UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

SUCESIONES QUE CASI SE DIVIDEN

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

ENRIQUE RODRÍGUEZ CASTILLO

DIRECTOR DE LA TESINA: DR. RAYMUNDO BAUTISTA RAMOS

MÉXICO, D.F. NOVIEMBRE, 2009

Sucesiones que casi se dividen

L. M. Enrique Rodríguez Castillo

A MIS DOS HERMOSOS HIJOS
LUIS ENRIQUE
Y
ELI ZOÉ

*"Mis estudios son para darle
un mejor futuro a mis hijos,
mis hijos son para darme
un mejor presente a mi."*

Contenido

Introducción

El objetivo de este trabajo es el siguiente: dado un complejo $P^\bullet$ finito (acotado) e inescindible de módulos proyectivos finitamente generados sobre una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita Λ, que no sea equivlente a una de la forma

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P = P \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

existe una sucesión que casi se divide de la forma

$$0 \longrightarrow I^\bullet \longrightarrow E^\bullet \longrightarrow P^\bullet \longrightarrow 0,$$

donde $I^\bullet$ es un complejo finito e inescindible de Λ-módulos inyectivos finitamente generados.

Para alcanzar nuestro objetivo usaremos varios resultados muy conocidos del Álgebra Homológica; omitiremos las demostraciones en los primeros dos capítulos de este trabajo, que es donde presentaremos los resultados básicos que necesitamos para estudiar la categoría de Λ-módulos finitamente generados ya que al no hacerlo, nos desviaríamos mucho de nuestro objetivo.

La intensión de este trabajo es dotar de bases teóricas firmes para estudios posteriores en las siguientes direcciones:

(a) Demostrar la existencia de sucesiones que casi se dividen en la categoría de complejos de Λ-módulos proyectivos finitamente generados con homología finita, donde Λ es una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita, que tienen la siguiente forma: dado un complejo inescindible con homología finita $P^\bullet$, de Λ-módulos proyectivos finitamente generados, existe una sucesión exacta localmente trivial y que casi se divide

$$0 \longrightarrow Q^\bullet \longrightarrow E^\bullet \longrightarrow P^\bullet \longrightarrow 0,$$

donde $Q^\bullet$ y $E^\bullet$ son complejos con homología finita de Λ-módulos proyectivos finitamente generados tales que $Q^\bullet$ es un complejo cuasi-isomorfo a $\nu(P^\bullet)[-1]$, ν es la permutación de Nakayama y $[-1]$ es el funtor de translación.

(b) Siguiendo el trabajo de D. Happel, demostrar la existencia de los triángulos de Auslander-Reiten en la categoría derivada acotada de un álgebra.

(c) Demostrar la existencia de ciertas sucesiones que casi se dividen en la categoría de complejos que se anulan fuera del intervalo $[a, b]$ de Λ-módulos proyectivos finitamente generados.

(d) Demostrar la existencia de ciertas sucesiones que casi se dividen en la categoría Λ-mod.

Este trabajo se divide en tres capítulos, de los cuales, los dos primeros son una presentación breve de los conceptos y resultados básicos que requerimos para el estudio de la categoría de Λ-módulos finitamente generados. Para quien desee consultar las demostraciones de los resultados presentados en estos dos primeros capítulos, recomendamos revisar los libros citados en la bibliografía como [BM:C], [JR:H], [JR:A] o bien [SK:A].

El último capítulo, lo dedicamos al estudio de la categoría de Λ-módulos estudiando los funtores duales, la permutación de Nakayama, los complejos de módulos y, por último, las sucesiones que casi se dividen. Se presta mucha atención al tratamiento de estos concéptos estudiandolos con claridad y rigurosidad, concluyendo con una exposición precisa de la existencia de las sucesiones que casi se dividen que tienen la forma antes antes mencionada en la categoría de complejos de Λ-módulos finitamente generados.

A lo largo de este trabajo se usará la notación $i - 1 \in s$, donde i y s son números naturales con $i \leq s$, la cual significa que i es un elemento del conjunto $\{1, 2, \ldots, s\}$.

CAPÍTULO 1

Conceptos básicos

En este capítulo, recopilaremos algunos de los resultados más básicos del álgebra homológica, los cuales nos serán de utilidad para fijar la notación que usaremos así como los lemas que ocuparemos a lo largo de este trabajo.

$\boxed{A}$ Notación

Para denotar una categoría, generalmente usaremos letras como $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ o $\mathscr{C}$. La categoría **dual** de una categoría $\mathscr{A}$, que denotaremos por $\mathscr{A}^*$, es la categoría donde la clase de objetos de $\mathscr{A}^*$ coincide con la clase de objetos de $\mathscr{A}$ y para dos objetos A y B de $\mathscr{A}^*$ se define $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}^*}(A, B) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(B, A)$.

Si tenemos dos categorías $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$, podemos formar la **categoría producto** $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ como la categoría en la que los objetos son parejas de objetos (A, B), donde A es un objeto de $\mathscr{A}$ y B es un objeto de $\mathscr{B}$; los morfismos $f = (f_1, f_2) : (A, B) \to (A', B')$ son parejas de morfismos $f_1 : A \to A'$ en $\mathscr{A}$ y $f_2 : B \to B'$ en $\mathscr{B}$.

Un morfismo $f : A \to B$ en una categoría $\mathscr{A}$ se llama **retracción** si existe un morfismo $g : B \to A$ tal que $fg = \mathrm{id}_B$; de manera dual, un morfismo $f : A \to B$ en $\mathscr{A}$ se llama **sección** si existe un morfismo $g : B \to A$ en $\mathscr{A}$ tal que $gf = \mathrm{id}_A$. Un **isomorfismo** es un morfismo que, al mismo tiempo, es una retracción y una sección. Un morfismo $\sigma : A \to B$ en $\mathscr{A}$ se llama **monomorfismo** si la relación $\sigma f = \sigma g$ en $\mathscr{A}$ implica que $f = g$; de manera dual, un morfismo $\eta : A \to B$ en $\mathscr{A}$ se llama **epimorfismo** si la relación $f\eta = g\eta$ en $\mathscr{A}$ implica que $f = g$.

Si $\sigma : A \to B$ es un monomorfismo, lo denotaremos por $\sigma : A \hookrightarrow B$; si $\eta : A \to B$ es un epimorfismo, lo denotaremos por $\eta : A \twoheadrightarrow B$. Dos objetos A y B se dicen **isomorfos** si existe un isomorfismo $f : A \to B$; si A es isomorfo a B, lo denotaremos por $A \cong B$.

Recordemos que una categoría $\mathscr{A}$ es **abeliana** si satisface las siguientes condiciones:

(a) La categoría $\mathscr{A}$ es una categoría normal.

(b) La categoría $\mathscr{A}$ es una categoría conormal.

(c) La categoría $\mathscr{A}$ tiene núcleos.

(d) La categoría $\mathscr{A}$ tiene conúcleos.

(e) Cada morfismo $f : A \to B$ en $\mathscr{A}$ se factoriza a través de un epimorfismo $\eta : A \to I$ y un monomorfismo $\sigma : I \to B$, ambos en $\mathscr{A}$.

(f) Para cada pareja de objetos A y B en $\mathscr{A}$ el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ tiene estructura de grupo abeliano y se cumple la ley distributiva de la composoción sobre la suma:

$$f(g+h) = fg + fh \qquad \text{y} \qquad (f+g)h = fh + gh.$$

(g) En $\mathscr{A}$ existen productos y coproductos (sumas) finitos.

En una categoría abeliana $\mathscr{A}$ se puede demostrar que cada morfismo $f : A \to B$ en $\mathscr{A}$ tiene una imagen $\sigma : \mathrm{Im}\, f \to B$ y una coimagen $\eta : A \to \mathrm{Coim}\, f$ y además, en este caso se tiene $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Coim}\, f$. Además, se puede ver que si $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana, entonces $\mathscr{A}^*$ también es una categoría abeliana.

Recordemos que, en una categoría abeliana, los productos y las sumas finitas coinciden, como se muestra en [BM:C].

Sean $f : A \to B$ y $g : C \to B$ dos morfismos en una categoría $\mathscr{A}$. Un **producto fibrado** para f y g es una pareja de morfismos $p : P \to A$ y $q : P \to C$ en $\mathscr{A}$ que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & C \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

y que cumplen con la siguiente **propiedad universal**: si $\varphi : D \to A$ y $\psi : D \to C$ son dos morfismos en $\mathscr{A}$ que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & C \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B, \end{tikzcd}$$

entonces existe un único morfismo $\gamma : D \to P$ tal que $\varphi = p\gamma$ y $\psi = q\gamma$. A un diagrama de la forma 1.1 se le llama **diagrama de producto fibrado**. El concepto dual de un producto fibrado es un **coproducto fibrado** o **suma fibrada** que se obtiene cambiando de orientación todas las flechas en los diagramas que definen al producto fibrado.

Se puede demostrar que en una categoría abeliana existen los productos fibrados así como las sumas fibradas.

Decimos que una sucesión de morfismos $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{Z}}$ en una categoría abeliana $\mathscr{A}$, digamos

$$\cdots \longrightarrow A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_{n+2} \longrightarrow \cdots ,$$

es **exacta** si para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\operatorname{Ker} f_{n+1} = \operatorname{Im} f_n$. Decimos que una sucesión exacta en una categoría abeliana $\mathscr{A}$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$$

se **divide** si g es una retracción.

Lema A.1. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$$

se divide si y sólo si f es una sección.

Si tenemos una sucesión exacta en una categoría abeliana $\mathscr{A}$, digamos

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

en ocasiones denotaremos a C como B/A.

Sean I y J dos conjuntos finitos no vacíos y consideremos un morfismo $f : \bigoplus_{j\in J} A_j \to \bigoplus_{i\in I} B_i$. Definimos los **morfismos coordenados** $f_{i,j} : A_j \to B_i$ por $f_{ij} = \pi_i f \sigma_j$, donde $\sigma_j : A_j \to \bigoplus_{j\in J} A_j$ es la inclusión canónica y $\pi_i : \bigoplus_{i\in I} B_i \to B_i$ es la proyección canónica. Los morfismos coordenados determinan totalmente al morfismo f ya que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \bigoplus\limits_{j\in J} A_j \arrow[r, "f"] & \bigoplus\limits_{i\in I} B_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ A_i \arrow[u, "\sigma_j"] \arrow[r, dashed, "f_{i,j}"'] & B_j . \end{tikzcd}$$

Así, el conjunto de morfismos

$$\operatorname{Hom}\left(\bigoplus_{j\in J} A_j, \bigoplus_{i\in I} B_i \right)$$

está en correspondencia uno-a-uno con el conjunto de matrices $(f_{i,j})$, donde $f_{i,j} \in \operatorname{Hom}(A_j, B_i)$. Si $g = (g_{k,i})$ con $g : \bigoplus_{i\in I} B_i \to \bigoplus_{k\in K} C_k$, entonces la matriz que representa a gf es la matriz producto

$$\left(\sum_{s\in I} g_{k,s} f_{s,j} \right).$$

Al morfismo representado por $\binom{\mathrm{id}_A}{\mathrm{id}_A}$ se le llama **morfismo diagonal**, y lo denotaremos por $\Delta : A \to A \oplus A$; al morfismo representado por $(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A)$ se le llama **morfismo codiagonal**, y lo denotaremos por $\nabla : A \oplus A \to A$. Dados dos morfismos $\alpha : A \to A'$ y $\beta : B \to B'$, al morfismo representado por la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

lo denotaremos por $\alpha \oplus \beta : A \oplus B \to A' \oplus B'$.

$\boxed{B}$ Algunos resultados importantes

En esta sección, presentaremos algunos lemas y proposiciones que utilizaremos en todo este trabajo. Todos los objetos y morfismos en esta sección estarán dados en una categoría abeliana $\mathscr{A}$.

Un objeto P en una categoría $\mathscr{A}$ se llama **proyectivo** si para cada epimorfismo $g : A \twoheadrightarrow B$ y cada morfismo $f : P \to B$ existe un morfismo $\gamma : P \to A$ tal que $g\gamma = f$. Decimos que una categoría $\mathscr{A}$ **tiene suficientes proyectivos** si para cada objeto A existe un objeto proyectivo P_A y un epimorfismo $\eta : P_A \to A$.

El concépto dual de un objeto proyectivo es el siguiente: decimos que un objeto I es **inyectivo** si para cada monomorfismo $f : A \hookrightarrow B$ y cada morfismo $g : A \to I$ existe un morfismo $h : B \to I$ tal que $hf = g$. Una categoría $\mathscr{A}$ se dice que **tiene suficientes inyectivos** si para cada objeto A existe un monomorfismo $\sigma_A : A \hookrightarrow I_A$ con I_A un objeto injectivo.

Las categorías abelianas que consideraremos en lo que resta de este trabajo serán categorías con suficientes proyectivos.

Lema B.1 (Lema del cinco)**.** *Consideremos un diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$ con renglones exactos*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"'] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"'] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"'] & A_5 \arrow[d, "h_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"'] & B_2 \arrow[r, "g_2"'] & B_3 \arrow[r, "g_3"'] & B_4 \arrow[r, "g_4"'] & B_5.
\end{tikzcd}$$

(a) *Si h_1 es un epimorfismo, h_2 y h_4 son dos monomorfismos, entonces h_3 es un monomorfismo.*

(b) *Si h_5 es un monomorfismo, h_2 y h_4 son dos epimorfismos, entonces h_3 es un epimorfismo.*

(c) *Si h_1 es un epimorfismo, h_5 es un monomorfismo, h_2 y h_4 son dos isomorfismos, entonces h_3 es un isomorfismo.*

La parte que ocuparemos más de este resultado es el inciso (c). Ahora, presentaremos una caracterización de los productos fibrados en término de sucesiones exactas.

Proposición B.2. *Sea* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta en* $\mathscr{A}$*. Entonces el siguiente diagrama en* $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f'"] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\gamma'"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo con renglones exactos si y sólo si B' *es el producto fibrado de* g *y* γ.

Recordemos que una **extensión de un objeto** A **por un objeto** B en $\mathscr{A}$ es una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

Definición B.1. Un **morfismo** de una sucesión exacta $\mathcal{E} : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ a una sucesión exacta $\mathcal{E}' : 0 \longrightarrow A' \longrightarrow B' \longrightarrow C' \longrightarrow 0$ es una terna de morfismos $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ en $\mathscr{A}$, donde $\alpha : A \to A'$, $\beta : B \to B'$ y $\gamma : C \to C'$, que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha"'] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Diremos que dos extensiones en $\mathscr{A}$

$$\mathcal{E} : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{E}' : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} B \longrightarrow 0$$

son **equivalentes** si existe un morfismo $h : E \to E'$ en $\mathscr{A}$ tal que $\langle \mathrm{id}_A, h, \mathrm{id}_B \rangle : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ es un morfismo de sucesiones exactas. Por el lema del cinco, en caso de existir un morfismo de sucesiones exactas cortas $\langle \mathrm{id}, h, \mathrm{id} \rangle$, el morfismo h es un isomorfismo; por lo que la relación de ser sucesiones equivalentes es una relación de equivalencia.

Cuando dos extensiones de A en B, digamos $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$, sean equivalentes, escribiremos $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$.

