



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

# POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

## FACULTAD DE CIENCIAS

MANEJO DE RECURSOS  
RENOVABLES MEDIANTE LA APLICACIÓN DE LA  
TEORÍA DE CONTROL ÓPTIMO

# TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

## PRESENTA

Mat. Alonso Amado Lamonedá

**DIRECTORES DE TESIS:** Dr. Eugenio P. Balanzario Gutiérrez y  
Dr. Abdon E. Choque Rivero



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# MANEJO DE RECURSOS RENOVABLES MEDIANTE LA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE CONTROL ÓPTIMO<sup>1</sup>

Alonso Amado Lamonedá

---

<sup>1</sup>Este trabajo se financió con el proyecto PAPPIT-UNAM IN 100307.

A mis padres

## **Agradecimientos.**

Agradezco la ayuda que me brindaron mis profesores, directores de tesis y sinodales.

También quiero agradecer a mis padres, hermano y amigos por sus valiosos consejos y apoyo.

# Introducción

La historia del cálculo de variaciones comienza en el siglo XVIII con los trabajos de Euler (1707-1783) y Lagrange (1736-1813). En 1744 Euler publicó el primer libro sobre cálculo de variaciones que se conoce en la historia con el título: “*Método de búsqueda de líneas curvas con propiedades de máximo y mínimo, o la resolución del problema isoperimétrico tomado en su sentido más amplio*”.

Las primeras aplicaciones del cálculo de variaciones tuvieron lugar en la física, sobre todo en mecánica. La teoría de control empezó a desarrollarse sistemáticamente alrededor de los años treinta en Estados Unidos, en el campo de las ingenierías eléctrica y mecánica, pero no es hasta los años cincuenta y sesenta cuando algunas aportaciones importantes comenzaron a utilizar la teoría de control, como fueron las aportaciones de R. Bellman[1] y L. Pontryagin[11], las cuales fueron importantes para la fuerza aérea de los Estados Unidos en los años cincuenta y los viajes espaciales.

A partir de 1970 surge un gran interés por la teoría de control en distintas ramas de la economía, en donde ha sido un instrumento importante para estudiar el comportamiento de individuos y empresas en el desarrollo de la actividad económica a través del tiempo. Por ejemplo, en la economía de la empresa se han utilizado estas técnicas para el estudio de problemas tales como el control de inventarios, la selección de inversiones o la planificación de la producción, que son sólo algunas aplicaciones de la teoría de control en este ramo[4].

En particular, el Dr. Emilio Cerdá[4], catedrático de análisis económico de la Universidad Complutense de Madrid, comenta que la teoría de control es un instrumento fundamental en el análisis macroeconómico actualmente.

Debido a que la teoría de control es relativamente nueva, actualmente existe cierto interés por su aplicación en modelos y políticas económicas que permitan explotar determinados recursos de manera óptima. Algunos modelos de este tipo han sido estudiados por C. Clark [5], Mesterton [8] y más recientemente por X. Song [14], P. Chandra y B. Dubey [6].

En el siguiente trabajo utilizaremos algunas herramientas del cálculo de variaciones y la teoría de control óptimo en la aplicación de la administración óptima de recursos. Particularmente, estaremos interesados en el negocio de la pesquería, en donde mostraremos mediante algunos ejemplos la manera en

cómo se pueden aplicar el cálculo de variaciones, la teoría de control óptimo y la teoría de la estabilidad para ecuaciones diferenciales ordinarias en la modelación y explotación óptima de recursos renovables.

En el capítulo 1 estudiaremos los conceptos básicos que utilizaremos posteriormente, como la ecuación logística y el porqué de su practicidad, y revisaremos algunos modelos muy simples a modo de ejemplos.

En el capítulo 2 se estudian algunos conceptos clásicos del cálculo de variaciones, como son la ecuación de Euler y la ecuación de Legendre. Al final del capítulo, en un negocio de explotación pesquera, se resuelve el problema de establecer una política de pesca que optimice las ganancias a largo plazo, donde el hábitat de dichos peces crece mediante el modelo logístico. Para ello se utilizará una aplicación del teorema de Green.

En el capítulo 3 se introduce el concepto de variación de Gâteaux y se presenta el teorema de los multiplicadores de Lagrange, el cual se utilizará en algunas aplicaciones a la administración óptima de recursos. También se le da una interpretación económica a este teorema, y al final de este capítulo, basado en un artículo de J. Keller [7] se plantea y resuelve un problema en donde un corredor debe administrar su energía de manera óptima en una prueba deportiva.

Finalmente, en el capítulo 4 mencionamos el Principio del Máximo de Pontryagin y damos una prueba de éste utilizando hipótesis adicionales. Esta prueba será útil para dar una interpretación económica de este principio, lo cual ayudará a su mejor comprensión. También, a modo de ejemplo, se revisa el problema de consumo óptimo dado en el capítulo 3 y se comparan resultados. Al final de este capítulo, se estudia el problema de optimizar las ganancias en un negocio de explotación pesquera en donde el integrando de nuestra funcional objetivo, que representará las ganancias totales, no es una función lineal.

# Índice general

<b>1. Modelos Simples</b>	<b>1</b>
1.1. La Ecuación Logística . . . . .	1
1.2. Equilibrio Bionómico . . . . .	4
1.3. Esfuerzo Pesquero Constante Óptimo . . . . .	8
1.4. Control del Tipo de Relevo o Bang Bang . . . . .	10
<b>2. Cálculo de Variaciones</b>	<b>13</b>
2.1. El Problema de la Braquistócrona . . . . .	13
2.2. La Ecuación de Euler . . . . .	16
2.3. Condición de Segundo Orden . . . . .	20
2.4. Ejemplos y Aplicaciones de la Condición de Euler . . . . .	22
2.5. Una Aplicación del Teorema de Green al Cálculo de Variaciones	26
2.6. Aplicación de la Ecuación de Euler en una Política Pesquera .	30
2.7. Restricción de Desigualdad . . . . .	35
<b>3. Multiplicadores de Lagrange</b>	<b>38</b>
3.1. El Teorema de Lagrange . . . . .	38
3.2. El Problema Isoperimétrico . . . . .	43
3.3. Política de Consumo óptimo . . . . .	46
3.4. Política de Consumo Óptimo Restringida a un Consumo Mínimo	50
3.5. Velocidad Óptima . . . . .	56



<b>4. El Principio del Máximo de Pontryagin</b>	<b>63</b>
4.1. Preliminares . . . . .	63
4.2. Una Política de Consumo Óptimo . . . . .	70
4.3. Prueba del Principio del Máximo . . . . .	72
4.4. Interpretación Económica . . . . .	75
4.5. El Principio del Máximo de Pontryagin . . . . .	75
4.6. Modelo No Lineal para el Negocio de la Pesquería . . . . .	79
<b>Conclusión</b>	<b>88</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>89</b>

# Capítulo 1

## Modelos Simples

Antes de aplicar herramientas del cálculo de variaciones al problema de establecer modelos matemáticos para una política pesquera estudiaremos los conceptos básicos que utilizaremos posteriormente y revisaremos algunos modelos muy simples a modo de ejemplos.

### 1.1. La Ecuación Logística

Supongamos que el tamaño de cierta población de peces es proporcional a su natalidad y mortalidad, sean  $n$  y  $m$  sus respectivas tasas. Si  $R = n - m$ , el crecimiento de la población podría modelarse mediante la ecuación:

$$\dot{x} = Rx \quad \text{con} \quad x(0) = x_0. \quad (1.1)$$

Donde  $R$  es una constante real positiva y  $x$  una función real. Observamos que la solución a esta ecuación

$$x(t) = x(0)e^{Rt} \quad (1.2)$$

crece exponencialmente a infinito si la tasa de natalidad es mayor a la de mortalidad y decrece a cero si es menor. Bajo ciertas condiciones óptimas, algunas poblaciones pueden tener inicialmente un crecimiento descrito como en la ecuación (1.2), sin embargo, el crecimiento de una población no puede tender a infinito debido a las limitaciones físicas y biológicas del medio natural, como podrían ser por ejemplo, las limitaciones en el espacio de un lago

o el alimento disponible en el mismo. Debido a esto, el modelo descrito por la ecuación (1.1) conviene ser modificado mediante la ecuación

$$\dot{x} = S(x)x \quad \text{con} \quad x(0) = x_0 \quad (1.3)$$

en donde  $S(x)$  es una función decreciente de  $x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , de tal forma que el crecimiento de la población se estabilice cuando  $x$  crece.

Un ejemplo muy simple y utilizado es el modelo propuesto por P.F. Verhulst en 1938 conocido como la ecuación logística:

$$\dot{x} = Rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad \text{donde} \quad x(0) = x_0 \quad (1.4)$$

en donde:

- $R$ : Tasa intrínseca de crecimiento de la población.
- $x$ : Tamaño de la población al tiempo  $t$ .
- $K$ : Tamaño máximo o nivel de saturación de la población.
- $x_0$ : Tamaño inicial de la población.

Ahora haremos algunas observaciones elementales sobre el modelo representado por la ecuación (1.4).

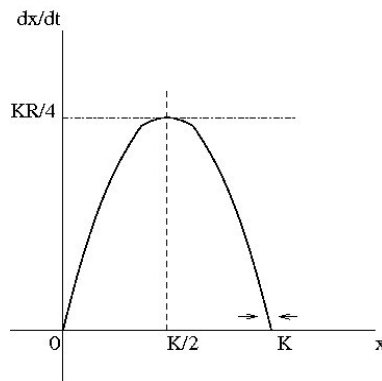


Figura 1.1: Comportamiento del crecimiento de la población en función de  $x$ .

1. Tenemos dos puntos de equilibrio,  $x = 0$  y  $x = K$ .
2.
  - Si  $x < K$  entonces,  $x$  es creciente respecto a  $t$  y si  $x > K$ , decreciente.
  - Como podemos ver en la figura 1.1, conforme  $x$  se aproxima a  $K$  su derivada se va anulando, es decir,  $x$  tiende a ser constante.
3. Se tiene un punto de inflexión en  $x = K/2$
4. No es difícil resolver la ecuación (1.4), en efecto, de ésta se tiene

$$\frac{K}{R} \int_0^t \frac{\dot{x}}{x(K-x)} ds = \int_0^t ds \quad (1.5)$$

y utilizando el método de fracciones parciales en el lado izquierdo de (1.5)

$$\ln \frac{x}{x-K} = R(t+C) \quad \text{con } C \text{ constante}$$

y por último, despejando  $x$  y tomando en cuenta que  $x(0) = x_0$ , tenemos

$$x(t) = \frac{K}{1 + Be^{-Rt}} \quad \text{donde } B = \frac{K - x_0}{x_0}. \quad (1.6)$$

De aquí es claro que si  $R > 0$ ,  $x(t) \rightarrow K$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

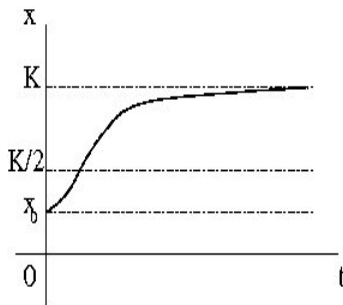


Figura 1.2:  $x_0 < K$ .

Concluimos que el modelo dado por la ecuación logística (1.4) nos muestra que cuando la población inicial tiene tamaño inferior a  $K$ , ésta crece hasta

$K$  y tiende a estabilizarse, como lo muestra la figura 1.2. Si la población inicial está saturada, es decir  $x_0 > K$ , el tamaño de la población tiende a decrecer con el tiempo hasta  $K$  y allí se estabiliza, como lo muestra la figura 1.3. Además vemos que si la población inicial es muy pequeña, ésta crece con cierta rapidez hasta alcanzar cierto tamaño  $K/2$  y después su crecimiento es más lento. Así tenemos en (1.4) un modelo más realista que el dado por (1.1) y también bastante práctico.

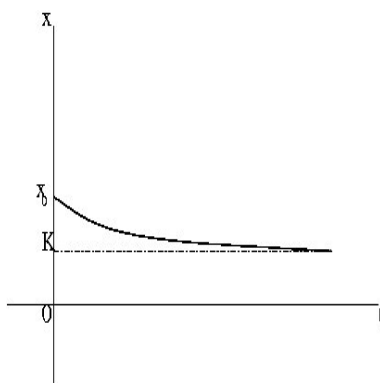


Figura 1.3:  $x_0 > K$ .

## 1.2. Equilibrio Bionómico

En general, en el negocio de la pesca, modelaremos el crecimiento de nuestra población de peces mediante una ecuación de la forma,

$$\dot{x} = F(x) - h(x) \tag{1.7}$$

en donde:

1.  $x(t)$  representa el tamaño de la población al tiempo  $t$ .
2.  $h(x)$  mide la extracción de peces respecto al tamaño de la población  $x$ .
3.  $F(x)$  mide el incremento natural de la población en función del tamaño de la población  $x$ .

Cuando el tamaño de una población se mantiene constante diremos que existe un **equilibrio biológico**. Si las ganancias en un negocio se mantienen nulas diremos que existe un **equilibrio económico**. Veamos ahora un ejemplo aplicado al negocio de la pesquería, donde el crecimiento natural de la población de peces cumple con la ecuación logística, el esfuerzo pesquero es directamente proporcional al tamaño de la población, y éste permite mantener un equilibrio biológico y económico, es decir, lo que definiremos como un **equilibrio bionómico**.

Siguiendo el modelo de la ecuación (1.7) hagamos que

$$h(x) = qux(t) \quad \text{con} \quad 0 < q < 1 \quad (1.8)$$

donde  $u \geq 0$  representa la tasa de esfuerzo pesquero y  $q$  un coeficiente de eficiencia, es decir,  $q$  mide la capacidad de extracción pesquera de acuerdo a los recursos que se tienen para pescar. En este sentido, se entiende que para métodos sofisticados y modernos de pesca,  $q$  será cercana a 1, y en caso de que éstos sean rudimentarios  $q$  será cercana a 0.

Siguiendo el modelo logístico de crecimiento en nuestra población de peces, de las ecuaciones (1.7) y (1.8) tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\dot{x}}{x} = R \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - uq \quad \text{con} \quad x(0) = x_0 \quad (1.9)$$

donde  $x(t) > 0$  para toda  $t$  real no negativo,  $R$  es la tasa de crecimiento de la población y  $K$  su nivel de saturación, es decir, el tamaño máximo que ésta puede alcanzar en ausencia de la pesca.

Si se logra mantener una tasa de esfuerzo pesquero constante  $u$  que cumpla con

$$0 < uq < R \quad (1.10)$$

el tamaño de la población tiende a equilibrarse a largo plazo. En efecto, la ecuación (1.9) se puede ver como:

$$\frac{\dot{x}}{x} = R \left( 1 - \frac{uq}{R} \right) \left( 1 - \frac{x}{\left( 1 - \frac{uq}{R} \right) K} \right)$$

y al igual que la ecuación (1.4), la ecuación (1.9) se resuelve fácilmente obteniendo

$$x(t) = \frac{C_1}{1 + Be^{-\alpha t}} \quad (1.11)$$

en donde

$$\alpha = R - uq, \quad C_1 = \frac{K}{R}\alpha \quad \text{y} \quad B = \frac{C_1 - x_0}{x_0}.$$

De aquí se confirma que la población tiende al equilibrio, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{K}{R} (R - uq). \quad (1.12)$$

En efecto, de manera análoga a como se analizó el modelo presentado por la ecuación logística en la sección anterior, si

$$0 < x_0 < \frac{K}{R} (R - uq) \quad (1.13)$$

entonces, como se muestra en la figura 1.4,  $x$  crece y tiende a equilibrarse en

$$\frac{K}{R} (R - uq). \quad (1.14)$$

Mientras que decrece y se estabiliza en el mismo valor si

$$x_0 > \frac{K}{R} (R - uq) \quad (1.15)$$

conforme  $t \rightarrow \infty$ , como se muestra en la figura 1.5.

También de (1.11) vemos que de no cumplirse (1.10), la población tiende a la extinción debido a una sobreexplotación.

Por otro lado, ahora estudiaremos las condiciones para un equilibrio económico. Las ganancias generadas al tiempo  $t$  están dadas por:

$$G = pqux(t) - cu \quad (1.16)$$

en donde:

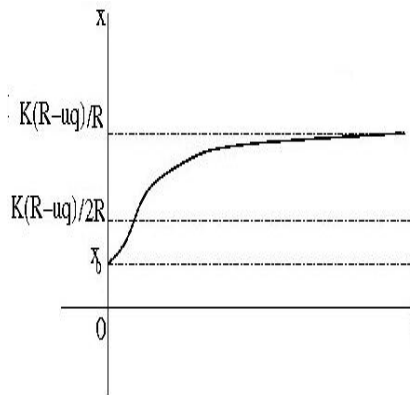


Figura 1.4: Comportamiento del tamaño de la población si se cumple (1.13).

- $p > 0$  es el precio por unidad de pesca.
- $u \geq 0$  es la tasa de esfuerzo pesquero.
- $c > 0$  es el costo de operación por unidad de trabajo ( aquí se incluye el **costo de oportunidad** <sup>1</sup>).
- $0 < q < 1$  coeficiente de eficiencia pesquera.
- $x$  es el tamaño de la población al tiempo  $t$ .

Si  $G = 0$  en (1.16), entonces hablamos de un equilibrio económico para

$$x = \frac{c}{pq}. \quad (1.17)$$

Igualando  $\dot{x} = 0$  en la ecuación (1.9) el valor de  $x$  en (1.17) tendremos un equilibrio bionómico para

$$u = \frac{R}{q} \left( 1 - \frac{c}{pqK} \right). \quad (1.18)$$

---

<sup>1</sup>Definimos el costo de oportunidad como la utilidad máxima que pudo ser obtenida por haber destinado nuestros recursos a una inversión alternativa.



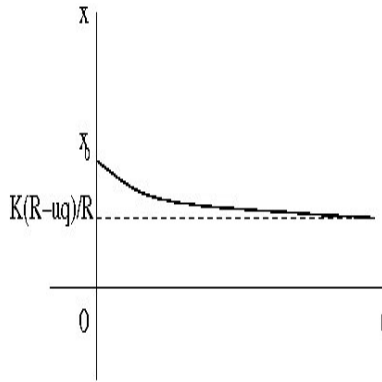


Figura 1.5: Comportamiento del tamaño de la población si se cumple (1.15).

