



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y  
DOCTORADO EN INGENIERÍA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**CONTROL DE POSICIÓN EN  
3D DE UN ROBOT POR  
RETROALIMENTACIÓN  
VISUAL**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**  
INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

**P R E S E N T A :**  
**VIRGILIO ADRIÁN LEYVA MORALES**



**TUTOR:**  
**DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ**

2009



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## **JURADO ASIGNADO:**

**Presidente:** DR. YU TANG XU

**Secretario:** DR. PAUL ROLANDO MAYA ORTIZ

**Vocal:** DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ

**1<sup>er</sup>. Suplente:** DR. JUAN CARLOS MARTÍNEZ ROSAS

**2<sup>do</sup>. Suplente:** DR. HÉCTOR BENÍTEZ PÉREZ

### **Lugar o lugares donde se realizó la tesis:**

LABORATORIO DE ROBÓTICA, EDIFICIO “BERNARDO QUINTANA ARRIJOJA” DE LA SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA.

## **TUTOR DE TESIS:**

DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ

---

**FIRMA**



# Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a las personas e instituciones de quienes he recibido apoyo, sobre todo en los dos últimos años, para ver culminados mis estudios de Maestría en Ingeniería.

En primer lugar, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT, por su apoyo económico para mi manutención en el tiempo necesario. Por supuesto, aún estoy en deuda con el pueblo mexicano, ya que gracias a él existe el erario público.

Quiero agradecer también a los excelentes profesores del grupo de control de la UNAM, porque su calidad y conocimiento son verdaderamente invaluable, al igual que su esfuerzo en conseguir apoyo gubernamental para quienes deseamos continuar estudiando. Particular mención merece mi asesor: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez, porque me ha brindado su apoyo y su tiempo durante este proyecto, me ha compartido su conocimiento y su capacidad para generarlo, pero sobre todo me ha inspirado para seguir explorando el fascinante campo del control de robots.

A los miembros de mi generación les expreso mi gratitud por su compañerismo, al igual que a mis colegas del laboratorio de robótica por su amistad y apoyo, particularmente en la parte técnica del proyecto. Agradezco a mi madre porque a pesar de los años ella continúa apoyándome.

Por último, pero no menos importante, agradezco a la institución que me brindó los mejores recursos, cuna de “Premios Nobel” y forjadora de la nación: La Universidad Nacional Autónoma de México. La mayor institución del país.

Respetuosamente:  
Adrián



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.1.1. El control visual de robots . . . . .	2
1.1.2. Importancia y aplicación del control visual de robots . . . . .	6
1.1.3. Desarrollo histórico del control visual de robots . . . . .	8
1.1.4. Clasificación del control servovisual de robots . . . . .	10
1.2. Problemas en desarrollo . . . . .	17
1.3. Resultados de la tesis . . . . .	19
<b>2. Preliminares</b>	<b>21</b>
2.1. Modelado de las cámaras de video . . . . .	23
2.1.1. Cámara uno . . . . .	26
2.1.2. Cámara dos . . . . .	30
2.1.3. Modelo usando ambas cámaras . . . . .	32
2.2. Relación coordenadas cartesianas-imagen . . . . .	33
2.3. Modelo dinámico de robots manipuladores . . . . .	38
2.3.1. Propiedades . . . . .	39
<b>3. Control servovisual en 3D</b>	<b>41</b>
3.1. Adaptación coordenadas cartesianas-imagen . . . . .	42
3.2. Resultado principal . . . . .	47
<b>4. Resultados de simulación</b>	<b>65</b>
4.1. Prueba uno . . . . .	71
4.2. Prueba dos . . . . .	77



<b>5. Conclusiones</b>	<b>83</b>
A. Modelo dinámico	85
B. Teorema	87
C. Cinemática directa	89
D. Jacobiano geométrico	91
Bibliografía	93

# Índice de figuras

1.1. Célula para control de calidad de piezas mecánicas. . . . .	2
1.2. Robot atrapador de pelota del Centro Aeroespacial Alemán. . .	4
1.3. Inserción de pieza mediante un robot controlado visualmente.	5
1.4. Algunas aplicaciones del control visual. . . . .	9
1.5. Configuración de la cámara respecto al robot. . . . .	11
1.6. Cotrol servovisual indirecto basado en imagen. . . . .	13
1.7. Cotrol servovisual directo basado en imagen. . . . .	14
1.8. Cotrol servovisual indirecto basado en posición. . . . .	15
1.9. Cotrol servovisual directo basado en posición. . . . .	15
1.10. Cotrol servovisual híbrido. . . . .	17
2.1. Configuración de las cámaras de video respecto al robot. . . .	22
2.2. Representación de la proyección perspectiva. . . . .	24
2.3. Geometría para la obtención del modelo de ambas cámaras. . .	25
2.4. Rotación del sistema de referencia respecto al sistema $\Sigma_{c_1}$ . . .	27
2.5. Proyección perspectiva. . . . .	28
2.6. Origen del sistema de coordenadas de pantalla. . . . .	29
2.7. Rotación del sistema de referencia respecto al sistema $\Sigma_{c_2}$ . . .	31
3.1. Adaptación de coordenadas cartesianas a coordenadas de ima- gen. . . . .	43
3.2. Diagrama esquemático de la adaptación. . . . .	46
3.3. Reconfiguración de las cámaras de video respecto al robot. . .	52
4.1. Diagrama general de la simulación por computadora. . . . .	66
4.2. Trayectoria de la coordenada $y_1$ . . . . .	71
4.3. Trayectoria de la coordenada $y_2$ . . . . .	72
4.4. Trayectoria de la coordenada $y_3$ . . . . .	72

4.5. Señal de control expresada en volts. . . . .	73
4.6. Norma de $\tilde{\mathbf{y}}$ . . . . .	73
4.7. Norma de $\Delta\mathbf{y}$ . . . . .	74
4.8. Representación de la pantalla uno. . . . .	74
4.9. Representación de la pantalla dos. . . . .	75
4.10. Trayectoria de $\mathbf{y}_d$ . . . . .	75
4.11. Trayectoria de $\mathbf{y}$ . . . . .	76
4.12. Trayectoria en 3D del efector final del robot. . . . .	76
4.13. Coordenadas cartesianas del efector final del robot. . . . .	77
4.14. Trayectoria de la coordenada $y_1$ . . . . .	77
4.15. Trayectoria de la coordenada $y_2$ . . . . .	78
4.16. Trayectoria de la coordenada $y_3$ . . . . .	78
4.17. Señal de control expresada en volts. . . . .	79
4.18. Norma de $\tilde{\mathbf{y}}$ . . . . .	79
4.19. Norma de $\Delta\mathbf{y}$ . . . . .	80
4.20. Representación de la pantalla uno. . . . .	80
4.21. Representación de la pantalla dos. . . . .	81
4.22. Trayectoria de $\mathbf{y}$ . . . . .	81
4.23. Trayectoria en 3D del efector final del robot. . . . .	82
4.24. Coordenadas cartesianas del efector final del robot. . . . .	82
C.1. Cinemática directa del robot <i>CRS A465</i> . . . . .	89

# Índice de tablas

1.1. Aportaciones al control visual de robots. . . . .	10
4.1. Parámetros constantes de las cámaras de video. . . . .	66
4.2. Muestreo contra resolución. . . . .	67
4.3. Posición y orientación de las cámaras de video. . . . .	67
4.4. Valores de excentricidades. . . . .	68
4.5. Periodos de muestreo. . . . .	68
4.6. Parámetros del campo de velocidad. . . . .	69
4.7. Condiciones iniciales. . . . .	69
4.8. Ganancias para el controlador y el observador. . . . .	71
A.1. Parámetros del robot <i>CRS A465</i> . . . . .	86
A.2. Variables auxiliares. . . . .	86



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

Los robots industriales, desde su nacimiento en la década de los años cincuentas, han evolucionado de una manera sorprendente. Dicha evolución ha sido posible gracias a la investigación que se ha dado en diferentes disciplinas concernientes al campo de la robótica, tales como la mecánica y el control automático; disciplinas que han dotado a los robots de mejores diseños mecánicos, pero sobre todo, de algoritmos de control mucho más eficientes que son capaces de explotar al máximo sus cualidades mecánicas.

La capacidad sensorial y su respectivo nivel de integración constituyen otro factor clave en la evolución de los robots. Son los sensores propioceptivos y exteroceptivos los que proporcionan al robot información útil para controlar sus movimientos, así como para medir y conocer su entorno. De todos los sensores que en la actualidad se han empleado en los sistemas robotizados, el de visión es sin duda el que puede proporcionar la mayor cantidad de información necesaria acerca del ambiente y del propio robot para realizar con éxito una gran variedad de tareas; incluso, para complementar aquéllas donde la principal medición proviene de algún otro sensor, como el de fuerza. Pero sobre todo, es el que puede extender el campo de aplicación de los robots dotándolos de “inteligencia” y mayor versatilidad.

Hoy en día resulta difícil encontrar en el ámbito industrial, robots controlados a partir de información visual. Esto se debe entre varios otros aspectos, a que el análisis y diseño de las estrategias de control representan un trabajo verdaderamente desafiante, cuyos problemas radican sobre todo en la inesta-

bilidad y en el bajo desempeño. El control visual de robots sigue siendo un tema de investigación muy activo entre la comunidad mundial de robótica y representa el eje primario sobre el cual se desarrolla la presente tesis.

### 1.1.1. El control visual de robots

El control visual de robots se define como: *el uso de información visual procedente de una o varias cámaras de video, ya sean fijas o móviles, para controlar la posición y orientación del efector final del robot con respecto a un objeto o a un conjunto de características visuales de éste (dependiendo de la tarea por realizar).*

A menudo, cuando un estudiante o una persona se introduce por primera vez en este campo, suele confundir sistemas que poseen los elementos principales que aparecen en la definición, es decir, un equipo de visión combinado con un robot, con sistemas que se estudian en el control visual de robots, pero que son totalmente distintos. Considérese el siguiente ejemplo.

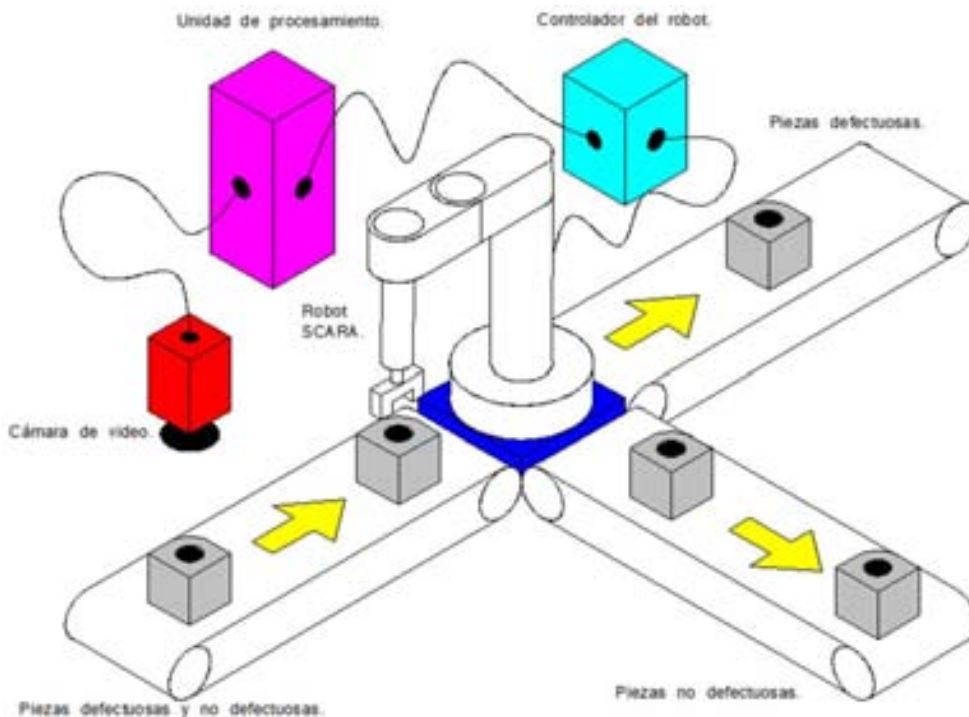


Figura 1.1: Célula para control de calidad de piezas mecánicas.

En la Figura 1.1 se muestra un robot<sup>1</sup> que separa piezas mecánicas en defectuosas o no defectuosas de acuerdo a información proveniente de una cámara de video. En este caso, el sistema de visión compara la imagen que toma de cada pieza con un patrón previamente almacenado en memoria, para que una vez efectuado el procesamiento, emita un comando hacia el controlador del robot, que le indique a éste en qué banda debe colocar la pieza. Los movimientos necesarios son previamente “enseñados” al robot por un programador. Se observa entonces que, el robot, no es directamente controlado por la información visual, simplemente ejecuta uno u otro movimientos previamente programados, de acuerdo a una señal dada. Ejemplos como éste, pueden encontrarse con regularidad en la industria; sin embargo, son casos ajenos al control visual.

A diferencia del caso anterior, en el control visual, los movimientos del robot son alterados de forma paulatina por efecto de la información extraída e interpretada a partir del sistema de visión. De modo que cambios en el escenario visual, modifican la conducta del robot.

Existen algunos sistemas de control visual que operan en lazo abierto. Su forma de trabajo puede describirse de la siguiente manera: primero, se toma una o varias imágenes, a continuación, se extrae y se interpreta la información, posteriormente, se hace un razonamiento de la tarea que se tiene que ejecutar y, por último, se calcula y se realiza el movimiento requerido bajo la supervisión de un control articular, ya no se vuelve a ocupar la información visual. A este tipo de sistemas se les denomina *look-then-move* (ver y después moverse). Considérese el siguiente ejemplo.

En la Figura 1.2 aparece un robot de diseño avanzado<sup>2</sup> cuyo efector final es una mano mecánica. Al robot se le lanza una pelota desde una distancia de cinco metros y ayudado por dos cámaras de video, consigue atraparla en algún punto cercano a él. En este sistema, a través de las dos cámaras y el filtro extendido de Kalman es posible estimar y predecir la trayectoria de la pelota, para posteriormente seleccionar un punto de atrape. A continuación, con el uso de la cinemática inversa y un control articular, el efector final es llevado a la posición correcta. Dado que la estimación mejora conforme la pelota avanza, la posición de la mano cambia. En este sistema en tiempo real, la retroalimentación de la posición correcta no se hace mediante la visión, sino con el control articular.

---

<sup>1</sup>SCARA(Selective Compliance Articulated Robot Arm)

<sup>2</sup>La relación peso-capacidad de carga es 1:1



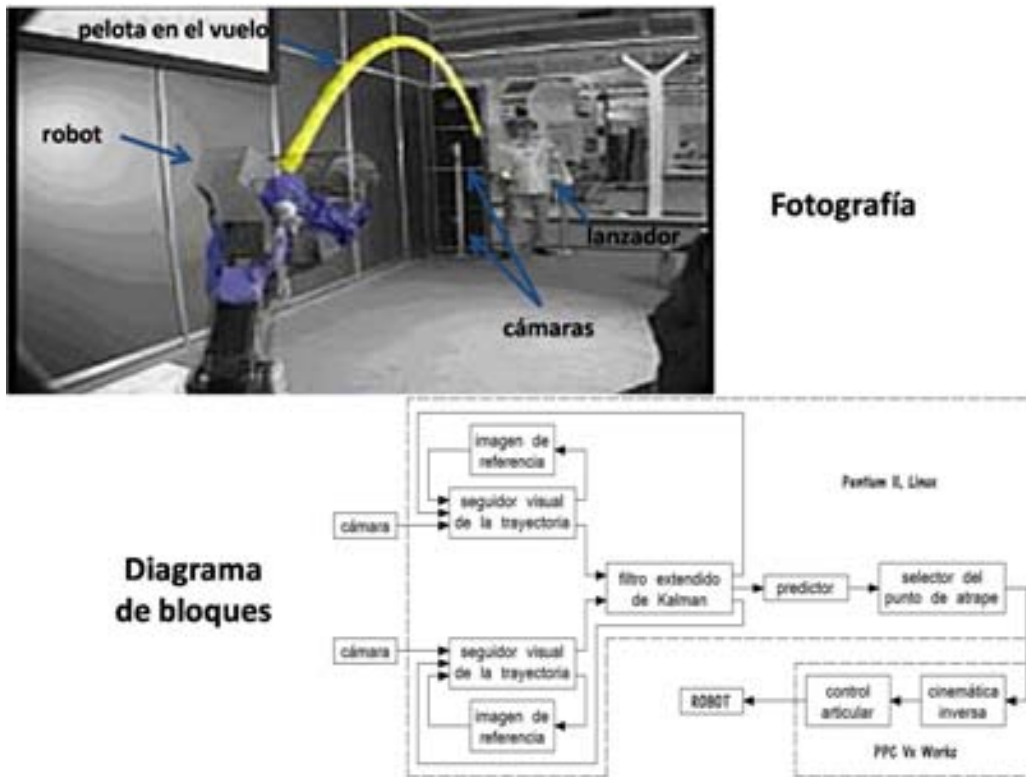


Figura 1.2: Robot atrapador de pelota del Centro Aeroespacial Alemán.

Al control que sí hace uso de la información visual para cerrar el lazo de control, suele denominársele *visual servoing*. A este campo pertenecen la mayoría de los sistemas que se estudian hoy en día y el trabajo presentado en esta tesis, por lo que de ahora en adelante, se hará referencia sólo a estos y bajo el nombre de control servovisual.

Imagínese un robot cuyo objetivo es insertar una pieza de precisión, en otra que tiene una cavidad con la forma de la primera. Para ello, el robot cuenta con una cámara de video montada sobre él (véase la Figura 1.3). La pieza con la cavidad puede estar orientada, inicialmente, de cualquier manera con respecto al efector final del robot, que lleva la pieza de precisión. Aquí, se ilustra un ejemplo de lo que es el control servovisual, ya que en principio, la imagen que se tiene del escenario es diferente a la imagen que se desea, es decir, aquélla que debe “ver” el robot para poder insertar la pieza. La imagen deseada, es la referencia que se introduce al sistema, para que en cada

instante de tiempo se le compare con la real y en respuesta, el controlador ejecute la acción pertinente moviendo el robot hasta reducir el error a cero. Se muestra entonces cómo los movimientos del robot son controlados con base en la imagen obtenida a cada instante.

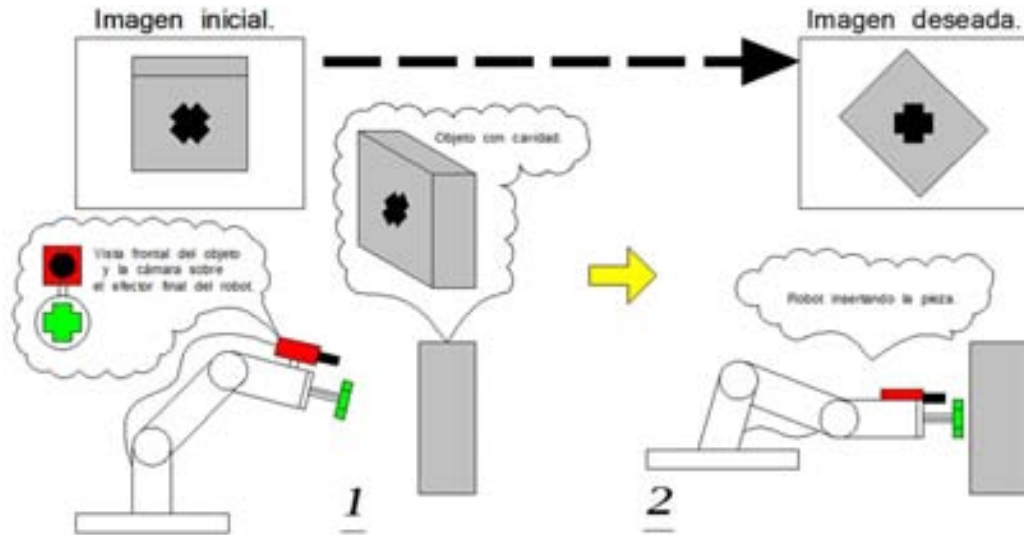


Figura 1.3: Inserción de pieza mediante un robot controlado visualmente.

El control servovisual ofrece ventajas con relación al control visual en lazo abierto; principalmente, ser independiente de la precisión de los sensores de visión así como de la precisión del robot. Sin embargo, cerrar el lazo de control aumenta las posibilidades de inestabilidad, lo cual complica en gran medida su desarrollo.

La información que se extrae de las imágenes para su posterior interpretación, se conoce como parámetros de imagen. Un parámetro de imagen es un valor real que representa a una característica de imagen, la cual a su vez, es el resultado de la proyección en el plano de imagen de las características físicas de un objeto. Una característica de imagen puede ser un contorno, una línea, un punto, etc. Mientras que los parámetros podrían ser el perímetro del contorno, la longitud de la línea y las coordenadas de imagen del punto. De otra manera, si se tiene un conjunto de  $k$  parámetros, entonces

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_k]^T \in P \subseteq \mathfrak{R}^k \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{p}$  es el vector de parámetros y  $P$  el espacio de los parámetros. En

el desarrollo que se presenta en este trabajo, se tomó como característica de imagen un punto de interés (se explicará en capítulos posteriores), cuyos parámetros son las dos coordenadas de imagen asociadas a él. De modo que para tal caso se tiene:

$$\mathbf{p} = [c_1, c_2]^T \in P \subseteq \mathfrak{R}^2 \quad (1.2)$$

Por otra parte, si se observan las Figuras 1.2 y 1.3, se nota que la cámara de video puede tener dos configuraciones relativas al robot. Por un lado, estar fija en algún lugar del entorno, mientras que por el otro, montada sobre el efector final. En el primer caso, la relación entre los marcos de referencia del robot y de la cámara, es constante. La mayor ventaja que ofrece esta configuración es el amplio campo de visibilidad disponible, lo cual facilita el posicionamiento de la herramienta. En el segundo caso, la relación entre los marcos de referencia de la cámara y del efector final, es constante. Las principales ventajas de este arreglo, son tener información casi directa sobre el espacio de trabajo, así como una mayor resolución visual del mismo, lo que facilita la orientación del efector final. Aquí, la imagen obtenida sobre el objeto a manipular depende del movimiento del robot.

En algunas ocasiones, un robot dispone de ambas configuraciones para auxiliarse tanto de las ventajas de una como de la otra, incluso, la cámara móvil puede estar montada sobre un segundo robot observando al primero.

### 1.1.2. Importancia y aplicación del control visual de robots

La notable presencia y el confiable desempeño de que gozan los robots actualmente en las labores de manufactura, parecieran indicar que los problemas de la robótica industrial han sido en su totalidad resueltos, sin embargo, aún existen dificultades prácticas y teóricas por afrontar. Si se considera por ejemplo la distribución poblacional de robots por industria, se advierte el gran acaparamiento de los sectores automotriz y eléctrico, más del 50% [41]. En otros sectores, los robots no han tenido gran éxito. Una de las principales razones se encuentra en que la necesidad de proporcionar al robot un entorno altamente estructurado para su correcto funcionamiento, eleva considerablemente el costo de implementación, volviendo al sistema robotizado poco rentable para ciertas industrias, tomando en cuenta que el costo de una

célula de manufactura, generalmente es de cuatro veces el precio del propio robot.<sup>3</sup>

Un elemento útil para reducir el requerido nivel de estructuración del entorno puede ser el control visual, ya que al agregar la visión a un robot, éste podría operar con piezas y herramientas sin que cuenten con una forzosa y específica orientación, prescindir del uso de efectores finales altamente especializados e incluso, trabajar en diferentes líneas de ensamble a la vez, en pocas palabras, necesitaría de dispositivos periféricos menos complejos y en menor cantidad. También, sería posible reducir el tiempo necesario para programar una tarea al robot, programación generalmente manual, que debe realizarse cada vez que las especificaciones del producto a manipular cambien. Aparte de las ventajas mencionadas y entre muchas otras más, el control visual puede incrementar notablemente la precisión de un robot sin necesitar de diseños avanzados y sin importar los efectos de inexactitud generados por conjuntos mecánicos entre engranes, bandas o cadenas, considerando de igual forma, que muchos controladores hacen uso del modelo cinemático del robot y gobiernan directamente a nivel articular, aspectos que perjudican la concisión de los movimientos del efector final en el espacio de trabajo.

En el contexto industrial, muchas son las tareas donde el control visual ha encontrado aplicación, o mejor dicho, donde sigue buscando tener éxito, entre ellas destacan sobre todo: el ensamble de piezas, la manipulación de objetos, el maquinado y la realización de tareas conjuntas humano-robot. Son también comunes las investigaciones para controlar robots paralelos planares y no planares mediante la observación de la plataforma y los brazos, respectivamente [49].

Existen de la misma manera, otros campos en los cuales el uso de robots manipuladores guiados visualmente se considera con gran potencial, uno de ellos es el de la medicina [38]. Aquí, se analizan y estudian las cirugías robotizadas de cerebro, huesos, corazón y aquellas donde la invasión mínima de los instrumentos es necesaria. Las ventajas principales radican en mayor precisión, aplicación de fuerzas mejor controladas, incremento de la destreza y falta de fatiga.

Por otra parte, es importante mencionar que no sólo los robots industriales pueden ser controlados visualmente; en general, se puede controlar cualquier otro sistema mecánico, ya sea un vehículo, un robot móvil, etc. En la robótica móvil, por ejemplo, el control visual se ha empleado para guiar robots en

---

<sup>3</sup>ABB Robotics.

diferentes escenarios y ejecutar tareas como la localización de objetos, la evasión de obstáculos o la exploración espacial, entre otras.

Fuera de la robótica, se han realizado experimentos para controlar visualmente el movimiento de vehículos no tripulados [23]. En aeronáutica, se pretende controlar el aterrizaje sin la intervención de los pilotos, mientras que en agricultura, realizar de manera automática la recolección de frutos.

Recientemente y sobre todo en Japón, se trabaja en cómo gobernar mediante información visual, el movimiento de microorganismos [40]. En las pruebas que se han llevado a cabo, el sensor consiste en un sistema de visión formado por un microscopio especial capaz de entregar una cantidad elevada de cuadros por segundo, cerca de mil, mientras que los actuadores se constituyen de electrodos que aplican un voltaje variable el cual obliga a los microorganismos a moverse hacia determinada dirección. En este campo se busca atacar ciertos tipos de enfermedades y virus, además se considera la posibilidad de aplicarlo a la fabricación de MEMS [33].

En general, el campo de aplicación del control visual es muy extenso, ya que son bastantes los sistemas en los cuales la visión puede representar un avance significativo; sin embargo, en la mayoría de los casos, particularmente aquéllos externos a la robótica, el desarrollo se encuentra aún en la fase experimental. En la Figura 1.4 se ilustran algunas de las aplicaciones citadas<sup>4</sup>.

### 1.1.3. Desarrollo histórico del control visual de robots

Todo parece indicar que la historia del control visual de robots comenzó a principios de los años setentas cuando Shirai y Ionue, dos investigadores japoneses, probaron las ventajas de la retroalimentación visual al poner en marcha un robot, que ayudado por la información de una cámara de video fija, manipulaba un cubo y lo colocaba dentro de una caja [15]. Probablemente no fueron los pioneros en el intento, pero sí en tener éxito. Posteriormente, ya a finales de esa misma década, Hill y Park introdujeron el término *visual servoing* al desarrollar una investigación para controlar un robot UNIMATE. Más tarde, a mediados de los ochentas, Sanderson y Weiss propusieron una clasificación dentro de la cual se pueden agrupar todos los sistemas de control visual desarrollados hoy en día [32]. Muchas son las aportaciones que se han hecho desde aquel entonces, las cuales, avanzaron de manera más rápida una vez que se fueron desarrollando mejores sensores de visión y computadoras

---

<sup>4</sup>Fotografías obtenidas de: EURON 2004, notas del congreso y Handbook of Robotics.

