UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EJEMPLOS DE PROPIEDADES TOPOLÓGICAS NO l-INVARIANTES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

JOSÉ ALFREDO URIBE ALCÁNTARA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FIDEL CASARRUBIAS SEGURA

2010

1. Datos del alumno
Uribe
Alcántara
José
Alfredo
26 51 58 25
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
098338591

2. Datos del tutor
Dr.
Fidel
Casarrubias
Segura

3. Datos del sinodal 1
Dra.
María de Jesús
López
Toriz

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Oleg
Okunev

5. Datos del sinodal 3
M. en C.
Carlos Gerardo
Paniagua
Ramírez

6. Datos del sinodal 4
Dr.
Ángel
Tamariz
Mascarúa

7. Datos del trabajo escrito
Ejemplos de propiedades topológicas no l-invariantes
70 p
2010

Contenido

Introducción

Jun-iti Nagata demostró en 1949 que la estructura topológica de un espacio de Tychonoff X está completamente determinada por la estructura de anillo topológico del espacio $C_p(X)$, es decir, demostró que dos espacios de Tychonoff X y Y son homeomorfos si y sólo si sus anillos topológicos $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son topológicamente isomorfos. Es natural preguntarse si sucede lo mismo cuando se considera en $C_p(X)$ la estructura de espacio vectorial topológico. La respuesta es negativa: existen espacios no homeomorfos X y Y cuyos espacios $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son linealmente homeomorfos. Este hecho da origen a las nociones de espacios ℓ-equivalentes y de propiedad topológica ℓ-invariante, y a la búsqueda de propiedades topológicas que sean ℓ-invariantes.

La búsqueda de propiedades ℓ-invariantes es una labor que aún no ha terminado. En este trabajo presentamos un método para construir espacios ℓ-equivalentes y utilizamos dicho método para mostrar que algunas de las propiedades topológicas clásicas no son preservadas por la relación de ℓ-equivalencia.

En el capítulo 1 de esta tesis se muestran las propiedades más básicas de los espacios de funciones continuas $C_p(X, Z)$ dotados de la topología de la convergencia puntual. Una vez que hemos establecido a los espacios $C_p(X)$, aclaramos cuál es la relación entre $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ bajo el supuesto de que existe una función continua entre los espacios X y Y. Para lograr esto introducimos la noción de mapeo dual y exponemos algunas de sus propiedades básicas. Observamos también que si Z tiene alguna estructura algebraica y $p : X \to Y$ es una función, entonces el mapeo dual p^* es un homomorfismo de las correspondientes estructuras algebraicas en $C_p(X, Z)$ y $C_p(Y, Z)$. En la última sección de este capítulo verificamos que cualquier espacio X es homeomorfo a un subespacio de $C_p(C_p(X))$ y utilizamos este hecho para demostrar el teorema de Nagata.

En el capítulo 2 introducimos la noción de espacios ℓ-equivalentes y la noción de propiedad topológica ℓ-invariante. Demostramos que si ϕ es alguna de las funciones cardinales: nw, d, iw, entonces la propiedad "$\phi(X) \leq \tau$", donde τ es un cardinal infinito, es una propiedad ℓ-invariante. En la segunda sección de este capítulo exponemos un método para construir ejemplos de espacios ℓ-equivalentes. Veremos que si X es un espacio topológico y F es un retracto de X, entonces F está ℓ-inmerso en X (véase 2.15). También mostraremos que si F es un subconjunto ℓ-inmerso en X, entonces los espacios X^+ y $(X/F) \oplus F$ son ℓ-equivalentes (ver 2.26). Así, para encontrar propiedades topológicas que no se preservan por la relación de ℓ-equivalencia bastará hallar propiedades que X^+ y $(X/F) \oplus F$ no tengan en común.

En el capítulo final de esta tesis se presentan diversos ejemplos en los que se utiliza el procedimiento descrito en el capítulo 2. La finalidad de presentar estos ejemplos es mostrar que numerosas propiedades topológicas no son ℓ-invariantes. Por ejemplo, en este capítulo demostramos que la propiedad de Baire, la normalidad, la numerabilidad de la extensión de un espacio, la propiedad "ser un espacio diádico" y la propiedad de Fréchet no son preservadas por la relación de ℓ-equivalencia.

José Alfredo Uribe Alcántara

Capítulo 1

Definiciones y hechos básicos relativos a $C_p(X)$

1.1 La topología de la convergencia puntual

Como es bien sabido, la topología de cualquier espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ está completamente determinada por la convergencia de sus redes. Efectivamente, recordemos que $x_0 \in cl_X(A)$ si y sólo si existe una red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ en A que converge a x_0 y que una red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ en un espacio X converge a un punto $x_0 \in X$ si para toda vecindad V de x_0 existe un λ_0 en el conjunto dirigido Λ tal que $x_\lambda \in V$ para toda $\lambda \geq \lambda_0$.

En el caso de los espacios de funciones es natural decir que una red de funciones $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ en Z^X (donde Z es un espacio topológico) *converge puntualmente* a una función $f_0 \in Z^X$ si para toda $x \in X$, la red $\{f_\alpha(x) : \alpha \in A\}$ converge a $f_0(x)$ en el espacio topológico Z. Observe que en la noción de convergencia puntual de una red de funciones no hay (por el momento) una topología inmiscuida para Z^X. Una pregunta muy natural es entonces la siguiente: ¿existe alguna topología en Z^X en la que la convergencia de redes sea equivalente a la convergencia puntual de redes de funciones? La siguiente proposición da respuesta a este planteamiento.

1.1 Proposición. *Existe una única topología en Z^X tal que la convergencia puntual de redes en Z^X coincide con la convergencia en el sentido de esta topología. Esta topología es la topología producto en Z^X.*

Demostración. Verifiquemos primero que la convergencia de redes en la topología producto coincide con la convergencia puntual. Sea $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ una red en Z^X que converge puntualmente a $f_0 \in Z^X$. Veamos que $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ converge a f_0 en la topología producto de Z^X: Consideremos U un elemento de la base canónica para Z^X que contiene a f_0. Entonces $U = \{g \in Z^X : g(x_1) \in V_1, \ldots, g(x_n) \in V_n\}$ donde $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $V_1, \ldots, V_n$ son abiertos en Z. Además $f_0(x_i) \in V_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $\{f_\alpha(x_i) : \alpha \in A\}$ converge a $f_0(x_i)$, existe $\alpha_i \in A$ tal que $f_\alpha(x_i) \in V_i$ para toda $\alpha \geq \alpha_i$. Debido a que A es dirigido por $\leq$, existe $\alpha_0 \in A$ tal que $\alpha_0 \geq \alpha_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así:

$$\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow \alpha \geq \alpha_i \text{ para toda } i \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow f_\alpha \in U.$$

Por lo tanto, existe $\alpha_0 \in A$ tal que $f_\alpha \in U$ para toda $\alpha \geq \alpha_0$.

Ahora, sea $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ una red en Z^X que converge a $f_0 \in Z^X$ en la topología producto de Z^X. Verifiquemos que $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ converge puntualmente a f_0. Consideremos un punto $x \in X$ y un abierto V que contiene a $f_0(x)$. Entonces $U = \{g \in Z^X : g(x) \in V\}$ es un abierto canónico de Z^X que contiene a f_0. Como $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ converge a f_0 en Z^X, existe $\alpha_0 \in A$ tal que $f_\alpha \in U$ para toda $\alpha \geq \alpha_0$, es decir, existe $\alpha_0 \in A$ tal que $f_\alpha(x) \in V$ para toda $\alpha \geq \alpha_0$. Por lo tanto $\{f_\alpha(x) : \alpha \in A\}$ converge a $f_0(x)$ en Z. Con esto podemos concluír que $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ converge puntualmente a f_0.

Finalmente, sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ dos topologías en Z^X tales que la convergencia de redes en Z^X coincide con la convergencia puntual. Verifiquemos que si $N \subseteq Z^X$ entonces $cl_{\mathcal{S}}(N) = cl_{\mathcal{T}}(N)$. Sea $f \in cl_{\mathcal{S}}(N)$. Entonces existe $S = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ una red en Z^X con rango en N que converge a f en la topología $\mathcal{S}$. Obtenemos que $\{f_\alpha(x) : \alpha \in A\}$ converge a $f(x)$ en Z, para toda $x \in X$. Por lo tanto, $S = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ converge a f en la topología $\mathcal{T}$ y $S(A) \subseteq N$. Hemos probado que $f \in cl_{\mathcal{T}}(N)$. La otra contención se demuestra del mismo modo. $\square$

Por otro lado, para el lector no debe ser difícil verificar que si X es un subespacio de un espacio Y, S es una red en X y $x_0 \in X$, entonces S converge a x_0 en el espacio X si y sólo si S converge a x_0 en el espacio Y. Consideremos ahora a un conjunto no vacío $M \subseteq Z^X$. Verifiquemos que una red en M converge puntualmente a un elemento $f \in M$ si y sólo si converge en M con la topología heredada de la topología producto de Z^X. Sea $S = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ una red en M que converge puntualmente a $f_0 \in M$. Entonces, para toda $x \in X$ se cumple que $\{f_\alpha(x) : \alpha \in A\}$ converge a $f_0(x)$ en Z. Como M es un subespacio de Z^X, podemos ver a S como una red en

Z^X que converge puntualmente a $f_0 \in Z^X$. Por 1.1, S converge a f_0 en la topología producto de Z^X. Si equipamos a M con la topología heredada de la topología producto en Z^X, por la observación anterior concluimos que S converge a f_0 en M.

Recíprocamente, sea $S = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ una red en M que converge a $f_0 \in M$ en la topología heredada de la topología producto de Z^X. Entonces S converge a f_0 en la topología producto de Z^X. Por 1.1, S converge puntualmente a f_0.

Todo lo anterior motiva la siguiente definición.

1.2 Definición. Sean X un conjunto (no vacío) y Z un espacio topológico. Considere al subconjunto no vacío $M = \{f \mid f : X \to Z \text{ es una función}\}$ de Z^X, es decir, M es un conjunto de funciones de X en Z. La *topología de la convergencia puntual* en M es la topología de subespacio de Z^X, cuando Z^X está equipado con la topología producto.

Esta definición justifica el nombre con el que en ocasiones se refieren algunos autores a la topología de un producto topológico de Tychonoff, y a la topología de sus subespacios. Por otro lado, se sabe también que la topología producto de Z^X es generada por la familia de todas las proyecciones. La proyección correspondiente a un punto $x \in X$ asigna a cada función $f \in Z^X$ el punto $f(x)$. En el contexto de espacios de funciones esta función es llamada *función evaluación* y es denotado por $\hat{x}$. Es decir, para cada $x \in X$, $\hat{x} : Z^X \to Z$ es la función definida por la regla:

$$\hat{x}(f) = f(x), \text{ para cada } f \in Z^X.$$

En la siguiente proposición enunciamos propiedades conocidas de la topología de subespacio de un producto topológico.

1.3 Proposición. *Sean X un conjunto, Z un espacio y M un subconjunto de Z^X. Si M está equipado con la topología de la convergencia puntual entonces:*

a) La topología de M es generada por la familia de las funciones evaluación $\hat{x}$, donde $x \in X$.

b) Los conjuntos de la forma

$$[x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n] = \{g \in M : g(x_1) \in V_1, \ldots, g(x_n) \in V_n\}$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n$ son puntos de X, y $V_1, \ldots, V_n$ son abiertos en Z, forman una base para M.

c) Una función $h : Y \to M$ de un espacio topológico Y a M es continua si y sólo si la composición $\hat{x} \circ h$ es continua para toda $x \in X$.

d) Si Z es un espacio Tychonoff, entonces M también lo es.

Es importante notar ahora que la definición de la topología de la convergencia puntual en algún subespacio M de Z^X no depende de alguna topología en X; pero resulta que en los casos más interesantes la definición del conjunto M dependerá de la topología de X. Por ejemplo, en este trabajo consideraremos conjuntos de tipo $C(X,Z) = \{f : f : X \to Z$ es una función continua$\}$, donde X y Z son espacios topológicos. El conjunto $C(X,Z)$ equipado con la topología de la convergencia puntual será denotado $C_p(X,Z)$. El siguiente corolario nos proporciona una caracterización para la llamada base canónica de $C_p(X,Z)$.

1.4 Corolario. *Sea $\mathcal{B}$ una base para el espacio Z.*

a) La colección $\{[x_1,\ldots,x_n;O_1,\ldots,O_n] : n \in \mathbb{N}, x_i \in X, O_i \in \mathcal{B}$ para $i = 1,\ldots,n\}$, es una base para el espacio $C_p(X,Z)$.

b) Si $f_0 \in C_p(X,Z)$, entonces los conjuntos de la forma

$$[f_0, x_1, \ldots, x_n, O_1, \ldots, O_n] = \{g \in C_p(X,Z) : g(x_1) \in O_1, \ldots, g(x_n) \in O_n\}$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$ y $f_0(x_i) \in O_i \in \mathcal{B}$ para $i \in \{1,\ldots,n\}$, constituyen una base local para $C_p(X,Z)$ en el punto f_0.

De ahora en adelante, denotaremos con $C_p(X)$ al espacio $C_p(X,\mathbb{R})$. Note que como $\mathbb{R}$ es un espacio Tychonoff, el espacio $C_p(X)$ también lo es.

1.5 Corolario. *Si $f_0 \in C_p(X)$, entonces los conjuntos de la forma*

$$[f_0, x_1, \ldots, x_n, \epsilon] = \{g \in C_p(X) : |f_0(x_i) - g(x_i)| < \epsilon \text{ para } i = 1,\ldots,n\}$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $x_1,\ldots,x_n \in X$ y $\epsilon > 0$, forman una base local para $C_p(X)$ en el punto f_0.

Las bases descritas en los corolarios anteriores son usualmente llamadas *bases canónicas*, y sus elementos *conjuntos abiertos canónicos.*

Como podemos notar, la estructura topológica de Z induce una topología en $C(X,Z)$. Ahora demostraremos que si Z tiene además una estructura algebraica, ésta también induce una estructura algebraica en $C_p(X,Z)$.

1.6 Proposición. *Si Z es un espacio vectorial topológico (respectivamente, anillo topológico, grupo topológico) $C_p(X, Z)$ es un espacio vectorial topológico (respectivamente, anillo topológico, grupo topológico).*

Demostración. Supongamos que Z es un espacio vectorial topológico (los casos restantes se manejan de forma parecida). Esto significa que Z es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y está equipado con una topología que hace continuos a los mapeos adición y producto por escalares:

$$+ : Z \times Z \to Z;\ (x, y) \mapsto x + y \qquad \cdot : \mathbb{R} \times Z \to Z;\ (r, x) \mapsto r \cdot x \tag{1}$$

Para cada par f y g en Z^X definimos a las funciones $f + g$ y rf (con $r \in \mathbb{R}$) mediante

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x),\\ (r\, f)(x) &= r \cdot f(x),\end{aligned}$$

donde $x \in X$. Ahora definimos:

a) La función *adición* $\phi_+ : Z^X \times Z^X \to Z^X$ dada por $\phi_+(f, g) = f + g$, para cada $(f, g) \in Z^X \times Z^X$.

b) La función *producto por escalares* $\phi : \mathbb{R} \times Z^X \to Z^X$ donde $\phi(r, f) = rf$, para cada $(r, f) \in \mathbb{R} \times Z^X$.

No es díficil comprobar que estas operaciones binarias dan a Z^X una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Afirmación 1. La función ϕ_+ es continua cuando Z^X está equipado con la topología producto.

Demostración de la afirmación: Sea $x \in X$. Considere a las funciones γ_x, $\delta_x : Z^X \times Z^X \to Z$ cuya regla de correspondencia es $\gamma_x(f, g) = f(x)$ y $\delta_x(f, g) = g(x)$, respectivamente. Note que γ_x es la composición del mapeo proyección correspondiente al primer factor de $Z^X \times Z^X$, con el mapeo evaluación $\hat{x}$. Por la proposición 1.3 y la definición A.10, γ_x es continua. De forma semejante se justifica la continuidad de δ_x. Por lo anterior, $\gamma_x \triangle \delta_x \in C(Z^X \times Z^X,\ Z \times Z)$. Evidentemente $\hat{x} \circ \phi_+ = + \circ (\gamma_x \triangle \delta_x)$. Utilizando esto último obtenemos que $\hat{x} \circ \phi_+$ es continua. $\boxtimes$

Afirmación 2. La topología producto en Z^X hace continua a la función ϕ.

Demostración de la afirmación: Sea $x \in X$. Definimos $\psi_x : \mathbb{R} \times Z^X \to Z$ mediante $\psi_x(r, f) = f(x)$. Esta función es continua porque es la composición del mapeo proyección en el segundo factor de $\mathbb{R} \times Z^X$, con el mapeo evaluación $\hat{x}$. Sea $\pi_1 : \mathbb{R} \times Z^X \to \mathbb{R}$ la proyección al primer factor del producto $\mathbb{R} \times Z^X$. Observe que $\hat{x} \circ \phi = \cdot \circ (\pi_1 \triangle \psi_x)$. Por (1), $\hat{x} \circ \phi$ es continua. $\boxtimes$

El conjunto $C_p(X, Z)$ es cerrado con respecto a la adición y el producto por escalares ya que para cualesquiera f, $g \in C_p(X, Z)$ y $r \in \mathbb{R}$ sucede que $\phi_+(f, g) = + \circ (f \triangle g)$ y $\phi(r, f) = \cdot \circ (r_X \triangle f)$, donde r_X es la función constante cuyo valor en todos los puntos de X es igual a r. Así, $C_p(X, Z)$ es un subespacio vectorial de Z^X. Obtenemos en consecuencia que $\phi_+ \restriction_{C_p(X,Z) \times C_p(X,Z)}: C_p(X, Z) \times C_p(X, Z) \to C_p(X, Z)$ y $\phi \restriction_{\mathbb{R} \times C_p(X,Z)}: \mathbb{R} \times C_p(X, Z) \to C_p(X, Z)$ son funciones continuas. $\square$

Finalizaremos la presente sección demostrando que los espacios de funciones $C_p(X, Z)$ son espacios localmente convexos cada vez que el espacio Z lo sea, y además, probaremos que cuando Z es un espacio conexo por trayectorias, el espacio $C_p(X, Z)$ es denso en Z^X. Primeramente, recordaremos la definición de espacio localmente convexo.

1.7 Definición. Se dice que un espacio vectorial topológico X es *localmente convexo* si cada punto de X tiene una base de vecindades formada por conjuntos convexos.

El siguiente lema será muy útil para la demostración de la proposición 1.9.

1.8 Lema. *Sea X un espacio vectorial topológico y sea $x \in X$. La función $T_x : X \to X$ dada por: $T_x(y) = x + y$, es un homeomorfismo.*

Demostración. Si y_1 y y_2 son elementos de X tales que $T_x(y_1) = T_x(y_2)$ entonces $x + y_1 = x + y_2$. Así $y_1 = y_2$. Si $z \in X$ entonces $T_x(z - x) = z$. Por lo tanto T_x es biyectiva.

Ahora, sea $\phi : X \to \{x\} \times X$; $\phi(y) = (x, y)$. Como ϕ es el producto diagonal de una función constante y de la función identidad, ϕ es continua (ver A.11). Debido a que $T_x = + \circ \phi$ y a que $+ : X \times X \to X$ es continua, obtenemos que T_x es un mapeo continuo.

Observe que la función inversa de T_x es T_{-x}. Por lo visto en el párrafo anterior, T_{-x} también es continua. $\square$

Para subconjuntos B y C de un espacio vectorial topológico X definimos $B+C=\{b+c\,:\,b\in B,\ c\in C\}$ y $-B=\{-b\,:\,b\in B\}$. Si $x\in X$ entonces escribimos $x+B$ en lugar de $\{x\}+B$. Note que $x+B=T_x(B)$.

La siguiente propiedad de los espacios vectoriales topológicos localmente convexos nos será de gran utilidad posteriormente.

1.9 Proposición. *Un espacio vectorial topológico X es localmente convexo si y sólo si el cero de X tiene una base de vecindades formada por conjuntos convexos.*

Demostración. Claramente bastará demostrar que la condición es suficiente. Sea $\mathcal{B}(0)$ una base de vecindades de 0 con las características mencionadas y sea $x\in X$. Definimos $\mathcal{B}(x)=\{x+U\,:\,U\in\mathcal{B}(0)\}$. Probaremos que $\mathcal{B}(x)$ es una base local de vecindades convexas para x.

Sea $U\in\mathcal{B}(0)$. Como U es abierto, por el lema 1.8 tenemos que $T_x(U)=x+U$ es abierto. Además, $0\in U$ implica que $x\in x+U$.

Ahora, sea W una vecindad de x. Así $T_{-x}(W)=-x+W$ es una vecindad de 0 y entonces existe $U\in\mathcal{B}(0)$ tal que $U\subseteq -x+W$. Obtenemos entonces que $T_x(U)=x+U\subseteq T_x(-x+W)=W$. Por lo tanto $x+U\in\mathcal{B}(x)$ y $x+U\subseteq W$.

Finalmente, veamos que si $U\in\mathcal{B}(0)$ entonces $x+U$ es convexo. Sean $u_1,\ u_2\in U$ y $r\in[0,1]$. De este modo:

$$r(x+u_1)+(1-r)(x+u_2)=rx+ru_1+(1-r)x+(1-r)u_2=x+ru_1+(1-r)u_2.$$

Como U es convexo, $ru_1+(1-r)u_2\in U$ y en consecuencia:

$$r(x+u_1)+(1-r)(x+u_2)=x+ru_1+(1-r)u_2\in x+U.$$

En conclusión, x tiene una base de vecindades formada por conjuntos convexos. □

Enseguida probaremos que la propiedad de ser un espacio localmente convexo se hereda por los subespacios vectoriales.

1.10 Observación. Sea Y un espacio vectorial topológico localmente convexo. Si X es un subespacio vectorial de Y entonces X es localmente convexo.

Demostración. Si Y está equipado con una topología tal que la adición y el producto por escalares ($+$ y $\cdot$, respectivamente) son continuos entonces

$+\restriction_{X\times X}: X \times X \to X$ y $\cdot \restriction_{\mathbb{R}\times X}: \mathbb{R} \times X \to X$ son mapeos continuos (debemos tener presente que X es cerrado bajo adición y producto por escalares). Por la proposición 1.9, bastará probar que 0 tiene una base de vecindades convexas en X. Sea $\mathcal{B}(0)$ una base de vecindades para Y en 0 formada por conjuntos convexos. Definimos $\mathcal{D}(0) = \{X \cap U : U \in \mathcal{B}(0)\}$. Es claro que los elementos de $\mathcal{D}(0)$ son abiertos en X y que contienen a 0.

Sea W una vecindad de 0 en X. Entonces $W = X \cap V$ donde V es un abierto en Y que contiene a 0. Como $\mathcal{B}(0)$ es base de vecindades para Y en 0, existe $U \in \mathcal{B}(0)$ tal que $U \subseteq V$. Entonces $X \cap U \in \mathcal{D}(0)$ y $X \cap U \subseteq X \cap V$, es decir, $X \cap U \subseteq W$.

Finalmente, sea $U \in \mathcal{B}(0)$. Tomemos $x_1,\ x_2 \in X \cap U$ y $r \in [0,1]$. El hecho de que U es convexo implica que $rx_1 + (1-r)x_2 \in U$. Además, $rx_1 + (1-r)x_2 \in X$. Por lo tanto $rx_1 + (1-r)x_2 \in X \cap U$.

Así, hemos exhibido una base para X en 0 formada por conjuntos convexos. □

Con todo lo anterior, podemos ya demostrar que si Z es localmente convexo, entonces $C_p(X, Z)$ también lo es.

