



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA

FACULTAD DE QUÍMICA

ESTUDIO DEL FLUJO
SANGUÍNEO ARTERIAL
DEBIDO A UN
GRADIENTE DE
PRESIÓN VARIABLE

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERIA

INGENIERÍA QUÍMICA – CATÁLISIS E ING. DE REACCIONES

P R E S E N T A :

I.Q. LUIS GUILLERMO VIRUES DELGADILLO



TUTOR:
DR. ÁNGEL ENRIQUE CHÁVEZ CASTELLANOS

2010



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos:

Le agradezco a toda mi familia, a mi padre, madre, hermano, padrinos, primo tía y abuelas por su incondicional apoyo, en especial al Dr. Jorge Virués Vega y a la Dra. Ángeles Vega, pues sin su paciencia y ayuda jamás se hubiera tenido una visión más completa de la que un ingeniero pudiese tener, y mucho menos, ideas para completarlo.

De manera muy especial, les agradezco a Sarai Vásquez Reyes y al Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos su incondicional ayuda y consejos durante el tiempo que tomó la elaboración de este trabajo. Gracias por su incondicional apoyo y amistad.

Quiero expresar mi gratitud a todos aquellos que me ayudaron, de una u otra manera, a iniciar y concluir con mis estudios de maestría, como el Dr. Miguel Ángel Morales Cabrera y al Dr. Francisco José Valdés Parada.

Le agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico otorgado al alumno de maestría en el programa de posgrado en ingeniería, campo disciplinario ingeniería química, disciplina catálisis e ingeniería de reactores impartido en la Universidad Nacional Autónoma de México, con el número de registro 210839 y el número de registro CVU 230451 desde el mes de agosto de 2007 hasta el mes de septiembre de 2009 para el desarrollo del trabajo teórico en esta tesis publicado.

El autor de este trabajo tiene la esperanza de que en base a la obra que el lector tiene en sus manos surjan nuevas ideas y posibles líneas de investigación; que es así como se pagaría al menos parte de la enorme deuda que se tiene tanto con el CONACyT como con nuestra máxima casa de estudios que es la UNAM.

Índice:

Resumen	i
Abstract	i
1. Introducción	1
1.1 Motivación del trabajo.....	3
1.1.1. Objetivos.....	3
1.1.2. Hipótesis.....	4
1.2. Propiedades de la sangre.....	5
1.3. Propiedades del flujo sanguíneo.....	9
1.3.1. Fluido de Casson.....	15
1.4. Efecto Fahreus-Linquist.....	16
1.4.1. Teoría de la zona marginal.....	17
1.4.2. Modelo del cilindro tisular de Krogh.....	20
2. Ecuaciones constitutivas y aproximaciones	22
2.1. Ecuación constitutiva del fluido newtoniano generalizado.....	22
2.1.1. Ley de Newton.....	23
2.1.2. Ley de la potencia.....	24
2.2. Ecuación constitutiva del fluido de segundo grado modificado.....	25
2.2.1. La derivada convectiva superior.....	28
3. Simplificación de las ecuaciones constitutivas y movimiento	30
3.1. Adimensionalización.....	31
3.2. Simplificaciones basadas en los números adimensionales.....	33
3.3. Simplificaciones apoyadas en el tipo de flujo (flujo cortante).....	34

4. Evaluación de las ecuaciones	40
4.1. Estado estacionario.....	40
4.1.1. Flujo de dos fluidos newtonianos.....	45
4.1.1.1. Efectos de la variación gradiente de presión.....	46
4.1.1.2. Efectos de la variación del cociente de propiedades.....	49
4.1.2. Flujo del fluido de segundo grado envuelto en el fluido newtoniano.....	52
4.1.2.1. Efectos de la variación gradiente de presión.....	53
4.1.2.2. Efectos de la variación del cociente de propiedades.....	53
4.2. Estado transitorio.....	55
4.2.1. Flujo de dos fluidos newtonianos.....	56
4.2.1.1. Efectos de la variación gradiente de presión.....	65
4.2.1.2. Efectos de la variación del cociente de propiedades.....	72
4.2.1.3. Efectos de la variación del número de Womersley.....	73
4.2.2. Flujo del fluido de segundo grado envuelto en el fluido newtoniano.....	74
4.2.2.1. Efectos del gradiente de presión variable.....	76
4.2.2.2. Efectos de la variación del número de Womersley.....	78
4.2.2.3. Efecto de la variación del cociente de propiedades.....	80
4.2.2.4. Efecto de la variación de la presión debido al flujo transitorio.....	82
5. Discusión y Resultados	86
5.1. Aportación de este trabajo.....	87

6. Conclusiones	88
6.1. Propuestas de líneas de investigación futuras.....	88
7. Apéndice I: Desarrollo del método numérico	91
8. Apéndice II	96
8.1. Lista de Tablas.....	96
8.2. Lista de Figuras.....	96
9. Nomenclatura	100
10. Bibliografía	103

Resumen.

En el estudio del flujo sanguíneo arterial, por lo general se supone que la sangre se comporta aproximadamente como un fluido newtoniano. Esta simplificación puede ser empleada correctamente en regiones de flujo cercanas al corazón. A pesar de ello, experimentalmente se ha probado que el flujo sanguíneo, alejado del corazón, se comporta de forma distinta conforme se presenta el efecto Fahraeus-Linquist; este segundo fenómeno es el problema considerado en este trabajo. Esto significa que hay un fluido no newtoniano en el centro y un fluido newtoniano cercano a la pared. En esta investigación se supone que la región central puede ser descrita mediante un modelo de un fluido de segundo grado para obtener predicciones de esfuerzos cortantes y normales, los cuales llevan a una lectura de presión que puede ser comparada con datos experimentales. Para encontrar dicha información, se propusieron y probaron diferentes gradientes de presión a través de un método numérico de diferencias finitas. Los resultados de las predicciones teóricas concuerdan satisfactoriamente con el comportamiento de la presión sistólica en una persona sana.

Abstract

Generally, in the study of artery blood flow, it is assumed that blood behaves as a Newtonian fluid. This simplification may be correctly used in flow regions next to heart. Despite of this, experimentally it has been proved that blood flow, away from the heart, behaves quite different as the Fahraeus–Lindquist effect occurs; this latter phenomenon is the problem considered in this work. This means there is a non-Newtonian fluid in the core and a Newtonian fluid near the wall. In this investigation, it is assumed that the core region may be described by a second grade fluid model to acquire predictions of shear and normal stresses rendering pressure measurements that might be compared to experimental data. To find such information, different time dependant pressure gradients were proposed and tested numerically through a finite differences scheme. Theoretical prediction results agree with systolic pressure behavior to a healthy person appropriately.

1. Introducción:

El estudio del cuerpo humano en todos sus aspectos es un tema muy amplio y complicado, que engloba tanto disciplinas que tienen como campo de estudio la vida y sus funciones, como lo es la medicina, así como a diferentes ramas de la ciencia. El entendimiento de los procesos físicos de transporte y reacciones químicas englobados en el cuerpo humano requiere conocer tópicos tales como la mecánica de fluidos y la transferencia de energía y masa en capas límite.

Lo anterior indica que es necesario tener una base teórica sólida en los conceptos mencionados anteriormente para estudiar las propiedades de la sangre, del flujo de la sangre, el transporte de solutos en regiones capilares, el intercambio de masa en dichas regiones y su farmacocinética.

Las regiones donde la sangre fluye pueden dividirse en las regiones del sistema cardiovascular, los subsistemas son: el corazón, las arterias y las venas, las arteriolas y las vénulas y los capilares. Lo anterior lleva a identificar regiones de flujo, pues la reología de la sangre cambia de acuerdo a la zona donde ésta se encuentra. De acuerdo a estudios anteriores en la región donde los vasos sanguíneos son cercanos al corazón, el comportamiento de la sangre presenta mucha similitud con el agua^[1]; sin embargo, conforme el flujo se aleja a través de las arterias, presenta un comportamiento pseudoplástico, pero éste no es el caso de estudio de este trabajo, sino otro fenómeno que se describe mediante la presencia de dos zonas de flujo, llamado efecto de Fahreus-Linquist, que se presenta cuando hay una

separación de dos zonas y en el caso de la sangre una reducción de la viscosidad aparente en el sistema^[2].

Por otro lado, en la literatura se propone un gradiente de presión caracterizado por una función seno o coseno^[7]; sin embargo se sabe que no existen gradientes de presión negativos tan grandes como los gradientes positivos dentro del cuerpo humano^[3]. Por sobresimplificaciones trabajos como los de Sud y Sekhon^[4], y Chaturani y Wassf^[5] hacen que la dependencia del gradiente de presión con respecto al tiempo haya sido despreciada y es motivo de este trabajo tomar en cuenta el efecto del gradiente de presión en el flujo sanguíneo mientras se da el efecto Fahreus-Linquist.

Tal como existe en la naturaleza, el flujo de la sección a estudiar durante este trabajo tiene otra característica que lo diferencia ampliamente de cualquier otra región de flujo del cuerpo: debe ser capaz de describir el intercambio de masa entre oxígeno, dióxido de carbono y óxido nítrico, además de tener cambios de propiedades físicas como la densidad del material que contiene todos los componentes necesarios para los procesos antes mencionados (definido como hematocrito) y el cambio de región entre la zona de flujo aórtica y la venosa.

1.1 Motivación del trabajo:

El estudio del flujo de la sangre en sistemas circulatorios formados por capilares con diámetros de 500 μm a 15 μm se ha llevado a cabo desde 1971^[6]. Se ha observado, en experimentos *in vivo* e *in vitro*, que las células que fluyen en la sangre no se distribuyen de forma homogénea a través de la sección transversal del flujo, éste es el efecto Fahraeus; la viscosidad de la sangre decrece al momento que se forma una capa de plasma en la pared del tubo que recubre la zona donde circula el hematocrito. Al momento que el área transversal por la que la sangre fluye, decrece, la viscosidad aparente también lo hace y la reducción de la viscosidad de la sangre por dicho efecto es el fenómeno Fahraeus-Lindquist^[27].

Trabajos anteriores como los de Massoudi^[7] o los de Sud y Sekhon^[8] llevan a cabo su investigación en zonas cercanas al corazón, donde el flujo sanguíneo tiene altos números de Reynolds (mayores a 4000) y no ocurre el fenómeno mencionado anteriormente.

1.1.1. Objetivos.

- Delimitar el problema en una región más específica para asegurar exista que el fenómeno Fahraeus-Linquist se realice; esto limita la región de estudio a zonas alejadas del corazón.

- El bombeo del corazón sólo se lleva a cabo por el ventrículo derecho para las zonas en estudio, por lo que se requiere proponer un gradiente de presión adecuado, pues es la única fuente variable (en el tiempo) que afecta al flujo sanguíneo. El gradiente de presión, puede ser descrito por medio de una serie de Fourier, que debe contener el efecto constante de la diferencia de presiones entre la zona de la arteria y la arteriola.
- Estudiar los efectos de los esfuerzos normales que se manifiestan durante el flujo de la sangre, modelados por un fluido de segundo grado y obtener una solución que incluya cambios de presión que sean comparables con la presión arterial (normalmente situada en el intervalo 120-80 mmHg.)^[12]

1.1.2. Hipótesis.

Por medio de una mejor representación del gradiente de presión se puede obtener una distribución de la velocidad dependiente del radio y del tiempo más adecuada, además de generar, a través de las características elásticas del fluido de segundo grado, presiones en la interfase que se da entre las regiones de flujo, que son las que posiblemente sean dependientes del gradiente de presión axial.

1.2. Propiedades de la sangre.

El estudio de cualquier flujo de un fluido debe comenzar por la caracterización de éste, de manera que el primer tema a tratar es qué es la sangre, algunas de sus propiedades y cómo se manifiesta como sistema.

La sangre es un tejido fluido. Se le define como fluido debido a su capacidad de transportarse como tal y se identifica como tejido dado que contiene componentes que cumplen funciones fisiológicas características^[9]. Tiene color rojo característico, puede ser más claro u oscuro debido a la presencia del pigmento hemoglobínico contenido en los eritrocitos, la zona donde está fluyendo y el contenido de dichos eritrocitos. En los humanos y en otras especies que utilizan la hemoglobina, la sangre arterial y oxigenada es de un color rojo brillante, mientras que la sangre venosa y parcialmente desoxigenada toma un color rojo oscuro y opaco. Sin embargo, debido a un efecto óptico causado por la forma en que la luz penetra a través de la piel, las venas se ven de un color azul^[10].

La sangre es un tejido conjuntivo especializado, lo que significa que cumple con funciones de protección y unión en el cuerpo humano, tiene una fase relativamente sólida (que incluye los glóbulos blancos, los glóbulos rojos y las plaquetas; en conjunto se les conoce como elementos formes) y una fase líquida, representada por el plasma sanguíneo. Es una dispersión coloidal: el plasma representa su fase continua y fluida, y los elementos formes, la fase dispersa del sistema en forma de pequeños corpúsculos semisólidos^[11].

La sangre representa aproximadamente el 7% del peso de un cuerpo humano promedio. Así, se considera que un adulto tiene un volumen de sangre (volemia) de aproximadamente 5 litros (varía de 4.3 hasta 5.7 litros), de los cuales 2.7 hasta 3 litros son plasma sanguíneo, el remanente se conoce con el nombre de hematocrito que es la fracción que contiene diversas células; una pequeña fracción del hematocrito, el 5%, es plasma^[12]. La función principal de la sangre es la distribución e integración sistémica, cuya contención en los vasos sanguíneos (espacio vascular) admite su distribución (circulación sanguínea) hacia casi todo el cuerpo. La función principal de la circulación es el transporte de sustancias mediante la sangre para que se realicen sus actividades vitales del organismo.

Como todo tejido, la sangre se compone de células y componentes extracelulares (su matriz extracelular). Estas dos fracciones tisulares vienen representadas por:

Los elementos formes, llamados también elementos figurados, son elementos representados por células, componentes derivados de células y minerales. Estos elementos de la sangre son variados en tamaño, estructura y función y se agrupan en: células sanguíneas, que son los glóbulos blancos o leucocitos, células que transitan por la sangre para cumplir su función en otros tejidos y los derivados celulares, que no son células estrictamente sino fragmentos celulares; están representados por los eritrocitos y las plaquetas; los derivados celulares son los únicos componentes sanguíneos que cumplen sus funciones estrictamente dentro del espacio vascular.

El plasma sanguíneo es un fluido translúcido y amarillento que representa la matriz extracelular líquida en la que están suspendidos los elementos formes. Dicha sustancia conforma el 55% de la sangre y es la fracción más parecida al agua, ya que está compuesto

por 90% agua y múltiples sustancias disueltas en ella; El 70% de estas sustancias son proteínas plasmáticas como: inmunoglobulinas, albúminas y fibrógeno entre otras. Metabolitos orgánicos (no electrolíticos) y compuestos de desecho constituyen el 20%, por nombrar algunos compuestos; fosfolípidos, colesterol, triacilgliceroles, glucosa, urea, ácido láctico, ácido úrico, creatinina, bilirrubina y trazas de sales biliares. Contiene en menor cantidad (10%), componentes inorgánicos como cloruro, bicarbonato y fosfato de sodio, sulfuro de litio y elementos como el calcio, magnesio y yodo (usados en otras partes del cuerpo). Ya que es el componente mayoritario de la sangre, a continuación se presentan las funciones del conjunto de proteínas plasmáticas, que son:

- Función oncótica: mantienen el volumen plasmático y la volemia.
- Función amortiguadora o reguladora: colaboran en la estabilidad del pH sanguíneo.
- Función electroquímica: intervienen en el equilibrio electroquímico de concentración de iones.
- Función reológica: por su contribución a la viscosidad de la sangre, contribuyen a la resistencia vascular periférica y mínimamente a la presión vascular (tensión arterial) debido a que no presentan efectos elásticos.

Para este trabajo, el punto mencionado anteriormente es el punto de mayor interés a tomar en cuenta, pues la importancia del comportamiento del fluido en las diferentes zonas de flujo es lo que motiva a realizar la investigación en curso. Cabe mencionar que de todas las proteínas plasmáticas, la que en mayor medida modifica el comportamiento de la sangre de acuerdo a Fournier^[2] es el fibrógeno.

Los componentes del plasma se forman en varias partes del organismo: en el hígado se sintetizan todas las proteínas plasmáticas salvo las inmunoglobulinas, que son producto de síntesis de las células plasmáticas. Las glándulas endocrinas secretan sus hormonas correspondientes hacia la sangre. El riñón mantiene constante la concentración de agua y solutos salinos. Los lípidos son aportados por los colectores linfáticos. Otras sustancias son introducidas por absorción intestinal^[12].

1.3. Propiedades del flujo sanguíneo.

A continuación en la tabla 1 se presentan algunas propiedades físicas (presentadas de acuerdo a la tabla publicada por Fournier^[2], como las más importantes) de la sangre.

Propiedades físicas de la sangre de un humano adulto sano.		
	Propiedad	Valor
Sangre		
	Viscosidad (37°C)	3.0 cP (sección de viscosidad constante)
	Densidad relativa (25/4°C)	1.056
Plasma o suero		
	Viscosidad (37°C)	1.2cP
	Densidad relativa (25/4°C)	1.0239
Hematocrito		
	Densidad relativa (25/4°C)	1.098

Tabla 1.- Reproducción parcial de los valores presentados por Fournier^[2] para la sangre y el plasma.

Ahora, se procede a presentar la presión ejercida por la aurícula y el ventrículo derecho del corazón. Dicha presión se presenta junto con más información relacionada con otras curvas del músculo más grande del sistema circulatorio; la razón de presentar la siguiente figura es ilustrar la diferencia entre la presión, el volumen, el electrocardiograma (medido en milivoltios) y el fonocardiograma (cuya unidad son los decibeles), siendo, para la presente obra, las diferencias entre la presión auricular y la ventricular las de relevancia. Por lo anterior es que se requiere definir qué región del sistema circulatorio se pretende estudiar.

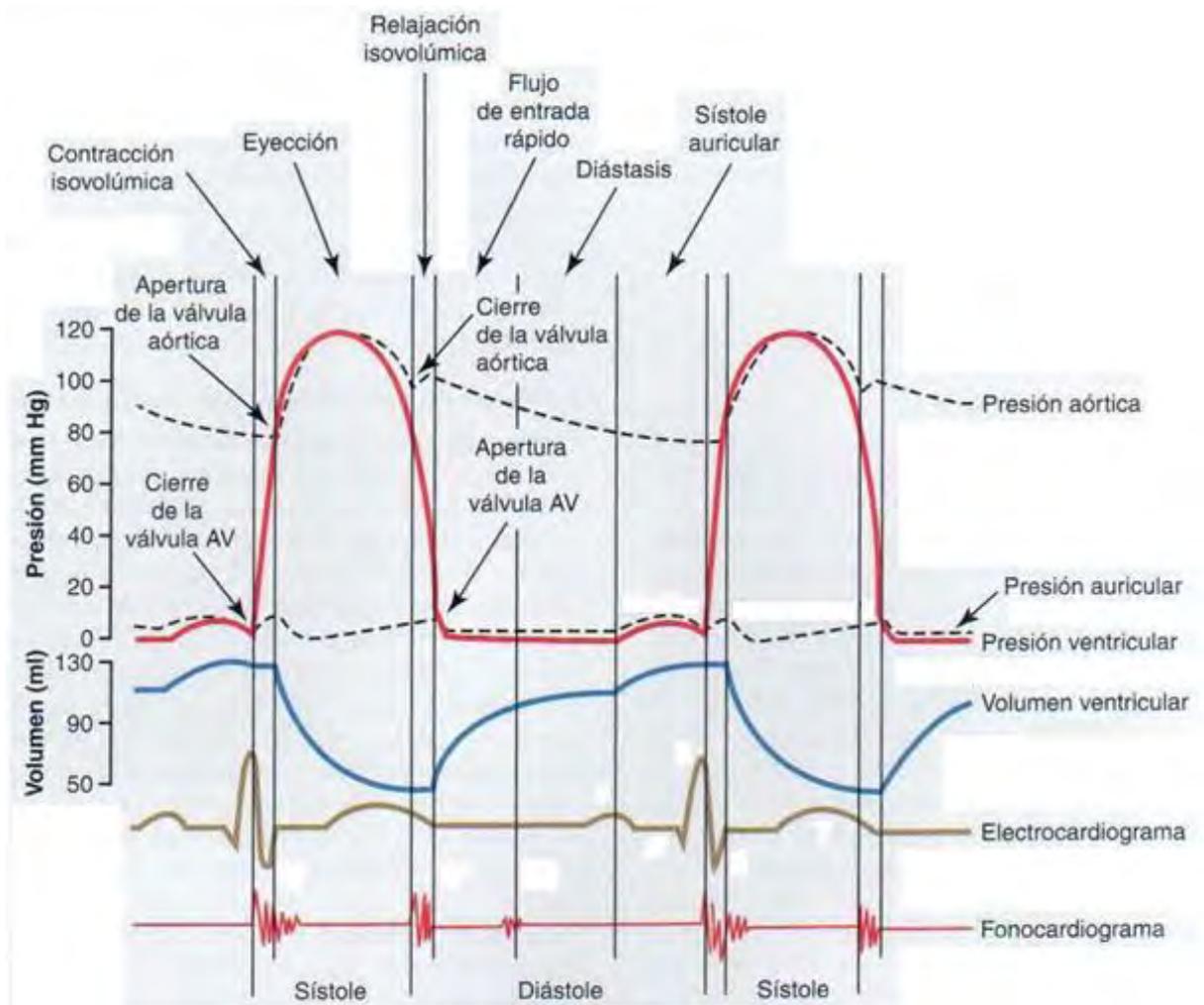


Figura 1.1.- Datos de la presión en diferentes arterias y el ventrículo, volumen del ventrículo, electrocardiograma y fonocardiograma de una persona sana^[12].

La figura 1.1 presenta la presión ejercida por el ventrículo derecho del corazón, dicho efecto debe ser comparado con la presión en las zonas más lejanas de cada sección de flujo y es así como se obtiene el gradiente de presión presente en la sección de flujo de interés. Trabajos como los de Tsangaris y Drikakis^[13] presentan gradientes de presión que varían con el tiempo. Los mismos autores reconocen la dificultad de obtener alguna expresión matemática que describa perfectamente dicho gradiente, por lo que prefieren simplificarlo.

A grandes rasgos, existen dos simplificaciones de bombeo para representar el flujo sanguíneo. Las aproximaciones al bombeo real se les llama bombeo de Windkessel^[14]. Para el primer tipo de bombeo simplificado, llamado flujo no regulado, se supone que durante la sístole el caudal bombeado tiene forma sinusoidal y que durante la diástole no se bombea sangre. Para el segundo caso, flujo regulado, el bombeo del corazón es ajustado con la función seno o coseno. En la siguiente figura se muestra las diferencias entre los bombeos anteriormente mencionado:

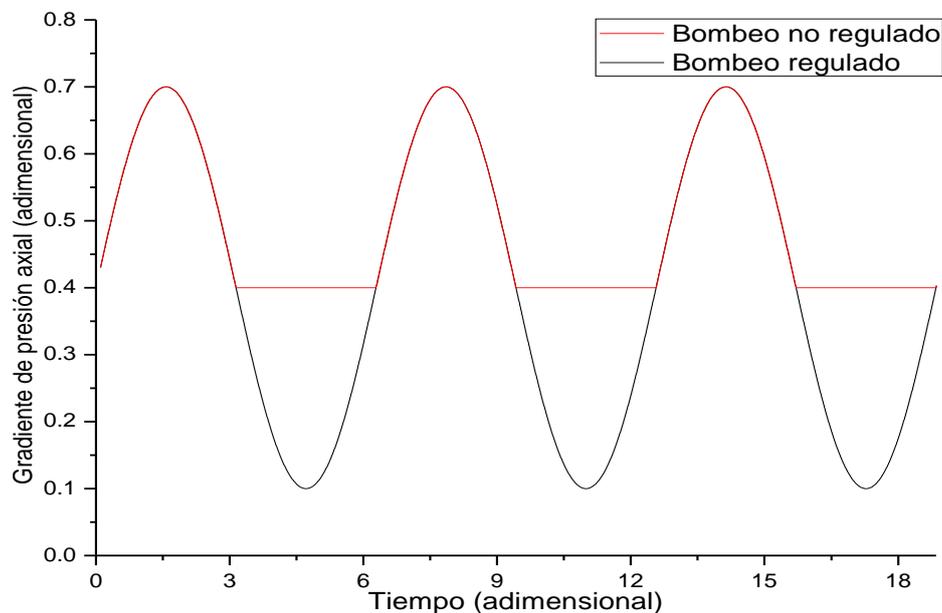


Figura 1.2.- Gráfica adimensional desarrollada en base al trabajo de Calvo^[14] de los tipos de bombeo de Windkessel usados en este trabajo.

