Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Modelos de riesgo de crédito en microfinanzas usando procesos de Lévy

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
ACTUARIO

PRESENTA:
MARÍA FERNANDA DEL CARMEN AGOITIA HURTADO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. PABLO PADILLA LONGORIA

2010

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
   Agoitia
   Hurtado
   María Fernanda del Carmen
   85 00 91 79
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias

2. Datos del tutor
   Dr
   Pablo
   Padilla
   Longoria

3. Datos del sinodal 1
   Dr
   Mogens
   Bladt
   Petersen

4. Datos del sinodal 2
   Dr
   Jorge Humberto
   Del Castillo
   Spindola

5. Datos del sinodal 3
   Dr
   Ramsés Humberto
   Mena
   Chávez

6. Datos del sinodal 4
   Dr
   Raúl
   Rueda
   Díaz del Campo

7. Datos del trabajo escrito
   Modelos de riesgo de crédito en microfinanzas usando procesos de Lévy
   78 p
   2010

Agradecimientos

Habiendo un sinfín de personas a las cuales agradecer, es difícil comenzar con alguien en particular. Pero creo que es justo comenzar con la persona que me guió, no sólo en este trabajo, sino a través de más de 4 años: gracias al Dr. Pablo Padilla por la inspiración, apoyo y entusiasmo vertidos no sólo en la elaboración de esta tesis, sino en mi formación misma. Fue muy grato encontrarme en la UNAM con un gran profesor, investigador y mentor.

Agradezco a mis sinodales, el Dr. Mogens Bladt, el Dr. Humberto del Castillo, el Dr. Ramsés Mena y el Dr, Raúl Rueda por sus comentarios y ayuda para la culminación exitosa de este trabajo. También agradezco especialmente al Dr, Ramón Plaza por su interés y apoyo en esta tesis.

También agradezco a mis maestros, hay algunos que recuerdo con especial alegría pues fueron una fuente de inspiración importante. Pero como en la facultad no sólo se obtiene aprendizaje en los salones de clase, también agradezco a los profesores con los que conviví como consejera técnica, son muchos para nombrar, pero ustedes saben quiénes son: gracias por compartir conmigo sus experiencias y enriquecedores puntos de vista.

Por supuesto que agradezco también a todos mis compañeros de "aventura", a los grandes amigos que tuve la oportunidad de conocer en la Facultad de Ciencias. Especialmente a Karina, mi *sis* y compañera de grandes episodios en esta travesía, eres mi mejor amiga, te quiero muchísimo y aún nos esperan muchas más andanzas. A Lalo, por enseñarme que a pesar de las diferencias de opiniones que se pueden tener, el cariño hacia las personas no se ve empañado. Y la lista es enorme, pero quiero destacar a Fer, Paco, Fer, Bere, Enrique, Mau, Memo, Ben, David, Fer… y muchos más con los que compartí grandes momentos, ustedes saben quienes son.

También es necesario agradecer a mi mejor amigo en la vida. Gracias Sergio por tu cariño y apoyo a través de los años y a pesar de la distancia o las circunstancias. Te considero como a un hermano más.

Mientras elaboraba este trabajo, reapareció en mi vida alguien que terminó por convertirse en una parte esencial de ella. Una persona que no sólo me brindó alegría, felicidad y amor, sino también apoyo total en cada momento, aún en los más difíciles. Gracias Marco por estar siempre a mi lado, por darme una razón más para sonreír, por las palabras de ánimo que siempre tienes para mí… gracias por compartir tu vida conmigo.

Por último en aparición, pero en primer lugar de importancia, quiero agradecer al motor que me impulsó para llegar a este punto y seguir avanzando. A quienes dedico este trabajo y todos y cada uno de los logros que pueda tener en la vida: mi maravillosa familia. A la memoria de mis padres, quienes sentaron las bases de lo que ahora soy; a mis hermanos, Martha Elena y Miguel Ángel por apoyarme y quererme incondicionalmente en todo momento y siempre alentarme para salir adelante, no concibo mi vida sin ustedes; a mis padrinos, Roberto y Leticia, junto con Arturo y Julio, pues gracias a su protección y cariño he vista completada una familia sin la cual no tendría deseos de siempre hacer las cosas lo mejor que pueda y tratar se ser una mejor persona. Obviamente no puede faltar mi hermosísimo y adorado Fritz, pues con sólo sentarse en mi regazo, obtenía la inspiración y tranquilidad necesarias para continuar.

Índice general

Introducción

Los modelos matemáticos usados en finanzas no son algo nuevo. Sin necesidad de una búsqueda tan exhaustiva, podríamos marcar su origen con la tesis doctoral de Louis Bachelier titulada *Théorie de la spéculation*,de 1900. A partir de ahí, durante todo el siglo XX, hubo numerosas contribuciones notables que han dotado a dichos modelos de más riqueza y complejidad, todo con el fin de obtener herramientas que expliquen mejor el comportamiento en los distintos escenarios financieros y económicos.

El modelo básico más conocido es aquel que parte del supuesto de que la dinámica de los precios de un activo sigue un movimiento Browniano, lo que da lugar a la famosa ecuación diferencial parcial de Black-Scholes para valuar instrumentos derivados sobre el activo dado. Este modelo ha sido muy estudiado, utilizado e incluso modificado. Pero la principal observación es que al utilizar el movimiento Browniano se supone un comportamiento continuo por parte del precio del subyacente, en términos prácticos esto significa que únicamente ocurren variaciones a causa de la volatilidad intrínseca del precio. Se ha observado que esta última suposición no es real, pues los cambios bruscos en los precios por causas externas al comportamiento del instrumento e incluso al mercado mismo están presentes.

Para incorporar en el modelo a los cambios bruscos en el precio, se echó mano de un tipo de proceso estocástico diferente del movimiento Browniano en cuanto a que incorpora trayectorias discontinuas.Con el trabajo *Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous*, que Robert Merton publicó en 1975, se dio el comienzo del, ahora creciente, empleo de los procesos de Lévy para modelar las trayectorias de los precios de activos.

Entonces, por un lado tenemos que el empleo de los procesos de Lévy nos brinda mayor precisión para modelar las fluctuaciones del mercado puesto que refleja de manera más concisa las características empíricas de los mercados en general, por ejemplo: lo ya mencionado en cuanto a los cambios bruscos que se dan de manera intempestiva, al igual que las colas pesadas que se observan en los rendimientos de los activos, se presenta como propiedad genérica en los modelos con saltos; un ejemplo más es que, en la realidad, las opciones son inversiones riesgosas, y al modelar con este tipo de procesos se llega a que no existen coberturas perfectas y con esto se conserva tal propiedad.

Por otro lado, se tiene la inquietud de explorar un mercado que en los últimos años ha tenido un gran auge y un crecimiento importante: el de los préstamos pequeños a nivel individual, los que se negocian bajo el contexto y operación de instituciones microfinancieras en el marco de las finanzas populares. Echando un vistazo a un análisis del desarrollo del sector microfinanciero mexicano se puede observar la fuerza que adquiere día a día y su notoriedad en un país emergente como el nuestro.

Es por esto que aparece la necesidad de obtener buenas herramientas cuantitativas que brinden un panorama claro acerca del estado o de la situación en cuanto al manejo de riesgos de cada institución, en primera instancia, y posteriormente del sector en general. Lo primero resulta de utilidad evidente para el correcto y buen funcionamiento de cada una de ellas y lo segundo es, en parte, para servir como punto de partida de un análisis sobre la regulación que la CNBV aplica a estas instituciones.

0.1. Estructura del trabajo

Primero se efectuará un breve repaso de los antecedentes de los microcréditos en general, con su inicio en Bangladesh y su posterior incorporación al mercado mexicano. En el caso de nuestro país, se verá un poco del marco operativo, instituciones que han fungido de manera auxiliar y crecimiento del ramo. Esto con el fin de ver cómo ha sido el impacto y a qué sectores de la población ha beneficiado y de qué forma. Después se dará una reseña muy breve de cómo opera una institución microfinanciera de nuestro país, esto a partir de mi experiencia de trabajo voluntario en ella. Finalmente se mencionan algunos requisitos que piden dos instituciones de la llamada banca comercial para otorgar "micropréstamos" personales.

Posteriormente, en el capítulo 2, se hará un estudio exhaustivo de todas las herramientas necesarias para utilizar procesos de Lévy como herramientas para modelar las trayectorias de los precios y rendimientos de los activos. Éste comprende desde algunas herramientas más simples que servirán como base para otros conceptos importantes, los célebres resultados básicos en la materia, como la fórmula de Lévy-Khinchin o la descomposición de Lévy-Itô. También se hará un repaso acerca de cómo construir procesos de Lévy para hacer simulaciones posteriormente. También se echa mano de una revisión de conceptos principales de cálculo estocástico en el marco de los procesos de Lévy. Finalmente, con base en lo anterior, se revisarán conceptos matemáticos de relevancia para finanzas, como el teorema de Girsanov.

En el capítulo 3 se hace un repaso de los conceptos de riesgo y tipos de riesgo, para posteriormente adentrarse en el estudio y cuantificación del riesgo de crédito. Con esto ya se indaga en el modelo de Merton clásico y se comienzan a plantear las modificaciones pertinentes para considerar ahora el contexto que incorpora cambios abruptos en los rendimientos. Éstas se hacen principalmente por medio del trabajo que el mismo Merton hizo para valuar opciones.

Finalmente, en el capítulo 4, se recapitulan los cambios que llevan al nuevo escenario y se emplea el modelo modificado para análizar instituciones microfinancieras. Para ello, primero se hablará acerca de la recolección de datos necesarios, de los parámetros necesarios y su estimación y finalmente, de los cálculos y análisis del resultado. Para terminar, se contrastará con el resultado de un banco comercial que ofrece préstamos pequeños a nivel individual.

Capítulo 1

Referencias Generales

En este capítulo exploraremos algunos de los conceptos básicos en el ámbito de las microfinanzas, tanto a nivel general, como en su instauración en México. También indagaremos un poco acerca de los principales organismos para su puesta en marcha y funcionamiento.

1.1. Microcréditos

La palabra "microcrédito"no había sido necesaria antes de los años setenta. Ahora se ha convertido en una palabra ampliamente utilizada. Con el transcurso del tiempo ha adquirido un significado diferente para todos. Nadie se sorprende ahora si alguien usa el término "microcrédito"para referirse a un crédito de agricultura, rural, cooperativo, al consumo, un crédito de asociaciones de ahorro y préstamo, de uniones de crédito o de usureros. Cuando alguien alega que los microcréditos tienen como mil años de historia, o cien, nadie encuentra una pieza exacta de información histórica. En palabras de Muhammad Yunus, creador del Grameen Bank (Banco Grameen), "ésto ha creado muchos malentendidos y confusiones en torno a los microcréditos. Realmente no sabemos quién habla acerca de qué". Él propone etiquetar varios tipos de microcréditos de tal forma que se pueda aclarar un poco el panorama y saber de cuál microcrédito estamos hablando. Es muy importante llegar a conclusiones claras, formular políticas correctas y diseñar instituciones y metodologías apropiadas. En lugar de sólo decir "microcrédito"deberíamos especificar qué categoría de microcrédito. Su sugerencia para la clasificación es la siguiente:

- Microcrédito tradicional e informal (como el crédito de prestamistas, préstamos de amigos y familiares, crédito al consumo en mercados informales, etc.).
- Microcrédito basado en grupos tradicionales informales.
- Microcrédito con base en la actividad a través de bancos convencionales o especialistas (como crédito a la agricultura, crédito en pesquerías, etc.).

- Crédito rural a través de bancos especializados.
- Microcrédito cooperativo (crédito cooperativo, uniones de crédito, asociaciones de ahorro y préstamos, bancos de ahorro, etc.).
- Microcrédito al consumo.
- Microcrédito basado en el compañerismo Banco-ONG.
- Microcrédito tipo Grameen o Grameencredit.
- Otros tipos de microcréditos ONG.
- Otros tipos de microcréditos de no ONG y no colaterales.

1.1.1. ¿Cuál ha sido el impacto en los pobres?

Algunos estudios independientes muestran que los microcréditos han conducido a impactos positivos en las familias que los reciben. Un estudio del Banco Mundial en 1998 reportó que el 5 % de los prestatarios del Banco Grameen, BRAC y RD 12 de BRDB salieron de la pobreza cada año. El papel del microcrédito en situaciones de desastre y áreas post conflicto también ha sido bien documentado. Ha permitido a las familias en esas áreas que reconstruyan sus actividades económicas y viviendas cuando estos servicios son flexibles, convenientes y fácilmente accesibles. Los estudios también han mostrado que los programas de microcrédito mejoran los mecanismos de sobrevivencia de los pobres. Esto se demostró claramente durante las épocas de desastre, como las inundaciones en Bangladesh en 1998. Se han hecho un gran número de estudios en el Banco Grameen desde perspectivas diferentes. Todas emergieron con descubrimientos que mostraron impactos significativos sobre sus miembros a través de toda la amplia gama de indicadores sociales y económicos, incluyendo un incremento en el ingreso, nutrición mejorada, mejor comida ingerida, mejor consumo de ropa, mejor vivienda, mortalidad infantil más baja, menor tasa de natalidad, más alta adopción de prácticas de planificación familiar, mejor cuidado de la salud, mejor acceso a la educación para los niños, más poder de las mujeres, participación en actividades políticas y sociales, etc.

De acuerdo con el propio diagnostico interno del Banco Grameen, para el 2001, el 42 % de sus familias prestatarias ha cruzado la línea de pobreza; juzgando con la base de diez indicadores(tamaño del préstamo, cantidad de ahorros, condición de vivienda, mobiliario, provisión de ropa abrigadora, educación de los niños, etc.) propuestos por el Banco Grameen mismo para rastrear el impacto de su programa en las familias pobres a las que sirve. Para preparar a la siguiente generación, y que permanezcan alejados de la pobreza, el Banco Grameen alienta a los niños de las familias Grameen para que se incorporen a la escuela, permanezcan ahí y tengan un buen desempeño. El Banco Grameen ofrece becas para los mejores estudiantes de cada rubro, y proporciona préstamos estudiantiles para todos los estudiantes que irán a las universidades, escuelas médicas, escuelas de ingeniería u otras escuelas profesionales. Recientemente se introdujo un sistema de calificación de "Cinco Estrellas"para distintas ramas, donde una rama puede ganar una estrella por un logro particular. Dos de esas estrellas están relacionadas para impactar en el programa. Una rama puede ganar una estrella si los niños de todos los prestatarios están en la escuela o al menos completaron la primaria. Se puede obtener otra estrella si todas las familias bajo la rama cruzan la línea de la pobreza satisfaciendo las condiciones postuladas por los diez indicadores formulados por el Banco Grameen.

1.2. El Caso de México

A mediados de la década de los 80, la banca privada recién estatizada cierra sucursales y limita el acceso al crédito otorgándolo sólo a los hogares de mayor ingreso. La privatización de 1992 refuerza esta actitud. Al mismo tiempo, se empieza a difundir "el cuento de hadas" del Banco Grameen en el pobre Bangladesh. El Grameen, un banco para los pobres cuya clientela está compuesta en su gran mayoría por mujeres, obtiene índices de recuperación que dan envidia a la banca formal mexicana. Además de Grameen existen muchas otras experiencias, principalmente en Asia, como Raykat en Indonesia, ASA en Bangladesh o el SEWA en India.

Sin embargo, Grameen, por la personalidad de su fundador y su capacidad para difundir su historia, ha impactado al mundo de las finanzas con dos ideas básicas: el crédito para los pobres es un arma para luchar contra la pobreza y la falta de garantías prendarias no es excusa para no prestar pues se puede buscar otro tipo de garantías más eficientes, como los grupos solidarios. El interés internacional en el microcrédito ha surgido en parte porque el microcrédito para el autoempleo es congruente con la ideología económica neoliberal de brindar oportunidades de autoayuda a los individuos mediante el involucramiento en actividades del mercado.

En el ámbito nacional, un asunto muy relevante para el sector es la Ley del Ahorro y Crédito Popular. Lo que motiva al gobierno y al poder legislativo para hacer esta ley no es un repentino interés por fortalecer al sector, sino la sucesión de fraudes y quebrantos en algunas cajas de ahorro y el lavado de dinero de los narcotraficantes. Es más bien este último acontecimiento de seguridad nacional, lo que lleva a los diputados en los últimos años del sexenio de Ernesto Zedillo -con la asesoría de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV) y de las grandes federaciones de cajas populares- a proponer una ley, que más que fomentar el sector quiere regularlo o, más bien, obligarlo a autorregularse. La primera versión de la ley, publicada el 31 de mayo de 2001, resulta muy dura para las pequeñas instituciones; se revela inaplicable y dos años más tarde tiene que ser revisada.

El sistema de las cajas de ahorro, como su hermano mayor el sistema financiero formal, ha vivido su "micro Fobaproa" con la creación de un fideicomiso para cubrir los pasivos de los ahorradores en las cajas quebradas. El ya no querer recurrir a la movilización del erario público para cubrir pasivos de instituciones sin control es también una poderosa motivación gubernamental para crear esta ley.

En el ámbito institucional podemos mencionar cuatro programas o medidas tomadas en estos años:

La transformación del Patronato del Ahorro Nacional (Pahnal) en Banco del Ahorro Nacional y Servicios Financieros (Bansefi), en tanto banco de segundo piso para el sector; única medida que va en dirección del fortalecimiento institucional. Bansefi tiene también como objeto coordinar los apoyos a las instituciones que captan ahorro para adaptarse a la Ley del Ahorro y Crédito Popular.

La creación el Programa de Apoyo Técnico al Microfinanciamiento Rural (Patmir) en 1999 dentro de los programas de Alianza para el Campo de la Sagarpa, con el objeto de apoyar a las instituciones de microfinanciamiento en el medio rural, dando un muy original énfasis a la promoción del ahorro, cuando la corriente general decía estar convencida de que el crédito externo era la solución a todos los problemas. Desdichadamente, este programa piloto fue transformado y vaciado de su contenido original por el nuevo equipo de la Sagarpa, después del año 2000. En estos mismos años se creó además el programa Fommur con el propósito de ofrecer líneas de crédito revolvente a mujeres del medio rural, mediante un rígido esquema de operación.

La creación del Programa Nacional de Financiamiento al Microempresario (Pronafim) es una iniciativa manejada por gente del sector privado que ofrece líneas de crédito a tasas de CETES a microfinancieras. La novedad fue que, para tratarse de un programa gubernamental, tenía gran adaptabilidad y flexibilidad, por lo menos en sus primeros años. La falta de regulación de las tasas de interés cobradas por las microfinancieras apoyadas lo hace blanco de críticas, pues algunas de ellas fijaron tasas casi usureras.

El cierre de Banrural y la creación de Financiera Rural en diciembre de 2002, modificó el esquema de la banca de desarrollo y abrió la posibilidad de apoyar a las instituciones de microfinanciamiento rural.

A partir del 2000 está muy presente la voluntad de recurrir a la sociedad civil y a sus ámbitos de influencia para enfrentar problemas que el Estado no ha podido o no ha sabido resolver. Esto se puede interpretar como una posición ideológica: en la estrategia liberal de reducir el papel del Estado, la sociedad civil es vista como parte de la iniciativa privada. Pero también se puede interpretar como una posición pragmática: ante el fracaso de la intervención estatal y sin opciones, el gobierno descarga muchos problemas y responsabilidades en la sociedad civil, pero sin descentralizar del todo los medios y los recursos.

En los últimos años, el sector de las finanzas sociales antes apático y durmiente conoce dos cambios mayores: la moda del microcrédito que se transforma en una herramienta de lucha contra la pobreza y la promulgación de una Ley que pretende reglamentar, profesionalizar y fomentar el sector; y todo esto se traduce en la multiplicación de iniciativas y programas gubernamentales.

Con la puesta en marcha de la Ley de Ahorro y Crédito Popular, el Sistema de Ahorro y Crédito Popular estará integrado por las sociedades cooperativas de ahorro y préstamo y las sociedades financieras populares que sean dictaminadas favorablemente por una Federación y autorizadas para operar como entidades de ahorro y crédito popular, en los términos de esta Ley; por las Federaciones que estén autorizadas por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV) para ejercer las funciones de supervisión auxiliar de las entidades referidas, así como por las Confederaciones autorizadas por la propia Comisión para que administren sus respectivos fondos de protección.

1.3. Banca de Desarrollo

Los antecedentes históricos de la banca de desarrollo se remontan a principios del siglo XIX, cuando la acelerada industrialización en los países europeos trajo consigo la necesidad de grandes instituciones financieras. Entre ellas, la más antigua fue la Société Générale pour Favoriser LÍndustre Nationale (Holanda, 1822). Aproximadamente en 1850 se crean en Francia y en los últimos años del siglo, su creación se extendió por toda Europa e incluso hasta Japón.

El origen de estas instituciones en México se encuentra en los años 20, y desde ese entonces su papel ha sido el de instrumento de la política económica nacional. En México, como en los otros países, la banca de desarrollo fue creada para proveer servicios financieros en los sectores prioritarios para el desarrollo integral de la nación. En México se crearon los siguientes bancos: Banco Nacional de Crédito Agrícola (1926), Banco Nacional Hipotecario Urbano y de Obras Públicas (1933, hoy Banobras), Nacional Financiera (1934), Banco Nacional de Crédito Ejidal (1935) y Banco Nacional de Comercio Exterior (1937).