1.11 Proposición. *Si Z es un espacio localmente convexo, entonces $C_p(X, Z)$ es localmente convexo.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}(0_Z)$ una base de vecindades para Z en el punto 0_Z formada por conjuntos convexos. Denotaremos al origen de Z^X mediante $\bar{0}$. Definimos $\mathcal{B}(\bar{0}) = \{[x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n] : n \in \mathbb{N},\ x_i \in X \text{ y } V_i \in \mathcal{B}(0_Z) \text{ para toda } i = 1, \ldots n\}$. Por el corolario 1.3, $\mathcal{B}(\bar{0})$ es una colección de conjuntos abiertos en Z^X. Además, los elementos de $\mathcal{B}(\bar{0})$ contienen a $\bar{0}$ porque para cualquier $V \in \mathcal{B}(0_Z)$ se tiene que $0_Z \in V$. Por lo tanto, $\mathcal{B}(\bar{0})$ es una familia de vecindades de $\bar{0}$.

Ahora, sea B una vecindad de $\bar{0}$ en Z^X. Por el corolario 1.3, existen $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$ y W_i abiertos en Z, $i \in \{1, \ldots, n\}$, tales que $\bar{0} \in [x_1, \ldots, x_n; W_1, \ldots, W_n] \subseteq B$. Entonces W_i es vecindad de 0_Z en Z y existe $V_i \in \mathcal{B}(0_Z)$ tal que $0_Z \in V_i \subseteq W_i$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto $[x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n] \in \mathcal{B}(\bar{0})$ y

$$[x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n] \subseteq [x_1, \ldots, x_n; W_1, \ldots, W_n] \subseteq B.$$

Por último, sea $U \in \mathcal{B}(\bar{0})$. Entonces $U = [x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n]$ con $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$ y $V_i \in \mathcal{B}(0_Z)$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tomemos $f,\ g \in U$ y

$r \in [0,1]$. Sea $i_0 \in \{1,\dots,n\}$. Así, $f(x_{i_0})$ y $g(x_{i_0})$ pertenecen a V_{i_0}. Como los elementos de $\mathcal{B}(0_Z)$ son conjuntos convexos tenemos que

$$rf(x_{i_0}) + (1-r)g(x_{i_0}) = (rf + (1-r)g)(x_{i_0}) \in V_{i_0}.$$

Por lo tanto $rf + (1-r)g \in U$. De esta manera hemos probado que el origen de Z^X tiene una base de vecindades formada por conjuntos convexos. Por la proposición 1.9, Z^X es localmente convexo. En la prueba de 1.6 vimos que $C_p(X,Z)$ es subespacio vectorial de Z^X, por la observación 1.10 podemos concluir que $C_p(X,Z)$ es localmente convexo. $\square$

Recordemos ahora que un espacio topológico X es conexo por trayectorias si para cualesquiera dos puntos x y y en X, existe una función continua $\lambda : [0,1] \to X$ tal que $\lambda(0) = x$ y $\lambda(1) = y$.

Terminamos esta sección probando que cuando Z es conexo por trayectorias, el espacio $C_p(X,Z)$ es denso en Z^X.

1.12 Proposición. *Si Z es conexo por trayectorias, entonces el espacio $C_p(X,Z)$ es denso en Z^X.*

Demostración. Sea $[x_1,\dots,x_n; V_1,\dots,V_n]$ un abierto canónico de Z^X, donde $n \in \mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_n \in X$ y $V_1,\dots,V_n$ son abiertos en Z (ver 1.3). Fijemos puntos $z_i \in V_i$.
CASO 1: $n = 1$. Sea $f : X \to Z$ dada por $f(x) = z_1$ para toda $x \in X$. Entonces $f \in C_p(X,Z) \cap [x_1,\dots,x_n; V_1,\dots,V_n]$.
CASO 2: $n \geq 2$. Si probamos que:

1. Existe $\phi : \mathbb{R} \to Z$ continua tal que $\phi(i) = z_i$ para $i \in \{1,\dots,n\}$ y
2. existe $g : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $g(x_i) = i$ para $i \in \{1,\dots,n\}$

obtendremos que $f = \phi \circ g \in C_p(X,Z)$ y $f(x_i) = z_i \in V_i$ para $i \in \{1,\dots,n\}$, es decir, $f \in C_p(X,Z) \cap [x_1,\dots,x_n; V_1,\dots,V_n]$.

Demostración de 1: Sea $I = [0,1]$. Debido a que Z es conexo por trayectorias, para $k \in \{1,\dots,n-1\}$ existe $\lambda_k : I \to Z$ continua tal que $\lambda_k(0) = z_k$ y $\lambda_k(1) = z_{k+1}$. Considere $\alpha_k : [k,k+1] \to I$ dada por $\alpha_k(r) = r - k$ para cada $r \in [k,k+1]$. Entonces $\phi_k = \lambda_k \circ \alpha_k : [k,k+1] \to Z$ es continua, $\phi_k(k) = z_k$ y $\phi_k(k+1) = z_{k+1}$.

Sean $\delta : (-\infty,1] \to Z$ definida por $\delta(r) = z_1$ para todo $r \in (-\infty,1]$ y

$\psi : [n, +\infty) \to Z$ dada por $\psi(r) = z_n$ para todo $r \in [n, +\infty)$. Definamos $\phi : \mathbb{R} \to Z$ mediante:

$$\phi(r) = \begin{cases} \delta(r), & \text{si } r \leq 1; \\ \phi_k(r), & \text{si } r \in [k, k+1]; \\ \psi(r), & \text{si } r \geq n. \end{cases}$$

Observe que ϕ es continua. Además, si $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ sucede entonces que $\phi(i) = \phi_i(i) = z_i$. Por otra parte, $\phi(n) = \psi(n) = z_n$.

Demostración de 2: Como X es Tychonoff, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $g_i : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $g_i(x_i) = 1$ y $g_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$. Debido a que $C_p(X, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial, $g_i \in C_p(X, \mathbb{R})$ implica que

$$g = 1 + \sum_{i=1}^{n} (i-1) g_i \in C_p(X, \mathbb{R}).$$

Además, $g(x_i) = 1 + (i-1)g_i(x_i) = i$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. $\square$

1.2 El mapeo dual

Si X, Y y Z son espacios topológicos y $p : X \to Y$ es una función entre X y Y (no necesariamente continua), se define el mapeo dual asociado a p como la función $p^* : Z^Y \to Z^X$ cuya regla es $p^*(f) = f \circ p$, para toda $f \in Z^Y$. En esta sección demostraremos algunas propiedades básicas del mapeo dual asociado a una función. La primera de éstas establece que el mapeo dual asociado a una función p es siempre continuo.

1.13 Proposición. *El mapeo dual p^* es continuo.*

Demostración. Basta verificar que para toda $x \in X$, la composición $\hat{x} \circ p^*$ es continua. Sean $x \in X$ y $f \in Z^Y$. Entonces

$$(\hat{x} \circ p^*)(f) = (f \circ p)(x) = f(y) = \hat{y}(f), \text{ con } y = p(x) \in Y.$$

Por lo tanto, $\hat{x} \circ p^*$ es igual al mapeo evaluación en Z^Y determinado por $y = p(x)$. De esta forma, $\hat{x} \circ p^*$ es continuo (porque $\hat{y}$ lo es). $\square$

1.14 Observación. Si Z tiene alguna estructura algebraica, entonces p^* es un homomorfismo entre las correspondientes estructuras algebraicas en Z^Y y Z^X; particularmente, si Z es un espacio vectorial sobre el campo K entonces p^* es una transformación lineal.

Demostración. Efectivamente, sean $\alpha \in K$ y $f_1,\ f_2 \in Z^Y$. Entonces

$$p^*(\alpha f_1 + f_2) = (\alpha f_1 \circ p) + (f_2 \circ p) = \alpha p^*(f_1) + p^*(f_2).$$

Por lo tanto, $p^*(\alpha f_1 + f_2) = \alpha p^*(f_1) + p^*(f_2)$. □

1.15 Proposición. *Si $p : X \to Y$ y $q : Y \to T$ son funciones, entonces $(q \circ p)^* = p^* \circ q^*$.*

Demostración. Sea $f \in Z^T$. Es cierto que

$$(p^* \circ q^*)(f) = p^*(f \circ q) = (f \circ q) \circ p = f \circ (q \circ p) = (q \circ p)^*(f).$$

Así, $(p^* \circ q^*)(f) = (q \circ p)^*(f)$. □

Para el lector con conocimientos de teoría de categorías ya debe ser notorio que todo lo anterior puede ser resumido diciendo que para cualquier espacio Z, tenemos que $C_p(\cdot, Z)$ es un funtor contravariante en la categoría de los espacios topológicos.

Por otro lado, si X es un subespacio de Y, entonces tenemos la función inclusión $i_X : X \to Y$; el correspondiente mapeo dual

$$r_X = i_X^* : C_p(Y, Z) \to C_p(X, Z)$$

es llamado *mapeo restricción* (debido a que la composición $i_X^*(f) = f \circ i_X$ es la restricción de una función $f : Y \to Z$ al subespacio X). La siguiente proposición muestra una propiedad básica del mapeo restricción.

1.16 Proposición. *Si X es un subespacio denso de Y, entonces el mapeo restricción $r_X : C_p(Y, Z) \to C_p(X, Z)$ es inyectivo.*

Demostración. Sean $f_1,\ f_2 \in C_p(Y, Z)$ tales que $r_X(f_1) = r_X(f_2)$. Supongamos que existe $y \in Y$ tal que $f_1(y) \neq f_2(y)$. Como Z es un espacio Hausdorff existen $U_1,\ U_2$ abiertos ajenos de $f_1(y)$ y $f_2(y)$, respectivamente. Entonces $f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2)$ es un abierto en Y que contiene a y. Debido a que X es denso en Y existe $z \in X \cap f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2)$. Así, $z \in X,\ f_1(z) \in U_1$ y $f_2(z) \in U_2$. Pero $f_1 \restriction_X = f_2 \restriction_X$ implica $f_1(z) = f_2(z)$. Por lo tanto $U_1 \cap U_2$ es no vacío, lo cual es contradictorio. □

Observe que debido a que la composición de funciones continuas es continua, si p es continua entonces $p^*(C_p(Y,Z))$ está contenido en $C_p(X,Z)$. En la siguiente serie de proposiciones se establecen algunas otras propiedades del mapeo dual que serán útiles para el desarrollo del presente trabajo.

1.17 Definición. Una función $f : X \to Y$ es llamada una *inmersión* si es una composición de un homeomorfismo y una inclusión, es decir, si existe un subespacio L de Y y un homeomorfismo $f' : X \to L$ tales que $f = i_L \circ f'$, donde $i_L : L \to Y$ es la función inclusión.

1.18 Proposición. *Si $p : X \to Y$ es un mapeo continuo y $p(X) = Y$, entonces el mapeo dual $p^* : C_p(Y,Z) \to C_p(X,Z)$ es una inmersión.*

Demostración. Sean $f_1,\ f_2 \in C_p(Y,Z)$ tales que $f_1 \circ p = f_2 \circ p$. Si $y \in Y = p(X)$ existe $x \in X$ tal que $p(x) = y$. Así $(f_1 \circ p)(x) = (f_2 \circ p)(x)$, es decir, $f_1(y) = f_2(y)$. Por lo tanto p^* es inyectivo.

Veamos que $(p^*)^{-1} : p^*(C_p(Y,Z)) \subseteq C_p(X,Z) \to C_p(Y,Z)$ es continuo. Sean $y \in Y$ y $g \in p^*(C_p(Y,Z))$. Entonces $g = p^*(f) = f \circ p$ con $f \in C_p(Y,Z)$. Como p es sobreyectivo existe $x \in X$ tal que $p(x) = y$. De esta forma,

$$(\hat{y} \circ (p^*)^{-1})(g) = \hat{y}(f) = f(p(x)) = g(x) = \hat{x}(g).$$

Observamos que $\hat{y} \circ (p^*)^{-1}$ es la función evaluación en $p^*(C_p(Y,Z))$ correspondiente a x, de lo que se sigue que $\hat{y} \circ (p^*)^{-1}$ es un mapeo continuo. □

1.19 Proposición. *Si $p : X \to Y$ es continua y la imagen $p(X)$ es densa en Y, entonces el mapeo dual $p^* : C_p(Y,Z) \to C_p(X,Z)$ es inyectivo.*

Demostración. Sean $f_1,\ f_2 \in C_p(Y,Z)$ tales que $f_1 \circ p = f_2 \circ p$. Suponga que existe $y \in Y$ tal que $f_1(y) \neq f_2(y)$ y elija U_1 y U_2 abiertos ajenos de $f_1(y)$ y $f_2(y)$, respectivamente. El hecho de que f_1 y f_2 son funciones continuas implica que $f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2)$ es un abierto no vacío en Y. Debido a que $p(X)$ es denso en Y existe $z \in p(X) \cap f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2)$. Así, $z \in p(X),\ f_1(z) \in U_1$ y $f_2(z) \in U_2$. Entonces $z = p(x)$ con $x \in X$ y $f_1(z) = f_1(p(x)) = f_2(p(x)) = f_2(z)$. Por lo tanto $U_1 \cap U_2$ es no vacío, lo cual es contradictorio. □

En la siguiente proposición mostramos que si $p : X \to Y$ es un mapeo R-cociente entonces el subespacio $p^*(C_p(Y,Z))$ es cerrado en $C_p(X,Z)$ (recomendamos al lector ver el Apéndice A para la definición y propiedades básicas de los mapeos R-cocientes).

1.20 Proposición. *El conjunto* $p^*\big(C_p(Y,Z)\big)$ *es cerrado en* $C_p(X,Z)$*, si* $p : X \to Y$ *es un mapeo R-cociente.*

Demostración. Probemos primero dos afirmaciones.

Afirmación 1. Para toda $f \in C_p(X,Z) : f \in p^*\big(C_p(Y,Z)\big) \iff$ existe $g \in Z^Y$ tal que $g \circ p = f$.

Demostración de la afirmación: Sea $f \in C_p(X,Z)$. Si $f \in p^*\big(C_p(Y,Z)\big)$ entonces $f = p^*(g) = g \circ p$ con $g \in C_p(Y,Z)$. Ahora supongamos que existe $g \in Z^Y$ tal que $g \circ p = f$. Como $f \in C_p(X,Z)$, de la proposición A.13 se sigue que g es continua. ⊠

Afirmación 2. Para toda $f \in C_p(X,Z)$: existe $g \in Z^Y$ tal que $g \circ p = f \iff f$ es constante en $p^{-1}(\{y\})$ para toda $y \in Y$.

Demostración de la afirmación: Sea $f \in C_p(X,Z)$. Supongamos que existe $g \in Z^Y$ tal que $g \circ p = f$. Sean $y \in Y$ y x_1, $x_2 \in p^{-1}(\{y\})$. Entonces $p(x_i) = y$ y $f(x_i) = (g \circ p)(x_i) = g(y)$. Por lo tanto, $f(x_1) = f(x_2)$. Ahora supongamos que f es constante en $p^{-1}(\{y\})$ para toda $y \in Y$. Por definición de mapeo R-cociente, p es sobreyectiva, de modo que $p^{-1}(\{y\})$ es no vacío para toda $y \in Y$. Sea $g : Y \to Z$ dada por $g(y) = f(x)$, donde $x \in p^{-1}(\{y\})$. Sean $x \in X$ y $y = p(x)$. Entonces $x \in p^{-1}(\{y\})$ y $(g \circ p)(x) = g(y) = f(x)$. Por lo tanto $g \circ p = f$. ⊠

Notemos ahora lo siguiente: para toda $f \in C_p(X,Z)$, f es constante en $p^{-1}(\{y\})$ para toda $y \in Y$, si y sólo si, para cualesquiera $x_1, x_2 \in X : p(x_1) = p(x_2) \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Por lo tanto, $p^*\big(C_p(Y,Z)\big) = \{f \in C_p(X,Z) :$ para cualesquiera $x_1, x_2 \in X : p(x_1) = p(x_2) \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)\} = \bigcap\{F_{x_1x_2} : x_1,\ x_2 \in X$ y $p(x_1) = p(x_2)\}$ donde $Fx_1x_2 = \{f \in C_p(X,Z) : f(x_1) = f(x_2)\} = \{f \in C_p(X,Z) : \hat{x}_1(f) = \hat{x}_2(f)\}$. Los conjuntos $F_{x_1x_2}$ son cerrados debido a que las funciones evaluación son continuas. □

Debemos notar que los recíprocos de las proposiciones 1.16, 1.18 y 1.20 no son en general ciertos. Para ello, note primeramente que si X es un espacio conexo arbitrario y si Z denota al espacio $\{0,\ 1\}$ con la topología discreta, entonces $C_p(X,Z) = \{0_X,\ 1_X\}$, donde 0_X y 1_X son las funciones constantes de valor 0 y 1, respectivamente, definidas sobre X. Observe también que si $p : X \to Y$ es una función continua entre espacios conexos X y Y, entonces $p^* : C_p(Y,Z) \to C_p(X,Z)$, el mapeo dual a p, es biyectivo ya que $p^*(0_Y) = 0_Y \circ p = 0_X$ y $p^*(1_Y) = 1_Y \circ p = 1_X$, y como $C_p(Y,Z)$ es un espacio discreto (note que $C_p(X,Z)$ también lo es), podemos concluír que p^* es un homeomorfismo.

Con estas herramientas es ya fácil mostrar, por ejemplo, que los recíprocos a 1.16 y 1.18 no son en general ciertos. En lo sucesivo Z seguirá denotando al espacio discreto $\{0,\ 1\}$.

Consideremos al mapeo inclusión $i : (0,1) \to \mathbb{R}$. Sabemos que $i^* : C_p(\mathbb{R}, Z) \to C_p\big((0,1), Z\big)$ es inyectivo. Sin embargo, $(0,1)$ no es denso en $\mathbb{R}$.

Ahora sea $p : (0,4) \to (0,2)$ dada por $p(x) = 1$, para toda $x \in (0,4)$. Notemos que $p^* : C_p\big((0,2), Z\big) \to C_p\big((0,4), Z\big)$ es inmersión pero p no es suprayectiva.

Por otro lado, es notable que cuando Z es el espacio usual de los números reales $\mathbb{R}$, los recíprocos a 1.16, 1.18 y 1.20 sí son ciertos. Esto se establece en las siguientes proposiciones.

1.21 Proposición. *Sea $p : X \to Y$ una función arbitraria. Entonces p es continuo si y sólo si $p^*\big(C_p(Y)\big) \subseteq C_p(X)$.*

Demostración. Supongamos que $p^*\big(C_p(Y)\big) \subseteq C_p(X)$. Debido a que Y es completamente regular, su topología es generada por $C_p(Y)$ (ver A.8). Sea $f \in C_p(Y)$. Entonces $p^*(f) = f \circ p \in C_p(X)$, es decir, $f \circ p$ es continua. Por la proposición A.3 concluimos que p es un mapeo continuo. $\square$

1.22 Proposición. *Sea X un subespacio de Y. Entonces el mapeo restricción $r_X : C_p(Y) \to C_p(X)$ es inyectivo si y sólo si X es denso en Y.*

Demostración. Supongamos que X no es denso en Y. Sea $y_0 \in Y \setminus cl(X)$. Como Y es Tychonoff, existe $f_0 \in C_p(Y)$ tal que $f_0(cl(X)) \subseteq \{0\}$ y $f_0(y_0) = 1$. Sea 0_Y la función en Y igual a 0 en todos los puntos. Entonces f_0 y 0_Y son elementos diferentes de $C_p(Y)$ tales que $r_X(f_0) = r_X(0_Y)$. Por lo tanto r_X no es inyectiva. $\square$

1.23 Proposición. *Sea $p : X \to Y$ un mapeo continuo. Entonces el mapeo dual $p^* : C_p(Y) \to C_p(X)$ es una inmersión si y sólo si $p(X) = Y$.*

Demostración. Supongamos que $p^* : C_p(Y) \to C_p(X)$ es una inmersión y que $p(X) \neq Y$. Sean $y_0 \in Y \setminus p(X)$ y

$$U = \{g \in C_p(Y) : |g(y_0)| < 1\} = \hat{y}_0^{-1}\big((-1,1)\big).$$

Como U es abierto en $C_p(Y)$ se tiene que $p^*(U)$ es abierto en $p^*\big(C_p(Y)\big)$. Por el corolario 1.5, existen $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\delta > 0$ tales que

$$p^*(C_p(Y)) \cap \{f \in C_p(X) : |f(x_i)| < \delta \text{ para } i = 1, \ldots, n\} \subseteq p^*(U).$$

Elija $g_0 \in C_p(Y)$ tal que $g_0(\{p(x_1), \ldots, p(x_n)\}) \subseteq \{0\}$ y $g_0(y_0) = 1$. De este modo, $g_0 \notin U$; pero además

$$p^*(g_0) \in p^*(C_p(Y)) \cap \{f \in C_p(X) : |f(x_i)| < \delta \text{ para } i = 1, \ldots n\}.$$

Por lo tanto $p^*(g_0) \in p^*(U)$, es decir, $p^*(g_0) = p^*(h)$ con $h \in U$, lo que contradice la inyectividad de p^*. □

1.24 Proposición. *Sea $p : X \to Y$ un mapeo continuo y sobreyectivo. Entonces $p^*(C_p(Y))$ es denso en $C_p(X)$ si y sólo si p es inyectiva.*

Demostración. Supongamos que p es inyectiva. Entonces $p^* : \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}^X$ es una función suprayectiva porque para cualquier $g \in \mathbb{R}^X$ se tiene que $p^*(g \circ p^{-1}) = g$.

Por la proposición 1.12, $C_p(Y)$ es denso en $\mathbb{R}^Y$. Como $p^* : \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}^X$ es una función continua, $p^*(C_p(Y))$ es denso en $p^*(\mathbb{R}^Y) = \mathbb{R}^X$. Por lo tanto $p^*(C_p(Y))$ es denso en $C_p(X)$.

Ahora supongamos que p no es inyectiva. Sean $x_1,\ x_2 \in X$ tales que $x_1 \neq x_2$ y $p(x_1) = p(x_2) = y_0$. Considere

$$U = (\hat{x}_1)^{-1}((0, \infty)) \cap (\hat{x}_2)^{-1}((\infty, 0)) = \{f \in C_p(X) : f(x_1) > 0,\ f(x_2) < 0\}.$$

Claramente U es un abierto de $C_p(X)$. Además, U es no vacío porque X es Tychonoff.

Si $g \in p^*(C_p(Y))$ entonces $g = p^*(f) = f \circ p$ para alguna $f \in C_p(Y)$. Observe ahora que

$$g(x_1) = (f \circ p)(x_1) = f(y_0) = (f \circ p)(x_2) = g(x_2),$$

es decir, $g \notin U$. En conclusión $U \subseteq C_p(X) \setminus p^*(C_p(Y))$. Por tal motivo, $p^*(C_p(Y))$ no es denso en $C_p(X)$. □

1.25 Proposición. *Sea $p : X \to Y$ un mapeo. Si $p^* : C_p(Y) \to C_p(X)$ es un homeomorfismo, entonces p es un homeomorfismo.*

Demostración. Por la proposición 1.21, p es continua. Por la proposición 1.23, p es sobreyectiva y por 1.24, p es inyectiva. Así, p es una biyección.

