solo la trayectoria T1 implica terminar con el muestreo pues cae en la zona de rechazo de H_0 y el muestreo termina, pues la última muestra permitió contabilizar tres defectuosas y ese es el requerimiento para rechazar Ho, con un riesgo del productor de alfa= 0.02. Lo anterior indica que como la decisión fue muy rápida y de acuerdo al tamaño esperado de muestra, sí P=0.05 se esperaría que fuera de m=80 ello indica que en este caso como m=3, entonces se tendría la expectativa de que P fuera mucho mayor que 0.05 pues sólo de este modo se rechazaría H_0 con una muestra tan pequeña y por supuesto también se tendría que el riesgo del productor fuera mucho menor que 2%.

Ahora bien, otra forma para poder decidir si el muestreo se suspende o no, al realizar la inspección de las latas, es la que se muestra en la forma tabular, la cual se puede obtener con la ayuda de las ecuaciones o umbrales, para ello se determina el número de defectuosos para la aceptación y para el rechazo de H_0 (si es que existe), para cada particular tamaño de muestra admisible m.

Aceptación de H_0:

Para el plan de muestreo supuesto, la aceptación del lote lo más rápido posible se tendrá cuando se hubieran inspeccionado m= 61 latas y todas fueran no defectuosas, véase Tabla a. Este valor, m, de muestra admisible se observa también en la Tabla c y se determina considerando el umbral para aceptar H_0:

d= -1.51787 + 0.0249854 m

En donde d es el número de latas defectuosas que deben ser >=0, y el tamaño de muestra admisible, m, debe ser >=1.

Considerando sólo latas no defectuosas, es decir, d=0

0 = -1.51787 + 0.0249854 m

El tamaño de muestra admisible para aceptar H_0, es m= 60.75 (61)

Es decir, con el plan de muestreo propuesto, el lote será aceptado hasta que se hayan inspeccionado 61 latas y no se haya encontrado ninguna defectuosa, véase Tabla a.

Por otro lado, también se puede determinar en qué momento y con qué cantidad de m admisible se requiere para tomar la decisión de aceptar H_0, considerando que se tuviera una o más de una lata defectuosa (d=1, d=2, d=3,...), siempre y cuando, no se hayan determinado latas defectuosas después de la inspección de la muestra admisible m=61 latas, véase tabla a, ya que, en ese momento termina el muestreo con la aceptación del lote, sin ninguna lata defectuosa.

d=# de latas defectuosas para aceptar H_0 d=-1.51787+0.024985 m	**m=**Latas inspeccionadas
0	61
1	101
2	141
3	181
4	221
5	261

tabla a. Cálculo del número de latas defectuosas para aceptar la hipótesis H_0

Así entonces, el muestreo de aceptación secuencial, intuitivamente da como resultado la muestra admisible de menor tamaño, 61 latas inspeccionadas, con la que se puede tomar la decisión de aceptar el lote, cuando no se tiene ninguna lata defectuosa.

Rechazo de H_0:

Ahora bien, para determinar el menor tamaño de muestra admisible, m, para rechazar H_0, se considera el umbral:

d= 2.31943 + 0.0249854 m	En donde d es el número de latas defectuosas y debe ser >=m, y el tamaño de muestra admisible, m, sea >=1.
Sea d= m d = 2.31943 + 0.0249854 m	Se tiene que, el tamaño de muestra admisible para rechazar Ho, es m=2.37 (3), es decir, lo más pronto que se puede rechazar el lote, es con una muestra admisible igual a 3 y el número de latas defectuosas es 3, véase Tabla c)

Es decir, con el plan de muestreo propuesto, lo más pronto que se puede rechazar el lote, es con sólo una muestra admisible m= 3 donde todas hayan sido defectuosas. Con lo que se infiere que el lote es muy malo (P es más grande que P_1=0.05). Y lo que más rápido sucede es el rechazo del mismo.

Ahora bien, si las latas defectuosas no salieran en las tres primeras inspecciones de la muestra, el proceso del muestreo secuencial asegura que el siguiente tamaño de muestra menor para rechazar el lote se puede tener entre las muestras admisibles de tamaño 3 a 27, con sólo tres defectuosas.

Continuando con este proceso se puede determinar con qué cantidad de muestra admisible, m, se requiere para tomar la decisión de rechazar Ho, cuando d=3+1, d=4+1, d=5+1 ..., siempre y cuando, no se haya encontrado el número de latas defectuosas definidas para el tamaño de muestra inmediato anterior, ya que, en ese momento termina el muestreo con el rechazo del lote, véase tabla b.

d: # de latas defectuosas para rechazar Ho d=2.31943+0.024985m	m: latas inspeccionadas
3	3
3	27
4	67
5	107
6	147

tabla b. Cálculo del número de latas defectuosas para rechazar la hipótesis H_0

Umbral para aceptar Ho:
C_0=-1.51787+0.024985 m

Umbral para rechazar Ho:
C_1=2.31943+0.024985 m

Latas inspeccionadas M	# de latas defectuosas para Aceptar H_0	# de latas defectuosas para Rechazar H_0	# de latas defectuosas d	Decisión
1	-2	3	0	Continuar
.	.	.	.	Continuar
.	.	.	.	Continuar
.	.	.	.	Continuar
20	-2	3	0	Continuar
21	-1	3	0	Continuar
.	.	.	.	Continuar
.	.	.	.	Continuar
.	.	.	.	Continuar
27	-1	3	0	Continuar
28	-1	4	.	Continuar
57	.	.	.	Continuar
58	.	.	.	Continuar
59	.	.	0	Continuar
60	-1	4	0	Continuar
61	0	4	1	Continuar
62	0	4	2	Continuar
63	0	4	3	Continuar
64	0	4	4	Rechazar

tabla c. Cálculo del número de latas defectuosas para aceptar o rechazar la hipótesis H_0

En la tabla c se presentan de otra forma los datos, en la cuarta columna se tiene la información sobre el acumulado de latas defectuosas observadas en la muestra y en la última columna indica la decisión a tomar, de aceptar, rechazar o de continuar muestreando, según sea el caso.

Cuando aparecen negativos en la tabla no se puede tomar la decisión de terminar el muestreo, por lo que hay que tomar una nueva muestra admisible más.

Con la información anterior se puede inferir que, el rechazo del lote puede suceder más rápido si el lote tiene una proporción de defectuosos P mucho más grande que P_1, ya que, si al inspeccionar las tres primeras se encuentran defectuosas se rechaza el lote; y por otra parte, el proceso para aceptar el lote va a tardar más, ya que, se tienen que revisar 61 latas y no tener ninguna defectuosa para poder aceptar el lote.

Reporte 4.1.3: Determinación de las zonas de decisión

Plan de muestreo de aceptación secuencial por atributos cuando se usa la distribución binomial.

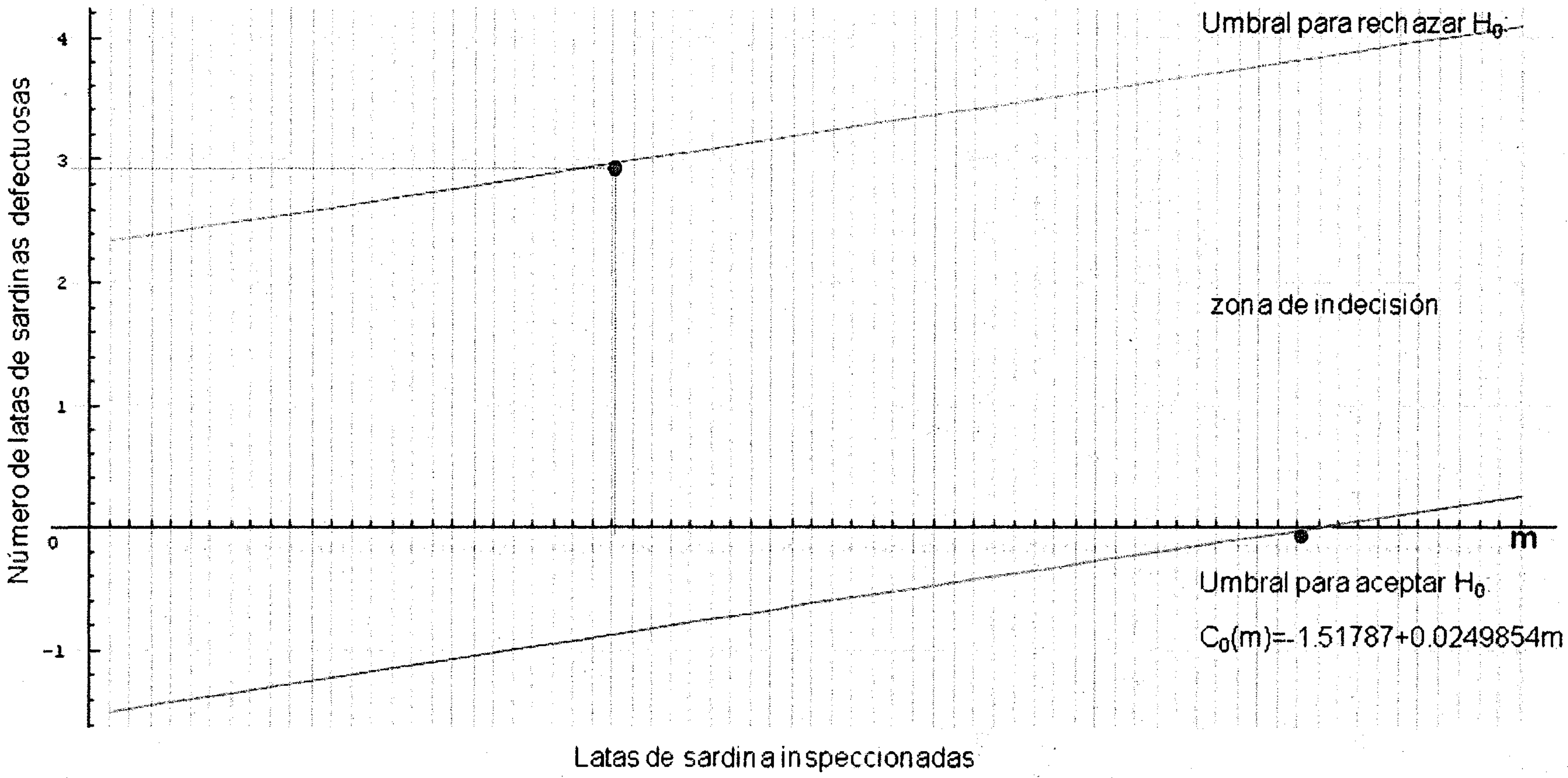
Caso unilateral derecho

$H_0: P=P_0$: el lote de sardinas se acepta vs $H_1: P=P_1$ $(P_1>P_0)$: el lote de sardinas se rechaza

$P_0=0.01$ Probabilidad de aceptación — $P_1=0.05$ Probabilidad de rechazo

$\beta=0.08$ riesgo del consumidor — $\alpha=0.02$ riesgo del proveedor

P: Porcentaje de artículos defectuosos



Reporte 4.1.3.1: Determinación de las zonas de decisión

Plan de muestreo de aceptación secuencial por atributos cuando se usa la distribución binomial.

Caso unilateral derecho. Trayectoria de muestra admisible de rechazo.

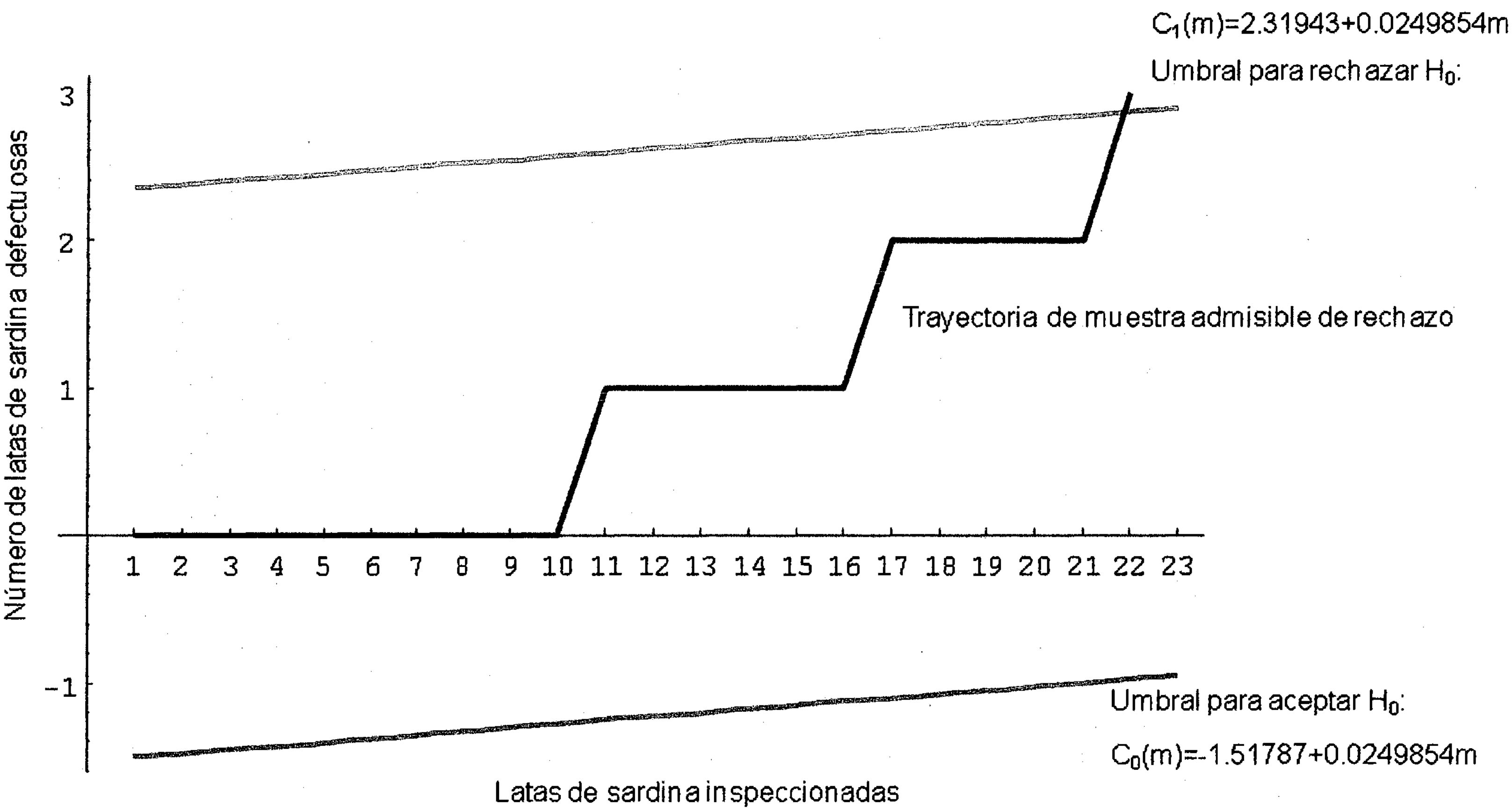
$H_0: P=P_0$ vs $H_1: P=P_1$ $(P_1>P_0)$

: el lote de sardinas se acepta — : el lote de sardinas se rechaza

$P_0=0.01$ Probabilidad de aceptación — $P_1=0.05$ Probabilidad de rechazo

$\beta=0.08$ riesgo del consumidor — $\alpha=0.02$ riesgo del proveedor

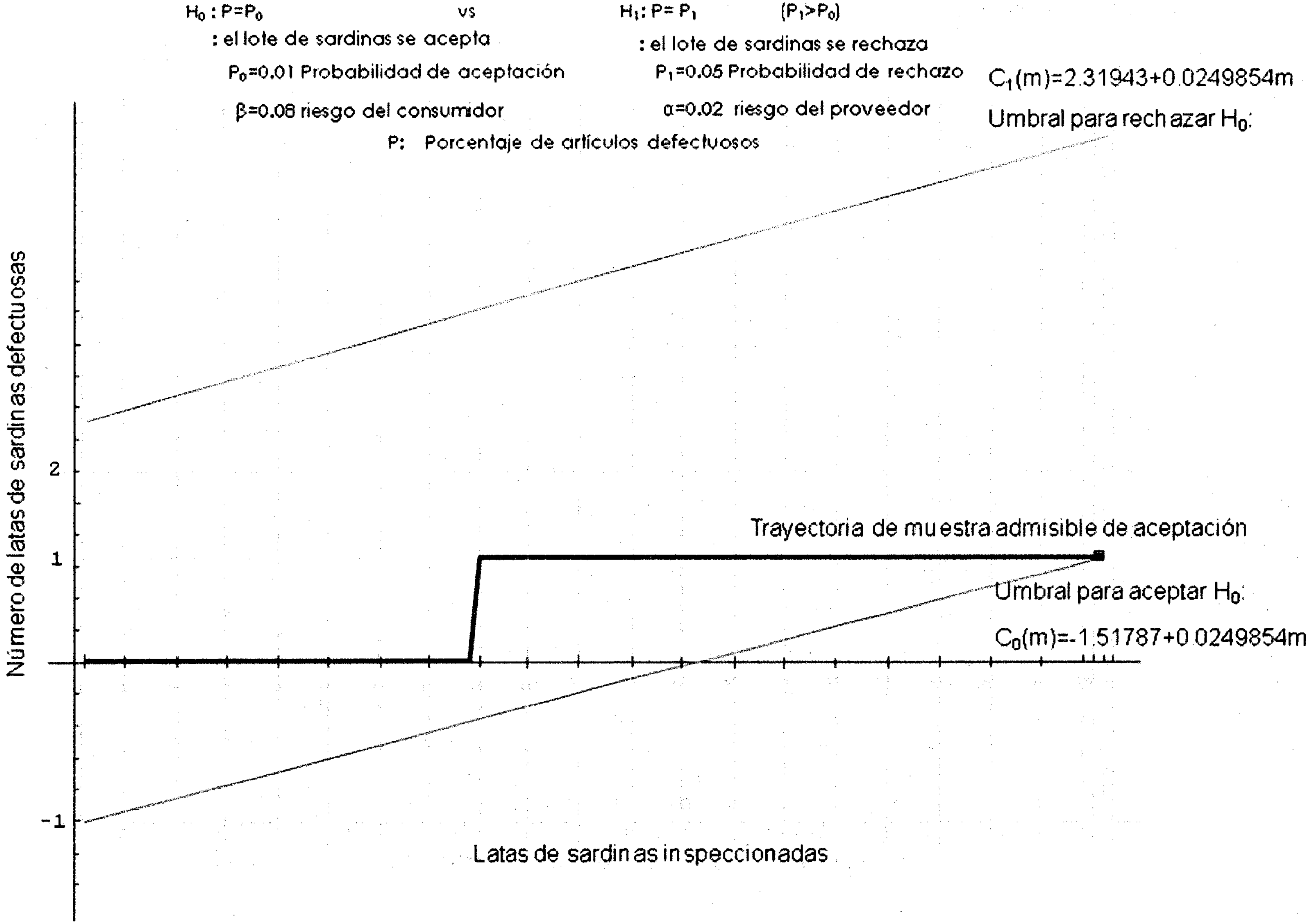
P: Porcentaje de artículos defectuosos



Reporte 4.1.3.2: Determinación de las zonas de decisión

Plan de muestreo de aceptación secuencial por atributos cuando se usa la distribución binomial.

