



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**POSGRADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS**

FACULTAD DE CIENCIAS

**CONSTRUCCIONES ALGEBRAICA, COMBINATORIA Y
GEOMÉTRICA DE GRÁFICAS REGULARES DE ORDEN MÍNIMO Y
CUELLO SEIS.**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRA EN CIENCIAS**

P R E S E N T A

GLORIA LÓPEZ CHÁVEZ

DIRECTORA DE LA TESINA: DRA. MARTHA GABRIELA ARAUJO PARDO.

MÉXICO, D.F.

OCTUBRE, 2009.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	1
Prefacio	3
1. Construcción geométrica	7
2. Construcción combinatoria	11
3. Construcción algebraica	17

Introducción

El contenido de esta tesina está enfocado a construir gráficas regulares de cuello 6 con pocos vértices como subgráficas de jaulas $(q + 1)$ -regulares de cuello 6. Las construcciones a desarrollar se darán de tres maneras distintas: geométrica, algebraica y mediante el uso de gráficas bipartitas. Es importante señalar que las maneras de abordar el problema son equivalentes y en todas se “borran” elementos específicos dependiendo de como se esté tratando el problema.

Así los objetivos de esta tesina serán construir las gráficas y mostrar que estos elementos “borrados” son los mismos en cada caso, salvo que están representados de manera distinta lo que dependerá de la descripción elegida.

La construcción geométrica resolverá el problema haciendo uso de los planos proyectivos combinatorios de orden q , cuando q es la potencia de un primo, concretamente se borrarán del plano proyectivo puntos, rectas e incidencias.

En la descripción algebraica se utilizarán las matrices de incidencia de los planos proyectivos de orden q y se borrarán renglones y columnas distinguidos de dichas matrices.

Finalmente, en la tercera construcción se trabajará sobre las gráficas de incidencia de los planos proyectivos borrando, en estas, ciertos vértices y aristas.

Nos parece importante resaltar que si bien las gráficas construidas son las mismas, diversos autores han usado, cada uno por su parte, diferentes métodos y no existe hasta el momento un trabajo que analice y traduzca las relaciones que existen entre ellos. Creemos que la importancia de este trabajo es justamente describir simultáneamente los tres tipos de construcciones, ya que entender la relación que existe entre ellas permite profundizar ampliamente en el problema como sucede generalmente en las matemáticas, en las cuales un panorama lo más global posible de un problema permite comprenderlo y solucionarlo desde varios ángulos y por lo tanto con mayor profundidad.

Prefacio

En el desarrollo de esta tesina se trabajará únicamente con gráficas simples no dirigidas sin lazos o aristas múltiples. Seguiremos el libro de Godsil y Royle [1] para la terminología y definiciones.

Sea $G = (V(G), A(G))$ una gráfica con conjunto de vértices $V = V(G)$ y conjunto de aristas $A = A(G)$. El *cuello* de una gráfica G es el número $g = g(G)$ de aristas en el ciclo más pequeño. El *grado* de un vértice $v \in V$ es el número de vértices adyacentes a v . Una gráfica se dice que es *k-regular* si todos los vértices tienen grado k . Una (k, g) -gráfica es una gráfica k -regular con cuello g . En 1960 Erdős y Sachs [2] probaron que para cualquier par de enteros k y g siempre existe una (k, g) -gráfica, teniendo así sentido el problema de encontrar gráficas regulares de cuello g dado y orden menor. Esto da pie a la definición de (k, g) -jaula como una (k, g) -gráfica con el mínimo número de vértices posible.

Mediante una sencilla operación es fácil calcular la cota inferior de una (k, g) -jaula. Cuando el cuello es impar se parte de un vértice y se cuenta a todos los vértices a distancia $\frac{g-1}{2}$ de él y en el caso de que el cuello sea par la cuenta parte de una arista y son contados todos los vértices a distancia $\frac{g-2}{2}$ de la misma; ver Figura 1.

Así pues, la cota inferior de una (k, g) -jaula se denota por $n_0(k, g)$ y es igual a

$$n_0(k, g) = \begin{cases} 1 + k + k(k-1) + \dots + k(k-1)^{\frac{(g-3)}{2}} & \text{si } g \text{ es impar;} \\ 2[1 + (k-1) + \dots + (k-1)^{\frac{g}{2}-1}] & \text{if } g \text{ es par.} \end{cases}$$

El concepto de jaula fue introducido por Tutte en el año de 1947, y desde entonces distintos matemáticos se han interesado en este tema. Biggs en [3] define el exceso de una gráfica k -regular G como la diferencia $|V(G)| - n_0(k, g)$, y a partir de ese momento el interés de la comunidad experta en el área ha sido la construcción de gráficas con poco exceso. En este mismo contexto, el trabajo que se plantea en esta tesina consiste en presentar tres métodos distintos para generar gráficas de cuello 6 con poco exceso.

Una gráfica es bipartita si el conjunto de sus vértices V se puede partir en dos conjuntos, V_1 y V_2 , de forma que cada arista en $A(G)$ tenga un extremo en V_1 y el otro en V_2 . Una

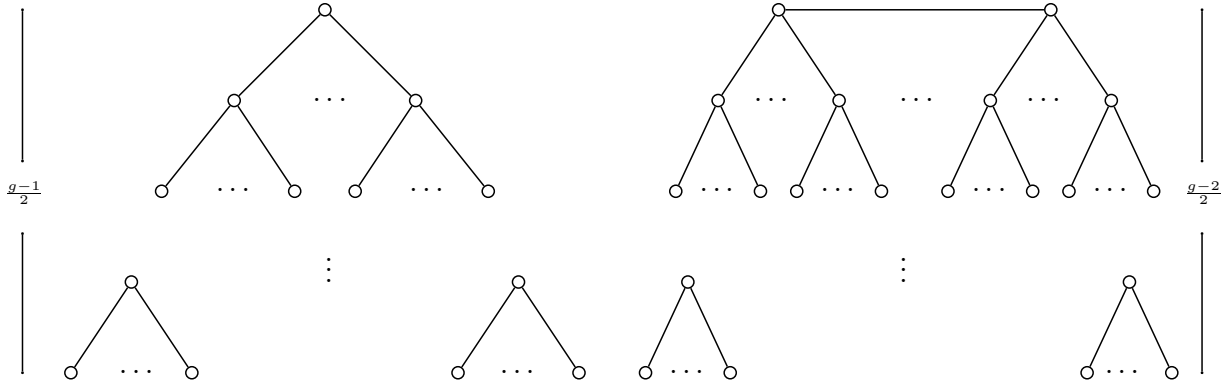


Figura 1: Distribución de los vértices de una (k, g) -jaula según la paridad del cuello g . Del lado izquierdo de la Figura se muestra la distribución para el caso de cuello impar, y del lado derecho, la correspondiente a cuello par.

importante conjetura alrededor de esta definición dice que las jaulas de cuello par son bipartitas [4].