Sea $p^{-1} : Y \to X$ la función inversa de p. Utilizando 1.15 y el hecho de que $Id_X^* = Id_{C_p(X)}$ obtenemos lo siguiente:

$$Id_X^* = (p^{-1} \circ p)^* = p^* \circ (p^{-1})^* \Rightarrow (p^*)^{-1} \circ Id_X^* = (p^*)^{-1} \circ p^* \circ (p^{-1})^*.$$

Por lo tanto $(p^*)^{-1} = (p^{-1})^*$. Como p^* es un homeomorfismo, $(p^*)^{-1} = (p^{-1})^*$ es un mapeo de $C_p(X)$ a $C_p(Y)$. Por la proposición 1.21, p^{-1} es continua. □

1.26 Proposición. *Sea $p : X \to Y$ un mapeo continuo y sobreyectivo. Entonces la imagen $p^*(C_p(Y))$ es cerrada en $C_p(X)$ si y sólo si p es R-cociente.*

Demostración. Supongamos que $p^*(C_p(Y))$ es cerrado en $C_p(X)$. Por A.21, existen $p_0 : X \to X_1$ mapeo R-cociente y $p_1 : X_1 \to Y$ biyección continua tales que $p = p_1 \circ p_0$. De 1.15 se sigue que:

$$p^* = p_0^* \circ p_1^* \tag{1}$$

Como $p_1^*(C_p(Y))$ es denso en $C_p(X_1)$ (ver 1.24) y $p_0^* : C_p(X_1) \to C_p(X)$ es una inmersión (ver 1.23), obtenemos que $p^*(C_p(Y))$ es denso en $p_0^*(C_p(X_1))$. Considerando que $p^*(C_p(Y))$ es cerrado en $C_p(X)$ y que si $W_1 \subseteq W_2$ y $D \subseteq W_1$ entonces $cl_{W_1}(D) = W_1 \cap cl_{W_2}(D)$, llegamos a que

$$p^*\left(C_p(Y)\right) = p_0^*\left(C_p(X_1)\right) \tag{2}$$

Ahora, sea $\Upsilon : p_0^*\left(C_p(X_1)\right) \to C_p(X_1)$ la función inversa de p_0^*. De la ecuación (1) se sigue que:

$$\Upsilon \circ p^* = p_1^*. \tag{3}$$

Aplicando Υ en ambos lados de (2) y utilizando (3) obtenemos que $p_1^*(C_p(Y)) = C_p(X_1)$. Así, p_1^* es un homeomorfismo (debemos tomar en cuenta que por 1.23, p_1^* es una inmersión). Por lo tanto, p_1 es un homeomorfismo (1.25).

Debido a que $p_1 \circ (p_1)^{-1} = Id_Y$ y a que Id_Y es R-cociente, p_1 es R-cociente (ver A.16). Por A.15, $p = p_1 \circ p_0$ es R-cociente. □

1.3 El teorema de Nagata

Uno de los resultados más interesantes en el contexto de los espacios de funciones $C_p(X)$ es el establecido por Jun-iti Nagata en 1949 y que establece que la estructura topológica de un espacio de Tychonoff X está completamente determinada por la estructura de anillo topológico que posee $C_p(X)$: Dos espacios de Tychonoff X y Y son homeomorfos si y sólo si sus anillos topológicos $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son topológicamente isomorfos. En esta sección nos dedicaremos a demostrar este importante resultado.

Sea X un espacio. Para cada $x \in X$ consideremos la función $e_x = \hat{x} \restriction_{C_p(X)}: C_p(X) \to \mathbb{R}$, donde $\hat{x} : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}$ es la x-ésima proyección asociada al producto $\mathbb{R}^X$. Como cada función e_x es continua, podemos considerar a la función $i_X : X \to C_p(C_p(X))$ dada por $i_X(x) = e_x$ para cada $x \in X$. A continuación demostramos que dicha función es una inmersión de X en $C_p(C_p(X))$. De ahora en adelante denotaremos a $C_p(C_p(X))$ por $C_{p,2}(X)$.

1.27 Proposición. *El mapeo i_X es una inmersión.*

Demostración. Sean $x_1,\ x_2 \in X$ tales que $x_1 \neq x_2$. Como X es un espacio Tychonoff, existe $f \in C(X)$ tal que $f(x_1) = 0,\ f(x_2) = 1$. Así $e_{x_1}(f) = \hat{x}_1(f) = f(x_1) = 0$. Además: $e_{x_2}(f) = \hat{x}_2(f) = f(x_2) = 1$. Por lo tanto $e_{x_1} \neq e_{x_2}$, es decir, $i_X(x_1) \neq i_X(x_2)$.

Veamos que i_X es continuo: sea $x \in X$ y sean $m \in \mathbb{N}$, $g_1, \dots, g_m \in C_p(X)$ y $\epsilon > 0$. Consideremos a $[e_x, g_1, \dots, g_m, \epsilon]$ que es un abierto canónico de e_x en $C_{p,2}(X)$. Recordemos que

$$[e_x, g_1, \dots, g_m, \epsilon] = \{F \in C_{p,2}(X) : |e_x(g_i) - F(g_i)| < \epsilon \text{ para } i = 1, \dots, m\}.$$

Definimos $J_i = (g_i(x) - \epsilon,\ g_i(x) + \epsilon)$ para $i \in \{1, \dots, m\}$. Debido a que g_i es continua, $g_i^{-1}(J_i)$ es una vecindad de x en X, para $i = 1, \dots m$. Por lo tanto $V = \cap_{i=1}^m g_i^{-1}(J_i)$ es una vecindad de x en X. Verifiquemos que $i_X(V) \subseteq [e_x, g_1, \dots, g_m, \epsilon]$. Sea $y \in V$. Así $|g_i(y) - g_i(x)| = |e_y(g_i) - e_x(g_i)| < \epsilon$ para $i = 1, \dots m$, es decir, $i_X(y) = e_y \in [e_x, g_1, \dots, g_m, \epsilon]$.

Finalmente considere $j_X : i_X(X) \to X$ la función inversa de i_X. Demostremos que j_X es continua: sea $x \in X$ y V una vecindad de x en X. Como X es Tychonoff, existe $f \in C(X)$ tal que $f(x) = 0$ y $f(X \setminus V) \subseteq \{1\}$. Así, $W = [e_x, f, \frac{1}{2}] \cap i_X(X)$ es vecindad de $i_X(x)$ en $i_X(X)$. Veamos que $j_X(W) \subseteq V$: supongamos que existe $y \in j_X(W) \setminus V$. Entonces $y \in X \setminus V$ y $f(y) = 1$. Por otra parte, $y \in j_X(W)$ implica que $e_y \in W$. En efecto, si

$y \in j_X(W)$ entonces $y = j_X(g)$ con $g \in W$. Aplicando i_X en ambos lados de la ecuación anterior obtenemos $e_y = g$, con $g \in W$.
Así $e_y \in [e_x, f, \frac{1}{2}] = \{F \in C_{p,2}(X) : |F(f) - e_x(f)| < \frac{1}{2}\}$ y $|e_y(f) - e_x(f)| = |f(y) - f(x)| = 1 < \frac{1}{2}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $j_X(W) \subseteq V$ y j_X es continua. $\square$

1.28 Definición. Dos anillos topológicos (espacios vectoriales topológicos) se dicen *topológicamente isomorfos* (*linealmente homeomorfos*) si entre ellos existe un isomorfismo de anillos (isomorfismo de espacios vectoriales) que es además un homeomorfismo de espacios topológicos.

Como hemos mencionado, el propósito de esta sección es demostrar el siguiente resultado, establecido por Jun-iti Nagata en 1949 [2].

1.29 Teorema. *Los espacios X y Y son homeomorfos si y sólo si los anillos topológicos $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son topológicamente isomorfos.*

Con el objetivo de demostrar este resultado enunciamos el siguiente lema (de ahora en adelante identificaremos a cada elemento x del espacio X con la correspondiente función e_x):

1.30 Lema. *Sea $\phi : C_p(X) \to \mathbb{R}$ una funcional lineal continua no trivial. Entonces existen $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ y $x_1, \ldots, x_m \in X$ tales que*

$$\phi = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m.$$

Demostración. Como ϕ es continua en $\bar{0}$, existen $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ y $\epsilon > 0$ tales que $\phi([\bar{0}, x_1, \ldots, x_m, \epsilon]) \subseteq (-1, 1)$, donde

$$\begin{aligned} [\bar{0}, x_1, \ldots, x_m, \epsilon] &= \{g \in C_p(X) : |g(x_i) - \bar{0}(x_i)| < \epsilon \text{ para } i = 1, \ldots, m\} \\ &= \{g \in C_p(X) : |g(x_i)| < \epsilon \text{ para } i = 1, \ldots, m\}. \end{aligned}$$

Como X es un espacio Tychonoff, existe $f_i \in C_p(X)$ tal que $f_i(x_i) = 1$ y $f_i(\{x_j : j \neq i\}) \subseteq \{0\}$, para $i \in \{1, \ldots, m\}$. Definimos $\lambda_i = \phi(f_i)$ para $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Afirmación 1. Si $h \in C_p(X)$ cumple $h(x_i) = 0$ para $i \in \{1, \ldots, m\}$, entonces $\phi(h) = 0$.

Demostración de la afirmación: Sea $k \in \mathbb{N}$. $h(x_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, m \Rightarrow kh \in [\bar{0}, x_1, \ldots, x_m, \epsilon] \Rightarrow \phi(kh) \in (-1, 1) \Rightarrow k\phi(h) \in (-1, 1) \Rightarrow k|\phi(h)| < 1 \Rightarrow |\phi(h)| < 1/k$. Debido a que k es arbitraria, concluimos que $\phi(h) = 0$. $\boxtimes$

AFIRMACIÓN 2. $\phi = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m$.

Demostración de la afirmación: Sea $g \in C_p(X)$. Definimos $h = g-(g(x_1)f_1+ g(x_2)f_2 + \ldots + g(x_m)f_m)$ y fijamos $i \in \{1, \ldots, m\}$. Así: $h(x_i) = g(x_i) - (g(x_1)f_1(x_i)+g(x_2)f_2(x_i)+\ldots+g(x_m)f_m(x_i)) = g(x_i)-g(x_i) = 0$ y $\phi(h) = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\phi(g) &= \phi(g(x_1)f_1 + g(x_2)f_2 + \ldots + g(x_m)f_m) \\
&= \sum_{i=1}^{m} g(x_i)\phi(f_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} g(x_i)\lambda_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_{x_i}(g) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_{x_i}\right)(g).
\end{aligned}$$

Como g es un elemento arbitrario de $C_p(X)$ obtenemos que $\phi = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_{x_i}$, es decir, $\phi = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m$. □

1.31 Definición. Una funcional lineal continua $\phi : C_p(X) \to \mathbb{R}$ es *multiplicativa* si $\phi(fg) = \phi(f)\phi(g)$ para cada $f,\ g \in C_p(X)$.

El lema 1.30 demuestra que toda funcional lineal continua definida sobre $C_p(X)$ "depende de un número finito de coordenadas". El siguiente lema muestra que las funcionales lineales continuas y multiplicativas no triviales dependen de una sola coordenada.

1.32 Lema. *Si $\phi : C_p(X) \to \mathbb{R}$ es una funcional lineal multiplicativa no trivial entonces $\phi = x$ para algún $x \in X$, es decir, $\phi = e_x$.*

Demostración. Por el lema 1.30, existen $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ y $x_1, \ldots, x_m \in X$ tales que $\phi = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m$. A causa de que $C_{p,2}(X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (ver 1.6) y de que ϕ es no trivial, podemos suponer que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ y que $\lambda_i \neq 0$ para $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Supongamos que $m > 1$. Como X es un espacio Tychonoff, existen $f_1,\ f_2 \in C_p(X)$ tales que $f_1(x_1) = \frac{1}{\lambda_1}$, $f_1(x_j) = 0$ para $j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{1\}$

y $f_2(x_2) = \frac{1}{\lambda_2}$, $f_2(x_j) = 0$ para $j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{2\}$. Así:

$$\begin{aligned}\phi(f_1) &= (\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m)(f_1) = \lambda_1 f_1(x_1) + \ldots + \lambda_m f_1(x_m) = 1,\\ \phi(f_2) &= (\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m)(f_2) = \lambda_1 f_2(x_1) + \ldots + \lambda_m f_2(x_m) = 1.\end{aligned}$$

Ahora tomemos $i \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces:

$$(f_1 f_2)(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_1} \cdot 0, & \text{si } i = 1;\\ 0 \cdot \frac{1}{\lambda_2}, & \text{si } i = 2;\\ 0 \cdot 0, & \text{si } 1 \neq i \neq 2.\end{cases}$$

De esta forma, $(f_1 f_2)(x_i) = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$ y

$$\begin{aligned}\phi(f_1 f_2) &= (\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m)(f_1 f_2)\\ &= \lambda_1 (f_1 f_2)(x_1) + \ldots + \lambda_m (f_1 f_2)(x_m).\end{aligned}$$

Obtenemos que $\phi(f_1)\phi(f_2) = 1 \neq 0 = \phi(f_1 f_2)$, lo que contradice el hecho de que ϕ es multiplicativa. Por lo tanto, $m = 1$ y $\phi = \lambda_1 x_1$.

Sea $f \equiv 1 \in C_p(X)$. Entonces $\phi(f) = (\lambda_1 x_1)(f) = \lambda_1 f(x_1) = \lambda_1$. Como ϕ es multiplicativa:

$$\lambda_1 = \phi(f) = \phi(ff) = \phi(f)\phi(f) = \lambda_1^2.$$

Debido a que $\lambda_1 \neq 0$ obtenemos que $\lambda_1 = 1$ y que $\phi = x_1$. □

1.33 Corolario. *Sea $\tilde{X}$ el conjunto de todas las funcionales lineales multiplicativas no triviales de $C_p(X)$ en $\mathbb{R}$. Entonces $X = \tilde{X}$.*

Demostración. Por el lema 1.32, $\tilde{X} \subseteq X$. Además, para cualquier $x \in X$, e_x es una función no trivial, lineal y multiplicativa. En efecto: sean $r \in \mathbb{R}$ y $f_1,\ f_2 \in C_p(X)$. Observe que

$$\begin{aligned}e_x(rf_1 + f_2) &= (rf_1 + f_2)(x) = rf_1(x) + f_2(x) = re_x(f_1) + e_x(f_2),\\ e_x(f_1 f_2) &= (f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) = e_x(f_1) e_x(f_2).\end{aligned}$$

Por último, si $f \equiv 1 \in C_p(X)$ entonces $e_x(f) = f(x) = 1$ y e_x es no trivial. □

Estamos ya en posición de demostrar el Teorema de Nagata.

1.34 Teorema (Nagata). *Los espacios X y Y son homeomorfos si y sólo si los anillos topológicos $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son topológicamente isomorfos.*

Demostración. Sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Veamos que $h^* : C_p(Y) \to C_p(X)$ es un isomorfismo topológico. Sea $g \in C_p(X)$. Como h^{-1} es continua, $g \circ h^{-1} \in C_p(Y)$. Además $h^*(g \circ h^{-1}) = g$. Por lo tanto, h^* es sobreyectivo y por 1.18, h^* es homeomorfismo.

Además, si $f,\ g \in C_p(Y)$, entonces:

$$\begin{aligned} h^*(f+g) &= (f+g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h) = h^*(f) + h^*(g), \\ h^*(fg) &= (fg) \circ h = (f \circ h)(g \circ h) = h^*(f)h^*(g). \end{aligned}$$

Así, h^* es un isomorfismo de anillos.

Ahora, sea $\phi : C_p(X) \to C_p(Y)$ un isomorfismo topológico. Por lo visto en el caso anterior, $\phi^* : C_{p,2}(Y) \to C_{p,2}(X)$ es un isomorfismo topológico. Entonces $\phi^* \restriction_{\tilde{Y}} : \tilde{Y} \to \phi^*(\tilde{Y})$ es un homeomorfismo.

Como $X = \tilde{X}$ y $Y = \tilde{Y}$ (ver 1.33), basta verificar que $\phi^*(\tilde{Y}) = \tilde{X}$. Sea $\eta \in \tilde{Y}$. Tomemos $r \in \mathbb{R}$ y $f,\ g \in C_p(X)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \phi^*(\eta)(r \cdot f + g) &= (\eta \circ \phi)(r \cdot f + g) \\ &= \eta\big(\phi(r \cdot f + g)\big) \\ &= \eta\big(\phi(r) \cdot \phi(f) + \phi(g)\big) \\ &= \eta\big(r \cdot \phi(f) + \phi(g)\big) \\ &= r \cdot \eta\big(\phi(f)\big) + \eta\big(\phi(g)\big) \\ &= r \cdot (\eta \circ \phi)(f) + (\eta \circ \phi)(g) \\ &= r \cdot \phi^*(\eta)(f) + \phi^*(\eta)(g) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\phi^*(\eta)(r \cdot f + g) = r \cdot \phi^*(\eta)(f) + \phi^*(\eta)(g)$ y $\phi^*(\eta)$ es lineal.

Verifiquemos que $\phi^*(\eta)$ es multiplicativa: sean $f,\ g \in C_p(X)$.

$$\begin{aligned} \phi^*(\eta)(f \cdot g) &= (\eta \circ \phi)(f \cdot g) \\ &= \eta\big(\phi(f \cdot g)\big) \\ &= \eta\big(\phi(f) \cdot \phi(g)\big) \\ &= \eta\big(\phi(f)\big) \cdot \eta\big(\phi(g)\big) \\ &= (\eta \circ \phi)(f) \cdot (\eta \circ \phi)(g) \\ &= \phi^*(\eta)(f) \cdot \phi^*(\eta)(g). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\phi^*(\eta)(f \cdot g) = \phi^*(\eta)(f) \cdot \phi^*(\eta)(g)$.

Finalmente, sea $h \in C_p(Y)$ tal que $\eta(h) \neq 0$ ($\eta \in \tilde{Y}$ implica que η es no trivial). Como ϕ es sobreyectiva, existe $g \in C_p(X)$ tal que $\phi(g) = h$. Así, $\phi^*(\eta)(g) = (\eta \circ \phi)(g) = \eta(h) \neq 0$. Obtenemos que $\phi^*(\eta)$ es no trivial y que $\phi^*(\eta) \in \tilde{X}$.

Ahora, sea $\eta \in \tilde{X}$. Como ϕ es homeomorfismo, $\theta = \eta \circ (\phi^{-1}) \in C_p(C_p(Y))$. Debido a que $\phi^*(\theta) = \eta$, si probamos que $\theta \in \tilde{Y}$ habremos terminado. Pero esto se sigue de que $\eta \in \tilde{X}$ y de que ϕ^{-1} es un isomorfismo de anillos (sólo hay que trasladar la demostración de los párrafos anteriores, cambiando ϕ por ϕ^{-1}). $\square$

Capítulo 2

Un método para construir espacios ℓ-equivalentes

El teorema de Nagata nos dice que para que dos espacios Tychonoff X y Y sean homeomorfos, es condición necesaria y suficiente que sus anillos topológicos $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ sean topológicamente isomorfos. Naturalmente uno puede preguntarse si pasa esto cuando consideramos en $C_p(X)$ la estructura de espacio vectorial topológico. La respuesta es negativa: Hay ejemplos de espacios no homeomorfos X y Y cuyos espacios $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son linealmente homeomorfos. No obstante, nos podemos preguntar "qué tanto se parecen" X y Y si sus espacios de funciones $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son linealmente homeomorfos. Este planteamiento nos lleva a introducir las nociones de espacios ℓ-equivalentes y de propiedad topológica ℓ-invariante. La finalidad del presente capítulo es estudiar estas nociones y establecer sus propiedades más básicas. En la última sección del capítulo exponemos un método para crear espacios ℓ-equivalentes.

2.1 Propiedades ℓ-invariantes

Iniciamos esta sección con algunas definiciones que usaremos más adelante.

2.1 Definición. Diremos que dos espacios X y Y son *l-equivalentes* si sus espacios de funciones $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son linealmente homeomorfos.

No es díficil verificar que la relación de ℓ-equivalencia es una relación de equivalencia en la clase de espacios Tychonoff (dejamos la tarea de verificar esto al lector). Por otro lado, sabemos que si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo entonces $h^* : C_p(Y) \to C_p(X)$ es un homeomorfismo lineal. Por ello, si dos espacios X y Y son homeomorfos entonces ellos son ℓ-equivalentes. En el siguiente capítulo verificaremos la existencia de espacios ℓ-equivalentes no homeomorfos (de hecho, todos los ejemplos desarrollados en el capítulo 3 cumplen esto último).

De ahora en adelante, cuando exista un homeomorfismo lineal de $C_p(X)$ en $C_p(Y)$ escribiremos $X \overset{l}{\sim} Y$.

Ahora introduciremos la noción de propiedad topológica ℓ-invariante.

2.2 Definición. Diremos que una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es ℓ-invariante si cada vez que X tiene la propiedad $\mathcal{P}$ y $X \overset{l}{\sim} Y$, se tiene entonces que Y también tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Es claro que si una propiedad topológica $\mathcal{P}$ puede ser caracterizada en términos de propiedades topológicas de $C_p(X)$ o en términos de propiedades topológicas lineales de $C_p(X)$, entonces dicha propiedad es ℓ-invariante. En este sentido, a continuación enunciamos una serie de resultados en los que para una funcion cardinal ϕ existe otra función cardinal f de tal forma que $\phi(X) = f(C_p(X))$ se cumple para todo espacio X. Como consecuencia de ello obtendremos que la propiedad "$\phi(X) \leq \tau$", donde τ es un cardinal infinito, es una propiedad ℓ-invariante.