Suponiendo que

$$0 < \frac{c}{pqK} < 1 \quad (1.19)$$

como  $0 < q < 1$ , de (1.18) y (1.19) se deduce que  $u$  cumple con la condición (1.10), y por lo tanto, si aplicamos una tasa de esfuerzo pesquero constante como lo indica la ecuación (1.18), de acuerdo a (1.12), la población tenderá a estabilizarse en

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{c}{pq} \quad (1.20)$$

lo que nos muestra que al aplicar una tasa de esfuerzo pesquero como en (1.18) tendremos un equilibrio bionómico a largo plazo.

### 1.3. Esfuerzo Pesquero Constante Óptimo

En la sección anterior encontramos la tasa de esfuerzo pesquero constante que nos brinda un equilibrio bionómico a largo plazo, ahora nos interesa encontrar la tasa que nos brinde la mayor ganancia promedio posible. La ganancia promedio está dado por

$$\frac{u}{T} \int_0^T \{pqx(t) - c\} dt.$$

Trataremos de encontrar  $u$  que optimice

$$\tilde{J}(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{u}{T} \int_0^T \{pqx(t) - c\} dt \quad (1.21)$$

donde  $x$  cumple con la ecuación(1.9), y así de acuerdo a (1.11) tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{J}(u) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{u}{T} \int_0^T \{pqx(t) - c\} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{u}{T} \left\{ \int_0^T \frac{pqC_1 e^{\alpha t}}{e^{\alpha t} + B} dt - cT \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{u}{T} \frac{pqC_1}{\alpha} \ln \frac{e^{\alpha T} + B}{1 + B} - cu \\ &= \frac{upqC_1}{\alpha} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{d \left( \ln \left( \frac{e^{\alpha T} + B}{1 + B} \right) \right)}{dT} - cu \\ &= upqC_1 \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 + Be^{-\alpha T}} \right) - cu \\ &= upqC_1 - cu \\ &= u \left\{ \frac{pqK}{R} (R - u) - c \right\}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Por último, resolviendo la ecuación

$$\tilde{J}'(u) = 0 \quad (1.23)$$

vemos de (1.22) que la solución a (1.23) es

$$u^* = \frac{R}{2} \left( 1 - \frac{c}{pqK} \right). \quad (1.24)$$

No es difícil verificar que en  $u^*$  se tiene un máximo local. Además, como  $0 < q < 1$ , por la condición (1.19), se cumple (1.10) y así existe un equilibrio biológico en la población.

Finalmente, como podemos observar de (1.18) y (1.24), el esfuerzo pesquero que optimiza nuestras ganancias es justo la mitad por  $q$  de aquel que nos brinda un equilibrio bionómico.

## 1.4. Control del Tipo de Relevo o Bang Bang

Supongamos que una población de peces es pequeña y queremos implantar una política de pesca, donde en un principio la actividad pesquera estará completamente vedada, que permita a la población crecer y recuperarse en tamaño, para después explotar el recurso mediante una tasa de esfuerzo pesquero constante de una manera óptima. Nuestra tasa de esfuerzo pesquero será entonces de la forma:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq s \\ U & s < t < \infty \end{cases} \quad \text{con } U \text{ constante.} \quad (1.25)$$

A una función de control como en (1.25) se le suele llamar del tipo de **relevo** o **bang-bang**.

Por otro lado, si  $r$  es la tasa de interés bancaria y los intereses se acumulan de manera continua, por cada unidad monetaria que invirtamos en un año tendremos  $e^r$  unidades monetarias, de esta manera, una unidad monetaria recibida dentro de un año representa  $e^{-r}$  unidades monetarias en tiempo presente. Con la finalidad de actualizar nuestras ganancias en un flujo futuro diremos que el valor presente de  $\mathfrak{X}$  unidades monetarias totales en el tiempo  $t$  es de  $e^{-rt}\mathfrak{X}$ . Por lo tanto, de acuerdo a la ecuación (1.16), nuestras ganancias al tiempo  $T$  están dadas por

$$\int_0^T e^{-rt} u(t) \{pqx(t) - c\} dt.$$

Suponiendo que nuestra población presenta un crecimiento logístico como en la ecuación (1.9), nuestro problema consiste en encontrar una función

$u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , como en (1.25) que maximice

$$J(u) = \int_0^{\infty} e^{-rt} u(t) \{pqx(t) - c\} dt \quad (1.26)$$

sujeto a la condición

$$\dot{x} = Rx \left\{ 1 - \frac{q}{R}u - \frac{x}{K} \right\} \quad \text{con} \quad x(0) = \frac{K}{N} \quad (1.27)$$

donde  $N$  es un real positivo muy grande.

Dado que la población es pequeña y  $u$  es como en (1.25) queremos determinar  $s$  y  $U$  de tal manera que  $J$  sea máximo, y la población alcance un equilibrio biológico en el tiempo  $s$ . En este ejemplo, en el intervalo  $0 \leq t \leq s$  no ejerceremos esfuerzo pesquero alguno, es decir,  $u(t) = 0$  y de (1.27) se tiene

$$\dot{x} = Rx \left( 1 - \frac{x}{K} \right) \quad \text{con} \quad x(0) = \frac{K}{N}.$$

Como en (1.6), esta ecuación se resuelve

$$x(t) = \frac{K}{1 + (N-1)e^{-Rt}} \quad \text{en} \quad 0 \leq t \leq s. \quad (1.28)$$

Para  $s < t < \infty$ , el tamaño de la población se mantiene en equilibrio y se aplica una tasa de esfuerzo pesquero constante, así nuevamente por (1.27)

$$\dot{x} = Rx \left\{ 1 - \frac{q}{R}U - \frac{x}{K} \right\}. \quad (1.29)$$

Por (1.28) y (1.29) resolvemos

$$x(t) = \begin{cases} K/[1 + (N-1)e^{-Rt}] & \text{si } 0 \leq t \leq s \\ K \left[ 1 - \frac{q}{R}U \right] & \text{si } s < t < \infty \end{cases} \quad (1.30)$$

y como la población crece de manera continua

$$\frac{1}{1 + (N-1)e^{-Rs}} = \left[ 1 - \frac{q}{R}U \right].$$

De aquí encontramos  $s$  en términos de  $U$

$$s(U) = \frac{1}{R} \log \left( (N-1) \left( \frac{R}{qU} - 1 \right) \right) \quad (1.31)$$

entonces, de (1.26) y (1.30)

$$J(U) = \frac{1}{r} pqKU e^{-rs(U)} \left( 1 - \frac{U}{R}q - b \right) \quad (1.32)$$

en donde

$$b = \frac{c}{qpK}. \quad (1.33)$$

Derivando  $J$  en (1.32) respecto a  $U$  e igualando a cero concluimos que

$$U^* = \frac{R}{4q} \left\{ 3 - b + \frac{r}{R} - \sqrt{\left( 1 + b - \frac{r}{R} \right)^2 + \frac{8br}{R}} \right\} \quad (1.34)$$

es la elección óptima para  $U$ , mientras que el tiempo de recuperación de la población es

$$s^* = s(U^*). \quad (1.35)$$

Para que el negocio de la pesca sea atractivo necesariamente  $J(U^*)$  debe ser no negativo, es decir, no debemos obtener ganancias negativas. En caso de que  $J(U^*) = 0$  se presenta un caso de equilibrio económico.

De (1.32) concluimos que una condición para permanecer en el negocio de la pesca es

$$b \leq 1 - \frac{U^*}{R}q. \quad (1.36)$$

# Capítulo 2

## Cálculo de Variaciones

### 2.1. El Problema de la Braquistócrona

Consideremos el problema de la braquistócrona, el cual fue propuesto por el matemático suizo Johann Bernoulli(1667-1748).

“Sean dos puntos  $P$  y  $Q$  situados en un plano vertical, no en la misma recta vertical y a diferentes alturas. Se trata de encontrar la curva que los una de tal manera que si una partícula, influenciada únicamente por la gravedad, que se desliza a través de ella, lo haga en un tiempo mínimo desde  $P$  hasta  $Q$ .”

Sean nuestro plano vertical el plano cartesiano y  $h \in C^2[a, b]$  la curva que une  $P$  y  $Q$ , es decir, tal que  $(a, h(a)) = P$  y  $(b, h(b)) = Q$ , como lo muestra la figura 2.1.

Sea  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  una partición finita y regular del intervalo  $[a, b]$ . La longitud de arco de la curva  $h$  está dada aproximadamente por

$$l \approx \sum_{i=1}^n \Delta s_i$$

donde

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta h_i^2} \tag{2.1}$$

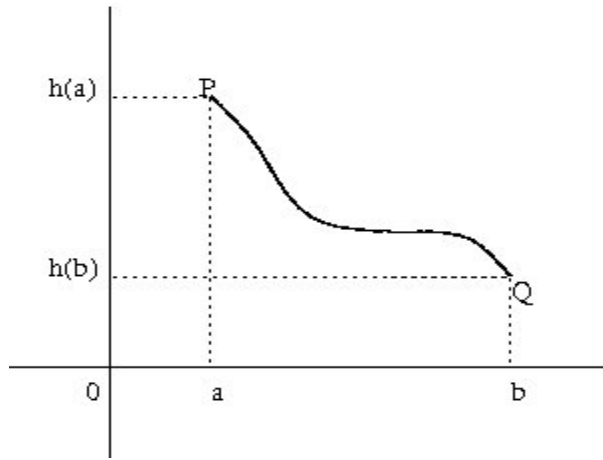


Figura 2.1: Trayectoria admisible.

con

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{y} \quad \Delta h_i = h(x_i) - h(x_{i-1}).$$

Por la ley de la preservación de la energía sabemos que la energía cinética ganada en la partícula debe ser igual a su energía potencial gastada, es decir, se cumple la ecuación

$$\frac{1}{2}m\nu(x)^2 = mg(h(a) - h(x))$$

donde  $m$  es la masa de la partícula,  $\nu(x)$  su rapidez en la posición  $x$  y  $g$  la constante gravitacional. De aquí deducimos

$$\nu(x) = \sqrt{2g(h(a) - h(x))}. \quad (2.2)$$

Por otro lado, el tiempo en el que nuestra partícula recorre el segmento  $\Delta s_i$  está dado aproximadamente por el cociente de la longitud de arco y la rapidez de la partícula en él, así por (2.1) y (2.2)

$$\frac{\Delta s_i}{\nu(x_i)} = \frac{\sqrt{1 + \Delta h_i^2 / \Delta x_i^2}}{\sqrt{2g(h(a) - h(x))}} \quad (2.3)$$

entonces, el tiempo  $T$  en el que la partícula recorre la curva  $h$  es aproximadamente

$$T \approx \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{1 + \Delta h_i^2 / \Delta x_i^2}}{\sqrt{2g(h(a) - h(x))}} \Delta x_i \quad (2.4)$$

tomando el límite en (2.4) cuando  $n \rightarrow \infty$  nos queda

$$T = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + h'(x)^2}}{\sqrt{2g(h(a) - h(x))}} dx. \quad (2.5)$$

Definiendo  $y = h(a) - h$  y sustituyendolo en (2.5) nos queda

$$T(y) = \int_a^b \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx. \quad (2.6)$$

De esta manera podemos concluir que el problema de la braquistócrona se reduce en minimizar la funcional  $T$  en (2.6) bajo el dominio

$$D = \{y \in C^2[a, b] : (a, y(a)) = P \text{ y } (b, y(b)) = Q\}. \quad (2.7)$$

Retomaremos después este problema. En general, para una función de tres variables  $F$  de clase  $C^2$ , queremos aprender a resolver el problema de maximizar o minimizar la funcional  $J$ ,

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (2.8)$$

en el dominio  $D$ . Para abordar este problema nos serán útiles los resultados que veremos en este capítulo.



## 2.2. La Ecuación de Euler

**Proposición 2.2.1** Sean  $u$  y  $v$  funciones reales con dominio en un intervalo  $[a, b]$ , con primera derivada continua, tales que existen  $r > 0$  y  $\epsilon_0 \in (a, b)$ , de tal forma que se cumple  $u < v$  en

$$\mathfrak{U} = \{\epsilon : \epsilon_0 - r < \epsilon < \epsilon_0 + r\}.$$

Sean  $f$  y  $\partial f / \partial \epsilon$  funciones continuas en

$$\mathfrak{V} = \{u(\epsilon) \leq t \leq v(\epsilon) : \epsilon \in \mathfrak{U}\}.$$

Entonces, se verifica<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{d\epsilon} \left( \int_{u(\epsilon)}^{v(\epsilon)} f(\epsilon, t) dt \right) \right] (\epsilon_0) &= f(\epsilon_0, v(\epsilon_0))v'(\epsilon_0) - f(\epsilon_0, u(\epsilon_0))u'(\epsilon_0) \\ &\quad + \int_{u(\epsilon_0)}^{v(\epsilon_0)} \left[ \frac{\partial f(\epsilon, t)}{\partial \epsilon} \right] (\epsilon_0) dt. \end{aligned}$$

**Demostración.** Definamos

$$H(\epsilon, u, v) = \int_u^v f(\epsilon, t) dt,$$

donde  $u$  y  $v$  son funciones de  $\epsilon$ , como en la hipótesis. Sea

$$G(\epsilon, x) = \int_0^x f(\epsilon, t) dt$$

entonces,

$$H(\epsilon, u, v) = G(\epsilon, v) - G(\epsilon, u).$$

Aplicando la regla de la cadena tenemos

---

<sup>1</sup>Esta expresión es conocida como la fórmula de Leibniz.

$$\frac{dH}{d\epsilon} = \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \epsilon} + \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \epsilon} + \frac{\partial H}{\partial \epsilon}.$$

Por la continuidad de  $f$  y  $\partial f/\partial \epsilon$  en  $\mathfrak{V}$  se tiene

$$\frac{\partial H}{\partial \epsilon} = \int_u^v \left[ \frac{\partial f(\epsilon, t)}{\partial \epsilon} \right] dt$$

para un valor fijo de  $u$  y  $v$ , en los valores permitidos por la hipótesis.

Finalmente, se concluye

$$\begin{aligned} \frac{dH}{d\epsilon}(\epsilon_0, v(\epsilon_0), u(\epsilon_0)) &= f(\epsilon_0, v(\epsilon_0)) \frac{dv}{d\epsilon}(\epsilon_0) - f(\epsilon_0, u(\epsilon_0)) \frac{du}{d\epsilon}(\epsilon_0) \\ &\quad + \int_{u(\epsilon_0)}^{v(\epsilon_0)} \left[ \frac{\partial f(\epsilon, t)}{\partial \epsilon} \right] (\epsilon_0) dt. \end{aligned}$$

■

**Lema 2.2.1 (Lagrange)** *Sea  $f$  una función continua definida en  $[t_0, t_1]$ . Sea  $\eta$  una función diferenciable definida en  $[t_0, t_1]$  con  $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$ . Si*

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\eta(t)dt = 0,$$

*para toda  $\eta$  que cumpla las condiciones dadas entonces,  $f(t) = 0$  para cada  $t_0 \leq t \leq t_1$ .*

**Demostración.** Hagámoslo por reducción al absurdo. Supongamos que existe  $\xi \in (t_0, t_1)$  tal que  $f(\xi) > 0$ . Por la continuidad de  $f$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f(t) > 0$  para  $t \in (\xi - \epsilon, \xi + \epsilon)$ . Definamos

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & t_0 \leq t \leq \xi - \epsilon \\ (t - (\xi - \epsilon))^2(t - (\xi + \epsilon))^2 & \xi - \epsilon < t < \xi + \epsilon \\ 0 & \xi + \epsilon \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

entonces,

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\eta(t)dt = \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} f(t)\eta(t)dt > 0$$

ya que el integrando toma valores estrictamente positivos en  $(\xi - \epsilon, \xi + \epsilon)$ , y tenemos una contradicción. ■

Ahora enunciaremos la ecuación de Euler, la cual es una condición necesaria en la solución del problema planteado en la ecuación (2.8).

**Teorema 2.2.1 (Condición de Euler)** *Sea  $J(y)$  como en (2.8) y  $D$  el dominio en (2.7). Si  $y \in D$  es tal que*

$$J(y) = \inf\{J(z) : z \in D\} \quad \text{o} \quad J(y) = \sup\{J(z) : z \in D\}$$

entonces,

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

Por practicidad escribiremos esta ecuación como<sup>2</sup>

$$F_y - \frac{dF_z}{dx} = 0. \tag{2.9}$$

**Demostración.** Sea  $\eta \in C^2[a, b]$  tal que  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  y sea  $\epsilon \geq 0$  tal que

$$h(x) = y + \epsilon\eta(x). \tag{2.10}$$

Definamos

$$H(\epsilon) = I(h) = \int_a^b F(x, h, h')dx. \tag{2.11}$$

---

<sup>2</sup>A esta ecuación se le conoce como la ecuación de Euler.

Luego para  $\epsilon = 0$ ,  $H$  alcanza un valor mínimo o máximo y se cumple

$$H'(0) = 0. \quad (2.12)$$

Aplicando la fórmula de Leibniz a (2.11)

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\epsilon} \int_a^b F(x, h, H') dx \right|_{\epsilon=0} &= \left. \int_a^b \frac{\partial}{\partial \epsilon} \{F(x, y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta')\} dx \right|_{\epsilon=0} \\ &= \int_a^b \{F_y \eta(x) + F_z \eta'(x)\} dx. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Debido a que  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ , integrando por partes

$$\int_a^b F_z \eta'(x) dx = - \int_a^b \frac{dF_z}{dx} \eta(x) dx$$

y de (2.13) nos queda

$$H'(0) = \int_a^b \left\{ F_y - \frac{dF_z}{dx} \right\} \eta(x) dx = 0.$$

Por el lema 2.2.1 se sigue

$$F_y - \frac{dF_z}{dx} = 0. \quad (2.14)$$

■

A las soluciones de la ecuación (2.14) se le llaman extremales. Ahora daremos otra condición necesaria que nos permita identificar si un extremal es candidato a ser un máximo o un mínimo.

## 2.3. Condición de Segundo Orden

**Lema 2.3.1** Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas tales que

$$\int_a^b \{f(x)(\eta')^2(x) + g(x)\eta^2(x)\}dx \leq 0$$

para cada función  $\eta \in C^1[a, b]$ . Entonces  $f(x) \leq 0$  para cada  $x \in [a, b]$ .