Las arterias más alejadas del corazón son las más rígidas porque tienen una mayor capa media, que es un componente de las arterias y arteriolas y además es la parte más rígida, debido a que la cantidad de conjunto fibroso es mayor que la cantidad de musculo elástico^[11]. En este trabajo se hace la suposición que el flujo tiene menor regulación cuando existe poca

elasticidad por parte de la arteria^[11]; mientras que en las zonas donde hay mucha elasticidad en la pared arterial se puede presentar el flujo regulado.

Guyton^[12] presenta una gráfica que muestra que la regulación de las arterias no es lo suficientemente amplia como para hacer de dicho flujo, uno regulado, incluso en animales^[3].

En las regiones de flujo de las arteriolas existe poca cantidad de musculo en la pared del sistema, lo que hace que la elasticidad de la pared de la arteria sea muy poca; es por esto que se puede hacer la aproximación de una pared rígida.

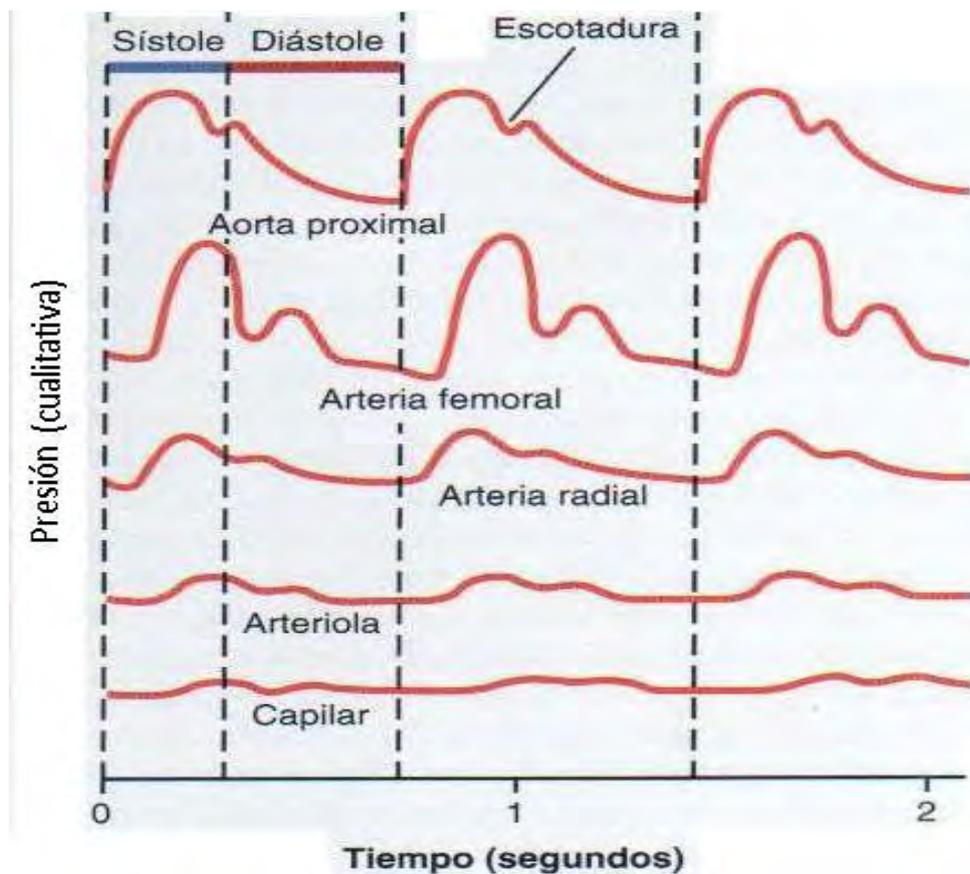


Figura 1.3.- Gráfica cualitativa del comportamiento de la presión en diferentes zonas del cuerpo humano^[12].

En la figura 1.3 se muestra cómo, dependiendo de la zona de flujo, la forma de la presión es distinta. Las zonas presentadas como la aorta proximal o la arteria radial tienen mucho parecido entre ellas a excepción de que las elevaciones de presión son mayores y tienen ligeros desfases de tiempo. De igual manera, mientras la presión se acerca al corazón, los tiempos de bombeo, llamados sístole (aumento de presión en el ventrículo) y diástole (disminución de presión en la misma parte del cuerpo), tienen tiempos diferentes, mientras que en todas las arterias más lejanas, esta diferencia tiende a desaparecer. Lo anterior es la justificación del porqué usar intervalos de tiempo iguales.

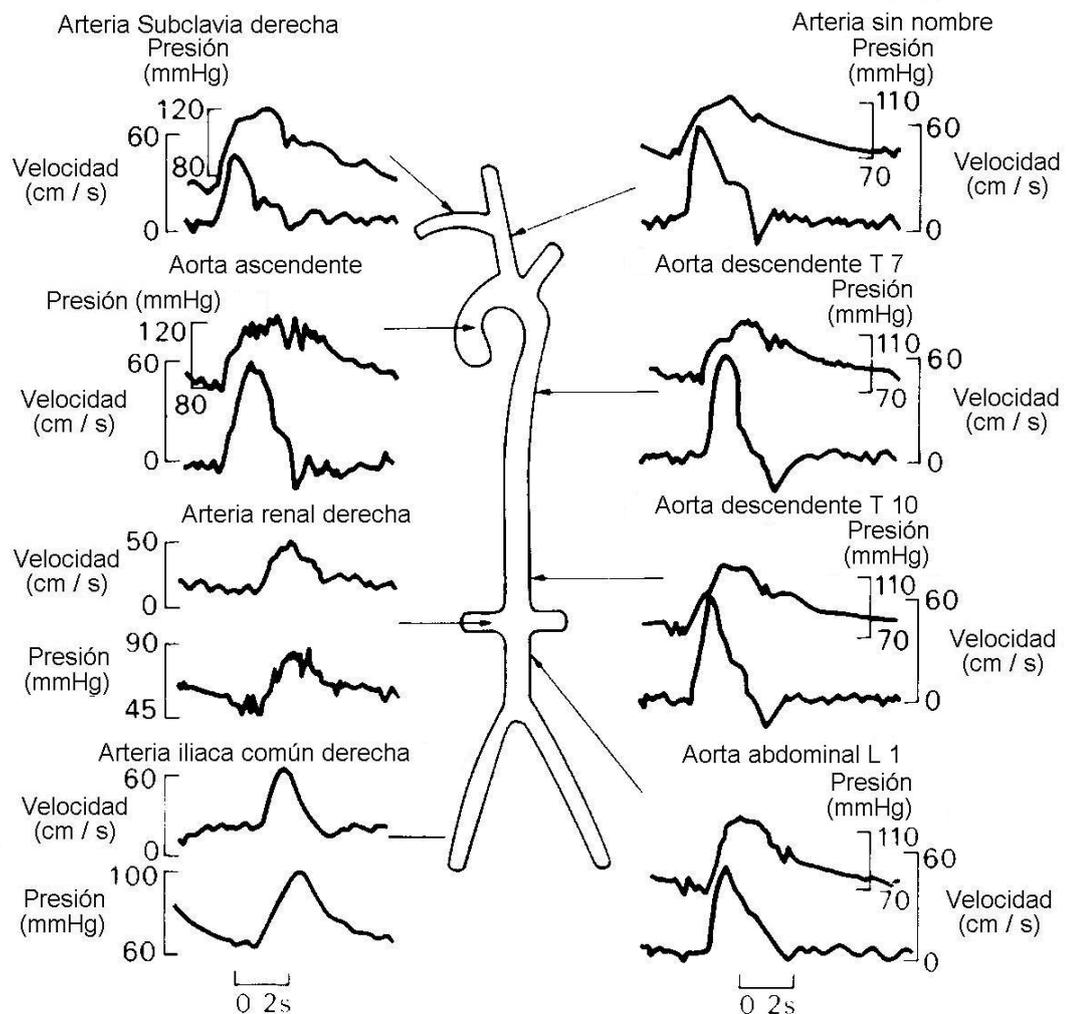


Figura 1.4.- Pulsos de presión y velocidad en las ramas arteriales de un perro^[3].

La figura 1.4 presenta información del comportamiento de los subsistemas donde la sangre fluye, existen zonas donde las mediciones de velocidad y presión se encuentran desfasadas una con respecto a la otra como en la arteria subclavia, mientras que en las arterias sin nombre (siendo las más comunes) la velocidad de la sangre parece ser mínima durante la diástole mientras que la presión sigue mostrando mediciones mayores a las tomadas inicialmente.

Por otro lado, debe observarse que la figura 1.4 justifica el estudio por zonas del flujo sanguíneo, debido a que cada rama del cuerpo no sólo presenta una gráfica de velocidad diferente sino también de presión diferente, lo que lleva a suponer que existen distintos gradientes de presión en el cuerpo^[3]. Las series de Fourier usadas en éste trabajo representan el gradiente de presión generado por el corazón y el cambio de zona entre la arteria y arteriola los cuales se seleccionan como el caso más común.

En el cuerpo humano y (en el caso estudiado por Ku^[3]) de perros, la presión sanguínea tiene un incremento de alrededor de 20 mmHg en una persona sana comparada con la presión que el ventrículo derecho ejerce (Figura 1.1) para que se lleve a cabo el flujo de la sangre en la zona arterial^[12]. Trabajos como los realizados por Crépeau^[44] y Calvo^[14] se desprecia la contribución elástica de la sangre. Dichos trabajos justifican la elevación de la presión por medio de la elasticidad de las arterias, sin embargo, aunque dicho sistema funcione en regiones cercanas al corazón no está justificado en las regiones entre la arteriola y los capilares, pues por su constitución, la elasticidad que tienen es despreciable^[11].

El modo de comprobar que la solución del sistema a resolver puede tener una alta relación con lo que ocurre en la naturaleza es por medio de la presión medida por medio de la diferencia de presiones en la interfaz de los distintos fluidos.

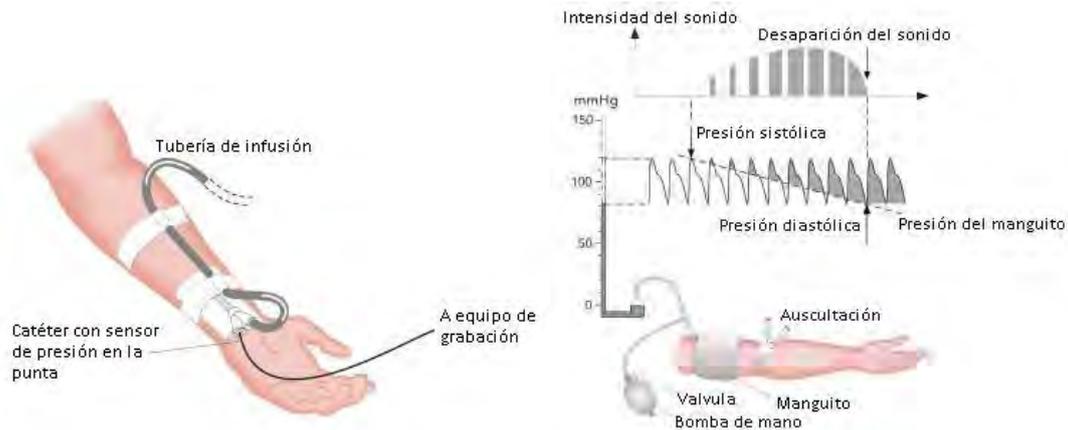


Figura 1.5.- Distintas formas de medir la presión sanguínea^[12].

1.3.1. Fluido de Casson.

La ecuación constitutiva de Casson fue la única utilizada para modelar el flujo sanguíneo hasta finales de 1980^[15]. Es una ecuación empírica que considera un esfuerzo de cedencia y un comportamiento pseudoplástico:

$$\underline{\underline{T}}^{1/2} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{T}}_y^{1/2} + s\underline{\underline{D}}^{1/2} \quad (1.1)$$

Donde \underline{T} es el esfuerzo (fuerza aplicada por unidad de área) al que el fluido es sometido, \underline{D} es el tensor de deformación al que el material es sometido. \underline{T}_y es el tensor esfuerzo de cedencia y s un parámetro constante a ser determinado experimentalmente.

El objetivo del fluido de Casson es combinar el comportamiento del fluido plástico de Bingham junto con el comportamiento pseudoplástico descrito por un fluido ley de la potencia fijando $n = 0.5$. De tal forma que se puede interpretar la viscoplasticidad del fluido.

1.4. Efecto Fahreus-Linquist.

Los flujos de dispersiones de sólidos en líquidos observados por Kang y Eringen^[16] presentan un fenómeno llamado “sigma”, donde se observa una separación de fases sólo durante el flujo en tubos capilares^{[17],[18]} que ocurre alrededor de la coordenada radial adimensional $r/R = 0.6$. Este fenómeno consiste en que las partículas suspendidas se acercan al centro del tubo conforme el flujo avanza.

Por otro lado, se sabe que el 40% de la sangre es hematocrito, en promedio, para las personas sin ningún problema de tipo vascular^[12]. La siguiente figura presenta otros casos que, aunque son patológicos, están reportados como enfermedades que influyen en la cantidad de hematocrito:

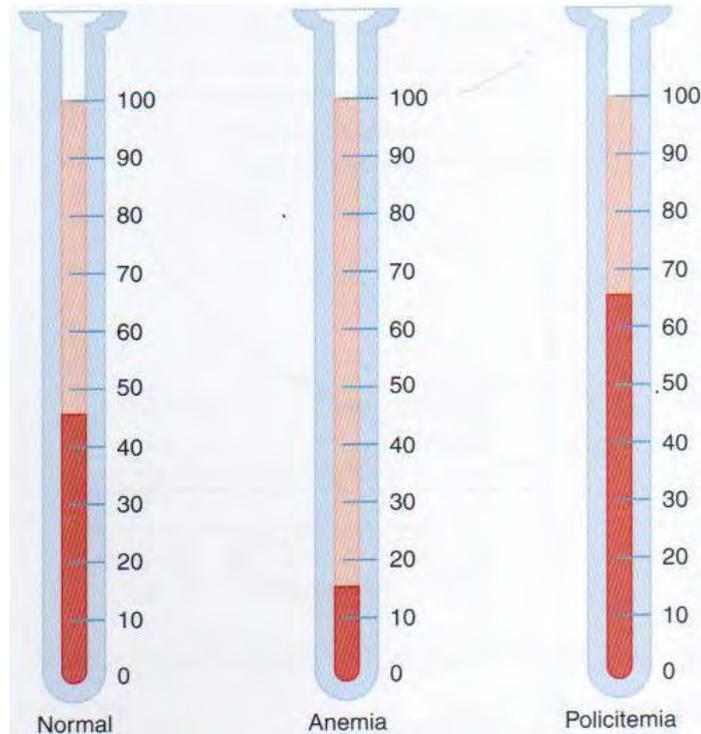


Figura 1.6.- Hematocrito para: persona normal, anémica y policitémica^[12].

Por lo anterior las posiciones radiales adimensionales que correspondan a $r/R = [0.2, 0.4, 0.7]$ resultan de interés, debido a que la cantidad de hematocrito está relacionado con la viscosidad del mismo como se muestra en la figura 1.7.

1.4.1. Teoría de la zona marginal.

La teoría de la zona marginal está basada en los conceptos desarrollados por L. Prandtl en 1904^[19]. Dichos desarrollos explican el flujo del tipo laminar o turbulento de un fluido en un tubo. También demuestran que el flujo en un tubo para el caso del flujo laminar, consiste en una capa límite que se extiende hasta el centro del tubo ($r/R=0$) y el comportamiento del material en la posición central es similar al del fluido ideal en la

condición de que el flujo sea estacionario, sin embargo, la viscosidad también afecta esta zona durante el flujo del estado transitorio^[19].

La teoría de la zona marginal, propuesta por Haynes^[20], que usa las propiedades del fluido newtoniano, aproxima la distancia a la que se presenta la transición de fluido newtoniano a no newtoniano, definiendo así, un radio crítico. También define las condiciones de frontera para el flujo en las dos zonas.

Para usar esta teoría se debe conocer el límite de la misma, pues a valores tales que $H \geq 0.6$ no es posible usar la ecuación dada por Charm y Kurland^[21] y no permite saber el tamaño del radio al no tener, al menos, una certeza del 10%. Las ecuaciones propuestas por los autores anteriores son:

$$\mu = \mu_p \frac{1}{1 - \alpha H} \quad (1.2)$$

Los valores que presenta la ecuación (1.2) tienen el siguiente significado; μ_p es la viscosidad del plasma, H corresponde a la concentración de hematocrito presente en la región y el parámetro α tiene la siguiente definición:

$$\alpha = 0.070 \exp \left[2.49H + \frac{1107}{T} \exp(-1.69H) \right] \quad (1.3)$$

Cabe mencionar que en este trabajo no se usarán dichas ecuaciones sino que se plantearán los valores del radio crítico, donde experimentalmente se tiene el valor de la viscosidad^[12].

La razón de no usar las ecuaciones (1.2) y (1.3) es debido a que se conoce la zona donde se lleva a cabo la separación, además de que en el caso de una persona sana, la ecuación resulta inútil debido a que no puede reproducir la viscosidad que corresponde a $\mu(H) = 4$ como se presenta en la siguiente figura.

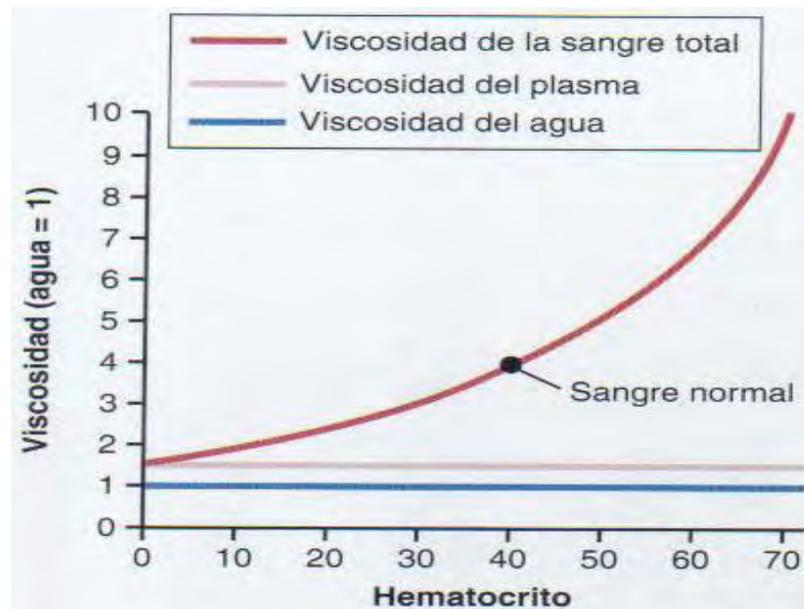


Figura 1.7.- Curva de viscosidad relativa para el plasma y la sangre referida a la viscosidad del agua, donde se observa la dependencia de la viscosidad con respecto a la concentración de hematocrito^[12].

1.4.2. Modelo del cilindro tisular de Krogh.

El simplificar a la arteria, arteriola o vaso capilar como una pared rígida que no presenta contracciones o expansiones del radio máximo del área transversal al flujo ya ha sido planteado. En 1919, Krogh propuso para el estudio del intercambio de oxígeno-dióxido de carbono hacia el músculo un elemento material de forma cilíndrica hecho de un solo tejido^[22]. La utilidad de dicho elemento para el estudio del flujo sanguíneo es simplificar el comportamiento de la pared de la arteriola y a su vez permita interpretar que no hay un cambio considerable correspondiente a aumentos o disminuciones del área de flujo.

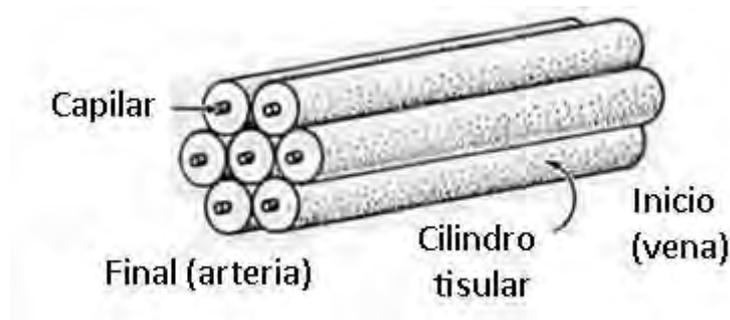


Figura 1.8.- Modelo del tejido tisular de Krogh.

Trabajos recientes^[23] presentan modelos para la transferencia de masa a través del uso de dicha simplificación. La base para aceptar como confiable esta suposición es que las arterias más alejadas del corazón tienen menor elasticidad que las que están cerca^[26]. Por lo anterior se puede predecir que el cilindro tisular es una buena aproximación.

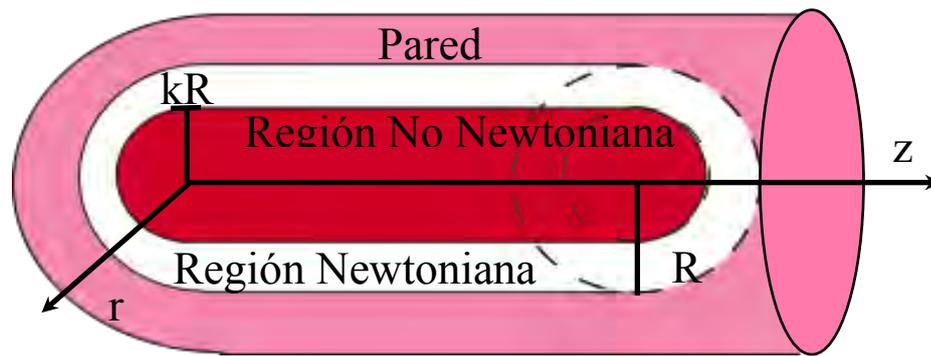


Figura 1.9.- El sistema de de flujo.

En la figura 1.9 se presentan, además del sistema de flujo las coordenadas cilíndricas en las que el sistema se estudia, los valores definidos físicamente, que repercuten en las dimensiones del sistema en estudio.

A continuación se procederá a presentar la información necesaria para describir el sistema mostrado en la figura 1.8 tomando en cuenta los datos expuestos anteriormente. Existen ecuaciones constitutivas en desarrollo para caracterizar a la sangre que por lo general tienen uno de dos posibles enfoques: uno es usando teorías moleculares^[24] y el otro es usando la teoría del continuo^[25]. En la presente obra se toma el segundo enfoque dado que es donde se tiene mayor conocimiento.

2. Ecuaciones constitutivas y aproximaciones:

Ya que se ha observado experimentalmente que hay dos zonas de flujo^[27]; en este trabajo se usará una ecuación constitutiva para cada región; pues se tiene la ventaja de poder usar ecuaciones constitutivas de un fluido viscoelástico y el otro sólo viscoso, lo que posiblemente represente un modelo que describa mejor los efectos elásticos de la sangre que sean considerables.

2.1. Ecuación constitutiva del fluido newtoniano generalizado.

La ecuación constitutiva del fluido newtoniano puede ser generalizada con la condición de que el fluido no presente efectos elásticos. Sin embargo, dicha ecuación generalizada también requiere una mayor complejidad al fluido newtoniano para poder ser descritos, como el fluido plástico de Bingham, el fluido de Casson y los que siguen la ley de la potencia hasta otros mucho más complicados.