Una *estructura de incidencia* es una terna $\mathbf{I} = (P, L, I)$ que consta de un conjunto finito P de puntos, un conjunto L de subconjuntos de P cuyos elementos son llamados líneas y una relación $I \subseteq P \times L$ llamada incidencia. Si $(p, l) \in I$ diremos que el punto p y la línea l son incidentes. La *gráfica de incidencia* $\Omega(\mathbf{I})$ de una estructura de incidencia \mathbf{I} es una gráfica bipartita que tiene como conjunto de vértices a $P \cup L$, y donde dos vértices son adyacentes si son incidentes en \mathbf{I} . Un *espacio lineal* es una estructura de incidencia $\mathbf{S} = (P, L, I)$ que cumple que toda línea tiene al menos dos puntos y por cualesquiera dos puntos pasa exactamente una línea. Nótese que el cuello de la gráfica de incidencia de un espacio lineal es mayor o igual que seis.

En este trabajo haremos uso del potencial de dos espacios lineales muy particulares. Uno de ellos es el *Plano parcial* que cumple dos axiomas: 1) Por cualesquiera dos puntos pasa a lo más una línea, y 2) Cualquier línea tiene al menos dos puntos. El otro espacio que es aún más interesante es el *Plano proyectivo finito* $\Pi = (X, L, I)$ el cual cumple los siguientes axiomas:

1. Para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ existe una única $l \in L$ tal que $\{x_1, x_2\} \in l$ (axioma de espacio lineal).
2. Para cualesquiera $l_1, l_2 \in L$ se tiene que $|l_1 \cap l_2| = 1$.
3. Existe un subconjunto $F \subseteq X$ de 4 elementos tal que $|l \cap F| \leq 2$ para toda $l \in L$.

No es difícil probar usando estos axiomas que, en un plano proyectivo cualesquiera dos líneas tienen el mismo número de puntos. Así, si $l \in L$ y $|l| = n + 1$ diremos que el plano proyectivo tiene orden $n = |l| - 1$, y en este caso denotaremos por Π_n al plano proyectivo de orden n . Claramente el cuello de la gráfica de incidencia de un plano proyectivo Π_n tiene tamaño 6, más aún, mediante algunas sencillas observaciones, que no analizaremos a profundidad en esta tesina porque no es nuestro objetivo, se concluye que la gráfica de incidencia de un plano proyectivo de orden n es una $(n + 1, 6)$ -jaula minimal, es decir, es una jaula que alcanza la cota mínima $n_0(n + 1, 6)$.

Uno de los métodos usados para construir a los planos proyectivos de orden q , cuando q es una potencia de primo es considerar a \mathbb{F}_q^3 espacios vectoriales de tres dimensiones sobre el campo de Galois \mathbb{F}_q con q elementos. Los puntos del plano proyectivo corresponden a los subespacios de dimensión uno y las líneas del plano proyectivo a los subespacios de dimensión dos. Un punto es incidente con una línea si el subespacio de dimensión uno está contenido en el subespacio de dimensión dos. Estos planos proyectivos se llaman algebraicos y se denotan por $PG(2, q)$.

Los planos proyectivos puramente combinatorios (que cumplen los axiomas y no se construyen usando campos de Galois) también existen, sin embargo en esta tesina no se profundizará en el tema de la existencia de estos planos proyectivos; sin embargo, se sabe que si q es una potencia de primo existe al menos un plano proyectivo de orden q , el algebraico y éste es el que usaremos como base de nuestras contrucciones [5, 6].

Capítulo 1

Construcción geométrica

Existen muchas construcciones para generar familias de gráficas regulares con pocos vértices. Un gran número de ellas se obtienen al remover ciertos conjuntos de vértices de las gráficas de incidencia de los polígonos generalizados. En esta sección se empleará una técnica similar a la que plantean Gács y Héger en [7], técnica que recientemente ha sido utilizada para obtener gráficas de orden mínimo y cuello dado.

Antes de abordar los resultados principales de esta sección se introducirán un par de conceptos necesarios. Dado un d -gono generalizado con puntos, líneas e incidencias $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, el conjunto \mathcal{I} de incidencias se define para todo $p \in \mathcal{P}$ y para toda $l \in \mathcal{L}$ como sigue: $p\mathcal{I}L$ si y solo si $p \in L$, (ver [1]).

Definición 1 Sea $\Pi_q = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ el plano proyectivo de orden q . Diremos que una incidencia $p\mathcal{I}L$ es borrada si el punto p no es removido de \mathcal{P} pero la línea L de \mathcal{L} es reemplazada por la nueva línea $L - p$.

Definición 2 La terna $(\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0, \mathcal{I}_0)$ es una estructura $(t + 1)$ -coregular en el d -gono generalizado $(q + 1)$ -regular si el plano parcial $(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0, \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0, \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0)$ es $(q - t)$ -regular.

Un hecho inmediato que se desprende de la definición anterior es que de existir la terna $(\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0, \mathcal{I}_0)$, se tendrá que $|\mathcal{P}_0| = |\mathcal{L}_0|$. Denotemos por \mathcal{L}_u al conjunto de líneas que pasan por el punto u . En el siguiente teorema construiremos estructuras $(t + 1)$ -coregulares en planos proyectivos de orden q para $0 \leq t \leq q - 2$.

Teorema 1 Sea $L^* = \{p, x_1, \dots, x_q\}$ una línea en el plano proyectivo de orden q y sea $\mathcal{L}_p = \{L^*, L_p^1, \dots, L_p^q\}$ el conjunto de líneas que pasan por p . Denotemos a los siguientes conjuntos como sigue:

$$Q_1 = \{L_p^1, L_p^2, \dots, L_p^t, M\} \cup \mathcal{L}_{x_1} \cup \dots \cup \mathcal{L}_{x_t} \text{ donde } M \in \mathcal{L}_{x_{t+2}} - L^*.$$

$$Q_2 = \mathcal{L}_{x_{t+1}} - \{A_1, \dots, A_{t-1}\}, \text{ donde } A_i \in \mathcal{L}_{x_{t+1}} - L^* \text{ es la línea que conecta a } x_{t+1} \text{ y } m_i, \text{ donde } m_i = M \cap L_p^i, i = 1, \dots, t - 1.$$

Entonces las siguientes estructuras son $(t + 1)$ -coregulares en el plano proyectivo de orden q para $0 \leq t \leq q - 2$:

$$t = 0: \mathcal{P}_0 = \{x_1\} \cup L_p^1; \mathcal{L}_0 = \{L_p^1\} \cup \mathcal{L}_{x_1}; \mathcal{I}_0 = \emptyset.$$

$$t \geq 1: \mathcal{P}_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_{t+1}\} \cup L_p^1 \cup L_p^2 \cup \dots \cup L_p^t \cup M;$$

$$\mathcal{L}_0 = \begin{cases} Q_1 \cup \mathcal{L}_{x_2} & \text{si } t = 1; \\ Q_1 \cup Q_2 & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_0 = \{x_j \mathcal{I}L : L \in \mathcal{L}_{x_j}, |M \cap L \cap L_p^i| = 1 \text{ para alguna } i \in \{1, \dots, t\}, j = t + 3, \dots, q\} \cup \{a_{ij} \mathcal{I}L_p^j : a_{ij} = A_i \cap L_p^j, j = t + 1, \dots, q, i = 1, \dots, t - 1, t \geq 2\}.$$

Demostración: Sea \mathbb{P} el plano parcial que resulta después de borrar todos los puntos de \mathcal{P}_0 , todas las líneas de \mathcal{L}_0 y todas las incidencias de \mathcal{I}_0 de un plano proyectivo de orden q . Veamos que \mathbb{P} es un $(q - t)$ -plano parcial regular.