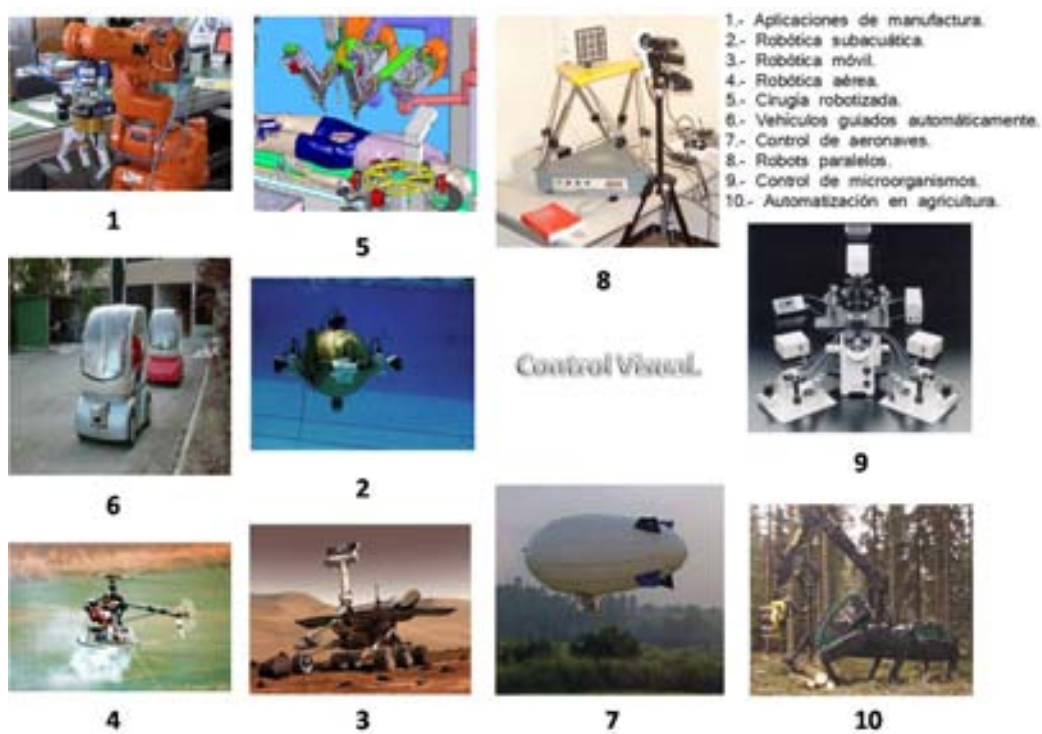


Figura 1.4: Algunas aplicaciones del control visual.

más poderosas. La Tabla 1.1 presenta una modesta pero interesante lista de personas y sus contribuciones ordenadas de manera cronológica que cubre desde los años de 1973 a 2002.

Año	Personajes	Contribución
1973	Shirai y Inoue	Muestran cómo una retroalimentación visual mejora la precisión de un robot.
1976	SRI International	Uso de información visual para inserción de piezas y manipulación de objetos móviles.
1979	Hill y Park	Control visual de movimiento en 3D de un robot PUMA. A ellos se atribuye el término <i>visual servoing</i> .
1979	R.E. Prajoux	Seguimiento visual de un objeto mediante un mecanismo de dos grados de libertad. Utiliza un predictor para estimar la posición futura del objeto.

1984	L. Weiss	Propone y prueba las técnicas de control adaptable para guiar visualmente el movimiento de robots de hasta tres grados de libertad.
1987	Sanderson y Weiss	Realizan estudios para elaborar una clasificación de los sistemas de control visual.
1989	Harrel, Slaughter	Diseño e implementación de un robot recolector de frutas controlado con visión.
1989	J.T. Feddema	Desarrollo de la generación de trayectorias en el espacio de las características de imagen.
1995	Weis, Papanikolopoulos	Aplicación de controles PI, PID, LQG y asignación de polos.
1996	Suh, Wells	Recurrent al uso de redes neuronales.
1997	De Schutter, Morel y Malis	Integran los sensores de visión y fuerza.
1998	Hashimoto	Implementación del control óptimo.
1998	Khadraoui	Empleo del control robusto y $H_\infty$
2000	Malis, Martinet, Cervera	Aplicación de la visión estereoscópica.
2002	Mezouar	Estudio de la generación de trayectorias para control visual.
2002	Malis	Control servovisual invariante.
2002	Corke, Hutchinson	Control servovisual particionado.
2002	Kragic	Control servovisual robusto.

Tabla 1.1: Aportaciones al control visual de robots.

#### 1.1.4. Clasificación del control servovisual de robots

El control visual de robots es un campo de investigación multidisciplinario. En él convergen temas relacionados con disciplinas tales como la visión computacional, que aplica técnicas para el procesamiento de imágenes, la robótica, que constituye la estructura sobre la que descansa toda esta área de investigación, y el control automático, que proporciona el análisis para el desarrollo de controladores. Además de algunas otras como el estudio de sistemas en tiempo real. Este apartado se enfoca en el control automático para

presentar una clasificación del control servovisual de robots manipuladores.

Antes de continuar, conviene retomar lo que ya se explicó en la Subsección 1.1.1; esto es, que las cámaras de video, ya sea que se utilice una o más, pueden tener diferentes configuraciones respecto al robot: pueden estar fijas, pueden ser móviles, o bien, alguna combinación entre estas. En la Figura 1.5 se ilustran las configuraciones principales, cualquier otra configuración posible, es resultado de una combinación entre ellas.

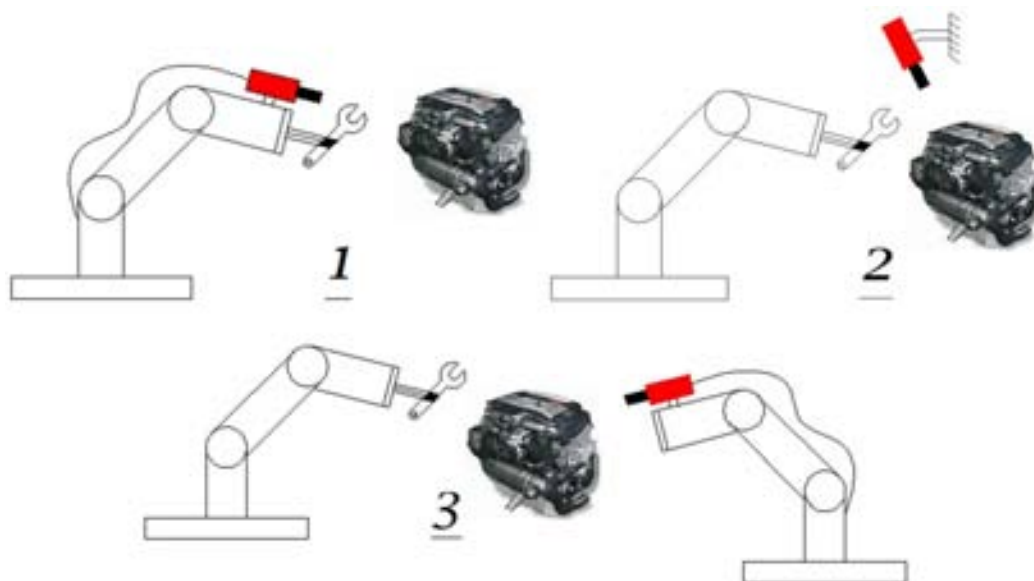


Figura 1.5: Configuración de la cámara respecto al robot.

Independientemente de cuales sean la configuración de la cámara y el esquema de control que se utilicen, el objetivo principal del control servovisual es reducir un error a cero, el cual en términos generales se expresa como

$$\mathbf{e} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_d \quad (1.3)$$

donde  $\mathbf{p} \in \mathcal{R}^{k \times 1}$  es el vector de parámetros de imagen y depende de la información extraída de la imagen procesada, además puede depender de parámetros intrínsecos del sistema de vision y de la geometría 3D de la escena. El vector  $\mathbf{p}_d$  representa el valor deseado.

Por otra parte, ya sea que la cámara se mueva y el objeto esté fijo, o al revés, existe una relación



$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{L}_p \mathbf{v} \quad (1.4)$$

que vincula la variación de los parámetros de imagen  $\dot{\mathbf{p}}$  con la velocidad  $\mathbf{v} \in \mathfrak{R}^{p \times 1}$ , en este caso, de la cámara. A la matriz  $\mathbf{L}_p \in \mathfrak{R}^{k \times p}$  habitualmente se le llama matriz de interacción. Si se considera una cámara móvil, cuyos movimientos son inducidos por los movimientos del robot que realiza una tarea sobre un objeto que carece de movimiento (Configuración 1, Figura 1.5), esto es  $\mathbf{p}_d$  constante, de las ecuaciones (1.3) y (1.4) se tiene la relación

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{L}_p \mathbf{v} \quad (1.5)$$

Mientras que si se hace

$$\dot{\mathbf{e}} = -\lambda \mathbf{e} \quad (1.6)$$

con  $\lambda$  una constante, se puede escribir

$$\mathbf{v} = -\lambda \hat{\mathbf{L}}_p^+ (\mathbf{p} - \mathbf{p}_d) \quad (1.7)$$

donde  $\hat{\mathbf{L}}_p^+ \in \mathfrak{R}^{p \times k}$  es la aproximación de la pseudoinversa de  $\mathbf{L}_p$ , ya que por lo general  $k \neq p$ . Se usa una aproximación debido a que resulta imposible conocer  $\mathbf{L}_p$  a la perfección, dado que depende de parámetros intrínsecos del sistema de visión y del conocimiento de la coordenada de profundidad, cuando se trabaja con puntos de interés. Esta profundidad debe ser estimada con algún método, debido a que directamente con la información proporcionada por una cámara no es posible.

La relación (1.7) es normalmente la ley de control que se introduce como referencia a un controlador articular que gobierna directamente al robot, como se verá más adelante. La mayoría de los controladores servovisuales son diseñados bajo la metodología que se presentó en las líneas anteriores, el esquema de control difiere primordialmente de la manera en que se elige a  $\mathbf{p}$ .

A continuación se presenta una clasificación de los esquemas de control servovisual dentro de la cual se pueden incluir todos los sistemas desarrollados. Esta clasificación fue propuesta por Sanderson y Weiss en 1987 después de realizar estudios para ello. A pesar de que ya han pasado más de dos décadas, la clasificación hoy en día continúa vigente.

### Control servovisual indirecto basado en imagen

En este esquema de control,  $\mathbf{p}$  está formado por los parámetros de imagen, por lo que la señal de error está definida en términos del espacio de las características de imagen. Se puede decir que las cámaras de video son utilizadas como sensores 2D. En la Figura 1.6 se ilustra el esquema de control. De la señal de video se extrae la información de interés para formar a  $\mathbf{p}$ , posteriormente, se le compara con el valor deseado y con base en el error obtenido, se calcula la ley de control diseñada en espacio de imagen. Esta señal sirve de entrada, aplicando el Jacobiano inverso, para el controlador articular del robot, cuya referencia es  $\dot{\mathbf{q}}$ . Este último controlador se encarga de manipular al robot y garantizar estabilidad. A este esquema también se le conoce como control servovisual dinámico basado en imagen.

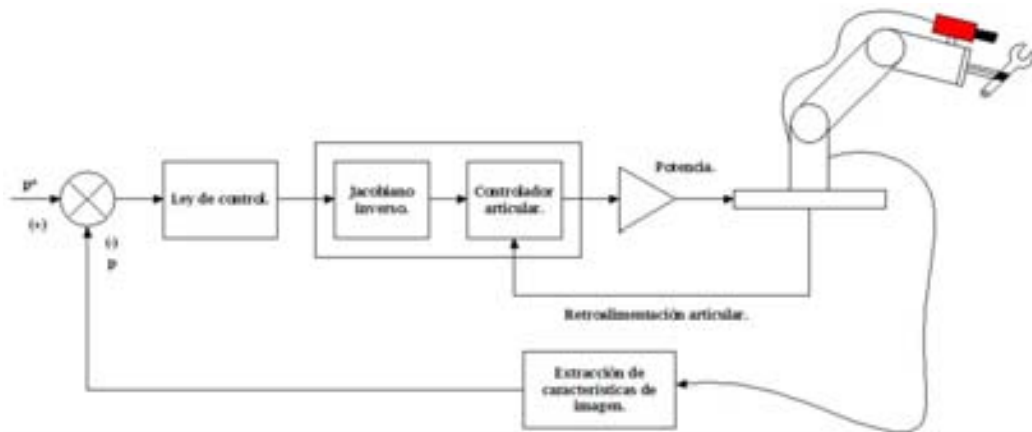


Figura 1.6: Control servovisual indirecto basado en imagen.

### Control servovisual directo basado en imagen

A diferencia del esquema anterior, en este caso, se retira el controlador articular del robot, para que sea la ley de control definida en espacio de imagen, quien se encargue de forma directa de gobernar al robot y de proporcionar estabilidad al sistema. En las aplicaciones, es menos común encontrar este esquema que el anterior, ya que representa un desafío mayor debido a que el periodo de muestreo del sensor de visión junto con el tiempo de procesamiento de imagen, es mucho más grande comparado con el tiempo de muestreo de

un sensor de posición articular, generando con esto fuertes probabilidades de inestabilidad. La Figura 1.7 ilustra este esquema, al que también se le conoce como control servovisual estático basado en imagen.

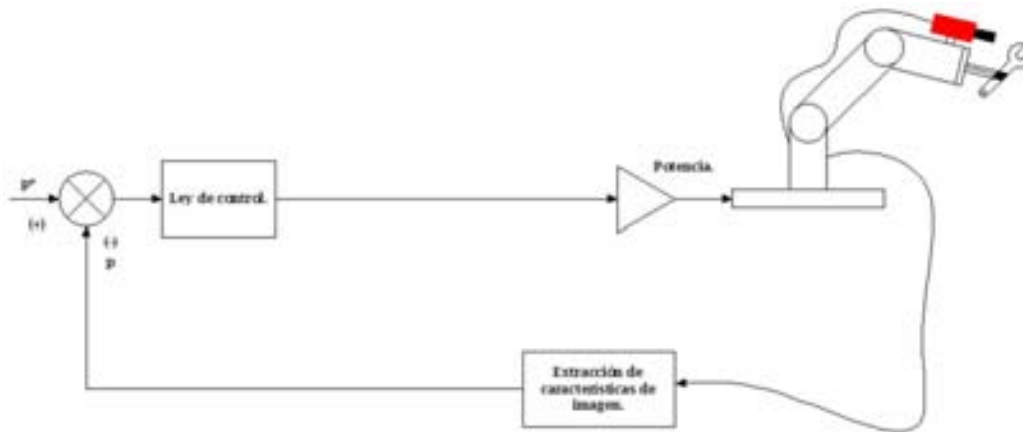


Figura 1.7: Cotrol servovisual directo basado en imagen.

### Control servovisual indirecto basado en posición

En este esquema de control,  $\mathbf{p}$ , que depende tanto de los parámetros intrínsecos del sistema de visión como de la información tridimensional que se tenga de la escena, está definido por la posición y orientación del efector final del robot respecto a un objeto sobre el cual ejecuta una determinada tarea (véase la Figura 1.8). En contraste con el control servovisual basado en imagen, los datos extraídos de la información visual se usan en conjunto con modelos 3D del objeto para estimar a  $\mathbf{p}$ , es decir, la cámara de video es usada de manera indirecta como un sensor 3D. Una vez realizada la comparación entre la tarea deseada y  $\mathbf{p}$ , el error se usa para calcular la ley de control definida en espacio cartesiano y con ello fijar una entrada de referencia al controlador articular del robot. Cabe mencionar que como la relación entre los marcos de referencia de la cámara y del efector final del robot es constante, al estimar la posición y orientación de aquella se puede estimar también para éste.



Figura 1.8: Cotrol servovisual indirecto basado en posición.

### Control servovisual directo basado en posición

A diferencia del esquema anterior y en similitud con el control servovisual estático basado en imagen. En este esquema se elimina el controlador articular del manipulador y es la ley de control definida en espacio cartesiano quien gobierna directamente al robot. En la Figura 1.9 se muestra el esquema.

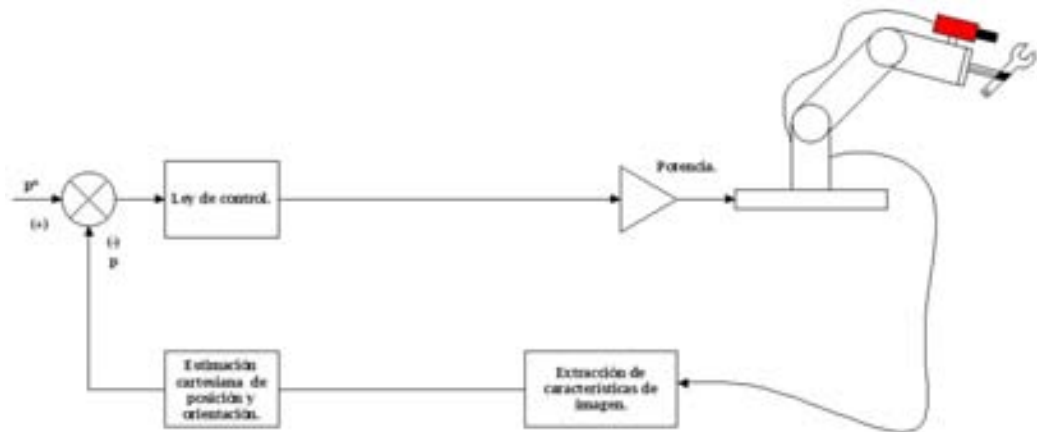


Figura 1.9: Cotrol servovisual directo basado en posición.

El control servovisual basado en posición resulta más práctico en el sentido de que la tarea está especificada directamente sobre el espacio cartesiano,

tal como se hace en cualquier aplicación. Sin embargo, existen bastantes aplicaciones tanto para uno como para otro esquema.

No se puede decir de manera tajante cuál de los dos esquemas es mejor, ya que ambos presentan ventajas y desventajas. La elección de uno u otro depende principalmente del tipo de tarea que se quiere realizar. Un factor que resulta clave para el correcto desempeño del sistema, es la adecuada elección de los parámetros de imagen, ya que están íntimamente relacionados con el diseño y el análisis de estabilidad del controlador.

Por un lado, en el esquema de control servovisual basado en imagen, el hecho de no estimar correctamente parámetros tridimensionales como la profundidad de los puntos de interés, resulta en causas de inestabilidad, mientras que por el otro, en el esquema de control servovisual basado en posición, una deficiente estimación de la posición y orientación del efector final del robot, afecta notablemente el desempeño del sistema.

Cuando sólo se emplea una cámara de video, el esquema basado en imagen presenta mayor robustez ante el ruido y errores en la calibración del sistema de visión, ya que en realidad, para el esquema basado en posición, la cámara no está diseñada para ser un sensor 3D. Si se utilizan dos cámaras de video para formar un sistema de visión estereoscópica, se puede obtener prácticamente de manera directa información en 3D. Con ello, los dos esquemas mejoran notablemente su desempeño. En este caso, la información tridimensional del objeto o el ambiente, para el caso del control servovisual basado en posición, ya no es necesaria.

Si se pretende trabajar con objetos móviles, el esquema basado en posición resulta más apropiado, debido a que conviene referir la velocidad de un objeto respecto a un sistema cartesiano en lugar de uno expresado en características de imagen.

En algunas ocasiones, los dos esquemas de control mencionados, se usan en conjunto con la finalidad de obtener un sistema que una las ventajas de ambos y disminuya las limitaciones de cada uno. De este modo, resulta el esquema de control híbrido, el cual puede ser directo o indirecto (véase la Figura 1.10). En este caso,  $\mathbf{p}$  se forma tanto por los parámetros de imagen, como por la posición y orientación del efector final del robot.

Aparte de los esquemas de control mencionados, se han estudiado y probado técnicas más avanzadas que no se exponen en esta breve introducción, algunas se apoyan en los esquemas básicos y entre ellas se tienen al control servovisual particionado y al control servovisual basado en imagen empleando coordenadas cilíndricas de los puntos de interés, entre otras.

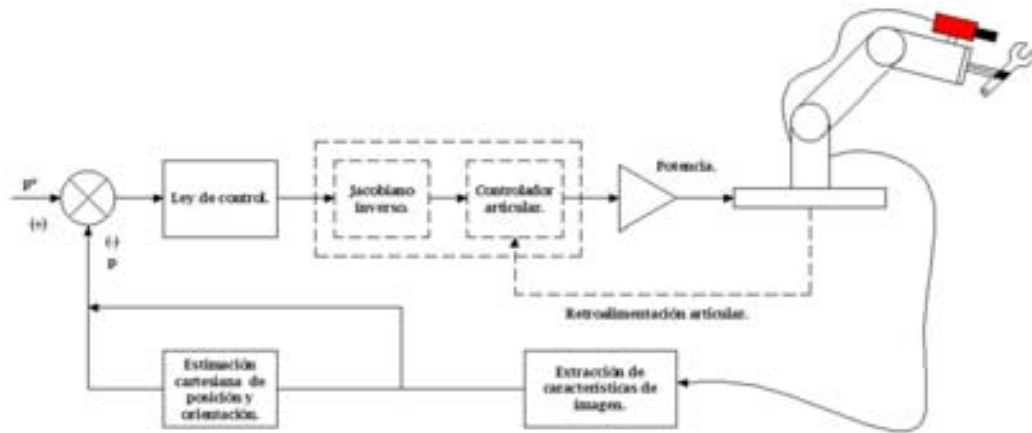


Figura 1.10: Cotrol servovisual híbrido.

## 1.2. Problemas en desarrollo

A pesar de que la historia comenzó a principios de los años setentas, la aplicación de los sistemas de control servovisual todavía permanece englobada en las áreas experimental y de investigación, ya que las soluciones de múltiples problemas, que permitan llevarla al “mundo real”, no han sido dadas de manera definitiva. Sin embargo, es grato mencionar que el avance ha sido significativo.

La problemática parece centrarse en los terrenos de las ciencias computacionales, donde se trabaja árdamente en la visión por computadora activa, el diseño de “cabezas” robóticas y de sistemas de visión inspirados biológicamente [50]. Sin embargo, al control automático le queda mucho trabajo que hacer. El desarrollo de dicho trabajo, se irá beneficiando en la medida en que los sensores y el hardware disponibles, continúen ofreciendo mayores prestaciones.

En primer lugar, la mayoría de los sistemas presentados en la literatura están desarrollados en el espacio de imagen, ante lo cual queda la pregunta de si es posible especificar las tareas comunes que realiza un robot cotidianamente, en este espacio. De ser así, el estudio para definir trayectorias en espacio de imagen ha sido poco investigado. Faltaría además, desarrollar herramientas virtuales e interfaces de operación que permitan programar tareas a los robots visualmente controlados.

Por un lado, es latente el problema de la pérdida de información visual

cuando se ejecuta una tarea, es decir, qué hacer cuando por los propios movimientos del robot o por los de algún objeto involucrado, las características de imagen elegidas desaparecen momentáneamente o por un periodo de tiempo largo. Para afrontar esta dificultad, se han venido probando diferentes ideas. En [16] se muestra un controlador que usa el difeomorfismo de un conjunto de configuraciones visibles del robot al espacio de imagen, de forma que los movimientos del robot son controlados para que los puntos de interés sean siempre visibles. Por otra parte, en [20] se presenta un esquema de control que utiliza el cambio de visibilidad en las características de imagen. Las estrategias que utilizan predictores de oclusiones y estimadores de los parámetros de imagen ocluidos, basados en el filtro de Kalman, son también investigadas [35].

Otro problema de considerable importancia, es el hecho de contar con una adecuada calibración del sistema de visión, ya que el desempeño del sistema completo depende en buena medida de la aproximación que se haga de la matriz de interacción y de la forma en que se elija a ésta, particularmente en los sistemas monoculares. Por ello, es mejor disponer de esquemas de control que no requieran de un procedimiento de calibración. Al respecto, en [51] se diseña un sistema de cámara móvil no calibrado, mientras que en [37] se expone un sistema de cámara fija igualmente no calibrado, ambos esquemas utilizan leyes de control adaptable para estimar los parámetros del sistema de visión. En el primero, la matriz de interacción es independiente de las coordenadas de profundidad de los puntos de interés.

Aparte de los problemas citados, un factor importante para el diseño de controladores servovisuales es el hecho de modelar de manera precisa la dinámica del robot, siempre y cuando el controlador haga uso del modelo dinámico de éste. Son pocos los trabajos que no emplean el modelo del robot en la ley de control o que consideran las incertidumbres de dicho modelo. En [2] se exhibe un controlador adaptable para lidiar con incertidumbres en el modelo dinámico de un sistema formado por un robot planar de dos eslabones que emplea una cámara fija. En ese esquema, se emplea además un segundo lazo de control adaptable para estimar los parámetros del sistema de visión.

Por último, es importante mencionar la necesidad de trabajar en el desarrollo de nuevas y mejores estrategias de control que permitan a los sistemas servovisuales gozar de mayor desempeño. Son varias las técnicas novedosas de control con las cuales se ha experimentado. Por citar alguna, en [19] se presenta un esquema de control conmutado que se apoya de las estructuras de control servovisual de imagen y de posición. El cambio entre una estructura

u otra se realiza con base en la más adecuada para determinado momento de la tarea que se ejecuta, a diferencia del control servovisual híbrido, en el que ambos esquemas se utilizan de manera conjunta.

El control servovisual de robots continúa teniendo muchos retos, no se sabe cuándo quedarán resueltos la mayoría de sus problemas en los que hoy trabaja la comunidad científica interesada en el tema, sin embargo, se augura un futuro prometedor, en el cual, esta técnica para controlar robots quedará bien establecida como cualquiera de las ya conocidas, ofreciendo mejores prestaciones y con ello incrementando notoriamente las aplicaciones de la robótica.

### 1.3. Resultados de la tesis

En esta tesis se desarrolló un controlador servovisual basado en imagen para controlar la posición en tres dimensiones del efector final de un robot articular de tres grados de libertad de un punto a otro, ambos expresados en coordenadas de imagen. El algoritmo de control no requiere del modelo dinámico del robot. La única información necesaria<sup>5</sup> es el Jacobiano geométrico, por consiguiente se requiere de las señales de posición articular de los encoders.

Para el control de los movimientos en tres dimensiones no se aplicó la visión estereoscópica, alternativamente, se recurrió a un enfoque más sencillo, diseñando un sistema de visión no calibrado formado por dos cámaras de video fijas observando al robot.

El modelado de las cámaras de video se obtuvo con el ya conocido modelo de proyección perspectiva. La tasa de variación de las coordenadas de imagen del punto de interés se estimó con el empleo de un observador lineal.

La teoría fue probada mediante una simulación por computadora, en la cual se consideró al robot *CRS A465* con sólo sus tres primeros grados de libertad. Las pruebas realizadas arrojaron resultados satisfactorios, tal como lo indican las gráficas de simulación presentadas en el Capítulo 4. Con ellas se ilustra la convergencia al punto deseado. Adicionalmente, se pone de manifiesto un cierto nivel de robustez por parte del controlador ante pequeñas variaciones en los parámetros externos del sistema de visión.

De acuerdo con la clasificación presentada en la Subsección 1.1.4, el sistema que se desarrolla en capítulos posteriores recaé en el esquema de control

---

<sup>5</sup>Además de las imágenes captadas por los sensores de visión.



servovisual directo basado en imagen. Se eligió esta estrategia debido a que hoy en día es una de las más investigadas, considerando además que el número de aplicaciones que demandan movimientos en 3D es mayor que aquellas para 2D. Conviene recalcar que el sistema de visión empleado, si bien presenta la desventaja de estar limitado en cuanto a la posición y orientación que deben guardar las cámaras de video, puesto que no se usa un sistema de visión estereoscópica, constituye una estrategia sencilla para un primer acercamiento hacia el control en 3D.