La ecuación constitutiva del fluido newtoniano generalizado se expresa mediante la ecuación siguiente^{[28],[29]}:

$$\underline{\underline{T}} = -p\underline{\underline{I}} + \eta \left(II_{\underline{\underline{D}}} \right) \left(\nabla \underline{\underline{v}} + (\nabla \underline{\underline{v}})^T \right) \equiv -p\underline{\underline{I}} + 2\eta \left(II_{\underline{\underline{D}}} \right) \underline{\underline{D}} \quad (2.1)$$

Donde la función viscosidad $\eta\left(\underline{II}_D\right)$ indica que es función de \underline{II}_D , que es el segundo invariante del “tensor rapidez de deformación” o de la parte simétrica del gradiente de velocidades. La figura 1.7 demuestra que η es también función de la concentración del hematocrito, por lo que para cada experimento se escogerá una concentración constante de hematocrito y así simplificar la viscosidad y que ésta sólo sea función de \underline{II}_D tal como se describe en la ecuación (2.1).

2.1.1. Ley de Newton.

La figura 1.6 muestra que el plasma sanguíneo no tiene dependencia con la concentración de hematocrito, a su vez que se ha identificado dicho fluido como un fluido newtoniano^[30]. La ecuación (2.1) puede funcionar como ecuación constitutiva para el plasma, siendo $\eta \neq \eta\left(\underline{II}_D, C_{\text{hematocrito}}\right)$ ^[48] por lo que se usa otra variable que identifique a la viscosidad como un valor constante $\eta = \mu$. A continuación se presenta la ecuación constitutiva para un fluido newtoniano:

$$\underline{T} = -p\underline{I} + 2\mu\underline{D} \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) presenta la viscosidad como una propiedad independiente tanto de la concentración de hematocrito como del tensor “rapidez de deformación”.

2.1.2. Ley de la potencia.

Empíricamente se ha intentado ajustar el comportamiento del tensor de esfuerzos por medio de docenas de ecuaciones constitutivas, donde una de las más simples es la ley de la potencia^[31].

La ecuación que representa el fluido que sigue de la ley de la potencia es:

$$\underline{T} = -p\underline{I} + 2m \left[\sqrt{2tr(\underline{D} \cdot \underline{D})} \right]^{n-1} \underline{D} \quad (2.3)$$

Obsérvese que m y n son parámetros, y sólo m requiere tener unidades $\text{Pa} \cdot \text{s}^n$. Por lo anterior no debe ser confundida con una propiedad física como la viscosidad; aunque sí es posible presentar la viscosidad para la ley de la potencia por medio de la siguiente ecuación:

$$\eta = m \left[\sqrt{2tr(\underline{D} \cdot \underline{D})} \right]^{n-1} \quad (2.4)$$

La ley de la potencia es una buena aproximación para representar la viscosidad de la sangre para la zona en estudio^[2]. La región de flujo de viscosidad constante ayuda a que el flujo no requiera el esfuerzo de cedencia que utiliza el fluido de Casson (1.1).

Al requerir una viscosidad característica η_c para estudiar el sistema se utilizará la siguiente:

$$\eta_c = m \left[\sqrt{2tr(\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{D}})} \right]^{n-1} \Big|_{r=k} = [\text{Pa} \cdot \text{s}^n \cdot \text{s}^{1-n}] = [\text{Pa} \cdot \text{s}] \quad (2.5)$$

2.2. Ecuación constitutiva del fluido de segundo grado modificado.

El trabajo realizado por Massoudi^[7] presenta una ecuación constitutiva para el tensor de esfuerzos que asemeja de manera aproximada el flujo de la sangre. Dicha ecuación es descrita como de segundo grado debido a los términos que incluyen los efectos de los esfuerzos normales:

$$\underline{\underline{T}} = -p\underline{\underline{I}} + \mu\underline{\underline{A}}_1 + \alpha_1\underline{\underline{A}}_2 + \alpha_2\underline{\underline{A}}_1 \cdot \underline{\underline{A}}_1 \quad (2.4)$$

Donde p es la parte del esfuerzo debido a la presión hidrostática, μ representa la propiedad viscosidad y los módulos materiales α_1 y α_2 representan las propiedades que se pueden transformar en esfuerzos normales (una vez definido el flujo al que es sometido el fluido) como es indicado en el trabajo presentado por Massoudi y Vaidya^[32]. De acuerdo a autores como Phan Thien^[33] y Larsson^[34] el fluido de segundo grado contiene al fluido mencionado como fluido de segundo orden. Tanner y Walters^[35] definen que el fluido de segundo orden no debe contener parámetros físicos variables. Así, al sustituir a μ por $\eta(\underline{\underline{II}}_{\underline{\underline{D}}})$ se requiere interpretar la ecuación (2.4) como la de un fluido de segundo grado.

Al observar (2.4) queda claro que las propiedades viscosas sólo incluyen el caso específico del fluido newtoniano donde la viscosidad es constante, por lo que en lugar de hacer uso de μ que no es función del segundo invariante $\mu \neq \mu(I_{\underline{D}})$ se requiere introducir una mejor aproximación de la propiedad viscosa; tal que $\eta = \eta(I_{\underline{D}})$ tal como se explicó en la sección 2.1.1 y 2.1.2:

$$\underline{T} = -p\underline{I} + \eta\underline{A}_1 + \alpha_1\underline{A}_2 + \alpha_2\underline{A}_1 \bullet \underline{A}_1 \quad (2.5)$$

Se considera en este trabajo que no es necesario agregar más efectos a los esfuerzos normales debido a la carencia de pruebas experimentales sobre el fenómeno físico y datos teóricos a reproducir y extender con algún fin definido; pero por otro lado la introducción de los términos $\underline{A}_1 \bullet \underline{A}_1$ y \underline{A}_2 presentan suficientes efectos sobre el tensor de esfuerzos como se presentará posteriormente en la sección 3.2.

Los tensores cinemáticos \underline{A}_1 y \underline{A}_2 han sido presentadas teniendo en mente la notación utilizada por Astarita y Marucci^[36] la cual difiere ligeramente a la que es utilizada generalmente por otros autores con mayor frecuencia como Slattery^[28] y Deen^[29]:

$$\underline{A}_1 = 2\underline{D} = \left[\underline{L} + \underline{L}^T \right] \quad (2.6)$$

$$\underline{\underline{A}}_2 = \frac{D}{Dt} \underline{\underline{A}}_1 + \underline{\underline{A}}_1 \cdot \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{A}}_1 = 2 \left[\frac{D}{Dt} \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{D}} \right] \quad (2.7)$$

En la ecuación (2.7) existe un término dependiente del tiempo por medio de la derivada material, que es la razón de cambio medida con respecto del desplazamiento del fluido^{[28],[29]}. Por razones de claridad en las ecuaciones consecuentes se prefiere simplificar y desarrollar la ecuación (2.5) y las ecuaciones (2.6) y (2.7) en términos del gradiente de velocidad $\underline{\underline{L}} = \nabla \underline{\underline{v}}$ que es definido igual por ambas notaciones.

La propiedad física de la elasticidad del material se encuentra representada por α_1 y α_2 que, exceptuando la derivada material, sólo se encuentra en los términos que contienen el producto interior del tensor de gradientes de velocidades y del tensor rapidez de deformación, que es expresado en la ecuación (2.6).

El desarrollo en términos del gradiente de velocidad $\underline{\underline{L}}$ del término de segundo grado $\underline{\underline{A}}_1 \cdot \underline{\underline{A}}_1$ se puede expresar como:

$$\underline{\underline{A}}_1 \cdot \underline{\underline{A}}_1 = 4 \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{D}} = \left[\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T \right] \cdot \left[\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T \right] \quad (2.8)$$

Al expandir (2.8) en términos de $\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{L}}$ se obtiene la expresión que se usará para presentar el término desarrollado:

$$\underline{\underline{A}}_1 \cdot \underline{\underline{A}}_1 = \left[\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{L}}^T + \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{L}}^T \right] \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) debe tenerse en cuenta para ser comparada con la ecuación (2.7) cuando sea desarrollada en términos del gradiente de velocidad, pues tienen términos en común que serán más claros de identificar en notación de índices.

2.2.1. La derivada convectiva superior.

La información contenida en el tensor cinemático $\underline{\underline{A}}_2$ agrega a la ecuación constitutiva la dependencia del tensor rapidez de deformación $\underline{\underline{D}}$ con respecto al tiempo y, por el otro lado, la velocidad de cambio de la deformación conforme al movimiento del material. Lo que lleva a identificar dos partes de la ecuación, la que no presenta ninguna modificación a los términos de $\underline{\underline{A}}_1 \cdot \underline{\underline{A}}_1$ que contribuyen con los esfuerzos normales y aquellas en las que se adicionan a dicho término. En el caso de que los efectos normales sean incluidos, pueden ocurrir, en algún caso de flujo, que los efectos queden anulados o aumentados, de tal manera que dichos esfuerzos sean desde imperceptibles hasta identificables como los vistos en el efecto de Weissenberg^[31]. La derivada material se presenta en la ecuación (2.10):

$$\frac{D}{Dt} 2\underline{\underline{D}} + 2\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T \cdot 2\underline{\underline{D}} = \frac{D}{Dt} \left[\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T \right] + \left[\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T \right] \cdot \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T \cdot \left[\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T \right] \quad (2.10)$$

En términos del gradiente de velocidad, junto con sus productos interiores, la ecuación (2.10) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{D}{Dt}[\underline{L} + \underline{L}^T] + \underline{L} \cdot \underline{L} + 2\underline{L}^T \cdot \underline{L} + \underline{L}^T \cdot \underline{L}^T = 2\underline{L}^T \cdot \underline{L} + \frac{D}{Dt}[\underline{L} + \underline{L}^T] + \underline{L} \cdot \underline{L} + \underline{L}^T \cdot \underline{L}^T \quad (2.11)$$

Al comparar la ecuación (2.11) con la ecuación presentada en (2.9) se observan algunos términos comunes, pues el único término que no aparece con anterioridad en ninguna

de las cantidades generadas por $\underline{A}_1 \cdot \underline{A}_1$ es $\frac{D}{Dt}[\underline{L} + \underline{L}^T]$.

3. Simplificación de las ecuaciones constitutivas y movimiento:

La ecuación constitutiva para la zona interior del flujo sanguíneo resulta en la siguiente expresión; se presenta en la notación de índices para fácil identificación entre propiedades y componentes:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + mII_{\underline{\underline{D}}}^{n-1}(L_{ij} + L_{ji}) + \alpha_1 \frac{D}{Dt}(L_{ij} + L_{ji}) + (\alpha_1 + \alpha_2)L_{ik}L_{kj} + (2\alpha_1 + \alpha_2)L_{ki}L_{kj} + (\alpha_1 + \alpha_2)L_{ki}L_{jk} + \alpha_2L_{ik}L_{jk} \quad (3.1)$$

En (3.1) se observa la adición de efectos de $\underline{\underline{A}}_2$ y $\underline{\underline{A}}_1 \bullet \underline{\underline{A}}_1$. Las restricciones termodinámicas que deben cumplir α_1 y α_2 , presentadas por Dunn y Fosdick^[37], son $\alpha_1 \geq 0$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, lo que lleva a que (3.1) sea:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + mII_{\underline{\underline{D}}}^{n-1}(L_{ij} + L_{ji}) + \alpha_1 \frac{D}{Dt}(L_{ij} + L_{ji}) + (2\alpha_1 + \alpha_2)L_{ki}L_{kj} + \alpha_2L_{ik}L_{jk} \quad (3.2)$$

Sólo se hacen simplificaciones sobre los términos que contienen el coeficiente $(\alpha_1 + \alpha_2)$ debido a que no se ha dado ninguna información sobre la propiedad que representan. Para poder identificar la información física contenida en la ecuación (3.2) se requiere proponer una expresión del gradiente de velocidades $\underline{\underline{L}}$. Dicho proceso implica la sustitución del gradiente de velocidades. Un caso específico se presenta en la ecuación (3.3).

$$\underline{\underline{L}} = \frac{\partial v_z}{\partial r} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

El trabajo realizado intenta ser lo más general posible, así que sólo hasta que las ecuaciones se hayan adimensionalizado y se hagan suposiciones requeridas para llegar a una simplificación que permita obtener ecuaciones que sean posibles de resolver, se presentarán las ecuaciones que resultan de introducir el tensor de la ecuación constitutiva del fluido general de segundo grado en la ecuación de movimiento.

Como nota complementaria se aclara que la ventaja de trabajar con esta ecuación constitutiva es que, permite de forma relativamente fácil, sustituir el tensor de esfuerzos en la ecuación de movimiento, ya que otro tipo de ecuaciones constitutivas generan sistemas acoplados que no pueden ser sustituidos con facilidad en la ecuación de movimiento.

3.1. Adimensionalización.

Al usar las siguientes definiciones de variables características de las propiedades, tensores y relaciones simétricas, se reescribe de forma más clara el sistema en estudio de forma adimensional, lo que ayuda a que se puedan analizar las ecuaciones y se pueda tener una idea de la solución incluso antes de que sea obtenida:

$$\xi = \frac{r}{R}, \quad \zeta = \frac{z}{R}, \quad l_{ij} = \left[\frac{R}{U_c} \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad \nabla_i^* = \nabla_i R, \quad U_c = \frac{\Pi \rho_c R^2}{\eta_c}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{\eta_c}, \quad \tau_{ij} = T_{ij} \frac{R^2}{\eta_c U_c},$$

$$\alpha_1^* = \frac{U_c}{\eta_c R} \alpha_1, \quad \alpha_2^* = \frac{U_c}{\eta_c R} \alpha_2, \quad \gamma_j^* = \gamma_j \gamma_c, \quad \tau = \omega t, \quad P = \frac{P}{\Pi}, \quad \theta_i = \frac{v_i}{U_c}, \quad N = \eta^* \frac{\rho}{\rho_c} \quad (3.4)$$

Las variables características que se utilizan en el proceso de adimensionalización son:

R Longitud característica referida a la distancia máxima del centro a la pared del área transversal de flujo. Es el valor máximo que toma la coordenada radial r .

U_c Velocidad característica definida como el promedio de la velocidad a través del área de flujo.

Π Presión característica referida a la máxima presión del sistema.

ρ_c Densidad característica referida a la densidad del agua (ver figura 1.6).

γ_c Tensión superficial característica tomada como el máximo de dicha propiedad.

ω Periodo característico referido como el ciclo de bombeo del ventrículo.

N Consiste en la relación entre las densidades y propiedades viscosas por medio de un cociente. La importancia de esta relación será mostrada durante el desarrollo de las soluciones del sistema.

Al introducir en la ecuación (3.2) las definiciones expresadas en (3.4), Se obtiene la forma adimensional del tensor del fluido de segundo grado, en donde, aparece una relación de variables características que está definida como el número de Strouhal.

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + \eta^* (l_{ij} + l_{ji}) + \alpha_1^* \left[\frac{\omega R}{U_c} \right] \frac{D}{Dt} (l_{ij} + l_{ji}) + (2\alpha_1^* + \alpha_2^*) l_{ki} l_{kj} + \alpha_2^* l_{ik} l_{jk} \quad (3.5)$$

El número de Strouhal representa un cociente de tiempos involucrados en el flujo del sistema; el tiempo característico del sistema de flujo está dado por $\frac{R}{U_c}$, mientras el tiempo ω representa el periodo en el que se lleva a cabo el bombeo debido a la diferencia de presiones. En la sección 3.3 se escribe sobre la relación entre este número y otro número adimensional.

Para la ecuación de movimiento, como la muestra Quian^[49] se encuentran tres números adimensionales:

$$(\nabla^* P)_j + \underbrace{\left(\frac{\omega \rho R^2}{\eta^* \eta_c} \right)}_{Wo} \frac{\partial \theta_j}{\partial \tau} + \underbrace{\left(\frac{\rho U_c^2 R^2}{R \eta^* \eta_c U_c} \right)}_{Re} \theta_i \frac{\partial \theta_j}{\partial \xi_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\tau_{ij}) + \underbrace{\frac{U_c \eta^* \eta_c}{\gamma_c}}_{Ca} \gamma_i^* \quad (3.6)$$

Los cuáles son el número de Womersley, el número de Reynolds y el número capilar. En la ecuación (3.6) debajo de cada grupo de variables características se muestra la abreviatura del número adimensional correspondiente.

3.2. Simplificaciones basadas en los números adimensionales:

$$Re = \frac{\rho U_c R}{\eta^* \eta_c}, \quad St = \frac{\omega R}{U_c}, \quad Ca = \frac{U_c \eta^* \eta_c}{\gamma_c}, \quad Wo^{1/2} = R(\omega \rho / \eta)^{1/2} = (Re \cdot St)^{1/2} \quad (3.7)$$

El número de Reynolds, al tener orden de magnitud desde la unidad hasta millares en la zona de estudio de este trabajo, se elimina debido a que el término convectivo no es importante, debido a que el flujo es laminar. El número de Strouhal tiene valores próximos a cero debido a que el tiempo característico en el que se lleva a cabo el proceso de flujo es

menor al periodo entre cada bombeo. El número capilar presenta valores cercanos a cero debido a que el cambio de fluidos está definido en la posición $\xi = k$ y a su vez k no tiene dependencia con respecto a ninguna variable, lo que hace que, de los números presentados en la ecuación (3.6) sólo el número de Womersley tenga relevancia.

Podría parecer que el número de Womersley no debería ser relevante debido a que es una combinación del número de Reynolds y de Strouhal como se presenta en (3.4), sin embargo, de acuerdo con los valores de las propiedades físicas reportadas por Sud y Sekhon^[4] o Tsangaris y Drikakis^[13], el número de Reynolds tiene valores desde 1000 hasta cercanos a 1, mientras que el número de Strouhal presenta variaciones desde 1 hasta 0.1, siendo los segundos valores mostrados los que corresponden con el sistema en estudio, por lo que los valores del número de Womersley son mayores a la unidad (ver ecuaciones 3.7), lo que lo hace relevante para este estudio.

3.3. Simplificaciones apoyadas en el tipo de flujo (flujo cortante).

El flujo expresado en la ecuación (3.3), con las variables adimensionalizadas se expresa a continuación:

$$l = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Es importante tomar en cuenta que no hay dependencia de l_{ij} con el tiempo, por lo que el tercer sumando de la ecuación (3.1) tiene el valor de cero (la derivada parcial del

tensor deformación con respecto al tiempo). Es necesario enfatizar que para no introducir mayor complejidad a la notación, al haber sólo distribución de velocidades en dirección axial, de ahora en adelante se representará por Θ .

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{bmatrix} -P + (2\alpha_1^* + \alpha_2^*) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^2 & 0 & \eta^* \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \\ 0 & -P & 0 \\ \eta^* \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) & 0 & -P + \alpha_2^* \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Ahora que se tiene un tipo de flujo es posible usar τ_{ij} en la ecuación de movimiento, sin embargo también se tienen simplificaciones en estas ecuaciones debido al proceso de flujo, pues el término convectivo de las ecuaciones de movimiento puede ser eliminado.

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi \tau_{\xi\xi}) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \tau_{\xi\xi} \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial P}{\partial \Theta} = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} + W_0 \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi \tau_{\xi\zeta}) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \tau_{\xi\zeta} \quad (3.12)$$

La ecuación (3.11) indica que la presión en dirección Θ es constante. Asimismo, no indica mayor información sobre el sistema, mientras que las ecuaciones (3.10) y (3.12) indican la relación entre los gradientes de presión, los esfuerzos normales, el esfuerzo

cortante y los cambios de velocidad con respecto al tiempo. Por lo anterior, se infiere que la ecuación (3.11) no es relevante para este estudio.

La ecuación de movimiento, a partir de (3.12), sustituyendo los valores del esfuerzo se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi (2\alpha_1^* + \alpha_2^*) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\eta^* \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \right] \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} + \text{Wo} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\eta^* \xi \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\alpha_2^* \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^2 \right] \quad (3.14)$$

De donde, al mantener los términos distintos de cero las ecuaciones presentadas en (3.13) y (3.14), se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi (2\alpha_1^* + \alpha_2^*) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^2 \right] \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} + \text{Wo} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\eta^* \xi \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \right] \quad (3.16)$$

Para el caso donde la viscosidad η^* se cambia por la ley de la potencia adimensional, como resultado se obtienen las ecuaciones que representan a la región de flujo interior del sistema, se indicará que es la primera región por medio del subíndice 1:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi (2\alpha_1^* + \alpha_2^*) \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} \right)^2 \right] \quad (3.17)$$

$$W_{O_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} \right)^n \right] \quad (3.18)$$

Para el fluido newtoniano, que es la región de flujo exterior, será representada por medio del subíndice 2, las ecuaciones (3.17) y (3.18) resultan:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = 0 \quad (3.19)$$

$$W_{O_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} + \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \frac{N}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \right) \right] \quad (3.20)$$

Para el fluido newtoniano se puede hacer un desarrollo paralelo al anterior, sin embargo, Se necesitan condiciones de frontera que enlacen el fluido exterior con el fluido interior de las secciones de flujo; matemáticamente, las ecuaciones que representan el fluido newtoniano con las ecuaciones que representan al fluido no newtoniano se entrelazan por medio de las condiciones de frontera; a continuación se presentan todas las condiciones que requiere cumplir el sistema ya adimensionalizadas:

Condición inicial:

$$\text{En } \tau = 0, \quad \text{para todo } \xi \quad \theta_1 = \theta_2 = 0 \quad (3.21)$$

Condiciones de frontera:

I. Condición de simetría en el centro de la sección de flujo:

$$\text{Para todo } \tau \geq 0 \quad \text{para } \xi = 0 \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} = 0 \quad (3.22)$$

II. Condición de balance de esfuerzo cortante en la zona interfacial de los fluidos:

$$\text{Para todo } \tau \geq 0 \quad \text{para } \xi = k \quad \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=k}^n = N \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi=k} \quad (3.23)$$

III. Condiciones de balance de velocidad en la zona interfacial de los fluidos:

$$\text{Para todo } \tau \geq 0 \quad \text{para } \xi = k \quad \theta_1 \Big|_{\xi=k} = \theta_2 \Big|_{\xi=k} \quad (3.24)$$

IV. Condición de adherencia en la pared de la sección de flujo:

$$\text{Para todo } \tau \geq 0 \quad \text{para } \xi = 1 \quad \theta_2|_{\xi=1} = 0 \quad (3.25)$$

Con las condiciones anteriores ya se tiene un flujo definido física y matemáticamente, pues todas las condiciones, expresadas desde (3.19) hasta (3.23), aseguran que sean descritas las propiedades físicas tanto de los fluidos como del flujo.

4. Evaluación de las ecuaciones:

Los órdenes de magnitud o bien los valores característicos de los números adimensionales presentados anteriormente llevan a simplificaciones de las ecuaciones de movimiento. También debe tomarse en cuenta que el uso de la ley de la potencia es para simplificar el comportamiento viscoso del hematocrito, y ello lleva a que la manera en que cada número adimensional afecta a las distribuciones de velocidades, esfuerzos y presión, puedan variar.

Como se expuso en la sección 3.3, el simple hecho de acercar a cero a los números adimensionales lleva a que las ecuaciones se simplifiquen. Entonces si se le agregan a dichas simplificaciones otras más, puede que la solución obtenida de lo anterior no sea válida; como ejemplo, si el número de Womersley tuviese el valor de cero, entonces no habría cambios de velocidad a través del tiempo y el flujo podría ser descrito por la distribución en estado pseudoestacionario^[29].

4.1. Estado estacionario:

El flujo sanguíneo en las arterias, arteriolas y hasta flujos capilares está identificado como un flujo donde el tiempo cuenta como un factor fundamental, tanto en la identificación de los fenómenos que se presentan, como en el cambio de propiedades de la materia que fluye. Sin embargo, las primeras aproximaciones, tanto analíticas como numéricas, llevan a identificar la necesidad de que un modelo más fácil apoye a otro modelo de mayor complejidad; con lo anterior, se expresa que un modelo que describa mejor lo que ocurre en

la naturaleza debe también poder describir adecuadamente lo que un modelo más sencillo puede explicar de ella.

Al tomar las ecuaciones (3.15) a la (3.18) y aplicar la condición del flujo del estado estacionario las ecuaciones que no se ven afectadas de forma directa son (3.15) y (3.17), pues la dependencia con el tiempo se encuentra implícita debido a que los cambios de la rapidez de deformación afectan la diferencia de presiones expresada en (3.15), sin embargo, dicho tema será tratado a fondo cuando se aprecien tales diferencias.

