



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE EL TEOREMA DEL MAPEO DE  
RIEMANN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MATEMÁTICO

PRESENTA:  
CRISTÓBAL FALCONI HOYOS

DIRECTOR DE TESIS:  
JOSÉ ANTONIO GÓMEZ ORTEGA



2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Sobre el teorema del mapeo de Riemann

Febrero del 2010

1. Datos del alumno

Falconi  
Hoyos  
Cristóbal  
55 54 05 90  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
091230250

2. Datos del tutor

M en C  
José Antonio  
Gómez  
Ortega

3. Datos del sinodal 1

Dr  
Javier  
Páez  
Cárdenas

4. Datos del sinodal 2

Dr  
Enrique Javier  
Elizondo  
Huerta

5. Datos del sinodal 3

Mat  
Julio César  
Guevara  
Bravo

6. Datos del sinodal 4

Mat  
Juan Pablo Roberto  
Márquez  
Arias

7. Datos del trabajo escrito

Sobre el teorema del mapeo de Riemann  
31 p  
2010

Agradezco a mi tutor y sinodales.  
A mis padres.

# Índice general

Preliminares	I
Introducción	1
1. Mapeos Conformes	2
2. Transformaciones de Möbius	5
3. Funciones univalentes	12
4. Familias Normales	17
5. Teorema de Riemann	22
Bibliografía	32

# Preliminares

La mayoría de la notación utilizada en el texto es de uso común en el estudio de la variable compleja, sin embargo cabe aclarar lo siguiente:

Por "región" entenderemos un subconjunto abierto y conexo del plano.

Denotaremos como  $B(z_0, r)$  al disco abierto con centro en un punto  $z_0$  y radio  $r$ ,  $\overline{B(z_0, r)}$  a su cerradura y  $C(z_0, r)$  a su frontera, la circunferencia con centro en  $z_0$  y radio  $r$ .

A lo largo de este trabajo asumiremos algunos resultados fundamentales del análisis complejo, para futura referencia los enlistamos aquí.

**Teorema 0.1 (del modulo máximo)** *Sea  $f$  analítica en una región  $A$ . Si  $|f|$  tiene un máximo local en  $z_0 \in A$ , entonces  $f$  es constante.*

**Teorema 0.2 (Lema de Schwarz)** *Si  $f : B(0, 1) \rightarrow \overline{B(0, 1)}$  es analítica con  $f(0) = 0$ , entonces  $|f(z)| \leq |z|$  para toda  $z \in B(0, 1)$  y  $|f'(0)| \leq 1$ . Si  $|f(z_0)| = |z_0|$  para algún  $z_0 \in B(0, 1)$ ,  $z_0 \neq 0$ , entonces  $f(z) = cz$  para toda  $z \in B(0, 1)$  y  $c$  una constante tal que  $|c| = 1$ .*

**Teorema 0.3 (Formula integral de Poisson)** *Sea  $f$  continua en  $\overline{B(z_0, \rho)}$  y analítica en  $B(z_0, \rho)$ . Entonces para  $z \in B(z_0, \rho)$ ,*

$$f(z_0 + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - (\frac{r}{\rho})^2}{|e^{i(\theta-t)} - \frac{r}{\rho}|^2} f(z_0 + \rho e^{it}) dt.$$

**Teorema 0.4** *Sea  $\gamma$  una curva cerrada simple. Si  $f$  es analítica en un abierto que contiene a  $\gamma$  y su interior, excepto por un numero finito de polos y ceros ninguno de los cuales está en  $\gamma$ , entonces*

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (Z_f - P_f)$$

donde  $Z_f$  y  $P_f$  son el numero de ceros y polos respectivamente en el interior de  $\gamma$ , contados con multiplicidades.

con la notación del teorema anterior,

**Teorema 0.5 (Rouche)** *Sea  $\gamma$  una curva cerrada simple. Si  $f, g$  son analíticas en una región que contiene a  $\gamma$  y su interior, excepto por un número finito de polos y ceros ninguno de los cuales está en  $\gamma$ , y además se satisface  $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$  para  $z \in \gamma$ , entonces  $Z_f - P_f = Z_g - P_g$ .*

**Teorema 0.6 (del mapeo abierto)** *Sean  $A \subset \mathbb{C}$  abierto y  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  analítica y no constante. Entonces la imagen bajo  $f$  de cualquier conjunto abierto es un conjunto abierto.*

# Introducción

Un resultado básico e importante de la teoría del análisis complejo es el conocido como Teorema del Mapeo de Riemann, que esencialmente describe a la clase de conjuntos conformemente equivalentes al disco unitario. Dos aspectos importantes en el problema de equivalencia conforme son: la existencia de la biyección conforme y la construcción de esta. Un acercamiento a estas cuestiones brinda una oportunidad para integrar diversos conocimientos que se adquieren en los primeros cursos de variable compleja. Por ejemplo, durante el desarrollo de la teoría necesaria para demostrar la existencia se recurre a resultados como la fórmula integral de Cauchy, el principio del módulo máximo y el teorema de Rouché entre otros. En la construcción de la transformación se usa, en conjunción con otros resultados, la fórmula integral de Poisson, la cual tiene aplicaciones relevantes en el problema de Dirichlet. El objetivo de este trabajo es dar un par de demostraciones del teorema de Riemann (una por construcción), accesibles para cualquiera con los conocimientos de un curso introductorio de variable compleja. Se intenta hacer un texto autocontenido, para lo cual se incluye una sección preliminar en la que se enuncian varios teoremas que usaremos frecuentemente, algunos de los cuales no forman parte de dicho curso. El resto de la tesis consta de cinco capítulos. En el capítulo 1 se hace un breve repaso de los aspectos geométricos de las transformaciones conformes. El capítulo 2 introduce a las transformaciones fraccionales lineales, se muestra que son las únicas biyecciones meromorfas de  $\mathbb{C}^\infty$  en sí mismo y se estudia su relación con la reflexión respecto a una circunferencia. En el capítulo 3 se prueba que las funciones univalentes son conformes y que las únicas funciones univalentes del disco unitario cerrado sobre sí mismo son transformaciones fraccionales lineales, además se analiza la convergencia uniforme de funciones univalentes. En el capítulo 4 se dan criterios para determinar cuando una familia de funciones es normal, específicamente, se demuestran los teoremas de Arzela-Ascoli para familias equicontinuas y de Montel para familias uniformemente acotadas. Por último, en el capítulo 5 se expone la demostración de Féjer y Riesz del teorema del mapeo de Riemann, también se da una demostración del teorema por construcción (Koebe), en la cual la biyección conforme se obtiene como el límite de una sucesión de funciones univalentes, y se hace una estimación del ritmo de convergencia de dicha sucesión (Ostrowski).

# Capítulo 1

## Mapeos conformes, la preservación de ángulos.

Supongamos que  $c_1(t)$ ,  $c_2(t)$  son dos parametrizaciones de curvas que se intersectan en un punto  $z_0 = c_1(t_0) = c_2(t_0)$  de una región  $A$  del plano formando un ángulo  $\alpha$ , es decir, el ángulo entre sus rectas tangentes en  $z_0$  es  $\alpha$ , y que  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  es una función analítica con  $f'(z_0) \neq 0$ , entonces las curvas  $f \circ c_1$  y  $f \circ c_2$  también se intersectan formando un ángulo  $\alpha$ . Esto es consecuencia de la regla de la cadena, pues si  $c(t)$  es diferenciable en  $t_0$  y  $f$  es diferenciable en  $z_0 = c(t_0)$  se cumple que  $f \circ c$  es diferenciable en  $t_0$  y  $(f \circ c)'(t_0) = f'(c(t_0)) \cdot c'(t_0) = f'(z_0) \cdot c'(t_0)$ , el vector tangente a  $f \circ c$  en  $f(z_0)$  es el vector tangente a  $c$  en  $z_0$  multiplicado por  $f'(z_0)$ , el efecto sobre  $c'(t_0)$  de esta multiplicación es una rotación con un ángulo  $\arg f'(z_0)$  seguido de una homotecia de un factor  $|f'(z_0)|$ , entonces para las curvas  $c_1$  y  $c_2$  se tiene que las tangentes a  $f \circ c_1$  y  $f \circ c_2$  se han girado el mismo ángulo  $\arg f'(z_0)$ .

Esta conservación de ángulos se puede apreciar intuitivamente de la siguiente manera, si las tangentes a  $c_1(t)$ ,  $c_2(t)$  en  $z_0$  forman ángulos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  con el eje real respectivamente (medidos en sentido positivo del eje real a la tangente), entonces el ángulo interior entre  $c_1$  y  $c_2$  es  $\alpha_2 - \alpha_1$ , y  $\alpha_2 - \alpha_1$  también es el ángulo entre las curvas  $f \circ c_1$  y  $f \circ c_2$  en  $f(z_0)$ .

Considerese  $z_1 = z_0 + re^{i\theta}$  un punto sobre la curva  $c_1$  a una distancia  $r$  de  $z_0$ , tal que  $z_1 \rightarrow z_0$  y  $\theta \rightarrow \alpha_1$  cuando  $r \rightarrow 0$ . Conforme  $z_1 \rightarrow z_0$  sobre  $c_1$ ,  $f(z_1) \rightarrow f(z_0)$  sobre  $f(c_1)$ , y  $\phi_1 = \arg(f(z_1) - f(z_0))$  tiende al ángulo que forma la tangente a  $f(c_1)$  en  $f(z_0)$ .

Si  $|f(z_1) - f(z_0)| = \rho$  entonces

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho e^{i\phi_1}}{r e^{i\theta}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho}{r} e^{i(\phi_1 - \theta)} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} \phi_1 - \theta &= \arg f'(z_0), \\ \lim_{r \rightarrow 0} \phi_1 &= \alpha_1 + \arg f'(z_0).\end{aligned}$$

El mismo argumento para un punto  $z_2$  sobre  $c_2(t)$  muestra que  $\lim_{r \rightarrow 0} \phi_2 = \alpha_2 + \arg f'(z_0)$  donde  $\phi_2 = \arg(f(z_2) - f(z_0))$ .

Mas aún, si  $f'$  tiene un cero de orden  $n$  en  $z_0$ , entonces el ángulo entre  $f(c_1)$  y  $f(c_2)$  es el ángulo entre  $c_1$  y  $c_2$  multiplicado por  $n+1$ , esto se sigue del desarrollo de Taylor para  $f$ , en una vecindad de  $z_0$ ,

$$\begin{aligned}f(z_1) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)(z - z_0)^2}{2} + \dots \\ &= f(z_0) + \frac{f^{(n+1)}(z_0)(z - z_0)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{f^{(n+2)}(z_0)(z - z_0)^{n+2}}{(n+2)!} + \dots\end{aligned}$$

y con la notación anterior

$$\begin{aligned}\rho e^{i\phi_1} &= f(z_1) - f(z_0) = \frac{f^{(n+1)}(z_0)(z - z_0)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{f^{(n+2)}(z_0)(z - z_0)^{n+2}}{(n+2)!} + \dots \\ &= \frac{f^{(n+1)}(z_0)(re^{i\theta})^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{f^{(n+2)}(z_0)(re^{i\theta})^{n+2}}{(n+2)!} + \dots,\end{aligned}$$

tomando el límite cuando  $r \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho e^{i\phi_1}}{r^{n+1}} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f^{(n+1)}(z_0)e^{i(n+1)\theta}}{(n+1)!} + \frac{f^{(n+2)}(z_0)re^{i(n+2)\theta}}{(n+2)!} + \dots \\ &= \frac{f^{(n+1)}(z_0)e^{i(n+1)\alpha_1}}{(n+1)!} = ae^{i(n+1)\alpha_1},\end{aligned}$$

de donde  $\lim_{r \rightarrow 0} \phi_1 = \arg a + (n+1)\alpha_1$ , similarmente  $\lim_{r \rightarrow 0} \phi_2 = \arg a + (n+1)\alpha_2$ .

A los mapeos que preservan tanto la magnitud como el sentido de los ángulos les llamaremos conformes, hemos visto que si  $f$  es analítica en  $z_0$  con  $f'(z_0) \neq 0$ , entonces  $f$  es conforme en  $z_0$ . Es posible probar que si  $f$  es una biyección que preserva ángulos y  $f_x, f_y$  son continuas entonces  $f$  es analítica con  $f' \neq 0$ , así, para los propósitos de este trabajo consideraremos como equivalentes las nociones "conforme" y "analítica con derivada distinta de cero". Es interesante notar que, puesto que la conjugación compleja equivale a la reflexión respecto al eje real, si  $f$  es conforme entonces  $g = \bar{f}$  preserva la magnitud de los ángulos pero invierte su sentido, a este tipo de mapeos se les llama indirectamente conformes.

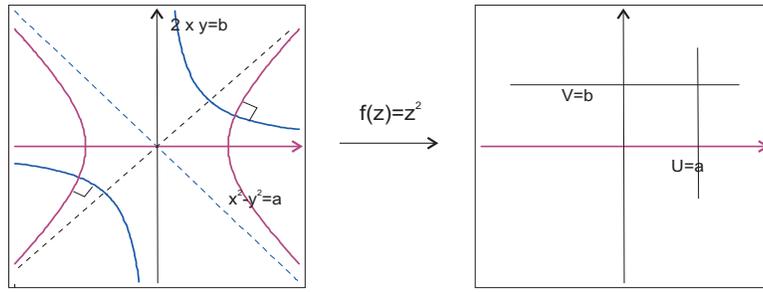
A manera de ejemplo del efecto de un mapeo conforme consideremos la función  $f(z) = z^2$ .

Si  $z$  es de la forma  $re^{i\theta}$  entonces  $f(z) = r^2e^{i2\theta}$  y la región angular  $\alpha < \theta < \beta$  es transformada sobre la región  $2\alpha < \arg f(z) < 2\beta$ , observese que si  $\beta - \alpha > \pi$ , la

imagen cubre una parte del plano dos veces.

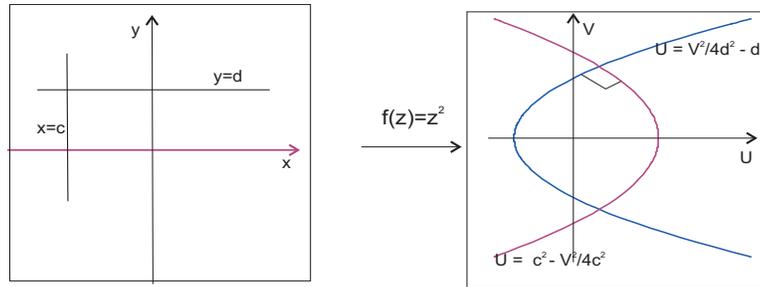
Si  $z$  es de la forma  $x+iy$  entonces  $f(z) = x^2 - y^2 + i2xy = u+iv$ , las preimágenes de las rectas  $u = a, v = b$  son las hipérbolas  $x^2 - y^2 = a, 2xy = b$  respectivamente, las primeras son asíntóticas a las rectas  $y = x, y = -x$  y las asíntotas de las segundas son los ejes. Si  $a$  y  $b$  no son ambos cero y las hipérbolas se intersectan en un punto  $z_0$ , entonces  $z_0 \neq 0$  y  $f'(z_0) = 2z_0 \neq 0$ , por lo tanto el ángulo de intersección de ambas curvas es el mismo que el ángulo de intersección entre las curvas  $u = a, v = b$ , es decir  $\frac{\pi}{2}$ .

Si  $a = b = 0$ , como  $f'$  tiene un cero simple en el origen, el ángulo de intersección de las curvas  $u = 0, v = 0$  es el doble del ángulo de intersección de las "hipérbolas" preimágen, y por lo tanto éstas se intersectan formando un ángulo de  $\frac{\pi}{4}$ .



Similarmente, las imágenes de las curvas  $x = c, y = d, c, d \neq 0$ , son las parábolas  $u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}, u = \frac{v^2}{4d^2} - d^2$  respectivamente, la primera familia de parábolas abre hacia la izquierda mientras que la segunda lo hace hacia la derecha, y ambas familias se intersectan formando un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$ .

Los ejes  $x = 0, y = 0$  son transformados en las semirectas  $v = 0, u \leq 0$  y  $v = 0, u \geq 0$  respectivamente, que se intersectan formando un ángulo  $\pi$ , acorde con el hecho de que  $f'$  tiene un cero simple en el origen.



## Capítulo 2

# Transformaciones de Möbius, inversión

En esta sección estudiaremos algunas de las propiedades de una clase importante de funciones conformes conocidas como transformaciones fraccionales lineales o transformaciones de Möbius, que definiremos a continuación.

**Definición 2.1** Una transformación fraccional lineal o de Möbius es una función de la forma  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , con  $ad - bc \neq 0$ .

La condición  $ad - bc \neq 0$  en la definición excluye a las funciones constantes, pues por la regla del cociente para la derivada  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  es analítica en  $z \neq \frac{-d}{c}$  y  $f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ , si  $ad - bc = 0$  entonces  $f'$  es idénticamente cero y en consecuencia  $f$  es constante.

Un hecho básico acerca de las transformaciones fraccionales lineales es el siguiente.

**Teorema 2.1** Las transformaciones de Möbius forman un grupo bajo la composición.

**Dem.**

La asociatividad de la composición de funciones es un hecho conocido, verificaremos la cerradura y existencia de neutro e inversos.

Sean  $\phi_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $\phi_2(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$  transformaciones de Möbius, un cálculo simple muestra que

$$\phi_2 \circ \phi_1(z) = \frac{(ea + fc)z + (eb + fd)}{(ga + ch)z + (gb + dh)} = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

y que

$$a'd' - b'c' = (ad - bc)(eh - fg) \neq 0.$$

Claramente  $Id(z) = z$  es de Möbius y funciona como neutro para la composición de funciones. Por último, si  $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $ad - bc \neq 0$ , es fácil ver que  $\phi^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}$  satisface  $\phi \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \phi = Id$ . ■

Una transformación de Möbius  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  en principio no está definida en  $\frac{-d}{c}$ , se puede convenir extendiendo a  $\mathbb{C}^\infty$  tanto en el dominio como en el codominio al hacer  $f(\frac{-d}{c}) = \infty$  y  $f(\infty) = \frac{a}{c}$  si es el caso que  $c \neq 0$ . Si  $c = 0$ ,  $f$  tiene sentido en todo  $\mathbb{C}$  y en este caso se acuerda que  $f(\infty) = \infty$ .

Extendidas de esta manera, las transformaciones fraccionales lineales son las únicas biyecciones meromorfas en  $\mathbb{C}^\infty$ , probaremos este hecho más adelante.

Recordemos que una función racional es una función de la forma  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ , donde  $p(z)$ ,  $q(z)$  son polinomios y  $q(z)$  no es idénticamente cero. Podemos ahora enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 2.2**  $f(z)$  es una función meromorfa en  $\mathbb{C}^\infty$  si y sólo si  $f(z)$  es una función racional.

**Dem.**

Supongamos primero que  $f : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$  es una función meromorfa. Probaremos que  $f$  es racional. Sean  $\beta_1, \dots, \beta_s$  los polos de  $f$  en  $\mathbb{C}$  de orden  $n_1, \dots, n_s$  respectivamente. La función  $p(z) = (z - \beta_1)^{n_1} \cdots (z - \beta_s)^{n_s} f(z) = q(z)f(z)$  es entera y por lo tanto su desarrollo en series de Taylor alrededor de cero es válido en todo  $\mathbb{C}$ ,

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Por hipótesis  $f$  es meromorfa en  $\infty$ , equivalentemente, la función compuesta  $f(\frac{1}{z})$  es meromorfa en cero, se sigue que  $p(\frac{1}{z}) = (\frac{1}{z} - \beta_1)^{n_1} \cdots (\frac{1}{z} - \beta_s)^{n_s} f(\frac{1}{z})$  es meromorfa en cero. Por otro lado  $p(\frac{1}{z}) = a_0 + a_1 \frac{1}{z} + a_2 \frac{1}{z^2} + \dots$ , de manera que  $a_n = 0$  a partir de algún  $n$  y  $p$  es un polinomio. Por lo tanto  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  es racional.

Ahora sea  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  con  $p(z)$  y  $q(z)$  polinomios sin factores comunes. Claramente  $f$  es analítica para  $z \neq \infty$  y cuando  $q(z) \neq 0$ .

Si  $z_0 \neq \infty$  es un cero de  $q(z)$  entonces  $f$  tendrá un polo en  $z_0$  de orden la multiplicidad de  $z_0$  como cero de  $q$ .

Si  $z = \infty$ , entonces  $f$  será analítica si  $\text{grado}(q) \geq \text{grado}(p)$ , y tendrá un polo si  $\text{grado}(q) < \text{grado}(p)$ .

En cualquier caso  $f$  es meromorfa en  $\mathbb{C}^\infty$ . ■

El grado de una función racional  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ , donde  $p(z)$  y  $q(z)$  no tienen factores comunes se define como el máximo de los grados de  $p$  y  $q$ . Tenemos entonces que:

**Teorema 2.3** Si  $f : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$  es una función racional de grado  $d > 0$ , entonces  $f$  toma cada valor  $c \in \mathbb{C}^\infty$  exactamente  $d$  veces contando multiplicidades.

**Dem.**

Sea  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  con  $p(z)$  y  $q(z)$  polinomios sin factores comunes.

Tomemos primero  $c = \infty$ .

Para  $z \in \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \infty$  si y sólo si  $q(z) = 0$ , y sabemos que  $q(z) = 0$  tiene  $\text{grado}(q)$  soluciones. Si  $\text{grado}(p) \leq \text{grado}(q)$  entonces tales raíces son los únicos polos de

$f$ . Si  $\text{grado}(p) > \text{grado}(q)$  entonces  $f$  tiene en  $\infty$  un polo de orden  $\text{grado}(p) - \text{grado}(q)$ . En ambos casos el número de soluciones de  $f(z) = \infty$  es  $\text{grado}(f) = \max\{\text{grado}(p), \text{grado}(q)\}$ .

Ahora tomemos  $c \neq \infty$ .

Como  $\text{grado}(f) > 0$ , se tiene que  $f$  no es constante, por lo que

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - c} = \frac{q(z)}{p(z) - cq(z)}$$

es una función racional, además las soluciones de  $f(z) = c$  son precisamente los polos de  $g(z)$ , cuyo número contando multiplicidades es, por el primer argumento,  $\text{grado}(g)$ . Pero si  $p(z)$  y  $q(z)$  son coprimos, también lo son  $q(z)$  y  $p(z) - cq(z)$ , de manera que

$$\text{grado}(g) = \max\{\text{grado}(q), \text{grado}(p - cq)\} = \max\{\text{grado}(q), \text{grado}(p)\} = \text{grado}(f),$$

por lo que la demostración está completa. ■

Como corolario de los teoremas 2.2 y 2.3 se tiene el resultado mencionado anteriormente.

**Teorema 2.4**  $f(z)$  es una biyección meromorfa en  $\mathbb{C}^\infty$  si y sólo si  $f(z)$  es una transformación fraccional lineal.

**Dem.**

Sea  $f$  una biyección meromorfa en  $\mathbb{C}^\infty$ .

Por el teorema 2.2  $f$  es racional. Además  $\text{grado}(f) = 1$ , pues si  $\text{grado}(f) > 1$  entonces  $f$  no es inyectiva por el teorema 2.3, y si  $\text{grado}(f) = 0$  entonces  $f = \text{cte}$  tampoco es inyectiva. Por lo tanto  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $c$  y  $d$  no ambos cero. Además  $ad - bc \neq 0$ , ya que en caso contrario  $f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$  sería cero y entonces  $f$  sería constante, una contradicción.

Por lo tanto  $f$  es una transformación fraccional lineal.

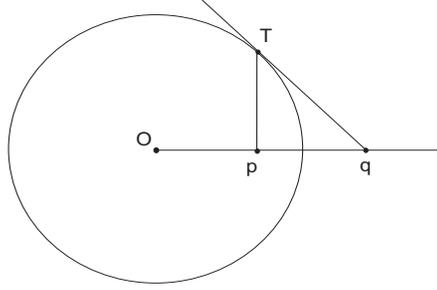
Ahora sea  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  una transformación fraccional lineal. Es fácil ver que la condición  $ad - bc \neq 0$  es equivalente a  $\text{grado}(f) = 1$ . El resto de la demostración es inmediato a partir del teorema 2.3. ■

Como veremos a continuación, las transformaciones de Möbius están relacionadas con el concepto de inversión, esto es, la reflexión respecto a una circunferencia.

**Definición 2.2** Dos puntos distintos  $p, q \in \mathbb{C}$  son inversos respecto a la circunferencia  $C(z_0, \rho) = \{z; |z - z_0| = \rho\}$ ,  $\rho > 0$ , si son colineales con  $z_0$ , están en el mismo lado de  $z_0$ , y  $|p - z_0||q - z_0| = \rho^2$ . Definimos también el inverso de  $z_0$  respecto a  $C(z_0, \rho)$  como  $\infty$ .

Dado un punto  $p \in B(z_0, \rho) = \{z; |z - z_0| < \rho\}$ ,  $p \neq z_0$ , la construcción geométrica del punto  $q$  inverso de  $p$  respecto a  $C(z_0, \rho)$  se puede hacer de la siguiente

manera, si  $L$  es la línea por  $z_0$  y  $p$ , trácese la perpendicular a  $L$  por  $p$ , en el punto  $T$  en el que dicha perpendicular intersecta a  $C(z_0, \rho)$  tomese la tangente a la circunferencia, la intersección de la tangente con  $L$  es  $q$ , esto se sigue de la semejanza de los triángulos  $\triangle Tz_0p$  y  $\triangle Tz_0q$ . Si el punto  $q$  está fuera de la circunferencia su inverso  $p$  queda determinado geoméricamente con la misma construcción, es decir, desde  $q$  trácese la tangente a la circunferencia con  $T$  el punto de tangencia, después trácese la perpendicular a  $z_0q$  desde  $T$ , el punto de intersección de la perpendicular y  $z_0q$  es  $p$ , el inverso de  $q$  respecto a  $C(z_0, \rho)$ .



Los siguientes dos teoremas dan una descripción de la circunferencia en el plano complejo respecto a la cual son inversos dos puntos  $p$  y  $q$ .

**Teorema 2.5** Si  $p, q \neq \infty$  son puntos inversos respecto a  $C(z_0, \rho)$ , entonces  $C(z_0, \rho)$  es un subconjunto de  $\{z; |\frac{z-p}{z-q}| = \frac{m}{\rho} \neq 1\}$  donde  $m = |p - z_0| \neq 0$ .

**Dem.**

Sea  $p = z_0 + me^{i\mu}$ ,  $m > 0$ .

Como  $p$  y  $q$  son inversos respecto a  $C(z_0, \rho)$ , se cumple que  $z_0, p, q$  son colineales,  $p, q$  están del mismo lado de  $z_0$ , y  $|p - z_0||q - z_0| = \rho^2$ , de donde  $\arg(q - z_0) = \arg(p - z_0) = \mu$  y  $|q - z_0| = \frac{\rho^2}{m}$ .

Por lo tanto  $q = z_0 + \frac{\rho^2}{m}e^{i\mu}$ .