Caso $t = 0$: Notemos que $|\mathcal{P}_0| = 1 + (q + 1) = q + 2$ y que $|\mathcal{L}_0| = 1 + (q + 1) = q + 2$. así, $|\mathcal{P}_0| = |\mathcal{L}_0| = q + 2$.

Las líneas de \mathbb{P} se obtienen a partir de las del plano proyectivo en una de las siguientes maneras:

1. $L_p^j - \{p\}$, $j = 2, \dots, q$;
2. $L_{x_j} - \{p_1\}$ para toda $L_{x_j} \in \mathcal{L}_{x_j}$ donde $p_1 = L_{x_j} \cap L_p^1$, $j = 2, \dots, q$.

Por lo tanto cada línea de \mathbb{P} tiene cardinalidad q . Ahora veamos que por cualquier punto pasan q líneas. Cada punto x_j , $j = 2, \dots, q$ perdió a la línea L^* y cada uno de los puntos restantes de \mathbb{P} está en alguna línea L_p^j , $j = 2, \dots, q$ los cuales pierden una línea en \mathcal{L}_{x_1} . Por lo tanto, por cualquier punto de \mathbb{P} pasan q líneas.

Caso $t \geq 1$: Tenemos que $|\mathcal{P}_0| = t + 1 + |L_p^1| + \dots + |L_p^t| - (t - 1) + |M| - t = q(t + 1) + 3$ ya que $x_1, x_2, \dots, x_{t+1} \notin L_p^1 \cup \dots \cup L_p^t \cup M$ y $|M \cap L_p^1 \cap \dots \cap L_p^t| = 0$; más aun, ya que $\mathcal{L}_{x_1} \cap \dots \cap \mathcal{L}_{x_t} \cap \mathcal{L}_{x_{t+1}} = \{L^*\}$ se tiene que $|\mathcal{L}_0| = 1 + tq + q - (t - 1) + 1 + t = q(t + 1) + 3$. De aquí que $|\mathcal{P}_0| = |\mathcal{L}_0| = q(t + 1) + 3$.

Sea $M = \{m_1, m_2, \dots, m_q, x_{t+2}\}$ la línea cuyos puntos han sido borrados del plano proyectivo, y supongamos que $m_j = M \cap L_p^j$, $j = 1, \dots, q$. Distingamos dos subcasos dependiendo de sí $t = 1$ o $t \geq 2$.

Subcaso $t = 1$: Las líneas de \mathbb{P} son obtenidas de las líneas del plano proyectivo en una de las siguientes maneras:

- (i) $L_p^j - \{p, m_j\}$, $j = 2, \dots, q$;
- (ii) $L_{x_3} - \{x_3, y\}$ para toda $L_{x_3} \in \mathcal{L}_{x_3} - M$ donde $y = L_{x_3} \cap L_p^1$;
- (iii) $L_{x_j} - \{y', m_j\}$ para toda $L_{x_j} \in \mathcal{L}_{x_j}$ en la que $M \cap L_p^1 \cap L_{x_j} = \emptyset$ donde $y' = L_{x_j} \cap L_p^1$ y $m_j = L_{x_j} \cap M$, $j = 4, \dots, q$;
- (iv) $L_{x_j} - \{x_j, m_1\}$ para $L_{x_j} \in \mathcal{L}_{x_j}$ tal que $M \cap L_{x_j} = M \cap L_p^1 = m_1$ para toda $j = 4, \dots, q$; de acuerdo a la definición de \mathcal{I}_0 la incidencia $x_j \mathcal{I} L_{x_j}$ debe ser removida.

Por lo tanto concluimos que cualquier línea de \mathbb{P} tiene cardinalidad $q - 1$.

Por otro lado, cada punto x_j , $j = 4, \dots, n$ de \mathbb{P} perdió la línea L^* . Más aun, en un plano proyectivo existe exactamente una línea $F \in \mathcal{L}_{x_j}$ tal que $|F \cap M \cap L_p^1| = 1$, por tanto x_j perdió exactamente una incidencia, entonces por cada x_j pasan exactamente $q - 1$ líneas. El resto de los puntos z de \mathbb{P} pertenecen a alguna línea L_p^j , $j = 2, \dots, q$ en el plano proyectivo. Cada z perdió dos líneas, una en \mathcal{L}_{x_1} y la otra en \mathcal{L}_{x_2} . Por tanto, cualquier punto de \mathbb{P} pertenece a $q - 1$ líneas. Ver Figura 2.

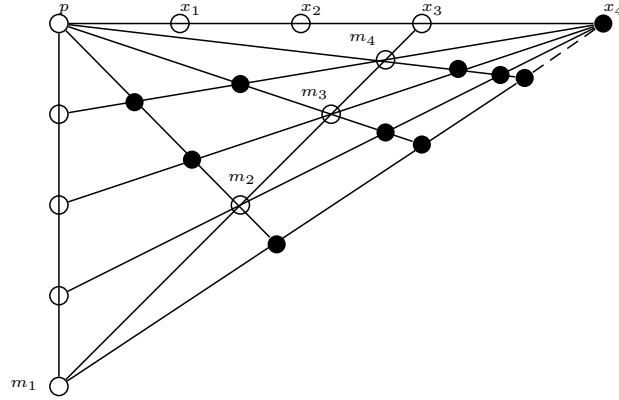


Figura 1.1: Ilustración del caso $t = 1$ for $q = 4$. Los puntos borrados se indican con color blanco y las incidencias borradas se indican con línea punteada.