Las ecuaciones que sí presentan cambios en el estado estacionario resultan, para la región no newtoniana de flujo:

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} \right)^n \right] \quad (4.1)$$

Mientras que para la región newtoniana de flujo:

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = \frac{N}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \right) \right] \quad (4.2)$$

Ya que en la región interior de flujo, que es donde se presenta el fluido no newtoniano, se requiere que cumpla con la condición de simetría exhibida en la ecuación (3.22); que lleva a obtener la siguiente distribución para la primera zona:

$$\tau_{\xi\xi}^I = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial \zeta} \xi \quad (4.3)$$

La evaluación del esfuerzo cortante en la zona newtoniana requiere conocer el valor del esfuerzo en la interfaz fluido-fluido. Haciendo la evaluación en $\xi = k$ de (4.3) y utilizando la condición de continuidad en los esfuerzos para la posición radial adimensional antes mencionada expresada en (3.23) se obtiene la distribución de esfuerzos de la zona newtoniana.

Mientras que la segunda zona tiene presentes los efectos del cociente de propiedades, cabe resaltar que el efecto debido a las relaciones físicas incluidas en N , de acuerdo a su valor, puede aumentar o disminuir el esfuerzo cortante en la pared.

$$\tau_{\xi\xi}^{II} = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial \zeta} \left[\frac{k^2 (N-1) + \xi^2}{\xi} \right] \quad (4.4)$$

Puede observarse que el denominador del término en corchetes de la ecuación (4.4) incluye la distancia radial adimensional, lo que lleva a que la distribución no sea una línea recta como en el caso del esfuerzo presentado en (4.3). Owen^[38] presenta trabajos experimentales donde se identifica dicho fenómeno. Por otro lado, la repentina diferencia de un valor esperado por una relación lineal y el dado por la ecuación (4.4) también explica fenómenos observados por Pyke et al.^[39], donde muestra cómo para el mismo flujo volumétrico, si se reduce el área transversal, para asegurar que exista el efecto de Fahraeus-Linquist, el esfuerzo cortante aumenta más que el estimado por (4.3).

Para obtener las distribuciones de velocidades también se debe seguir un orden de solución; se requiere conocer la velocidad de la región de flujo exterior para evaluar la región de flujo interior; para esto se sustituye en (4.4) la ecuación constitutiva adimensional para el fluido newtoniano $\tau''_{\xi\xi} = -N \frac{d\theta_2}{d\xi}$ y se obtiene la distribución de velocidades para la región newtoniana. Para evaluar la constante generada por la integración de $\frac{d\theta_2}{d\xi}$ se usa la condición de frontera de adherencia en la pared del cilindro dada en la ecuación (3.25) y así se obtiene la ecuación (4.6). La ecuación (4.5) requiere la sustitución del esfuerzo cortante en la zona newtoniana de flujo, que adimensionalmente es $\tau'_{\xi\xi} = \left(-\frac{d\theta_1}{d\xi}\right)^n$ y el uso de la distribución de la velocidad en la zona newtoniana en la frontera fluido-fluido, ya que la condición de frontera presentada en (3.24) indica que la distribución de velocidades es continua a través de ambas regiones de flujo.

La distribución de velocidades por zonas resulta:

Para la región interior:

$$\theta_1 = \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{2} \frac{dP}{d\xi} \right)^{\frac{1}{n}} \left(k^{\frac{1}{n+1}} - \xi^{\frac{1}{n+1}} \right) + \frac{1}{2N} \frac{dP}{d\xi} \left[k^2 (1-N) \ln k + \frac{1}{2} (1-k^2) \right] \quad (4.5)$$

Y para la región exterior:

$$\theta_2 = \frac{1}{2N} \frac{dP}{d\xi} \left[\frac{1}{2} (1-\xi^2) + (1-N) k^2 \ln(\xi) \right] \quad (4.6)$$

De la ecuación (4.5) se requiere obtener una distribución del gradiente de velocidad en la zona interior para evaluar la ecuación (3.15). También puede ser obtenida por medio de (4.3) sustituyendo el valor de $\tau_{\xi\zeta}^I$ por el de su equivalente expresado anteriormente.

$$\frac{d\theta_1}{d\xi} = - \left(\frac{1}{2} \frac{dP}{d\zeta} \xi \right)^{\frac{1}{n}} \quad (4.7)$$

Como una propuesta para la evaluación de la presión, se usará como aproximación, debido a su significado físico y su simpleza como respuesta elástica de un sistema, una ecuación que se asemeja a la ley de Trouton.

De acuerdo a Macosko^[40], Trouton en 1906, por medio de sus experimentos encontró que la relación entre la viscosidad y la elasticidad de un material está dado por una relación proporcional de 3 como se muestra a continuación en la ecuación (4.8).

$$\alpha_1^* = 3\eta^* \frac{U_c}{R} \quad (4.8)$$

Se toma el valor de la viscosidad característica no sólo por ser la definida como tal, sino porque también se encuentra exactamente en la interfaz de ambos fluidos. Esto no sólo se hace por ser una primera propuesta, sino también por la carencia de datos experimentales que permitan proponer un comportamiento elástico^[7].

A partir de la ecuación (3.17), al integrarse la igualdad resulta la siguiente ecuación:

$$\int \partial P = \int \frac{1}{\xi} \partial \left[\xi (2\alpha_1^* + \alpha_2^*) \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} \right)^2 \right] \quad (4.9)$$

La parte izquierda de la ecuación (4.9) sólo requiere la sustitución de la diferencia de presiones, pues en $\xi = 0$ la presión está definida, llámese P_0 , mientras que por otro lado, el máximo valor que puede tomar ξ es el de la unidad. A continuación se presenta el análisis con respecto al cambio de la presión debido al efecto elástico del material.

$$P - P_0 = \alpha_1 \frac{n+2}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{dP}{d\xi} \xi \right)^{\frac{2}{n}} \quad (4.10)$$

En la interfaz de las regiones de flujo se debe cumplir con $\frac{dP}{d\xi} = 0$ dado que el fluido newtoniano no presenta esfuerzos normales, por lo anterior se puede describir que $P|_{\xi=k} - P|_{\xi>k} = 0$ y para ello se requiere que la presión en la zona newtoniana sea:

$$P|_{\xi=k} = \alpha_1 \frac{n+2}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{dP}{d\xi} k \right)^{\frac{2}{n}} + P_0 \quad (4.11)$$

4.1.1. Flujo de dos fluidos newtonianos.

Supóngase el caso del flujo de dos fluidos newtonianos, ambos descritos por las ecuaciones (4.2) hasta (4.6), respectivamente, con las siguientes condiciones: $n = 1$, que

significa que no existe pseudoplasticidad y asegura que el comportamiento de la viscosidad no depende del segundo invariante al ser representada por μ , que significa que el gradiente de velocidad no afecta la viscosidad del fluido y eso lo convierte en un fluido newtoniano. La ecuación (4.5) resulta:

$$\theta_1 = \frac{1}{4N} \frac{dP}{d\zeta} \left\{ \left[N(k^2 - \xi^2) + 1 \right] - k^2 \left[1 + 2(1-N) \ln k \right] \right\} \quad (4.12)$$

El número adimensional que define el que haya dos fluidos o uno, es el coeficiente de propiedades (viscosidad y densidad) de los fluidos N junto con el valor de n en la ley de la potencia. A continuación se presentan los efectos sobre la distribución de velocidades y del esfuerzo cortante en el estado estacionario.

4.1.1.1. Efectos de la variación gradiente de presión.

Ya que el gradiente de presión debe permanecer constante durante toda la sección estudiada, se puede suponer que matemáticamente, se comporta como un parámetro directamente proporcional; tanto con el esfuerzo como con la velocidad para ambas zonas de flujo.

En la figura 4.1 se muestra el efecto que tiene el gradiente de presión sobre la distribución de velocidad. Se observa claramente que las diferencias entre la región de flujo interior y exterior no son tan fáciles de identificar mientras el gradiente en estudio es 0.3, mientras que para casos de 0.45 se observa una diferencia de comportamientos entre las zonas interior y exterior del sistema.

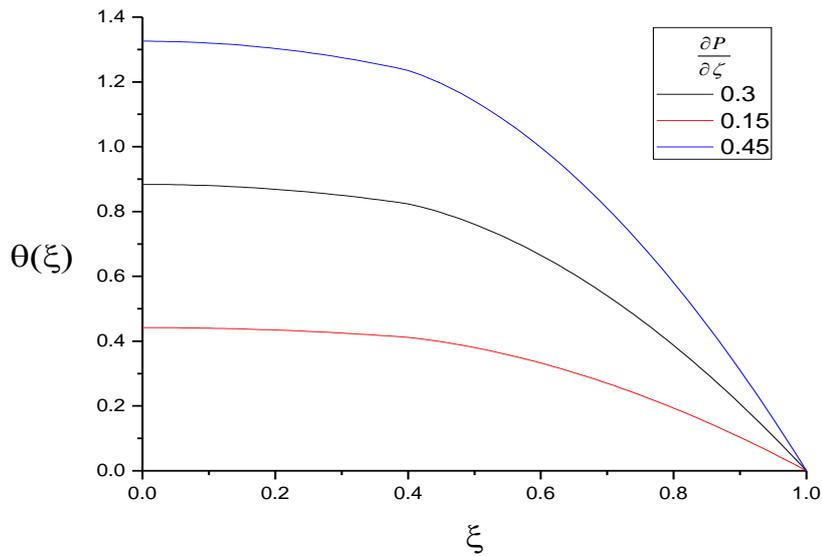


Figura 4.1.- Distribución de velocidades en estado estacionario generadas por distintos valores del gradiente de presión para $N = 1.25$.

Por otro lado, el esfuerzo cortante, también es directamente proporcional al gradiente de presión, aunque es más fácil identificar la interfase entre los fluidos (coordenada radial definida como k). Para la figura 4.2, dicha posición se encuentra en 0.4, que es donde súbitamente aumenta el esfuerzo comparado con la región de flujo interior, además de que al aumentar $\frac{\partial P}{\partial \xi}$, también aumenta el esfuerzo ejercido en la zona exterior, lo que resulta como un esfuerzo en la pared mayor.

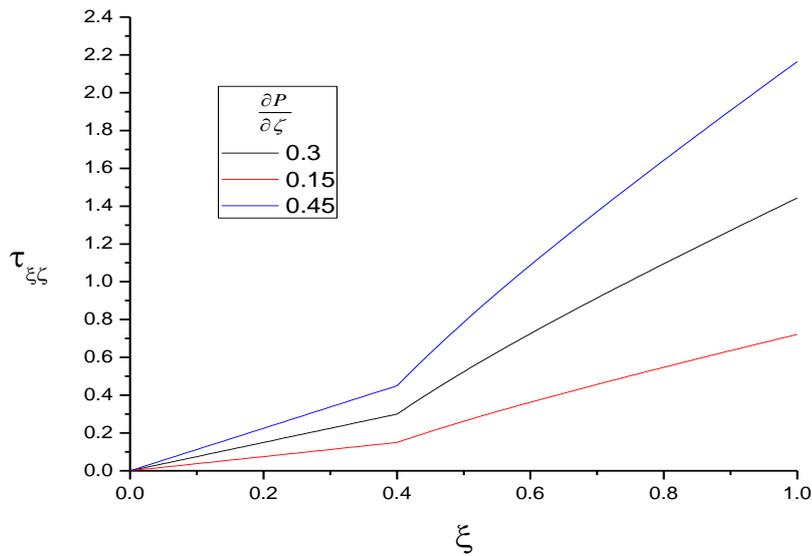


Figura 4.2.- Distribución de esfuerzos cortantes para diferentes gradientes de presión para $N = 1.25$.

El flujo volumétrico, está dado por el área transversal de flujo por el promedio de la velocidad de dicho flujo:

$$Q = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^k \theta_1 r dr + \int_k^1 \theta_2 r dr \right] d\Theta \quad (4.13)$$

Ya que el flujo volumétrico depende de la velocidad tal como lo indica (4.13), también tiene una relación directamente proporcional con la variación del gradiente de presión. Esto no es alguna sorpresa en absoluto debido a que no sólo es un factor físico, sino que matemáticamente es un parámetro tal que multiplica tanto al perfil de velocidades al estar presente en (4.12) y (4.6), como al perfil de esfuerzos cortantes como se muestra en las ecuaciones (4.3) y (4.4).

Se presentan los siguientes valores de flujo volumétrico junto con el esfuerzo en la pared en estado estacionario para los diferentes valores de gradiente de presión:

$\frac{\partial P}{\partial \zeta}$	Q	$\tau_{\xi\xi} \Big _{\xi=1}$
0.15	0.12579	0.21337
0.3	0.25158	0.42674
0.45	0.37737	0.64011

Tabla 2.- Flujo volumétrico y esfuerzo cortante generados por distintas magnitudes del gradiente de presión constante.

La importancia de los valores reportados en la tabla 2 es que en ocasiones, cuando sólo se requiere determinar estos valores, se pueden utilizar métodos aproximados y comparar esos resultados con los presentados en este trabajo.

4.1.1.2. Efectos de la variación del cociente de propiedades.

Por otro lado, con la presión fija, es posible centrarse en la relación del cociente de propiedades N que indica qué zona, dependiendo de su valor, presenta mayor resistencia:

- $\lim_{N \rightarrow 0} N$ presenta el caso tal que la viscosidad y densidad del fluido interior es mucho mayor que la viscosidad y densidad del fluido exterior. Dicho caso no puede llevarse a cabo en la naturaleza debido a que el fluido que se presenta en el interior resulta ser el menos denso aunque más viscoso, mientras que el

fluido exterior es mucho más denso y menos viscoso (véanse los datos presentados en la sección 1.4).

- $\lim_{N \rightarrow 1} N$ presenta que las propiedades viscosas y de densidad son muy parecidas, lo que hace que las propiedades tiendan a desvanecerse y el sistema se comporte como un solo fluido, que es el caso cuando $N = 1$. El usar el valor anterior garantiza que sólo existe una sola zona y lleva a que con sólo una ecuación para la distribución de velocidad y otra para la distribución del esfuerzo sean suficientes para describir todo el sistema.

$$\tau_{\xi\xi}^I = \tau_{\xi\xi}^{II} = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial \zeta} \xi \quad (4.14)$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{4} \frac{dP}{d\zeta} (1 - \xi^2) \quad (4.15)$$

- $\lim_{N \rightarrow \infty} N$ presenta el caso contrario a $\lim_{N \rightarrow 0} N$ y por ello que es el caso más fácil de encontrar en el organismo. La viscosidad y densidad del fluido exterior son mayores que la viscosidad y densidad del fluido interior. Por lo anterior, éste caso presenta puntos de interés tanto en los efectos sobre la velocidad e cada zona y con el esfuerzo cortante.

Ya que en la condición de frontera (3.21) se muestra que N reside no sólo en la zona exterior del flujo, pues al estar también en la sección interfacial gracias a la ecuación indicada, está ligada a la zona interior gracias a la relación interfacial de los esfuerzos.

A continuación, las figuras 4.3 y 4.4 presentan la evaluación de las ecuaciones (4.12) ó (4.15) para la distribución de velocidad en el fluido exterior y para el fluido exterior la ecuación (4.6) ó (4.15) de acuerdo a distintos números de N de acuerdo al caso. Como se mencionó anteriormente, el valor de $N = 1$ corresponde al de un solo fluido newtoniano.

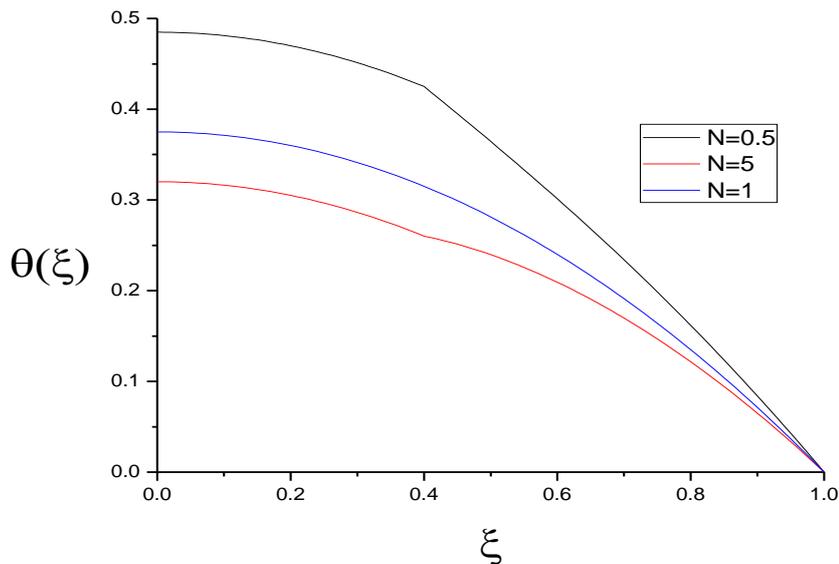


Figura 4.3.- Distribución de velocidades para distintos valores del coeficiente de propiedades

para $k = 0.4$ y $\frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0.3$.

En la figura 4.3 se identifica la importancia de la información física contenida en N para la distribución de velocidades, ya que no sólo existe, entre N y θ , una relación inversamente proporcional. También dependiendo del valor del coeficiente de propiedades, el comportamiento de la zona exterior tiene mayor parecido con el de un fluido newtoniano.

El comportamiento de $\tau_{\xi\zeta}$ también se ve afectado por el coeficiente de propiedades en la zona exterior, aunque, conforme N aumenta, también lo hace el esfuerzo, debido a que se dificulta el transporte de cantidad de movimiento. Debido a que la viscosidad y densidad del fluido exterior son usadas como la información característica del sistema, el sistema no muestra cambios en la zona del fluido interior. Toda esta información se encuentra en la figura 4.4.

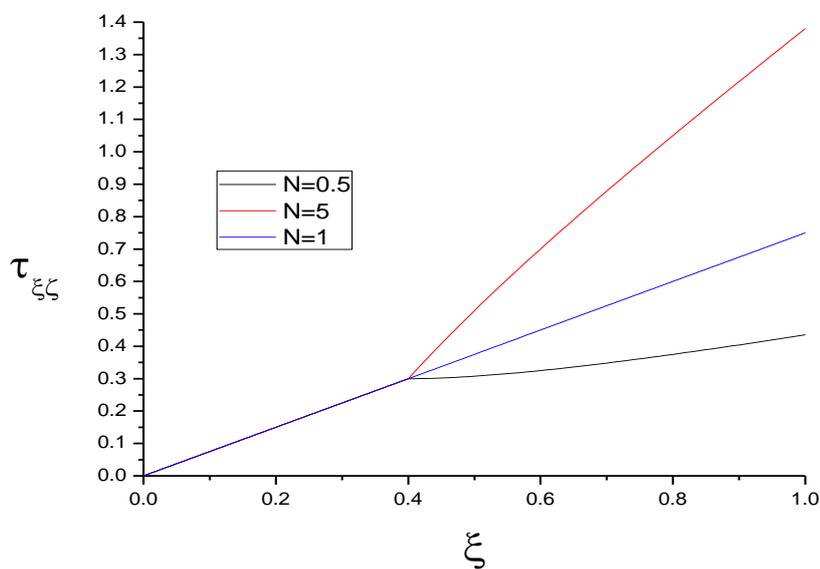


Figura 4.4.- Distribución de esfuerzos cortantes para distintos valores del coeficiente de propiedades para $k = 0.4$ y $\frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0.3$.

4.1.2. Flujo del fluido de segundo grado envuelto en el fluido newtoniano.

El estado estacionario para el conjunto del fluido de segundo grado envuelto en un fluido newtoniano tiene mucha importancia para este estudio dado que cuando no hay cambios de velocidad, en el gradiente de presión o de las propiedades de los fluidos que son

transportados, dicho estado representa la dependencia con respecto al radio adimensional de la distribución de velocidad; que a su vez, si se impone un gradiente de presión variable que no consiga influir lo suficiente en el término que representa los efectos acumulativos en el balance de la cantidad de movimiento, se demostrará de acuerdo a lo reportado por Deen^[29] que con multiplicar dicho gradiente con la mencionada distribución lleva a la solución del sistema en estado pseudo-estacionario.

4.1.2.1. Efectos de la variación gradiente de presión.

Al identificar que el efecto encontrado en las ecuaciones de los dos fluidos newtonianos es el mismo que el del sistema ahora investigado; adecuadamente el efecto es directamente proporcional a la distribución de velocidad y el esfuerzo cortante. Ya que no es posible tener en este sistema analizado con diferentes gradientes de presión al mismo tiempo no se puede observar si a diferentes presiones en las regiones de flujo se pueden presentar efectos diferentes a los observados en este punto del trabajo.

Cuando se proceda con el análisis transitorio se profundizará más en la idea de los diferentes gradientes de presión y cómo evaluarlos para tener una explicación física con respecto a lo que ocurre en la naturaleza.

4.1.2.2. Efectos de la variación del cociente de propiedades.

Antes de ver el coeficiente de propiedades se debe primero tener en cuenta, el efecto de n , pues si dicho parámetro tiene el valor de $n = 1$, se obtienen las soluciones y el análisis presentado en 4.1.1.2. Por otro lado, para intereses de este trabajo, en cuanto a su parte

viscosa se refiere, la sangre es pseudoplástica, lo que indica que $0 < n < 1$. Por otro lado, en la ecuación de Casson, se presenta el valor de $n = 0.5$. S.N. Majhi, y L. Usha^[41] usan el valor de $n = 0.25$, por lo que el valor de n debe situarse entre $0.25 \leq n \leq 0.5$. Ello justificaría que en ciertas zonas el fluido de Casson sea capaz de modelar el flujo sanguíneo, mientras que en zonas diferentes se encuentre que el comportamiento de la sangre se diferencie más del comportamiento newtoniano.

Ya que $n \neq 1$ no es aceptable para la distribución de velocidades en este punto, incluso si $N = 1$, que se reproduzca el caso tal que sólo se presente el flujo de un fluido newtoniano en un tubo; lo que indica que en este caso, porque trabajos desarrollados por Reiner et al.^[42], con un fluido de Casson son válidos, incluso si la solución es desarrollada por métodos perturbativos como en el caso desarrollado por Rohlf^[43].

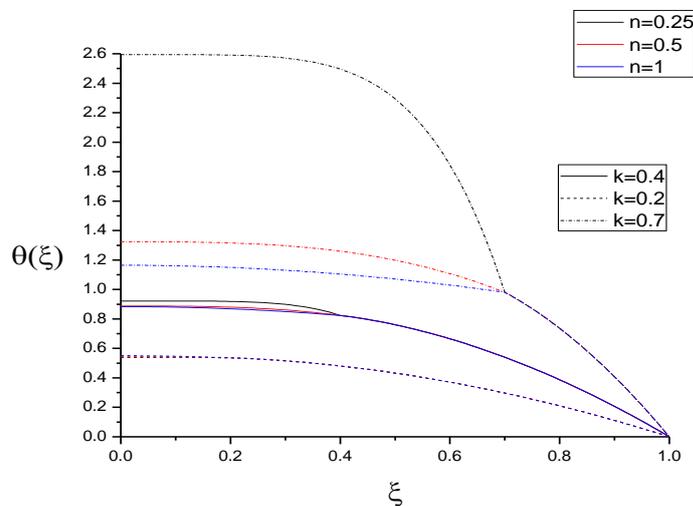


Figura 4.5.- Distribución de velocidades para distintos valores de k para un gradiente de

presión constante $\frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0.3$.