Caso unilateral derecha. Trayectoria de muestra admisible de aceptación.



4.2 Muestreo de aceptación por variables cuando se usa la distribución normal.

Duncan[16], refiere que el plan de muestreo de aceptación es uno de los campos más amplios del control estadístico de calidad, de aquí la importancia del análisis secuencial aplicado a variables discretas y continuas en esta área de aplicación.
Por lo anterior es importante conocer y manejar información referente a la calidad, por esto es que se presenta en el Apéndice 3 algunos comentarios sobre calidad.

Para el caso de la distribución normal, el muestreo de aceptación secuencial se refiere a variables continuas que pueden clasificarse de acuerdo al tipo de escalas de medición[4] utilizadas: nominal, ordinal, de intervalo, de relación ó absoluta, véase Apéndice 4 - Escalas de medición-. En este tipo de medida, según el caso, la inspección por variables continuas contiene mayor riqueza numérica lo que permite realizar el cálculo aritmético con las operaciones básicas, lo que no puede hacerse sobre la característica bajo medición cuando la medida se hace por atributos.

Un ejemplo para el caso de la Distribución Normal, en el tema de las latas de sardina, sería considerar la grasa total contenida por porción (425gr. de masa drenada) que se requiere para considerarla de calidad y que en este caso de acuerdo a la Norma: NOM-002-SCFI, se requiere de 12.5 gr. de grasa. Así entonces el muestreo de aceptación se llevaría a cabo considerando $\mu_0 = 12.5$.

[4] Principios de investigación médica; Cañedo Dorantes Luis, García Romero Horacio, Méndez Ramírez Ignacio, Impresiones Modernas; México 1977; pp 106-113.

Sin embargo, para comentar el muestreo por variables se considerará el siguiente ejemplo.
Ejemplo 4.2 Compra de yeso a granel para construcción.

El caso para la aplicación de este muestreo, se refiere a un mineral formado por sulfato cálcico hidratado, conocido comúnmente como yeso (aljez o piedra de yeso), su principal utilización es para la producción de escayola[5], también se usa como material para construcciones temporales, para enyesado de paredes, molduras y vaciados, y junto con arcilla se emplea como fertilizante.

Ahora bien, considere que la empresa "Compañía Yesera del Noroeste", localizada en Tapia, en la Provincia de Tucumán, República Argentina, que tiene como lema publicitario "brindar la mejor calidad y rendimiento en yeso para la construcción", está interesada en comprar lotes de yeso de buena calidad, para su venta. Para tal propósito, la empresa decide publicar un anuncio en el periódico en el que especifica que quiere comprar yeso que cumpla con que, la densidad promedio a granel -sin empaquetar -, sea de 2.320 gr/cm³, de acuerdo a lo que señala la norma española RY-85 (véase Apéndice 5 y Duncan[16], donde se encuentra este ejemplo con algunas modificaciones).

Con el propósito de tomar la mejor decisión para la compra del yeso y al considerar la planeación del muestreo de aceptación, la compañía estimó conveniente que se debiera tener un proceso que acepte los lotes de dicho yeso 95 de cada 100 veces, es decir, $\alpha = 0.05$, que se refiere al riesgo del productor con una densidad promedio a granel de 2.320 gr/cm³= μ_0. Además se consideró que, dicha compañía acepte no más del 10% de las veces una densidad a granel promedio de 2.315 gr/cm³, es decir, $\beta = 0.10$, que se refiere al

[5] yeso calcinado que, mezclado con agua, se emplea como material plástico para modelar figuras o adornos.

riesgo del consumidor y $\mu_1 = 2.315$ gr/cm³. Y además la desviación estándar de la densidad a granel se conoce que es de 0.006 gr/cm³.

Así entonces, las hipótesis que se pretenden probar son:

$H_0: \mu \geq \mu_0$	vs	$H_1: \mu < \mu_0$
$: \mu = \mu_0 = 2.320$		$: \mu = \mu_1 = 2.315 \qquad (\mu_1 < \mu_0)$
:Se acepta el lote		:Se rechaza el lote

Ahora bien, surge la primer pregunta ¿cómo muestrear el yeso?, si se está pensando en comprar toneladas de yeso, se consultan los dos siguientes documentos:

I.- Norma española RY-85: "Pliego general de condiciones para la recepción de yesos y escayolas en las obras de construcción" que establece tipos de yeso, constitución, resistencia y usos, así como, las características más importantes del yeso véase Apéndice 5.

II.- Manual: M MMP 2 02 001/100, Métodos de muestreo y pruebas de materiales, publicado por la Secretaría de Comunicaciones y Transportes véase Apéndice 6.

Una vez que el proceso de muestreo queda establecido, se muestrea tomando en cuenta lo siguiente:

Para la aplicación del muestreo de aceptación para el yeso se toma una muestra aleatoria del material a granel donde se considera como un lote una tolva con una capacidad de 19 toneladas, la cual es un semirremolque ideal para el manejo de materiales a granel, con las siguientes características:

- Capacidad: 19.00 m^3
- Longitud: 7.10 m
- Altitud: 4.05 m
- Ancho: 2.60 m
- 1 eje
- Bajo costo de mantenimiento
- Facilidad de operación de maniobra
- Mayor capacidad de carga en menor longitud
- Mayor estabilidad en carretera por su centro de gravedad
- Garantizan carga completa en cada operación.

Se solicitarán partidas de material que serán trasladadas en una unidad de transporte llamada "TOLVA", véase figura siguiente, y serán llevadas al sitio donde se realizará el análisis de la muestra.

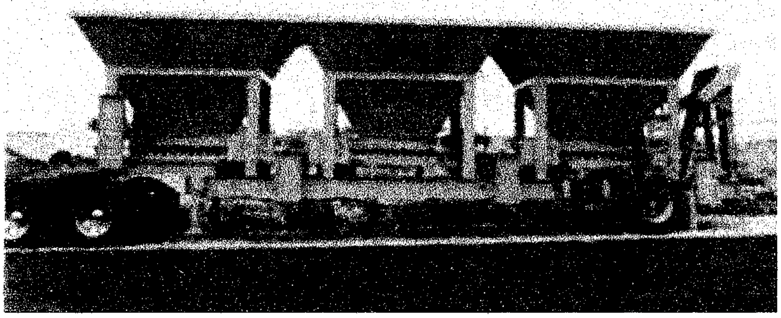


Figura 3

Tolvas de aproximadamente 19 toneladas

La extracción de las muestras las hace el cliente, que en este caso es la compañía Yesera del Noroeste, teniendo derecho a presenciarla el proveedor.

Para la realización del muestreo secuencial del yeso almacenado a granel, se pueden considerar dos procedimientos:

Procedimiento 1.

Del yeso almacenado en una tolva y en la abertura de descarga, durante el lapso que tarde en aparecer en ella un indicador colocado previamente al muestreo en la superficie del yeso, directamente arriba de cada abertura, se toman tres muestras parciales de 5 kg., cada una a intervalos regulares. Cada muestra parcial se envasa e identifica.

Procedimiento 2.

De no ser posible tomar la muestra integral de la abertura de descarga como se indica en el párrafo anterior y cuando la profundidad del yeso por muestrear no exceda de 2.1 m. se insertará verticalmente el tubo muestreador, figura 4, en puntos bien distribuidos sobre el área de almacenamiento, con el propósito de extraer las muestras parciales necesarias para constituir una muestra integral de 10 kg. Para extraer la muestra utilizando el tubo muestreador véase el Apéndice 6: Manual, Métodos de Muestreo y Pruebas de Materiales.

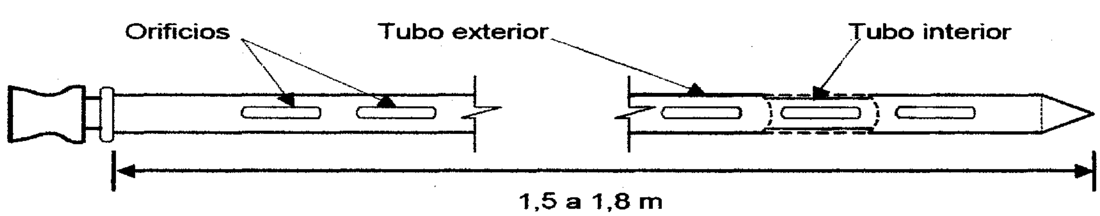


Figura 4. Tubo muestreador de yeso

Ahora bien, véase el resultado del análisis a través de los reportes gráfico-tabulares con los cuales se determinarán la función característica de operación de la prueba, la función tamaño esperado de muestra y las zonas de decisión para continuar o terminar el proceso de muestreo de aceptación secuencial.

4.2.1 Determinación de la FCOP

En el reporte 4.2.1 se presenta la FCOP tanto gráfica como tabularmente, está función muestra la probabilidad de aceptar el lote de yeso a granel para los diferentes valores de μ, que se encuentran dentro y fuera de μ_0 y μ_1, donde la calidad de la prueba de hipótesis para aceptar o rechazar el lote se determina considerando los riesgos para la toma de decisión; donde por un lado se observa que, con una probabilidad de 0.95=1-α= Pr(aceptar Ho/ μ =μ_0), el lote se acepta con una calidad de yeso de 2.320=μ_0, calidad de riesgo del productor, mientras que por otro lado para el punto μ_1= 2.315 se acepta el lote con una probabilidad de 0.10=riesgo del consumidor =β = Pr(aceptar Ho/ μ_1).

En la forma tabular aparece la columna, $h(\mu)$, la cual está en función de μ_0 y μ_1 y permite determinar el valor del parámetro μ para diferentes valores que pudieran tomar dentro y fuera de μ_0 y μ_1. En particular, cuando los valores de h son próximos a 1 el valor del parámetro estará cerca a μ_1 específicamente si $h=1$ el valor en el plan de muestreo considerado es exactamente μ_1 que es 2.315, lo que significa tomar la decisión de rechazar el lote cuando μ_1 = 2.315 y el riesgo para el productor es del 5% (α); y cuando h=-1 el lote se acepta cuando la probabilidad de aceptación es de μ_0=2.320 con un riesgo del consumidor de 10% (β).

Reporte 4.2.1: Determinación de la función característica de operación de la prueba.

Plan de muestreo de aceptación secuencial por variables cuando se usa la distribución normal.

Caso unilateral izquierdo.

$H_0 : \mu=\mu_0$ vs $H_1:\mu= \mu_1$ $\mu_1<\mu_0$

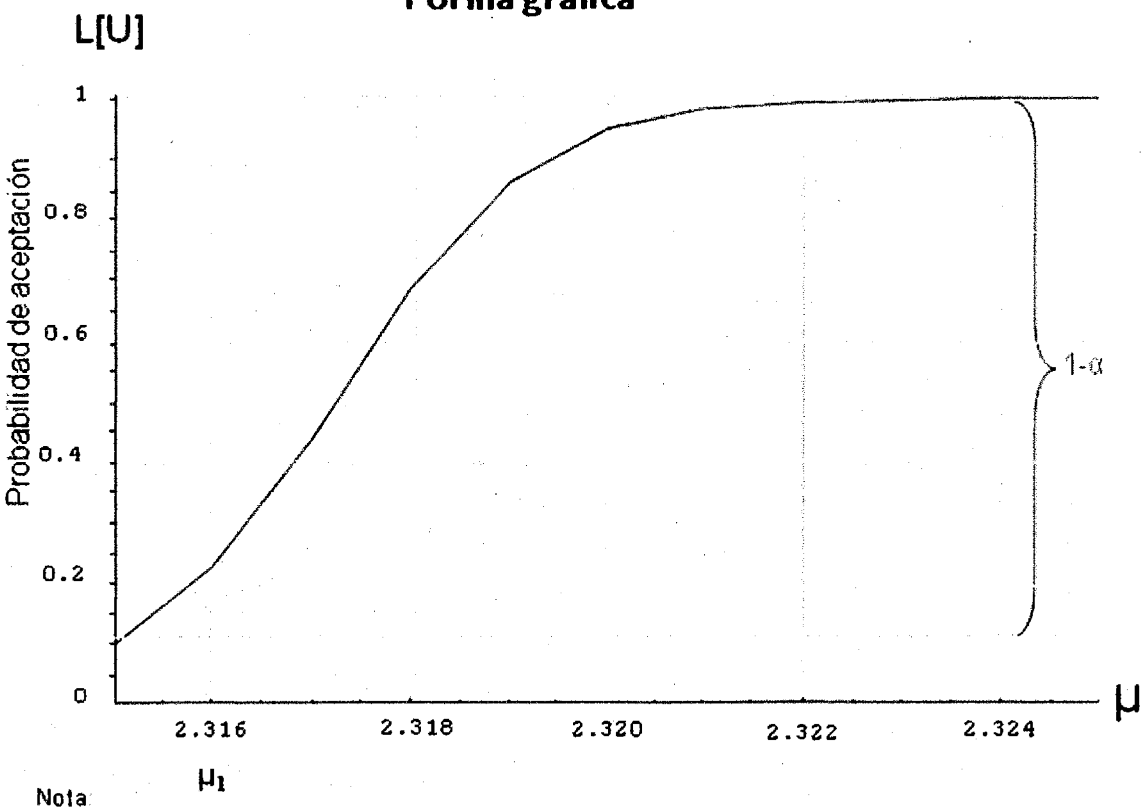
: el lote de yeso se acepta : el lote de yeso se rechaza

μ_0=2.320 Probabilidad de aceptación μ_1=2.315 Probabilidad de rechazo

β=0.10 riesgo del consumidor α=0.05; riesgo del proveedor

μ: Valor promedio de la variable

Forma gráfica



Nota:

L[U]= Pr (Aceptar H_0 /μ)

Forma tabular

	μ	$h(\mu)$	$L[\mu]$
μ_1=	2.315	1.0	0.10 =β
	2.316	0.6	0.223531
	2.317	0.2	0.435651
	2.318	- 0.2	0.683413
	2.319	- 0.6	0.862924
μ_0=	2.320	- 1.0	0.95 =$1-\alpha$
	2.321	- 1.4	0.983252
	2.322	- 1.8	0.994593
	2.323	- 2.2	0.998281
	2.324	- 2.6	0.999457
	2.325	- 3.0	0.999829

4.2.2 Determinación de la FTEM

En el reporte 4.2.2 se muestra gráfica y tabularmente la FTEM, en la cual se puede ver cuál es el número de observaciones necesarias, tamaño de muestra admisible, para que el proceso de muestreo termine tomando la decisión de rechazar o aceptar el lote dependiendo de si la suma de los valores se encuentre por debajo del valor de μ_0 o por arriba del valor de μ_1 respectivamente.

Así entonces, se presenta el análisis para diferentes valores de μ para determinar qué tamaño esperado de muestra se requerirá para rechazar o aceptar el lote de yeso a granel.

Para el rechazo del lote de yeso a granel, ante diferentes valores de μ:

Supóngase los siguientes valores para μ: μ=2.320=μ_0, $\mu=\mu_0$-0.0025=2.3175, μ=2.315=μ_1 μ_1,..., $\mu=\mu_1$-.0050= 2.310

ahora véase de acuerdo a cada plan de muestreo, el tamaño de muestra admisible, qué se esperaría tener para rechazar H_0

Si 1-L($\mu=\mu_0$)=Pr(rechazar $H_0/\mu=2.320=\mu_0$)= K(2.320)=0.95 que es el valor de uno menos alfa	El tamaño de muestra que se requiere es aproximadamente de 13
Sí 1-L($\mu=\mu_0$-0.0025)=P(rechazar H_0/μ=2.3175)=K(μ_0-0.0025) =K(2.3175) será menor que el valor de uno menos alfa(<0.95).	El tamaño de muestra que se requiere es aproximadamente de 18

Sí $1\text{-}L(\mu=\mu_1)=$ P(rechazar $H_0/\mu=2.315=\mu_1)=K(2.315)$ será aún más chico que el valor de uno menos alfa (<<< 0.95).

El tamaño de muestra que se requiere es aproximadamente de 9

Sí $1\text{-}L(\mu=\mu_1\text{-}0.0050)=$P(rechazar $H_0/\mu=2.310) = K(\mu_1\text{-}0.0050) =K(2.310)$ todavía más pequeño que el valor de uno menos alfa (<<<<<<<<0.95)

El tamaño de muestra que se requiere será mucho menor de 9

Como pudo observarse cuando se rechaza H_0 en general el tamaño de muestra que se requiere es menor conforme el valor de μ aumentó, excepto, cuando la μ se encuentra entre μ_0 y μ_1, por ejemplo para μ=2.375. Lo último ocurre ya que la posibilidad del rechazar H_0 es incierto, ya que también pudiera ser posible el aceptar H_0

Para la aceptación del lote de yeso, ante diferentes valores de μ:

Supóngase los siguientes valores para μ: $\mu=2.315=\mu_1$, $\mu=\mu_1+0.0025=2.3175$, $\mu=2.320=\mu_0, \ldots \mu=\mu_0+.0050= 2.3225$

Veamos qué tamaño de muestra se requiere para aceptar H_0 de acuerdo al plan de muestreo determinado?

Sí $L(\mu=2.315=\mu_1)=$ P(Ace $H_0/\mu=2.315=\mu_1)=0.01$ que es el valor de beta

El tamaño de muestra es aproximadamente de 9

Sí $L(\mu= \mu_1+0.0025=2.3175)=$ P(Ace $H_0/\mu=2.3175= \mu_1+0.0025)$ que será mayor que el valor de beta (>0.01).

El tamaño de muestra es aproximadamente de 18

Sí $L(\mu=\mu_0=2.320)=$ P(Ace $Ho/\mu=2.320=P_0)$ será aún más grande que el valor de beta (>>> 0.01).

El tamaño de muestra es aproximadamente de 13

Sí $L(\mu=\mu_0+0.005=2.3225)=$ P(Ace $Ho/\mu=2.3225=\mu_0+0.005)$ todavía más grande que el valor de beta (>>>>>>>>0.01).