Si  $z \in C(z_0, \rho)$ ,  $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$  para algún  $\theta$ , y

$$\begin{aligned} \left| \frac{z-p}{z-q} \right| &= \left| \frac{(z_0 + \rho e^{i\theta}) - (z_0 + me^{i\mu})}{(z_0 + \rho e^{i\theta}) - (z_0 + \frac{\rho^2}{m}e^{i\mu})} \right| = \left| \frac{\rho e^{i\theta} - me^{i\mu}}{\rho e^{i\theta} - \frac{\rho^2}{m}e^{i\mu}} \right| \\ &= \frac{|\rho e^{i\theta} - me^{i\mu}|}{|\frac{\rho}{m}| |me^{i\theta} - \rho e^{i\mu}|} = \frac{m}{\rho} \frac{|\rho e^{i\theta} - me^{i\mu}|}{|me^{i\theta} - \rho e^{i\mu}|} = \frac{m}{\rho} \frac{|\rho e^{-i\theta} - me^{-i\mu}|}{|me^{i\theta} - \rho e^{i\mu}|} \\ &= \frac{m}{\rho} \frac{|e^{-i(\theta+\mu)}(\rho e^{i\mu} - me^{i\theta})|}{|me^{i\theta} - \rho e^{i\mu}|} = \frac{m}{\rho} \neq 1. \end{aligned}$$

(Si  $\frac{m}{\rho} = 1$  de  $|z_0 - p||z_0 - q| = \rho^2$  se tendría  $p = q$ .) ■

**Teorema 2.6** Sean  $p, q$  dos puntos distintos de  $\mathbb{C}$ . La ecuación  $|\frac{z-p}{z-q}| = k$ ,  $k \in \mathbb{R}^+$ ,  $k \neq 1, 0$  representa una circunferencia respecto a la cual  $p$  y  $q$  son puntos inversos.

**Dem.**

Sea  $z$  tal que  $|\frac{z-p}{z-q}| = k$ , ó equivalentemente  $|z-p|^2 = k^2|z-q|^2$ , desarrollando ambos lados de la igualdad,

$$\begin{aligned}(z-p)\overline{(z-p)} &= k^2(z-q)\overline{(z-q)}, \\ |z|^2 + |p|^2 - 2\operatorname{Re} z\bar{p} &= k^2|z|^2 + k^2|q|^2 - 2k^2\operatorname{Re} z\bar{q},\end{aligned}$$

despejando y agrupando términos

$$(1-k^2)|z|^2 + (|p|^2 - k^2|q|^2) - 2\operatorname{Re} z\overline{(p-k^2q)} = 0,$$

y como  $1-k^2 \neq 0$

$$|z|^2 + \left(\frac{|p|^2 - k^2|q|^2}{1-k^2}\right) - 2\operatorname{Re} z\overline{\left(\frac{p-k^2q}{1-k^2}\right)} = 0,$$

completando el módulo al cuadrado

$$\left|z - \frac{p-k^2q}{1-k^2}\right|^2 = \frac{k^2|p-q|^2}{(1-k^2)^2},$$

por último, tomando raíces se obtiene  $|z - \frac{p-k^2q}{1-k^2}| = \frac{k|p-q|}{(1-k^2)}$ , que es la ecuación de la circunferencia  $C(\frac{p-k^2q}{1-k^2}, \frac{|k||p-q|}{|1-k^2|})$ . Resta verificar que  $p$  y  $q$  son inversos respecto a esta, para ello observamos que  $p - \frac{p-k^2q}{1-k^2} = \frac{k^2(q-p)}{1-k^2}$  y  $q - \frac{p-k^2q}{1-k^2} = \frac{q-p}{1-k^2}$  tienen el mismo argumento y  $|\frac{k^2(q-p)}{1-k^2}| |\frac{q-p}{1-k^2}| = (\frac{|k||p-q|}{|1-k^2|})^2$ . ■

El conjunto  $S = \{z; |\frac{z-p}{z-q}| = 1\}$  representa una recta, pues si  $z \in S$  entonces  $z$  equidista de  $p$  y  $q$  y por lo tanto está en la mediatriz del segmento  $\overline{pq}$ , que es el conjunto de puntos equidistantes de  $p$  y  $q$ . Con esta motivación podemos considerar a una recta como una circunferencia degenerada ó una circunferencia que pasa por  $\infty$ , y definir  $p$  y  $q$  puntos inversos respecto a una recta si  $p$  y  $q$  son simétricos respecto a esta. Por el resto de este trabajo usaremos el término "circunferencia" para referirnos ya sea a una circunferencia ó a una línea recta, con esta convención tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 2.7** *Bajo una transformación de Möbius la imagen de una circunferencia es una circunferencia, y las imágenes de puntos inversos respecto a una circunferencia son puntos inversos respecto a la imagen de dicha circunferencia.*

**Dem.**

Sean  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $ad-bc \neq 0$ , y  $K$  una circunferencia en  $\mathbb{C}$ .

Por los teoremas 2.5 y 2.6 si  $p, q \neq \infty$  son dos puntos inversos respecto a  $K$  podemos representar a  $K$  como  $\{z; |\frac{z-p}{z-q}| = k, k \neq 0\}$ .

Por el teorema 2.4  $f$  es biyectiva, por lo tanto  $w \in f(K)$  si y solo si  $f^{-1}(w) \in K$ , esto es  $\frac{-dw+b}{cw-a} \in K$  ó

$$\left|\frac{\frac{-dw+b}{cw-a} - p}{\frac{-dw+b}{cw-a} - q}\right| = k. \quad (1)$$

Ahora bien, hay tres posibilidades: ó  $f(p), f(q) \neq \infty$ , ó alguno de los dos puntos  $p, q$  va a dar a  $\infty$  bajo  $f$  pero no ambos, pues  $f$  es inyectiva. En el primer caso, se tiene que  $cq + d, cp + d \neq 0$  y de la ecuación (1) se obtiene

$$\begin{aligned} k &= \left| \frac{\frac{-dw+b}{cw-a} - p}{\frac{-dw+b}{cw-a} - q} \right| = \left| \frac{-dw + b - p(cw - a)}{-dw + b - q(cw - a)} \right| \\ &= \left| \frac{\frac{-dw+b-p(cw-a)}{cp+d}}{\frac{-dw+b-q(cw-a)}{cq+d}} \right| = \left| \frac{cp+d}{cq+d} \right| = \left| \frac{-w + \frac{ap+b}{cp+d}}{-w + \frac{aq+b}{cq+d}} \right| \end{aligned}$$

de donde

$$\left| \frac{w - f(p)}{w - f(q)} \right| = k \left| \frac{cq + d}{cp + d} \right|,$$

y por el teorema 2.6 se sigue el resultado.

El caso  $f(q) = \infty$  se da solo si  $c \neq 0$  y  $cq + d = 0$ , despejando  $q = \frac{-d}{c}$  y sustituyendo en la ecuación (1) tenemos que

$$\begin{aligned} k &= \left| \frac{-dw + b - p(cw - a)}{-dw + b + (\frac{d}{c})(cw - a)} \right| = \frac{|-dw + b - p(cw - a)||c|}{|-ad + bc|} \\ &= \frac{|-w + \frac{ap+b}{cp+d}||c||cp + d|}{|-ad + bc|} \end{aligned}$$

ó  $|w - f(p)| = \frac{k|-ad+bc|}{|c||cp+d|}$ , que es la ecuación de una circunferencia con centro en  $f(p)$  y nuevamente se tiene el resultado.

Análogamente, si  $f(p) = \infty$  la ecuación para  $f(K)$  se convierte en  $|w - f(q)| = \frac{|ad-bc|}{k|c||cq+d|}$  ■

A continuación daremos un par de ejemplos que ilustran el uso de las transformaciones fraccionales lineales.

**Ejemplo 2.1** *Encontrar todas las transformaciones fraccionales lineales  $f : z \rightarrow w$  del semiplano superior cerrado  $\{z; \text{Im } z \geq 0\}$  al disco unitario cerrado  $\{w; |w| \leq 1\}$  que mandan al eje real en la circunferencia unitaria.*

### Solución

Supongamos que  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  es una transformación que cumple las condiciones del problema, entonces  $a, c \neq 0$ , pues si  $a = 0$ ,  $f(\infty) = 0$  y la imagen del eje real no sería la circunferencia unitaria, si  $c = 0$ ,  $f(\infty) = \infty$  y se tendría la misma contradicción. Por lo tanto  $f(\frac{-b}{a}) = 0$ ,  $f(\frac{-d}{c}) = \infty$ , y como  $0, \infty$  son puntos inversos respecto a  $C(0, 1)$  sus imágenes inversas deben ser puntos inversos respecto al eje real por el teorema 2.7 aplicado a  $f^{-1}$ , de manera que  $\frac{-b}{a} = \alpha$ , y  $\frac{-d}{c} = \bar{\alpha}$  con  $\text{Im } \alpha \neq 0$ , y entonces  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} \left( \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}} \right)$ .

Por otro lado, como la imagen del eje real es la circunferencia unitaria,  $1 = |f(0)|$

$= \left| \frac{a}{c} \right| \left| \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \right|$ , luego  $|c| = |a|$ , por lo que podemos asegurar que  $a = ce^{i\theta}$  con  $\theta \in \mathbb{R}$  y entonces  $f$  es de la forma  $f(z) = e^{i\theta} \left( \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}} \right)$ .

Finalmente,  $f(\alpha) = 0 \in B(0,1)$ , por lo que  $Im \alpha > 0$ .

Resta verificar que todas las transformaciones de la forma  $f(z) = e^{i\theta} \left( \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}} \right)$ , con  $\theta \in \mathbb{R}$  y  $Im \alpha > 0$  satisfacen las condiciones del problema.

Si  $Im z = 0$ ,  $z = \bar{z}$  y  $|f(z)| = |e^{i\theta}| \left| \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}} \right| = \frac{|z-\alpha|}{|z-\bar{\alpha}|} = 1$ .

Si  $Im z > 0$ , usando el hecho de que  $Im \alpha > 0$  es inmediato que  $Re z\bar{\alpha} > Re z\alpha$  y por lo tanto  $0 \leq (|z| - |\bar{\alpha}|)^2 \leq |z|^2 + |\alpha|^2 - 2Re z\bar{\alpha} < |z|^2 + |\alpha|^2 - 2Re z\alpha$ , de donde

$$1 > \frac{|z|^2 + |\alpha|^2 - 2Re z\bar{\alpha}}{|z|^2 + |\alpha|^2 - 2Re z\alpha} = \frac{(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha})}{(z - \bar{\alpha})(\bar{z} - \alpha)} = \frac{|z - \alpha|^2}{|z - \bar{\alpha}|^2} = |f(z)|^2$$

■

**Ejemplo 2.2** Sea  $f(z)$  analítica en  $B(0,1)$  con  $Im f(z) > 0$  para  $z \in B(0,1)$ , entonces  $|f'(0)| \leq 2Im f(0)$ .

### Solución

Por el ejemplo anterior, si  $\phi(z)$  es de la forma  $\phi(z) = e^{i\theta} \left( \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}} \right)$  con  $Im \alpha > 0$  entonces  $\phi$  manda la región  $\{z \mid Im z > 0\}$  en el disco unitario abierto  $\{z \mid |z| < 1\}$ . Como  $Im f > 0$ , si definimos  $g(z) = (\phi \circ f)(z)$  entonces  $|g(z)| < 1$  para todo  $z \in B(1,0)$ , si además elegimos  $\alpha = f(0)$ , entonces  $g(z) = e^{i\theta} \left( \frac{f(z)-f(0)}{f(z)-\overline{f(0)}} \right)$  satisface  $g(0) = 0$ , y por el lema de Schwarz,  $|g'(0)| \leq 1$ .

Derivando  $g$  obtenemos

$$g'(z) = e^{i\theta} \left( \frac{f'(z)(f(z) - \overline{f(0)}) - f'(z)(f(z) - f(0))}{(f(z) - \overline{f(0)})^2} \right) = \frac{e^{i\theta} f'(z)(f(0) - \overline{f(0)})}{(f(z) - \overline{f(0)})^2},$$

en particular,

$$g'(0) = \frac{e^{i\theta} f'(0)}{f(0) - \overline{f(0)}} = \frac{e^{i\theta} f'(0)}{2iIm f(0)},$$

sustituyendo en la desigualdad dada por el lema de Schwarz,

$$1 \geq |g'(0)| = \left| \frac{e^{i\theta} f'(0)}{2iIm f(0)} \right|,$$

luego se tiene que,

$$|f'(0)| \leq 2Im f(0).$$

■

Una última observación respecto a las transformaciones fraccionales lineales es la siguiente: si  $f = \frac{az+b}{cz+d}$  es de Möebius y  $A$  es una región del plano tal que  $\frac{-d}{c} \notin A$ , entonces la restricción de  $f$  a  $A$  es analítica e inyectiva, las funciones que satisfacen estas dos propiedades en una región son llamadas funciones univalentes, a continuación estudiaremos algunas de sus propiedades.

## Capítulo 3

# Funciones univalentes

Comenzamos el capítulo definiendo a las funciones univalentes.

**Definición 3.1** *Sea  $A$  una región del plano, una función analítica  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  es univalente en  $A$  si es inyectiva.*

Una propiedad evidente de las funciones univalentes es que si  $f : A \rightarrow f(A)$  y  $g : B \subseteq f(A) \rightarrow \mathbb{C}$  son univalentes, entonces  $g \circ f$  es univalente en  $A$ . El siguiente teorema enuncia otra propiedad que más adelante será de importancia: la derivada de una función univalente no se anula, en consecuencia, las funciones univalentes son conformes.

**Teorema 3.1** *Si  $f$  es univalente en una región  $A$  entonces  $f' \neq 0$  en  $A$ .*

**Dem.**

Supongamos que  $f'(z_0) = 0$  para algún  $z_0 \in A$ . Si  $g(z) = f(z) - f(z_0)$  entonces  $g$  tiene un cero de orden  $\geq 2$  en  $z_0$ . Claramente  $g$  es univalente en  $A$ , y por lo tanto  $g \neq 0$  en  $A - z_0$ . Sea  $\overline{B(z_0, \rho)} \subset A$ , como  $|g|$  es continua y estrictamente positiva en el compacto  $C(z_0, \rho)$ , se tiene que  $\inf_{z \in C(z_0, \rho)} |g(z)| = m > 0$ . Por otro lado, la elección de  $\rho$  se puede hacer de manera que  $f' \neq 0$  en  $B(z_0, \rho) - \{z_0\}$ , pues los ceros de una función analítica no constante están aislados, y si  $f'$  fuera idénticamente cero en una vecindad de  $z_0$  entonces  $f$  sería constante en dicha vecindad, en contradicción con la hipótesis  $f$  univalente.

Ahora bien, para cualquier  $a \in \mathbb{C}$  con  $0 < |a| < m$ , la función  $h(z) = g(z) - a$  es analítica en  $\overline{B(z_0, \rho)}$  y distinta de cero en  $C(z_0, \rho)$ , además  $|h(z) - g(z)| = |a| < m \leq |g(z)|$  para  $z \in C(z_0, \rho)$ . Por el teorema de Rouché  $h$  y  $g$  tienen el mismo número de ceros (contando multiplicidades) dentro de  $B(z_0, \rho)$ , por lo que  $h$  tiene al menos dos ceros en  $B(z_0, \rho)$ , sin embargo como  $h'(z) = g'(z) = f'(z)$  es distinta de cero en  $B(z_0, \rho) - \{z_0\}$  se sigue que  $h$  no tiene ceros múltiples en  $B(z_0, \rho) - \{z_0\}$  y por lo tanto existen al menos dos puntos  $z_1, z_2 \in B(z_0, \rho) - \{z_0\}$  tales que  $h(z_1) = 0 = h(z_2)$ , de donde  $f(z_1) = f(z_0) + a = f(z_2)$ , que es una contradicción ■

Por este resultado y el teorema de la función inversa es claro que si  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  es univalente entonces la función inversa  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  es univalente.

El recíproco del teorema 3.1 no es en general cierto. Por ejemplo, si  $f(z) = z^2$  y  $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  entonces  $f'$  es distinta de cero en  $A$  y  $f$  no es univalente en  $A$ . El siguiente resultado muestra un caso particular en el cual el recíproco es localmente válido.

**Teorema 3.2** *Si  $f$  es analítica en  $z = 0$  y  $f'(0) \neq 0$ , entonces existe  $r > 0$  tal que  $f$  es univalente en  $\overline{B(0, r)}$ .*

**Dem.**

En realidad esto es parte del teorema de la función inversa, pero se hará una demostración independiente y con técnicas propias del análisis complejo.

Por el teorema de Taylor existe  $R > 0$  tal que si  $z \in B(0, R)$  entonces  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  con  $a_1 = f'(0) \neq 0$ . Diferenciando término a término,  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  para  $z \in B(0, R)$ . Como una serie de potencias es absolutamente convergente en el interior de su disco de convergencia, si  $r < R$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1}$  es absolutamente convergente. Omitiendo el primer término y tomando el límite cuando  $r \rightarrow 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} = \lim_{r \rightarrow 0} r \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| r^{n-2} = 0,$$

por lo que para  $r$  suficientemente pequeña  $\sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} < |a_1|$ , y si  $z_1, z_2 \in \overline{B(0, r)}$  satisfacen  $f(z_1) = f(z_2)$ ,

$$\begin{aligned} 0 = |f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_1^n - z_2^n) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_1 - z_2) (z_1^{n-1} + z_1^{n-2} z_2 + \dots + z_2^{n-1}) \right| \\ &= |z_1 - z_2| \left| a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z_1^{n-1} + z_1^{n-2} z_2 + \dots + z_2^{n-1}) \right| \\ &\geq |z_1 - z_2| \left( |a_1| - \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z_1^{n-1} + z_1^{n-2} z_2 + \dots + z_2^{n-1}) \right| \right) \\ &\geq |z_1 - z_2| \left( |a_1| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| (|z_1^{n-1}| + |z_1^{n-2} z_2| + \dots + |z_2^{n-1}|) \right) \\ &\geq |z_1 - z_2| \left( |a_1| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n r^{n-1} \right) \geq 0, \end{aligned}$$

de donde  $|z_1 - z_2| (|a_1| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n r^{n-1}) = 0$ , pero como  $|a_1| > \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n r^{n-1}$ , debera tenerse que  $z_1 = z_2$ . Por lo tanto  $f$  es univalente en  $\overline{B(0, r)}$ . ■

Consideraremos ahora a las funciones univalentes del disco unitario cerrado sobre si mismo. De acuerdo con el lema de Schwarz, si una función analítica  $f$  del disco unitario  $B(0, 1)$  en si mismo fija el origen y satisface  $|f(z)| = |z|$  para algún  $z \in B(0, 1)$ ,  $z \neq 0$  entonces  $f$  es una rotación. Es evidente a partir de este lema que si una función analítica del disco unitario en si mismo fija al origen y a otro punto, la

función es la identidad. El siguiente ejemplo muestra que este comportamiento se extiende a la frontera del disco.

**Ejemplo 3.1** *Si  $f$  es una función analítica y univalente que mapea a  $\overline{B(0,1)}$  sobre si mismo y  $f$  fija el origen y algún otro punto en  $\overline{B(0,1)}$  entonces  $f(z) = z$ .*

**Dem.**

Por el lema de Schwarz, si  $z \in B(0,1)$  entonces  $|f(z)| \leq |z|$ . Además es claro por continuidad que si  $z \in C(0,1)$  entonces  $|f(z)| \leq |z|$ . De manera que para todo  $z \in \overline{B(0,1)}$  se tiene que  $|f(z)| \leq |z|$ . El mismo razonamiento aplicado a la función inversa  $f^{-1} : \overline{B(0,1)} \rightarrow \overline{B(0,1)}$  prueba que para todo  $f(z) \in \overline{B(0,1)}$  se satisface  $|z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)|$ . Por lo tanto  $|f(z)| = |z|$  para todo  $z$  en el disco unitario cerrado. Por la observación del parrafo anterior  $f$  es una rotación, es decir  $f(z) = e^{i\lambda}z$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , y como  $f$  fija un punto distinto del origen,  $f(z) = z$  ■

A continuación damos una descripción de las biyecciones del disco unitario cerrado en si mismo, estas son transformaciones fraccionales lineales.

**Teorema 3.3** *Si  $f$  es univalente y mapea  $\overline{B(0,1)}$  sobre si mismo, entonces  $f$  es una transformación fraccional lineal.*

**Dem.**

Sea  $\xi = f(0)$ , probaremos primero que existe una transformación fraccional lineal  $L$  del disco unitario cerrado sobre si mismo tal que  $L(\xi) = 0$ . Esto es claro si  $\xi = 0$ , considerese por ejemplo a la identidad o cualquier rotación con centro en el origen. Supongamos que  $\xi \neq 0$ . Si  $|\xi| = 1$ , entonces  $f$  alcanza su máximo en  $z_0 = 0$  un punto interior, luego  $f$  es constante, una contradicción, por lo que  $|\xi| < 1$ . Ahora bien, los puntos  $\xi$  y  $\frac{\xi}{|\xi|^2}$  son inversos respecto a  $C(0,1)$ , por el teorema 2.7 sus imágenes bajo una transformación fraccional lineal deben ser puntos inversos respecto a la circunferencia imagen (que en este caso sería  $C(0,1)$ ), como se busca que  $L$  satisfaga  $L(\xi) = 0$  se debe tener  $L(\frac{\xi}{|\xi|^2}) = \infty$ .

Supongamos que  $L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $ad-bc \neq 0$ . Por el teorema 2.4  $L$  es una biyección de  $\mathbb{C}^\infty$  en si mismo, por lo que tanto  $a$  como  $c$  son distintos de cero, pues si  $c = 0$  entonces  $L(\infty) = \infty = L(\frac{\xi}{|\xi|^2})$  y por lo tanto  $\infty = \frac{\xi}{|\xi|^2}$ , una contradicción. Similarmente, si  $a = 0$  entonces  $f(\infty) = 0$  y  $\xi = \infty$ , otra contradicción.

Nuevamente usando el hecho de que  $L$  es una biyección, de  $L(\xi) = 0 = L(\frac{-b}{a})$ ,  $L(\frac{\xi}{|\xi|^2}) = \infty = L(\frac{-d}{c})$  tenemos que  $\xi = \frac{-b}{a}$ ,  $\frac{\xi}{|\xi|^2} = \frac{-d}{c}$ , y despejando  $\bar{\xi} = \frac{-c}{d}$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} L(z) &= \frac{a}{c} \left( \frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} \right) = \frac{a}{c} \left( \frac{z - \xi}{z - \frac{\xi}{|\xi|^2}} \right) \\ &= \frac{a\bar{\xi}}{c} \left( \frac{z - \xi}{\bar{\xi}z - 1} \right) = \frac{-a}{d} \left( \frac{z - \xi}{\bar{\xi}z - 1} \right) \end{aligned}$$

con  $\bar{\xi}z \neq 1$  para toda  $z \in \overline{B(0,1)}$ , pues  $|\xi| < 1$ .

Por el teorema 2.7 se tiene que  $|L(1)| = 1$ , de donde  $L(z) = e^{i\lambda} \frac{z - \xi}{\bar{\xi}z - 1}$ .

Ahora verificaremos que cualquier transformación fraccional lineal de esta forma mapea biyectivamente al disco unitario cerrado en si mismo.

Si  $|z| \leq 1$  entonces  $(1 - |\xi|^2)(1 - |z|^2) \geq 0$ , desarrollando y reagrupando,  $|z|^2 + |\xi|^2 \leq |\xi|^2|z|^2 + 1$ , lo que implica  $|z - \xi|^2 \leq |\bar{\xi}z - 1|^2$ , o equivalentemente  $|L(z)| = \left| \frac{z - \xi}{\bar{\xi}z - 1} \right| \leq 1$ .

Similarmente, si  $|w| \leq 1$  entonces la función inversa  $L^{-1}$  satisface  $|L^{-1}(w)| = \left| \frac{-w + \xi e^{i\lambda}}{-\bar{\xi}w + e^{i\lambda}} \right| \leq 1$ .

Consideremos ahora a la función  $g = L \circ f$ , esta es una biyección del disco unitario cerrado en si mismo que fija el origen, como se vió en la demostración del ejemplo anterior  $g(z) = az$  con  $|a| = 1$ . Por lo tanto  $az = g(z) = L \circ f(z)$  y entonces  $f(z) = L^{-1}(az)$  es una transformación fraccional lineal ■

En el ejemplo 3.1 vimos como el valor de una función en cero y en un punto en la frontera del disco unitario puede determinar los valores de la función en el interior de este. El siguiente teorema nos da otra muestra de la influencia que tiene el comportamiento en la frontera sobre los valores de una función analítica.

**Teorema 3.4 (Darboux)** *Sea  $C$  una curva cerrada simple que es la frontera de una región  $A$ . Supóngase que  $f$  es analítica en  $A \cup C$  e inyectiva en  $C$ , entonces  $f$  es univalente en  $A$ .*

**Dem.**

Puesto que  $f$  es inyectiva en  $C$  es claro que  $f(C) = \Gamma$  es una curva cerrada simple. Sea  $z_0 \in A$  tal que  $f(z_0) \notin \Gamma$ , esto es  $f(z) - f(z_0) \neq 0$  para  $z \in C$ . Como  $f(z) - f(z_0)$  es analítica en  $A = \text{int}C$  el número de ceros de esta función en  $A$  está dado por  $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} dz$ , y puesto que  $z_0 \in A$  el número de ceros es un entero mayor o igual a uno.

Supongamos que  $C(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es una parametrización de  $C$ , entonces  $\Gamma(t) = f(C(t))$  es una parametrización de  $\Gamma$ . Escribiendo  $f(z_0) = w_0$

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(C(t)) \cdot C'(t)}{f(C(t)) - f(z_0)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t) - w_0} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w - w_0} = I(\Gamma, w_0) \end{aligned}$$

y ya que  $\Gamma$  es una curva cerrada simple,  $I(\Gamma, w_0)$  solo puede tomar uno de los valores 0, 1 ó -1, por lo que  $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} dz = I(\Gamma, w_0) = 1$ . Esto indica que  $f$  toma el valor  $w_0$  únicamente en  $z_0 \in A$  y que  $f(z_0) \in \text{int}\Gamma$ .