Subcaso $t \geq 2$: Las líneas de \mathbb{P} son obtenidas de las líneas del plano proyectivo en una de las siguientes maneras:

- (i) $L_p^j - \{p, m_j, a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{t-1j}\}$ donde $a_{ij} \in A_i \cap L_p^j$ es diferente de m_j para $j = t+1, \dots, q$ ya que $A_i \cap M \subset \{L_p^1 \cup \dots \cup L_p^t\}$ por hipótesis. De acuerdo a la definición de \mathcal{I}_0 las incidencias $a_{ij} \mathcal{I} L_p^j$ deben ser removidas;

Capítulo 2

Construcción combinatoria

Como se había mencionado anteriormente, en esta sección se describirá un método que consistirá en borrar ciertos vértices y aristas de la gráfica de incidencia del plano proyectivo Π_q , obteniendo así familias de gráficas regulares de cuello 6 con pocos vértices. Es importante aclarar que este método es exclusivamente una interpretación de la construcción geométrica, es decir, el conjunto de vértices y aristas eliminados de la gráfica de incidencia de Π_q se corresponderán con el conjunto de puntos, líneas e incidencias borrados en el plano proyectivo Π_q descritos en la construcción geométrica.

Para este fin primero se definirán algunos conceptos necesarios. Dada una gráfica G con cuello g par y una arista (x, y) de G se define para $0 \leq i \leq \frac{g}{2} - 1$ los siguientes conjuntos:

$$X_i = \{u \in V(G) : d_G(u, x) = i, d_G(u, y) = i + 1\}$$

$$Y_i = \{v \in V(G) : d_G(v, y) = i, d_G(v, x) = i + 1\}$$

Claramente como el cuello es igual a g tenemos que X_i y Y_i , $0 \leq i \leq \frac{g}{2} - 1$ son conjuntos ajenos. Sean $X_1 = \{x_1, \dots, x_q\}$ y $Y_1 = \{y_1, \dots, y_q\}$. Consideremos en los conjuntos X_i y Y_i , $i \in \{1, 2, \dots, \frac{g}{2} - 1\}$ la siguiente partición (ver Figura 4):

$$D_{i-1}(x_k) = \{w \in X_i : d_G(w, x_k) = i - 1\}, k = 1, 2, \dots, q$$

$$D_{i-1}(y_j) = \{w \in Y_i : d_G(w, y_j) = i - 1\}, k = 1, 2, \dots, q$$

El árbol que aparece en la Figura 4 es subgráfica acíclica generada de la $(q+1, 6)$ -jaula. En esta tesina claramente estamos haciendo un abuso de lenguaje cuando nos referimos a G como el árbol mostrado en la Figura 4, pues G tiene q^2 aristas, de las cuales unas están entre los vértices inferiores del árbol que no están dibujadas y que existen bajo ciertas condiciones dadas por las incidencias del plano proyectivo que permite que el cuello sea seis.

Teorema 2 Sea Π_q el plano proyectivo de orden q , $L^* = \{p, x_1, x_2, \dots, x_q\}$ una línea de Π_q , $\mathcal{L}_p = \{L^*, L_p^1, L_p^2, \dots, L_p^q\}$ las líneas por p y sea G su gráfica de incidencia. Entonces G tiene

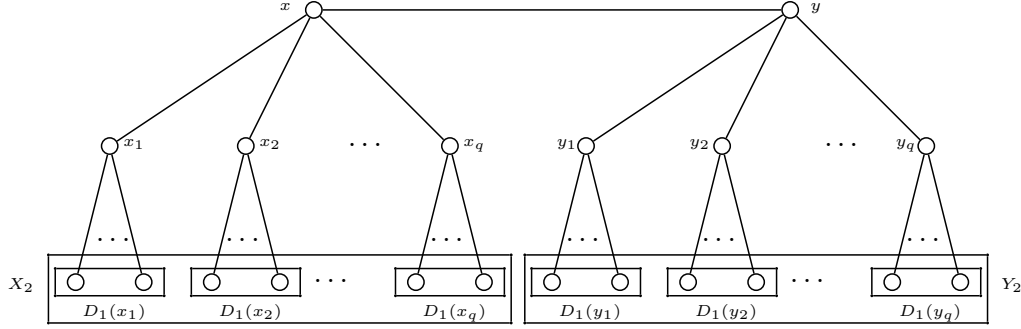


Figura 2.1: Árbol distancia

como subgráfica una $(q, 6)$ -gráfica bipartita con $2q^2 - 2$ vértices.

Demostración: En G distíngase la arista (p, L^*) y considérense los conjuntos X_0, Y_0, X_1, Y_1, X_2 y Y_2 descritos en la definición anterior. Así, $X_0 = \{p\}$, $Y_0 = \{L^*\}$, $X_1 = \{L_p^1, \dots, L_p^q\}$ y $Y_1 = \{x_1, \dots, x_q\}$. Nótese que:

$$X_1 = \bigcup_{j=1}^q D_0(L_p^j), \quad Y_1 = \bigcup_{j=1}^q D_0(x_j)$$

$$X_2 = \bigcup_{j=1}^q D_1(L_p^j) \text{ y } Y_2 = \bigcup_{j=1}^q D_1(x_j)$$

Sea H la subgráfica obtenida de G al borrar X_0, Y_0 y el conjunto de vértices

$$\bigcup_{k=0}^1 \{D_k(L_p^1) \cup D_k(x_1)\}$$

Veamos que lo que resulta de borrar estos conjuntos es en efecto una $(q, 6)$ -gráfica; ver Figura 5. Los vértices sobrantes de G están definidos por el conjunto V :

$$V = \bigcup_{k=0}^1 \{D_k(L_p^j) \cup D_k(x_j)\}, \quad j = 2, \dots, q$$

Claramente los vértices que viven en $\bigcup_{j=2}^q D_0(L_p^j)$ pierden la adyacencia con p . Análogamente los vértices que pertenecen a $\bigcup_{j=2}^q D_0(x_j)$ bajan su grado en uno al perder la adyacencia con L^* . El resto de los vértices pertenecen a $\bigcup_{j=2}^q \{D_1(L_p^j) \cup D_1(x_j)\}$.

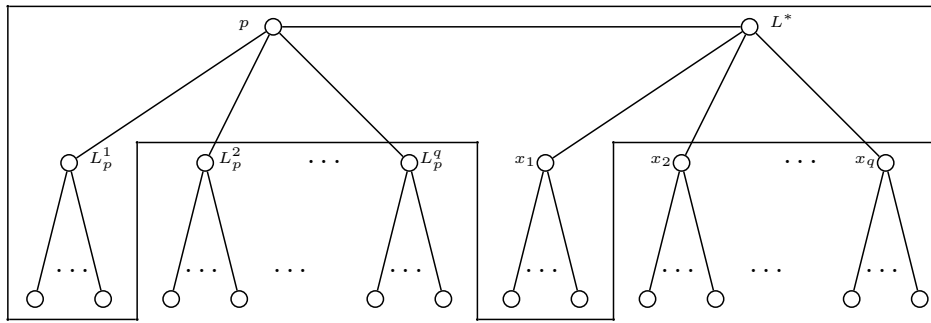


Figura 2.2: El conjunto de vértices borrados en G se encuentran dentro del área marcada. Lo que queda fuera de ella resulta ser una $(q, 6)$ -gráfica bipartita. En esta imagen no se muestra el pegado que se da entre los vértices de $X_2 \cup Y_2$.