El tamaño de muestra será mucho menor de 13

Como pudo observarse cuando se acepta H_0 en general el tamaño de muestra que se requiere es menor que m=13, conforme el valor de μ es mayor que μ_0 por otro lado cuando se rechaza H_0, en general el tamaño de muestra m que se requiere es menor que 9 conforme el valor de μ es menor que μ_1 y cuando la μ se encuentra entre μ_0 y μ_1, por ejemplo μ=2.3175, se requiere m>18, ya que la posibilidad de aceptar H_0 es incierta, ya que también pudiera ser posible el rechazo de H_0.

Es decir, cuando el valor de μ es muy próximo al valor de μ_0, el límite de aceptación se da con un tamaño de muestra de aproximadamente 13 y el límite de rechazo cuando el valor de μ es muy próximo al valor de μ_1, con un tamaño de muestra de aproximadamente de 9, con lo que se infiere que con un tamaño de muestra menor se rechaza el lote.

Reporte 4.2.2: Determinación de la función tamaño esperado de muestra.

Plan de muestreo de aceptación secuencial por variables cuando se usa la distribución normal.

Caso unilateral izquierdo.

$H_0 : \mu=\mu_0$ vs $H_1 : \mu= \mu_1$ $\mu_1<\mu_0$

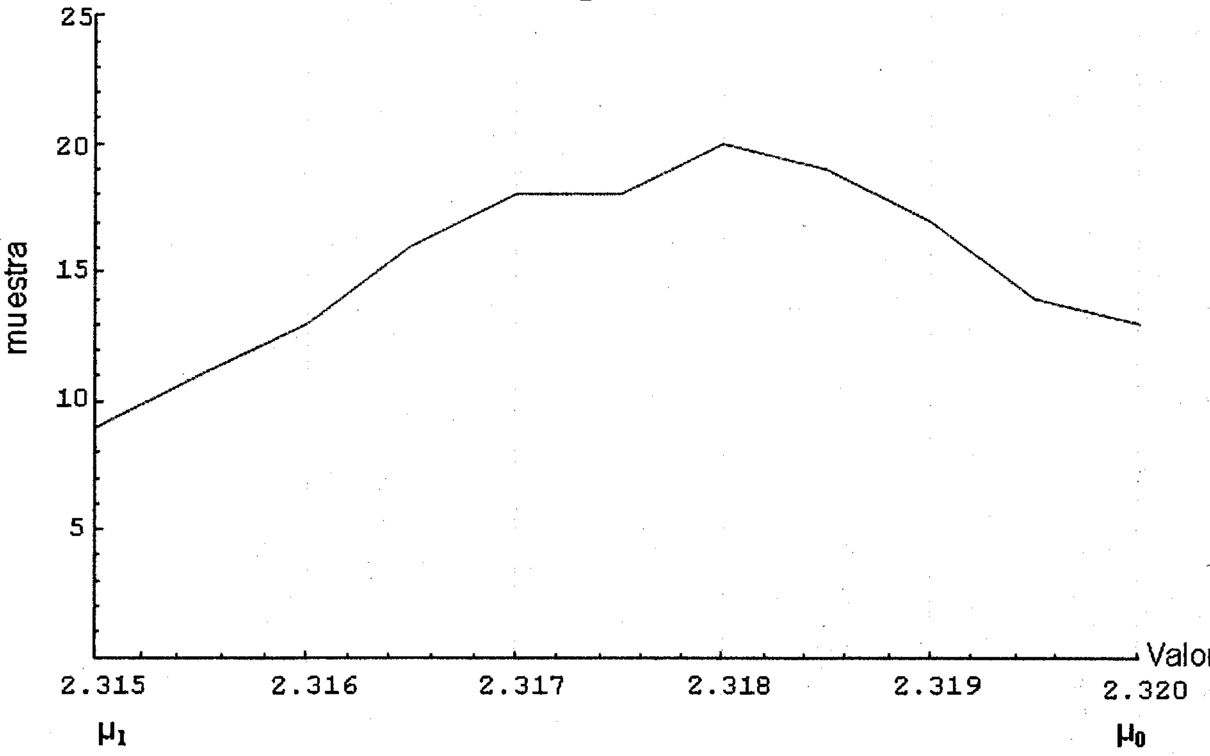
: el lote de yeso se acepta : el lote de yeso se rechaza

μ_0=2.320 Probabilidad de aceptación μ_1=2.315 Probabilidad de rechazo

β=0.10 riesgo del consumidor α=0.05; riesgo del proveedor

μ: Valor promedio de la variable

Forma gráfica



Forma tabular

	μ	TEM(μ)=m	L[U]
μ_1=	2.315	9	0.01=β
	2.3155	11	0.023
	2.316	13	0.054
	2.3165	16	0.118
	2.317	18	0.232
	2.3175	18	0.396
	2.318	20	0.577
	2.3185	19	0.732
	2.319	17	0.842
	2.3195	14	0.910
μ_0=	2.32	13	0.95=$1-\alpha$

Nota:

TEM [m/μ]= TEM(μ)=m

4.2.3 Determinación de las Zonas de Decisión

Finalmente en el último reporte de la DZD, 4.2.3, se tienen las zonas de decisión y los umbrales bajo el plan de muestreo propuesto, donde el eje de las x se refiere a las muestras de yeso inspeccionado y el eje de las y es el total de la suma de la densidad que presentarán las muestras de yeso inspeccionadas.

La gráfica está formada por dos rectas paralelas, que se refieren a lo umbrales para la toma de las decisiones, la línea de color verde, $C_1(m)$, es la línea de decisión superior, cuya pendiente es 2.70155 y ordenada al origen 2.3175, determina que, sobre y arriba de esta línea se encuentra la región de aceptación de H_0, en tanto que la línea de color rojo, $C_0(m)$, es la línea de decisión inferior con pendiente -3.46845 y ordenada al origen 2.3175, determina que abajo y sobre de esta línea se encuentra la región de rechazo de H_0, donde la zona de indecisión se encuentra entre estas dos rectas, es decir si el valor de la suma de la variable μ cae dentro de estas rectas no se puede tomar una decisión.

El muestreo comenzará con un tamaño de muestra admisible $m = 1$, y en general cuando $m \geq 2$, nos preguntaremos si la muestra tiene información suficiente, es decir, si el valor de la suma de las muestras es suficiente para poder tomar la decisión de aceptar o rechazar el lote, concluyendo el muestreo; para ello se tiene que observar si la suma de la densidad de las muestras tomadas están dentro de los límites para la aceptación o para el rechazo de H_0 (si es que existe), para cada particular tamaño de muestra admisible m, cuyos límites están dados con las ecuaciones o umbrales, véase tabla d.

Aceptación de H_0:

Para el plan de muestreo propuesto, la aceptación del lote lo más rápido posible sucederá si en un tamaño de muestra admisible igual a 1 la densidad de dicha muestra es igual o mayor 5.01905 lo cual se puede observar en la tabla d.

Rechazo de H_0:

Ahora bien, para determinar el menor tamaño de muestra admisible, m, para rechazar H_0, se considera el umbral para rechazar Ho, lo cual se puede observar también en la tabla d, que con una muestra admisible de tamaño 2 será posible rechazar el lote si la densidad observada en esa muestra es igual o menor a 1.6655.

Umbral para aceptar $C_1(m)=2.70155+2.315m$		Umbral para rechazar $C_0(m)=-3.46845+2.315m$	
m	Límite de aceptación	m	Límite de rechazo
1	5.01905	1	-1.15095
2	7.33655	2	1.16655
3	9.65405	3	3.48405
4	11.97155	4	5.80155
5	14.28905	5	8.11905
6	16.60655	6	10.43655
7	18.92405	7	12.75405
8	21.24155	8	15.07155
9	23.55905	9	17.38905
10	25.87655	10	19.70655
11	28.19405	11	22.02405
12	30.51155	12	24.34155

tabla d. Cálculo de la suma de la densidad del yeso para aceptar la hipótesis H_0

Así entonces, el muestreo de aceptación secuencial, intuitivamente da como resultado la muestra admisible de menor tamaño, por ejemplo con una muestra se puede tomar la decisión de aceptar el lote, siempre y cuando la densidad observada sea igual o mayor a 5.01905 Mientras que para rechazar con una muestra admisible de menor tamaño, es necesario tomar dos muestras y se debe cumplir que la suma de las densidades sea igual o menor a 1.16655.

Ahora bien, se puede observar en la tabla d que la suma de los valores para la aceptación siempre es mayor que para rechazar, con lo que se puede inferir que mientras que se observe una densidad menor en las muestras el lote se puede aceptar, y será mejor que en el caso cuando las muestras presenten una densidad baja, en este caso se intuye que el lote es malo y por tanto se tendrá que rechazar.

En la forma tabular de los datos que se obtiene en MATHEMATICA, que se muestra enseguida, presenta además de los límites para aceptar o rechazar H_0, 2ª y 3ª columnas, el total acumulado de las muestras observadas, así como en la última columna indica la decisión a tomar de aceptar, rechazar o de continuar muestreando, según sea el caso.

No. de muestra	Total acumulado para aceptar Ho	Total acumulado para rechazar Ho	Total acumulado observado de la muestra	Decisión
1	5.01905	-1.15095	2	Continuar
2	7.33655	1.16655	4.5	Continuar
3	9.65405	3.48405	7.3	Continuar
4	11.9716	5.80155	10.3	Continuar
5	14.2891	8.11905	10.926	Continuar
6	16.6066	10.4366	14.126	Continuar
7	18.9241	12.7541	17.346	Continuar
8	21.2416	15.0716	20.568	Continuar
9	23.5591	17.3891	23.798	Acept. Ho

Cuando aparecen valores negativos en la Tabla no se puede tomar la decisión de terminar el muestreo, por lo que hay que tomar una muestra admisible más.

Cabe hacer mención que, para este ejemplo de la distribución normal, se está analizando sólo el caso unilateral izquierdo. De manera similar se puede aplicar este proceso para bilateral, por ejemplo, para casos en los cuales las características de calidad puede resultar inaceptable en virtud de ser demasiado alta o demasiado baja. Por ejemplo, supóngase que la resistencia a la tensión de cierto acero varía con el tratamiento térmico, cuanto mayor sea el calor, mayor será la resistencia a la tensión sin embargo en temperaturas más elevadas, se hace quebradizo, lo cual es indeseable. Como resultado, el acero con una elevada resistencia a la tensión se considera inaceptable, lo mismo que el acero con baja resistencia a la tensión. Duncan[16].

Reporte 4.2.3: Determinación de las zonas de decisión.

Plan de muestreo de aceptación secuencial por variables cuando se usa la distribución normal.

Caso unilateral izquierdo.

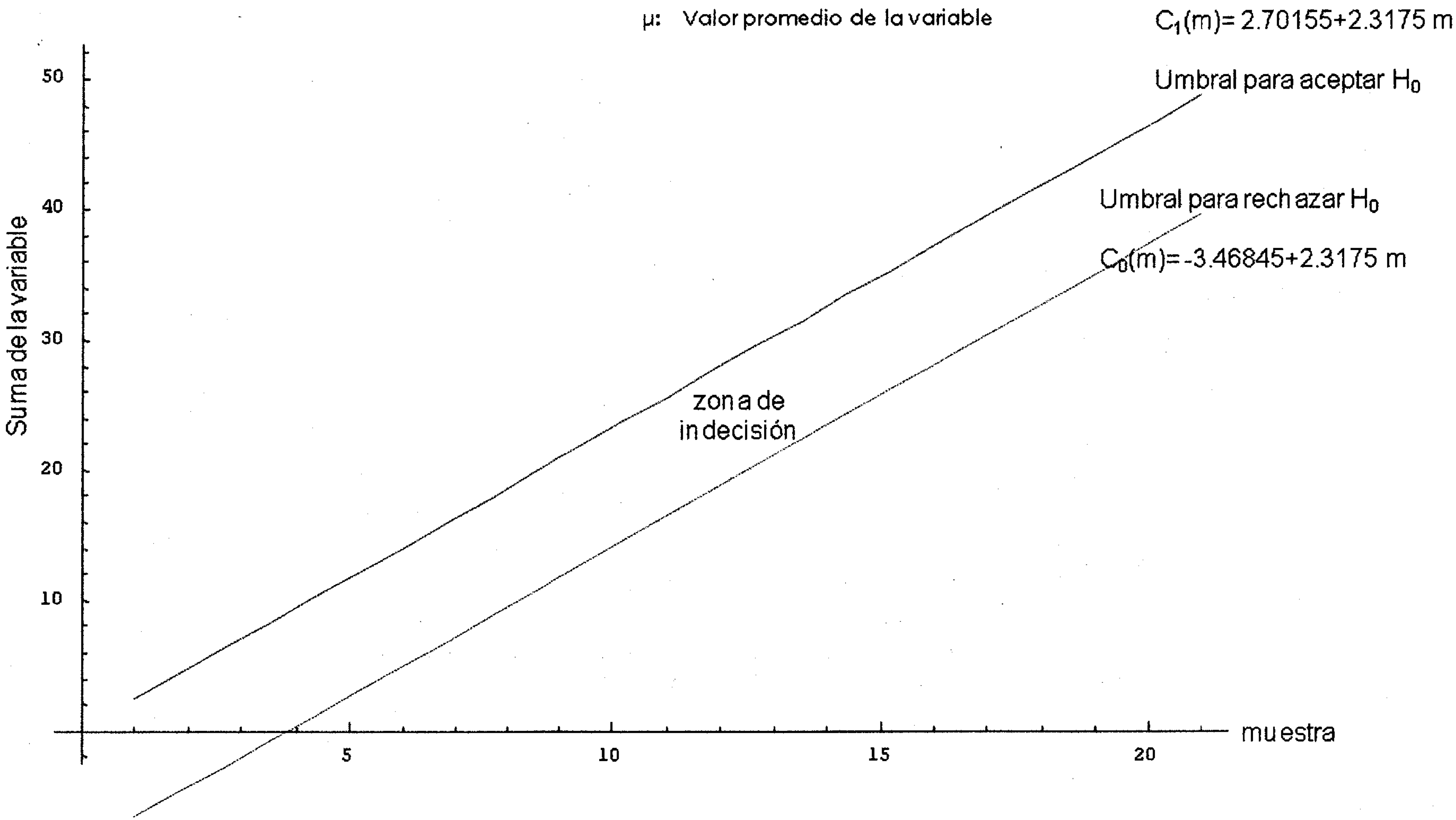
$H_0 : \mu=\mu_0$ vs $H_1 : \mu=\mu_1$ $\mu_1<\mu_0$

: el lote de yeso se acepta : el lote de yeso se rechaza

$\mu_0=2.320$ Probabilidad de aceptación $\mu_1=2.315$ Probabilidad de rechazo

$\beta=0.10$ riesgo del consumidor $\alpha=0.05$; riesgo del proveedor

μ: Valor promedio de la variable



Reporte 4.2.3.1: Determinación de las zonas de decisión.

Plan de muestreo de aceptación secuencial por variables cuando se usa la distribución normal.

Caso unilateral izquierdo. Trayectoria de muestra admisible de rechazo.

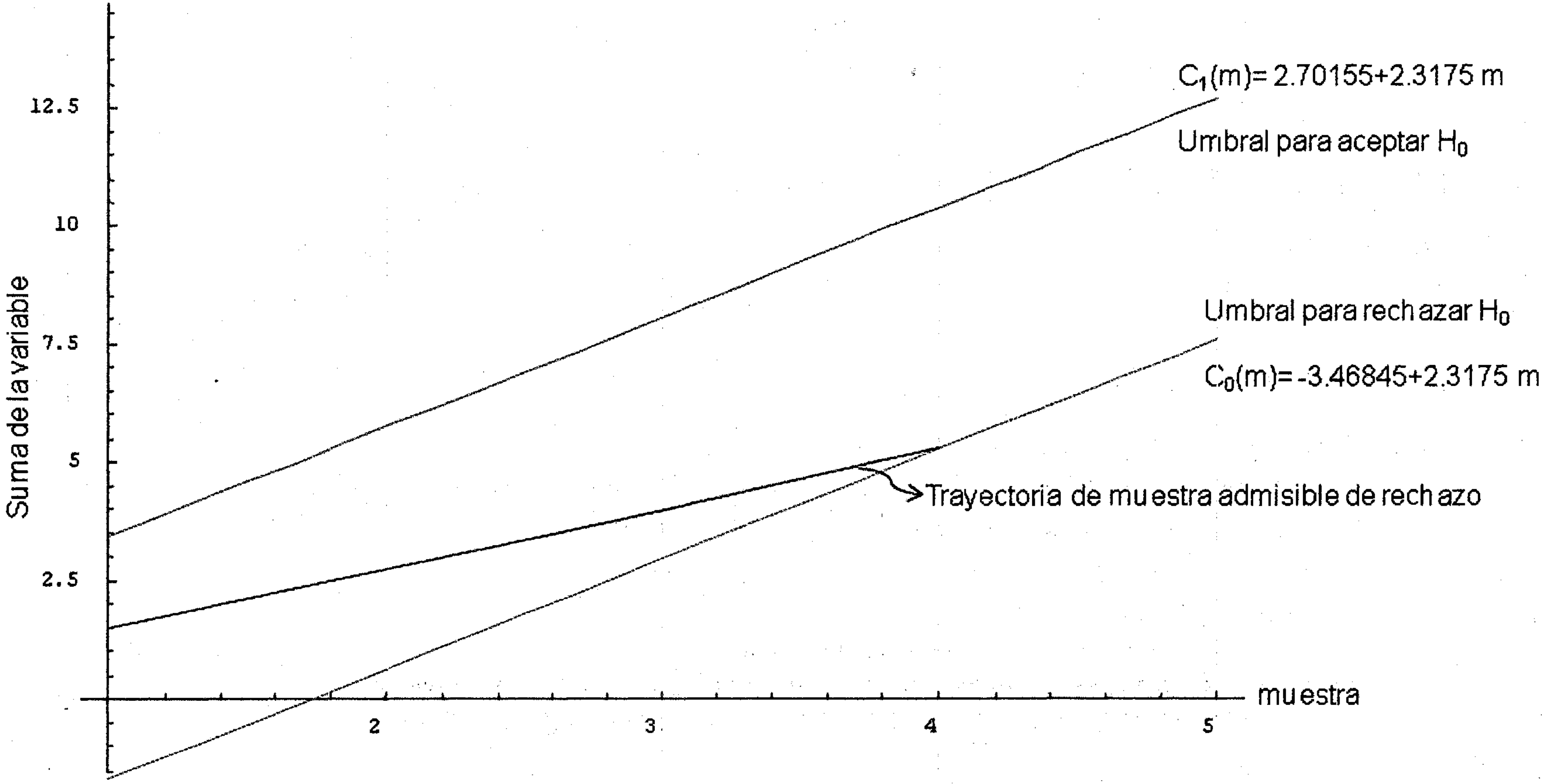
$H_0 : \mu=\mu_0$ vs $H_1 : \mu=\mu_1$ $\mu_1<\mu_0$

: el lote de yeso se acepta : el lote de yeso se rechaza

μ_0=2.320 Probabilidad de aceptación μ_1=2.315 Probabilidad de rechazo

β=0.10 riesgo del consumidor α=0.05; riesgo del proveedor

μ: Valor promedio de la variable



Reporte 4.2.3.2: Determinación de las zonas de decisión.