# Capítulo 2

## Preliminares

Una vez establecidos los fundamentos del control visual de robots y antes de presentar la estructura del controlador que se desarrolló en este trabajo, es necesario mostrar las herramientas preliminares que sirven de base para su posterior análisis. Tales herramientas son en primera instancia el modelo matemático que caracteriza la relación existente entre los objetos reales, en este caso el efector final del robot, y sus respectivos parámetros de imagen, así como algunas propiedades del modelo dinámico de robots.

Como se mencionó con anterioridad, los parámetros de imagen que se utilizaron en este trabajo son las coordenadas de imagen del efector final del robot, con tal fin, se supone al efector como un punto de interés en el espacio cartesiano.

Si se considera un punto tridimensional con coordenadas  $(x, y, z)$  y se proyecta sobre una pantalla, o bien, un plano de imagen, dicha proyección se compone sólo de dos coordenadas, llámense  $(y_1, y_2)$ . Si de manera inversa se quisiera partir de estas coordenadas de pantalla para obtener las coordenadas tridimensionales del punto en cuestión, no sería posible, ya que no se puede aplicar el mapeo de dos coordenadas a tres, puesto que se ha perdido la información de profundidad. Lo anterior indica que no se puede conocer la tercera coordenada que corresponde a la profundidad del punto de interés solamente con la información de las coordenadas de imagen. Para controlar movimientos en 3D es necesario resolver el problema de la profundidad. Varias son las soluciones que se han empleado con éxito, una de ellas consiste en mover la cámara de video y tomar imágenes desde distintos puntos de visión para realizar posteriormente un cómputo que entregue la información requerida, más aún, es posible estimar la profundidad sin mover la cámara siempre y

cuando se tenga un amplio conocimiento a priori sobre la geometría del sistema, que ayude a realizar una serie de cálculos. Sin embargo, una manera más directa de atacar el problema es utilizar una segunda cámara de video. Esto requiere generalmente de menos cálculos pero de mayor capacidad de procesamiento, la cual es posible obtener con las computadoras comerciales de las que se dispone hoy en día. Un método al que se ha venido recurriendo para los sistemas binoculares es la visión estereoscópica, método que no se empleó para este proyecto y por lo tanto no se ahonda en su descripción.

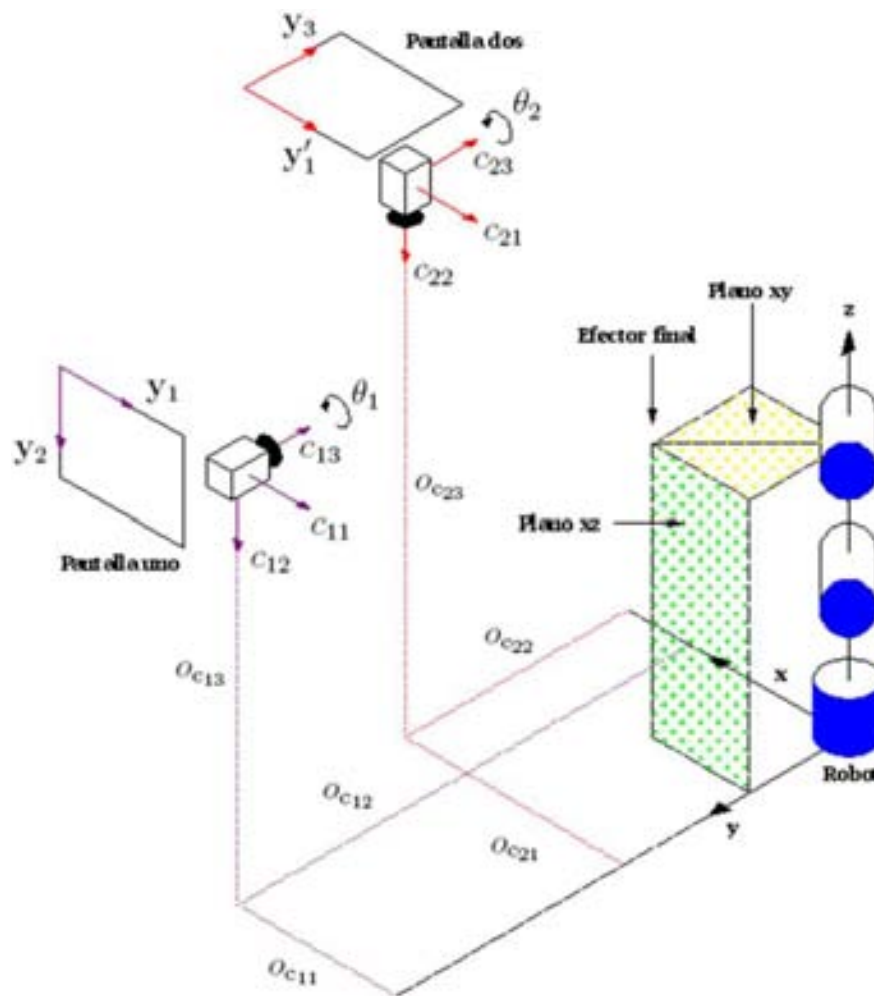


Figura 2.1: Configuración de las cámaras de video respecto al robot.

En el presente trabajo se propone el uso de dos cámaras de video<sup>1</sup>, una colocada al frente del robot denominada cámara uno y otra por arriba de él denominada cámara dos, tal como se aprecia en la Figura 2.1. Inicialmente se supone que las cámaras pueden tener cualquier posición, además de una rotación, para la cámara uno, respecto a su eje óptico  $c_{13}$ , y para la cámara dos, respecto a su eje  $c_{23}$ . Las únicas restricciones referentes a la orientación de las cámaras son:

1. Que el plano de imagen de la cámara uno sea paralelo al plano  $xz$  del marco de referencia.
2. Que el eje  $c_{13}$  de la cámara uno, sea paralelo al eje  $c_{23}$  de la cámara dos, esto es, que los ejes ópticos de ambas cámaras sean perpendiculares.
3. Que los ejes de pantalla  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$  formen un sistema dextrógiro.<sup>2</sup>

De esta manera, con la cámara uno se obtienen las coordenadas  $(y_1, y_2)$  correspondientes al plano  $xz$ , mientras que con la cámara dos, la coordenada  $y_3$  que es paralela al eje  $\mathbf{y}$ . Nótese que la información de  $y'_1$  no es relevante. Es decir, basta con despreciar  $y'_1$  para aplicar el control de posición en 3D mediante las coordenadas  $(y_1, y_2, y_3)$ .

## 2.1. Modelado de las cámaras de video

El objetivo de modelar las cámaras de video es conocer la expresión matemática que asigna las coordenadas de pantalla  $(y_1, y_2)$  a un punto tridimensional con coordenadas  $(x, y, z)$  expresadas respecto a un sistema de referencia. Aunque en la realidad las coordenadas de pantalla se obtienen mediante el empleo de técnicas para el procesamiento de imágenes<sup>3</sup> y herramientas computacionales, el modelo es necesario para realizar el diseño y el análisis del sistema de control, así como la simulación por computadora.

---

<sup>1</sup>En general, esta propuesta es más sencilla que la visión estereoscópica.

<sup>2</sup>Un sistema cartesiano es dextrógiro de tal forma que si se dirigen los dedos de la mano derecha en la dirección positiva del eje  $x$  y se flexionan formando un puño hacia el eje  $y$  positivo, el pulgar apunta en la dirección positiva del eje  $z$ . Si  $z$  apunta en la dirección contraria, el sistema es levógiro o izquierdo. (Bedford y Fowler 1996: pp. 38)

<sup>3</sup>El procesamiento de imágenes queda fuera del alcance de esta tesis, debido a que se desea hacer el control suponiendo que ya se tiene la información de las coordenadas de imagen.

La geometría de las cámaras, es decir, la manera en que se forma una imagen, es el punto inicial para obtener la aproximación matemática mencionada. Entre estas aproximaciones, una de las más precisas es la proyección perspectiva (véase la Figura 2.2). En ella se supone que la luz reflejada por un objeto que es proyectado sobre el plano de imagen, el cual se ubica en el sensor CCD<sup>4</sup>, pasa a través de un orificio de apertura infinitesimal, obteniéndose así una proyección invertida. A la distancia que existe entre la lente de la cámara y el foco o punto focal se le conoce como longitud focal, mientras que a la intersección del eje óptico, que pasa por el centro de la lente, con el plano de imagen, se le conoce como centro óptico. El modelo de proyección perspectiva constituye un mapeo no lineal a partir del cual se generan algunos modelos lineales que pueden resultar útiles dependiendo de la naturaleza de la aplicación que se tenga en mente.

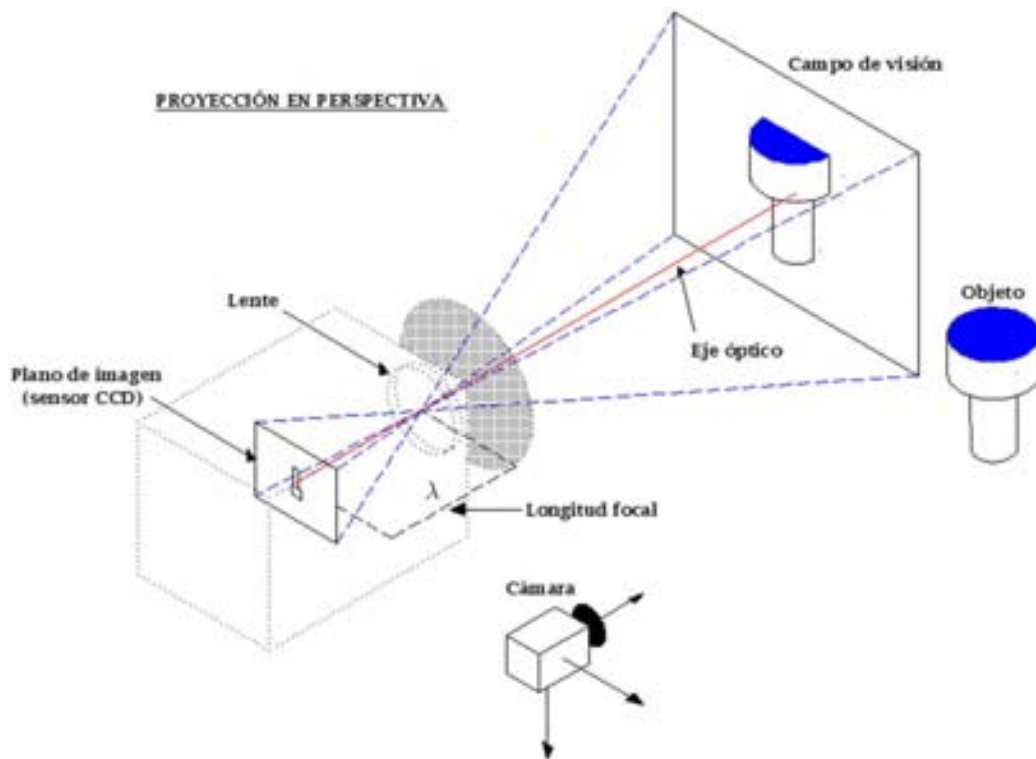


Figura 2.2: Representación de la proyección perspectiva.

<sup>4</sup>Charge Coupled Device

A continuación se muestran los pasos para obtener el modelo de ambas cámaras; para ello, se toma como punto de partida la Figura 2.3, en donde se ilustran los vectores, marcos de referencia y relaciones necesarios para la obtención del modelo.

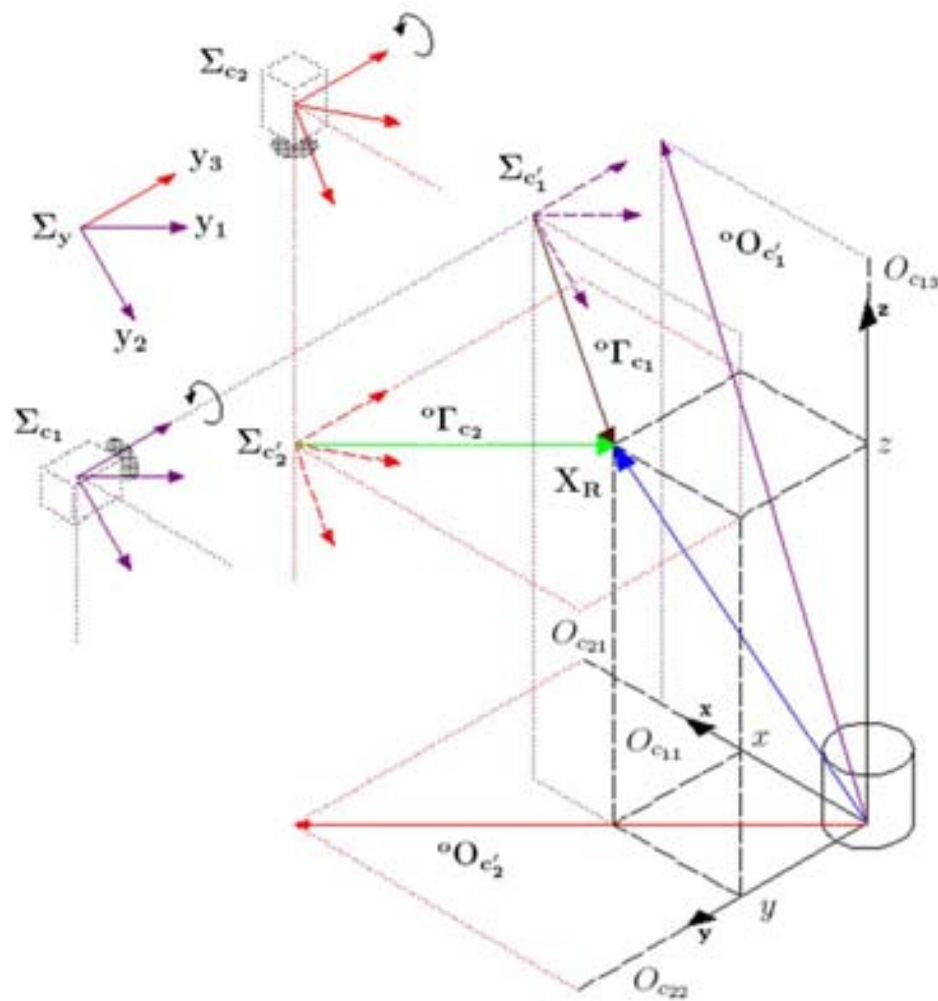


Figura 2.3: Geometría para la obtención del modelo de ambas cámaras.

### 2.1.1. Cámara uno

De la Figura 2.3 se puede ver que el vector de posición del efector final del robot viene dado por

$$\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = {}^o\mathbf{o}_{c'_1} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + {}^o\mathbf{\Gamma}_{c_1} \quad (2.1)$$

despejando

$${}^o\mathbf{\Gamma}_{c_1} = \mathbf{x}_R - \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} - {}^o\mathbf{o}_{c'_1} = \begin{bmatrix} {}^o\Gamma_{c_{1x}} \\ {}^o\Gamma_{c_{1y}} \\ {}^o\Gamma_{c_{1z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^o\Gamma_{c_{1x}} \\ 0 \\ {}^o\Gamma_{c_{1z}} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

que representa la posición del efector final del robot con respecto a un sistema de referencia auxiliar  $\Sigma_{c'_1}$  de la cámara uno, el cual es una proyección sobre el plano  $xz$  en el que se encuentra el punto de interés. Considerando trabajar únicamente en el plano  $xz$  se construyen los siguientes vectores

$$\bar{\mathbf{x}}_{R_1} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$${}^o\bar{\mathbf{\Gamma}}_{c_1} = \begin{bmatrix} \Gamma_{c_{1x}} \\ \Gamma_{c_{1z}} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$${}^o\bar{\mathbf{o}}_{c'_1} = \begin{bmatrix} o_{c_{11}} \\ o_{c_{13}} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

de lo anterior se obtiene

$${}^o\bar{\mathbf{\Gamma}}_{c_1} = \bar{\mathbf{x}}_{R_1} - {}^o\bar{\mathbf{o}}_{c'_1} = \begin{bmatrix} x - o_{c_{11}} \\ z - o_{c_{13}} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

El vector  ${}^o\bar{\mathbf{\Gamma}}_{c_1}$  sigue estando expresado con respecto al marco de referencia de la base, sólo basta multiplicar por una matriz de rotación  $\mathbf{R}_{\theta_1}$  para expresarlo respecto a  $\Sigma_{c'_1}$ . De la Figura 2.4 se obtiene con facilidad la matriz de rotación

$$\mathbf{R}_{\theta_1} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) \end{bmatrix} = {}^{c'_1}\mathbf{R}_{x_0z_0} \quad (2.7)$$

de esta manera

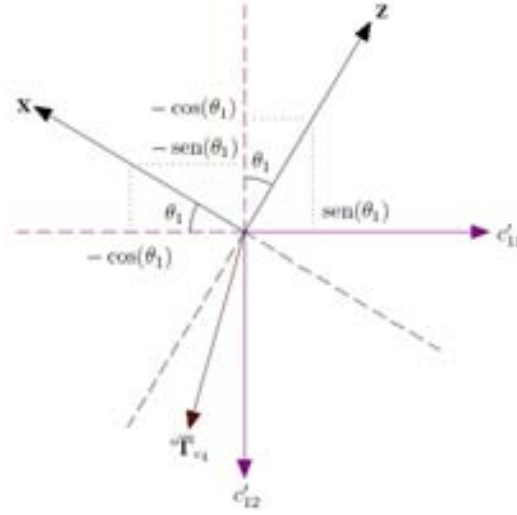


Figura 2.4: Rotación del sistema de referencia respecto al sistema  $\Sigma_{c'}$ .

$${}^{c'_1}\bar{\Gamma}_{c_1} = \begin{bmatrix} c'_{11} \\ c'_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{\theta_1} \circ \bar{\Gamma}_{c_1} \quad (2.8)$$

Una vez que se tiene la posición del punto de interés expresada respecto al marco auxiliar  $\Sigma_{c'}$ , se aplica la proyección perspectiva para proyectarlo sobre el plano de imagen. La Figura 2.5 ilustra la proyección.

Con el empleo de triángulos semejantes se obtienen las componentes del nuevo vector  ${}^{c_1}\bar{\Gamma}_{c_1}$  representado en el plano de imagen

$$-\frac{c_{11}}{\lambda_1} = \frac{c'_{11}}{o_{c_{12}} - y - \lambda_1} \Rightarrow c_{11} = -\frac{\lambda_1}{o_{c_{12}} - y - \lambda_1} c'_{11} \quad (2.9)$$

$$-\frac{c_{12}}{\lambda_1} = \frac{c'_{12}}{o_{c_{12}} - y - \lambda_1} \Rightarrow c_{12} = -\frac{\lambda_1}{o_{c_{12}} - y - \lambda_1} c'_{12} \quad (2.10)$$

utilizando la expresión (2.8) se escribe de manera compacta

$${}^{c_1}\bar{\Gamma}_{c_1} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{bmatrix} = -\frac{\lambda_1}{o_{c_{12}} - y - \lambda_1} \begin{bmatrix} c'_{11} \\ c'_{12} \end{bmatrix} = -\frac{\lambda_1}{o_{c_{12}} - y - \lambda_1} \mathbf{R}_{\theta_1} \circ \bar{\Gamma}_{c_1} \quad (2.11)$$

Enseguida basta multiplicar  ${}^{c_1}\bar{\Gamma}_{c_1}$  por el factor de conversión de metros a pixeles  $\alpha_1$ . Los pixeles son las unidades de las coordenadas de imagen. Se



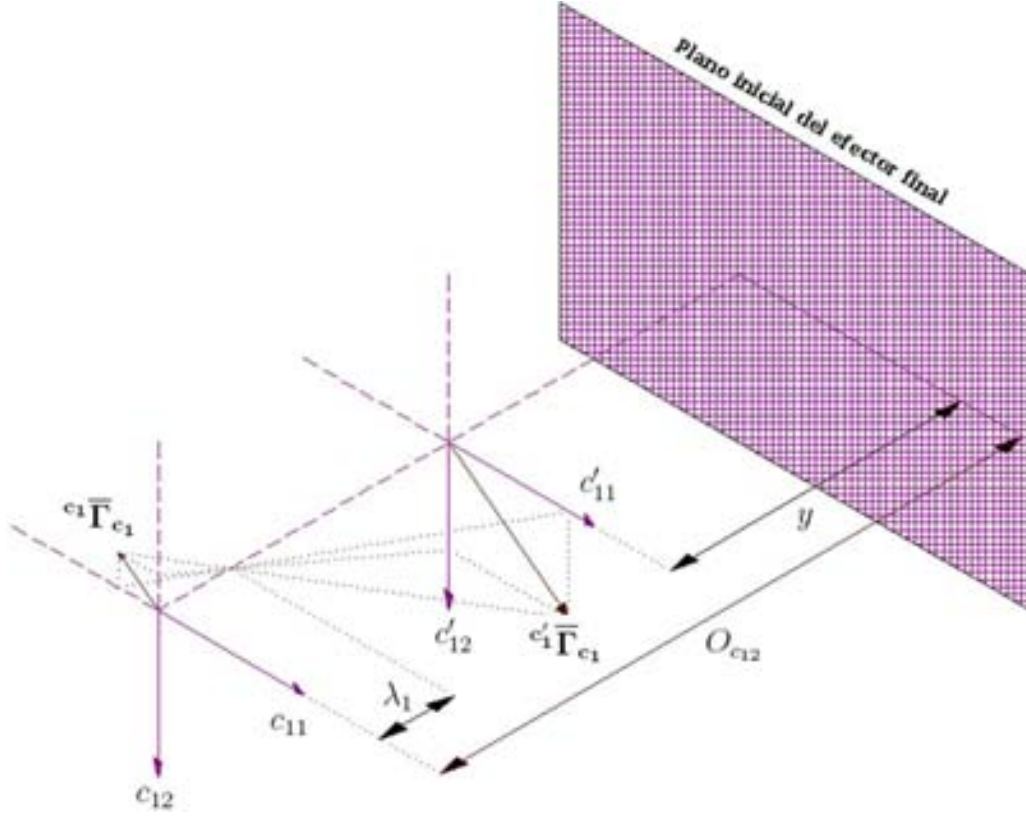


Figura 2.5: Proyección perspectiva.

considera que el pixel es cuadrado y se toma en cuenta el error debido a un probable margen de excentricidad del sensor CCD respecto al eje óptico.

$$I_{11} = \alpha_1 c_{11} + o_{11} \quad (2.12)$$

$$I_{12} = \alpha_1 c_{12} + o_{12} \quad (2.13)$$

de manera compacta utilizando (2.11) se tiene

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{12} \end{bmatrix} = \alpha_1 c_1 \bar{\Gamma}_{c_1} + \mathbf{o}_{I_1} \quad (2.14)$$

Pero debido a que la imagen se proyecta invertida, es necesario multiplicar (2.14) por un signo negativo, además considerando que el origen del sistema de coordenadas de imagen no se ubica al centro, sino en la esquina superior izquierda de la pantalla (ver la Figura 2.6) resulta que

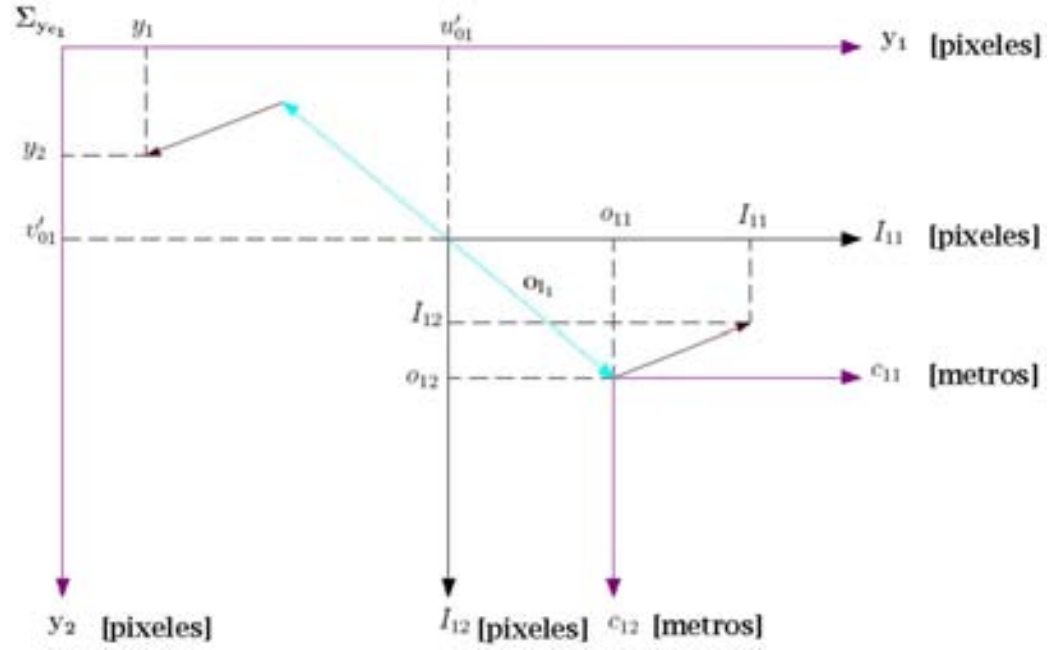


Figura 2.6: Origen del sistema de coordenadas de pantalla.

$$\mathbf{y}_{c_1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = -\mathbf{I}_1 + \begin{bmatrix} u'_{01} \\ v'_{01} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

sustituyendo (2.14) en (2.15)

$$\mathbf{y}_{c_1} = -\alpha_1 {}^{c_1}\bar{\mathbf{\Gamma}}_{c_1} - \mathbf{o}_{I_1} + \begin{bmatrix} u'_{01} \\ v'_{01} \end{bmatrix} = -\alpha_1 {}^{c_1}\bar{\mathbf{\Gamma}}_{c_1} + \begin{bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

con

$$\begin{bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_{01} \\ v'_{01} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} o_{11} \\ o_{12} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

sustituyendo (2.11) en (2.16)

$$\mathbf{y}_{c_1} = \frac{\alpha_1 \lambda_1}{o_{c_{12}} - y - \lambda_1} \mathbf{R}_{\theta_1} {}^o\bar{\mathbf{\Gamma}}_{c_1} + \begin{bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

y definiendo

$$\alpha_{\lambda 1} \triangleq \frac{\alpha_1 \lambda_1}{o_{c_{12}} - y - \lambda_1} \quad (2.19)$$

se expresa (2.18) de manera compacta

$$\mathbf{y}_{c_1} = \alpha_{\lambda 1} \mathbf{R}_{\theta_1} {}^o\bar{\mathbf{\Gamma}}_{c_1} + \begin{bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

donde al sustituir las ecuaciones (2.6) y (2.7), finalmente se obtiene:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \alpha_{\lambda 1} \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - o_{c_{11}} \\ z - o_{c_{13}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

### 2.1.2. Cámara dos

El modelo de la cámara dos se obtiene exactamente de la misma manera que el de la cámara uno, por lo que se omite una explicación detallada y sólo se usan las figuras necesarias para ilustrar sus diferencias. De la Figura 2.3, el vector de posición del efector final viene dado por

$$\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = {}^o\mathbf{o}_{c'_2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} + {}^o\mathbf{\Gamma}_{c_2} \quad (2.22)$$

despejando

$${}^o\mathbf{\Gamma}_{c_2} = \mathbf{x}_R - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} - {}^o\mathbf{o}_{c'_2} = \begin{bmatrix} {}^o\Gamma_{c_{2x}} \\ {}^o\Gamma_{c_{2y}} \\ {}^o\Gamma_{c_{2z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^o\Gamma_{c_{2x}} \\ {}^o\Gamma_{c_{2y}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