2.3 Lema. *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una colección de espacios topológicos y m un número cardinal infinito tal que $m \geq w(X_\alpha)$ para todo $\alpha \in I$ y $m \geq |I|$. Entonces $w\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right) \leq m$.*

Demostración. Para cada $\alpha \in I$ seleccione $\mathcal{B}_\alpha$ una base para el espacio X_α de cardinalidad $w(X_\alpha)$. Considere $\mathcal{W}$ la familia de todos los conjuntos de la forma

$$[\alpha_1, \ldots, \alpha_n; B_1, \ldots, B_n] = \left\{ f \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \,:\, f(\alpha_1) \in B_1, \ldots, f(\alpha_n) \in B_n \right\}$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$ y $B_i \in \mathcal{B}_{\alpha_i}$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Observe que $\mathcal{W}$ es una base para $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Efectivamente: por la definición A.10 y la proposición A.2, los elementos de $\mathcal{W}$ son abiertos en $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Ahora sean $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$ y U_i abierto en X_{α_i}, para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Elija

$f \in \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$. Como $f(\alpha_i) \in U_i$ y $\mathcal{B}_{\alpha_i}$ es una base para X_{α_i}, existe $B_i \in \mathcal{B}_{\alpha_i}$ que cumple la condición $f(\alpha_i) \in B_i \subseteq U_i$. Por lo tanto

$$f \in [\alpha_1, \ldots, \alpha_n; B_1, \ldots, B_n] \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_i).$$

Ahora sólo falta comprobar que $|\mathcal{W}| \leq m$. Sea T un conjunto de cardinalidad m. Como $|\mathcal{B}_\alpha| \leq |T|$, existe una función inyectiva $i_\alpha : \mathcal{B}_\alpha \to T$. Considere la función $G : \mathcal{W} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(I^n \times T^n)$ que asocia a cada elemento de $\mathcal{W}$ de la forma $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n; B_1, \ldots, B_n]$ la 2-eneada

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; i_{\alpha_1}(B_1), \ldots, i_{\alpha_n}(B_n)) \in I^n \times T^n.$$

Evidentemente G es una función inyectiva. Además, la cardinalidad de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(I^n \times T^n)$ no excede a m. En efecto:

$$\Big|\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(I^n \times T^n)\Big| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |I^n \times T^n| \leq \omega \cdot |I^n \times T^n| \leq \omega \cdot m \cdot m = m.$$

Así, $|\mathcal{W}| \leq m$ y en consecuencia $w\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right) \leq m$. □

2.4 Corolario. *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una colección de espacios topológicos. Entonces*

$$w\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right) \leq |I| \cdot sup\{w(X_\alpha) : \alpha \in I\}.$$

Demostración. Considere

$$m = |I| \cdot sup\{w(X_\alpha) : \alpha \in I\} = max\{|I|, sup\{w(X_\alpha) : \alpha \in I\}\}.$$

Sucede que $m \geq w(X_\alpha)$ para todo $\alpha \in I$ y además $m \geq |I|$. La conclusión se sigue del lema 2.3. □

2.5 Teorema. *Para cualquier espacio infinito X, se tiene que $\chi(C_p(X)) = = w(C_p(X)) = |X|$.*

Demostración. Sabemos que para cualquier espacio Z se tiene que $\chi(Z) \leq w(Z)$. Así que

$$\chi(C_p(X)) \leq w(C_p(X)) \leq w(\mathbb{R}^X) \leq |X| \cdot \omega = |X|.$$

Comprobaremos que $|X| \leq \chi(C_p(X))$. Supongamos lo contrario y fijamos γ, una base para $C_p(X)$ en $f \equiv 0$ de cardinalidad $\chi(0, C_p(X))$. Sucede entonces que $|\gamma| < |X|$. Sin perder generalidad, podemos suponer que los elementos de γ son abiertos canónicos y para cada $W = [f, x_1, \ldots, x_k, \epsilon] \in \gamma$ definimos $K(W) = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Consideramos $Y = \cup\{K(W) : W \in \gamma\}$. Debido a que $|Y| < |X|$ existe $x^* \in X \setminus Y$. Sea $U = [f, x^*, 1]$ y $V = [f, x_1, \ldots, x_k, \epsilon]$ un elemento arbitrario de γ. Como X es un espacio Tychonoff, existe $g \in C(X)$ que cumple $g(x^*) = 1$ y $g(x_i) = 0$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$. Obtenemos que $g \in V \setminus U$, es decir, $V \setminus U \neq \emptyset$, pero esto contradice la hipótesis de que γ es una base para $C_p(X)$ en $f \equiv 0$. □

2.6 Teorema. *Para cualquier espacio X, $nw(X) = nw(C_p(X))$.*

Demostración. Verifiquemos que $nw(C_p(X)) \leq nw(X)$. Sea $\mathcal{P}$ una red en X de cardinalidad mínima y $\mathcal{B}$ una base numerable para $\mathbb{R}$. Para cada par de colecciones $S_1, \ldots, S_k \in \mathcal{P}$ y $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{B}$ definimos

$$[S_1, \ldots, S_k, U_1, \ldots, U_k] = \{f \in C(X) : f(S_i) \subseteq U_i,\ i = 1, \ldots, k\}.$$

$\gamma = \{[S_1, \ldots, S_k, U_1, \ldots, U_k] : S_1, \ldots, S_k \in \mathcal{P}, U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{B}\}$ es una red en $C_p(X)$. Efectivamente, sea $f \in C_p(X)$ y $[f, x_1, \ldots, x_k, \epsilon]$ una vecindad canónica de f (asumimos que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$). Escojemos $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{B}$ tales que $f(x_i) \in U_i \subseteq (f(x_i) - \epsilon, f(x_i) + \epsilon)$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$. Debido a que f es continua existen $S_1, \ldots, S_k \in \mathcal{P}$ tales que $x_i \in S_i$ y $f(S_i) \subseteq U_i$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$. Sucede que $f \in [S_1, \ldots, S_k, U_1, \ldots, U_k] \subseteq [f, x_1, \ldots, x_k, \epsilon]$.

Ahora consideramos la función $H : \gamma \to \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\mathcal{P}^k \times \mathcal{B}^k)$ que asocia a cada conjunto de la forma $[S_1, \ldots, S_k, U_1, \ldots, U_k]$ la pareja

$$(S_1, \ldots, S_k; U_1, \ldots, U_k) \in \mathcal{P}^k \times \mathcal{B}^k.$$

Por la inyectividad de H: $|\gamma| \leq |\cup_{k \in \mathbb{N}} (\mathcal{P}^k \times \mathcal{B}^k)| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |\mathcal{P}^k \times \mathcal{B}^k| \leq \omega \cdot |\mathcal{P}| = |\mathcal{P}|$.

Usando lo que acabamos de demostrar y la inclusión $X \subseteq C_p\big(C_p(X)\big)$ obtenemos que

$$nw(X) \leq nw\big(C_p\big(C_p(X)\big)\big) \leq nw(C_p(X)).$$

□

2.7 Definición.

1. Diremos que $f : X \to Y$ es una *condensación* si f es continua y biyectiva.

2. Si X es un espacio $T_{3.5}$, definimos el *i-peso* de X como el número cardinal

$$iw(X) = min\{w(Y) : Y \text{ es } T_{3.5} \text{ y existe } f : X \to Y \text{ condensación}\}.$$

2.8 Definición.

1. Sean X un espacio T_1, $\mathcal{V}$ una colección de abiertos en X y $x \in X$. Diremos que $\mathcal{V}$ es una *pseudobase local de* x si $\cap\mathcal{V} = \{x\}$.

2. El *pseudocarácter* de un espacio $X \in T_1$, denotado $\psi(X)$, es el número cardinal
$\psi(X) = sup\{\psi(x, X) : x \in X\}$; donde
$\psi(x, X) = min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es pseudobase local de } x\} + \omega$.

2.9 Lema. *Para todo espacio $X \in T_{3.5}$, se tiene que $\psi(X) \leq iw(X)$. Además, si Y es un subespacio de X entonces $iw(Y) \leq iw(X)$.*

Demostración. Considere una condensación $f : X \to Y$ de X sobre un espacio de Tychonoff Y tal que $iw(X) = w(Y)$. Sea $\mathcal{B}$ una base para Y tal que $|\mathcal{B}| = w(Y)$. Observe que si $y \in Y$ y $\mathcal{D} = \{V \in \mathcal{B} : y \in V\}$, entonces $\mathcal{D}$ es una pseudobase local de y en Y, esto es, $\cap\mathcal{D} = \{y\}$. Utilizaremos este hecho para mostrar que $\psi(X) \leq iw(X)$.

Elija un punto $x \in X$ y defina $\mathcal{C} = \{f^{-1}(V) : f(x) \in V \in \mathcal{B}\}$. Afirmamos que $\mathcal{C}$ es una pseudobase local de x en X. Claramente $x \in \cap\mathcal{C}$. Ahora tome un punto $z \in \cap\mathcal{C}$. Entonces $z \in f^{-1}(V)$, para toda $V \in \mathcal{B}$ tal que $f(x) \in V$. Por ello, $f(z) \in V$, para toda $V \in \mathcal{B}$ con $f(x) \in V$. Pero la colección $\mathcal{D} = \{V \in \mathcal{B} : f(x) \in V\}$ es una pseudobase local de $f(x)$ en Y. Así, $f(z) \in \cap\mathcal{D} = \{f(x)\}$. Como f es inyectiva, $x = z$. Por lo tanto, $\{x\} = \cap\mathcal{C}$.

Observe ahora que $\psi(x, X) \leq |\mathcal{C}| \leq |\mathcal{B}| = iw(X)$. Por tanto, $\psi(X) \leq iw(X)$.

Sea Y un subespacio de X. Considere Z un espacio de Tychonoff y $g : X \to Z$ una condensación tal que $w(Z) = iw(X)$. Evidentemente la función $h = g \restriction_Y : Y \to g(Y)$ es también una condensación. Entonces,

$$iw(Y) \leq w(g(Y)) \leq w(Z) = iw(X).$$

$\square$

2.10 Teorema. *Para cualquier espacio X, sucede que $d(X) = iw(C_p(X)) = \psi(C_p(X))$.*

Demostración. Debido a que $\psi(C_p(X)) \leq iw(C_p(X))$, basta comprobar que $iw(C_p(X)) \leq d(X) \leq \psi(C_p(X))$.

Sea $\tau = d(X)$ y Y un subconjunto denso en X de cardinalidad $\leq \tau$. El mapeo restricción $r_Y : C_p(X) \to Z \subseteq C_p(Y)$ es una condensación de $C_p(X)$ en el subespacio $Z = r_Y(C_p(X))$ de $C_p(Y)$ (1.16). Finalmente

$$iw(C_p(X)) \leq w(Z) \leq w(C_p(Y)) \leq w(\mathbb{R}^Y) \leq \tau = d(X).$$

Ahora tomamos $f \in C_p(X)$, $f \equiv 0$ y γ una familia de vecindades canónicas de f en $C_p(X)$ tales que $\cap\gamma = \{f\}$. Para cada $W = [f, x_1, \ldots, x_k, \epsilon] \in \gamma$ definimos $K(W) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ y consideramos $Y = \cup\{K(W) : W \in \gamma\}$. Es cierto que $|Y| \leq |\gamma|$. Además Y es denso en X. Efectivamente, asumimos que existe $x^* \in X \setminus cl(Y)$ y tomamos $g \in C(X)$ tal que $g(x^*) = 1$ y $g\restriction_Y = 0$. Para cualquier $[f, x_1, \ldots, x_k, \epsilon] \in \gamma$ se cumple que $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq Y$ y en consecuencia $g \in [f, x_1, \ldots, x_k, \epsilon]$. Obtenemos que $g \in \cap\gamma \setminus \{f\}$, lo que contradice la elección de γ. □

2.11 Teorema. *Para todo espacio Tychonoff X, se tiene que $iw(X) = d(C_p(X))$.*

Demostración. Por el teorema 2.10 y la monotonía de la función i-peso:

$$iw(X) \leq iw\big(C_p\big(C_p(X)\big)\big) = d(C_p(X)).$$

Comprobaremos que $d(C_p(X)) \leq iw(X)$. Sea $h : X \to Y$ una condensación tal que $w(Y) = iw(X)$. Por 2.6, $nw(C_p(Y)) = nw(Y) \leq w(Y)$ y por 1.23, $nw(C_p(Y)) = nw(h^*(C_p(Y))) \leq w(Y)$. Utilizando 1.24 obtenemos que

$$d(C_p(X)) \leq d(h^*(C_p(Y))) \leq nw(h^*(C_p(Y))) \leq w(Y) = iw(X).$$

□

2.12 Corolario. *Si $C_p(X)$ es homeomorfo a $C_p(Y)$ (en particular, si $X \overset{l}{\sim} Y$), entonces:*

a) $nw(X) = nw(Y)$;

b) $d(X) = d(Y)$;

c) $iw(X) = iw(Y)$;

d) $|X| = |Y|$.

La siguiente proposición será empleada en uno de los ejemplos que se presentan en el capítulo 3 de este trabajo.

2.13 Proposición. *$X \overset{l}{\sim} Y$ implica $X \oplus Z \overset{l}{\sim} Y \oplus Z$, para cualesquiera espacios X, Y, Z.*

Demostración. Sea $F : C_p(X) \to C_p(Y)$ un homeomorfismo lineal. Definimos $G : C_p(X \oplus Z) \to C_p(Y \oplus Z)$ mediante $G(h) = F(h \restriction_X) \triangledown h \restriction_Z$.
i) G ESTÁ BIEN DEFINIDA:
Denotemos con i_Y y con i_Z a los mapeos inclusión de Y y Z, respectivamente, en $Y \oplus Z$. Para cualquier $h \in C_p(X \oplus Z)$ se cumple que $G(h) \circ i_Y = F(h \restriction_X)$ y $G(h) \circ i_Z = h \restriction_Z$. Como ambas funciones son continuas, $G(h) \in C_p(Y \oplus Z)$.
ii) G ES BIYECTIVA:
Sean h, $h' \in C_p(X \oplus Z)$ tales que $h \neq h'$. Tomemos $w \in X \oplus Z$ tal que $h(w) \neq h'(w)$. Si $w \in X$ entonces $h \restriction_X \neq h' \restriction_X$ y en consecuencia $F(h \restriction_X) \neq F(h' \restriction_X)$. Si $w \in Z$ entonces $h \restriction_Z \neq h' \restriction_Z$. En cualquier caso obtenemos que $F(h \restriction_X) \triangledown h \restriction_Z \neq F(h' \restriction_X) \triangledown h' \restriction_Z$.

Ahora tomamos $g \in C_p(Y \oplus Z)$. Definimos $\widetilde{f} = F^{-1}(g \restriction_Y) \in C_p(X)$. Así $\widetilde{f} \triangledown g \restriction_Z \in C_p(X \oplus Z)$ y $G(\widetilde{f} \triangledown g \restriction_Z) = F(\widetilde{f}) \triangledown g \restriction_Z = g \restriction_Y \triangledown g \restriction_Z = g$.
iii) G ES CONTINUA:
Fijamos $y \in Y$, $z \in Z$. Para cualquier $h \in C_p(X \oplus Z)$ sucede que

$$(\widehat{y} \circ G)(h) = (\widehat{y} \circ F \circ r_X)(h) \text{ y } (\widehat{z} \circ G)(h) = (\widehat{z} \circ r_Z)(h),$$

donde $r_X : C_p(X \oplus Z) \to C_p(X)$ y $r_Z : C_p(X \oplus Z) \to C_p(Z)$ son los mapeos restricción. Por lo tanto $\widehat{y} \circ G = \widehat{y} \circ F \circ r_X$ y $\widehat{z} \circ G = \widehat{z} \circ r_Z$ son funciones continuas.
iv) G^{-1} ES CONTINUA:
Por lo visto en (ii), $G^{-1} : C_p(Y \oplus Z) \to C_p(X \oplus Z)$ está dada por $G^{-1}(g) = F^{-1}(g \restriction_Y) \triangledown g \restriction_Z$. Mediante un razonamiento similar al hecho en (iii) comprobamos que G^{-1} es continua.
v) G ES LINEAL:
Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y h, $h' \in C_p(X \oplus Z)$. Notemos que $(\alpha \cdot h + h') \restriction_X = \alpha \cdot h \restriction_X + h' \restriction_X$.

Así

$$
\begin{aligned}
G(\alpha \cdot h + h') &= F(\alpha \cdot h \restriction_X + h' \restriction_X) \triangledown (\alpha \cdot h \restriction_Z + h' \restriction_Z) \\
&= \big(\alpha \cdot F(h \restriction_X) + F(h' \restriction_X)\big) \triangledown \big(\alpha \cdot h \restriction_Z + h' \restriction_Z\big) \\
&= \alpha\big(F(h \restriction_X) \triangledown h \restriction_Z\big) + \big(F(h' \restriction_X) \triangledown h' \restriction_Z\big) \\
&= \alpha \cdot G(h) + G(h').
\end{aligned}
$$

□

2.2 Un método para construir ejemplos de espacios ℓ-equivalentes

En la sección anterior establecimos teoremas que nos permitieron hallar algunos ejemplos de propiedades topológicas que son ℓ-invariantes. En esta sección introduciremos un método para construir ejemplos de espacios ℓ-equivalentes y en el capítulo siguiente lo utilizaremos para poder concluir que muchas propiedades topológicas conocidas no son ℓ-invariantes. Y es esta la ventaja del método que presentamos: en la investigación de las propiedades ℓ-invariantes, dicho procedimiento es una buena herramienta para concluir que algunas de las propiedades topológicas clásicas no son preservadas por la relación de ℓ-equivalencia.

2.14 Definición. Sea X un espacio topológico y F un subespacio de X.

(a) Diremos que una función $h : C(F) \to C(X)$ es un *extensor* si para toda función f en $C(F)$, se tiene que $h(f) \restriction_F = f$.

(b) Un extensor $h : C(F) \to C(X)$ es *lineal* si es una transformación lineal de $C_p(F)$ en $C_p(X)$.

(c) Decimos que un conjunto $F \subseteq X$ está *l-inmerso* en X si hay un extensor lineal de $C_p(F)$ en $C_p(X)$ continuo.

En esta sección estudiaremos extensores que son continuos como funciones de $C_p(F)$ en $C_p(X)$. Por otro lado, no es difícil probar que todo conjunto ℓ-inmerso de un espacio X es cerrado. A continuación presentamos algunos resultados sobre conjuntos ℓ-inmersos que nos serán de gran ayuda para obtener algunos otros resultados.

2.15 Teorema. *Si F es un retracto de X, entonces F es l-inmerso en X.*

Demostración. Sea $r : X \to F$ una función continua tal que $r \restriction_F = Id_F$ y $r^* : C_p(F) \to C_p(X)$ el mapeo dual correspondiente. El mapeo r^* es continuo y lineal por 1.13 y 1.14. Además para cualquier $f \in C_p(F)$, se tiene que $r^*(f) \restriction_F = (f \circ r) \restriction_F = f$. $\square$

Los siguientes dos teoremas se presentan sin demostración. Remitimos al lector a los libros [2] y [3] para la consulta de una demostración de estos resultados.

2.16 Teorema. *Si X es un espacio, entonces todo subespacio compacto metrizable de X es l-inmerso en X.*

2.17 Teorema. *Si X es un espacio metrizable, entonces todo conjunto cerrado en X es l-inmerso en X.*

2.18 Definición. Sean X un espacio, F_1 y F_2 subespacios de X, $h_1 : C_p(F_1) \to C_p(X)$ y $h_2 : C_p(F_2) \to C_p(X)$ dos extensores. Defina $H_1 = h_1 \circ r_{F_1}$ y $H_2 = h_2 \circ r_{F_2}$, donde $r_{F_i} : C_p(X) \to C_p(F_i)$ es el mapeo restricción, para $i \in \{1, 2\}$. Diremos que los extensores h_1 y h_2 son *paralelos* si $H_1 \circ H_2 = H_2$ y $H_2 \circ H_1 = H_1$. Asimismo, diremos que dos subconjuntos ℓ-inmersos F_1 y F_2 de X son *paralelos* si existen extensores lineales, continuos y paralelos $h_i : C_p(F_i) \to C_p(X)$, $i \in \{1, 2\}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & C_p(F_1) \arrow[dr, "h_1"] & & C_p(F_2) \arrow[dr, "h_2"] & \\
C_p(X) \arrow[ur, "r_{F_1}"] \arrow[dr, "r_{F_2}"'] \arrow[rr, shift left, "H_1"] \arrow[rr, shift right, "H_2"'] & & C_p(X) \arrow[ur, "r_{F_2}"] \arrow[dr, "r_{F_1}"'] \arrow[rr, shift left, "H_2"] \arrow[rr, shift right, "H_1"'] & & C_p(X) \\
 & C_p(F_2) \arrow[ur, "h_2"'] & & C_p(F_1) \arrow[ur, "h_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

2.19 Observación. Dos extensores son paralelos si y sólo si sus imágenes coinciden.

2.20 Lema. *Si F_1 y F_2 son conjuntos l-inmersos paralelos en X, entonces existen extensores paralelos, lineales y continuos $h_i : C_p(F_i) \to C_p(X)$, $i \in \{1, 2\}$, tales que $h_1(1_{F_1}) = h_2(1_{F_2}) = 1_X$ donde 1_{F_1}, 1_{F_2} y 1_X son las funciones en F_1, F_2 y X iguales a 1 en todos los puntos.*

Demostración. Sean $\Theta_i : C_p(F_i) \to C_p(X)$, $i \in \{1, 2\}$, dos extensores paralelos, lineales y continuos. Definimos $f_0 = \Theta_1(1_{F_1})$. Utilizando que $\Theta_1 \circ r_{F_1} = \Theta_2 \circ r_{F_2}$ obtenemos $\Theta_2(1_{F_2}) = (\Theta_2 \circ r_{F_2})(1_X) = f_0$. Si $f_0 = 1_X$ hemos acabado. Supongamos que $f_0 \neq 1_X$. Entonces f_0 y 1_X son elementos linealmente independientes de $C_p(X)$. Denotemos por E al subespacio vectorial generado por f_0 y 1_X. Como E es de dimensión finita existe un subespacio vectorial E_1 de $C_p(X)$ tal que $C_p(X) = E \oplus E_1$ (en el sentido de espacios vectoriales topológicos).

Definimos $A : E \to E$ mediante $A(f_0) = 1_X$ y $A(1_X) = f_0$. Evidentemente A es un homeomorfismo lineal. Ahora consideramos $B : C_p(X) \to C_p(X)$ dada por $B(f+g) = A(f)+g$ donde $f \in E$ y $g \in E_1$. Verificamos que B es un homeomorfismo lineal: En efecto, sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\zeta_1,\ \zeta_2 \in C_p(X)$. Entonces existen $f_i \in E$ y $g_i \in E_1$ tales que $\zeta_i = f_i + g_i$, $i \in \{1, 2\}$. Obtenemos que

$$
\begin{aligned}
B(\alpha\zeta_1 + \zeta_2) &= B(\alpha(f_1 + g_1) + f_2 + g_2) \\
&= \alpha A(f_1) + A(f_2) + \alpha g_1 + g_2 \\
&= \alpha B(\zeta_1) + B(\zeta_2).
\end{aligned}
$$

Sean $f \in E$ y $g \in E_1$ tales que $B(f + g) = A(f) + g = 0$. Sucede que $A(f) = g = 0$ (cada elemento de $C_p(X)$ tiene una expresión única como suma de un elemento de E y un elemento de E_1). A inyectiva implica $f = 0$. Tomemos $f' \in E$ y $g \in E_1$. Se cumple que $B(A^{-1}(f') + g) = f' + g$.

Ahora definimos $h_i = B \circ \Theta_i : C_p(F_i) \to C_p(X)$, $i \in \{1, 2\}$.

Afirmación. h_1 y h_2 son extensores lineales, continuos y paralelos.

Demostración de la afirmación: h_i es lineal y continua porque es la composición de dos funciones que tienen estas propiedades, $i \in \{1, 2\}$. Veamos que h_1 es extensor: Sea $t \in C_p(F_1)$. Sucede que $\widetilde{h_1}(t) = f + g$ con $f \in E$ y $g \in E_1$. Además $f = \alpha f_0 + \beta 1_X$ donde $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Obtenemos que $h_1(t) = B(f + g) = \alpha 1_X + \beta f_0 + g$. Recordemos que $f_0 \restriction_{F_1} = 1_{F_1}$. Si $x \in F_1$ entonces $h_1(t)(x) = \alpha + \beta + g(x) = (\alpha f_0 + \beta 1_X + g)(x) = (f + g)(x)$. Empleando $(f + g) \restriction_{F_1} = t$ obtenemos que $h_1(t)(x) = t(x)$. □

2.21 Definición. Diremos que dos funciones continuas $p_1 : X_1 \to Y_1$ y $p_2 : X_2 \to Y_2$ son *l-equivalentes* si hay homeomorfismos lineales $j_1 : C_p(X_1) \to C_p(X_2)$ y $j_2 : C_p(Y_1) \to C_p(Y_2)$ tales que $j_1 \circ p_1^* = p_2^* \circ j_2$, donde $p_i^* : C_p(Y_i) \to C_p(X_i)$ es el mapeo dual para $i \in \{1, 2\}$.

$$\begin{array}{ccc} C_p(Y_1) & \xrightarrow{j_2} & C_p(Y_2) \\ {\scriptstyle p_1^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_2^*} \\ C_p(X_1) & \xrightarrow[j_1]{} & C_p(X_2) \end{array}$$

Por lo visto en la sección correspondiente a mapeos duales, tenemos lo siguiente:

2.22 Proposición. *Si p_1 y p_2 son funciones l-equivalentes, entonces:*

a) Si p_1 es sobreyectiva, entonces p_2 es sobreyectiva;

b) Si p_1 es inyectiva, entonces p_2 es inyectiva;

c) Si p_1 es un homeomorfismo, entonces p_2 es un homeomorfismo;

d) Si p_1 es R-cociente, entonces p_2 es R-cociente.