Por otro lado como el cuello de G es igual a seis se tiene que cada una de las subgráficas inducidas por los conjuntos $\{D_1(L_p^j) \cup D_1(x_k)\}$ con $j, k = 1, \dots, q$ forma un apareamiento perfecto en G , ver [7]. Por esta razón cada uno de los vértices que pertenecen a $\bigcup_{j=2}^q D_1(L_p^j)$ pierden la adyacencia con un único elemento de $D_1(x_1)$. De manera similar los vértices que viven en $\bigcup_{j=2}^q D_1(x_j)$ pierden la adyacencia con un único vértice de $D_1(L_p^1)$. Además, el orden de H es $2(q-1) + 2q(q-1) = 2q-2 + 2q^2 - 2q = 2q^2 - 2$. ■

El resultado anterior se extiende, como señala el Corolario 1.4, permitiendo encontrar gráficas k -regulares de cuello 6 con $2(qk-2)$ para $k \leq q-1$. En la prueba se usará el siguiente concepto para gráficas análogo al de estructura $(t+1)$ -coregular definida para d -gonos generalizados.

Definición 3 La pareja (\mathbb{P}, \mathbb{A}) es una estructura $(t+1)$ -coregular en la gráfica de incidencia G de un plano proyectivo Π_q , si al momento de borrar todos los vértices de \mathbb{P} y todas las aristas de \mathbb{A} en G la gráfica resultante es $(q-t)$ -regular de cuello 6.

Antes de abordar dicho teorema denotaremos primero ciertos conjuntos que se usarán en él. Si Π_q es el plano proyectivo de orden q , $L^* = \{p, x_1, x_2, \dots, x_q\}$ una línea de Π_q y $\mathcal{L}_p = \{L^*, L_p^1, L_p^2, \dots, L_p^q\}$ las líneas por p , entonces sean:

$$P_1 = \{p, L^*\} \cup \bigcup_{k=0}^1 \{D_k(L_p^1) \cup \dots \cup D_k(L_p^t) \cup D_k(x_1) \cup \dots \cup D_k(x_{t+1})\} \cup D_0(x_{t+2}) \cup \{m_1, \dots, m_q, M\} \text{ con } M \in D_1(x_{t+2}); \{m_j\} \in D_1(L_p^j), (m_j, M) \in A(G), j = 1, \dots, q;$$

$E_1 = \{(x_j, l) : (l, m_i) \in A(G), j = \{t+3, \dots, q\}, i = 1, \dots, t\}$; Nótese que para toda m_i la l es distinta, ya que de existir algún $l \in N(x_j) \setminus L^*$ tal que $(l, m_k), (l, m_s) \in A(G)$, $k \neq s$ y tomando en cuenta que $(M, m_k), (M, m_s) \in A(G)$ se formaría un ciclo de longitud cuatro en G contradiciendo que el cuello de la gráfica de incidencia de todo plano proyectivo es seis.

$P_2 = D_1(x_{t+1}) - \{A_1, \dots, A_{t-1}\}$ donde $A_i \in D_1(x_{t+1})$, $(A_i, m_j) \in A(G)$, $j \in \{1, \dots, t\}$, $i = 1, \dots, t-1$. Notemos también que $A_k \neq A_j$ si $k \neq j$; y

$E_2 = \{(L_p^j, a_{ij}) : (a_{ij}, A_i) \in A(G), i = 1, \dots, t-1, j = t+1, \dots, q\}$. Notemos por construcción que $a_{ij} \neq m_j$ para toda $j = t+1, \dots, q$ ya que $(A_i, m_i) \in A(G)$ para $i \in \{1, \dots, t-1\}$.

Teorema 3 *Sea Π_q el plano proyectivo de orden q , $L^* = \{p, x_1, x_2, \dots, x_q\}$ una línea de Π_q , $\mathcal{L}_p = \{L^*, L_p^1, L_p^2, \dots, L_p^q\}$ las líneas por p y G su gráfica de incidencia. Entonces las siguientes estructuras son $(t+1)$ -coregulares en G para $t \geq 0$ y $q \geq t+3$:*

$$t = 0: \mathbb{P} = \{p, L^*\} \cup \bigcup_{k=0}^1 \{D_k(L_p^1) \cup D_k(x_1)\}; \mathbb{A} = \emptyset.$$

$$t \geq 1: \mathbb{P} = \begin{cases} P_1 & \text{si } t = 1; \\ P_1 \cup P_2 & \text{si } t \geq 2. \end{cases}; \mathbb{A} = \begin{cases} E_1 & \text{si } t = 1; \\ E_1 \cup E_2 & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

Demostración: Consideremos en G la partición distancia empleada en el Teorema 2, y sea H la subgráfica que resulta al borrar de G todos los vértices de \mathbb{P} y todas las aristas de \mathbb{L} . Veamos que H es una gráfica bipartita $(q-t)$ -regular de cuello 6.

Caso $t = 0$: (Teorema 2)

Caso $t \geq 1$: Sea A el conjunto de vértices en H que pertenecen a $X_1 \cup Y_1$ y B los que pertenecen a $X_2 \cup Y_2$. Entonces $V(H) = A \cup B_i$, $i = 1, 2$ donde $A = \{D_0(L_p^{t+1}), \dots, D_0(L_p^q)\} \cup \{D_0(x_{t+3}), \dots, D_0(x_q)\}$, $B_1 = \bigcup_{j=t+1}^q \{D_1(L_p^j) - \{m_j\}\} \cup \{D_1(x_{t+3}), \dots, D_1(x_q)\} \cup \{D_1(x_{t+2}) - \{M\}\}$ si $t = 1$ y $B_2 = B_1 \cup \{A_1, \dots, A_{t-1}\}$ si $t \geq 2$. Veamos que cada uno de los vértices de H tiene grado $q-t$. Dividiremos la prueba en dos casos como en la sección anterior, cuando $t = 1$ y cuando $t \geq 2$:

Subcaso $t = 1$:

1. $\mathcal{N}_H(D_0(L_p^j)) = \mathcal{N}_G(D_0(L_p^j)) - \{p, m_j\}$, $j = 2, \dots, q$.
2. $\mathcal{N}_H(D_0(x_j)) = \mathcal{N}_G(D_0(x_j)) - \{L^*, l\}$, l vecino de m_1 en G , $j = 4, \dots, q$.
3. Si $x \in \bigcup_{j=2}^q \{D_1(L_p^j) - \{m_j\}\}$ entonces $\mathcal{N}_H(x) = \mathcal{N}_G(x) - \{a, b\}$, con $a \in D_1(x_1)$ y $b \in D_1(x_2)$ respectivamente.
4. Si $x \in D_1(x_3) - \{M\}$ entonces $\mathcal{N}_H(x) = \mathcal{N}_G(x) - \{x_3, l\}$, $l \in D_1(L_p^1) - \{m_1\}$.
5. Si $x \in \{D_1(x_4), \dots, D_1(x_q)\}$, $\mathcal{N}_H(x) = \mathcal{N}_G(x) - \{x_j, m_1\}$ si $(x, m_1) \in A(G)$, $j = 4, \dots, q$; de lo contrario $\mathcal{N}_H(x) = \mathcal{N}_G(x) - \{m_j, r\}$, $r \in D_1(L_p^1) - \{m_1\}$.