Solo resta observar que ningún punto en  $A$  va a dar a  $\Gamma$  bajo  $f$ . Por el teorema del mapeo abierto una función analítica manda puntos interiores en puntos interiores, de manera que si se tuviera  $f(z_1) \in \Gamma$  para algún  $z_1 \in A$ , entonces tendría que haber puntos en  $\text{ext}\Gamma$  pertenecientes a  $f(A)$ , pero hemos mostrado que esto es imposible. ■

Ahora abordaremos la cuestión de la convergencia de funciones univalentes. Weierstrass demostró que si una sucesión  $\{f_n\}$  de funciones analíticas definidas en

una región  $A$  del plano converge uniformemente a una función  $f$  en todo subconjunto compacto de  $A$ , entonces  $f$  es analítica en  $A$  y  $f'_n \rightarrow f'$  uniformemente en los subconjuntos compactos de  $A$ . Sin embargo el hecho de que las funciones de la sucesión sean univalentes no garantiza que la función límite también lo sea. Considérese por ejemplo a la sucesión  $f_n(z) = \frac{z}{n}$ , estas funciones son claramente univalentes en  $\mathbb{C}$ , y si  $K \subset \mathbb{C}$  es compacto  $|f_n(z)| = \frac{|z|}{n} \leq \frac{M_K}{n}$  para toda  $z \in K$  y algún  $M_K$  (pues  $K$  es acotado), de donde se ve que la sucesión converge uniformemente a la función constante  $f = 0$  en los subconjuntos compactos del plano, que no es univalente. Sin embargo esto es lo más extraño que puede suceder, ya que el último teorema de esta sección muestra que salvo por las funciones constantes, el límite de una sucesión de funciones univalentes que converge uniformemente en compactos es una función univalente.

**Teorema 3.5** *Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones univalentes en una región  $A$  tal que  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  uniformemente en subconjuntos compactos de  $A$ . Entonces  $f$  es univalente ó constante.*

**Dem.**

Como se mencionó anteriormente, por el teorema de Weierstrass  $f$  es analítica en  $A$ . Supongamos que  $f$  no es univalente, entonces existen  $z_1, z_2 \in A$  tales que  $f(z_1) = f(z_2) = \xi$ .

Supongamos ahora que  $f$  no es constante, como los ceros de una función analítica no constante son aislados, podemos tomar dos discos cerrados ajenos  $K_1, K_2 \subset A$  con centros en  $z_1$  y  $z_2$  respectivamente tales que  $f(z) \neq \xi$  en  $K_1 \cup K_2$ .

Sean  $\inf_{z \in \partial(K_1)} |f(z) - \xi| = m_1$ ,  $\inf_{z \in \partial(K_2)} |f(z) - \xi| = m_2$ . Tanto  $m_1$  como  $m_2$  son estrictamente mayores que cero, pues una función continua definida en un compacto alcanza sus valores extremos en el conjunto.

Como  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en subconjuntos compactos de  $A$ , si  $n$  es suficientemente grande se cumple que  $|f_n(z) - f(z)| < \min(m_1, m_2) = m$  para toda  $z \in \partial(K_1) \cup \partial(K_2)$ .

Sean  $g(z) = f(z) - \xi$ ,  $g_n(z) = f_n(z) - \xi$ , entonces  $g, g_n \neq 0$  en  $\partial(K_1)$  y para  $z \in \partial(K_1)$

$$|g(z) - g_n(z)| = |f(z) - f_n(z)| < m \leq |f(z) - \xi| = |g(z)|,$$

por el teorema de Rouché  $f_n - \xi$  tiene un cero en  $K_1$ . Análogamente,  $f_n - \xi$  tiene un cero en  $K_2$ , en contradicción con la hipótesis de que  $f_n$  univalente.

Por lo tanto si  $f$  no es univalente es constante. ■

## Capítulo 4

# Familias Normales

En esta sección continuaremos estudiando propiedades relacionadas con la convergencia de las funciones complejas. La siguiente definición extiende el concepto de convergencia uniforme a las sucesiones de funciones no acotadas.

**Definición 4.1** Una sucesión  $\{f_n\}$  de funciones con valores complejos definidas en un subconjunto  $D$  del plano converge uniformemente a  $\infty$  en  $D$  si para todo  $M > 0$  existe  $n_0$  tal que si  $n > n_0$  entonces  $|f_n(z)| \geq M$  para toda  $z \in D$ .

Una propiedad útil de una familia  $\mathfrak{F}$  de funciones analíticas definidas en una región  $A$  del plano es que las sucesiones de funciones pertenecientes a dicha familia sean uniformemente convergentes en los subconjuntos compactos de  $A$ , pues esto garantiza la analiticidad de la función límite (si la convergencia no es a  $\infty$ ). El ejemplo que se da a continuación muestra que aún en el caso de que dichas sucesiones no sean uniformemente convergentes, se puede tener otra propiedad que también es de utilidad, la existencia de subsucesiones convergentes.

Supongamos que  $\mathfrak{F}$  es la sucesión  $\{f_n\}$  dada por  $f_n(z) = \begin{cases} n, & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{z}{n}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$ , claramente las funciones  $f_n(z)$  son enteras, además para  $z \in \mathbb{C}$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n}(z) = \infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n+1}(z) = 0$ , de manera que la sucesión  $\{f_n\}$  no converge puntualmente en ningún  $z \in \mathbb{C}$ , y por ende no converge uniformemente en ningún subconjunto compacto del plano. Sin embargo, cualquier sucesión de funciones en  $\mathfrak{F}$  contiene una infinidad de funciones  $f_n$  cuyos subíndices tienen la misma paridad, y con éstas se puede formar una subsucesión de la sucesión original que converge uniformemente a  $\infty$  ó a la función constante  $f(z) = 0$  (dependiendo de la paridad de los subíndices) en los subconjuntos compactos de  $A$ . En otras palabras, toda sucesión de funciones en  $\mathfrak{F}$  contiene una subsucesión que converge uniformemente en los subconjuntos compactos de  $A$ .

**Definición 4.2** Una familia  $\mathfrak{F}$  de funciones con valores complejos definidas en una región  $A$  del plano es normal en  $A$  si toda sucesión  $\{f_n\}$  de funciones en  $\mathfrak{F}$  contiene ya sea una subsucesión  $\{f_{n_k}\}$  que converge uniformemente en subconjuntos

compactos de  $A$ , ó una subsucesión  $\{f_{n_k}\}$  que converge uniformemente a  $\infty$  en subconjuntos compactos de  $A$ .

Observese que si  $\mathfrak{F}$  es una familia de funciones analíticas, entonces  $f$ , la función límite de la subsucesión convergente en la definición anterior es analítica en  $A$  ó idénticamente  $\infty$  en  $A$ . Además  $f$  no necesariamente está en la familia  $\mathfrak{F}$ . Por ejemplo, la sucesión  $\{f_n\}$  donde  $f_n(z) = \frac{e^z}{n}$ , es una familia normal de funciones analíticas y no nulas en  $\mathbb{C}$  y como  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = 0$  para  $z \in \mathbb{C}$ , se tiene que cualquier sucesión de funciones en  $\{f_n\}$  contiene una subsucesión que converge uniformemente en compactos a la función constante  $f(z) = 0$ , que no pertenece a la familia. Respecto a la convergencia de funciones no nulas podemos decir un poco más.

**Teorema 4.1 (Hurwitz)** *Si  $\{f_n\}$  es una sucesión de funciones analíticas que no se anulan en una región  $A$  del plano y  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en los subconjuntos compactos de  $A$ , entonces  $f \equiv 0$  en  $A$  ó  $f$  no se anula en  $A$ .*

**Dem.**

Puesto que la convergencia de la sucesión  $\{f_n\}$  es uniforme en todo subconjunto compacto de  $A$ , se tiene que  $f$  es analítica en  $A$ . Supongamos que  $f$  no es idénticamente cero en  $A$ .

Como los ceros de una función analítica no constante son aislados, dado  $z_0 \in A$  existe una vecindad de  $z_0$  tal que  $f$  no se anula en dicha vecindad excepto tal vez en  $z_0$ . En consecuencia existe  $r > 0$  tal que  $f(z) \neq 0$  si  $z \in \overline{B(z_0, r)} \setminus \{z_0\}$ . Como en demostraciones anteriores,  $\min_{z \in C(z_0, r)} |f(z)| = m > 0$ , y por lo tanto  $\frac{1}{f_n} \rightarrow \frac{1}{f}$  uniformemente en  $C(z_0, r)$ . Además, por el resultado de Weierstrass mencionado antes del teorema 3.5,  $f'_n \rightarrow f'$  uniformemente en  $C(z_0, r)$ . De manera que  $\frac{f'_n}{f_n} \rightarrow \frac{f'}{f}$  uniformemente en  $C(z_0, r)$ , y como podemos intercambiar el límite y la integral por ser la convergencia uniforme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Cada una de las integrales a la izquierda de la igualdad es igual a cero, pues estas cuentan los ceros y polos de  $f_n$  en el interior de  $C(z_0, r)$ , y por hipótesis las funciones  $f_n$  son no nulas y analíticas en  $A$ . Se sigue que la integral a la derecha de la igualdad también es cero y entonces  $f$  tiene el mismo número de ceros y polos en el interior de  $C(z_0, r)$ . Por lo tanto  $f(z_0) \neq 0$  para  $z_0 \in A$  que es arbitrario, es decir,  $f$  no se anula en  $A$ . ■

Recordemos que una familia  $\mathfrak{F}$  de funciones con valores complejos es equicontinua en un subconjunto  $D$  del plano si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $z_1, z_2 \in D$  y  $|z_1 - z_2| < \delta$  entonces  $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$  para toda  $f \in \mathfrak{F}$ . El siguiente teorema proporciona un criterio para determinar cuando una familia de funciones es normal valiéndose de la noción de equicontinuidad.

**Teorema 4.2 (Arzela-Ascoli)** *Una familia  $\mathfrak{F}$  de funciones con valores complejos definidas en una región  $A$  del plano es normal si:*

- (i)  $\mathfrak{F}$  es equicontinua en todo subconjunto compacto de  $A$ ,  
(ii) para toda  $z \in A$ ,  $\{f(z); f \in \mathfrak{F}\}$  está contenido en un subconjunto compacto del plano.

**Dem.**

Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones en  $\mathfrak{F}$ . La estrategia a seguir en la demostración será encontrar una subsucesión uniformemente convergente en un subconjunto denso numerable de  $A$  y después usar la densidad de ese conjunto y la equicontinuidad de  $\mathfrak{F}$  para mostrar que dicha subsucesión es de Cauchy en cualquier subconjunto compacto de  $A$ .

Supongamos que  $\{\xi_k\}$  es una numeración del conjunto de puntos en  $A$  con coordenadas racionales. Por (ii) la sucesión  $\{f_n(\xi_1)\}$  está contenida en un compacto, por el teorema de Bolzano-Weierstrass contiene una subsucesión convergente  $f_{n_{1,1}}(\xi_1), f_{n_{1,2}}(\xi_1), f_{n_{1,3}}(\xi_1), \dots$

Análogamente, la sucesión  $\{f_{n_{1,i}}(\xi_2)\}$  contiene una subsucesión convergente  $f_{n_{2,1}}(\xi_2), f_{n_{2,2}}(\xi_2), f_{n_{2,3}}(\xi_2), \dots$

Repitiendo el proceso para cada elemento de  $\{\xi_k\}$  obtenemos un arreglo de subíndices

$$\begin{array}{l} n_{1,1} < n_{1,2} < n_{1,3} < \dots < n_{1,j} < \dots \\ n_{2,1} < n_{2,2} < n_{2,3} < \dots < n_{2,j} < \dots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n_{k,1} < n_{k,2} < n_{k,3} < \dots < n_{k,j} < \dots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

tal que cada renglón es una subsucesión de los renglones anteriores, y la sucesión  $\{f_{k,j}\}$  cuyos subíndices son los elementos del  $k$ -ésimo renglón converge en  $\xi_k$ .

Considérese ahora a la sucesión  $\{n_{j,j}\}$ , esta es estrictamente creciente y sus elementos a partir de  $n_{k,k}$  son una subsucesión del  $k$ -ésimo renglón para toda  $k$ . Por lo tanto la sucesión  $\{f_{n_{j,j}}\}$  es una subsucesión de  $\{f_n\}$  que converge en cada punto de  $\{\xi_k\}$ , la denotaremos por  $\{f_{n_j}\}$ .

Sea  $K$  un subconjunto compacto de  $A$ , por (i) la sucesión  $\{f_{n_j}\}$  es equicontinua en  $K$ , de manera que dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $z, \xi \in K$  satisfacen  $|z - \xi| < \delta$  entonces  $|f_{n_j}(z) - f_{n_j}(\xi)| < \frac{\epsilon}{3}$  para toda  $j$ .

Los discos con centro en cada punto de  $K$  y radio  $\delta$  forman una cubierta abierta de  $K$ , por compacidad existe una subcubierta finita, y ya que el conjunto  $\{\xi_k\}$  es denso en  $A$  podemos tomar un  $\xi_k$  en cada elemento de dicha subcubierta, llamemos  $\Xi$  al conjunto finito formado por estos  $\xi_k$ . La sucesión  $\{f_{n_j}\}$  es de Cauchy en cada punto de  $\Xi$ , y como este es un conjunto finito, para toda  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $s, t > N$  entonces  $|f_{n_s}(\xi) - f_{n_t}(\xi)| < \frac{\epsilon}{3}$  para toda  $\xi \in \Xi$ .

Sea  $z \in K$ , por la definición de  $\Xi$  existe  $\xi \in \Xi$  tal que  $|z - \xi| < \delta$ , se sigue que si  $s, t > N$

$$|f_{n_s}(z) - f_{n_t}(z)| \leq |f_{n_s}(z) - f_{n_s}(\xi)| + |f_{n_s}(\xi) - f_{n_t}(\xi)| + |f_{n_t}(\xi) - f_{n_t}(z)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

de donde la subsucesión  $\{f_{n_j}\}$  de  $\{f_n\}$  converge uniformemente en subconjuntos compactos de  $A$ .

Por lo tanto  $\mathfrak{F}$  es normal. ■

Una familia  $\mathfrak{F}$  de funciones con valores complejos definidas en un subconjunto  $D$  del plano es uniformemente acotada en  $D$  si existe  $M \geq 0$  tal que  $|f(z)| \leq M$  para toda  $z \in D$  y  $f \in \mathfrak{F}$ . Mediante una aplicación del teorema de Arzela-Ascoli tenemos otro criterio para determinar si una familia es normal.

**Teorema 4.3** *Una familia  $\mathfrak{F}$  de funciones analíticas en una región  $A$  es normal si  $\mathfrak{F}$  es uniformemente acotada en subconjuntos compactos de  $A$ .*

**Dem.**

Probaremos que  $\mathfrak{F}$  satisface las condiciones del teorema 4.2.

Para cada  $z \in A$  el conjunto  $\{z\}$  es compacto. Por hipótesis existe  $M_z$  tal que  $|f(z)| \leq M_z$  para toda  $f \in \mathfrak{F}$ , de manera que el conjunto  $\{f(z); f \in \mathfrak{F}\}$  está contenido en el compacto  $B(0, M_z)$ .

Resta probar que uniformemente acotada implica equicontinuidad.

Sea  $K$  un subconjunto compacto de  $A$ . Sea  $r > 0$  tal que para cada  $z \in K$  el disco  $\overline{B(z, r)}$  esté contenido en  $A$ . Los discos con radio  $\frac{r}{4}$  y centro en cada punto de  $K$  forman una cubierta abierta de  $K$ , por compacidad existe una subcubierta finita, sean  $\{\xi_k\}$  los centros de los discos que la forman.

El conjunto  $\bigcup_k \overline{B(\xi_k, r)}$  es un subconjunto compacto de  $A$ , por hipótesis existe  $M$  tal que  $|f(z)| \leq M$  para toda  $z \in \bigcup_k \overline{B(\xi_k, r)}$ ,  $f \in \mathfrak{F}$ .

Sean  $z_1, z_2 \in K$ . Como  $z_2$  está contenido en alguno de los discos de la subcubierta finita,  $|z_2 - \xi_k| < \frac{r}{4}$  para algún  $\xi_k$ .

Si  $|z_1 - z_2| < \frac{r}{4}$  se sigue de la desigualdad del triángulo que  $|z_1 - \xi_k| < \frac{r}{2}$ , en consecuencia  $z_1, z_2 \in B(\xi_k, \frac{r}{2})$ . Sea  $\gamma = C(\xi_k, r)$ , por la fórmula integral de Cauchy

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_1} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_2} dz = \frac{z_1 - z_2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} dz.$$

Por otro lado, para  $z \in \gamma$  el módulo del integrando está acotado por

$$\left| \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} \right| \leq \frac{\max_{z \in \gamma} |f(z)|}{\min_{z \in \gamma} |z - z_1| |z - z_2|} \leq \frac{M}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{4M}{r^2},$$

se sigue que

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \frac{|z_1 - z_2|}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} dz \right| \leq \frac{|z_1 - z_2|}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{4M}{r^2} = \frac{4M}{r} |z_1 - z_2|.$$

Usando esta última ecuación, si  $\epsilon > 0$  y  $|z_1 - z_2| < \delta = \min(\frac{r}{4}, \frac{r\epsilon}{4M})$  entonces

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{4M}{r}|z_1 - z_2| < \frac{4M}{r}\delta \leq \epsilon.$$

Luego  $\mathfrak{F}$  es equicontinua en los subconjuntos compactos de  $A$  y por lo tanto  $\mathfrak{F}$  es normal en  $A$ . ■

Si  $\mathfrak{F}$  es una familia normal de funciones analíticas, entonces la familia de las derivadas  $\mathfrak{F}' = \{f'; f \in \mathfrak{F}\}$  no es necesariamente normal. Por ejemplo, considérese a  $\mathfrak{F}$  la familia de las funciones  $f_n(z) = nz^2 - n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , definidas en todo el plano. Claramente  $f_n$  converge uniformemente a  $\infty$  en todo subconjunto compacto del plano, por lo que  $\mathfrak{F}$  es normal. Sin embargo  $\mathfrak{F}' = \{f'_n\}$  donde  $f'_n(z) = 2nz$ , y esta sucesión converge a  $\infty$  para  $z \neq 0$  y a cero para  $z = 0$ , de donde se ve que si  $K$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{C}$ , entonces  $\{f'_n\}$  no converge uniformemente a una función con valores complejos definida en  $K$ , ni converge uniformemente a  $\infty$  en  $K$ , y lo mismo pasa para cualquier subsucesión. Es decir  $\mathfrak{F}'$  no es normal.

Vale la pena observar que un contraejemplo como el anterior no se puede dar usando una familia uniformemente acotada, pues si  $f$  es una función analítica en una región  $A$ ,  $\overline{B}(z_0, r)$  es un disco cerrado contenido en  $A$  y  $|f(z)| \leq M$  para  $z \in C(z_0, r)$ , se sigue de la fórmula integral de Cauchy para las derivadas que  $|f'(z)| \leq \frac{M}{r}$  para  $z$  en el interior del disco. Utilizando este hecho en una subcubierta finita de un compacto formada por discos, se prueba que si  $\mathfrak{F}$  es una familia uniformemente acotada en los subconjuntos compactos de  $A$ , entonces  $\mathfrak{F}' = \{f'; f \in \mathfrak{F}\}$  también es uniformemente acotada en los subconjuntos compactos de  $A$  y por el teorema anterior,  $\mathfrak{F}'$  es normal.

## Capítulo 5

# El teorema del mapeo de Riemann

Antes de enunciar el teorema del mapeo de Riemann haremos algunas consideraciones respecto a este. Esencialmente el teorema dice dos cosas: la primera es que cualquier región  $R$  simplemente conexa distinta de  $\mathbb{C}$  se puede transformar de manera conforme y biyectiva sobre el disco unitario  $B(0,1)$  (y por lo tanto cualesquiera dos regiones simplemente conexas distintas del plano son conformemente equivalentes, pues si  $f, g$  son biyecciones conformes entre el disco unitario y las regiones  $R_1, R_2$  respectivamente, entonces  $f \circ g^{-1}$  es una biyección conforme entre  $R_1$  y  $R_2$ ), la segunda es que esta transformación entre  $R$  y el disco es única si además se requiere que para un  $z_0 \in R$  dado, localmente en  $z_0$  la transformación sea una traslación que manda a  $z_0$  al cero, seguida de una homotecia.

Es claro que no existe una función univalente en  $\mathbb{C}$  sobre el disco unitario, pues por el teorema de Liouville las únicas funciones enteras acotadas son constantes. Por otro lado, el que una región simplemente conexa sea distinta del plano es equivalente a que ésta tenga al menos dos puntos frontera (y por lo tanto una infinidad continua, pues una región simplemente conexa no puede tener un punto frontera aislado distinto de  $\infty$ ). Como para la demostración del teorema usaremos la existencia de dos puntos frontera, lo enunciaremos en estos términos.

**Teorema 5.1 (Teorema del mapeo de Riemann)** *Sea  $R$  una región del plano simplemente conexa con al menos dos puntos frontera. Entonces existe una función univalente  $g$  que mapea a  $R$  sobre  $B(0,1)$ .*

*Si además se tiene la condición adicional de que para un  $z_0 \in R$  se cumpla que  $g(z_0) = 0$ ,  $g'(z_0) > 0$ , entonces  $g$  es única.*

**Dem.**

Sea  $\mathfrak{F}$  la familia de las funciones  $f$  univalentes y acotadas en  $R$  que satisfacen  $f(z_0) = 0$ ,  $f'(z_0) = 1$ .

Definimos

$$M(f) = \sup_{z \in R} |f(z)|$$

y si  $\mathfrak{F}$  es no vacia

$$m = \inf_{f \in \mathfrak{F}} M(f).$$

La demostración de la existencia consta de tres pasos:

- (i)  $\mathfrak{F}$  es no vacia.
- (ii) Existe una función  $\tilde{f} \in \mathfrak{F}$  tal que  $M(\tilde{f}) = m$ .
- (iii)  $\frac{\tilde{f}}{m}$  es la función buscada.

Demostración de (i): Sean  $a, b \in \mathbb{C}$  dos puntos en la frontera de  $R$ . Por el teorema 2.4 la función  $L : R \rightarrow f(R)$  dada por  $L(z) = \frac{z-a}{z-b}$  es una biyección conforme, la región  $L(R) \subset \mathbb{C}$  es simplemente conexa. Además  $\frac{z-a}{z-b} \neq 0$  para  $z \in R$ , por lo que existe una rama de logaritmo analítica en todo  $L(R)$ . Utilizando esta rama, la función  $f(z) = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$  es analítica en  $R$ . Por otra parte, la igualdad  $f(z_1) = f(z_2)$  implica  $\frac{z_1-a}{z_1-b} = \frac{z_2-a}{z_2-b}$ , y nuevamente por el teorema 2.4,  $z_1 = z_2$ , por lo tanto  $f$  es univalente en  $R$ .

Sea  $w_0 = f(z_0) = \sqrt{\frac{z_0-a}{z_0-b}}$ .

Probaremos que las funciones de la forma  $\frac{c}{f(z)+w_0} + d$  (con  $c$  y  $d$  constantes,  $c \neq 0$ ) son acotadas en  $R$ , y por ende, univalentes en  $R$  (pues  $f$  es univalente). Posteriormente obtendremos una función en  $\mathfrak{F}$  mediante la elección adecuada de las constantes  $c$  y  $d$ .

Por continuidad, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $|z - z_0| < \delta$  entonces  $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ .

Por el teorema del mapeo abierto existe una vecindad  $B(w_0, \epsilon')$  de  $w_0$ , con  $\epsilon' < \epsilon$ , tal que para todo  $w \in B(w_0, \epsilon')$  hay un  $z \in B(z_0, \delta)$  con  $f(z) = w$ .

Ahora bien, la preimágen de  $B(-w_0, \epsilon')$  está contenida en  $B(z_0, \delta)$ . Para ver esto supongase que  $w \in B(-w_0, \epsilon')$ , entonces  $-w \in B(w_0, \epsilon')$ , y como se mencionó anteriormente  $-w = f(z_1)$  para algún  $z_1 \in B(z_0, \delta)$ . Si  $z \in R$  satisface  $f(z) = w$ , entonces  $\frac{z-a}{z-b} = w^2 = (-w)^2 = \frac{z_1-a}{z_1-b}$ , de donde  $z = z_1$ .

Como  $B(z_0, \delta)$  es mapeada al interior de  $B(w_0, \epsilon)$ , si  $\epsilon$  es suficientemente pequeño, de manera que  $B(w_0, \epsilon)$  y  $B(-w_0, \epsilon)$  sean ajenas, entonces  $f$  no toma ningún valor en  $B(-w_0, \epsilon')$ .

Se sigue que  $|f(z) + w_0| > \epsilon'$  para toda  $z \in R$ , y por lo tanto las funciones  $\frac{c}{f(z)+w_0} + d$  con  $c \neq 0$  son acotadas y univalentes en  $R$ .

Para encontrar las constantes adecuadas resolvemos el sistema

$$\frac{c}{f(z_0) + w_0} + d = 0, \quad \frac{-cf'(z_0)}{(f(z_0) + w_0)^2} = 1.$$

Un cálculo simple muestra que

$$f'(z_0) = \frac{a-b}{2(z_0-b)^2 \sqrt{\frac{z_0-a}{z_0-b}}} \neq 0, \infty$$

y

$$c = \frac{-4w_0^2}{f'(z_0)}, \quad d = \frac{2w_0}{f'(z_0)}.$$

Sustituyendo en  $\frac{c}{f(z)+w_0} + d$  los valores de  $c$  y  $d$  encontrados obtenemos la función

$$F(z) = \frac{2w_0}{f'(z_0)} \left( \frac{f(z) - w_0}{f(z) + w_0} \right),$$

que satisface  $F(z_0) = 0$ ,  $F'(z_0) = 1$ . Por lo tanto  $\mathfrak{F}$  es no vacía.

Demostración de (ii): Si la familia  $\mathfrak{F}$  es finita entonces  $\{M(f); f \in \mathfrak{F}\}$  también lo es, en cuyo caso el ínfimo del conjunto es un elemento del mismo y la existencia de  $\tilde{f}$  es clara.

Supongamos que  $\mathfrak{F}$  tiene una infinidad de elementos.

Por la definición de  $m$ , existe una sucesión  $\{f_n\}$  de funciones en  $\mathfrak{F}$  tales que  $m \leq M(f_n) \leq m + \frac{1}{n}$  (de lo contrario  $m$  no sería la máxima cota inferior). Esta sucesión es uniformemente acotada en  $R$  por  $m + 1$ , se sigue del teorema 4.3 que  $\{f_n\}$  es una familia normal. Por consiguiente alguna subsucesión  $\{f_{n_k}\}$  converge uniformemente en los subconjuntos compactos de  $R$ .

Sea  $\tilde{f}(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(z)$ .

Como las funciones  $f_{n_k}$  están en  $\mathfrak{F}$

$$\tilde{f}(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(z_0) = 0,$$

y ya que la convergencia es uniforme

$$\tilde{f}'(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_{n_k}(z_0) = 1.$$

De esta última ecuación se infiere que  $\tilde{f}$  no es constante en  $R$ . Al ser el límite de una sucesión de funciones univalentes,  $\tilde{f}$  es univalente en  $R$  (teorema 3.5).

Finalmente,  $|\tilde{f}(z)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k}(z)| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} M(f_{n_k}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} m + \frac{1}{n_k} = m$ , luego  $\tilde{f}$  es acotada.

Por lo tanto  $\tilde{f}$  está en  $\mathfrak{F}$ .

De la desigualdad  $|\tilde{f}(z)| \leq m$  se sigue que  $M(\tilde{f}) \leq m$ , y como  $\tilde{f}$  está en  $\mathfrak{F}$ ,  $m \leq M(\tilde{f})$ . Combinando ambas desigualdades,  $M(\tilde{f}) = m$ .