En el plano  $xy$  se construyen los siguientes vectores

$$\bar{\mathbf{x}}_{R_2} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$${}^o\bar{\mathbf{\Gamma}}_{c_2} = \begin{bmatrix} \Gamma_{c_{2x}} \\ \Gamma_{c_{2y}} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$${}^o\bar{\mathbf{o}}_{c'_2} = \begin{bmatrix} o_{c_{21}} \\ o_{c_{22}} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

con los cuales se tiene la relación

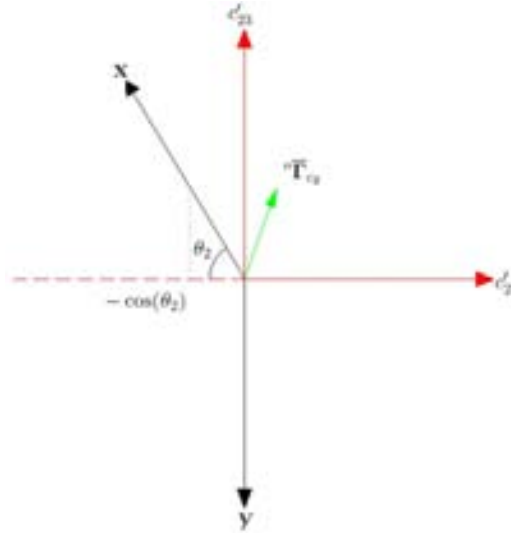


Figura 2.7: Rotación del sistema de referencia respecto al sistema  $\Sigma_{c'_2}$ .

$${}^o\bar{\Gamma}_{c_2} = \bar{x}_{R_2} - {}^o\bar{o}_{c'_2} = \begin{bmatrix} x - o_{c_{21}} \\ y - o_{c_{22}} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

En este caso la matriz de rotación que expresa a  ${}^o\bar{\Gamma}_{c_2}$  respecto al sistema  $\Sigma_{c'_2}$ , se obtiene con facilidad de la Figura 2.7:

$$\mathbf{R}_{\theta_2} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = {}^{c'_2}\mathbf{R}_{x_0y_0} \quad (2.28)$$

por tanto

$${}^{c'_2}\bar{\Gamma}_{c_2} = \begin{bmatrix} c'_{21} \\ c'_{23} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{\theta_2} {}^o\bar{\Gamma}_{c_2} \quad (2.29)$$

Aplicando los triángulos semejantes a la proyección perspectiva resulta

$$-\frac{c_{21}}{\lambda_2} = \frac{c'_{21}}{o_{c_{23}} - z - \lambda_2} \Rightarrow c_{21} = -\frac{\lambda_2}{o_{c_{23}} - z - \lambda_2} c'_{21} \quad (2.30)$$

$$-\frac{c_{23}}{\lambda_2} = \frac{c'_{23}}{o_{c_{23}} - z - \lambda_2} \Rightarrow c_{23} = -\frac{\lambda_2}{o_{c_{23}} - z - \lambda_2} c'_{23} \quad (2.31)$$

usando (2.29) se escribe de manera compacta

$${}_{c_2}\bar{\mathbf{T}}_{c_2} = \begin{bmatrix} c_{21} \\ c_{23} \end{bmatrix} = -\frac{\lambda_2}{o_{c_{23}} - z - \lambda_2} \begin{bmatrix} c'_{21} \\ c'_{23} \end{bmatrix} = -\frac{\lambda_2}{o_{c_{23}} - z - \lambda_2} \mathbf{R}_{\theta_2} {}^o\bar{\mathbf{T}}_{c_2} \quad (2.32)$$

Ahora considerando el factor de conversión de metros a pixeles y la posible excentricidad del arreglo CCD, se tiene

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} I_{21} \\ I_{23} \end{bmatrix} = \alpha_2 {}_{c_2}\bar{\mathbf{T}}_{c_2} + \mathbf{o}_{I_2} \quad (2.33)$$

mientras que tomando en cuenta el origen del sistema de referencia de las coordenadas de imagen

$$\mathbf{y}_{c_2} = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y_3 \end{bmatrix} = -\mathbf{I}_2 + \begin{bmatrix} v'_{02} \\ u'_{02} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

usando (2.32) y (2.33), la ecuación (2.34) se escribe como

$$\mathbf{y}_{c_2} = \frac{\alpha_2 \lambda_2}{o_{c_{23}} - z - \lambda_2} \mathbf{R}_{\theta_2} {}^o\bar{\mathbf{T}}_{c_2} + \begin{bmatrix} v_{02} \\ u_{02} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

definiendo

$$\alpha_{\lambda_2} \triangleq \frac{\alpha_2 \lambda_2}{o_{c_{23}} - z - \lambda_2} \quad (2.36)$$

se escribe (2.35) de forma compacta

$$\mathbf{y}_{c_2} = \alpha_{\lambda_2} \mathbf{R}_{\theta_2} {}^o\bar{\mathbf{T}}_{c_2} + \begin{bmatrix} v_{02} \\ u_{02} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

al sustituir  $\mathbf{R}_{\theta_2}$  y  ${}^o\bar{\mathbf{T}}_{c_2}$ , se obtiene el modelo de la cámara dos:

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y_3 \end{bmatrix} = \alpha_{\lambda_2} \begin{bmatrix} -\cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - o_{c_{21}} \\ y - o_{c_{22}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{02} \\ u_{02} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

### 2.1.3. Modelo usando ambas cámaras

Para obtener un modelo que considere la información de ambas cámaras, basta combinar las ecuaciones (2.21) y (2.38). Como ya se mencionó, se necesita la terna de coordenadas  $(y_1, y_2, y_3)$

$$y_1 = -\alpha_{\lambda 1} \cos(\theta_1)(x - o_{c11}) + \alpha_{\lambda 1} \text{sen}(\theta_1)(z - o_{c13}) + u_{01} \quad (2.39)$$

$$y_2 = -\alpha_{\lambda 1} \text{sen}(\theta_1)(x - o_{c11}) + \alpha_{\lambda 1} \cos(\theta_1)(z - o_{c13}) + v_{01} \quad (2.40)$$

$$y_3 = -\alpha_{\lambda 2}(y - o_{c22}) + u_{02} \quad (2.41)$$

definiendo

$$\cos(\theta) \triangleq c_\theta \quad , \quad \text{sen}(\theta) \triangleq s_\theta \quad (2.42)$$

Finalmente se escribe de manera matricial el modelo que liga las coordenadas  $(x, y, z)$  que representan la posición del efector final del robot, con las coordenadas de imagen  $(y_1, y_2, y_3)$ :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_{\lambda 1} c_{\theta_1} & 0 & \alpha_{\lambda 1} s_{\theta_1} \\ -\alpha_{\lambda 1} s_{\theta_1} & 0 & -\alpha_{\lambda 1} c_{\theta_1} \\ 0 & -\alpha_{\lambda 2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - o_{c11} \\ y - o_{c22} \\ z - o_{c13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

## 2.2. Relación entre coordenadas cartesianas y coordenadas de imagen

En la sección precedente se obtuvo el modelo matemático que permite conocer las coordenadas de imagen partiendo de las coordenadas cartesianas. De la ecuación (2.43) también sería posible ir en la dirección opuesta, es decir, de coordenadas de imagen a coordenadas cartesianas. De gran importancia en el control visual, es el hecho de conocer la relación que describe el efecto que tiene el cambio en las coordenadas cartesianas sobre las coordenadas de imagen, en otras palabras, cómo varían las coordenadas de imagen ante una razón de cambio en la posición del efector final de robot. Dicha relación se puede conocer si se deriva (2.43), tal como se muestra más adelante, para ello, primero es necesario reescribir a esta última ecuación de tal forma que

$$\begin{bmatrix} -\alpha_{\lambda 1} c_{\theta_1} & 0 & \alpha_{\lambda 1} s_{\theta_1} \\ -\alpha_{\lambda 1} s_{\theta_1} & 0 & -\alpha_{\lambda 1} c_{\theta_1} \\ 0 & -\alpha_{\lambda 2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{\theta_1} & 0 & s_{\theta_1} \\ -s_{\theta_1} & 0 & -c_{\theta_1} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{\lambda 1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{\lambda 2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\lambda 1} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

donde se define

$$\mathbf{R}_\theta \triangleq \begin{bmatrix} -c_{\theta_1} & 0 & s_{\theta_1} \\ -s_{\theta_1} & 0 & -c_{\theta_1} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$\mathbf{R}_\theta$  es una matriz de rotación constante en la cual no interviene  $\theta_2$ , por lo que el ángulo de la cámara dos no juega ningún papel en el análisis posterior.

$$\mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} \alpha_{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\lambda_1} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$\mathbf{A}$  es una matriz variable que contiene algunos parámetros de las cámaras, principalmente  $\alpha_i$  y  $\lambda_i$ , con  $i = 1, 2$ . Conviene también definir

$$\mathbf{o}_c \triangleq \begin{bmatrix} o_{c11} \\ o_{c22} \\ o_{c13} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{u}_0 \triangleq \begin{bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Con las definiciones anteriores, la ecuación (2.43) se escribe de manera compacta

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}_\theta \mathbf{A} (\mathbf{x}_R - \mathbf{o}_c) + \mathbf{u}_0 \quad (2.51)$$

entonces se puede obtener

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{R}_\theta \mathbf{A} \dot{\mathbf{x}}_R + \mathbf{R}_\theta \dot{\mathbf{A}} (\mathbf{x}_R - \mathbf{o}_c) \quad (2.52)$$

a continuación se calcula  $\dot{\mathbf{A}}$ , utilizando (2.19) y (2.36)

$$\frac{d(\alpha_{\lambda_1})}{dt} = \frac{\alpha_1 \lambda_1}{(o_{c_{12}} - y - \lambda_1)^2} \dot{y} = \frac{\alpha_{\lambda_1}^2}{\alpha_1 \lambda_1} \dot{y} \quad (2.53)$$

$$\frac{d(\alpha_{\lambda_2})}{dt} = \frac{\alpha_2 \lambda_2}{(o_{c_{23}} - z - \lambda_2)^2} \dot{z} = \frac{\alpha_{\lambda_2}^2}{\alpha_2 \lambda_2} \dot{z} \quad (2.54)$$

definiendo

$$\frac{\alpha_{\lambda_1}^2}{\alpha_1 \lambda_1} \triangleq \bar{\alpha}_1 \quad (2.55)$$

$$\frac{\alpha_{\lambda_2}^2}{\alpha_2 \lambda_2} \triangleq \bar{\alpha}_2 \quad (2.56)$$

se escriben (2.53) y (2.54) como

$$\frac{d(\alpha_{\lambda_1})}{dt} = \bar{\alpha}_1 \dot{y} \quad (2.57)$$

$$\frac{d(\alpha_{\lambda_2})}{dt} = \bar{\alpha}_2 \dot{z} \quad (2.58)$$

de tal modo que  $\dot{\mathbf{A}}$  está dada por

$$\dot{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{d(\alpha_{\lambda_1})}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d(\alpha_{\lambda_2})}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d(\alpha_{\lambda_1})}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 \dot{y} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}_2 \dot{z} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\alpha}_1 \dot{y} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Al ejecutar el producto  $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_R - \mathbf{o}_c)$ , se tiene

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_R - \mathbf{o}_c) = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 \dot{y} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}_2 \dot{z} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\alpha}_1 \dot{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - o_{c_{11}} \\ y - o_{c_{22}} \\ z - o_{c_{13}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 (x - o_{c_{11}}) \dot{y} \\ \bar{\alpha}_2 (y - o_{c_{22}}) \dot{z} \\ \bar{\alpha}_1 (z - o_{c_{13}}) \dot{y} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

o bien

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_R - \mathbf{o}_c) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\alpha}_1 (x - o_{c_{11}}) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\alpha}_2 (y - o_{c_{22}}) \\ 0 & \bar{\alpha}_1 (x - o_{c_{11}}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$



definiendo

$$\mathbf{\Psi} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \bar{\alpha}_1(x - o_{c11}) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\alpha}_2(y - o_{c22}) \\ 0 & \bar{\alpha}_1(x - o_{c11}) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

al sustituir (2.61) - (2.62) en (2.52) resulta

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{R}_\theta \mathbf{A} \dot{\mathbf{x}}_R + \mathbf{R}_\theta \mathbf{\Psi} \dot{\mathbf{x}}_R \\ &= \mathbf{R}_\theta (\mathbf{A} + \mathbf{\Psi}) \dot{\mathbf{x}}_R \end{aligned} \quad (2.63)$$

finalmente, se define

$$\mathbf{B} \triangleq (\mathbf{A} + \mathbf{\Psi}) = \begin{bmatrix} \alpha_{\lambda 1} & \bar{\alpha}_1(x - o_{c11}) & 0 \\ 0 & \alpha_{\lambda 2} & \bar{\alpha}_2(y - o_{c22}) \\ 0 & \bar{\alpha}_1(z - o_{c13}) & \alpha_{\lambda 1} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

para llegar a la relación buscada que vincula a  $\dot{\mathbf{x}}_R$  con  $\dot{\mathbf{y}}$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{R}_\theta \mathbf{B} \dot{\mathbf{x}}_R \quad (2.65)$$

Por otro lado, se sabe también que

$$\dot{\mathbf{x}}_R = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.66)$$

donde  $\mathbf{q}$  es el vector de posición articular y  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  el Jacobiano geométrico del robot. Sustituyendo (2.66) en (2.65) se obtiene:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{R}_\theta \mathbf{B} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.67)$$

La expresión anterior define la relación entre la velocidad articular  $\dot{\mathbf{q}}$  y la velocidad de las coordenadas de imagen  $\dot{\mathbf{y}}$ . Para garantizar que es posible ir en la dirección opuesta, esto es, de  $\dot{\mathbf{y}}$  obtener  $\dot{\mathbf{q}}$  o  $\dot{\mathbf{x}}_R$ , se debe probar la existencia de  $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{B}^{-1}$  y  $\mathbf{R}_\theta^{-1}$ . En el caso de  $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})$  se hace la suposición, bajo condiciones razonables, de que el robot no pasa por ninguna singularidad, por lo que sólo se mueve dentro de su espacio de trabajo de destreza. Para  $\mathbf{B}^{-1}$  se tiene que

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{B})} \text{adj}(\mathbf{B}) \quad (2.68)$$

al desarrollar  $\det(\mathbf{B})$ , resulta

$$\det(\mathbf{B}) = \alpha_{\lambda_1}^2 \alpha_{\lambda_2} \left( 1 - \frac{(z - o_{c13})(y - o_{c22})}{(o_{c12} - y - \lambda_1)(o_{c23} - z - \lambda_2)} \right) \quad (2.69)$$

el término  $\alpha_{\lambda_1}^2 \alpha_{\lambda_2} > 0$ , además, si

$$(z - o_{c13})(y - o_{c22}) \neq (o_{c12} - y - \lambda_1)(o_{c23} - z - \lambda_2) \quad (2.70)$$

$\det(\mathbf{B}) \neq 0$  y  $\mathbf{B}^{-1}$  existe. En general, esto depende de los desplazamientos del robot, aunque con la ubicación de las cámaras es posible garantizar la expresión (2.70). Por último,  $\mathbf{R}_\theta^{-1}$  existe y es igual a

$$\mathbf{R}_\theta^{-1} = \mathbf{R}_\theta^T = \begin{bmatrix} -c_{\theta_1} & -s_{\theta_1} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_{\theta_1} & -c_{\theta_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

De esta manera, se tiene que el mapeo inverso que va de  $\dot{\mathbf{y}}$  a  $\dot{\mathbf{q}}$  es igual a

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_\theta^T\dot{\mathbf{y}} \quad (2.72)$$

Conviene recalcar que si se pretendiera hacer uso de las ecuaciones (2.65), (2.67) o (2.72) en el diseño del controlador, se debe conocer la matriz  $\mathbf{B}$ , la cual contiene la mayoría de los parámetros del sistema de visión. Conocer a  $\mathbf{B}$  implica realizar un procedimiento de calibración que arroje el dato de cada uno de los parámetros involucrados. Este procedimiento normalmente es complicado, extenso y carece de gran precisión, razón por la cual ha sido evitado, tal como se aprecia más adelante. Esto representa un factor clave en el presente trabajo.

Para el caso de  $\mathbf{R}_\theta$ , se puede emplear un valor aproximado  $\theta'_1$ , es decir

$$\mathbf{R}_{\theta'} = \begin{bmatrix} -c_{\theta'_1} & 0 & s_{\theta'_1} \\ -s_{\theta'_1} & 0 & -c_{\theta'_1} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

con esto se considera el error referente al ángulo de rotación como

$$\tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \theta'_1 \quad (2.74)$$

Para escribir una matriz  $\mathbf{R}_{\tilde{\theta}_1}$  en función de  $\tilde{\theta}_1$  se hace

$$\mathbf{R}_{\tilde{\theta}_1} = \mathbf{R}_{\theta'}^T \mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} -c_{\theta'_1} & -s_{\theta'_1} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_{\theta'_1} & -c_{\theta'_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_{\theta_1} & 0 & s_{\theta_1} \\ -s_{\theta_1} & 0 & -c_{\theta_1} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

después de realizar el producto y aplicar identidades trigonométricas se obtiene:

$$\mathbf{R}_{\tilde{\theta}_1} = \begin{bmatrix} c_{\tilde{\theta}_1} & 0 & -s_{\tilde{\theta}_1} \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{\tilde{\theta}_1} & 0 & c_{\tilde{\theta}_1} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

### 2.3. Modelo dinámico de robots manipuladores

En esta sección se presenta el modelo dinámico de robots manipuladores, así como las propiedades que son de utilidad para el caso particular del desarrollo de los siguientes capítulos.

La ecuación que describe la dinámica de un robot manipulador rígido con articulaciones de revolución y de  $n$  grados de libertad, puede obtenerse a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange (Siciliano y Sciavicco 2003: pp 120):

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.77)$$

donde  $\mathbf{q} \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de coordenadas generalizadas,  $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es una matriz simétrica definida positiva denominada matriz de inercia y que se asocia a la energía cinética del manipulador,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, éste es único a pesar de que la matriz centrífuga y de Coriolis  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  puede no serlo;  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de fuerzas o pares gravitacionales,  $\mathbf{D} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal definida semipositiva que considera fricción viscosa en las articulaciones, y  $\boldsymbol{\tau} \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de fuerzas externas, es decir, las fuerzas y pares que se aplican a cada una de las articulaciones del robot a través de su respectivo accionador.

### 2.3.1. Propiedades

Las propiedades de la ecuación (2.77) que se presentan a continuación fueron extraídas de [31]. Para un detalle más profundo consúltese dicha fuente bibliográfica.

**Propiedad 2.3.1.** *Linealidad en términos de los parámetros dinámicos.*

Considérense las matrices  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,  $\mathbf{D}$  y el vector  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  de la ecuación (2.77). Se tiene entonces la siguiente propiedad: para todo  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathfrak{R}^n$

$$\boxed{\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}} \quad (2.78)$$

donde  $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  es el regresor y  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathfrak{R}^m$  contiene las  $m$  constantes dependientes de los parámetros dinámicos. La constante  $n$  es el número de grados de libertad, mientras que el valor entero  $m$  depende de la selección de los parámetros dinámicos del robot.

△

**Propiedad 2.3.2.** *Sobre la matriz de inercia  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ .*

Debido a que la matriz  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  es simétrica y definida positiva, de acuerdo con el teorema de Rayleigh-Ritz esta satisface:

$$\boxed{\lambda_H \|\mathbf{x}\|^2 \geq \mathbf{x}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{x} \geq \lambda_h \|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{q}, \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n} \quad (2.79)$$

con

$$\lambda_H \triangleq \max_{\mathbf{q} \in \mathfrak{R}^n} \lambda_{\max} \mathbf{H}(\mathbf{q}) \quad (2.80)$$

$$\lambda_h \triangleq \min_{\mathbf{q} \in \mathfrak{R}^n} \lambda_{\min} \mathbf{H}(\mathbf{q}) \quad (2.81)$$

y donde además

$$0 < \lambda_h \leq \lambda_H < \infty \quad (2.82)$$

△

**Propiedad 2.3.3.** *Sobre la matriz centrífuga y de Coriolis  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ .*

La matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  está relacionada con la matriz de inercia  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  por la expresión:

$$\boxed{\mathbf{x}^T \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n} \quad (2.83)$$

es decir,  $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es antisimétrica. En forma análoga la matriz  $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es antisimétrica, y también resulta cierto que

$$\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \quad (2.84)$$

independientemente de la manera en que se obtenga  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , esta siempre satisface

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathfrak{R}^n \quad (2.85)$$

△

**Propiedad 2.3.4.** *Sobre el vector de gravedad  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ .*

Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, el vector  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  es Lipschitz, es decir, existe una constante  $k_g > 0$  tal que:

$$\boxed{\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq k_g \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^n} \quad (2.86)$$

Una forma sencilla de calcular  $k_g$  es como

$$k_g \geq n \left[ \max_{i,j,q} \left| \frac{\partial(g_i(\mathbf{q}))}{\partial q_j} \right| \right] \quad (2.87)$$

además,  $k_g$  satisface

$$k_g \geq \left\| \frac{\partial(\mathbf{g}(\mathbf{q}))}{\partial \mathbf{q}} \right\| \geq \lambda_{\max} \left\{ \frac{\partial(\mathbf{g}(\mathbf{q}))}{\partial \mathbf{q}} \right\} \quad (2.88)$$

△

# Capítulo 3

## Control servovisual en 3D

Los robots industriales son capaces de desarrollar con éxito una gran variedad de aplicaciones, esto se debe en gran medida al desempeño de los controladores comerciales de que disponen. Sin embargo, existen todavía bastantes tareas para las cuales dichos controladores no pueden garantizar un correcto funcionamiento del robot. Ésta es una de las principales razones por las que el diseño de controladores para robots continúa teniendo un gran auge dentro de la comunidad científica de control automático.

La mayoría de tales controladores comerciales están desarrollados en el espacio articular, por lo cual requieren del cálculo de la cinemática inversa y generalmente la velocidad angular de las articulaciones, en varias ocasiones necesitan además el conocimiento del modelo dinámico del robot. Lo anterior, si bien es algo que se puede superar con un tanto de esfuerzo, tiene la desventaja de contribuir a la imprecisión en los movimientos del robot, dado que las tareas siempre se especifican en el espacio cartesiano, la diferenciación numérica induce señales con ruido y el modelo dinámico nunca es preciso. Alternativamente, se puede diseñar el controlador de manera directa sobre el espacio cartesiano, sin embargo el segundo y tercer problemas antes mencionados normalmente no desaparecen, pero es posible recurrir al uso de observadores para obtener la velocidad cartesiana. Cabe mencionar que el modelo dinámico en este caso, aunque hereda las propiedades del anterior, resulta un poco más complejo.

En este capítulo se presenta el diseño de un control servovisual en 3D basado en imagen cuyo objetivo consiste en controlar la posición del efector final del robot de un punto a otro, ambos expresados en coordenadas de imagen, sin importar la trayectoria a seguir. El esquema es un controlador no

lineal basado en observador cuya ley es en esencia un PID. Este controlador constituye una adaptación del algoritmo presentado en [43], donde se diseña un controlador en espacio cartesiano para seguimiento de trayectorias que no requiere del conocimiento del modelo dinámico del robot y que utiliza un observador para estimar la velocidad cartesiana. Este último trabajo, se basa a su vez en [42], donde se muestra el diseño de un controlador PID deslizante. Debido a la adaptación que se llevó a cabo, el control servovisual presentado en este capítulo tampoco requiere del modelo dinámico del robot ni del cálculo de la cinemática inversa, sólo necesita la información de las posiciones articulares.

### 3.1. Adaptación de coordenadas cartesianas a coordenadas de imagen

Trabajar en dos pantallas con la información de las coordenadas de imagen del efector final del robot, resulta prácticamente lo mismo que si se trabaja con las coordenadas  $(x, y, z)$  directamente en el espacio cartesiano. Por esta razón se pudo hacer sin ningún problema la adaptación de un controlador que opera en el espacio de trabajo del robot, a otro que actúa sobre las características de imagen, las cuales no son más que una proyección de los movimientos del robot en dos planos de imagen.

Si se considera por ejemplo que el robot se mueve sobre un plano (véase la Figura 3.1 inciso a), y se desea ir de una posición inicial a una final, un control diseñado en espacio cartesiano puede llevar sin ningún problema al robot de un punto a otro. Si por otra parte, ese mismo experimento se realizara utilizando una cámara de video que capte dentro de su campo de visión el efector final del robot y una área considerable a su alrededor, el mismo algoritmo de control sin necesidad de mayores modificaciones, ahora utilizando las coordenadas de imagen correspondientes a la posición inicial, lograría de igual forma el objetivo de llevar al robot a un punto final de pantalla, a pesar de que la posición cartesiana que éste representa, no coincida con la del primer experimento, ya que debido a factores como la resolución de la cámara, el factor de conversión de metros a píxeles etc, dichas posiciones son en general diferentes.

De manera análoga, el resultado anterior puede extenderse para el caso tridimensional cuando los movimientos del robot abandonan el plano y se

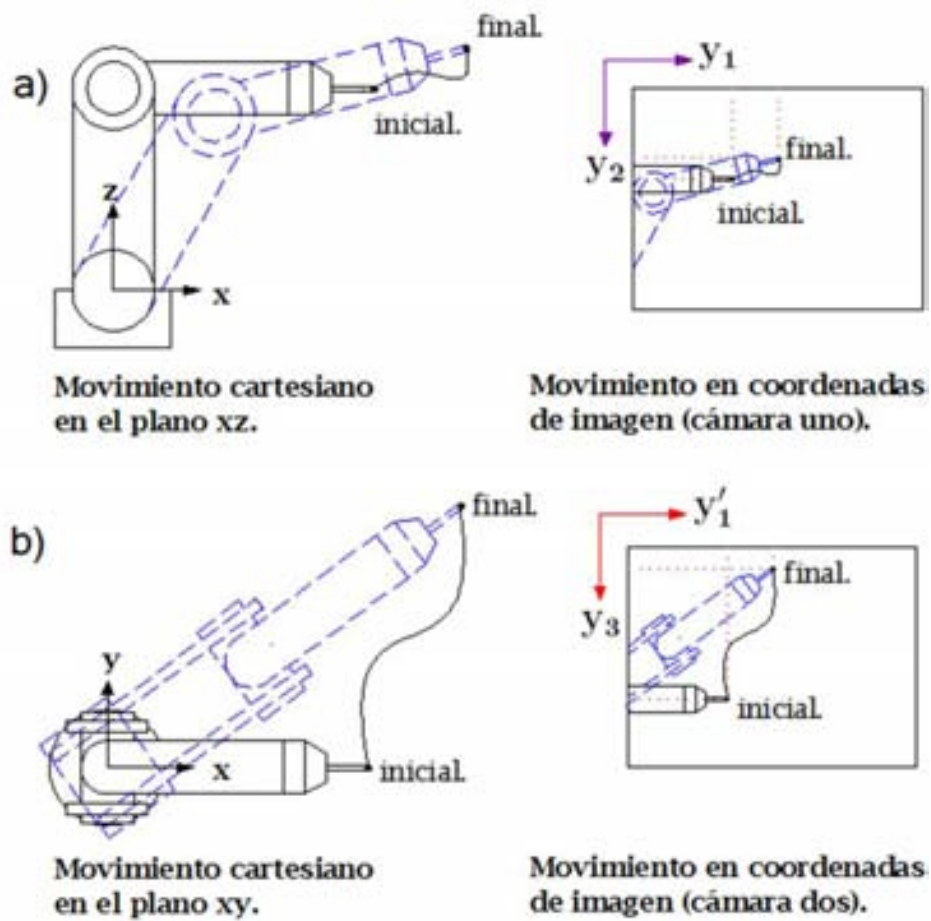


Figura 3.1: Adaptación de coordenadas cartesianas a coordenadas de imagen.

ejecuta un movimiento en profundidad (véase la Figura 3.1 inciso b). En este caso el movimiento del robot puede considerarse como una combinación de dos movimientos planares,  $xz$  y  $xy$ . Se advierte entonces la necesidad de una segunda cámara de video<sup>1</sup> que proporcione información de la tercera coordenada si se quiere aplicar el control servovisual en 3D.

Una vez establecidas las similitudes entre los espacios cartesiano y de imagen, a continuación se exponen el diseño y las relaciones matemáticas que definen el controlador. La ley de control viene dada por:

<sup>1</sup>Mediante el empleo de ciertas técnicas es incluso posible utilizar sólo una cámara de video.