Por lo tanto H es una gráfica bipartita $(q-1)$ -regular. Ver Figura 6.

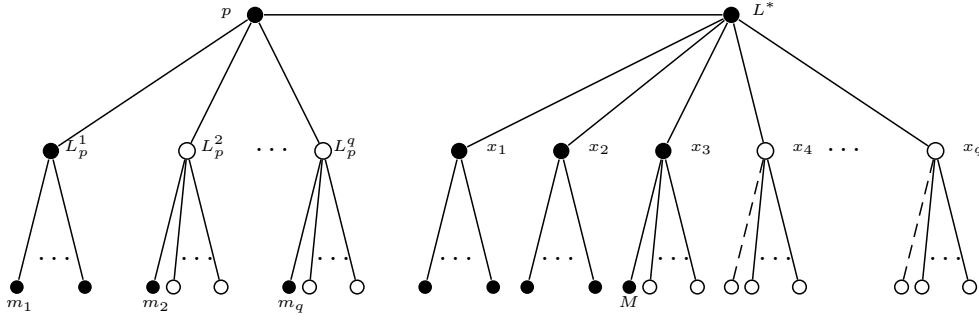


Figura 2.3: Ilustración del subcaso $t = 1$. El conjunto de vértices borrados en G se ilustran con puntos negros, y algunas incidencias borradas con líneas punteadas.

Subcaso $t \geq 2$:

1. $\mathcal{N}_H(D_0(L_p^j)) = \mathcal{N}_G(D_0(L_p^j)) - \{p, m_j, D\}$, donde $D = \{a_{ij} : (a_{ij}, A_i) \in A(G), i = 1, \dots, t-1, j = t+1, \dots, q\}$. Notemos que para cada j el tamaño de D es $t-1$.
2. $\mathcal{N}_H(D_0(x_j)) = \mathcal{N}_G(D_0(x_j)) - \{L^*, F\}$, donde $F = \{L_{ij} : (L_{ij}, m_i) \in A(G), i = 1, \dots, t, j = t+3, \dots, q\}$. Así, $|F| = t$ para cada j .
3. Si $x \in D_1(L_p^j)$ siempre pierde a t vecinos, cada uno de los cuales pertenece al conjunto $D_1(x_i)$, $i = 1, \dots, t$. Además
 - a) Si $(x, A_i) \in A(G)$ también pierde la adyacencia con L_p^j .
 - b) Si no, entonces x pierde como vecino un vértice de $D_1(x_{t+1}) - \{A_1, \dots, A_t\}$.
4. $\mathcal{N}_H(A_i) = \mathcal{N}_G(A_i) - \{l_{i1}, \dots, l_{it}, x_{t+1}\}$, $l_{ij} \in D_1(L_p^j)$, $j = 1, \dots, t$.
5. Si $x \in D_1(x_{t+2}) - \{M\}$ entonces $\mathcal{N}_H(x) = \mathcal{N}_G(x) - \{l_1, \dots, l_t, x_{t+2}\}$, $l_i \in D_1(L_p^i)$, $i = 1, \dots, t$.
6. $x \in D_1(x_j)$, $j = t+3, \dots, q$ pierde la adyacencia con l_i , $l_i \in D_1(L_p^i)$, $i = 1, \dots, t$. Además:
 - a) Si $(x, m_i) \in A(G)$ entonces también pierde a x_j como vecino.
 - b) Si no, x también pierde a m_k para alguna $k \in \{t+1, \dots, q\}$ como vecino.

Por lo tanto todos los vértices de H tienen grado $q-t$, y así el resultado es válido. Ver Figura 7. ■

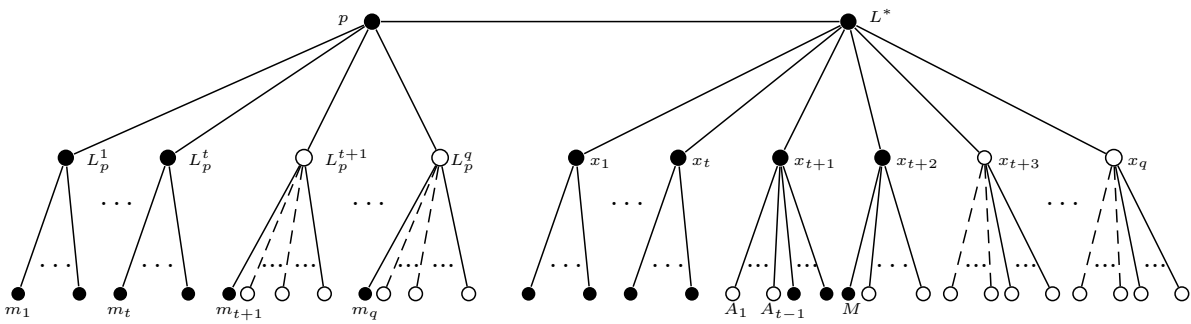


Figura 2.4: Ilustración del subcaso $t \geq 2$. El conjunto de vértices borrados en G se ilustran con puntos negros, y algunas incidencias borradas con líneas punteadas.

Capítulo 3

Construcción algebraica

En este capítulo se detallará un método para obtener matrices de incidencia de gráficas bipartitas k -regulares de cuello 6 con $2(qk - 2)$ vértices para k un entero y q una potencia de primo tal que $k \leq q - 1$.

Para fines prácticos se introducirá notación útil para el resto del capítulo. Si n es un entero no negativo denotaremos con $[[n]]$ al conjunto $\{0, 1, \dots, n\}$ y con $[n]$ a $[[n]] \setminus \{0\}$. Sea A una matriz de $\alpha \times \beta$ con entradas en el conjunto potencia de $[[n]]$. Sea $P_x(A)$ una matriz del mismo orden que A con entradas en $\{0, 1\}$ que satisfaga $(P_x(A))_{ij} = 1$ si y sólo si $x \in A_{ij}$. Diremos que $P_x(A)$ es la matriz posición del símbolo x en A .