Mucho se ha dicho sobre que la banca de desarrollo mexicana ha sido promotora decidida del ahorro y la inversión, del desarrollo del sistema financiero, del crecimiento de la planta industrial y de proyectos de gran impacto regional, así como de las grandes obras de infraestructura, y de las empresas y sectores claves para el desarrollo nacional.

A lo largo de su existencia, la banca de desarrollo ha pasado por tres etapas en su desempeño. En los primeros años las tareas se enfocaron a la reconstrucción material del país, posteriormente actuó en la estrategia de la sustitución de importaciones y en las últimas dos décadas se ha dedicado a apoyar a la modernización de los sectores productivos y coadyuvar en la inserción de la economía en los mercados mundiales.

1.3.1. Situación actual

Actualmente existen seis instituciones que constituyen el sistema de banca de desarrollo y brindan atención a los siguientes sectores: pequeña y mediana empresa, obra pública, apoyo al comercio exterior, vivienda y promoción del ahorro y crédito popular. Estas instituciones son:

- *Nacional Financiera (Nafin)* Sus tareas están enfocadas a la promoción del desarrollo industrial y regional, atendiendo sobre todo a las pequeñas y medianas empresas que se ubican en áreas de la economía que requieren apoyos específicos, así como aquéllas que tienen carácter estratégico en el desarrollo regional o nacional. Asimismo, apoya a las medianas empresas en el mercado bursátil y a intermediarios financieros en la colocación de deuda para el desarrollo de los mercados financieros.

- *Banco Nacional de Comercio Exterior (Bancomext)* Sus actividades se centran en la promoción del comercio exterior, para incrementar el valor de las exportaciones y el número de exportadores, con apoyos crediticios y asesoría técnica y promocional a las empresas exportadoras y a aquellas que están vinculadas con las exportaciones, considerando a las pequeñas y medianas. Asimismo, tiene como objetivo impulsar la captación de inversión extranjera en el país y la inversión mexicana en el exterior.
- *Banco Nacional de Obras Públicas (Banobras)* Procura crear un mercado de créditos para los estados y municipios, con actividades de promoción para que la banca comercial también canalice recursos a estos usuarios. El banco orienta sus recursos primordialmente para financiar la creación de infraestructura y servicios públicos, pero también para apoyar el fortalecimiento financiero de las instituciones de los gobiernos locales.
- *Banco Nacional del Ejército, Fuerza Aérea y Armada (Banjército)* Es una institución que se dedica básicamente a proporcionar servicios de banca y crédito a los miembros del ejército, fuerza aérea y armada del país, así como servicios bancarios al público en general.

En los años recientes se han realizado profundos cambios en la estructura del sistema de la banca de desarrollo, que responde a la nueva situación económica del país y a los requerimientos de los sectores en materia de atención y financiamiento. De esta manera algunas instituciones dejaron de operar, y se crearon otras para sustituir actividades y mejorarlas, como son los casos de la SHF, Bansefi y la Financiera Rural(FR). Esta última comenzó operaciones como tal en enero de 2003 sustituyendo en las funciones sustantivas de crédito al Sistema Banrural.

- *Banco del Ahorro Nacional y Servicios Financieros (Bansefi)* Se creó en junio del 2001 como banco de desarrollo, y en enero de 2002 entró en vigor el decreto de transformación del Patronato del Ahorro Nacional (Pahnal). Ha venido apoyando el proceso de transición de las entidades del sector de ahorro y crédito popular (EACPs) en intermediarios financieros regulados y promoviendo la cultura financiera. Asimismo, ha venido trabajando en la construcción de una red de distribución, para que a través de este mecanismo, que aglutina sucursales de entidades del sector y de Bansefi, se ofrezcan productos y servicios financieros, infraestructura tecnológica y la coordinación de apoyos del Gobierno Federal y de otros organismos.
- *Sociedad Hipotecaria Federal (SHF)* La SHF se constituyó en enero del 2002, es fiduciaria del Fondo de Operación y Financiamiento Bancario a la Vivienda (FOVI) e inició operaciones en febrero del mismo año. Los programas en materia de vivienda tienen ambiciosas metas en cuanto a la oferta y adquisición de ésta. En este contexto la SHF como institución

de servicio financiero, conjunta esfuerzos con el sector público, privado y social para ampliar la cobertura y mejorar la calidad de la vivienda. Esta entidad tiene como objetivo impulsar el desarrollo de los mercados primario y secundario de crédito a la vivienda, mediante el otorgamiento de garantías destinadas a la construcción, adquisición y mejora de la vivienda, preferentemente de interés social.

1.3.2. Objetivos y estrategias

En los propósitos de la política de financiamiento, y en particular sobre el impulso al ahorro interno, es de fundamental importancia promover una mayor canalización de los recursos a través del sistema financiero. En esta estrategia se ha venido transformando la banca de desarrollo, para un mejor desempeño en el papel de aumentar la inversión en infraestructura, mejorar el desarrollo regional del país y apoyar a sectores estratégicos y a empresas no atendidas por las entidades financieras privadas.

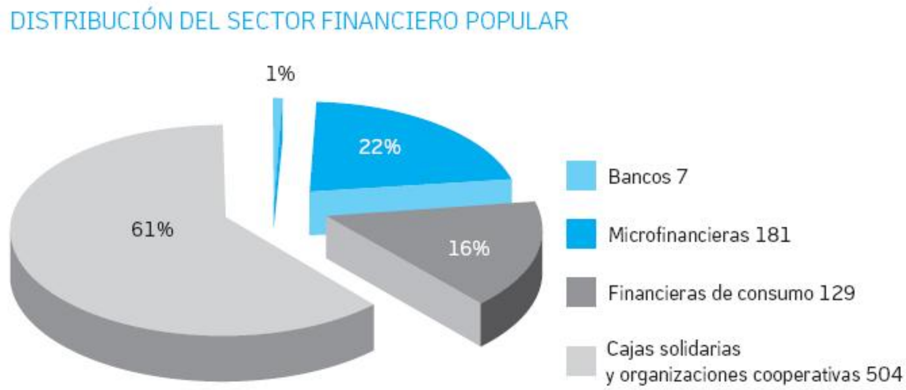
La banca de desarrollo juega un papel fundamental, a través de la creación y constitución de diversos instrumentos y mecanismos financieros, tales como los apoyos y financiamientos otorgados a los sectores prioritarios para el desarrollo integral del país. Su operación en el segundo piso propicia el desarrollo de actividades a través de intermediarios financieros especializados.

La actividad de la Banca de desarrollo no se limita al otorgamiento de créditos y garantías, también incluye servicios complementarios como la asistencia técnica, la capacitación, la promoción de una mejor gestión empresarial y la identificación y promoción de proyectos.

Para lograr la asignación eficiente de recursos crediticios, la banca de desarrollo ha adecuado sus políticas para hacerlas congruentes con el nuevo escenario nacional e internacional, ha tenido que modificar sus políticas y buscar métodos que le permitan hacer llegar sus productos y servicios a los sectores que requieren mayor apoyo. En cada una de las áreas de competencia de las instituciones se han tenido avances significativos para impulsar las actividades económicas. Los nuevos bancos pretenden eliminar rezagos en sectores que resultan estratégicos en la situación actual de la economía; así como procurar mayor eficiencia en la utilización de recursos en regiones específicas.

1.4. Organizaciones Auxiliares de Crédito en las Microfinanzas

Las organizaciones auxiliares de crédito son instituciones reguladas no bancarias y pueden jugar un papel determinante en la prestación de servicios financieros especializados para la microempresa. El análisis del marco de operación y la determinación de factores competitivos establecen las bases para promover el microcrédito a través de este tipo de instituciones.



Las metodologías de programas de microfinanciamiento contemplan tres aspectos básicos:

1. Conocimiento del mercado y selección de la población objetivo. Los programas de microfinanciamiento se originan de acuerdo con las necesidades del cliente y comprenden préstamos pequeños (500 pesos a 3000 pesos). La principal necesidad de este sector es el crédito de liquidez y de capital, cuyos plazos sean a un año o menos. Los costos de transacciones para los prestatarios se reducen al acercar las sucursales de crédito al cliente y efectuar desembolsos rápidos. Las tasas de interés son altas en comparación con las tasas prevalecientes en el mercado formal financiero, pero son bajas con relación a las tasas vigentes en el sistema informal y reflejan el riesgo de otorgar créditos a personas en colateral.

2. Uso de técnicas especiales para disminuir costos administrativos. Se utilizan procedimientos con esquemas simples y directos. Las solicitudes de préstamo con frecuencia no pasan de una página. Las aprobaciones son descentralizadas y se basan en criterios de elegibilidad fácilmente verificables, en vez del avalúo empresarial. Los grupos de prestatarios, a menudo, manejan gran carga de procesamiento de préstamos. También se requiere una gran flexibilidad en la operación, la cual se expresa en elestablecimiento de oficinas cercanas al cliente y en el ajuste de días y horario de servicio de acuerdo con su conveniencia.

3. Motivación de pago y presión social. Los prestamistas utilizan técnicas que garanticen el cumplimiento del pago de los préstamos, como son: garantías de grupos solidarios o la presión de redes sociales, la promesa de préstamos subsecuentes y progresivos, métodos de reforzamiento para el repago de crédito y los requerimientos de ahorro.

1.4.1. Organizaciones auxiliares de crédito y programas de microfinanciamiento

Conforme con la legislación financiera vigente, los intermediarios financieros no bancarios son todas aquellas instituciones que no están autorizadas para captar y colocar de manera masiva y amplia recursos del público, ni recibir depósitos en cuenta de cheques, porque estas funciones son propias de la banca. Estos intermediarios pueden realizar actividades de captación limitadas y otorgar créditos, conforme a objetivos muy específicos, en apoyo de las actividades de fomento económico, de tal forma que complementen y no compitan con los servicios que ofrecen los bancos.

Dentro del sector de las finanzas populares, las instituciones de microfinanzas tienen una carac-terística distintiva, están dirigidas a personas con una actividad productiva independiente3, es decir que son emprendedoras o dueñas de una microempresa. Aunque el destino del crédito pueda utilizarse para compra de insumos o implementos, los productos financieros están diseñados para empresarios.

Las instituciones de microfinanzas no tienen una figura jurídica propia o característica, pueden ser Organizaciones de la Sociedad Civil (ACAC e IAP), Sociedades Anónimas, SOFOMES (figura predominante), SOFOLES, SOFIPOS, Sociedades Cooperativas, Uniones de Crédito, Sociedades Mercantiles e incluso Bancos. También hay una gran diversidad en el tamaño de las instituciones que se dedican a las microfinanzas, alrededor de 30 % son instituciones que tienen menos de 5 millones de pesos en cartera, muchas de ellas de reciente creación. Por otra parte, el grupo predominante es el de instituciones que tienen entre 20 y 50 millones de pesos en cartera, consideradas como instituciones medianas.

1.5. Microbancos

Los microbancos rurales nacen de la necesidad de atender a un sector de la población rural que carece de medios para acceder a servicios financieros (ahorro, crédito, remesas, etc.) y cuya base económica es la agricultura campesina. Varios factores que explican eso son:

- La falta de instituciones financieras que proporcionen estos servicios a la población rural local, mientras que la banca de desarrollo no ha podido penetrar en este sector de pequeños productores y la banca comercial definitivamente no está interesada en este sector por el alto costo que representa el manejo de pequeños volúmenes de ahorro y crédito. El gobierno con sus programas de desarrollo se ha dedicado a fomentar una política de subsidios, más que a la implementación de verdaderas políticas de desarrollo rural.

- Las características socioeconómicas y geográficas en que se encuentra la población objetivo, que se caracteriza por ser en su mayoría indígenas que viven en extrema pobreza de alta o muy alta marginación, monolingüe el 90 por ciento, con un alto grado de analfabetismo y con servicios de educación, comunicación, drenaje y agua potable deficientes o inexistentes.

- En el ámbito económico sus condiciones no son las más favorables. Su economía está basada en actividades agropecuarias poco rentables: cafeticultura, granos básicos (maíz y frijol) y pequeña ganadería de traspatio cuyo destino es principalmente el autoconsumo; si tiene un excedente lo destina al mercado local, saliendo beneficiados los coyotes, que compran esos excedentes a un precio menor que el producido y lo revenden en otras localidades a un precio mayor.

- El difícil acceso a las comunidades es otro factor que influye en la falta de oferta de servicios financieros. Los bancos y los organismos financieros no bancarios como cajas de ahorro, cooperativas de ahorro y crédito, sociedades de ahorro y préstamo, etc. Se sitúan principalmente en las zonas urbanas o semiurbanas bien comunicadas, a diferencia de los microbancos, cuya área de influencia son comunidades rurales con un alto grado de dispersión (poblaciones de menos de 500 habitantes) localizadas a dos horas mínimo y seis o siete horas máximo del poblado más importante o de la cabecera municipal. El acceso a estas poblaciones sólo es posible por caminos de terracería, donde sólo pueden transitar camionetas de redilas, o por caminos o veredas transitables a pie o con animales de carga, como caballos y burros.

- Un factor que prevalece en las comunidades rurales es que la gente desconfía del establecimiento de programas o de instituciones de ahorro y crédito. En efecto, hace algunos años para muchas personas significó la pérdida de sus ahorros, pues no existía un marco regulador que garantizara la buena administración y transparencia de estos recursos. A raíz de los quebrantos de muchas cajas de ahorro, el gobierno mexicano vuelve la mirada hacia este sector para regular a las instituciones financieras no bancarias. Con la Ley de Ahorro y Crédito Popular se pretende dar certidumbre a los ahorradores.

En este contexto, encontramos que la mujer en el medio rural es la que sufre más de este ambiente tan desfavorable; está sumergida en un estado de marginación muy fuerte: no tiene derecho a participar en la toma de decisiones en su hogar o en la comunidad; el poder político y social prácticamente es un derecho del hombre; carece de medios de producción. No puede acceder a programas de crédito gubernamentales o privados por falta de garantías. La educación no es para ella, ya que a temprana edad tienen que enfrentar la responsabilidad de una familia y la falta de fuentes de empleo la hace emigrar a las grandes ciudades de México o de Estados Unidos en busca de mejores oportunidades de trabajo. Contrariamente a lo anterior, para el microbanco la participación de la mujer es muy importante, sin distingo de posición política, religiosa, étnica o de género. La estrategia de operación está basada en el diseño e implementación de servicios adaptados a la población local: movilización de ahorro libre y voluntario, generación de una cartera de crédito basada en garantías morales y solidarias, no materiales. Esto propicia la eliminación de barreras para que haya igualdad en el acceso a los servicios del microbanco a hombres y mujeres. El modelo de microbanco como innovación institucional se caracteriza por ser:

1. Un organismo financiero incluyente. Tiene como objetivo principal proporcionar servicios financieros -ahorro, crédito, remesas y cambio de cheques, entre otros- a comunidades rurales pobres sin distingo de posición social, pertenencia a un grupo étnico, tinte político, religioso o género -hombres, mujeres, jóvenes e incluso niños- que por su aislamiento y falta de garantías quedan excluidas de la banca tradicional.

2. Sus servicios se adaptan a las condiciones socioeconómicas de cada lugar y a las necesidades de las familias.

3. Es un organismo de intermediación financiera que promueve en gran medida el ahorro libre y voluntario, lo que le da al microbanco una solidez financiera para no depender de fuentes financieras externas para atender la demanda de crédito y, sobre todo, satisfacer una demanda creciente de los socios, que buscan un lugar seguro donde depositar dinero y que le garantice un rendimiento que, como mínimo, no pierda su valor.

4. El crédito es libre de disponibilidad; el socio decide en qué lo va a ocupar, no está condicionado a una actividad en particular; los montos y plazos son determinados con base en su capacidad de pago, lo que evita su sobreendeudamiento. Para la gente que no cuenta con garantías materiales, quien respalda el crédito es el grupo solidario integrado por 5 ó 7 personas que se eligen entre sí y que se comprometen a pagar en caso de que uno de ellos no pague.

Los microbancos son organismos financieros sin fines de lucro, sin embargo, como su nombre lo dice, buscan la sostenibilidad financiera sin perder de vista su carácter social. Se basan en la satisfacción de las necesidades financieras locales y en la participación gradual de los socios, mediante la construcción de una estructura organizativa desde las comunidades que permita un proceso de autogestión y participación organizativa gradual en la toma de decisiones. Los microbancos no son un modelo acabado. Constantemente reciben mejoras no sólo en la parte operativa (con el propósito de adaptarlo no sólo a las condiciones particulares de cada región y a las necesidades de la gente) sino en los contextos más amplios económico, social, jurídico y de normativo, que los lleve a consolidarse como un modelo institucional de intervención financiera.

1.6. Crecimiento

Las instituciones de microfinanzas han mostrado un crecimiento considerable en los últimos años, desde 2005 se ha dado un crecimiento promedio anual de 49 % en la cartera y 44 % en población atendida (global). El incremento también se ha dado en la cantidad de instituciones y sucursales que llevan servicios financieros a las personas que emprenden negocios por todo el país. El mayor crecimiento en número de instituciones se dio durante el 2007, la figura jurídica de la SOFOM y los altos retornos mostrados por algunas instituciones contribuyeron significativamente al aumento de instituciones en el sector.

A diciembre de 2008, las instituciones de microfinanzas atendieron a 2.2 millones6 de personas. En promedio las instituciones de microfinanzas atienden a cincuenta y un mil personas (si se quitan los casos extremos serían catorce mil), de las cuales el 80 % son mujeres y el 49 % vive en zonas rurales. De las personas atendidas 35 % son por crédito individual y 65 % mediante alguna metodología de crédito solidario (banca comunal o crédito grupal). El total de la cartera es de 9,165 millones de pesos.

El crédito promedio de las instituciones microfinancieras es de 5,900 pesos. Este monto disminuyó respecto al año anterior en 20 %, lo cual puede ser indicativo de una atención a segmentos de menores ingresos; de un mayor conservadurismo en el otorgamiento del crédito; y de una mayor competencia entre instituciones que hace que la gente tenga diversificados sus servicios de crédito con más de una entidad.

En México el crédito promedio es inferior al otorgado en países latinoamericanos, que llega a ser el equivalente a 10,000 pesos, lo cual tiene implicaciones directas en los costos transaccionales haciendo que el crédito que se otorga en México sea más costoso y se vea reflejado en tasas de interés más elevadas.

La antigüedad promedio de las IMF´s es de siete años, lo cual significa que es un sector todavía joven. Si bien ha sido visto como un sector de altos retornos para algunas de las instituciones líderes, sólo 45 % de las instituciones son sostenibles financieramente (muchas no han logrado la sostenibilidad financiera por el poco tiempo que llevan de operación). El promedio de retorno de una institución microfinanciera es de 5.1 %.

El principal producto de las IMF´s es el microcrédito productivo, no obstante, cada vez hay una mayor oferta de productos o servicios financieros como crédito a la vivienda, crédito para la compra de autos, crédito al consumo, entre otros. Recientemente se ha dado un mayor impulso a los microseguros y al manejo de remesas. Sin embargo estos productos no representan un volumen significativo en las instituciones de microfinanzas y es difícil medir su porcentaje.

1.7. SEFIA

Servicios Financieros Alternativos (SEFIA) es una Sociedad Financiera Popular que cuenta con autorización de la CNBV. Tiene como rango de cobertura ciertas localidades de los estados de Oaxaca y Chiapas (principalmente rurales y marginales). Esta institución opera bajo el esquema propio de un microbanco; brinda servicios financieros al sector de la población típicamente excluído por los bancos comerciales. En su metodología de operación podemos percibir un doble beneficio para la población beneficiaria. Por un lado otorgan créditos que apoyan e impulsan a las actividades productivas de los socios[1] y a la par fomentan la cultura del ahorro, con todos los frutos que éste acarrea.

Como mencioné anteriormente, esta institución funciona bajo el esquema característico de un microbanco, en particular, como un banco comunal. Recordemos que una de las principales características de un banco comunal es que se otorgan los créditos a grupos de personas, sin ningún tipo de aval o garantía prendaria, sino que el mismo grupo es responsable por todos y cada uno de sus miembros. En el caso de SEFIA, cuando llega un grupo nuevo a solicitar un préstamo a una sucursal, primero pasan por un "período de prueba.[en] el cual sólo ahorran y dependiendo de este desempeño será el monto de su primer préstamo.

Una vez que el grupo recibe el préstamo, mantiene reuniones semanales junto con un promotor de la sucursal. En ella, bajo la supervisión del promotor, se juntan las cantidades correspondientes a los pagos del préstamo y posteriormente uno de los miembros del grupo depositará en el banco la cantidad recabada. Otro asunto de suma importancia que se lleva a cabo en la reunión semanal es la recaudación de otro monto por parte de cada socio destinado a su ahorro personal. De esta manera todos los miembros del grupo son párticipes y responsables de la evolución crediticia del mismo.