Observación: Consideremos un diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & & & & B' \arrow[d, "\gamma"] & \\
\mathcal{E} : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & E \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde $\mathcal{E}$ es una sucesión exacta. Para obtener una sucesión exacta $\overline{\mathcal{E}}$: $0 \longrightarrow A \longrightarrow \overline{E} \longrightarrow B' \longrightarrow 0$ tal que

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{E}}: & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & \overline{E} \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
\mathcal{E}: & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & E \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

sea conmutativo, basta con tomar a $\overline{E}$ como el producto fibrado de g y γ. Además, por la Proposición B.2 sabemos que la sucesión $\overline{\mathcal{E}}$ es única. Así, a la sucesión $\overline{E}$ la denotaremos por $\gamma\mathcal{E}$.

Ahora, de manera dual, dado un diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}: & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & E \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \\
 & & A' & & &
\end{tikzcd}$$

podemos encontrar una sucesión exacta $\underline{\mathcal{E}} : 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f'} \underline{E} \xrightarrow{g'} B \longrightarrow 0$ y un morfismo de sucesiones exactas $\left\langle \alpha, \underline{\beta}, \mathrm{id}_B \right\rangle : \mathcal{E} \to \underline{\mathcal{E}}$ tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ sea conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\underline{\beta}"] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & \underline{E} \arrow[r, "g'"'] & B \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Para ello, basta tomar $\underline{E}$ como la suma fibrada de α y f. Además, por la Proposición B.2*, sabemos que la sucesión $\underline{\mathcal{E}}$ es única; a tal sucesión la denotaremos por $\mathcal{E}\alpha$.

Como una consecuencia de la observación anterior, tenemos el siguiente resultado.

Lema B.3. *Dado un morfismo de sucesiones exactas $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ podemos formar un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}': & 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha"'] & E' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta'"] & B' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\overline{\mathcal{E}}: & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, equal] & \overline{E} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\overline{\beta}"] & B' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
\mathcal{E}: & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"'] & E \arrow[r, "g"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $\overline{\mathcal{E}}$ es una sucesión exacta y $\overline{\beta}\beta' = \beta$.

Gracias a este resultado, en ocasiones no será necesario nombrar al morfismo de en medio de un morfismo de sucesiones. Algunas de las propiedades de las acciones de morfismos en sucesiones exactas que hemos visto, se enlistan en el siguiente resultado.

Lema B.4. *Sea* $\mathcal{E} : 0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta en una categoría abeliana* $\mathscr{A}$. *Entonces*

(a) $\mathrm{id}_B\, \mathcal{E} = \mathcal{E}$ *y* $\mathcal{E}\, \mathrm{id}_A = \mathcal{E}$.

(b) $(\gamma\gamma')\mathcal{E} = \gamma'(\gamma\mathcal{E})$ *para* $\gamma' : B'' \to B'$ *y* $\gamma : B' \to B$ *en* $\mathscr{A}$.

(c) $\mathcal{E}(\alpha'\alpha) = (\mathcal{E}\alpha)\alpha'$ *para* $\alpha' : A' \to A''$ *y* $\alpha : A \to A'$ *en* $\mathscr{A}$.

(d) $(\gamma\mathcal{E})\alpha = \gamma(\mathcal{E}\alpha)$ *para* $\alpha : A \to A'$ *y* $\gamma : B' \to B$ *en* $\mathscr{A}$.

Dados dos objetos A y B en una categoría abeliana $\mathscr{A}$, denotaremos por $\mathrm{Ext}\,(B, A)$ al conjunto de clases de equivalencia de extensiones de A por B. Definimos una operación binaria $+$ en $\mathrm{Ext}\,(B, A)$ como sigue:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}' \overset{\mathrm{def}}{=} \Delta_B(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}')\nabla_A, \tag{1.2}$$

donde $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$ es la suma directa de sucesiones exactas. Observe que $+$ es una operación bien definida.

Lema B.5. $\Big(\mathrm{Ext}(B, A), +\Big)$ *es un grupo abeliano.*

$\boxed{C}$ El funtor Ext

En esta sección, presentaremos algunas de las propiedades básicas del funtor Ext. Sea $\mathscr{S}$ la categoría de conjuntos y $\mathscr{A}$ una categoría abeliana.

Definición C.1. Definimos la correspondencia $\mathrm{Ext} : \mathscr{A}^* \times \mathscr{A} \to \mathscr{S}$ en objetos por $(B, A) \mapsto \mathrm{Ext}\,(B, A)$, y en morfismos $(u, v) : (B, A) \to (B', A')$ como la función

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}\,(u, v) : \mathrm{Ext}\,(B, A) &\to \mathrm{Ext}\,(B', A') \\ \mathcal{E} &\mapsto u^*\mathcal{E}v. \end{aligned}$$

Lema C.1. Ext *es un funtor.*

Demostración. Por el Lema B.4 inciso (a), tenemos que

$$(\mathrm{id}_B)^*\mathcal{E}\, \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B\, \mathcal{E}\, \mathrm{id}_A = \mathcal{E}$$

para toda extensión $\mathcal{E}$ de A por B. Así, tenemos que $\mathrm{Ext}\,(\mathrm{id}_B, \mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathrm{Ext}(B,A)}$. Ahora, sean $(u, v) : (B, A) \to (B', A')$ y $(u', v') : (B', A') \to (B'', A'')$ dos morfismos en $\mathscr{C}^* \times \mathscr{C}$, entonces su composición es

$$(u'u, v'v) : (B, A) \to (B'', A'').$$

Aplicando el Lema B.4, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}\,(u'u, v'v)\,(\mathcal{E}) &= (u'u)^*\mathcal{E}(v'v) = (u^*[u']^*)\,(\mathcal{E}(v'v)) \\
&= (u^*[u']^*)\,([\mathcal{E}v]v') = ((u^*[u']^*)(\mathcal{E}v))\,v' \\
&= ([(u^*[u']^*\mathcal{E})v)\,v' = (([u']^*[u^*\mathcal{E}])v)\,v' \\
&= ([u']^*[u^*\mathcal{E}v])\,v' = [u']^*\mathrm{Ext}\,(u,v)\,(\mathcal{E})v' \\
&= \mathrm{Ext}\,(u',v')\,(\mathrm{Ext}\,(u,v)\,(\mathcal{E})) \\
&= (\mathrm{Ext}\,(u',v') \circ \mathrm{Ext}\,(u,v))\,(\mathcal{E}).
\end{aligned}$$

Ahora, es claro que Ext es un bifuntor. □

El concepto de objeto proyectivo se vincula de manera muy estrecha con los funtores Hom y Ext. A continuación, presentamos un resultado que nos indica más precisamente cuál es dicha relación.

Lema C.2. *Sea P un objeto en una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) *P es proyectivo en $\mathscr{A}$.*

(b) *El funtor* $\mathrm{Hom}\,(P,\cdot)$ *es exacto.*

(c) *Para cualquier objeto A en $\mathscr{A}$ se tiene* $\mathrm{Ext}\,(P,A) = 0$.

Sean A y B dos objetos en una categoría abeliana con suficientes proyectivos. Luego, existe un proyectivo P_B y un epimorfismo $\eta : P_B \to B$; sea $\kappa : K \to P_B$ el núcleo de η, entonces tenemos la siguiente sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$\mathcal{C} : 0 \longrightarrow K \xrightarrow{\kappa} P_B \xrightarrow{\eta} B \longrightarrow 0.$$

En tal caso, usando que el funtor $\mathrm{Hom}(\cdot, A)$ es exacto izquierdo, tenemos que la sucesión de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(B,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(P_B,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(K,A)$$

es exacta. Ahora, para cada $v : K \to A$, podemos definir la sucesión exacta $\mathcal{C}v$ que es una extensión de A por B. Así, podemos definir una aplicación $\chi : \mathrm{Hom}\,(K,A) \to \mathrm{Ext}\,(B,A)$ mediante la asignación $\chi(v) = \mathcal{C}v$; la aplicación χ es un homomorfismo de grupos abelianos suprayectivo. Más aún, tenemos el siguiente resultado.

Proposición C.3. *Sean A y B dos objetos en una categoría abeliana $\mathscr{A}$ y supongamos que $\mathscr{A}$ tiene suficientes proyectivos. Consideremos una sucesión exacta en $\mathscr{A}$*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\kappa} P \xrightarrow{\eta} B \longrightarrow 0$$

con P proyectivo. Entonces, la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(B,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(P_B,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(K,A) \xrightarrow{\chi} \mathrm{Ext}\,(B,A) \longrightarrow 0$$

es exacta en la categoría de grupos abelianos.

Ahora, sean C un objeto y $\mathcal{E} : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Definimos la aplicación $\delta : \operatorname{Hom}(C, B) \to \operatorname{Ext}(C, A)$ mediante la asignación $u \mapsto u\mathcal{E}$; así, δ es un homomorfismo de grupos abelianos. También, se tiene el siguiente resultado.

Proposición C.4. *Sean C un objeto y $\mathcal{E} : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$ una sucesión exacta, ambos en una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Entonces, la sucesión de grupos abelianos*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(C, A) \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}(C, E) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}(C, B) \tag{1.3}$$

$$\xrightarrow{\delta} \operatorname{Ext}(C, A) \xrightarrow{\operatorname{Ext}(\operatorname{id}_C, f)} \operatorname{Ext}(C, E) \xrightarrow{\operatorname{Ext}(\operatorname{id}_C, g)} \operatorname{Ext}(C, B)$$

es exacta.

CAPÍTULO 2

Complejos

En este capítulo, presentaremos los complejos sobre una categoría abeliana y nos ocuparemos de estudiar la categoría de complejos sobre la categoría Λ-mod de módulos finitamente generados sobre una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita Λ.

$\boxed{A}$ La categoría de complejos

Un **complejo** $A^\bullet$ en una categoría abeliana $\mathscr{A}$ es una sucesión de morfismos en $\mathscr{A}$

$$A^\bullet : \cdots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d_A^{n-1}} A^n \xrightarrow{d_A^n} A^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

tales que $d_A^{n+1} d_A^n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esta condición es claramente equivalente a la condición $\operatorname{Im} d_A^n \subseteq \operatorname{Ker} d_{n+1}$; el símbolo $\subseteq$ significa que existe un monomorfismo $\iota : \operatorname{Im} d_A^n \hookrightarrow \operatorname{Ker} d_A^{n+1}$ tal que si

$$A_n \xrightarrow{\eta} \operatorname{Im} d_A^n \xrightarrow{\sigma} A_{n+1}$$

es la factorización de d_A^n a través de su imagen y $\kappa : \operatorname{Ker} d_A^{n+1} \hookrightarrow A_{n+1}$ es la inclusión, entonces $\sigma = \kappa\iota$. Un complejo $A^\bullet$ se denota por $A^\bullet = (A^n, d_A^n)$ y a los morfismos d_A^n se les llama **diferenciales**.

Un **morfismo entre complejos** $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ es una familia $\{f^n : A^n \to B^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ de morfismos en $\mathscr{A}$ tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "d_A^n"] \arrow[d, "f^n"'] & A^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"] \\ B^n \arrow[r, "d_B^n"'] & B^{n+1}. \end{tikzcd}$$

La composición de morfismos de complejos se define como la sucesión cuya n-esima coordenada es $(g^\bullet f^\bullet)^n = g^n f^n$. Así, tomando a los complejos como la clase de objetos y a los morfismos de complejos, podemos formar una nueva categoría $\mathbf{C}(\mathscr{A})$, donde $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana, y la llamaremos **la categoría de complejos sobre** $\mathscr{A}$.

Si $A^\bullet = (A^n, d_A^n)$ y $B^\bullet = (B^n, d_B^n)$ son dos complejos en $\mathscr{A}$, definimos la **suma directa de** $A^\bullet$ **y** $B^\bullet$ como

$$A^\bullet \oplus B^\bullet : \cdots \longrightarrow A^{n-1} \oplus B^{n-1} \overset{d_A^{n-1} \oplus d_B^{n-1}}{\longrightarrow} A^n \oplus B^n \overset{d_A^n \oplus d_B^n}{\longrightarrow} A^{n+1} \oplus B^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

la cual es también un complejo en $\mathscr{A}$. Consideremos las inclusiones canónicas $\sigma^n : A^n \to A^n \oplus B^n$ y $\kappa^n : B^n \to A^n \oplus B^n$ representadas por

$$\sigma^n = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{A^n} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \kappa^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{B^n} \end{pmatrix}.$$

Entonces $\sigma^\bullet = \langle \sigma^n \rangle$ y $\kappa^\bullet = \langle \kappa^n \rangle$ son morfismos de complejos y $A^\bullet \oplus B^\bullet$ es un coproducto (suma) de $A^\bullet$ y $B^\bullet$ en $\mathbf{C}(\mathscr{A})$.

Ahora, supongamos que $f^\bullet = \langle f^n \rangle : A^\bullet \to B^\bullet$ es un morfismo de complejos. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, consideremos $\kappa^n : \operatorname{Ker} f^n \to A^n$ el núcleo de f^n. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f^n \arrow[r, "\kappa^n"] & A^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "d_A^n"'] & B^n \arrow[d, "d_B^n"] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f^{n+1} \arrow[r, "\kappa^{n+1}"] & A^{n+1} \arrow[r, "f^{n+1}"] & B^{n+1}.
\end{tikzcd}$$

Sabemos que existe un único morfismo $d_{\operatorname{Ker} f}^n : \operatorname{Ker} f^n \to \operatorname{Ker} f^{n+1}$ que mantiene conmutativo el diagrama anterior para cada $n \in \mathbb{Z}$; así, hemos construido una sucesión de morfismos en $\mathscr{A}$

$$\operatorname{Ker} f^\bullet : \cdots \longrightarrow \operatorname{Ker} f^{n-1} \overset{d_{\operatorname{Ker} f}^{n-1}}{\longrightarrow} \operatorname{Ker} f^n \overset{d_{\operatorname{Ker} f}^n}{\longrightarrow} \operatorname{Ker} f^{n+1} \longrightarrow \cdots .$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ podemos ver que

$$\kappa^{n+2} d_{\operatorname{Ker} f}^{n+1} d_{\operatorname{Ker} f}^n = d_A^{n+1} d_A^n \kappa^n = 0;$$

y como κ^{n+2} es un monomorfismo, concluimos que $d_{\operatorname{Ker} f}^{n+1} d_{\operatorname{Ker} f}^n = 0$. Por lo tanto, $\operatorname{Ker} f^\bullet$ es un complejo y $\kappa^\bullet = \langle \kappa^n \rangle : \operatorname{Ker} f^\bullet \to A^\bullet$ es un morfismo en la categoría $\mathbf{C}(\mathscr{A})$. Observe que el morfismo $\kappa^\bullet$ es el núcleo de $f^\bullet$ en $\mathbf{C}(\mathscr{A})$.