$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta'}^T \mathbf{s}_0} \quad (3.1)$$

con  $\mathbf{K}_p \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  una matriz diagonal definida positiva,  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  el Jacobiano geométrico del robot,  $\mathbf{R}_{\theta'} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  una matriz de rotación donde  $\theta'$  es el ángulo supuesto de la cámara uno respecto a su eje óptico

$$\mathbf{R}_{\theta'} = \begin{bmatrix} -c_{\theta'_1} & 0 & s_{\theta'_1} \\ -s_{\theta'_1} & 0 & -c_{\theta'_1} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Por último,  $\mathbf{s}_0 \in \mathfrak{R}^n$  es un término de retroalimentación cuyo diseño se presenta un poco más adelante.

Dado que el esquema de control original está diseñado para el seguimiento de trayectorias, es necesario contar con un algoritmo que se encargue de generar una trayectoria entre dos puntos del espacio de imagen<sup>2</sup>. Este algoritmo puede ser cualquiera de entre los ya conocidos (e.g. un polinomio). En este caso se eligió uno basado en campos de velocidad [29], el cual tiene la ventaja de no depender del tiempo y además, si por alguna razón el robot es interrumpido durante la ejecución de una tarea, al reiniciar la acción, puede continuar con su trayectoria sin mayores problemas. Apoyándose del algoritmo presentado en [45], éste queda definido de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{y}}_d = \mathbf{v}(\mathbf{y}) = -\frac{k_0}{\|\tilde{\mathbf{y}}\| + \epsilon} \tilde{\mathbf{y}} - k_1(\mathbf{y}_d - \mathbf{y}_f) \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{y}_d \in \mathfrak{R}^n$  es la trayectoria deseada,  $\mathbf{y}_f \in \mathfrak{R}^n$  es el punto final al que se quiere llegar,  $k_0$ ,  $\epsilon$  y  $k_1$  son constantes arbitrarias que modifican la convergencia del algoritmo. De esta forma,  $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^n$  representa la trayectoria real que describe el efector final del robot, variable que se desea controlar y por tanto, la salida del sistema de control. El error de posicionamiento está dado por

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_f \quad (3.4)$$

Por otra parte, se supone que la velocidad  $\dot{\mathbf{y}} \in \mathfrak{R}^n$  no se encuentra disponible para medición. De modo que se define al error de observación como

$$\mathbf{z} \triangleq \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \quad (3.5)$$

Se define además la variable auxiliar

<sup>2</sup>En el control de posición también se requiere de tal algoritmo.

$$\dot{\mathbf{y}}_0 \triangleq \dot{\hat{\mathbf{y}}} - \Lambda_z \mathbf{z} \quad (3.6)$$

con  $\Lambda_z \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  una matriz diagonal definida positiva.

A continuación se propone el observador lineal:

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}} \triangleq \dot{\hat{\mathbf{y}}}_0 + \Lambda_z \mathbf{z} + k_d \mathbf{z} \quad \dot{\hat{\mathbf{y}}}(0) = 0 \quad (3.7)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}}_0 \triangleq \dot{\mathbf{y}}_d - \Lambda_y (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d) + \mathbf{s}_d + k_d \Lambda_z \int_0^t \mathbf{z} \, d\delta \quad (3.8)$$

con  $\Lambda_y \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  una matriz diagonal definida positiva,  $k_d$  la ganancia del observador y  $\mathbf{s}_d \in \mathfrak{R}^n$  un término que ayuda a mejorar la respuesta en estado transitorio

$$\mathbf{s}_d \triangleq \mathbf{s}(0) \exp^{-kt} \quad (3.9)$$

donde

$$\mathbf{s} \triangleq \dot{\hat{\mathbf{y}}} - \dot{\mathbf{y}}_d + \Lambda_y (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d) \triangleq \dot{\hat{\mathbf{y}}} + \Lambda_y \bar{\mathbf{y}} \quad (3.10)$$

Para proceder con el diseño del controlador se define primero el error de seguimiento

$$\Delta \mathbf{y} \triangleq \mathbf{y} - \mathbf{y}_d \quad (3.11)$$

ahora, se define la variable

$$\dot{\mathbf{y}}_r \triangleq \dot{\mathbf{y}}_d - \Lambda_y (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d) + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \quad (3.12)$$

con  $\mathbf{K}_\gamma \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  una matriz diagonal definida positiva y donde

$$\boldsymbol{\sigma} \triangleq \int_0^t [\mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1(\delta) + \text{sgn}(\mathbf{s}_1(\delta))] \, d\delta \quad (3.13)$$

con  $\mathbf{K}_\beta \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  una matriz diagonal definida positiva y donde

$$\mathbf{s}_1 \triangleq \mathbf{s} - \mathbf{s}_d \quad (3.14)$$

$$\text{sgn}(\mathbf{s}_1) \triangleq [\text{sgn}(s_{11}) \dots \text{sgn}(s_{1n})]^T \quad (3.15)$$

alternativamente se puede usar

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \triangleq \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1 + \text{sgn}(\mathbf{s}_1) \quad (3.16)$$

Finalmente, utilizando (3.6) y (3.12) el término de retroalimentación  $\mathbf{s}_0$  se define como:

$$\mathbf{s}_0 \triangleq \dot{\mathbf{y}}_0 - \dot{\mathbf{y}}_r \quad (3.17)$$

En la Figura 3.2 se ilustra la comparación del esquema de control entre los espacios cartesiano y de coordenadas de imagen. Prácticamente no existe entre ellos diferencia, salvo porque en el primero,  $\mathbf{x}_R$  se obtiene como función de  $\mathbf{q}$  al aplicar la cinemática directa, mientras que en el segundo,  $\mathbf{y}$  se obtiene de forma directa<sup>3</sup> con el empleo de ambas cámaras de video.

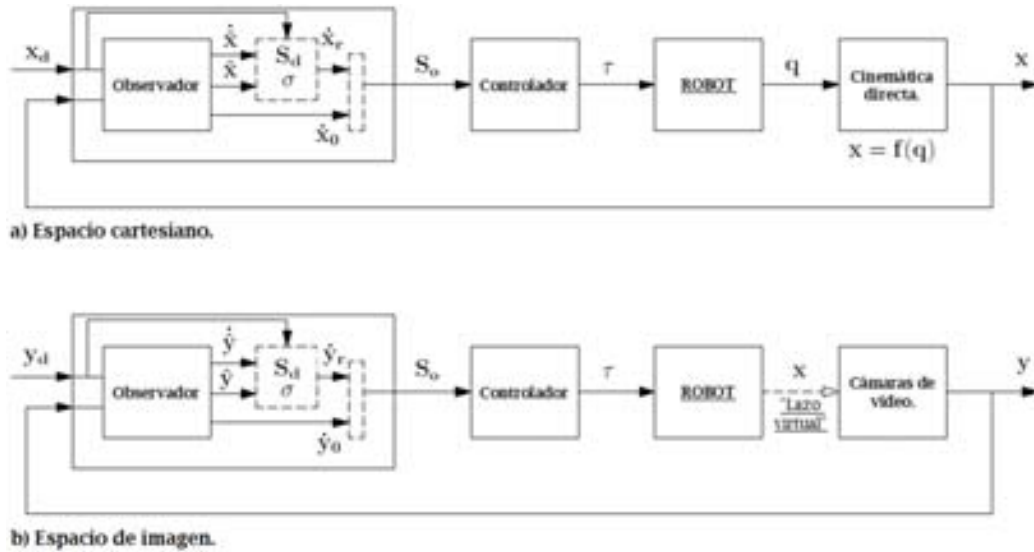


Figura 3.2: Diagrama esquemático de la adaptación.

<sup>3</sup>Es necesario hacer el procesamiento de imagen.

En el esquema de control servovisual, la única información que requiere el observador es  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{y}_d$  y  $\dot{\mathbf{y}}_d$ ; las dos últimas son calculadas por el algoritmo generador de trayectorias. A partir de las señales producidas por el observador, se construyen todas las variables necesarias para generar el término  $\mathbf{s}_0$  y con ello obtener la ley de control. La medición de la posición articular  $\mathbf{q}$  se requiere para computar el Jacobiano geométrico, mientras que la única referencia que debe proporcionarse al sistema es el punto final  $\mathbf{y}_f$ .

La convergencia del observador, que se demuestra en la Sección 3.2, implica que  $\hat{\mathbf{y}} \rightarrow \mathbf{y}$  y que  $\mathbf{z} \rightarrow 0$ , además, considerando  $\mathbf{s}_d \approx 0$  para un tiempo suficientemente amplio, el término  $\mathbf{s}_0$  quedaría reducido a

$$\mathbf{s}_0 = \Lambda_y \Delta \mathbf{y} + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} + \Delta \dot{\mathbf{y}} \quad (3.18)$$

que al ser sustituido en la ley de control (3.1), puede verse escrita como

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = - \underbrace{\mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta'}^T \Lambda_y \Delta \mathbf{y}}_P - \underbrace{\mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta'}^T \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}}_I - \underbrace{\mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta'}^T \Delta \dot{\mathbf{y}}}_D} \quad (3.19)$$

Lo anterior pone de manifiesto que la ley de control es en esencia un PID.

## 3.2. Resultado principal

**Teorema 3.2.1.** *Dada una trayectoria deseada  $\mathbf{y}_d$  continua y acotada, al igual que sus derivadas (primera y segunda): mediante una selección apropiada de las ganancias  $\Lambda_y$ ,  $\Lambda_z$ ,  $\mathbf{K}_p$ ,  $\mathbf{K}_\gamma$ ,  $\mathbf{K}_\beta$ ,  $k_d$  y  $k$ ; la ley de control*

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta'}^T \mathbf{s}_0$$

*garantiza que todas las señales involucradas permanecen acotadas y que los errores de seguimiento  $\Delta \mathbf{y}$ ,  $\Delta \dot{\mathbf{y}}$  y de observación  $\mathbf{z}$ ,  $\dot{\mathbf{z}}$  tienden a cero cuando el tiempo tiende a infinito.*

◇

*Demostración.* Primero se reescribe la ley de control mediante la aplicación de una pequeña manipulación como

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta'}^T \underbrace{\mathbf{R}_\theta \mathbf{B} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_\theta^{-1}} \mathbf{s}_0 \quad (3.20)$$

o bien

$$\boldsymbol{\tau} = -\bar{\mathbf{K}}_p \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_\theta^{-1} \mathbf{s}_0 \quad (3.21)$$

con

$$\bar{\mathbf{K}}_p = \mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\tilde{\theta}_1} \mathbf{B} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \quad (3.22)$$

Para continuar con el análisis de estabilidad más adelante, primero se debe garantizar que  $\bar{\mathbf{K}}_p > 0$ ; para ello se debe cumplir que  $\mathbf{R}_{\tilde{\theta}_1} \mathbf{B} > 0$ . Entonces se define

$$\mathbf{E} \triangleq \mathbf{R}_{\tilde{\theta}_1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} c_{\tilde{\theta}_1} & 0 & -s_{\tilde{\theta}_1} \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{\tilde{\theta}_1} & 0 & c_{\tilde{\theta}_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{\lambda 1} & \bar{\alpha}_1(x - o_{c11}) & 0 \\ 0 & \alpha_{\lambda 2} & \bar{\alpha}_2(y - o_{c22}) \\ 0 & \bar{\alpha}_1(z - o_{c13}) & \alpha_{\lambda 1} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

al ejecutar el producto

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \alpha_{\lambda 1} c_{\tilde{\theta}_1} & \bar{\alpha}_1 \left( (x - o_{c11}) c_{\tilde{\theta}_1} - (z - o_{c13}) s_{\tilde{\theta}_1} \right) & -\alpha_{\lambda 1} s_{\tilde{\theta}_1} \\ 0 & \alpha_{\lambda 2} & \bar{\alpha}_2 (y - o_{c22}) \\ \alpha_{\lambda 1} s_{\tilde{\theta}_1} & \bar{\alpha}_1 \left( (x - o_{c11}) s_{\tilde{\theta}_1} - (z - o_{c13}) c_{\tilde{\theta}_1} \right) & \alpha_{\lambda 1} c_{\tilde{\theta}_1} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Sin embargo, la matriz  $\mathbf{E}$  no es simétrica, pero puede escribirse de la forma

$$\mathbf{E} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^T)}_{>0} + \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^T) \quad (3.25)$$

donde el término subrayado sí es simétrico y basta con probar que es definido positivo. Se tiene

$$\frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^T) = \begin{bmatrix} \alpha_{\lambda 1} c_{\tilde{\theta}_1} & a & 0 \\ a & \alpha_{\lambda 2} & b \\ 0 & b & \alpha_{\lambda 1} c_{\tilde{\theta}_1} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

con

$$a = \frac{1}{2}\bar{\alpha}_1 \left( (x - o_{c11})c_{\tilde{\theta}_1} - (z - o_{c13})s_{\tilde{\theta}_1} \right) \quad (3.27)$$

$$b = \frac{1}{2} \left\{ \bar{\alpha}_1 \left( (x - o_{c11})s_{\tilde{\theta}_1} + (z - o_{c13})c_{\tilde{\theta}_1} \right) + \bar{\alpha}_2 (y - o_{c22}) \right\} \quad (3.28)$$

Resulta muy complicado probar que la matriz (3.26) es definida positiva. Después de varios intentos, se llegó a la conclusión de introducir la restricción

$$\tilde{\theta}_1 = 0 \quad (3.29)$$

Es decir, que el ángulo de rotación supuesto  $\theta'_1$  de la cámara uno respecto a su eje óptico sea igual al ángulo verdadero  $\theta_1$ . La restricción impuesta, resulta aceptable también en la práctica, ya que es posible nivelar la cámara a un ángulo de  $0^\circ$  sin mucha complicación. Sin embargo, en caso de rotarla se debe conocer el ángulo correspondiente. Una vez aplicada la restricción anterior, la matriz (3.26) resulta en

$$\frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^T) = \begin{bmatrix} \alpha_{\lambda_1} & a' & 0 \\ a' & \alpha_{\lambda_2} & b' \\ 0 & b' & \alpha_{\lambda_1} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

con

$$a' = \frac{1}{2}\bar{\alpha}_1(x - o_{c11}) \quad (3.31)$$

$$b' = \frac{1}{2} \left( \bar{\alpha}_1(z - o_{c13}) + \bar{\alpha}_2(y - o_{c22}) \right) \quad (3.32)$$

Antes de continuar conviene hacer la suposición de que ambas cámaras son idénticas, es decir, mismo fabricante y mismo modelo; con esto resulta claro que  $\lambda_1 = \lambda_2$  y que  $\alpha_1 = \alpha_2$ . A continuación se aplica el criterio de que todos los menores principales líderes de la matriz (3.30) deben ser positivos (Chen 1999: pp. 74). El primero de ellos es

$$\alpha_{\lambda_1} > 0 \quad (3.33)$$

tomando en cuenta la ecuación (2.19), se advierte que efectivamente es positivo. El segundo es

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{\lambda 1} & \frac{1}{2}\bar{\alpha}_1(x - o_{c_{11}}) \\ \frac{1}{2}\bar{\alpha}_1(x - o_{c_{11}}) & \alpha_{\lambda 2} \end{vmatrix} \quad (3.34)$$

de modo que debe cumplirse

$$\alpha_{\lambda 1}\alpha_{\lambda 2} - \frac{1}{4}\bar{\alpha}_1^2(x - o_{c_{11}})^2 > 0 \quad (3.35)$$

Considerando por último el tercero de ellos, debe garantizarse que

$$\det\left(\frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^T)\right) > 0 \quad (3.36)$$

efectuando este último determinante se obtiene

$$\alpha_{\lambda 1} \left\{ \alpha_{\lambda 1}\alpha_{\lambda 2} - \frac{1}{4}\left(\bar{\alpha}_1(z - o_{c_{13}}) + \bar{\alpha}_2(y - o_{c_{22}})\right)^2 - \frac{1}{4}\bar{\alpha}_1^2(x - o_{c_{11}})^2 \right\} > 0 \quad (3.37)$$

Para lograr que el término dentro de los corchetes sea positivo, se puede analizar el peor de los casos, que es cuando  $(x - o_{c_{11}})$ ,  $(y - o_{c_{22}})$  y  $(z - o_{c_{13}})$  toman su máximo valor. Para ello se hace la siguiente definición

$$d_m \triangleq \max\{|x - o_{c_{11}}|, |y - o_{c_{22}}|, |z - o_{c_{13}}|\} \forall t \geq 0 \quad (3.38)$$

de tal forma que al sustituir  $d_m$  en (3.37), resulta

$$\alpha_{\lambda 1}\alpha_{\lambda 2} - \frac{1}{4}d_m^2(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2)^2 - \frac{1}{4}d_m^2\bar{\alpha}_1^2 > 0 \quad (3.39)$$

Recordando que por simplicidad se asume  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2$ , sustituyendo los términos  $\bar{\alpha}_1$  y  $\bar{\alpha}_2$  por su respectiva expresión, se tiene

$$0 < \frac{\alpha_1^2\lambda_1^2}{(o_{c_{12}} - y - \lambda_1)(o_{c_{23}} - z - \lambda_1)} - \frac{1}{4}d_m^2 \left( \frac{\alpha_1\lambda_1}{(o_{c_{12}} - y - \lambda_1)^2} + \frac{\alpha_1\lambda_1}{(o_{c_{23}} - z - \lambda_1)^2} \right)^2 - \frac{1}{4}d_m^2 \frac{\alpha_1^2\lambda_1^2}{(o_{c_{12}} - y - \lambda_1)^4} \quad (3.40)$$

multiplicando ambos lados por  $\frac{1}{\alpha_1^2\lambda_1^2}$

$$0 < \frac{1}{(o_{c_{12}} - y - \lambda_1)(o_{c_{23}} - z - \lambda_1)} - \frac{1}{4} d_m^2 \left( \frac{1}{(o_{c_{12}} - y - \lambda_1)^2} + \frac{1}{(o_{c_{23}} - z - \lambda_1)^2} \right)^2 - \frac{1}{4} d_m^2 \frac{1}{(o_{c_{12}} - y - \lambda_1)^4} \quad (3.41)$$

Ahora, considerando los términos involucrados  $(o_{c_{12}} - y - \lambda_1)$  y  $(o_{c_{23}} - z - \lambda_1)$ , se puede definir

$$d_1 \triangleq \text{mín} \{ |o_{c_{12}} - y - \lambda_1|, |o_{c_{23}} - z - \lambda_1| \} \forall t \geq 0 \quad (3.42)$$

$$d_2 \triangleq \text{máx} \{ |o_{c_{12}} - y - \lambda_1|, |o_{c_{23}} - z - \lambda_1| \} \forall t \geq 0 \quad (3.43)$$

para entonces considerar el peor de los casos en la desigualdad (3.41) y sustituir  $d_1$  y  $d_2$ , esto es

$$\frac{1}{d_2^2} - \frac{1}{4} d_m^2 \left( \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_1^2} \right)^2 - \frac{1}{4} d_m^2 \frac{1}{d_1^4} > 0 \quad (3.44)$$

de donde basta desarrollar y factorizar para obtener

$$\frac{1}{d_2^2} - \frac{5}{4} \frac{d_m^2}{d_1^4} > 0 \quad (3.45)$$

finalmente se tiene la relación

$$d_m < \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{d_1^2}{d_2} \quad (3.46)$$

La relación anterior garantiza que los menores principales líderes (3.35) y (3.37) son positivos. Nótese que si (3.37) se satisface, también lo hace (3.35). Conviene ahora formular tres restricciones más con el propósito de mantener la relación (3.46) y con ello asegurar que  $\overline{\mathbf{K}}_p > 0$ . Las restricciones se enlistan a continuación:

- Ubicar las cámaras a una distancia de poco más de un metro a partir del alcance máximo del robot sobre los ejes  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{z}$ . Esta distancia máxima puede considerarse el largo del robot.



- Las coordenadas  $o_{c11}$  y  $o_{c13}$  de la cámara uno, deben coincidir respectivamente con las coordenadas iniciales  $x$  y  $z$  del efector final del robot.
- La coordenada  $o_{c22}$  de la cámara dos debe de ser igual a cero.

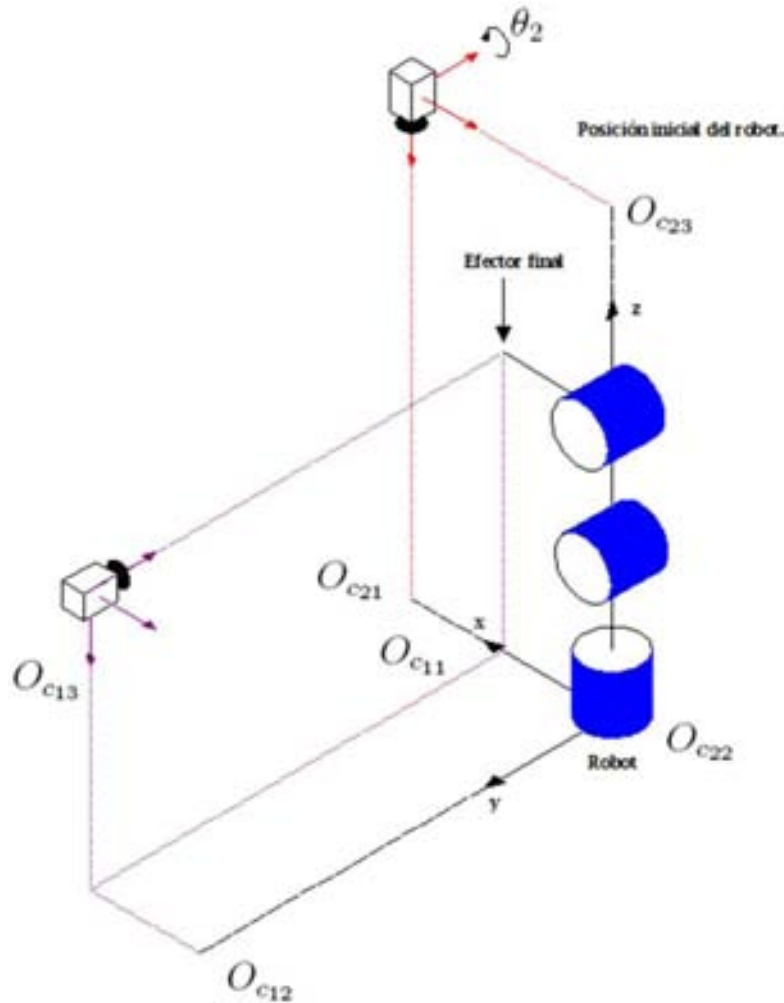


Figura 3.3: Reconfiguración de las cámaras de video respecto al robot.

En la Figura 3.3 se aprecia la posición que deben tener las cámaras de video para satisfacer las restricciones impuestas. Cabe mencionar que si se considerase el caso de realizar el control de posición sólo en 2D, la matriz  $\mathbf{B}$  resulta constante. Sin embargo en el caso 3D ya no lo es, debido a que sus

elementos  $(x - o_{c11})$ ,  $(y - o_{c22})$ ,  $(z - o_{c13})$ ,  $(o_{c12} - y - \lambda_1)$  y  $(o_{c23} - z - \lambda_2)$  se vuelven variantes en el tiempo, razón por la cual probar que  $\mathbf{E} > 0$  se complica demasiado.

Para proceder con el estudio de la estabilidad, antes se construye una serie de definiciones. De esta manera, recordando la relación entre coordenadas cartesianas y de imagen descrita en el Capítulo 2, se tiene

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_\theta^T\dot{\mathbf{y}} \quad (3.47)$$

a partir de la cual se define

$$\dot{\mathbf{q}}_r \triangleq \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_\theta^T\dot{\mathbf{y}}_r \quad (3.48)$$

Se definen además

$$\mathbf{s}_r \triangleq \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r \quad (3.49)$$

$$\mathbf{s}_y \triangleq \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_r \quad (3.50)$$

de tal modo que al considerar (3.47), (3.48) y (3.50),  $\mathbf{s}_r$  se escribe como

$$\mathbf{s}_r = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_\theta^T(\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_r) = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_\theta^T\mathbf{s}_y \quad (3.51)$$

donde despejando se tiene también que

$$\mathbf{s}_y = \mathbf{R}_\theta\mathbf{B}\mathbf{J}(\mathbf{q})(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r) = \mathbf{R}_\theta\mathbf{B}\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{s}_r \quad (3.52)$$

Por otra parte, se define

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\triangleq \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_0 \\ &= \dot{\mathbf{y}} - \dot{\hat{\mathbf{y}}} + \Lambda_z\mathbf{z} \\ &= \dot{\mathbf{z}} + \Lambda_z\mathbf{z} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Ahora bien, la dinámica del robot manipulador viene dada por:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_p \quad (3.54)$$

donde cada uno de los elementos fue descrito brevemente en el Capítulo 2, por lo que sólo resta considerar a  $\boldsymbol{\tau}_p$ , término que puede verse como una

perturbación que representa efectos de dinámica no modelada, tales como fricción seca.

De (3.49) se observa que  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{s}_r + \dot{\mathbf{q}}_r$  y que  $\ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{s}}_r + \ddot{\mathbf{q}}_r$ ; por tanto al sustituir  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\ddot{\mathbf{q}}$  en (3.54), se tiene

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})(\dot{\mathbf{s}}_r + \ddot{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(\mathbf{s}_r + \dot{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{D}(\mathbf{s}_r + \dot{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_p \quad (3.55)$$

agrupando términos y sustituyendo (3.21)

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s}_r + \mathbf{D}\mathbf{s}_r = -\bar{\mathbf{K}}_p \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_\theta^{-1}\mathbf{s}_0 - \mathbf{y}_a \quad (3.56)$$

donde de acuerdo con la Propiedad 2.3.1

$$\mathbf{y}_a \triangleq \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}_p \quad (3.57)$$

Haciendo algunas manipulaciones,  $\mathbf{s}_0$  se escribe como

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_0 &= \dot{\mathbf{y}}_0 - \dot{\mathbf{y}}_r \\ &= \dot{\mathbf{y}}_0 - (\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{s}_y) \\ &= \mathbf{s}_y - \mathbf{r} \\ &= \mathbf{R}_\theta \mathbf{B} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_r - \mathbf{r} \end{aligned} \quad (3.58)$$

sustituyendo en (3.56)

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s}_r + \mathbf{D}\mathbf{s}_r = -\bar{\mathbf{K}}_p \mathbf{s}_r + \mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{R}_{\theta'}^T \mathbf{r} - \mathbf{y}_a \quad (3.59)$$

después de ordenar términos se llega a la ecuación en lazo cerrado:

$$\boxed{\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s}_r + \mathbf{K}_{D_p} \mathbf{s}_r = \mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{R}_{\theta'}^T \mathbf{r} - \mathbf{y}_a} \quad (3.60)$$

con

$$\mathbf{K}_{D_p} = \mathbf{D} + \bar{\mathbf{K}}_p \quad (3.61)$$

Por otro lado, para la dinámica del error de observación, se sustituye  $\dot{\mathbf{y}}_0$  de la ecuación (3.8) del observador en (3.7)

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}} = \dot{\mathbf{y}}_d - \mathbf{\Lambda}_y(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d) + \mathbf{s}_d + k_d \mathbf{\Lambda}_z \int_0^t \mathbf{z} d\delta + \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z} + k_d \mathbf{z} \quad (3.62)$$

sumando  $\dot{\mathbf{y}}$  a ambos miembros de la ecuación y ordenando términos

$$\dot{\mathbf{y}} - \dot{\hat{\mathbf{y}}} + \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z} + k_d \left( \mathbf{z} + \mathbf{\Lambda}_z \int_0^t \mathbf{z} d\delta \right) = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_d + \mathbf{\Lambda}_y(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d) - \mathbf{s}_d \quad (3.63)$$

utilizando las ecuaciones (3.10), (3.11) y (3.53) se escribe

$$\mathbf{r} + k_d \int_0^t \mathbf{r} d\delta = \Delta \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Lambda}_y \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{s}_d \quad (3.64)$$

derivando se llega a la ecuación:

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}} + k_d \mathbf{r} = \Delta \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Lambda}_y \dot{\bar{\mathbf{y}}} + k \mathbf{s}_d} \quad (3.65)$$

Considerando ahora el sistema formado por las ecuaciones (3.60) y (3.65) se define su vector de estado como

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}_r \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

De esta forma, la demostración del Teorema 3.2.1 se lleva a cabo en tres pasos:

i. suponer que

$$\|\mathbf{x}\| \leq x_{\text{máx}} \quad (3.67)$$

es decir, que el estado está acotado. Se debe mostrar que en este caso cualquier otra señal involucrada en el control servovisual permanece acotada.