Es importante mencionar que una insitución como SEFIA ha presentado un crecimiento importante, tanto en número de socios, como en montos de préstamo otorgados. Se espera que en los próximos años no sólo siga con esta tendencia, sino que además alcance a otros sectores de la población vía la oferta de nuevos productos.

Yo colaboré con SEFIA unas cuantas semanas, a manera de trabajo voluntario, y puedo mencionar que resulta muy impresionante y altamente gratificante ver el impacto que alcanzan sobre el sector de la población que atienden. Aunque llega a haber algún hombre dentro de los grupos solicitantes de créditos, la gran mayoría están conformados por mujeres únicamente. Estas mujeres muchas veces son el pilar que sostiene a su familia, o en algunas ocasiones, hacen una labor conjunta con su marido para brindar mejores condiciones de

[1]Por socio se entiende al beneficiario del crédito

vida y oportunidades de sobresalir para sus hijos. Entonces, el impacto del que hablé se traduce en que el crédito que se les otorga funge como una vía para lograr cualquiera de estos objetivos; y entonces se puede ver que estas mujeres hacen todo los posible por cumplir con sus pagos de manera puntual y de esta forma acceder a un mayor préstamo, y de esta forma lograr una mejora progresiva y sostenida en su negocio o actividad productiva. Esto nos lleva a un beneficio secundario, pero no menos importante, que es la planeación. Resulta muy importante ver cómo, a pesar de ser de una manera "poco formal", se van forjando una cierta perspectiva de lo que les gustaría lograr en un cierto plazo y cómo lo van a conseguir. en todo esto es en donde se aprecia de una manera concreta cuál es la importancia social de una institución dedicada al microfinanciamiento.

1.8. Otras Instituciones

Adicionalmente recopilé información acerca de los requisitos que piden otras instituciones para otorgar un microcrédito.

1.8.1. Banco Azteca

Ofrece un crédito personal en efectivo o bien alguno de los artículos de sus tiendas Elektra y Salinas y Rocha. A manera de publicidad, prometen que uno siempre sabrá cuándo y cuánto tiene que pagar "en abonos chiquitos y al alcance de su mano".

¿Cuáles son los pasos para conseguir un crédito?

¿Cuáles son los pasos para conseguir un crédito? Si se desea adquirir un crédito personal en efectivo, vía la visita a una sucursal, hay que pedir a uno de sus vendedores que calcule un presupuesto. En ambos casos (Crédito Personal en Efectivo y Crédito al consumo), el ejecutivo indicará las semanalidades y el monto que tendrá la línea de crédito. Si se está de acuerdo, se debe pedir al ejecutivo que levante la solicitud de Línea de Crédito.

Por vía electrónica, uno debe entrar a "su sucursal personalz simular el crédito; para hacerlo se debe teclear a cuánto ascienden los ingresos mensuales, a continuación se verá una pantalla que mostrará cuál es la línea de crédito que se puede adquirir. Para llenar la solicitud en línea, los datos que se deberán ingresar son los siguientes:

- Nombre Completo
- Domicilio
- Teléfono
- Ingresos Mensuales

Una vez que se hayan ingresado todos los datos, se enviará una solicitud para que uno de los Jefes de Cartera haga una visita en el domicilio, para lo que se deberá contar con la documentación necesaria para el trámite de la línea de crédito.

En ambos casos, lo siguiente que ocurre es que uno de los jefes de cartera, debidamente identificado, hará una visita al domicilio. Él pedirá que se le muestren los originales de la documentación. Indicará cuándo se deberá acudir de nuevo a la sucursal de Banco Azteca para seguir con el trámite de la línea de crédito.

El siguiente paso es acudir a la sucursal Banco Azteca (con el aval según sea el caso) para la firma del contrato de línea de crédito. En este momento se deberá entregar la documentación al ejecutivo de crédito.

Por último, el ejecutivo liberará el surtimiento e indicará el paso con los cajeros, quienes entregarán el efectivo.

Como beneficios, la institución apunta los siguientes:

- Resuelven el crédito en 24 horas
- Si se elige un préstamo personal, el dinero puede ser utilizado en lo que el cliente quiera, tomar unas vacaciones, comprar los útiles de sus hijos, arreglar su coche o lo que más necesite.
- Si se elige adquirir algún artículo de las tiendas Elektra o Salinas y Rocha, se contará con la más amplia gama de productos que el cliente podrá pagar "en pagos chiquitos".

Como requisitos se deben presentar los siguientes documentos:

- Identificación Oficial
- Comprobante de Domicilio
- Comprobante de Ingresos
- Comprobante de Propiedad. Si no se tiene alguna propiedad, se deberá contar con un aval que cuente con una.
- Aval (en caso de requerirlo)

Si no se cuenta con alguno de estos requisitos, la institución ofrece más alternativas para que se pueda obtener una Línea de Crédito:

- Si no se tiene comprobante de ingresos:El ingreso máximo permitido será de $ 4,500.00
- Si no se cuenta con alguna propiedad: Presentar un aval que sí la tenga o presentar comprobante que demuestre que ha vivido por lo menos 2 años en el mismo domicilio: Contrato de arrendamiento original, último recibo de renta o presentar comprobante que demuestre que ha trabajado por lo menos 2 años en el mismo lugar: Último recibo de sueldo, contrato de empleo o documento que compruebe su actividad económica

La oferta de esta institución es que se pueden prestar hasta \$30,000 vía Credimax (\$10,000 sí es la primera vez que se solicita un crédito)tanto en efectivo como en artículos de las tiendas y almacenes afiliados como: HEB, Almacenes García, Milano, Bodegas Gigante, y Azulemex. También ofrece créditos sin aval ni garantía, sobre nómina para empleados que no pertenecen a Grupo Salinas y que cuentan con el servicio de nómina azteca.

1.8.2. Banorte

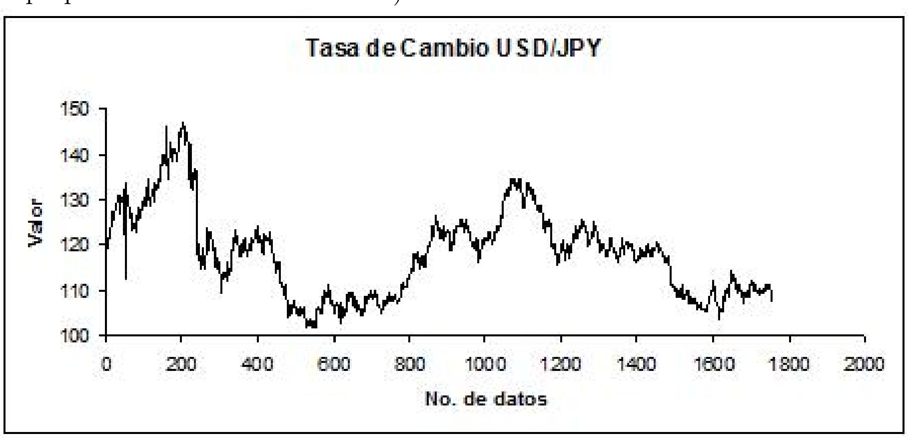
El *Crédito Personal Banorte* ofrece hasta tres meses de los ingresos y permite disponer de más efectivo o disminuir el pago en forma automática, siempre y cuando hayan pasado 6 meses desde la última disposición, se esté al corriente en los pagos y vigente el contrato. Además, el crédito esta sujeto a análisis y antecedentes favorables en Banorte y Buró de Crédito.

Capítulo 2

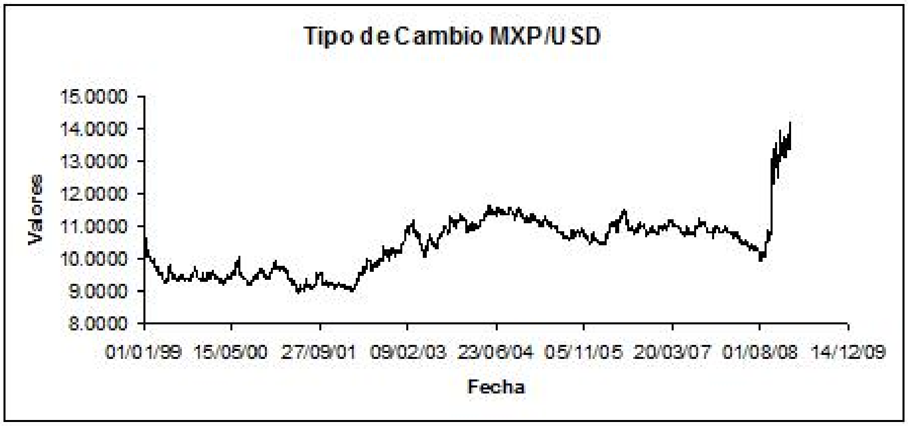
Herramientas Matemáticas

Muchos modelos matemáticos en finanzas -por ejemplo Black-Scholes- suponen que el activo subyacente es una función que tiene un comportamiento continuo con respecto al tiempo. Pero en la realidad, debido a la ocurrencia súbita de ciertos eventos en ámbitos que tienen alguna influencia en el mercado financiero -sucesos políticos, cambios en economías influyentes o incluso algunos desastres naturales- se pueden presentar variaciones bruscas en los precios de los activos. Por esta razón se considera que podría ser más correcto ajustar un modelo que considere algún tipo de proceso estocástico discontinuo para describir el comportamiento del subyacente.

A continuación podemos observar la gráfica del comportamiento diario de la tasa de cambio entre el Dólar Americano y el Yen Japonés, los 1760 datos corresponden al período de Octubre de 1997 a Octubre de 2004. Esta imagen es un reflejo de lo que ocurre en "el mundo real", donde se pueden observar claramente algunos saltos y picos (que por supuesto se deben tomar en cuenta al proponer un modelo "más real").



Un comportamiento similar se puede observar en la siguiente imagen, correspondiente al tipo de cambio entre el Peso Mexicano y el Dólar Americano. La serie corresponde a observaciones desde el 1° de enero de 1999 hasta el 27 de enero de 2009 (3680 datos).



En aras de desarrollar un modelo con las características requeridas, primero será necesaria la introducción de ciertos conceptos y elementos que más adelante nos serán de utilidad.

2.1. Procesos Estocásticos y Procesos de Lévy

Un proceso estocástico $\{X_t\}$ se puede pensar como una colección de variables aleatorias que toman determinados valores en un conjunto de estados. Es decir que a partir de esta definición se entiende que es una función que va de un espacio muestral Ω a un subconjunto de $\mathbb{R}$, denominado $\mathcal{E}$.

Adicionalmente podemos decir que es una manera de modelar matemáticamente la evolución en el tiempo de ciertos fenómenos, así que el subíndice t usualmente es usado para denotar el tiempo.

El proceso estocástico más usual para modelar movimientos continuos es el movimiento Browniano y para movimientos con saltos, el proceso Poisson. Ambos pertenecen a una clase llamada *Procesos de Lévy*, cuya definición se presenta a continuación.

Definición 1 *Un porceso de Lévy es un proceso estocástico* $\{X_t \ : t \geq 0\}$ *que cumple:*

1. $X_0 = 0$ *casi seguramente.*

2. *Tiene incrementos independientes, i.e. para cualquier* $n \geq 1$ *y* $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$*, las variables aleatorias* $X_{t_0},\ X_{t_1} - X_{t_0},\ X_{t_2} - X_{t_1},\ \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *son independientes.*

3. *Tiene incrementos estacionarios (homogeneidad temporal), i.e. la distribución de* $X_{s+t} - X_s$ *no depende de* s*.*

4. *Es continuo estocásticamente: para cada $t \geq 0$ y $\epsilon > 0$,*

$$\text{lím}\, s \to tP\left[|X_s - X_t| > \epsilon\right] = 0$$

.

5. *Es cadlag y adaptado: hay un $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ con $P\left[\Omega_0 = 1\right]$ tal que para cada $\omega \in \Omega_0,\ X_t\left(\omega\right)$ es continuo por la derecha en $t \geq 0$ y tiene límites por la izquierda en $t > 0$.*

Otro ejemplo de un proceso de Lévy que nos será de gran importancia debido a su utilidad es el proceso de difusión de Lévy con saltos.

Función Característica

La noción de función característica de una variable aleatoria juega un papel esencial en el estudio de los procesos de Lévy: con frecuencia no conocemos la función de distribución de un proceso en forma cerrada, pero la función característica es conocida explícitamente. La función característica de una variable aleatoria X está definida por:

$$\psi_X\left(z\right) \equiv E\left[e^{izX}\right]$$

Ahora enunciaremos un resultado importante que nos ayuda a definir la función característica de un proceso de Lévy.

Proposición 1 *Sea $\left(X_t\right)_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy en $\mathbb{R}^d$. Existe una función continua $\psi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ llamada el exponente característico de X, tal que:*

$$E\left[e^{iz.X_t}\right] = e^{t\psi(z)}, \quad z \in \mathbb{R}^d$$

Por ejemplo, la función característica de un proceso Poisson compuesto tiene la siguiente representación:

$$E\left[e^{iu.X_t}\right] = e^{t\lambda \int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{iu.x}-1\right)f(dx)}, \quad \forall u \in \mathbb{R}^d$$

donde λ denota la intensidad de los saltos y f la distribución del tamaño de los saltos.

2.1.1. Representación de Lévy-Khinchin

Primero enunciaremos un concepto que es de gran utilidad en la teoría de los procesos de Lévy.

Definición 2 *La ley F_X de una variable aleatoria X es infinitamente divisible, si para todo $n \in \mathbb{N}$ existen variables aleatorias $X_1^{(1/n)}, ..., X_n^{(1/n)}$ independientes e idénticamente distribuidas tales que:*

$$X = X_1^{(1/n)} + ... + X_n^{(1/n)}$$

De forma equivalente, la ley F_X de una variable aleatoria X es infinitamente divisible si para todo $n \in \mathbb{N}$ existe otra ley $P_{X^{(1/n)}}$ de una variable aleatoria $X^{(1/n)}$ tal que:

$$P_X = P_{X^{(1/n)}} * \ ... \ * P_{X^{(1/n)}}$$

También se puede hablar de una ley de distribución infinitamente divisible, si para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una variable aleatoria $X^{(1/n)}$ tal que

$$\psi_X(u) = \left(\psi_{X^{(1/n)}}(u)\right)^n$$

Por ejemplo, se puede ver claramente que la distribución Normal es infinitamente divisible. Sea $X \sim Normal\left(\mu, \sigma^2\right)$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\psi_X(u) &= \exp\left[iu\mu - \frac{1}{2}u^2\sigma^2\right] \\
&= \exp\left[iun\frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}u^2 n\frac{\sigma^2}{n}\right] \\
&= \exp\left[n\left(iu\frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}u^2\frac{\sigma^2}{n}\right)\right] \\
&= \left(\exp\left[iu\frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}u^2\frac{\sigma^2}{n}\right]\right)^n \\
&= \left(\psi_{X^{(1/n)}}(u)\right)^n
\end{aligned}$$

Otros ejemplos son la distribución Poisson, la exponencial, la Gamma, la geométrica, la binomial negativa, la Cauchy y las distribuciones estrictamente estables. Como contraejemplos tenemos a la uniforme y a la binomial.

La importancia de esta noción radica en que la colección de todas las distribuciones infinitamente divisibles guarda una correspondencia uno a uno con la colección de todos los procesos de Lévy, cuando dos procesos idénticos en ley son considerados como uno mismo.

Ahora veremos un resultado que nos brinda una caracterización de variables aleatorias con distribuciones infinitamente divisibles vía sus funciones características. Éste es conocido como la *fórmula de Lévy-Khinchin*

Teorema 1 *La ley F_X de una variable aleatoria X es infinitamente divisible si y sólo si existe una tripleta (b, c, ν) con $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_+$ y una medida que satisfaga $\nu(\{0\}) = 0$ y $\int_{\mathbb{R}} \left(1 \wedge |x|^2\right) \nu(dx) < \infty$ tal que*

$$\mathbb{E}\left[e^{iuX}\right] = \exp\left[ibu - \frac{u^2 c}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{iux} - 1 - iux1_{\{|x|<1\}}\right)\nu(dx)\right] \tag{2.1}$$

Para una demostración detallada de este resultado, véase [11], páginas 37-41.

A la tripleta (b, c, ν) se le conoce como *tripleta de Lévy o tripleta característica* y al exponente en (2.1)

$$\psi(u) = iub - \frac{u^2 c}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{iux} - 1 - iux1_{\{|x|<1\}}\right)\nu(dx) \tag{2.2}$$

se le conoce como *exponente de Lévy o característico*. Aún más, $b \in \mathbb{R}$ es conocido como el *término de tendencia*, $c \in \mathbb{R}_+$ el *coeficiente Gaussiano o de difusión* y ν es la *medida de Lévy*.

2.1.2. Descomposición de Lévy-Itô

La descomposición de Lévy-Itô expresa la estructura de las trayectorias muestrales de un proceso de Lévy, como la suma de dos partes independientes -una parte continua y una parte expresable como una suma compensada de brincos independientes. Tal descomposición fue concebida por Lévy y formulada y probada por Itô.

Teorema 2 *Consideremos una tripleta (b, c, ν), donde $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_+$ y ν es una medida que satisface $\nu(\{0\}) = 0$ y $\int_{\mathbb{R}} \left(1 \wedge |x|^2\right) \nu(dx) < \infty$. Entonces existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ en el cual existen cuatro procesos de Lévy independientes, $L^{(1)}, L^{(2)}, L^{(3)}$ y $L^{(4)}$. Donde $L^{(1)}$ es una tendencia constante, $L^{(2)}$ es un movimiento Browniano, $L^{(3)}$ es un proceso de Poisson compuesto y $L^{(4)}$ es una martingala cuadrado-integrable (sólo saltos) con un número de saltos numerable c.s. en cada intervalo finito de tiempo de magnitud menor que 1. Tomando $L = L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)} + L^{(4)}$, tenemos que existe un espacio de probabilidad en el cual se define un proceso de Lévy $L = (L_t)_{t \geq 0}$ con exponente característico*

$$\psi(u) = iub - \frac{u^2 c}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{iux} - 1 - iux1_{\{|x|<1\}}\right) \nu(dx) \tag{2.3}$$

para toda $u \in \mathbb{R}$.

En el capítulo 4 de [11], páginas 125-127, se encontrará una demostración detallada de la descomposición. La cual, en resumen, nos dice que es posible descomponer a cualquier proceso de Lévy en cuatro procesos de Lévy indpendientes $L = L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)} + L^{(4)}$, es decir

$$L_t = bt + \sqrt{c}W_t + \int_0^t \int_{|x|\geq 1} x\mu^L(ds, dx) + \left(\int_0^t \int |x| < 1 x\mu^L(ds, dx) - t\int_{|x|<1} x\nu(dx)\right) \tag{2.4}$$

donde $L^{(1)}$ es una tendencia constante, $L^{(2)}$ es un movimiento Browniano, $L^{(3)}$ es un proceso Poisson compuesto y $L^{(4)}$ es una martingala de sólo saltos.

2.1.3. Medida de Lévy

La medida de Lévy, ν, es una medida en $\mathbb{R}$ que satisface

$$\nu(\{0\}) = 0 \quad y \quad \int_{\mathbb{R}} \left(1 \wedge |x|^2\right) \nu(dx) < \infty. \tag{2.5}$$

Esto significa que la medida de Lévy no tiene masa en el origen, pero pueden ocurrir singularidades alrededor de éste (como un número infinito de saltos o saltos pequeños). De manera intuituva podemos suponer que la medida de Lévy describe el número esperado de saltos de una cierta magnitud en un intervalo de tiempo de longitud 1. Por ejemplo, la medida de Lévy del proceso de difusión de Lévy con saltos es $\nu(dx) = \lambda \cdot F(dx)$, de donde podemos deducir que el número esperado de saltos es λ y el tamaño del salto se distribuye de acuerdo con F.

Esta noción nos es de utilidad para definir la medida de Lévy para todos los procesos de Lévy como sigue:

Definición 3 *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy en $\mathbb{R}$. La medida ν en $\mathbb{R}$ definida por:*

$$\nu(A) = E\left[\{t \in [0,1] : \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in A\}\right], \quad A \in B(\mathbb{R})$$

se llama la medida de Lévy de X. $\nu(A)$ es el número esperado de saltos, por unidad de tiempo, cuyo tamaño pertenece a A.

Gracias a la medida de Lévy tenemos la riqueza de los procesos de Lévy, ya que aporta información importante acerca de la estructura de éstos, pues las propiedades de sus trayectorias se pueden obtener a través de esta medida.

Proposición 2 *Sea X un proceso de Lévy con tripleta (b, c, ν).*

1. *Si $\nu(\mathbb{R}) < \infty$ entonces casi todas las trayectorias de X tienen un número finito de saltos en cada intervalo compacto. En este caso, el proceso de Lévy tiene variación finita.*

2. *Si $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ entonces casi todas las trayectorias de X tienen un número infinito de saltos en cada intervalo compacto. En ese caso, el proceso de Lévy tiene variación infinita.*

Para una demostración de esta proposición, ver [11] p.136

Si un proceso de Lévy tiene variación finita o no, también depende de la medida de Lévy (y adicionalmete de la presencia o ausencia de la parte Browniana).