**Demostración.** Procedamos por contradicción. Supongamos sin pérdida de generalidad, que  $0 \in (a, b)$  y  $f(0) \geq 2$ . Por continuidad de  $f$ , sea  $\delta > 0$  tal que  $f(x) \geq 1$  siempre que  $|x| < \delta$ . Sea  $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida como

$$\eta(x) = \begin{cases} (1 - x^2/\delta^2)^2 & \text{si } -\delta < x < \delta \\ 0 & \text{si } x \in [a, b] \setminus (-\delta, \delta) \end{cases}$$

por la hipótesis tenemos

$$\begin{aligned} - \int_a^b g(x)\eta^2(x)dx &\geq \int_a^b f(x)(\eta')^2(x)dx \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} f(x)(\eta')^2(x)dx \\ &\geq \int_{-\delta}^{\delta} (\eta')^2(x)dx \\ &= \frac{256}{105\delta}. \end{aligned}$$

Como el miembro izquierdo de esta desigualdad es acotado, esto es una contradicción. ■

**Teorema 2.3.1 (Condición de Legendre)** Si la funcional  $J$  definida en la ecuación (2.8) tiene un máximo en  $y$  entonces,

$$F_{zz}(x, y, y') \leq 0 \quad \text{para cada } x \in [a, b].$$

**Demostración.** Sea  $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable de clase  $C^2[a, b]$  tal que

$$\eta(a) = 0 = \eta(b). \quad (2.15)$$

Definamos

$$H(\epsilon) = \int_a^b F(x, y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta') dx. \quad (2.16)$$

De esta manera  $H(\epsilon)$  alcanza un máximo para  $\epsilon = 0$ . Entonces,

$$H''(0) < 0. \quad (2.17)$$

De la ecuación (2.16)

$$H''(\epsilon) = \int_a^b \{F_{yy}\eta^2 + 2F_{yz}\eta\eta' + F_{zz}(\eta')^2\} dx \quad (2.18)$$

luego integrando por partes y de (2.15)

$$\begin{aligned} 2 \int_a^b F_{yz}\eta\eta' dx &= \eta^2 F_{yz} \Big|_a^b - \int_a^b \eta^2 \frac{dF_{yz}}{dx} dx \\ &= - \int_a^b \eta^2 \frac{dF_{yz}}{dx} dx \end{aligned}$$

y de (2.18) nos queda

$$H''(0) = \int_a^b \left\{ \eta^2 \left( F_{yy} - \frac{dF_{yz}}{dx} \right) + (\eta')^2 F_{zz} \right\} dx$$

y de (2.17) y del lema 2.3.1, se concluye el teorema. ■

## 2.4. Ejemplos y Aplicaciones de la Condición de Euler

A continuación veremos algunos ejemplos de la aplicación de la condición de Euler cuando  $F$  tiene una forma especial.

Puesto que

$$\frac{dF_z}{dx} = F_{zx} + F_{zy} \frac{dy}{dx} + F_{zz} \frac{d^2y}{dx^2}$$

la ecuación de Euler puede ser escrita también como

$$F_{zz} \frac{d^2y}{dx^2} + F_{zy} \frac{dy}{dx} + (F_{zx} - F_y) = 0$$

de donde se deduce la siguiente proposición.

**Proposición 2.4.1** *Si  $F$  no depende de  $x$  ni de  $y$ , la ecuación de Euler se reduce a*

$$F_{zz} \frac{d^2y}{dx^2} = 0. \tag{2.19}$$

### Ejemplo 2.4.1

Dados dos puntos en el plano  $P = (a, A)$  y  $Q = (b, B)$ , queremos encontrar, entre las curvas  $y \in C^2[a, b]$  la curva de longitud mínima que los una. Consideremos entonces, el problema de minimizar

$$I(y) = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \tag{2.20}$$

$$\text{con } y \in C^2[a, b] \quad \text{donde } y(a) = A \quad \text{y} \quad y(b) = B.$$

Aquí  $F(x, y, y')$  no depende ni de  $x$  ni de  $y$ .

Tenemos

$$F_{zz} = \left\{ \frac{1}{1 + (y')^2} \right\}^{3/2} > 0 \quad (2.21)$$

de donde concluimos que  $d^2y/dx^2 = 0$  y así  $y = C_1 + C_2x$ , con  $C_1$  y  $C_2$  constantes que se pueden calcular de la condición de frontera. Por el teorema 2.3.1 y (2.21),  $y$  es un extremal que de ser un extremo, éste debe minimizar (2.20). En este caso, sabemos que la trayectoria admisible óptima es la recta que une los puntos  $P$  y  $Q$ .

**Proposición 2.4.2** *Si  $F$  no depende de  $x$  entonces, existe una constante  $K$  tal que la ecuación de Euler se reduce a*

$$F_z \frac{dy}{dx} - F = K.$$

**Demostración.** En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( F_z \frac{dy}{dx} - F \right) &= \frac{dF_z}{dx} \frac{dy}{dx} + F_z \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dF}{dx} \\ &= \frac{dF_z}{dx} \frac{dy}{dx} + F_z \frac{d^2y}{dx^2} - \left( F_x + F_y \frac{dy}{dx} + F_z \frac{d^2y}{dx^2} \right) \\ &= \left( \frac{dF_z}{dx} - F_y \right) \frac{dy}{dx} - F_x. \end{aligned}$$

De la ecuación de Euler se sigue el resultado. ■

### Ejemplo 2.4.2

Con la proposición 2.4.2 estamos listos para darle solución al problema de la braquistócrona expuesto al principio de este capítulo. En efecto, se desea minimizar



$$J(y) = \frac{1}{2g} \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} dx \quad (2.22)$$

con  $y \in C^2[a, b]$ , sujeto a  $y(a) = A$  y  $y(b) = B$ .

De la proposición 2.4.2 y (2.22) se sigue

$$\frac{(y')^2}{\sqrt{y}\sqrt{1 + (y')^2}} - \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} = K \quad (2.23)$$

donde  $K$  es una constante.

Luego (2.23) se puede escribir como

$$y(1 + ((y')^2)) = 2c \quad (2.24)$$

donde  $c$  es una constante positiva. De esta forma la solución al problema de la braquistócrona debe satisfacer la ecuación (2.24). Para resolver (2.24), despejamos  $y'$  y tenemos

$$y' = \pm \sqrt{\frac{2c}{y} - 1}$$

y de aquí se sigue

$$\int \sqrt{\frac{y}{2c - y}} dy = \pm \int dx. \quad (2.25)$$

Por otro lado, si  $u = y - c$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{y}{2c - y}} dy &= \int \frac{y dy}{\sqrt{y}\sqrt{2c - y}} \\ &= \int \frac{u du}{\sqrt{c^2 - u^2}} + c \int \frac{du}{\sqrt{c^2 - u^2}} \\ &= -(c^2 - u^2)^{1/2} + c \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{c}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Luego haciendo

$$y(t) = c(1 + \operatorname{sen}(t + \theta)), \quad \text{con } \theta \text{ un valor fijo.} \quad (2.27)$$

de (2.25) y (2.26)

$$x(t) = R + c[t - \cos(t + \theta)] \quad (2.28)$$

donde  $R$  es una constante, teniendo así una parametrización de la solución. Sustituyendo  $\theta = \varphi - \pi/2$  en (2.27) y (2.28)

$$\begin{aligned} x &= K + c[t - \operatorname{sen}(t + \Phi)] \\ y &= c[1 - \cos(t + \Phi)] \end{aligned}$$

de donde concluimos que la trayectoria obtenida es una cicloide que pasa por los puntos  $(a, A)$  y  $(b, B)$ , lo que coincide con la solución dada al problema de la braquistócrona dada por Johann Bernoulli<sup>3</sup>.

### Ejemplo 2.4.3

Consideremos el problema de minimizar  $J$  donde

$$J(y) = \int_0^1 xy(1 + y')dx$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 3, \quad y \in C^2[0, 1]. \quad (2.29)$$

En este caso,  $F(x, y) = xy(1 + y')$ , y de la ecuación de Euler tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= F_y - \frac{dF_z}{dx} \\ &= (x + xy') - (y'x + y) \\ &= x - y. \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>[3].

En este caso, la Ecuación de Euler no representa una ecuación diferencial y el problema sólo tiene solución para  $y(0) = 0$  y  $y(1) = 1$ . Este problema no tiene solución para  $y$  que satisfaga (2.29). En este ejemplo,  $F$  tiene una forma particular, esto es un caso especial que trataremos a continuación en la próxima sección.

## 2.5. Una Aplicación del Teorema de Green al Cálculo de Variaciones

Sean  $M$  y  $N$  funciones definidas en  $\mathbb{R}^2$  de clase  $C^2$ . Consideremos el problema de maximizar

$$J(y) = \int_a^b \{M(x, y) + N(x, y)y'\} dx \quad (2.30)$$

con

$$y \in \{z \in C^2[a, b] : z(a) = \alpha \text{ y } z(b) = \beta\}. \quad (2.31)$$

Si  $y$  maximiza  $J$  necesariamente se cumple la ecuación de Euler y así

$$\begin{aligned} 0 &= F_y - \frac{dF_z}{dx} \\ &= \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} y' - \left( \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} y' \right) \\ &= \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Notamos que la solución de (2.32) no tiene por qué cumplir con las condiciones iniciales dadas en (2.31) y no necesariamente es una función admisible para resolver (2.30).

A continuación enunciaremos y demostraremos un teorema en el cual daremos otras condiciones al conjunto de funciones admisibles (2.31) para maximizar  $J$  en (2.30).

**Teorema 2.5.1** Sean  $A : [0, K] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $B : [0, K] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones con primera derivada continua tales que

$$A(y) < 0 < B(y) \quad \text{para toda} \quad y \in [0, K]. \quad (2.33)$$

Considere el problema de maximizar

$$J(y) = \int_a^b \{M(x, y) + N(x, y)y'\} dx \quad (2.34)$$

donde  $M$  y  $N$  son de clase  $C^2$  e  $y$  es continua y  $C^2$  salvo a lo más un número finito de puntos, cumple con las condiciones de frontera dadas en (2.31) y con la desigualdad

$$A(y) \leq y' \leq B(y), \quad (2.35)$$

en todos los valores donde  $y$  es diferenciable.

Supongamos que  $y_2$  es la única solución de

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (2.36)$$

Entonces existen  $a_1, b_1 \in [a, b]$  tales que si definimos

$$y^* = \begin{cases} y_1 & \text{si } a \leq x \leq a_1 \\ y_2 & \text{si } a_1 < x < b_1 \\ y_3 & \text{si } b_1 \leq x \leq b \end{cases} \quad (2.37)$$

$$\text{donde} \quad y'_1 = \begin{cases} A & \text{si } \alpha > y_2(a) \\ B & \text{si } \alpha < y_2(a) \end{cases} \quad y \quad y'_3 = \begin{cases} B & \text{si } \beta > y_2(b) \\ A & \text{si } \beta < y_2(b) \end{cases}$$

de tal manera que para cualquier otra función  $y \neq y^*$  que cumpla

$$y > y^* \quad \text{implica} \quad \frac{\partial N}{\partial x} > \frac{\partial M}{\partial y} \quad (2.38)$$

$$y < y^* \quad \text{implica} \quad \frac{\partial N}{\partial x} < \frac{\partial M}{\partial y},$$

necesariamente  $J$  alcanza un máximo en  $y^*$ .

Si las desigualdades en (2.38) son intercambiadas  $J$  alcanzará un mínimo en  $y^*$  en lugar de un máximo.

**Demostración.** La demostración es basada en una aplicación simple del **teorema de Green**<sup>4</sup> en el plano, de donde escribiremos nuestra funcional objetivo (2.34) como una integral de línea

$$\int_a^b \{M(x, y) + N(x, y)y'\}dx = \int_C Mdx + Ndy \quad (2.39)$$

donde  $C$  es la curva admisible  $y(t)$  con  $a \leq t \leq b$ .

Supongamos que la situación es mostrada como en la figura 2.2, así que la curva  $y(t)$  denotada por  $PRSU V$  es la trayectoria óptima. Consideremos una curva admisible alternativa  $z$  de  $(a, \alpha)$  a  $(b, \beta)$ , mostrada como la curva punteada  $PQRTV$ .

De esta manera tenemos

$$z(t) \leq y(t) \quad \text{para} \quad a \leq x \leq r$$

donde  $z(r) = y(r)$ .

Entonces, por el teorema de Green tenemos

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta PSRQP} \left\{ \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right\} dx dy &= \int_{PSRQP} Mdx + Ndy \\ &= \int_{PSR} Mdx + Ndy - \int_{PQR} Mdx + Ndy \\ &= \int_a^r \{M(x, y) + N(x, y)y'\}dx \\ &\quad - \int_a^r \{M(x, z) + N(x, z)z'\}dx. \end{aligned} \quad (2.40)$$

---

<sup>4</sup>[15]

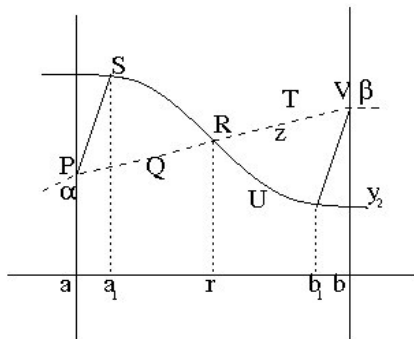


Figura 2.2: La trayectoria óptima  $PSRUV$ .

Luego por (2.38),

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} > 0 \quad (2.41)$$

de donde la diferencia de las integrales en (2.40) es positiva.

Un cálculo similar aplicado al intervalo  $r < x < b$ , donde  $z(t) > y(t)$ , la desigualdad en (2.41) es invertida y la orientación de la frontera de la curva  $RUVTR$  es también alrevés nos muestra que

$$\int_r^b \{M + Ny'\} dx > \int_r^b \{M + Nz'\} dx,$$

lo cual nos permite concluir que nuestra funcional objetivo (2.34) alcanza un máximo en  $y$ .

Este argumento puede ser extendido a todas las posibles configuraciones geométricas de la curva  $y(t)$  y otras curvas admisibles  $z(t)$ , siendo su verificación análoga.

■

## 2.6. Aplicación de la Ecuación de Euler en una Política Pesquera

Retomando el problema presentado en la última sección del capítulo 1, se quiere encontrar una función  $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , como en (1.25) y que representa la tasa de esfuerzo pesquero por aplicar, que maximice la integral

$$J(u) = \int_0^{\infty} e^{-rt} u(t) \{pqx(t) - c\} dt \quad (2.42)$$

sujeto a la condición

$$\dot{x} = Rx \left\{ 1 - \frac{q}{R} u - \frac{x}{K} \right\}. \quad (2.43)$$

Para  $q = 1$  de la ecuación (2.43) se sigue

$$u = R - \frac{R}{K} x - \frac{\dot{x}}{x} \quad \text{y} \quad x(0) = x_0. \quad (2.44)$$

Supondremos que

$$0 \leq h_0 \leq u \leq S \quad (2.45)$$

donde  $h_0$  y  $S$  representan las tasas de esfuerzo pesquero mínimo y máximo respectivamente.

En el capítulo 1, buscamos la función  $u$ , constante por pedazos e inicialmente con valor  $h_0 = 0$ , tal que  $u$  optimizara (2.42), ahora buscamos  $u$  en un dominio más extenso, el conjunto de las funciones continuamente diferenciables por pedazos. Para ello utilizaremos el teorema 2.5.1.

Si asumimos que  $p = 1$  de (2.42) y (2.44) tenemos

$$J(x) = \int_0^T e^{-rt} \left( R - \frac{R}{K} x - \frac{\dot{x}}{x} \right) \{x(t) - c\} dt \quad (2.46)$$

y por (2.45)

$$h_0 \leq R - \frac{R}{K} x - \frac{\dot{x}}{x} \leq S$$

entonces, el problema consiste en maximizar  $J$  en (2.46) con  $x$  sujeto a

$$x(0) = x_0 \quad y \quad A(x) \leq \dot{x} \leq B(x) \quad (2.47)$$

con

$$\begin{aligned} A(x) &= \left( R - S - \frac{R}{K}x \right) x \\ B(x) &= \left( R - h_0 - \frac{R}{K}x \right) x. \end{aligned} \quad (2.48)$$

La ecuación (2.46) puede ser escrita como

$$J(x) = \int_0^T \{M(t, x) + N(t, x)\dot{x}\} dt$$

con

$$\begin{aligned} M(t, x) &= e^{-rt} \left( R - \frac{R}{K}x \right) (x(t) - c) \\ N(t, x) &= e^{-rt} \left( \frac{c}{x} - 1 \right). \end{aligned}$$

Ahora resolvamos la ecuación

$$\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x} = 0, \quad (2.49)$$

en donde

$$\frac{\partial N}{\partial t} = re^{-rt} \left( 1 - \frac{c}{x} \right) \quad y \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \left( R \left( 1 + \frac{c}{K} \right) - \frac{2R}{K}x \right).$$

De la ecuación (2.49) tenemos

$$w(x) = 2Rx^2 - (KR + Rc - rK)x - rcK = 0 \quad (2.50)$$



y resolviendo (2.50) respecto a  $x$  obtenemos

$$\bar{x} = \frac{(KR + Rc - rK) \pm \sqrt{(KR + Rc - rK)^2 + 8RrcK}}{4R}. \quad (2.51)$$

Vamos a tomar la solución positiva para (2.50), ya que no tiene sentido que  $x$  tome valores negativos. De esta manera la solución para (2.49) es constante

$$x_2(t) = \bar{x} \quad \text{para toda} \quad t \in [0, T]. \quad (2.52)$$

Por otro lado, como es fácil de verificar, el miembro derecho de la ecuación (2.50) toma valores negativos en el intervalo  $(0, \bar{x})$  y positivos en  $(\bar{x}, \infty)$ . Ver figura 2.3.

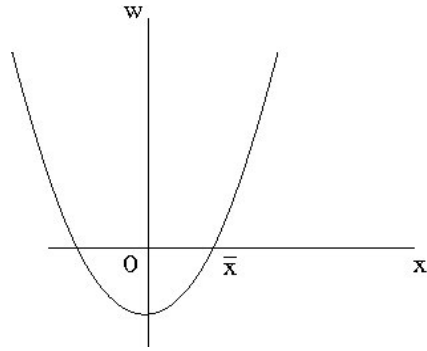


Figura 2.3:  $\partial N/\partial t - \partial M/\partial x = w$ .

Luego si  $x > \bar{x}$ , entonces se cumple que

$$\frac{\partial N}{\partial t} > \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Análogamente si  $\bar{x} < x$ ,

$$\frac{\partial N}{\partial t} < \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Dado que

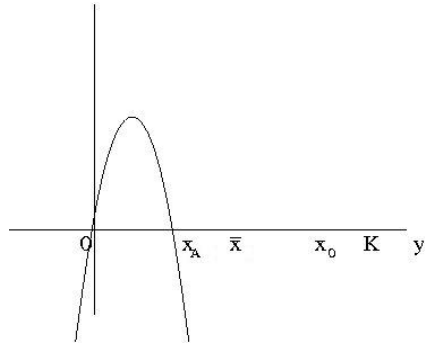


Figura 2.4: Gráfica de  $A$ .