Para dicho propósito se parte del empleo de las definiciones (3.10), (3.12) y (3.14) para escribir a  $\dot{\mathbf{y}}_r$  como

$$\dot{\mathbf{y}}_r = \dot{\hat{\mathbf{y}}} - \mathbf{s}_1 - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \quad (3.68)$$

al sustituir esta expresión en (3.50)

$$\mathbf{s}_y = \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{s}_1 + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \quad (3.69)$$

El hecho de que  $\mathbf{s}_r$  permanezca acotado, implica, por la ecuación (3.52) que  $\mathbf{s}_y$  también permanece acotado. Del mismo modo, el acotamiento de  $\mathbf{r}$  implica de la definición (3.53) que  $\mathbf{z}$  y  $\dot{\mathbf{z}}$  están acotados. Se puede definir

$$\mathbf{s}_i \triangleq \mathbf{s}_y - \dot{\mathbf{z}} \quad (3.70)$$

que también está acotado y reescribir (3.69) como

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_1 + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \quad (3.71)$$

donde si  $\|\mathbf{s}_i\| < \bar{s}_i < \infty \forall t \geq 0$ , entonces  $\|\boldsymbol{\sigma}\|, \|\mathbf{s}_1\| < \infty \forall t \geq 0$ . Esto se puede demostrar utilizando el Teorema B.0.1 con  $D = \Re^n$  y proponiendo

$$V(t, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma}\|^2 \quad (3.72)$$

considerando  $\alpha_1(\|\boldsymbol{\sigma}\|) = \alpha_2(\|\boldsymbol{\sigma}\|) = \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma}\|^2$ . Usando (3.16) y (3.71) se obtiene

$$\dot{V} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_i - \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{K}_\beta \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \text{sgn}(\mathbf{s}_1) \quad (3.73)$$

acotando la ecuación anterior

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\beta \mathbf{K}_\gamma) \|\boldsymbol{\sigma}\|^2 - \|\boldsymbol{\sigma}\| \left\{ \frac{1}{2} \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\beta \mathbf{K}_\gamma) \|\boldsymbol{\sigma}\| - \left( \lambda_{\max}(\mathbf{K}_\beta) \bar{s}_i + \sqrt{n} \right) \right\} \quad (3.74)$$

si se define

$$\|\boldsymbol{\sigma}\| \geq \mu \triangleq \frac{2 \left( \lambda_{\max}(\mathbf{K}_\beta) \bar{s}_i + \sqrt{n} \right)}{\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\beta \mathbf{K}_\gamma)} \quad (3.75)$$

sustituyendo en (3.74), resulta

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\beta \mathbf{K}_\gamma) \|\boldsymbol{\sigma}\|^2 \triangleq -W_3 \quad (3.76)$$

Como  $D = \Re^n$ , siempre se puede encontrar una constante  $r$  que satisfaga (B.4) y debido a que  $\boldsymbol{\sigma}(0) = 0$  se satisfacen las condiciones del Teorema B.0.1 que demuestran que  $\boldsymbol{\sigma} \leq \mu \triangleq \sigma_{\max}$ . Con el resultado anterior, de (3.71) se tiene que  $\mathbf{s}_1$  está acotado. Adicionalmente, de (3.16),  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  está acotado.

Por otro lado, sustituyendo (3.12) en (3.50) y considerando que  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$ , se tiene

$$\mathbf{s}_y = \Delta \dot{\mathbf{y}} + \Lambda_y \Delta \mathbf{y} - \Lambda_y \mathbf{z} - \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \quad (3.77)$$

o bien

$$\Delta \dot{\mathbf{y}} + \Lambda_y \Delta \mathbf{y} = \mathbf{s}_y + \Lambda_y \mathbf{z} + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \quad (3.78)$$

Ya que todos los términos del lado derecho están acotados,  $\Delta \mathbf{y}$  y  $\Delta \dot{\mathbf{y}}$  también lo están. Además, del algoritmo generador de trayectorias (3.3), se tiene

$$\dot{\mathbf{y}}_d + k_1 \mathbf{y}_d = k_1 \mathbf{y}_f - \frac{k_0}{\|\tilde{\mathbf{y}}\| + \epsilon} \tilde{\mathbf{y}} \quad (3.79)$$

donde los términos del lado derecho están acotados, por lo que  $\mathbf{y}_d$  y  $\dot{\mathbf{y}}_d$  están acotados. Consecuentemente, recurriendo a (3.11),  $\mathbf{y}$  y  $\dot{\mathbf{y}}$  están acotados. Además se concluye de (3.5) y (3.4) que  $\hat{\mathbf{y}}$ ,  $\dot{\hat{\mathbf{y}}}$ ,  $\tilde{\mathbf{y}}$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{y}}}$  están acotados. De (3.12), que  $\dot{\mathbf{y}}_r$  está acotado. Adicionalmente, dado que  $\dot{\mathbf{y}}$  y  $\dot{\mathbf{y}}_r$  están acotados, se observa de (3.47) y (3.48), respectivamente, que  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\dot{\mathbf{q}}_r$  están acotados, tomando en cuenta que se ha supuesto que el robot no pasa a través de ninguna singularidad.

Del modelo de las cámaras de video en (2.51), se tiene que la posición cartesiana del efector final está dada por

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}_\theta^T (\mathbf{y} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{o}_c \quad (3.80)$$

Como  $\mathbf{y}$  está acotado,  $\mathbf{x}_R$  también lo está. Más aún, este último puede verse como una función de  $\mathbf{q}$ , es decir

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (3.81)$$

con lo cual se infiere que  $\mathbf{q}$  está acotado. En la práctica, del hecho de que  $\mathbf{y}$  esté acotado y que el robot no alcance ninguna singularidad, se advierte que las posiciones del efector final y de las articulaciones rotacionales, están acotadas.

Retomando el algoritmo generador de trayectorias; derivando (3.3)

$$\dot{\mathbf{y}}_d = -k_1 \dot{\mathbf{y}}_d - k_0 \frac{d}{dt} \left\{ \tilde{\mathbf{y}} \left( (\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{y}})^{1/2} + \epsilon \right)^{-1} \right\} \quad (3.82)$$

$$\ddot{\mathbf{y}}_d = -k_1 \dot{\mathbf{y}}_d - k_0 \frac{\dot{\tilde{\mathbf{y}}}}{\|\tilde{\mathbf{y}}\| + \epsilon} + k_0 \frac{\tilde{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{y}}^T \dot{\tilde{\mathbf{y}}}}{\|\tilde{\mathbf{y}}\| (\|\tilde{\mathbf{y}}\| + \epsilon)^2} \quad (3.83)$$

aplicando normas a ambos miembros de (3.83), es posible acotar de la siguiente forma

$$\|\ddot{\mathbf{y}}_d\| \leq k_1 \|\dot{\mathbf{y}}_d\| + k_0 \frac{\|\dot{\tilde{\mathbf{y}}}\|}{\|\tilde{\mathbf{y}}\| + \epsilon} + k_0 \frac{\|\tilde{\mathbf{y}}^T\| \|\dot{\tilde{\mathbf{y}}}\|}{(\|\tilde{\mathbf{y}}\| + \epsilon)^2} \quad (3.84)$$

Considerando, de acuerdo con resultados precedentes, que todos los términos de la parte derecha de (3.84) están acotados,  $\ddot{\mathbf{y}}_d$  está acotado. Como consecuencia, de la derivada de (3.12)

$$\ddot{\mathbf{y}}_r = \ddot{\mathbf{y}}_d - \mathbf{\Lambda}_y (\dot{\tilde{\mathbf{y}}} - \dot{\mathbf{y}}_d) - k \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.85)$$

se advierte que  $\ddot{\mathbf{y}}_r$  está acotado. Mientras tanto, al derivar (3.48) se tiene

$$\ddot{\mathbf{q}}_r = \left\{ \dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{B}}^{-1} \right\} \mathbf{R}_\theta^T \dot{\mathbf{y}}_r + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_\theta^T \ddot{\mathbf{y}}_r \quad (3.86)$$

Como  $\dot{\mathbf{q}}$  está acotado,  $\dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{B}^{-1}$  están acotadas. Nótese que la inversa de  $\mathbf{B}$  existe y es sólo función de variables acotadas. Con esto se tiene que  $\ddot{\mathbf{q}}_r$  está acotado y como resultado, de acuerdo con (3.57),  $\mathbf{y}_a$  está acotado, de tal modo que de (3.56) se observa que  $\dot{\mathbf{s}}_r$  está acotado. Por otro lado, considerando (3.59) se tiene también que

$$\boldsymbol{\tau} = -\bar{\mathbf{K}}_p \mathbf{s}_r + \mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\theta^T \mathbf{r} \quad (3.87)$$

La ecuación anterior muestra que  $\boldsymbol{\tau}$  está acotado, de tal forma que en la ecuación (3.54) de la dinámica del robot se advierte que  $\ddot{\mathbf{q}}$  está acotado. Tomando la derivada de la ecuación (2.67), resulta

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{R}_\theta \dot{\mathbf{B}} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}_\theta \mathbf{B} \left\{ \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} \right\} \quad (3.88)$$

donde todos los términos del lado derecho están acotados, por consiguiente  $\ddot{\mathbf{y}}$  está acotado. Finalmente, tomando en cuenta el acotamiento de  $\ddot{\mathbf{y}}$  y  $\ddot{\mathbf{y}}_r$ ; de (3.50) se tiene que  $\dot{\mathbf{s}}_y$  está acotado. Considerando además que de (3.53)

$$\ddot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{\Lambda}_z \dot{\mathbf{z}} \quad (3.89)$$

donde  $\ddot{\mathbf{z}}$  también resulta acotado. Al derivar la expresión (3.70) se concluye que  $\dot{\mathbf{s}}_i$  está acotado.

**ii.** Demostrar que mediante una selección apropiada de ganancias, la ley de control (3.1) efectivamente garantiza que  $\|\mathbf{x}\| \leq x_{\text{máx}}$ .

La herramienta principal que se utilizó para demostrar lo anterior es el Teorema B.0.1 que se muestra en el Apéndice B. De acuerdo con este teorema, se supone primero que  $x_{\text{máx}}$  es un valor dado y se propone la siguiente función

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} \quad (3.90)$$

con  $\mathbf{M} \triangleq \text{diag}\{\mathbf{H}(\mathbf{q}), \mathbf{I}\}$ . Aplicando la Propiedad 2.3.2, la función (3.90) satisface

$$\lambda_2 \|\mathbf{x}\|^2 \geq V(\mathbf{x}) \geq \lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2 \quad (3.91)$$

considerando  $\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) = \lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2$ ,  $\alpha_2(\|\mathbf{x}\|) = \lambda_2 \|\mathbf{x}\|^2$  con

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \min_{\forall \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^n} \lambda_{\text{mín}}(\mathbf{M}(\mathbf{q})) \quad (3.92)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^n} \lambda_{\text{máx}}(\mathbf{M}(\mathbf{q})) \quad (3.93)$$

Ahora se toma la derivada de  $V(\mathbf{x})$  a lo largo de  $\mathbf{x}$  y se hace uso de la Propiedad 2.3.3

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{s}_r^T \mathbf{K}_{D_p} \mathbf{s}_r - k_d \mathbf{r}^T \mathbf{r} + \mathbf{s}_r^T \mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta'}^T \mathbf{r} - \mathbf{s}_r^T \mathbf{y}_a \\ &\quad + \mathbf{r}^T (\Delta \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Lambda}_y \dot{\mathbf{y}} + k \mathbf{s}_d) \end{aligned} \quad (3.94)$$

A continuación se define una región  $D$  como

$$D \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^{2n} \mid \|\mathbf{x}\| \leq x_{\text{máx}}\} \quad (3.95)$$

de tal forma que considerando el resultado del paso **i.** donde se mostró que para dicha región todas las variables permanecen acotadas, se puede acotar a  $\dot{V}(\mathbf{x})$  como

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\lambda_{\text{mín}}(\overline{\mathbf{K}}_p) \|\mathbf{s}_r\|^2 - k_d \|\mathbf{r}\|^2 + \lambda_{\text{máx}}(\mathbf{K}_p) C_1 \|\mathbf{S}_r\| \|\mathbf{r}\| + \|\mathbf{x}\| C_2 + \|\mathbf{x}\| C_3 \quad (3.96)$$

con



$$C_1 \triangleq \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{R}_{\theta'}\| \quad (3.97)$$

$$C_2 \triangleq \max_{\forall \mathbf{x} \in D} \|\mathbf{y}_a\| \quad (3.98)$$

$$C_3 \triangleq \max_{\forall \mathbf{x} \in D} \|\Delta\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Lambda}_y\dot{\mathbf{y}} + k\mathbf{s}_d\| \quad (3.99)$$

Si se escogen las ganancias de tal modo que se satisfaga

$$\lambda_{\min}(\overline{\mathbf{K}}_p) \geq \delta + 1 + \frac{C_2 + C_3}{\mu} \quad (3.100)$$

$$k_d \geq \delta + \frac{\lambda_{\max}^2(\mathbf{K}_p)C_1^2}{4} + \frac{C_2 + C_3}{\mu} \quad (3.101)$$

donde  $\delta$  y  $\mu$  son constantes positivas. Al sustituir su mínimo valor en (3.96) y considerar que  $\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{s}_r\|^2 + \|\mathbf{r}\|^2$  se tiene

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\delta\|\mathbf{x}\|^2 - \left( \|\mathbf{s}_r\| - \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_p)C_1\|\mathbf{r}\|}{2} \right)^2 - (C_2 + C_3) \left( \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{\mu} - \|\mathbf{x}\| \right) \quad (3.102)$$

Pero además, como se debe cumplir de acuerdo con el Teorema B.0.1 que  $\|\mathbf{x}\| \geq \mu$ , se puede finalmente obtener:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\delta\|\mathbf{x}\|^2 \triangleq W_3(\mathbf{x}) \quad (3.103)$$

siendo  $W_3(\mathbf{x})$  una función definida positiva. Debido al acotamiento de las trayectorias, se tiene

$$\lambda_1\|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(t_0)) \leq \lambda_2\|\mathbf{x}(t_0)\|^2 \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.104)$$

despejando

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \|\mathbf{x}(t_0)\| \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.105)$$

Dado que  $\|\mathbf{x}\| \leq x_{\max}$ , se tiene

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} x_{\text{máx}} \quad (3.106)$$

Por último, retomando que de acuerdo con el Teorema B.0.1  $\|\mathbf{x}\| \geq \mu > 0$ , se obtiene la constante de diseño

$$\mu < \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} x_{\text{máx}} \quad (3.107)$$

**iii.** Demostrar que los errores de seguimiento  $\Delta \mathbf{y}$ ,  $\Delta \dot{\mathbf{y}}$  y de observación  $\mathbf{z}$ ,  $\dot{\mathbf{z}}$ , tienden a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Para este propósito se deriva (3.71) y se sustituye (3.16) para obtener

$$\dot{\mathbf{s}}_1 = -\mathbf{K}_\gamma \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1 - \mathbf{K}_\gamma \text{sgn}(\mathbf{s}_1) + \dot{\mathbf{s}}_i \quad (3.108)$$

A continuación se propone la función

$$V_1 = \frac{1}{2} \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 = \frac{1}{2} \|\mathbf{s}_1\|^2 \quad (3.109)$$

cuya derivada es

$$\dot{V}_1 = \|\mathbf{s}_1\| \frac{d\|\mathbf{s}_1\|}{dt} = -\mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_\gamma \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_\gamma \text{sgn}(\mathbf{s}_1) + \mathbf{s}_1^T \dot{\mathbf{s}}_i \quad (3.110)$$

Por lo tanto es posible acotar a  $\|\mathbf{s}_1\| \frac{d\|\mathbf{s}_1\|}{dt}$  como

$$\|\mathbf{s}_1\| \frac{d\|\mathbf{s}_1\|}{dt} \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma \mathbf{K}_\beta) \|\mathbf{s}_1\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma) |\mathbf{s}_1| + \|\mathbf{s}_1\| \dot{s}_{i \text{ máx}} \quad (3.111)$$

con  $\dot{s}_{i \text{ máx}} = \text{máx} \|\dot{\mathbf{s}}_i\|$  y donde

$$|\mathbf{s}_1| = |s_{11}| + \cdots + |s_{1n}| \quad (3.112)$$

Dado que  $\|\mathbf{s}_1\| \leq |\mathbf{s}_1|$  la desigualdad (3.111) puede escribirse como

$$\frac{d\|\mathbf{s}_1\|}{dt} \leq -(\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma) - \dot{s}_{i \text{ máx}}) \quad (3.113)$$

donde el término del lado derecho puede hacerse positivo mediante una apropiada selección de  $\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma)$ , esto es

$$\phi \triangleq (\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma) - \dot{s}_{i\text{máx}}) > 0 \quad (3.114)$$

para obtener

$$\frac{d\|\mathbf{s}_1\|}{dt} \leq -\phi \quad (3.115)$$

Ahora se debe probar que  $\mathbf{S}_1 \rightarrow 0$  en tiempo finito  $t_r$ . Esto se puede lograr integrando la desigualdad anterior

$$\int_0^{t_r} \frac{d\|\mathbf{s}_1\|}{dt} dt \leq - \int_0^{t_r} \phi dt \quad (3.116)$$

tomando en cuenta que  $\forall t \geq t_r$   $\mathbf{S}_1(t) = 0$ ,  $t_r$  está dado por

$$t_r \leq \frac{\|\mathbf{s}_1(0)\|}{\phi} \quad (3.117)$$

Mientras tanto, considerando (3.9) y (3.14), de la expresión (3.10) resulta

$$\mathbf{s} = \dot{\bar{\mathbf{y}}} + \mathbf{\Lambda}_y \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{s}_d = \mathbf{s}(0) \exp^{-kt} \quad (3.118)$$

Debido a que  $\mathbf{s}_d \rightarrow 0$ , de igual manera  $\mathbf{s} \rightarrow 0$ . Lo anterior implica que  $\bar{\mathbf{y}} \rightarrow 0$ ,  $\dot{\bar{\mathbf{y}}} \rightarrow 0$  y como consecuencia se tiene que  $\hat{\mathbf{y}} \rightarrow \mathbf{y}_d$  y que  $\dot{\hat{\mathbf{y}}} \rightarrow \dot{\mathbf{y}}_d$ . Tomando lo anterior en cuenta, de la ecuación (3.5) se tiene

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d = \Delta \mathbf{y} \quad (3.119)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_d = \Delta \dot{\mathbf{y}} \quad (3.120)$$

Usando (3.53), de (3.65) se puede obtener

$$\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{\Lambda}_z \dot{\mathbf{z}} + k_d(\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z}) = \ddot{\mathbf{z}} + k \mathbf{s}_d \quad (3.121)$$

o bien

$$(k_d \mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}_z) \dot{\mathbf{z}} + k_d \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z} = k \mathbf{s}_d \quad (3.122)$$

por tanto

$$\boxed{\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}} \rightarrow 0} \quad (3.123)$$

lo que a su vez implica, según (3.119) y (3.120), que

$$\boxed{\Delta \mathbf{y}, \Delta \dot{\mathbf{y}} \rightarrow 0} \quad (3.124)$$

$\forall t \geq t_r$

□

Esta página se dejó intencionalmente en blanco.

# Capítulo 4

## Resultados de simulación

En el proceso de ingeniería, cuando se diseña un nuevo producto, por ejemplo un controlador, es necesario una vez realizado el desarrollo teórico que sustenta su correcto funcionamiento, pasar a una etapa de simulación que permita verificar y evaluar el desempeño sin necesidad de probar con el sistema real. La importancia de la etapa de simulación radica en que permite detectar errores y realizar correcciones para asegurar aún más el éxito, antes de que el prototipo sea construido.

En este capítulo se presenta una simulación por computadora que demuestra los resultados teóricos de los capítulos anteriores. La simulación se hizo con MATLAB-SIMULINK procurando que fuese lo más real posible de acuerdo al equipo experimental que se tiene en el laboratorio de robótica. Para fines de simulación, es necesario contar con el modelo dinámico del robot *CRS A465* considerando sólo sus tres primeros grados de libertad. El modelo fue obtenido en [22] y se puede consultar en el Apéndice A. Adicionalmente, se requiere del cálculo de la cinemática directa, ésta se encuentra en el Apéndice C. El modelo de las cámaras de video, necesario para ejecutar la simulación, se expuso en el Capítulo 2. Las ecuaciones de la ley de control y el Jacobiano geométrico se encuentran en el Capítulo 3 y el Apéndice D, respectivamente. Cabe señalar que para un experimento real, separando las ecuaciones que definen al controlador, el Jacobiano es el único elemento necesario.

El diagrama general de bloques de la simulación se ilustra en la Figura 4.1 y se explica de la siguiente manera: a la salida del robot se tiene la posición articular  $\mathbf{q}$ , la cual pasa a la cinemática directa para obtener  $\mathbf{x}_R$ , esta señal, previamente discretizada, es la entrada al modelo de ambas cámaras de video;

a la salida se obtienen las coordenadas de imagen  $y_1, y_2, y_3$  y  $y'_1$ , las cuales se despliegan en dos pantallas. Estas coordenadas junto con el vector  $\mathbf{q}$  son las entradas al controlador. Tanto la entrada como la salida, son discretizadas por el periodo de muestreo del controlador. La señal de control ya expresada en voltaje, es enviada a la entrada del robot. El discretizador de  $\mathbf{x}_R$  representa el periodo de muestreo de las cámaras de video.

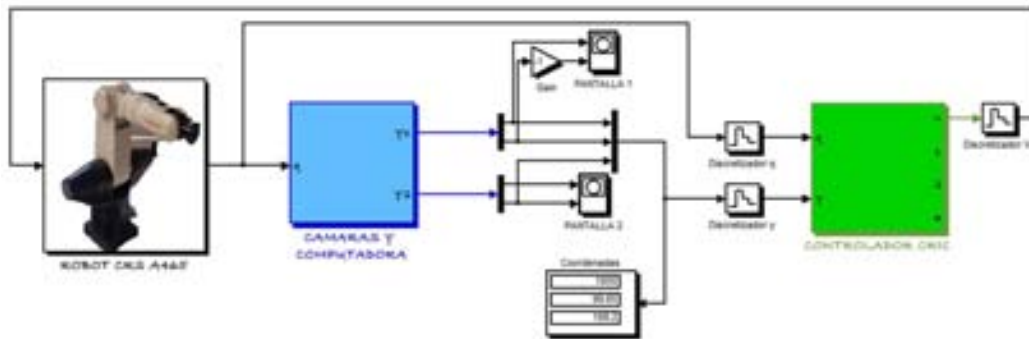


Figura 4.1: Diagrama general de la simulación por computadora.

Una vez explicado el funcionamiento de la simulación, sólo basta introducir los parámetros necesarios para ejecutarla. Estos parámetros que corresponden a valores referentes a las cámaras de video y al controlador industrial, fueron obtenidos a partir de hojas de datos de los fabricantes con el fin de acercarse lo más posible a la realidad. Las ganancias para la ley de control se obtuvieron a partir de un procedimiento de sintonía que se explica más adelante.

Las cámaras de video que se tienen en el laboratorio de robótica son modelo *PIKE 505-B* del fabricante AVT, de sus hojas de especificaciones se obtuvieron los datos que se muestran en las Tablas 4.1 y 4.2.

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidad
Longitud focal	$\lambda$	0.012	m
Factor de conversión	$\alpha$	289,855	pixel/m

Tabla 4.1: Parámetros constantes de las cámaras de video.

En la Tabla 4.2 sólo se muestran los valores más altos de cuadros por segundo que ofrece el modelo citado.

Muestreo (cuadros/segundo)	Resolución en pixeles
30	640 × 480
22	2452 × 1026
22	1224 × 1026

Tabla 4.2: Muestreo contra resolución.

De acuerdo con los resultados obtenidos en la Sección 3.2, la posición y la orientación de las cámaras de video fueron asignadas como se muestra en la Tabla 4.3.

<b>Cámara uno</b>	$o_{c11}$ [m]	$o_{c12}$ [m]	$o_{c13}$ [m]	$\theta_1$ [°]
	0.406	1.8	0.305	0
<b>Cámara dos</b>	$o_{c21}$ [m]	$o_{c22}$ [m]	$o_{c23}$ [m]	$\theta_2$ [°]
	0.5	0	1.8	75

Tabla 4.3: Posición y orientación de las cámaras de video.

A menudo resulta importante, sobre todo si se trabaja con robots planares, conocer cuántos metros representa un pixel sobre un campo de visión de particular interés, igualmente, determinar las dimensiones de este campo, considerándosele como un plano.

En general, el área de representación de un pixel  $R_p$  sobre el campo de visión no varía al utilizar diferentes resoluciones de la cámara, sólo se altera si la distancia  $d$  a la que se encuentra esta última, cambia. Esto puede calcularse con la siguiente expresión<sup>1</sup>:

$$R_p = \alpha^{-1} \frac{d}{\lambda} \quad (4.1)$$

Mientras que el área del campo de visión  $C_v$ , se obtiene del producto de la resolución  $R_e$  que se esté utilizando y  $R_p$ :

$$C_v = R_e R_p \quad (4.2)$$

**Ejemplo 4.0.2.** *Calcular para la cámara uno, la representación de un pixel en metros sobre el plano vertical del que parte el robot, así como las dimensiones del campo de visión sobre dicho plano. Utilizar los datos de la presente simulación con un muestreo de 22cps a una resolución de 2452 × 1026 pixeles.*

<sup>1</sup>Recordando que se considera que el pixel es cuadrado.



Utilizando (4.1) y (4.2)

$$R_p = (289,855)^{-1} \left( \frac{1.8}{0.012} \right) = 0.0005175 \left[ \frac{\text{m}}{\text{pixel}} \right]$$

$$C_{v_x} = (2452)(0.0005175) = 1.269[\text{m}]$$

$$C_{v_y} = (1026)(0.0005175) = 0.53[\text{m}]$$

△

Aunque para fines de este trabajo los datos anteriores no son constantes, ya que no se trabaja en el plano, dan una idea de la representación de un pixel en metros para el caso de la cámara uno.

Los datos del vector de excentricidad  $\mathbf{o}_i$  con  $i = 1, 2$  se eligieron de forma arbitraria, mientras que los datos del vector  $\mathbf{u}_i$  con  $i = 1, 2$ , de acuerdo con la posición y orientación de las cámaras de video. Los valores se encuentran en la Tabla 4.4.  $R_h$  y  $R_v$  significan la resolución sobre los ejes vertical y horizontal, respectivamente.

Excentricidades (píxeles)				
Cámara uno	$o_{11}$	$o_{12}$	$u'_{01}$	$v'_{01}$
	0	0	$0.5R_h$	$0.5R_v$
Cámara dos	$o_{21}$	$o_{22}$	$u'_{02}$	$v'_{02}$
	0	0	$0.5R_h$	$0.5R_v$

Tabla 4.4: Valores de excentricidades.

El periodo de muestreo para el controlador industrial *COMPACT-RIO* de NI se tomó como un aproximado. Para las cámaras de video se eligió un muestreo de 22 cuadros por segundo. En la Tabla 4.5 se tienen los datos.

Elemento	Símbolo	Valor	Unidad
Cámaras	$T_{ca}$	0.045	s
Controlador	$T$	0.05	s

Tabla 4.5: Periodos de muestreo.