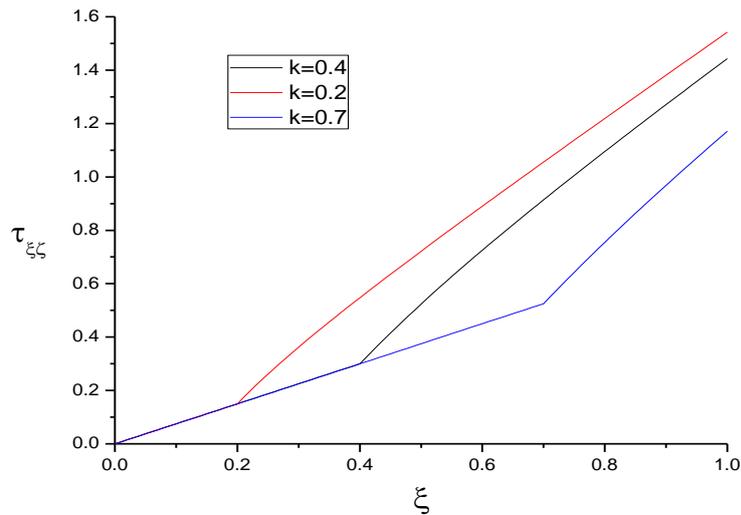


Figura 4.6.- Distribución de esfuerzos para distintos valores de k y un gradiente constante

$$\text{de } \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0.3.$$

Las figuras 4.5 y 4.6 muestran que los efectos del parámetro n sólo se presentan en el perfil de velocidad; las ecuaciones (4.3) y (4.4) muestran que el esfuerzo cortante no tiene cambios con el parámetro, mientras que la distribución de velocidades demuestran tener una alta dependencia con n . La importancia del valor de k está también presentado en estas figuras, ya que conforme aumenta se observa que la región no newtoniana cobra importancia y el fenómeno de Fahraeus-Lindquist se vuelve más fácil de identificar en dichas figuras.

4.2. Estado transitorio:

Antes de entrar al estudio y solución del fenómeno que lleva por nombre Fahraeus-Linquist, se recomienda tener en cuenta detalles del flujo en un tubo que inicia su movimiento; como también los conceptos matemáticos que ello implica^[29].

Con las herramientas matemáticas por ahora conocidas, la solución analítica para el sistema de flujo donde un fluido de segundo grado, en el centro del área de flujo, y un fluido newtoniano que envuelve al fluido no newtoniano no es posible de obtener, debido a que se requiere elaborar la solución del problema de Sturm-Liouville para un problema no lineal, donde se determina la resistencia con respecto al tiempo gracias a los valores propios que dicha solución debe generar.

4.2.1. Flujo de dos fluidos newtonianos.

A continuación, para tener una referencia del comportamiento del flujo de dos fluidos separados en un radio adimensional definido, se presenta el desarrollo de la solución de dos fluidos newtonianos. Así, al desarrollar una solución analítica para este problema, se obtiene un criterio que ayuda a decidir cuál es el mínimo número de nodos a utilizar en la solución numérica requerida para obtener la distribución de velocidades, el esfuerzo y las propiedades consecuentes del flujo de un fluido no newtoniano envuelto por uno newtoniano.

Las ecuaciones que representan el flujo de dos fluidos newtonianos son muy similares, sin embargo, la diferencia entre ellas es el número de Womersley y el cociente de propiedades que representa las diferencias entre una fase y otra.

Para la región de flujo interior:

$$Wo_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} \right) \right] \quad (4.16)$$

Mientras que para el fluido que envuelve al representado por la condición anterior:

$$Wo_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} + \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \frac{N}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \right) \right] \quad (4.17)$$

La solución de dichas ecuaciones se puede tratar por medio de la transformación de Fourier finita presentada en la bibliografía^[29]. Dicho método de solución consiste en separar el problema en dos partes; la información que depende del tiempo y la posición radial. Para separar las ecuaciones (4.16) y (4.17) se requiere también proponer la dependencia del gradiente de presión en la dirección axial con respecto del tiempo.

La ecuación (4.18) tiene un término dependiente del tiempo; el cual puede ser intercambiado por una función que se represente al gradiente de presión en dirección del flujo.

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = A + \Phi(\tau) \quad (4.18)$$

La función $\Phi(\tau)$ representa en (4.18) el efecto variable de la presión mientras que A representa la magnitud constante del gradiente de presión. Las funciones seno y coseno han sido probadas en diversos trabajos como los de Sud y Sekon^[8], Chaturani y Wassf^[5] e incluso el desarrollado por Massoudi^[7]. Lo encontrado en dichos artículos será expuesto cuando se analice en los siguientes puntos.

La aportación de esta obra consiste en cambiar la función seno o coseno por una función que represente con mayor exactitud el análisis de la presión medida radialmente; así

que se confirmará si es relevante cambiar el gradiente de presión axial o si realmente es una buena aproximación el sustituir el gradiente de presión variable por una función trigonométrica con dependencia del tiempo.

$$\theta_1(\xi, \tau) = \sum_{h=1}^{\infty} \theta_{1h}(\xi) \theta_{1h}(\tau) \quad (4.19)$$

$$\theta_2(\xi, \tau) = \sum_{h=1}^{\infty} \theta_{2h}(\xi) \theta_{2h}(\tau) \quad (4.20)$$

El procedimiento para obtener la solución de las distribuciones de velocidades de ambas zonas requiere una solución por partes; lo que significa obtener la solución de $\theta_{1h}(\xi)$ y $\theta_{1h}(\tau)$ así como de sus contrapartes para la región exterior de flujo. Las ecuaciones que resultan de separar en partes son ecuaciones diferenciales ordinarias, sin embargo, deben sumarse desde $h=1$ hasta $h \rightarrow \infty$, lo que significa que se requiere también encontrar el mínimo de ecuaciones necesarias para obtener una evaluación que sea aproximada a sumar todas las h .

La zona interior del sistema queda representada por:

$$Wo_1 \frac{d\theta_{1h}(\tau)}{d\tau} + \lambda_{1h}^2 \theta_{1h}(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{\lambda_{1h}} \frac{\partial P}{\partial \xi} \quad (4.21)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left[\xi \left(\frac{d\theta_{1h}(\xi)}{d\xi} \right) \right] = -\lambda_{1h}^2 \xi \theta_{1h}(\xi) \quad (4.22)$$

Mientras que la zona exterior está descrita por:

$$Wo_2 \frac{d\theta_{2h}(\tau)}{d\tau} + \lambda_{2h}^2 \theta_{2h}(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{\lambda_{2h}} \frac{\partial P}{\partial \zeta} \quad (4.23)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left[\xi \left(\frac{d\theta_{2h}(\xi)}{d\xi} \right) \right] = -\frac{\lambda_{2h}^2}{N} \xi \theta_{2h}(\xi) \quad (4.24)$$

Las soluciones de (4.21) y (4.23) requieren del uso de la condición inicial (3.21).
 Recuérdese que la condición que indica la velocidad al inicio del fenómeno es aplicable a todo el sistema y por eso es válido en toda la región de flujo a diferencia de las condiciones de frontera.

$$\theta_{1h}(\tau) = e^{-\frac{\lambda_{1h}^2}{Wo_1} \tau} \left[\frac{\sqrt{2}}{\lambda_1 Wo_1} \int e^{\frac{\lambda_{1h}^2}{Wo_1} \tau} \frac{\partial P}{\partial \zeta} d\tau \right] \quad (4.25)$$

Mientras que para la segunda zona de flujo se obtiene:

$$\theta_{2h}(\tau) = e^{-\frac{\lambda_{2h}^2}{Wo_2} \tau} \left[\frac{\sqrt{2}}{\lambda_2 Wo_2} \int e^{\frac{\lambda_{2h}^2}{Wo_2} \tau} \frac{\partial P}{\partial \zeta} d\tau \right] \quad (4.26)$$

Por otro lado la solución de (4.22) y (4.25) junto con (4.23) y (4.26) requieren de la imposición del término $\frac{\partial P}{\partial \xi}$, que tiene dependencia con el tiempo y es necesario expresarlo como una función matemática.

Para el desarrollo de las ecuaciones (4.22) y (4.24) se presenta la siguiente solución, que es una suma que contiene a todas las lambdas que son solución de las ecuaciones (4.22) y (4.24), y tales valores se pueden obtener mediante $J_0(\lambda_h) = 0$.

La solución general de la ecuación (4.22) es:

$$\theta_{1h}(\xi) = C_{1h}' J_0(\lambda_{1h} \xi) + C_{2h}' Y_0(\lambda_{1h} \xi) \quad (4.27)$$

Mientras que la derivada de (4.27) resulta:

$$\frac{d\theta_{1h}(\xi)}{dr} = -C_{1h}' \lambda_{1h} J_1(\lambda_{1h} \xi) - C_{2h}' \lambda_{1h} Y_1(\lambda_{1h} \xi) \quad (4.28)$$

Por otro lado, la condición de frontera I, que corresponde al centro del tubo, indica que la ecuación (4.28) debe tener el valor de $\frac{d\theta_{1h}(0)}{dr} = 0$, lo cual sólo puede lograrse si $C_{2h}' = 0$ debido a que Y_1 diverge. Por lo anterior, (4.27) y (4.28) se simplifican de la siguiente manera:

$$\theta_{1h}(\xi) = C_{1h}' J_0(\lambda_{1h} \xi) \quad (4.29)$$

$$\frac{d\theta_{1h}(\xi)}{dr} = -C_{1h}^I \lambda_{1h} J_1(\lambda_{1h}\xi) \quad (4.30)$$

Para la segunda zona de flujo, la solución general y su derivada son:

$$\theta_{2h}(\xi) = C_{1h}^{II} J_0(\lambda_{2h}\xi) + C_{2h}^{II} Y_0(\lambda_{2h}\xi) \quad (4.31)$$

$$\frac{d\theta_{2h}(\xi)}{dr} = -C_{1h}^{II} \lambda_{2h} J_1(\lambda_{2h}\xi) - C_{2h}^{II} \lambda_{2h} Y_1(\lambda_{2h}\xi) \quad (4.32)$$

El valor de la derivada de la región interior de flujo debe ser igual al de la región exterior de acuerdo a la condición de frontera II, por lo que la evaluación de (4.30) en $\xi = k$ lleva a obtener, de (4.32), el valor de C_{2h}^{II} como función de C_{1h}^I y C_{1h}^{II} :

$$C_{2h}^{II} = \frac{C_{1h}^I \lambda_{1h} J_1(\lambda_{1h}k)}{\lambda_{2h} Y_1(\lambda_{2h}k)} - \frac{C_{1h}^{II} J_1(\lambda_{2h}k)}{Y_1(\lambda_{2h}k)} \quad (4.33)$$

El valor dado en (4.33) ayuda a suprimir de las ecuaciones (4.31) y (4.32) una de las tres constantes que presentan. Para dejar reducir el número de constantes independientes que contienen las ecuaciones, se usa la condición de frontera IV que indica que en la pared, la velocidad del fluido es la velocidad a la que la pared se mueve, en este caso, $\theta_{2h}|_{\xi=1} = 0$.

$$\theta_{2h}|_{\xi=1} = C_{1h}^I \frac{\lambda_{1h} J_1(\lambda_{1h}k)}{\lambda_{2h} Y_1(\lambda_{2h}k)} Y_0(\lambda_{2h}) + C_{1h}^{II} \left[J_0(\lambda_{2h}) - \frac{J_1(\lambda_{2h}k)}{Y_1(\lambda_{2h}k)} Y_0(\lambda_{2h}) \right] = 0 \quad (4.34)$$

Al resolver y simplificar (4.34) para obtener C_{2h}'' , se obtiene la siguiente expresión:

$$C_{1h}'' = \frac{C_{1h}' \lambda_{1h} J_1(\lambda_{1h} k) Y_0(\lambda_{2h})}{\lambda_{2h} [J_1(\lambda_{2h} k) Y_0(\lambda_{2h}) - Y_1(\lambda_{2h} k) J_0(\lambda_{2h})]} \quad (4.35)$$

Con el fin de facilitar la lectura, se define a continuación la variable φ como parte del cociente de (4.35), lo cual ayuda a mostrar el resultado de sustituir (4.33) y (4.35) en (4.31):

$$\varphi = \frac{Y_0(\lambda_{2h})}{J_1(\lambda_{2h} k) Y_0(\lambda_{2h}) - Y_1(\lambda_{2h} k) J_0(\lambda_{2h})} \quad (4.36)$$

$$\theta_{2h}(\xi) = C_{1h}' \frac{\lambda_{1h} J_1(\lambda_{1h} k)}{\lambda_{2h}} \left\{ \varphi J_0(\lambda_{2h} \xi) + \frac{[1 - \varphi J_1(\lambda_{2h} k)]}{Y_1(\lambda_{2h} k)} Y_0(\lambda_{2h} \xi) \right\} \quad (4.37)$$

Al inspeccionar la función (4.36), se identifica que $J_0(\lambda_{2h}) = 0$, debido a que todas las λ_{2h} deben ser raíces de dicha función, por lo que (4.36) se simplifica a continuación:

$$\varphi = \frac{Y_0(\lambda_{2h})}{J_1(\lambda_{2h} k) Y_0(\lambda_{2h})} = \frac{1}{J_1(\lambda_{2h} k)} \quad (4.38)$$

Y al usar (4.38) en la ecuación (4.37) la expresión resultante es:

$$\theta_{2h}(\xi) = C_{1h}' \frac{\lambda_{1h} J_1(\lambda_{1h} k)}{\lambda_{2h} J_1(\lambda_{2h} k)} J_0(\lambda_{2h} \xi) \quad (4.39)$$

Gracias a (4.29) y (4.39) se puede obtener la distribución de velocidad para todo el sistema, sin embargo, aún se requiere la suma, desde $h = 1$ para obtener la solución expresada en términos de λ_{1h} y λ_{2h} :

$$\theta_{1h}(\xi) = \sum_{h=1}^{\infty} C_{1h}^I J_0(\lambda_{1h} \xi) \quad (4.40)$$

$$\theta_{2h}(\xi) = \sum_{h=1}^{\infty} C_{1h}^I \frac{\lambda_{1h} J_1(\lambda_{1h} k)}{\lambda_{2h} J_1(\lambda_{2h} k)} J_0(\lambda_{2h} \xi) \quad (4.41)$$

Para la evaluación de las constantes C_{1h}^I se requiere evaluar el producto interior definido como $\langle \theta_{1h}, \theta_{1h} \rangle = 1$. Para obtener una solución no trivial se requiere sustituir la solución en estado estacionario por una de las sumas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{1h}^I J_0(\lambda_{1h} \xi) = \frac{1}{4N} \left\{ \left[N(k^2 - 1^2) + 1 \right] - k^2 \left[1 + 2(1 - N) \ln k \right] \right\} \quad (4.42)$$

Al sustituirse en el producto interior para evaluar las constantes C_{1h}^I se obtienen las siguientes integrales:

$$\int_0^k \frac{1}{4N} \left\{ \left[N(k^2 - 1^2) + 1 \right] - k^2 \left[1 + 2(1 - N) \ln k \right] \right\} J_0(\lambda_{1h} \xi) \xi d\xi = \int_0^k \sum_{n=1}^{\infty} C_{1h}^I J_0(\lambda_{1h} \xi) J_0(\lambda_{1h} \xi) \xi d\xi \quad (4.43)$$

$$C_{1h}^I = - \frac{\left[(\lambda_{1h} k)^2 (N-1) \ln k + (k^2 - 1) \frac{(\lambda_{1h})^2}{2} - 2N \right] J_1(\lambda_{1h} k) + Nk \lambda_{1h} J_0(\lambda_{1h} k)}{kN \lambda_{1h}^3 \left[J_1(\lambda_{1h} k) + 2k \lambda_{1h} J_0(\lambda_{1h} k) \right]} \quad (4.44)$$

Por otro lado, no es necesario continuar con el procedimiento de integración para la ecuación de (4.40), pues se requiere la siguiente condición para que se cumplan las condiciones de interface fluido-fluido:

$$\lambda_{1h} = \lambda_{2h} \sqrt{N} \quad (4.45)$$

Lo que indica que la constante presentada en (4.44) es también la constante requerida en la ecuación (4.41), con el requerimiento de usar (4.44) para sustituir λ_{2h} .

Para obtener la expresión de (4.19) y (4.20) se requiere de usar (4.25) junto con (4.40) y (4.26) junto con (4.41) y sustituir C_{1h}^I expresada en (4.44), obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$\theta_1(\xi, \tau) = \sum_{h=1}^{\infty} C_{1h}^I e^{-\frac{\lambda_{1h}^2}{W_{o1}} \tau} \left[\frac{\sqrt{2}}{\lambda_1 W_{o1}} \underbrace{\int e^{\frac{\lambda_{1h}^2}{W_{o1}} \tau} \frac{\partial P}{\partial \zeta} d\tau}_{I_1} \right] J_0(\lambda_{1h} \xi) \quad (4.46)$$

$$\theta_2(\xi, \tau) = \sum_{h=1}^{\infty} C_{1h}^I e^{-\frac{\lambda_{1h}^2}{W_{o2} N} \tau} \left[\frac{\sqrt{2N}}{\lambda_1 W_{o2}} \underbrace{\int e^{\frac{\lambda_{1h}^2}{W_{o2} N} \tau} \frac{\partial P}{\partial \zeta} d\tau}_{I_2} \right] \frac{J_1(\lambda_{1h} k)}{J_1\left(\frac{\lambda_{1h}}{\sqrt{N}} k\right)} J_0\left(\frac{\lambda_{1h}}{\sqrt{N}} \xi\right) \quad (4.47)$$

Las ecuaciones (4.46) y (4.47) respectivamente contienen un término que involucra una integral, la cual incluye parte de la resistencia a fluir que presenta el material y que es función del tiempo. Para resolver dichas ecuaciones se requiere sustituir el gradiente de presión en dirección axial por una función del tiempo que sea equivalente o aproximada.

4.2.1.1. Efectos de la variación gradiente de presión.

A continuación se presentan algunos de los posibles casos de estudio para distintos tipos de gradiente de presión, mediante los siguientes casos:

- Gradiente de presión constante: que equivale al arranque hasta el alcance del estado estacionario; que para la ecuación equivale a dar valor al sumando

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = A.$$

- Gradiente de presión regulada: tal como es presentado en la figura (1.2) con el nombre de bombeo regulado, es representado por $\frac{\partial P}{\partial \zeta} = \text{seno}(2\tau)$ o bien por $\frac{\partial P}{\partial \zeta} = \text{cos}(2\tau)$. Se presentan como equivalentes no porque produzcan exactamente el mismo comportamiento, sino porque cuando se alcanza el tiempo de comportamiento periódico, la única diferencia entre dichas funciones es un desfase de 0.5π . Por otro lado, el efecto del coseno tarda más tiempo en alcanzar dicha oscilación.

- Gradiente de presión no regulado: Ya que tiene similitudes con el bombeo regulado en cuanto a su zona de aumento y descenso, tal como se muestra en la figura (1.2), se requiere una serie de Fourier que permita, matemáticamente, presentar como una función del tiempo dicho efecto. Una de las posibles maneras de presentar este bombeo es reduciendo la sección negativa de la función seno:

$$f(\tau) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \text{sen}(\tau) - \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos(\pi j)}{\pi(j^2 - 1)} \cos(j\tau) \right) \quad (4.48)$$

O bien, haciendo lo anterior pero con la función coseno:

$$f(\tau) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos(\tau) + \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos(\pi j)}{\pi(j^2 - 1)} \cos(j\tau) \right) \quad (4.49)$$

Sin embargo, es conveniente usar sólo el primer término de la serie debido a que aún genera valores negativos, aunque no de la misma magnitud que los generados por la función seno o coseno sin alterar.

Por último, se probará una función compuesta por la combinación de la función seno y la serie de Fourier propuesta anteriormente. El resultado de la ecuación tiene también fundamento en el trabajo desarrollado por Calvo^[14], siendo un bombeo intermedio entre el flujo volumétrico regulado y el no regulado. Existen dos justificaciones de usar dicho tipo de flujo; la razón matemática es que es un caso que contiene los gradientes de presión presentados con anterioridad. Mientras la razón física es que la elasticidad de las arterias

cercanas al corazón alteran al gradiente de presión generado por dicho órgano^[5] y dichas alteraciones se pueden reflejar como otro componente del gradiente de presión^[7].

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = A + Bf(\tau) + \Gamma \text{sen}(2\tau) \quad (4.50)$$

En la ecuación anterior debe introducirse el término descrito en (4.48) para obtenerse el gradiente de presión completo o correspondiente.

También se puede presentar un equivalente a la ecuación (4.49) cambiando el seno por el coseno y la ecuación de $f(\tau)$ se debe sustituir en (4.50). La única diferencia de este cambio de funciones con respecto a la expuesta en (4.49) es que se tiene un desfase de 0.5π tal como el caso planteado entre el seno y el coseno.

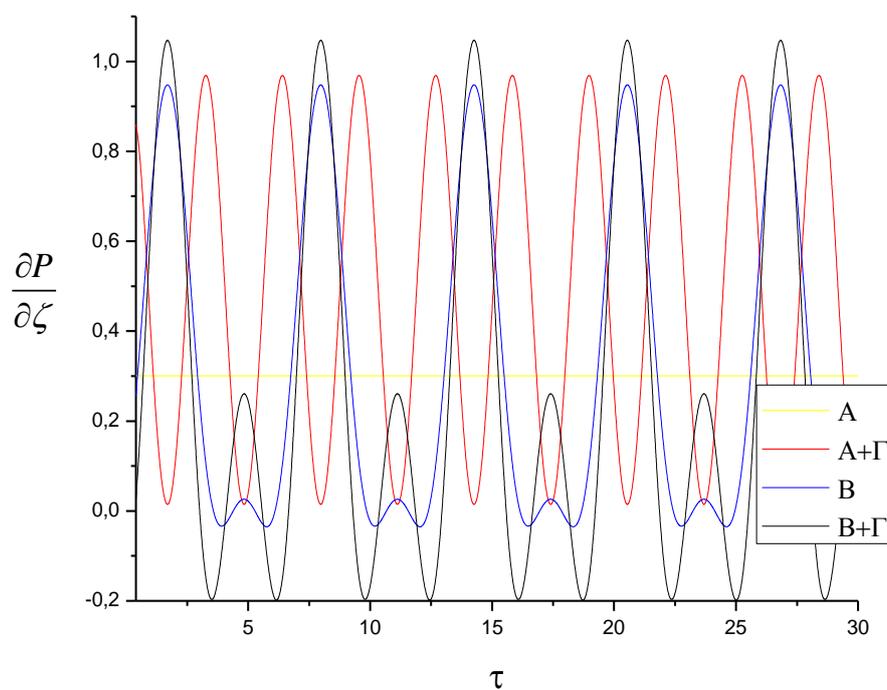


Figura 4.7.- Distintos gradientes de presión empleados en este trabajo, representados por sus coeficientes respectivos.

Las soluciones de las ecuaciones (4.46) y (4.47) requieren la evaluación de la integral definida por I_1 e I_2 . Dado el caso que la ecuación presentada en (4.50) contiene todos los gradientes de presión presentados en este trabajo, sólo se presenta el resultado de dicha integral. Si se requiere obtener las integrales generadas por el otro tipo de gradientes de presión, Únicamente se requiere asignar los valores correspondientes a las constantes A, B, y Γ de acuerdo al tipo de gradiente que se desee estudiar.

Las expresiones de I_1 e I_2 resultan:

$$I_1 = \frac{e^{\frac{\lambda_{1h}^2 \tau}{Wo_1}}}{\pi \lambda_{1h}^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{Wo_1 \pi}{2(\lambda_{1h}^4 + Wo_1^2)} \left[B \lambda_{1h}^4 \sin(\tau) - B Wo_1 \lambda_{1h}^2 \cos(\tau) \right] \\ + (B + 2A)(\lambda_{1h}^4 + Wo_1^2) \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\lambda_{1h}^2}{3(\lambda_{1h}^4 + 4Wo_1^2)} \left[(B \lambda_{1h}^2 + 3\Gamma \pi Wo_1) \cos(2\tau) \right] \\ + 2(B Wo_1 - 0.75\Gamma \pi \lambda_{1h}^2) \sin(2\tau) \end{array} \right\} \quad (4.51)$$

$$I_2 = \frac{N e^{\frac{\lambda_{1h}^2 \tau}{Wo_2 N}}}{\pi \lambda_{1h}^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{Wo_2 \pi}{2(\lambda_{1h}^4 + N^2 Wo_2^2)} \left[B \lambda_{1h}^4 \sin(\tau) - B N Wo_2 \lambda_{1h}^2 \cos(\tau) \right] \\ + (B + 2A)(\lambda_{1h}^4 + N^2 Wo_2^2) \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\lambda_{1h}^2}{3(\lambda_{1h}^4 + 4N^2 Wo_2^2)} \left[(B \lambda_{1h}^2 + 3\Gamma \pi N Wo_2) \cos(2\tau) \right] \\ + 2(B N Wo_2 - 0.75\Gamma \pi \lambda_{1h}^2) \sin(2\tau) \end{array} \right\} \quad (4.52)$$

Al comparar las integrales, se observa que las diferencias entre I_1 e I_2 sólo son los números de Womersley y el coeficiente de propiedades N . Si se desea obtener las

equivalencias de λ_{1h} con λ_{2h} se puede usar la ecuación (4.45), lo que podría parecer de poca utilidad; sin embargo, el obtener las segundas lambdas podría ayudar a obtener una solución analítica del fluido no newtoniano envuelto en el fluido newtoniano en trabajos futuros.