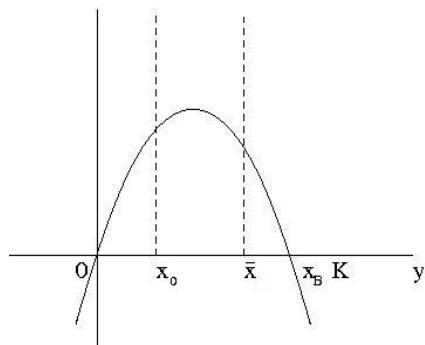


Figura 2.5: Gráfica de  $B$ .

$$\begin{aligned}x_A &= \frac{K}{R}(R - S) \\x_B &= \frac{K}{R}(R - h_0)\end{aligned}$$

son expresiones para las raíces no nulas para  $A$  y  $B$  respectivamente, para valores relativamente grandes para  $S$  y pequeños para  $h_0$  se cumple

$$\begin{aligned}B(x) > 0 & \quad \text{para} \quad x \in [x_0, \bar{x}] \\A(x) < 0 & \quad \text{para} \quad x \in [\bar{x}, x_0]\end{aligned}$$

como lo muestran las figuras 2.4 y 2.5, y de esta manera puede ser aplicado el teorema 2.5.1 y podemos definir la solución  $x^*$  al problema planteado en (2.46) como:

$$x^* = \begin{cases} x_1 & 0 \leq t \leq a_1 \\ \bar{x} & a_1 < t \leq T \end{cases} \quad (2.53)$$

con

$$\dot{x}_1^* = \begin{cases} A & x_0 > \bar{x} \\ B & x_0 < \bar{x} \end{cases}$$

donde  $a_1$  existe por el teorema 2.5.1 y está determinado por las ecuación  $x(a_1) = \bar{x}$ . Puesto que  $x(T)$  no está fijado, podemos suponer  $x(T) = \bar{x}$ . Lo que nos dice que la política pesquera óptima consiste en aplicar una tasa de esfuerzo pesquero constante  $h_0$  o  $S$  hasta que la población alcance cierto tamaño  $\bar{x}$ . Una vez esto, se aplicará una tasa de esfuerzo pesquero constante  $\bar{u}$ , el cual según (2.44) y (2.52)

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= R - \frac{R}{K}\bar{x} \\
&= R - \frac{R}{K} \left( \frac{KR + Rc - rK + \sqrt{(KR + Rc - rK)^2 + 8RrcK}}{4R} \right) \\
&= R - \frac{R}{4} \left( \frac{KR + Rc - rK}{RK} \right) - \frac{R}{4} \sqrt{\left( \frac{KR + Rc - rK}{RK} \right)^2 + \frac{8RrcK}{K^2R^2}} \\
&= \frac{R}{4} \left( 3 - \frac{c}{K} - \frac{r}{R} - \sqrt{\left( 1 + \frac{c}{K} - \frac{r}{R} \right)^2 + \frac{8cr}{KR}} \right)
\end{aligned}$$

En conclusión, la tasa de esfuerzo pesquero estará dada por la siguiente expresión:

$$u^* = \begin{cases} h_0 & \text{si } x_0 > \bar{x} \text{ para } t \in [0, a_1] \\ S & \text{si } x_0 < \bar{x} \text{ para } t \in [0, a_1] \\ \bar{u} & t \in [a_1, T]. \end{cases} \quad (2.54)$$

Debido a que  $x^*$  y  $u^*$  en (2.53) y (2.54) optimizan (2.42) para todo  $T$ , y estos se mantienen constantes después de cierto tiempo, ciertamente optimizan

$$\int_0^\infty e^{-rt} u^*(t) \{x^*(t) - c\} dt.$$

Concluimos, que la tasa de esfuerzo pesquero propuesta en el capítulo 1, es la más viable de entre todas las funciones continuamente diferenciables por pedazos, no sólo entre aquellas que son constantes por pedazos.

## 2.7. Restricción de Desigualdad

**Teorema 2.7.1** *Sea  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Consideremos el problema de maximizar*

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (2.55)$$

sujeto a las condiciones

$$y \in C^2[a, b], \quad y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2 \quad y \quad \varphi(x) \leq y(x) \quad (2.56)$$

para cada  $x \in [a, b]$ . Donde  $F$  es de clase  $C^2$  como en (2.8).

Entonces, la solución al problema planteado en (2.55) y (2.56) consiste en arcos de curvas que satisfacen

$$y(x) = \varphi(x) \quad \text{o bien} \quad F_y - \frac{dF_z}{dx} = 0.$$

**Demostración.** Podemos escribir

$$y(x) = \varphi(x) + u^2(x)$$

donde  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, la cual suele llamarse una función de holgura. Entonces la funcional  $I$  en (2.55) puede ser transformada en

$$J(u) = \int_a^b G(x, u, \dot{u}) dx$$

donde

$$G(x, u, w) = F(x, \varphi + u^2, \dot{\varphi} + 2uw).$$

Para que  $u$  maximice  $J$ , es necesario que se cumpla la condición de Euler

$$G_y - \frac{dG_z}{dx} = 0.$$

Por otro lado tenemos,

$$G_y = 2uF_y + 2\dot{u}F_z$$

$$\begin{aligned} \frac{dG_z}{dx} &= \frac{d}{dx}(2uF_z) \\ &= 2\dot{u}F_z + 2u\frac{dF_z}{dx} \end{aligned}$$

y de la ecuación de Euler se tiene

$$u \left( F_y - \frac{dF_z}{dx} \right) = 0.$$

Por lo tanto,

$$u = 0 \quad \text{o} \quad F_y - \frac{dF_z}{dx} = 0.$$



# Capítulo 3

## Multiplicadores de Lagrange

### 3.1. El Teorema de Lagrange

**Definición 3.1.1** Sea  $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$  una funcional sobre un espacio vectorial normado  $\mathfrak{X}$ . Si para toda  $\eta \in \mathfrak{X}$  existe el límite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \epsilon\eta) - F(x)}{\epsilon} \quad (3.1)$$

entonces, a este límite lo llamaremos **la variación de Gâteaux en  $x$  respecto a  $\eta$**  y lo denotaremos por  $G[F]_{\eta}^x$

Observamos que la variación de Gâteaux evaluada en  $x$  respecto a  $\eta$  también se define como:

$$G[F]_{\eta}^x = \left. \frac{d}{d\epsilon} [F(x + \epsilon\eta)] \right|_{\epsilon=0} \quad (3.2)$$

y en particular cuando  $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$  para  $n \in \mathbb{Z}^+$  ésta coincide con la derivada direccional de  $F$  respecto a  $x$  en dirección del vector  $\eta$ .

Esta definición nos permite dar una condición necesaria para los puntos críticos de una funcional sobre un espacio vectorial normado.

Si  $x$  es un punto crítico de  $F$ , el cociente del límite en (3.1) cambia de signo si  $\epsilon$  lo hace, por lo tanto, si el límite existe debe ser cero, de donde se concluye el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.1** Sea  $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$  una funcional sobre un espacio vectorial normado  $\mathfrak{X}$ . Si  $x^* \in \mathfrak{X}$  es un extremo local de  $F$  entonces

$$G[F]_{\eta}^{x^*} = 0 \quad (3.3)$$

para cada  $\eta \in \mathfrak{X}$ .

**Ejemplo 3.1.1** Consideremos la funcional  $F : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  donde al espacio vectorial de funciones continuas sobre los reales  $C[0, 1]$  lo dotamos con la norma uniforme:

$$\|F\| = \max_{x \in [0, 1]} |F(x)|.$$

Sea el funcional definido por

$$F(y) = \int_0^1 \{y(x)\}^2 dx.$$

Entonces,

$$G[F]_{\eta}^x = \left. \frac{d}{d\epsilon} F(y + \epsilon\eta) \right|_{\epsilon=0} = 2 \int_0^1 y(x)\eta(x) dx.$$

De (3.3) notamos que  $y^* = 0$  es un punto crítico, el cual claramente es un mínimo local.

**Teorema 3.1.2 (Teorema de la Función Inversa)** Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de la forma

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \quad \text{en donde} \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Suponga que las derivadas parciales  $\partial f_i / \partial x_j$  existen y son continuas en una vecindad abierta de  $x_0$ . Supongamos que el jacobiano de  $F$  no se anula en  $x_0$ , es decir,  $\det(\partial f_i / \partial x_j) \Big|_{x_0} \neq 0$ .

Entonces existen vecindades abiertas  $U$  de  $x_0$  y  $V$  de  $y_0 = F(x_0)$  tales que



$F : U \rightarrow V$  es biyectiva.

Además la función inversa  $G = F^{-1}$  tiene derivada continua<sup>1</sup>.

**Definición 3.1.2** Sea  $F$  una funcional con variación de Gâteaux definida sobre un conjunto abierto  $D$  de un espacio vectorial normado  $\mathfrak{X}$ . Diremos que la variación de Gâteaux es débilmente continua en  $x$  si para toda  $\eta \in \mathfrak{X}$  se cumple

$$\lim_{y \rightarrow x} G[F]_{\eta}^y = G[F]_{\eta}^x \quad (3.4)$$

**Definición 3.1.3** Sea  $R : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$  una funcional sobre un espacio vectorial normado  $\mathfrak{X}$ . Denotaremos

$$D[R = r] := \{x \in \mathfrak{X} : R(x) = r\} \quad (3.5)$$

Ahora enunciaremos y probaremos el **teorema de los Multiplicadores de Lagrange**.

**Teorema 3.1.3 (Teorema de los Multiplicadores de Lagrange)** Sean  $F$  y  $R$  funcionales definidas en un conjunto abierto  $D$  de un espacio vectorial normado  $\mathfrak{X}$ . Sea  $r_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $D[R = r_0] \neq \emptyset$ . Sea  $x^*$  un vector extremo local de  $F$  en el dominio  $D[R = r_0]$  de modo que

$$F(x^*) = \sup\{F(x) : x \in D[R = r_0]\}$$

Supongamos que las variaciones de Gâteaux de  $F$  y  $R$  son débilmente continuas en una vecindad  $\mathfrak{U}$  de  $x^*$ . Entonces, se cumple una de las dos posibilidades siguientes:

1.  $G[R]_y^{x^*} = 0$  para toda  $y \in \mathfrak{X}$
2. Existe una constante  $\lambda$  tal que

$$G[F]_y^{x^*} = \lambda G[R]_y^{x^*} \quad \text{para cada } y \in \mathfrak{X}$$

---

<sup>1</sup>[15]

**Demostración.**

Supongamos que no se cumple el primer caso, entonces existe  $w \in \mathfrak{X}$  tal que

$$G[R]_w^{x^*} \neq 0 \quad (3.6)$$

Probaremos que si  $y$  y  $z$  son elementos de  $\mathfrak{X}$  entonces

$$\det \begin{pmatrix} G[F]_y^{x^*} & G[F]_z^{x^*} \\ G[R]_y^{x^*} & G[R]_z^{x^*} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.7)$$

De (3.6) y (3.7) tenemos

$$G[F]_y^{x^*} = \lambda G[R]_y^{x^*}$$

en donde

$$\lambda = \frac{G[F]_w^{x^*}}{G[R]_w^{x^*}}$$

Por lo tanto, sólo debemos probar (3.7). Para ello podemos suponer que  $y$  y  $z$  son no nulos, ya que de lo contrario se sigue inmediatamente (3.7).

Sean  $x, y$  elementos de  $\mathfrak{X}$  fijos y no nulos.

Sean las funciones

$$\mathfrak{F} : \mathbb{B} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \mathfrak{R} : \mathbb{B} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

que se definen como

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\alpha, \beta) &= F(x^* + \alpha y + \beta z) \\ \mathfrak{R}(\alpha, \beta) &= R(x^* + \alpha y + \beta z) \end{aligned}$$

donde

$$\mathbb{B} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha^2 + \beta^2 < \rho^2\}$$

y  $\rho$  es un número real tal que

$$x^* + \alpha y + \beta z \in D \cap \mathfrak{U}.$$

Definamos  $\Phi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$  como

$$\Phi(\alpha, \beta) = (\mathfrak{F}(\alpha, \beta), \mathfrak{R}(\alpha, \beta))$$

Veremos que  $\Phi$  cumple con las hipótesis del teorema 3.1.2 en  $(0, 0)$  si y sólo si no se cumple (3.7). De este modo al no cumplirse (3.7) existe una vecindad  $U$  de  $(0, 0)$  y una vecindad  $V$  de  $\Phi(0, 0) = (F(x^*), r_0)$  de tal manera que

$$\Phi : U \rightarrow V$$

es biyectiva. Sea  $(f^*, r_0) \in V$  con

$$f^* > F(x^*)$$

y de esta manera existe  $(\alpha^*, \beta^*) \in U$  tal que

$$\Phi(\alpha^*, \beta^*) = (f^*, r_0)$$

pero entonces

$$F(x^* + \alpha^* y + \beta^* z) > F(x^*)$$

contradiciendo el hecho de que  $x^*$  es un extremo local en  $D[R = r_0]$ .<sup>2</sup>

Pero  $\Phi$  cumple con las hipótesis del teorema 3.1.2 si y sólo si

1. Las derivadas parciales de  $\mathfrak{F}$  y  $\mathfrak{R}$  son continuas en  $(0, 0)$ .
2. El Jacobiano de  $\Phi$  no se anula en  $(0, 0)$ .

Esto se cumple ya que

---

<sup>2</sup>El caso  $f^* < F(x^*)$  es análogo.

1.

$$\begin{aligned}
\partial\mathfrak{F}/\partial\alpha(\alpha, \beta) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{F}(\alpha + \epsilon, \beta) - \mathfrak{F}(\alpha, \beta)}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon} \frac{F(x^* + \alpha y + \beta z + \epsilon y) - F(x^* + \alpha y + \beta z)}{\epsilon} \\
&= G[F]_y^{x^* + \alpha y + \beta z}
\end{aligned}$$

Como la variación de Gâteaux es débilmente continua en  $\mathfrak{U}$ , entonces  $\partial\mathfrak{F}/\partial\alpha$  es continua en  $(0, 0)$  y

$$\partial\mathfrak{F}/\partial\alpha(0, 0) = G[F]_y^{x^*}.$$

Análogamente se demuestra que  $\partial\mathfrak{F}/\partial\beta$ ,  $\partial\mathfrak{R}/\partial\alpha$  y  $\partial\mathfrak{R}/\partial\beta$  son continuas y están dadas por

$$\begin{aligned}
\partial\mathfrak{F}/\partial\beta(0, 0) &= G[F]_z^{x^*} \\
\partial\mathfrak{R}/\partial\alpha(0, 0) &= G[R]_y^{x^*} \\
\partial\mathfrak{R}/\partial\beta(0, 0) &= G[R]_z^{x^*}
\end{aligned}$$

2. Finalmente (3.7) no se cumple si y sólo si

$$\det \begin{pmatrix} \partial\mathfrak{F}/\partial\alpha & \partial\mathfrak{F}/\partial\beta \\ \partial\mathfrak{R}/\partial\alpha & \partial\mathfrak{R}/\partial\beta \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} \neq 0$$

■

## 3.2. El Problema Isoperimétrico

En general, un problema isoperimétrico consiste en determinar una figura geométrica de máxima superficie respetando un perímetro dado. Consideremos ahora las funcionales

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad y \quad R(y) = \int_a^b G(x, y, y') dx \quad (3.8)$$

definidas en el  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial:

$$\mathfrak{X} = \{\eta \in C^1[a, b] : \eta(a) = 0 = \eta(b)\}$$

con la norma uniforme

$$\|\eta\| = \max_{x \in [a, b]} |\eta(x)|.$$

En cálculo de variaciones, un problema con restricciones isoperimétricas consiste en maximizar  $J(y)$  sujeto a  $R(y) = B$ , donde  $B$  es una constante.

Calculemos las variaciones de Gâteaux de  $J$  y  $R$ .

En efecto,

$$\begin{aligned} G[J]_{\eta}^y &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \int_a^b F(x, y + \eta\epsilon, y' + \epsilon\eta') dx \right|_{\epsilon=0} \\ &= \int_a^b \{F_y\eta + F_z\eta'\} dx \\ &= \int_a^b \{F_y\eta(x) + \frac{d}{dx}(F_z\eta(x)) - \frac{d}{dx}(F_z)\eta(x)\} dx \\ &= \int_a^b \eta(x) \{F_y - \frac{d}{dx}F_z\} dx \end{aligned}$$

y análogamente

$$G[R]_{\eta}^y = \int_a^b \eta(x) \{G_y - \frac{d}{dx}G_z\} dx.$$

Por el teorema de Lagrange, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que para toda  $\eta \in \mathfrak{X}$  se tiene

$$\int_a^b \eta(x) [(F_y - \frac{d}{dx}F_z) - \lambda(G_y - \frac{d}{dx}G_z)] dx = 0.$$

Por lo tanto, se cumple

$$(F_y - \frac{d}{dx}F_z) - \lambda(G_y - \frac{d}{dx}G_z) = 0. \quad (3.9)$$

A continuación veremos un teorema que nos dará una interpretación económica del multiplicador de Lagrange  $\lambda$ , el cual nos dice que  $\lambda$  representa la ganancia contribuida por unidad marginal del recurso.