Las ganancias del algoritmo que genera la trayectoria deseada fueron elegidas de forma arbitraria, sólo tomando en cuenta que se pretende obtener una trayectoria suave. Estas se muestran en la Tabla 4.6.

Parámetro	Valor	Unidad
$k_0$	0.1	pixel/s
$k_1$	2	1/s
$\epsilon$	0.1	pixel

Tabla 4.6: Parámetros del campo de velocidad.

Condiciones iniciales				
Robot	$\mathbf{q}_i$		$\dot{\mathbf{q}}_i$	
	$[0, \pi/2, -\pi/2]^T$		0	
Observador	$\hat{\mathbf{y}}_0$		$\hat{\mathbf{y}}$	
	0		$[u'_{01}, v'_{01}, v'_{02}]^T$	
Otras	$\mathbf{y}_d$	$\mathbf{s}(0)$	$\boldsymbol{\sigma}$	$\int_0^t \mathbf{z} d\delta$
	$[u'_{01}, v'_{01}, v'_{02}]^T$	0	0	0

Tabla 4.7: Condiciones iniciales.

Las condiciones iniciales para el robot, el observador y algunas otras necesarias para las ecuaciones de control, aparecen en la Tabla 4.7.

Con todos los datos anteriores, el último paso consiste en obtener las ganancias para el controlador mediante un procedimiento de sintonía. Como se explicó en la Sección 3.1, la ley de control es en esencia PID, y puede verse como:

$$\tau = - \underbrace{\mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta'}^T \Lambda_y \Delta \mathbf{y}}_P - \underbrace{\mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta'}^T \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}}_I - \underbrace{\mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta'}^T \Delta \dot{\mathbf{y}}}_D \quad (4.3)$$

El procedimiento que se utilizó se basa en el segundo método de Ziegler-Nichols, con algunas modificaciones menores. Alternativamente, se puede emplear el método descrito en [31] sin embargo, en él se requiere evaluar la matriz de inercia  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  y el vector de pares gravitacionales  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ . Aunque para fines de simulación se dispone del modelo dinámico del robot, el algoritmo de control está diseñado suponiendo que no se cuenta tal información. Por esta razón, no se aplicó el método presentado en [31]; sólo se muestra la manera en que deben elegirse las matrices de ganancia.

Las ganancias proporcional  $\mathbf{K}_p$ , integral  $\mathbf{K}_i$  y derivativa  $\mathbf{K}_v$ , deben elegirse de tal forma que las matrices cumplan las siguientes condiciones:

$$\lambda_{\max}\{\mathbf{K}_i\} \geq \lambda_{\min}\{\mathbf{K}_i\} > 0 \quad (4.4)$$

$$\lambda_{\max}\{\mathbf{K}_p\} \geq \lambda_{\min}\{\mathbf{K}_p\} > k_g \quad (4.5)$$

$$\lambda_{\max}\{\mathbf{K}_v\} \geq \lambda_{\min}\{\mathbf{K}_v\} > \frac{\lambda_{\max}\{\mathbf{K}_i\}}{\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_p\} - k_g} \cdot \frac{\lambda_{\max}^2\{\mathbf{H}(\mathbf{q})\}}{\lambda_{\min}\{\mathbf{H}(\mathbf{q})\}} \quad (4.6)$$

donde  $\lambda_{\max}$  y  $\lambda_{\min}$  representan los valores propios máximo y mínimo, respectivamente, mientras que  $k_g$  es una constante que se calcula aplicando la Propiedad 2.3.4.

A continuación se numeran los pasos del procedimiento de sintonía basado en el segundo método de Ziegler-Nichols:

1. La constante  $k$  se asigna arbitrariamente.
2. Elegir  $k_d$  suficientemente grande hasta garantizar que el observador converge.
3. Hacer momentaneamente  $\mathbf{K}_p = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{K}_\gamma = 0$  y  $\Delta\dot{\mathbf{y}} = 0$
4. Se puede hacer  $\mathbf{\Lambda}_z = \mathbf{\Lambda}_y$
5. Variar  $\mathbf{\Lambda}_y$  hasta un valor suficientemente grande con el cual se presenten oscilaciones sostenidas en la señal de salida.
6. Fijar  $\mathbf{\Lambda}_y$  como un sexto del valor obtenido en el paso anterior.
7. Determinar (de forma visual) el periodo de las oscilaciones y denominarlo  $P_{cr}$ .
8. Fijar  $\mathbf{K}_\gamma = 0.5P_{cr}$ .
9. Fijar  $\mathbf{K}_p = 0.125P_{cr}$
10. Variar  $\mathbf{K}_\beta$  hasta un valor que garantice la convergencia de las trayectorias.

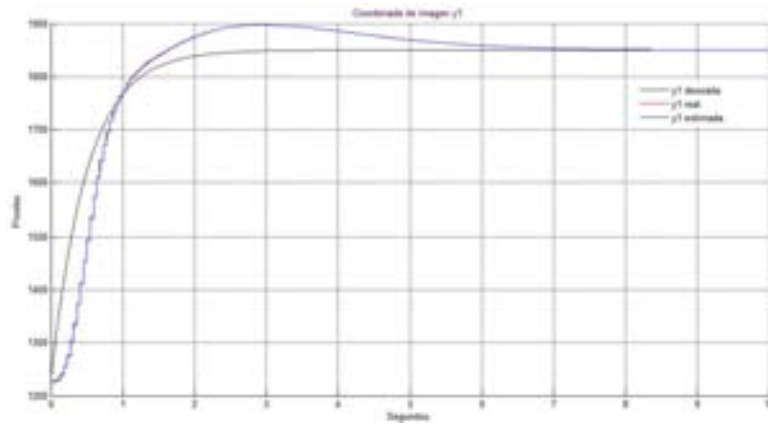
Al llevar a cabo cada uno de los pasos descritos en la numeración anterior, se obtuvieron los valores para todas las ganancias. En la Tabla 4.8 se muestran dichos valores.

Ganancia	Valor	Unidad
$\Lambda_y$ $\Lambda_{y1} = \Lambda_{y2} = \Lambda_{y3}$	30	1/s
$\mathbf{K}_\gamma$ $K_{\gamma1} = K_{\gamma2} = K_{\gamma3}$	0.1	adimensional
$\mathbf{K}_p$ $K_{p1} = K_{p2} = K_{p3}$	0.025	(Newton·s)/pixel
$\mathbf{K}_\beta$ $K_{\beta1} = K_{\beta2} = K_{\beta3}$	5.2	adimensional
$\Lambda_z$ $\Lambda_{z1} = \Lambda_{z2} = \Lambda_{z3}$	30	1/s
$k_d$	500	1/s
$k$	0.1	1/s

Tabla 4.8: Ganancias para el controlador y el observador.

## 4.1. Prueba uno

Se proponen:  $\mathbf{y}_i = [1226 \ 513 \ 513]^T$ ,  $\mathbf{y}_f = [1850 \ 100 \ 200]^T$

Figura 4.2: Trayectoria de la coordenada  $y_1$ .

La Figura 4.2 muestra la trayectoria de la coordenada  $y_1$  (rojo). De negro y azul se muestran los valores deseado y estimado, respectivamente. Se observa un sobrepaso de aproximadamente cincuenta píxeles en la etapa transitoria, mientras que la señal converge al valor deseado antes de ocho segundos.

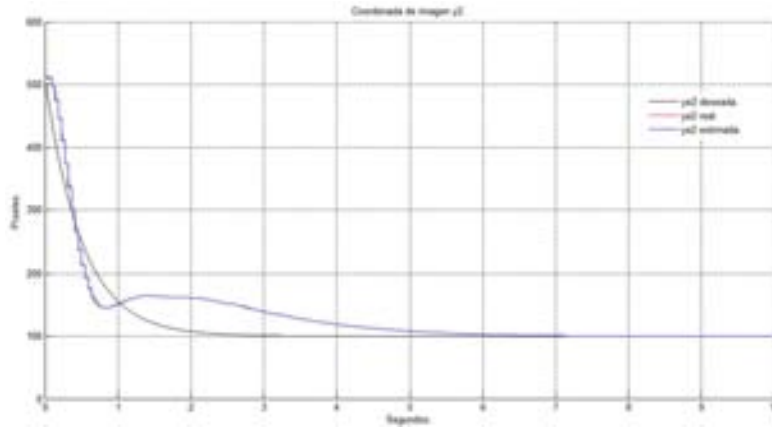


Figura 4.3: Trayectoria de la coordenada  $y_2$ .

En la Figura 4.3 aparece la trayectoria de la coordenada  $y_2$ . Hasta el primer segundo el seguimiento del valor deseado es bueno, sin embargo, a partir de ahí se da un sobrepaso de aproximadamente cincuenta pixeles y la convergencia se logra a los siete segundos.

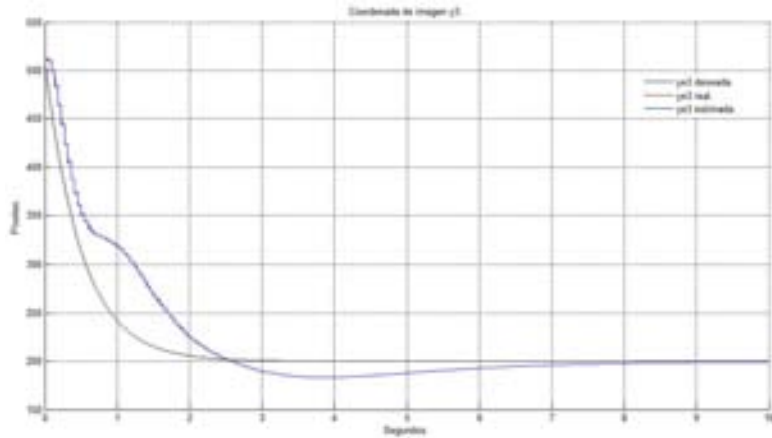


Figura 4.4: Trayectoria de la coordenada  $y_3$ .

Para la coordenada  $y_3$ , su gráfica aparece en la Figura 4.4. Se aprecia un sobrepaso de aproximadamente veinte pixeles, menor en comparación con las coordenadas anteriores. Sin embargo, en este caso el seguimiento no es tan bueno y la convergencia se logra a los nueve segundos.

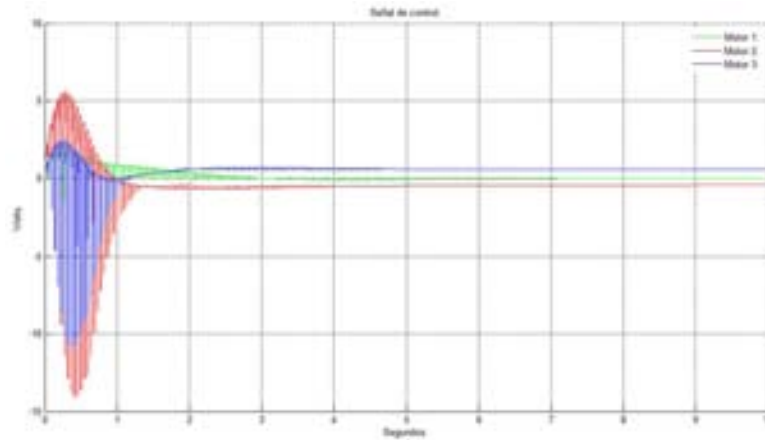


Figura 4.5: Señal de control expresada en volts.

En la Figura 4.5 aparece la señal de control expresada en volts para los motores. El valor máximo, que es para el motor dos, es menor a quince volts. Esto es poco comparado con el voltaje de saturación de los motores (setenta volts), lo cual puede indicar que el punto final no es muy lejano, o bien, que el robot se mueve lento. Las tres señales dejan de fluctuar a los siete segundos.

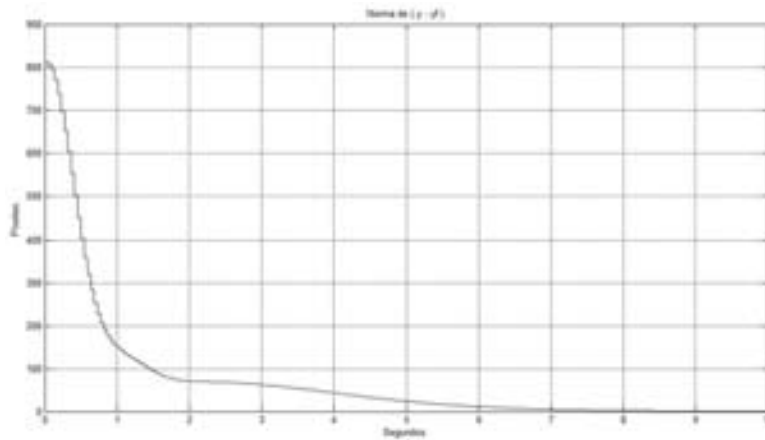


Figura 4.6: Norma de  $\tilde{y}$ .

En la Figura 4.6 se muestra la norma del error de posición  $\tilde{y}$ . Comienza arriba de los ochocientos pixeles y baja rápido durante el primer segundo, a partir de entonces, decrece lentamente hasta llegar a cero a los ocho segundos.

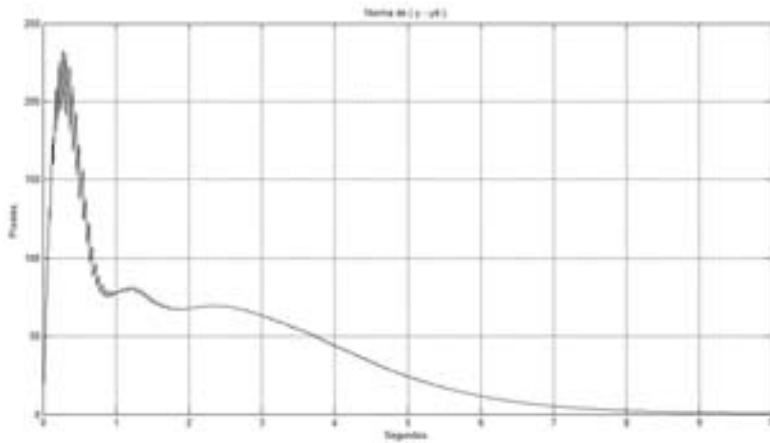


Figura 4.7: Norma de  $\Delta y$ .

En la Figura 4.7 se ilustra la norma del error de seguimiento  $\Delta y$ . Parte de cero debido a las condiciones iniciales. Crece hasta poco menos de doscientoscincuenta píxeles y desciende rápidamente durante el primer segundo. El descenso es lento hasta alcanzar el cero a los nueve segundos.

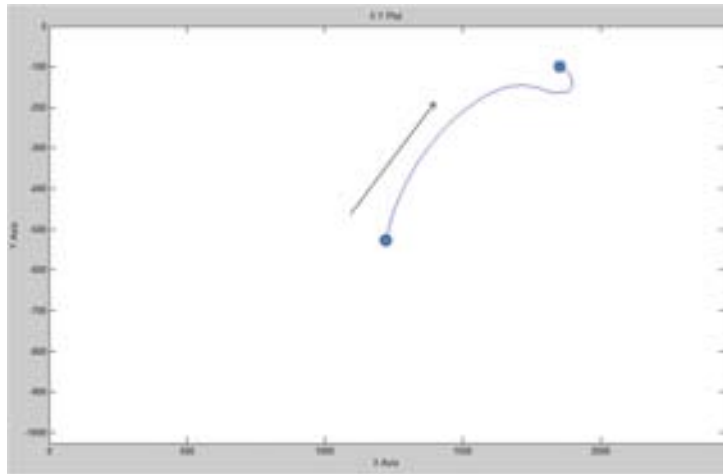


Figura 4.8: Representación de la pantalla uno.

La trayectoria que ejecuta el efector final del robot en la pantalla uno, se muestra en la Figura 4.8. El eje horizontal corresponde a  $y_1$ , mientras que el eje vertical a  $y_2$ . El sentido de la flecha indica la dirección del movimiento.

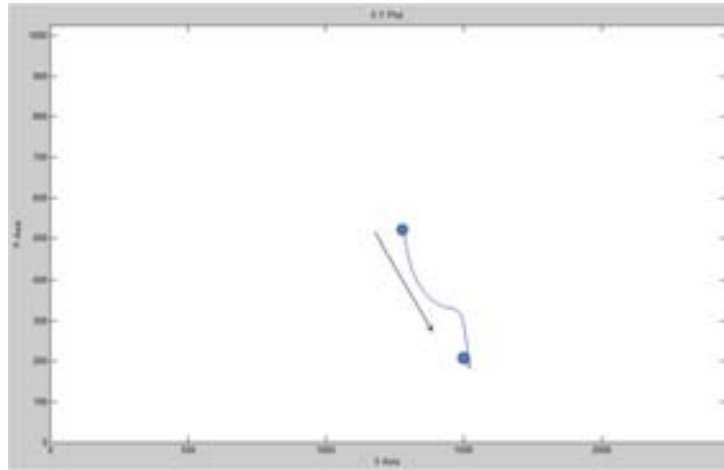


Figura 4.9: Representación de la pantalla dos.

Del mismo modo que en la figura anterior, la trayectoria del efector final para el caso de la pantalla dos, se aprecia en la Figura 4.9. Los ejes horizontal y vertical representan a  $y'_1$  y  $y_3$ , respectivamente. En este caso el desplazamiento es menor en ambos ejes. Los puntos azules corresponden a las posiciones inicial y final.

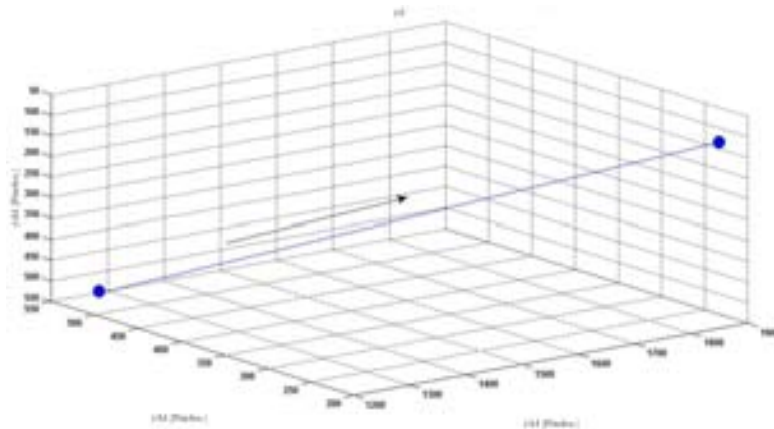
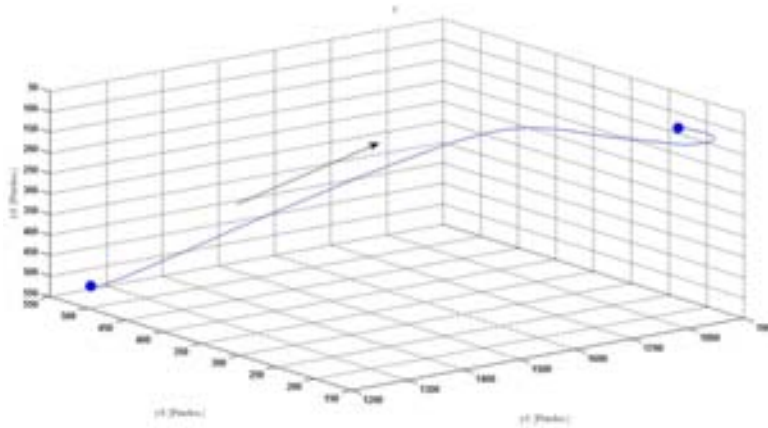


Figura 4.10: Trayectoria de  $y_d$ .

La Figura 4.10 ilustra la trayectoria deseada de manera tridimensional, generada por el algoritmo (3.3), entre los puntos inicial y final. Como se aprecia, ésta es una línea recta.



Figura 4.11: Trayectoria de  $\mathbf{y}$ .

La trayectoria real  $\mathbf{y}$  que describe el efector final se muestra en la Figura 4.11. En la primera parte de la trayectoria, ésta es una línea recta. Sin embargo, en la segunda parte ya no se asemeja a la trayectoria deseada  $\mathbf{y}_d$ .

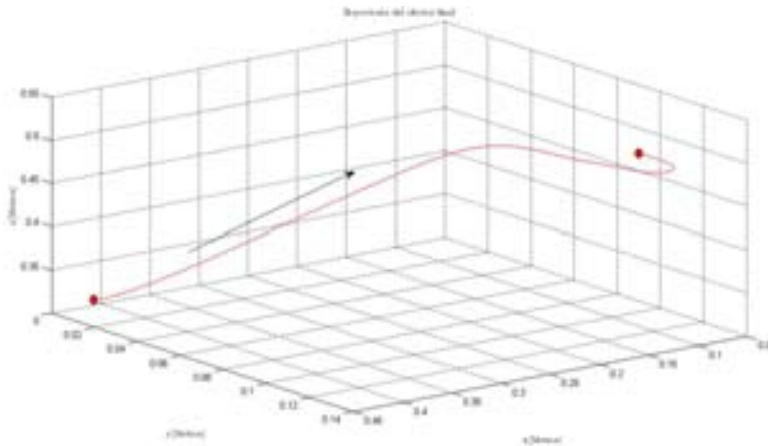


Figura 4.12: Trayectoria en 3D del efector final del robot.

La Figura 4.12 muestra la trayectoria que describe el efector final en el espacio cartesiano. Nótese la similitud con la gráfica anterior, lo cual confirma la relación entre los espacios cartesiano y de imagen que se trató en el Capítulo 3. En la Figura 4.13 se ilustran las coordenadas cartesianas.

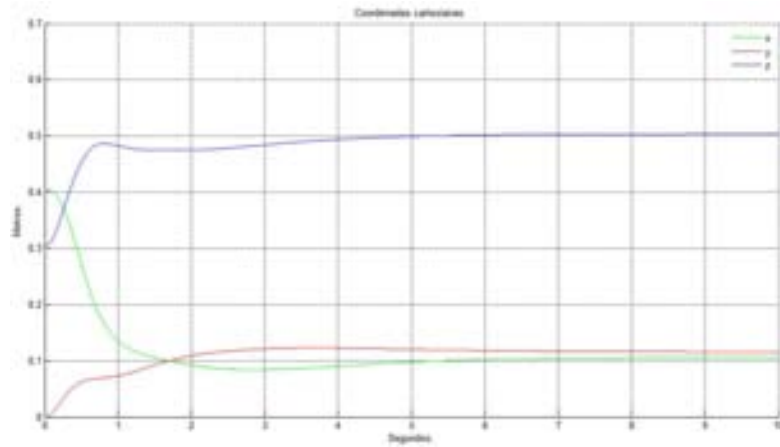


Figura 4.13: Coordenadas cartesianas del efector final del robot.

## 4.2. Prueba dos

Se proponen:  $\mathbf{y}_i = [1226 \ 513 \ 513]^T$ ,  $\mathbf{y}_f = [1850 \ 100 \ 200]^T$  pero ahora con una rotación  $\theta_1 = 22.5^\circ$  en la cámara uno.

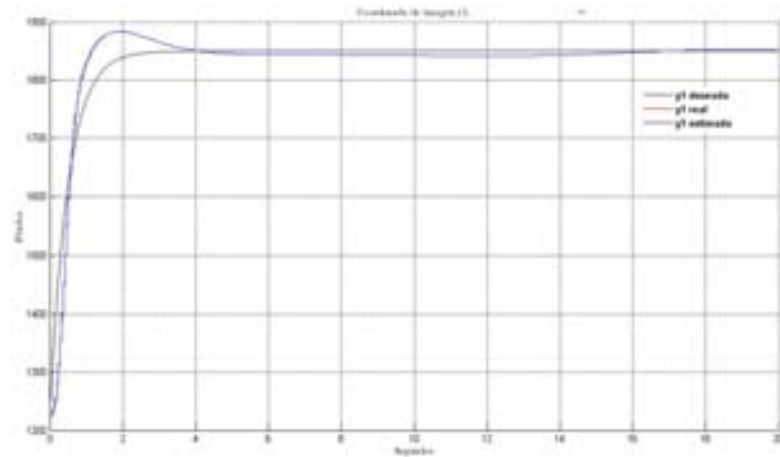


Figura 4.14: Trayectoria de la coordenada  $y_1$ .

La Figura 4.14 ilustra la trayectoria de la coordenada  $y_1$ . Se observa un seguimiento bueno y un sobrepaso aproximado de cincuenta píxeles. Después de los cuatro segundos la señal cae por debajo del valor deseado y se logra la convergencia a los diecisiete segundos.

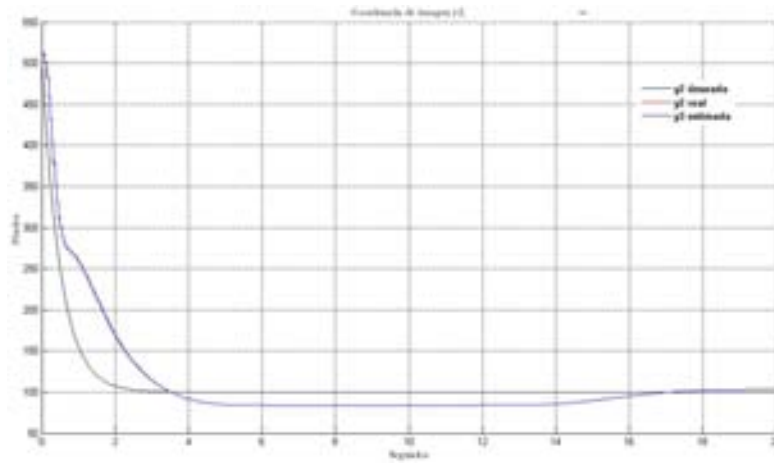


Figura 4.15: Trayectoria de la coordenada  $y_2$ .

En la Figura 4.15 se ilustra la trayectoria de la coordenada  $y_2$ . Antes de un segundo la señal se separa demasiado del valor deseado, casi cien píxeles. Después de los tres segundos el error crece hasta veinte píxeles y converge a los dieciocho segundos, manteniéndose un error de tres píxeles.

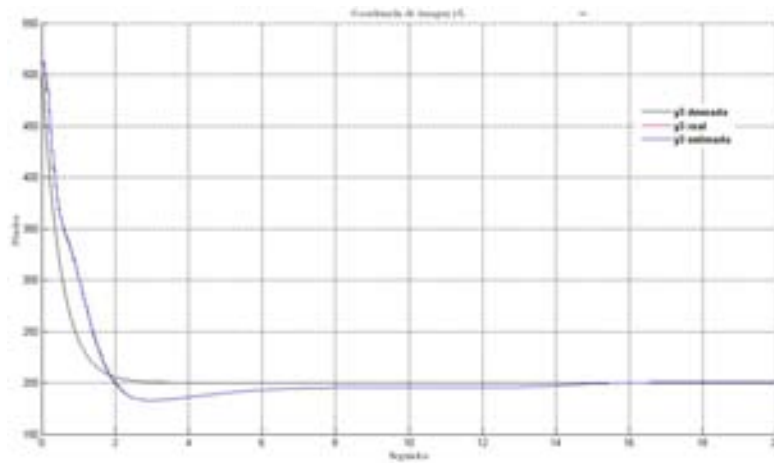


Figura 4.16: Trayectoria de la coordenada  $y_3$ .

La coordenada  $y_3$  muestra un desempeño similar a  $y_1$ . En la Figura 4.16 se observa un seguimiento bueno para  $y_3$  con un sobrepaso no tan alto, cerca de 20 píxeles. La señal converge a los 16 segundos.