Demostración de (iii): Sabemos que  $\tilde{f}$  es univalente con  $m = M(\tilde{f}) > 0$ . Sea  $g(z) = \frac{\tilde{f}}{m}$ . Entonces  $g$  es univalente en  $R$ ,  $g(z_0) = 0$ , y  $g'(z_0) = \frac{1}{m}$ . Además  $|g(z)| = \frac{|\tilde{f}(z)|}{m} \leq \frac{M(\tilde{f})}{m} = 1$ , y como una función analítica que tiene un máximo en un punto interior de un conjunto es constante en una vecindad de dicho punto,  $|g(z)| < 1$  (pues  $g$  es univalente).

Solo falta verificar que la imagen de  $R$  bajo  $g$  es todo el disco  $B(0,1)$ . Para ello procederemos por contradicción, utilizando un punto en  $B(0,1)$  que no esté en la imagen de  $g$  construiremos una función  $\tilde{g}$  que contradiga a la definición de  $m$ .

Supongamos que existe un  $\alpha \in B(0,1)$  tal que  $g(z) \neq \alpha$  para todo  $z \in R$  ( $\alpha \neq 0$  pues  $g(z_0) = 0$ ).

Entonces  $g(z) - \alpha \neq 0$  en  $R$ , y como  $|\alpha|, |g(z)|$  son menores que uno,  $\bar{\alpha}g(z) - 1$

tampoco se anula en  $R$ .

Análogamente a como se hizo en la demostración de (i), podemos definir una rama de la función

$$h(z) = \sqrt{\frac{g(z) - \alpha}{\alpha g(z) - 1}}$$

analítica y univalente en  $R$ .

Además  $h^2(z) = (l \circ g)(z)$  donde  $l(z) = \frac{z-\alpha}{\alpha z-1}$  es una biyección del disco unitario cerrado en si mismo (vease la demostración del teorema 3.3), y puesto que  $|g(z)| < 1$ , tenemos que  $|h(z)| < 1$ .

Similarmente, la función

$$k(z) = \frac{h(z) - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}h(z) - 1}$$

cumple  $|k(z)| < 1$ . Por otra parte, al ser la composición de dos funciones univalentes,  $k$  es univalente. Evaluando,  $k(z_0) = \frac{h(z_0) - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}h(z_0) - 1} = \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha} - 1} = 0$ .

Multiplicando a  $k$  por una constante adecuada obtendremos una función  $\tilde{g}$  que satisface  $\tilde{g}'(z_0) = 1$ .

Calculos de rutina muestran que  $k'(z_0) = \frac{|\alpha|+1}{2m\sqrt{\alpha}}$ .

Sea  $\tilde{g}(z) = \frac{k(z)}{k'(z_0)} = \frac{2m\sqrt{\alpha}}{|\alpha|+1}k(z)$ . Por construcción  $\tilde{g}$  está en  $\mathfrak{F}$ .

Finalmente,  $(1 - \sqrt{|\alpha|})^2 > 0$  implica  $\frac{2\sqrt{|\alpha|}}{|\alpha|+1} < 1$ , y como  $|k(z)| < 1$  se sigue que

$$M(\tilde{g}) = \sup_{z \in R} |\tilde{g}(z)| = \sup_{z \in R} \frac{2m\sqrt{|\alpha|}|k(z)|}{|\alpha|+1} \leq \frac{2m\sqrt{|\alpha|}}{|\alpha|+1} < m,$$

lo que contradice la definición de  $m$ .

Por lo tanto  $g$  es sobreyectiva, y la primera parte del teorema ha sido demostrada.

Para demostrar la unicidad supongamos que  $g_1, g_2$  satisfacen las condiciones del teorema, entonces la composición  $G(z) = g_2(g_1^{-1}(z))$  es una biyección de  $B(0, 1)$  en si mismo que fija el origen. Usando el lema de Schwarz de la misma forma que en el ejemplo 3.1, se tiene que  $G(z) = e^{i\lambda}z$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Por hipótesis  $g_1'(0), g_2'(0) > 0$ , de donde

$$e^{i\lambda} = G'(0) = \frac{g_2'(0)}{g_1'(0)} > 0.$$

En conclusión  $e^{i\lambda} = 1$  y  $G(z) = z$ . Por lo tanto  $g_1 = g_2$ . ■

En general no es posible garantizar que la frontera de una región simplemente conexa  $R$  es transformada biyectivamente en la frontera del disco unitario. Por ejemplo, si  $R$  es la región obtenida a partir de  $(0, 1) \times (0, 1)$  eliminando los segmentos  $S_n = \{\frac{1}{n} + iy; 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\}$ , entonces  $R$  es una región simplemente conexa y el origen es un punto frontera de  $R$ . Por otro lado, es claro que ningún punto interior de  $R$  se puede conectar al origen por medio de una curva continua contenida en el interior de la región, utilizando este hecho es posible probar que si  $g$  es la función de Riemann

entre  $R$  y el disco, entonces  $g$  no es continua en cero.

Sin embargo, Osgood y Carathéodory demostraron que cuando la frontera de la región es una curva de Jordan, la función de Riemann es continua en  $\partial(R)$  y la transforma de manera biyectiva en la circunferencia unitaria. En este caso, el teorema de Riemann garantiza la existencia de una solución al problema de Dirichlet para la región  $R$  (dada  $u_0 : \partial(R) \rightarrow \mathbb{R}$  continua, encontrar  $u : \bar{R} \rightarrow \mathbb{R}$  armónica en  $R$  y continua en  $\bar{R}$  tal que  $u|_R = u_0$ ). Pues supongamos que  $u_0$  es una función continua en  $\partial(R)$  y  $g$  es la función de Riemann entre  $R$  y el disco unitario, entonces  $u_0 \circ g^{-1}$  es continua en  $C(0, 1)$ . La fórmula integral de Poisson define una función  $\tilde{u}$  armónica en  $B(0, 1)$  y continua en  $\bar{B}(0, 1)$  tal que  $\tilde{u}|_{C(0,1)} = u_0 \circ g^{-1}$ , usando que  $\tilde{u}$  es la parte real de una función analítica en  $B(0, 1)$  es fácil verificar que  $u = \tilde{u} \circ g$  es la solución al problema de Dirichlet para la región  $R$  y la función  $u_0$ .

Una limitación evidente del teorema de Riemann y la demostración de éste que se dió anteriormente es que no dan ninguna indicación acerca de como es la función entre  $R$  y  $B(0, 1)$ . El último teorema de éste trabajo proporciona información al respecto.

**Teorema 5.2** *Sea  $R$  una región simplemente conexa distinta de  $\mathbb{C}$ . Entonces existe una sucesión de funciones univalentes  $\{g_n\}$  con  $g_n : R \rightarrow B(0, 1)$ , tal que la sucesión converge uniformemente en los subconjuntos compactos de  $R$  a una función univalente  $g$  que mapea a  $R$  sobre  $B(0, 1)$ .*

*Además, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la distancia de la frontera de  $g_n(R)$  a  $C(0, 1)$  es menor ó igual a  $\frac{k}{n}$ , con  $k$  constante.*

**Dem.**

Probaremos primero la existencia de  $\{g_n\}$ .

En la parte (i) de la demostración del teorema 5.1 se construyó una familia de funciones univalentes y acotadas en  $R$ , tomando cualquiera de ellas y multiplicando por una constante adecuada se obtiene una función  $F$  univalente en  $R$  que cumple  $|F(z)| < 1$  para  $z \in R$ .

Si  $F(R) = B(0, 1)$  la demostración está completa.

Supongamos que  $F(R) = R_0 \neq B(0, 1)$ . Como  $R$  es simplemente conexa y  $F$  es univalente se tiene que  $R_0$  es una región simplemente conexa.

Sea  $\xi_0$  con  $|\xi_0| < 1$  un punto en la frontera de  $R_0$  cuya distancia al origen sea mínima, es decir  $|\xi_0| \leq |z|$  para toda  $z \in \partial(R_0)$  ( $\xi_0$  existe por continuidad y la compacidad de  $\partial(R_0)$ ).

La función  $L_1(z) = \frac{z-\xi_0}{1-\xi_0z}$  es una biyección conforme del disco unitario cerrado en si mismo, por lo que la imágen de  $R_0$  bajo ésta es simplemente conexa, y no contiene al origen pues  $\xi_0 \notin R_0$ .

Por lo anterior existe una rama de logaritmo analítica en  $L_1(R_0)$ , utilizando esta rama la función  $T(z) = \sqrt{\frac{z-\xi_0}{1-\xi_0z}}$  es analítica y univalente en  $R_0$ , y satisface  $T(0) = \sqrt{-\xi_0}$ .

Sea

$$f_0(z) = \frac{T(z) - \sqrt{-\xi_0}}{1 - \sqrt{-\xi_0}T(z)},$$

entonces  $f_0$  es la composición de  $L_1$ ,  $\sqrt{z}$ , y  $L_2$ , donde  $L_2(z) = \frac{z - \sqrt{-\xi_0}}{1 - \sqrt{-\xi_0}z}$ .

Se sigue que  $f_0$  es univalente en  $R_0$ ,  $|f_0(z)| \leq 1$  para  $z \in R_0$ , y  $f_0(0) = 0$ .

Ahora sea  $f_0(R_0) = R_1$ , entonces  $f_0$  tiene una inversa definida en  $R_1$ . La función inversa  $f_0^{-1}$  es la composición de  $L_2^{-1}$  (una biyección conforme del disco unitario cerrado en si mismo),  $z^2$ , y  $L_1^{-1}$  (otra biyección conforme de  $\overline{B(1,0)}$  en si mismo), por lo que  $f_0^{-1}$  es analítica en  $\overline{B(0,1)}$ , y  $|f_0^{-1}(w)| \leq 1$  si  $w \in \overline{B(0,1)}$ . Además  $f_0^{-1}(0) = 0$ , y como  $f_0^{-1}$  no es una rotación (pues  $f_0^{-1}(-\sqrt{-\xi_0}) = \xi_0$ ) se sigue por el lema de Schwarz que  $|f_0^{-1}(w)| < |w|$  si  $|w| < 1$ ,  $w \neq 0$ . Por otro lado, la función

$$h(w) = \begin{cases} \frac{f_0^{-1}(w)}{w}, & w \neq 0 \\ f_0^{-1}'(0), & w = 0 \end{cases} \text{ es analítica en } B(0,1), \text{ por el principio del módulo máxi-}$$

mo  $|h|$  no puede tener un máximo local en el origen, de donde  $|f_0^{-1}'(0)| < 1$ .

Sustituyendo  $0 = f_0(0)$ ,  $w = f_0(z)$ , en  $|f_0^{-1}'(0)| < 1$  y  $|f_0^{-1}(w)| < |w|$  respectivamente, se tiene que  $|f_0'(0)| > 1$  y  $|z| < |f_0(z)|$  para  $z \in R_0$ ,  $z \neq 0$ . Por lo tanto la distancia de  $R_1 = f_0(R_0)$  a  $C(1,0)$  es menor que la distancia de  $R_0$  a  $C(1,0)$ .

Sea  $\xi_1 \in \partial(R_1)$  tal que su distancia al origen sea mínima, repitiendo la construcción anterior se tiene una función  $f_1$  univalente en  $R_1$  que fija el origen, y tal que la distancia de  $R_2 = f_1(R_1)$  a  $C(0,1)$  es menor que la distancia de  $R_1$  a  $C(0,1)$ . Continuando inductivamente este proceso obtenemos una sucesión de funciones univalentes  $f_n : R_n \rightarrow R_{n+1}$  cuya imagen aproxima cada vez más al disco unitario, y que además cumplen  $f_n(0) = 0$  para toda  $n$ . Por construcción, el disco más grande con centro en el origen contenido en  $R_{n+1}$  es  $B(0, |\xi_{n+1}|)$ , de donde se sigue que la frontera de  $R_{n+1}$  está contenida en el anillo  $\{z; |\xi_{n+1}| \leq |z| \leq 1\}$ . Además es claro que los puntos  $\xi_n \in R_n$  satisfacen  $|\xi_1| < |\xi_2| < \dots < |\xi_n| < \dots < 1$ .

Probaremos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\xi_k| = 1$ .

Sea  $F_{m,n}(z) = f_m(f_{m-1}(\dots f_n(z)\dots))$ , para  $m > n$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , claramente  $F_{m,n}$  mapea a  $R_n$  sobre  $R_{m+1}$ , es univalente, y  $F_{m,n}(0) = 0$ . Por otra parte, la función

$$H(z) = \begin{cases} \frac{F_{m,n}(z)}{z}, & z \neq 0 \\ F_{m,n}'(0), & z = 0 \end{cases} \text{ es analítica en } R_n \text{ y por lo tanto en } B(0, |\xi_n|). \text{ Si}$$

$0 < r < |\xi_n|$  y  $z \in B(0, r)$ , entonces  $|H(z)| = \left| \frac{F_{m,n}(z)}{z} \right| = \frac{|F_{m,n}(z)|}{r} \leq \frac{1}{r}$ , por el principio del módulo máximo  $|H(0)| \leq \frac{1}{r}$ , y haciendo que  $r$  tienda a  $|\xi_n|$  se sigue que

$$|F_{m,n}'(0)| = |H(0)| \leq \frac{1}{|\xi_n|}.$$

Ahora bien, usando la regla de la cadena

$$|F_{m,n}'(0)| = |f_m'(f_{m-1}(\dots f_n(0)\dots)) \cdot f_{m-1}'(\dots f_n(0)\dots) \cdots f_n'(0)| = \prod_{k=n}^m |f_k'(0)|.$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores

$$\prod_{k=n}^m |f'_k(0)| \leq \frac{1}{|\xi_n|}. \quad (1)$$

Por otro lado, derivando la expresión para  $f_0$  se llega a  $f'_0(0) = \frac{1+|\xi_0|}{2\sqrt{-\xi_0}}$ , un cálculo similar muestra que  $f'_k(0) = \frac{1+|\xi_k|}{2\sqrt{-\xi_k}}$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Sustituyendo en (1),

$$\prod_{k=n}^m \frac{1+|\xi_k|}{2\sqrt{|\xi_k|}} = \prod_{k=n}^m |f'_k(0)| \leq \frac{1}{|\xi_n|}. \quad (2)$$

Como cada uno de los factores  $\frac{1+|\xi_k|}{2\sqrt{|\xi_k|}}$  es mayor que 1 (pues  $(1 - \sqrt{|\xi_k|})^2 > 0$ ), conforme  $m$  tiende a  $\infty$  los productos parciales  $\prod_{k=n}^m \frac{1+|\xi_k|}{2\sqrt{|\xi_k|}}$  forman una sucesión monótona acotada, por el teorema de Bolzano-Weierstrass el producto  $\prod_{k=n}^{\infty} \frac{1+|\xi_k|}{2\sqrt{|\xi_k|}}$  es convergente. Por lo tanto se debe tener  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1+|\xi_k|}{2\sqrt{|\xi_k|}} = 1$ . Además

$$\frac{1+|\xi_k|}{2\sqrt{|\xi_k|}} - 1 = \frac{(1 - \sqrt{|\xi_k|})^2}{2\sqrt{|\xi_k|}}, \quad (3)$$

entonces  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - \sqrt{|\xi_k|})^2}{2\sqrt{|\xi_k|}} = 0$  y como el denominador es acotado, se sigue que  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\xi_k| = 1$ .

Sea  $F_n(z) = f_n(f_{n-1}(\dots(f_0(z)\dots)))$ , claramente  $F_n$  es univalente en  $R_0$ , fija el origen, y mapea a  $R_0$  sobre  $R_{n+1}$ . Probaremos que la sucesión  $F_n$  converge uniformemente en los subconjuntos compactos de  $R_0$  a una función univalente  $\tilde{F}$ .

Por la regla de la cadena  $F'_n(0) = \prod_{k=0}^n f'_k(0) \neq 0$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Usando el desarrollo de Taylor alrededor del cero vemos que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{F_n(z)}{F_m(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{F'_n(0)z + \dots}{F'_m(0)z + \dots} = \frac{F'_n(0)}{F'_m(0)} \neq 0,$$

por lo que  $\frac{F_n}{F_m}$  tiene una singularidad removible en el origen. Definiendo  $\frac{F_n(0)}{F_m(0)} = \frac{F'_n(0)}{F'_m(0)}$  se tiene que  $\frac{F_n(z)}{F_m(z)}$  es analítica en  $R_0$ , y sabemos que  $F_n$  es univalente con  $F_n(0) = 0$ , así que  $\frac{F_n}{F_m}$  no se anula en  $R_0$ . Por el principio del módulo máximo, los valores máximo y mínimo de  $\frac{|F_n|}{|F_m|}$  se alcanzan en la frontera de  $R_0$ . Como para  $z \in \partial(R_0)$  se cumple que  $|\xi_n| < |F_n(z)| \leq 1$  y  $1 \leq \frac{1}{|F_m(z)|} < \frac{1}{|\xi_m|}$ , se sigue que

$$|\xi_n| < \frac{|F_n(z)|}{|F_m(z)|} < \frac{1}{|\xi_m|},$$

y en consecuencia  $\frac{|F_n(z)|}{|F_m(z)|}$  tiende a 1 uniformemente en los subconjuntos compactos de  $R_0$  cuando  $m$  y  $n$  tienden a  $\infty$ .

Por otra parte, puesto que  $\frac{F_n}{F_m}$  es analítica y no se anula en  $R_0$ , podemos definir una rama de  $\log\left(\frac{F_n}{F_m}\right)$  analítica en  $R_0$ . Sea  $L_{m,n}(z) = \log\left(\frac{F_n(z)}{F_m(z)}\right) = u_{m,n}(z) + iv_{m,n}(z)$ , entonces  $u_{m,n}$  tiende uniformemente a cero en los subconjuntos compactos de  $R_0$  cuando  $m$  y  $n$  tienden a  $\infty$ . Sea  $\overline{B(z_0, \rho)}$  un disco cerrado contenido en  $R_0$ , entonces existe  $\tilde{\rho} > \rho$  tal que  $\overline{B(z_0, \rho)} \subset B(z_0, \tilde{\rho}) \subset R_0$ . Por la fórmula integral de Poisson, si  $z_0 + re^{i\theta} \in \overline{B(z_0, \rho)}$ , entonces

$$u_{m,n}(z_0 + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \left(\frac{r}{\tilde{\rho}}\right)^2}{\left|e^{i(\theta-t)} - \frac{r}{\tilde{\rho}}\right|^2} u_{m,n}(z_0 + \tilde{\rho}e^{it}) dt,$$

diferenciando con respecto a  $r$  y tomando módulos,

$$\left| \frac{\partial u_{m,n}}{\partial r}(z_0 + re^{i\theta}) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{(1 - \frac{r^2}{\tilde{\rho}^2})u_{m,n}(z_0 + \tilde{\rho}e^{it})}{1 + \frac{r^2}{\tilde{\rho}^2} - 2\frac{r}{\tilde{\rho}} \cos(\theta - t)} \right) dt \right|,$$

desarrollando,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_{m,n}}{\partial r}(z_0 + re^{i\theta}) \right| &= \frac{1}{\pi\tilde{\rho}^3} \left| \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 + \tilde{\rho}^2) \cos(\theta - t) - 2r\tilde{\rho}}{\left|e^{i(\theta-t)} - \frac{r}{\tilde{\rho}}\right|^4} u_{m,n}(z_0 + \tilde{\rho}e^{it}) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi\tilde{\rho}^3} \int_0^{2\pi} \left| \frac{(r^2 + \tilde{\rho}^2) \cos(\theta - t) - 2r\tilde{\rho}}{\left|e^{i(\theta-t)} - \frac{r}{\tilde{\rho}}\right|^4} u_{m,n}(z_0 + \tilde{\rho}e^{it}) \right| dt \\ &\leq \frac{r^2 + \tilde{\rho}^2 + 2r\tilde{\rho}}{\pi\tilde{\rho}^3(1 - \frac{r}{\tilde{\rho}})^4} \int_0^{2\pi} |u_{m,n}(z_0 + \tilde{\rho}e^{it})| dt \leq \frac{\rho^2 + \tilde{\rho}^2 + 2\rho\tilde{\rho}}{\pi\tilde{\rho}^3(1 - \frac{\rho}{\tilde{\rho}})^4} \int_0^{2\pi} |u_{m,n}(z_0 + \tilde{\rho}e^{it})| dt, \end{aligned}$$

de donde  $\left|\frac{\partial u_{m,n}}{\partial r}\right| \rightarrow 0$  uniformemente en  $\overline{B(z_0, \rho)}$  y por lo tanto en los subconjuntos compactos de  $R_0$ . Similarmente  $\left|\frac{\partial u_{m,n}}{\partial \theta}\right| \rightarrow 0$  y por las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar se tiene que  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} L_{m,n} = 0$ . Luego  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_m} = 1$ , ó equivalentemente  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{F_n - F_m}{F_m} = 0$ , como la sucesión  $\{F_m\}$  es acotada, se debe cumplir  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} F_n - F_m = 0$ . Por lo tanto las funciones  $F_n$  convergen uniformemente en los subconjuntos compactos de  $R_0$  a una función  $\tilde{F}$ . Como se mencionó anteriormente  $|\xi_{n+1}| \leq |F_n(z)| \leq 1$  para  $z \in \partial(R_0)$ , tomando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  se sigue que  $|\tilde{F}| = 1$  en  $\partial(R_0)$ . Además  $\tilde{F}(0) = 0$ , de manera que  $\tilde{F}$  no es constante, y por el teorema 3.5,  $\tilde{F}$  es univalente en  $R_0$ . Puesto que la imagen de  $R_0$  bajo  $\tilde{F}$  es una región simplemente conexa cuya frontera tiene módulo uno, es claro que  $\tilde{F}(R_0) = B(0, 1)$ . Componiendo con  $F$  obtenemos la sucesión  $g_n = F_n \circ F$  de funciones univalentes en  $R_0$  que converge uniformemente en los subconjuntos compactos de  $R$  a la función  $g = \tilde{F} \circ F$ , una biyección conforme entre  $R$  y el disco unitario. Por lo tanto la demostración de la parte de existencia del teorema está terminada.

Ahora estimaremos la velocidad de convergencia, tomando logaritmos en (2) con  $m = 2n$  y usando (3) se tiene que

$$-\log(|\xi_{n+1}|) = \log\left(\frac{1}{|\xi_{n+1}|}\right) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \log\left(\frac{1+|\xi_k|}{2\sqrt{|\xi_k|}}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n} \log\left(1 + \frac{(1-\sqrt{|\xi_k|})^2}{2\sqrt{|\xi_k|}}\right).$$

Por otro lado, la función  $\frac{\log(1+x)}{x}$  es monótona decreciente en los intervalos  $(-1, 0)$  y  $(0, \infty)$  (esto se puede apreciar comparando las gráficas de las funciones  $x$  y  $\log(1+x)$ , aunque es posible dar una demostración rigurosa interpretando la derivada en términos de áreas). Se sigue que  $\log\left(1 + \frac{(1-\sqrt{|\xi_k|})^2}{2\sqrt{|\xi_k|}}\right) \geq \frac{(1-\sqrt{|\xi_k|})^2}{2} 2\log(1+\frac{1}{2})$ . Sustituyendo en la ecuación anterior,

$$-\log(|\xi_{n+1}|) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(1-\sqrt{|\xi_k|})^2}{2} 2\log\left(\frac{3}{2}\right). \quad (4)$$

Nuevamente usando que  $\frac{\log(1+x)}{x}$  es decreciente, tenemos que

$$\frac{-\log(|\xi_{n+1}|)}{1-|\xi_{n+1}|} = \frac{\log(1+(|\xi_{n+1}|-1))}{|\xi_{n+1}|-1} \leq \frac{\log(1+(|\xi_1|-1))}{|\xi_1|-1} = \frac{\log(|\xi_1|)}{|\xi_1|-1},$$

de donde

$$-\log(|\xi_{n+1}|) \leq (1-|\xi_{n+1}|) \frac{\log(|\xi_1|)}{|\xi_1|-1} < (1-|\xi_n|) \frac{\log(\frac{1}{|\xi_1|})}{1-|\xi_1|}, \quad (5)$$

observando que  $(1-\sqrt{|\xi_k|})^2 = \frac{(1-|\xi_k|)^2}{(1+\sqrt{|\xi_k|})^2} > \frac{(1-|\xi_k|)^2}{4}$  y sustituyendo junto con (5) en (4) obtenemos

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{1-|\xi_k|}{2a}\right)^2 < \frac{1-|\xi_n|}{a} \quad \left(a = \frac{\log(\frac{1}{|\xi_1|})}{(1-|\xi_1|)\log(\frac{3}{2})}\right).$$

Luego  $n \left(\frac{1-|\xi_{2n}|}{2a}\right)^2 < \frac{1-|\xi_n|}{a}$  (pues la sucesión  $|\xi_n|$  es monótona creciente), ó equivalentemente  $\left(2n \left(\frac{1-|\xi_{2n}|}{16a}\right)\right)^2 < n \left(\frac{1-|\xi_n|}{16a}\right)$ , por lo que para  $2^\alpha > 1$  se cumple que

$$\left(2^\alpha \left(\frac{1-|\xi_{2^\alpha}|}{16a}\right)\right)^2 < \left(2^{\alpha-1} \left(\frac{1-|\xi_{2^{\alpha-1}}|}{16a}\right)\right)^2 < \dots < \frac{1-|\xi_1|}{16a},$$

pero

$$\frac{1-|\xi_1|}{16a} = \frac{(1-|\xi_1|)^2 \log(\frac{3}{2})}{16(-\log(|\xi_1|))} = \frac{(1-|\xi_1|) \log(\frac{3}{2})}{16} \cdot \frac{|\xi_1|-1}{\log(1+(|\xi_1|-1))} < 1,$$

de manera que

$$1 - |\xi_{2^\alpha}| < \frac{16a}{2^\alpha}.$$

Por último, tomando  $\alpha = \frac{\log(n)}{\log(2)} + 1$  en la desigualdad anterior para  $n \geq 2$ ,

$$1 - |\xi_n| = 1 - |\xi_{2^{\alpha-1}}| < \frac{16a}{2^{\alpha-1}} = \frac{16a}{n}$$

y como  $\frac{1-|\xi_1|}{16a} < 1$ , también se tiene  $1 - |\xi_1| < 16a$ , lo que prueba el resultado. ■

La construcción de la función de Riemann dada en el teorema anterior no es usada para fines prácticos, pues el ritmo de convergencia de las funciones  $g_n$  no es lo suficientemente rápido. Para cierto tipo de regiones existen construcciones cuyo uso es más conveniente. Por ejemplo, el teorema de Schwarz-Christoffel proporciona fórmulas integrales para transformar semiplanos ó el disco en regiones poligonales de manera conforme, aunque algunos de los coeficientes en dichas fórmulas se deben aproximar numericamente. En el caso general, encontrar una biyección conforme entre el disco y una región dada es un problema complicado.