Las expresiones de las soluciones, tanto de la zona interior como de la zona exterior del flujo son:

$$\theta_1(\xi, \tau) = \sum_{h=1}^{\infty} C_{1h}^I \frac{\sqrt{2}F_1(\tau)}{\pi\lambda_{1h}^3(\lambda_{1h}^4 + Wo_1^2)(\lambda_{1h}^4 + 4Wo_1^2)} J_0(\lambda_{1h}\xi) \quad (4.53)$$

$$\theta_2(\xi, \tau) = \sum_{h=1}^{\infty} C_{1h}^I \left[\frac{\sqrt{2N}NF_2(\tau)}{\pi\lambda_{1h}^3(\lambda_{1h}^4 + N^2Wo_2^2)(\lambda_{1h}^4 + 4N^2Wo_2^2)} \right] \frac{J_1(\lambda_{1h}k)}{J_1\left(\frac{\lambda_{1h}}{\sqrt{N}}k\right)} J_0\left(\frac{\lambda_{1h}}{\sqrt{N}}\xi\right) \quad (4.54)$$

Las funciones $F_1(\tau)$ y $F_2(\tau)$ están definidas a continuación:

$$F_1(\tau) = \frac{Wo_1\pi(\lambda_{1h}^4 + 4Wo_1^2)}{2} \left[\frac{B\lambda_{1h}^4 \sin(\tau) - BWo_1\lambda_{1h}^2 \cos(\tau)}{+(B + 2A)(\lambda_{1h}^4 + Wo_1^2)} \right] - \frac{\lambda_{1h}^2(\lambda_{1h}^4 + Wo_1^2)}{3e^{\frac{\lambda_{1h}^2\tau}{Wo_1}}} \left[\frac{(B\lambda_{1h}^2 + 3\Gamma\pi Wo_1)\cos(2\tau)}{+2(BWo_1 - 0.75\Gamma\pi\lambda_{1h}^2)\sin(2\tau)} \right] \quad (4.55)$$

$$F_2(\tau) = \frac{Wo_2 \pi (\lambda_{1h}^4 + 4N^2 Wo_2^2)}{2} \left[\frac{B \lambda_{1h}^4 \sin(\tau) - BN Wo_2 \lambda_{1h}^2 \cos(\tau)}{+(B + 2A)(\lambda_{1h}^4 + N^2 Wo_2^2)} \right] \\ - \frac{\lambda_{1h}^2 (\lambda_{1h}^4 + N^2 Wo_2^2)}{3e^{\frac{\lambda_{1h}^2 \tau}{Wo_2}}} \left[\frac{(B \lambda_{1h}^2 + 3\Gamma \pi N Wo_2) \cos(2\tau)}{+2(BN Wo_2 - 0.75\Gamma \pi \lambda_{1h}^2) \sin(2\tau)} \right] \quad (4.56)$$

Ahora que se han presentado las soluciones de la distribución de la velocidad a través de dos fluidos newtonianos, es posible cambiar dichas ecuaciones por sus equivalentes tal como se usaron en la ecuación (4.42):

$$\theta_1(\xi, \tau) = \frac{N(k^2 - \xi^2) + 1 - k^2 [1 + 2(1 - N) \ln k]}{4N} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} F_1(\tau)}{\pi \lambda_{1h}^3 (\lambda_{1h}^4 + Wo_1^2) (\lambda_{1h}^4 + 4Wo_1^2)} \quad (4.57)$$

$$\theta_2(\xi, \tau) = \frac{1 - \xi^2 + 2(1 - N)k^2 \ln(\xi)}{4} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2N} F_2(\tau)}{\pi \lambda_{1h}^3 (\lambda_{1h}^4 + N^2 Wo_2^2) (\lambda_{1h}^4 + 4N^2 Wo_2^2)} \quad (4.58)$$

Las ecuaciones (4.57) y (4.58) pueden dar una distribución completa de velocidades.

A continuación se muestra la figura 4.8, que representa la solución con un bombeo no regulado y distintos números de Womersley. Cuando la velocidad tiene valor mayor o igual a 0.5 se cambia el color de la figura con el propósito de hacer notar los cambios debido a los distintos números de Womersley.

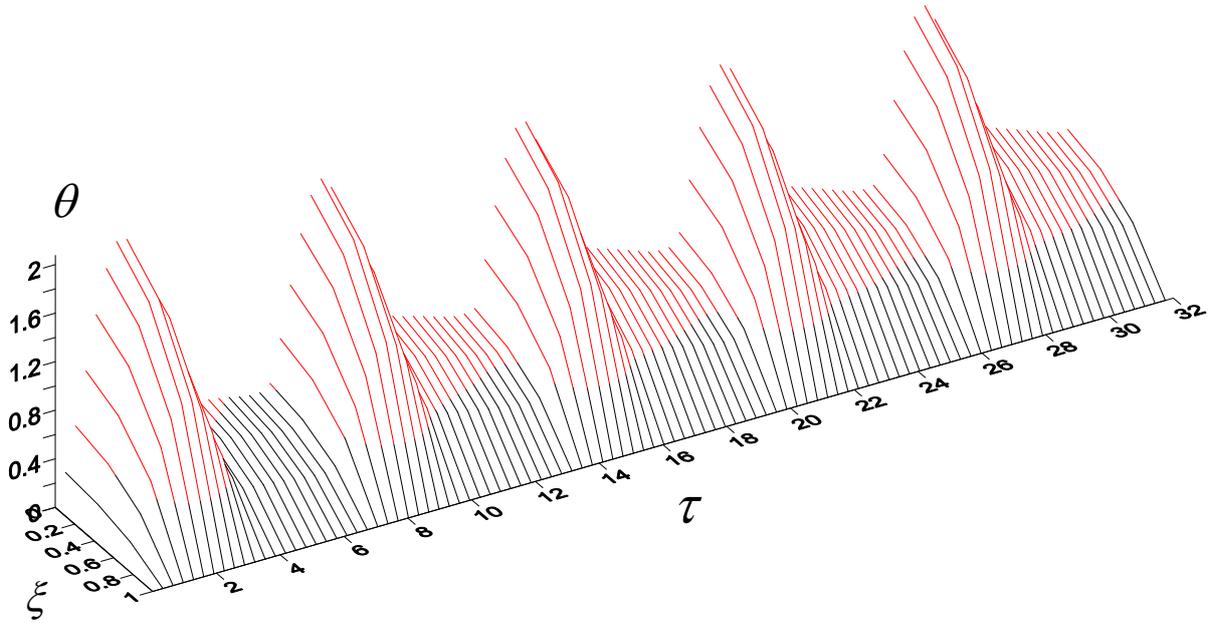


Figura 4.8.- Distribución de velocidades a través del tiempo con distintos números de Womersley $Wo_1=1$ y $Wo_2=5$ para $N=1.7$ para el gradiente de presión $B=1$ $A=\Gamma=0$.

Es por medio de las ecuaciones (4.57) y (4.58) que se puede obtener directamente las ecuaciones de la distribución del esfuerzo cortante en ambas zonas:

$$\tau_{\xi\xi}^I = -\frac{\partial\theta_1(\xi,\tau)}{\partial\xi} = \frac{\xi}{2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}F_1(\tau)}{\pi\lambda_{1h}^3 (\lambda_{1h}^4 + Wo_1^2)(\lambda_{1h}^4 + 4Wo_1^2)} \quad (4.59)$$

$$\tau_{\xi\xi}^{II} = -\frac{\partial\theta_2(\xi,\tau)}{\partial\xi} = \left[\frac{\xi^2 + k^2(N-1)}{\xi} \right] \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2N}F_2(\tau)}{2\pi\lambda_{1h}^3 (\lambda_{1h}^4 + N^2Wo_2^2)(\lambda_{1h}^4 + 4N^2Wo_2^2)} \quad (4.60)$$

Gracias a las ecuaciones dadas por (4.57) hasta (4.60), es posible hacer la comparación con el estado pseudoestacionario. Para que dicho estado sea obtenido en las ecuaciones mencionadas, las sumas respectivas a cada ecuación deben equivaler al gradiente de presión impuesto. Otra forma de llegar a este resultado es sustituyendo directamente la ecuación (4.50) en las ecuaciones correspondientes al estado estacionario.

Dado que en esta sección no se plantea el uso del fluido de segundo grado, no se puede hacer un estudio sobre la presión de acuerdo a la ecuación (3.15). Este estudio se discutirá en la sección 4.2.2.1.

4.2.1.2. Efectos de la variación del cociente de propiedades.

En el estado no estacionario, la variación del coeficiente de propiedades afecta a la resistencia, expresada como C'_{lh} en (4.44), de acuerdo a las ecuaciones (4.45) y (4.46), debido a que N se encuentra en ambas soluciones. En el caso de la solución (4.46) se sabe que conforme a la ecuación (4.45), existe un efecto de este coeficiente en las funciones de Bessel, el cual ajusta dicha función para poder obtenerse una similitud con el estado estacionario.

Por otro lado, el coeficiente de propiedades no sólo afecta al estado transitorio como se explicó anteriormente, sino que también tiene influencia sobre el número de Womersley. Esto será explicado más adelante, ya que corresponde a un caso de la solución donde sólo un fluido se transporta por toda la región de flujo.

4.2.1.3. Efectos de la variación del número de Womersley.

Al observar que en las ecuaciones (4.45) y (4.46) el número de Womersley se encuentra en el denominador, así como en el denominador de las exponenciales presentes en cada ecuación, el efecto que identifica es de aumentar el tiempo en el que se alcanza el estado de flujo en el que se repite a ciertos intervalos (relacionado con el período característico del fenómeno).

La diferencia del flujo en estado pseudoestacionario (donde el número de Womersley tiene valores de cero) es que el número adimensional permite también estudiar el efecto de la diferencia de velocidades con respecto del tiempo.

Cuando se tienen dos fluidos, pareciese que al inicio, el número de Womersley más pequeño es el que lleva a cabo todo el fenómeno, sin embargo, cuando el gradiente de presión decrece y se vuelve constante, el Womersley mayor comienza a mostrar su efecto, que parece ser una relajación del sistema, dando una mayor importancia al término transitorio. Esto se puede notar tanto en las figuras que representan a las velocidades como en las que representan el esfuerzo cortante.

Para este caso de estudio, el de dos fluidos newtonianos, para generar el flujo de un fluido newtoniano, no es suficiente con tomar $N = 1$, también se requiere fijar el valor de $k = 1$, ya que así la constante de integración se simplifica y se obtiene la ecuación:

$$C_{1n}^I = \frac{2}{\lambda_{1h} J_1(\lambda_{1h})} \quad (4.61)$$

Con respecto a los números de Womersley, al observar las definiciones de N , se requiere que el denominador como el numerador sean iguales, lo que hace que también $Wo_1 = Wo_2$ y entonces las ecuaciones se reduzcan a las de un solo fluido newtoniano.

4.2.2. Flujo del fluido de segundo grado envuelto en el fluido newtoniano.

Hasta ahora, no ha sido posible obtener un conjunto de soluciones analíticas como en el caso de los fluidos newtonianos para un fluido de segundo grado envuelto en un fluido newtoniano; sin embargo, en el caso de $n = 1$ del método numérico que ha sido desarrollado (ver apéndice I) para obtener la solución del flujo, debe obtenerse la misma solución que la obtenida en la sección 4.2.1. Lo anterior se comparará por medio del estudio del error relativo, que es dado de la siguiente manera:

$$Er = \frac{S. Numérica - S. Analítica}{S. Analítica} \quad (4.62)$$

Durante el desarrollo de las comparaciones entre los distintos métodos de solución, se observó que la posición radial que mayor diferencia presenta es $\xi = 0$, por lo que en la siguiente figura se aprecia el error relativo en el tiempo:

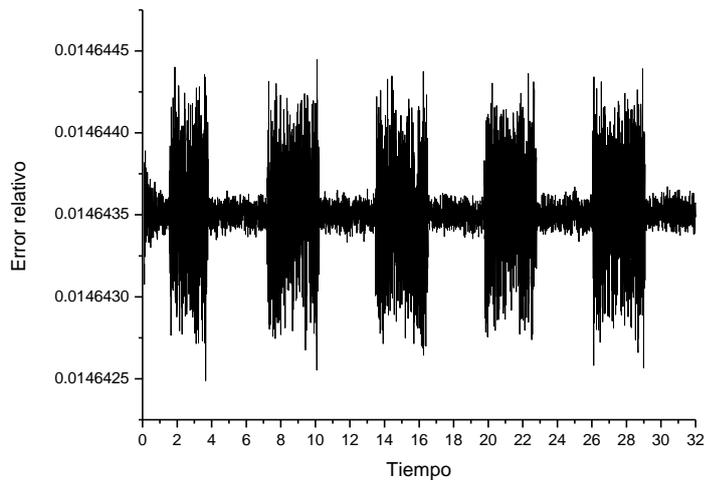


Figura 4.9.- Error relativo calculado en $\xi = 0$ de acuerdo con la ecuación (4.62) a través del tiempo.

Con respecto a la diferencia de valores dados por ambas soluciones debe recordarse que también existe un error en la solución analítica debido al truncamiento de las sumas que están incluidas en dichas soluciones.

Por otro lado, ya que el error relativo es menor que 1.46%, se puede suponer que la solución proporcionada por el método numérico es congruente con la solución analítica anteriormente obtenida. Lo anterior permite suponer que las soluciones del método numérico para el fluido de segundo grado envuelto en un fluido newtoniano serían, al menos, tan adecuadas como las que se pudiesen obtener por medio de soluciones aproximadas. Se puede señalar que el error aumenta cuando el sistema se encuentra en el periodo donde el bombeo es constante.

4.2.2.1. Efectos del gradiente de presión variable.

Tal como en el caso de los fluidos newtonianos, dependiendo de la forma del gradiente de presión, es el tipo de respuesta que el sistema en estudio presenta; sin embargo, gracias a las propiedades elásticas generadas por los esfuerzos normales, que no están presentes en el sistema de fluidos newtonianos, también la presión, como indica la ecuación (4.10), depende del gradiente de presión.

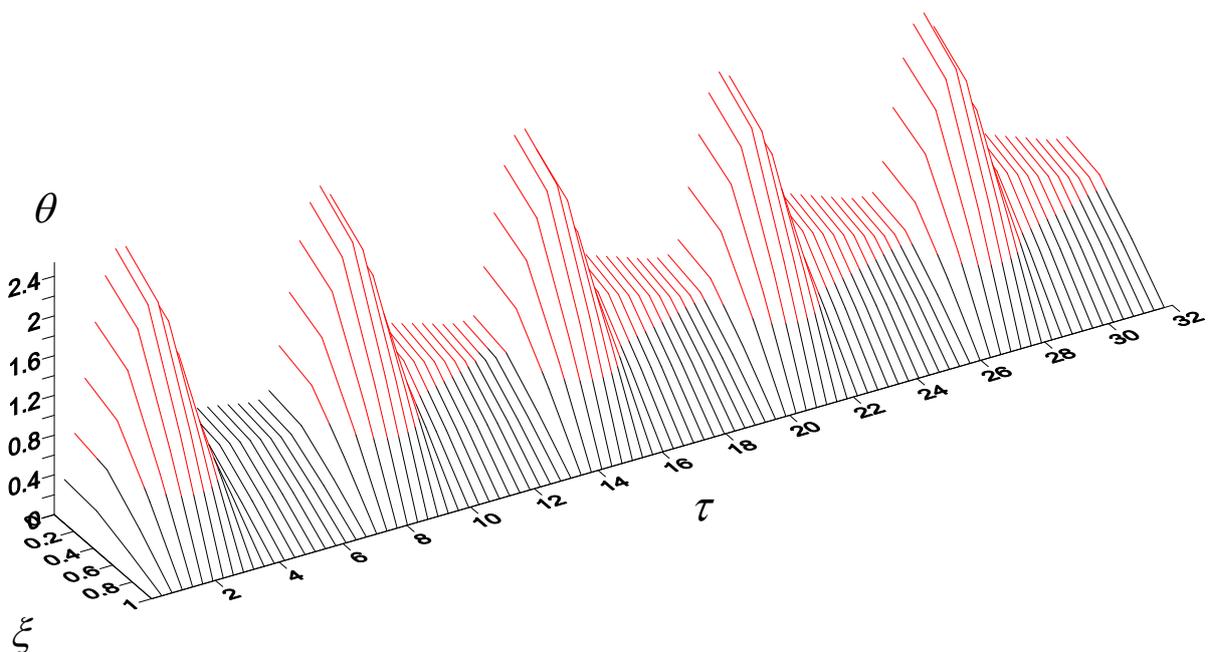


Figura 4.10.- Distribución de velocidades a través del tiempo con distintos números de Womersley $Wo_1 = 1$ y $Wo_2 = 5$ para $N = 1.7$ y $n = 0.25$ para el gradiente de presión $B = 1$ $A = \Gamma = 0$.

La figura 4.10 presenta también un cambio de color, de negro a rojo, cuando los valores de la velocidad calculada por el método numérico son iguales o mayores a 0.7. Esto

tiene el fin de indicar cómo es afectado el sistema por la diferencia de los números de Womersley.

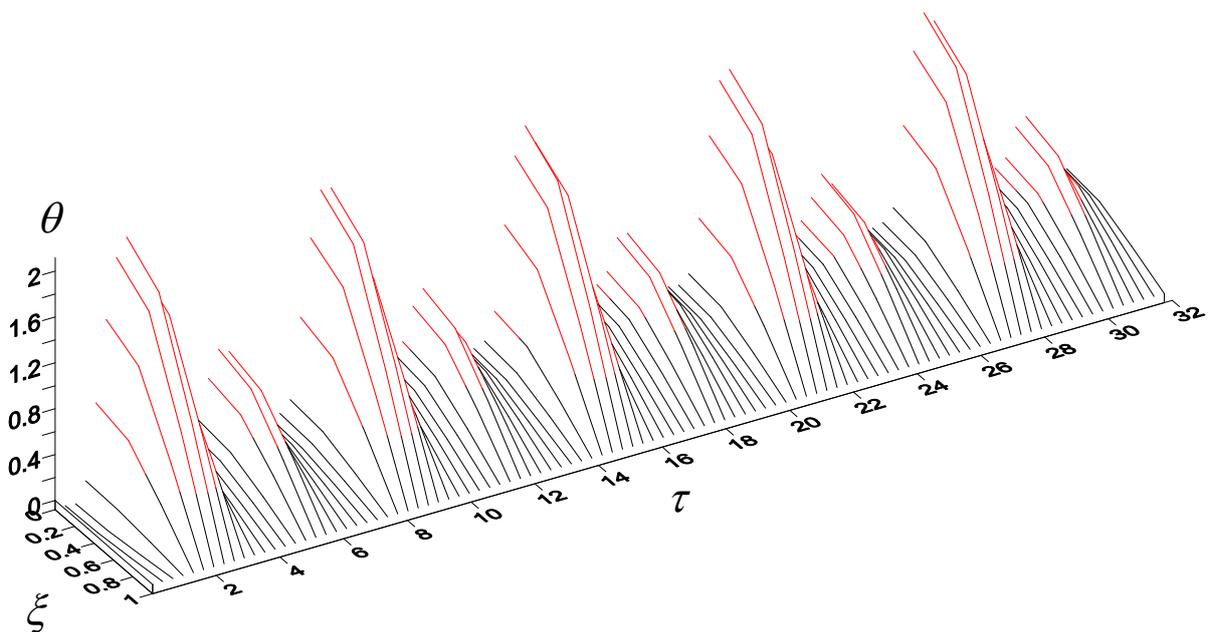


Figura 4.11.- Distribución de velocidades a través del tiempo con distintos números de Womersley $Wo_1=1$ y $Wo_2=5$ para $N=1.7$ y $n=0.25$ para el gradiente de presión $B=1$ $\Gamma=0.5$ y $A=0$.

La relevancia de la figura 4.11 es que este tipo de forma de distribución de velocidad no se debe sólo a efectos causados dentro del cuerpo humano, pues de acuerdo a la bibliografía encontrada^{[4][5][7][8]}, que el gradiente de presión impuesto tenga dos frecuencias, una debida a la serie de Fourier propuesta y la otra adicionada por el seno (ver ecuación 4.50) se debe a la acción de fuerzas periódicas externas, como por ejemplo, el uso de taladros mecánicos usados en la construcción o bien el aumento de la velocidad en aviones. Una vez más se usa el cambio de colores para indicar los valores mayores o iguales a 0.5, sin embargo, para este caso, el que existan diferencias de los números de Womersley no es tan

relevante como los cambios causados por el gradiente de presión como para discernir qué región influye más en el proceso.

4.2.2.2. Efectos de la variación del número de Womersley.

El tener números de Womersley distintos para cada zona lleva a identificar dos comportamientos; el primer comportamiento encontrado es cuando el número más pequeño pareciera ser el sobresaliente en el sistema^[45], mientras que es hasta que el sistema avanza en el tiempo y decrece el gradiente de presión cuando se muestran los efectos del número de Womersley mayor, que presenta un comportamiento de estabilización del flujo no permitiendo que este decrezca más como lo permitiría el número de Womersley más pequeño.

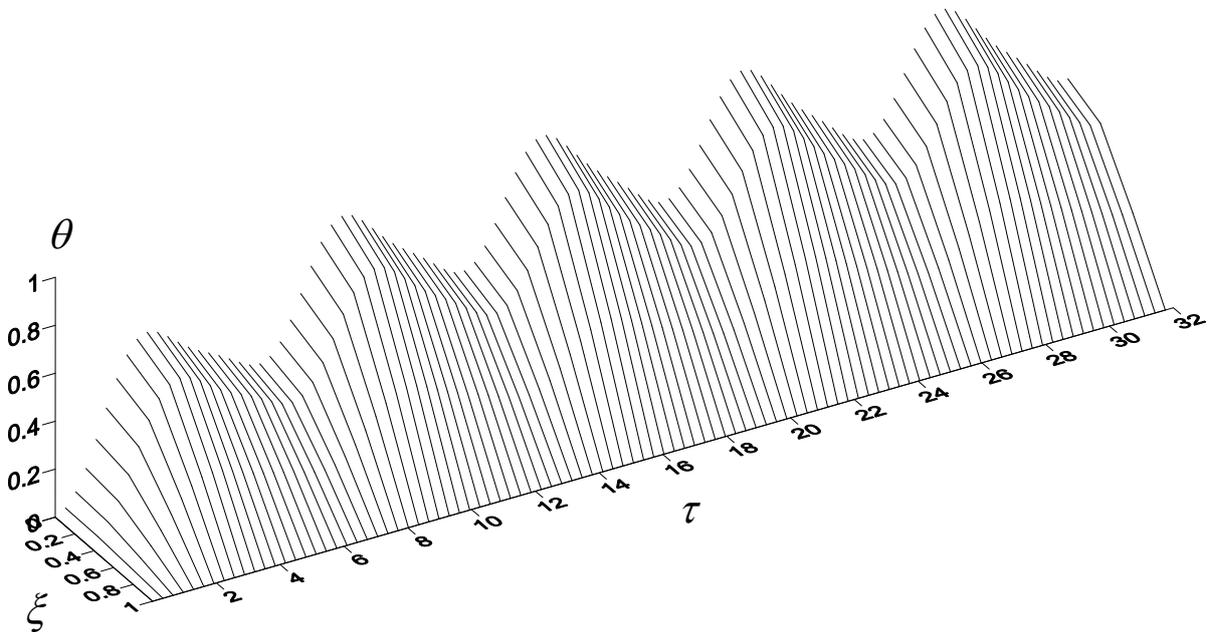


Figura 4.12.- Distribución de velocidades a través del tiempo con números de Womersley

$Wo_1 = Wo_2 = 5$ para $N = 1.7$ y $n = 0.25$ para el gradiente de presión

$B = 1$ $A = \Gamma = 0$.