De manera dual, si consideramos el morfismo de complejos $f^\bullet = \langle f^n \rangle : A^\bullet \to B^\bullet$, y para cada $n \in \mathbb{Z}$ tomamos $\eta^n : B^n \to \operatorname{Coker} f^n$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "d_A^n"'] & B^n \arrow[r, "\eta^n"] \arrow[d, "d_B^n"] & \operatorname{Coker} f^n \arrow[r] & 0 \\
A^{n+1} \arrow[r, "f^{n+1}"'] & B^{n+1} \arrow[r, "\eta^{n+1}"'] & \operatorname{Coker} f^{n+1} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

De aquí obtenemos la siguiente relación

$$\eta^{n+1} d_B^n f^n = \eta^{n+1} f^{n+1} d_A^n = 0;$$

al ser η^n el conúcleo de f^n, sabemos que existe un único morfismo $d^n_{\mathrm{Coker}\, f}$ que mantiene conmutativo el diagrama anterior. Además, podemos ver que para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$d^{n+1}_{\mathrm{Coker}\, f} d^n_{\mathrm{Coker}\, f} \eta^n = \eta^{n+2} d_B^{n+1} d_B^n = 0.$$

Dado que η_n es un epimorfismo, se concluye que $d^{n+1}_{\mathrm{Coker}\, f} d^n_{\mathrm{Coker}\, f} = 0$. Por tanto, la sucesión de morfismos en $\mathscr{A}$

$$\mathrm{Coker}\, f^\bullet : \cdots \longrightarrow \mathrm{Coker}\, f^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}_{\mathrm{Coker}\, f}} \mathrm{Coker}\, f^n \xrightarrow{d^n_{\mathrm{Coker}\, f}} \mathrm{Coker}\, f^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

es un complejo y $\eta^\bullet = \langle \eta^n \rangle : B^\bullet \to \mathrm{Coker}\, f^\bullet$ es un morfismo de complejos. El morfismo $\eta^\bullet$ es el conúcleo de $f^\bullet$.

Decimos que un morfismo de complejos $f^\bullet = \langle f^n \rangle : A^\bullet \to B^\bullet$ es **localmente un monomorfismo** (resp., **epimorfismo**) si para cada $n \in \mathbb{Z}$ tenemos que f^n es un monomorfismo (resp., epimorfismo). Un morfismo de complejos $f^\bullet$ es localmente un monomorfismo (resp., epimorfismo) si y sólo si $f^\bullet$ es un monomorfismo (resp., epimorfismo) en $\mathbf{C}(\mathscr{A})$. Con estas construcciones, tenemos el siguiente resultado.

Lema A.1. *Si $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana, entonces la categoría $\mathbf{C}(\mathscr{A})$ es abeliana.*

$\boxed{B}$ El funtor J y el funtor de translación

En esta sección, presentaremos dos funtores que serán muy importantes en este trabajo para construir sucesiones de complejos con propiedades interesantes.

Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Consideremos la clase de todas las sucesiones de objetos en $\mathscr{A}$ de la forma $\langle A^n \rangle_{n\in\mathbb{Z}}$; un morfismo de una sucesión $\langle A^n \rangle_{n\in\mathbb{Z}}$ en una sucesión $\langle B^n \rangle_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de morfismos $\langle f^n \rangle_{n\in\mathbb{Z}}$, donde $f^n \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A^n, B^n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Definimos la composición $\langle g^n \rangle_{n\in\mathbb{Z}} \langle f^n \rangle_{n\in\mathbb{Z}}$ como el morfismo $\langle g^n f^n \rangle_{n\in\mathbb{Z}}$. A esta categoría se le llama la **categoría graduada de** $\mathscr{A}$ y la denotaremos por $\mathbf{gr}(\mathscr{A})$. Si $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana, entonces $\mathbf{gr}(\mathscr{A})$ también es una categoría abeliana.

Consideremos un objeto $\langle A^n \rangle_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\mathbf{gr}(\mathscr{A})$, y formemos la siguiente sucesión de morfismos en $\mathscr{A}$

$$J(\langle A^n \rangle) : \cdots \longrightarrow A^{n-1} \oplus A^n \longrightarrow A^n \oplus A^{n+1} \longrightarrow A^{n+1} \oplus A^{n+2} \longrightarrow \cdots,$$

donde el morfismo $A^n \oplus A^{n+1} \to A^{n+1} \oplus A^{n+2}$ está representado por la matríz

$$d^n_{J(A)} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{A^{n+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La sucesión $J(\langle A^n \rangle)$ es un complejo en $\mathscr{A}$. Ahora, si $f = \langle f^n \rangle : \langle A^n \rangle \to \langle B^n \rangle$ es un morfismo en $\mathbf{gr}(\mathscr{A})$, definimos

$$J(f)^n = f^n \oplus f^{n+1}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$; así, tenemos un funtor $J : \mathbf{gr}(\mathscr{A}) \to \mathbf{C}(\mathscr{A})$. El funtor J también será considerado como un endofuntor $J : \mathbf{C}(\mathscr{A}) \to \mathbf{C}(\mathscr{A})$. Para definir J en $\mathbf{C}(\mathscr{A})$ podemos aplicar el funtor $\mathbf{C}(\mathscr{A}) \to \mathbf{gr}(\mathscr{A})$ que olvida las diferenciales y se queda con la sucesión de objetos y despues aplicar J.

Ahora, sean $A^\bullet$ un complejo en $\mathscr{A}$ y s un número entero. Consideremos a la sucesión de objetos $\langle A^\bullet[s]^n \rangle_{n \in \mathbb{Z}}$, donde $A^\bullet[s]^n = A^{n+s}$. Si $f^\bullet = \langle f^n \rangle : A^\bullet \to B^\bullet$ es un morfismo de complejos, definimos $f^\bullet[s]^n = f^{n+s}$. Así, tenemos que $[s] : \mathbf{C}(\mathscr{A}) \to \mathbf{gr}(\mathscr{A})$ es un funtor covariante llamado el **s-corrimiento** o la **s-translación**. Para ver a $[s]$ como un endofuntor, podemos definir $d^n_{A[s]} = (-1)^s d^{n+s}_A$ para obtener el complejo $A[s]^\bullet = (A^\bullet[s]^n, d^n_{A[s]})$.

A continuación, presentamos las relaciones que existen entre estos dos funtores.

Proposición B.1. *Sean $\langle A^n \rangle$ un objeto en $\mathbf{gr}(\mathscr{A})$ y $B^\bullet$ un complejo en $\mathscr{A}$. Entonces, existen isomorfismos naturales*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}\left(J(\langle A^n \rangle), B^\bullet\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{gr}(\mathscr{A})}\left(\langle A^n \rangle, B^\bullet[-1]\right)$$

y

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}\left(B^\bullet, J(\langle A^n \rangle)\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{gr}(\mathscr{A})}\left(B^\bullet[0], \langle A^n \rangle\right).$$

Como una consecuencia directa del resultado anterior, tenemos que la categoría $\mathbf{C}(\mathscr{A})$ tiene suficientes proyectivos si $\mathscr{A}$ tiene suficientes proyectivos.

Corolario B.2. *Si $\langle P^n \rangle$ es un objeto de $\mathbf{gr}(\mathscr{A})$ tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$ el objeto P^n es proyectivo en $\mathscr{A}$, entonces $J(\langle P^n \rangle)$ es proyectivo en $\mathbf{C}(\mathscr{A})$. Si $\mathscr{A}$ tiene suficientes proyectivos, entonces $\mathbf{C}(\mathscr{A})$ también tiene suficientes proyectivos.*

$\boxed{C}$ Estructura exacta

En esta sección, presentaremos una estructura exacta sobre la categoría $\mathbf{C}(\mathscr{A})$, la cual resultará ser una categoría de Frobenius al ser acompañada de dicha estructura exacta.

Sea $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor. Un **subfuntor de** F es un funtor $G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ tal que existe un monomorfismo $\sigma_{G(A)} : G(A) \hookrightarrow F(A)$ para cada objeto A en $\mathscr{A}$ y para cualquier morfismo $f : A \to A'$ en $\mathscr{A}$, el siguiente diagrama en $\mathscr{B}$ es conmutativo

$$\begin{tikzcd} G(A) \arrow[r, hook, "\sigma_{G(A)}"] \arrow[d, "G(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ G(A') \arrow[r, hook, "\sigma_{G(A')}"'] & F(A'). \end{tikzcd}$$

Definición C.1. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y G un subfuntor de $\operatorname{Ext}(\cdot,\cdot)$ tal que la clase $\{F(A^\bullet, B^\bullet) : A^\bullet, B^\bullet \in \mathbf{C}(\mathscr{A})\}$ es cerrada bajo productos fibrados y sumas fibradas. En tal caso, se dice que G es una **estructura exacta** en $\mathbf{C}(\mathscr{A})$.

Ahora, consideremos el subconjunto $\mathcal{E}xt_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}(B^\bullet, A^\bullet)$ de $\operatorname{Ext}_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}(B^\bullet, A^\bullet)$ que consiste de todas las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow A^\bullet \longrightarrow E^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow 0$$

que son **localmente triviales**, es decir, para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que la sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$0 \longrightarrow A^n \longrightarrow E^n \longrightarrow B^n \longrightarrow 0$$

se divide. La asignación $(B^\bullet, A^\bullet) \mapsto \mathcal{E}xt(B^\bullet, A^\bullet)$ es una estructura exacta para $\mathbf{C}(\mathscr{A})$. En adelante, consideraremos a la categoría $\mathbf{C}(\mathscr{A})$ con la estructura exacta $\mathcal{E}xt$ y la denotaremos por $\mathcal{E}$.

Decimos que $P^\bullet$ es $\mathcal{E}$-proyectivo si $\mathcal{E}xt_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}(P^\bullet, A^\bullet) = 0$ para todo complejo $A^\bullet$ en $\mathscr{A}$. Otra manera equivalente de decir que un complejo es $\mathcal{E}$-proyectivo es exigir que el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(P^\bullet, \cdot)$ sea exacto en $\mathcal{E}$. Es decir, para cada sucesión exacta de complejos localmente trivial

$$0 \longrightarrow A^\bullet \longrightarrow E^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow 0$$

se tiene que la sucesión de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}(P^\bullet, A^\bullet) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}(P^\bullet, E^\bullet) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}(P^\bullet, P^\bullet) \longrightarrow 0$$

es exacta. El funtor J nos provee de una maquinaria para producir complejos $\mathcal{E}$-proyectivos y complejos $\mathcal{E}$-inyectivos.

Lema C.1. *Si $A^\bullet$ es un complejo en $\mathscr{A}$, entonces $J(A^\bullet)$ es un complejo $\mathcal{E}$-proyectivo y $\mathcal{E}$-inyectivo.*

Demostración. Es inmediato de la Proposición B.1. $\square$

Para cada complejo $A^\bullet$ la sucesión

$$0 \longrightarrow A^\bullet[-1] \xrightarrow{\kappa^\bullet} J(A^\bullet[-1]) \xrightarrow{\eta^\bullet} A^\bullet \longrightarrow 0$$

es $\mathcal{E}$-exacta, donde $\kappa^\bullet = \langle \kappa^n \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{A^{n-1}} \\ -d_A^{n-1} \end{pmatrix} \right\rangle$ y $\eta^\bullet = \langle \eta^n \rangle = \left\langle (d_A^{n-1}, \mathrm{id}_{A^n}) \right\rangle$. En consecuencia, la categoría $\mathbf{C}(\mathscr{A})$ con la estructura exacta $\mathcal{E}$ es una categoría con suficientes proyectivos e inyectivos; más aún, es una **categoría de Frobenuis**, es decir, la familia de objetos proyectivos coincide con la familia de objetos inyectivos.

Ahora, sean $A^\bullet$ y $B^\bullet$ dos complejos en $\mathscr{A}$; ya sabemos que existe una $\mathcal{E}$-sucesión exacta de la forma

$$\mathcal{E} : 0 \longrightarrow A^\bullet[-1] \longrightarrow J(A^\bullet[-1]) \longrightarrow A^\bullet \longrightarrow 0.$$

Estableceremos la siguiente sucesión exacta de grupos abelianos:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}(A^\bullet, B^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}(J(A^\bullet[-1]), B^\bullet)$$

$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}(A^\bullet[-1], B^\bullet) \xrightarrow{\chi_{B^\bullet}} \mathcal{E}xt_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}(A^\bullet, B^\bullet) \longrightarrow 0,$$

donde la aplicación

$$\chi_{B^\bullet} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}(A^\bullet[-1], B^\bullet) \longrightarrow \mathcal{E}xt_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}(A^\bullet, B^\bullet)$$

se define como $\chi_{B^\bullet}(f^\bullet) = \mathcal{E}f^\bullet$ mediante el siguiente diagrama conmutativo con renglones $\mathcal{E}$-exactos en $\mathbf{C}(\mathscr{A})$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}: & 0 \arrow[r] & A^\bullet[-1] \arrow[r] \arrow[d, "f^\bullet"'] & J(A^\bullet[-1]) \arrow[r] \arrow[d] & A^\bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathcal{E}f^\bullet: & 0 \arrow[r] & B^\bullet \arrow[r] & E^\bullet \arrow[r] & A^\bullet \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Sabemos que $\chi_{B^\bullet} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}(A^\bullet[-1], B^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Ext}(A^\bullet, B^\bullet)$ es un homomorfismo de grupos abelianos. Como $\mathcal{E}$ es una $\mathcal{E}$-sucesión exacta y $\mathcal{E}$ es una estructura exacta para $\mathbf{C}(\mathscr{A})$, concluimos que $\mathcal{E}f^\bullet$ también es una $\mathcal{E}$-sucesión exacta, por lo que $\mathcal{E}f^\bullet \in \mathcal{E}xt_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}(A^\bullet, B^\bullet)$. Ahora, consideremos una $\mathcal{E}$-extensión de $B^\bullet$ por $A^\bullet$, digamos

$$\mathcal{F} : 0 \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow E^\bullet \longrightarrow A^\bullet \longrightarrow 0.$$

Luego, tenemos el siguiente diagrama con renglones $\mathcal{E}$-exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^\bullet[-1] \arrow[r] & J(A^\bullet[-1]) \arrow[r] & A^\bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B^\bullet \arrow[r] & E^\bullet \arrow[r] & A^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dado que $J(A^\bullet[-1])$ es $\mathcal{E}$-proyectivo y $E^\bullet \to A^\bullet$ es un epimorfismo localmente trivial, existe un morfismo $J(A^\bullet[-1]) \to E^\bullet$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^\bullet[-1] \arrow[r] & J(A^\bullet[-1]) \arrow[r] \arrow[d] & A^\bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B^\bullet \arrow[r] & E^\bullet \arrow[r] & A^\bullet \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, como $B^\bullet \to E^\bullet$ es el núcleo de $E^\bullet \to A^\bullet$, existe un único morfismo $h^\bullet : A^\bullet[-1] \to B^\bullet$ tal que

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^\bullet[-1] \arrow[r] \arrow[d, "h^\bullet"'] & J(A^\bullet[-1]) \arrow[r] \arrow[d] & A^\bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B^\bullet \arrow[r] & E^\bullet \arrow[r] & A^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo. De donde concluimos que $\mathcal{F} = \chi_{B^\bullet}(h^\bullet)$. De este modo, hemos llegado al siguiente resultado.