**Teorema 3.2.1** *Sea  $y^*$  la solución al problema isoperimétrico (3.8). Entonces, si*

$$V = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad y \quad \int_a^b G(x, y, y') dx = B$$

se tiene

$$\left. \frac{dV}{dB} \right|_{y^*} = \lambda$$

**Demostración.**

Por practicidad escribiremos  $y$  en lugar de  $y^*$ . Tenemos

$$V(B) = \int_a^b \{F(x, y, y') - \lambda G(x, y, y')\} dx + \lambda B$$

de donde

$$\frac{dV}{dB} = \int_a^b \left\{ (F_y - \lambda G_y) \frac{\partial y}{\partial B} + (F_z - \lambda G_z) \frac{\partial y'}{\partial B} \right\} dx + \lambda. \quad (3.10)$$

Además, suponiendo

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial B} = \frac{\partial^2 y}{\partial B \partial x}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{d}{dx} \left[ (F_z - \lambda G_z) \frac{\partial y}{\partial B} \right] dx &= \int_a^b \frac{d}{dx} (F_z - \lambda G_z) \frac{\partial y}{\partial B} dx \\ &+ \int_a^b (F_z - \lambda G_z) \frac{\partial y'}{\partial B} dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como  $y(a) = 0 = y(b)$  para toda  $B$  entonces,  $\partial y/\partial B(a) = 0 = \partial y/\partial B(b)$  y el primer miembro de la ecuación (3.11) es cero, de donde deducimos

$$\int_a^b (F_z - \lambda G_z) \frac{\partial y'}{\partial B} dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} (F_z - \lambda G_z) \frac{\partial y}{\partial B} dx. \quad (3.12)$$

Luego de (3.10) y (3.12)

$$\frac{dV}{dB} = \int_a^b \left\{ (F_y - \lambda G_y) - \frac{d}{dx} (F_z - \lambda G_z) \right\} \frac{\partial y}{\partial B} dx + \lambda$$

y por (3.9)

$$\left. \frac{dV}{dB} \right|_{y^*} = \lambda.$$

■

### 3.3. Política de Consumo óptimo

Con la finalidad de ejemplificar una aplicación del teorema de Lagrange, consideremos el caso de una persona o negocio con un ingreso conocido. Queremos establecer una política de consumo que optimice la utilidad total. Supongamos que se satisface la ecuación diferencial escalar

$$\dot{S} = I + \alpha S - C \quad (3.13)$$

donde:

1.  $S$  son los ahorros al tiempo  $t$ .
2.  $I > 0$  representa los ingresos al tiempo  $t$
3.  $C \geq 0$  representa el consumo al tiempo  $t$
4.  $\alpha$  es la tasa de interés bancario.

Definamos nuestras utilidades en función del consumo al tiempo final  $T$  mediante

$$U(C) = \int_0^T F(t, C(t))dt \quad (3.14)$$

Debido a que a mayor consumo mayor utilidad, supondremos que  $F$  es creciente respecto a  $C$  y, como las utilidades obtenidas crecen de manera cada vez más lenta conforme se incrementa el consumo,  $F$  será cóncava.

Tomemos en este ejemplo

$$F(t, C(t)) = e^{-\beta t} \log(1 + C(t))$$

donde  $C(t) > 0$ ,  $\beta$  es la tasa de inflación y la supondremos inferior a la tasa de interés bancario, es decir,  $0 < \beta < \alpha$ .

Así la utilidad total al tiempo  $T$  queda definida como

$$U(C) = \int_0^T e^{-\beta t} \log(1 + C(t))dt \quad (3.15)$$

Por otro lado, multiplicando por el factor integrante  $e^{-\alpha t}$  ambos miembros de la ecuación (3.13) resolvemos

$$S(t) = e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha t} (I(t) - C(t))dt + e^{\alpha t} S_0 \quad (3.16)$$

donde  $S_0 = S(0)$  son los ahorros iniciales.

Por otro lado, sea  $S_T = S(T)$  nuestros ahorros finales deseados al tiempo  $T$ . Evaluando la ecuación (3.16) en  $T$ , agrupando y reduciendo términos tenemos

$$R(C) = r_0 \quad (3.17)$$

con

$$R(C) = \int_0^T e^{-\alpha t} C(t)dt \quad (3.18)$$



y

$$r_0 = S_0 - e^{-\alpha T} S_T + \int_0^T e^{-\alpha t} I(t) dt \quad (3.19)$$

El problema consiste en buscar  $C$  que optimice (3.15) y cumpla con la restricción (3.17).

Con la finalidad de aplicar el teorema de los multiplicadores de Lagrange tomemos como dominio de las funcionales  $U$  y  $R$  de las ecuaciones (3.15) y (3.18)

$$\mathfrak{X} = \{C(t) > 0 : C \in C[0, 1]\}$$

donde al  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial  $C[0, 1]$  lo dotamos con la norma uniforme

$$\|C\| = \max_{0 \leq t \leq T} \|C(t)\|.$$

Calculando las variaciones de Gâteaux de estas funcionales para toda  $\eta \in \mathfrak{X}$  tenemos

$$\begin{aligned} G[U]_\eta^C &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \int_0^T e^{-\beta t} \log\{1 + C(t) + \epsilon\eta(t)\} dt \right|_{\epsilon=0} \\ &= \left. \int_0^T \frac{e^{-\beta t} \eta(t)}{1 + C(t) + \epsilon\eta(t)} dt \right|_{\epsilon=0} \\ &= \int_0^T \frac{e^{-\beta t} \eta(t)}{1 + C(t)} dt. \end{aligned} \quad (3.20)$$

De manera similar obtenemos

$$G[R]_\eta^C = \int_0^T e^{-\alpha t} \eta(t) dt. \quad (3.21)$$

Veamos que estas variaciones son débilmente continuas. Debemos suponer que  $C \geq 0$  ya que una función de consumo que toma valores negativos no tiene sentido.

Sea  $C_1 \in \mathfrak{X}$  relativamente cercana a  $C$ , si suponemos  $\|C - C_1\| < 1$  entonces

$$\begin{aligned} \|1 + C_1\| &\geq \| \|1 + C\| - \|C - C_1\| \| \\ &\geq \| \|1 + C\| - \|C - C_1\| \| \\ &\geq \| \|1 + C\| - 1 \|. \end{aligned}$$

Como  $[0, T]$  es compacto en  $\mathbb{R}$ , por la continuidad de  $C$  existe  $M > 0$  tal que

$$\left| \frac{1}{(1 + C)(1 + C_1)} \right| \leq \frac{1}{|1 + C| \|1 + C\| - 1} < M$$

Cumpléndose la desigualdad

$$\left| \int_0^T \frac{e^{-\beta t}}{1 + C(t)} \eta(t) dt - \int_0^T \frac{e^{-\beta t}}{1 + C_1(t)} \eta(t) dt \right| \leq \frac{\|C - C_1\|}{\beta} \max_{t \in [0, T]} |\eta(t)| M$$

Esto prueba que  $G[U]_C^\eta$  es débilmente continua en  $C$ . Se procede de manera análoga para calcular  $G[R]_\eta^C$ .

Para  $\eta = 1$  se cumple

$$G[R]_1^C = \int_0^T e^{-\alpha t} dt > 0$$

y por el teorema de los multiplicadores de Lagrange existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que si  $C^*$  maximiza  $U(C)$  en  $D[R = r_0]$ , se cumple que para toda  $\eta \in \mathfrak{X}$

$$G[U]_\eta^{C^*} = \lambda G[R]_\eta^{C^*}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^T \left\{ \frac{e^{-\beta t}}{1 + C^*(t)} - \lambda e^{-\alpha t} \right\} \eta(t) dt = 0$$

y haciendo

$$\eta(t) = \left\{ \frac{e^{-\beta t}}{1 + C^*(t)} - \lambda e^{-\alpha t} \right\}$$

notamos que el integrando es cero y concluimos

$$C^*(t) = -1 + \frac{1}{\lambda} e^{(\alpha-\beta)t}. \quad (3.22)$$

Luego de la condición (3.17) se obtiene

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\beta}{1 - e^{-\beta T}} \left[ r_0 + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} \right] \quad (3.23)$$

y de (3.22) y (3.23) tenemos

$$C^*(t) = -1 + \frac{\beta}{1 - e^{-\beta T}} \left[ r_0 + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} \right] e^{(\alpha-\beta)t} \quad (3.24)$$

lo que nos da la expresión del consumo óptimo.

### 3.4. Política de Consumo Óptimo Restringida a un Consumo Mínimo

Supongamos que las personas a las que sometemos nuestro estudio anterior tienen que respetar un consumo mínimo  $C_0 > 0$  para subsistir y satisfacer sus necesidades básicas. Supondremos que nuestras funciones admisibles para nuestra política de consumo óptimo satisfacen

$$C(t) \geq C_0 > 0 \quad \text{con } 0 \leq t \leq T \quad (3.25)$$

De (3.17),(3.18)y (3.25) se sigue

$$r_0 \geq \frac{C_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha T}) \quad (3.26)$$

También suponemos

$$\left[ r_0 + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} \right] < \left( \frac{C_0 + 1}{\beta} \right) (1 - e^{-\beta T}) \quad (3.27)$$

Nótese que de no cumplirse (3.27), (3.24) implica  $C^*(t) \geq C_0$  y el problema está resuelto en la sección anterior.

Retomando el problema, queremos encontrar una función de consumo  $C$  para maximizar

$$J(C) = \int_0^T e^{-\beta t} \log(1 + C(t)) dt \quad (3.28)$$

sujeto a

$$\dot{S} = \alpha S + I - C \quad (3.29)$$

donde

$$S(0) = S_0, \quad S(T) = S_T \quad \text{y} \quad C(t) \geq C_0 \quad \text{para toda} \quad t \in [0, T].$$

Por el teorema 2.7.1 sabemos que la solución debe ser de la forma

$$C(t) = \begin{cases} C_0 & 0 \leq t \leq \xi \\ f(t) & \xi \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.30)$$

donde

$$\xi \in [0, T] \quad \text{y} \quad f \in C^1[0, T].$$

Como en la sección anterior 3.16 resuelve 3.29 y al evaluar  $S$  en  $T$  tenemos nuevamente

$$\int_0^T e^{-\alpha t} C(t) dt = r_0 \quad (3.31)$$

donde

$$r_0 = S_0 - e^{-\alpha T} S_T + \int_0^T e^{-\alpha t} I(t) dt$$

Sea  $\mathfrak{X}$  el  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial

$$\mathfrak{X} = \{(\xi, f) : \xi \in \mathbb{R}, f \in C^1[0, T]\}$$

con la norma

$$|(\xi, f)| = |\xi| + \max_{x \in [0, T]} |f(x)|.$$

Tomando  $C$  como en (3.30) y sustituyendo en el lado izquierdo de (3.31), definimos la funcional  $\rho$  sobre  $\mathfrak{X}$  como

$$\rho(\xi, f) = \frac{C_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha\xi}) + \int_{\xi}^T e^{-\alpha t} f(t) dt. \quad (3.32)$$

Haciendo lo mismo con (3.28) definimos la funcional  $\sigma$  sobre  $\mathfrak{X}$  como

$$\sigma(\xi, f) = \frac{\log(1 + C_0)}{\beta}(1 - e^{-\beta\xi}) + \int_{\xi}^T e^{-\beta t} \log(1 + f(t)) dt. \quad (3.33)$$

Entonces de esta manera, el problema consiste en maximizar  $\sigma$  sujeto a  $\rho = r_0$  en  $\mathfrak{X}$ .

Con la finalidad de aplicar el teorema de Lagrange para encontrar  $f$  y  $\xi$  calculemos las variaciones de Gâteaux de  $\rho$  y  $\sigma$  respectivamente<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} G[\rho]_{(\eta, g)}^{(\xi, f)} &= \left. \frac{d}{d\epsilon} [\rho(\xi + \epsilon\eta, f + \epsilon g)] \right|_{\epsilon=0} \\ &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \left[ \frac{C_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(\xi + \epsilon\eta)}) + \int_{\xi + \epsilon\eta}^T e^{-\alpha t} (f(t) + \epsilon g(t)) dt \right] \right|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{\eta}{e^{\alpha\xi}} (C_0 - f(\xi)) + \int_{\xi}^T e^{-\alpha t} g(t) dt. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Análogamente tenemos

---

<sup>3</sup>Para ello conviene aplicar la proposición 2.2.1, la fórmula de Leibniz.

$$G[\sigma]_{(\eta,g)}^{(\xi,f)} = \frac{\eta}{e^{\beta\xi}} \log \frac{1+C_0}{1+f(\xi)} + \int_{\xi}^T \frac{e^{-\beta t} g(t)}{1+f(t)} dt. \quad (3.35)$$

Veamos que estas variaciones son débilmente continuas en una vecindad de  $(\xi, f)$ .

Sea  $\epsilon$  un real positivo entonces,

1. Como  $g(t) \frac{e^{-\beta t}}{1+f(t)}$  es continua en  $[0, T]$ , es acotada entonces, existe  $\delta_1 > 0$  tal que si  $|\xi - \zeta| < \delta_1$  se cumple,

$$\left| \int_{\xi}^T \frac{e^{-\beta t} g(t)}{1+f(t)} dt - \int_{\zeta}^T \frac{e^{-\beta t} g(t)}{1+f(t)} dt \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.36)$$

2. Sea  $\delta_2 > 0$  de tal manera que si  $l \in C^1[0, T]$  y cumple

$$\max_{\xi \in [0, T]} |l(\xi) - f(\xi)| < \delta_2$$

entonces,

$$\frac{\eta}{e^{\beta\xi}} \log \left| \frac{1+l(\xi)}{1+f(\xi)} \right| < \frac{\epsilon}{4}. \quad (3.37)$$

3. Sea  $\delta_3 > 0$  tal que si  $|\xi - \zeta| < \delta_3$  se tiene

$$\left| \frac{\eta}{e^{\beta\xi}} \log \frac{1+C_0}{1+l(\xi)} - \frac{\eta}{e^{\beta\zeta}} \log \frac{1+C_0}{1+l(\zeta)} \right| < \frac{\epsilon}{4}. \quad (3.38)$$

Ahora tomemos  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ . Entonces, si  $\|(\zeta, l) - (\xi, f)\| < \delta$  por (3.36), (3.37) y (3.38)

$$\begin{aligned}
\left| G[\sigma]_{(\eta,g)}^{(\xi,f)} - G[\sigma]_{(\eta,g)}^{(\zeta,l)} \right| &\leq \left| \frac{\eta}{e^{\beta\xi}} \log \frac{1+C_0}{1+f(\xi)} - \frac{\eta}{e^{\beta\zeta}} \log \frac{1+C_0}{1+f(\zeta)} \right| \\
&\quad + \left| \int_{\xi}^T \frac{e^{-\beta t} g(t)}{1+f(t)} dt - \int_{\zeta}^T \frac{e^{-\beta t} g(t)}{1+f(t)} dt \right| \\
&\leq \left| \frac{\eta}{e^{\beta\xi}} \log \frac{1+l(\xi)}{1+f(\xi)} \right| + \left| \frac{\eta}{e^{\beta\xi}} \log \frac{1+C_0}{1+l(\xi)} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\eta}{e^{\beta\zeta}} \log \frac{1+C_0}{1+l(\zeta)} \right| + \left| \int_{\xi}^T \frac{e^{-\beta t} g(t)}{1+f(t)} dt - \int_{\zeta}^T \frac{e^{-\beta t} g(t)}{1+f(t)} dt \right| \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{(\zeta,l) \rightarrow (\xi,f)} G[\sigma]_{(\eta,g)}^{(\zeta,l)} = G[\sigma]_{(\eta,g)}^{(\xi,f)}.$$

De manera análoga

$$\lim_{(\zeta,l) \rightarrow (\xi,f)} G[\rho]_{(\eta,g)}^{(\zeta,l)} = G[\rho]_{(\eta,g)}^{(\xi,f)}.$$

y vemos que nuestras variaciones son débilmente continuas en  $(\xi, f)$ .

Observamos que

$$G[\rho]_{(0,1)}^{(\xi,f)} > 0.$$

Luego si  $(\xi, f)$  es un máximo local para  $\sigma$  en  $D[\rho = r_0]$  entonces, por el teorema 3.1.3, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$G[\sigma]_{(\eta,g)}^{(\xi,f)} = \lambda G[\rho]_{(\eta,g)}^{(\xi,f)} \quad \text{para toda} \quad (\eta, g) \in \mathfrak{X}.$$

De esta manera se cumple que

$$\eta \left[ e^{-\beta\xi} \log \frac{1+C_0}{1+f(\xi)} - \lambda e^{-\alpha\xi} \{C_0 + f(\xi)\} \right] + \int_{\xi}^T \left[ \frac{e^{-\beta t}}{1+f(t)} - \lambda e^{-\alpha t} \right] g(t) dt = 0.$$

Deduciendo

$$e^{-\beta\xi} \log \frac{1+C_0}{1+f(\xi)} = \lambda e^{-\alpha\xi} \{C_0 + f(\xi)\} \quad (3.39)$$

$$\frac{e^{-\beta t}}{1+f(t)} = \lambda e^{-\alpha t} \quad \text{para} \quad \xi \leq t \leq T. \quad (3.40)$$

Haciendo  $t = \xi$  en la ecuación (3.40) tenemos,

$$\lambda = \frac{e^{(\alpha-\beta)\xi}}{1+f(\xi)} \quad (3.41)$$

y sustituyendo (3.41) en (3.39) tenemos

$$\log \left( 1 + \frac{C_0 - f(\xi)}{1+f(\xi)} \right) = \frac{C_0 - f(\xi)}{1+f(\xi)}$$

de donde obtenemos

$$f(\xi) = C_0. \quad (3.42)$$

Finalmente, de (3.40), (3.41) y (3.42)

$$f(t) = e^{(\alpha-\beta)(t-\xi)}(1+C_0) - 1. \quad (3.43)$$

Sólo resta determinar  $\xi$ . De la restricción

$$\rho(\xi, f) = r_0$$

tenemos



$$\frac{1 - e^{-\alpha\xi}}{\alpha} C_0 + \frac{e^{-\alpha T} - e^{-\alpha\xi}}{\alpha} + \frac{1 + C_0}{e^{(\alpha-\beta)\xi}} \left[ \frac{e^{-\beta\xi} - e^{-\beta T}}{\beta} \right] - r_0 = 0. \quad (3.44)$$

De la ecuación (3.27) para  $\xi = 0$  la parte izquierda de la ecuación (3.44) es positiva y para  $\xi = T$  es no positiva por (3.26).

Como el miembro izquierdo de la ecuación (3.44) es una función continua y decreciente de  $\xi$ , concluimos que (3.44) tiene una única solución  $\xi$  en  $[0, T]$ . En la práctica  $\xi$  puede ser encontrada mediante métodos numéricos.

### 3.5. Velocidad Óptima

Consideremos el problema de optimizar la velocidad  $\nu(t)$  de un corredor con la finalidad de cubrir la mayor distancia posible  $D$  en un tiempo fijo  $T$ .