Proposición 3 *Sea X un proceso de Lévy con tripleta (b, c, ν).*

1. *Si $c = 0$ y $\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) < \infty$ entonces casi todas las trayectorias de X tienen variación finita.*

2. *Si $c \neq 0$ o $\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) = \infty$ entonces casi todas las trayectorias de X tienen variación infinita.*

Una demostración de esta proposición se puede encontrar en [11] pp. 140-142.

Por último, la medida de Lévy también proporciona información acerca de si los momentos del proceso son o no finitos; esto nos será muy útil más adelante, cuando busquemos la existencia de una *medida martingala*.

Proposición 4 *Sea X un proceso de Lévy con tripleta (b, c, ν). Entonces,*

1. *X_t tiene p-ésimo momento finito para $p \in \mathbb{R}_+$ $(\mathbb{E}|X_t|^p < \infty)$ si y sólo si $\int_{|x|\geq 1} |x|^p \nu(dx) < \infty$.*

2. *X_t tiene p-ésimo momento exponencial para $p \in \mathbb{R}$ $\left(\mathbb{E}\left[e^{pX_t}\right] < \infty\right)$ si y sólo si $\int_{|x|\geq 1} e^{px}\nu\left(dx\right) < \infty$.*

La demostración se encuentra en [11], pp.159-162.

2.2. Construcción de Procesos de Lévy

Ya que hemos analizado las propiedades generales de los procesos de Lévy, ahora veremos ciertos ejemplos de alguos procesos que nos pueden servir para la construcción de modelos. Veremos un poco sobre algunas transformaciones que nos ayudan a construir nuevos procesos de Lévy a partir de los conocidos.

2.2.1. Enfoques para la obtener procesos de Lévy

Hay tres maneras ampliamente aceptadas, que resultan muy convenientes para definir un proceso de Lévy paramétrico.

Subordinación Browniana

El primer enfoque es obtener un proceso de Lévy por medio de la subordinación de un movimiento Browniano con un proceso de Lévy creciente e independiente. Aquí, la función característica del proceso resultante puede ser obtenida inmediatamente, pero no siempre tenemos una fórmula explícita para la medida de Lévy. Debido a la estructura condicionalmente Gaussiana del proceso, la simulación y algunos cálculos pueden ser simplificados considerablemente. La interpretación del subordinador como un "tiempo de negocios" hace que los modelos de este tipo sean más fáciles de interpretar y entender. También son posibles las extensiones multidimensionales: se puede tomar un movimiento Browniano multidimensional y cambiar la escala de tiempo de todos los componentes con el mismo subordinador.

Dos modelos inspirados en subordinación browniana son:

- *Proceso gama varianza.* Es un proceso de variación finita con actividad infinita, pero relativamente baja, de saltos pequeños. Contempla tres parámetros, σ, θ y κ (volatilidad y tendencia del movimiento browniano y varianza del subordinador, respectivamente). La medida de Lévy está dada por:
$$\nu\left(x\right) = \frac{1}{\kappa|x|}e^{\frac{\theta}{\sigma^2}x - \frac{\sqrt{\sigma^2+2\sigma^2/\kappa}}{\sigma^2}|x|}.$$
Y su exponente característico es:
$$\psi\left(u\right) = -\frac{1}{\kappa}\log\left(1 + \frac{u^2\sigma^2\kappa}{2} - i\theta\kappa u\right).$$

- *Proceso Gaussiano normal inverso.* Es un proceso de variación infinita con comportamiento estable (α=1) de brincos pequeños. Ál igual que que el proceso gama varianza, también contempla tres parámetros, σ, θ y κ (volatilidad y tendencia del movimiento browniano y varianza del subordinador, respectivamente). Su medida de Lévy está dada por:

$$\nu(x) = \frac{\frac{\sqrt{\theta^2+\sigma^2/\kappa}}{2\pi\sigma\sqrt{\kappa}}}{|x|} e^{\frac{\theta}{\sigma^2}x} K_1\left(\frac{\sqrt{\theta^2+\sigma^2/\kappa}}{\sigma^2}|x|\right).$$

Y el exponente característico:

$$\psi(u) = \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa}\sqrt{1+u^2\sigma^2\kappa - 2i\theta u\kappa}.$$

En ambos casos, tanto la densidad de Lévy como la densidad de probabilidad tienen colas exponenciales con tasas de decaimiento $\lambda_+ = \frac{\sqrt{\theta^2+2\sigma^2/\kappa}-\theta}{\sigma^2}$ y $\lambda_- = \frac{\sqrt{\theta^2+2\sigma^2/\kappa}+\theta}{\sigma^2}$.

Especificación de la Medida de Lévy

El segundo enfoque es especificando directamente la medida de Lévy. Esto permite una visión dinámica del proceso de Lévy porque modelamos directamente la estructura de los saltos y conocemos, vía la fórmula de Lévy-Khinchin, la distribución del proceso en cualquier tiempo, aunque algunas veces no sea muy explícita.

Por ejemplo, el proceso estable templado se obtiene tomando un proceso estable unidimensional y multiplicando su medida de Lévy por una exponencial decreciente en cada mitad del eje real. Después de esta suavización exponencial, los saltos pequeños mantienen su comportamiento estable inicial mientras que los saltos grandes se vuelven menos violentos. Un proceso estable templado es entonces un proceso de Lévy en $\mathbb{R}$ con un componente no Gaussiano y una densidad de Lévy de la forma:

$$\nu(x) = \frac{c_-}{|x|^{1+\alpha_-}} e^{-\lambda_-|x|} 1_{x<0} + \frac{c_+}{x^{1+\alpha_+}} e^{-\lambda_+ x} 1_{x>0}$$

donde los parámetros satisfacen $c_- > 0,\ c_+ > 0,\ \lambda_- > 0,\ \lambda_+ > 0,\ \alpha_+ < 2$ y $\alpha_- < 2$.

Este tipo de modelo presenta actividad infinita pero con variación finita si $\alpha_1 < 1,\ \alpha_2 < 1$ y al menos uno de los términos es no negativo; variación infinita si al menos uno de los términos es mayor o igual a 1. Los saltos pequeños tienen un comportamiento estable si α_- y α_+ son positivos. Los parámetros a estimar son seis: tres para cada lado de la medida de Lévy; λ_- y λ_+ son tasas de decaimiento de las colas, α_- y α_+ describen a la medida de Lévy de los brincos positivos y negativos en el 0, mientras que c_- y c_+ determinan la tasa de arribo de los saltos de tamaño dado. El exponente carácterístico para un proceso estable templado es de la siguiente forma:

$$\psi(u) = \Gamma(-\alpha_+)\lambda_+^{\alpha_+} c_+ \left\{\left(1-\frac{iu}{\lambda_+}\right)^{\alpha_+} - 1 + \frac{iu\alpha_+}{\lambda_+}\right\} +$$

$$\Gamma\left(-\alpha_{-}\right)\lambda_{-}^{\alpha_{-}}c_{-}\left\{\left(1+\frac{iu}{\lambda_{-}}\right)^{\alpha_{-}}-1-\frac{iu\alpha_{-}}{\lambda_{-}}\right\}$$

si $\alpha_{\pm}\neq 1$ y $\alpha_{\pm}\neq 0$.

Especificación de la Densidad de los Incrementos

El tercer enfoque es especificar una densidad infinitamente divisible como la densidad de los incrementos a una escala de tiempo dada, digamos Δ. Los procesos hiperbólicos generalizados se pueden construir de esta manera. En este enfoque es fácil simular los incrementos del proceso en la misma escala de tiempo y estimar los parámetros de la distribución si los datos pertenecen al mismo periodo Δ, pero en general, la medida de Lévy no es conocida. Por consiguiente, a menos que esta distribución pertenezca a alguna clase parámetrica cerrada bajo convoluciones, no conocemos a la ley de los incrementos para otras escalas de tiempo. En particular, dada una distribución infinitamente divisible, puede no ser fácil ver si el proceso de Lévy correspondiente tiene o no un componente Gaussiano, actividad finita o infinita, etc.

Como ejemplo de este enfoque tenemos el modelo generalizado hiperbólico. Primero nos es útil definir que la densidad del subordinador Gaussiano inverso, en algún tiempo fijo, es:

$$p\left(x\right)=c\left(\chi,\zeta\right)x^{-3/2}e^{-\frac{1}{2}\left(\chi x-\zeta/x\right)}1_{x>0}.$$

Introduciendo un parámetro adicional a esta distribución, obtenemos la llamada ley Gaussiana inversa generalizada:

$$p\left(x\right)=c\left(\lambda,\chi,\zeta\right)x^{\lambda-1}e^{-\frac{1}{2}\left(\chi x-\zeta/x\right)}.$$

Se puede demostrar que esta es una distribución infinitamente divisible y puede generar un proceso de Lévy (un subordinador). De cualquier modo, las leyes Gaussianas inversas generalizadas no forman una convolución de clase cerrada, lo que significa que las distribuciones de este proceso para otros tiempos no serán Gaussianas inversas generalizadas. Sea S una variable aleatoria Gaussiana inversa generalizada y sea W una variable independiente normal estándar. Entonces la ley de $\sqrt{S}W+\mu S$, donde μ es una constante, es llamada mezcla media-varianza normal con distribución de mezcla Gaussiana inversa general.Esto se puede ver como un análogo estático del subordinador Browniano (la distribución del proceso subordinado al tiempo t es una mezcla de media-varianza siendo la distribución de mezcla la del subordinador al tiempo t). Las mezclas de media.varianza de leyes Gaussianas inversas generalizadas son llamadas distribuciones *hiperbólicas generalizadas* y también son infinitamente divisibles. La ley hiperbólica generalizada de una dimensión es de una familia de cinco parámetros que usualmente se define vía su densidad de Lebesgue:

$$p\left(x;\lambda,\alpha,\beta,\delta,\mu\right)=C\left(\delta^{2}+\left(x-\mu\right)^{2}\right)^{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}}K_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\alpha\sqrt{\delta^{2}+\left(x-\mu\right)^{2}}\right)e^{\beta\left(x-\mu\right)}$$

$$C = \frac{\left(\alpha^2 - \beta^2\right)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi}\alpha^{\lambda-1/2}\delta^{\lambda}K_{\lambda}\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)}$$

donde K es la función de Bessel modificada de segunda clase, δ es el parámetro de escala, μ es el parámetro de desplazamiento y λ, α y β determinan la forma de la distribución.

La principal desventaja de estas leyes es que no son cerradas bajo convoluciones: la suma de dos variables hiperbólicas generalizadas independientes no es una variable aleatoria generalizada independiente. Este hecho hace que este tipo de leyes sean inconvenientes para trabajar con datos a una escala de tiempo diferente.

2.2.2. Proceso de Difusión con Saltos

Un proceso de Lévy del tipo de difusión con saltos tiene la siguiente forma:

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \tag{2.6}$$

donde $(N_t)\, t \geq 0$ es el proceso de Poisson que cuenta los saltos de X y Y_i son los tamaños de los saltos (son variables independientes idénticamente distribuidas). Se puede observar de manera clara que este proceso (el caso más simple) de un proceso de difusión con saltos) es una combinación de un movimiento Browniano con deriva y un proceso de Poisson compuesto. El resultado es algo que, más adelante, veremos que nos será de mucha utilidad: un proceso que en ocasiones salta y que tiene una evolución continua, pero aleatoria, entre los tiempos de saltos.

Para definir completamente el modelo paramétrico, ahora debemos especificar la distribución del tamaño de los saltos $\nu_0(x)$. Es de una especial importancia el especificar correctamente el comportamiento de las colas de ν_0, dependiendo de lo que se crea acerca del comportamiento de los eventos extremos ya que el comportamiento de las colas de la medida de saltos determina a un gran alcance el comportamiento de las colas de la densidad de probabilidad del proceso.

2.3. Simulación de Procesos de Lévy

Al emplear procesos de Lévy podemos construir modelos más realistas para las dinámicas de los precios y así obtener una visión más precisa del riesgo a enfrentar, pero a cambio de ello nos enfrentamos a una dificultad mayor en los cálculos. Por ejemplo, no es conocida de manera explícita la ley de los incrementos para muchos procesos de Lévy, entonces es considerablemente más difícil simular una trayectoria para un proceso de este tipo que para un movimiento Browniano.

Sin embargo, varios de los procesos de Lévy que se usan en modelación financiera son posibles de simular. Por ejemplo, el proceso Poisson Compuesto, el movimiento Browniano, el proceso de difusión con saltos, el proceso Estable, el proceso Gama varianza, el proceso Normal Gaussiano Inverso, el proceso Hiperbólico generalizado y el proceso Templado estable.

Como nuestro interés se centra en el proceso de difusión con saltos, pues es el que usaremos en el modelo, desarrollaremos de manera detallada un algoritmo para simularlo. Para ello necesitaremos primero el proceso Poisson Compuesto y el movimiento Browniano.

2.3.1. Algoritmo para el Proceso Poisson Compuesto

La trayectoria de este proceso está dada de la siguiente manera:

$$X(t) = bt + \sum_{i=1}^{N} i_{U_i<t} Y_i.$$

Para conseguir esto, es necesario:

1. Simular una variable aleatoria N de distribución Poisson con parámetro λT. N nos da el número total de saltos en el intervalo $[0, T]$.
2. Simular N variables aleatorias independientes, U_i, uniformemente distribuidas en el intervalo $[0, T]$. Estas variables corresponden a los tiempos de saltos.
3. Simular los tamaños de los saltos: N variables aleatorias independientes Y_i con ley $\frac{\nu(dx)}{\lambda}$.

Usando `Matlab` se elaboró el siguiente código:

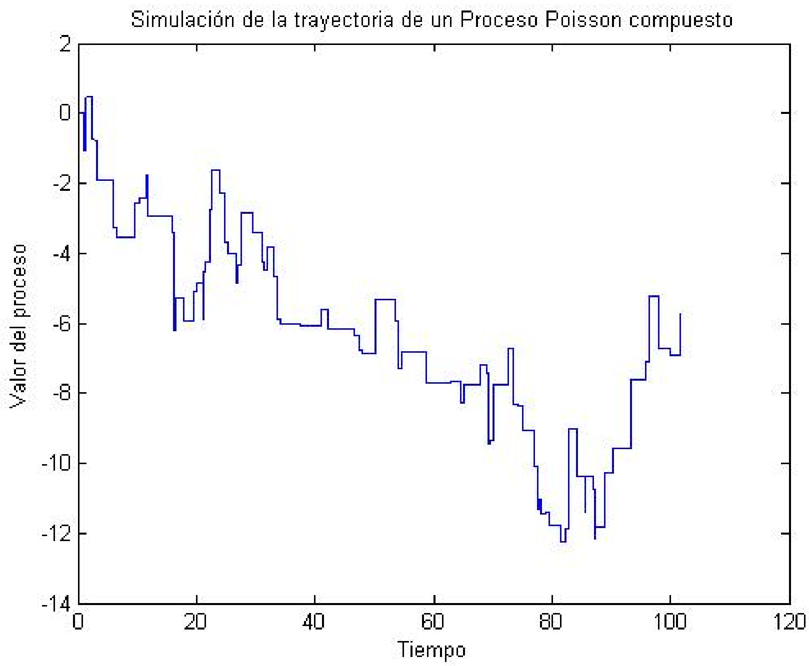
```
function PoissComp(lda)
% Es una función que recibe como argumento el parámetro lambda
T  = 100; % El tiempo en el cual se observará elproceso
jt = 0; % Guardará los valores de la suma acumulada en cada momento
TT = 0; % Acumulará los valores de la exponencial de parámetro lambda
Nj = 0; %Contador del total de pasos antes de rebasar el tiempo

while TT<T
        el=exprnd(lda,1);
        TT=TT+el;
        jt=[jt;TT];
        Nj=Nj+1;
end


Xt=[0; randn(Nj,1)];
Xt=cumsum(Xt);
```

```
stairs(jt,Xt)
```

Al ejecutar la función `PoissComp(1)` en la consola, se obtiene la siguiente simulación de la trayectoria de un proceso Poisson compuesto de parámetro 1:



2.3.2. Algoritmo para un Movimiento Browniano

En un modelo de tiempo discreto, sea $\Delta t > 0$ un incremento de tiempo constante. Para los $t_j := j\Delta t$ discretos, el valor del movimiento Browniano, W_t, se puede escribir como una suma de incrementos ΔW_k,

$$W_{j\Delta t} = \sum_{k=1}^{j} \underbrace{\left(W_{k\Delta t} - W_{(k-1)\Delta t}\right)}_{=:\Delta W_k}.$$

Entonces, a partir de esto, se procede de la siguiente manera:

- Comenzamos definiendo el tiempo 0: $t_0 = 0,\ W_0 = 0;\ \Delta t$
- para $j = 1, 2, ...\ :$

$$t_j = t_{j-1} + \Delta t$$
$$simular\ Z \sim N(0,1)$$
$$W_j = W_{j-1} + Z\sqrt{\Delta t}$$

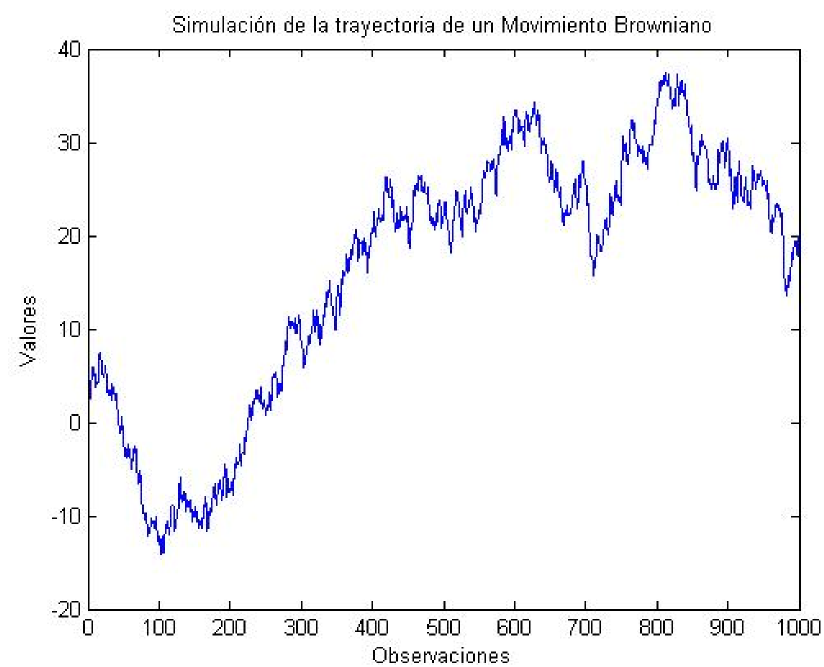
De nuevo utilizamos `Matlab`, ahora para producir el siguente código:

```
function browniano(npuntos, sigma)
% La función browniano recibe como parámetros:
% npuntos, que es la longitud de la trayectoria
% sigma, la volatilidad del proceso

  browniano = [0 cumsum(sqrt(sigma).*randn(1, npuntos))];

  plot([0:npuntos], browniano);
```

Al ejecutar la función `browniano(100,1)` se obtiene la simulación correspondiente a la siguiente trayectoria, que es la correspondiente a 1000 observaciones de un movimiento Browniano de parámetro 1.



2.3.3. Algoritmo para el Proceso de Difusión con Saltos

Obtendremos la simulación de $(X_1, ..., X_n)$ para n tiempos fijos $t_1, ..., t_n$.

1. Simular n variables aleatorias Gaussianas independientes centradas G_i con varianzas $Var(G_i) = (t_i - t_{i-1})\sigma^2$ donde $t_0 = 0$.