La matriz posición de cada símbolo en A diferente de cero da origen a la siguiente $(0, 1)$ -matriz $\mathcal{P}(A)$ de orden $\alpha \times n\beta$ llamada la matriz posición de A :

$$[\mathcal{P}(A)] = [P_1(A) \dots P_n(A)].$$

Sea $\{A^1, A^2, \dots, A^s\}$ una familia de s matrices con el mismo número de columnas cuyos elementos son subconjuntos de $[[n]]$. La $(0, 1)$ -matriz generada por las matrices posición de todas éstas es la matriz posición de la familia $\mathcal{F} = \{A^1, A^2, \dots, A^s\}$ que a continuación se muestra:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}(A^1) \\ \mathcal{P}(A^2) \\ \vdots \\ \mathcal{P}(A^s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(A^1) & \dots & P_n(A^1) \\ P_1(A^2) & \dots & P_n(A^2) \\ \vdots & & \vdots \\ P_1(A^s) & \dots & P_n(A^s) \end{pmatrix},$$

Sea I_n la matriz identidad y denotemos por SI_n la matriz obtenida de I_n al reemplazar cada uno con un subconjunto S de $[n]$. Es fácil ver que la matriz posición de SI_n es la matriz de incidencia de un plano parcial que consiste de n líneas paralelas. Llamaremos arreglo de

r símbolos y n columnas a la matriz de $r \times n$

$$O_{r,n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r & \dots & r \end{pmatrix}$$

Cuando $r = n$ el arreglo es denotado por O_n . Es directo probar que la matriz posición de $O_{r,n}$ no tiene submatrices de 2×2 llenas de unos, es decir, $[\mathcal{P}(O_{r,n})]$ es la matriz de incidencia de un plano parcial.

En [2] se prueba que la matriz posición de cierta familia de $q - 1$ cuadrados latinos forma parte de la matriz de incidencia de un plano proyectivo de orden q . A continuación enunciaré el resultado de manera precisa y pondré la prueba del inciso (ii) el cual corresponde a la primera parte de la prueba del Corolario 1.4.

Teorema 4 *Sea q una potencia de primo y F_q un campo de Galois finito con q elementos. Consideremos los cuadrados latinos $\Sigma^u = [u(i + j)]$ con $u, i, j \in \mathbb{F}_q$, $u \neq 0$, y los cuadrados latinos Σ_q^u obtenidos de Σ^u al reemplazar 0 con q . Entonces los siguientes enunciados son válidos:*

- (i) *La matriz posición A de $\{\Sigma_q^1, \Sigma_q^2, \dots, \Sigma_q^{q-1}, [q]I_q, O_q\}$ es la matriz de incidencia de un plano afin de orden q . Además, si j_{q+1} es la matriz renglón de $1 \times (q + 1)$ llena de unos, la siguiente $(0, 1)$ -matriz es la matriz de incidencia de un plano proyectivo de orden q .*

A	$\mathcal{P}(O_{q+1,q})^\top$
$0 \dots 0$	j_{q+1}

- (ii) *Sea M la matriz posición de $\{\Sigma^1, \Sigma^2, \dots, \Sigma^{q-2}, [q-1]I_q, O_{q-1,q}\}$. Así, $[M|\mathcal{P}(O_{q-1,q})^\top]$ es la matriz de incidencia de una gráfica bipartita q -regular de cuello 6 y $q^2 - 1$ vértices en cada conjunto partito.*

Demostración: Asumamos que es cierto el inciso (i). Veamos que la matriz posición M de $\{\Sigma^1, \Sigma^2, \dots, \Sigma^{q-2}, [q-1]I_q, O_{q-1,q}\}$ es una submatriz del bloque A de (3.1). En realidad, Σ^u se obtiene al reemplazar q con 0 en Σ_q^u . Esto es equivalente a borrar en A las últimas q columnas. Además, ahora no es considerada la matriz Σ^{q-1} , lo cual es equivalente a borrar en A los q renglones correspondientes a la matriz posición de Σ^{q-1} . Al considerar $O_{q-1,q}$ en lugar de O_q equivale a borrar de A el último renglón. Por lo tanto $[M|\mathcal{P}(O_{q-1,q})^\top]$ es una submatriz de (3.1) y así es libre de J_2 . Esta $(0, 1)$ -matriz tiene $q^2 - 1$ renglones y $(q^2 - q) + (q - 1) = q^2 - 1$ columnas y, por construcción existen q unos en cada renglón y en

cada columna. De aquí que ésta es la matriz de incidencia de una gráfica bipartita q -regular de $q^2 - 1$ vértices en cada conjunto partito. Notemos también que el número de vértices de la gráfica construida es estrictamente menor que la cota inferior para cuello 8. De aquí que la gráfica tiene cuello 6. ■

Supongamos que $t \geq 1$. Sea Σ_t^u la matriz obtenida de Σ_q^u al borrar primero la última columna y después reemplazar cualquier $q - i$, ($i = 0, \dots, t - 1$) con cero. Para $t \geq 2$ sea $\Sigma_{t^*}^{q-t-1}$ la matriz de orden $(t - 1) \times (q - 1)$ que consiste de los $t - 1$ renglones de Σ_t^{q-t-1} , digamos i_1, i_2, \dots, i_{t-1} tales que $(q - t - 1)(i_j + q - 1) \in \{0, q - 1, \dots, q - t + 1\}$; y sea $O_{q-t, q-1}$ la matriz obtenida de $O_{q-t, q-1}$ al cambiar las entradas $(O_{q-t, q-1})_{sj} = s$ en cualquier columna j tal que $(\Sigma_{t^*}^{q-t-1})_{hj} = s$. Más aún, sea $O_{q-t-2, q}^*$ la matriz obtenida de $O_{q-t-2, q}$ al cambiar las entradas $(O_{q-t-2, q})_{uj} = u$ por cero en cualquier columna j tal que en el renglón j de Σ_t^u se tienen $q - t$ símbolos diferentes de cero.

Teorema 5 *Sea $q \geq 4$ una potencia de primo y \mathbb{F}_q un campo de Galois finito de q elementos. Entonces los siguientes enunciados son válidos:*

- (i) *Sea N la matriz posición de $\{\Sigma_1^1, \dots, \Sigma_1^{q-3}, [q-1]I_{q-1}, O_{q-1}\}$. Entonces $[N|\mathcal{P}(O_{q-3, q}^*)^\top]$ es la matriz de incidencia de una $(q - 1)$ gráfica bipartita regular de cuello 6 con $q^2 - q - 2$ vértices en cada conjunto partito.*
- (ii) *Sea t un entero tal que $2 \leq t \leq q - 3$, y sea R la matriz posición de la familia de matrices $\{\Sigma_t^1, \dots, \Sigma_t^{q-t-2}, \Sigma_{t^*}^{q-t-1}, [q-t]I_{q-1}, O_{q-t, q-1}\}$. Entonces $[R|\mathcal{P}(O_{q-t-2, q}^*)^\top]$ es la matriz de incidencia de una $(q - t)$ gráfica bipartita regular de cuello 6 con $q^2 - tq - 2$ vértices en cada conjunto partito.*