La distancia recorrida es

$$D(\nu) = \int_0^T \nu(t) dt. \quad (3.45)$$

La fuerza que ejerce el corredor es igual a la aceleración por su masa más una fuerza de resistencia al movimiento. De esta manera  $\nu(t)$  satisface la ecuación,

$$\frac{d\nu}{dt} + \frac{\nu}{\tau} = f(t) \quad (3.46)$$

en donde  $\tau$  es una constante tal que  $\nu/\tau$  es la fuerza de resistencia al movimiento por unidad de masa y  $f(t)$  es la fuerza de propulsión por unidad de masa. Esta fuerza no puede exceder de un valor máximo

$$f(t) \leq F \quad (3.47)$$

y la velocidad inicial es nula

$$\nu(0) = 0. \quad (3.48)$$

Supongamos que el consumo de energía está dado por  $f\nu$  en el instante de tiempo  $t$ , y el suministro de energía, en este caso, la entrada de oxígeno, es una

constante  $\sigma$  de tal manera que la energía total al tiempo  $t$  varía de acuerdo a la ecuación

$$\frac{dE}{dt} = \sigma - f\nu. \quad (3.49)$$

Finalmente, se cumple

$$E(t) \geq 0. \quad (3.50)$$

Para resolver nuestro problema de maximizar  $D$  sujeto a (3.46) hasta (3.50) conviene expresar las condiciones del problema en términos de  $\nu(t)$ . De (3.46) y (3.47) tenemos

$$\frac{d\nu}{dt} + \frac{\nu}{\tau} \leq F. \quad (3.51)$$

Podemos usar (3.46) en (3.49) para eliminar  $f$

$$\frac{dE}{dt} = \sigma - \left( \frac{d\nu}{dt} + \frac{\nu}{\tau} \right) \nu. \quad (3.52)$$

Integrando esta ecuación resulta

$$E(t) = E_0 + \sigma t - \frac{1}{2}\nu^2(t) - \frac{1}{\tau} \int_0^t \nu^2(x) dx \quad (3.53)$$

y de la ecuación (3.50) tenemos

$$E_0 + \sigma t - \frac{1}{2}\nu^2(t) - \frac{1}{\tau} \int_0^t \nu^2(x) dx \geq 0. \quad (3.54)$$

Como  $\nu(0) = 0$ , y el consumo de energía en el instante de tiempo  $t$  está dado por  $f\nu$ , vemos que al inicio de la carrera no se consume energía, y de esta manera observamos de la ecuación (3.49), que al principio  $f$  debe ser tan grande como sea posible, esto es

$$f(0) = F.$$

Supongamos que  $f$  permanece igual en  $0 \leq t \leq t_1$ , en donde  $t_1$  se determinará más adelante.

De aquí tenemos

$$\frac{d\nu}{dt} + \frac{\nu}{\tau} = F \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (3.55)$$

ahora resolviendo (3.55) con  $\nu(0) = 0$  obtenemos

$$\nu(t) = F\tau(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{para toda} \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (3.56)$$

y de (3.54) se sigue

$$E_0 + \sigma t - F^2\tau^2 \left( \frac{t}{\tau} + e^{-t/\tau} - 1 \right) \geq 0 \quad \text{para toda} \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (3.57)$$

Si  $\sigma \geq F^2\tau$  entonces, (3.57) se cumple para toda  $t \in [0, T]$  y (3.56) es la solución óptima, ya que se aplica el máximo esfuerzo todo el trayecto. En el caso contrario, (3.57) se cumple para  $t \in [0, T_C]$ , en donde  $T_C$  es la única raíz positiva de (3.57).

Ahora si  $T \leq T_C$  podemos tomar  $t_1 = T$  y (3.56) es la velocidad óptima a lo largo de la carrera. En el caso  $T > T_C$  debe cumplirse  $t_1 \leq T_C < T$ , ya que si  $t_1 > T_C$ , la desigualdad (3.57) implicaría que la energía que se consume toma valores negativos antes del tiempo  $t_1$ , es decir, antes de  $T$ .

Como podemos ver en el caso en que  $T > T_C$  no se puede aplicar todo el esfuerzo durante toda la carrera hasta el tiempo  $T$ . Ahora como es conveniente aprovechar al máximo la energía restante después de que se aplica el máximo esfuerzo hasta el tiempo  $t_1$ , se debe cumplir que

$$E(T) = 0. \quad (3.58)$$

Por la continuidad de  $E$  podemos suponer que existe  $t_2 \in [t_1, T]$  tal que  $E(t) = 0$ , para  $t \in [t_2, T]$ .

De (3.52) se concluye que para todo  $t \in [t_2, T]$

$$\sigma - \frac{1}{2} \frac{d\nu^2}{dt} - \frac{\nu^2}{\tau} = 0. \quad (3.59)$$

Tomando el factor integrante  $e^{2/\tau t}$  y resolviendo la ecuación para un valor fijo de  $\nu(t_2)$  tenemos

$$\nu^2(t) = \sigma\tau + \{\nu^2(t_2) - \sigma\tau\}e^{2/\tau(t_2-t)} \quad \text{para toda } t \in [t_2, T]. \quad (3.60)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} D &= \int_0^{t_1} F\tau(1 - e^{-t/\tau})dt + \int_{t_1}^{t_2} \nu(t)dt \\ &\quad + \int_{t_2}^T [\sigma\tau + \{\nu^2(t_2) - \sigma\tau\}e^{2/\tau(t_2-t)}]^{1/2}dt \end{aligned} \quad (3.61)$$

y así debemos maximizar  $D$  con respecto a  $\nu$  en (3.61) sujeto a

$$E(t_2) = 0.$$

Por otro lado, tomemos el  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial normado

$$\mathfrak{X} = C^1[0, T] \quad \text{con} \quad \|f\| = \max_{x \in [0, T]} |f(x)|.$$

Consideremos de (3.53) y (3.61) a  $E(t_2)$  y  $D$  como funcionales en  $\mathfrak{X}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\eta) &= E_0 + \sigma t_2 - \frac{1}{2}\eta^2(t_2) - \frac{1}{\tau} \int_0^{t_1} (F\tau(1 - e^{-t/\tau}))^2 dt - \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} \eta^2(t) dt. \\ \mathcal{D}[\eta] &= \int_0^{t_1} F\tau(1 - e^{-t/\tau})dt + \int_{t_1}^{t_2} \eta(t)dt \\ &\quad + \int_{t_2}^T [\sigma\tau + \{\eta^2(t_2) - \sigma\tau\}e^{2/\tau(t_2-t)}]^{1/2} dt. \end{aligned}$$

Supongamos que  $\nu$  maximiza  $\mathcal{D}$  en  $D[\mathcal{E} = 0]$ . Calculemos las variaciones de Gâteaux de estas funcionales en  $\nu$ ,

$$\begin{aligned} G[\mathcal{E}]_\eta^\nu &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{E}(\nu + \epsilon\eta) \right|_{\epsilon=0} \\ &= - \left[ \nu\eta(t_2) + \frac{2}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} \nu\eta(t)dt \right]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Análogamente

$$G[\mathcal{D}]_\eta^\nu = \eta\nu(t_2) \int_{t_2}^T [\sigma\tau + \{\nu^2(t_2) - \sigma\tau\}e^{2/\tau(t_2-t)}]^{-1/2} e^{2/\tau(t_2-t)} dt + \int_{t_1}^{t_2} \eta(t) dt \quad (3.63)$$

para toda  $\eta \in \mathfrak{X}$ .

La continuidad de  $\nu$  y  $\eta$  implican que estas variaciones son débilmente continuas en  $\nu$ .

Por otra parte, para  $\eta = \nu$  se tiene  $G[\mathcal{E}]_\eta^\nu \neq 0$  y por el teorema de los multiplicadores de Lagrange existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que para  $\eta \in \mathfrak{X}$  se tiene

$$G[\mathcal{D}]_\eta^\nu = -\lambda G[\mathcal{E}]_\eta^\nu. \quad (3.64)$$

De aquí, junto con (3.62) y (3.63) se sigue que

$$\eta\nu(t_2) \int_{t_2}^T [\sigma\tau + \{\nu^2(t_2) - \sigma\tau\}e^{2/\tau(t_2-t)}]^{-1/2} e^{2/\tau(t_2-t)} dt + \int_{t_1}^{t_2} \eta(t) dt - \lambda \left[ \nu\eta(t_2) + \frac{2}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} \nu\eta(t) dt \right] = 0.$$

y reagrupando tenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \eta(t) \left\{ 1 - \frac{2\lambda}{\tau} \nu(t) \right\} dt - \eta(t_2)\nu(t_2) \left[ \int_{t_2}^T M(t) dt - \lambda \right] = 0 \quad (3.65)$$

para toda  $\eta \in \mathfrak{X}$  y en donde

$$M(t) = [\sigma\tau + \{\nu^2(t_2) - \sigma\tau\}e^{2/\tau(t_2-t)}]^{-1/2} e^{2/\tau(t_2-t)}.$$

De esta manera, para cualquier  $\eta \in \mathfrak{X}$  con  $\eta(t_2) \neq 0$

$$\frac{1}{\eta(t_2)} \int_{t_1}^{t_2} \eta(t) \left\{ 1 - \frac{2\lambda}{\tau} \nu(t) \right\} dt = L \quad (3.66)$$

en donde  $L$  es la constante

$$L = \nu(t_2) \left[ \int_{t_2}^T M(t) dt - \lambda \right].$$

Tomando  $\eta'(t) = \eta(t) + (t_2 - t)^2 \left\{ 1 - \frac{2\lambda}{\tau} \nu(t) \right\}$  se tiene

$$\eta'(t_2) = \eta(t_2) \neq 0$$

y sustituyendo  $\eta'$  en (3.66) se cumple

$$\int_{t_1}^{t_2} (t_2 - t)^2 \left\{ 1 - \frac{2\lambda}{\tau} \nu(t) \right\}^2 dt = 0.$$

De aquí que  $1 - \frac{2\lambda}{\tau} \nu(t) = 0$  para  $t \in [t_1, t_2]$ , y aplicando este resultado en la ecuación (3.65) se deduce

$$\nu(t) = \frac{\tau}{2\lambda} \quad \text{para toda } t \in [t_1, t_2] \quad (3.67)$$

$$\lambda = \int_{t_2}^T M(t) dt. \quad (3.68)$$

De esta manera  $\nu(t)$  debe ser constante en el intervalo  $[t_1, t_2]$  y en resumen, por (3.56), (3.60) y (3.67),  $\nu$  queda definida como

$$\nu(t) = \begin{cases} F\tau(1 - e^{-t/\tau}) & \text{para } t \in [0, t_1] \\ \frac{\tau}{2\lambda} & \text{para } t \in [t_1, t_2] \\ [\sigma\tau + \{\nu^2(t_2) - \sigma\tau\}e^{2/\tau(t_2-t)}]^{1/2} & \text{para } t \in [t_2, T]. \end{cases} \quad (3.69)$$

De esta manera la velocidad quedará determinada si se conocen los valores de  $t_1$ ,  $t_2$  y  $\lambda$ , los cuales pueden ser determinados por las siguientes ecuaciones:

1. Haciendo  $t = t_1$  en (3.56) y (3.67) tenemos

$$\frac{\tau}{2\lambda} = \nu(t_1) = F\tau(1 - e^{-t_1/\tau})$$

y de esta manera

$$\frac{1}{\lambda} = 2F\tau(1 - e^{-t_1/\tau}). \quad (3.70)$$

2. Si ponemos  $\frac{\tau}{2\lambda}$  en lugar de  $\nu(t_2)$  en la condición (3.68) nos queda

$$\lambda = \left\{ \sigma - \frac{\tau}{4\lambda^2} \right\}^{-1} \left( \left[ \sigma\tau + \left\{ \frac{\tau^2}{4\lambda^2} - \sigma\tau \right\} e^{2/\tau(t_2-T)} \right]^{1/2} - \frac{\tau}{2\lambda} \right). \quad (3.71)$$

3. La condición (3.53) junto con (3.69) implican

$$E(t_2) = E_0 + \sigma t_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\tau}{2\lambda} \right)^2 - \frac{1}{\tau} \left[ \int_0^{t_1} F^2 \tau^2 (1 - e^{-t/\tau})^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\tau}{2\lambda} \right)^2 dt \right]$$

y junto con la condición  $E(t_2) = 0$  tenemos

$$\begin{aligned} E_0 = & -\sigma t_2 + \frac{1}{8} \frac{\tau^2}{\lambda^2} + F^2 \tau \left( t_1 + 2\tau e^{-t_1/\tau} - \frac{\tau}{2} e^{-2t_1/\tau} + \frac{3}{2} \tau \right) \\ & + \frac{\tau}{4\lambda^2} (t_2 - t_1). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Entonces, (3.70) nos da  $\lambda$  en términos de  $t_1$ , de (3.71) podemos obtener  $t_2$  en términos de  $t_1$  y sustituyendo estos valores en (3.72) nos queda una ecuación en términos de  $t_1$  que puede ser resuelta mediante métodos numéricos.

# Capítulo 4

## El Principio del Máximo de Pontryagin

### 4.1. Preliminares

Supongamos que el comportamiento de determinado objeto al tiempo  $t$  se caracteriza por  $n$  números reales, digamos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . El espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$  será el espacio fase de nuestro objeto a consideración. El comportamiento de dicho objeto consiste en el hecho de que las variables  $x_1, \dots, x_n$  cambian con el tiempo y puede ser **controlado** bajo ciertos **controles** que serán definidos por ciertos elementos de un conjunto  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  al cual le llamaremos la *región de control*  $U$ , es decir, la posición de estos controles estará dada por un sistema de parámetros numéricos  $u_1, u_2, \dots, u_n \in U$ .

En problemas de aplicación se tiene cierto interés cuando la región de control es un conjunto compacto debido a que los conjuntos cerrados y acotados tienen un significado físico más práctico, esto es, por lo general en la práctica se suele tener valores limitados, así por ejemplo, estos controles pueden significar voltaje, temperatura, dinero, cantidad de peces, etc.

En particular, una región de control interesante puede ser un cubo en  $\mathbb{R}^k$ ,

$$|u_j| \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

También la región de control  $U$  puede ser algo más compleja, como por ejemplo, un círculo de radio 1:



$$U = \{(u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 = 1\},$$

en donde nuestros controles estén definidos como  $u(t) = (\sin t, \cos t)$  para  $t \in [0, 2\pi]$ .

Para nosotros un control será cualquier función definida en un intervalo real  $I \subseteq \mathbb{R}$  cuyo rango esté dentro de la región  $U \subseteq \mathbb{R}^k$ :

$$u : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U.$$

De acuerdo al problema en cuestión, los controles pueden ser funciones continuas a trozos, diferenciables a trozos, medibles, etc. En este capítulo y para las aplicaciones aquí presentadas, nuestros controles serán funciones continuas a trozos, es decir, que a lo más presentan un número finito de discontinuidades y éstas son del primer tipo. A este tipo de controles les llamaremos **controles admisibles**.

Para aclarar un poco la naturaleza de estas discontinuidades, si dado un control  $u$  definido en un intervalo real  $I$ , decimos que  $\tau$  es una discontinuidad del primer tipo en  $u$  si existen los límites finitos:

$$\begin{aligned} u(\tau - 0) &= \lim_{t \rightarrow -\tau} u(t) \\ u(\tau + 0) &= \lim_{t \rightarrow +\tau} u(t). \end{aligned} \tag{4.1}$$

En cada punto de discontinuidad  $\tau$  tomaremos  $u(\tau) = u(\tau - 0)$  y asumiremos que  $u$  es continua en los valores de frontera. También en lo restante supondremos que el conjunto de control  $U$  tiene interior no vacío.

Por otro lado, el problema fundamental en la teoría de control óptimo consiste en maximizar la funcional

$$J(u) = \int_0^T g(x(t), t, u(t)) dt \tag{4.2}$$

sujeta a las condiciones

$$\dot{x} = f(x(t), t, u(t)) \quad \text{con} \quad x(0) = x_0 \quad \text{para toda} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.3)$$

donde  $f(x, t, u)$  es continuamente diferenciable en  $t$ ,  $x$  y  $u$ , y  $g(x, t, u)$  es continuamente diferenciable en  $x$  y  $t$ , y tan sólo continua en  $u$ <sup>1</sup>. La variable  $x = x(t)$  se llama **la variable de estado**, la cual describe la evolución del sistema desde su estado inicial  $x_0$  al aplicar **un control admisible**  $u$ . A la solución de la ecuación (4.3) se le suele llamar **la respuesta** correspondiente al control  $u$ .

Mediante  $\mathcal{U}$  denotamos la clase de controles admisibles, que por definición serán todas las funciones reales continuas por pedazos  $u(t)$  definidas para  $0 \leq t \leq T$  y que satisfacen

$$u(t) \in U_t,$$

donde  $U_t \subseteq \mathbb{R}^k$  tiene interior no vacío. El tiempo terminal  $T$  es llamado **horizonte temporal**, y en algunos casos puede ser infinito.

### Ejemplo 4.1.1

Sea  $x$  la altura de una planta cuyo crecimiento puede ser acelerado mediante la aplicación de una luz artificial y sea  $u = u(t)$  el exceso de la tasa de crecimiento debido a ésta.

Supongamos que se cumple

$$\frac{dx}{dt} = 1 + u. \quad (4.4)$$

en donde

$$x(0) = 0 \quad \text{y que} \quad x(1) = 2. \quad (4.5)$$

y que la funcional

---

<sup>1</sup>Nosotros asumiremos que  $g$  es también continuamente diferenciables en  $u$ , lo que hará válida nuestra demostración bajo hipótesis adicionales del Principio del Máximo de Pontryagin.

$$J(u) = \int_0^1 \frac{1}{2} u^2 dt$$

representa el costo total debido a la luz artificial.

Queremos minimizar  $J$  sujeto a (4.4) y (4.5). Integrando ambos miembros en (4.4) y respetando la primera condición de (4.5) tenemos

$$x(t) = \int_0^t (1 + u(t)) dt.$$

De la segunda condición de (4.5) se sigue

$$\int_0^1 u(t) dt = 1$$

de donde tenemos

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^1 \frac{1}{2} [(u-1)^2 + 2u - 1] dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (u-1)^2 dt + \int_0^1 u(t) dt - \frac{1}{2} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (u-1)^2 dt + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Así vemos que la funcional  $J$  toma como mínimo a  $1/2$  cuando  $u(t) = 1$  para toda  $t \in [0, 1]$ .

**Teorema 4.1.1** *Retomemos el problema de maximizar (4.2) sujeto a (4.3), y supongamos que también se cumple la condición*

$$x(T) = x_T$$

*para un horizonte temporal finito  $T$ .*

*El Hamiltoniano asociado a este problema está dado por la expresión*

$$\mathcal{H}(x(t), t, u(t)) = g(x(t), t, u(t)) + \lambda(t)f(x(t), t, u(t)).$$

Aquí  $\lambda(t)$  es una función adicional desconocida llamada **la variable adjunta**.