2.23 Observación. Si $h : C_p(F) \to C_p(X)$ es un extensor y $H = h \circ r_F$, donde $r_F : C_p(X) \to C_p(F)$ es el mapeo restricción, entonces $H \circ H = H$.

2.24 Teorema. *Si F_1 y F_2 son conjuntos l-inmersos paralelos en X, entonces los espacios R-cocientes X/F_1 y X/F_2 son l-equivalentes. Además, las proyecciones naturales $p_1 : X \to X/F_1$ y $p_2 : X \to X/F_2$ son l-equivalentes.*

Demostración. Por 1.18, $p_i^* : C_p(X/F_i) \to C_p(X)$ es una inmersión, $i \in \{1, 2\}$. Para demostrar la l-equivalencia de X/F_1 y X/F_2 basta hallar un homeomorfismo lineal $B : C_p(X) \to C_p(X)$ tal que $B(L_1) = L_2$, donde $L_i = p_i^* C_p(X/F_i)$, $i \in \{1, 2\}$. Consideremos $H_i = h_i \circ r_{F_i} : C_p(X) \to C_p(X)$, donde $h_i : C_p(F_i) \to C_p(X)$, $i \in \{1, 2\}$, son extensores lineales, paralelos y continuos tales que $h_1(1_{F_1}) = h_2(1_{F_2}) = 1_X$. Definamos $B : C_p(X) \to C_p(X)$ mediante $B(f) = H_1(f) + H_2(f) - f$. B es una transformación lineal porque es una suma de funciones con esta propiedad.

Ahora tomemos $f \in C_p(X)$. Empleando lo visto en 2.23 y las ecuaciones $H_1 \circ H_2 = H_2$, $H_2 \circ H_1 = H_1$:

$$\begin{aligned} B(B(f)) &= B(H_1(f)) + B(H_2(f)) - B(f) \\ &= H_1(H_1(f)) + H_2(H_1(f)) - H_1(f) + H_1(H_2(f)) \\ &\quad + H_2(H_2(f)) - H_2(f) - H_1(f) - H_2(f) + f \\ &= f. \end{aligned}$$

Concluímos que $B = B^{-1}$ es homeomorfismo.

AFIRMACIÓN. $L_i = \{f \in C_p(X) : f \restriction_{F_i} \text{ es constante}\}$.

Demostración de la afirmación: Sea $f \in C_p(X)$ tal que $f(F_i) \subseteq \{a\}$ donde $a \in \mathbb{R}$. Buscamos $h \in C_p(X/F_i)$ tal que $p_i^*(h) = h \circ p_i = f$. Proponemos $h : X/F_i \to \mathbb{R}$ dada por $h(F_i) = a$ y $h(\{x\}) = f(x)$ si $x \in X \setminus F_i$. Si $x \in F_i$ entonces $(h \circ p_i)(x) = h(F_i) = a = f(x)$. Si $x \notin F_i$ sucede que $(h \circ p_i)(x) = h(\{x\}) = f(x)$. Además, $h \in \{\phi : X/F_i \to \mathbb{R} : \phi \circ p_i \text{ es continua}\}$ implica que h continua (A.19).

Ahora consideremos $f \in p_i^*(C_p(X/F_i))$. Como p_i^* es una inmersión existe una única $h_f \in C_p(X/F_i)$ tal que $p_i^*(h_f) = h_f \circ p_i = f$. Para cualquier $x \in F_i$ se cumple que

$$f(x) = (h_f \circ p_i)(x) = h_f(F_i),$$

donde $h_f(F_i) \in \mathbb{R}$ es una constante. ⊠

Sucede que $B(L_1) = L_2$. En efecto, sea $f \in C_p(X)$, $f(F_1) \subseteq \{a\}$, donde $a \in \mathbb{R}$. Así $H_1(f) = h_1(a \cdot 1_{F_1}) = a \cdot h_1(1_{F_1}) = a \cdot 1_X$. Por lo tanto

$$B(f) \restriction_{F_2} = H_1(f) \restriction_{F_2} + H_2(f) \restriction_{F_2} - f \restriction_{F_2} = a1_{F_2} + f \restriction_{F_2} - f \restriction_{F_2} = a1_{F_2}.$$

□

2.25 Lema. *Sean X un espacio, F un subespacio l-inmerso de X, F_1 una copia homeomorfa de F y $Z = X \oplus F_1$. Entonces F y F_1 son conjuntos l-inmersos paralelos en Z.*

Demostración. Sean $i : F \to F_1$ un homeomorfismo y $h : C_p(F) \to C_p(X)$ un extensor lineal continuo. Definimos $h_0 : C_p(F) \to C_p(Z)$ mediante

$$h_0(f)(z) = \begin{cases} h(f)(z), & \text{si } z \in X \\ f(i^{-1}(z)), & \text{si } z \in F_1 \end{cases}$$

y $h_1 : C_p(F_1) \to C_p(Z)$ mediante $h_1(g) = h_0(g \circ i)$.
La función h_0 está bien definida pues para cualquier $f \in C_p(F)$ sucede que $h_0(f) \circ i_X = h(f) \in C_p(X)$ y $h_0(f) \circ i_{F_1} = f \circ i^{-1} \in C_p(F_1)$.

Verificamos que h_0 y h_1 son extensores: en efecto, si $f \in C_p(F)$ y $x \in F$ entonces $h_0(f)(x) = h(f)(x) = f(x)$. Además, $g \in C_p(F_1)$ y $x \in F_1$ implica $h_1(g)(x) = h_0(g \circ i)(x) = g(x)$.

AFIRMACIÓN 1. h_0 y h_1 son transformaciones lineales.

Demostración de la afirmación: Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f,\ f' \in C_p(F)$. $z \in X$ implica

$$h_0(\alpha f + f')(z) = \big(\alpha h(f) + h(f')\big)(z) = \big(\alpha h_0(f) + h_0(f')\big)(z).$$

$z \in F_1$ implica

$$h_0(\alpha f + f')(z) = \alpha f(i^{-1}(z)) + f'(i^{-1}(z)) = \big(\alpha h_0(f) + h_0(f')\big)(z).$$

h_1 es lineal porque es una composición de funciones que tienen esta característica. $\boxtimes$

Afirmación 2. h_0 y h_1 son extensores paralelos.

Demostración de la afirmación: Consideremos $H_0 = h_0 \circ r_F$ y $H_1 = h_1 \circ r_{F_1}$ donde $r_F : C_p(Z) \to C_p(F)$ y $r_{F_1} : C_p(Z) \to C_p(F_1)$ son los mapeos restricción.

Sea $\phi \in C_p(Z)$. Definimos $\psi = H_0(\phi)$ y $\delta = H_1(\phi)$. Para cualquier $x \in F$ sucede que $(\psi \restriction_{F_1} \circ i)(x) = h_0(\phi \restriction_F)(i(x)) = (\phi \restriction_F)(x)$ y

$$\delta \restriction_F (x) = h_1(\phi \restriction_{F_1})(x) = h(\phi \restriction_{F_1} \circ i)(x) = (\phi \restriction_{F_1} \circ i)(x).$$

Finalmente $(H_1 \circ H_0)(\phi) = h_1(\psi \restriction_{F_1}) = h_0(\phi \restriction_F) = H_0(\phi)$ y $(H_0 \circ H_1)(\phi) = h_0(\delta \restriction_F) = h_0(\phi \restriction_{F_1} \circ i) = H_1(\phi)$. $\boxtimes$

Afirmación 3. h_0 y h_1 son continuas.

Demostración de la afirmación: Tomamos $f \in C_p(F)$. Si $z \in X$ entonces $(\widehat{z} \circ h_0)(f) = h(f)(z) = (\widehat{z} \circ h)(f)$. Por lo tanto $\widehat{z} \circ h_0 = \widehat{z} \circ h$. Si $z \in F_1$ entonces $(\widehat{z} \circ h_0)(f) = f(i^{-1}(z)) = (f \circ i^{-1})(z) = (\widehat{z} \circ A)(f)$, donde A es el mapeo dual correspondiente a i^{-1}. Obtenemos que $\widehat{z} \circ h_0 = \widehat{z} \circ A$. Además, h_1 es continua porque es una composición de funciones continuas. $\square$

Denotemos por X^+ al espacio obtenido al adherir el punto aislado p al espacio X.

2.26 Corolario. *Si F es un conjunto l-inmerso en X, entonces los espacios X^+ y $X/F \oplus F$ son l-equivalentes.*

Sea $AD(X) = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$ el duplicado de Alexandroff de un espacio X. La topología de $AD(X)$ se origina haciendo a los conjuntos de la forma $\big(U \times \{0,\, 1\}\big) \setminus \{(x, 1)\}$ (donde U es una vecindad de x en X) una base de vecindades de un punto $(x, 0) \in X \times \{0\}$ y declarando a los elementos de $X \times \{1\}$ puntos aislados. Es evidente que el subespacio $X \times \{0\}$ de $AD(X)$ es homeomorfo a X.

2.27 Lema. *El duplicado de Alexandroff $AD(X)$ del espacio X es primero numerable (compacto) si X tiene esta propiedad.*

Demostración. *i*) Supongamos que X es primero numerable. Basta comprobar que cada elemento de $X \times \{0\}$ tiene una base de vecindades numerable. Seleccione $x \in X$ y $\mathcal{B}(x)$ una base numerable para X en x. La colección $\{\big(B \times \{0,\, 1\}\big) \setminus \{(x,1)\} \,:\, B \in \mathcal{B}(x)\}$ es una base para $AD(X)$ en $(x,0)$ que no excede la cardinalidad de $\mathcal{B}(x)$.
ii) Ahora supongamos que X es compacto. Primero verificaremos que $AD(X)$ es un espacio Hausdorff. Sean z y z' dos elementos distintos de $AD(X)$. Analizaremos el caso en que $z \in X \times \{0\}$ y $z' \in X \times \{1\}$ (los casos restantes se manejan de forma parecida). Así, $z = (x,0)$ y $z' = (x',1)$, con $x,\, x' \in X$. Considere $W' = \{(x',1)\}$ y

$$W = \begin{cases} \big(X \times \{0,\, 1\}\big) \setminus \{(x',1)\}; & \text{si } x = x', \\ \big((X \setminus \{x'\}) \times \{0,\, 1\}\big) \setminus \{(x,0)\}; & \text{si } x \neq x'. \end{cases}$$

Observe que W y W' son abiertos ajenos que contienen a los puntos z y z', respectivamente.

Finalmente, sea $\{W_s\}_{s\in S}$ una cubierta abierta de $AD(X)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los conjuntos W_s pertenecen al sistema de vecindades mencionado previamente. Elegimos $s_1, \ldots, s_n \in S$ tales que $X \times \{0\} \subseteq \cup_{k=1}^{n} W_{s_k}$. La inclusión anterior se conserva si omitimos los conjuntos unipuntuales del lado derecho, de modo que asumimos $W_{s_k} = \big(U_k \times \{0,\, 1\}\big) \setminus \{(x_k,1)\}$, donde U_k es abierto en X y $x_k \in U_k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Así,

$$\big(X \times \{1\}\big) \setminus \{(x_1,1), \ldots, (x_n,1)\} \subseteq \cup_{k=1}^{n}\big((U_k \setminus \{x_k\}) \times \{1\}\big) \subseteq \cup_{k=1}^{n} W_{s_k}.$$

Para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ fijamos $s'_k \in S$ tal que $(x_k,1) \in W_{s'_k}$. Es claro que $\{W_{s_k}\}_{k=1}^{n} \cup \{W_{s'_k}\}_{k=1}^{n}$ es una subcubierta finita de $\{W_s\}_{s\in S}$. □

2.28 Corolario. *Para cualquier espacio X se cumple que $AD(X)^+$ es l-equivalente al espacio $Z \oplus X$, donde $Z = AD(X)/X$ es un espacio con un único punto no aislado. Si X es numerablemente compacto y $|X| = \kappa$, entonces $AD(X)^+$ es l-equivalente a $A(\kappa) \oplus X$, donde $A(\kappa)$ es la compactación por un punto del espacio discreto de cardinalidad κ.*

Demostración. Observe que la función $r : AD(X) \to X \times \{0\}$ definida por $r(x,i) = (x,0)$, para cualquier $(x,i) \in AD(X)$, es una retracción de $AD(X)$

en $X \times \{0\}$. Utilizando la proposición 2.15 y el corolario 2.26 obtenemos que $AD(X)^+$ es ℓ-equivalente a $Z \oplus X$, donde $Z = AD(X)/X$.

Sea $p : AD(X) \to Z$ la proyección natural. Por el corolario A.24, $p \restriction_{X \times \{1\}}: X \times \{1\} \to Z \setminus p(X \times \{0\})$ es un homeomorfismo. Esto muestra que todos los elementos de $Z \setminus p(X \times \{0\})$ son puntos aislados de Z. $\square$

Capítulo 3

Algunas propiedades topológicas no ℓ-invariantes

En el último capítulo de este trabajo aplicaremos el método que expusimos en la parte final del capítulo anterior, con el objetivo de identificar algunas propiedades topológicas que no se preservan por la relación de ℓ-equivalencia. Recuerde que hemos demostrado que si X es un espacio topológico y F es un retracto de X, entonces F está ℓ-inmerso en X (véase 2.15). También sabemos ya que si F es un subconjunto ℓ-inmerso en X, entonces los espacios X^+ y $(X/F) \oplus F$ son ℓ-equivalentes (ver 2.26). De este modo, para llevar a cabo nuestro propósito, bastará hallar propiedades que X^+ y $(X/F) \oplus F$ no tienen en común. Este es el método que esencialmente utilizaremos para encontrar propiedades que no son ℓ-invariantes, es decir, que no se preservan bajo la relación de ℓ-equivalencia.

3.1 La propiedad de Baire y la completitud en el sentido de Čech no son ℓ-invariantes

Nuestro primer objetivo es probar que la metrizabilidad no se preserva por la relación de ℓ-equivalencia. Para ello consideremos el siguiente ejemplo.

3.1 Ejemplo. Sean τ un cardinal mayor o igual que ω, D el espacio discreto de cardinalidad τ y $C = \{c_i : i \in \mathbb{N}^+\} \cup \{c_0\}$ una sucesión que converge al punto c_0 (supondremos que $c_n \neq c_{n'}$ si $n \neq n'$).

Considere a los espacios $X = D \times C$, $F = D \times \{c_0\}$ y la función $h : X \to F$

definida por $h(x, c_n) = (x, c_0)$, para cada $(x, c_n) \in D \times C$. Note que la función h es continua porque $\mathcal{A} = \{\{x\} \times C : x \in D\}$ es una cubierta abierta de X y la restricción de h a cada elemento de $\mathcal{A}$ es un mapeo constante. Utilizando 2.15 y 2.26 obtenemos que F está ℓ-inmerso en X y que X^+ es ℓ-equivalente a $(X/F) \oplus F$ (ver figura 1). Definamos $C' = \{c_i : i \in \mathbb{N}^+\}$.

Afirmación 1. $w(X^+) = \tau$ y $\chi(z, X^+) = \omega$.

Demostración de la afirmación: No es difícil comprobar que $w(X) = w(X^+)$. Además, $w(X) = \tau$ debido a que cualquier base para X contiene a la colección $\{\{y\} : y \in D \times C'\}$ y a que $w(X) \leq w(D)\, w(C)$ (véase 3.5.11 en [4]).

Ahora note que si $z = (x, c_0) \in D \times \{c_0\}$, entonces $\chi(z, X^+) = \chi(z, X) \leq \chi(x, D)\, \chi(c_0, C) = \omega$. Además, si $z \in (D \times C') \cup \{x_0\}$, entonces $\chi(z, X^+) = \omega$. $\boxtimes$

Afirmación 2. X^+ es Čech completo.

Demostración de la afirmación: Observe que X^+ es un espacio T_1 y que los elementos de $(D \times C') \cup \{x_0\}$ son puntos aislados (aquí x_0 es el punto aislado que se adjunta a X para obtener X^+). Por otro lado, para cualquier $x \in D$, se tiene que $\{x\} \times C$ es cerrado y abierto en X^+. Así, X^+ es localmente compacto. Sin embargo, este espacio no es compacto ya que F es un subconjunto cerrado de X^+. $\boxtimes$

Es bien sabido que X/F no es Čech completo. Mediante un argumento diagonal se puede demostrar que el carácter de este espacio excede a τ. Concluimos que $\tau < \chi\big((X/F) \oplus F\big) \leq w\big((X/F) \oplus F\big)$ (recuerde que $\chi(Z) \leq w(Z)$ para cualquier espacio Z y que la función carácter es monótona).

Como corolario al análisis que hicimos en el anterior ejemplo tenemos lo siguiente.

3.2 Corolario. *La numerabilidad del peso, la numerabilidad del carácter, la compacidad local y la completitud en el sentido de Čech no son preservadas por la relación de l-equivalencia.*

De hecho, con el siguiente ejemplo mostramos que la numerabilidad del carácter no se preserva por ℓ-equivalencias, aún dentro de la clase de espacios compactos.

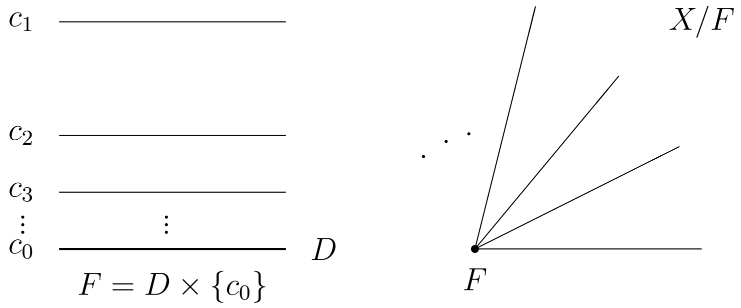

Figura 1

3.3 Ejemplo. Sea $X = AD(I)$, el duplicado de Alexandroff del segmento $I = [0, 1]$ de la recta real. La proposición 2.27 implica que X es un espacio compacto y primero numerable. Por el corolario 2.28, X^+ es ℓ-equivalente a $A(\mathbf{c}) \oplus I$, donde $A(\mathbf{c})$ es la compactación por un punto del espacio discreto de cardinalidad $\mathbf{c} = |I|$. Observe que $\chi(X^+) = \omega$ y que $\chi\big(A(\mathbf{c}) \oplus I\big) = max\{\chi\big(A(\mathbf{c})\big), \chi(I)\} = \mathbf{c}$. Utilizando que la compacidad es una propiedad finitamente aditiva y que en cualquier espacio compacto el carácter y el pseudocarácter coinciden, obtenemos el siguiente corolario.

3.4 Corolario. *La numerabilidad del carácter y del pseudocarácter no son preservados por la relación de l-equivalencia, aún dentro de la clase de espacios compactos.*

La idea para presentar nuestro siguiente ejemplo es probar que la propiedad de Baire no es preservada por la relación de ℓ-equivalencia.

3.5 Ejemplo. Sean $\mathbb{Q}$ el espacio de números racionales, $C = \{c_n : n \in \mathbb{N}^+\} \cup \{c_0\}$ una sucesión que converge al punto c_0 y $X = \mathbb{Q} \times C$. Considere $C' = \{c_n : n \in \mathbb{N}^+\}$. Para $x \in \mathbb{Q} \times C'$ definimos $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$ y para $x \in \mathbb{Q} \times \{c_0\}$ definimos $\mathcal{B}(x) = \{W \subseteq X : W$ es vecindad de x en la topología producto de $X\}$. Hemos creado un sistema de vecindades para una topología $\mathcal{O}$ en X. No es difícil verificar que la colección $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in \mathbb{Q} \times C'\} \cup \{U \times V :$ U es abierto en $\mathbb{Q}$ y V es vecindad de $c_0\}$ es una base para el espacio $(X, \mathcal{O})$. Sea $\mathcal{O}'$ la topología producto en X. La topología $\mathcal{O}$ es más fina que $\mathcal{O}'$ porque para cualquier $G \in \mathcal{O}' \setminus \{\emptyset\}$ y cualquier $x \in G$, existe $A \in \mathcal{O}$ tal que $x \in A \subseteq G$ (si $x \in \mathbb{Q} \times C'$ tomamos $A = \{x\}$, si $x \in \mathbb{Q} \times \{c_0\}$ entonces $G \in \mathcal{B}(x)$ y podemos tomar $A = G$). Una consecuencia de esto es que

$cl_{\mathcal{O}}(E) \subseteq cl_{\mathcal{O}'}(E)$, para todo $E \subseteq X$.

Note ahora que el espacio C es normal y segundo numerable porque es homeomorfo a la compactación por un punto del espacio discreto de cardinalidad ω. Por el teorema de metrización de Urysohn, C es metrizable. Utilizando que la metrizabilidad es una propiedad ω-multiplicativa obtenemos que $(X, \mathcal{O}')$ es un espacio metrizable.

Lo que señalamos en los párrafos anteriores es útil para demostrar la siguiente

3.6 Proposición. $(X, \mathcal{O})$ *es un espacio metrizable.*

Demostración. Por el teorema de metrización de Urysohn, basta comprobar que $(X, \mathcal{O})$ es un espacio regular con una base numerable.
i) $(X, \mathcal{O})$ es T_1 porque para cualquier $x \in X$ sucede que $\{x\} \subseteq cl_{\mathcal{O}}(\{x\}) \subseteq cl_{\mathcal{O}'}(\{x\}) = \{x\}$. Ahora elegimos $A \in \mathcal{O} \setminus \{\emptyset\}$ y $x \in A$. Verifiquemos que existe $G \in \mathcal{O}$ tal que $x \in G \subseteq cl_{\mathcal{O}}(G) \subseteq A$. En efecto: si $x \in \mathbb{Q} \times C'$ tomamos $G = \{x\}$. Supongamos que $x \in \mathbb{Q} \times \{c_0\}$. Por construcción de la topología $\mathcal{O}$, existe $B \in \mathcal{O}'$ que satisface $x \in B \subseteq A$. Como cualquier espacio metrizable es regular, podemos escoger $G \in \mathcal{B}(x)$ que cumple $x \in G \subseteq cl_{\mathcal{O}'}(G) \subseteq B$. Así, $x \in G \subseteq cl_{\mathcal{O}}(G) \subseteq A$.
ii) A causa de que todo espacio metrizable es primero numerable, para cada $q \in \mathbb{Q}$ podemos fijar $\mathcal{B}(q, c_0)$ una base local numerable para $(X, \mathcal{O}')$ en (q, c_0). Por definición de la topología $\mathcal{O}$, $\mathcal{B}(q, c_0)$ es base local para $(X, \mathcal{O})$ en (q, c_0). Esto termina la demostración pues $|X| = \omega$ y los elementos de $\mathbb{Q} \times C'$ son puntos aislados (recuerde que si Z es un espacio topológico y $\{\mathcal{B}(z) : z \in Z\}$ es un sistema de vecindades para Z, entonces $\cup\{\mathcal{B}(z) : z \in Z\}$ es una base para dicho espacio). □

Cualquier elemento no vacío de $\mathcal{B}$ intersecta a $\mathbb{Q} \times C'$. Efectivamente: sea U un abierto no vacío en $\mathbb{Q}$ y V una vecindad de c_0. La vecindad V es de la forma $C \setminus \{c_{n_1}, \ldots, c_{n_k}\}$, donde $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^+$. Eligiendo $q \in U$ y $c_n \in V \setminus \{c_0\}$ obtenemos que $(q, c_n) \in (\mathbb{Q} \times C') \cap (U \times V)$. Por lo tanto, $\mathbb{Q} \times C'$ es un subespacio denso y discreto de $(X, \mathcal{O})$.