Teorema C.2. *Sean $A^\bullet$ y $B^\bullet$ dos complejos en $\mathscr{A}$. Entonces, existe un isomorfismo natural*

$$\mathcal{E}xt_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}(A^\bullet, B^\bullet) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_K(A^\bullet[-1], B^\bullet),$$

donde $\underline{\mathrm{Hom}}_K(A^\bullet[-1], B^\bullet)$ son los morfismos $A^\bullet[-1] \to B^\bullet$ módulo los morfismos que se factorizan a través de un complejo $\mathcal{E}$-proyectivo.

Decimos que un morfismo de complejos $f^\bullet = \langle f^n \rangle : A^\bullet \to B^\bullet$ es **nulhomotópico** si existe un morfismo $\langle h^{n-1} \rangle : \langle A^n \rangle \to B^\bullet[-1]$ en $\mathbf{gr}(\mathscr{A})$ tal que

$$f^n = d_B^{n-1} h^{n-1} + h^n d_A^n.$$

Dos morfismos $f^\bullet = \langle f^n \rangle : A^\bullet \to B^\bullet$ y $g^\bullet = \langle g^n \rangle : A^\bullet \to B^\bullet$ son **homotópicos** si $f^\bullet - g^\bullet$ es nulhomotópico.

Definición C.2. Consideremos la familia de objetos $\mathrm{Ob}\,\mathbf{C}(\mathscr{A})$ y para dos objetos $A^\bullet$ y $B^\bullet$ en $\mathbf{C}(\mathscr{A})$ definimos $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}(A^\bullet, B^\bullet)$ como el grupo abeliano cociente de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}(A^\bullet, B^\bullet)$ y el subgrupo abeliano generado por los morfismos que se factorizan a través de un complejo $\mathcal{E}$-proyectivo. A la categoría que resulta de esto se le llama la **categoría estable** de complejos en $\mathscr{A}$ y la denotamos por $\underline{\mathbf{C}}(\mathscr{A})$.

Sean $A^\bullet$ y $B^\bullet$ en $\mathbf{C}(\mathscr{A})$. Definimos $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(\mathscr{A})}(A^\bullet, B^\bullet)$ como el cociente de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}(A^\bullet, B^\bullet)$ entre el subgrupo abeliano generado por los morfismos nulhomotópicos. A esta categoría se le llama la **categoría homotópica** en $\mathscr{A}$ y la denotamos por $\mathbf{K}(\mathscr{A})$.

Cuando el contexto no se preste a confusión, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(\mathscr{A})}(A^\bullet, B^\bullet)$ lo denotaremos por $\mathrm{Hom}_K(A^\bullet, B^\bullet)$.

El que un morfismo $f^\bullet$ sea nulhomotópico es equivalente a que $f^\bullet$ se factorize a través de un complejo $\mathcal{E}$-proyectivo; por lo que tenemos el siguiente resultado.

Lema C.3. $\underline{\mathbf{C}}(\mathscr{A}) = \mathbf{K}(\mathscr{A})$.

$\boxed{D}$ Cohomología

En esta sección presentaremos lo que es la cohomología de un complejo y estudiaremos la categoría de complejos de una categoría abeliana $\mathscr{A}$, usando los funtores de cohomología.

Definición D.1. Consideremos un complejo $X^\bullet = (X^n, d_X^n)$ de objetos en una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Definimos la **n-esima cohomología del complejo $X^\bullet$** como el cociente

$$H^n(X^\bullet) \stackrel{\mathrm{def}}{=} {}^{\mathrm{Ker}\, d_X^n}\!/_{\mathrm{Im}\, d_X^{n-1}}.$$

Podemos definir H^n en morfismos $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ como sigue: sea $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ un morfismo de complejos, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_A^n \arrow[r, "\kappa_A^n"] & A^n \arrow[r, "d_A^n"] \arrow[d, "f^n"'] & A^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_B^n \arrow[r, "\kappa_B^n"'] & B^n \arrow[r, "d_B^n"'] & B^{n+1}.
\end{tikzcd}$$

Sabemos que existe un único morfismo $h^n(f) : \operatorname{Ker} d_A^n \to \operatorname{Ker} d_B^n$ que mantiene conmutativo el diagrama anterior; ahora, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Im} d_A^{n-1} \arrow[d, "s_A^{n-1}"'] & \operatorname{Im} d_B^{n-1} \arrow[d, "s_B^{n-1}"] \\
\operatorname{Ker} d_A^n \arrow[r, "h^n(f)"'] & \operatorname{Ker} d_B^n.
\end{tikzcd}$$

Veamos que existe un único morfismo $\operatorname{Im} d_A^{n-1} \to \operatorname{Im} d_B^{n-1}$ que hace conmutar el diagrama anterior: como $\operatorname{Im} d_A^{n-1} \cong {A^{n-1}}/{\operatorname{Ker} d_A^{n-1}}$ y también $\operatorname{Im} d_B^{n-1} \cong {B^{n-1}}/{\operatorname{Ker} d_B^{n-1}}$, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_A^{n-1} \arrow[r, "\kappa_A^{n-1}"] \arrow[d, "h^{n-1}(f)"'] & A^{n-1} \arrow[r, "\eta_A^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"] & \operatorname{Im} d_A^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\gamma^{n-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_B^{n-1} \arrow[r, "\kappa_B^{n-1}"'] & B^{n-1} \arrow[r, "\eta_B^{n-1}"'] & \operatorname{Im} d_B^{n-1} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde $\gamma^{n-1} : \operatorname{Im} d_A^{n-1} \to \operatorname{Im} d_B^{n-1}$ es el único morfismo que mantiene conmutativo el diagrama obtenido por la propiedad universal del conúcleo. Ahora, vemos que

$$\begin{tikzcd}
A^{n-1} \arrow[rrr, "d_A^{n-1}"] \arrow[dr, "\eta_A^{n-1}"'] \arrow[ddd, "f^{n-1}"'] & & & A^n \arrow[ddd, "f^n"] \\
& \operatorname{Im} d_A^{n-1} \arrow[r, "s_A^{n-1}"'] \arrow[d, "\gamma^{n-1}"'] \arrow[urr, "\sigma_A^{n-1}"] & \operatorname{Ker} d_A^n \arrow[ur, "\kappa_A^{n-1}"'] \arrow[d, "h^n(f)"] & \\
& \operatorname{Im} d_B^{n-1} \arrow[r, "s_B^{n-1}"] \arrow[drr, "\sigma_B^{n-1}"'] & \operatorname{Ker} d_B^n \arrow[dr, "\kappa_B^n"] & \\
B^{n-1} \arrow[ur, "\eta_B^{n-1}"] \arrow[rrr, "d_B^{n-1}"'] & & & B^n
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo, donde $\sigma_A^{n-1} = \kappa_A^{n-1} s_A^{n-1}$ es la imagen de d_A^{n-1} al igual que $\sigma_B^{n-1} = \kappa_B^{n-1} s_B^{n-1}$, ya que

$$\begin{aligned}
\kappa_B^n (h^n(f) s_A^{n-1}) \eta_A^{n-1} &= (f^n \kappa_A^n)(s_A^{n-1} \eta_A^{n-1}) = f^n (\kappa_A^n s_A^{n-1}) \eta_A^{n-1} \\
&= f^n \sigma_A^{n-1} \eta_A^{n-1} = f^n d_A^{n-1} = d_B^{n-1} f^{n-1} \\
&= (\sigma_B^{n-1} \eta_B^{n-1}) f^{n-1} = (\kappa_B^n s_B^{n-1})(\eta_B^{n-1} f^{n-1}) \\
&= (\kappa_B^n s_B^{n-1})(\gamma^{n-1} \eta_A^{n-1}) = \kappa_B^n (s_B^{n-1} \gamma^{n-1}) \eta_A^{n-1};
\end{aligned}$$

como κ_B^n es un monomorfismo y η_A^{n-1} es un epimorfismo, entonces

$$h^n(f) s_A^{n-1} = s_B^{n-1} \gamma^{n-1}.$$

Así, hemos mostrado que $h^n(f)|_{\operatorname{Im} d_A^{n-1}} = \gamma^{n-1}$ por lo que $\operatorname{Im} d_A^{n-1}$ es llevado a $\operatorname{Im} d_B^{n-1}$ bajo el morfismo $h^n(f)$. Definimos ahora

$$H^n(f) : H^i(A^\bullet) \to H^i(B^\bullet)$$

mediante el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Im} d_A^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} d_A^n \arrow[r] \arrow[d] & H^n(A^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "H^n(f)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Im} d_B^{n-1} \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_B^n \arrow[r] & H^n(B^\bullet) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, la asignación $H^n : \mathbf{C}(\mathscr{A}) \to \mathscr{A}$, definida anteriormente , es un funtor covariante.

En adelante, presentaremos algunas relaciones importantes entre los morfismo en la categoría homotópica, los funtores de cohomología H^n y las extensiones de complejos localmente triviales.

Definición D.2. Decimos que un complejo $A^\bullet$ es **acotado superiormente** si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $A^{n+i} = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. De manera análoga, decimos que $A^\bullet$ es **acotado inferiormente** si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $A^{n-i} = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Decimos que $A^\bullet$ es **acotado** si es acotado superior e inferiormente.

Una de las relaciones más importantes de este capítulo es la siguiente.

Teorema D.1. *Sean $A^\bullet$ y $B^\bullet$ dos complejos en una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Entonces, existe un isomorfismo natural*

$$\mathcal{E}xt_{\mathbf{C}(\mathscr{A})}(B^\bullet, A^\bullet) \simeq \operatorname{Hom}_K(B^\bullet, A^\bullet[1]).$$

Demostración. Es inmediato del Teorema C.2 y el Lema C.3. □

Consideremos una $\mathcal{E}$-sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} E^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} B^\bullet \longrightarrow 0$$

y un complejo $C^\bullet$, entonces la sucesión de grupos abelianos

$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}_K(C^\bullet, A^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, E^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, B^\bullet) \xrightarrow{\bar{\delta}} \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, A^\bullet[1]) \\ \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, E^\bullet[1]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, B^\bullet[1])\end{gathered}$$

es exacta. Aplicamos este resultado a la $\mathcal{E}$-sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A^\bullet[-1] \longrightarrow E^\bullet[-1] \longrightarrow B^\bullet[-1] \longrightarrow 0$$

para obtener la sucesión exacta de grupos abelianos

$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}_K(C^\bullet, A^\bullet[-1]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, E^\bullet[-1]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, B^\bullet[-1]) \\ \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, A^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, E^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, B^\bullet) \xrightarrow{\bar{\delta}} \cdots\end{gathered}$$

mientras que considerando la $\mathcal{E}$-sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A^\bullet[1] \longrightarrow E^\bullet[1] \longrightarrow B^\bullet[1] \longrightarrow 0$$

obtenemos

$$\begin{gathered}\cdots \xrightarrow{\bar{\delta}} \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, A^\bullet[1]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, E^\bullet[1]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, B^\bullet[1]) \\ \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, A^\bullet[2]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, E^\bullet[2]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, B^\bullet[2]) \longrightarrow \cdots\end{gathered}$$

y siguiendo con este proceso, construimos una sucesión exacta larga

$$\begin{gathered}\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, A^\bullet[k]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, E^\bullet[k]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, B^\bullet[k]) \\ \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, A^\bullet[k+1]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(C^\bullet, E^\bullet[k+1]) \longrightarrow \cdots\end{gathered}$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{E}$ Cohomología en Λ-mod

En adelante, nos concentraremos en la categoría abeliana $\mathscr{A} = \Lambda$-mod de módulos finitamente generados sobre una $\Bbbk$-álgebra Λ de dimensión finita.

Consideremos el complejo

$$\underline{\Lambda} : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

donde Λ ocurre en el lugar 0.

Proposición E.1. *Para cada complejo de Λ-módulos $A^\bullet$ tenemos un isomorfismo natural*

$$\mathrm{Hom}_K(\underline{\Lambda}, A^\bullet) \simeq H^0(A^\bullet).$$

Considerando el complejo $A^\bullet[n]$ tenemos

$$\mathrm{Hom}_K(\underline{\Lambda}, A^\bullet[n]) \cong H^0(A^\bullet[n]) = H^n(A^\bullet);$$

al aplicar esto y los resultados de la sección anterior a una sucesión exacta localmente trivial de complejos de Λ-módulos, digamos

$$0 \longrightarrow A^\bullet \longrightarrow E^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow 0,$$

obtenemos la **sucesión exacta larga en cohomología**

$$\begin{gathered}\cdots \longrightarrow H^n(A^\bullet) \longrightarrow H^n(E^\bullet) \longrightarrow H^n(B^\bullet) \longrightarrow H^{n+1}(A^\bullet) \longrightarrow H^{n+1}(E^\bullet) \\ \longrightarrow H^{n+1}(B^\bullet) \longrightarrow H^{n+2}(A^\bullet) \longrightarrow H^{n+2}(E^\bullet) \longrightarrow H^{n+2}(B^\bullet) \longrightarrow \cdots\end{gathered}$$

CAPÍTULO 3

La categoría Λ-mod

En este capítulo estudiaremos, con mayor precisión, la categoría Λ-mod apoyandonos en la categoría de complejos de Λ-módulos así como también en la categoría homotópica.

Para establecer la naturalidad de algunas transformaciones, en este capítulo ocuparemos del siguiente resultado.

Sean $F, G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ dos funtores entre las categorías $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$. Si $\tau : F \to G$ es una transformación natural y $\mu : G \to F$ es una transformación tal que para cada objeto A de $\mathscr{A}$ tenemos $\mu_A = \tau_A^{-1}$, entonces μ también es una transformación natural.

Demostración. Sea $f : A \to A'$ un morfismo en $\mathscr{A}$, entonces

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(A') \arrow[r, "\tau_{A'}"'] & G(A') \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo; así, podemos ver que

$$\tau_{A'}(F(f)\mu_A) = G(f)(\tau_A\mu_A) = G(f) = \tau_{A'}\mu_{A'}G(f).$$

De donde concluimos que $F(f)\mu_A = \mu_{A'}G(f)$, por lo que μ es una transformación natural. $\square$

El resultado anterior nos permitirá reducir el trabajo de verificación, al momento de querer demostrar que cierta asignación es un isomorfismo natural. No se hará referencia a este resultado porque la intensión es mantenerlo en mente ya que es sencillo y se volvería tedioso su constante referencia.

$\boxed{A}$ Funtores duales

Sea Λ una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita. Consideremos la categoría Λ-mod de módulos izquierdos finitamente generados sobre Λ. En esta sección, estudiaremos dos dualidades importantes en la categoría de módulos.