Plan de muestreo de aceptación secuencial por variables cuando se usa la distribución normal.

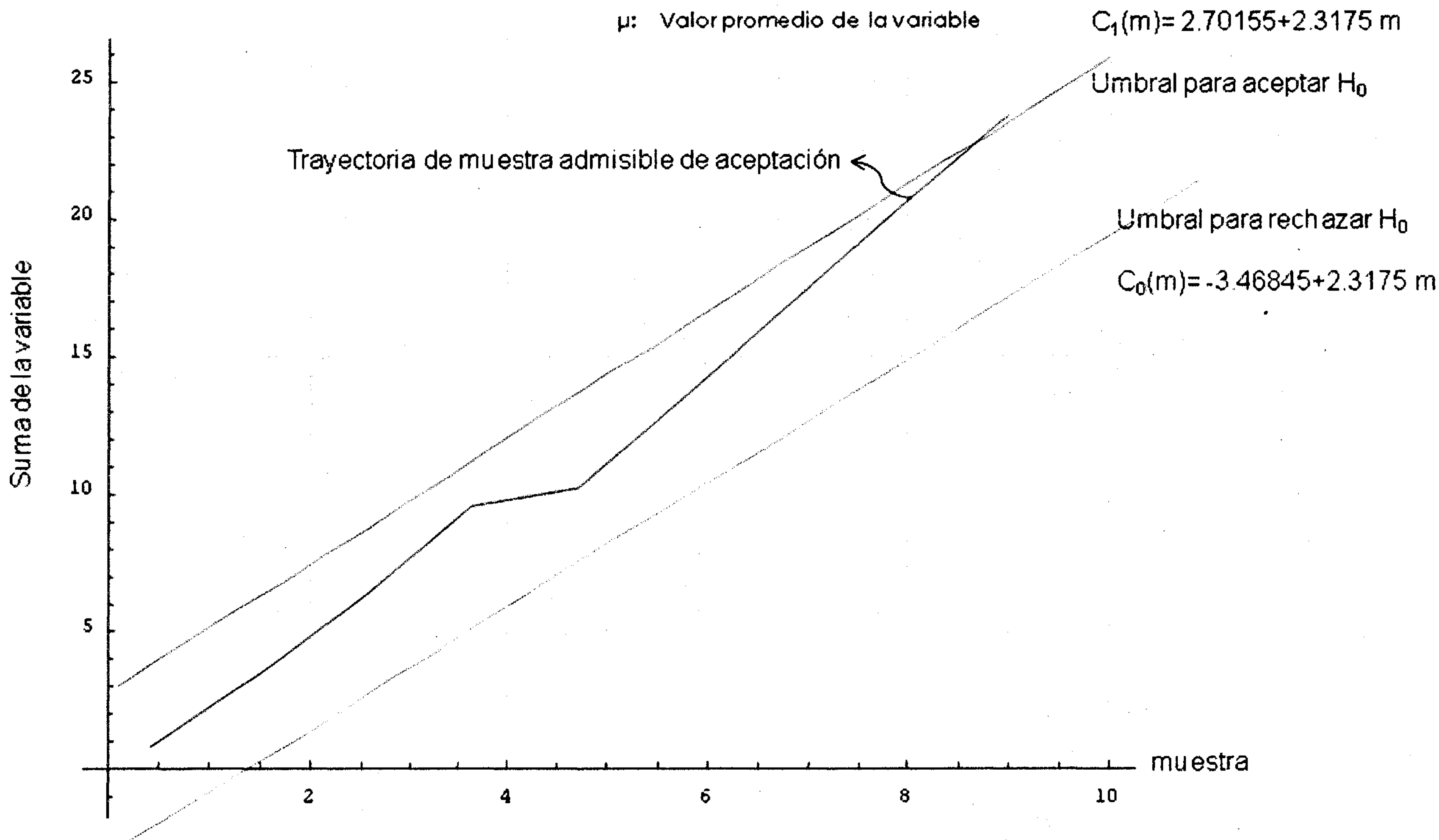
Caso unilateral izquierdo. Trayectoria de muestra admisible de rechazo.

$H_0 : \mu=\mu_0$ vs $H_1 : \mu= \mu_1$ $\mu_1<\mu_0$

: el lote de yeso se acepta : el lote de yeso se rechaza

μ_0=2.320 Probabilidad de aceptación μ_1=2.315 Probabilidad de rechazo

β=0.10 riesgo del consumidor α=0.05: riesgo del proveedor



Capítulo 5

Conclusiones

El desarrollo de este trabajo permite concluir entre otros puntos los siguientes:

1. El proceso realizado al utilizar un muestreo de aceptación secuencial por atributos o variables, para la prueba de hipótesis, casi siempre se requiere de un tamaño m menor de muestra para terminar el proceso, que cuando se usan los métodos tradicionales de muestra fija, donde es necesario inspeccionar un número n determinado de muestra para poder llegar a una conclusión.

Lo anterior se sustenta en la propiedad de optimalidad de la prueba de razón de probabilidad secuencial de Wald.

2. Este trabajo permite definir, aplicar y comparar diferentes planes de muestreo, es decir, establecer distintas reglas particulares a través de las cuales un lote se va a inspeccionar y a diagnosticar si se cumple o no la calidad preestablecida del mismo; en particular en el muestreo de aceptación se consideran los riesgos del productor y del consumidor, el nivel de calidad aceptable y la probabilidad estadística deseada para que no se

acepte un lote que no cumple con los requisitos, donde es importante también resaltar que el nivel de inspección para el caso de la industria define la relación del tamaño de lote y el tamaño de muestra.

Se desarrollaron dos esquemas de muestreo, uno para variables discretas para la distribución binomial y el otro para variables continuas para la distribución normal, ambos casos para la estadística de prueba $\sum_{i=1}^{m} x_i$, donde para el primero se suman los artículos o productos defectuosos o no defectuosos, para poder tomar una decisión y para el segundo es la suma de las mediciones realizadas de los artículos inspeccionados.

Sin embargo, cabe señalar que también el enfoque secuencial es aplicable para la distribución de variables aleatorias discretas como lo son la geométrica, binomial negativa, beta binomial, hipergeométrica, poisson[1] entre otras, y para variables aleatorias continuas como la gamma, exponencial, ji-cuadrada, ... , con otras estadísticas de prueba tales como:

$\sum x_i; \ \sum x_i + k; \ \dfrac{\sum x_i}{m}$.

3. Este trabajo muestra que para realizar un estudio con el enfoque secuencial, resultó de gran apoyo el haber incorporado el uso del paquete computacional MATHEMATICA v 5., para el análisis e interpretación de datos estadísticamente tanto en forma gráfica como tabular.

[1] Ver anexo 4

Glosario

Listado de Términos

1. Inferencia Estadística. Es un procedimiento que permite hacer afirmaciones o conclusiones sobre los parámetros de una población en estudio, basándose en los estimadores de una muestra obtenida de ella, de manera aleatoria, haciendo dichas afirmaciones o conclusiones con una medida de riesgo (incertidumbre) o de probabilidad. Existen dos formas de llevar a cabo la inferencia estadística: la estimación de parámetros (de manera puntual y con intervalos de confianza) y la prueba de hipótesis de ellos.

2. Población. En estadística se refiere al conjunto de mediciones en unidades elementales o bajo estudio que se pueden efectuar sobre una característica común (variable aleatoria en estudio o respuesta) de un grupo de seres u objetos, caracterizados por tener en común al menos un factor.

3. Parámetro. Es un valor característico que define a la población bajo estudio dentro del ámbito de la estadística, como por ejemplo el valor medio, la desviación estándar, la proporción de una clasificación.

4. Muestra. Es un subconjunto de la población, obtenida de manera aleatoria.

5. Variable aleatoria. En forma general es un registro de información sobre una característica de interés de las unidades de la población bajo estudio, donde, una **variable aleatoria continua** es aquella que puede tomar cualquier valor en un intervalo de la recta real y las **variables aleatorias discretas** son aquellas que pueden tomar solamente un número finito de valores.

En estadística se dice que una **variable aleatoria X es continua** si existe una función F_Y tal que:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$$

para cualquier x∈R.

Y una **variable aleatoria X es discreta** si existe una colección finita o infinita numerable de números reales $x_1, x_2, \ldots$, tales que $P[X = x_k] > 0$ para cualquier x_k y $\sum_k P[X = x_k] = 1$.

6. Función de distribución o ley de probabilidad. Es una función que gobierna en su comportamiento probabilístico a los valores de la característica medida, variable aleatoria, en todas las unidades de la población bajo estudio.

Existe una gran variedad de leyes de probabilidad, entre las más comunes que describen el comportamiento de una población están la binomial y la normal, las cuales serán comentadas en este trabajo.

La función de probabilidad de una variable aleatoria **X** permite trasladar la medida de probabilidad de realización de los sucesos de una experiencia aleatoria a la característica medida de una población y que define la variable aleatoria.

Designando por **f** a la función de probabilidad de la variable aleatoria **X**, en el caso **discreto**, los posibles valores de **X** forman un **conjunto** finito o numerable, y para la variable aleatoria X en el caso **continuo**, en el cálculo de la probabilidad de la variable aleatoria son **intervalos** de la recta real:

- Si **X es discreta** su función de probabilidad se define por f(x)=P[X=x],

- En el caso de que **X sea continua** su función de probabilidad debe permitir expresar **F**, la **función de distribución de probabilidad** acumulada de **X**, de acuerdo a la siguiente integral:

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

cualquiera que sea el valor de X, donde F: $\mathbb{R} \rightarrow [0,1]$

A la función de probabilidad para la variable aleatoria continua X, también se le llama función de densidad.

7. Hipótesis científica. Es una explicación preliminar en forma de proposiciones reales, lógicas y razonables, que ayudan a ordenar, sistematizar y estructurar el conocimiento que ya se tiene, y a su vez a saber qué es lo que se está tratando de probar. Ésta será sometida a pruebas para saber si es verdadera o no. En el muestreo de aceptación es de interés determinar si el lote muestreado en consideración puede aceptarse o no de acuerdo a una calidad predeterminada previamente.

8. Hipótesis estadística. Es una proposición sobre los parámetros de una población, que en este trabajo se refiere a la determinación de calidad de una colección de unidades de un producto o lote, bajo estudio.

Se denotará como H_0 a la hipótesis nula (el lote debe aceptarse) y cuando esta hipótesis estadística especifica completamente la distribución, ésta es llamada **Hipótesis simple** en otro caso es llamada **Hipótesis compuesta**.

Mientras que H_1 (el lote es rechazado) la **hipótesis alternativa** y se contrasta contra H_0.

9. Muestreo aleatorio simple. Es el procedimiento que se utiliza al seleccionar un tamaño de muestra n de una población de tamaño N de tal manera que cada muestra posible de tamaño n tenga la misma probabilidad de ser seleccionada.

10. Espacio de resultados o espacio muestral. Es el conjunto de resultados de una variable aleatoria.

11. Prueba de una hipótesis estadística. Es una técnica de inferencia estadística que permite comprobar si la información que proporciona una muestra observada concuerda (o no) con la hipótesis estadística formulada H_0, sobre el modelo de probabilidad en estudio y, por tanto, se puede aceptar o no la hipótesis formulada.

12. Región crítica o región de rechazo. En la teoría de pruebas de hipótesis, la región de rechazo es el conjunto de valores, de una estadística de prueba descrita, que conducen al rechazo de la hipótesis H_0 en consideración, mientras que, el conjunto de valores de la estadística de prueba que conducen a la aceptación se le denomina **región de aceptación.**

13. Prueba estadística bilateral. Es una prueba estadística en la cual la región de rechazo está separada por la región de aceptación y se localiza en ambos extremos de la distribución de la estadística de prueba, se le denomina prueba estadística bilateral y si la región de rechazo está totalmente localizada en un extremo de la distribución de la estadística de prueba se le denomina **prueba estadística unilateral.**

14. Tipos de errores. Al realizar un contraste de hipótesis se puede cometer uno de los dos siguientes tipos de errores:

- **Error tipo I**, se refiere al error que se comete al rechazar la hipótesis nula cuando ésta es cierta y la probabilidad de cometer el error tipo I se denota por α.
- **Error tipo II**, se refiere al error que se comete al no rechazar la hipótesis nula cuando ésta es falsa y la probabilidad de cometer el error tipo II se denota con el símbolo β.

De aquí que, al tener una incertidumbre o una magnitud de error para rechazar o aceptar la hipótesis simple se definen como riesgos a α y a β de la siguiente forma:

Pr(rechazar H_0/H_0 cierta)=Pr(Error tipo I)= α y la

Pr(aceptar H_0/H_0 falsa)=Pr(Error tipo II)= β

15. Nivel de significancia de la prueba. Si H_0 denota una hipótesis que debe ser probada contra una hipótesis alternativa H_1 de acuerdo con una prueba establecida; se denomina nivel de significancia de la prueba (a el tamaño de la región crítica), es decir, a la máxima probabilidad con la que se está dispuesto a correr el riesgo de cometer el error tipo I, y se denota por α.

16. Prueba de hipótesis para muestra fija. Una prueba de hipótesis es considerada cualquier regla para decidir si se rechaza la hipótesis estadística especificada con respecto a alguna característica desconocida de la población de interés, (llamada hipótesis nula H_0). Esa regla se basa en una muestra aleatoria de la población de tamaño n, a partir de la cual se calculará algún estadístico apropiado llamado **estadístico de prueba.**

17. Función característica de operación de la prueba, L(θ). Es la función que presenta la probabilidad de aceptar la hipótesis nula cuando el parámetro θ, a prueba, toma algún valor en particular, se le conoce como función característica de operación, evaluada en θ, y se utiliza para especificar la calidad de acuerdo a los valores que tome el parámetro θ junto con los riesgos al tomar la decisión en una prueba de hipótesis, $\mathbf{1-L(\theta_0)=}\ \alpha$ y $\mathbf{L(\theta_1)=}\beta$.

18. Función potencia de una prueba, K(θ). Es la función que presenta la probabilidad de rechazar la hipótesis nula para diversos valores del parámetro θ, donde también se puede observar que para los valores de θ asumidos bajo H_0, la función potencia da la probabilidad de cometer el error tipo I, y para los valores de θ asumidos bajo H_1, da la probabilidad de no cometer un error de tipo I.

Así entonces, los riesgos en la prueba de hipótesis son $\mathbf{K(\theta_0)=}\ \alpha$ y $\mathbf{1-K(\theta_1)=}\ \beta$.

Pero además, se tiene que la función característica de operación y la función potencia de la prueba son complementarias, es decir **$L(\theta)+K(\theta)=1$**

De donde **$K(\theta)=1-L(\theta)$** o bien **$L(\theta)=1-K(\theta)$**

19. Muestreo de aceptación. Es un procedimiento mediante el cual se puede decidir si se acepta o rechaza un lote de artículos o productos, de acuerdo a ciertas especificaciones de calidad y su aplicación se puede ver en la inspección de materias primas, productos semielaborados y otros componentes; para determinar si éstos cumplen con el nivel mínimo exigido. Es muy común la aplicación de este muestreo en aspectos de control de calidad y en particular en la industria. Es útil cuando las pruebas son destructivas, cuando es muy alto el costo de inspección o consume mucho tiempo, ó cuando el número de artículos a inspeccionar es muy elevado.

20. Muestreo de aceptación secuencial. En el método estadístico de aceptación secuencial, el desarrollo del muestreo de un lote está condicionado a los resultados que se van obteniendo del mismo, permite utilizar información tan pronto como se va obteniendo para tomar alguna decisión de aceptación, rechazo o continuar muestreando.

Este tipo de muestreo es aplicable tanto para variables aleatorias continuas (donde es llamado "muestreo para variables") como para discretas (llamado "muestreo por atributos").

21. Muestreo de aceptación por atributos. Es un método o inspección que consiste en examinar una unidad de producto o característica y clasificarla como "buena" o "defectuosa". La acción a tomar después de esto se decide contando el número de defectuosos encontrados.

El objetivo de la inspección para la aceptación es la de decidir si un lote de producto debe o no ser aceptado, habiéndose fijado de antemano las características que definan el **plan de muestreo.**

22. Muestreo de aceptación por variables. Las mediciones de una característica continua de calidad en este caso proporcionan más información sobre un lote que el número de artículos defectuosos, pues la forma de medición contiene mayor riqueza numérica.

23. Plan de muestreo. Un plan de muestreo significa reglas particulares (nivel de calidad aceptable, la calidad límite y los riesgos del productor y del consumidor).por medio de las cuales un lote se va a inspeccionar y a dictaminar.

24. Muestra admisible, en muestreo de aceptación secuencial. Es una muestra de tamaño $m > 0$, que al incorporarse a la secuencia de la muestra, ya obtenida, permite decidir si continuar el proceso de muestreo o bien terminarlo aceptando o rechazando H_0.

25. Trayectoria para una muestra secuencial por atributos. Se refiere a una gráfica donde se representa en las abscisas el número total de artículos, unidades o productos inspeccionados y en sus ordenadas el número total de éstos que resultaron defectuosos. Si uno de los puntos se encuentra dentro de la zona definida por dos rectas paralelas- zona de indefinición-, se continúa el muestreo, sin poder tomar una decisión de aceptar o rechazar el lote debido a que, no se cuenta con información suficiente para hacerlo. Mientras que, tan pronto como un punto caiga en o mas allá de la línea definida para rechazar, entonces en ese momento se toma la decisión de rechazar el lote, y tan pronto como un punto caiga mas allá o sobre la línea definida para aceptar, entonces el lote se acepta. Cuando se decide rechazar o aceptar el lote el muestreo se concluye.

26. Trayectoria para una muestra secuencial por variables. Se refiere a una gráfica donde se representa en sus abscisas el tamaño de la muestra revisada y en sus ordenadas la suma de la variable en estudio. En la gráfica para un número particular de muestra si el punto se encuentra dentro de la zona definida por dos rectas paralelas- zona de indefinición-, se continúa el muestreo, sin poder tomar una decisión de aceptar o rechazar el lote debido a que, no se cuenta con información suficiente para hacerlo. Mientras que, tan pronto como un punto caiga sobre o más allá de la línea definida para rechazar, entonces en ese momento se toma la decisión de rechazar el lote, y tan pronto como un punto caiga en o más allá de la línea definida para aceptar, entonces el lote se acepta. Cuando se decide rechazar o aceptar el lote el muestreo se concluye.