2. Simular la parte del Poisson compuesto como se describió anteriormente.

La trayectoria discretizada está dada por:

$$X(t_i) = bt_i + \sum_{k=1}^{i} G_k + \sum_{j=1}^{N} 1_{U_j < t_i} Y_j$$

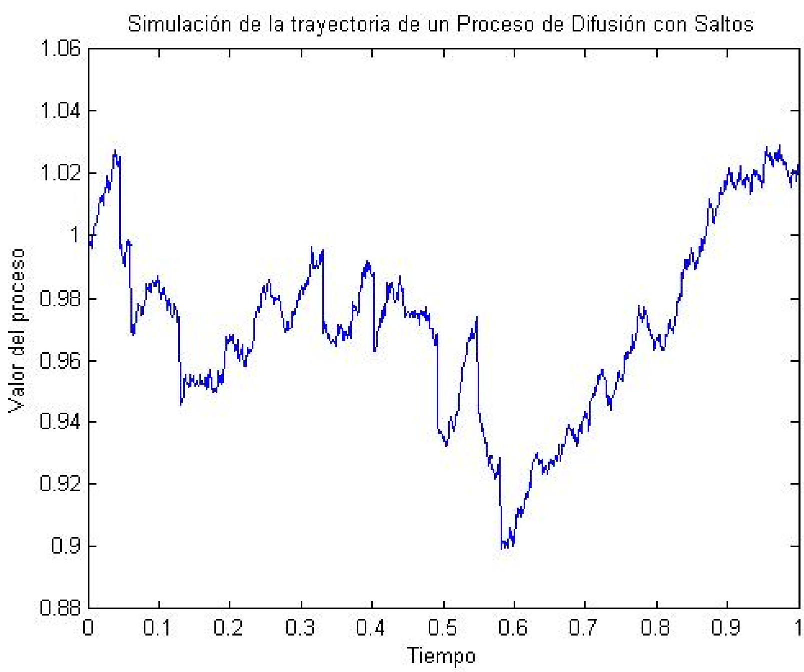
Una vez más se utilizo `Matlab` para elaborar el siguiente código:

```
function jdsimulator(mu,sig,nu,lambda,N,T)
% Es una función que recibe como parámetros
% mu: la tendencia,
% sig: la desviación estándar,
% nu: la amplitud de los saltos,
% lambda: la frecuencia de los saltos,
% N: el número de observaciones y
% T: el tiempo (anualizado)

idiff = 1; ijump = 1;
if sig == 0, idiff = 0; end
if nu == 0, ijump = 0; end
nfig = 0; % contador de figuras.
NI = N+1;  Dt = T/NI;
iv = 2; % iv=1 para *(1+/-sqrt(Var[X])) ó iv=2 para *exp(+/-sqrt(Var[Y]).
sqrtdt = sqrt(Dt); % Fija los incrementos del proceso
% de Wiener estándar o movimiento Browniano.
muddt = (mu - sig^2/2)*Dt; % Obtiene el término de tendencia de Itô corregido.
lognu = log(1 + nu); % Saca el logaritmo del término de amplitud de saltos.
% Comienza el cálculo de la trayectoria muestral:
t = 0:Dt:T; kstates = 4; x0 = 1.0;
XS = zeros(NI+1,kstates); % Declara un vector de estados global.
for kstate = 1:kstates % Prueba las trayectorias muestrales simuladas:
    if idiff == 1
      randn('state',kstate-1); % Fija el estado normal inicial.
                               %
      DW = sqrtdt*randn(NI,1); % Genera un vector aleatorio normal
                               %    de N muestras de DW(t).
    end
    if ijump == 1
      rand('state',kstate-1); % Fija el estado normal inicial.
                              %
      DU = rand(NI,1); % Genera un vector aleatorio uniforme
                      %    de N DP(t) muestras.
      ldt = lambda*Dt; % Una probabilidad de salto.
      ul = (1-ldt)/2;  ur = (1+ldt)/2; % Fija niveles centrados de
                                       %   probabilidad de saltos,
    end
     XS(1,kstate) = x0; % Fija elestado inicial.
```

```
    % Usando la parte centrada de una distribución uniforme
    %     para evitar puntos finales abiertos.
    YS = zeros(1,NI+1); % Fija el exponente inicial.
    for i = 1:NI % Trayectorias muestrales simuladas por acumulación de incrementos:
        YS(i+1) = YS(i) + muddt;
        if idiff == 1, YS(i+1) = YS(i+1)+ sig*DW(i); end
        if ijump == 1
          if DU(i) <= ur && DU(i) >= ul % Get jump if prob. in [ul,ur]:
             YS(i+1) = YS(i+1) + lognu;
          end
        end
        XS(i+1,kstate) = x0*exp(YS(i+1));% Invierte el exponente para conseguir el estado.
    end
end
NP = N + 2;
plot(t,XS(1:NP,1)).
```

Al ejecutar la función `jdsimulator(0.3395,0.0620,-0.0284,7.3628,1000,1)` , obtenemos la simulación que se muestra a continuación, la cual corresponde a la trayectoria de un proceso media 0.3395, desviación estándar de 0.0620, amplitud de saltos de -0.0284 y frecuencia de 7.3628:



2.4. Elementos de la Teoría de Semimartingalas

En los modelos de valuación, ya sea de derivados o de riesgo, buscamos asignar un precio a una función del proceso que rige el comportamiento del activo involucrado. En el caso en el que tenemos un proceso de Lévy o difusión, X, resulta que $f(t, X_t)$ o $\int_0^t \phi dX$ no son, en general, un proceso de Lévy o una difusión. En otras palabras, la clase de procesos de Lévy no es estable bajo integración estocástica o transformaciones no lineales.

Entonces, es necesario considerar una clase de procesos más grande que contenga a nuestros objetos de interés y sea estable bajo las operaciones antes consideradas. La clase de semimartingalas es estable bajo integración estocástica y transformaciones no lineales (suaves). Asimismo, también es estable bajo otras operaciones como cambio de medida, cambio de filtración y de tiempo.

Por otro lado, nos enfrentamos con que, en un mercado con saltos, las estrategias que no son predecibles pueden generar oportunidades de arbitraje.

Definición 4 *Un proceso estocástico $(\phi_t)_{t\in[0,T]}$ es un proceso predecible simple si puede representarse como:*

$$\phi_t = \phi_0 1_{t=0} + \sum_{i=0}^{n} \phi_i 1_{(T_i, T_{i+1}]}(t)$$

donde $T_0 = 0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_n < T_{n+1} = T$ son tiempos aleatorios no anticipados y cada ϕ_i es una variable aleatoria acotada cuyo valor es revelado en T_i, i.e. es $\mathcal{F}$-medible.

Definición 5 *La integral estocástica del proceso predecible ϕ con respecto a S es:*

$$\int_0^t \phi_u dS_u = \phi_0 S_0 + \sum_{i=0}^{n} \phi_i \cdot \left(S_{T_{i+1}\wedge t} - S_{T_i \wedge t}\right).$$

Es importante mencionar que si $(S_t)\, t \in [0,T]$ es una martingala, entonces, para cualquier proceso predecible simple ϕ, la integral estocástica $G_t = \int_0^t \phi dS$ es también una martingala.

Definición 6 *Un proceso cadlag no anticipado S es una semimartingala si la integral estocástica del proceso predecible simple con respecto a S:*

$$\phi = \phi_0 1_{t=0} + \sum_{i=0}^{n} \phi_i 1_{(T_i, T_{i+1}]} \mapsto \int_0^T \phi dS = \phi_0 S_0 + \sum_{i=0}^{n} \phi_i \left(S_{T_{i+1}} - S_{T_i}\right),$$

verifica la siguiente propiedad de continuidad: para cada ϕ^n, $\phi \in \mathbb{S}([0,T])$ si

$$\sup_{(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega} |\phi_t^n(\omega) - \phi_t(\omega)| \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

entonces

$$\int_0^T \phi^n dS \overset{\mathbb{P}}{\to} n \to \infty \int_0^T \phi dS.$$

Esto lo podemos interpretar como: pequeños errores en la composición de una estrategia implican pequeños cambios en el valor del portafolio.

Dentro de la clase de semimartingalas podemos encontrar a los procesos de variación finita, a las martingalas cuadrado integrables y, en general, cualquier combinación lineal de un número finito de semimartingalas. En particular, algunos procesos muy conocidos y usados son también semimartingalas, por ejemplo: el proceso de Wiener, pues es una martingala cuadrado integrable o el proceso Poisson, ya que es un proceso de variación finita. Además, todos los procesos de Lévy son semimartingalas ya que un proceso de Lévy puede ser partido en la suma de una martingala cuadrado integrable y un proceso de variación finita (la descomposición de Lévy-Itô, mencionada anteriormente).

Entonces nos es posible añadir que una semimartingala X admite una descomposición del tipo

$$X = X_0 + M + A$$

donde X_0 es finito y $\mathcal{F}_t$-medible, M es una martingala local con $M_0 = 0$ y A es un proceso de variación finita con $A_0 = 0$. Esta descomposición nos es útil para hacer notar el caso en el que A es predecible, lo que da lugar a una *semimartingala especial.*

Cualquier semimartingala especial X tiene la siguiente descomposición, llamada *descomposición canónica:*

$$X_t = X_0 + B_t + X_t^c + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x \left(\mu^X - \nu^X\right)(ds, dx)$$

donde X^c es la parte de martingala continua de X y $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} x \left(\mu^X - \nu^X\right)(ds, dx)$ es la parte de martingala puramente discontinua de X. μ^X es llamada la *medida aleatoria de saltos* de X; cuenta el número de saltos de tamaño específico que ocurren en un intervalo de tiempo de longitud específica. ν^X es llamado el *compensador* de ν^X.

Retomemos la descomposición de Lévy-Itô, en la fórmula (2.4), podemos apreciar que un proceso de Lévy con tripleta (b, c, ν) y primer momento finito, tiene la siguiente descomposición canónica

$$L_t = bt + \sqrt{c} W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x \left(\mu^L - \nu^L\right)(ds, dx), \tag{2.7}$$

donde

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} x \mu^L (ds, dx) = \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta L_s$$

y

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} x \mu^L (ds, dx)\right] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x \mu^L (ds, dx) = t \int_{\mathbb{R}} x \nu (dx);$$

también es posible escribir $\nu^L (ds, dx) = \nu (dx) \, ds$.

Denotemos a la parte de *martingala continua* de L por L^c y a la parte de *martingala puramente discontinua* por L^d, es decir

$$L_t^c = \sqrt{c}W_t \qquad y \qquad L_t^d = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x\left(\mu^L - \nu^L\right)(ds, dx).$$

2.5. Un poco de Cálculo Estocástico

A continuación mencionaremos algunos resultados importantes que nos son familiares en la aplicación al caso del movimiento Browniano, pero ahora en el contexto de los procesos de Lévy.

Primero enunciaremos una versión de la famosa fórmula de Itô, en esta ocasión para procesos de difusión con saltos.

Proposición 5 *Sea X un proceso de difusión con saltos, definido como la suma de un término de deriva, una integral estocástica Browniana y un proceso Poisson compuesto:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s + \sum_{i=1}^{N_t} \Delta X_i,$$

donde b_t y σ_t son procesos continuos no anticipados con

$$E\left[\int_0^T \sigma_t^2 dt\right] < \infty.$$

Entonces, para cualquier función $C^{1,2}$, $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, el proceso $Y_t = f(t, X_t)$ se puede representar como:

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) = \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) + \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) b_s\right] ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\sigma_s dW_s$$

$$+\sum_{\{i \geq 1, T_i \leq t\}} \left[f\left(X_{T_i-} + \Delta X_i\right) - f\left(X_{T_i-}\right)\right].$$

En notación diferencial:

$$\begin{aligned} dY_t = {} & \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + b_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dt + \frac{\sigma_t^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) dt \\ & + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\sigma_t dW_t + \left[f\left(X_{t-} + \Delta X_t\right) - f\left(X_{t-}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Fórmula de Itô para Procesos de Lévy

Si ahora nos fijamos en el caso de un proceso de Lévy en general, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 6 *Sea* $(X_t)\, t \geq 0$ *un proceso de Lévy con tripleta* $\left(\sigma^2, \nu, b\right)$ *y* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función* C^2*. Entonces*

$$f\left(X_t\right) = f(0) + \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} f^{''}\left(X_s\right) ds + \int_0^t f^{'}\left(X_{s-}\right) dX_s$$

$$+ \sum_{0 \leq s \leq t, \Delta X_s \neq 0} \left[f\left(X_{s-} + \Delta X_s\right) - f\left(X_{s-}\right) - \Delta X_s f'\left(X_{s-}\right)\right].$$

Sólo hay que mencionar que, en el caso donde hay actividad infinita, puede ocurrir un número infinito de saltos en cada intervalo. Cuando este es el caso, el número de términos en la última suma se hace infinito y hay que investigar las condiciones bajo las cuales la serie converge.

2.6. Exponenciales Estocásticas

Una práctica común, que nos asegura tener valores positivos así como independencia y estacionariedad de los log-rendimientos, es modelar a los precios de activos como exponenciales de los procesos de Lévy:

$$S_t = S_0 e^{X_t}. \tag{2.9}$$

Este tipo de proceso es conocido como *modelos Lévy-exponenciales.* El ejemplo más conocido de este caso es el modelo de Black-Scholes, donde la evolución del precio del activo está descrita por la exponencial de un movimiento Browniano con deriva: $S_t = S_0 exp\left(B_t^0\right)$, donde $B_t^0 = bt + \sigma W_t$ es un movimiento Browniano con deriva.

La formalización de la exponencial de un proceso de Lévy, así como algunas de sus características, se pueden enunciar formalmente en el siguiente resultado:

Proposición 7 *Sea* $(X_t)\, t \geq 0$ *un proceso de Lévy con medida de saltos* J_X*. Aplicando la fórmula de Itô a* $Y_t = exp\ X_t$ *obtenemos:*

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_{s-} dX_s + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t Y_{s-} ds + \sum_{0 \leq s \leq t; \Delta X_s \neq 0} \left(e^{X_{s-} + \Delta X_s} - e^{X_{s-}} - \Delta X_s e^{X_{s-}}\right)$$

$$= 1 + \int_0^t Y_{s-} dX_s + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t Y_{s-} ds + \int_{[0,t] \times \mathbb{R}} Y_{s-}\left(e^z - 1 - z\right) J_X\left(ds\ dz\right)$$

o, en notación diferencial:

$$\frac{dY_t}{Y_{t-}} = dX_t + \frac{\sigma^2}{2} dt + \left(e^{\Delta X_t} - 1 - \Delta X_t\right).$$

Si además suponemos que $E[|Y_t|] = E[exp(X_t)] < \infty$, que es equivalente a decir que $\int_{|y|\geq 1} e^y \nu(dy) < \infty$, podemos descomponer a Y_t en una parte de martingala y otra de deriva, donde la parte de martingala es la suma de una integral con respecto al componente Browniano de X y una suma compensada de los términos de saltos:

$$M_t = 1 + \int_0^t Y_{s-}\sigma dW_s + \int_{[0,t]\times\mathbb{R}} Y_{s-}(e^z - 1)\tilde{J}_X(ds\ dz),$$

mientras que la parte de tendencia está dada por:

$$\int_0^t Y_s \left[b + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^z - 1 - z1_{|z|\leq 1}\right)\nu(dz)\right] ds.$$

Entonces, Y_t es una martingala si y sólo si el término de tendencia se desvanece, esto es:

$$b + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^z - 1 - z1_{|z|\leq 1}\right)\nu(dz) = 0. \tag{2.10}$$

Esto nos será de gran utilidad más adelante cuando busquemos una medida de riesgo neutral para un proceso de Lévy.

2.7. Equivalencia de Medidas para Procesos de Lévy

Ahora revisaremos algunos conceptos fundamentales en la teoría de valuación neutral al riesgo, ausencia de arbitraje y y medidas de martingala equivalentes. La teoría que utilizaremos para garantizar la ausencia de arbitraje en un mercado tiene su base principal en el siguiente resultado. el teorema de Radon-Nicodym:

Teorema 3 *Si una medida μ_2 es absolutamente continua con respecto a μ_1[1], entonces existe una función medible $Z : E \to [0, \infty)$ tal que para cualquier conjunto medible A*

$$\mu_2(A) = \int_A Z d\mu_1 = \mu_1(Z1_A).$$

A la función Z se le llama la densidad o derivada de radon-Nikodym de μ_2 con respecto a μ_1 y se denota $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}$. Para cualquier función μ_2-integrable:

$$\mu_2(f) = \int_E f d\mu_2 = \mu_1(fZ) = \int_E d\mu_1 Z f.$$

Consideremos un mercado cuyas posibles evoluciones entre 0 y T se describen mediante un espacio de escenarios $(\Omega, \mathcal{F})$: $\mathcal{F}$ contiene todo lo que puede decirse

[1] Se dice que una medida μ_2 es absolutamente continua con respecto a μ_1 si para cualquier conjunto medible A, $\mu_1(A) = 0 \Rightarrow \mu_2(A) = 0$.

acerca del comportamiento de los precios entre 0 y T. De tal modo que los activos subyacentes se pueden describir como procesos no anticipados (cadlag):

$$S : [0, T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^{d+1}$$

$$(t, \omega) \mapsto \left(S_t^0(\omega), S_t^1(\omega), \ldots, S_t^d(\omega)\right),$$

donde $S_t^i(\omega)$ representa el valor del activo i al tiempo t en el escenario de mercado ω.

Un reclamo contingente con maduración T se puede representar especificando su payoff terminal $H(\omega)$ en cada escenario: como H es revelado en T, es un mapeo $\mathcal{F}$-medible $H : \Omega \to \mathbb{R}$. Denotamos al conjunto de reclamos contingentes de interés por $\mathcal{H}$. Ahora nos planteamos el problema de valuación en este contexto: ¿cómo atribuir una noción de valor a cada reclamo contingente $H \in \mathcal{H}$? Una regla de valuación es un procedimiento mediante el cual se otorga a cada reclamo contingente $H \in \mathcal{H}$ un valor $\Pi_t(H)$ en cada punto en el tiempo. $\Pi_t(H)$ debe ser un proceso no anticipado, positivo y lineal. El valor $\Pi_t(1)$ representa el valor presente de una unidad pagada en T, i.e. el factor de descuento: $\Pi_t(1) = e^{-r(T-t)}$.

Ahora definimos $\mathbb{Q} : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ por medio de $\mathbb{Q}(A) = \frac{\Pi_0(1_A)}{\Pi_0(1)} = e^{rT}\Pi_0(1_A)$. $\mathbb{Q}$ no es más que la medida de probabilidad sobre el espacio de escenarios $(\Omega, \mathcal{F})$.

Si Π cumple con una propiedad de continuidad adicional (que el teorema de convergencia dominada se cumpla en $\mathcal{H}$), entonces se puede concluir que para cualquier payoff aleatorio $H \in \mathcal{H}$,

$$\Pi_t(H) = e^{-r(T-t)} E^{\mathbb{Q}}[H | \mathcal{F}_t]. \tag{2.11}$$

Esta relación algunas veces es llamada *fórmula de valuación riesgo neutral*: el valor de un payoff aleatorio está dado por su esperanza descontada bajo $\mathbb{Q}$.

Ahora supongamos que, además de los escenarios del mercado $(\Omega, \mathcal{F})$ y el flujo de información $\mathcal{F}_t$, sabemos algo acerca de la probabilidad de ocurrencia de estos escenarios, representada por la medida de probabilidad $\mathbb{P}$. Aquí, $\mathbb{P}$ representa la probabilidad .ºbjetiva"de los escenarios futuros o la perspectiva subjetiva de un inversionista. Además, cabe señalar que un requerimiento fundamental para una regla de valuación es que no genere oportunidades de arbitraje. Una oportunidad de arbitraje es una estrategia ϕ, autofinanciable, que puede generar una ganancia positiva terminal, sin alguna probabilidad de pérdida intermedia:

$$\mathbb{P}(\forall t \in [0, T], V_t(\phi) \geq 0) = 1, \qquad \mathbb{P}(V_T(\phi) > V_0(\phi)) \neq 0.$$

La propiedad de autofinanciamientos entonces juega aquí un papel muy importante: es trivial exhibir estrategias que no sean autofinanciables y verifiquen la propiedad de arriba por medio de una inyección de efectivo al portafolio justo antes de la fecha de maduración. Una consecuencia de la ausencia de arbitraje es la *ley de un precio*: dos estrategias autofinanciables con el mismo payoff terminal deben tener el mismo valor todo el tiempo, de modo contrario, la diferencia podría generar oportunidades de arbitraje.