Dualidad estandar La dualidad que estudiaremos en esta subsección es además un funtor fiel y pleno, como lo veremos más adelante. Definimos el funtor dual $D : \Lambda\text{-mod} \to \text{mod-}\Lambda$ en objetos por

$$D(M) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M, \Bbbk),$$

donde $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M, \Bbbk)$ son las transformaciones lineales $M \to \Bbbk$ viendo a M como un $\Bbbk$-espacio vectorial definiendo $\alpha.m = (\alpha 1).m$ para cada $\alpha \in \Bbbk$ y $m \in M$; luego, en $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M, \Bbbk)$ definimos

$$(\varphi.\lambda)(m) = \varphi(\lambda.m)$$

para cada $\lambda \in \Lambda$ y cada $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M, \Bbbk)$ y recordando que $\Bbbk$ actúa centralmente en M (es decir, $\alpha\lambda = \lambda\alpha$ para todo $\alpha \in \Bbbk$ y todo $\lambda \in \Lambda$) podemos ver que $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M, \Bbbk)$ es efectivamente un Λ-módulo derecho. En homomorfismos de Λ-módulos izquierdos $f : M \to N$ definimos $D(f) : D(N) \to D(M)$ por

$$D(f)(\varphi) = \varphi \circ f$$

para cada $\varphi \in D(N)$. Consideremos el funtor, que denoteremos también por D, $D : \text{mod-}\Lambda \to \Lambda\text{-mod}$ definido por

$$D(M) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M, \Bbbk);$$

definimos en $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M, \Bbbk)$ la acción

$$\lambda.\varphi(m) = \varphi(m.\lambda)$$

para $\lambda \in \Lambda$ y $m \in M$, donde M es un Λ-módulo derecho, la cual hace de $D(M)$ un Λ-módulo izquierdo. En morfismos $f : M \to N$ de Λ-módulos derechos, definimos

$$D(f)(\varphi) = \varphi \circ f$$

para cada transformación $\Bbbk$-lineal $\varphi : N \to \Bbbk$.

Proposición A.1. *El funtor $D \circ D$ es naturalmente isomorfo al funtor identidad en Λ-mod.*

Demostración. Definamos $\mathrm{ev} : \mathrm{id} \to D \circ D$ por la familia $\mathrm{ev}_M : M \to (D \circ D)(M)$ definiendo

$$\mathrm{ev}_M(m) = \mathrm{ev}_m,$$

donde $\mathrm{ev}_m : D(M) \to \Bbbk$ se define por

$$\mathrm{ev}_m(\varphi) = \varphi(m).$$

Veamos que $\mathrm{ev}_M : M \to DD(M)$ es un homomorfismo de Λ-módulos izquierdos. Sean $m_1, m_2 \in M$, entonces para cada funcional lineal $\varphi : M \to \Bbbk$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_M(m_1+m_2)(\varphi) &= \mathrm{ev}_{m_1+m_2}(\varphi) = \varphi(m_1+m_2) = \varphi(m_1)+\varphi(m_2) \\ &= \mathrm{ev}_M(m_1)(\varphi) + \mathrm{ev}_M(m_2)(\varphi) = \mathrm{ev}_M(m_1) + \mathrm{ev}_M(m_2). \end{aligned}$$

Luego, para cada $\lambda \in \Lambda$, $m \in M$ y para cada funcional lineal $\varphi : M \to \Bbbk$ se tienen las igualdades:

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_M(\lambda.m)(\varphi) &= \mathrm{ev}_{\lambda.m}(\varphi) = \varphi(\lambda.m) = (\varphi.\lambda)(m) \\ &= \mathrm{ev}_m(\varphi.\lambda) = \lambda.\mathrm{ev}_m(\varphi) = \lambda.\mathrm{ev}_M(m)(\varphi). \end{aligned}$$

Por lo que ev_M es en efecto un homomorfismo de Λ-módulos izquierdos.

Ahora, veamos que ev_M es un isomorfismo: para cada $m \in M$ con $m \neq 0$, podemos completar al conjunto $\{m\}$ a una $\Bbbk$-base para M, el cual es un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita (esto, por ser Λ de dimensión finita sobre $\Bbbk$ y M un Λ-módulo finitamente generado). Digamos que $\{m, m_1, \ldots, m_s\}$ es una $\Bbbk$-base de M. Podemos construir una transformación lineal $\varphi_m : M \to \Bbbk$ por $m \mapsto 1$, $m_i \mapsto 0$ y extender por linealidad para obtener $\mathrm{ev}_m(\varphi) \neq 0$ por lo que ev_M es una transformación lineal inyectiva. Como M es un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita, entonces $D(M)$ también lo es y tienen la misma dimensión. Luego, $DD(M)$ tiene la misma dimensión que M como $\Bbbk$-espacio vectorial y por tanto, ev_M debe ser un isomorfismo de $\Bbbk$-espacios vectoriales; en particular, es una función suprayectiva.

Para terminar la prueba, nos falta verificar la naturalidad de ev. Supongamos que $m \in M$, $f : M \to N$ es un homomorfismo de Λ-módulos izquierdos finitamente generados y $\varphi : \mathrm{Hom}_\Bbbk(N, \Bbbk) \to \Bbbk$ es un funcional lineal. Entonces

$$\begin{aligned} (DD(f)\circ \mathrm{ev}_M)(m)(\varphi) &= (DD(f)\circ \mathrm{ev}_m)(\varphi) \\ &= (\mathrm{ev}_m \circ D(f))(\varphi) = \mathrm{ev}_m(D(f)(\varphi)) \\ &= \mathrm{ev}_m(\varphi f) = \varphi(f(m)) \\ &= \mathrm{ev}_{f(m)}(\varphi) = \mathrm{ev}_N(f(m))(\varphi), \end{aligned}$$

de donde concluimos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mathrm{ev}_M"] \arrow[d, "f"'] & DD(M) \arrow[d, "DD(f)"] \\ N \arrow[r, "\mathrm{ev}_N"'] & DD(N) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. □

Ahora, estableceremos la fidelidad y plenitud de la dualidad estandar.

Proposición A.2. *Sean M y N dos Λ-módulos izquierdos finitamente generados. Entonces existe un isomorfismo natural*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(D(N), D(M)).$$

Demostración. Consideremos la asignación

$$D : (f : M \to N) \mapsto (D(f) : D(N) \to D(M)).$$

Si $D(f) = 0$, entonces $DD(f) = 0$ y como ev es un isomorfismo, tenemos que $f = \mathrm{ev}^{-1} DD(f)\,\mathrm{ev} = 0$ de donde concluimos que la asignación dada es una función inyectiva. Ahora, sea $g : D(N) \to D(M)$ un homomorfismo de Λ-módulos derechos finitamente generados; podemos definir $f : M \to N$ como el homomorfismo $f = \mathrm{ev}^{-1} D(g)\,\mathrm{ev}$; luego, tenemos que $DD(f)\,\mathrm{ev}_M = \mathrm{ev}_N f$ y por lo tanto

$$\mathrm{ev}_N^{-1} D(g)\,\mathrm{ev}_M = f = \mathrm{ev}_N^{-1} DD(f)\,\mathrm{ev}_M .$$

Por la inyectividad de D, tenemos que $D(f) = g$, y así, D es una asignación suprayectiva. Para verificar la naturalidad, supongamos que $f : M' \to M$ y $g : M \to N$ son dos homomorfismo de Λ-módulos izquierdos finitamente generados. Luego

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{id}_{D(N)}, D(f)) \circ D)(g) &= D(f)D(g) = D(gf)\\ &= (D \circ \mathrm{Hom}_\Lambda(f, \mathrm{id}_N))(g),\end{aligned}$$

de donde concluimos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_\Lambda(f,\mathrm{id}_N)"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(D(N), D(M)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{id}_{D(N)},D(f))"] \\
\mathrm{Hom}_\Lambda(M', N) \arrow[r, "D"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(D(N), D(M'))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. La naturalidad en N se prueba de manera similar. □

Proposición A.3. *Sea P un Λ-módulo izquierdo proyectivo finitamente generado. Entonces $D(P)$ es un Λ-módulo derecho inyectivo finitamente generado.*

Demostración. Sean $f : N \to M$ un monomorfismo de Λ-módulos derechos finitamente generados y $g : N \to D(P)$ un homomorfismo de Λ-módulos derechos finitamente generados, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo en Λ-mod

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d, "\simeq"] \arrow[ddl, dashed, "\gamma"'] & \\
& D(D(P)) \arrow[d, "D(g)"] & \\
D(M) \arrow[r, "D(f)"'] & D(N) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde γ se obtiene por el hecho de que P es proyectivo. Aplicando el funtor dual al diagrama anterior, obtenemos el diagrama conmutativo en mod-Λ

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\simeq"'] \arrow[ddd, bend right=60, "g"'] & M \arrow[d, "\simeq"] \\
& DD(N) \arrow[r, "DD(f)"'] \arrow[d, "DD(g)"'] & DD(M) \arrow[ddl, "D(\gamma)"] \\
& DD(D(P)) \arrow[d, "\simeq"'] & \\
& D(P); &
\end{tikzcd}$$

y de aquí, concluimos que $D(P)$ es un Λ-módulo derecho inyectivo finitamente generado. $\square$

La dualidad de Λ-proj Ahora, estudiaremos una dualidad entre las categorías Λ-proj y proj-Λ. Definimos $G : \Lambda\text{-proj} \to \text{proj-}\Lambda$ mediante

$$G(P) = {}^*P = \operatorname{Hom}_\Lambda(P, \Lambda),$$

donde la acción de Λ en ${}^*P$ se define por

$$(\varphi.\lambda)(p) = \varphi(p)\lambda$$

con lo que dotamos a $\operatorname{Hom}_\Lambda(P, \Lambda)$ de una estructura de Λ-módulo derecho. Para homomorfismos de Λ-módulos derechos proyectivos finitamente generados $f : P \to Q$, definimos $G(f) = {}^*f : {}^*Q \to {}^*P$ por

$${}^*f(\varphi) = \varphi \circ f.$$

En lo siguiente, veremos que ${}^*P$ es un Λ-módulo derecho proyectivo.

Lema A.4. *Sean Λ un anillo asociativo con uno, $P \in \Lambda$-proj y $L \in \Lambda$-mod, entonces existe un isomorfismo natural entre* $\operatorname{Hom}_\Lambda(P, L)$ *y* ${}^*P \otimes_\Lambda L$.

Demostración. Consideremos la función $\tau' : {}^*P \times L \to \operatorname{Hom}_\Lambda(P, L)$ definida por $\tau'(\varphi, l)(p) = \varphi(p).l$; para $\lambda \in \Lambda$, $\varphi \in {}^*P$, $l \in L$ y $p \in P$ tenemos

$$\tau'(\varphi, l)(\lambda.p) = \varphi(\lambda.p).l = (\lambda\varphi(p)).l = \lambda.(\varphi(p).l) = \lambda.\tau'(\varphi, l)(p)$$

por lo que $\tau'(\varphi, l) : P \to L$ es un homomorfismo de Λ-módulos izquierdos finitamente generados. Claramente, τ' es una función biaditiva; luego, sea $\lambda \in \Lambda$, $\varphi \in {}^*P$ y $l \in L$, entonces para cada $p \in P$ tenemos

$$\begin{aligned}
\tau'(\varphi.\lambda, l)(p) &= (\varphi.\lambda)(p).l = (\varphi(p)\lambda)\,.l = \varphi(p).(\lambda.l) \\
&= \tau'(\varphi, \lambda.l)(p)
\end{aligned}$$

de donde concluimos que τ' es una función balanceada. Así, sabemos que existe una única función aditiva $\tau : {}^*P \otimes L \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P, L)$ tal que

$$\begin{tikzcd} {}^*P \times L \arrow[rr, "\tau'"] \arrow[dr] & & \mathrm{Hom}_\Lambda(P,L) \\ & {}^*P \otimes L \arrow[ur, "\tau"'] & \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo. Ahora, supongamos que $f : Q \to P$ es un homomorfismo de Λ-módulos izquierdos proyectivos finitamente generados y sean $\varphi \in {}^*P$, $l \in L$ y $q \in Q$, entonces

$$\begin{aligned} (\tau_Q \circ ({}^*f \otimes \mathrm{id}_L))(\varphi \otimes l)(q) &= \tau_Q((\varphi f) \otimes l)(q) = (\varphi f(q)).l \\ &= \varphi(f(q)).l = \tau_P(\varphi \otimes l)(f(q)) \\ &= (\mathrm{Hom}_\Lambda(f, \mathrm{id}_L) \circ \tau_P)(\varphi \otimes l)(q); \end{aligned}$$

y así, podemos ver que

$$\begin{tikzcd} {}^*P \otimes L \arrow[r, "\tau_P"] \arrow[d, "{}^*f \otimes \mathrm{id}_L"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(P,L) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_\Lambda(f, \mathrm{id}_L)"] \\ {}^*Q \otimes L \arrow[r, "\tau_Q"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q,L) \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo. Si ahora $g : L \to M$ es un homomorfismo en Λ-mod, entonces para cada $p \in P$ se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} (\tau_M \circ (\mathrm{id}_{{}^*P} \otimes g))(\varphi \otimes l)(p) &= \tau_M(\varphi \otimes g(l))(p) = \varphi(p).g(l) \\ &= g(\varphi(p).l) = g(\tau(\varphi \otimes l)(p)) \\ &= (\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{id}_P, g) \circ \tau_L)(\varphi \otimes l)(p); \end{aligned}$$

por lo que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} {}^*P \otimes L \arrow[r, "\tau_L"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{{}^*P} \otimes g"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(P,L) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{id}_P, g)"] \\ {}^*P \otimes M \arrow[r, "\tau_M"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(P,M). \end{tikzcd}$$

De este modo, concluimos que τ es una transformación natural. Ahora, sea $\{\varphi_i, p_i : i-1 \in s\}$ una base dual de P y definamos la función $\psi : \mathrm{Hom}_\Lambda(P, L) \to {}^*P \otimes L$ por

$$\psi(f) = \sum_{i=1}^{s} \varphi_i \otimes f(p_i),$$

entonces para cada homomorfismo de Λ-módulos finitamente generados $f : P \to L$ y cada $p \in P$, tenemos

$$\begin{aligned} \tau(\psi(f))(p) &= \tau\left(\sum_{i=1}^{s} \varphi_i \otimes f(p_i)\right)(p) = \sum_{i=1}^{s} \tau(\varphi_i \otimes f(p_i))(p) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \varphi_i(p).f(p_i) = f\left(\sum_{i=1}^{s} \varphi_i(p).p_i\right) \\ &= f(p); \end{aligned}$$

y para cada $\varphi \in {}^*P$ y cada $l \in L$ se tiene

$$\begin{aligned} \psi(\tau(\varphi \otimes l)) &= \sum_{i=1}^{s} \varphi_i \otimes (\tau(\varphi \otimes l)(p_i)) = \sum_{i=1}^{s} \varphi_i \otimes (\varphi(p_i).l) \\ &= \sum_{i=1}^{s} (\varphi_i.\varphi(p_i)) \otimes l = \left(\sum_{i=1}^{s} \varphi_i.\varphi(p_i)\right) \otimes l \\ &= \varphi \otimes l \end{aligned}$$

probándose que $\psi = \tau^{-1}$. $\square$

Recordemos el isomorfismo de adjunción entre el funtor Hom y el producto tensorial en la categoría de módulos.