Para terminar este trabajo, mencionaremos que las transformaciones conformes tienen una diversidad de aplicaciones en diversos campos de la física, entre los cuales se encuentran la electroestática y la hidrodinámica, para quien esté interesado en éstas aplicaciones un buen punto de partida podría ser el libro de Marsden mencionado en la bibliografía.

# Bibliografía

- [1] Sanford L. Segal, *Nine Introductions in Complex Analysis*, North-Holland Publishing Company, (1981)
- [2] Jerrold E. Marsden, Michael J. Hoffman, *Basic Complex Analysis*, W. H. Freeman and Company, (1987)
- [3] Robert B. Ash, W. P. Novinger, *Complex Variables*, Dover Publications, Inc., (2007)
- [4] Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, (1966)

# Preliminares

La mayoría de la notación utilizada en el texto es de uso común en el estudio de la variable compleja, sin embargo cabe aclarar lo siguiente:

Por "región" entenderemos un subconjunto abierto y conexo del plano.

Denotaremos como  $B(z_0, r)$  al disco abierto con centro en un punto  $z_0$  y radio  $r$ ,  $\overline{B(z_0, r)}$  a su cerradura y  $C(z_0, r)$  a su frontera, la circunferencia con centro en  $z_0$  y radio  $r$ .

A lo largo de este trabajo asumiremos algunos resultados fundamentales del análisis complejo, para futura referencia los enlistamos aquí.

**Teorema 0.1 (del modulo máximo)** *Sea  $f$  analítica en una región  $A$ . Si  $|f|$  tiene un máximo local en  $z_0 \in A$ , entonces  $f$  es constante.*

**Teorema 0.2 (Lema de Schwarz)** *Si  $f : B(0, 1) \rightarrow \overline{B(0, 1)}$  es analítica con  $f(0) = 0$ , entonces  $|f(z)| \leq |z|$  para toda  $z \in B(0, 1)$  y  $|f'(0)| \leq 1$ . Si  $|f(z_0)| = |z_0|$  para algún  $z_0 \in B(0, 1)$ ,  $z_0 \neq 0$ , entonces  $f(z) = cz$  para toda  $z \in B(0, 1)$  y  $c$  una constante tal que  $|c| = 1$ .*

**Teorema 0.3 (Formula integral de Poisson)** *Sea  $f$  continua en  $\overline{B(z_0, \rho)}$  y analítica en  $B(z_0, \rho)$ . Entonces para  $z \in B(z_0, \rho)$ ,*

$$f(z_0 + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - (\frac{r}{\rho})^2}{|e^{i(\theta-t)} - \frac{r}{\rho}|^2} f(z_0 + \rho e^{it}) dt.$$

**Teorema 0.4** *Sea  $\gamma$  una curva cerrada simple. Si  $f$  es analítica en un abierto que contiene a  $\gamma$  y su interior, excepto por un numero finito de polos y ceros ninguno de los cuales está en  $\gamma$ , entonces*

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (Z_f - P_f)$$

donde  $Z_f$  y  $P_f$  son el numero de ceros y polos respectivamente en el interior de  $\gamma$ , contados con multiplicidades.

con la notación del teorema anterior,

**Teorema 0.5 (Rouche)** *Sea  $\gamma$  una curva cerrada simple. Si  $f, g$  son analíticas en una región que contiene a  $\gamma$  y su interior, excepto por un número finito de polos y ceros ninguno de los cuales está en  $\gamma$ , y además se satisface  $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$  para  $z \in \gamma$ , entonces  $Z_f - P_f = Z_g - P_g$ .*

**Teorema 0.6 (del mapeo abierto)** *Sean  $A \subset \mathbb{C}$  abierto y  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  analítica y no constante. Entonces la imagen bajo  $f$  de cualquier conjunto abierto es un conjunto abierto.*

# Introducción

Un resultado básico e importante de la teoría del análisis complejo es el conocido como Teorema del Mapeo de Riemann, que esencialmente describe a la clase de conjuntos conformemente equivalentes al disco unitario. Dos aspectos importantes en el problema de equivalencia conforme son: la existencia de la biyección conforme y la construcción de esta. Un acercamiento a estas cuestiones brinda una oportunidad para integrar diversos conocimientos que se adquieren en los primeros cursos de variable compleja. Por ejemplo, durante el desarrollo de la teoría necesaria para demostrar la existencia se recurre a resultados como la fórmula integral de Cauchy, el principio del módulo máximo y el teorema de Rouché entre otros. En la construcción de la transformación se usa, en conjunción con otros resultados, la fórmula integral de Poisson, la cual tiene aplicaciones relevantes en el problema de Dirichlet. El objetivo de este trabajo es dar un par de demostraciones del teorema de Riemann (una por construcción), accesibles para cualquiera con los conocimientos de un curso introductorio de variable compleja. Se intenta hacer un texto autocontenido, para lo cual se incluye una sección preliminar en la que se enuncian varios teoremas que usaremos frecuentemente, algunos de los cuales no forman parte de dicho curso. El resto de la tesis consta de cinco capítulos. En el capítulo 1 se hace un breve repaso de los aspectos geométricos de las transformaciones conformes. El capítulo 2 introduce a las transformaciones fraccionales lineales, se muestra que son las únicas biyecciones meromorfas de  $\mathbb{C}^\infty$  en sí mismo y se estudia su relación con la reflexión respecto a una circunferencia. En el capítulo 3 se prueba que las funciones univalentes son conformes y que las únicas funciones univalentes del disco unitario cerrado sobre sí mismo son transformaciones fraccionales lineales, además se analiza la convergencia uniforme de funciones univalentes. En el capítulo 4 se dan criterios para determinar cuando una familia de funciones es normal, específicamente, se demuestran los teoremas de Arzela-Ascoli para familias equicontinuas y de Montel para familias uniformemente acotadas. Por último, en el capítulo 5 se expone la demostración de Féjer y Riesz del teorema del mapeo de Riemann, también se da una demostración del teorema por construcción (Koebe), en la cual la biyección conforme se obtiene como el límite de una sucesión de funciones univalentes, y se hace una estimación del ritmo de convergencia de dicha sucesión (Ostrowski).

# Capítulo 1

## Mapeos conformes, la preservación de ángulos.

Supongamos que  $c_1(t)$ ,  $c_2(t)$  son dos parametrizaciones de curvas que se intersectan en un punto  $z_0 = c_1(t_0) = c_2(t_0)$  de una región  $A$  del plano formando un ángulo  $\alpha$ , es decir, el ángulo entre sus rectas tangentes en  $z_0$  es  $\alpha$ , y que  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  es una función analítica con  $f'(z_0) \neq 0$ , entonces las curvas  $f \circ c_1$  y  $f \circ c_2$  también se intersectan formando un ángulo  $\alpha$ . Esto es consecuencia de la regla de la cadena, pues si  $c(t)$  es diferenciable en  $t_0$  y  $f$  es diferenciable en  $z_0 = c(t_0)$  se cumple que  $f \circ c$  es diferenciable en  $t_0$  y  $(f \circ c)'(t_0) = f'(c(t_0)) \cdot c'(t_0) = f'(z_0) \cdot c'(t_0)$ , el vector tangente a  $f \circ c$  en  $f(z_0)$  es el vector tangente a  $c$  en  $z_0$  multiplicado por  $f'(z_0)$ , el efecto sobre  $c'(t_0)$  de esta multiplicación es una rotación con un ángulo  $\arg f'(z_0)$  seguido de una homotecia de un factor  $|f'(z_0)|$ , entonces para las curvas  $c_1$  y  $c_2$  se tiene que las tangentes a  $f \circ c_1$  y  $f \circ c_2$  se han girado el mismo ángulo  $\arg f'(z_0)$ .

Esta conservación de ángulos se puede apreciar intuitivamente de la siguiente manera, si las tangentes a  $c_1(t)$ ,  $c_2(t)$  en  $z_0$  forman ángulos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  con el eje real respectivamente (medidos en sentido positivo del eje real a la tangente), entonces el ángulo interior entre  $c_1$  y  $c_2$  es  $\alpha_2 - \alpha_1$ , y  $\alpha_2 - \alpha_1$  también es el ángulo entre las curvas  $f \circ c_1$  y  $f \circ c_2$  en  $f(z_0)$ .

Considerese  $z_1 = z_0 + re^{i\theta}$  un punto sobre la curva  $c_1$  a una distancia  $r$  de  $z_0$ , tal que  $z_1 \rightarrow z_0$  y  $\theta \rightarrow \alpha_1$  cuando  $r \rightarrow 0$ . Conforme  $z_1 \rightarrow z_0$  sobre  $c_1$ ,  $f(z_1) \rightarrow f(z_0)$  sobre  $f(c_1)$ , y  $\phi_1 = \arg(f(z_1) - f(z_0))$  tiende al ángulo que forma la tangente a  $f(c_1)$  en  $f(z_0)$ .

Si  $|f(z_1) - f(z_0)| = \rho$  entonces

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho e^{i\phi_1}}{r e^{i\theta}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho}{r} e^{i(\phi_1 - \theta)} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} \phi_1 - \theta &= \arg f'(z_0), \\ \lim_{r \rightarrow 0} \phi_1 &= \alpha_1 + \arg f'(z_0).\end{aligned}$$

El mismo argumento para un punto  $z_2$  sobre  $c_2(t)$  muestra que  $\lim_{r \rightarrow 0} \phi_2 = \alpha_2 + \arg f'(z_0)$  donde  $\phi_2 = \arg(f(z_2) - f(z_0))$ .

Mas aún, si  $f'$  tiene un cero de orden  $n$  en  $z_0$ , entonces el ángulo entre  $f(c_1)$  y  $f(c_2)$  es el ángulo entre  $c_1$  y  $c_2$  multiplicado por  $n+1$ , esto se sigue del desarrollo de Taylor para  $f$ , en una vecindad de  $z_0$ ,

$$\begin{aligned}f(z_1) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)(z - z_0)^2}{2} + \dots \\ &= f(z_0) + \frac{f^{(n+1)}(z_0)(z - z_0)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{f^{(n+2)}(z_0)(z - z_0)^{n+2}}{(n+2)!} + \dots\end{aligned}$$

y con la notación anterior

$$\begin{aligned}\rho e^{i\phi_1} &= f(z_1) - f(z_0) = \frac{f^{(n+1)}(z_0)(z - z_0)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{f^{(n+2)}(z_0)(z - z_0)^{n+2}}{(n+2)!} + \dots \\ &= \frac{f^{(n+1)}(z_0)(re^{i\theta})^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{f^{(n+2)}(z_0)(re^{i\theta})^{n+2}}{(n+2)!} + \dots,\end{aligned}$$

tomando el límite cuando  $r \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho e^{i\phi_1}}{r^{n+1}} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f^{(n+1)}(z_0)e^{i(n+1)\theta}}{(n+1)!} + \frac{f^{(n+2)}(z_0)re^{i(n+2)\theta}}{(n+2)!} + \dots \\ &= \frac{f^{(n+1)}(z_0)e^{i(n+1)\alpha_1}}{(n+1)!} = ae^{i(n+1)\alpha_1},\end{aligned}$$

de donde  $\lim_{r \rightarrow 0} \phi_1 = \arg a + (n+1)\alpha_1$ , similarmente  $\lim_{r \rightarrow 0} \phi_2 = \arg a + (n+1)\alpha_2$ .

A los mapeos que preservan tanto la magnitud como el sentido de los ángulos les llamaremos conformes, hemos visto que si  $f$  es analítica en  $z_0$  con  $f'(z_0) \neq 0$ , entonces  $f$  es conforme en  $z_0$ . Es posible probar que si  $f$  es una biyección que preserva ángulos y  $f_x, f_y$  son continuas entonces  $f$  es analítica con  $f' \neq 0$ , así, para los propósitos de este trabajo consideraremos como equivalentes las nociones "conforme" y "analítica con derivada distinta de cero". Es interesante notar que, puesto que la conjugación compleja equivale a la reflexión respecto al eje real, si  $f$  es conforme entonces  $g = \bar{f}$  preserva la magnitud de los ángulos pero invierte su sentido, a este tipo de mapeos se les llama indirectamente conformes.

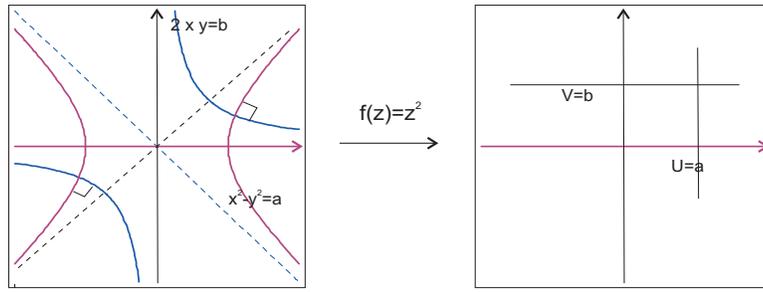
A manera de ejemplo del efecto de un mapeo conforme consideremos la función  $f(z) = z^2$ .

Si  $z$  es de la forma  $re^{i\theta}$  entonces  $f(z) = r^2e^{i2\theta}$  y la región angular  $\alpha < \theta < \beta$  es transformada sobre la región  $2\alpha < \arg f(z) < 2\beta$ , observese que si  $\beta - \alpha > \pi$ , la

imagen cubre una parte del plano dos veces.

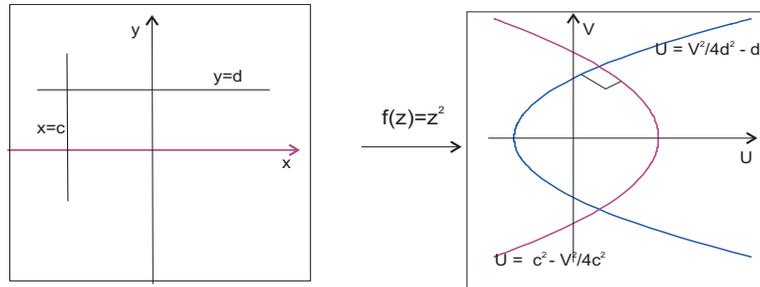
Si  $z$  es de la forma  $x+iy$  entonces  $f(z) = x^2 - y^2 + i2xy = u+iv$ , las preimágenes de las rectas  $u = a, v = b$  son las hipérbolas  $x^2 - y^2 = a, 2xy = b$  respectivamente, las primeras son asíntóticas a las rectas  $y = x, y = -x$  y las asíntotas de las segundas son los ejes. Si  $a$  y  $b$  no son ambos cero y las hipérbolas se intersectan en un punto  $z_0$ , entonces  $z_0 \neq 0$  y  $f'(z_0) = 2z_0 \neq 0$ , por lo tanto el ángulo de intersección de ambas curvas es el mismo que el ángulo de intersección entre las curvas  $u = a, v = b$ , es decir  $\frac{\pi}{2}$ .

Si  $a = b = 0$ , como  $f'$  tiene un cero simple en el origen, el ángulo de intersección de las curvas  $u = 0, v = 0$  es el doble del ángulo de intersección de las "hipérbolas" preimágen, y por lo tanto éstas se intersectan formando un ángulo de  $\frac{\pi}{4}$ .



Similarmente, las imágenes de las curvas  $x = c, y = d, c, d \neq 0$ , son las parábolas  $u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}, u = \frac{v^2}{4d^2} - d^2$  respectivamente, la primera familia de parábolas abre hacia la izquierda mientras que la segunda lo hace hacia la derecha, y ambas familias se intersectan formando un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$ .

Los ejes  $x = 0, y = 0$  son transformados en las semirectas  $v = 0, u \leq 0$  y  $v = 0, u \geq 0$  respectivamente, que se intersectan formando un ángulo  $\pi$ , acorde con el hecho de que  $f'$  tiene un cero simple en el origen.



## Capítulo 2

# Transformaciones de Möbius, inversión

En esta sección estudiaremos algunas de las propiedades de una clase importante de funciones conformes conocidas como transformaciones fraccionales lineales o transformaciones de Möbius, que definiremos a continuación.

**Definición 2.1** Una transformación fraccional lineal o de Möbius es una función de la forma  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , con  $ad - bc \neq 0$ .

La condición  $ad - bc \neq 0$  en la definición excluye a las funciones constantes, pues por la regla del cociente para la derivada  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  es analítica en  $z \neq -\frac{d}{c}$  y  $f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ , si  $ad - bc = 0$  entonces  $f'$  es idénticamente cero y en consecuencia  $f$  es constante.

Un hecho básico acerca de las transformaciones fraccionales lineales es el siguiente.

**Teorema 2.1** Las transformaciones de Möbius forman un grupo bajo la composición.

**Dem.**

La asociatividad de la composición de funciones es un hecho conocido, verificaremos la cerradura y existencia de neutro e inversos.

Sean  $\phi_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $\phi_2(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$  transformaciones de Möbius, un cálculo simple muestra que

$$\phi_2 \circ \phi_1(z) = \frac{(ea + fc)z + (eb + fd)}{(ga + ch)z + (gb + dh)} = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

y que

$$a'd' - b'c' = (ad - bc)(eh - fg) \neq 0.$$

Claramente  $Id(z) = z$  es de Möbius y funciona como neutro para la composición de funciones. Por último, si  $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $ad - bc \neq 0$ , es fácil ver que  $\phi^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}$  satisface  $\phi \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \phi = Id$ . ■

Una transformación de Möbius  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  en principio no está definida en  $\frac{-d}{c}$ , se puede convenir extendiendo a  $\mathbb{C}^\infty$  tanto en el dominio como en el codominio al hacer  $f(\frac{-d}{c}) = \infty$  y  $f(\infty) = \frac{a}{c}$  si es el caso que  $c \neq 0$ . Si  $c = 0$ ,  $f$  tiene sentido en todo  $\mathbb{C}$  y en este caso se acuerda que  $f(\infty) = \infty$ .

Extendidas de esta manera, las transformaciones fraccionales lineales son las únicas biyecciones meromorfas en  $\mathbb{C}^\infty$ , probaremos este hecho más adelante.

Recordemos que una función racional es una función de la forma  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ , donde  $p(z)$ ,  $q(z)$  son polinomios y  $q(z)$  no es idénticamente cero. Podemos ahora enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 2.2**  $f(z)$  es una función meromorfa en  $\mathbb{C}^\infty$  si y sólo si  $f(z)$  es una función racional.

**Dem.**

Supongamos primero que  $f : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$  es una función meromorfa. Probaremos que  $f$  es racional. Sean  $\beta_1, \dots, \beta_s$  los polos de  $f$  en  $\mathbb{C}$  de orden  $n_1, \dots, n_s$  respectivamente. La función  $p(z) = (z - \beta_1)^{n_1} \cdots (z - \beta_s)^{n_s} f(z) = q(z)f(z)$  es entera y por lo tanto su desarrollo en series de Taylor alrededor de cero es válido en todo  $\mathbb{C}$ ,

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Por hipótesis  $f$  es meromorfa en  $\infty$ , equivalentemente, la función compuesta  $f(\frac{1}{z})$  es meromorfa en cero, se sigue que  $p(\frac{1}{z}) = (\frac{1}{z} - \beta_1)^{n_1} \cdots (\frac{1}{z} - \beta_s)^{n_s} f(\frac{1}{z})$  es meromorfa en cero. Por otro lado  $p(\frac{1}{z}) = a_0 + a_1 \frac{1}{z} + a_2 \frac{1}{z^2} + \dots$ , de manera que  $a_n = 0$  a partir de algún  $n$  y  $p$  es un polinomio. Por lo tanto  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  es racional.

Ahora sea  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  con  $p(z)$  y  $q(z)$  polinomios sin factores comunes. Claramente  $f$  es analítica para  $z \neq \infty$  y cuando  $q(z) \neq 0$ .

Si  $z_0 \neq \infty$  es un cero de  $q(z)$  entonces  $f$  tendrá un polo en  $z_0$  de orden la multiplicidad de  $z_0$  como cero de  $q$ .

Si  $z = \infty$ , entonces  $f$  será analítica si  $\text{grado}(q) \geq \text{grado}(p)$ , y tendrá un polo si  $\text{grado}(q) < \text{grado}(p)$ .

En cualquier caso  $f$  es meromorfa en  $\mathbb{C}^\infty$ . ■

El grado de una función racional  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ , donde  $p(z)$  y  $q(z)$  no tienen factores comunes se define como el máximo de los grados de  $p$  y  $q$ . Tenemos entonces que:

**Teorema 2.3** Si  $f : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$  es una función racional de grado  $d > 0$ , entonces  $f$  toma cada valor  $c \in \mathbb{C}^\infty$  exactamente  $d$  veces contando multiplicidades.

**Dem.**

Sea  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  con  $p(z)$  y  $q(z)$  polinomios sin factores comunes.

Tomemos primero  $c = \infty$ .

Para  $z \in \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \infty$  si y sólo si  $q(z) = 0$ , y sabemos que  $q(z) = 0$  tiene  $\text{grado}(q)$  soluciones. Si  $\text{grado}(p) \leq \text{grado}(q)$  entonces tales raíces son los únicos polos de

*f*. Si  $\text{grado}(p) > \text{grado}(q)$  entonces *f* tiene en  $\infty$  un polo de orden  $\text{grado}(p) - \text{grado}(q)$ . En ambos casos el número de soluciones de  $f(z) = \infty$  es  $\text{grado}(f) = \max\{\text{grado}(p), \text{grado}(q)\}$ .

Ahora tomemos  $c \neq \infty$ .

Como  $\text{grado}(f) > 0$ , se tiene que *f* no es constante, por lo que

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - c} = \frac{q(z)}{p(z) - cq(z)}$$

es una función racional, además las soluciones de  $f(z) = c$  son precisamente los polos de *g*(*z*), cuyo número contando multiplicidades es, por el primer argumento,  $\text{grado}(g)$ . Pero si *p*(*z*) y *q*(*z*) son coprimos, también lo son *q*(*z*) y *p*(*z*) - *cq*(*z*), de manera que

$$\text{grado}(g) = \max\{\text{grado}(q), \text{grado}(p - cq)\} = \max\{\text{grado}(q), \text{grado}(p)\} = \text{grado}(f),$$

por lo que la demostración está completa. ■

Como corolario de los teoremas 2.2 y 2.3 se tiene el resultado mencionado anteriormente.

**Teorema 2.4** *f*(*z*) es una biyección meromorfa en  $\mathbb{C}^\infty$  si y sólo si *f*(*z*) es una transformación fraccional lineal.

**Dem.**

Sea *f* una biyección meromorfa en  $\mathbb{C}^\infty$ .

Por el teorema 2.2 *f* es racional. Además  $\text{grado}(f) = 1$ , pues si  $\text{grado}(f) > 1$  entonces *f* no es inyectiva por el teorema 2.3, y si  $\text{grado}(f) = 0$  entonces  $f = \text{cte}$  tampoco es inyectiva. Por lo tanto  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con *c* y *d* no ambos cero. Además  $ad - bc \neq 0$ , ya que en caso contrario  $f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$  sería cero y entonces *f* sería constante, una contradicción.

Por lo tanto *f* es una transformación fraccional lineal.

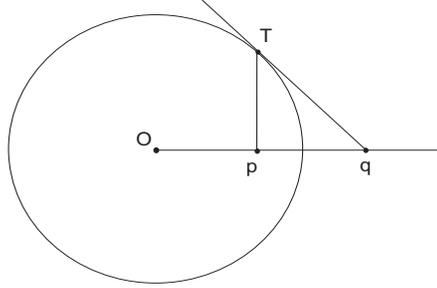
Ahora sea  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  una transformación fraccional lineal. Es fácil ver que la condición  $ad - bc \neq 0$  es equivalente a  $\text{grado}(f) = 1$ . El resto de la demostración es inmediato a partir del teorema 2.3. ■

Como veremos a continuación, las transformaciones de Möbius están relacionadas con el concepto de inversión, esto es, la reflexión respecto a una circunferencia.

**Definición 2.2** Dos puntos distintos  $p, q \in \mathbb{C}$  son inversos respecto a la circunferencia  $C(z_0, \rho) = \{z; |z - z_0| = \rho\}$ ,  $\rho > 0$ , si son colineales con  $z_0$ , están en el mismo lado de  $z_0$ , y  $|p - z_0||q - z_0| = \rho^2$ . Definimos también el inverso de  $z_0$  respecto a  $C(z_0, \rho)$  como  $\infty$ .

Dado un punto  $p \in B(z_0, \rho) = \{z; |z - z_0| < \rho\}$ ,  $p \neq z_0$ , la construcción geométrica del punto *q* inverso de *p* respecto a  $C(z_0, \rho)$  se puede hacer de la siguiente

manera, si  $L$  es la línea por  $z_0$  y  $p$ , trácese la perpendicular a  $L$  por  $p$ , en el punto  $T$  en el que dicha perpendicular intersecta a  $C(z_0, \rho)$  tomese la tangente a la circunferencia, la intersección de la tangente con  $L$  es  $q$ , esto se sigue de la semejanza de los triángulos  $\triangle Tz_0p$  y  $\triangle Tz_0q$ . Si el punto  $q$  está fuera de la circunferencia su inverso  $p$  queda determinado geoméricamente con la misma construcción, es decir, desde  $q$  trácese la tangente a la circunferencia con  $T$  el punto de tangencia, después trácese la perpendicular a  $z_0q$  desde  $T$ , el punto de intersección de la perpendicular y  $z_0q$  es  $p$ , el inverso de  $q$  respecto a  $C(z_0, \rho)$ .



Los siguientes dos teoremas dan una descripción de la circunferencia en el plano complejo respecto a la cual son inversos dos puntos  $p$  y  $q$ .

**Teorema 2.5** Si  $p, q \neq \infty$  son puntos inversos respecto a  $C(z_0, \rho)$ , entonces  $C(z_0, \rho)$  es un subconjunto de  $\{z; |\frac{z-p}{z-q}| = \frac{m}{\rho} \neq 1\}$  donde  $m = |p - z_0| \neq 0$ .

**Dem.**

Sea  $p = z_0 + me^{i\mu}$ ,  $m > 0$ .

Como  $p$  y  $q$  son inversos respecto a  $C(z_0, \rho)$ , se cumple que  $z_0, p, q$  son colineales,  $p, q$  están del mismo lado de  $z_0$ , y  $|p - z_0||q - z_0| = \rho^2$ , de donde  $\arg(q - z_0) = \arg(p - z_0) = \mu$  y  $|q - z_0| = \frac{\rho^2}{m}$ .

Por lo tanto  $q = z_0 + \frac{\rho^2}{m}e^{i\mu}$ .