Demostración: (i) Etiquetemos las columnas y los renglones de la matriz dada en (3.1) desde 1 hasta $q^2 + q + 1$. Veamos que la matriz $B = [N|\mathcal{P}(O_{q-3, q}^*)^\top]$ es submatriz de (3.1). Realmente, Σ_1^u se obtiene de Σ_q^u al borrar el símbolo q con cero y borrando la última columna. Esto es equivalente a borrar en (3.1) las columnas jq , $j = 1, \dots, q - 1$ y columnas $(q - 1)^2 + 1, \dots, q^2$. Más aun, ahora las dos matrices Σ_q^{q-2} , Σ_q^{q-1} no son consideradas, lo cual es equivalente a borrar de (3.1) los $2q$ renglones correspondientes a la matriz posición de Σ_q^{q-2} , Σ_q^{q-1} . Y tomar $\{[q-1]I_{q-1}, O_{q-1}\}$ en lugar de $\{[q]I_{q-1}, O_q\}$ es lo mismo que borrar en (3.1) los dos renglones q^2 y $q^2 + q$. Finalmente, el renglón $q^2 + q + 1$ y todas las columnas restantes llenas de ceros son también borrados. Consecuentemente, $B = [N|\mathcal{P}(O_{q-3, q}^*)^\top]$ es una submatriz de (3.1) y de aquí que es libre de J_2 .

Por otro lado, ya que la última columna ha sido borrada de cada matriz Σ_q^u , entonces la matriz posición de cada símbolo de Σ_1^u tiene orden $q \times (q - 1)$, de aquí que B tiene $(q-1)^2 + q - 3 = q^2 - q - 2$ columnas, y claramente B también tiene $(q-3)q + 2(q-1) = q^2 - q - 2$ renglones. Además, cada renglón de Σ_1^u tiene $q - 2$ símbolos distintos de cero excepto que

el renglón de Σ_q^u el cual tuvo un símbolo q en la última columna; con más precisión, el elemento $i \in \mathbb{F}_q$ que satisface $u(i + q - 1) = 0$ es el renglón i de Σ_1^u el cual tiene $q - 1$ símbolos no cero y cualquier otro renglón tiene $q - 2$ de estos. Debido a que la forma de la matriz $O_{q-3,q}^*$ ha sido definida podemos concluir que B tiene $q - 1$ unos en cada renglón. Para ver que cada columna de B tiene $q - 1$ unos es necesario observar que cada columna de Σ_1^u tiene $q - 1$ símbolos distintos de cero, y cada símbolo aparece justo una vez en cada columna de Σ_1^u ya que son cuadrados latinos. Por lo tanto, la matriz posición de cada matriz de N contribuye con exactamente un uno en cada columna de B .

(ii) Claramente $C = [R|\mathcal{P}(O_{q-t-2,q}^*)^\top]$ es una submatriz de la matriz $[N|\mathcal{P}(O_{q-3,q}^*)^\top]$ del punto (i) al cambiar algunos unos por ceros, de aquí que C es libre de J_2 . Por otro lado, ya que los símbolos $q - 1, \dots, q - t + 1$ han sido borrados de cada matriz Σ_1^u , entonces las últimas $(t - 1)(q - 1)$ columnas han sido borradas de N . Al tomar $\mathcal{P}(O_{q-t-2,q}^*)^\top$ en lugar de $\mathcal{P}(O_{q-3,q}^*)^\top$ es equivalente a borrar las últimas $t - 1$ columnas. Por tanto, C tiene $q^2 - q - 2 - (t - 1)(q - 1) - (t - 1) = q^2 - tq - 2$ columnas. Además, ya que R es la matriz posición de $\{\Sigma_t^1, \dots, \Sigma_t^{q-t-2}, \Sigma_{t^*}^{q-t-1}, [q-t]I_{q-1}, O_{q-t,q-1}\}$ se sigue que el número de renglones de C es $(q - t - 2)q + (t - 1) + q - 1 + (q - t) = q^2 - tq - 2$.

Además, cada renglón de Σ_t^u , $u = 1, \dots, q - t - 2$ tiene $q - t - 1$ símbolos distintos de cero excepto aquellos renglones de Σ_q^u que tuvieron un símbolo en $\{q - t + 1, \dots, q - 1, q\}$ en la última columna; con mayor precisión, los elementos $i_l \in \mathbb{F}_q$ tales que $u(i_l + q - 1) = l$ para $l = 0, q - 1, \dots, q - t + 1$, son los renglones i_l de Σ_1^u los cuales tienen $q - t$ símbolos distintos de cero y cualquier otro renglón tiene $q - t - 1$ símbolos distintos de cero. Debido a que la forma de la matriz $O_{q-t-2,q}^*$ ha sido definida podemos concluir que cada renglón de C correspondiente a las matrices posición de Σ_t^u , $u = 1, \dots, q - t - 2$ tienen $q - t$ unos. más aun, los $t - 1$ renglones de $\Sigma_{t^*}^{q-t-1}$ ha sido seleccionada de Σ_t^{q-t-1} de tal forma que los símbolos $q, q - 1, \dots, q - t + 1$ están en la última columna. Entonces los renglones de C correspondientes a la matriz posición de $\Sigma_{t^*}^{q-t-1}$ tienen $q - t$ unos. también los renglones de $O_{q-t,q-1}$ tienen $q - t$ símbolos distintos de cero, ya que las entradas $(O_{q-t,q-1})_{sj} = s$ tales que $(\Sigma_{t^*}^{q-t-1})_{hj} = s$ han sido reemplazadas con cero. Por tanto, concluimos que cualquier renglón de C tiene $q - t$ unos y de manera similar podemos decir que cada columna tiene $q - t$ unos, así que omitimos esto. ■

Ejemplo. Para ilustrar el método que se plantea en el Teorema 5, consideremos el caso $q = 8$ y $t = 3$. Las matrices dadas en el Teorema 5 se indican a la izquierda y las matrices de incidencia correspondientes a la gráfica bipartita 5-regular de cuello 6 con 38 vértices en cada conjunto partito se muestran del lado derecho.

Bibliografía

- [1] C. Godsil and G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer, NY 2000.
- [2] P. Erdős and H. Sachs, *Reguläre Graphen gegebener Tailenweite mit minimaler Knotenzahl*, *Wiss. Z. Uni. Halle (Math. Nat.)*, 12 (1963), 251-257.
- [3] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, New York, 1996.
- [4] T. Pisanski, M. Boben, D. Marusic, A. Orbanic, A. Graovac, *The 10-cages and derived configurations*, *Discrete Mathematics* 275 (2004), 265-276.
- [5] J. Nešetřil, J. Matoušek, *Invitation to Discrete Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1999.
- [6] J.H. van Lint and R.M. Wilson, *A course in Combinatorics*, Cambridge University Press, UK 1994.
- [7] A. Gács and T. Héger, *On geometric constructions of (k, g) -graphs*, *Contributions to Discrete Mathematics*, 3(1)(2008)63-80.