Lema A.5 (Isomorfismo de Adjunción)**.** *Sean Λ y Γ dos anillos asociativos con uno. Si M es un objeto en mod-Λ, N es un $\Lambda - \Gamma$-bimódulo y L es un objeto en Γ-mod, entonces existe un isomorfismo natural en M, N y L entre* $\mathrm{Hom}_\Gamma(M \otimes_\Lambda N, L)$ *y* $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \mathrm{Hom}_{\Gamma(N,L)})$*.*

Proposición A.6. *Sean Λ y Γ dos anillos asociativos con uno, $P \in \Lambda$-proj, $M \in$ mod-Γ y L un Λ-Γ-bimódulo, entonces*

$$\mathrm{Hom}_\Gamma(L, M) \otimes_\Lambda P \simeq \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(P, L), M).$$

Demostración. Por el lema anterior, $\mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(P, L), M)$ es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Hom}_\Gamma({}^*P \otimes_\Lambda L, M)$ y por la adjunción del producto tensorial y el funtor Hom sabemos que $\mathrm{Hom}_\Gamma({}^*P \otimes_\Lambda L, M)$ es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Hom}_\Lambda({}^*P, \mathrm{Hom}_\Gamma(L, M))$. Aplicando el lema anterior una vez más, se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda({}^*P, \mathrm{Hom}_\Gamma(L, M))$ es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Hom}_\Gamma(L, M) \otimes_\Lambda {}^*P^*$ el cual, a su vez, es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Hom}_\Gamma(L, M) \otimes_\Lambda P$ (como se mostrará en la Proposición A.8 más adelante) con lo que concluimos la prueba. $\square$

Proposición A.7. *Si P es un Λ-módulo izquierdo proyectivo finitamente generado, entonces ${}^*P$ es un Λ-módulo derecho proyectivo finitamente generado.*

Demostración. Consideremos una sucesión exacta corta de Λ-módulos derechos finitamente generados

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

y al aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda({}^*P,\cdot)$ a la sucesión anterior, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda({}^*P,L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda({}^*P,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda({}^*P,N)$$

la cual, al aplicar la proposición anterior con $\Gamma=\Lambda$, sabemos que es naturalmente equivalente a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,L)\otimes_\Lambda P \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,M)\otimes_\Lambda P \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,N)\otimes_\Lambda P;$$

como Λ es proyectivo, entonces $\mathrm{Hom}_\lambda(\Lambda,\cdot)$ es un funtor exacto por lo que

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,N) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta y como P es un módulo proyectivo, entonces es plano y por tanto, $\cdot\otimes P$ es un funtor exacto de donde obtenemos la exactitud de la sucesión

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,L)\otimes_\Lambda P &\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,M)\otimes_\Lambda P\\ &\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,N)\otimes_\Lambda P \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

En conclusión, hemos visto que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda({}^*P,L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda({}^*P,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda({}^*P,N) \longrightarrow 0$$

es exacta, es decir, ${}^*P$ es proyectivo. $\square$

Sea $G:\text{proj-}\Lambda\to\Lambda\text{-proj}$ el funtor definido por

$$G(P)=P^*=\mathrm{Hom}_\Lambda(P,\Lambda)$$

y en homomorfismos de Λ-módulos derechos proyectivos finitamente generados $f:P\to Q$ definimos $f^*:Q^*\to P^*$ por

$$f^*(\varphi)=\varphi\circ f;$$

podemos ver que G es un funtor de la categoría proj-Λ en la categoría Λ-proj.

Proposición A.8. *El funtor* G *es una dualidad, es decir, existe un isomorfismo natural de* $\mathrm{id}_{\Lambda\text{-}proj}\to G\circ G$.

Demostración. Consideremos la transformación $\mathrm{ev}:\mathrm{id}\to G\circ G$ definida por $\mathrm{ev}_P:P\to {}^*P^*$, el cual a su vez se define por $\mathrm{ev}_P(p)=\mathrm{ev}_p$, donde $\mathrm{ev}_p:{}^*P\to\Lambda$ se define por

$$\mathrm{ev}_p(\varphi)=\varphi(p),$$

y veamos que para cada Λ-módulo izquierdo proyectivo P tenemos que ev_P es un isomorfismo: consideremos un Λ-módulo proyectivo P y su base dual $\{\lambda_i,p_i : i-1\in r\}$; sabemos que para cada $p\in P$ tenemos

$$p=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(p).p_i.$$

Así, vemos que para cada $\varphi \in {}^*P$ tenemos

$$\varphi = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i.\varphi(p_i);$$

si $\varphi(p) = 0$ para todo $p \in P$, entonces $\varphi(p_i) = 0$ para todo $i - 1 \in r$ por lo que $\varphi = 0$ y vemos que ev_P es inyectiva. Luego, para cada $\varphi \in {}^*P^*$, tenemos

$$\varphi = \sum_{i=1}^{r} \varphi(\lambda_i)\,\mathrm{ev}_{p_i}$$

y de aquí vemos que ev_P es suprayectiva. La naturalidad es similar a la naturalidad de D. Por tanto, G es una dualidad. □

Nota. Para la demostración anterior, no se ocupó el hecho de que ${}^*P$ es un objeto proyectivo.

Corolario A.9. *Sean P y Q dos Λ-módulos izquierdos proyectivos finitamente generados, entonces* $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, Q) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda({}^*Q, {}^*P)$.

$\boxed{B}$ La permutación de Nakayama

Definimos el funtor

$$\nu : \Lambda\text{-proj} \to \Lambda\text{-inj}$$

en objetos por

$$P \mapsto D(\Lambda) \otimes_\Lambda P$$

y en morfismos $f : P \to Q$ por

$$f \mapsto \mathrm{id}_{D(\Lambda)} \otimes_\Lambda f.$$

Como una consecuencia inmediata de la Proposición A.6 tenemos el siguiente resultado.

Corolario B.1. *Si P es un Λ-módulo izquierdo proyectivo finitamente generado, entonces $D(\Lambda) \otimes_\Lambda P \simeq D({}^*P)$.*

Demostración. Solo basta tomar $\Gamma = \Bbbk$, $L = \Lambda$ y $M = \Bbbk$ además de recordar que Λ es una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita. □

De este modo, podemos ver que $\nu(P) \simeq D({}^*P)$ es en efecto un Λ-módulo izquierdo inyectivo finitamente generado. A este funtor lo llamaremos **permutación de Nakayama**. Como ν es la composición de dos dualidades, entonces ν es una equivalencia de categorías, en particular, ν es un funtor fiel y pleno por lo que tenemos el siguiente resultado.

Corolario B.2. *Para cada par de Λ-módulos izquierdos proyectivos finitamente generados P y Q tenemos*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(P, Q) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(\nu(P), \nu(Q)).$$

Ahora, consideremos un Λ-módulo izquierdo finitamente generado M y un Λ-módulo izquierdo proyectivo finitamente generado P. A continuación, estableceremos un isomorfismo natural entre el conjunto de homomorfismos de Λ-módulos izquierdos finitamente generados $M \to \nu(P)$ y el dual del $\Bbbk$-espacio vectorial $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, M)$.

Lema B.3. *Existe un isomorfismo natural*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \nu(P)) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda({}^*P, D(M)).$$

Demostración. Dado que el funtor dual D induce un isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(M, D({}^*P)) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(DD({}^*P), D(M)),$$

y $DD({}^*P)$ es naturalmente isomorfo a ${}^*P$, se concluye la prueba. $\square$

Sean P un Λ-módulo izquierdo proyectivo finitamente generado y M un Λ-módulo izquierdo finitamente generado. Definimos la siguiente aplicación

$$\Theta_{P,M} : D(\mathrm{Hom}_\Lambda(P, M)) \to \mathrm{Hom}_\Lambda({}^*P, D(M))$$

como sigue: sea $u \in D(\mathrm{Hom}_\Lambda(P, M))$ y para $\varphi \in {}^*P$ queremos definir una transformación $\Bbbk$-lineal $\Theta(u)(\varphi) : M \to \Bbbk$; luego, dado $m \in M$ definimos $\theta_{\varphi,m} : P \to M$ como

$$p \mapsto \varphi(p).m$$

el cual es un homomorfismo de Λ-módulos izquierdos finitamente generados, así, podemos definir

$$\Theta_{P,M}(u)(\varphi)(m) = u(\theta_{\varphi,m}).$$

Lema B.4. $\Theta_{P,M}$ *es un isomorfismo natural en* P *y* M.

Demostración. Primero, veamos que Θ es natural en P: sean $f : P \to P'$ un homomorfismo de Λ-módulos izquierdos proyectivos finitamente generados, $u : \mathrm{Hom}_\Lambda(P, M) \to \Bbbk$ un funcional lineal, $\varphi' \in {}^*P'$ y $m \in M$, entonces

$$\begin{aligned}(\Theta_{P'} \circ D(\mathrm{Hom}_\Lambda(f, \mathrm{id}_M)))(u)(\varphi')(m) &= \Theta_{P'}(\mathrm{Hom}_\Lambda(f, \mathrm{id}_M) \circ u)(\varphi')(m) \\ &= (\mathrm{Hom}_\Lambda(f, \mathrm{id}_M) \circ u)(\theta_{\varphi',m}) = u(\theta_{\varphi',m} \circ f);\end{aligned}$$

luego, para cada $p \in P$, tenemos

$$(\theta_{\varphi',m} \circ f)(p) = \theta_{\varphi',m}(f(p)) = \varphi'(f(p)).m = \theta_{\varphi' \circ f,m}(p)$$

de donde podemos deducir que

$$\begin{aligned}u(\theta_{\varphi',m} \circ f) &= u(\theta_{\varphi' \circ f,m}) = ({}^*f \circ \Theta_P(u))(\varphi')(m) \\ &= (\mathrm{Hom}_\Lambda({}^*f, \mathrm{id}_{D(M)}) \circ \Theta_P)(u)(\varphi')(m)\end{aligned}$$

por lo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
D(\mathrm{Hom}_\Lambda(P,M)) \arrow[r, "\Theta_P"] \arrow[d, "D(\mathrm{Hom}_\Lambda(f,\mathrm{id}_M))"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda({}^*P, D(M)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_\Lambda({}^*f,\mathrm{id}_{D(M)})"] \\
D(\mathrm{Hom}_\Lambda(P',M)) \arrow[r, "\Theta_{P'}"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda({}^*P', D(M))
\end{tikzcd}$$

Ahora, veamos que Θ es natural en M: sean $g : M' \to M$ un homomorfismo de Λ-módulos izquierdos finitamente generados, $u : \mathrm{Hom}_\Lambda(P,M) \to \Bbbk$ un funcional lineal, $\psi \in {}^*P$ y $m' \in M'$, entonces

$$\begin{aligned}
&\Big(\Theta_{M'} \circ D(\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{id}_P, g))\Big)(u)(\psi)(m') = \Theta_{M'}(u \circ g)(\psi)(m') \\
&\quad = \quad (u \circ g)(\theta_{\psi,m'}) = u(g \circ \theta_{\psi,m'});
\end{aligned}$$

para $p \in P$, podemos ver que

$$(g \circ \theta_{\psi,m'})(p) = g(\psi(p).m') = \psi(p).g(m') = \theta_{\psi,g(m')}(p)$$

por lo que tenemos

$$\begin{aligned}
u(g \circ \theta_{\psi,m'}) &= u(\theta_{\psi,g(m')}) = \Theta_M(u)(\psi)(g(m')) \\
&= (\Theta_M(u)(\psi) \circ g)(m') = (\Theta_M(u) \circ D(g))(\psi)(m') \\
&= \Big(\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{id}_{{}^*P}, D(g)) \circ \Theta_M\Big)(u)(\psi)(m')
\end{aligned}$$

y así, concluimos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
D(\mathrm{Hom}_\Lambda(P,M)) \arrow[r, "\Theta_M"] \arrow[d, "D(\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{id}_P,g))"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda({}^*P, D(M)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{id}_{{}^*P},D(g))"] \\
D(\mathrm{Hom}_\Lambda(P,M')) \arrow[r, "\Theta_{M'}"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda({}^*P, D(M'))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Consideremos ahora una base dual para P, digamos $\{\varphi_i, p_i : i - 1 \in s\}$, entonces definimos

$$\Psi_{P,M} : \mathrm{Hom}_\Lambda({}^*P, D(M)) \to D(\mathrm{Hom}_\Lambda(P,M))$$

como sigue: si $h : {}^*P \to D(M)$ es un homomorfismo de Λ-módulos derechos, definimos $\Psi_{P,M}(h)$ como el funcional lineal

$$\Psi_{P,M}(h)(g) = \sum_{i=1}^{s} h(\varphi_i)(g(p_i)).$$

Sean $h : {}^*P \to D(M)$ un homomorfismo de Λ-módulos derechos finitamente generados, $\varphi \in {}^*P$ y $m \in M$, entonces

$$\begin{aligned}
\Theta(\Psi(h))(\varphi)(m) &= \Psi(h)(\theta_{\varphi,m}) = \sum_{i=1}^{s} h(\varphi_i)(\theta_{\varphi,m}(p_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{s} h(\varphi_i)(\varphi(p_i).m) = h\left(\sum_{i=1}^{s} \varphi_i.\varphi(p_i)\right)(m) \\
&= h(\varphi)(m).
\end{aligned}$$

Finalmente, si $u : \mathrm{Hom}_\Lambda(P, M) \to \Bbbk$ es una transformación $\Bbbk$-lineal y $g : P \to M$ es un homomorfismo de Λ-módulos izquierdos finitamente generados, entonces

$$\begin{aligned}
\Psi(\Theta(u))(g) &= \sum_{i=1}^{s} \Theta(u)(\varphi_i)(g(p_i)) = \sum_{i=1}^{s} u(\theta_{\varphi_i,g(p_i)}) \\
&= u\left(\sum_{i=1}^{s} \theta_{\varphi_i,g(p_i)}\right).
\end{aligned}$$

Luego, para $p \in P$ podemos ver que

$$\sum_{i=1}^{s} \theta_{\varphi_i,g(p_i)}(p) = \sum_{i=1}^{s} \varphi_i(p).g(p_i) = g\left(\sum_{i=1}^{s} \varphi_i(p).p_i\right) = g(p);$$

y así, concluimos que $\Psi(\Theta(u))(g) = u(g)$. Por tanto, $\Psi = \Theta^{-1}$. $\square$

Concluimos con el siguiente resultado.

Proposición B.5. *Sean* P *un* Λ*-módulo izquierdo proyectivo finitamente generado y* M *un* Λ*-módulo izquierdo finitamente generado, entonces existe un isomorfismo natural* $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \nu(P)) \simeq D(\mathrm{Hom}_\Lambda(P, M))$.

$\boxed{C}$ Complejos de módulos

Recordemos que un complejo $A^\bullet$ de objetos en Λ-mod es acotado o **finito** si es acotado superior e inferiormente, es decir, existen $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ con $n_1 \leq n_2$ tales que para todo $m < n_1$ se tiene $A^m = 0$ y para todo $k > n_2$ tenemos $A^k = 0$.

Sea $P^\bullet = (P^n, d_P^n)$ un complejo finito de Λ-módulos proyectivos finitamente generados, definimos $\nu(P^\bullet)$ como el complejo $(\nu(P^n), \nu(d_P^n))$, el cual es un complejo finito de Λ-módulos inyectivos finitamente generados.

Consideremos, en los subsecuente, dos complejos finitos de Λ-módulos finitamente generados $M^\bullet$ y $P^\bullet$, donde $P^\bullet$ es un complejo de Λ-módulos proyectivos.