Otro concepto que nos será de mucha utilidad es el de equivalencia entre medidas de probabilidad. Consideremos ahora que en un mercado los precios están dados por una regla de valuación como (2.6), representada por una medida de probabilidad $\mathbb{Q}$. La compatibilidad de esta regla de valuación $\mathbb{Q}$ con otro modelo estocástico dado, $\mathbb{P}$, significa que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{P}$ son medidas de probabilidad equivalentes: definen al mismo conjunto de eventos (im)posibles:

$$\mathbb{P} \sim \mathbb{Q} : \ \forall A \in \mathcal{F} \ \ \mathbb{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0.$$

Si ahora consideramos un activo S^i comerciado al precio S_t^i, éste se puede conservar hasta el tiempo T, generando un payoff terminal de S_T^i; o vendido por S_t y que la suma resultante sea invertida a la tasa de interés r y así, generar una riqueza terminal de $e^{r(T-t)}S_t^i$. Estas dos estrategias son autofinanciables y tienen el mismo payoff terminal, así que deberían tener el mismo valor al tiempo t:

$$E^{\mathbb{Q}}\left[S_T^i|\mathcal{F}_t\right] = E^{\mathbb{Q}}\left[e^{r(T-t)}S_t^i|\mathcal{F}_t\right] = e^{r(T-t)}S_t^i.$$

Dividiendo por $S_T^0 = e^{rT}$ obtenemos:

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_T^i}{S_T^0}|\mathcal{F}_t\right] = \frac{S_t^i}{S_t^0} \ i.e. \ E^{\mathbb{Q}}\left[\hat{S}_T^i|\mathcal{F}_t\right] = \hat{S}_t^i.$$

Entonces, la ausencia de arbitraje implica que los valores descontados, $\hat{S}_t^i$, de todos los activos son martingalas con respecto a la medida de probabilidad $\mathbb{Q}$. Una medida de probabilidad que satisfaga tanto la equivalencia de medidas como esta última propiedad, es llamada una *medida martingala equivalente.*

La equivalencia entre reglas de valuación libres de arbitraje y medidas de martingala equivalentes se resume en el siguiente resultado:

Proposición 8 *En un mercado descrito por una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ sobre los distintos escenarios, cualquier regla de valuación lineal libre de arbitraje, Π, se puede representar como*

$$\Pi_t(H) = e^{-r(T-t)}E^{\mathbb{Q}}\left[H|\mathcal{F}_t\right],$$

donde $\mathbb{Q}$ es una medida de martingala equivalente: una medida de probabilidad sobre los escenarios de mercado de tal modo que:

$$\mathbb{P} \sim \mathbb{Q} : \ \forall A \in \mathcal{F} \ \mathbb{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0 \ y \ \forall i = 1 \ldots d, \ E^{\mathbb{Q}}\left[\hat{S}_T^i|\mathcal{F}_t\right] = \hat{S}_t^i.$$

Este resultado muestra que si existe una medida de martingala equivalente, entonces el mercado es libre de arbitraje. El resultado contrario suele ser más difícil de demostrar y es llamado con frecuencia *el Teorema Fundamental de la Valuación de Activos.*

Proposición 9 *El modelo de mercado definido por $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ y precios de activos $(S_t)_{t\in[0,T]}$ es libre de arbitraje si y sólo si existe una medida $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ tal que los activos descontados $\left(\hat{S}_t\right)_{t\in[0,T]}$ son martingalas con respecto a $\mathbb{Q}$.*

Existe otro concepto que suele ser importante en el desarrollo de varios modelos, la *cobertura perfecta*. Se dice que una estrategia autofinanciable, $\left(\phi_t^0, \phi_t\right)$, tiene una cobertura perfecta (o estrategia replicante) para un reclamo contingente H si

$$H = V_0 + \int_0^T \phi_t dS_t + \int_0^T \phi_t^0 dS_t^0 \quad \mathbb{P} - c.s. \tag{2.12}$$

Se dice que un mercado es *completo* si cualquier reclamo contingente admite un portafolio replicante: para cualquier $H \in \mathcal{H}$ existe una estrategia autofinanciable $\left(\phi_t^0, \phi_t\right)$ tal que (2.7) se cumple con probabilidad 1 bajo $\mathbb{P}$. Además, también se cumple con probabilidad 1 bajo cualquier medida de martingala equivalente $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$. Entonces los valores descontados verifican que:

$$\hat{H} = V_0 + \int_0^T \phi_t d\hat{S}_t \quad \mathbb{Q} - c.s. \tag{2.13}$$

Se puede concluir que en un mercado completo existe sólo una forma de definir el valor de un reclamo contingente: el valor de cualquier reclamo contingente está dado por el capital inicial necesario para establecer una perfecta cobertura para H. En particular, todas las medidas de martingala equivalente dan las mismas reglas de valuación. Entonces, la completez del mercado parece implicar la unicidad de las reglas de valuación y la equivalencia de medidas de martingala.

De hecho, el segundo teorema fundamental de la valuación de activos establece la equivalencia entre la noción financiera de completez de mercado y la unicidad de una medida de martingala equivalente. Pero a diferencia de la ausencia de arbitraje, que es una propiedad deseable y presente en muchos modelos estocásticos de valuación, la completez de mercado está presente en muy pocos de esos modelos. El modelo de Black-Scholes, y en general los de difusión unidimensional, son modelos completos. Los modelos Lévy exponenciales, en particular los modelos que contemplan difusiones con saltos, caen en la categoría de modelos incompletos. En términos técnicos, esto significa que es posible encontrar más de una medida de martingala equivalente.

2.7.1. Algunos casos de equivalencia de medidas para procesos de Lévy

Ahora mencionaremos brevemente algunos cambios de medida cuando la causa de la aleatoriedad de un modelo está dada por un proceso de Lévy.

Proposición 10 *Sean $(N, \mathbb{P}_{\lambda_1})$ y $(N, \mathbb{P}_{\lambda_2})$ procesos de Poisson sobre $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ con intensidades λ_1 y λ_2 y tamaños de saltos a_1 y a_2.*

1. *Si $a_1 = a_2$, entonces $\mathbb{P}_{\lambda_1}$ es equivalente a $\mathbb{P}_{\lambda_2}$ con densidad de Radon-Nicodym*
$$\frac{d\mathbb{P}_{\lambda_1}}{d\mathbb{P}_{\lambda_2}} = \exp\left[\left(\lambda_2 - \lambda_1\right) T - N_T \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right].$$

2. Si $a_1 \neq a_2$ entonces las medidas $\mathbb{P}_{\lambda_1}$ y $\mathbb{P}_{\lambda_2}$ no son equivalentes.

Este resultado quiere decir que no se generan nuevas trayectorias al cambiar las intensidades de los saltos, al reponderar las probabilidades de las trayectorias. Mientras que al cambiar el tamaño de los saltos sí se generan nuevas trayectorias.

Proposición 11 *Sean $(X,\mathbb{P})$ y $(X,\mathbb{Q})$ procesos de Poisson compuestos en $(\Omega,\mathcal{F}_T)$ con medidas de Lévy $\nu^{\mathbb{P}}$ y $\nu^{\mathbb{Q}}$. $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son equivalentes si y sólo si $\nu^{\mathbb{P}}$ y $\nu^{\mathbb{Q}}$ son equivalentes. En este caso, la derivada de Radon-Nicodym es*

$$D_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = exp\left(T\left(\lambda^{\mathbb{P}} - \lambda^{\mathbb{Q}}\right) + \sum_{s \leq T} \phi\left(\Delta X_s\right)\right),$$

donde $\lambda^{\mathbb{P}} \equiv \nu^{\mathbb{P}}(\mathbb{R})$ y $\lambda^{\mathbb{Q}} \equiv \nu^{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ son las intensidades de los saltos de los dos procesos y $\phi \equiv \ln\left(\frac{d\nu^{\mathbb{Q}}}{d\nu^{\mathbb{P}}}\right)$.

Proposición 12 *Sean $(X,\mathbb{P})$ y $(X,\mathbb{Q})$ dos movimientos Brownianos sobre $(\Omega,\mathcal{F}_T)$ con volatilidades $\sigma^{\mathbb{P}} > 0$ y $\sigma^{\mathbb{Q}} > 0$ y tendencias $\mu^{\mathbb{P}}$ y $\mu^{\mathbb{Q}}$. $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son equivalentes si $\sigma^{\mathbb{P}} = \sigma^{\mathbb{Q}}$ y singulares de otro modo. Cuando son equivalentes, la derivada de Radon-Nicodym es:*

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left\{\frac{\mu^{\mathbb{Q}} - \mu^{\mathbb{P}}}{\sigma^2} X_T - \frac{1}{2}\frac{\left(\mu^{\mathbb{Q}} - \mu^{\mathbb{P}}\right)^2}{\sigma^2} T\right\}.$$

Notemos que la derivada de radon-Nicodym se puede reescribir como una martingala exponencial:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left\{\frac{\mu^{\mathbb{Q}} - \mu^{\mathbb{P}}}{\sigma} W_T - \frac{1}{2}\frac{\left(\mu^{\mathbb{Q}} - \mu^{\mathbb{P}}\right)^2}{\sigma^2} T\right\},$$

donde $W_T = \frac{X_t - \mu^{\mathbb{P}} t}{\sigma}$ es un movimiento Browniano estándar bajo $\mathbb{P}$. Este resultado, conocido como el teorema de Cameron-Martin, muestra que la tendencia y la volatilidad juegan papeles muy diferentes en cuanto a especificar un modelo de difusión. Mientras que al modificar la tendencia se reponderan los escenarios (o trayectorias), al cambiar la volatilidad se generará un proceso completamente diferente, conduciendo a escenarios nuevos que inicialmente eran imposibles.

Ahora veremos un resultado general sobre equivalencias de medidas para procesos de Lévy.

Proposición 13 *Sean (X_t, P) y (X_t, P') dos procesos de Lévy en $\mathbb{R}$ con tripletas características $\left(\sigma^2, \nu, b\right)$ y $\left(\sigma'^2, \nu', b'\right)$. Entonces $P|_{\mathcal{F}_t}$ y $P'|_{\mathcal{F}_t}$ son equivalentes para todo t si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:*

1. $\sigma = \sigma'$.

2. *Las medidas de Lévy son equivalentes con*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\phi(x)/2} - 1\right)^2 \nu\,(dx) < \infty,$$

donde $\phi\,(x) = \ln\left(\frac{d\nu'}{d\nu}\right)$.

3. *Si* $\sigma = 0$, *entonces también debemos tener que:*

$$b' - b = \int_{-1}^{1} x\,(\nu' - \nu)\,(dx)\,.$$

Cuando $\mathbb{P}$ *y* $\mathbb{Q}$ *son equivalentes, la derivada de Radon-Nicodym es:*

$$\frac{dP'|_{\mathcal{F}_t}}{dP|_{\mathcal{F}_t}} = e^{U_t}$$

con $U_t = \eta X_t^c - \frac{\eta^2\sigma^2 t}{2} - \eta bt$

$$+ \lim_{\epsilon \downarrow 0}\left(\sum_{s\leq t, |\Delta X_s|>\epsilon} \phi\,(\Delta X_s) - t\int_{|x|>\epsilon}\left(e^{\phi(x)} - 1\right)\nu\,(dx)\right).$$

Donde (X_t^c) *es la parte continua de* (X_t) *y* η *tal que*

$$b' - b - \int_{-1}^{1} x\,(\nu' - \nu)\,(dx) = \sigma^2\eta$$

si $\sigma > 0$ *y cero si* $\sigma = 0$. U_t *es un proceso de Lévy con tripleta característica* (a_U, ν_U, b_U) *dada por:*

$$a_U = \sigma^2\eta^2,$$
$$\nu_U = \nu\phi^{-1},$$
$$b_U = -\frac{1}{2}a\eta^2 - \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^y - 1 - y1_{|y|\leq 1}\right)\left(\nu\phi^{-1}\right)(dy)\,.$$

2.7.2. Teorema de Girsanov

Ahora veremos un caso especial del *teorema de Girsanov* para semimartingalas, donde un proceso de Lévy continúa siendo un proceso con incrementos independientes bajo la nueva medida.

Sean $\mathbb{P}$ y $\tilde{\mathbb{P}}$ medidas de probabilidad definidas en el espacio filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$, con $\mathbb{P} \sim \tilde{\mathbb{P}}$. Sabemos que cuando esto ocurre, existe una única $\mathbb{P}$-martingala positiva $\eta = (\eta_t)_{t\geq 0}$ tal que $\mathbb{E}\left[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t\right] = \eta_t$, $\forall t \geq 0$, la cual recordemos que es la derivada de Radon-Nikodym. De modo contrario, dada una medida $\mathbb{P}$ y una $\mathbb{P}$-martingala positiva $\eta = (\eta_t)_{t\geq 0}$, podemos definir una medida $\tilde{\mathbb{P}}$ en $(\Omega, \mathcal{F})$, donde $\mathbb{P} \sim \tilde{\mathbb{P}}$, por medio de la derivada de Radon-Nicodym.

Teorema 4 *Sea L un proceso de Lévy con tripleta (b, c, ν) bajo $\mathbb{P}$, con primer momento finito. Éste tiene la descomposición canónica (2.7).*

1. *Supongamos que $\mathbb{P} \sim \tilde{\mathbb{P}}$. Entonces existe un proceso determinista β y un proceso determinista, medible y no negativo Y, que satisface*

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |x\left(Y\left(s,x\right)-1\right)| \nu\left(dx\right) ds < \infty,$$

y

$$\int_0^t \left(c \cdot \beta_s^2\right) ds < \infty$$

tal que el proceso de densidad η tiene la forma

$$\begin{aligned}\eta_t &= \mathbb{E}[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t] \\ &= \exp[\int_0^t \beta_s \sqrt{c} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2 c\ ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (Y\left(s,x\right)-1)\left(\mu^L - \nu^L\right)(ds, dx) \\ &- \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (Y(s,x) - 1 - \ln(Y(s,x)))\mu^L(ds, dx)]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

2. *Al revés, si η es una martingala positiva de la forma (2.11), entonces define a una medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ en $(\Omega, \mathcal{F})$, tal que $\mathbb{P} \sim \tilde{\mathbb{P}}$.*

3. *En ambos casos, tenemos que $\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \beta_s ds$ es un $\tilde{\mathbb{P}}$-movimiento Browniano, $\tilde{\nu}^L\left(ds, dx\right) = Y\left(s,x\right)\nu^L\left(ds, dx\right)$ es el $\tilde{\mathbb{P}}$-compensador de μ^L y L tiene la siguiente descomposición canónica bajo $\tilde{\mathbb{P}}$*

$$L_t = \tilde{b}t + \sqrt{c}\tilde{W}_t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x\left(\mu^L - \tilde{\nu}^L\right)(ds, dx),$$

donde

$$\tilde{b}t = bt + \int_0^t c\beta_s ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x\left(Y\left(s,x\right)-1\right)\nu^L\left(ds, dx\right).$$

Es conveniente hacer notar que el proceso L no es necesariamente un proceso de Lévy bajo la nueva medida $\tilde{\mathbb{P}}$; depende de la dupla (β, Y). Tenemos los siguientes casos:

1. si (β, Y) es determinista e independiente del tiempo, entonces L continúa siendo un proceso de Lévy bajo $\tilde{\mathbb{P}}$; su tripleta es $\left(\tilde{b}, c, Y \cdot \nu\right)$,

2. si (β, Y) es determinista pero dependiente del tiempo, entonces L se convierte en un proceso con incrementos independientes, pero no estacionarios, bajo $\tilde{\mathbb{P}}$, es llamado con frecuencia un proceso *aditivo,*

3. si (β, Y) no es ni determinista ni independiente del tiempo, entonces L es una semimartingala bajo $\tilde{\mathbb{P}}$.

También notemos que el coeficiente de difusión, c, y la medida aleatoria de saltos de L, μ^L, no cambian bajo el cambio de medida de $\mathbb{P}$ a $\tilde{\mathbb{P}}$. Esto ocurre porque c y μ^L son propiedades de la trayectoria del proceso y no se modifican bajo un cambio de medida equivalente. De manera intuitiva, las trayectorias no cambian, lo que cambia es la probabilidad de que ocurran ciertas trayectorias.

2.8. Medida del Mundo Real y Medida de Riesgo Neutral

Bajo la medida del mundo real, nos es posible modelar el proceso de precios de un activo como la exponencial de un proceso de Lévy, es decir, como en la ecuación (2.8). Hay que recordar que con esto, los log-rendimientos del modelo tienen incrementos independientes y estacionarios, que se distribuyen de acuerdo con una distribución infinitamente divisible F, es decir, $X_1 \stackrel{d}{=} F$. Naturalmente, las propiedades de las trayectorias del proceso X se transfieren a S; si, por ejemplo, X es un proceso de sólo saltos, entonces S también es un proceso de sólo saltos.

Hemos mencionado que el hecho de que el proceso de precios esté dado por un proceso de Lévy, hace al mercado incompleto, en general. Entonces, existe un conjunto grande de medidas de martingala equivalentes, es decir, candidatas a medidas de riesgo neutral para valuación.

Bajo la medida de riesgo neutral, $\mathbb{P}$ modelaremos el proceso de precios como un proceso de Lévy exponencial. Ahora se pedirá también que el proceso X tenga primer momento exponencial finito, es decir, $\mathbb{E}\left[e^{X_t} < \infty\right]$.

Hay varias formas de escoger a la medida de martingala tal que sea equivalente a la medida del mundo real, por ejemplo la transformada de Esscher y la medida de martingala de mínima entropía.

La práctica en el mercado es considerar la elección de la medida de martingala como el resultado de una calibración con los datos del mercado de opciones vainilla.

Como hemos supuesto que $\mathbb{P}$ es una medida de riesgo neutral, el precio del activo tiene tasa media de rendimiento $\mu \triangleq r$ y el proceso re-invertido, $(e^{rt}S_t)_{t\geq 0}$, es una martingala bajo $\mathbb{P}$. Recordemos que $r \geq 0$ es la tasa de interés libre de riesgo local.

El proceso X tiene la descomposición canónica y entonces, el término de tendencia b es igual a la esperanza de X_1 y se puede escribir como

$$b = r - \frac{\sigma^2}{2} - \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1 - x)\, \nu\,(dx)\,, \tag{2.15}$$

donde $\sigma \geq 0$ es el coeficiente de difusión y W es un movimiento Browniano estándar najo $\mathbb{P}$. μ^L es la medida aleatoria de saltos del proceso X y $\nu^L(dt, dx) = \nu(dx)\, dt$ es el compensador de la medida de saltos μ^L, donde ν es la medida de Lévy de X_1.

Capítulo 3

Riesgo de Crédito

En este capítulo se explicará brevemente qué es el riesgo, así como los principales tipos de éste, incluyendo por supuesto el riesgo de crédito. En este último nos enfocaremos después.

3.1. Riesgo y Clasificaciones

El Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española define el *riesgo* como una contingencia o proximidad de un daño. Si tomamos a un riesgo como una contingencia, le estaríamos dando el sentido de posibilidad de ocurrencia o no ocurrencia de algo. Para complementar con la segunda parte de la definición, podemos decir que el riesgo es la posibilidad de la ocurrencia de un daño. El daño, al tener una naturaleza desfavorable, puede ser visto como una pérdida: ya sea de dinero, de algún bien, de salud o la vida misma.

Al riesgo que que se encuentra en el contexto de los mercados financieros se le conoce como *riesgo financiero.* Y éste admite a la vez, tres tipos de riesgo diversos:

1. *Riesgo de Mercado.* Es el inherente a las fluctuaciones que ocurren en los mercados financieros. A la vez se distinguen tres modalidades:

    a) *Riesgo de tipo de cambio.* Es aquel asociado con la volatilidad del mercado de divisas.

    b) *Riesgo de tipo de interés.* Se tiene como consecuencia de la volatilidad de los tipos de interés.

2. *Riesgo de Crédtio.* Es la posibilidad de incumplimiento de una de las dos partes de un contrato financiero, por ejemplo en un préstamo o en la emisión de un bono.

3. *Riesgo de Liquidez.* Se define como la posibilidad de que una entidad no pueda obtener la liquidez necesaria para hacer frente a sus obligaciones a pesar de contar con los activos para hacer frente a ellas. Por liquidez podríamos entender como disponibilidad de dinero.

Ahora nos concentraremos en el análisis del segundo tipo de riesgo, así como de los modelos de descripción de este proceso.

3.2. Riesgo de Crédito

Entendemos entonces, por riesgo de crédito, el riesgo de que cambie el valor de un portafolio debido a cambios inesperados en la calidad del crédito de emisores o socios. Esto es válido tanto para pérdidas debido a incumplimientos, como para aquellas causadas por cambios en la calidad de crédito, como la caída en la calificación de una contraparte en un sistema de calificación interno o externo. El riesgo de crédito está siempre presente en el portafolio de una institución financiera típica. Los portafolios de préstamos y bonos corporativos están afectados por el riesgo de crédito de una manera obvia. Desde hace algunos años, ha surgido un mercado especializado en derivados de crédito, las instituciones financieras son jugadores muy activos en éste.

Con esto podemos darnos una idea de lo relevante que es el riesgo de crédito, ya que está relacionado con las actividades principales de muchos bancos. También está presente en el núcleo de muchos desarrollos recientes en el marco regulatorio, como el nuevo *Acuerdo Capital de Basilea II*.

Por todo esto es que se han desarrollado diversos modelos para analizar el comportamiento del riesgo de crédito y técnicas para medir la calidad creditica de los participantes en una transacción. A continuación se hablará brevemente de las dos grandes categorías en las que se dividen estos modelos y luego nos adentraremos en el Modelo de Merton.

3.2.1. Modelos de Riesgo de Crédito

El desarrollo del mercado de los derivados de riesgo de crédito y el proceso de Basilea II han generado mucho interés, por parte de la industria, la academia y entre los reguladores, en los modelos cuantitativos de riesgo de crédito. Entonces no es para nada sorprendente que la modelación del riesgo de crédito sea, hoy por hoy, un campo muy activo de las finanzas cuantitativas y administración de riesgos.

Hay dos áreas principales e aplicación para los modelos cuantitativos de riesgo de crédito: la adiministración de riesgo de crédito y el análisis de activos riesgosos de crédito. Los modelos de administración de riesgo de crédito se usan para determinar la distribución de pérdida de un préstamo o bono en un periodo de tiempo fijo y para calcular la distribución de pérdida con base en medidas de riesgo o para asignar capital de riesgo. Entonces estos modelos son típicamente estáticos, lo que significa que la atención se centra en la distribución de pérdida para el periodo de tiempo fijo, en lugar de que un proceso estocástico describa la evolución del riesgo en el tiempo.

Para el análisis de activos riesgosos de crédito, se necesitan modelos dinámicos (generalmente en tiempo continuo), porque el payoff de muchos productos depende del tiempo exacto del incumplimiento. De hecho, al construir un modelo de valuación, con frecuencia se trabaja directamente bajo una martingala o una medida de probabilidad de riesgo neutral.