27. Regla de decisión. Criterio de prueba que se establece para ubicar las "muestras admisibles" en las zonas de decisión que permite continuar o terminar el proceso de muestreo secuencial, aceptando o rechazando H_0.

28. Función tamaño esperado de muestra. Se refiere a la función para determinar el costo asociado a la cantidad de muestra requerida para llevar a cabo la prueba de hipótesis con una determinada calidad, al establecer los riesgos, α y β, de acuerdo también, a los valores que tome el parámetro a prueba.

29. Lote o población bajo estudio en un muestreo de aceptación. Es una colección de unidades de un producto o artículos, del cual se sacará una muestra y se le inspeccionará para determinar su conformidad con los criterios de calidad, para finalmente aceptar el lote o rechazarlo.

Apéndice 1

```
(****** Para correr el programa oprima primero la tecla de <shift> *******)
(************* ****y sin soltarla oprima la tecla <enter>*****************)
(*******************  CASO BINOMIAL  ***********************)
(*****************************************************************)
(***** Obtención de la calidad de la prueba de hipótesis mediante ********)
(********* la Función Característica de Operación (FCO:L (P)) ************)
(******** (Muestreando de manera simple, artículo por artículo) **********)
(*********** Reporte Gráfico y Reporte Tabular***********************)
(****************** ***************************************************)
(*** El programa inicia con el comando INPUT, mediante el cual se   ***)
(*********  solicitan las variables a utilizar  *********)

(*Descripción de las variables solicitadas: *)
(* α  riesgo del productor y β riesgo del consumidor*)
(* P0 nivel aceptable de calidad *)
 (* P1 proporción de artículos defectuosos para rechazar el lote *)

Entrada =
   Input["Con este programa se obtiene la calidad de la prueba de la hipótesis. SI
      DESEA SALIR del programa teclee {};PARA CONTINUAR teclee los valores
      de alfa, beta , Po y P1 de la siguiente manera: {alfa,beta,Po,P1}"];

If[Entrada ≠ {},
  haches =
   Input["Dame los valores de hache de la siguiente forma {a,b,n}
      donde n es el numero de puntos a graficar en el intervalo [a,b]"];
  a = haches[[1]];
  b = haches[[2]];
  n = haches[[3]];

  haches = Table[a + i / n * (b - a), {i, 0, n}] // N;
  (*Donde*)
  (*Log[K0] =LK0 ; Log[K1] =LK1   y    K0 = α/(1-β)  y K1 = (1-α)/β  *)
  (*LK0 = Log[α/(1-β)], LK1 = Log[(1-α)/β], K = Log[(P0 (1-P1))/(P1 (1-P0))]*)
  (* Declaración de las variables*)
  α = Entrada[[1]];
  β = Entrada[[2]];
  P0 = Entrada[[3]];
  P1 = Entrada[[4]];

  (*Títulos*)
  Print["              Plan de Muestreo de Aceptación  Secuencial            "];
  Print["                 Función Característica de Operación                 "];
  Print["             Probabilidad de aceptar H0 dado un valor de  P          "];
  Print["        H0: P=P0  vs  H1: P=P1   (P0<P1)                              "];
  Print["         P: Probabilidad de artículos defectuosos                    "];

  Print[" α= ", α , ",   β=", β, ",   P0= ",  P0  ",   P1=", P1  ];
  Print["Umbrales:   ", " K0= α/(1 - β) = ", K0 = α/(1 - β) , ",     K1= (1 - α)/β =" , K1 = (1 - α)/β ];

  (************* Función Característica de Operación (L (P))*************)
  Print["Cálculo de L[P] y la relación entre P y h:"                      ];
```

```
(**************************************************************************)

(******************** Para h diferente de cero ***********************)
Print["Para h diferente de cero:"                                      ];
Print["Cálculo de L[P]"                                                ];
Print["L[P]= (1 - K0^h)/(K1^h - K0^h) "                                ];

Print["Relación entre P y h:  ", " P=(1 - ((1-P0)/(1-P1))^h)/(((P0/P1))^h - ((1-P0)/(1-P1))^h)"  ];

(******************** Para h diferente de cero ************************)

(********************* Para h igual de cero **************************)
Print["Para h igual a cero:"                                           ];
Print["Cálculo de L[P]"                                                ];
Print["L[P]=-Log[K0]/(Log[K1] - Log[K0])"                              ];

Print["Relación entre P y h:  ",  "P=-(Log[(1-P0)/(1-P1)]/(Log[(P0/P1)] - Log[(1-P0)/(1 -P1)]))"  ];

(********************* Para h igual a cero *************************)
(**************************************************************************)
(*********************Dado h, calcular L (P)***************************)
(*****luego determinar P para los valores particulares de h***********)
(**************************************************************************)
Lp = (1 - K0^h)/(K1^h - K0^h) ;

p = -(Log[(1-P0)/(1-P1)]/(Log[(P0/P1)] - Log[(1-P0)/(1-P1)]));

Pes = Table[{0, 0}, {i, 1, n + 1}];
 Qus = Pes;
tabla = Table[{0, 0, 0}, {i, n + 1}];
Do[
  h = haches[[i]];
  If[h ≠ 0,
  Print ["h=", h , ",", "  L(P)=",


   Lp = (1 - K0^h)/(K1^h - K0^h),  ",P=",  p = (1 - ((1-P0)/(1-P1))^h)/(((P0/P1))^h - ((1-P0)/(1-P1))^h)] ;

  Pes[[i]] = {p, Lp};
  Qus[[i]] = {p, 1 - Lp}; tabla[[i]] = {haches[[i]], p, Lp}

   , (* esta es la coma del if*)

   (**************************** caso h=0    ***************************)
Print["h=", h = 0, ",L(P)=", Lp = -Log[K0]/(Log[K1] - Log[K0]),
```

```
   ",P=", p = -Log[(1 - P0)/(1 - P1)] / (Log[(P0/P1)] - Log[(1 - P0)/(1 - P1)])];
  Pes[[i]] = {p, Lp};
  Qus[[i]] = {p, 1 - Lp};

 ];
 tabla[[i]] = {haches[[i]], p, Lp}, {i, 1, n + 1}];

(****************************** caso h=0 ****************************)

(*****************************************************************************)
(** Es más razonable, para P determinar h y luego calcular L[P] ************)
(*****************************************************************************)

(*** GRÁFICA DE LA FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DE OPERACIÓN **********************)
ListPlot[ Pes, PlotJoined -> True,
        PlotLabel -> FontForm [
   "Función Característica de Operación: FCO", {"Times-BoldItalic", 16}],
         GridLines -> Automatic];
(*** GRÁFICA DE LA FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DE OPERACIÓN *********************)

(*Impresión de los datos*)
Print["Forma Tabular de los Datos"];
Print["h                P                   L[P]"];
Print [TableForm[tabla]]

, Print[ "Ha salido del programa"]];
```

Plan de Muestreo de Aceptación Secuencial

Función Característica de Operación

Probabilidad de aceptar H_0 dado un valor de P

H_0: $P=P_0$ vs H_1: $P=P_1$ $(P_0<P_1)$

P: Probabilidad de artículos defectuosos

$\alpha= 0.02$, $\beta=0.08$, $P_0= 0.01$, $P_1=0.05$

Umbrales: $K_0=\frac{\alpha}{1-\beta}= 0.0217391$, $K_1=\frac{1-\alpha}{\beta}=12.25$

Cálculo de L[P] y la relación entre P y h:

Para h diferente de cero:

Cálculo de L[P]

$$L[P]= \frac{(1-K_0{}^h)}{(K_1{}^h-K_0{}^h)}$$

Relación entre P y h: $$P=\frac{\left(1-\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^h\right)}{\left(\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^h-\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^h\right)}$$

Para h igual a cero:

Cálculo de L[P]

$$L[P]=-\frac{\text{Log}[K_0]}{(\text{Log}[K_1]-\text{Log}[K_0])}$$

Relación entre P y h: $P=-\left(\frac{\mathrm{Log}\left[\frac{(1-P_0)}{(1-P_1)}\right]}{\mathrm{Log}\left[\left(\frac{P_0}{P_1}\right)\right]-\mathrm{Log}\left[\frac{(1-P_0)}{(1-P_1)}\right]}\right)$

h=-1., L(P)=0.98,P=0.01

h=-0.866667, L(P)=0.967777,P=0.0114393

h=-0.733333, L(P)=0.948771,P=0.0130381

h=-0.6, L(P)=0.92003,P=0.0148047

h=-0.466667, L(P)=0.878179,P=0.0167462

h=-0.333333, L(P)=0.820211,P=0.0188682

h=-0.2, L(P)=0.744844,P=0.0211749

h=-0.0666667, L(P)=0.654007,P=0.0236684

h=0.0666667, L(P)=0.553401,P=0.0263492

h=0.2, L(P)=0.451272,P=0.0292156

h=0.333333, L(P)=0.355806,P=0.0322642

h=0.466667, L(P)=0.272763,P=0.0354896

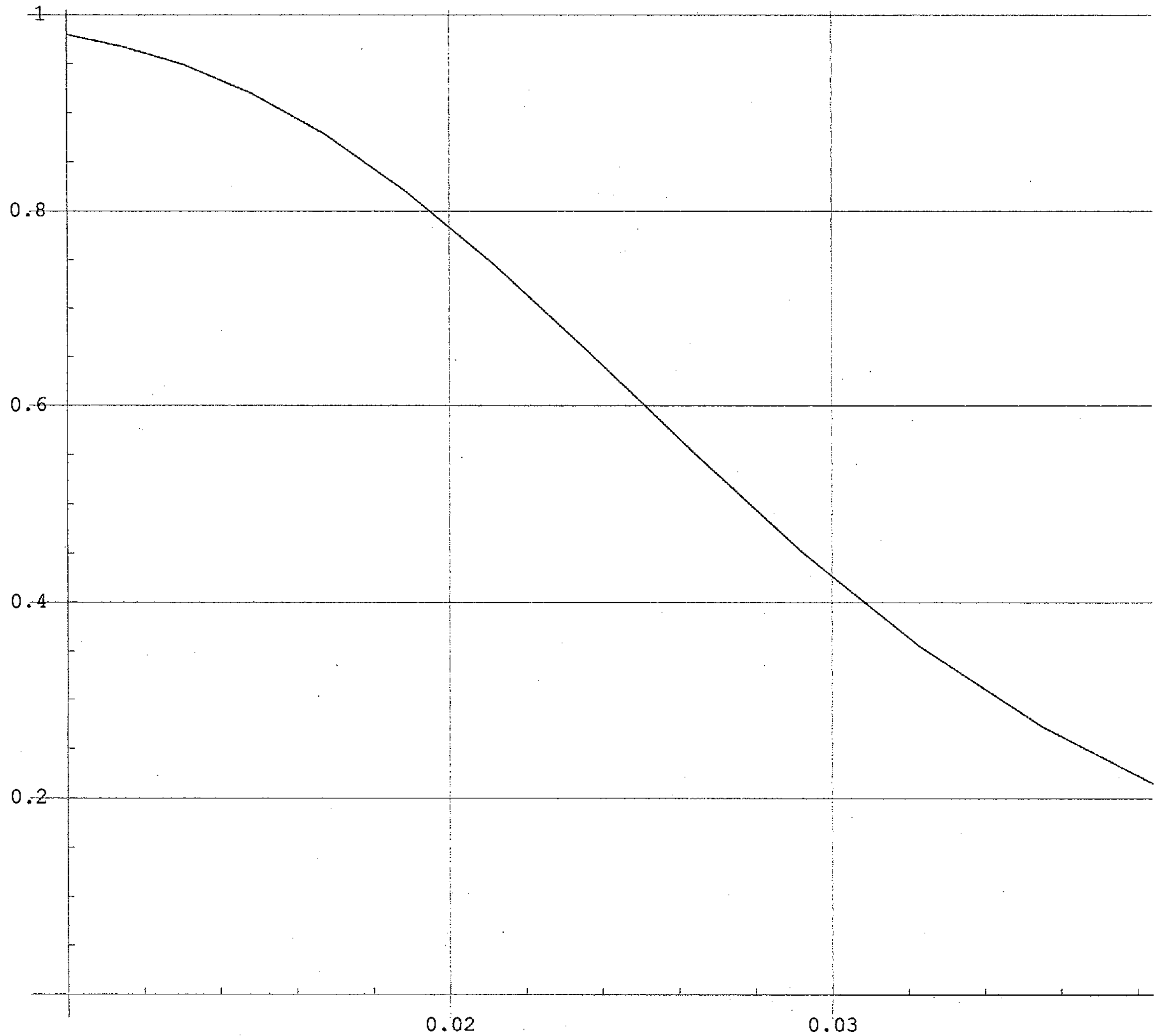
h=0.6, L(P)=0.204607,P=0.0388849

h=0.733333, L(P)=0.151076,P=0.0424417

h=0.866667, L(P)=0.110338,P=0.0461503

h=1., L(P)=0.08,P=0.05

Función Característica de Operación: FCO



Forma Tabular de los Datos

h	P	L[P]
-1.	0.01	0.98
-0.866667	0.0114393	0.967777
-0.733333	0.0130381	0.948771
-0.6	0.0148047	0.92003
-0.466667	0.0167462	0.878179
-0.333333	0.0188682	0.820211
-0.2	0.0211749	0.744844
-0.0666667	0.0236684	0.654007
0.0666667	0.0263492	0.553401
0.2	0.0292156	0.451272
0.333333	0.0322642	0.355806
0.466667	0.0354896	0.272763
0.6	0.0388849	0.204607
0.733333	0.0424417	0.151076
0.866667	0.0461503	0.110338
1.	0.05	0.08

```
(*** Para correr el programa oprima primero la tecla de <shift>  ***)
(********* ***sin soltarla oprima la tecla <enter>*****************)
(*******************************************************)
(******************   CASO BINOMIAl   ********************)
(*******************************************************)
(***** Obtención del Tamaño Promedio Esperado de Muestra: ******)
(*************** Reporte Gráfico y Reporte Tabular***************)
(*******************************************************)

(*El programa inicia con el comando INPUT, con el cual se explica brevemente*)
(*que hace; en caso de que no se desee continuar se teclea "{}", y sale el  *)
(*programa en caso contrario se procede a solicitar las variables a utilizar*)

(*Descripción de las variable*)
(* P0 nivel aceptable de calidad *)
 (* P1 proporción de artículos defectuosos para rechazar el lote *)
(* α  riesgo del productor y β riesgo de consumidor*)

Entrada =
  Input["El siguiente programa obtiene la Función Tamaño Esperado de Muestra (FTEM).
     SI DESEA SALIR del programa teclee {}; PARA CONTINUAR teclee los valores de:
     alfa, beta, Po y P1, de la siguiente forma {alfa,beta,Po,P1}"];

If[Entrada ≠ {},
 Pvector =
  Input["Escriba el conjunto de las P´s para las cuales quiere obtener la FTEM,
     de la siguiente forma: {p1,p2,...pn}, si no se quieren dar las p´s teclee
     {} y se tabulará automáticamente el vector de P0 a P1."];

 (*Para determinar el número de particiones en el intervalo*)
 If[Pvector == {},
  n = Input[ "Cuántos puntos quiere que tenga su partición en el intervalo [P0, P1]"];
  Pvector = Table[P0 + i * ((P1 - P0)/n), {i, 0, n}]];
 (* Variables *)
 n = Length[Pvector];
 α = Entrada[[1]];
 β = Entrada[[2]];
 P0 = Entrada[[3]];
 P1 = Entrada[[4]];

 (* Títulos *)
 Print["  Plan de Muestreo de Aceptación Secuencial           "];
 Print["   Tamaño Promedio Esperado de Muestra                "];
 Print["       H0: P=P0  vs   H1: P=P1  (P0<P1)                "];
 Print["  P: Probabilidad de artículos defectuosos             "];
 Print["α=", α, ", β=", β, ", P0=", P0, ", P1=", P1];
```

```
Print["Umbrales: ", "K0=α/(1-β)=", K0 = α/(1-β), ", K1=(1-α)/β=", K1 = (1-α)/β ];

Print["L[P]=Pα, Probabilidad de aceptar H0, para una P particular"];

K0 = α/(1 - β);

K1 = (1 - α)/β;

(* Cálculo de P está determinado por la siguiente función,
 que esta en términos de h*)
f[h_] := (1 - ((1-P0)/(1-P1))^h) / ((P0/P1)^h - ((1-P0)/(1-P1))^h);

(* se utiliza el método de Newton para resolver la ecuación*)

df[x_] := ∂h f[h] /. h → x;
A = Table[0, {j, 1, n}];
B = A;
DC = A;

Do[
 Pfija = Pvector[[j]];
 Iteraciones = 20;
 (* número de iteraciones que se van a usar en el método de Newton*)
 X0 = 1;
  Do[
   X1 = X0 - (f[X0] - Pfija) / df[X0];
   X0 = X1;
   , {i, 1, Iteraciones}];

 (*Una vez que se resolvió la ecuación se calcula L[P]*)
 LP = (1 - K0^X1) / (K1^X1 - K0^X1);
 A[[j]] = Pfija ;
 B[[j]] = X1;
 DC[[j]] = LP;
 , {j, 1, n}];
(* A continuación se procede a calcular la Función Tamaño
  esperado de muestra  cuya ecuación esta dada de la siguiente forma:*)
(*TEM= (Log[(1-α)/β] Pα+Log[α/(1-β)] (1-Pα)) / (Log[P0/P1] P+Log[(1-P0)/(1-P1)] (1-P)) *)

TEM = Table[ (Log[K0] * (1 - DC[[i]]) + Log[K1] * DC[[i]]) /
```

```
  (Log[P0/P1] * A[[i]] + Log[(1 - P0)/(1 - P1)] * (1 - A[[i]])), {i, 1, n}];

Print[" N(P) es el valor esperado de tamaño de muestra dado P"];
Print[" P                 h(P)           L(P)              N(P)     N(P) redondeado"];
Print[TableForm[Transpose[{A, B, DC, TEM, Round[TEM]}]]];
(*Print[" La gráfica de la función valor esperado del tamaño de muestra"];*)
ListPlot[Table[{A[[i]], TEM[[i]]}, {i, n}],
 PlotLabel → FontForm["Función Tamaño Esperado de Muestra", {"Times-BoldItalic", 16}],
 GridLines → Automatic, PlotJoined → True];
, Print[ "Ha salido del programa"]];
```

Plan de Muestreo de Aceptación Secuencial

Tamaño Promedio Esperado de Muestra

H_0: $P=P_0$ vs H_1: $P=P_1$ ($P_0<P_1$)