La comparación entre las figuras 4.10, 4.12 y 4.13 representa las diferencias entre seleccionar números de Womersley que sean de orden de magnitud menores a la unidad, mayores a la unidad o bien una mezcla de ambos casos.

Al tomar en cuenta los valores adimensionales del sistema físico se identifica que es el caso de valores de Womersley mezclados el que predomina en el sistema estudiado, siendo más grande el número de Womersley del fluido newtoniano.

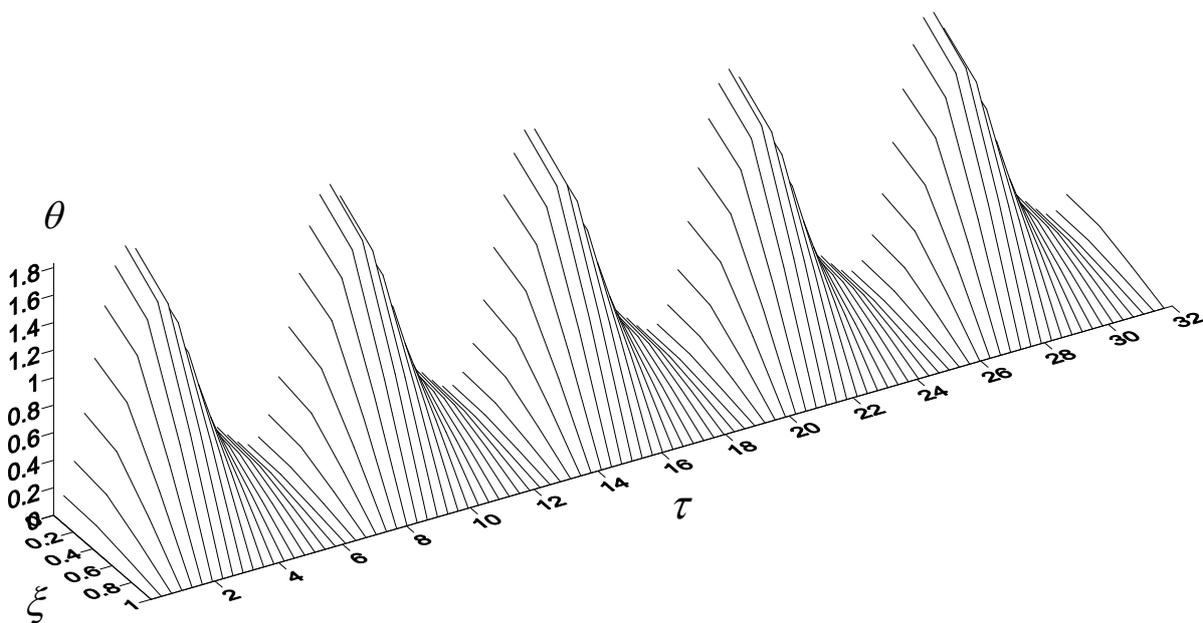


Figura 4.13.- Distribución de velocidades a través del tiempo con números de Womersley

$$Wo_1 = Wo_2 = 1 \text{ para } N = 1.7 \text{ y } n = 0.25 \text{ para el gradiente de presión}$$

$$B = 1 \text{ A} = \Gamma = 0$$

La figura 4.14 es más adecuada para sistemas donde aún no se ha presentado el fenómeno de Fahraeus-Lindquist a pesar de tener la división de dos regiones de flujo. Si se observa la figura 1.4, la arteria iliaca presenta una distribución de velocidad semejante.

4.2.2.3. Efecto de la variación del cociente de propiedades.

Además de los efectos mostrados en el caso de los fluidos newtonianos, se observa, en las figuras 4.14 y 4.15, que el incremento de la relación entre viscosidades y densidades dado por N es inversamente proporcional a la distribución de velocidades como se muestra en las ecuaciones (4.57) y (4.58); lo que lleva a que decrezca también el flujo volumétrico:

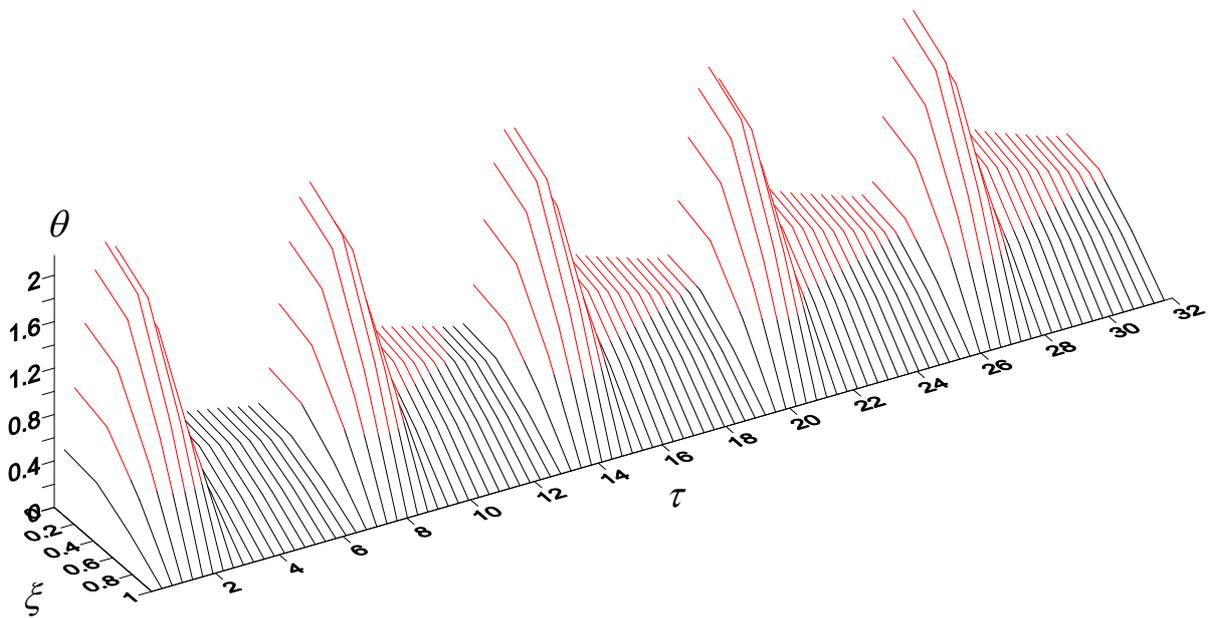


Figura 4.14.- Distribución de velocidades a través del tiempo con números de Womersley

$Wo_1 = 0.1$ $Wo_2 = 5$ para $N = 0.8$ y $n = 0.25$ para el gradiente de presión

$B = 1$ $A = \Gamma = 0$

En la figura 4.14 se muestra que a pesar de tener un Womersley mayor a la unidad en la zona newtoniana, la velocidad máxima reportada, que se encuentra en el centro del sistema, alcanza valores mayores a dos unidades, lo que indicaría que el disminuir el valor del coeficiente de propiedades ayuda a acelerar el flujo. El cambio de color para ayudar a

distinguir el efecto de los distintos números de Womersley se presenta para valores de la velocidad mayores o iguales que 0.6.

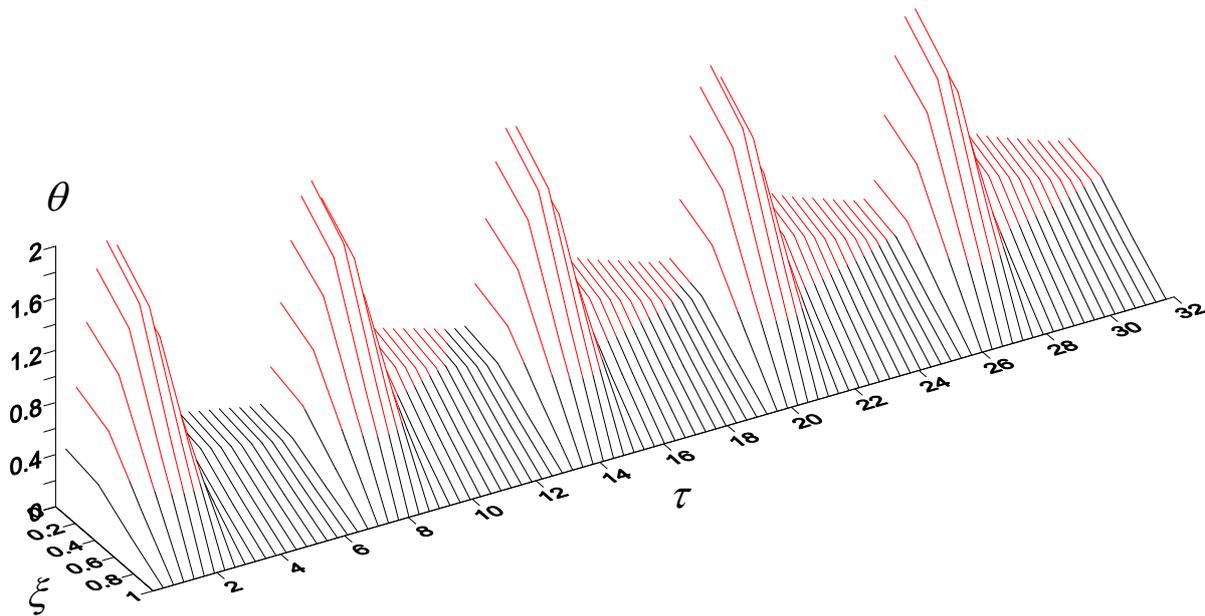


Figura 4.15.- Distribución de velocidades a través del tiempo con números de Womersley

$Wo_1 = 0.1$ $Wo_2 = 5$ para $N = 1.9$ y $n = 0.25$ para el gradiente de presión

$B = 1$ $A = \Gamma = 0$

La diferencia que no se mencionó anteriormente entre la figura 4.15 y la figura 4.14 es que esta última presenta mayor diferencia entre la zona regulada y la no regulada, por lo que aunque sea mucho menor que el efecto del número de Womersley, N también afecta el cambio de la velocidad del fluido con respecto al tiempo.

4.2.2.4. Efecto de la variación de la presión debido al flujo transitorio.

Para analizar este punto en especial se requiere tener en mente la ecuación (3.17) debido a que de manera implícita, relaciona los gradientes de presión en la dirección axial, y así, genera una diferencia de presiones en el fluido no newtoniano como se expresó en la sección 4.1.

Existen dos factores, además del gradiente de presión, que modifican explícitamente a la presión, los cuales son n (el parámetro que indica qué tan pseudoplástica es la sangre) y k (la posición radial adimensional donde se presenta el cambio de regiones newtoniana y no newtoniana). Con respecto al comportamiento del gradiente de presión axial, la distribución de velocidades lleva a que $P|_{\xi=k}$ tenga la misma forma, aunque no los mismos valores.

En la figura 4.16, se muestra que el sistema es sensible al valor de n , conforme dicho valor aumenta, también la presión aumenta. Esta relación está apoyada en datos experimentales^[50] que ayudan a identificar un comportamiento similar, pues, la práctica del levantamiento de pesas tiene un aumento de presión sin cambiar el flujo sanguíneo; este fenómeno también pudiese estar relacionado con el aumento del área transversal de flujo del hematocrito tal como lo muestra la figura 4.17.

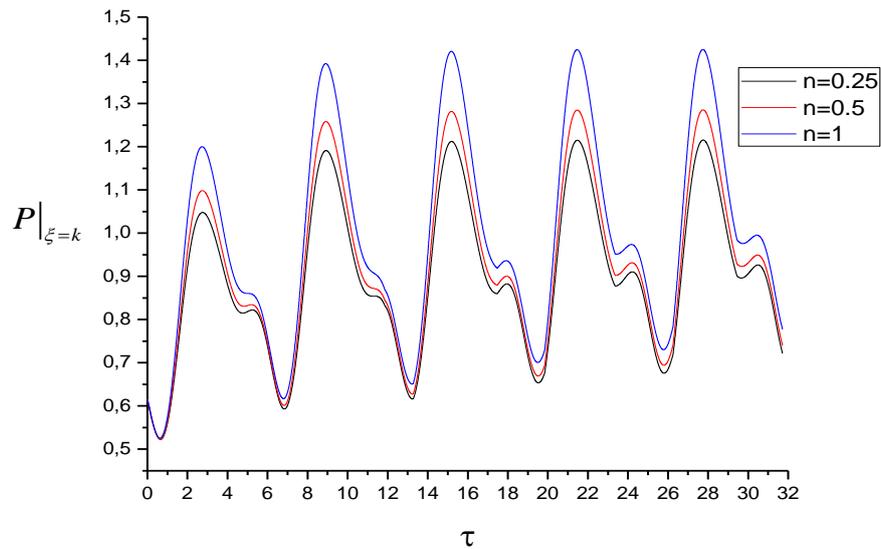


Figura 4.17.-Presión evaluada en la interfaz fluido-fluido para distintos valores de n .

Ya que se ha explicado una de las causas del cambio de la coordenada donde se encuentra la interface fluido-fluido, deben tomarse en cuenta también causas patológicas que lleven al cambio de k (ver figura 1.5).

Si bien el sistema es sensible al cambio del parámetro n , el cambiar el valor de k repercute aún más. Por otro lado, es el fluido no newtoniano el que le da la elasticidad al sistema, entonces, mientras menor sea la cantidad de este fluido, menor será la respuesta elástica de todo el sistema y por lo anterior, a mayor cantidad de fluido no newtoniano, mayor será la respuesta elástica para el sistema en estudio. Lo anterior se puede observar en la figura 4.18.

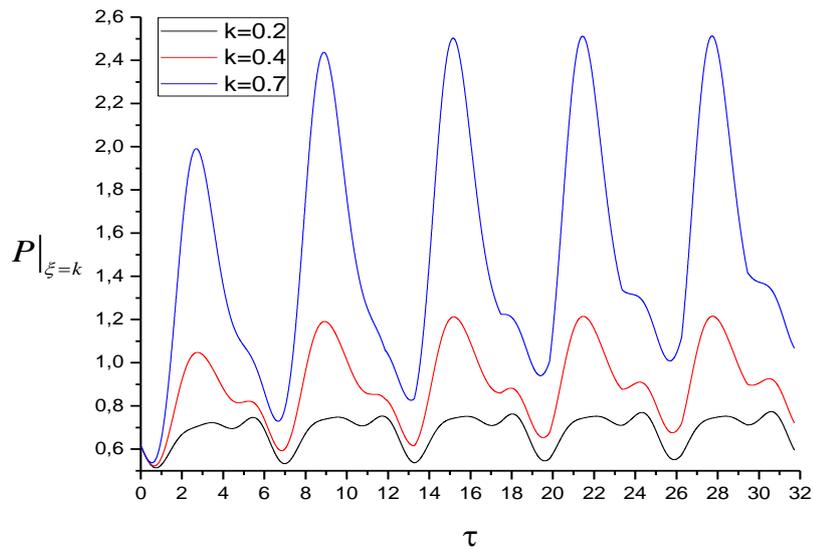


Figura 4.17.- Presión evaluada en la interfaz fluido-fluido para distintos valores de k .

Al comparar la presión generada por el bombeo regulado y el no regulado, se puede observar en la figura 4.18 que el utilizar el flujo no regulado, permite obtener una presión interfacial que tiene mayor similitud con la presión medida experimentalmente.

Al comparar las figuras 4.16 y 4.17 con la figura 4.18 se observa que los parámetros correspondientes a $n = 0.25$, $k = 0.4$ y el gradiente de presión que contiene tanto a la serie de Fourier como la función coseno, es la mejor aproximación a los datos obtenidos experimentalmente. Esto es debido a que el modelo estudiado funciona para aproximar el comportamiento de una persona sana, mientras que en cuanto se presentan patologías, el modelo pierde confiabilidad, aunque para valores de $k < 0.4$, el modelo tiene mayores errores que para valores de $k > 0.4$.

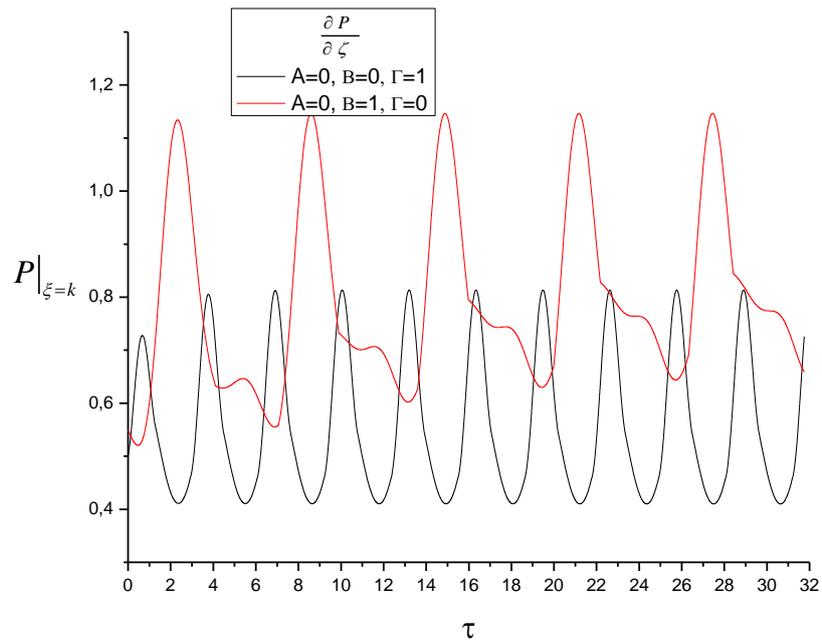


Figura 4.18.- Presión evaluada en la interfaz fluido-fluido para distintos $\frac{\partial P}{\partial \zeta}$ dados por la ecuación (4.50).

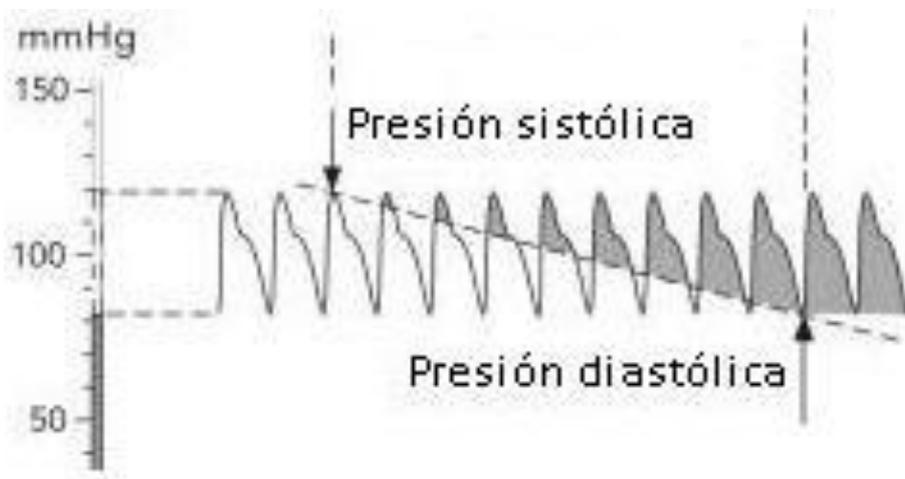


Figura 4.19.- Presión durante la sístole y diástole medida experimentalmente^[12].

5. Discusión y Resultados:

Los resultados expuestos por experimentos como los desarrollados para el esfuerzo cortante^[39] tienen congruencia con los resultados presentados en esta obra, aunque estos experimentos fueron desarrollados *in vitro*, lo que no asegura que sea tal el comportamiento que se presenta *in vivo*.

Las Figuras 4.12 a la 4.15 tienen similitud con las figuras presentadas en la literatura^[46], esto es un avance respecto a los trabajos antes publicados, que debido a sobre simplificaciones, no representan adecuadamente los datos obtenidos en experimentos.

Desafortunadamente aún no se cuenta con suficientes datos que permitan caracterizar la elasticidad de la sangre. Al suponer que la sangre tiene una viscosidad extensional representada por una expresión similar a la ley de Trouton, se generaron las relaciones que permiten obtener una primera aproximación del comportamiento de la presión.

Durante el desarrollo de esta investigación se obtuvieron resultados previamente presentados en la bibliografía^{[7],[41],[43],[44],[45]}, tal como que la ecuación del fluido general de segundo grado puede aproximarse al comportamiento de la sangre y algunas equivalencias con sistemas planteados mediante análisis perturbativos con la condición de que el fenómeno de dos regiones de flujo se lleve a cabo. También se identificó la importancia del número de Womersley como un factor que afecta la dinámica del sistema.

La elasticidad está asociada a la presión radial medida experimentalmente^{[14][44]}. Se requiere conocer la forma en que dicha elasticidad afecta al flujo en el sistema para mejorar las soluciones hasta ahora obtenidas.

5.1. Aportación de este trabajo.

El bombeo regulado obtiene lecturas de la presión que tienen menor similitud a la medida experimentalmente^[46], mientras que el bombeo no regulado presenta mayor semejanza con casos de presión medida en personas con problemas arteriales, sin embargo, una mezcla de ambos bombeos parece generar una presión con mayor proximidad a la medida experimentalmente. Esto hace surgir otra pregunta: el cómo es que se da este bombeo mixto.

La relación entre el gradiente de presión axial generado por el bombeo del corazón y la presión medida por métodos experimentales no sólo está vinculada por el comportamiento de la pared arterial, sino que también se asocia con la elasticidad del fluido.

6. Conclusiones:

La importancia del gradiente de presión axial es fundamental para el análisis del sistema; incluso si se aplican simplificaciones, se requiere mantener dicho gradiente lo más cercano posible a las mediciones experimentales para obtener respuestas acordes con los datos experimentales.

El sistema desarrollado y evaluado en esta investigación tiene ventajas sobre la simplificación de un fluido newtoniano usada ampliamente en la literatura. Sólo si se requiriese una descripción aproximada se justificaría el uso de un sólo fluido.

La ecuación presentada en (3.15), junto con (A.7), representa la relación entre la elasticidad de la sangre considerada como un fluido de segundo grado envuelto en un fluido newtoniano y la presión medida radialmente, que es la que se mide experimentalmente de manera usual.

6.1. Propuestas de líneas de investigación futuras.

Las líneas de investigación que pueden derivar de este trabajo son variadas y altamente relacionadas con trabajos desarrollados por otros autores; pues dependiendo del enfoque que se desee continuar será la posible rama a desarrollar.

Con los resultados de este trabajo se puede replantear el estudio de la transferencia de masa entre la sangre; la liberación de O₂, así como la absorción de CO₂, el transporte de los

tres tipos de $\text{NO}^{[11]}$, que pudiese incluir como una reacción química la descomposición de algunos cuerpos extraños en este último compuesto.

Con los resultados anteriores, se podría obtener el cambio de densidad debido a la reacción teórica y por medio del análisis del efecto de N , hecho en este trabajo, sería posible determinar el flujo del capilar a la vénula.

Por otro lado si lo que se desea es acercarse más al modelado del sistema de flujo estudiado al sistema real, se debe proponer un gradiente de rapidez de deformación variable, que permita que el material de la zona de flujo interior pueda representar la transición entre el comportamiento constante de la viscosidad parecido al fluido newtoniano y el comportamiento viscoelástico de un fluido no newtoniano.

Con base en el problema propuesto anteriormente, Se podría hacer un estudio con un método perturbativo basado en el número de Strouhal, lo que permitiría comparar comportamientos debido a la diferencia de los tiempos característicos involucrados.

Otro punto a desarrollar es completar el sistema de flujo añadiendo al presentado en este trabajo la elasticidad de la arteria, o bien el estudio del sistema valvular existente en las venas.

En el caso de buscar el enlace entre el comportamiento de la sangre en el flujo cercano al corazón y el flujo descrito en esta obra, se puede desarrollar alguna teoría que presente la separación entre el llamado comportamiento del tipo newtoniano cerca del corazón y el de separación de Fahraeus-Linquist.

Como último caso previsible hasta ahora, se podría llevar a cabo un estudio de campo para obtener datos reportados en la bibliografía para comparar si los adultos mexicanos se encuentran dentro de los valores utilizados en este trabajo, pues la información disponible fue desarrollada en otros países.