Según su formulación, los modelos de riesgo de crédito se pueden dividir en *modelos estructurales o de valor de la firma* por un lado, y *modelos de forma reducida* por otro lado:

- *Modelos estructurales o de valor de la firma.* Representan la evolución de las variables estructurales de la firma: activos y deuda. La firma no cumple con sus obligaciones cuando su valor de mercado cae por debajo del nivel de su deuda o de cierto nivel dado exógenamente. Resultan ser un vínculo entre la calidad de crédito y las condiciones económicas y financieras.

- *Modelos de forma reducida.* No consideran la relación entre el incumplimiento y el valor de la firma en forma explícita. Los eventos de incumplimiento no son esperados ya que son Poisson, impredecibles. Esto genera pérdidas inesperadas en el valor de mercado.

3.3. Modelo de Merton

Es el prototipo clásico y más popular de todos los modelos de valor de la firma. Fue propuesto por Robert Merton en 1974 y desde entonces se han generado muchas variantes y extensiones, pero el modelo original aún es una fuente de comparación e influencia y sigue siendo popular entre los que analizan el riesgo de crédito.

Considérese una firma cuyo valor de los activos sigue algún proceso estocástico (V_t). La firma se financía a sí misma por medio de emisión de acciones y deuda. La deuda tiene una estructura muy simple: una obligación o bono cupón cero con valor de carátula B y maduración T. Al tiempo t, el valor de las acciones se denota por S_t, y el de la deuda por B_t. Entonces, si suponemos que no hay costos de transacción ni impuestos, el valor de los activos de la firma es simplemente la suma de ambos componentes: $V_t = S_t + B_t,\ 0 \leq t \leq T$. Otro de los supuestos es que no se pagan dividendos ni se emite nueva deuda. El incumplimiento ocurre cuando la firma no realiza un pago a los acreedores de la deuda, en este modelo esto ocurre sólo al tiempo de maduración T del bono. En la maduración hay que distinguir dos casos:

1. $V_T > B$. El valor de los activos de la firma excede al de las obligaciones. En este caso, los acreedores de la deuda reciben B, los accionistas reciben el valor residual $S_T = V_T - B$ y no hay incumplimiento.

2. $V_T \leq B$. El valor de los activos de la firma es menor o igual que sus obligaciones y no es posile cumplir con sus compromisos financieros. En este caso, los accionistas no tienen interés en aportar nuevo capital accionario, el cual iría de inmediato a manos de los poseedores de bonos, quienes liquidan a la firma y distribuyen las ganancias entre ellos. Los accionistas pagan y no reciben algo, así que tenemos que $B_T = V_T,\ S_T = 0$.

En resumen, tendremos las siguientes relaciones:

$$S_T = \text{máx}\left(V_T - B, 0\right) = \left(V_T - B\right)^+, \tag{3.1}$$

$$B_T = \text{mín}\left(V_T, B\right) = B - \left(B - V_T\right)^+. \tag{3.2}$$

La primer ecuación implica que el valor de los activos de la firma al tiempo T es igual al payoff de una opción de compra europea sobre V_T, mientras que la segunda implica que el valor de la deuda de la firma a la fecha de maduración es igual al valor nominal de las obligaciones menos el payoff de una opción de venta europea sobre V_T con precio de ejercicio B.

3.3.1. Valuación en el Modelo de Merton

En este contexto podemeos valuar capital cuyo payoff depende del valor V_T de los activos de la firma al tiempo T. Los ejemplos relevantes son la deuda de la firma, como los bonos cupón cero emitidos por ella, y las acciones de la firma. Es necesario hacer las siguientes suposiciones:

- Tenemos mercados sin fricción con transacciones continuas.
- La tasa de interés libre de riesgo es determinista e igual a $r \geq 0$.
- El proceso de valuación de activos de la firma (V_t) es independiente de la forma en la que la firma está financiada[1], y en particular es independiente del nivel de deuda B. Además, (V_t) es un capital negociable con dinámica dada por un modelo de difusión (un movimiento Browniano geométrico) de la forma:
$$dV_t = \mu_V V_t dt + \sigma_V V_t dW_t,$$
para $\mu_V \in \mathbb{R}$, $\sigma_V > 0$ constantes y un movimiento Browniano estándar (W_t).

Consideremos una reclamación con maduración T en el valor de la firma y payoff $h\left(V_T\right)$ como las acciones y deuda en (3.1) y (3.2) y además se sumplen las suposiciones. La teoría estándar de valuación de derivados ofrece dos formas de calcular el precio justo $f\left(t, V_t\right)$ de esta reclamación al tiempo $t \leq T$. Bajo la perspectiva de la ecuación diferencial parcial, la función $f\left(t, v\right)$ se calcula resolviendo:

$$f_t\left(t, v\right) + \frac{1}{2}\sigma_V^2 v^2 f_{vv}\left(t, v\right) + rvf_v\left(t, v\right) = rf\left(t, v\right) \quad \textit{para } t \in [0, T), \tag{3.3}$$

con condición de frontera $f\left(T, v\right) = h\left(v\right)$. Esta es la famosa ecuación de Black-Scholes.

Alternativamente, tenemos el enfoque de la valuación riesgo neutral: se puede calcular el valor $f\left(t, V_t\right)$ como la esperanza del payoff descontado bajo la medida de riesgo neutral $\mathbb{Q}$. Bajo $\mathbb{Q}$, el proceso V_t satisface la ecuación diferencial estocástica $dV_t = rV_t dt + \sigma_V V_t d\tilde{W}_t$ para un $\mathbb{Q}$-movimiento Browniano $\tilde{W}$.

[1]Este resultado es conocido como el teorema de Modigliani-Miller

En particular, la tendencia μ_V en el movimiento Browniano geométrico de los supuestos ha sido reemplazada por la tasa de interés libre de riesgo r. La regla de valuación riesgo neutral establece que:

$$f(t, V_t) = E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)} h(V_T) \,|\mathcal{F}_t\right] \tag{3.4}$$

Ahora veremos la aplicación de esto para las acciones y la deuda. De acuerdo con (3.1), las acciones de la firma corresponden a una opción europea de compra sobre V_t, con precio de ejercicio B y maduración T. La solución de la ecuación diferencial parcial (3.3) o el valor riesgo neutral de las acciones obtenido a partir de (3.4), está dado simplemente por el precio Black-Scholes, C^{BS}, de una opción de compra europea. Esto da:

$$S_t = C^{BS}(t, V_t; r, \sigma_V, B, T) := V_t \Phi(d_{t,1},) - Be^{-r(T-t)}\Phi(d_{t,2}) \tag{3.5}$$

$$d_{t,1} = \frac{\ln V_t - \ln B + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)(T-t)}{\sigma_V \sqrt{T-t}} \; y \; d_{t,2} = d_{t,1} - \sigma_V \sqrt{T-t} \tag{3.6}$$

Notemos que bajo la medida de probabilidad de riesgo neutral $\mathbb{Q}$, la distribución del valor logarítmico de los activos a la fecha de maduración está dada por $\ln V_T \sim N\left(\ln V_0 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)T, \sigma_V^2 T\right)$. Entonces tenemos que al tiempo $t = 0$

$$\mathbb{Q}(V_T \le B) = \mathbb{Q}\left(\frac{\ln V_T - \left(\ln V_0 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)T\right)}{\sigma_V\sqrt{T}} \le -d_{0,2}\right) = 1 - \Phi(d_{0,2}),$$

en donde hemos usado el hecho de que $\Phi(d) = 1 - \Phi(-d)$. Entonces $1 - \Phi(d_{0,2})$ da la probabilidad de riesgo neutral del incumplimiento. Similarmente, $1 - \Phi(d_{t,2})$ da la probabilidad de riesgo neutral del incumplimiento con información al tiempo t.

Ahora nos enfocaremos en la valuación de la deuda riesgosa emitida por la firma. Notemos que debido a que $r \ge 0$, el precio al tiempo $t \le T$ de un bono cupón cero libre de incumplimiento con fecha de maduración T es igual a $p_0(t, T) = \exp(-r(T-t))$. De acuerdo con (3.2) tenemos que:

$$B_t = Bp_0(t, T) - P^{BS}(t, V_t; r, \sigma_V, B, T) \tag{3.7}$$

donde $P^{BS}(t, V_t; r, \sigma_V, B, T)$ denota el precio de de Black-Scholes de una opción de venta europea con precio de ejercicio B, maduración en T sobre V_t para una tasa de interés dada r y volatilidad σ_V. Es bien conocido que:

$$P^{BS}(t, V_t; r, \sigma_V, B, T) = Be^{-r(T-t)}\Phi(-d_{t,2}) - V_t\Phi(-d_{t,1}), \tag{3.8}$$

con $d_{t,1}$ y $d_{t,2}$ como en (3.6). Combinando (3.6) y (3.7), tenemos:

$$B_t = p_0(t, T) B\Phi(d_{t,2}) + V_t\Phi(-d_{t,1}). \tag{3.9}$$

3.4. Modelo de Merton para un Proceso de Lévy de Difusión con Saltos

Para analizar el caso en el que el valor de la firma tiene un comportamiento que no es totalmente continuo, tomaremos como referencia el modelo que el mismo Merton desarrolló para valuar opciones cuyo subyacente también sigue un proceso discontinuo.

Merton fue el primero en usar un proceso de precios discontinuo para modelar los rendimientos del activo. La descomposición canónica de dicho proceso es:

$$L_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

donde Y_i ~Normal(μ_Y, σ_Y^2), $k = 1, ...,$ entonces la distribución del tamaño del salto tiene densidad

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma_Y}}.$$

Y la función característica de L_1 es:

$$\psi_{L_1}(u) = \exp\left[i\mu u - \frac{\sigma^2 u}{2} + \lambda\left(e^{iu_Y u - \frac{\sigma_Y^2 u^2}{2}} - 1\right)\right],$$

entonces la tripleta de Lévy es $(\mu, \sigma^2, \lambda \cdot f_Y)$. La densidad de L_1 no es conocida en forma cerrada.

Veremos que con estas herramientas, Merton desarrolló un modelo en el que, si bien no se llega a una fórmula cerrada para obtener el precio del instrumento, se obtiene una buena forma de aproximarlo numéricamente.

3.4.1. Valuación de Opciones cuando el Rendimiento del Subyacente es Discontinuo

En el modelo de riesgo de crédito de Merton se llega a la necesidad de valuar opciones cuyo subyacente es el valor de la firma. Entonces, al suponer que se tiene un comportamiento discontinuo en el valor de ésta, nos vemos reducidos a plantear un escenario de valuación de opciones cuyo subyacente es discontinuo, como el mismo Merton lo hizo en 1976.

Para asegurar "positividad", además de independencia y estacionariedad de los log-rendimientos, Merton modeló el precio como una exponencial de un proceso de Lévy bajo la medida de probabilidad $\mathbb{P}$:

$$S_t = e^{\mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i}$$

donde W_t es un proceso de Wiener estándar, N_t es un proceso de Poisson con intensidad λ e independiente de W y, además, cada $Y_i \sim N(m, \delta^2)$ y es independiente de W y N.

Este modelo pertenece a la dinámica de un mercado incompleto, pues hay más de una medida $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ tal que el precio descontado, $\hat{S}_t$, es una martingala.

La propuesta de Merton es cambiar la tendencia en el proceso de Wiener, dejando a los demás componentes sin cambios. Entonces, bajo la medida $\mathbb{Q}^M$:

$$S_t = e^{\mu^M t + \sigma W_t^M + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i}$$

donde W_t^M es un proceso de Wiener estándar, N_t y Y son como antes e independientes de W^M. μ^M es elegida de tal forma que $\hat{S}_t = S_t e^{-rt}$ es una martingala bajo $\mathbb{Q}^M$:

$$\mu^M = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda E\left[e^{Y_i} - 1\right] = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\left[e^{m+\frac{\delta^2}{2}} - 1\right].$$

$\mathbb{Q}^M$ es la medida de martingala equivalente obtenida al cambiar la tendencia del movimiento Browniano, pero dejando a la parte de saltos sin cambios. Merton justificó la elección de este modelo bajo la suposición de que el "riesgo de un salto" es diversificable, entonces no hay prima de riesgo concerniente a éste. En términos matemáticos, significa que las propiedades de riesgo neutral del componente de saltos de S_t son (en teoría) las mismas que las de sus propiedades estadísticas. En particular, la distribución de los tiempos de saltos y los tamaños de los saltos no cambian.

Entonces, una opción europea con payoff $H(S_T)$ se puede valuar según:

$$C_t^M = e^{-r(T-t)} E^{\mathbb{Q}^M}\left[H(S_T) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Como S_t es un proceso de Markov bajo $\mathbb{Q}^M$, el precio de la opción, C_t^M, se puede expresar como una función determinista de t y S_t:

$$\begin{aligned} C_t^M = C^M(t, S_t) &= e^{-r(T-t)} E^{\mathbb{Q}^M}\left[(S_T - K)^+ \mid S_t = S\right] \\ &= e^{-r(T-t)} E\left[H\left(S e^{\mu^M (T-t) + \sigma W_{T-t}^M + \sum_{i=1}^{N_{T-t}} Y_i}\right)\right] \end{aligned}$$

Condicionando sobre el número de saltos N_t, podemos expresar a $C(t, S_t)$ como una suma ponderada de precios de Black-Scholes: denotando el tiempo de maduración como $\tau = T - t$ y usando el hecho de que $\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim N\left(nm, n\delta^2\right)$, obtenemos

$$\begin{aligned} C^M(t, S) &= e^{-r\tau} \sum_{n \geq 0} \mathbb{Q}^M(N_t = n)\, E^{\mathbb{Q}^M}\left[H\left(S e^{\mu^M \tau + \sigma W_\tau^M + \sum_{i=1}^{n} Y_i}\right)\right] \\ &= e^{-r\tau} \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} E^{\mathbb{Q}^M}\left[H\left(S e^{nm + \frac{n\delta^2}{2} - \lambda e^{m+\frac{\delta^2}{2}} + \lambda_\tau} e^{r\tau - \frac{\sigma_n^2 \tau}{2} + \sigma_n W_\tau}\right)\right] \\ &= e^{-r\tau} \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} C_H^{BS}(\tau, S_n; \sigma_n) \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde:

$$\sigma_n^2 = \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{\tau},$$

$$S_n = Se^{nm + \frac{n\delta^2}{2} - \lambda\tau e^{m+\frac{\delta^2}{2}} + \lambda t}$$

y

$$C_H^{BS}(\tau, S; \sigma) = e^{-r\tau} E\left[H\left(Se^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma W_\tau}\right)\right]$$

es el valor de una opción europea con tiempo de maduración τ y payoff H en un modelo de Black-Scholes con volatilidad σ. Esta expansión en series converge exponencialmente y se puede usar para cálculos numéricos de precios en el modelo de Merton.

3.4.2. Valuación a partir de un portafolio

Ahora presentaremos el problema bajo la misma dinámica, pero en el contexto de la construcción de un portafolio.

Consideremos un portafolio conformado por α_1 acciones de precio S_t y una cantidad α_2 de opciones de precio $c(S_t, t)$. Así, el valor del portafolio al tiempo t está dado por

$$\Pi_t = \alpha_1 S_t + \alpha_2 c(S_t, t).$$

Utilizando el lema de Itô oara procesos de Lévy, el cambio en el valor del portafolio, debido sólo a fluctuaciones del mercado, satisface que:

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \alpha_1 dS_t + \alpha_2 dc(S_t, t) \\ &= \alpha_1 (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + \nu S_t dN_t) \\ &+ \alpha_2 \left[\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t\right] \\ &+ \alpha_2 \left[c(S_t(1+\nu), t) - c(S_t, t)\right] dN_t. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Reacomodando términos:

$$\begin{aligned} d\Pi_t = &\left(\alpha_1 + \alpha_2 \frac{\partial c}{\partial S_t}\right) \mu S_t dt + \left(\alpha_1 + \alpha_2 \frac{\partial c}{\partial S_t}\right) \sigma S_t dW_t \\ &+ \alpha_2 \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\right) dt \\ &+ \left[\alpha_2 (c(S_t(1+\nu), t) - c(S_t, t)) + \alpha_1 \nu S_t\right] dN_t. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Si no existe un salto en el instante dt, es decir, si $dN_t = 0$, entonces se puede seleccionar, por ejemplo, la cobertura Delta definida por $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_1 = -\partial c / \partial S_t \equiv -\Delta$ para eliminar el riesgo inducido por dW_t. Sin embargo, si existe un salto, en cuyo caso $dN_t = 1$, entonces el portafolio cambia de valor y la cobertura Delta deja de ser efectiva debido al riesgo asociado con dN_t.

Ahora veamos que bajo la cobertura Delta, es decir, seleccionar $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_1 = -\partial c / \partial S_t$ y sustituir en la ecuación (3.12), se cubre una operación de venta en corto del subyacente con una posición larga sobre una opción de compra. Además, es importante destacar que bajo esta elección particular de α_1 y α_2, el parámetro de preferencias μ desaparece. En este caso, el cambio del valor del portafolio está dado por:

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \left[c\left(S_t\left(1+\nu\right), t\right) - c\left(S_t, t\right) - \nu S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} \right] dN_t, \tag{3.13}$$

el superíndice Δ resalta la aplicación de la cobertura Delta. Bajo esta cobertura, el cambio en el valor del portafolio no se comporta completamente en forma determinista en el instante dt, ya que existe la posibilidad de que se presenten saltos con una media esperada por unidad de tiempo igual a λ. Se observa claramente que la cobertura Delta no es eficiente para administrar el riesgo por un salto en el precio del subyacente de S_t a $S_t + \nu S_t = (1+\nu) S_t$. Si se toma la esperanza de (3.13) y se iguala al rendimiento libre de riesgo del valor inicial del portafolio, bajo $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_1 = -\partial c/\partial S_t$, con una tasa de interés constante, r, para todos los plazos, con el fin de evitar oportunidades de arbitraje, es decir,

$$E\left[d\Pi_t^{(r)}\right] = r\left(c\left(S_t, t\right) - \left(\frac{\partial c}{\partial S_t}\right) S_t \right) dt.$$

De hecho, la esperanza es condicional, $E\left[d\Pi_t^{(r)} | S_t\right]$; sin embargo, por simplicidad, se mantiene la notación omitiendo el condicionante. Si además utilizamos que $E\left[d\Pi_t^{(\Delta)}\right] = E_\nu\left[E\left[d\Pi_t^{(\Delta)}\right]\right]$, entonces

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} - rc + \lambda E_\nu\left[c\left(S_t\left(1+\nu\right), t\right)\right] - \lambda c\left(S_t, t\right) - \lambda c\left(S_t, t\right) - \lambda \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t E_\nu\left[\nu\right] = 0, \tag{3.14}$$

con las condiciones de frontera $c(0,t) = 0$ y $c(S_t, T) = \text{máx}(S_t - K, 0)$. Podemos observar que el término que aparece en el valor esperado de (3.14) satisface

$$E_\nu\left[c\left(S_t\left(1+\nu\right), t\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} c\left(S_t\left(1+\nu\right), t\right) f\left(\nu\right) d\nu,$$

donde $f(\cdot)$ es la función de densidad de ν. Debido a la presencia de este valor esperado en (3.14), la ecuación es del tipo diferencial-integral. Esta ecuación presenta complicaciones técnicas para su solución y, en general, requiere de métodos numéricos para obtener soluciones aproximadas de $c(S_t, t)$.

Vale la pena destacar que si ν es determinista y suficientemente pequeña, entonces la cobertura Delta proporciona, en términos generales, una protección adecuada aún cuando se presentan saltos, ya que

$$\frac{c\left(S_t\left(1+\nu\right), t\right) - c\left(S_t, t\right)}{\nu S_t} \approx \frac{\partial c}{\partial S_t}.$$

En este caso, el coeficiente de dN_t en (3.13) es muy pequeño. Por último, observemos que cuando $\nu = 0$ o $\lambda = 0$, la ecuación (3.14) se reduce simplemente a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes.

En [13] se puede encontrar una demostración de que la ecuación (3.10) es una solución de la ecuación (3.14).

Capítulo 4

Aplicación del Modelo en una IMF

Ahora se procederá a hacer una adaptación del modelo clásico de Merton para medir el riesgo de crédito y aplicarlo para analizar a una institución microfinanciera. Se sustituirá la hipótesis de que el valor de la institución sigue un proceso puramente de difusión (movimiento Browniano), por una donde se incorpora la presencia de saltos (un proceso de Lévy de difusión con saltos).

4.1. Planteamiento

Como vimos anteriormente, el moelo de Merton nos brinda la pauta para obtener un valor cuyo precio de mercado puede ser visto como una función del valor de la empresa, en este caso la institución microfinanciera. Pero ahora describamos la dinámica del valor de la institución por medio de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dV}{V} = (r - \lambda k)dt + \sigma dZ + dq, \tag{4.1}$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo, σ^2 es la varianza del rendimiento, condicionada a la no ocurrencia del proceso Poisson, λ es el número promedio de saltos por año, dZ es el movimiento Browniano estándar, $q(t)$ es un proceso Poisson independiente del movimiento Browniano y $k = E[Y - 1]$, donde $Y - 1$ es la variable aleatoria del cambio porcentual en el valor si ocurre el proceso Poisson.