Como $\mathbb{Q} \times C'$ es un espacio localmente compacto y no compacto, $\mathbb{Q} \times C'$ es Čech-completo. Esto implica que $(X, \mathcal{O})$ es un espacio de Baire (consulte el apéndice B).

Note ahora que $F = \mathbb{Q} \times \{c_0\}$ está ℓ-inmerso en X pues la función $r : X \to F$ dada por $r(q, c_n) = (q, c_0)$, para $(q, c_n) \in X$, es una retracción de X en F (r es continua debido a que si U es abierto en $\mathbb{Q}$, entonces

$r^{-1}(U \times \{c_0\}) = U \times C \in \mathcal{B}$). Lo anterior muestra que los espacios X^+ y $(X/F) \oplus F$ son ℓ-equivalentes.

Utilizando la proposición 2.13 y el hecho de que $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ es homeomorfo a $\mathbb{Q}$ obtenemos que

$$X^+ \oplus \mathbb{Q} \overset{l}{\sim} (X/F) \oplus F \oplus \mathbb{Q} = (X/F) \oplus \mathbb{Q}.$$

Concluimos que $X^+ \overset{l}{\sim} (X^+ \oplus \mathbb{Q})$.

Como es bien conocido el espacio de los números racionales $\mathbb{Q}$ no es un espacio de Baire porque $\mathbb{Q} \cap (0,1) = \cup\{\{q\} : q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)\}$ es la unión de una colección numerable de subconjuntos de $\mathbb{Q}$ densos en ninguna parte, sin embargo, $\mathbb{Q} \setminus (0,1)$ no es denso en $\mathbb{Q}$. Por lo tanto, $X^+ \oplus \mathbb{Q}$ no tiene la propiedad de Baire (recuerde que esta propiedad es hereditaria con respecto a subconjuntos abiertos).

A partir de todo lo expuesto en el ejemplo 3.5 podemos concluir lo siguiente:

3.7 Corolario. *Las siguientes propiedades no son preservadas por la relación de l-equivalencia, dentro de la clase de los espacios métricos numerables:*

1. *la propiedad de Baire,*
2. *la pseudocompletitud,*
3. *la propiedad "contener un subespacio infinito, denso y discreto",*
4. *la propiedad "contener un subespacio denso y localmente compacto",*
5. *la propiedad "contener un subespacio denso y Čech-completo".*

3.2 La normalidad no es ℓ-invariante

En el siguiente ejemplo analizaremos a un subespacio del producto $(\omega_1+1) \times (\omega_1+1)$, donde ω_1+1 es el conjunto de ordinales menores o iguales que ω_1, equipado con la topología del orden lineal.

3.8 Ejemplo. Considere $X = \big((\omega_1+1) \times (\omega_1+1)\big) \setminus \{(\omega_1, \omega_1)\}$. Sean $F_1 = \omega_1 \times \{\omega_1\}$ y $F_2 = \{\omega_1\} \times \omega_1$.

Afirmación 1. X^+ no es un espacio normal (recuerde que X^+ es el espacio obtenido al adherir el punto aislado x_0 a X).

Demostración de la afirmación: Se tiene que F_1 y F_2 son cerrados en X porque

$$F_1 = \big((\omega_1 + 1) \times \{\omega_1\}\big) \cap X \text{ y } F_2 = \big(\{\omega_1\} \times (\omega_1 + 1)\big) \cap X.$$

Se puede demostrar que F_1 y F_2 no tienen vecindades ajenas en X. Como la normalidad es una propiedad hereditaria con respecto a subconjuntos cerrados y X es un subconjunto cerrado de X^+, obtenemos que X^+ no es un espacio normal. ⊠

Por otro lado, la función $r : X \to F_1$ dada por $r(\alpha, \beta) = (min\{\alpha,\, \beta\},\, \omega_1)$ es una retracción de X en F_1. En efecto: r está bien definida ya que alguna de las componentes de cada elemento de X pertenece al conjunto ω_1. Además, r es continua pues la imagen inversa de cada elemento de la subbase usual de F_1 es abierto en X (véase la figura 2):

$$\begin{aligned} r^{-1}(\gamma \times \{\omega_1\}) &= \big(\gamma \times (\omega_1 + 1)\big) \cup \big((\omega_1 + 1) \times \gamma\big), \quad \text{si } 0 < \gamma < \omega_1; \\ r^{-1}\big((\gamma,\, \omega_1) \times \{\omega_1\}\big) &= \big((\gamma,\, \omega_1] \times (\gamma,\, \omega_1]\big) \setminus \{(\omega_1, \omega_1)\}, \quad \text{si } 0 \leq \gamma < \omega_1. \end{aligned}$$

Esto implica que F_1 está ℓ-inmerso en X y que $X^+ \overset{l}{\sim} (X/F_1) \oplus F_1$. A partir de ahora nuestro objetivo será demostrar que $(X/F_1) \oplus F_1$ es colectivamente normal.

Afirmación 2. Si $Y = \omega_1 \times \omega_1$, entonces $\beta X = \beta Y$, donde βX (βY) es la compactación de Stone-Čech del espacio X (Y).

Demostración de la afirmación: Considere A un subconjunto numerable infinito de Y. Denotemos con π_i a la proyección en el i-ésimo factor de Y, $i \in \{1,\, 2\}$. Debido a que $\pi_i(A)$ es un subconjunto numerable de ω_1, existe $\delta_i \in \omega_1$ tal que $\pi_i(A) \subseteq \delta_i + 1$, $i \in \{1,\, 2\}$. Observe que $A \subseteq W = (\delta_1 + 1) \times (\delta_2 + 1)$. Usando la compacidad de W, tenemos que $\emptyset \neq der_W(A) \subseteq der_Y(A)$. Esto prueba que Y es numerablemente compacto. Además Y es un espacio Tychonoff porque dicha propiedad es multiplicativa. Concluimos entonces que Y es pseudocompacto.

Por el teorema de Glicksberg (veáse 3.12.21 en [4]):

$$\beta Y = (\omega_1 + 1) \times (\omega_1 + 1) = X \cup \{(\omega_1, \omega_1)\}.$$

Evidentemente $Y \subseteq X \subseteq \beta Y$. Así, $\beta X = \beta Y$. $\boxtimes$

AFIRMACIÓN 3. $Z = X/F_1$ es compacto.
Demostración de la afirmación: Sean $p : X \to Z$ la proyección natural y $P : \beta X \to \beta Z$ la extensión continua correspondiente. Por la sobreyectividad de p, se cumple que:

$$\beta Z = P(\beta X) = P(X) \cup P\big(\{(\omega_1, \omega_1)\}\big) = Z \cup \{P(\omega_1, \omega_1)\}.$$

$P(\omega_1, \omega_1) \in cl_{\beta Z}(P(F_1))$ ya que $(\omega_1, \omega_1) \in cl_{\beta X}(F_1)$. Como $P(F_1)$ es un conjunto unipuntual y βZ es un espacio T_1, debe suceder que $P(\omega_1, \omega_1) \in P(F_1) \subseteq Z$. Por lo tanto $Z = \beta Z$. $\boxtimes$

Note ahora que $(X/F_1) \oplus F_1$ es normal y numerablemente compacto porque ambas propiedades son finitamente aditivas. A causa de lo anterior, dicho espacio es colectivamente normal.

En conclusión tenemos el siguiente corolario.

3.9 Corolario. *Normalidad y normalidad colectiva no son preservadas por la relación de l-equivalencia.*

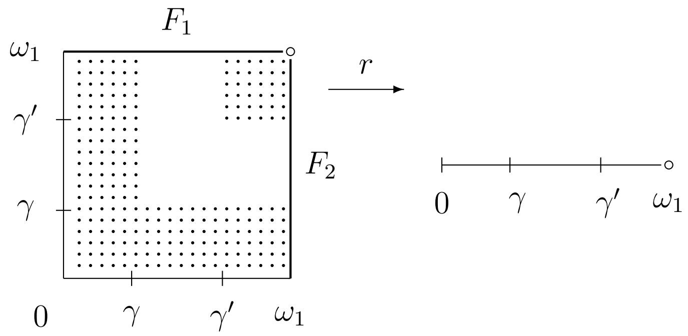

Figura 2

A continuación estudiaremos otro subespacio del producto $(\omega_1 + 1) \times (\omega_1 + 1)$. Con el fin de facilitar la exposición de este ejemplo conservaremos la notación empleada en el anterior.

3.10 Ejemplo. Considere $X_0 = \big(\omega_1 \times (\omega_1 + 1)\big) \cup S$ donde $S = \{(\omega_1, \alpha) : \alpha < \omega_1 \text{ es un ordinal sucesor}\}$.

Debido a que F_1 es un retracto del espacio X y a que X_0 está contenido en X sucede que F_1 es un retracto de X_0. Por el corolario 2.26, X_0^+ es ℓ-equivalente a $(X_0/F_1) \oplus F_1$.

AFIRMACIÓN 1. $\omega < e(X_0^+)$.
Demostración de la afirmación: No es difícil comprobar que $e(X_0) \leq e(X_0^+)$. Por otra parte, S es un subespacio no numerable, discreto y cerrado de X_0. Efectivamente: si α es un ordinal sucesor menor que ω_1, entonces

$$U = \big((\omega_1 + 1) \times \{\alpha\}\big) \cap X_0 = \big(\omega_1 \times \{\alpha\}\big) \cup \{(\omega_1, \alpha)\}$$

es abierto en X_0 (ver figura 3). Por lo tanto, $U \cap S = \{(\omega_1, \alpha)\}$ es abierto en S. Ahora observe que $\{\omega_1\} \times (\omega_1 + 1)$ es cerrado en el espacio $(\omega_1 + 1) \times (\omega_1 + 1)$ y que $\big(\{\omega_1\} \times (\omega_1 + 1)\big) \cap X_0 = S$. Así, $\omega < e(X_0)$. ⊠

AFIRMACIÓN 2. $S \cup \{(\omega_1, \omega_1)\}$ tiene la propiedad de Lindelöf.
Demostración de la afirmación: Sea $H = \{\alpha < \omega_1 : \alpha \text{ es un ordinal sucesor}\} \cup \{\omega_1\}$. El subespacio H es un espacio T_3 porque es un subconjunto de $\omega_1 + 1$ y porque la regularidad es una propiedad hereditaria. Observe que para cualquier colección $\mathcal{C}$ de abiertos en $\omega_1 + 1$ que cubre a H es posible escoger $C_0 \in \mathcal{C}$ y $\beta \in \omega_1$ tales que $\omega_1 \in (\beta, \omega_1] \subseteq C_0$. Considere $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ una enumeración de $H \cap (\beta + 1)$ y para cada $i \in \mathbb{N}^+$ seleccione $C_i \in \mathcal{C}$ que contiene al punto α_i. Es claro que $H \subseteq \cup_{i \in \mathbb{N}} C_i$. Finalmente note que $S \cup \{(\omega_1, \omega_1)\}$ es homeomorfo a H. ⊠

AFIRMACIÓN 3. Si $X' = \big(\omega_1 \times (\omega_1 + 1)\big) \cup \big(S \cup \{(\omega_1, \omega_1)\}\big)$, entonces $e(X') = \omega$.
Demostración de la afirmación: Por lo visto en el párrafo anterior, X' es la unión de un espacio numerablemente compacto y un espacio Lindelöf. Suponga que X' contiene un subespacio A no numerable, cerrado y discreto. Defina $A_1 = A \cap \big(\omega_1 \times (\omega_1 + 1)\big)$ y $A_2 = A \cap \big(S \cup \{(\omega_1, \omega_1)\}\big)$. Observe que $A = A_1 \cup A_2$; además A_1 y A_2 son subespacios cerrados y discretos de $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ y $S \cup \{(\omega_1, \omega_1)\}$, respectivamente. Note que $|A_1| \leq \omega$ debido a que cualquier espacio numerablemente compacto tiene extensión numerable. Esto implica que $|A_2| > \omega$. Así, $\{\{x\} : x \in A_2\}$ es una cubierta abierta de A_2 que carece de una subcubierta numerable, lo que contradice la elección de A_2 (recuerde que la propiedad de Lindelöf es hereditaria con respecto a subconjuntos cerrados). Por lo tanto,

$$e(X') = sup\{|A| : A \subseteq X' \text{ y } A = A \setminus A^d = A \cup A^d\} \leq \omega.$$

AFIRMACIÓN 4. $e\big((X_0/F_1) \oplus F_1\big) = \omega$.

Demostración de la afirmación: Sean $Z' = X_0/F_1$ y $p' : X_0 \to Z'$ la proyección natural. Es claro que $Y \subseteq X_0 \subseteq \beta Y$ implica $\beta X_0 = \beta Y$; observe que $X' \subseteq \beta X_0$. Elijamos $P' : X' \to \beta Z'$ una extensión continua de p'. Mediante un argumento similar al que empleamos en 3.8 se puede demostrar que $P'(X') = Z'$. Como la extensión de un espacio no se incrementa por funciones continuas, obtenemos que $e(Z') = e(X_0/F_1) = \omega$. Finalmente,

$$e\big((X_0/F_1) \oplus F_1\big) = e(X_0/F_1) + e(F_1) = \omega.$$

$\boxtimes$

Con todo lo anterior podemos concluír lo siguiente.

3.11 Corolario. *La numerabilidad de la extensión de un espacio no es preservada por la relación de l-equivalencia, aún dentro de la clase de espacios pseudocompactos.*

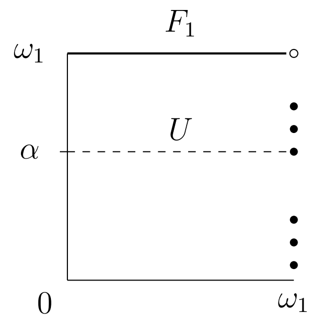

Figura 3

A continuación probaremos que la numerabilidad del π-peso no se preserva por ℓ-equivalencias.

3.12 Ejemplo. Sea $K = [0,1]^{\mathbb{R}}$. Utilizando que la separabilidad es una propiedad $\mathbf{c}$-multiplicativa y el teorema de Tychonoff, obtenemos que K es un espacio compacto que contiene un subconjunto denso numerable A. Por la proposición 2.27, el duplicado de Alexandroff de K, $AD(K) = (K \times \{0\}) \cup (K \times \{1\})$ es compacto. Consideremos el subespacio $X = (K \times \{0\}) \cup (A \times \{1\})$ de $AD(K)$.

AFIRMACIÓN 1. X es un espacio compacto.

Demostración de la afirmación: Note que $AD(K) \setminus X = (K \setminus A) \times \{1\}$; utilizando que los elementos de $K \times \{1\}$ son puntos aislados de $AD(K)$ se obtiene que X es un subconjunto cerrado de $AD(K)$. Por último, recuerde que la compacidad es una propiedad hereditaria con respecto a subconjuntos cerrados. ⊠

Observe que si $(x, 0) \in K \times \{0\}$, entonces la colección de todos los conjuntos de la forma $(U \times \{0\}) \cup (W_U \times \{1\})$, donde U es una vecindad de x en K y $W_U = (U \setminus \{x\}) \cap A$, es una base para X en $(x, 0)$. Además, si $(x, 1) \in A \times \{1\}$, entonces $\{(x, 1)\}$ es una base para X en $(x, 1)$.

AFIRMACIÓN 2. $A \times \{1\}$ es un subconjunto denso de X.

Demostración de la afirmación: Elijamos $x \in K$ y U una vecindad de x en K. Sucede que

$$\big((U \times \{0\}) \cup (W_U \times \{1\})\big) \cap \big(A \times \{1\}\big) = W_U \times \{1\} \tag{$*$}$$

Como K es un espacio T_1 sin puntos aislados, $U \setminus \{x\}$ es un abierto no vacío en K. Por lo tanto, W_U es no vacío (recuerde que A es denso en K). ⊠

AFIRMACIÓN 3. $\pi w(X^+) = \omega$.

Demostración de la afirmación: A partir de la ecuación $(*)$ se puede probar que $\mathcal{C} = \{\{z\} : z \in A \times \{1\}\}$ es una π-base para X. Efectivamente, eligiendo w en el conjunto W_U obtenemos que $\{(w, 1)\} \in \mathcal{C}$ y $\{(w, 1)\} \subseteq (U \times \{0\}) \cup (W_U \times \{1\})$. Concluimos que $\pi w(X) = \pi w(X^+) = \omega$. ⊠

Sea $F = K \times \{0\}$. El conjunto F está ℓ-inmerso en X porque la función $g : AD(K) \to F$ dada por $g(x, i) = (x, 0)$, para cada $(x, i) \in AD(K)$ es una retracción de $AD(K)$ en F. Por el corolario 2.26, los espacios X^+ y $(X/F) \oplus F$ son ℓ-equivalentes. Sin embargo, $\pi w(K) = \mathbf{c} \cdot \pi w\big([0, 1]\big) = \mathbf{c}$, donde $\mathbf{c} = |\mathbb{R}|$. Utilizando la monotonía de la función π-peso obtenemos que

$$\pi w\big((X/F) \oplus F\big) \geq \pi w(F) = \pi w(K) > \omega.$$

Por lo tanto, tenemos lo siguiente.

3.13 Corolario. *El π-peso no es preservado por la relación de l-equivalencia, aún dentro de la clase de espacios compactos.*

3.3 La propiedad de Fréchet y la secuencialidad no son ℓ-invariantes

Recuerde que si κ es un cardinal infinito y Z es un conjunto de cardinalidad κ, entonces la *compactación por un punto del espacio discreto de cardinalidad* κ, $A(\kappa)$, es el conjunto $Z \cup \{*\}$, donde $* \notin Z$, equipado con la topología

$$\{E \subseteq Z \cup \{*\} : E \subseteq Z\} \cup \{E \subseteq Z \cup \{*\} : * \in E \text{ y } |(Z \cup \{*\}) \setminus E| < \omega\}.$$

El objetivo de esta última sección del presente capítulo es probar que la propiedad de Fréchet no se preserva por ℓ-equivalencias. Para ello consideraremos el siguiente ejemplo.

3.14 Ejemplo. Considere S el espacio discreto de cardinalidad ω_1, $T = S \cup \{t_0\}$ su compactación por un punto y $A = \{a_m : m \in \mathbb{N}^+\} \cup \{a_0\}$ una sucesión que converge al punto a_0. Sean $Z = (T \times A) \setminus \{(t_0, a_0)\}$ y $X = Z \times Z$. El espacio Z es un espacio localmente compacto. En efecto: sea (s, a_m) un elemento arbitrario de Z. Sucede que $s \neq t_0$ o $a_m \neq a_0$. Si $s \neq t_0$, entonces $(\{s\} \times A) \cap Z = \{s\} \times A$ es una vecindad de (s, a_m) en Z con clausura compacta. Análogamente, si $a_m \neq a_0$, entonces $T \times \{a_m\}$ es la vecindad que requerimos (recuerde que A es homeomorfo a la compactación por un punto del espacio discreto de cardinalidad ω).

Utilizando que la compacidad local es una propiedad finito multiplicativa obtenemos que X es localmente compacto; por ello, X^+ es localmente compacto. Además, se puede demostrar que X^+ es un espacio de Fréchet. Particularmente, X^+ es un k-espacio con estrechez numerable (veáse 1.7.13 y 3.3.20 en [4]).

Supongamos que $\Delta = \{(z, z) : z \in Z\}$ es un retracto de X. Por el corolario 2.26, los espacios X^+ y $Y \oplus \Delta$, donde $Y = X/\Delta$, son ℓ-equivalentes.

A partir de ahora nos dedicaremos a demostrar que la estrechez de $Y \oplus \Delta$ es no numerable. Primeramente probemos que $D = S \times \{a_0\}$ es un subespacio discreto de Z. En efecto: para cualquier $s \in S$, $(\{s\} \times A) \cap Z = \{s\} \times A$ es un conjunto abierto en Z. Además $(\{s\} \times A) \cap D = \{(s, a_0)\}$. Esto muestra que $\{(s, a_0)\}$ es abierto en la topología de subespacio de D.
Evidentemente $Z \setminus D = T \times (A \setminus \{a_0\}) = (T \times (A \setminus \{a_0\})) \cap Z$. Como $T \times (A \setminus \{a_0\})$ es un subconjunto abierto de $T \times A$, la ecuación anterior implica que D es cerrado en Z.

3.15 Lema. *Sea* $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una sucesión de puntos distintos de* D*. Existe una función continua* $\varphi : Z \to \mathbb{R}$ *tal que* $\varphi(z_n) = 2^n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, elija el elemento s_n de S que cumple la condición $z_n = (s_n, a_0)$. Considere la función $\varphi : Z \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(z) = \begin{cases} 2^n, & \text{si } z = z_n \text{ o } z = (s_n, a_m) \text{ con } m > n, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observe que $\{T\times\{a_m\} : m \in \mathbb{N}^+\}\cup\{\{s\}\times A : s \in S\}$ es una cubierta abierta de Z. En efecto: si $m \in \mathbb{N}^+$ y $s \in S$, entonces $T\times\{a_m\}$ y $\{s\}\times A$ son abiertos en $T \times A$. Además $(T \times \{a_m\}) \cap Z = T \times \{a_m\}$ y $(\{s\} \times A) \cap Z = \{s\} \times A$. A continuación veremos que la restricción de φ a cada elemento de esta cubierta es una función continua. De esta manera probaríamos que ϕ es continua. Para cada $m \in \mathbb{N}^+$ y cada $s \in S$ defina $g_m = \varphi \restriction_{T\times\{a_m\}}$ y $h_s = \varphi \restriction_{\{s\}\times A}$. Suponga que $s = s_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. No es díficil comprobar que

$$\begin{aligned} g_m^{-1}(\{0\}) &= (T \times \{a_m\}) \setminus \{(s_n, a_m) : n < m\}, \\ h_{s_n}^{-1}(\{2^n\}) &= (\{s_n\} \times A) \setminus \{(s_n, a_m) : m \leq n\}. \end{aligned}$$

Por otra parte, $s \notin \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ implica $h_s \equiv 0$. Esto muestra que las funciones g_m y h_s son constantes, salvo en una cantidad finita de puntos aislados (véase la figura 4). $\square$

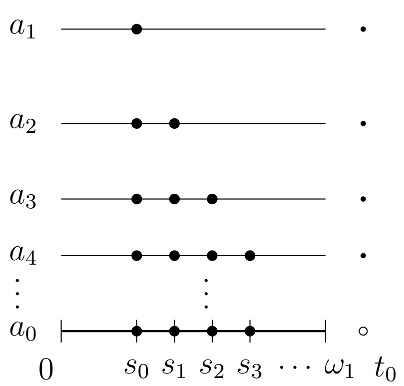

Figura 4: La función φ tiene un valor positivo en los puntos gorditos.

Como $D \times D$ es un espacio discreto, $J = (D \times D) \setminus \Delta$ es un subconjunto cerrado de $D \times D$. Utilizando que $D \times D$ es cerrado en X obtenemos que J es un subconjunto cerrado de X.

3.16 Lema. *Para cualquier subconjunto numerable infinito Q de J existe una función continua $f : Z \times Z \to \mathbb{R}$ que cumple lo siguiente:*

(a) $f(\Delta) = \{0\}$,

(b) $f(q) \geq 1$ *para todo* $q \in Q$.