Lema C.1. *Existe una transformación natural*

$$\Psi : \mathrm{Hom}_K(M^\bullet, \nu(P^\bullet)) \to D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, M^\bullet).$$

Demostración. Primero, definiremos la función

$$\Psi' : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M^\bullet, \nu(P^\bullet)) \to D\mathrm{Hom}_K(P^\bullet, M^\bullet).$$

Para un morfismo de complejos $f^\bullet : M^\bullet \to \nu(P^\bullet)$, definimos

$$\Psi'(f^\bullet) : \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, M^\bullet) \to \Bbbk$$

como la función

$$\Psi'(f^\bullet)(g^\bullet) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \rho(f^i)(g^i),$$

donde $\rho : \mathrm{Hom}_\Lambda(M^i, \nu(P^i)) \to D\mathrm{Hom}_\Lambda(P^i, M^i)$ es el isomorfismo natural establecido en la sección anterior. Nótese que la suma es una suma finita ya que los complejos $M^\bullet$ y $P^\bullet$ son finitos además de que $\Psi'(f^\bullet)$ es un funcional lineal en el $\Bbbk$-espacio vectorial $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(P^\bullet, M^\bullet)$. Ahora, supongamos que $g^\bullet : P^\bullet \to M^\bullet$ es un morfismo de complejos nulhomotópico y sea $h^\bullet : P^\bullet \to M^\bullet[-1]$ una homotopía de $g^\bullet$, entonces para cada $i \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$g^i = d_M^{i-1} h^i + h^{i+1} d_P^i.$$

Sea $i \in \mathbb{Z}$; por la naturalidad de ρ, sabemos que

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(M^{i+1}, \nu(P^{i+1})) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_\Lambda(d_M^i, \mathrm{id}_{\nu(P^{i+1})})"'] & D\mathrm{Hom}_\Lambda(P^{i+1}, M^{i+1}) \arrow[d, "D\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{id}_{P^{i+1}}\, d_M^i)"] \\
\mathrm{Hom}_\Lambda(M^i, \nu(P^{i+1})) \arrow[r, "\rho"'] & D\mathrm{Hom}_\Lambda(P^{i+1}, M^i)
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo y así, para $f^{i+1} \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M^{i+1}, \nu(P^{i+1}))$ y $h^{i+1} \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P^{i+1}, M^i)$ tenemos

$$\rho(f^{i+1} d_M^i)(h^{i+1}) \quad = \quad \rho(f^{i+1})(d_M^i h^{i+1}). \tag{3.1}$$

Nuevamente, por la naturalidad de ρ, sabemos que

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(M^i, \nu(P^i)) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{id}_{M^i}, \nu(d_P^i))"'] & D\mathrm{Hom}_\Lambda(P^i, M^i) \arrow[d, "D\mathrm{Hom}_\Lambda(d_P^i, \mathrm{id}_{M^i})"] \\
\mathrm{Hom}_\Lambda(M^i, \nu(P^{i+1})) \arrow[r, "\rho"'] & D\mathrm{Hom}_\Lambda(P^{i+1}, M^i)
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo; por lo que, para $f^i \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M^i, \nu(P^i))$ y $h^{i+1} \in D\mathrm{Hom}_\Lambda(P^{i+1}, M^i)$ tenemos

$$\rho(\nu(d_P^i) f^i)(h^{i+1}) \quad = \quad \rho(f^i)(h^{i+1} d_P^i). \tag{3.2}$$

De las relaciones (3.1) y (3.2) se obtienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\rho(f^i)(g^i) &= \rho(f^i)(d_M^{i-1}h^i + h^{i+1}d_P^i) \\
&= \rho(f^i)(d_M^{i-1}h^i) + \rho(f^i)(h^{i+1}d_P^i) \\
&= \rho(f^i d_M^{i-1})(h^i) + \rho(f^i)(h^{i+1}d_P^i) \\
&= \rho(\nu(d_P^{i-1})f^{i-1})(h^i) + \rho(f^i)(h^{i+1}d_P^i) \\
&= \rho(f^{i-1})(h^i d_P^{i-1}) + \rho(f^i)(h^{i+1}d_P^i)
\end{aligned}$$

y de aquí, deducimos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\rho(f^i)(g^i) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\left(\rho(f^{i-1})(h^i d_P^{i-1}) + \rho(f^i)(h^{i+1}d_P^i)\right) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\rho(f^{i-1})(h^i d_P^{i-1}) + \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\rho(f^i)(h^{i+1}d_P^i) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^{i+1}\rho(f^i)(h^{i+1}d_P^i) + \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\rho(f^i)(h^{i+1}d_P^i) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De este modo, vemos que $\Psi'(f^\bullet)$ es un funcional lineal en $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, M^\bullet)$. Ahora, supongamos que $f^\bullet : M^\bullet \to \nu(P^\bullet)$ es un morfismo de complejos nulhomotópico y sea $h^\bullet : M^\bullet \to \nu(P^\bullet)[-1]$ una homotopía de $f^\bullet$, entonces para cada $i \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$f^i = \nu(d_P^{i-1})h^i + h^{i+1}d_M^i;$$

por la naturalidad de ρ, sabemos que

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(M^i, \nu(P^{i-1})) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_\Lambda(d_M^{i-1}, \mathrm{id}_{\nu(P^{i-1})})"'] & D\mathrm{Hom}_\Lambda(P^{i-1}, M^i) \arrow[d, "D\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{id}_{P^{i-1}}, d_M^{i-1})"] \\
\mathrm{Hom}_\Lambda(M^{i-1}, \nu(P^{i-1})) \arrow[r, "\rho"'] & D\mathrm{Hom}_\Lambda(P^{i-1}, M^{i-1})
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(M^i, \nu(P^{i-1})) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{id}_{M^i}, \nu(d_P^{i-1}))"'] & D\mathrm{Hom}_\Lambda(P^{i-1}, M^i) \arrow[d, "D\mathrm{Hom}_\Lambda(d_P^{i-1}, \mathrm{id}_{M^i})"] \\
\mathrm{Hom}_\Lambda(M^i, \nu(P^i)) \arrow[r, "\rho"'] & D\mathrm{Hom}_\Lambda(P^i, M^i)
\end{tikzcd}$$

son diagramas conmutativos. Por lo que para $h^i \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M^i, \nu(P^{i-1}))$ y $g^i \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P^i, M^i)$ tenemos

$$\rho(h^i d_M^{i-1})(g^{i-1}) = \rho(h^i)(d_M^{i-1}g^{i-1}) \qquad \rho(\nu(d_P^{i-1})h^i)(g^i) = \rho(h^i)(g^i d_P^{i-1})$$

y como $g^i d_P^{i-1} = d_M^{i-1}g^{i-1}$, concluimos que para cada $i \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\rho(\nu(d_P^{i-1})h^i) &= \rho(h^i)(g^i d_P^{i-1}) = \rho(h^i)(d_M^{i-1}g^{i-1}) \\
&= \rho(h^i d_M^{i-1})(g^{i-1}).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Así, de la relación (3.3) se deducen, que para $g^\bullet \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, M^\bullet)$, las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\Psi'(f^\bullet)(g^\bullet) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\rho(f^i)(g^i) = \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\rho(\nu(d_P^{i-1})h^i + h^{i+1}d_M^i)(g^i) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\left(\rho(\nu(d_P^{i-1})h^i)(g^i) + \rho(h^{i+1}d_M^i)(g^i)\right) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\rho(\nu(d_P^{i-1})h^i)(g^i) + \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\rho(h^{i+1}d_M^i)(g^i) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\rho(h^i d_M^{i-1})(g^{i-1}) + \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\rho(h^{i+1}d_M^i)(g^i) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^{i+1}\rho(h^{i+1}d_M^i)(g^i) + \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\rho(h^{i+1}d_M^i)(g^i) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, vemos que Ψ' induce una única transformación lineal

$$\Psi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(M^\bullet, \nu(P^\bullet)) \to D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, M^\bullet)$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M^\bullet, \nu(P^\bullet)) \arrow[r, "\Psi'"] \arrow[d] & D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, M^\bullet) \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(M^\bullet, \nu(P^\bullet)) \arrow[ur, "\Psi"'] &
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo. Ahora, verifiquemos la naturalidad de Ψ: sea $g^\bullet : N^\bullet \to M^\bullet$ un morfismo de complejos en la categoría $\mathbf{K}(\Lambda\text{-mod})$, entonces para cada morfismo $f^\bullet \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(M^\bullet, \nu(P^\bullet))$ y cada $\varphi^\bullet \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, N^\bullet)$ se tiene

$$(\Psi_N \circ \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(g^\bullet, \mathrm{id}_{\nu(P^\bullet)}))(f^\bullet)(\varphi^\bullet) = \Psi_N(f^\bullet g^\bullet)(\varphi^\bullet) = \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\rho(f^i g^i)(\varphi^i)$$

y también tenemos

$$(D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathrm{id}_{P^\bullet}, g^\bullet) \circ \Psi_M)(f^\bullet)(\varphi^\bullet) = \Psi_M(f^\bullet)(g^\bullet\varphi^\bullet) = \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\rho(f^i)(g^i\varphi^i).$$

Por otro lado, para cada $i \in \mathbb{Z}$, usando la naturalidad de ρ, se obtiene el siguente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(M^i, \nu(P^i)) \arrow[r, "\rho_{M^i}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_\Lambda(g^i, \mathrm{id}_{\nu(P^i)})"'] & D\mathrm{Hom}_\Lambda(P^i, M^i) \arrow[d, "D\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{id}_{P^i}, g^i)"] \\
\mathrm{Hom}_\Lambda(N^i, \nu(P^i)) \arrow[r, "\rho_{N^i}"'] & D\mathrm{Hom}_\Lambda(P^i, N^i).
\end{tikzcd}$$

Por lo que $\rho_{N^i}(f^ig^i)(\varphi^i) = \rho_{M^i}(f^i)(g^i\varphi^i)$. Así, vemos que

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\rho(f^ig^i)(\varphi^i) = \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\rho(f^i)(g^i\varphi^i)$$

y por tanto, Ψ es natural en $M^\bullet$. Ahora, supongamos que $g^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$ es un morfismo entre complejos de proyectivos finitamente generados, entonces para cada $\psi^\bullet : Q^\bullet \to M^\bullet$ obtenemos

$$\begin{aligned}(D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(g^\bullet, \mathrm{id}_{M^\bullet}) \circ \Psi_P)(f^\bullet)(\psi^\bullet) = \Psi(f^\bullet)(\psi^\bullet g^\bullet) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\rho(f^i)(\psi^ig^i)\\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\rho(\nu(g^i)f^i) = \Psi_Q(\nu(g^\bullet)f^\bullet)(\psi^\bullet)\\ &= (\Psi_Q \circ \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathrm{id}_{M^\bullet}, \nu(g^\bullet)))(f^\bullet)(\psi^\bullet)\end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(M^\bullet, \nu(P^\bullet)) \arrow[r, "\Psi_P"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathrm{id}_{M^\bullet}, \nu(g^\bullet))"'] & D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, M^\bullet) \arrow[d, "D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(g^\bullet, \mathrm{id}_{M^\bullet})"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(M^\bullet, \nu(Q^\bullet)) \arrow[r, "\Psi_Q"'] & D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(Q^\bullet, M^\bullet)
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo, lo que prueba la naturalidad en P. $\square$

A continuación, verificaremos que Ψ es, de hecho, un isomorfismo natural.

Lema C.2. *La transformación* Ψ *definida en el lema anterior es un isomorfismo.*

Demostración. La prueba se reallizará por doble inducción en los tamaños de $P^\bullet$ y de $M^\bullet$.

Tamaño de $P^\bullet$ igual a 1. Supongamos que $P^\bullet$ esta concentrado en i; entonces

$$P^\bullet : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P^i \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

Demostraremos en este caso que Ψ es un isomorfismo haciendo inducción sobre el tamaño de $M^\bullet$. Supongamos que $M^\bullet$ tiene tamaño 1 y que está concentrado en j. Dividiremos la prueba en dos casos:

Caso $i \neq j$. En este caso, es claro que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(M^\bullet, \nu(P^\bullet)) = 0$ así como $D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, M^\bullet) = 0$; concluyendose que Ψ es un isomorfismo.

Caso $i = j$. Ahora, cada morfismo de complejos $f^\bullet : M^\bullet \to \nu(P^\bullet)$ es una sucesión de homomorfismo de Λ-módulos que conmuta con las diferenciales d_M^n y d_P^n y al ser estas diferenciales cero para todo $n \in \mathbb{Z}$, concluimos que $f^\bullet = \langle \dots, 0, 0, f^i, 0, 0, \dots \rangle$. De aquí, podemos ver que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(M^\bullet, \nu(P^\bullet)) = \mathrm{Hom}_\Lambda(M^i, \nu(P^i)).$$

Con argumentos similares podemos probar que

$$D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, M^\bullet) = D\mathrm{Hom}_\Lambda(P^i, M^i);$$

así, tenemos $\Psi = \rho$, el cual es un isomorfismo.

Siguiendo con la prueba, supongamos que hemos probado este resultado para todo complejo de Λ-módulos finitamente generados de tamaño menor que n. Sea $M^\bullet$ un complejo sobre Λ-mod de tamaño n, digamos

$$M^\bullet : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M^s \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{s+n-2} \longrightarrow M^{s+n-1} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

y consideremos la siguiente sucesión exacta de complejos

$$\begin{tikzcd}
L^\bullet : \cdots \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M^{s+n-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
M^\bullet : \cdots \arrow[r] \arrow[d] & M^s \arrow[r, "d_M^s"] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & M^{s+n-2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & M^{s+n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
N^\bullet : \cdots \arrow[r] & M^s \arrow[r, "d_M^s"] & \cdots \arrow[r] & M^{s+n-2} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

la cual es claramente una sucesión localmente trivial de complejos. Sabemos que dicha sucesión exacta corta induce el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(L^\bullet[1], \nu(P^\bullet)) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi_{L[1],P}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(N^\bullet, \nu(P^\bullet)) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi_{N,P}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(M^\bullet, \nu(P^\bullet)) \arrow[d, "\Psi_{M,P}"'] \\
\cdots \arrow[r] & D\mathrm{Hom}\mathbf{K}(P^\bullet, L^\bullet[1]) \arrow[r] & D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, N^\bullet) \arrow[r] & D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, M^\bullet)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(L^\bullet, \nu(P^\bullet)) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi_{L,P}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(N^\bullet[-1], \nu(P^\bullet)) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi_{N[-1],P}"] & \cdots \\
\arrow[r] & D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, L^\bullet) \arrow[r] & D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, N^\bullet[-1]) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Como $L^\bullet$ y $N^\bullet$ son complejos de tamaño menor que n, las transformaciones $\Psi_{L[1],P}, \Psi_{N,P}, \Psi_{L,P}$ y $\Psi_{N[-1],P}$ son isomorfismos; por el Lema del cinco, concluimos que $\Psi_{M,L}$ es también un isomorfismo.