Esta dinámica corresponde al comportamiento de un proceso de difusión con saltos, gracias a esta forma de modelar, estamos tomando en cuenta la variación del precio debido tanto a causas ”normales” (como cambios en las tasas de interés o de capitalización, o en la misma oferta y demanda), como a aquellas originadas por la aparición de información relevante del ramo y que tiene un efecto más que marginal en el valor de la institución.

Entonces llegamos al mismo escenario explorado en el capítulo 3, donde a partir de esta dinámica del comportamiento discontinuo del valor de la institución, se obtiene una expresión para aproximar el valor de la opción cuyo subyacente es ésta; y que a la vez es también una aproximación a la solución de la ecuación (3.14), que es una versión más general de la ecuación de Black Scholes.

Regresando a la idea principal del modelo de Merton, recordamos que el valor de la institución microfinanciera se descompone como el valor de las emisiones de deuda más el valor del capital:

$$V = F(V,\tau) + f(V,\tau), \tag{4.2}$$

donde el valor del capital, $f(V,\tau)$, se encuentra a partir de la ecuación (3.10), que corresponde al precio de una opción de compra cuando el subyacente tiene un comportamiento discontinuo.

A partir de la ecuación(4.2) se obtiene el valor de las emisiones de deuda:

$$\begin{aligned}
F(V,\tau) &= V - f(V,\tau) \\
&= V - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau} C_H^{BS}(\tau, V_n; \sigma_n) \\
&= V - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau} \left(V_n N(d_{1,n}) - Be^{-r\tau} N(d_{2,n}) \right) \right) \\
&= V - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau} V_n N(d_{1,n}) + B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-r\tau} N(d_{2,n}) \\
&= Be^{-r\tau} \left(\frac{V}{B} e^{r\tau} - \frac{e^{r\tau}}{B} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau} V_n N(d_{1,n}) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} N(d_{2,n}) \right) \\
&= Be^{-R(\tau)\tau}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

donde

$$R(\tau) = r - \frac{1}{\tau} \ln \left(\frac{V}{B} e^{r\tau} - \frac{e^{r\tau}}{B} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau} V_n N(d_{1,n}) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} N(d_{2,n}) \right) \tag{4.4}$$

Que resulta ser una definición para el rendimiento de un bono con riesgo y a partir de esta ecuación se puede calcular la banda del rendimiento que brinda una medida de riesgo de la emisión de bonos por parte de la institución.

4.2. Procedimiento

Lo primero que se requiere es específicar claramente qué datos de la institución serán necesarios. En este punto es necesario mencionar que, si bien es un sector que da servicio a 3.9 millones de prestatarios, lo cual da idea de la magnitud, no son muchas las cifras y datos que se tienen al alcance. Si bien hay instituciones que han trabajado en la recolección y análisis de datos del sector microfinanciero, principalmente vía el CGAP (Consultative Group to Assist the Poor), a veces estos datos pueden resultar insuficientes para dar pie a nuevos estudios. Entonces, dada la importancia que está cobrando el sector, parece necesario que más organizaciones presten auxilio en este menester, principalmente para reportar los datos y las cotizaciones con una mayor frecuencia. Actualmente, *MIX (Microfinance Information Exchange) Market* es la plataforma del principal proveedor de servicios de información para la industria microfinanciera a nivel mundial, esta información está disponible de manera abierta en la página de internet. A nivel regional, para México, dado que las instituciones microfinancieras avaladas por la CNBV forman una red, no sería muy difícil la organización para la actualización con mayor periodicidad, hablando de proveedores locales de información.

En la página de *MIX Market* se tomaron los datos para analizar a tres instituciones: Banco Compartamos, Servicios Financieros Comunitarios y Financiera Independencia.

El siguiente problema fue estimar los parámetros necesarios para aplicar el modelo. Como es necesario encontrar el valor de una opción, se requiere de la media y varianza de la difusión, media y varianza de los saltos y frecuencia de los saltos. La estimación de parámetros para procesos de difusión con saltos es un problema que aún está abierto, se siguen proponiendo métodos. Así que para obtener los parámetros necesarios, se hizo una propuesta alternativa, cuyo resultado se contrastó con los obtenidos en otros artículos de investigación.

Los parámetros obtenidos para cada una de las instituciones se muestran en la siguiente tabla:

	Compartamos	
	Difusión	Saltos
Media	0.50326966	0.527280802
Varianza	0.00233765	0.071717464
	Fin Común	
	Difusión	Saltos
Media	0.21504616	0.173431887
Varianza	0.01463928	0.087499403
	Independencia	
	Difusión	Saltos
Media	0.39943146	0.819491023
Varinanza	0.03712073	1.09216959

Una vez que se cuenta con los datos necesarios, se hace un programa en `Matlab` con la expansión en series que propuso Merton para aproximar el precio de una opción de compra o venta, que como se vio en el capítulo anterior, es una ponderación del precio de una opción europea tomando en cuenta el comportamiento del activo en cuanto a discontinuidades (los saltos).

Estos resultados son los que nos llevarán al análisis de la situación.

4.3. Resultados

Tras todo el extenso planteamiento teórico que brinda el marco del estudio usando procesos de Lévy, el objetivo se reduce a realizar un solo cálculo, el cual nos brindará una prima que se debe sumar a la tasa de interés libre de riesgo para comercializar un bono. Evidentemente mientras mayor sea la prima, mayor es el riesgo de incumplimiento por parte de la institución, con las consecuencias que ésto implica: por ejemplo para una persona aversa al riesgo es menos atractivo invertir en ella, etc.

Para el último reporte del 2008, *Compartamos* tenía por concepto de capital un monto de \$8,130,000,000 y el portafolio de préstamos ascendía a \$5,733,000,000; con los parámetros obtenidos con anterioridad, y usando la función

```
Merton(8130000000,5733000000,0.05,1,0.002337649,0.4,0.527280802,0.071717464,100)
```

tenemos que el valor de la prima de riesgo $R(\tau)$ es 0.0484. Es decir que los bonos deberían comercializarse con una prima de 4.84 % por encima de la tasa de interés libre de riesgo, que en este caso supusimos del 5 %.

En el caso de *Servicios Financieros Comunitarios*, reportaba \$732,134,572 por concepto de capital y \$493,856,592 de portafolio de préstamos. Al usar estas cifras y los valores de los parámetros respectivos en la función

```
Merton(732134572,493856592,0.05,1,0.01463928,0.36,0.17343189,0.0874994,100)
```

se obtiene que el valor de la prima de riesgo $R(\tau)$ es 0.0495. O sea que los bonos de esta institución deberían comercializarse con una prima de 4.95 % sobre el valor de la tasa de interés libre de riesgo.

Por su parte, la *Financiera Independencia* registró un monto concerniente a capital de \$5,387,355,612 y \$4,473,848,536 por el concepto del portafolio de préstamos. Con esto, y los respectivos parámetros estimados, se aplicó la función

```
Merton(5387355612,4473848536,0.05,1,0.03712073,0.33,0.81949102,1.09216959,100)
```

para obtener el valor de la prima de riesgo $R(\tau)$, que es de 0.1035. Por lo tanto, esta institución comercializaría sus bonos con una prima de 10.35 % sobre la tasa de interés libre de riesgo.

Por otro lado, se realizó el mismo procedimiento para *Banorte*. La información disponible para este tipo de instituciones es muy diferente a la que hay en el sector microfinanciero, generalmente son cotizaciones de acciones y rendimientos de inversiones, pero en el segundo caso, por ejemplo, no se encuentra de manera explícita por qué tiene dicho rendimiento. En el caso de este banco sí es posible consultar los estados financieros. El total de activos que se registró al final del 2008 fue de \$577,025,000,000, mientras que el de pasivos fue \$537,279,000,000. Los parámetros estimados fueron los siguientes:

	Difusión	Saltos
Media	0.00086579	0.54545455
Varianza	0.00125378	0.25974026

Con esto, al usarlos en la función

```
Merton(577025000000,537279000000,0.05,1,0.00125378,22,0.54545455,0.25974026,100)
```

se obtiene que el valor de la prima de riesgo $R(\tau)$ es de 4.9615. Es decir que es necesario comercializar los bonos de esta institución financiera con una prima del 496.14 % sobre la tasa de interés libre de riesgo.

La prima de riesgo para Banorte es muy grande, aún más si se compara con la obtenida para las instituciones microfinancieras, eso no suena tan raro tomando en cuenta que esto es bajo el marco de la crisis que sacudió al mundo en los últimos meses del 2008. Como efecto de la misma crisis, el sector microfinanciero captó más prestatarios, por ejemplo, Compartamos pasó de 838,754 prestatarios activos reportados al final del 2007 a 1,155,850 para el final del 2008. Esto se tradujo en una cartera de préstamos más grande, mayor captación de recursos y, en general, un crecimiento del mercado.

Capítulo 5

Conclusiones

Con ayuda de un vasto fondo teórico como es el de los procesos de Lévy, se exploró una perspectiva diferente de un modelo clásico para medir el riesgo de crédito, como es el modelo de Merton; pero con el propósito de utilizarlo para hacer el análisis respectivo aplicable a alguna institución microfinanciera. Esto ya que es un sector que, a raíz del estado de las finanzas mundiales, ha cobrado una gran fuerza e importancia como motor de la economía de no sólo un gran número de personas, sino también de países emergentes como México.

El modelo original de Merton está diseñado para ser aplicado en bonos corporativos; sin embargo ha sido aplicable a deudas de gobiernos, y, como las instituciones microfinancieras cuentan con reportes de sus estados de resultados donde se muestra su balance entre activos y pasivos cuyo desempeño mismo fluctúa en los periodos de tiempo dados, por esto es que el valor de la institución se modela con un proceso estocástico. Y en ocasiones su balance puede cambiar drásticamente, por ejemplo en el 2008 como efecto de la crisis mundial, en este casó muchas instituciones vieron aumentar su saldo de activos.

La gran utilidad del empleo de procesos estocásticos que consideran saltos en sus trayectorias en tiempo continuo es que permite que, con probabilidad positiva, ocurran cambios de magnitud extraordinaria en el precio y rendimientos de un activo dado, sin importar qué tan pequeño sea el tiempo entre observaciones sucesivas. Aquí viene a colación lo mencionado anteriormente acerca de la frecuencia de reportes de información para instituciones microfinancieras. Si se contara con más redes o proveedoras de información locales, se tendría información más detallada con cifras reportadas con menor tiempo sucesivo, entonces se harían análisis más completos y detallados. Lo que se propuso en el presente trabajo es una motivación de un estudio que, con ayuda de más datos y, de mantenerse coherente con estos resultados, traería conclusiones importantes para el sector en general.

En cuanto a los resultados obtenidos, se reflejó que hay menor riesgo al invertir en una institución microfinanciera que en algún instrumento de deuda emitido por un banco comercial. Esto puede interpretarse como que el sector financiero tiene un comportamiento más estable: ya se mencionó que como consecuencia de una gran recesión, se captaron más prestamistas y el mercado creció; ahora, en un país como México, incluso en una época de crecimiento no se esperaría una disminución en general del sector microfinanciero, pues el ambiente sería más propicio para las inversiones, creación de nuevas pymes y consumo de bienes inmuebles. Además, en un marco normativo, el resultado lleva a cuestionar los niveles de capitalización que la CNBV pide a las insituciones microfinancieras: si, en general, se obtienen primas de riesgo bajas, ¿por qué pedir niveles de capitalización altos?

Finalmente, se trabajo en una propuesta que puede resultar como un posible método para estimar parámetros de un proceso de Lévy de difusión con saltos. La justificación y validez del método queda para un trabajo posterior.

Apéndice A

Programas

La primera función que se programó fue la fórmula ampliamente conocida de Black-Scholes para valuar opciones europeas de compra y venta pues, como se vió, será necesaria para la expansión en series que aproximará el precio de aquellas opciones cuyo subyacente tiene un comportamiento discontinuo.

```
function [X] = BlackScholesEuro1(CallPut, PSubyacente, PEjercicio, TILR, Tiempo, Volatilidad)
% Calcula el precio de la opción europea de compra o venta bajo el modelo
% de Black-Scholes
% CallPut toma valores 1 para compra y 0 para venta
%PSubyacente es el precio del subyacente
%PEjercicio es el precio de ejercicio
%TILR es la tasa de interés libre de riesgo
%Tiempo es el tiempo de vida del contrato
%Volatilidad es la volatilidad del activo subyacente

dt = sqrt(Volatilidad*Tiempo);
df = TILR + (0.5 * Volatilidad) ;
d1 = (log( PSubyacente / PEjercicio ) + (df * Tiempo) ) / dt;
d2 = d1 - dt;

nd1 = normcdf(d1,0,1);
nd2 = normcdf(d2,0,1);
nnd1 = normcdf(-d1,0,1);
nnd2 = normcdf(-d2,0,1);

if CallPut
    PrecioCall = PSubyacente * nd1 - PEjercicio * exp(-TILR * Tiempo) * nd2;
    X = PrecioCall;
end

if ~CallPut
```

```
    PrecioPut = PEjercicio * exp(-TILR * Tiempo) * nnd2 - PSubyacente * nnd1;
    X = PrecioPut;
end
```

La segunda función, `MertonDS`, hace uso de la anterior, `Black-ScholesEuro1`, para aproximar por medio de la expansión en series el valor de la opción de compra o venta cuyo comportamiento es discontinuo. Esto a través de la fórmula propuesta por Merton.

```
function MertonDS(CallPut, PSubyacente, PEjercicio, TILR,
Tiempo, Vol,lambda, medSaltos, volSaltos, MaxIter)

%Esta función se encarga de aproximar el valor de la opción de compra o
%venta bajo el modelo de Merton para valuar opciones cuando el
%comportamiento del subyacente es discontinuo.

%CallPut tiene valor si es call y 0 si es put
%PSubyacente es el precio del activo subyacente
%PEjericio es el precio de ejercicio
%TILR es la tasa de interés libre de riesgo
%Tiempo es el tiempo de vigencia del contrato
%Vol es la volatilidad del activo
%lambda es el número de saltos por año
%medSaltos es la media de los saltos
%volSaltos es la volatilidad de los saltos
%MaxIter es el número máximo de iteraciones que se piden

t=Tiempo;
Valor=0;
lambdai=lambda*(1+medSaltos);
for i = 0:MaxIter
    sigmai=Vol+(i*volSaltos/t);
    Ri=TILR- (lambda*medSaltos) + (i*log(1+medSaltos)/t);
    Si=PSubyacente*exp((i*medSaltos)+(i*volSaltos/2)
    -(lambda*t*exp(medSaltos+(volSaltos/2)))+lambda*t);
    Valor=Valor + (exp(-lambdai*t)*(((lambdai*t)^i)/factorial(i))*
    BlackScholesEuro1(CallPut,Si,PEjercicio,Ri,t,sigmai));
end

MertonDS=Valor
```

El último programa crea una función llamada `Merton` que calcula la banda de rendimiento por medio de la prima de riesgo de un bono emitido por la institución microfinanciera. Esto con base en la ecuación (4.4):

```
function Merton(ValorInst, Deuda, TILR, Tiempo, Vol,
              lambda, medSaltos, volSaltos, MaxIter)
```

```
t=Tiempo;
Valor1=0;
Valor2=0;

for i = 0:MaxIter
    sigmai=Vol+(i*volSaltos/t);
    d1i = (log( ValorInst / Deuda ) + (TILR+0.5*sigmai^2) * t ) / (sigmai*sqrt(t));
    d2i = d1i - (sigmai*sqrt(t));

    nd1i = normcdf(d1i);
    nd2i = normcdf(d2i);

    Si=ValorInst*exp((i*medSaltos)+(i*volSaltos/2)
    -(lambda*t*exp(medSaltos+(volSaltos/2)))+lambda*t);
    Valor1=Valor1 + (exp(-lambda*t)*(((lambda*t)^i)/factorial(i))*Si*nd1i );
    Valor2=Valor2 + (exp(-lambda*t)*(((lambda*t)^i)/factorial(i))*nd2i );
end

Riesgo=TILR-(1/t)*log(((ValorInst/Deuda)*exp(TILR*t))-(exp(TILR*t)/Deuda*Valor1)+Valor2);
Merton=Riesgo
```

Apéndice B

Propuestas para estimación de parámetros

Para poder llevar a cabo los cálculos pricipales, era necesario contar con la estimación de los parámetros del proceso de difusión con saltos. Como es un problema que actualmente se encuentra abierto, al no haber una propuesta globalmente aceptada, trabajamos también en el problema con cuatro enfoques diferentes.

Partimos de que contamos con la serie de tiempo de los datos (por ejemplo, precios o cotizaciones de algún índice) $S_1, S_2, ..., S_n$. A partir de ella se obtienen los log-rendimientos de la siguiente forma: $\log R_i = \log S_i - \log S_{i-1}$. A partir de aquí es que variarán los procedimientos, pero siempre considerando una *banda* de discriminación.

1. Se forma un intervalo, en este caso comprendido de

   $$[-30 * \textit{varianza de la serie completa}, 30 * \textit{varianza de la serie completa}]$$

   , si un dato está fuera de este intervalo, se considera un salto. Separando los datos clasificados como saltos de los que no lo fueron, se recalcula la media y la varianza y así se obtienen los parámetros.

2. Se parte de $\log R_i - \mu_R$, donde μ_R es la media de los log-rendimientos y con esta nueva serie se repite el procedimiento anterior.

3. Se forma una nueva serie a partir de $\log R_i - \log R_{i-1}$, es decir, se explora a partir de los cambios en los log-Rendimientos. A esta diferencia se le saca el valor absoluto. Y de nuevo, si el dato es menor a $30 * \textit{varianza de la serie}$ se cuenta como parte de la difusión, y si es mayor se cuenta como salto.

4. Se resta μ_R a los datos y se procede como en el inciso anterior, se obtienen las diferencias de la nueva serie y si el valor absoluto es mayor al valor de tolerancia se considera salto, en el caso sontrario será parte de la difusión.

Para probar cada método, primero se utilizan los datos correspondientes a los valores del índice $S\&P$ 500 desde el 24 de julio de 2008 hasta el 23 de julio de 2009, se tiene un total de 252 datos.

La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos con cada método:

	Difusión	Saltos
Método 1		
Media	0.000694079	-0.001539432
Varianza	0.000151217	0.002339245
Método 2		
Media	0.000118543	-0.003600435
Varianza	0.000158719	0.002404
Método 3		
Media	0.000598701	-0.001439304
Varianza	0.000440592	0.000912859
Método 4		
Media	0.004449993	0.037988396
Varianza	5.41873E-06	0.000831526

Bibliografía

[1] Applebaum, D. *Lévy Processes and Stochastic Calculus.* Cambridge University Press 2004.

[2] Bertoin, J. *Lévy Processes.* Cambridge University Press 2007.

[3] Cont, R. & Tankov, P. *Financial Modelling With Jump Processes.* Chapman and Hall/CRC 2004.

[4] Juanchi Gómez, María Doris. *Organizaciones Auxiliares de Crédito en las Microfinanzas.* De la recopilación *Microempresa, financiamiento y desarrollo: el caso de México. Ricardo W. Skertchly, coordinador* 2001.

[5] Kyprianou, A. *Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications.* Springer 2006.

[6] McNeil, A., Frey, R. & Embrechts, P. *Quantitative Risk Management.* Princeton Series in Finance 2005.

[7] Papapantoleon, A. *An introduction to Lévy processes with aplications in finance.* Notas de clase TU Viena 2008.

[8] Øksendal, B.K. *Stochastic Differential Equations: an introduction with applications.* Springer 2003.

[9] Rita, Sonia y Paquette Chistophe. *Finanzas Sociales y Comercialización. Experiencias del desarrollo local en México. Coordinadores: Ana Stern Leuchter, Roberto Sergio Vega González y Alfonso Castillo Sánchez Mejorada.*Apartado: *La Experiencia de AMUCSS y de dos Microbancos Rurales en el estado de Oaxaca: Kaxa Taón y Lis Mii,* 2005.

[10] Sánchez Mejorada Alfonso Castillo. *Finanzas Sociales y Comercialización. Experiencias del desarrollo local en México.Coordinadores: Ana Stern Leuchter, Roberto Sergio Vega González y Alfonso Castillo Sánchez Mejorada.* Apartado: *Las Finanzas Sociales y la Comercialización* 2005.

[11] Sato, K.I.*Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions.* Cambridge University Press 1999.

[12] Stampfli, J. & Goodman, V.*Matemáticas para las finanzas.* Thomson 2002.

[13] Venegas, F. *Riesgos Financieros y Económicos.* Thomson 2006.

[14] Yunus, M. *El Banquero de los Pobres.* Paidós 2006.

[15] *Benchmarking de las microfinanzas en México: Un informe del sector.* Documento realizado por ProDesarrollo, Finanzas y Microempresa, A.C. en colaboración con Microfinance Information Exchamge (MIX) 2009

[16] Grameen Bank-Bank for the poor: *http://www.grameen-info.org/bank/WhatisMicrocredit.htm*

[17] Portal de Internet CNBV: *http://www.cnbv.gob.mx/seccion.asp?sec_id=604*&*com_id=0*

[18] SEFIA *www.sefia.com.mx*

[19] MixMarket *www.mixmarket.org*