Demostración. El conjunto $P = \pi_1(Q) \cup \pi_2(Q)$, donde $\pi_1, \pi_2 : Z \times Z \to Z$ son los mapeos proyección, es un subconjunto numerable infinito de D. Efectivamente: $Q \subseteq J \subseteq D \times D$ implica $\pi_i(Q) \subseteq \pi_i(D \times D) \subseteq D$, para $i \in \{1, 2\}$. Esto muestra que $\pi_1(Q) \cup \pi_2(Q) \subseteq D$. Ahora supongamos que P es un conjunto finito. Debido a que $Q \subseteq \pi_1(Q) \times \pi_2(Q) \subseteq P \times P$, obtenemos que Q es finito, lo que contradice nuestras hipótesis. Finalmente observe que $|P| \leq |\pi_1(Q)| + |\pi_2(Q)| \leq |Q| + |Q| = \omega$.

Considere $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de P y $\varphi : Z \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\varphi(z_n) = 2^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (3.15). Definimos $f : Z \times Z \to \mathbb{R}$ mediante la regla $f(z, z') = |\varphi(z) - \varphi(z')|$. Claramente f es continua y cumple la condición *(a)*. Verifiquemos que f satisface la condición *(b)*: si $q \in Q$, entonces $q = (s, a_0, s', a_0)$ donde s, $s' \in S$ y $s \neq s'$. Como $(s, a_0) \in \pi_1(Q)$ y $(s', a_0) \in \pi_2(Q)$ tenemos que $(s, a_0) = z_n$ y $(s', a_0) = z_{n'}$, con n y n' elementos distintos de $\mathbb{N}$. Por lo tanto $f(q) = f(z_n, z_{n'}) = |2^n - 2^{n'}| \geq 1$. $\square$

El siguiente lema, junto con el hecho de que J es un subespacio cerrado de X, permite concluir que X no es un espacio normal.

3.17 Lema. *Si U es un subconjunto abierto en X que contiene a Δ, entonces $J \cap cl_X(U)$ no es vacío.*

Demostración. Primero necesitamos hallar una base local para Z en los puntos de la forma (t_0, a_m) y (s, a_0), donde $m \in \mathbb{N}^+$ y $s \in S$. Sea $m \in \mathbb{N}^+$. Sabemos que $\mathcal{B}(t_0) = \{E \subseteq T : t_0 \in E \text{ y } |T \setminus E| < \omega\}$ es una base local para T en t_0 y que a_m es un punto aislado de A. Así, la colección de todos los conjuntos de la forma $E \times \{a_m\}$, donde $E \in \mathcal{B}(t_0)$, es una base local para el producto $T \times A$ en (t_0, a_m). Note que para cualquier $E \in \mathcal{B}(t_0)$ se cumple que $\big(E \times \{a_m\}\big) \cap Z = E \times \{a_m\}$. Por lo tanto, la familia $\{E \times \{a_m\} : E \in \mathcal{B}(t_0)\}$ es una base para Z en el punto (t_0, a_m).

Ahora elegimos $s \in S$ y consideramos la colección $\mathcal{B}(a_0) = \{W \subseteq A : a_0 \in W \text{ y } |A \setminus W| < \omega\}$. Mediante un razonamiento similar al que hicimos en el párrafo anterior se puede concluir que la familia $\{\{s\} \times W : W \in \mathcal{B}(a_0)\}$ es una base local para Z en (s, a_0).

Debido a que para cada $m \in \mathbb{N}^+$ el punto $((t_0, a_m), (t_0, a_m))$ pertenece a Δ, podemos fijar una vecindad V_m de (t_0, a_m) en Z tal que $V_m \times V_m \subseteq U$. Verifiquemos que para cada $m \in \mathbb{N}^+$, el conjunto $H_m = \{s \in S : (s, a_m) \notin V_m\}$ es finito. En efecto, sea E un elemento de $\mathcal{B}(t_0)$ que cumple la condición $(t_0, a_m) \in E \times \{a_m\} \subseteq V_m$. Observe que

$$H_m \times \{a_m\} \subseteq (T \times \{a_m\}) \setminus V_m \subseteq (T \times \{a_m\}) \setminus (E \times \{a_m\}) = (T \setminus E) \times \{a_m\}.$$

Lo anterior implica que $|H_m| = |H_m \times \{a_m\}| \leq |(T \setminus E) \times \{a_m\}| = |T \setminus E| < \omega$.

Considere $H = \{s \in S : (s, a_m) \in V_m$ para todo $m \in \mathbb{N}^+\}$. Evidentemente $H = S \setminus \cup_{m \in \mathbb{N}^+} H_m$. Como $\cup_{m \in \mathbb{N}^+} H_m$ es un conjunto numerable, debe suceder que $S \setminus \cup_{m \in \mathbb{N}^+} H_m$ no es numerable. Esto nos permite elegir dos elementos distintos s y s' de H. A continuación comprobaremos que $((s, a_0), (s', a_0)) \in J \cap cl_X(U)$. Es claro que $((s, a_0), (s', a_0)) \in J$. Tome vecindades arbitrarias G y G' de los puntos (s, a_0) y (s', a_0) en Z. Ahora elija $W, W' \in \mathcal{B}(a_0)$ tales que $(s, a_0) \in \{s\} \times W \subseteq G$ y $(s', a_0) \in \{s'\} \times W' \subseteq G'$. Observe que

$$\{m \in \mathbb{N}^+ : (s, a_m) \notin G \text{ ó } (s', a_m) \notin G'\} \subseteq \{m \in \mathbb{N}^+ : a_m \in A \setminus (W \cap W')\}.$$

Además $|\{m \in \mathbb{N}^+ : a_m \in A \setminus (W \cap W')\}| \leq |A \setminus (W \cap W')| < \omega$. Así, si $m \in \mathbb{N}^+ \setminus \{m \in \mathbb{N}^+ : a_m \in A \setminus (W \cap W')\}$, entonces $((s, a_m), (s', a_m)) \in G \times G'$. Por otra parte, empleando la hipótesis de que s y s' pertenecen a H, obtenemos que $((s, a_m), (s', a_m)) \in V_m \times V_m \subseteq U$. Concluimos que $((s, a_m), (s', a_m)) \in (G \times G') \cap U$. $\square$

Sean $p : X \to Y$ la proyección natural, $L = p(J)$ y $\{d\} = p(\Delta)$. Debido a que J es un subconjunto de $X \setminus \Delta$, para cualquier $z \in J$ se tiene que $p(z) = \{z\} \neq \Delta = d$. Esto muestra que $d \notin L$. Por otra parte, $d \in cl(L)$. Efectivamente, supongamos lo contrario. Por la proposición A.22, Y es un espacio de Tychonoff. Así, existen V y W subconjuntos abiertos de Y tales que $d \in V$, $cl(L) \subseteq W$ y $V \cap W = \emptyset$. Observe que $\Delta = p^{-1}(\{d\}) \subseteq p^{-1}(V)$, $J = p^{-1}(L) \subseteq p^{-1}(W)$ y $p^{-1}(V) \cap p^{-1}(W) = \emptyset$ (recuerde que $p\restriction_{X \setminus \Delta} : X \setminus \Delta \to Y \setminus \{d\}$ es biyectiva). Como esto contradice el lema 3.17, debe suceder que $d \in cl(L)$.

Note ahora que el conjunto L es infinito. En efecto: fije $s_0 \in S$ y considere el conjunto $\mathcal{A} = \{((s_0, a_0), (s, a_0)) : s \in S \setminus \{s_0\}\}$. No es difícil comprobar que $\mathcal{A} \subseteq F$ y que $|\mathcal{A}| = |S \setminus \{s_0\}| = |S|$. Por lo tanto, $|S| \leq |J| = |L|$.

Sea M cualquier subconjunto numerable infinito de L. Note que $p^{-1}(M) \subseteq$

J y que $|p^{-1}(M)| = |M| = \omega$. Por el lema 3.16, existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ que cumple $f(\Delta) = \{0\}$ y $f(q) \geq 1$ para todo $q \in p^{-1}(M)$. Considere la función $g : Y \to \mathbb{R}$ dada por $g(d) = 0$ y $g(\{x\}) = f(x)$, para cada $x \in X \setminus \Delta$. Utilizando que $f = g \circ p$ y que p es un mapeo R-cociente obtenemos que g es continua.

Sea m un elemento arbitrario de M y q el elemento de X que cumple $p(q) = m$. Así, $q \in p^{-1}(M)$ y $g(m) = (g \circ p)(q) = f(q) \geq 1$. Por lo tanto, $g(m) \geq 1$ para cualquier $m \in M$.

Lo que acabamos de señalar es útil para demostrar que $d \notin cl(M)$. En efecto: suponga que $\{d\} \subseteq cl(M)$. Esto implica que $g(\{d\}) \subseteq g(cl(M)) \subseteq cl(g(M))$, es decir, $0 \in cl(g(M))$. Sin embargo, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cap g(M) = \emptyset$ lo cual es absurdo.

Así, d no pertenece a la clausura de ningún subconjunto numerable de L. Por la monotonía de la función estrechez concluimos que

$$t(Y \oplus \Delta) \geq t(Y) \geq t(d, Y) > \omega.$$

3.18 Corolario. *Las siguientes propiedades no son preservadas por la relación de l-equivalencia:*

1. *la propiedad de Fréchet,*
2. *la secuencialidad,*
3. *la propiedad "tener estrechez numerable".*

Apéndice A

Mapeos R-cocientes

A.1 Familias de funciones que generan topologías

Hay muchas formas de describir la topología de un espacio topológico; una descripción especialmente importante en la teoría de espacios de funciones es la que emplea familias de funciones.

A.1 Definición. Sean X un conjunto, $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de funciones. *La Topología generada por $\mathcal{F}$ en X* es la más débil de entre todas las topologías en X que hacen continuos a los mapeos que pertenecen a $\mathcal{F}$. Decimos que la familia de mapeos $\mathcal{F}$ *genera la topología* de un espacio X (o es una *familia generadora*) si la topología de X coincide con la topología generada por $\mathcal{F}$.

La siguiente proposición nos dá una caracterización de la topología generada por una familia de funciones.

A.2 Proposición. *La topología generada por $\mathcal{F}$ en X es inducida por la base $\mathcal{B}$ que consiste de todos los conjuntos de la forma*

$$\bigcap_{i=1}^{k} f_{\alpha_i}^{-1}(V_i)$$

donde $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$, y V_i es un abierto de Y_{α_i} para $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Demostración. Veamos que $\mathcal{B}$ es base de una topología para X. Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \bigcap B_2$. Debemos probar que existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq B_1 \bigcap B_2$. Sabemos que $B_1 = \bigcap_{i=1}^{k} f_{\alpha_i}^{-1}(V_i)$, con $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$, y V_i abierto de Y_{α_i} para $i \in \{1, \ldots, k\}$. Además $B_2 = \bigcap_{j=1}^{l} f_{\beta_j}^{-1}(W_j)$, con $l \in \mathbb{N}$, $\beta_1, \ldots, \beta_l \in A$, y W_j abierto de Y_{β_j} para $j \in \{1, \ldots, l\}$. Por lo tanto, $B_1 \bigcap B_2 = \left(\bigcap_{i=1}^{k} f_{\alpha_i}^{-1}(V_i)\right) \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{l} f_{\beta_j}^{-1}(W_j)\right)$. Es claro que $B = B_1 \bigcap B_2 \in \mathcal{B}$ cumple con lo requerido. Sólo falta probar que para toda $x \in X$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$. Sea $x \in X$ y $\alpha \in A$. Así $f_\alpha^{-1}(Y_\alpha) \in \mathcal{B}$ y $x \in f_\alpha^{-1}(Y_\alpha)$. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es base de una topología para X.

Sean $\mathcal{O}$ la topología inducida por la base $\mathcal{B}$ y $\alpha \in A$. Debemos probar que $f_\alpha : (X, \mathcal{O}) \to Y_\alpha$ es continua. Tomamos V abierto en Y_α. Por definición de $\mathcal{B}$ tenemos que $f_\alpha^{-1}(V) \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$, es decir, $f_\alpha^{-1}(V)$ es abierto en $(X, \mathcal{O})$.

Ahora, sea $\mathcal{T}$ una topología para X que hace continuas a las funciones en $\mathcal{F}$. Para probar que $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$ basta verificar que los elementos de $\mathcal{B}$ pertenecen a $\mathcal{T}$. Sea $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$, y V_i abierto de Y_{α_i} para $i \in \{1, \ldots, k\}$. Como $f_{\alpha_i} : (X, \mathcal{T}) \to Y_{\alpha_i}$ es continua, tenemos que $f_{\alpha_i}^{-1}(V_i) \in \mathcal{T}$. Por lo tanto, $\bigcap_{i=1}^{k} f_{\alpha_i}^{-1}(V_i)$ pertenece a $\mathcal{T}$.

Así, $\mathcal{O}$ es la más débil de entre las topologías en X que hacen continuos a los mapeos en $\mathcal{F}$. □

A.3 Proposición. *Un mapeo g de un espacio topológico Y a un espacio topológico X cuya topología es generada por una familia de mapeos $\mathcal{F}$ es continuo si y sólo si la composición $f \circ g$ es continua para toda $f \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Supongamos que g es continua. Sea $f \in \mathcal{F}$. Como X está equipado con la más débil de las topologías que hacen continuas a las funciones en $\mathcal{F}$, tenemos que f es continua. Por lo tanto, $f \circ g$ es continua.

Ahora supongamos que $f \circ g$ es continua para toda $f \in \mathcal{F}$. Debemos probar que g es continua. Basta tomar un elemento de la base canónica de X y verificar que su imágen inversa bajo g es abierto en Y.

Sean $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$, y V_i abierto de Y_{α_i} para $i \in \{1, \ldots, k\}$. Así:

$$g^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{k} f_{\alpha_i}^{-1}(V_i)\right) = \bigcap_{i=1}^{k} g^{-1}\left(f_{\alpha_i}^{-1}(V_i)\right) = \bigcap_{i=1}^{k} \left(f_{\alpha_i} \circ g\right)^{-1}(V_i)$$

Como $f_{\alpha_i} \circ g$ es continua, tenemos que $\left(f_{\alpha_i} \circ g\right)^{-1}(V_i)$ es abierto en Y. Por lo tanto,

$$\bigcap_{i=1}^{k} (f_{\alpha_i} \circ g)^{-1} (V_i) = g^{-1} \left(\bigcap_{i=1}^{k} f_{\alpha_i}^{-1}(V_i) \right)$$

es abierto en Y. $\square$

A.4 Proposición. *Sea X un espacio cuya topología es generada por una familia de funciones $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to (Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$. Supongamos, además, que la topología de cada Y_α es generada por una familia de funciones $\mathcal{G}_\alpha$. Entonces la topología de X es generada por la familia de composiciones $\mathcal{H} = \{g \circ f_\alpha : \alpha \in A, g \in \mathcal{G}_\alpha\}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{O}$ la topología generada por $\mathcal{F}$. Probaremos que $\mathcal{O}$ es la más débil de las topologías para X que hacen continuas a las funciones en $\mathcal{H}$.

Sean $\alpha \in A$ y $g \in \mathcal{G}_\alpha$. Como $\mathcal{O}$ y $\mathcal{T}_\alpha$ son las topologías generadas por $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}_\alpha$, respectivamente, tenemos que $f_\alpha : (X, \mathcal{O}) \to (Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ y $g : (Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \to Z$ son continuas. Por lo tanto, $g \circ f_\alpha : (X, \mathcal{O}) \to Z$ es continua.

Sea $\mathcal{T}$ una topología para X que hace continuas a las funciones en $\mathcal{H}$ y sea $\alpha \in A$. Así $g \circ f_\alpha : (X, \mathcal{T}) \to Z$ es continua para toda $g \in \mathcal{G}_\alpha$. Como la topología de cada Y_α es generada por la familia de mapeos $\mathcal{G}_\alpha$, por la proposición A.3 tenemos que $f_\alpha : (X, \mathcal{T}) \to (Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ es continua. Pero $\mathcal{O}$ es la más débil de las topologías para X que hacen continuos a los mapeos en $\mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$. $\square$

A.5 Observación. Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio y $Y \subseteq X$. La topología de subespacio $\mathcal{T}_Y$ coincide con la topología generada por el mapeo inclusión $i_Y : Y \to (X, \mathcal{T}_X)$.

Demostración. Sea $U \in \mathcal{T}_X$. Entonces $i_Y^{-1}(U) = U \cap Y$. Por lo tanto, $i_Y : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$ es continua.

Ahora, si $i_Y : (Y, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{T}_X)$ es continua, entonces $i_Y^{-1}(U) = U \cap Y \in \mathcal{O}$ para todo $U \in \mathcal{T}_X$. Por lo tanto, $\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{O}$. $\square$

A.6 Corolario. *Si la topología de X es generada por una familia de mapeos $\mathcal{F}$ y Y es un subespacio de X, entonces la topología de Y es generada por la familia $\{f \restriction_Y : f \in \mathcal{F}\}$.*

Demostración. Por la proposición A.4 y la observación A.5 tenemos que la topología de Y es generada por $\{f \circ i_Y : f \in \mathcal{F}\} = \{f \restriction_Y : f \in \mathcal{F}\}$. $\square$

A.7 Proposición. *La topología generada en un conjunto X por una familia $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$ de mapeos a espacios completamente regulares es completamente regular.*

Demostración. Sean F cerrado en X y $x \notin F$. Por la proposición A.2, existen $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$, y V_i abierto de Y_{α_i} para $i \in \{1, \ldots, k\}$ tales que

$$x \in U = \bigcap_{i=1}^{k} f_{\alpha_i}^{-1}(V_i) \subseteq X \setminus F.$$

Así, $x_i = f_{\alpha_i}(x) \in V_i$. Como Y_{α_i} es completamente regular existe $\phi_i : Y_{\alpha_i} \to \mathbb{R}$ tal que $\phi_i(x_i) = 1$ y $\phi_i(Y_{\alpha_i} \setminus V_i) \subseteq \{0\}$. Sea $\psi_i = \phi_i \circ f_{\alpha_i} : X \to \mathbb{R}$ y $\psi = \psi_1 \cdot \ldots \cdot \psi_n$. Veamos que $\psi(x) = 1$ y $\psi(F) \subseteq \{0\}$. Efectivamente, $\psi_i(x) = (\phi_i \circ f_{\alpha_i})(x) = \phi_i(x_i) = 1$, por lo tanto $\psi(x) = 1$. Además, $U \subseteq X \setminus F$ implica que $F \subseteq X \setminus U$. Sea

$$z \in X \setminus U = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} f_{\alpha_i}^{-1}(V_i) = \bigcup_{i=1}^{k} \left(X \setminus f_{\alpha_i}^{-1}(V_i)\right).$$

Entonces $z \in X \setminus f_{\alpha_{i_0}}^{-1}(V_{i_0})$ para alguna i_0, es decir, $f_{\alpha_{i_0}}(z) \notin V_{i_0}$ para alguna i_0. Finalmente

$$\psi_{i_0}(z) = (\phi_{i_0} \circ f_{\alpha_{i_0}})(z) = \phi_{i_0}(f_{\alpha_{i_0}}(z)) = 0 \ \text{ y } \ \psi(z) = \prod_{i=1}^{k} \psi_i(z) = 0.$$

En conclusión, $\psi(F) \subseteq \psi(X \setminus U) \subseteq \{0\}$. □

A.8 Proposición. *Si X es un espacio completamente regular, entonces su topología es generada por la familia de funciones $C(X)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{f^{-1}(U) : f \in C(X), U \text{ es abierto en } \mathbb{R}\}$. Por propiedades de continuidad, los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos en X.

Sean V abierto no vacío en X y $x \in V$. Supongamos que $V \neq X$. Debido a que X es completamente regular, existe $f \in C(X)$ tal que $f(x) = 1$ y $f(X \setminus V) \subseteq \{0\}$. De esta forma, $f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right) \in \mathcal{B}$ y $x \in f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right) \subseteq V$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es base para la topología de X.

Ahora, sea $\mathcal{S}$ una topología para X que hace continuas a las funciones en $C(X)$. Si $f \in C(X)$ y U es abierto en $\mathbb{R}$ entonces $f^{-1}(U) \in \mathcal{S}$. Por lo tanto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$, lo cual implica que la topología completamente regular en X es la más débil entre las topologías en X que hacen continuos a los mapeos en $C(X)$. □

A.9 Corolario. *Si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son diferentes topologías completamente regulares en el mismo conjunto X, entonces existe una función real en X que es continua con respecto a una de ellas y discontinua con respecto a la otra.*

Demostración. Sean $C_i = \{f : (X, \mathcal{T}_i) \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$ y $\mathcal{B}_i = \{f^{-1}(U) : f \in C_i \text{ y } U \text{ es abierto en } \mathbb{R}\}$. Sabemos por la proposición A.8 que $\mathcal{T}_i$ es generada por C_i y que $\mathcal{B}_i$ es base para dicha topología. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{T}_1 \nsubseteq \mathcal{T}_2$. Por lo tanto, $\mathcal{B}_1 \nsubseteq \mathcal{T}_2$. Entonces, por definición de $\mathcal{B}_1$ existe $g : (X, \mathcal{T}_1) \to \mathbb{R}$ continua y U abierto en $\mathbb{R}$ tal que $g^{-1}(U) \notin \mathcal{T}_2$. De este modo g es continua con respecto a $\mathcal{T}_1$ y discontinua con respecto a $\mathcal{T}_2$. $\square$

A.10 Definición. Sea $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos. Consideremos al producto Cartesiano $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ y la familia de mapeos $\{\pi_\alpha : \alpha \in A\}$, donde π_α asigna a $f \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ el punto $f(\alpha) \in X_\alpha$. El conjunto $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ con la topología generada por la familia de mapeos $\{\pi_\alpha : \alpha \in A\}$ es llamado *producto Cartesiano de los espacios* $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ y dicha topología es llamada *topología producto de Tychonoff* en $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$; los mapeos $\pi_\alpha : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\alpha$, $\alpha \in A$, son llamados *proyecciones de* $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ *sobre* X_α.

A.11 Proposición. *El producto diagonal $\triangle\mathcal{F}$ es continuo si y sólo si f_α es continua para toda $\alpha \in A$.*

Demostración. Sea $\alpha \in A$ y $\pi_\alpha : \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha \to Y_\alpha$ el correspondiente mapeo proyección. Por definición de mapeo diagonal, $\pi_\alpha \circ \triangle\mathcal{F} = f_\alpha$. La conclusión se sigue de la definición de topología producto Tychonoff en $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ (A.10) y de la proposición A.3. $\square$

A.2 Mapeos R-cocientes

A.12 Definición. Un mapeo continuo $p : X \to Y$ es llamado *R-cociente* si $p(X) = Y$ y para toda función $\phi : Y \to \mathbb{R}$ se tiene que si la composición

$\phi \circ p : X \to \mathbb{R}$ es continua, entonces ϕ es continua.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\phi \circ p"'] & Y \arrow[d, "\phi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Es conocido que un mapeo $p : X \to Y$ es cociente si y sólo si $p(X) = Y$ y para cualquier espacio topológico Z y cualquier mapeo $f : Y \to Z$, si $f \circ p$ es continua, entonces f es continua. Se sigue fácilmente de las correspondientes definiciones que cualquier mapeo cociente es R-cociente. El siguiente enunciado muestra que los mapeos R-cocientes tienen una característica similar, en la categoría de los espacios completamente regulares, a la que tienen los mapeos cocientes en la categoría de los espacios topológicos.