P: Probabilidad de artículos defectuosos

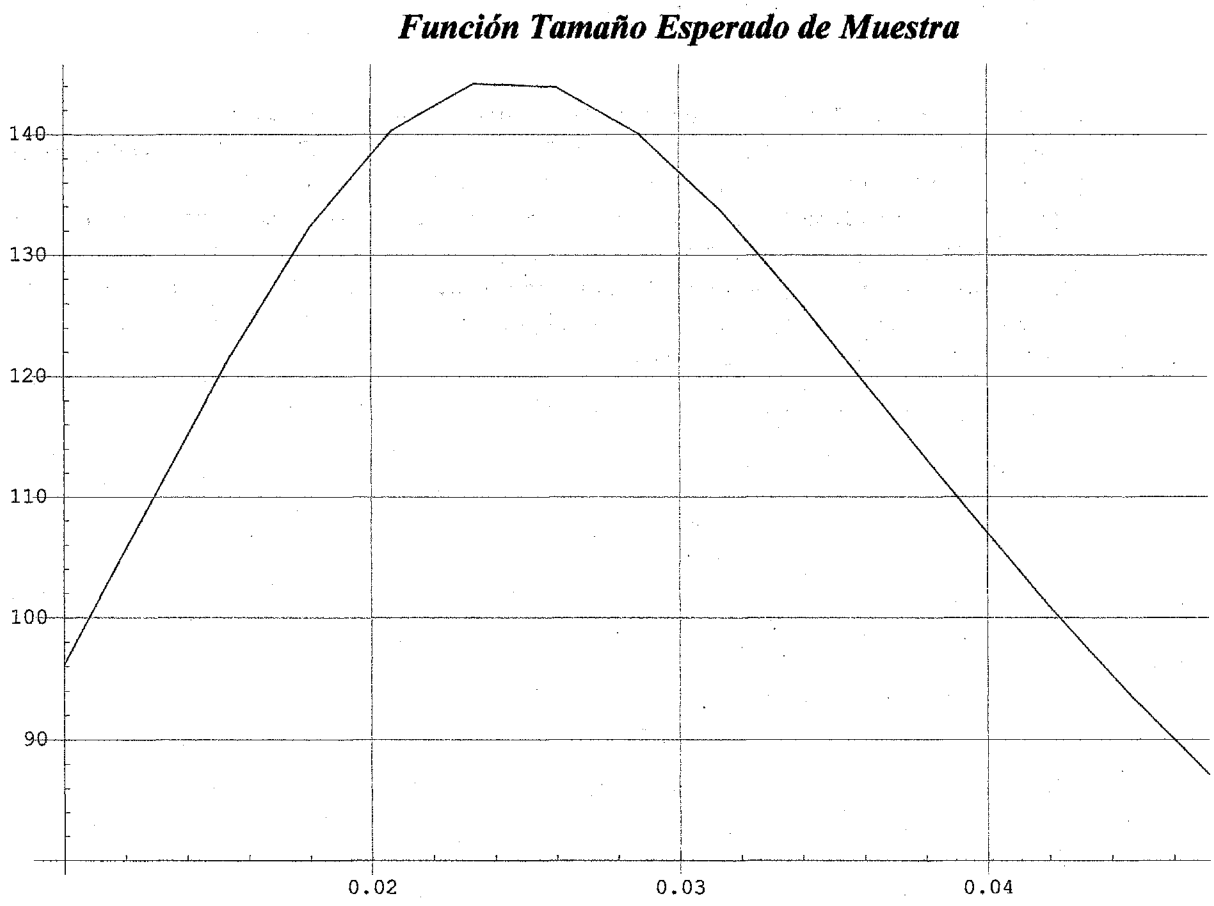
$\alpha=0.02$, $\beta=0.08$, $P_0=0.01$, $P_1=0.05$

Umbrales: $K_0=\frac{\alpha}{1-\beta}=0.0217391$, $K_1=\frac{1-\alpha}{\beta}=12.25$

$L[P]=P_\alpha$, Probabilidad de aceptar H_0, para una P particular

N(P) es el valor esperado de tamaño de muestra dado P

P	h(P)	L(P)	N(P)	N(P) redondeado
0.01	-1.	0.98	96.1687	96
0.0126667	-0.763121	0.953747	108.809	109
0.0153333	-0.562461	0.909719	121.367	121
0.018	-0.386506	0.845399	132.365	132
0.0206667	-0.228471	0.76236	140.313	140
0.0233333	-0.0840155	0.666536	144.223	144
0.026	0.0498131	0.566385	143.942	144
0.0286667	0.175116	0.47005	140.09	140
0.0313333	0.293445	0.383262	133.704	134
0.034	0.405979	0.308789	125.853	126
0.0366667	0.513634	0.247023	117.413	117
0.0393333	0.61714	0.196934	108.987	109
0.042	0.717086	0.156869	100.942	101
0.0446667	0.813955	0.125064	93.4659	93
0.0473333	0.908147	0.0998992	86.634	87
0.05	1.	0.08	80.451	80


Función Tamaño Esperado de Muestra
140
130
120
110
100
90
0.02
0.03
0.04

```
(***  Para correr el programa oprima primero la tecla de <shift>   ***)
(***             y sin soltarla oprima la tecla <enter>            ***)
(*******************************************************************)
(************************  CASO BINOMIAL  ********************************)
(*********************************************************************************)
(************* Zonas de Decisión para Planes de Muestreo por atributos**************)
(***************** Estadística de Prueba: Total de defectuosos *********************)
(**************** Reporte Gráfico y Reporte Tabular ****************************)
(*******************************************************************)

(*** El programa inicia con el comando INPUT, donde se   ***)
(*********  solicitan las variables por utilizar  *********)

(* Descripción de las variables solicitadas: *)
(* P0  proporción de artículos defectuosos para aceptar el lote *)
 (* P1 proporción de artículos defectuosos para rechazar el lote *)
(* α  riesgo del productor ;  β riesgo del consumidor*)

If[NumberQ[α] ∧ NumberQ[β] ∧ NumberQ[P0] ∧ NumberQ[P1],
   If[Input["Escriba 'True' si desea conservar
       los valores de: alfa, beta , P0 y P1, 'False' si no."], ,
    Entrada = Input["PARA CONTINUAR teclee los valores de: alfa, beta , P0
        y P1 de la siguiente manera {alfa,beta,P0,P1}, "]; Muestra =.;],
   Entrada = Input["El siguiente programa obtiene las Zonas de Decisión
       para un  un Plan de Muestreo de Aceptación por atributos. SI DESEA
       SALIR del programa teclee {}; PARA CONTINUAR teclee los valores de:
       alfa, beta , P0 y P1 de la siguiente manera {alfa,beta,P0,P1}, "]];

 If[Entrada ≠ {},

  If[Length[Muestra] == 0,
   Muestra1 =
    Input["Escriba la muestra admisible entre llaves, ejemplo {1,0,0,0,1,...0},
       lo cual permitirá imprimir la muestra como una trayectoria para decidir:
      Aceptar Ho, Rechazar Ho ó continuar el proceso de muestreo(
       haciendo una observación adicional). Si no tiene muestra solo
       se obtendrán las zonas de decisión, para ello escriba {}"],
   Muestra1 = Append[Muestra, Input[Append[Prepend[{Muestra},
        "Los datos anteriores son:"], "Escriba el siguiente dato."]]]
  ];

  (* El tamaño de muestra *)
  If[Muestra1 == {},
   Tamañodemuestra =
    Input[ "¿Hasta que número de muestras deseas tu plan secuencial?"];
   Muestra = Table[0, {j, 1, Tamañodemuestra}]
   , Muestra = Muestra1; Tamañodemuestra = Length[Muestra]];
  m = Tamañodemuestra;
  (*Artículos inspeccionados (Trayectoria) *)
```

```
defectuosos = 0;
trayectoria =
 ListPlot[Table[{i, defectuosos = defectuosos + Muestra[[i]]}, {i, 1, Tamañodemuestra}],
  PlotJoined → True , PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[.01]},
  DisplayFunction → Identity];

(*Definición de los Umbrales de Decisión:*)
(* Sea Log[K0]=LK0    y    Log[K1]=LK1    donde  K0=α/(1-β)  y  K1=(1-α)/β  *)
(*Entonces se tiene que: LK0 = Log[α/(1-β)],
 LK1 = Log[(1-α)/β], y además Sea K = Log[P0*(1-P1)/(P1*(1-P0))]*)
(* El umbral para rechazar H0 está dado por la siguiente definición de función:*)
C1[m_, K_] := LK0/K - (Log[(1-P0)/(1-P1)]/K) * m;
(* El umbral para aceptar H0 está dado por la siguiente definición de función:*)
C0[m_, K_] := LK1/K - (Log[(1-P0)/(1-P1)]/K) * m;
(* Declaración de las variables*)
α = Entrada[[1]];
β = Entrada[[2]];
P0 = Entrada[[3]];
P1 = Entrada[[4]];

(*Títulos y descripción de las variables*)
Print["                 Plan de Muestreo Secuencial por Atributos "];
Print["Efecto de las probabilidades de artículos defectuosos P0, P1 y  los riesgos α y β "];
Print["en la magnitud de los umbrales para decidir continuar o suspender el muestreo"];
Print["H0 :  el lote es aceptable        vs.        H1:     el lote no es aceptable   "];

Print[" P: Probabilidad de artículos defectuosos           "];
Print[" ************************************************************************* "];
Print["Condiciones del plan:  " ];
Print["α= ", α , ", β=", β, ", P0=", P0, ", P1=", P1];
If[Muestra1 == {},
 Print[ " Solo se reportan las zonas de decisión, NO se tiene muestra"],
 Print[" La muestra que dio es:", Muestra]];
Print["K0=α/(1 - β)       y    K1=(1 - α)/β,     K=Log[P0 * (1 - P1)/(P1 * (1 - P0))]"];
Print["K0=α/(1 - β)=    ", K0 = α/(1 - β),
  "    K1=(1 - α)/β=", K1 = (1 - α)/β, "      Log[(1 - P0)/(1 - P1)]= ", Log[(1 - P0)/(1 - P1)]];
Print["Log(K0)=", LK0 = Log[α/(1 - β)],   ", Log(K1)=",
  LK1 = Log[(1 - α)/β], ", K= ", K = Log[P0 * (1 - P1)/(P1 * (1 - P0))]];
Print["Umbral para rechazar H0: C1(m)=Log[K0]/K - Log[(1-P0)/(1-P1)]/K  m"];
```

```
(*Print["C1(m)= ",C1[m,K] ];*)
```

Print$\left[\text{"C}_1\text{(m)= "}, \dfrac{\text{Log}\left[\frac{\alpha}{1-\beta}\right]}{K}, \text{"+"}, -\dfrac{\text{Log}\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right]}{K}, \text{" m"}\right]$;

Print$\left[\text{"Umbral para aceptar H}_0\text{: C}_0\text{(m)=}\dfrac{\text{Log}[K_1]}{K}-\dfrac{\text{Log}\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right]}{K}\ \text{m"}\right]$;

```
(*Print["C0(m)= ",C0[m,K]];*)
```

Print$\left[\text{"C}_0\text{(m)=",}\ \dfrac{\text{Log}\left[\frac{1-\alpha}{\beta}\right]}{K}, \text{"+"}, -\dfrac{\text{Log}\left[\frac{1-P_0}{1-P_1}\right]}{K}, \text{" m"}\right]$;

```
(* Formato para las rectas C0 y C1*)
a = Plot[C0[m, K], {m, 1, Tamañodemuestra + 1},
  PlotStyle → {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[.01]},
  PlotLabel → FontForm ["Magnitud de los Umbrales. Caso Binomial",
    {"Times-BoldItalic", 16}], DisplayFunction → Identity];
b = Plot[C1[m, K], {m, 1, Tamañodemuestra + 1}, PlotStyle →
    {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[.01]}, DisplayFunction → Identity];

(* Gráfica de los umbrales y de la trayectoria *)
marca = Table[j, {j, Tamañodemuestra + 1}];

If[Muestra1 ≠ {}, Show[a, b, trayectoria,
  AxesLabel → {"Art.Rev.", "Art.Defect.en el Lote"}, Ticks → {marca, Automatic},
  GridLines → {marca, Automatic}, DisplayFunction → $DisplayFunction];
 Print["Art.Defect.: Artículos Defectuosos en el Lote"];
 Print["Art.Rev.: Artículos Revisados"];
 Print["C1: Recta Roja (superior), Umbral para rechazar H0"];
 Print["C0: Recta Verde (inferior), Umbral para aceptar H0 "]; Print[
  "La Recta azul muestra la secuencia de artículos inspeccionadas (Trayectoria)"];
 Print[" La muestra que dio es:", Muestra];
 Print[ "La tabla de aceptación o rechazo de H0 es la siguiente"],
 Show[a, b, Ticks → {marca, Automatic},
  GridLines → {marca, Automatic}, DisplayFunction → $DisplayFunction];
 Print[ " Solo se reportan las zonas de decisión, NO se tiene muestra"];
 Print["C1: Recta Roja (superior), Umbral para rechazar H0"];
 Print["C0: Recta Verde (inferior), Umbral para aceptar H0 "];];

(*Show[a,b,trayectoria,
   AxesLabel→{"Art.Rev.","Art.Defect.en el Lote"},Ticks→{marca,Automatic},
   GridLines→{marca,Automatic},DisplayFunction→$DisplayFunction];*)

(* Descripción de los ejes *)
(*Print["Art.Defect.: Artículos Defectuosos en el Lote"];
 Print["Art.Rev.: Artículos Revisados"];*)

(* Descripción de los elementos de la gráfica*)
(*Print["C1: Recta Roja (superior), Umbral para rechazar H0"];
 Print["C0: Recta Verde (inferior), Umbral para aceptar H0 "];Print[
   "La Recta azul muestra la secuencia de artículos inspeccionadas (Trayectoria)"]
  Print[ "La tabla de aceptación o rechazo de H0 es la siguiente"];*)
```

```
If[Muestra1 == {}, Print["Como no se introdujo
      muestra no tienen sentido las columnas defectuosos y decisión"],

   (* Crea la Tabla*)
   defectuosos = 0;
   tabla = Table [{j, li = Floor[C0[j, K]] , ls = Floor[C1[j, K]] + 1 , defectuosos =
       defectuosos + Muestra[[j]], If[li < defectuosos ∧  defectuosos < ls , "Continuar",
       If[li >= defectuosos, "Aceptar", "Rechazar"]]}, {j, 1, Tamañodemuestra}];

   (* Títulos de la Tabla *)
   PrependTo[tabla, {"", "para aceptar Ho", "para rechazar Ho", "", ""}];
   PrependTo[tabla, {"Art. Inspeccionados",
     "# de Art.Defec. ", "# de Art.Defec.", "Defectuosos", "Decisión"}];

   (* Impresión de la Tabla*)
   Print[TableForm[tabla]];
   Print[ "Nota: Cuando aparecen
      negativos en la Tabla no se puede tomar la decisión aún,"];
   Print["de igual manera cuando surge la incongruencia
      de que el número de defectuosos "];
   Print ["es mayor que el número de observaciones realizadas."]];
  , Print[ "Ha salido del programa"]];
```

Plan de Muestreo Secuencial por Atributos

Efecto de las probabilidades de artículos defectuosos P_0, P_1 y los riesgos α y β

en la magnitud de los umbrales para decidir continuar o suspender el muestreo

H_0 : el lote es aceptable vs. H_1: el lote no es aceptable

P: Probabilidad de artículos defectuosos

****

Condiciones del plan:

α= 0.02, β=0.08, P_0=0.01, P_1=0.05

La muestra que dio es:{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1}

$K_0=\frac{\alpha}{1-\beta}$ y $K_1=\frac{1-\alpha}{\beta}$, $K=\text{Log}[\frac{P_0*(1-P_1)}{P_1*(1-P_0)}]$

$K_0=\frac{\alpha}{1-\beta}=$ 0.0217391 $K_1=\frac{1-\alpha}{\beta}$=12.25 $\text{Log}[\frac{1-P_0}{1-P_1}]$= 0.041243

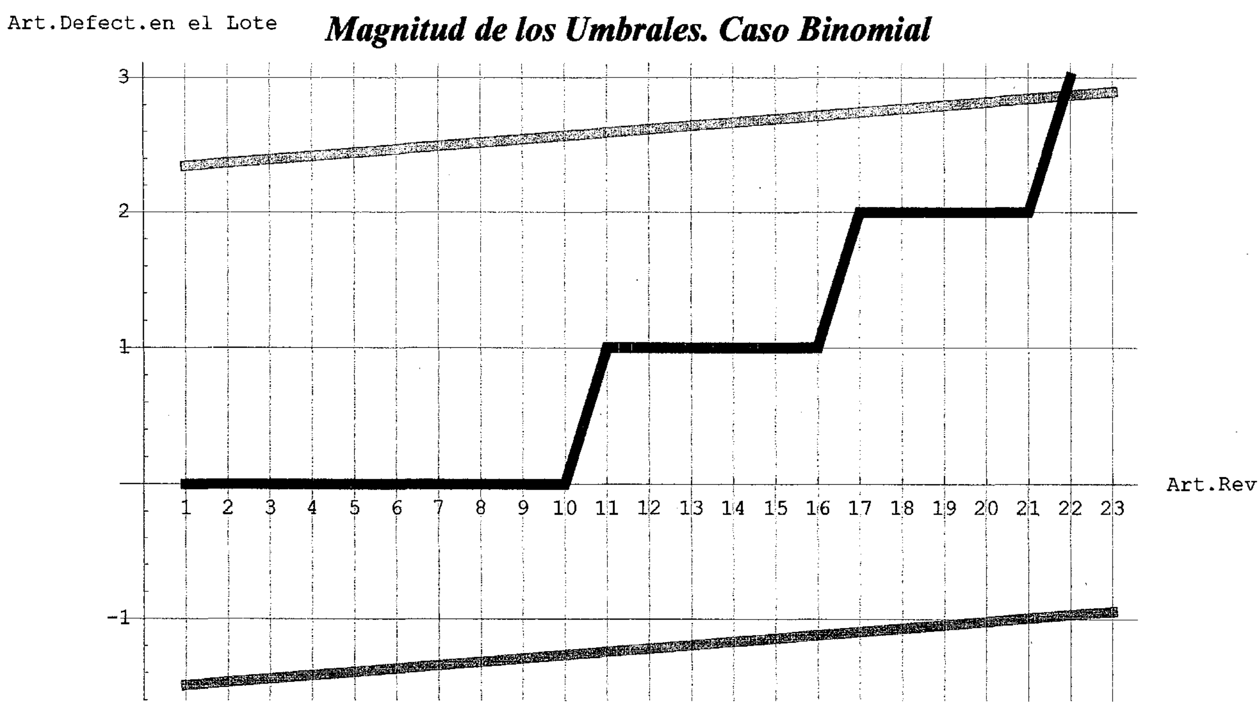
$\text{Log}(K_0)$=-3.82864, $\text{Log}(K_1)$=2.50553, K= -1.65068