Si  $z \in C(z_0, \rho)$ ,  $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$  para algún  $\theta$ , y

$$\begin{aligned} \left| \frac{z-p}{z-q} \right| &= \left| \frac{(z_0 + \rho e^{i\theta}) - (z_0 + me^{i\mu})}{(z_0 + \rho e^{i\theta}) - (z_0 + \frac{\rho^2}{m}e^{i\mu})} \right| = \left| \frac{\rho e^{i\theta} - me^{i\mu}}{\rho e^{i\theta} - \frac{\rho^2}{m}e^{i\mu}} \right| \\ &= \frac{|\rho e^{i\theta} - me^{i\mu}|}{|\frac{\rho}{m}| |me^{i\theta} - \rho e^{i\mu}|} = \frac{m |\rho e^{i\theta} - me^{i\mu}|}{\rho |me^{i\theta} - \rho e^{i\mu}|} = \frac{m |\rho e^{-i\theta} - me^{-i\mu}|}{\rho |me^{i\theta} - \rho e^{i\mu}|} \\ &= \frac{m |e^{-i(\theta+\mu)}(\rho e^{i\mu} - me^{i\theta})|}{\rho |me^{i\theta} - \rho e^{i\mu}|} = \frac{m}{\rho} \neq 1. \end{aligned}$$

(Si  $\frac{m}{\rho} = 1$  de  $|z_0 - p||z_0 - q| = \rho^2$  se tendría  $p = q$ .) ■

**Teorema 2.6** Sean  $p, q$  dos puntos distintos de  $\mathbb{C}$ . La ecuación  $|\frac{z-p}{z-q}| = k$ ,  $k \in \mathbb{R}^+$ ,  $k \neq 1, 0$  representa una circunferencia respecto a la cual  $p$  y  $q$  son puntos inversos.

**Dem.**

Sea  $z$  tal que  $|\frac{z-p}{z-q}| = k$ , ó equivalentemente  $|z-p|^2 = k^2|z-q|^2$ , desarrollando ambos lados de la igualdad,

$$\begin{aligned}(z-p)\overline{(z-p)} &= k^2(z-q)\overline{(z-q)}, \\ |z|^2 + |p|^2 - 2\operatorname{Re} z\bar{p} &= k^2|z|^2 + k^2|q|^2 - 2k^2\operatorname{Re} z\bar{q},\end{aligned}$$

despejando y agrupando términos

$$(1-k^2)|z|^2 + (|p|^2 - k^2|q|^2) - 2\operatorname{Re} z\overline{(p-k^2q)} = 0,$$

y como  $1-k^2 \neq 0$

$$|z|^2 + \left(\frac{|p|^2 - k^2|q|^2}{1-k^2}\right) - 2\operatorname{Re} z\overline{\left(\frac{p-k^2q}{1-k^2}\right)} = 0,$$

completando el módulo al cuadrado

$$\left|z - \frac{p-k^2q}{1-k^2}\right|^2 = \frac{k^2|p-q|^2}{(1-k^2)^2},$$

por último, tomando raíces se obtiene  $|z - \frac{p-k^2q}{1-k^2}| = \frac{k|p-q|}{(1-k^2)}$ , que es la ecuación de la circunferencia  $C(\frac{p-k^2q}{1-k^2}, \frac{|k||p-q|}{|1-k^2|})$ . Resta verificar que  $p$  y  $q$  son inversos respecto a esta, para ello observamos que  $p - \frac{p-k^2q}{1-k^2} = \frac{k^2(q-p)}{1-k^2}$  y  $q - \frac{p-k^2q}{1-k^2} = \frac{q-p}{1-k^2}$  tienen el mismo argumento y  $|\frac{k^2(q-p)}{1-k^2}| |\frac{q-p}{1-k^2}| = (\frac{|k||p-q|}{|1-k^2|})^2$ . ■

El conjunto  $S = \{z; |\frac{z-p}{z-q}| = 1\}$  representa una recta, pues si  $z \in S$  entonces  $z$  equidista de  $p$  y  $q$  y por lo tanto está en la mediatriz del segmento  $\overline{pq}$ , que es el conjunto de puntos equidistantes de  $p$  y  $q$ . Con esta motivación podemos considerar a una recta como una circunferencia degenerada ó una circunferencia que pasa por  $\infty$ , y definir  $p$  y  $q$  puntos inversos respecto a una recta si  $p$  y  $q$  son simétricos respecto a esta. Por el resto de este trabajo usaremos el término "circunferencia" para referirnos ya sea a una circunferencia ó a una línea recta, con esta convención tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 2.7** *Bajo una transformación de Möbius la imagen de una circunferencia es una circunferencia, y las imágenes de puntos inversos respecto a una circunferencia son puntos inversos respecto a la imagen de dicha circunferencia.*

**Dem.**

Sean  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $ad-bc \neq 0$ , y  $K$  una circunferencia en  $\mathbb{C}$ .

Por los teoremas 2.5 y 2.6 si  $p, q \neq \infty$  son dos puntos inversos respecto a  $K$  podemos representar a  $K$  como  $\{z; |\frac{z-p}{z-q}| = k, k \neq 0\}$ .

Por el teorema 2.4  $f$  es biyectiva, por lo tanto  $w \in f(K)$  si y solo si  $f^{-1}(w) \in K$ , esto es  $\frac{-dw+b}{cw-a} \in K$  ó

$$\left|\frac{\frac{-dw+b}{cw-a} - p}{\frac{-dw+b}{cw-a} - q}\right| = k. \quad (1)$$

Ahora bien, hay tres posibilidades: ó  $f(p), f(q) \neq \infty$ , ó alguno de los dos puntos  $p, q$  va a dar a  $\infty$  bajo  $f$  pero no ambos, pues  $f$  es inyectiva. En el primer caso, se tiene que  $cq + d, cp + d \neq 0$  y de la ecuación (1) se obtiene

$$\begin{aligned} k &= \left| \frac{\frac{-dw+b}{cw-a} - p}{\frac{-dw+b}{cw-a} - q} \right| = \left| \frac{-dw + b - p(cw - a)}{-dw + b - q(cw - a)} \right| \\ &= \left| \frac{\frac{-dw+b-p(cw-a)}{cp+d}}{\frac{-dw+b-q(cw-a)}{cq+d}} \right| \left| \frac{cp+d}{cq+d} \right| = \left| \frac{-w + \frac{ap+b}{cp+d}}{-w + \frac{aq+b}{cq+d}} \right| \left| \frac{cp+d}{cq+d} \right| \end{aligned}$$

de donde

$$\left| \frac{w - f(p)}{w - f(q)} \right| = k \left| \frac{cq + d}{cp + d} \right|,$$

y por el teorema 2.6 se sigue el resultado.

El caso  $f(q) = \infty$  se da solo si  $c \neq 0$  y  $cq + d = 0$ , despejando  $q = \frac{-d}{c}$  y sustituyendo en la ecuación (1) tenemos que

$$\begin{aligned} k &= \left| \frac{-dw + b - p(cw - a)}{-dw + b + (\frac{d}{c})(cw - a)} \right| = \frac{|-dw + b - p(cw - a)||c|}{|-ad + bc|} \\ &= \frac{|-w + \frac{ap+b}{cp+d}||c||cp+d|}{|-ad + bc|} \end{aligned}$$

ó  $|w - f(p)| = \frac{k|-ad+bc|}{|c||cp+d|}$ , que es la ecuación de una circunferencia con centro en  $f(p)$  y nuevamente se tiene el resultado.

Análogamente, si  $f(p) = \infty$  la ecuación para  $f(K)$  se convierte en  $|w - f(q)| = \frac{|ad-bc|}{k|c||cq+d|}$  ■

A continuación daremos un par de ejemplos que ilustran el uso de las transformaciones fraccionales lineales.

**Ejemplo 2.1** Encontrar todas las transformaciones fraccionales lineales  $f : z \rightarrow w$  del semiplano superior cerrado  $\{z; \text{Im } z \geq 0\}$  al disco unitario cerrado  $\{w; |w| \leq 1\}$  que mandan al eje real en la circunferencia unitaria.

### Solución

Supongamos que  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  es una transformación que cumple las condiciones del problema, entonces  $a, c \neq 0$ , pues si  $a = 0$ ,  $f(\infty) = 0$  y la imagen del eje real no sería la circunferencia unitaria, si  $c = 0$ ,  $f(\infty) = \infty$  y se tendría la misma contradicción. Por lo tanto  $f(\frac{-b}{a}) = 0$ ,  $f(\frac{-d}{c}) = \infty$ , y como  $0, \infty$  son puntos inversos respecto a  $C(0, 1)$  sus imágenes inversas deben ser puntos inversos respecto al eje real por el teorema 2.7 aplicado a  $f^{-1}$ , de manera que  $\frac{-b}{a} = \alpha$ , y  $\frac{-d}{c} = \bar{\alpha}$  con  $\text{Im } \alpha \neq 0$ , y entonces  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} \left( \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}} \right)$ .

Por otro lado, como la imagen del eje real es la circunferencia unitaria,  $1 = |f(0)|$

$= \left| \frac{a}{c} \right| \left| \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \right|$ , luego  $|c| = |a|$ , por lo que podemos asegurar que  $a = ce^{i\theta}$  con  $\theta \in \mathbb{R}$  y entonces  $f$  es de la forma  $f(z) = e^{i\theta} \left( \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}} \right)$ .

Finalmente,  $f(\alpha) = 0 \in B(0,1)$ , por lo que  $Im \alpha > 0$ .

Resta verificar que todas las transformaciones de la forma  $f(z) = e^{i\theta} \left( \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}} \right)$ , con  $\theta \in \mathbb{R}$  y  $Im \alpha > 0$  satisfacen las condiciones del problema.

Si  $Im z = 0$ ,  $z = \bar{z}$  y  $|f(z)| = |e^{i\theta}| \left| \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}} \right| = \frac{|z-\alpha|}{|z-\bar{\alpha}|} = 1$ .

Si  $Im z > 0$ , usando el hecho de que  $Im \alpha > 0$  es inmediato que  $Re z \bar{\alpha} > Re z \alpha$  y por lo tanto  $0 \leq (|z| - |\bar{\alpha}|)^2 \leq |z|^2 + |\alpha|^2 - 2Re z \bar{\alpha} < |z|^2 + |\alpha|^2 - 2Re z \alpha$ , de donde

$$1 > \frac{|z|^2 + |\alpha|^2 - 2Re z \bar{\alpha}}{|z|^2 + |\alpha|^2 - 2Re z \alpha} = \frac{(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha})}{(z - \bar{\alpha})(\bar{z} - \alpha)} = \frac{|z - \alpha|^2}{|z - \bar{\alpha}|^2} = |f(z)|^2$$

■

**Ejemplo 2.2** Sea  $f(z)$  analítica en  $B(0,1)$  con  $Im f(z) > 0$  para  $z \in B(0,1)$ , entonces  $|f'(0)| \leq 2Im f(0)$ .

### Solución

Por el ejemplo anterior, si  $\phi(z)$  es de la forma  $\phi(z) = e^{i\theta} \left( \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}} \right)$  con  $Im \alpha > 0$  entonces  $\phi$  manda la región  $\{z \mid Im z > 0\}$  en el disco unitario abierto  $\{z \mid |z| < 1\}$ . Como  $Im f > 0$ , si definimos  $g(z) = (\phi \circ f)(z)$  entonces  $|g(z)| < 1$  para todo  $z \in B(1,0)$ , si además elegimos  $\alpha = f(0)$ , entonces  $g(z) = e^{i\theta} \left( \frac{f(z)-f(0)}{f(z)-\overline{f(0)}} \right)$  satisface  $g(0) = 0$ , y por el lema de Schwarz,  $|g'(0)| \leq 1$ .

Derivando  $g$  obtenemos

$$g'(z) = e^{i\theta} \left( \frac{f'(z)(f(z) - \overline{f(0)}) - f'(z)(f(z) - f(0))}{(f(z) - \overline{f(0)})^2} \right) = \frac{e^{i\theta} f'(z)(f(0) - \overline{f(0)})}{(f(z) - \overline{f(0)})^2},$$

en particular,

$$g'(0) = \frac{e^{i\theta} f'(0)}{f(0) - \overline{f(0)}} = \frac{e^{i\theta} f'(0)}{2iIm f(0)},$$

sustituyendo en la desigualdad dada por el lema de Schwarz,

$$1 \geq |g'(0)| = \left| \frac{e^{i\theta} f'(0)}{2iIm f(0)} \right|,$$

luego se tiene que,

$$|f'(0)| \leq 2Im f(0).$$

■

Una última observación respecto a las transformaciones fraccionales lineales es la siguiente: si  $f = \frac{az+b}{cz+d}$  es de Möebius y  $A$  es una región del plano tal que  $\frac{-d}{c} \notin A$ , entonces la restricción de  $f$  a  $A$  es analítica e inyectiva, las funciones que satisfacen estas dos propiedades en una región son llamadas funciones univalentes, a continuación estudiaremos algunas de sus propiedades.

## Capítulo 3

# Funciones univalentes

Comenzamos el capítulo definiendo a las funciones univalentes.

**Definición 3.1** *Sea  $A$  una región del plano, una función analítica  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  es univalente en  $A$  si es inyectiva.*

Una propiedad evidente de las funciones univalentes es que si  $f : A \rightarrow f(A)$  y  $g : B \subseteq f(A) \rightarrow \mathbb{C}$  son univalentes, entonces  $g \circ f$  es univalente en  $A$ . El siguiente teorema enuncia otra propiedad que más adelante será de importancia: la derivada de una función univalente no se anula, en consecuencia, las funciones univalentes son conformes.

**Teorema 3.1** *Si  $f$  es univalente en una región  $A$  entonces  $f' \neq 0$  en  $A$ .*

**Dem.**

Supongamos que  $f'(z_0) = 0$  para algún  $z_0 \in A$ . Si  $g(z) = f(z) - f(z_0)$  entonces  $g$  tiene un cero de orden  $\geq 2$  en  $z_0$ . Claramente  $g$  es univalente en  $A$ , y por lo tanto  $g \neq 0$  en  $A - z_0$ . Sea  $\overline{B(z_0, \rho)} \subset A$ , como  $|g|$  es continua y estrictamente positiva en el compacto  $C(z_0, \rho)$ , se tiene que  $\inf_{z \in C(z_0, \rho)} |g(z)| = m > 0$ . Por otro lado, la elección de  $\rho$  se puede hacer de manera que  $f' \neq 0$  en  $B(z_0, \rho) - \{z_0\}$ , pues los ceros de una función analítica no constante están aislados, y si  $f'$  fuera idénticamente cero en una vecindad de  $z_0$  entonces  $f$  sería constante en dicha vecindad, en contradicción con la hipótesis  $f$  univalente.

Ahora bien, para cualquier  $a \in \mathbb{C}$  con  $0 < |a| < m$ , la función  $h(z) = g(z) - a$  es analítica en  $\overline{B(z_0, \rho)}$  y distinta de cero en  $C(z_0, \rho)$ , además  $|h(z) - g(z)| = |a| < m \leq |g(z)|$  para  $z \in C(z_0, \rho)$ . Por el teorema de Rouché  $h$  y  $g$  tienen el mismo número de ceros (contando multiplicidades) dentro de  $B(z_0, \rho)$ , por lo que  $h$  tiene al menos dos ceros en  $B(z_0, \rho)$ , sin embargo como  $h'(z) = g'(z) = f'(z)$  es distinta de cero en  $B(z_0, \rho) - \{z_0\}$  se sigue que  $h$  no tiene ceros múltiples en  $B(z_0, \rho) - \{z_0\}$  y por lo tanto existen al menos dos puntos  $z_1, z_2 \in B(z_0, \rho) - \{z_0\}$  tales que  $h(z_1) = 0 = h(z_2)$ , de donde  $f(z_1) = f(z_0) + a = f(z_2)$ , que es una contradicción ■

Por este resultado y el teorema de la función inversa es claro que si  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  es univalente entonces la función inversa  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  es univalente.

El recíproco del teorema 3.1 no es en general cierto. Por ejemplo, si  $f(z) = z^2$  y  $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  entonces  $f'$  es distinta de cero en  $A$  y  $f$  no es univalente en  $A$ . El siguiente resultado muestra un caso particular en el cual el recíproco es localmente válido.

**Teorema 3.2** *Si  $f$  es analítica en  $z = 0$  y  $f'(0) \neq 0$ , entonces existe  $r > 0$  tal que  $f$  es univalente en  $\overline{B(0, r)}$ .*

**Dem.**

En realidad esto es parte del teorema de la función inversa, pero se hará una demostración independiente y con técnicas propias del análisis complejo.

Por el teorema de Taylor existe  $R > 0$  tal que si  $z \in B(0, R)$  entonces  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  con  $a_1 = f'(0) \neq 0$ . Diferenciando término a término,  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  para  $z \in B(0, R)$ . Como una serie de potencias es absolutamente convergente en el interior de su disco de convergencia, si  $r < R$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1}$  es absolutamente convergente. Omitiendo el primer término y tomando el límite cuando  $r \rightarrow 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} = \lim_{r \rightarrow 0} r \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| r^{n-2} = 0,$$

por lo que para  $r$  suficientemente pequeña  $\sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} < |a_1|$ , y si  $z_1, z_2 \in \overline{B(0, r)}$  satisfacen  $f(z_1) = f(z_2)$ ,

$$\begin{aligned} 0 = |f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_1^n - z_2^n) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_1 - z_2) (z_1^{n-1} + z_1^{n-2} z_2 + \dots + z_2^{n-1}) \right| \\ &= |z_1 - z_2| \left| a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z_1^{n-1} + z_1^{n-2} z_2 + \dots + z_2^{n-1}) \right| \\ &\geq |z_1 - z_2| \left( |a_1| - \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z_1^{n-1} + z_1^{n-2} z_2 + \dots + z_2^{n-1}) \right| \right) \\ &\geq |z_1 - z_2| \left( |a_1| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| (|z_1^{n-1}| + |z_1^{n-2} z_2| + \dots + |z_2^{n-1}|) \right) \\ &\geq |z_1 - z_2| \left( |a_1| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n r^{n-1} \right) \geq 0, \end{aligned}$$

de donde  $|z_1 - z_2| (|a_1| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n r^{n-1}) = 0$ , pero como  $|a_1| > \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n r^{n-1}$ , debiera tenerse que  $z_1 = z_2$ . Por lo tanto  $f$  es univalente en  $\overline{B(0, r)}$ . ■

Consideraremos ahora a las funciones univalentes del disco unitario cerrado sobre si mismo. De acuerdo con el lema de Schwarz, si una función analítica  $f$  del disco unitario  $B(0, 1)$  en si mismo fija el origen y satisface  $|f(z)| = |z|$  para algún  $z \in B(0, 1)$ ,  $z \neq 0$  entonces  $f$  es una rotación. Es evidente a partir de este lema que si una función analítica del disco unitario en si mismo fija al origen y a otro punto, la

función es la identidad. El siguiente ejemplo muestra que este comportamiento se extiende a la frontera del disco.

**Ejemplo 3.1** *Si  $f$  es una función analítica y univalente que mapea a  $\overline{B(0,1)}$  sobre si mismo y  $f$  fija el origen y algún otro punto en  $\overline{B(0,1)}$  entonces  $f(z) = z$ .*

**Dem.**

Por el lema de Schwarz, si  $z \in B(0,1)$  entonces  $|f(z)| \leq |z|$ . Además es claro por continuidad que si  $z \in C(0,1)$  entonces  $|f(z)| \leq |z|$ . De manera que para todo  $z \in \overline{B(0,1)}$  se tiene que  $|f(z)| \leq |z|$ . El mismo razonamiento aplicado a la función inversa  $f^{-1} : \overline{B(0,1)} \rightarrow \overline{B(0,1)}$  prueba que para todo  $f(z) \in \overline{B(0,1)}$  se satisface  $|z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)|$ . Por lo tanto  $|f(z)| = |z|$  para todo  $z$  en el disco unitario cerrado. Por la observación del parrafo anterior  $f$  es una rotación, es decir  $f(z) = e^{i\lambda}z$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , y como  $f$  fija un punto distinto del origen,  $f(z) = z$  ■

A continuación damos una descripción de las biyecciones del disco unitario cerrado en si mismo, estas son transformaciones fraccionales lineales.

**Teorema 3.3** *Si  $f$  es univalente y mapea  $\overline{B(0,1)}$  sobre si mismo, entonces  $f$  es una transformación fraccional lineal.*

**Dem.**

Sea  $\xi = f(0)$ , probaremos primero que existe una transformación fraccional lineal  $L$  del disco unitario cerrado sobre si mismo tal que  $L(\xi) = 0$ . Esto es claro si  $\xi = 0$ , considerese por ejemplo a la identidad o cualquier rotación con centro en el origen. Supongamos que  $\xi \neq 0$ . Si  $|\xi| = 1$ , entonces  $f$  alcanza su máximo en  $z_0 = 0$  un punto interior, luego  $f$  es constante, una contradicción, por lo que  $|\xi| < 1$ . Ahora bien, los puntos  $\xi$  y  $\frac{\xi}{|\xi|^2}$  son inversos respecto a  $C(0,1)$ , por el teorema 2.7 sus imágenes bajo una transformación fraccional lineal deben ser puntos inversos respecto a la circunferencia imagen (que en este caso sería  $C(0,1)$ ), como se busca que  $L$  satisfaga  $L(\xi) = 0$  se debe tener  $L(\frac{\xi}{|\xi|^2}) = \infty$ .

Supongamos que  $L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $ad-bc \neq 0$ . Por el teorema 2.4  $L$  es una biyección de  $\mathbb{C}^\infty$  en si mismo, por lo que tanto  $a$  como  $c$  son distintos de cero, pues si  $c = 0$  entonces  $L(\infty) = \infty = L(\frac{\xi}{|\xi|^2})$  y por lo tanto  $\infty = \frac{\xi}{|\xi|^2}$ , una contradicción. Similarmente, si  $a = 0$  entonces  $f(\infty) = 0$  y  $\xi = \infty$ , otra contradicción.

Nuevamente usando el hecho de que  $L$  es una biyección, de  $L(\xi) = 0 = L(\frac{-b}{a})$ ,  $L(\frac{\xi}{|\xi|^2}) = \infty = L(\frac{-d}{c})$  tenemos que  $\xi = \frac{-b}{a}$ ,  $\frac{\xi}{|\xi|^2} = \frac{-d}{c}$ , y despejando  $\bar{\xi} = \frac{-c}{d}$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} L(z) &= \frac{a}{c} \left( \frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} \right) = \frac{a}{c} \left( \frac{z - \xi}{z - \frac{\xi}{|\xi|^2}} \right) \\ &= \frac{a\bar{\xi}}{c} \left( \frac{z - \xi}{\bar{\xi}z - 1} \right) = \frac{-a}{d} \left( \frac{z - \xi}{\bar{\xi}z - 1} \right) \end{aligned}$$

con  $\bar{\xi}z \neq 1$  para toda  $z \in \overline{B(0,1)}$ , pues  $|\xi| < 1$ .

Por el teorema 2.7 se tiene que  $|L(1)| = 1$ , de donde  $L(z) = e^{i\lambda} \frac{z - \xi}{\bar{\xi}z - 1}$ .

Ahora verificaremos que cualquier transformación fraccional lineal de esta forma mapea biyectivamente al disco unitario cerrado en si mismo.

Si  $|z| \leq 1$  entonces  $(1 - |\xi|^2)(1 - |z|^2) \geq 0$ , desarrollando y reagrupando,  $|z|^2 + |\xi|^2 \leq |\xi|^2|z|^2 + 1$ , lo que implica  $|z - \xi|^2 \leq |\bar{\xi}z - 1|^2$ , o equivalentemente  $|L(z)| = \left| \frac{z - \xi}{\bar{\xi}z - 1} \right| \leq 1$ .

Similarmente, si  $|w| \leq 1$  entonces la función inversa  $L^{-1}$  satisface  $|L^{-1}(w)| = \left| \frac{-w + \xi e^{i\lambda}}{-\bar{\xi}w + e^{i\lambda}} \right| \leq 1$ .

Consideremos ahora a la función  $g = L \circ f$ , esta es una biyección del disco unitario cerrado en si mismo que fija el origen, como se vió en la demostración del ejemplo anterior  $g(z) = az$  con  $|a| = 1$ . Por lo tanto  $az = g(z) = L \circ f(z)$  y entonces  $f(z) = L^{-1}(az)$  es una transformación fraccional lineal ■

En el ejemplo 3.1 vimos como el valor de una función en cero y en un punto en la frontera del disco unitario puede determinar los valores de la función en el interior de este. El siguiente teorema nos da otra muestra de la influencia que tiene el comportamiento en la frontera sobre los valores de una función analítica.

**Teorema 3.4 (Darboux)** *Sea  $C$  una curva cerrada simple que es la frontera de una región  $A$ . Supóngase que  $f$  es analítica en  $A \cup C$  e inyectiva en  $C$ , entonces  $f$  es univalente en  $A$ .*

**Dem.**

Puesto que  $f$  es inyectiva en  $C$  es claro que  $f(C) = \Gamma$  es una curva cerrada simple. Sea  $z_0 \in A$  tal que  $f(z_0) \notin \Gamma$ , esto es  $f(z) - f(z_0) \neq 0$  para  $z \in C$ . Como  $f(z) - f(z_0)$  es analítica en  $A = \text{int}C$  el número de ceros de esta función en  $A$  está dado por  $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} dz$ , y puesto que  $z_0 \in A$  el número de ceros es un entero mayor o igual a uno.

Supongamos que  $C(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es una parametrización de  $C$ , entonces  $\Gamma(t) = f(C(t))$  es una parametrización de  $\Gamma$ . Escribiendo  $f(z_0) = w_0$

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(C(t)) \cdot C'(t)}{f(C(t)) - f(z_0)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t) - w_0} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w - w_0} = I(\Gamma, w_0) \end{aligned}$$

y ya que  $\Gamma$  es una curva cerrada simple,  $I(\Gamma, w_0)$  solo puede tomar uno de los valores 0, 1 ó -1, por lo que  $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} dz = I(\Gamma, w_0) = 1$ . Esto indica que  $f$  toma el valor  $w_0$  únicamente en  $z_0 \in A$  y que  $f(z_0) \in \text{int}\Gamma$ .

Solo resta observar que ningún punto en  $A$  va a dar a  $\Gamma$  bajo  $f$ . Por el teorema del mapeo abierto una función analítica manda puntos interiores en puntos interiores, de manera que si se tuviera  $f(z_1) \in \Gamma$  para algún  $z_1 \in A$ , entonces tendría que haber puntos en  $\text{ext}\Gamma$  pertenecientes a  $f(A)$ , pero hemos mostrado que esto es imposible. ■

Ahora abordaremos la cuestión de la convergencia de funciones univalentes. Weierstrass demostró que si una sucesión  $\{f_n\}$  de funciones analíticas definidas en

una región  $A$  del plano converge uniformemente a una función  $f$  en todo subconjunto compacto de  $A$ , entonces  $f$  es analítica en  $A$  y  $f'_n \rightarrow f'$  uniformemente en los subconjuntos compactos de  $A$ . Sin embargo el hecho de que las funciones de la sucesión sean univalentes no garantiza que la función límite también lo sea. Considérese por ejemplo a la sucesión  $f_n(z) = \frac{z}{n}$ , estas funciones son claramente univalentes en  $\mathbb{C}$ , y si  $K \subset \mathbb{C}$  es compacto  $|f_n(z)| = \frac{|z|}{n} \leq \frac{M_K}{n}$  para toda  $z \in K$  y algún  $M_K$  (pues  $K$  es acotado), de donde se ve que la sucesión converge uniformemente a la función constante  $f = 0$  en los subconjuntos compactos del plano, que no es univalente. Sin embargo esto es lo más extraño que puede suceder, ya que el último teorema de esta sección muestra que salvo por las funciones constantes, el límite de una sucesión de funciones univalentes que converge uniformemente en compactos es una función univalente.