Si el control admisible  $u^*$  resuelve el problema, entonces existe la variable adjunta  $\lambda$  tal que las siguientes ecuaciones son satisfechas:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \quad (4.6)$$

$$\mathcal{H}(u^*(t)) = \max_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(u(t)) \quad (4.7)$$

para toda  $t \in [0, T]$ .

Así las ecuaciones (4.6) y (4.7) son condiciones necesarias para el control óptimo  $u^*$ . A la ecuación (4.6) se le suele llamar **la ecuación adjunta**. En el caso en que  $x(T)$  no esté restringida,  $\lambda(T) = 0$ . Además  $\mathcal{H}$  es constante a lo largo de la trayectoria óptima y si  $T$  está libre, dicha constante es cero. La condición  $\lambda(T) = 0$  se llama **condición de transversalidad**. Si  $u(t)$  yace en el interior de  $U_t$  para toda  $t \in [0, T]$ , entonces  $u$  hace máximo  $\mathcal{H}$  si y sólo si

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0. \quad (4.8)$$

La demostración del teorema 4.1.1 no es trivial<sup>2</sup> y es muy compleja, por lo que en este capítulo sólo daremos una demostración bajo hipótesis adicionales y una interpretación económica que nos permitirán comprenderlo mejor. Pero antes daremos algunos ejemplos.

---

<sup>2</sup>Para una demostración formal ver [11] pp. 66.

### Ejemplo 4.1.2

Retomando el ejemplo 4.1.1 queremos maximizar la funcional

$$J(u) = - \int_0^1 \frac{1}{2} u^2 dt$$

sujeto a

$$\frac{dx}{dt} = 1 + u, \quad x(0) = 0 \quad \text{y} \quad x(1) = 2.$$

En este caso

$$U_t = (-\infty, \infty) \quad \text{para toda} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

El Hamiltoniano asociado al problema es

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}u^2 + \lambda(1 + u).$$

Aplicando el principio del máximo de Pontryagin tenemos

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = 0 \quad \text{lo que implica} \quad \lambda(t) = A$$

con  $A$  constante, y como

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = -u + \lambda \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} \right|_{u=\lambda} < 0$$

el Hamiltoniano alcanza un máximo en

$$u^* = \lambda = A.$$

Luego resolviendo

$$\dot{x} = 1 + A \quad x(0) = 0 \quad \text{y} \quad x(1) = 2$$

concluimos que  $A = 1$ , como el ejemplo 4.1.1, y por lo tanto, la trayectoria y el control óptimo están dados por:

$$x^*(t) = 2t \quad \text{y} \quad u^*(t) = 1 \quad \text{para} \quad t \in [0, 1].$$

### Ejemplo 4.1.3

La ecuación de Euler se puede deducir también del principio del máximo de Pontryagin. Tomemos el problema de maximizar la funcional

$$J(x) = \int_a^b F(t, x, \dot{x}) dt$$

sujeto a las restricciones

$$x(a) = x_1 \quad \text{y} \quad x(b) = x_2.$$

En este caso, tomamos  $\dot{x} = u$  y  $U(t) = (-\infty, \infty)$  para toda  $t \in [a, b]$ .

El Hamiltoniano correspondiente a esta expresión es

$$\mathcal{H} = F + \lambda u.$$

La variable adjunta satisface

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -F_y. \quad (4.9)$$

En este caso, ya que  $U_t = (-\infty, \infty)$  para toda  $t \in [a, b]$ , necesariamente la condición de que  $u$  maximiza  $\mathcal{H}$  implica que

$$F_z + \lambda = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \quad (4.10)$$

y derivando ambos miembros en (4.10), de (4.9) se sigue

$$F_y - \frac{d}{dt} F_z = 0.$$

## 4.2. Una Política de Consumo Óptimo

Retomando el problema de encontrar una política de consumo óptimo visto en el capítulo anterior, consideremos el problema de maximizar

$$U(C) = \int_0^T e^{-\beta t} \log(1 + C) dt \quad (4.11)$$

sujeto a

$$\dot{S} = \alpha S(t) + I(t) - C(t) \quad \text{con} \quad S(0) = S_0 \quad \text{y} \quad S(T) = S_T. \quad (4.12)$$

Aquí  $U$  representa nuestras utilidades totales respecto al consumo  $C$ ,  $S$  el capital acumulado al tiempo  $t$ ,  $I$  los ingresos y  $\alpha$  y  $\beta$  la tasa de interés bancario y la tasa de inflación respectivamente.

La expresión para el Hamiltoniano correspondiente al problema es

$$\mathcal{H} = e^{-\beta t} \log(1 + C(t)) + \lambda(t)(\alpha S(t) + I(t) - C(t)).$$

De acuerdo al principio del máximo de Pontryagin se cumple

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S} = -\alpha \lambda$$

de donde

$$\lambda(t) = A e^{-\alpha t} \quad \text{con} \quad A \quad \text{constante.}$$

Con la finalidad de encontrar el consumo que maximiza  $\mathcal{H}$  resolvemos

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial C} = \frac{e^{-\beta t}}{1 + C(t)} - \lambda = 0$$

y ya que

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial C^2} < 0$$

tenemos para  $\mathcal{H}$  un máximo en

$$C^*(t) = \frac{e^{(\alpha-\beta)t}}{A} - 1. \quad (4.13)$$

Por otro lado, resolviendo la ecuación (4.12) se deduce

$$\int_0^T e^{-\alpha t} C(t) dt = r_0 \quad (4.14)$$

donde

$$r_0 = S_0 - e^{-\alpha T} S_T + \int_0^T e^{-\alpha t} I(t) dt.$$

Luego de (4.13) y (4.14) se tiene

$$\begin{aligned} r_0 &= \int_0^T \left\{ \frac{e^{-\beta t}}{A} - e^{-\alpha t} \right\} dt \\ &= -\frac{1}{\beta A} e^{-\beta T} + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha T} + \frac{1}{\beta A} - \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

y de aquí

$$A = \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{1 - e^{-\beta T}}{\alpha r_0 + 1 - e^{-\alpha T}} \right). \quad (4.15)$$

Finalmente, de (4.13) y (4.15) tenemos

$$C^*(t) = \left[ r_0 + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} \right] \left[ \frac{\beta}{1 - e^{-\beta T}} \right] e^{(\alpha-\beta)t} - 1$$

que nos da la expresión del consumo óptimo, que es la misma expresión que obtuvimos en (3.24).



### 4.3. Prueba del Principio del Máximo

En esta sección presentamos una prueba del principio del máximo de Pontryagin donde las variables de estado y los controles admisibles están definidas en  $\mathbb{R}$ . Este argumento es correcto si se añaden hipótesis adicionales sobre la diferenciabilidad de las funciones implicadas, las cuales en la práctica no suelen satisfacerse, sin embargo, nos presenta una verificación intuitiva. También consideramos la región de control  $U$  como  $\mathbb{R}$ .

Supongamos que  $u^*$  maximiza la funcional

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), t, u(t)) dt \quad (4.16)$$

sujeto a

$$\dot{x} = f(x, t, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \quad \text{y} \quad u \in \mathcal{U}.$$

Donde  $\mathcal{U}$  representa el conjunto de controles admisibles. Por ahora tomemos al punto terminal  $(t_1, x_1)$  como fijo y consideremos al punto inicial  $(t_0, x_0)$  como variable, entonces definamos la función

$$\omega(x_0, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} g(x^*, t, u^*) dt \quad (4.17)$$

donde  $u^*$  es el control óptimo que maximiza (4.16) y  $x^*$  es la correspondiente respuesta a este control.

Debido a que la trayectoria óptima desde  $x(t)$  hasta  $x(t_1)$  está contenida en la trayectoria óptima desde  $x(t_0)$  hasta  $x(t_1)$  para toda  $t \in (t_0, t_1)$  se cumple que

$$\omega(x_0, t_0) = \int_{t_0}^t g(x^*, \xi, u^*) d\xi + \omega(x^*, t) \quad (4.18)$$

en donde  $x^*(t)$  es la trayectoria óptima que lleva el sistema desde  $x(t_0) = x_0$  hasta  $x(t_1) = x_1$ .

Derivando ambos miembros de la ecuación (4.18) tenemos

$$\frac{d\omega(x^*, t)}{dt} = -g(x^*(t), t, u^*(t)).$$

Aplicando la regla de la cadena al miembro izquierdo de esta ecuación nos queda

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}(x^*, t)f(x^*, t, u^*) + \frac{\partial\omega}{\partial t}(x^*, t) = -g(x^*, t, u^*). \quad (4.19)$$

Sea  $v \in \mathcal{U}$ , consideremos el control

$$u(t) = \begin{cases} v & \text{si } t_0 \leq t \leq t_0 + h \\ u_v^* & \text{si } t_0 + h \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

donde  $u_v^*$  denota el control óptimo que lleva el sistema desde  $x_v(t_0 + h)$  hasta  $x(t_1)$  y  $x_v(t)$  denota la respuesta de  $v$ .

Entonces, como  $u$  no es óptimo se cumple

$$\omega(x_v(t_0), t_0) \geq J(u) = \int_{t_0}^{t_0+h} g(x_v(\xi), \xi, v(\xi))d\xi + \omega(x_v(t_0 + h), t_0 + h)$$

luego reacomodando esta expresión

$$\omega(x_v(t_0 + h), t_0 + h) - \omega(x_v(t_0), t_0) \leq - \int_{t_0}^{t_0+h} g(x_v(\xi), \xi, v(\xi))d\xi$$

y dividiendo entre  $h$  ambos miembros de la desigualdad, al tomar el límite cuando  $h \rightarrow 0$  tenemos

$$\left. \frac{d}{dt}\omega(x_v(t), t) \right|_{t=t_0} \leq -g(x_v(t_0), t_0, v(t_0)).$$

Escribiendo  $(x, t)$  en lugar de  $(x_0, t_0)$  y aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}(x, t)f(x, t, v) + \frac{\partial\omega}{\partial t}(x, t) \leq -g(x, t, v). \quad (4.20)$$

Ahora definamos

$$G(x, t, v) = g(x, t, v) + \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) f(x, t, v) + \frac{\partial \omega}{\partial t}(x, t).$$

De (4.19) y (4.20) queda claro que

1.  $G(x, t, v) \leq 0$ , para  $v \in \mathcal{U}$ , para toda  $x$  y para toda  $t \in [t_0, t_1]$ .
2.  $G(x^*, t, u^*) = 0$ , si  $u^*$  es el control óptimo y  $x^*$  la trayectoria óptima.

De aquí si fijamos  $x = x^*$ , vemos que  $u^*$  maximiza el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = g + \lambda f$$

con

$$\lambda = \frac{\partial \omega}{\partial x}(x^*, t). \quad (4.21)$$

Por otra parte, como  $(x^*, t, u^*)$  maximiza  $G$ , suponiendo diferenciabilidad se cumple

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial t} &= \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} f + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial t} \\ &= \frac{\partial G}{\partial x} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Finalmente de (4.21) y (4.22) deducimos

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}(x^*, t) \frac{\partial x^*}{\partial t} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial t}(x^*, t) \\ &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}. \end{aligned}$$

■

## 4.4. Interpretación Económica

De la ecuación (4.16) nos queda claro que  $g(x(t), t, u(t))dt$  representa una contribución directa a la función objetivo  $J$  dado por la diferencial de tiempo  $dt$ .

Por otro lado de (4.17) y (4.21) vemos que

$$\lambda = \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial J}{\partial x}(x^*, t, u^*),$$

por lo que  $\lambda$  representa el incremento que sufre  $J$  cuando la respuesta  $x^*$  al control óptimo  $u^*$  se incrementa en una unidad. Por lo tanto,

$$\lambda f dt = \lambda \dot{x} dt = \lambda dx$$

representa el incremento indirecto que sufre  $J$  cuando se incrementa el nivel de existencias (stock) en  $dx$  unidades.

Así la expresión

$$\mathcal{H} dt = g dt + \lambda f dt$$

se puede interpretar como la contribución total a la funcional objetivo  $J$  producida en un intervalo de tiempo de duración  $dt$ , de donde es claro que el control óptimo  $u^*$  y la trayectoria óptima  $x^*$  deben maximizar el Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  en todo tiempo  $t$ .

## 4.5. El Principio del Máximo de Pontryagin

Enunciemos ahora una versión completa del Principio del Máximo de Pontryagin<sup>3</sup>.

Aquí el conjunto de controles admisibles  $\mathcal{U}$  es el conjunto de funciones continuas por pedazos que cumplen con la condición

$$u(t) \in U(t) \subseteq \mathbb{R}^m,$$

---

<sup>3</sup>Una demostración completa se desarrolla en [11] en el capítulo 2.

para toda  $u \in \mathcal{U}$  y para toda  $t \in [t_0, t_1]$ . El conjunto  $U(t) \subseteq \mathbb{R}^m$  representa ciertas restricciones físicas al valor de las variables del control en el tiempo  $t$ . Se llama ecuación de estado al sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad \text{para } t \in [t_0, t_1], \quad \text{y } x(t_0) = x_0,$$

en donde el vector de variable de estado  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  pertenece a  $\mathbb{R}^n$ ,  $f$  es una función cuyo dominio está contenido en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ , que toma valores en  $\mathbb{R}^n$  y posee todas sus primeras derivadas parciales continuas.

Sean  $F : D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $S : D' \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones que tienen todas sus primeras derivadas parciales continuas.

**Teorema 4.5.1 (Principio del Máximo de Pontryagin)** *Considérese*

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) dt + S[x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)]. \quad (4.23)$$

*Queremos maximizar (4.23) sujeto a*

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

*con*

$$x_1(t_0) = x_{10}, \dots, x_n(t_0) = x_{n0} \quad \text{y } u \in \mathcal{U}.$$

*El Hamiltoniano queda definido como*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, u, \lambda, t) &= F(x, u, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x, u, t) \\ &= F(x, u, t) + \lambda \cdot f(x, u, t) \end{aligned}$$

*en donde  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$  es el vector de variables de coestado o adjuntas. Entonces, si  $u^*(t)$  es el control que optimiza (4.23), una función continua a trozos, y  $x^*(t)$  la trayectoria de estado asociada a  $u^*$ , se tiene:*

1. La función vectorial de variables adjuntas cumple con las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_i^*(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}(x^*, u^*, \lambda^*, t) \\ \lambda_i^*(t_1) &= \frac{\partial S[x^*(t_1)]}{\partial x_i}\end{aligned}$$

para  $i = 1, \dots, n$  y para todos los puntos de continuidad de  $u^*$ .

2. Se verifica

$$\mathcal{H}[x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t] \geq \mathcal{H}[x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t]$$

para cada  $u \in \mathcal{U}$  y para toda  $t \in [t_0, t_1]$ .

3. Y también se debe cumplir

$$\dot{x}_i^* = f_i(x_1^*, \dots, x_n^*, u_1^*, \dots, u_m^*, t) \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

y para todos los puntos de continuidad de  $u^*$  con

$$x_1^*(t_0) = x_{10}, \dots, x_n^*(t_0) = x_{n0}.$$

### Ejemplo 4.5.1

Consideremos el problema de encontrar el control  $u^*$  que maximiza la funcional

$$J = \int_0^1 \frac{1}{2} u^2 dt + 3x(1) + y(1)$$

sujeto a

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \\ \dot{y} &= x\end{aligned} \tag{4.24}$$

con  $x(0) = 1$  y  $y(0) = 0$ .

En este caso  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$  y tenemos

$$\begin{aligned} F(x, y, u, t) &= \frac{1}{2}u^2 \\ S[x, y] &= 3x + y, \end{aligned}$$

el Hamiltoniano asociado es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 u + \lambda_2 x$$

y de acuerdo al teorema 4.5.1, se debe cumplir

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\lambda_2 \quad \text{y} \quad \lambda_1(1) = -\frac{\partial S}{\partial x} = 3,$$

así como también

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_2(1) = -\frac{\partial S}{\partial y} = 1$$

y de esta manera tenemos

$$\lambda_1(t) = -t + 4 \quad \text{y} \quad \lambda_2(t) = 1.$$

Por otro lado, como  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = u + \lambda_1 = 0 \quad \text{o} \quad u^* = -\lambda_1$$

y como  $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} = 1 > 0$ ,  $u^* = t - 4$  debe maximizar  $\mathcal{H}$  y ser candidato a control óptimo.

Finalmente, del sistema de ecuaciones (4.24) y sus condiciones iniciales nos queda

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}t^2 - 4t + 1 \\ y(t) &= \frac{1}{6} - 2t^2 + t. \end{aligned}$$

## 4.6. Modelo No Lineal para el Negocio de la Pesquería

En los capítulos 2 y 3 utilizamos algunas herramientas del cálculo de variaciones para encontrar el esfuerzo pesquero que optimizara las utilidades totales dadas por las ganancias en el negocio de la pesca a largo plazo, en donde las ganancias al tiempo  $t$  estaban dadas por una expresión lineal. Sin embargo, en esa expresión no se consideró la alta o baja del precio del pescado, que puede ocurrir por un bajo o alto esfuerzo pesquero, la competencia en el mercado u otros factores. Éste será el fenómeno que introduciremos en el modelo no lineal que veremos a continuación. Supongamos que la población de peces presenta un crecimiento logístico

$$\dot{x} = Rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - h(t) \quad \text{con} \quad x(0) = x_0 \quad \text{y} \quad x(T) = x_T \quad (4.25)$$

donde  $R$  es la tasa natural de crecimiento de la población,  $K$  es el tamaño máximo que puede alcanzar la población en su hábitat y  $h$  el esfuerzo pesquero al tiempo  $t$ . Por comodidad tomaremos  $F(x) = Rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ .

Supongamos que las utilidades por pescar son dadas por una función no lineal  $R(h)$ , que es suave, estrictamente creciente, cóncava y no negativa para  $h \geq 0$ . La funcional objetivo es entonces

$$J(h) = \int_0^\infty e^{-\delta t} R(h) dt \quad \text{con} \quad 0 \leq h \leq h_{max} \quad (4.26)$$

y el Hamiltoniano en este problema está dado por

$$\mathcal{H} = e^{-\delta t} R(h) + \lambda(F(x) - h).$$

Consideremos por el momento la funcional objetivo a maximizar

$$J_T(h) = \int_0^T e^{-\delta t} R(h) dt \quad (4.27)$$

$$\text{con} \quad x(0) = x_0 \quad \text{y} \quad x(T) = x_T \quad (4.28)$$



para un horizonte temporal finito  $T$ . Supongamos que el control óptimo no toma los valores extremos considerados en (4.26) y existe para la ecuación (4.27) con las condiciones (4.28), entonces por el Principio del Máximo de Pontryagin se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h} = e^{-\delta t} R'(h) - \lambda = 0 \quad \text{o} \quad \lambda = e^{-\delta t} R'(h) \quad (4.29)$$

por lo tanto,

$$\frac{d\lambda}{dt} = e^{-\delta t} \left[ -\delta R'(h) + R''(h) \frac{dh}{dt} \right]. \quad (4.30)$$

Por otra parte, la ecuación adjunta es

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\lambda F'(x) = -e^{-\delta t} R'(h) F'(x) \quad (4.31)$$

e igualando (4.30) y (4.31) obtenemos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{R'(h)}{R''(h)} [\delta - F'(x)]. \quad (4.32)$$

Retomando la ecuación de estado (4.25), junto con (4.32) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x) - h \\ \dot{h} &= \frac{R'(h)}{R''(h)} [\delta - F'(x)]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

El sistema de ecuaciones (4.33) representa por tanto una condición necesaria para el control óptimo  $h(t)$  y su correspondiente respuesta  $x(t)$  en el problema dado en (4.27). Este sistema constituye un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir, al lado derecho de estas ecuaciones aparecen funciones que no dependen explícitamente del tiempo  $t$ .

Por el teorema fundamental de existencia para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias<sup>4</sup>, el sistema de ecuaciones representado en (4.33) tiene

---

<sup>4</sup>([12]).

una única solución  $(x(t), h(t))$  que pasa a través de cualquier punto inicial  $(x_0, h_0)$  en el  $(x, h)$ -plano y a esta colección de trayectorias es referida como el diagrama del plano fase para el sistema de ecuaciones (4.33). Para facilitar el análisis geométrico de estas soluciones, consideremos las isoclinas, que son las curvas para las cuales se cumple  $\dot{x} = 0$  y  $\dot{h} = 0$ . Como  $R$  es estrictamente creciente,  $R'(h) > 0$  para toda  $h$  y por (4.33),  $\dot{h} = 0$  implica que la  $h$ -isoclina es la vertical  $x = x^*$ , donde  $x^*$  cumple

$$F'(x^*) = \delta$$

es decir,

$$x^* = \frac{K}{2} \left( 1 - \frac{\delta}{R} \right) \quad (4.34)$$

y la  $x$ -isoclina es la curva

$$h = F(x) = Rx \left( 1 - \frac{x}{K} \right).$$

La intersección de estas isoclinas será el único punto de equilibrio  $(x^*, h^*)$  para el sistema de ecuaciones (4.33). Como se muestra en la figura 4.1.

Para determinar la solución óptima  $(x(t), h(t))$  correspondiente a las condiciones inicial y terminal de la variable de estado dadas en (4.28) procederemos de la siguiente manera:

Primero observamos que el punto de equilibrio  $(x^*, h^*)$  es un punto silla para el sistema de ecuaciones diferenciales dado en (4.33). En efecto, el plano se divide en 4 regiones llamadas *isosectores* que son determinadas por las isoclinas como lo muestra la figura 4.1. Observamos que a la derecha de la  $h$ -isoclina se tiene  $\dot{h} < 0$  y a la izquierda  $\dot{h} > 0$  y dentro de la parábola que representa la  $x$ -isoclina se cumple  $\dot{x} > 0$ , mientras que fuera de ella  $\dot{x} < 0$ . Podemos estudiar la estabilidad local del punto de equilibrio mediante la aplicación del teorema de *Hartman-Grobman*<sup>5</sup> el cual enunciamos a continuación junto con la siguiente definición.

---

<sup>5</sup>Para una demostración ver [10].

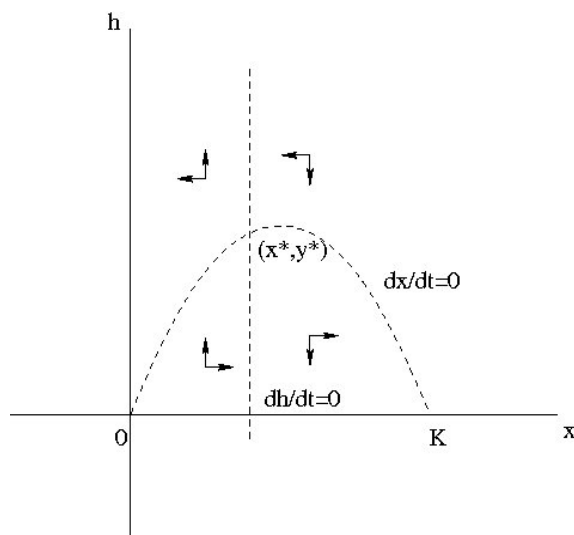


Figura 4.1: Plano dividido por los isosectores.

**Definición 4.6.1** Para  $x, y \in \mathbb{R}^n$  sea

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.35)$$

$$\dot{y} = g(y) \quad (4.36)$$

y sean  $x_1$  y  $x_2$  dos puntos de equilibrio de los sistemas autónomos de las ecuaciones diferenciales (4.35) y (4.36) respectivamente. Se dice que estos sistemas son topológicamente equivalentes en las vecindades abiertas  $\mathcal{U}$  de  $x_1$  y  $\mathcal{V}$  de  $x_2$ , si existe un homeomorfismo<sup>6</sup>  $H$  de  $\mathcal{U}$  sobre  $\mathcal{V}$  que mapea las trayectorias que resuelven (4.35) en  $\mathcal{U}$  sobre las trayectorias que resuelven (4.36) en  $\mathcal{V}$  y preserva sus orientaciones.

El teorema de *Hartman-Grobman* demuestra que cerca de un punto de equilibrio  $x_0$  de un sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.37)$$

las soluciones del plano fase tienen la misma estructura cualitativa<sup>7</sup> que las del sistema lineal

<sup>6</sup>Una función continua y biyectiva con inversa continua.

<sup>7</sup>Es decir, los sistemas son topológicamente equivalentes cerca del punto de equilibrio.

$$\dot{x} = A(x) \quad \text{con} \quad A = Df(x_0). \quad (4.38)$$

**Teorema 4.6.1** (*Hartman-Grobman*) Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al origen, sea  $f \in C^1(E)$ , y sea  $\phi_t$  el flujo del sistema no lineal (4.37). Supongamos que  $f(0) = 0$  y que la matriz  $A = Df(0)$  no tiene valores propios con parte real nula. Entonces, existe un homeomorfismo  $H$  de un abierto  $\mathcal{U}$  sobre un abierto  $\mathcal{V}$ , donde  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  contienen al origen, de tal forma que para cada  $x_0 \in \mathcal{U}$ , existe un intervalo abierto  $I_0 \subset \mathbb{R}$  que contiene al cero y para todo  $x_0 \in \mathcal{U}$  y  $t \in I_0$

$$H\phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0).$$

Es decir,  $H$  mapea las trayectorias de (4.37) cerca del origen sobre las trayectorias de (4.38) cerca del origen y preserva la parametrización.

Por otra parte podemos estudiar la estabilidad del punto de equilibrio en el sistema lineal (4.38) mediante el siguiente teorema.

**Teorema 4.6.2** *Consideremos el sistema lineal*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde  $ad - bc \neq 0$ , de modo que  $(0, 0)$  es el único punto crítico del sistema (4.39), entonces si las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (4.40)$$

son reales, no nulas y de signo contrario, el punto de equilibrio  $(0, 0)$  del sistema (4.39) tiene naturaleza punto silla y es inestable<sup>8</sup>.

Podemos considerar al punto de equilibrio del sistema  $(x^*, h^*)$  del sistema de ecuaciones diferenciales (4.33) como el origen con el fin de poder aplicar los teoremas 4.6.1 y 4.6.2. Sean entonces

---

<sup>8</sup>Para una demostración de este teorema ver [12].

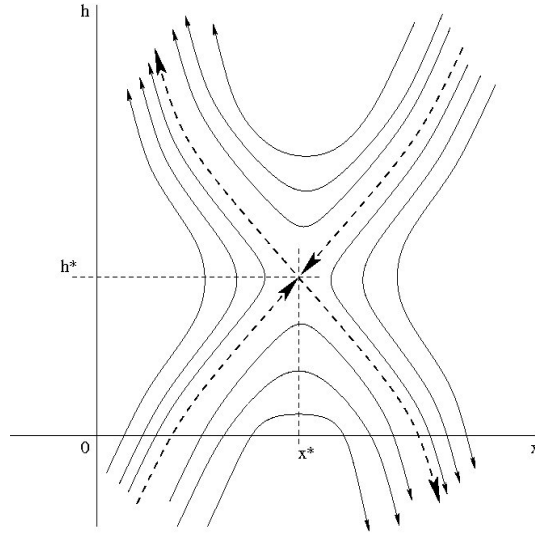


Figura 4.2: Plano fase del sistema de ecuaciones diferenciales (4.33).

$$P(x, h) = F(x) - h \quad y \quad Q(x, h) = \frac{R'(h)}{R''(h)}(F'(x) - \delta).$$

Calculemos el determinante de la matriz Jacobiana como se indica en el teorema 4.6.2

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x^*, h^*) & \frac{\partial P}{\partial h}(x^*, h^*) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x^*, h^*) & \frac{\partial Q}{\partial h}(x^*, h^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F'(x^*) & -1 \\ \frac{R'(h^*)}{R''(h^*)}F''(x^*) & 0 \end{vmatrix} > 0$$

y consideremos la ecuación característica

$$\lambda^2 + F'(x^*)\lambda - \frac{R'(h^*)}{R''(h^*)}F''(x^*) = 0 \quad (4.41)$$

en donde el discriminante de (4.41)

$$[F'(x^*)]^2 + 4\frac{R'(h^*)}{R''(h^*)}F''(x^*) \geq 0$$

garantiza que los valores propios de la matriz Jacobiana son reales y con signo opuesto. Entonces, de acuerdo al teorema 4.6.1 el punto de equilibrio  $(x^*, y^*)$  presenta estabilidad punto silla localmente y por la orientación de las derivadas de  $x$  y  $h$  en los isosectores, como lo muestran las flechas en la figura 4.1, podemos concluir que el punto de equilibrio  $(x^*, y^*)$  en el sistema de ecuaciones diferenciales (4.33) es un punto silla. Ver figura 4.2.

Asociado a un punto silla existen unas trayectorias particulares llamadas separatrices que convergen o divergen al punto silla cuando  $t \rightarrow \infty$ . En las figuras 4.3 y 4.4 aparecen dos configuraciones posibles para los niveles inicial y terminal de la variable de estado  $x_0$  y  $x_T$ , donde las curvas punteadas son las separatrices.

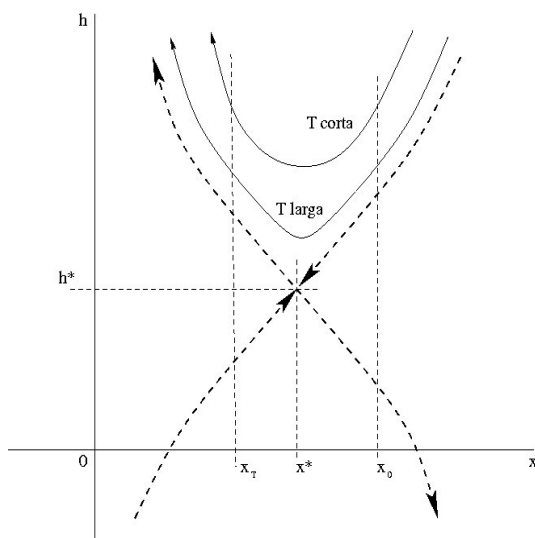


Figura 4.3:  $x_T < x^* < x_0$ .

Nosotros debemos escoger alguna trayectoria  $[x(t), h(t)]$  que empiece en  $t = 0$  en la línea  $x = x_0$  y termine en  $x = x_T$  al tiempo  $T$ . Debido a que  $(x^*, h^*)$  es el punto de equilibrio del sistema, la “velocidad” de la trayectoria cerca del punto de equilibrio es pequeña, por tanto, si  $T$  es grande, la trayectoria pasa cerca del punto de equilibrio y ésta se mantiene lejos de este punto en la medida que  $T$  es pequeña.

Ahora consideremos el caso cuando  $T = \infty$ . En este caso aplicaremos una condición necesaria para problemas con descuento temporal en el integrando

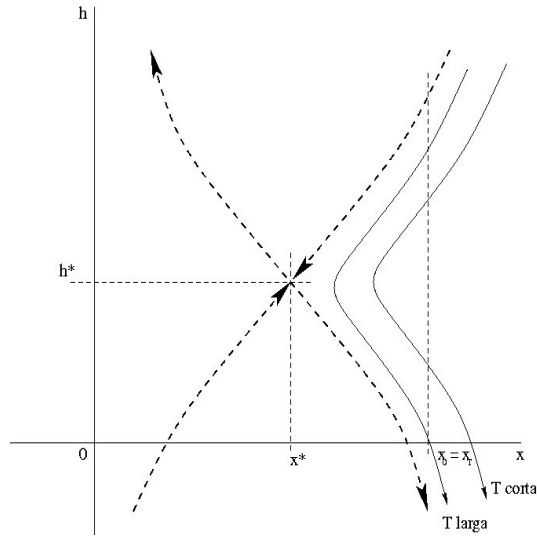


Figura 4.4:  $x^* < x_0 = x_T$ .

de la funcional objetivo<sup>9</sup>. Esta condición es la condición de transversalidad para un horizonte temporal infinito:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0. \quad (4.42)$$

Si  $x_0 = x^*$ , el control óptimo es  $h = h^*$  para toda  $t \geq 0$  ya que claramente se satisface (4.33) y (4.42). En el caso de que  $x_0 \neq x^*$  para cumplir con (4.33) escogeremos la trayectoria en el diagrama fase que cumpla con  $x_0 = 0$  y satisfaga (4.42). Sabemos que las trayectorias en el diagrama fase que resuelven (4.27) y (4.28) convergen, por lo menos localmente, a las separatrices convergentes al punto de equilibrio  $(x^*, h^*)$  conforme  $T \rightarrow \infty$ . Por otra parte, dado que los valores de  $x_0$  están acotados por  $K$  podemos acotar los valores de  $h$  en las separatrices convergentes al punto de equilibrio en el intervalo de tiempo  $[0, \infty)$ , así ciertamente existe

$$\int_0^\infty e^{-\delta t} R(h_\infty) dt \quad (4.43)$$

---

<sup>9</sup>[2].

donde  $h_\infty$  representa el control asociado a la única separatriz que converge al punto de equilibrio conforme  $t \rightarrow \infty$  y se corta con la vertical  $x = x_0$ . Como los valores de  $h_\infty$  están acotados también se cumple

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} R(h_\infty(t)) = 0$$

y como para este caso  $x(T)$  es irrelevante deducimos que para el caso en que  $x_0 \neq x^*$  el control óptimo debe ser  $h_\infty$ . Aquí el nivel de stock  $x = x(t)$  se acerca asintóticamente a la trayectoria de equilibrio  $x = x^*$ .



# Conclusión

En este trabajo se utilizaron herramientas del cálculo de variaciones y la teoría de control en la aplicación de la administración óptima de recursos.

En un principio, en el capítulo 1 se presentaron los conceptos básicos que se utilizaron en todo el proyecto. En el capítulo 2 resolvimos el problema de optimizar la explotación de una población de peces cuyo crecimiento fué modelado con la ecuación logística. La solución de dicho problema fué del tipo de relevo, por lo que los métodos clásicos del cálculo de variaciones no nos fueron útiles y se utilizó una aplicación del teorema de Green.

Como se nos muestra en el capítulo 4, una de las ventajas que nos brinda el Principio del Máximo consiste en la posibilidad de tomar controles que sean funciones continuas a trozos, lo que nos puede brindar una herramienta útil para resolver y plantear problemas prácticos que muchas veces no son tan sencillos de resolver con los métodos clásicos que nos presenta el cálculo de variaciones, tal como lo pudimos ver en los problemas expuestos en los capítulos 2 y 3 en las secciones 2.6 y 3.5.

Finalmente, en el capítulo 4 sección 4.6, se ejemplifica la manera en como puede ser utilizada la teoría de la estabilidad y la teoría de control óptimo en la explotación de un recurso renovable.

# Bibliografía

- [1] Bellman, R.(1953): *An introduction to the theory of dynamic programming* The RAND Corporation. Report R-245.
- [2] Benveniste, L.M., Scheinkman, J.A. (1982): *Duality Theory for Dynamic Optimization Models of economics: The Continuous Time Case*. Journal of Economic Theory, pp 1-19.
- [3] Boyce, William E. Diplina, Richard C.. (1996): *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Sixth Edition. John Wiley and Sons, Inc. pp.82.
- [4] Cerdá Tena, Emilio. (2001): *Optimización Dinámica*. Pearson Educación, S.A., Madrid.
- [5] Clark, Colin W. (2005): *Mathematical Bioeconomics Optimal Management of Renewable Resources*, Pure and applied mathematics, second edition, Wiley-Interscience, Hoboken, New Jersey.
- [6] Dubey B., Chandra P., Sinha P. (2003): *A model for fishery resource with reserve area* Nonlinear Analysis: Real World Applications No. 4 pp. 625-637.
- [7] Keller, Joseph B. (1974): *Optimal Velocity in a Race*. The American Mathematical Monthly. Vol. 81, No. 5, pp. 474-480.
- [8] Mesterton-Gibbons M.(1996): *A technique for finding optimal two species harvesting policies*. Ecol. Model. No. 92 pp. 235-244.
- [9] Michel, Philippe. (1982): *On the Transversality Condition in Infinite Horizon Optimal Problems*. Econometrica, Vol. 50, No. 4, pp. 975-985.

- [10] Perko, Lawrence. (1991): *Differential equations and dynamical systems*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlang, New York.
- [11] Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., Mishchenko, E.F. (1963): *The Mathematical Theory of Optimal Process*. The American Mathematical Monthly. Vol. 70, No. 10, pp. 1114-1116.
- [12] Ross, S.L. (1992): *Ecuaciones Diferenciales*. Editorial Reverté S.A. Barcelona.
- [13] Rubio Álvarez, Francisco J. (2006) : *Administración Óptima de Recursos*. Tesis de licenciatura.UMSNH<sup>10</sup>.
- [14] Song, X, Chen L, (2001): *Optimal Harvesting and Stability for two-species competitive system with stage structure*, Math. Biosci. No. 170 pp. 173-186.
- [15] Spivak, Michael. (1988) : *Cálculo en Variedades*. Editorial Reverté S.A. Barcelona.

---

<sup>10</sup>Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.