Umbral para rechazar H_0: $C_1(m)=\frac{\text{Log}[K_0]}{K}-\frac{\text{Log}[\frac{1-P_0}{1-P_1}]}{K}\,m$

$C_1(m)$= 2.31943+0.0249854 m

Umbral para aceptar H_0: $C_0(m)=\frac{\text{Log}[K_1]}{K}-\frac{\text{Log}[\frac{1-P_0}{1-P_1}]}{K}\,m$

$C_0(m)$=-1.51787+0.0249854 m



Art.Defect.: Artículos Defectuosos en el Lote

Art.Rev.: Artículos Revisados

C_1: Recta Roja (superior), Umbral para rechazar H_0

C_0: Recta Verde (inferior), Umbral para aceptar H_0

La Recta azul muestra la secuencia de artículos inspeccionadas (Trayectoria)

La muestra que dio es:{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1}

La tabla de aceptación o rechazo de H_0 es la siguiente

```
Off[Power::"infy"];
Off[∞::"indet"];
(*On[Power::"infy"];
 On[∞::"indet"];*)

(* Para correr el programa oprima primero la tecla de<shift> y sin soltar esta última, oprima la tecla<enter
(* Obtención de la calidad de la prueba de hipótesis mediante la Función Característica de Operación (FCO
(*************** Reporte Gráfico. Forma Tabular ****************)
(******************** (CASO NORMAL) ************************)
(********************* (cola izquierda) ***********************)
(*** El programa inicia con el comando INPUT, mediante el cual se ***)
(********* solicitan las variables a utilizar *********)

(*Descripción de las variables solicitadas: *)
(* α riesgo del productor y β riesgo del consumidor*)
(*μ0: nivel aceptable de calidad *)
(*μ1: proporción de artículos defectuosos para rechazar el lote *)
(*μ : valor promedio *)

Entrada = Input["Con este programa se obtiene la calidad de la prueba de la hipótesis. SI
        DESEA SALIR del programa teclee {};PARA CONTINUAR teclee los valores de alfa, beta , muo y

If[Entrada ≠ {},

  mus = Input["Dame los valores de mu de la siguiente forma {a,b,n} donde n es el numero de puntos a graficar
  a = mus[[1]];
  b = mus[[2]];
  n = mus[[3]];

  mus = Table[i, {i, a, b, (b - a)/n}] // N;

  (*Donde*)
  (*Log[K0]=LK0 ; Log[K1]=LK1 y  K0=α/(1-β) y K1=(1-α)/β *)

  (* Declaración de las variables*)
  α = Entrada[[1]];
  β = Entrada[[2]];
  μ0 = Entrada[[3]];
  μ1 = Entrada[[4]];

  (*Títulos*)
  Print["     Plan de Muestreo de Aceptación Secuencial     "];
 Print["       Función Característica de Operación       "];
 Print["    Probabilidad de aceptar H0 dado un valor de μ "];
 Print["       H0: μ = μ0  vs  H1: μ = μ1  (μ0>μ1)     "];
 Print["       μ:valor promedio de la variable normal     "];
 Print["α=", α, ",  β =", β, ",  μ0 =", μ0 , ",  μ1 =", μ1];
 Print["Umbrales: ", " K0=α/(1-β)= ", K0 = α/(1 - β) , ",   K1=(1-α)/β= " , K1 = (1 - α)/β ];

  (***********Función Característica de Operación FCO {L (U)}*********)
 Print[" Relación entre h y μ, cálculo de L[U] :"];
```

```
(**************************************************)

(***********Para h diferente de cero******************************************)
Print["Para h diferente de cero:"];
```

Print["Cálculo de L[U]=$\frac{(1-K_0{}^h)}{(K_1{}^h-K_0{}^h)}$"];

Print[" Relación de h dado μ : ", " h=$\frac{(\mu_0+\mu_1-2\,\mu)}{(\mu_0-\mu_1)}$"];

```
(*********Para h igual a cero********************************)

Print["Para h igual a cero: "];
```

Print["Cálculo de L[U]=$-\frac{\mathrm{Log}[K_0]}{\mathrm{Log}[K_1]-\mathrm{Log}[K_0]}$"];

```
(**********************************************************************)
(*********************Dado μ, calcular L (U)****************************)
(*****luego determinar  h  para los valores particulares de μ***********)
(**********************************************************************)


Pes = Table[{0, 0}, {i, 1, n + 1}];
 Qus = Pes;
LU = Pes;
```

Do[mu = mus[[i]] ; h = $\frac{\mu_0+\mu_1-2\,\mathrm{mus}[[i]]}{\mu_0-\mu_1}$;

If[(h ≠ 0), LU[[i]] = $\frac{1-K_0{}^h}{K_1{}^h-K_0{}^h}$;

Pes[[i]] = {mus[[i]], LU[[i]]}; Qus[[i]] = {mus[[i]], 1 – LU[[i]] } , LU[[i]] = $\frac{-\mathrm{Log}[K_0]}{\mathrm{Log}[K_1]-\mathrm{Log}[K_0]}$; Pes[[i]] =

{i, 1, n + 1}];

h = $\frac{\mu_0+\mu_1-2\,\mathrm{mus}}{\mu_0-\mu_1}$;

```
(********* Gráfica de la Función Caracterítica de Operación ***************)
ListPlot[Pes, PlotJoined → True, PlotRange → {{a, b}, {0, 1}}, PlotStyle → PointSize[0.03], GridLines → Automatic
  PlotLabel → FontForm ["Función Característica de Operación. Caso Normal, cola izquierda", {"Times–


(******************* Impresión de los datos en forma tabular ********************)
Print[ " Reporte Tabular"];
Print["α=", α , ",  β =", β , ",  μ0 =", μ0 , ",  μ1 =" , μ1];
Print[" μ       h        L[U]"];

Print [TableForm[Transpose[{mus, h, LU}]]];
```

Plan de Muestreo de Aceptación Secuencial

Función Característica de Operación

Probabilidad de aceptar H_0 dado un valor de μ

H_0: $\mu = \mu_0$ vs H_1: $\mu = \mu_1$ $(\mu_0 > \mu_1)$

μ:valor promedio de la variable normal

α=0.05, β =0.1, μ_0 =2.32, μ_1 =2.315

Umbrales: $K_0 = \frac{\alpha}{1-\beta} = 0.0555556$, $K_1 = \frac{1-\alpha}{\beta} = 9.5$

Relación entre h y μ, cálculo de L[U] :

Para h diferente de cero:

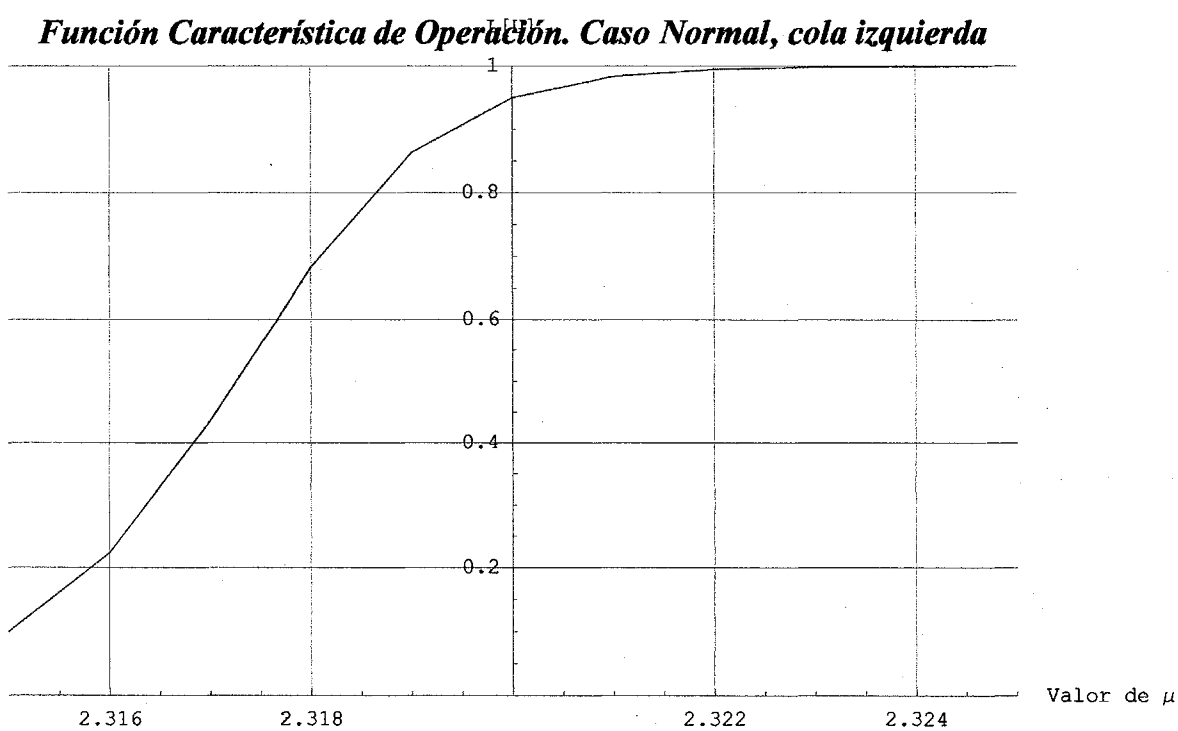
Cálculo de $L[U] = \frac{(1 - K_0^h)}{(K_1^h - K_0^h)}$

Relación de h dado μ : $h = \frac{(\mu_0 + \mu_1 - 2\mu)}{(\mu_0 - \mu_1)}$

Para h igual a cero:

Cálculo de $L[U] = -\frac{\text{Log}[K_0]}{\text{Log}[K_1] - \text{Log}[K_0]}$

Función Característica de Operación. Caso Normal, cola izquierda



Reporte Tabular

α=0.05, β =0.1, μ_0 =2.32, μ_1 =2.315

μ h L[U]

```
Off[Power::"infy"];
Off[∞::"indet"];

On[Power::"infy"];
On[∞::"indet"];

(* Para correr el programa oprima primero la tecla de<shift> y sin soltar esta última, oprima la tecla<enter
(* Obtención del Tamaño Esperado de Muestra dada la Función Característica de Operación (FCO : L[U
(*************** Reporte Gráfico. Forma Tabular *****************)
(******************* (CASO NORMAL) *************************)
(********************** (Cola derecha) **************************)
(** El programa inicia con el comando INPUT, mediante el cual se **)
(*************** solicitan las variables a utilizar ***************)

(*Descripción de las variables solicitadas: *)
(* α riesgo del productor y β riesgo del consumidor*)
(*μ0: nivel aceptable de calidad *)
(*μ1: proporción de artículos defectuosos para rechazar el lote *)
(*μ : valor promedio *)
(* VAR: varianza*)


Entrada = Input["Con este programa se obtiene el tamaño esperado de muestra. SI DESEA SALIR
          del programa teclee {};PARA CONTINUAR teclee los valores de alfa, beta , mu0 , mu1 y la varianza

 If[Entrada ≠ {},

   mus = Input["Dame los valores de mu de la siguiente forma {a,b,n} donde n es el numero de puntos a
   a = mus[[1]];
   b = mus[[2]];
   n = mus[[3]];

   mus = Table[i, {i, a, b, (b - a)/n}] // N;

   (*Donde*)
   (*Log[K0]=LK0 ; Log[K1]=LK1 y K0=α/(1-β) y K1=(1-α)/β *)

   (* Declaración de las variables*)
   α = Entrada[[1]];
   β = Entrada[[2]];
   μ0 = Entrada[[3]];
   μ1 = Entrada[[4]];
   VAR = Entrada[[5]];

   (*Títulos*)
   Print["    Plan de Muestreo de Aceptación Secuencial    "];
Print["     Función Tamaño Esperado de Muestra     "];
Print["   Probabilidad de aceptar H0 dado un valor de μ "];
Print["     H0: μ = μ0  vs  H1: μ = μ1  (μ0>μ1)    "];
Print["     μ: valor promedio de la variable normal    "];
   Print["L[U]=Pα, Probabilidad de aceptar H0, para una μ particular"];
Print["α=", α, ", β =", β, ", μ0 =", μ0 , ", μ1 =", μ1, ", σ^2=", VAR];
```

```
Print["Umbrales: ", " K0=α/(1-β)= ", K0 = α/(1-β) , ",  K1=(1-α)/β= " , K1 = (1-α)/β ];

   (***********Función Característica de Operación FCO {L (U)}*********)
Print[" Relación entre h y μ, cálculo de L[U] :"];
   (**************************************************)

   (***********Para h diferente de cero*****************************************)
   Print["Para h diferente de cero:"];
Print["Cálculo de L[U]=(1 - K0^h)/(K1^h - K0^h)"];
   Print[" Relación de h dado μ : ", " h=(μ0 + μ1 - 2 μ)/(μ0 - μ1)"];

   (*********Para h igual a cero********************************)

Print["Para h igual a cero: "];
   Print["Cálculo de L[U]=-Log[K0]/(Log[K1] - Log[K0])"];

   (*******************************************************************)
   (*********************Dado μ, calcular L (U)***************************)
   (*****luego determinar  h  para los valores particulares de μ***********)
(*******************************************************************)
(*****************************************************)
   (*********** Dada la FCO L[U],  se calcula el tamaño esperado de muestra *******)

   Print["Cálculo del tamaño esperado de muestra TEM[U]"];

   Print["TEM[U]= (Log[K0] (1 - L[U]) + Log[K1] L[U])/(((μ0-μ1)/σ^2) (μ - (μ0+μ1)/2))"];

   Pes = Table[{0, 0}, {i, 1, n + 1}];
    Qus = Pes;
   tabla = Table[{0, 0, 0}, {i, n + 1}];

   Do[ mu = mus[[i]] ; h = (μ0 + μ1 - 2 mus[[i]])/(μ0 - μ1);
     If[(h ≠ 0),  L[U] = (1 - K0^h)/(K1^h - K0^h); TEM[U] = Ceiling[(Log[K0] (1 - L[U]) + Log[K1] L[U]) / (((μ0 - μ1)/VAR)(mus
      Pes[[i]] = {mus[[i]], TEM[U]} ; tabla[[i]] = {mus[[i]], TEM[U], L[U]},  L[U] = -Log[K0]/(Log[K1] - Log[K0]); (*mus
     {i, 1, n + 1}];

   (********************** Impresión de los datos en forma tabular ***********************)
   Print[ " Reporte Tabular"];
   Print["α=", α, ",  β =", β, ",  μ0 =", μ0 , ",  μ1 =", μ1, ", σ^2=", VAR];
   Print["  μ    TEM    Prob. de aceptación"];
```

Print [TableForm[tabla]];

(************ Gráfica de la Función Tamaño Esperado de Muestra ********************)**

ListPlot[Pes, PlotJoined → True, PlotRange → {{a, b}, {0, Max[tabla] + 5}}, PlotStyle → PointSize[0.02], PlotStyle PlotLabel → FontForm ["Función Tamaño Esperado de Muestra. Caso Normal, Cola izquierda", {"Times

Plan de Muestreo de Aceptación Secuencial

Función Tamaño Esperado de Muestra

Probabilidad de aceptar H_0 dado un valor de μ

H_0: $\mu = \mu_0$ vs H_1: $\mu = \mu_1$ $(\mu_0 > \mu_1)$

μ: valor promedio de la variable normal

$L[U]=P_\alpha$, Probabilidad de aceptar H_0, para una μ particular

α=0.05, β =0.01, μ_0 =2.32, μ_1 =2.315, σ^2=0.000036

Umbrales: $K_0 = \frac{\alpha}{1-\beta} = 0.0505051$, $K_1 = \frac{1-\alpha}{\beta} = 95.$

Relación entre h y μ, cálculo de L[U] :

Para h diferente de cero:

Cálculo de $L[U] = \frac{(1 - K_0^h)}{(K_1^h - K_0^h)}$

Relación de h dado μ : $h = \frac{(\mu_0 + \mu_1 - 2\mu)}{(\mu_0 - \mu_1)}$

Para h igual a cero:

Cálculo de $L[U] = -\frac{Log[K_0]}{Log[K_1] - Log[K_0]}$

Cálculo del tamaño esperado de muestra TEM[U]

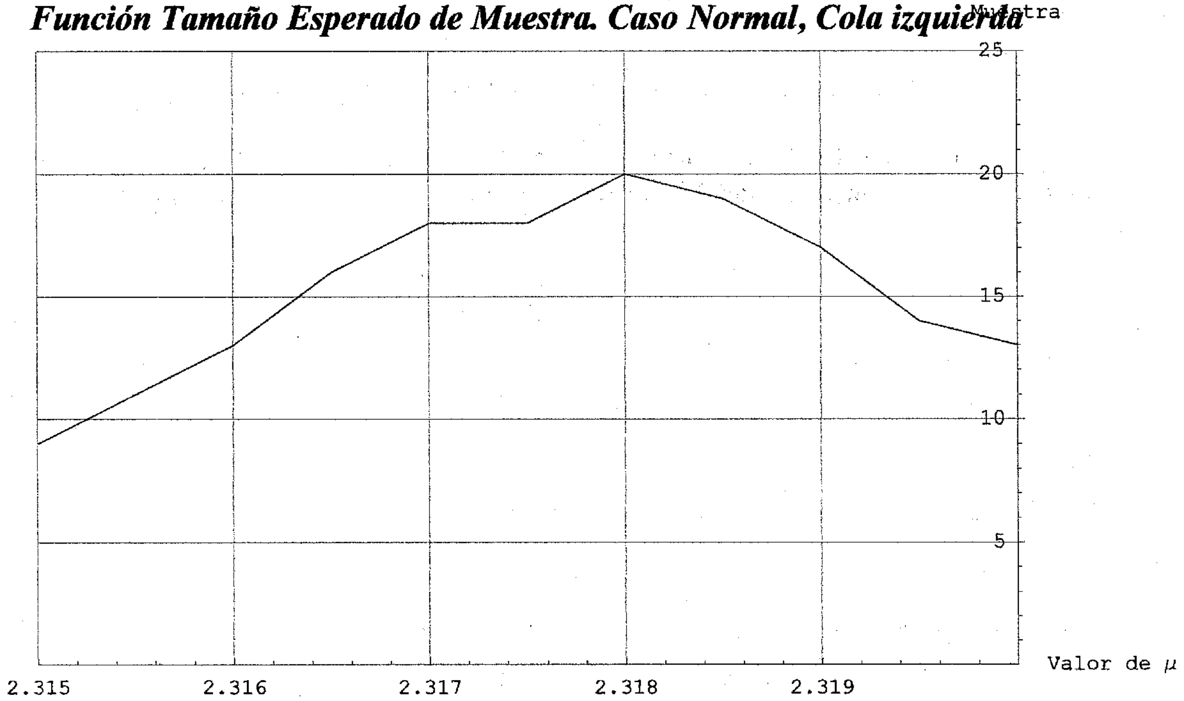
$$TEM[U] = \frac{Log[K_0]\ (1 - L[U]) + Log[K_1]\ L[U]}{\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma^2}\right)\ \left(\mu - \frac{\mu_0 + \mu_1}{2}\right)}$$