**Teorema 3.5** *Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones univalentes en una región  $A$  tal que  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  uniformemente en subconjuntos compactos de  $A$ . Entonces  $f$  es univalente ó constante.*

**Dem.**

Como se mencionó anteriormente, por el teorema de Weierstrass  $f$  es analítica en  $A$ . Supongamos que  $f$  no es univalente, entonces existen  $z_1, z_2 \in A$  tales que  $f(z_1) = f(z_2) = \xi$ .

Supongamos ahora que  $f$  no es constante, como los ceros de una función analítica no constante son aislados, podemos tomar dos discos cerrados ajenos  $K_1, K_2 \subset A$  con centros en  $z_1$  y  $z_2$  respectivamente tales que  $f(z) \neq \xi$  en  $K_1 \cup K_2$ .

Sean  $\inf_{z \in \partial(K_1)} |f(z) - \xi| = m_1$ ,  $\inf_{z \in \partial(K_2)} |f(z) - \xi| = m_2$ . Tanto  $m_1$  como  $m_2$  son estrictamente mayores que cero, pues una función continua definida en un compacto alcanza sus valores extremos en el conjunto.

Como  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en subconjuntos compactos de  $A$ , si  $n$  es suficientemente grande se cumple que  $|f_n(z) - f(z)| < \min(m_1, m_2) = m$  para toda  $z \in \partial(K_1) \cup \partial(K_2)$ .

Sean  $g(z) = f(z) - \xi$ ,  $g_n(z) = f_n(z) - \xi$ , entonces  $g, g_n \neq 0$  en  $\partial(K_1)$  y para  $z \in \partial(K_1)$

$$|g(z) - g_n(z)| = |f(z) - f_n(z)| < m \leq |f(z) - \xi| = |g(z)|,$$

por el teorema de Rouché  $f_n - \xi$  tiene un cero en  $K_1$ . Análogamente,  $f_n - \xi$  tiene un cero en  $K_2$ , en contradicción con la hipótesis de que  $f_n$  univalente.

Por lo tanto si  $f$  no es univalente es constante. ■

## Capítulo 4

# Familias Normales

En esta sección continuaremos estudiando propiedades relacionadas con la convergencia de las funciones complejas. La siguiente definición extiende el concepto de convergencia uniforme a las sucesiones de funciones no acotadas.

**Definición 4.1** Una sucesión  $\{f_n\}$  de funciones con valores complejos definidas en un subconjunto  $D$  del plano converge uniformemente a  $\infty$  en  $D$  si para todo  $M > 0$  existe  $n_0$  tal que si  $n > n_0$  entonces  $|f_n(z)| \geq M$  para toda  $z \in D$ .

Una propiedad útil de una familia  $\mathfrak{F}$  de funciones analíticas definidas en una región  $A$  del plano es que las sucesiones de funciones pertenecientes a dicha familia sean uniformemente convergentes en los subconjuntos compactos de  $A$ , pues esto garantiza la analiticidad de la función límite (si la convergencia no es a  $\infty$ ). El ejemplo que se da a continuación muestra que aún en el caso de que dichas sucesiones no sean uniformemente convergentes, se puede tener otra propiedad que también es de utilidad, la existencia de subsucesiones convergentes.

Supongamos que  $\mathfrak{F}$  es la sucesión  $\{f_n\}$  dada por  $f_n(z) = \begin{cases} n, & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{z}{n}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$ , claramente las funciones  $f_n(z)$  son enteras, además para  $z \in \mathbb{C}$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n}(z) = \infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n+1}(z) = 0$ , de manera que la sucesión  $\{f_n\}$  no converge puntualmente en ningún  $z \in \mathbb{C}$ , y por ende no converge uniformemente en ningún subconjunto compacto del plano. Sin embargo, cualquier sucesión de funciones en  $\mathfrak{F}$  contiene una infinidad de funciones  $f_n$  cuyos subíndices tienen la misma paridad, y con éstas se puede formar una subsucesión de la sucesión original que converge uniformemente a  $\infty$  ó a la función constante  $f(z) = 0$  (dependiendo de la paridad de los subíndices) en los subconjuntos compactos de  $A$ . En otras palabras, toda sucesión de funciones en  $\mathfrak{F}$  contiene una subsucesión que converge uniformemente en los subconjuntos compactos de  $A$ .

**Definición 4.2** Una familia  $\mathfrak{F}$  de funciones con valores complejos definidas en una región  $A$  del plano es normal en  $A$  si toda sucesión  $\{f_n\}$  de funciones en  $\mathfrak{F}$  contiene ya sea una subsucesión  $\{f_{n_k}\}$  que converge uniformemente en subconjuntos

compactos de  $A$ , ó una subsucesión  $\{f_{n_k}\}$  que converge uniformemente a  $\infty$  en subconjuntos compactos de  $A$ .

Observese que si  $\mathfrak{F}$  es una familia de funciones analíticas, entonces  $f$ , la función límite de la subsucesión convergente en la definición anterior es analítica en  $A$  ó idénticamente  $\infty$  en  $A$ . Además  $f$  no necesariamente está en la familia  $\mathfrak{F}$ . Por ejemplo, la sucesión  $\{f_n\}$  donde  $f_n(z) = \frac{e^z}{n}$ , es una familia normal de funciones analíticas y no nulas en  $\mathbb{C}$  y como  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = 0$  para  $z \in \mathbb{C}$ , se tiene que cualquier sucesión de funciones en  $\{f_n\}$  contiene una subsucesión que converge uniformemente en compactos a la función constante  $f(z) = 0$ , que no pertenece a la familia. Respecto a la convergencia de funciones no nulas podemos decir un poco más.

**Teorema 4.1 (Hurwitz)** *Si  $\{f_n\}$  es una sucesión de funciones analíticas que no se anulan en una región  $A$  del plano y  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en los subconjuntos compactos de  $A$ , entonces  $f \equiv 0$  en  $A$  ó  $f$  no se anula en  $A$ .*

**Dem.**

Puesto que la convergencia de la sucesión  $\{f_n\}$  es uniforme en todo subconjunto compacto de  $A$ , se tiene que  $f$  es analítica en  $A$ . Supongamos que  $f$  no es idénticamente cero en  $A$ .

Como los ceros de una función analítica no constante son aislados, dado  $z_0 \in A$  existe una vecindad de  $z_0$  tal que  $f$  no se anula en dicha vecindad excepto tal vez en  $z_0$ . En consecuencia existe  $r > 0$  tal que  $f(z) \neq 0$  si  $z \in \overline{B(z_0, r)} \setminus \{z_0\}$ . Como en demostraciones anteriores,  $\min_{z \in C(z_0, r)} |f(z)| = m > 0$ , y por lo tanto  $\frac{1}{f_n} \rightarrow \frac{1}{f}$  uniformemente en  $C(z_0, r)$ . Además, por el resultado de Weierstrass mencionado antes del teorema 3.5,  $f'_n \rightarrow f'$  uniformemente en  $C(z_0, r)$ . De manera que  $\frac{f'_n}{f_n} \rightarrow \frac{f'}{f}$  uniformemente en  $C(z_0, r)$ , y como podemos intercambiar el límite y la integral por ser la convergencia uniforme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Cada una de las integrales a la izquierda de la igualdad es igual a cero, pues estas cuentan los ceros y polos de  $f_n$  en el interior de  $C(z_0, r)$ , y por hipótesis las funciones  $f_n$  son no nulas y analíticas en  $A$ . Se sigue que la integral a la derecha de la igualdad también es cero y entonces  $f$  tiene el mismo número de ceros y polos en el interior de  $C(z_0, r)$ . Por lo tanto  $f(z_0) \neq 0$  para  $z_0 \in A$  que es arbitrario, es decir,  $f$  no se anula en  $A$ . ■

Recordemos que una familia  $\mathfrak{F}$  de funciones con valores complejos es equicontinua en un subconjunto  $D$  del plano si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $z_1, z_2 \in D$  y  $|z_1 - z_2| < \delta$  entonces  $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$  para toda  $f \in \mathfrak{F}$ . El siguiente teorema proporciona un criterio para determinar cuando una familia de funciones es normal valiéndose de la noción de equicontinuidad.

**Teorema 4.2 (Arzela-Ascoli)** *Una familia  $\mathfrak{F}$  de funciones con valores complejos definidas en una región  $A$  del plano es normal si:*

- (i)  $\mathfrak{F}$  es equicontinua en todo subconjunto compacto de  $A$ ,  
(ii) para toda  $z \in A$ ,  $\{f(z); f \in \mathfrak{F}\}$  está contenido en un subconjunto compacto del plano.

**Dem.**

Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones en  $\mathfrak{F}$ . La estrategia a seguir en la demostración será encontrar una subsucesión uniformemente convergente en un subconjunto denso numerable de  $A$  y después usar la densidad de ese conjunto y la equicontinuidad de  $\mathfrak{F}$  para mostrar que dicha subsucesión es de Cauchy en cualquier subconjunto compacto de  $A$ .

Supongamos que  $\{\xi_k\}$  es una numeración del conjunto de puntos en  $A$  con coordenadas racionales. Por (ii) la sucesión  $\{f_n(\xi_1)\}$  está contenida en un compacto, por el teorema de Bolzano-Weierstrass contiene una subsucesión convergente  $f_{n_{1,1}}(\xi_1), f_{n_{1,2}}(\xi_1), f_{n_{1,3}}(\xi_1), \dots$

Analogamente, la sucesión  $\{f_{n_{1,i}}(\xi_2)\}$  contiene una subsucesión convergente  $f_{n_{2,1}}(\xi_2), f_{n_{2,2}}(\xi_2), f_{n_{2,3}}(\xi_2), \dots$

Repitiendo el proceso para cada elemento de  $\{\xi_k\}$  obtenemos un arreglo de subíndices

$$\begin{aligned} n_{1,1} &< n_{1,2} < n_{1,3} < \dots < n_{1,j} < \dots \\ n_{2,1} &< n_{2,2} < n_{2,3} < \dots < n_{2,j} < \dots \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ n_{k,1} &< n_{k,2} < n_{k,3} < \dots < n_{k,j} < \dots \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned}$$

tal que cada renglón es una subsucesión de los renglones anteriores, y la sucesión  $\{f_{k,j}\}$  cuyos subíndices son los elementos del  $k$ -ésimo renglón converge en  $\xi_k$ .

Considérese ahora a la sucesión  $\{n_{j,j}\}$ , esta es estrictamente creciente y sus elementos a partir de  $n_{k,k}$  son una subsucesión del  $k$ -ésimo renglón para toda  $k$ . Por lo tanto la sucesión  $\{f_{n_{j,j}}\}$  es una subsucesión de  $\{f_n\}$  que converge en cada punto de  $\{\xi_k\}$ , la denotaremos por  $\{f_{n_j}\}$ .

Sea  $K$  un subconjunto compacto de  $A$ , por (i) la sucesión  $\{f_{n_j}\}$  es equicontinua en  $K$ , de manera que dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $z, \xi \in K$  satisfacen  $|z - \xi| < \delta$  entonces  $|f_{n_j}(z) - f_{n_j}(\xi)| < \frac{\epsilon}{3}$  para toda  $j$ .

Los discos con centro en cada punto de  $K$  y radio  $\delta$  forman una cubierta abierta de  $K$ , por compacidad existe una subcubierta finita, y ya que el conjunto  $\{\xi_k\}$  es denso en  $A$  podemos tomar un  $\xi_k$  en cada elemento de dicha subcubierta, llamemos  $\Xi$  al conjunto finito formado por estos  $\xi_k$ . La sucesión  $\{f_{n_j}\}$  es de Cauchy en cada punto de  $\Xi$ , y como este es un conjunto finito, para toda  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $s, t > N$  entonces  $|f_{n_s}(\xi) - f_{n_t}(\xi)| < \frac{\epsilon}{3}$  para toda  $\xi \in \Xi$ .

Sea  $z \in K$ , por la definición de  $\Xi$  existe  $\xi \in \Xi$  tal que  $|z - \xi| < \delta$ , se sigue que si  $s, t > N$

$$|f_{n_s}(z) - f_{n_t}(z)| \leq |f_{n_s}(z) - f_{n_s}(\xi)| + |f_{n_s}(\xi) - f_{n_t}(\xi)| + |f_{n_t}(\xi) - f_{n_t}(z)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

de donde la subsucesión  $\{f_{n_j}\}$  de  $\{f_n\}$  converge uniformemente en subconjuntos compactos de  $A$ .

Por lo tanto  $\mathfrak{F}$  es normal. ■

Una familia  $\mathfrak{F}$  de funciones con valores complejos definidas en un subconjunto  $D$  del plano es uniformemente acotada en  $D$  si existe  $M \geq 0$  tal que  $|f(z)| \leq M$  para toda  $z \in D$  y  $f \in \mathfrak{F}$ . Mediante una aplicación del teorema de Arzela-Ascoli tenemos otro criterio para determinar si una familia es normal.

**Teorema 4.3** *Una familia  $\mathfrak{F}$  de funciones analíticas en una región  $A$  es normal si  $\mathfrak{F}$  es uniformemente acotada en subconjuntos compactos de  $A$ .*

**Dem.**

Probaremos que  $\mathfrak{F}$  satisface las condiciones del teorema 4.2.

Para cada  $z \in A$  el conjunto  $\{z\}$  es compacto. Por hipótesis existe  $M_z$  tal que  $|f(z)| \leq M_z$  para toda  $f \in \mathfrak{F}$ , de manera que el conjunto  $\{f(z); f \in \mathfrak{F}\}$  está contenido en el compacto  $B(0, M_z)$ .

Resta probar que uniformemente acotada implica equicontinuidad.

Sea  $K$  un subconjunto compacto de  $A$ . Sea  $r > 0$  tal que para cada  $z \in K$  el disco  $\overline{B(z, r)}$  esté contenido en  $A$ . Los discos con radio  $\frac{r}{4}$  y centro en cada punto de  $K$  forman una cubierta abierta de  $K$ , por compacidad existe una subcubierta finita, sean  $\{\xi_k\}$  los centros de los discos que la forman.

El conjunto  $\bigcup_k \overline{B(\xi_k, r)}$  es un subconjunto compacto de  $A$ , por hipótesis existe  $M$  tal que  $|f(z)| \leq M$  para toda  $z \in \bigcup_k \overline{B(\xi_k, r)}$ ,  $f \in \mathfrak{F}$ .

Sean  $z_1, z_2 \in K$ . Como  $z_2$  está contenido en alguno de los discos de la subcubierta finita,  $|z_2 - \xi_k| < \frac{r}{4}$  para algún  $\xi_k$ .

Si  $|z_1 - z_2| < \frac{r}{4}$  se sigue de la desigualdad del triángulo que  $|z_1 - \xi_k| < \frac{r}{2}$ , en consecuencia  $z_1, z_2 \in B(\xi_k, \frac{r}{2})$ . Sea  $\gamma = C(\xi_k, r)$ , por la fórmula integral de Cauchy

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_1} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_2} dz = \frac{z_1 - z_2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} dz.$$

Por otro lado, para  $z \in \gamma$  el módulo del integrando está acotado por

$$\left| \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} \right| \leq \frac{\max_{z \in \gamma} |f(z)|}{\min_{z \in \gamma} |z - z_1| |z - z_2|} \leq \frac{M}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{4M}{r^2},$$

se sigue que

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \frac{|z_1 - z_2|}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} dz \right| \leq \frac{|z_1 - z_2|}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{4M}{r^2} = \frac{4M}{r} |z_1 - z_2|.$$

Usando esta última ecuación, si  $\epsilon > 0$  y  $|z_1 - z_2| < \delta = \min(\frac{r}{4}, \frac{r\epsilon}{4M})$  entonces

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{4M}{r}|z_1 - z_2| < \frac{4M}{r}\delta \leq \epsilon.$$

Luego  $\mathfrak{F}$  es equicontinua en los subconjuntos compactos de  $A$  y por lo tanto  $\mathfrak{F}$  es normal en  $A$ . ■

Si  $\mathfrak{F}$  es una familia normal de funciones analíticas, entonces la familia de las derivadas  $\mathfrak{F}' = \{f'; f \in \mathfrak{F}\}$  no es necesariamente normal. Por ejemplo, considérese a  $\mathfrak{F}$  la familia de las funciones  $f_n(z) = nz^2 - n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , definidas en todo el plano. Claramente  $f_n$  converge uniformemente a  $\infty$  en todo subconjunto compacto del plano, por lo que  $\mathfrak{F}$  es normal. Sin embargo  $\mathfrak{F}' = \{f'_n\}$  donde  $f'_n(z) = 2nz$ , y esta sucesión converge a  $\infty$  para  $z \neq 0$  y a cero para  $z = 0$ , de donde se ve que si  $K$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{C}$ , entonces  $\{f'_n\}$  no converge uniformemente a una función con valores complejos definida en  $K$ , ni converge uniformemente a  $\infty$  en  $K$ , y lo mismo pasa para cualquier subsucesión. Es decir  $\mathfrak{F}'$  no es normal.

Vale la pena observar que un contraejemplo como el anterior no se puede dar usando una familia uniformemente acotada, pues si  $f$  es una función analítica en una región  $A$ ,  $\overline{B}(z_0, r)$  es un disco cerrado contenido en  $A$  y  $|f(z)| \leq M$  para  $z \in C(z_0, r)$ , se sigue de la fórmula integral de Cauchy para las derivadas que  $|f'(z)| \leq \frac{M}{r}$  para  $z$  en el interior del disco. Utilizando este hecho en una subcubierta finita de un compacto formada por discos, se prueba que si  $\mathfrak{F}$  es una familia uniformemente acotada en los subconjuntos compactos de  $A$ , entonces  $\mathfrak{F}' = \{f'; f \in \mathfrak{F}\}$  también es uniformemente acotada en los subconjuntos compactos de  $A$  y por el teorema anterior,  $\mathfrak{F}'$  es normal.

## Capítulo 5

# El teorema del mapeo de Riemann

Antes de enunciar el teorema del mapeo de Riemann haremos algunas consideraciones respecto a este. Esencialmente el teorema dice dos cosas: la primera es que cualquier región  $R$  simplemente conexa distinta de  $\mathbb{C}$  se puede transformar de manera conforme y biyectiva sobre el disco unitario  $B(0,1)$  (y por lo tanto cualesquiera dos regiones simplemente conexas distintas del plano son conformemente equivalentes, pues si  $f, g$  son biyecciones conformes entre el disco unitario y las regiones  $R_1, R_2$  respectivamente, entonces  $f \circ g^{-1}$  es una biyección conforme entre  $R_1$  y  $R_2$ ), la segunda es que esta transformación entre  $R$  y el disco es única si además se requiere que para un  $z_0 \in R$  dado, localmente en  $z_0$  la transformación sea una traslación que manda a  $z_0$  al cero, seguida de una homotecia.

Es claro que no existe una función univalente en  $\mathbb{C}$  sobre el disco unitario, pues por el teorema de Liouville las únicas funciones enteras acotadas son constantes. Por otro lado, el que una región simplemente conexa sea distinta del plano es equivalente a que ésta tenga al menos dos puntos frontera (y por lo tanto una infinidad continua, pues una región simplemente conexa no puede tener un punto frontera aislado distinto de  $\infty$ ). Como para la demostración del teorema usaremos la existencia de dos puntos frontera, lo enunciaremos en estos términos.

**Teorema 5.1 (Teorema del mapeo de Riemann)** *Sea  $R$  una región del plano simplemente conexa con al menos dos puntos frontera. Entonces existe una función univalente  $g$  que mapea a  $R$  sobre  $B(0,1)$ .*

*Si además se tiene la condición adicional de que para un  $z_0 \in R$  se cumpla que  $g(z_0) = 0$ ,  $g'(z_0) > 0$ , entonces  $g$  es única.*

**Dem.**

Sea  $\mathfrak{F}$  la familia de las funciones  $f$  univalentes y acotadas en  $R$  que satisfacen  $f(z_0) = 0$ ,  $f'(z_0) = 1$ .

Definimos

$$M(f) = \sup_{z \in R} |f(z)|$$

y si  $\mathfrak{F}$  es no vacia

$$m = \inf_{f \in \mathfrak{F}} M(f).$$

La demostración de la existencia consta de tres pasos:

- (i)  $\mathfrak{F}$  es no vacia.
- (ii) Existe una función  $\tilde{f} \in \mathfrak{F}$  tal que  $M(\tilde{f}) = m$ .
- (iii)  $\frac{\tilde{f}}{m}$  es la función buscada.

Demostración de (i): Sean  $a, b \in \mathbb{C}$  dos puntos en la frontera de  $R$ . Por el teorema 2.4 la función  $L : R \rightarrow f(R)$  dada por  $L(z) = \frac{z-a}{z-b}$  es una biyección conforme, la región  $L(R) \subset \mathbb{C}$  es simplemente conexa. Además  $\frac{z-a}{z-b} \neq 0$  para  $z \in R$ , por lo que existe una rama de logaritmo analítica en todo  $L(R)$ . Utilizando esta rama, la función  $f(z) = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$  es analítica en  $R$ . Por otra parte, la igualdad  $f(z_1) = f(z_2)$  implica  $\frac{z_1-a}{z_1-b} = \frac{z_2-a}{z_2-b}$ , y nuevamente por el teorema 2.4,  $z_1 = z_2$ , por lo tanto  $f$  es univalente en  $R$ .

Sea  $w_0 = f(z_0) = \sqrt{\frac{z_0-a}{z_0-b}}$ .

Probaremos que las funciones de la forma  $\frac{c}{f(z)+w_0} + d$  (con  $c$  y  $d$  constantes,  $c \neq 0$ ) son acotadas en  $R$ , y por ende, univalentes en  $R$  (pues  $f$  es univalente). Posteriormente obtendremos una función en  $\mathfrak{F}$  mediante la elección adecuada de las constantes  $c$  y  $d$ .

Por continuidad, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $|z - z_0| < \delta$  entonces  $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ .

Por el teorema del mapeo abierto existe una vecindad  $B(w_0, \epsilon')$  de  $w_0$ , con  $\epsilon' < \epsilon$ , tal que para todo  $w \in B(w_0, \epsilon')$  hay un  $z \in B(z_0, \delta)$  con  $f(z) = w$ .

Ahora bien, la preimágen de  $B(-w_0, \epsilon')$  está contenida en  $B(z_0, \delta)$ . Para ver esto supongase que  $w \in B(-w_0, \epsilon')$ , entonces  $-w \in B(w_0, \epsilon')$ , y como se mencionó anteriormente  $-w = f(z_1)$  para algún  $z_1 \in B(z_0, \delta)$ . Si  $z \in R$  satisface  $f(z) = w$ , entonces  $\frac{z-a}{z-b} = w^2 = (-w)^2 = \frac{z_1-a}{z_1-b}$ , de donde  $z = z_1$ .

Como  $B(z_0, \delta)$  es mapeada al interior de  $B(w_0, \epsilon)$ , si  $\epsilon$  es suficientemente pequeño, de manera que  $B(w_0, \epsilon)$  y  $B(-w_0, \epsilon)$  sean ajenas, entonces  $f$  no toma ningún valor en  $B(-w_0, \epsilon')$ .

Se sigue que  $|f(z) + w_0| > \epsilon'$  para toda  $z \in R$ , y por lo tanto las funciones  $\frac{c}{f(z)+w_0} + d$  con  $c \neq 0$  son acotadas y univalentes en  $R$ .

Para encontrar las constantes adecuadas resolvemos el sistema

$$\frac{c}{f(z_0) + w_0} + d = 0, \quad \frac{-cf'(z_0)}{(f(z_0) + w_0)^2} = 1.$$

Un cálculo simple muestra que

$$f'(z_0) = \frac{a-b}{2(z_0-b)^2 \sqrt{\frac{z_0-a}{z_0-b}}} \neq 0, \infty$$

y

$$c = \frac{-4w_0^2}{f'(z_0)}, \quad d = \frac{2w_0}{f'(z_0)}.$$

Sustituyendo en  $\frac{c}{f(z)+w_0} + d$  los valores de  $c$  y  $d$  encontrados obtenemos la función

$$F(z) = \frac{2w_0}{f'(z_0)} \left( \frac{f(z) - w_0}{f(z) + w_0} \right),$$

que satisface  $F(z_0) = 0$ ,  $F'(z_0) = 1$ . Por lo tanto  $\mathfrak{F}$  es no vacía.

Demostración de (ii): Si la familia  $\mathfrak{F}$  es finita entonces  $\{M(f); f \in \mathfrak{F}\}$  también lo es, en cuyo caso el ínfimo del conjunto es un elemento del mismo y la existencia de  $\tilde{f}$  es clara.

Supongamos que  $\mathfrak{F}$  tiene una infinidad de elementos.

Por la definición de  $m$ , existe una sucesión  $\{f_n\}$  de funciones en  $\mathfrak{F}$  tales que  $m \leq M(f_n) \leq m + \frac{1}{n}$  (de lo contrario  $m$  no sería la máxima cota inferior). Esta sucesión es uniformemente acotada en  $R$  por  $m + 1$ , se sigue del teorema 4.3 que  $\{f_n\}$  es una familia normal. Por consiguiente alguna subsucesión  $\{f_{n_k}\}$  converge uniformemente en los subconjuntos compactos de  $R$ .

Sea  $\tilde{f}(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(z)$ .

Como las funciones  $f_{n_k}$  están en  $\mathfrak{F}$

$$\tilde{f}(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(z_0) = 0,$$

y ya que la convergencia es uniforme

$$\tilde{f}'(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_{n_k}(z_0) = 1.$$

De esta última ecuación se infiere que  $\tilde{f}$  no es constante en  $R$ . Al ser el límite de una sucesión de funciones univalentes,  $\tilde{f}$  es univalente en  $R$  (teorema 3.5).

Finalmente,  $|\tilde{f}(z)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k}(z)| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} M(f_{n_k}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} m + \frac{1}{n_k} = m$ , luego  $\tilde{f}$  es acotada.

Por lo tanto  $\tilde{f}$  está en  $\mathfrak{F}$ .

De la desigualdad  $|\tilde{f}(z)| \leq m$  se sigue que  $M(\tilde{f}) \leq m$ , y como  $\tilde{f}$  está en  $\mathfrak{F}$ ,  $m \leq M(\tilde{f})$ . Combinando ambas desigualdades,  $M(\tilde{f}) = m$ .

Demostración de (iii): Sabemos que  $\tilde{f}$  es univalente con  $m = M(\tilde{f}) > 0$ . Sea  $g(z) = \frac{\tilde{f}}{m}$ . Entonces  $g$  es univalente en  $R$ ,  $g(z_0) = 0$ , y  $g'(z_0) = \frac{1}{m}$ . Además  $|g(z)| = \frac{|\tilde{f}(z)|}{m} \leq \frac{M(\tilde{f})}{m} = 1$ , y como una función analítica que tiene un máximo en un punto interior de un conjunto es constante en una vecindad de dicho punto,  $|g(z)| < 1$  (pues  $g$  es univalente).