A.13 Proposición. *Supongamos que $p : X \to Y$ es un mapeo R-cociente, que Z es un espacio completamente regular y que $f : Y \to Z$ es una función. Si la composición $f \circ p$ es continua entonces el mapeo f es continuo.*

Demostración. Sabemos por la proposición A.8 que la topología de Z es generada por $C(Z)$. Sea $\phi \in C(Z)$. Como ϕ y $(f \circ p)$ son continuas tenemos que $\phi \circ (f \circ p) = (\phi \circ f) \circ p : X \to \mathbb{R}$ es continua. Debido a que p es R-cociente, $(\phi \circ f)$ es continua. Por la proposición A.3 concluimos que f es continua. $\square$

A.14 Corolario. *Si X es un espacio completamente regular y $p : X \to Y$ es una biyección R-cociente, entonces p es un homeomorfismo.*

Demostración. Por definición de mapeo R-cociente, p es continua. Utilizando que X es completamente regular y que $p^{-1} \circ p = Id_X$ es una función continua obtenemos la continuidad de p^{-1} (vea A.13). $\square$

A.15 Proposición. *Si $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ son mapeos R-cocientes, entonces la composición $q \circ p : X \to Z$ es R-cociente.*

Demostración. El hecho de que p y q son funciones continuas y sobreyectivas implica que $q \circ p$ es una función continua y sobreyectiva. Ahora, sea $\phi : Z \to \mathbb{R}$

tal que $\phi \circ (q \circ p)$ es continua. Debido a que $\phi \circ (q \circ p) = (\phi \circ q) \circ p$ y p es R-cociente, obtenemos que $(\phi \circ q)$ es continua. Lo anterior implica que ϕ es continua ya que q es R-cociente. $\square$

A.16 Proposición. *Si $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ son funciones continuas y la composición $q \circ p : X \to Z$ es R-cociente, entonces q es R-cociente.*

Demostración. Por definición de mapeo R-cociente, $q \circ p$ es sobreyectivo. Por lo tanto q también lo es. Ahora, sea $\phi : Z \to \mathbb{R}$ tal que $\phi \circ q$ es continua. $\phi \circ (q \circ p) = (\phi \circ q) \circ p$ es continua ya que $\phi \circ q$ y p lo son. Como $q \circ p$ es R-cociente concluimos que ϕ es continua. $\square$

A.17 Proposición. *Sean $p : X \to Y$ un mapeo sobreyectivo y continuo y $A \subset X$. Si $p \restriction_A : A \to Y$ es R-cociente, entonces p es R-cociente.*

Demostración. El mapeo inclusión i_A y p son funciones continuas. Además $p \restriction_A = p \circ i_A$ es R-cociente. Por la proposición A.16 obtenemos que p es R-cociente. $\square$

Utilizando la noción de mapeo R-cociente, definamos el análogo de un espacio cociente:

A.18 Definición. Sean X un espacio, Y un conjunto y $p : X \to Y$ un mapeo sobreyectivo. *La Topología R-cociente en Y* es la más fuerte de todas las topologías completamente regulares en Y que hacen continuo al mapeo p. El conjunto Y con la topología R-cociente es llamado *espacio R-cociente de X con respecto al mapeo p.*

Ahora debemos probar que la topología R-cociente existe. Esto se sigue de la siguiente descripción:

A.19 Proposición. *Sea $p : X \to Y$ un mapeo sobreyectivo del espacio X en el conjunto Y. La topología R-cociente en Y es la topología generada por la familia $\mathcal{G} = \{\phi : Y \to \mathbb{R} : \phi \circ p$ es continua$\}$*

Demostración. Sea $\mathcal{T}$ la topología generada por $\mathcal{G}$. La proposición A.7 implica que dicha topología es completamente regular. Además, $p : X \to (Y, \mathcal{T})$ es continua por definición de la familia $\mathcal{G}$ y por la proposición A.3.

Debemos probar que si $\mathcal{O}$ es una topología completamente regular en Y que hace continuo al mapeo p entonces $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que $\mathcal{O} \nsubseteq \mathcal{T}$. Por el corolario A.9 existe $\psi : Y \to \mathbb{R}$

que es continua con respecto a $\mathcal{O}$ y discontinua con respecto a $\mathcal{T}$. Veamos que $\psi \circ p : X \to \mathbb{R}$ es discontinua: si $\psi \circ p$ es continua entonces $\psi \in \mathcal{G}$. Por lo tanto (por definición de topología generada por una familia de mapeos) $\psi : (Y, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ es continua. Pero esto contradice el hecho de que ψ es discontinua con respecto a $\mathcal{T}$.

Ahora, la topología completamente regular $\mathcal{O}$ es generada por $\{\gamma : (Y, \mathcal{O}) \to \mathbb{R} : \gamma \text{ es continua}\}$ (usamos la proposición A.8). Como ψ pertenece a dicha familia pero $\psi \circ p$ es discontinua tenemos que $p : X \to (Y, \mathcal{O})$ es discontinua (empleamos la proposición A.3). Esto contradice el hecho de que $\mathcal{O}$ es una topología en Y que hace continuo al mapeo p. Por lo tanto $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$. $\square$

A.20 Corolario. *Si $p : X \to Y$ es un mapeo, $p(X) = Y$, y la topología de Y coincide con la topología R-cociente con respecto a p, entonces el mapeo p es R-cociente.*

Demostración. Por definición de topología R-cociente (ver A.18), p es continuo. Además, si $\phi : Y \to \mathbb{R}$ es tal que $\phi \circ p$ es continua entonces ϕ pertenece a la familia de funciones que generan la topología de Y. Por lo tanto, ϕ es continua. $\square$

A.21 Proposición. *Sean X y Y dos espacios, con Y completamente regular, y sea $f : X \to Y$ un mapeo sobreyectivo y continuo. Entonces existen un espacio completamente regular Z, un mapeo R-cociente $p : X \to Z$ y una biyección continua $i : Z \to Y$ tales que $f = i \circ p$.*

Demostración. Consideremos a Z el espacio R-cociente de X con respecto al mapeo f y a $p : X \to Z$ dada por $p(x) = f(x)$. Por definición de topología R-cociente (ver A.18) Z es completamente regular. Por el corolario A.20, p es un mapeo R-cociente. Sea $i = Id_Z : Z \to Y$. Debido a que Z está equipado con la más fuerte de las topologías completamente regulares en Y que hacen continuo al mapeo f, obtenemos que i es continua. Es claro que $f = i \circ p$. $\square$

Si M es una partición de un espacio X, entonces podemos considerar la proyección natural $p : X \to M$ que asocia a cada punto $x \in X$ el elemento de M que contiene a x y dotar a M de la topología R-cociente.

Sea F un subespacio no vacío de un espacio X. La colección $M = \{F\} \cup \{\{x\} : x \in X \setminus F\}$ es llamada *partición F-trivial del espacio X*. Dicha partición, equipada con la topología R-cociente, será denotada por X/F. Decimos que un mapeo $p : X \to F$ es *F-trivial* si la partición de X formada por las preimágenes de los puntos de F bajo p es F-trivial.

A.22 Proposición. *Sean X un espacio Tychonoff y F un subconjunto cerrado de X. Entonces X/F es un espacio Tychonoff.*

Demostración. Puesto que el espacio X/F es la partición F-trivial de X equipada con la topología R-cociente, por definición de topología R-cociente (A.18), obtenemos que X/F es completamente regular.

Veamos que dicho espacio es Hausdorff: Considere $p : X \to X/F$ la proyección natural y y_1, y_2 dos elementos distintos de X/F. Supongamos, sin perder generalidad, que $y_2 \neq F$. Debido a que $X/F = \{F\} \cup \{\{x\} : x \in X \setminus F\}$ deducimos que $y_2 = \{x_2\}$ con $x_2 \in X \setminus F$. Ahora, sea $F_1 = p^{-1}(\{y_1\}) \cup F$. Observemos que $y_1 = F$ implica $p^{-1}(\{y_1\}) = F$ y que $y_1 \neq F$ implica $p^{-1}(\{y_1\}) = \{x\}$ con $x \in X \setminus F$. Por lo tanto, F_1 es igual a F o bien, es igual a F unión un conjunto unipuntual. Como F es cerrado en el espacio Hausdorff X tenemos que F_1 es cerrado.

Verifiquemos que x_2 no pertenece a $p^{-1}(\{y_1\})$. Es necesario analizar los casos $y_1 = F$ y $y_1 \neq F$. Si $y_1 = F$ entonces $x_2 \notin p^{-1}(\{y_1\}) = F$. Si $y_1 \neq F$ y $x_2 \in p^{-1}(\{y_1\})$ entonces $p(x_2) = \{x_2\} = y_2 = y_1$, lo cual contradice la hipótesis de que y_1 y y_2 son diferentes. Por lo tanto, $x_2 \notin F_1$.

Por la completa regularidad de X existe $\phi : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $\phi(x_2) = 1$ y $\phi(F_1) \subseteq \{0\}$. Sea $\psi : X/F \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(F) = \psi(y_1) = 0$ y $\psi(\{x\}) = \phi(x)$ si $x \in X \setminus F_1$.

Afirmación. $\phi = \psi \circ p$.

Demostración de la afirmación: Sea $x \in X$. Caso 1.- $x \in F$. Entonces $(\psi \circ p)(x) = \psi(F) = 0$ (por definición de ψ). Además $\phi(x) = 0$ ya que $x \in F \subseteq F_1$ y $\phi(F_1) \subseteq \{0\}$.
Caso 2.- $x \notin F$.
Caso 2.1.- $x \in p^{-1}(\{y_1\})$. Entonces $p(x) = y_1$ y $(\psi \circ p)(x) = \psi(y_1) = 0$ (por definición de ψ). Además $\phi(x) = 0$ ya que $x \in p^{-1}(\{y_1\}) \subseteq F_1$ y $\phi(F_1) \subseteq \{0\}$.
Caso 2.2.- $x \notin p^{-1}(\{y_1\})$. Debido a que $x \notin F$, $(\psi \circ p)(x) = \psi(\{x\}) = \phi(x)$ (por definición de ψ). ⊠

Por el corolario A.20, p es un mapeo R-cociente. Así, el hecho de que $\phi = \psi \circ p$ es continua implica que ψ es continua. Además $\psi(y_2) = \psi(\{x_2\}) = \phi(x_2) = 1$ y $\psi(y_1) = 0$, es decir, $\psi(y_2) \neq \psi(y_1)$. Por lo tanto y_1 y y_2 tienen vecindades ajenas. □

A.23 Teorema. *Sean Y un espacio completamente regular, $p : X \to Y$ un mapeo R-cociente, V un subconjunto abierto de Y y $U = p^{-1}(V)$. Entonces la restricción $p\restriction_U : U \to V$ es R-cociente.*

A.24 Corolario. *Si F es un subconjunto cerrado en un espacio completamente regular X, $Y = X/F$, y $p : X \to Y$ es la proyección natural, entonces $p \restriction_{X \setminus F} : X \setminus F \to Y \setminus p(F)$ es un homeomorfismo.*

Apéndice B

Espacios pseudocompletos

En todo este apartado, en el que introduciremos la noción de espacio pseudocompleto, denotaremos con el símbolo $\tau^*(X)$ a la colección de abiertos no vacíos de un espacio topológico X. Recordemos que un espacio topológico X es *cuasi-regular*, si para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X es posible hallar un abierto $V \in \tau^*(X)$ tal que $cl(V) \subseteq U$. Claramente todo espacio regular es un espacio cuasi-regular. Además, la propiedad de cuasi-regularidad es heredada a los subespacios densos. En efecto, sean X un espacio cuasi-regular y $Y \subseteq X = cl_X(Y)$. Consideremos un abierto $V \in \tau^*(Y)$. Entonces existe $W \in \tau^*(X)$ tal que $V = W \cap Y$. Dado que X es cuasi-regular, podemos elegir $U \in \tau^*(X)$ de tal manera que $cl_X(U) \subseteq W$. Entonces $cl_Y(U \cap Y) = cl_X(U \cap Y) \cap Y = cl_X(U) \cap Y \subseteq W \cap Y = V$. Por lo tanto, el espacio Y es cuasi-regular.

Para poder introducir la noción de espacio pseudocompleto necesitamos recordar la noción de π-base.

B.1 Definición. Una *π-base* de un espacio topológico X es una familia $\mathcal{B} \subseteq \tau^*(X)$ con la propiedad de que para cada subconjunto abierto no vacío V del espacio X es posible hallar un elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq V$.

B.2 Definición. Sea X un espacio topológico.

1. Una familia $\{U_n : n \in \omega\} \subseteq \tau^*(X)$ es llamada *remolino* si $cl(U_{n+1}) \subseteq U_n$ para cada $n \in \omega$.

2. El espacio X es un espacio *pseudocompleto* si éste es cuasi-regular, y además, tiene una sucesión $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ de π-bases (llamada *sucesión*

pseudocompleta) tal que para cualquier remolino $\{U_n : n \in \omega\}$, la condición $U_n \in \mathcal{B}_n$ para toda n, implica que $\bigcap\{U_n : n \in \omega\} \neq \emptyset$.

Como se podrá apreciar un poco más adelante, todo espacio pseudocompleto tiene la propiedad de Baire. Como un corolario a la siguiente proposición estableceremos que la clase de espacios Čech-completos está contenida en la clase de los espacios pseudocompletos.

B.3 Proposición. *Sea X un espacio cuasi-regular. Supóngase que existe una π-base $\mathcal{B}$ de X tal que $cl_X(U)$ es numerablemente compacto para cada $U \in \mathcal{B}$. Entonces todo subconjunto denso Y de X de tipo G_δ es un subespacio pseudocompleto.*

Demostración. Dado que Y es un subespacio denso de X, el espacio Y es cuasi-regular. Supongamos que $\{G_n : n \in \omega\} \subseteq \tau^*(X)$ es tal que $Y = \bigcap_{n\in\omega} G_n$. Para cada $n \in \omega$, definamos $\mathcal{B}_n = \{H \cap Y : H \in \mathcal{B}$ y $cl_X(H) \subseteq G_n\}$. Claramente $\mathcal{B}_n \subseteq \tau^*(X)$. Mostraremos que $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta para Y. Para este propósito, demostremos primeramente que cada una de las familias $\mathcal{B}_n$ es una π-base del espacio Y. Fijemos un índice $n \in \omega$ y consideremos un abierto arbitrario $V \in \tau^*(Y)$. Sea $W \in \tau^*(X)$ tal que $V = W \cap Y$. Dado que X es cuasi-regular y $\mathcal{B}$ es una π-base, existe $H \in \mathcal{B}$ tal que $cl_X(H) \subseteq W \cap G_n$. Entonces $H \cap Y \subset W \cap Y = V$ y $H \cap Y \in \mathcal{B}_n$. De esta forma, la familia $\mathcal{B}_n$ es una π-base de Y.

Consideremos ahora un remolino $\{U_n : n \in \omega\}$ con la propiedad de que $U_n \in \mathcal{B}_n$ para cada $n \in \omega$. Como $U_n \in \mathcal{B}_n$ para toda $n \in \omega$, existen abiertos $H_n \in \mathcal{B}$ tales que $U_n = H_n \cap Y$ y $cl_X(H_n) \subseteq G_n$. Observe ahora que debido a que $U_{n+1} \subseteq U_n$ para todo índice n, la familia $\{cl_X(U_n) : n \in \omega\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Como $cl_X(U_0)$ es un espacio numerablemente compacto y $\{cl_X(U_n) : n \in \omega\}$ está constituida por subespacios cerrados de $cl_X(U_0)$, se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} cl_X(U_n) \neq \emptyset$. Ahora bien, dado que $cl_X(H_n) \subseteq G_n$ para toda n, obtenemos que $cl_X(U_n) \subseteq G_n$ para cada índice n, de donde $\bigcap_{n\in\omega} cl_X(U_n) \subseteq \bigcap_{n\in\omega} G_n = Y$. Entonces

$$\begin{aligned}
\bigcap_{n\in\omega} cl_X(U_n) &= \bigcap_{n\in\omega} cl_X(U_{n+1}) = \Big(\bigcap_{n\in\omega} cl_X(U_{n+1})\Big) \cap Y \\
&= \bigcap_{n\in\omega} \big(Y \cap cl_X(U_{n+1})\big) = \bigcap_{n\in\omega} cl_X(U_{n+1}) \\
&\subseteq \bigcap_{n\in\omega} U_n.
\end{aligned}$$

De aquí, obtenemos que $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$. Por lo tanto, la familia $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta para Y. $\square$

B.4 Corolario. *Todo subconjunto denso de tipo G_δ de un espacio cuasi-regular numerablemente compacto es un espacio pseudocompleto. En particular, los espacios completos en el sentido de Čech son espacios pseudocompletos.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio cuasi-regular numerablemente compacto y que $Y \subseteq X$ es denso. Observe que la familia $\tau^*(X)$ es una π-base de X para la cual sucede que $cl_X(U)$ es numerablemente compacto, para toda $U \in \tau^*(X)$. Aplicando la proposición B.3 podemos llegar a concluir que Y es pseudocompleto. $\square$

Finalizamos el presente apéndice coleccionando en la siguiente proposición algunas propiedades de la clase de los espacios pseudocompletos.

B.5 Proposición.

1. *Todo espacio pseudocompleto es un espacio de Baire.*

2. *Sean X cuasi-regular y $Y \subseteq X = cl_X(Y)$. Si Y es un espacio pseudocompleto entonces X es pseudocompleto.*

Demostración. (1) Supongamos que X es un espacio pseudocompleto y que $\{G_n : n \in \omega\}$ es una sucesión de subespacios abiertos densos de X. Consideremos un abierto $G \in \tau^*(X)$ cualquiera. Fijemos una sucesión pseudocompleta $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ de π-bases que constate la propiedad de pseudocompletitud para el espacio X.

Debido a que el conjunto G_0 es un subespacio abierto denso de X, el conjunto $G_0 \cap G \in \tau^*(X)$. Como X es cuasi-regular y $\mathcal{B}_0$ es una π-base de X, existe $U_0 \in \mathcal{B}_0$ tal que $cl_X(U_0) \subseteq G_0 \cap G$. De igual manera, como el subespacio G_1 es abierto y su cerradura cubre a todo X, tenemos que $U_0 \cap G_1 \in \tau^*(X)$. Aplicando de nuevo el hecho de que X es cuasi-regular y $\mathcal{B}_1$ es π-base de X, podemos elegir $U_1 \in \mathcal{B}_1$ de tal forma que $cl_X(U_1) \subseteq U_0 \cap G_1$. Supongamos ahora que tenemos construidos a los conjuntos $U_0, \ldots, U_k$ de tal manera que $cl_X(U_0) \subseteq G_0 \cap G$ y $U_j \in \mathcal{B}_j$ y $cl_X(U_j) \subseteq U_{j-1} \cap G_j$, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$. Como G_{k+1} es un subconjunto abierto denso de X, se tiene que $G_{k+1} \cap U_k \in \tau^*(X)$. Debido a que X es un espacio cuasi-regular y $\mathcal{B}_{k+1}$ es una π-base de X, podemos seleccionar un elemento $U_{k+1} \in \mathcal{B}_{k+1}$ de tal forma que $cl_X(U_{k+1}) \subseteq U_k \cap G_{k+1}$.

Notemos ahora que por la forma de haber construido a los conjuntos U_i, la familia $\{U_n : n \in \omega\}$ es un remolino en X tal que $U_n \in \mathcal{B}_n$ para cada $n \in \omega$. Aplicando el hecho de que $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta en X, podemos concluir que $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$. Pero $U_n \subset G \cap G_n$ (para cada $n \in \omega$), entonces $G \cap \left(\bigcap_{n\in\omega} G_n\right) \neq \emptyset$. De esta forma hemos probado que X posee la propiedad de Baire.

(2) Como Y es pseudocompleto podemos considerar una sucesión pseudocompleta $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ de π-bases de X. Para cada $n \in \omega$ y para cada $U \in \mathcal{B}_n$, existen abiertos $W(U) \in \tau^*(X)$ tales que $U = W(U) \cap Y$. Entonces la familia $\mathcal{C}_n = \{W(U) : U \in \mathcal{B}_n\}$ es una π-base de X para cada $n \in \omega$. Efectivamente, fijemos un índice $n \in \omega$ y consideremos un abierto $V \in \tau^*(X)$. Dado que X es cuasi-regular, existe $W \in \tau^*(X)$ tal que $cl_X(W) \subset V$. Note que la densidad de Y en X implica que $Y \cap W \in \tau^*(Y)$. Como $\mathcal{B}_n$ es π-base de Y, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \subseteq W \cap Y$. Consideremos ahora al abierto $W(U)$ correspondiente a U. Como $U \subseteq W \cap Y$, se tiene que $W(U) \cap Y \subseteq W \cap Y$, de donde $cl_X(W(U) \cap Y) \subseteq cl_X(W \cap Y)$. Pero sabemos que Y es denso, entonces $cl_X(W(U) \cap Y) = cl_X(W(U))$ y $cl_X(W \cap Y) = cl_X(W)$. Consecuentemente $W(U) \subseteq cl_X(W(U)) \subseteq cl_X(W) \subset V$. De esta forma tenemos que $\mathcal{C}_n$ es una π-base de X.

Verifiquemos ahora que la familia $\{\mathcal{C}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta en X. Sea $\{V_n : n \in \omega\}$ un remolino tal que $V_n \in \mathcal{C}_n$ para cada índice n. Por la definición de las familias $\mathcal{C}_n$, existen $U_n \in \mathcal{B}_n$ tales que $V_n = W(U_n)$ para cada n. Entonces $\{U_n : n \in \omega\}$ es un remolino en Y con la propiedad de que $U_n \in \mathcal{B}_n$ para toda $n \in \omega$ (note que $cl_Y(U_{n+1}) = cl_X(U_{n+1}) \cap Y = cl_X(W(U_{n+1}) \cap Y) \cap Y = cl_X(W(U_{n+1})) \cap Y \subseteq W(U_n) \cap Y = U_n$). Aplicando ahora el hecho de que Y es pseudocompleto, podemos ver que $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$. Como $\bigcap_{n\in\omega} U_n \subseteq \bigcap_{n\in\omega} W(U_n)$, se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} V_n \neq \emptyset$. Por lo tanto, podemos concluir que X es pseudocompleto. $\square$

Bibliografía

[1] Arhangel'skii A. V.; Ponomarev V. I., *Fundamentals of general topology; problems and exercises*, Mathematics and its applications, D. Reidel, 1984.

[2] Arhangel'skii A. V., *Topological function spaces*, Mathematics and its applications (soviet series) vol. 78, Kluwer, 1992.

[3] Dugundji J., *An extension of Tietze's theorem*, Pacific J. Math. 1, 1951.

[4] Engelking R., *General topology*, Sigma series in pure mathematics vol. 6, Heldermann, 1989.

[5] García Máynez A.; Tamariz Mascarúa A., *Topología general*, Porrúa, 1988.

[6] Hernández Hernández F., *Teoría de conjuntos*, Aportaciones matemáticas vol. 13, Sociedad Matemática Mexicana, 1998.

[7] Hart Klaas P.; Nagata J.; Vaughan J., *Encyclopedia of general topology*, Elsevier/North-Holland, 2004.

[8] Munkres J.R., *Topology, a first course*, Prentice-Hall, 1975.

[9] Martínez García A.; Ibarra Contreras M., *Espacios topológicos linealmente ordenados*, Tesis de Licenciatura, UNAM (1986).

[10] Okunev O., *Function spaces with the topology of pointwise convergence*, Manuscrito.

[11] Paniagua Ramírez C., *Topología producto y funciones cardinales*, Tesis de Licenciatura, UNAM (1998).

[12] Ramírez Páramo A., *Funciones cardinales topológicas*, capítulo 2 en *Topología y sistemas dinámicos 1*, editores Angoa Amador J. [et al.], Textos científicos, BUAP, Facultad de Físico Matemáticas, Dirección de Fomento Editorial, 2007.

[13] Steen L. A.; Seebach J. A., *Counterexamples in topology*, Dover, 1995.

[14] Willard S., *General topology*, Dover, 2004.