Reporte Tabular

α=0.05, β =0.01, μ_0 =2.32, μ_1 =2.315, σ^2=0.000036

μ	TEM	Prob. de aceptación
2.315	9	0.01
2.3155	11	0.0238267
2.316	13	0.054814
2.3165	16	0.11858
2.317	18	0.232255
2.3175	18	0.396002
2.318	20	0.577444
2.3185	19	0.732997
2.319	17	0.842414
2.3195	14	0.910423
2.32	13	0.95

Función Tamaño Esperado de Muestra. Caso Normal, Cola izquierda



```
(**  Para correr el programa oprima primero la  tecla **)
 (* <shift> y sin soltar esta última oprima la tecla <
  enter> u oprima la tecla de intro de su teclado *)
(************************************************************)
(*** ****** Determinación de las Zonas de Decisión ************)
(********* Estadística de Prueba: Suma de la variable *********)
(************ Reporte Gráfico y Reporte Tabular *************)
(******************* (CASO NORMAL) ***************)
(******************** (cola izquierda) ***************)
(*** El programa inicia con el comando INPUT, ******)
(***** el cual solicita las variables a utilizar y la muestra ********)

If[NumberQ[α] ∧ NumberQ[β] ∧ NumberQ[μ0] ∧ NumberQ[μ1] ∧ NumberQ[VAR],
   If[Input["Escriba 'True' si desea conservar los valores de: alfa,
       beta, mu0, mu1 y la varianza, 'False' si no."], , Entrada = Input[
      "PARA CONTINUAR teclee los valores de: alfa, beta, mu0, mu1 y la varianza
        de la siguiente manera {alfa,beta,mu0,mu1,varianza}, "]; Muestra =.;],
   Entrada = Input["El siguiente programa obtiene las Zonas de Decisión
       para un Plan de Muestreo de Aceptación por variables. SI DESEA SALIR del
       programa teclee {}; PARA CONTINUAR teclee los valores de: alfa, beta, mu0,
       mu1 y la varianza de la siguiente manera {alfa,beta,mu0,mu1,VAR},"]];

 If [Entrada ≠ {},
  If[Length[Muestra] == 0,
   Muestra1 = Input["Escriba la muestra admisible entre
       llaves, ejemplo {19,19.5,20,20.5,22.1,...}, lo cual permitirá
       imprimir la muestra como una trayectoria para decidir:
      Aceptar Ho, Rechazar Ho ó continuar el proceso de muestreo(
       haciendo una observación adicional). Si no tiene muestra sólo
       se obtendrán las zonas de decisión, para ello escriba {}"],
   Muestra1 = Append[Muestra, Input[Append[Prepend[{Muestra},
        "Los datos anteriores son:"], "Escriba el siguiente dato."]]]];
  (* El tamaño de muestra*)
  If[Muestra1 == {},
   Tamañodemuestra =
    Input[ "¿Hasta que número de muestras deseas tu plan secuencial?"];
   Muestra = Table[0, {j, 1, Tamañodemuestra}]
   , Muestra = Muestra1; Tamañodemuestra = Length[Muestra]];
  Muestra = {Muestra} // Flatten;
  m = Tamañodemuestra;

  (* Artículos inspeccionados (Trayectoria)  *)
  defectuosos = 0;
  trayectoria = ListPlot[Table[{i, defectuosos = defectuosos + Muestra[[i]]},
     {i, 1, Tamañodemuestra}], PlotJoined → True ,
    PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[.01]}, DisplayFunction → Identity];

 (*(*Definición de los Umbrales de Decisión*)
   Print["Umbrales iniciales:  K0=α/(1-β);   K1=(1- α)/β"]
Print["LK0=",LK0=Log[α/(1-β)],",   LK1=",LK1=Log[(1-α)/β]];
   Print["Umbral para rechazar H0:
      Recta Roja determinada por C0[m_]=(VAR LK0)/(μ0-μ1)+1/2 m (μ0+μ1)"] ;
```

```
Print["C₁(m)=",C1[m_]=VAR LK₁/(μ₀-μ₁)+1/2 m (μ₀+μ₁)];
Print["Umbral para aceptar H₀
    Recta Verde determinada por C₀[m_]=VAR LK₀/(μ₀-μ₁)+1/2 m (μ₀+μ₁)"]
Print["C₀(m)=",C0[m_]=VAR LK₀/(μ₀-μ₁)+1/2 m (μ₀+μ₁)];
C1[m_]:=VAR LK₁/(μ₀-μ₁)+1/2 m (μ₀+μ₁);
C0[m_]:=VAR LK₀/(μ₀-μ₁)+1/2 m (μ₀+μ₁);
K₀=α/(1-β) ; K₁=(1- α)/β ;*)

(* Declaración de las variables*)
α = Entrada[[1]];
β = Entrada[[2]];
μ₀ = Entrada[[3]];
μ₁ = Entrada[[4]];
VAR = Entrada[[5]];

(*Títulos y descripción de las variables*)
Print[" Plan de Muestreo de Aceptación Secuencial "];
Print[" Estadística de prueba: Suma de la variable "];
Print["Condiciones del plan: " ];
Print[" H₀: μ=μ₀   vs   H₁: μ=μ₁      (μ₀>μ₁)          "];
Print["α= ", α , ", β=", β, ", μ₀=", μ₀, ", μ₁= ", μ₁, " VAR= ", VAR];

(*Definición de los Umbrales de Decisión*)
Print["Umbrales iniciales:  K₀=α/(1-β);    K₁=(1- α)/β"]
Print["Donde LK₀=Log[α/(1-β)],  LK₁=Log[(1-α)/β] "]
Print["LK₀=", LK₀ = Log[α/(1-β)], ",  LK₁=", LK₁ = Log[(1-α)/β]];
Print["Umbral para aceptar H₀ Recta
   Verde determinada por C₁[m_]=VAR LK₁/(μ₀ - μ₁)+1/2 m (μ₀+μ₁)"];
Print["C₁(m) = ", VAR LK₁/(μ₀ - μ₁), "+1/2", "[m]", (μ₀ + μ₁)];
Print["Umbral para rechazar H₀: Recta
   Roja determinada por  C₀[m_]=VAR LK₀/(μ₀ - μ₁)+1/2 m (μ₀+μ₁)"] ;
Print["C₀(m) = ", VAR LK₀/(μ₀ - μ₁), "+1/2", "[m]", (μ₀ + μ₁)];
C1[m_] := VAR LK₁/(μ₀ - μ₁) + 1/2 m (μ₀ + μ₁);
C0[m_] := VAR LK₀/(μ₀ - μ₁) + 1/2 m (μ₀ + μ₁);
K₀ = α/(1 - β) ; K₁ = (1 - α)/β;

(* Formato para las rectas C0 y C1*)
(*C0 recta verde*)
a = Plot[C0[j], {j, 1, m + 1}, PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0],
  PlotLabel → FontForm ["Magnitud de los Umbrales. Caso Normal, cola izquierda",
    {"Times-BoldItalic", 16}], DisplayFunction → Identity];
```

```
  (*C1 recta roja*)
b = Plot[C1[j], {j, 1, m + 1},
    PlotStyle → RGBColor[0, 1, 0], DisplayFunction → Identity];

  Prom = Table[{i, Sum[Muestra[[j]], {j, 1, i}]}, {i, 1, m}];

  Tra = ListPlot[Prom, PlotJoined → True,
    PlotStyle → RGBColor[0, 0, 1], DisplayFunction → Identity];

  If[Muestra1 ≠ {}, Show[b, a, Tra,
    AxesLabel → {"muestra", "TAOV"}, GridLines → Automatic, PlotRange → Automatic,
    DisplayFunction → $DisplayFunction]; (* Descripción de los ejes *)
Print["TAOV: Total acumulado observado de la variable"];
   (* Descripción de los elementos de la gráfica*)
   Print["C1: Recta Verde, Umbral para aceptar H0"];
   Print["C0: Recta Roja, Umbral para rechazar H0"];
   Print["La Recta azul muestra la Trayectoria"];
   Print[" La muestra que dio es:", Muestra];
   Print[ "La tabla de aceptación o rechazo de H0 es la siguiente"];

   (* Crea la Tabla, cola izquierda*)
   tabla = Table [{j, li = C1[j], ls = C0[j] , Prom[[j]][[2]],
      If[li > Prom[[j]][[2]] > ls , "Continuar",
       If[li ≤ Prom[[j]][[2]], "Acept. Ho", "Rech. Ho"]]}, {j, 1, m}];

   (* Títulos de la Tabla *)
   PrependTo[tabla,
    {"", "para aceptar Ho", "para rechazar Ho", "observado de la muestra", "", ""}];
   PrependTo[tabla, {" No. de muestra", "Total acumulado ",
     "Total acumulado", "Total acumulado", "Decisión"}];

   (* Impresión de la Tabla*)
   Print[TableForm[tabla]];
   Print[ "Nota: Cuando aparecen
      negativos en la Tabla no se puede tomar la decisión aún"];,
   Show[b, a, GridLines → Automatic, PlotRange → Automatic,
    DisplayFunction → $DisplayFunction];
   Print[ " Solo se reportan las zonas de decisión, NO se tiene muestra"],
   Print[" La muestra que dio es:", Muestra]];,
  Print[ "Ha salido del programa"]];
```

Plan de Muestreo de Aceptación Secuencial

Estadística de prueba: Suma de la variable

Condiciones del plan:

$H_0: \mu=\mu_0$ vs $H_1: \mu=\mu_1$ $(\mu_0>\mu_1)$

α= 0.05, β=0.1, μ_0=2.32, μ_1= 2.315 VAR= 0.006

Umbrales iniciales: $K_0=\frac{\alpha}{1-\beta}$; $K_1=\frac{1-\alpha}{\beta}$

Donde $LK_0=\text{Log}[\frac{\alpha}{1-\beta}]$, $LK_1=\text{Log}[\frac{1-\alpha}{\beta}]$

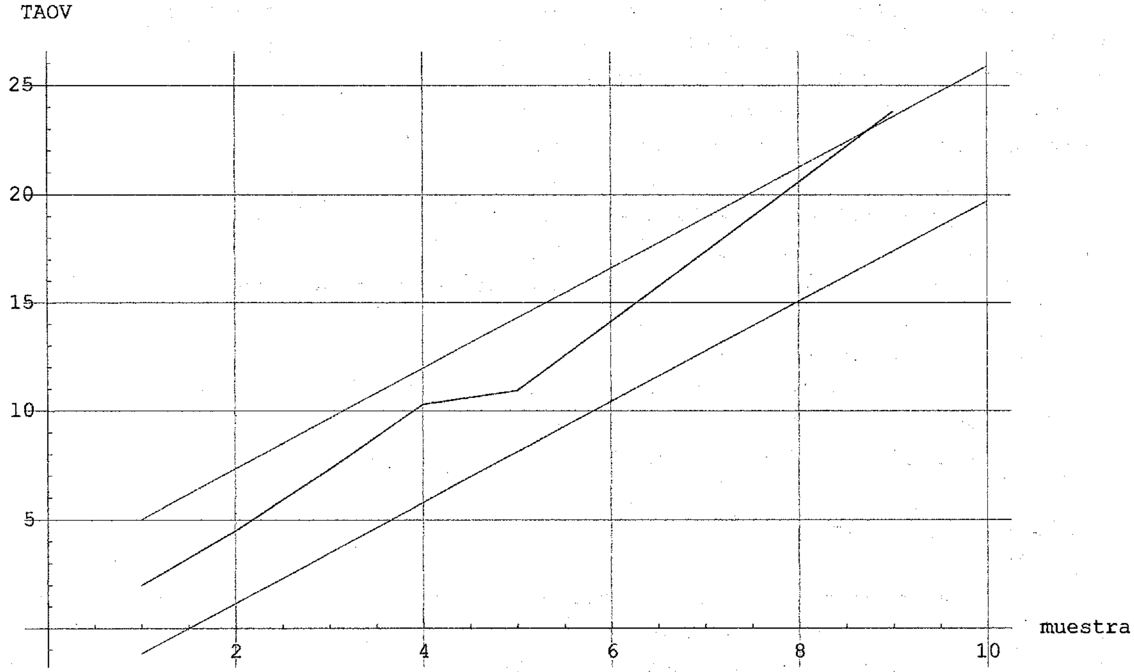
LK_0=-2.89037, LK_1=2.25129

Umbral para aceptar H_0 Recta Verde determinada por $C_1[m\_]=\frac{\text{VAR LK}_1}{\mu_0-\mu_1}+\frac{1}{2}\ m\ (\mu_0+\mu_1)$

$C_1(m) = 2.70155+\frac{1}{2}[m]4.635$

Umbral para rechazar H_0: Recta Roja determinada por $C_0[m\_]=\frac{\text{VAR LK}_0}{\mu_0-\mu_1}+\frac{1}{2}\ m\ (\mu_0+\mu_1)$

$C_0(m) = -3.46845+\frac{1}{2}[m]4.635$



TAOV: Total acumulado observado de la variable

C_1: Recta Verde, Umbral para aceptar H_0

C_0: Recta Roja, Umbral para rechazar H_0

La Recta azul muestra la Trayectoria

La muestra que dio es:{2, 2.5, 2.8, 3, 0.626, 3.2, 3.22, 3.222, 3.23}

La tabla de aceptación o rechazo de H_0 es la siguiente

No. de muestra	Total acumulado para aceptar Ho	Total acumulado para rechazar Ho	Total acumulado observado de la muestra	Decisión
1	5.01905	-1.15095	2	Continuar
2	7.33655	1.16655	4.5	Continuar
3	9.65405	3.48405	7.3	Continuar
4	11.9716	5.80155	10.3	Continuar
5	14.2891	8.11905	10.926	Continuar
6	16.6066	10.4366	14.126	Continuar
7	18.9241	12.7541	17.346	Continuar
8	21.2416	15.0716	20.568	Continuar
9	23.5591	17.3891	23.798	Acept

Nota: Cuando aparecen negativos en la Tabla no se puede tomar la decisión aún

Bibliografía

A continuación se presenta una clasificación de algunos libros de Estadística en los cuales se puede consultar sobre el tema de Análisis Secuencial para estudios observacionales así como textos sobre el paquete computacional de MATHEMATICA, a fin de que el estudiante interesado en estos tópicos se pueda auxiliar con diversos textos tanto para la teoría como para el uso y aplicación del paquete computacional.

[1] **Wald, Abraham, S**equential **A**nalysis, Dover Publications, Inc. New York, 1973, Chapters 1,2,3,5,7.

[2] **Wald, Abraham, S**equential **T**est of **S**tatistical Hypotheses , Columbia University, *The Annals of Mathematical Statistics; pp 118-142.*

[3] **Ghosh, B.K. and Sean P.K., S**equential **T**est of **S**tatistical **H**ypotheses, Addison Wesley, Massachusetts United States, 1970.

[4] **Ghosh, B.K., H**andbook of **S**equential **A**nalysis , Marcel Dekker, Inc.,1991, pp 1-10.

[5] **Wetherrill, G. Barrie, Glazebrook, Kevin D., S**equential **M**ethods in **S**tatistics, Third Edition, Champan and Hall, 1986, Chapter 2.

[6] **Mendoza R. Manuel,** Notas de clase, Importancia del Análisis Estadístico Secuencial, Comunicación Interna No. 13, Cuarta Edición 1993. Facultad de Ciencias, UNAM.

[7] **Scheaffer Richard L., Mendehall III William, Lyman Ott R.,** Elementos de muestreo, International Thomson Editores Spain Paraninfo, S.A., 2007,pág. 83

[8] **Cox, Sir David, FRS,** Statistical Theory and Modelling, Ed. by D.V. Hinkley, N. Reid and E.J. Snell; Chapman and Hall, Chapter 6.

[9] **Dixon, Wilfrid J., Massey, Jr. Frank J.,** Introduction to Statistical Analysis, Second Edition, McGraw-Hill, Book Company, Inc. 1957, Chapter 18.

[10] **Mendehall William, Reinmuth, E. Reinmuth,** Statistics for Management and Economics, 3rd. edition, Duxbury Press, North Scituate, Massachusetts, U.S.A. 1978.

[11] **Shilling Edward G.,** Aceptance Sampling in Quality Control, Chapman & Hall, Febrero 2009; pp 154-164; 626-629

[12] **Hald Anders,** Statistical Theory with Engineering Aplications, New York: Wiley; London: Chapman & Hall, 2004; Chapter 24.

[13] **Sarkadi, K. and Vincze I,** Mathematical Methods of Statistical, Quality Control, Academic Press, New York and London, 1974, pp 288-368.

[14] **Lindgren Bernard W.,** Statistical Theory, John Wiley, Fourth Edition, London: Mc millan 1968; pp 395-408.

[15] **Kenett S. Ron, Zacks Shelemyahu,** Estadística Industrial Moderna, International Thomson S.A. de C.V. Editores, 2000, pág. 182; Capítulo 9.

[16] **Duncan, Acheson J.,** Control de Calidad y Estadística Industrial, 2000 Alfaomega, S.A, pp 334-352.

[17] **Vaughn, Richard C.,** Control de Calidad, Primera Edición 1982, Impreso en México, Editorial Limusa.

[18] **Burr Irving W.**, Statistical Quality Control Methods, Marcel Dekker, Inc. 1976; pp 353-379.

[19] **Grant L. Eugene, Leavenworth S. Richard,** Statistical Quality Control, Sixth Edition 1988, Mc. Graw Hill, Chapter 12.

[20] **Wads Worth; Stephens; Godfrey;** Métodos de Control Calidad, Primera Edición en Español 2005, Compañía Editorial Continental, Capítulo 2-5, 15-16.

[21] **Wolfram, Stephen,** Mathematica: A System for Doing Mathemathics by Computer, Second Edition, Addison Wesley Publishing Company, 1991.

[22] **Gray W. and Glynn J.,** The Beginner´s Guide to Mathematica, Addison Wesley, Version 4, Cambridge University Press, 2000.

[23] **Pérez Cesar,** Cálculo Simbólico y Numérico con Mathematica, Editorial Ra-ma, Madrid España, 1995.