Solo falta verificar que la imagen de  $R$  bajo  $g$  es todo el disco  $B(0,1)$ . Para ello procederemos por contradicción, utilizando un punto en  $B(0,1)$  que no esté en la imagen de  $g$  construiremos una función  $\tilde{g}$  que contradiga a la definición de  $m$ .

Supongamos que existe un  $\alpha \in B(0,1)$  tal que  $g(z) \neq \alpha$  para todo  $z \in R$  ( $\alpha \neq 0$  pues  $g(z_0) = 0$ ).

Entonces  $g(z) - \alpha \neq 0$  en  $R$ , y como  $|\alpha|, |g(z)|$  son menores que uno,  $\bar{\alpha}g(z) - 1$

tampoco se anula en  $R$ .

Análogamente a como se hizo en la demostración de (i), podemos definir una rama de la función

$$h(z) = \sqrt{\frac{g(z) - \alpha}{\alpha g(z) - 1}}$$

analítica y univalente en  $R$ .

Además  $h^2(z) = (l \circ g)(z)$  donde  $l(z) = \frac{z-\alpha}{\alpha z-1}$  es una biyección del disco unitario cerrado en si mismo (vease la demostración del teorema 3.3), y puesto que  $|g(z)| < 1$ , tenemos que  $|h(z)| < 1$ .

Similarmente, la función

$$k(z) = \frac{h(z) - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}h(z) - 1}$$

cumple  $|k(z)| < 1$ . Por otra parte, al ser la composición de dos funciones univalentes,  $k$  es univalente. Evaluando,  $k(z_0) = \frac{h(z_0) - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}h(z_0) - 1} = \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha} - 1} = 0$ .

Multiplicando a  $k$  por una constante adecuada obtendremos una función  $\tilde{g}$  que satisface  $\tilde{g}'(z_0) = 1$ .

Calculos de rutina muestran que  $k'(z_0) = \frac{|\alpha|+1}{2m\sqrt{\alpha}}$ .

Sea  $\tilde{g}(z) = \frac{k(z)}{k'(z_0)} = \frac{2m\sqrt{\alpha}}{|\alpha|+1}k(z)$ . Por construcción  $\tilde{g}$  está en  $\mathfrak{F}$ .

Finalmente,  $(1 - \sqrt{|\alpha|})^2 > 0$  implica  $\frac{2\sqrt{|\alpha|}}{|\alpha|+1} < 1$ , y como  $|k(z)| < 1$  se sigue que

$$M(\tilde{g}) = \sup_{z \in R} |\tilde{g}(z)| = \sup_{z \in R} \frac{2m\sqrt{|\alpha|}|k(z)|}{|\alpha|+1} \leq \frac{2m\sqrt{|\alpha|}}{|\alpha|+1} < m,$$

lo que contradice la definición de  $m$ .

Por lo tanto  $g$  es sobreyectiva, y la primera parte del teorema ha sido demostrada.

Para demostrar la unicidad supongamos que  $g_1, g_2$  satisfacen las condiciones del teorema, entonces la composición  $G(z) = g_2(g_1^{-1}(z))$  es una biyección de  $B(0, 1)$  en si mismo que fija el origen. Usando el lema de Schwarz de la misma forma que en el ejemplo 3.1, se tiene que  $G(z) = e^{i\lambda}z$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Por hipótesis  $g_1'(0), g_2'(0) > 0$ , de donde

$$e^{i\lambda} = G'(0) = \frac{g_2'(0)}{g_1'(0)} > 0.$$

En conclusión  $e^{i\lambda} = 1$  y  $G(z) = z$ . Por lo tanto  $g_1 = g_2$ . ■

En general no es posible garantizar que la frontera de una región simplemente conexa  $R$  es transformada biyectivamente en la frontera del disco unitario. Por ejemplo, si  $R$  es la región obtenida a partir de  $(0, 1) \times (0, 1)$  eliminando los segmentos  $S_n = \{\frac{1}{n} + iy; 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\}$ , entonces  $R$  es una región simplemente conexa y el origen es un punto frontera de  $R$ . Por otro lado, es claro que ningún punto interior de  $R$  se puede conectar al origen por medio de una curva continua contenida en el interior de la región, utilizando este hecho es posible probar que si  $g$  es la función de Riemann

entre  $R$  y el disco, entonces  $g$  no es continua en cero.

Sin embargo, Osgood y Carathéodory demostraron que cuando la frontera de la región es una curva de Jordan, la función de Riemann es continua en  $\partial(R)$  y la transforma de manera biyectiva en la circunferencia unitaria. En este caso, el teorema de Riemann garantiza la existencia de una solución al problema de Dirichlet para la región  $R$  (dada  $u_0 : \partial(R) \rightarrow \mathbb{R}$  continua, encontrar  $u : \overline{R} \rightarrow \mathbb{R}$  armónica en  $R$  y continua en  $\overline{R}$  tal que  $u|_R = u_0$ ). Pues supongamos que  $u_0$  es una función continua en  $\partial(R)$  y  $g$  es la función de Riemann entre  $R$  y el disco unitario, entonces  $u_0 \circ g^{-1}$  es continua en  $C(0, 1)$ . La fórmula integral de Poisson define una función  $\tilde{u}$  armónica en  $B(0, 1)$  y continua en  $\overline{B(0, 1)}$  tal que  $\tilde{u}|_{C(0, 1)} = u_0 \circ g^{-1}$ , usando que  $\tilde{u}$  es la parte real de una función analítica en  $B(0, 1)$  es fácil verificar que  $u = \tilde{u} \circ g$  es la solución al problema de Dirichlet para la región  $R$  y la función  $u_0$ .

Una limitación evidente del teorema de Riemann y la demostración de éste que se dió anteriormente es que no dan ninguna indicación acerca de como es la función entre  $R$  y  $B(0, 1)$ . El último teorema de éste trabajo proporciona información al respecto.

**Teorema 5.2** *Sea  $R$  una región simplemente conexa distinta de  $\mathbb{C}$ . Entonces existe una sucesión de funciones univalentes  $\{g_n\}$  con  $g_n : R \rightarrow B(0, 1)$ , tal que la sucesión converge uniformemente en los subconjuntos compactos de  $R$  a una función univalente  $g$  que mapea a  $R$  sobre  $B(0, 1)$ .*

*Además, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la distancia de la frontera de  $g_n(R)$  a  $C(0, 1)$  es menor ó igual a  $\frac{k}{n}$ , con  $k$  constante.*

**Dem.**

Probaremos primero la existencia de  $\{g_n\}$ .

En la parte (i) de la demostración del teorema 5.1 se construyó una familia de funciones univalentes y acotadas en  $R$ , tomando cualquiera de ellas y multiplicando por una constante adecuada se obtiene una función  $F$  univalente en  $R$  que cumple  $|F(z)| < 1$  para  $z \in R$ .

Si  $F(R) = B(0, 1)$  la demostración está completa.

Supongamos que  $F(R) = R_0 \neq B(0, 1)$ . Como  $R$  es simplemente conexa y  $F$  es univalente se tiene que  $R_0$  es una región simplemente conexa.

Sea  $\xi_0$  con  $|\xi_0| < 1$  un punto en la frontera de  $R_0$  cuya distancia al origen sea mínima, es decir  $|\xi_0| \leq |z|$  para toda  $z \in \partial(R_0)$  ( $\xi_0$  existe por continuidad y la compacidad de  $\partial(R_0)$ ).

La función  $L_1(z) = \frac{z-\xi_0}{1-\xi_0 z}$  es una biyección conforme del disco unitario cerrado en si mismo, por lo que la imagen de  $R_0$  bajo ésta es simplemente conexa, y no contiene al origen pues  $\xi_0 \notin R_0$ .

Por lo anterior existe una rama de logaritmo analítica en  $L_1(R_0)$ , utilizando esta rama la función  $T(z) = \sqrt{\frac{z-\xi_0}{1-\xi_0 z}}$  es analítica y univalente en  $R_0$ , y satisface  $T(0) = \sqrt{-\xi_0}$ .

Sea

$$f_0(z) = \frac{T(z) - \sqrt{-\xi_0}}{1 - \sqrt{-\xi_0}T(z)},$$

entonces  $f_0$  es la composición de  $L_1$ ,  $\sqrt{z}$ , y  $L_2$ , donde  $L_2(z) = \frac{z - \sqrt{-\xi_0}}{1 - \sqrt{-\xi_0}z}$ .

Se sigue que  $f_0$  es univalente en  $R_0$ ,  $|f_0(z)| \leq 1$  para  $z \in R_0$ , y  $f_0(0) = 0$ .

Ahora sea  $f_0(R_0) = R_1$ , entonces  $f_0$  tiene una inversa definida en  $R_1$ . La función inversa  $f_0^{-1}$  es la composición de  $L_2^{-1}$  (una biyección conforme del disco unitario cerrado en si mismo),  $z^2$ , y  $L_1^{-1}$  (otra biyección conforme de  $\overline{B(1,0)}$  en si mismo), por lo que  $f_0^{-1}$  es analítica en  $\overline{B(0,1)}$ , y  $|f_0^{-1}(w)| \leq 1$  si  $w \in \overline{B(0,1)}$ . Además  $f_0^{-1}(0) = 0$ , y como  $f_0^{-1}$  no es una rotación (pues  $f_0^{-1}(-\sqrt{-\xi_0}) = \xi_0$ ) se sigue por el lema de Schwarz que  $|f_0^{-1}(w)| < |w|$  si  $|w| < 1$ ,  $w \neq 0$ . Por otro lado, la función

$$h(w) = \begin{cases} \frac{f_0^{-1}(w)}{w}, & w \neq 0 \\ f_0^{-1}'(0), & w = 0 \end{cases} \text{ es analítica en } B(0,1), \text{ por el principio del módulo máxi-}$$

mo  $|h|$  no puede tener un máximo local en el origen, de donde  $|f_0^{-1}'(0)| < 1$ .

Sustituyendo  $0 = f_0(0)$ ,  $w = f_0(z)$ , en  $|f_0^{-1}'(0)| < 1$  y  $|f_0^{-1}(w)| < |w|$  respectivamente, se tiene que  $|f_0'(0)| > 1$  y  $|z| < |f_0(z)|$  para  $z \in R_0$ ,  $z \neq 0$ . Por lo tanto la distancia de  $R_1 = f_0(R_0)$  a  $C(1,0)$  es menor que la distancia de  $R_0$  a  $C(1,0)$ .

Sea  $\xi_1 \in \partial(R_1)$  tal que su distancia al origen sea mínima, repitiendo la construcción anterior se tiene una función  $f_1$  univalente en  $R_1$  que fija el origen, y tal que la distancia de  $R_2 = f_1(R_1)$  a  $C(0,1)$  es menor que la distancia de  $R_1$  a  $C(0,1)$ . Continuando inductivamente este proceso obtenemos una sucesión de funciones univalentes  $f_n : R_n \rightarrow R_{n+1}$  cuya imagen aproxima cada vez más al disco unitario, y que además cumplen  $f_n(0) = 0$  para toda  $n$ . Por construcción, el disco más grande con centro en el origen contenido en  $R_{n+1}$  es  $B(0, |\xi_{n+1}|)$ , de donde se sigue que la frontera de  $R_{n+1}$  está contenida en el anillo  $\{z; |\xi_{n+1}| \leq |z| \leq 1\}$ . Además es claro que los puntos  $\xi_n \in R_n$  satisfacen  $|\xi_1| < |\xi_2| < \dots < |\xi_n| < \dots < 1$ .

Probaremos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\xi_k| = 1$ .

Sea  $F_{m,n}(z) = f_m(f_{m-1}(\dots f_n(z)\dots))$ , para  $m > n$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , claramente  $F_{m,n}$  mapea a  $R_n$  sobre  $R_{m+1}$ , es univalente, y  $F_{m,n}(0) = 0$ . Por otra parte, la función

$$H(z) = \begin{cases} \frac{F_{m,n}(z)}{z}, & z \neq 0 \\ F_{m,n}'(0), & z = 0 \end{cases} \text{ es analítica en } R_n \text{ y por lo tanto en } B(0, |\xi_n|). \text{ Si}$$

$0 < r < |\xi_n|$  y  $z \in B(0, r)$ , entonces  $|H(z)| = \left| \frac{F_{m,n}(z)}{z} \right| = \frac{|F_{m,n}(z)|}{r} \leq \frac{1}{r}$ , por el principio del módulo máximo  $|H(0)| \leq \frac{1}{r}$ , y haciendo que  $r$  tienda a  $|\xi_n|$  se sigue que

$$|F_{m,n}'(0)| = |H(0)| \leq \frac{1}{|\xi_n|}.$$

Ahora bien, usando la regla de la cadena

$$|F_{m,n}'(0)| = |f_m'(f_{m-1}(\dots f_n(0)\dots)) \cdot f_{m-1}'(\dots f_n(0)\dots) \cdots f_n'(0)| = \prod_{k=n}^m |f_k'(0)|.$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores

$$\prod_{k=n}^m |f'_k(0)| \leq \frac{1}{|\xi_n|}. \quad (1)$$

Por otro lado, derivando la expresión para  $f_0$  se llega a  $f'_0(0) = \frac{1+|\xi_0|}{2\sqrt{-\xi_0}}$ , un cálculo similar muestra que  $f'_k(0) = \frac{1+|\xi_k|}{2\sqrt{-\xi_k}}$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Sustituyendo en (1),

$$\prod_{k=n}^m \frac{1+|\xi_k|}{2\sqrt{|\xi_k|}} = \prod_{k=n}^m |f'_k(0)| \leq \frac{1}{|\xi_n|}. \quad (2)$$

Como cada uno de los factores  $\frac{1+|\xi_k|}{2\sqrt{|\xi_k|}}$  es mayor que 1 (pues  $(1 - \sqrt{|\xi_k|})^2 > 0$ ), conforme  $m$  tiende a  $\infty$  los productos parciales  $\prod_{k=n}^m \frac{1+|\xi_k|}{2\sqrt{|\xi_k|}}$  forman una sucesión monótona acotada, por el teorema de Bolzano-Weierstrass el producto  $\prod_{k=n}^{\infty} \frac{1+|\xi_k|}{2\sqrt{|\xi_k|}}$  es convergente. Por lo tanto se debe tener  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1+|\xi_k|}{2\sqrt{|\xi_k|}} = 1$ . Además

$$\frac{1+|\xi_k|}{2\sqrt{|\xi_k|}} - 1 = \frac{(1 - \sqrt{|\xi_k|})^2}{2\sqrt{|\xi_k|}}, \quad (3)$$

entonces  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - \sqrt{|\xi_k|})^2}{2\sqrt{|\xi_k|}} = 0$  y como el denominador es acotado, se sigue que  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\xi_k| = 1$ .

Sea  $F_n(z) = f_n(f_{n-1}(\dots(f_0(z)\dots)))$ , claramente  $F_n$  es univalente en  $R_0$ , fija el origen, y mapea a  $R_0$  sobre  $R_{n+1}$ . Probaremos que la sucesión  $F_n$  converge uniformemente en los subconjuntos compactos de  $R_0$  a una función univalente  $\tilde{F}$ .

Por la regla de la cadena  $F'_n(0) = \prod_{k=0}^n f'_k(0) \neq 0$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Usando el desarrollo de Taylor alrededor del cero vemos que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{F_n(z)}{F_m(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{F'_n(0)z + \dots}{F'_m(0)z + \dots} = \frac{F'_n(0)}{F'_m(0)} \neq 0,$$

por lo que  $\frac{F_n}{F_m}$  tiene una singularidad removible en el origen. Definiendo  $\frac{F_n(0)}{F_m(0)} = \frac{F'_n(0)}{F'_m(0)}$  se tiene que  $\frac{F_n(z)}{F_m(z)}$  es analítica en  $R_0$ , y sabemos que  $F_n$  es univalente con  $F_n(0) = 0$ , así que  $\frac{F_n}{F_m}$  no se anula en  $R_0$ . Por el principio del módulo máximo, los valores máximo y mínimo de  $\frac{|F_n|}{|F_m|}$  se alcanzan en la frontera de  $R_0$ . Como para  $z \in \partial(R_0)$  se cumple que  $|\xi_n| < |F_n(z)| \leq 1$  y  $1 \leq \frac{1}{|F_m(z)|} < \frac{1}{|\xi_m|}$ , se sigue que

$$|\xi_n| < \frac{|F_n(z)|}{|F_m(z)|} < \frac{1}{|\xi_m|},$$

y en consecuencia  $\frac{|F_n(z)|}{|F_m(z)|}$  tiende a 1 uniformemente en los subconjuntos compactos de  $R_0$  cuando  $m$  y  $n$  tienden a  $\infty$ .

Por otra parte, puesto que  $\frac{F_n}{F_m}$  es analítica y no se anula en  $R_0$ , podemos definir una rama de  $\log\left(\frac{F_n}{F_m}\right)$  analítica en  $R_0$ . Sea  $L_{m,n}(z) = \log\left(\frac{F_n(z)}{F_m(z)}\right) = u_{m,n}(z) + iv_{m,n}(z)$ , entonces  $u_{m,n}$  tiende uniformemente a cero en los subconjuntos compactos de  $R_0$  cuando  $m$  y  $n$  tienden a  $\infty$ . Sea  $\overline{B(z_0, \rho)}$  un disco cerrado contenido en  $R_0$ , entonces existe  $\tilde{\rho} > \rho$  tal que  $\overline{B(z_0, \rho)} \subset B(z_0, \tilde{\rho}) \subset R_0$ . Por la fórmula integral de Poisson, si  $z_0 + re^{i\theta} \in \overline{B(z_0, \rho)}$ , entonces

$$u_{m,n}(z_0 + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \left(\frac{r}{\tilde{\rho}}\right)^2}{\left|e^{i(\theta-t)} - \frac{r}{\tilde{\rho}}\right|^2} u_{m,n}(z_0 + \tilde{\rho}e^{it}) dt,$$

diferenciando con respecto a  $r$  y tomando módulos,

$$\left| \frac{\partial u_{m,n}}{\partial r}(z_0 + re^{i\theta}) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{(1 - \frac{r^2}{\tilde{\rho}^2})u_{m,n}(z_0 + \tilde{\rho}e^{it})}{1 + \frac{r^2}{\tilde{\rho}^2} - 2\frac{r}{\tilde{\rho}} \cos(\theta - t)} \right) dt \right|,$$

desarrollando,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_{m,n}}{\partial r}(z_0 + re^{i\theta}) \right| &= \frac{1}{\pi\tilde{\rho}^3} \left| \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 + \tilde{\rho}^2) \cos(\theta - t) - 2r\tilde{\rho}}{\left|e^{i(\theta-t)} - \frac{r}{\tilde{\rho}}\right|^4} u_{m,n}(z_0 + \tilde{\rho}e^{it}) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi\tilde{\rho}^3} \int_0^{2\pi} \left| \frac{(r^2 + \tilde{\rho}^2) \cos(\theta - t) - 2r\tilde{\rho}}{\left|e^{i(\theta-t)} - \frac{r}{\tilde{\rho}}\right|^4} u_{m,n}(z_0 + \tilde{\rho}e^{it}) \right| dt \\ &\leq \frac{r^2 + \tilde{\rho}^2 + 2r\tilde{\rho}}{\pi\tilde{\rho}^3(1 - \frac{r}{\tilde{\rho}})^4} \int_0^{2\pi} |u_{m,n}(z_0 + \tilde{\rho}e^{it})| dt \leq \frac{\rho^2 + \tilde{\rho}^2 + 2\rho\tilde{\rho}}{\pi\tilde{\rho}^3(1 - \frac{\rho}{\tilde{\rho}})^4} \int_0^{2\pi} |u_{m,n}(z_0 + \tilde{\rho}e^{it})| dt, \end{aligned}$$

de donde  $\left|\frac{\partial u_{m,n}}{\partial r}\right| \rightarrow 0$  uniformemente en  $\overline{B(z_0, \rho)}$  y por lo tanto en los subconjuntos compactos de  $R_0$ . Similarmente  $\left|\frac{\partial u_{m,n}}{\partial \theta}\right| \rightarrow 0$  y por las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar se tiene que  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} L_{m,n} = 0$ . Luego  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_m} = 1$ , ó equivalentemente  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{F_n - F_m}{F_m} = 0$ , como la sucesión  $\{F_m\}$  es acotada, se debe cumplir  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} F_n - F_m = 0$ . Por lo tanto las funciones  $F_n$  convergen uniformemente en los subconjuntos compactos de  $R_0$  a una función  $\tilde{F}$ . Como se mencionó anteriormente  $|\xi_{n+1}| \leq |F_n(z)| \leq 1$  para  $z \in \partial(R_0)$ , tomando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  se sigue que  $|\tilde{F}| = 1$  en  $\partial(R_0)$ . Además  $\tilde{F}(0) = 0$ , de manera que  $\tilde{F}$  no es constante, y por el teorema 3.5,  $\tilde{F}$  es univalente en  $R_0$ . Puesto que la imagen de  $R_0$  bajo  $\tilde{F}$  es una región simplemente conexa cuya frontera tiene módulo uno, es claro que  $\tilde{F}(R_0) = B(0, 1)$ . Componiendo con  $F$  obtenemos la sucesión  $g_n = F_n \circ F$  de funciones univalentes en  $R_0$  que converge uniformemente en los subconjuntos compactos de  $R$  a la función  $g = \tilde{F} \circ F$ , una biyección conforme entre  $R$  y el disco unitario. Por lo tanto la demostración de la parte de existencia del teorema está terminada.

Ahora estimaremos la velocidad de convergencia, tomando logaritmos en (2) con  $m = 2n$  y usando (3) se tiene que

$$-\log(|\xi_{n+1}|) = \log\left(\frac{1}{|\xi_{n+1}|}\right) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \log\left(\frac{1+|\xi_k|}{2\sqrt{|\xi_k|}}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n} \log\left(1 + \frac{(1-\sqrt{|\xi_k|})^2}{2\sqrt{|\xi_k|}}\right).$$

Por otro lado, la función  $\frac{\log(1+x)}{x}$  es monótona decreciente en los intervalos  $(-1, 0)$  y  $(0, \infty)$  (esto se puede apreciar comparando las gráficas de las funciones  $x$  y  $\log(1+x)$ , aunque es posible dar una demostración rigurosa interpretando la derivada en términos de áreas). Se sigue que  $\log\left(1 + \frac{(1-\sqrt{|\xi_k|})^2}{2\sqrt{|\xi_k|}}\right) \geq \frac{(1-\sqrt{|\xi_k|})^2}{2} 2\log(1+\frac{1}{2})$ . Sustituyendo en la ecuación anterior,

$$-\log(|\xi_{n+1}|) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(1-\sqrt{|\xi_k|})^2}{2} 2\log\left(\frac{3}{2}\right). \quad (4)$$

Nuevamente usando que  $\frac{\log(1+x)}{x}$  es decreciente, tenemos que

$$\frac{-\log(|\xi_{n+1}|)}{1-|\xi_{n+1}|} = \frac{\log(1+(|\xi_{n+1}|-1))}{|\xi_{n+1}|-1} \leq \frac{\log(1+(|\xi_1|-1))}{|\xi_1|-1} = \frac{\log(|\xi_1|)}{|\xi_1|-1},$$

de donde

$$-\log(|\xi_{n+1}|) \leq (1-|\xi_{n+1}|) \frac{\log(|\xi_1|)}{|\xi_1|-1} < (1-|\xi_n|) \frac{\log(\frac{1}{|\xi_1|})}{1-|\xi_1|}, \quad (5)$$

observando que  $(1-\sqrt{|\xi_k|})^2 = \frac{(1-|\xi_k|)^2}{(1+\sqrt{|\xi_k|})^2} > \frac{(1-|\xi_k|)^2}{4}$  y sustituyendo junto con (5) en (4) obtenemos

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{1-|\xi_k|}{2a}\right)^2 < \frac{1-|\xi_n|}{a} \quad \left(a = \frac{\log(\frac{1}{|\xi_1|})}{(1-|\xi_1|)\log(\frac{3}{2})}\right).$$

Luego  $n \left(\frac{1-|\xi_{2n}|}{2a}\right)^2 < \frac{1-|\xi_n|}{a}$  (pues la sucesión  $|\xi_n|$  es monótona creciente), ó equivalentemente  $\left(2n \left(\frac{1-|\xi_{2n}|}{16a}\right)\right)^2 < n \left(\frac{1-|\xi_n|}{16a}\right)$ , por lo que para  $2^\alpha > 1$  se cumple que

$$\left(2^\alpha \left(\frac{1-|\xi_{2^\alpha}|}{16a}\right)\right)^2 < \left(2^{\alpha-1} \left(\frac{1-|\xi_{2^{\alpha-1}}|}{16a}\right)\right)^{2^{\alpha-1}} < \dots < \frac{1-|\xi_1|}{16a},$$

pero

$$\frac{1-|\xi_1|}{16a} = \frac{(1-|\xi_1|)^2 \log(\frac{3}{2})}{16(-\log(|\xi_1|))} = \frac{(1-|\xi_1|) \log(\frac{3}{2})}{16} \cdot \frac{|\xi_1|-1}{\log(1+(|\xi_1|-1))} < 1,$$

de manera que

$$1 - |\xi_{2^\alpha}| < \frac{16a}{2^\alpha}.$$

Por último, tomando  $\alpha = \frac{\log(n)}{\log(2)} + 1$  en la desigualdad anterior para  $n \geq 2$ ,

$$1 - |\xi_n| = 1 - |\xi_{2^{\alpha-1}}| < \frac{16a}{2^{\alpha-1}} = \frac{16a}{n}$$

y como  $\frac{1-|\xi_1|}{16a} < 1$ , también se tiene  $1 - |\xi_1| < 16a$ , lo que prueba el resultado. ■

La construcción de la función de Riemann dada en el teorema anterior no es usada para fines prácticos, pues el ritmo de convergencia de las funciones  $g_n$  no es lo suficientemente rápido. Para cierto tipo de regiones existen construcciones cuyo uso es más conveniente. Por ejemplo, el teorema de Schwarz-Christoffel proporciona fórmulas integrales para transformar semiplanos ó el disco en regiones poligonales de manera conforme, aunque algunos de los coeficientes en dichas fórmulas se deben aproximar numericamente. En el caso general, encontrar una biyección conforme entre el disco y una región dada es un problema complicado.

Para terminar este trabajo, mencionaremos que las transformaciones conformes tienen una diversidad de aplicaciones en diversos campos de la física, entre los cuales se encuentran la electroestática y la hidrodinámica, para quien esté interesado en éstas aplicaciones un buen punto de partida podría ser el libro de Marsden mencionado en la bibliografía.

# Bibliografía

- [1] Sanford L. Segal, *Nine Introductions in Complex Analysis*, North-Holland Publishing Company, (1981)
- [2] Jerrold E. Marsden, Michael J. Hoffman, *Basic Complex Analysis*, W. H. Freeman and Company, (1987)
- [3] Robert B. Ash, W. P. Novinger, *Complex Variables*, Dover Publications, Inc., (2007)
- [4] Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, (1966)