Tamaño de $P^\bullet$ igual a n. Supongamos que hemos probado el resultado para todo complejo de proyectivos finitamente generados de tamaño menor que n y sea $P^\bullet$ un complejo sobre Λ-proj de tamaño n. Como antes, podemos considerar la siguiente sucesión exacta de complejos localmente trivial

$$\begin{tikzcd}
Q^\bullet : \cdots \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P^{s+n-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
P^\bullet : \cdots \arrow[r] \arrow[d] & P^s \arrow[r, "d_P^s"] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & P^{s+n-2} \arrow[r, "d_P^{s+n-2}"] \arrow[d, equal] & P^{s+n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
R^\bullet : \cdots \arrow[r] & P^s \arrow[r, "d_P^s"] & \cdots \arrow[r] & P^{s+n-2} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Aplicando ν a dicha sucesión, obtenemos la sucesión

$$0 \longrightarrow \nu(Q^\bullet) \longrightarrow \nu(P^\bullet) \longrightarrow \nu(R^\bullet) \longrightarrow 0$$

la cual se ve como

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \nu(P^{s+n-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \nu(P^s) \arrow[r, "\nu(d_P^s)"] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & \nu(P^{s+n-2}) \arrow[r, "\nu(d_P^{s+n-2})"] \arrow[d, equal] & \nu(P^{s+n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \nu(P^s) \arrow[r, "\nu(d_P^s)"] & \cdots \arrow[r] & \nu(P^{s+n-2}) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

y de aquí, podemos ver que es una sucesión exacta localmente trivial. Ahora, recordemos que la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Q^\bullet \longrightarrow P^\bullet \longrightarrow R^\bullet \longrightarrow 0$$

está totalmente determinada por un morfismo $h^\bullet : R^\bullet \to Q^\bullet[1]$ que se define a través del siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q^\bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & P^\bullet \arrow[r] \arrow[d, dashed] & R^\bullet \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h^\bullet"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q^\bullet \arrow[r] & J(Q^\bullet) \arrow[r] & Q^\bullet[1] \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Si observamos la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
\nu(Q^\bullet) : \cdots \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \nu(P^{s+n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\nu(J(Q^\bullet)) : \cdots \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \nu(P^{s+n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \nu(P^{s+n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\nu(Q^\bullet[1]) : \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \nu(P^{s+n-1}) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

podemos concluir que

$$\nu(J(Q^\bullet)) = J(\nu(Q^\bullet))$$

así como

$$\nu(Q^\bullet[1]) = \nu(Q^\bullet)[1];$$

de este modo, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \nu(Q^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \nu(P^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \nu(R^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\nu(h^\bullet)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \nu(Q^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \nu(J(Q^\bullet)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \nu(Q^\bullet[1]) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \nu(Q^\bullet) \arrow[r] & J(\nu(Q^\bullet)) \arrow[r] & \nu(Q^\bullet)[1] \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por lo que la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \nu(Q^\bullet) \longrightarrow \nu(P^\bullet) \longrightarrow \nu(R^\bullet) \longrightarrow 0$$

está totalmente determinada por el morfismo $\nu(h^\bullet)$. Luego, esta sucesión exacta corta dá lugar al siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(M^\bullet, \nu(R^\bullet)[-1]) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(M^\bullet, \nu(Q^\bullet)) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(M^\bullet, \nu(P^\bullet)) \arrow[d, "\Psi_{M,P}"] \\
\cdots \arrow[r] & D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(R^\bullet[-1], M^\bullet) \arrow[r] & D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(Q^\bullet, M^\bullet) \arrow[r] & D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, M^\bullet)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(M^\bullet, \nu(R^\bullet)) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(M^\bullet, \nu(Q^\bullet)[1]) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \cdots \\
{} \arrow[r] & D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(R^\bullet, M^\bullet) \arrow[r] & D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(Q^\bullet[1], M^\bullet) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

y nuevamente, por el Lema del cinco, se concluye que $\Psi_{M,P}$ es un isomorfismo.

Con esto, termina la prueba. □

D Sucesiones que casi se dividen

En esta última sección, demostraremos que en la categoría de complejos finitos de módulos finitemante generados sobre una $\Bbbk$-álgebra Λ de dimensión finita existe una clase especial de sucesiones exactas denominadas *sucesiones que casi se dividen*. Para esto, ocuparemos los resultados que, hasta ahora, hemos expuesto en este trabajo.

Como hemos visto, para dos complejos finitos $M^\bullet$ y $P^\bullet$ en Λ-mod, donde $P^\bullet$ es un complejo de Λ-módulos proyectivos finitamente generados, existe un isomorfismo natural entre $\mathcal{E}xt_{\mathbf{C}}(M^\bullet, \nu(P^\bullet)[-1])$ y $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(M^\bullet, \nu(P^\bullet))$; el cual a su vez es naturalmente isomorfo a $D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, M^\bullet)$. Concluimos así que

$$\mathcal{E}xt_{\mathbf{C}}(M^\bullet, \nu(P^\bullet)[-1]) \simeq D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, M^\bullet) \tag{3.4}$$

Ahora, supongamos que $P^\bullet$ es un complejo finito de Λ-módulos proyectivos finitamente generados y que además, $P^\bullet$ es inescindible en la categoría de complejos de Λ-módulos finitamente generados. Supongamos también que $P^\bullet$ no es equivalente a uno de la forma

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P = P \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

En particular, se tiene $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, P^\bullet) \neq 0$. Como $P^\bullet$ es un objeto inescindible, se sabe que el anillo de endomorfismos de $P^\bullet$ es un anillo local, con radica de Jacobson $\mathfrak{r}$. Recordemos que, en este caso, el radical de Jacobson consta de todos los elementos de $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(P^\bullet)$ que no son invertibles. Sea $\mathfrak{a}$ el ideal de $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(P^\bullet)$ generado por los morfismos que se factorizan a través de un complejo proyectivo, entonces

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, P^\bullet) \simeq \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(P^\bullet)/\mathfrak{a};$$

luego, como el radical $\mathfrak{r}$ es el único ideal maximal de $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(P^\bullet)$, se tiene que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$ y así, tenemos

$$\mathbb{k}^n \simeq \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(P^\bullet)/\mathfrak{r} \simeq \frac{\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(P^\bullet)/\mathfrak{a}}{\mathfrak{r}/\mathfrak{a}} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, P^\bullet)/\bar{\mathfrak{r}},$$

donde $\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}/\mathfrak{a}$. Como $\mathrm{id}_{P^\bullet} \notin \mathfrak{r}$, entonces $\mathrm{id}_{P^\bullet} \notin \bar{\mathfrak{r}}$ y así, podemos fijar una $\mathbb{k}$-base de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, P^\bullet)$ que contenga a $\mathrm{id}_{P^\bullet}$; luego, definimos la funcional lineal $\chi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, P^\bullet) \to \mathbb{k}$ por $\mathrm{id}_{P^\bullet} \mapsto 1$ y el resto de los elementos básicos los transformamos en 0. A esta funcional le corresponde una extensión de $\nu(P^\bullet)[-1]$ por $P^\bullet$ mediante el isomorfismo natural (3.4), digamos que

$$\mathcal{E} : 0 \longrightarrow \nu(P^\bullet)[-1] \longrightarrow E^\bullet \longrightarrow P^\bullet \longrightarrow 0$$

es la sucesión que le corresponde a χ. Nótese que el complejo $\nu(P^\bullet)[-1]$ es inescindible ya que ν es una equivalencia; también es importante mencionar que la sucesión $\mathcal{E}$ no se divide ya que $\chi \neq 0$. A continuación, estudiaremos las propiedades de esta sucesión.

Proposición D.1. *Si $f^\bullet : A^\bullet \to P^\bullet$ es un morfismo que no es retracción, entonces existe un morfismo $\gamma^\bullet : A^\bullet \to E^\bullet$ que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} & & & A^\bullet \arrow[dl, dashed, "\gamma^\bullet"'] \arrow[d, "f^\bullet"] & \\ 0 \arrow[r] & \nu(P^\bullet)[-1] \arrow[r] & E^\bullet \arrow[r] & P^\bullet \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Demostración. Sabemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}xt_{\mathbf{C}}(P^\bullet, \nu(P^\bullet)[-1]) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{E}xt_{\mathbf{C}}(f^\bullet, \mathrm{id}_{\nu(P^\bullet)[-1]})"'] & D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, P^\bullet) \arrow[d, "D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathrm{id}_{P^\bullet}, f^\bullet)"] \\ \mathcal{E}xt_{\mathbf{C}}(A^\bullet, \nu(P^\bullet)[-1]) \arrow[r] & D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, A^\bullet). \end{tikzcd}$$

Denotemos por $\chi_{\mathcal{E}}$ a la funcional correspondiente a la sucesión exacta $\mathcal{E}$, y recordemos que $f^\bullet.\mathcal{E}$ es la extensión $\mathcal{E}xt_{\mathbf{C}}(f^\bullet, \mathrm{id}_{\nu(P^\bullet)[-1]})(\mathcal{E})$. Si $h^\bullet : P^\bullet \to A^\bullet$ es un morfismo en $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, A^\bullet)$, entonces

$$\chi_{f^\bullet.\mathcal{E}}(h^\bullet) = \chi_{\mathcal{E}}(f^\bullet h^\bullet).$$

Como $f^\bullet$ no es una retracción, se tiene que $f^\bullet h^\bullet \neq \mathrm{id}_{P^\bullet}$ por lo que $\chi_{\mathcal{E}}(f^\bullet h^\bullet) = 0$. Así, concluimos que $f^\bullet.\mathcal{E} = 0$, es decir, es una sucesión exacta que se divide. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
f^\bullet.\mathcal{E}: & 0 \arrow[r] & \nu(P^\bullet)[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & F^\bullet \arrow[r, "q^\bullet"] \arrow[d, "p^\bullet"] & A^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f^\bullet"] & 0 \\
\mathcal{E}: & 0 \arrow[r] & \nu(P^\bullet)[-1] \arrow[r] & E^\bullet \arrow[r, "\varphi^\bullet"'] & P^\bullet \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Como $f^\bullet.\mathcal{E}$ se divide, existe un morfismo $\sigma : A^\bullet \to F^\bullet$ tal que $q^\bullet \sigma^\bullet = \mathrm{id}_{A^\bullet}$ y si definimos $\gamma^\bullet = p^\bullet \sigma^\bullet$, podemos ver que

$$\begin{aligned}
\varphi^\bullet \gamma^\bullet &= \varphi^\bullet(p^\bullet \sigma^\bullet) = (\varphi^\bullet p^\bullet)\sigma^\bullet \\
&= (f^\bullet q^\bullet)\sigma^\bullet = f^\bullet(q^\bullet \sigma^\bullet) \\
&= f^\bullet
\end{aligned}$$

con lo que acabamos con la prueba. □

Proposición D.2. *Si* $g^\bullet : \nu(P^\bullet)[-1] \to B^\bullet$ *es un morfismo que no es sección, entonces existe un morfismo* $\gamma^\bullet : E^\bullet \to B^\bullet$ *que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \nu(P^\bullet)[-1] \arrow[r] \arrow[d, "g^\bullet"'] & E^\bullet \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\gamma^\bullet"] & P^\bullet \arrow[r] & 0 \\
& B^\bullet. & & &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Como ν y $[-1]$ son equivalencias, sabemos que existe un morfismo $\widetilde{g}^\bullet : P^\bullet \to B^\bullet$ tal que $g^\bullet = \nu(\widetilde{g}^\bullet)[-1]$; como $g^\bullet$ no es una sección, $\widetilde{g}^\bullet$ no puede ser una sección. Considerando el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}xt_{\mathbf{C}}(P^\bullet, \nu(P^\bullet)[-1]) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{E}xt_{\mathbf{C}}(\mathrm{id}_{P^\bullet}, g^\bullet)"'] & D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(P^\bullet, P^\bullet) \arrow[d, "D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\widetilde{g}^\bullet, \mathrm{id}_{P^\bullet})"] \\
\mathcal{E}xt_{\mathbf{C}}(P^\bullet, B^\bullet) \arrow[r] & D\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(B^\bullet, P^\bullet)
\end{tikzcd}$$

podemos ver que para todo morfismo $h^\bullet \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(B^\bullet, P^\bullet)$ se satisface la igualdad

$$\chi_{\mathcal{E}.g^\bullet}(h) = \chi_{\mathcal{E}}(h^\bullet \widetilde{g}^\bullet);$$

como $\widetilde{g}^\bullet$ no es una sección, entonces $h^\bullet\widetilde{g}^\bullet \neq \mathrm{id}_{P^\bullet}$ por lo que $\chi_{\mathcal{E}.g^\bullet}(h^\bullet) = 0$ y de aquí, concluimos que $\mathcal{E}.g^\bullet = 0$. Observemos ahora el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \nu(P^\bullet)[-1] \arrow[r, "\kappa^\bullet"] \arrow[d, "g^\bullet"'] & E^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "p^\bullet"] & P^\bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B^\bullet \arrow[r, "q^\bullet"'] & F^\bullet \arrow[r] & P^\bullet \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{E}.g^\bullet$ se divide, entonces existe un morfismo $\eta^\bullet : F^\bullet \to B^\bullet$ tal que $\eta^\bullet q^\bullet = \mathrm{id}_{B^\bullet}$ y si definimos $\gamma^\bullet = \eta^\bullet p^\bullet$, podemos ver que

$$\begin{aligned}
\gamma^\bullet \kappa^\bullet &= (\eta^\bullet p^\bullet)\kappa^\bullet = \eta^\bullet(p^\bullet \kappa^\bullet) \\
&= \eta^\bullet(q^\bullet g^\bullet) = (\eta^\bullet q^\bullet) g^\bullet \\
&= g^\bullet,
\end{aligned}$$

con lo que concluimos la prueba. $\square$

Definición D.1. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y

$$\mathcal{E} : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en $\mathscr{A}$. Decimos que $\mathcal{E}$ es una **sucesión que casi se divide** si es una sucesión exacta que no se divide y que se cumplen las siguientes tres condiciones:

(SCD1) Los objetos A y C son inescindibles en $\mathscr{A}$.

(SCD2) Para cada morfismo $D \to C$ que no sea una retracción, existe un morfismo $D \to B$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & D \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

(SCD3) Para cada morfismo $A \to E$ que no sea una sección, existe un morfismo $B \to E$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[dl, dashed] & C \arrow[r] & 0 \\
 & E. & & &
\end{tikzcd}$$

Así, hemos mostrado que dado un complejo finito inescindible de Λ-módulos proyectivos finitamente generados $P^\bullet$, que no sea equivalente a uno de la forma

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P \Longrightarrow P \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

existe una sucesión que casi se divide que termina en $P^\bullet$ y que tiene la forma

$$0 \longrightarrow \nu(P^\bullet)[-1] \longrightarrow E^\bullet \longrightarrow P^\bullet \longrightarrow 0,$$

donde $\nu(P^\bullet)[-1]$ es un complejo finito inescindible de Λ-módulos inyectivos finitamente generados, que era el objetivo de este trabajo.

Bibliografía

[BM:C] Mitchell, B. *Theory of Categories*. Academic Press, New York, 1965.

[JR:H] Rotman, J. *An Introduction to Homological Algebra*. Academic Press, New York, 1979.

[JR:A] Rotman, J. *Advanced Modern Algebra*, second edition. Prentice Hall, New York, 2003.

[SK:A] Assem, I.; Simson, D.; Skowroński, A. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, vol. 1: Techniques of Representation Theory. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[DH:C] Happel, D. *Triangulated categories in the representation of finite dimensional algebras*. London Mathematical Society. Lecture Notes Series, 119; 1998.