7. Apéndice I: Desarrollo del método numérico.

El método numérico elaborado para obtener la solución de las dos zonas de flujo tiene las mismas condiciones de frontera presentadas desde (3.21) hasta (3.25) requieren ser discretizadas como sigue a continuación:

Condición inicial:

$$\text{En } \tau_i^{\kappa=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} \right|_i^{\kappa=1} = \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \right|_i^{\kappa=1} = 0 \quad \theta_1|_i^{\kappa=1} = \theta_2|_i^{\kappa=1} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Condiciones de frontera:

I. Condición de simetría en el centro de la sección de flujo:

$$\text{Para } \tau^{\kappa>1} \quad \text{para } \xi_{i=1} = 0 \quad \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} \right|_{i=1}^{\kappa} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Las anteriores condiciones inicial y de frontera dan pauta a iniciar el método numérico en el nodo (1,1), debido a que es donde la región está definida como condiciones de frontera del primer tipo, tanto para la distribución de velocidades como para su diferencial con respecto a la posición. Por otro lado, la zona interfacial presenta como condiciones discretizaciones:

II. Condición de balance de esfuerzo cortante en la zona interfacial de los fluidos:

$$\text{Para } \tau^{\kappa>1} \text{ en la posición } \xi_i = k \quad \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} \right)^n \Big|_{\xi_i=k}^{\kappa} = N \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi_i=k}^{\kappa} \quad (\text{A.3})$$

III. Condiciones de balance de cantidad de movimiento en la zona interfacial de los fluidos:

$$\text{Para } \tau^{\kappa>1} \text{ para } \xi_i = k \quad \theta_1 \Big|_{\xi_i=k}^{\kappa} = \theta_2 \Big|_{\xi_i=k}^{\kappa} \quad (\text{A.4})$$

Esta relación entre las zonas de flujo es de mucha importancia para el método numérico, pues antes de $\xi_i = k$ toda la información generada se concentra en la ecuación de la primera zona, mientras que la ecuación (A.4) representa el cambio de una fase con otra y permite la obtención de la distribución de esfuerzos sustituyendo los valores resultantes de acuerdo a la ecuación constitutiva que rige la zona evaluada.

Por otro lado, para la evaluación de la distribución de velocidades, se requiere comenzar desde $\xi_{i=nx+1} = 1$ hasta $\xi_{i=1} = 0$, lo que indica que se requiere obtener la solución numérica justo en la dirección contraria a la resuelta por el procedimiento para obtener la distribución de la diferencia de velocidades con respecto a ξ , pues la siguiente condición de frontera indica cuál es el único valor conocido para la velocidad.

IV. Condición de no deslizamiento en la pared de la sección de flujo:

$$\text{Para } \tau^{\kappa>1} \text{ en la posición } \xi_{i=nx+1} = 1 \quad \theta_2 \Big|_{\xi=nx+1} = 0 \quad (\text{A.5})$$

Para la solución numérica del problema físico en estudio se debe realizar el siguiente cambio de variable^[47]:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} d\xi \right) \text{ y consecuentemente } \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} d\xi \right) \quad (\text{A.6})$$

Para simplificar la escritura de las ecuaciones se escribirá la letra w como equivalente de $\frac{\partial \theta}{\partial \xi}$ para el método numérico, lo cual tiene validez para las dos regiones de flujo. La integral propuesta en la ecuación (A.6) requiere ser integrada también numéricamente; pues de esa forma no se puede introducir en lenguajes de programación como FORTRAN, por lo que se requiere sustituir dicha integral por alguna regla de integración. Para esta obra se ha usado la regla del trapecio, que si bien para ser considerada como una buena aproximación, requiere el uso de tamaños de paso muy pequeños, desde el uso de diferencias finitas hacia adelante ya se requería éste tipo de espaciado. Las ecuaciones discretizadas que representan a las zonas de flujo presentadas desde (3.15) hasta (3.18) son:

$$(P_2 - P_1) = \frac{(2\alpha_1^* + \alpha_2^*)}{\xi_i} \left[\xi_{i+1} (w_{i+1})^2 - \xi_i (w_i)^2 \right] \quad (\text{A.7})$$

$$W_{o1} \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{2(\tau^{k+1} - \tau^k)} (w_{i+1}^{k+1} - w_{i+1}^k + w_i^{k+1} - w_i^k) + \frac{\partial P}{\partial \zeta} = n \xi_i^{n-2} \left((w_i^k)^n + \xi_i (w_i^k)^{n-1} \left(\frac{w_{i+1}^k - w_i^k}{\xi_{i+1} - \xi_i} \right) \right) \quad (\text{A.8})$$

Para el fluido newtoniano las ecuaciones (3.12) y (3.13) resultan:

$$P_2 - P_1 = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$Wo_2 \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{2(\tau^{k+1} - \tau^k)} (w_{i+1}^{k+1} - w_{i+1}^k + w_i^{k+1} - w_i^k) + \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \frac{N}{\xi} w_i^k + N \left(\frac{w_{i+1}^k - w_i^k}{\xi_{i+1} - \xi_i} \right) \quad (\text{A.10})$$

Las ecuaciones a ser introducidas en el programa son entonces:

$$w_{i+1}^{k+1} = \frac{2(\tau^{k+1} - \tau^k)}{Wo_1(\xi_{i+1} - \xi_i)} \left[n \xi_i^{n-2} \left((w_i^k)^n + \xi_i (w_i^k)^{n-1} \left(\frac{w_{i+1}^k - w_i^k}{\xi_{i+1} - \xi_i} \right) \right) - \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right] + w_{i+1}^k - w_i^{k+1} + w_i^k \quad (\text{A.11})$$

$$w_{i+1}^{k+1} = \frac{2(\tau^{k+1} - \tau^k)}{Wo_2(\xi_{i+1} - \xi_i)} \left(\frac{N}{\xi} w_i^k + N \left(\frac{w_{i+1}^k - w_i^k}{\xi_{i+1} - \xi_i} \right) - \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) + w_{i+1}^k - w_i^{k+1} + w_i^k \quad (\text{A.12})$$

Como se puede observar el método numérico utilizado es el de las diferencias finitas hacia adelante, pues tiene como ventaja no requerir de alguna inversión de matrices, como por ejemplo el método de Crank-Nicholson. La desventaja que presenta dicho método es el costo computacional que tiene al requerir tamaños de paso entre los nodos mucho menor que el método de diferencias centrales. Lo anterior puede provocar que la solución obtenida por el método explícito genere una solución inestable. Si el lector tiene mayor interés sobre este punto en especial puede consultar literatura respectiva.

El cálculo de la distribución de velocidades se puede obtener de la solución numérica de (A.8) y (A.10). El cambio de las propiedades entre una fase y otra están presentadas en las

condiciones de frontera y en las soluciones de w acorde a la zona correspondiente, por lo que la siguiente ecuación es válida para ambas regiones:

$$\theta_i^{\kappa+1} = \frac{(\tau^{\kappa+1} - \tau^\kappa)(\xi_i - \xi_{i-1})}{4} (w_i^{\kappa+1} + w_i^\kappa + w_{i-1}^{\kappa+1} + w_{i-1}^\kappa) + \theta_{i-1}^\kappa \quad (\text{A.13})$$

Sin embargo, por conveniencia, se ha cambiado el método explícito por el método implícito debido a que el valor conocido de la velocidad ocurre en la pared; que es el último punto a evaluar de acuerdo al método explícito, mientras que el primer punto es desconocido. Por lo anterior se prefiere cambiar la dirección de integración y así facilitar el desarrollo numérico.

Cabe comentar que aunque el método numérico presentado no tiene optimización alguna, pero tiene mucha semejanza con la solución analítica presentada en la sección correspondiente al estado estacionario. Esto no es sólo debido a que sea desarrollado durante el mismo trabajo, sino a que la información física contenida en el sistema es la que lleva a obtener este tipo de solución, sin embargo, posiblemente para mejorar los criterios de convergencia, sea adecuado resolver la ecuación por otro método, por ejemplo, elemento finito o elemento libre de mallado, aunque se debe aclarar que para fines del estudio del sistema este método es suficiente.

8. Apéndice II:

8.1. Lista de Tablas:

Tabla 1.- Reproducción parcial de los valores presentados por Fournier ^[2] para la sangre y el pasma.....	9
Tabla 2.- Flujo volumétrico y esfuerzo cortante generados por distintas magnitudes del gradiente de presión constante.....	95

8.2. Lista de Figuras:

Figura 1.1.- Datos de la presión en diferentes arterias y el ventrículo, volumen del ventrículo, electrocardiograma y fonocardiograma de una persona sana ^[12]	10
Figura 1.2.- Gráfica adimensional de los tipos de bombeo de Windkessel usados en este trabajo.....	11
Figura 1.3.- Gráfica cualitativa del comportamiento de la presión en diferentes zonas del cuerpo humano ^[12]	12
Figura 1.4.- Pulsos de presión y velocidad en las ramas arteriales de un perro ^[3]	14

Figura 1.5.- Distintas formas de medir la presión sanguínea.....	15
Figura 1.6.- Hematocrito para: persona normal, anémica y policitémica ^[12]	17
Figura 1.7.- Curva de viscosidad relativa para el plasma y la sangre referida a la viscosidad del agua, donde se observa la dependencia de la viscosidad con respecto al hematocrito.....	19
Figura 1.8.- Modelo del tejido tisular de Krogh.....	20
Figura 1.9.- El sistema de de flujo.....	21
Figura 4.1.- Distribución de velocidades en estado estacionario generadas por distintos valores del gradiente de presión para $N = 1.25$	47
Figura 4.2.- Distribución de esfuerzos cortantes para diferentes gradientes de presión para $N = 1.25$	48
Figura 4.3.- Distribución de velocidades para distintos valores del coeficiente de propiedades para $k = 0.4$ y $\frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0.3$	51
Figura 4.4.- Distribución de esfuerzos cortantes para distintos valores del coeficiente de propiedades para $k = 0.4$ y $\frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0.3$	52
Figura 4.5.- Distribución de velocidades para distintos valores de k para un gradiente de presión constante $\frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0.3$	54

Figura 4.6.- Distribución de esfuerzos para distintos valores de k y un gradiente constante de $\frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0.3$	55
Figura 4.7.- Distintos gradientes de presión empleados en este trabajo, representados por sus coeficientes respectivos.....	67
Figura 4.8.- Distribución de velocidades a través del tiempo con distintos números de Womersley $Wo_1 = 1$ y $Wo_2 = 5$ para $N = 1.7$ para el gradiente de presión $B = 1$ $A = \Gamma = 0$	71
Figura 4.9.- Error relativo calculado de acuerdo con la ecuación (4.62) a través del tiempo.....	75
Figura 4.10.- Distribución de velocidades a través del tiempo con distintos números de Womersley $Wo_1 = 1$ y $Wo_2 = 5$ para $N = 1.7$ y $n = 0.25$ para el gradiente de presión $B = 1$ $A = \Gamma = 0$	76
Figura 4.11.- Distribución de velocidades a través del tiempo con distintos números de Womersley $Wo_1 = 1$ y $Wo_2 = 5$ para $N = 1.7$ y $n = 0.25$ para el gradiente de presión $B = 1$ $\Gamma = 0.5$ y $A = 0$	77
Figura 4.12.- Distribución de velocidades a través del tiempo con números de Womersley $Wo_1 = Wo_2 = 5$ para $N = 1.7$ y $n = 0.25$ para el gradiente de presión $B = 1$ $A = \Gamma = 0$	78

Figura 4.13.- Distribución de velocidades a través del tiempo con números de Womersley $Wo_1 = Wo_2 = 1$ para $N = 1.7$ y $n = 0.25$ para el gradiente depresión $B = 1$ $A = \Gamma = 0$	79
Figura 4.14.- Distribución de velocidades a través del tiempo con números de Womersley $Wo_1 = 0.1$ $Wo_2 = 5$ para $N = 0.8$ y $n = 0.25$ para el gradiente depresión $B = 1$ $A = \Gamma = 0$	80
Figura 4.15.- Distribución de velocidades a través del tiempo con números de Womersley $Wo_1 = 0.1$ $Wo_2 = 5$ para $N = 1.9$ y $n = 0.25$ para el gradiente depresión $B = 1$ $A = \Gamma = 0$	81
Figura 4.15.-Presión evaluada en la interfaz fluido-fluido para distintos valores de n	83
Figura 4.17.- Presión evaluada en la interfaz fluido-fluido para distintos valores de k	84
Figura 4.18.- Presión evaluada en la interfaz fluido-fluido para distintos $\frac{\partial P}{\partial \zeta}$ dados por la ecuación (4.50).....	85
Figura 4.19.- Presión durante la sístole y diástole medida experimentalmente ^[12]	85

9. Nomenclatura:

$\underline{\underline{T}}$ Tensor de esfuerzos.

p Presión hidrostática.

$\underline{\underline{D}}$ Tensor de deformación.

$\underline{\underline{T}}_y$ Tensor esfuerzo de cedencia.

s Parámetro constante (fluido de Casson).

n Parámetro constante que influye en la pseudoplasticidad del material (fluido de la ley de la potencia).

r Coordenada radial en coordenadas cilíndricas.

R Distancia del centro del tubo a la pared.

μ Viscosidad independiente del segundo invariante del tensor de deformación.

μ_p Viscosidad del plasma.

α Parámetro usado en la ecuación de Charm y Kurland.

H Concentración de hematocrito.

$\underline{\underline{I}}$ Tensor igual a la matriz identidad

$II_{\underline{\underline{D}}}$ Segundo invariante del tensor de rapidez de deformación.

η Viscosidad no newtoniana dependiente del segundo invariante del tensor de rapidez de deformación.

∇ Operador nabla.

\underline{v} Vector velocidad.

m Parámetro constante (fluido de la ley de la potencia).

tr Traza.

η_c Viscosidad característica

k Posición radial donde se ubicada la interfase fluido-fluido.

$\underline{\underline{A}}_1$ Tensor cinemático relacionado con el tensor de deformación.

$\underline{\underline{A}}_2$ Tensor cinemático relacionado con el tensor de deformación. Contiene una derivada material.

α_1 Módulo material relacionado con los esfuerzos normales.

α_2 Módulo material relacionado con los esfuerzos normales.

$\frac{D}{Dt}$ Derivada material.

$\underline{\underline{L}}$ Gradiente de velocidad.

$\underline{\underline{l}}$ Gradiente de velocidad adimensional.

θ Velocidad axial adimensional.

U_c Velocidad característica definida como el promedio de la velocidad a través del área de flujo.

Π Presión característica referida a la máxima presión del sistema.

ρ_c Densidad característica referida a la densidad del agua (ver figura 1.6).

γ_c Tensión superficial característica tomada como el máximo de dicha propiedad.

ω Periodo característico referido como el ciclo de bombeo del ventrículo.

N Consiste en la relación entre las densidades y propiedades viscosas por medio de un cociente. La importancia de esta relación será mostrada durante el desarrollo de las soluciones del sistema.

∇^* Operador nabla adimensional.

Re Número de Reynolds.

St Número de Strouhal.

Ca Número capilar.

Wo Número de Womersley.

ξ Coordenada radial en coordenadas cilíndricas adimensionales.

Θ Coordenada acimutal en coordenadas cilíndricas adimensionales.

ζ Coordenada axial en coordenadas cilíndricas adimensionales.

θ_1 Velocidad axial adimensional de la región interior del sistema.

θ_2 Velocidad axial adimensional de la región exterior del sistema.

$\tau_{\xi\zeta}^I$ Esfuerzo cortante de la región interior del sistema.

$\tau_{\xi\zeta}^{II}$ Esfuerzo cortante de la región exterior del sistema.

P_0 Presión en el centro del tubo.

$P|_{\xi=k}$ Presión en la interfase fluido fluido.

h Contador usado en las series de Fourier.

λ_{1h} Valor propio de la región interior.

λ_{2h} Valor propio de la región exterior.

A Constante asociada a la parte constante del gradiente de presión axial.

B Constante asociada a la serie de Fourier en el gradiente de presión axial.

Γ Constante asociada a la función seno o coseno del gradiente de presión axial.

Er Error relativo.

i Contador para el radio (método numérico).

κ Contador para el tiempo (método numérico).

10. Bibliografía:

- [1] Taber L. A., *Nonlinear Theory of Elasticity: Applications in Biomechanics*. World Scientific Publishing Company (1998)
- [2] Fournier R. L., *Basic Transport Phenomena in Biomedical Engineering*. 2nd Edition, Taylor & Francis, New York, (2006)
- [3] Ku D.N., Blood flow in arteries, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 29 (1997) 399–434.
- [4] Sud V. K. and Sekhon G. S., Arterial flow under periodic body acceleration, *Bull. Math. Biol.* 47 (1985), no. 1, 35–52
- [5] Chaturani P. and Wassf Isaac A. S. A., Blood flow with body acceleration forces, *Int. J. Eng. Sci.* 33 (1995), no. 12 1807–1820
- [6] Barbee and Cokelet, The Fahraeus Effect, *Microvasc. Res.* (1971) 3:6-16.
- [7] Massoudi M., Phuoc T. X., Pulsatile flow of blood using a modified second-grade fluid model *Computers and Mathematics with Applications* 56 (2008) 199–211.
- [8] Sud V. K. and Sekhon G. S., Blood flow subjected to a single cycle of body acceleration, *Bull. Math. Biol.* 46 (1984), no. 5–6, 937–949
- [9] Ham A. W., *Tratado de Histología, Sexta Edición*. Ed. Iberoamericana (1970)
- [10] Robbins, Cotran, Kumar, Collins, *Patología estructural y funcional*. Segunda Edición. McGraw-Hill interamericana (1971)
- [11] Schumacher-Marienfrid, *Compendio de histología humana para estudiantes de medicina, odontología y ciencias naturales*. Editora Nacional EDINAL, S. de R. L., México, D. F. (1964)
- [12] Guyton A. C. and Hall J. E., *Textbook of Medical Physiology*. 11 edition. Saunders (2003)

- [13] Tsangaris y Drikakis, Pulsating Blood Flow in an anisotropic elastic tube. Linear approximation of the Pressure Waves. *Med. Biol. Engng. Comput. Sci.* 27, 82 (1989).
- [14] Calvo F. J., Simulación del flujo sanguíneo y su interacción con la pared arterial mediante modelos de elementos finitos. Tesis Doctoral Universidad Politécnica de Madrid. (2006)
- [15] Sandar M., Computational model of blood flow in the aorto-coronary bypass graft. *BioMedical Engineering OnLine.* (2006)
- [16] Kang C.K., Eringen A.C., The effect of microstructure on the rheological properties of blood, *Bull. Math. Biol.* 38 (1976) 135–159.
- [17] Segre G., Silberberg A., Behavior of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow. Part 1, *J. Fluid Mech.* 14 (1962) 115–135.
- [18] Segre G., Silberberg A., Behavior of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow. Part 2, *J. Fluid Mech.* 14 (1962) 136–157.
- [19] Schlichting H., Gersten K., *Boundary layer theory.* Springer (2003).
- [20] Haynes R. F., Physical basis of the dependence of blood viscosity on tube radius. *Am. J. Physiol.* (1960) 198:1193.
- [21] Charm S. E. and Kurland G. S., *Blood flow and microcirculation.* New York: John Wiley & Sons (1974).
- [22] Lightfoot E. N., The roles of mass transfer in tissue function. In *The Biomedical Engineering handbook*, ed. J. D. Bronzino, 1656 – 1670. Boca Raton, FL: CRC Press, Inc. (1995)
- [23] Whiteley J., Southern J., Pitt-Francis J., Multi-scale computational modelling in biology and physiology. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, Volume 90, Issues 1-3, January-April 2006, Pages 60-89.

- [24] Owens R. G., A new microstructure-based constitutive model for human blood. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 140 (2006) 57–70.
- [25] Ahmadi G., A continuum theory of blood-flow, *Scientia Sinica* 24 (1981) 1465–1474.
- [26] Duprez D. A., Florea N., Hoke L., Killpatrick B., Cohn J. N., Exercise blood pressure response is inversely related to large artery, but not to small artery elasticity. *American Journal of Hypertension*, Volume 18, Issue 5, Supplement 1, May (2005), Pages A12-A13.
- [27] Fahraeus R., Lindquist T., The viscosity of blood in narrow capillary tubes, *Amer. J. Physiol.* 96 (1931) 562–568.
- [28] Slattery, *Advanced Transport Phenomena*. Cambridge University Press (1999)
- [29] Deen, *Analysis of Transport Phenomena*. Oxford University Press (1998)
- [30] Truskey G. A., Yuan F., Katz D. F. *Transport Phenomena in Biological Systems*. 2nd Edition, Prentice Hall (2009).
- [31] Bird R. B., Curtis C. F., Armstrong R. C., Hassager O., *Dynamics of Polymeric Liquids*. 2nd Ed. Wiley Interscience (1987).
- [32] Massoudi M., Vaidya A., On some generalizations of the second grade fluid model, *Nonlinear Anal. RWA Nonlinear Analysis: Real World Applications* 9 (2008) 1169 – 1183
- [33] Nhan Phan-Thien, *Understanding Viscoelasticity*. Springer; 1st ed. 2002. Corr. 2nd printing edition (October 1, 2008)
- [34] Larson, R.G., *Rheol. Acta, Constitutive equations for polymer melts and solutions*, Butterworth, Boston, 1988.
- [35] R. I. Tanner & K. Walters *Rheology: An historical perspective*. Elsevier (1998)
- [36] Astarita G. and Marucci G., *Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, (1974).

- [37] Dunn J. E., Fosdick R. L., Thermodynamics, stability, and boundedness of fluids of complexity 2 and fluids of second grade, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 56 (1974) 191–252.
- [38] Owen H. R., Elwell C. E., Harkness W., Goldstone J., Delpy D. T., Wyatt J. S. and Smith M., Use of near infrared spectroscopy to estimate cerebral blood flow in conscious and anaesthetized adult subjects *British Journal of Anaesthesia*, Vol 96, Issue 1 43-48 (2006)
- [39] Pyke K. E. and Tschakovsky Michael E., The relationship between shear stress and flow-mediated dilatation: implications for the assessment of endothelial function *J Physiol* 568.2 (2005) pp 357–369 (2008)
- [40] Makosco C. W., *Rheology: Principles, Measurements, and Applications*. Wiley-CHV (1994).
- [41] Majhi S.N., Usha L., Modeling the Fahraeus–Lindqvist effect through fluids of differential type, *Int. J. Engng. Sci.* 26 (1988) 503–508.
- [42] Reiner M., Scoot-Blair G. w., The flow of blood through narrow tubes. *Nature London* 184, (1959) 354–355.
- [43] Rohlf K. y Tenti G., The role of the Womersley Number in pulsatile blood flow a theoretical study of the Casson model. *Journal of Biomechanics* 34 (2001) 141–148.
- [44] Crépeau E., Sorine M., A reduced model of pulsatile flow in an arterial compartment. *Chaos, Solitons and Fractals*. Volume 34, Issue 2, October 2007, Pages 594-605.
- [45] Loudon C. AND Tordesillas A., The Use of the Dimensionless Womersley Number to Characterize the Unsteady Nature of Internal Flow. *J. theor. Biol.* (1998) 191, 63-78.
- [46] Mitchell Gary F., Parise Helen, Vita Joseph A., Larson Martin G., Warner Elaine, Keaney John F., Keyes Jr,Michelle J., Levy Daniel, S. Vasan Ramachandran, Benjamin Emelia J., Local Shear Stress and Brachial Artery Flow–Mediated Dilation The Framingham Heart Study *Hypertension*. 2005;45:e9 Downloaded from hyper.ahajournals.org by on November 24, 2008.

- [47] Hernández González Rene Moisés. Comunicación verbal.
- [48] Brenner, Howard. Unsolved problems in Fluid Mechanics: On the Historical Misconception of Fluid Velocity as Mass Motion, Rather than Volume Motion. The Ohio State University. 2003.
- [49] Dongying Qian, Adeniyi Lawal Numerical study on gas and liquid slugs for Taylor flow in a T-junction microchannel Chemical Engineering Science 61 (2006) 7609 – 7625
- [50] Cornelissen V. A. Fagard R. H. Effect of resistance training on resting blood pressure: A meta-analysis of randomized controlled trials. Journal of Hypertension. 2005;23:251.