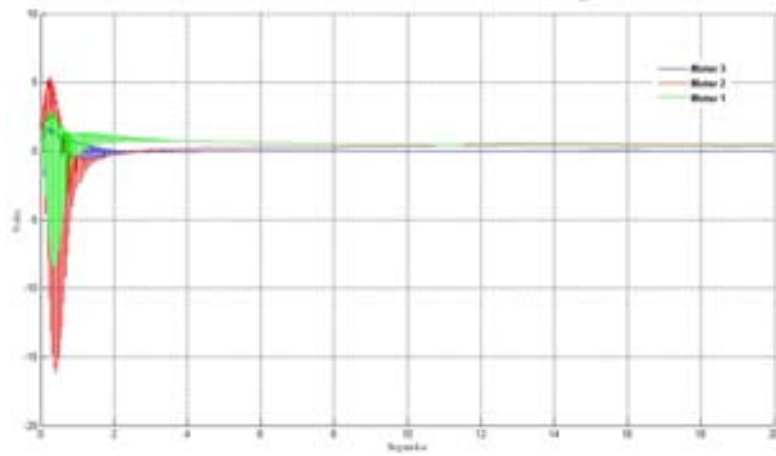


Figura 4.17: Señal de control expresada en volts.

La Figura 4.18 muestra la señal de control. Para los motores uno y tres los valores son muy parecidos a la prueba anterior. Para el motor dos, en este caso el valor máximo supera los menos quince volts en la etapa transitoria.

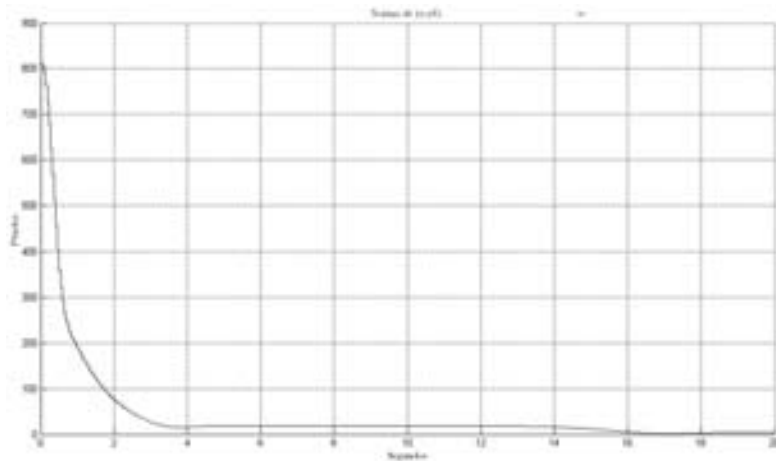
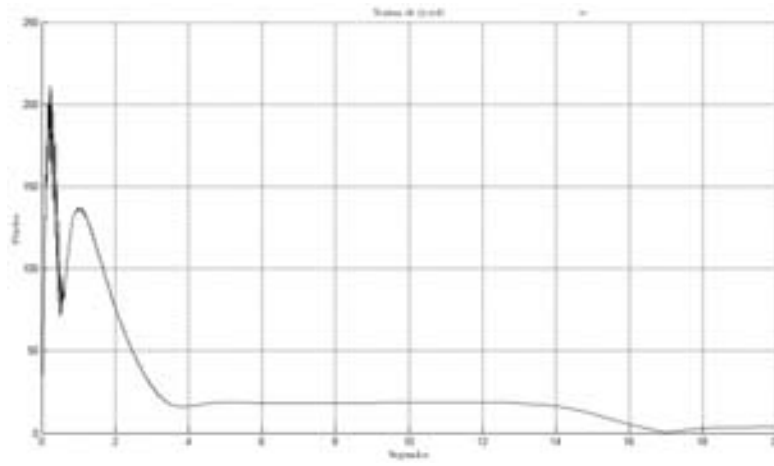


Figura 4.18: Norma de  $\tilde{y}$ .

La norma del error de posición  $\tilde{y}$  se muestra en la Figura 4.18. El decremento es rápido hasta antes de los tres segundos, a partir de ahí se mantiene la señal y el error converge a cero a los diecisiete segundos, pero se muestra un error de tres píxeles aproximadamente.

Figura 4.19: Norma de  $\Delta y$ .

Para el caso de la norma del error de seguimiento  $\Delta y$ . Su gráfica aparece en la Figura 4.19. Se observa que la señal crece, en principio, menos que en la prueba anterior. Sin embargo, la convergencia a cero se da a los diecisiete segundos y luego se conserva un error de cinco píxeles aproximadamente.

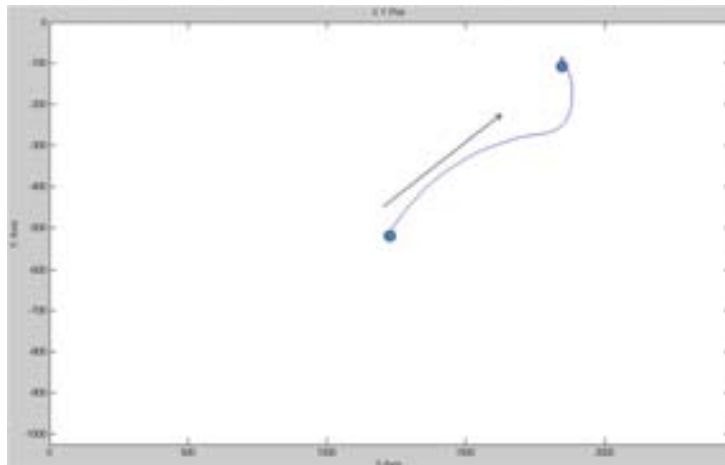


Figura 4.20: Representación de la pantalla uno.

La figura 4.20 muestra la trayectoria que describe el efector final del robot en la pantalla uno. Ésta última se ilustra por comodidad como si no hubiera rotado.

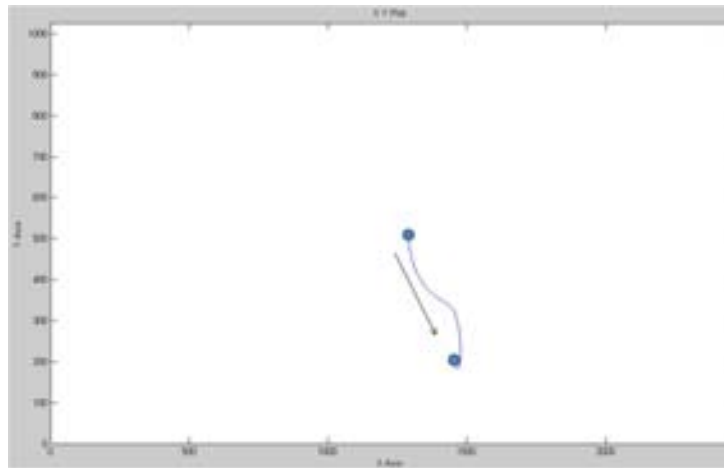


Figura 4.21: Representación de la pantalla dos.

En la Figura 4.21 se ilustra la trayectoria del efector final para la pantalla dos. Al igual que en la figura anterior, la trayectoria es parecida a aquella correspondiente a la prueba uno pero con curvas un poco más suaves.

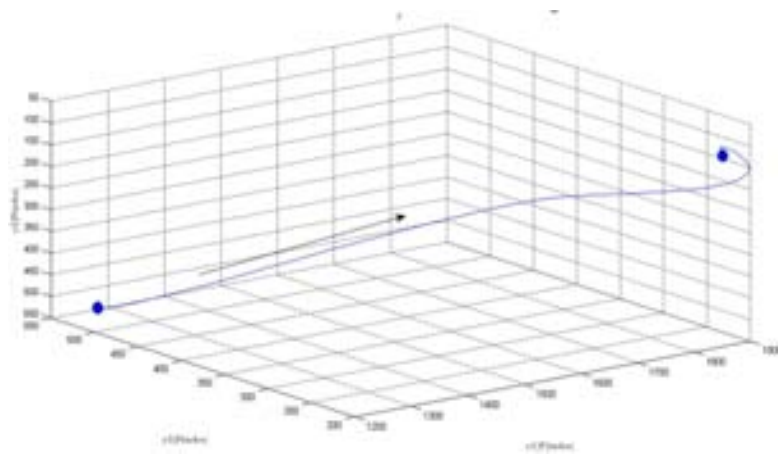


Figura 4.22: Trayectoria de  $\mathbf{y}$ .

La trayectoria tridimensional en coordenadas de imagen se muestra en la Figura 4.22. La trayectoria deseada es la misma que en la prueba anterior (Figura (4.10)). El seguimiento parece mejor para este caso, ya que la trayectoria es recta en su mayor parte; sin embargo, al final se presenta una curva brusca.

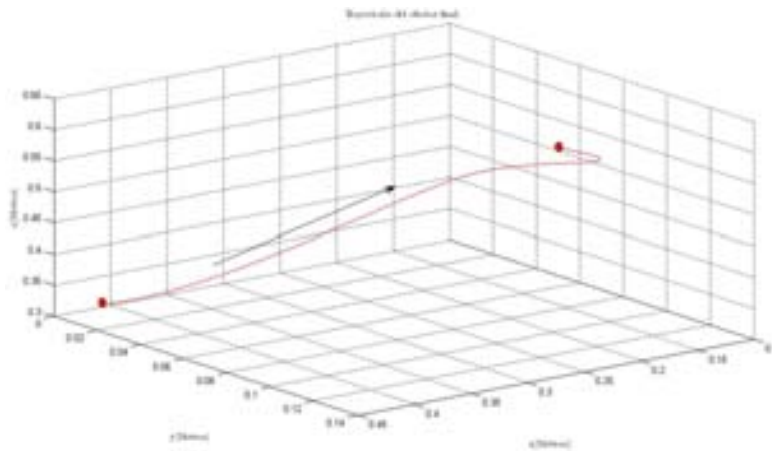


Figura 4.23: Trayectoria en 3D del efector final del robot.

En la Figura 4.23 se muestra la trayectoria cartesiana del efector final del robot. Asimismo, en la Figura 4.24 aparecen las trayectorias de cada una de las coordenadas cartesianas.

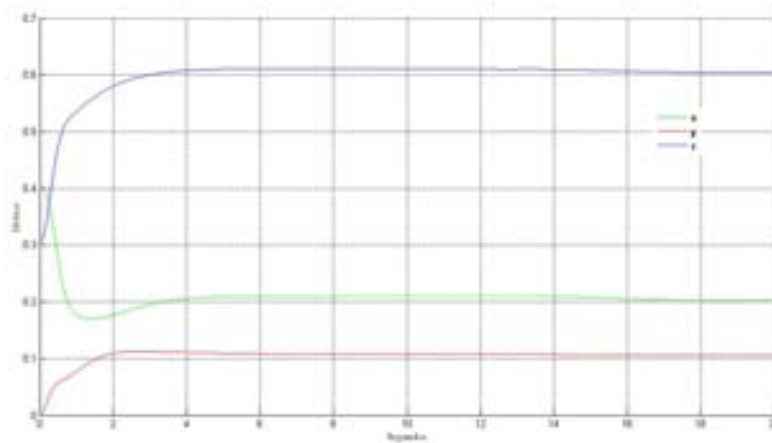


Figura 4.24: Coordenadas cartesianas del efector final del robot.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En esta tesis se abordó el problema referente al control de posición<sup>1</sup> en tres dimensiones de robots manipuladores (rígidos) de hasta tres grados de libertad mediante el empleo de retroalimentación visual.

Con la teoría se demostró que el controlador diseñado lleva el efector final del robot a la posición deseada en coordenadas de imagen, garantizando la convergencia a cero de los errores de seguimiento y de observación.

De acuerdo con los resultados de simulación, se confirmó lo expuesto en la teoría. Las tres coordenadas de imagen utilizadas convergen a su valor deseado en un tiempo bueno, considerando que se trata de un controlador servovisual en el que además se incluyen efectos de fricción. A pesar de que el algoritmo original está diseñado para el seguimiento de trayectorias, en el caso del control servovisual el seguimiento no es bastante sobresaliente; sin embargo, debido a que el propósito de control es llevar el efector final del robot a una posición deseada, se puede decir que sí se cumplió con el objetivo de diseño.

En la segunda prueba, al rotar la cámara uno, el controlador logró llevar las trayectorias a la posición deseada. Por lo tanto se pone de manifiesto un cierto nivel de robustez del controlador en el sentido de que garantiza el objetivo de control a pesar de posibles errores respecto al ángulo uno. El error de rotación que se utilizó es alto con relación al que se pueda cometer en la práctica. Sin embargo, para este último caso la convergencia se da en un tiempo mayor, cerca del doble. Cabe mencionar que el observador converge de forma excepcional; no importando el ángulo de rotación.

---

<sup>1</sup>En realidad el esquema estudiado recaé en el control de movimiento.



Con lo anterior se concluye que el controlador diseñado en esta tesis funciona de manera correcta y sin la necesidad de calibrar el sistema de visión, ya sea con o sin rotación en la cámara uno. Sin embargo, para fines de desempeño es preferible no rotar la cámara uno, o en su caso, conocer (con el menor error posible) el valor de dicho ángulo. Como recomendaciones futuras se proponen la realización de las pruebas con el equipo experimental y la aplicación de un sistema de visión estereoscópica.

# Apéndice A

## Modelo dinámico

El modelo dinámico del robot *CRS A465* considerando sólo las tres primeras articulaciones viene dado por (Gudiño-Lau y Artega-Pérez 2005):

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}_c(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{D}_k\mathbf{v} \quad (\text{A.1})$$

donde  $\mathbf{f}_c(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$  representa fricción de Coulomb,  $\mathbf{D}_n \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{D}_k \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  constituyen la dinámica de los motores, misma que ha sido incluida en  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{v} \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$  es el voltaje de entrada. Los términos de la ecuación (A.1) están dados por:

$$H_{1,1} = aux_1p_1 + aux_2p_2 + aux_3p_3 + aux_4p_4 + aux_5p_5 + aux_6p_6 + aux_7p_7 + p_8$$

$$H_{1,2} = H_{2,1} = 0$$

$$H_{1,3} = H_{3,1} = 0$$

$$H_{2,2} = \frac{1}{2}p_1 + p_2 + 2s_3p_3 + p_4 + p_9$$

$$H_{2,3} = H_{3,2} = \frac{1}{2}p_1 + p_2 + s_3p_3 + p_4 + p_5$$

$$H_{3,3} = \frac{1}{2}p_1 + p_2 + p_4 + p_{10}$$

$$C_{1,1} = aux_8p_3 + aux_9p_5 - \frac{1}{2}\dot{q}_2 \text{sen}(2q_2)p_6 + \frac{1}{2}\dot{q}_2 \text{sen}(2q_2)p_7$$

$$C_{1,2} = \dot{q}_1 \cos(2q_2 + q_3)p_3 + \frac{1}{2}\dot{q}_1 \text{sen}(2q_2 + 2q_3)p_5 - \frac{1}{2}\dot{q}_1 \text{sen}(q_2)p_6 + \frac{1}{2}\dot{q}_1 \text{sen}(2q_2)p_7$$

$$C_{1,3} = aux_{10}p_3 + \frac{1}{2}\dot{q}_1 \text{sen}(2q_2 + 2q_3)p_5$$

$$C_{2,1} = -\dot{q}_1 \cos(2q_2 + q_3)p_3 - \frac{1}{2}\dot{q}_1 \text{sen}(2q_2 + 2q_3)p_5 + \frac{1}{2}\dot{q}_1 \text{sen}(q_2)p_6 - \frac{1}{2}\dot{q}_1 \text{sen}(2q_2)p_7$$

$$C_{2,2} = \dot{q}_3 \cos(q_3)p_3$$

$$C_{2,3} = (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(q_3)p_3$$

$$C_{3,1} = -\left(\frac{1}{2}\dot{q}_1 \cos(q_3) + \dot{q}_1 \cos(2q_2 + q_3)\right)p_3 - \frac{1}{2}\dot{q}_1 \text{sen}(2q_2 + 2q_3)p_5$$

$$C_{3,2} = -\dot{q}_2 \cos(q_3)p_3$$

$$C_{3,3} = 0$$

$$\mathbf{D} = \text{diag}\{p_{11}, p_{12}, p_{13}\}$$

$$f_{c_1} = p_{14} \text{sgn}(\dot{q}_1)$$

$$f_{c_2} = p_{15} \text{sgn}(\dot{q}_2)$$

$$f_{c_3} = p_{16} \text{sgn}(\dot{q}_3)$$

$$g_1 = 0$$

$$g_2 = p_{17} \cos(q_2) + p_{18} \text{sen}(q_2 + q_3)$$

$$g_3 = p_{18} \text{sen}(q_2 + q_3)$$

$$\mathbf{D}_n = \text{diag}\left\{\frac{1}{r_1^2}, \frac{1}{r_2^2}, \frac{1}{r_3^2}\right\}, \mathbf{D}_k = \text{diag}\left\{\frac{K_{a_1}}{R_{a_1} r_1}, \frac{K_{a_2}}{R_{a_2} r_2}, \frac{K_{a_3}}{R_{a_3} r_3}\right\}$$

$r$  es la tasa de reducción de la transmisión de las articulaciones,  $R_a$  es la resistencia de armadura y  $K_a$  es la constante de torque. Sus valores son  $r_1 = r_2 = r_3 = 100$ ,  $R_{a_1} = R_{a_2} = R_{a_3} = 0.84\Omega$  y  $K_{a_1} = K_{a_2} = K_{a_3} = 0.1424 \frac{\text{Nm}}{\text{A}}$ . Los parámetros del robot y las variables auxiliares se muestran en las Tablas A.1 y A.2, respectivamente.

$p_1 = 0.0055 \text{ kg m}^2$	$p_7 = 0.0007 \text{ kg m}^2$	$p_{13} = 36.000 \text{ Nm s}$
$p_2 = 0.0080 \text{ kg m}^2$	$p_8 = 2.0007 \text{ kg m}^2$	$p_{14} = 0.2000 \text{ Nm}$
$p_3 = 0.0024 \text{ kg m}^2$	$p_9 = 11.800 \text{ kg m}^2$	$p_{15} = 2.5000 \text{ Nm}$
$p_4 = 0.0118 \text{ kg m}^2$	$p_{10} = 2.8000 \text{ kg m}^2$	$p_{16} = 2.5000 \text{ Nm}$
$p_5 = 0.0041 \text{ kg m}^2$	$p_{11} = 25.000 \text{ Nm s}$	$p_{17} = 22.000 \text{ Nm}$
$p_6 = 0.0009 \text{ kg m}^2$	$p_{12} = 35.000 \text{ Nm s}$	$p_{18} = 11.000 \text{ Nm}$

Tabla A.1: Parámetros del robot *CRS A465*.

$aux_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(2q_2 + 2q_3)$	$aux_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2q_2)$
$aux_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos(2q_2 + 2q_3)$	$aux_7 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2q_2)$
$aux_3 = \text{sen}(q_3) + \text{sen}(2q_2 + q_3)$	$aux_8 = \left\{ (\dot{q}_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_3) \cos(2q_2 + q_3) + \frac{1}{2}\dot{q}_3 \cos(q_3) \right\} \frac{1}{s}$
$aux_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2q_2 + 2q_3)$	$aux_9 = \left\{ \frac{1}{2}(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \text{sen}(2q_2 + 2q_3) \right\} \frac{1}{s}$
$aux_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2q_2 + 2q_3)$	$aux_{10} = \left\{ \frac{1}{2}\dot{q}_1 \left( \cos(q_3) + \cos(2q_2 + q_3) \right) \right\} \frac{1}{s}$

Tabla A.2: Variables auxiliares.

# Apéndice B

## Teorema

Teorema sobre el acotamiento final y uniforme de trayectorias (Khalil 2002: pp. 172).

Considérese el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (\text{B.1})$$

donde  $\mathbf{f} : [0, \infty) \times D \rightarrow R^n$  es continua por tramos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $\mathbf{x}$  sobre  $[0, \infty) \times D$ .  $D \subset R^n$  es un dominio que contiene al origen.

**Teorema B.0.1.** *Sea  $D \subset R^n$  un dominio que contiene al origen y  $V : [0, \infty) \times D \rightarrow R^n$  una función continuamente diferenciable tal que*

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|) \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} V(t, \mathbf{x}) \leq -W_3(\mathbf{x}), \quad \forall \|\mathbf{x}\| \geq \mu > 0 \quad (\text{B.3})$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall \mathbf{x} \in D$ , donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones tipo  $K$  y  $W_3(x)$  es una función continua definida positiva. Tómese  $r > 0$  tal que  $B_r \subset D$  y supóngase que

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) \quad (\text{B.4})$$

entonces existe una función tipo  $KL$ , llámese  $\beta$ , y para cada estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  que satisface  $\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$  hay un  $T \geq 0$  (dependiente de  $\mathbf{x}(t_0)$  y  $\mu$ ) tal que la solución de (B.1) satisface

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (\text{B.5})$$

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall t \geq t_0 + T \quad (\text{B.6})$$

Adicionalmente, si  $D = \mathbb{R}^n$  y  $\alpha_1$  es una función tipo  $K_\infty$ , entonces (B.5) y (B.6) se cumplen para cualquier estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$ , sin importar que tan grande sea  $\mu$ .

◇

# Apéndice C

## Cinemática directa

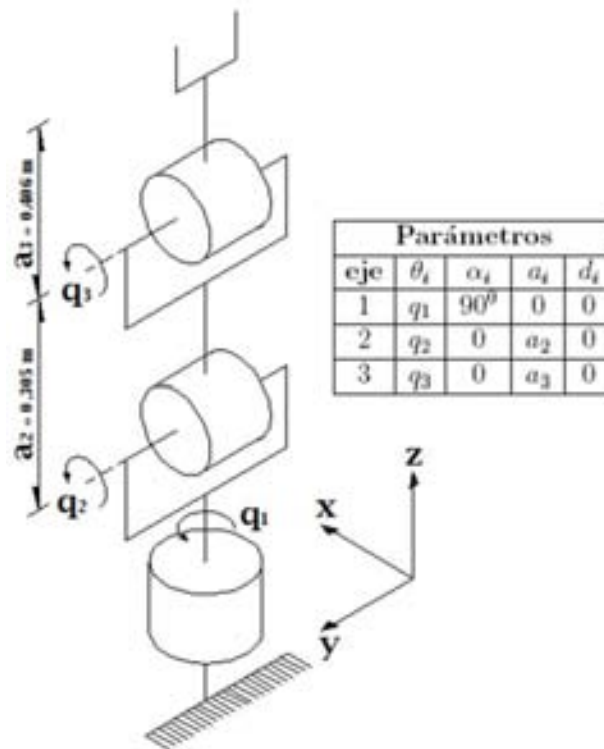


Figura C.1: Cinemática directa del robot *CRS A465*.

Aplicando el método de Denavit-Hartenberg se obtienen los parámetros de la Figura C.1, con los cuales se construye la matriz

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i)\sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i)\sin(\theta_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i)\cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i)\cos(\theta_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

para  $i = 1, 2, 3$ . Por lo tanto, de la matriz de transformación homogénea final

$${}^0\mathbf{T}_3(\mathbf{q}) = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 \quad (\text{C.2})$$

se obtiene la posición del efector final del robot

$$\mathbf{x}_R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

donde

$$x = a_3 \cos(q_1) \cos(q_2 + q_3) + a_2 \cos(q_1) \cos(q_2) \quad (\text{C.4})$$

$$y = a_3 \sin(q_1) \cos(q_2 + q_3) + a_2 \sin(q_1) \cos(q_2) \quad (\text{C.5})$$

$$z = a_3 \sin(q_2 + q_3) + a_2 \sin(q_2) \quad (\text{C.6})$$

# Apéndice D

## Jacobiano geométrico

El Jacobiano geométrico esta dado por:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

Usando la cinemática directa se obtiene la posición para cada uno de los eslabones del robot

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \cos(q_1) \cos(q_2) \\ a_2 \sin(q_1) \cos(q_2) \\ a_2 \sin(q_2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \cos(q_1)(a_2 \cos(q_2) + a_3 \cos(q_2 + q_3)) \\ \sin(q_1)(a_2 \cos(q_2) + a_3 \cos(q_2 + q_3)) \\ a_2 \sin(q_2) + a_3 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix}$$

Por otro lado, se calculan los vectores unitarios de los ejes de cada articulación

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \sin(q_1) \\ -\cos(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$



Finalmente, ejecutando los productos vectoriales de (D.1) y considerando que sólo se tienen tres grados de libertad, se llega a la matriz de  $3 \times 3$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(q_1)b & -\operatorname{cos}(q_1)a & -a_3 \operatorname{cos}(q_1) \operatorname{sen}(q_2 + q_3) \\ \operatorname{cos}(q_1)b & -\operatorname{sen}(q_1)a & -a_3 \operatorname{sen}(q_1) \operatorname{sen}(q_2 + q_3) \\ 0 & b & a_3 \operatorname{cos}(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

con

$$\begin{aligned} a &= a_2 \operatorname{sen}(q_2) + a_3 \operatorname{sen}(q_2 + q_3) \\ b &= a_2 \operatorname{cos}(q_2) + a_3 \operatorname{cos}(q_2 + q_3) \end{aligned}$$

# Bibliografía

- [1] L. Acosta, J.J. Rodrigo, J.A. Méndez, G.N. Marichal, and M. Sigut. Ping-pong player prototype: A pc-based, low-cost, ping-pong robot. *IEEE ROBOTICS AND AUTOMATION MAGAZINE*, pages 44–52, diciembre 2003.
- [2] M.R. Akella. Vision-based adaptive tracking control of uncertain robot manipulators. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 21 no. 4:pp. 748–753, 2005.
- [3] M. Arteaga and R. Kelly. Robot control without velocity measurements : New theory and experimental results. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS AND AUTOMATION*, vol. 24 no. 2:pp. 297–308, abril 2004.
- [4] L. Bascetta and P. Rocco. Two-time scale visual servoing of eye-in-hand flexible manipulators. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 22 no. 4:pp. 818–830, agosto 2006.
- [5] G. Bekey and J. Yuh. The status of robotics, report on the wtec international study : Parts1 y 2. *IEEE ROBOTICS AND AUTOMATION MAGAZINE*, pages 76–81, diciembre 2007.
- [6] G. Cannata and M. Maggiali. Models for the design of bioinspired robot eyes. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 24 no. 1:pp. 27–44, febrero 2008.
- [7] F. Chaumette. Image moments : A general and useful set of features for visual servoing. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 24 no. 4:pp. 713–723, agosto 2004.

- [8] F. Chaumette and S.A. Hutchinson. Tutorial on visual servo control. part 1 : Basic approaches. *IEEE ROBOTICS AND AUTOMATION MAGAZINE*, pages 82–90, diciembre 2006.
- [9] F. Chaumette and S.A. Hutchinson. Tutorial on visual servo control. part 2 : Advanced approaches. *IEEE ROBOTICS AND AUTOMATION MAGAZINE*, pages 109–118, marzo 2007.
- [10] Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 1999.
- [11] G. Chesi, K. Hashimoto, D. Prattichizzo, and A. Vicino. Keeping features in the field of view in eye-in-hand visual servoing : A switching approach. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 20 no. 5:pp. 908–913, octubre 2004.
- [12] G. Chesi and A. Vicino. Visual servoing for large camera displacements. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 20 no. 4:pp. 724–735, agosto 2004.
- [13] C. Collewet and F. Chaumette. Visual servoing based on structure from controlled motion or on robust statistics. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 24 no. 2:pp. 318–330, abril 2008.
- [14] A.I. Comport, E. Marchand, and F. Chaumette. Statistically robust 2-d visual servoing. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 22 no. 2:pp. 416–421, abril 2006.
- [15] P.I. Corke. *Visual Control of Robots : high performance visual servoing*. Research Studies Press LTD, 1996.
- [16] N.J. Cowan and D.E. Chang. Geometric visual servoing. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 21 no. 6:pp. 1128–1138, diciembre 2006.
- [17] A. Ferrolho and M. Crisóstomo. Intelligent control and integration software for flexible manufacturing cells. *IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL INFORMATICS*, vol. 3 no. 1:pp. 3–11, febrero 2007.
- [18] S. Florczyk. *Robot Vision. Video-based indoor exploration with autonomous and mobile robots*. WILEY-VCH, 2005.

- [19] N.R. Gans and S.A. Hutchinson. Stable visual servoing through hybrid switched-system control. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 23 no. 3:pp. 530–540, junio 2007.
- [20] N. García-Aracil, E. Malis, R. Aracil-Santoja, and C. Pérez-Vidal. Continuous visual servoing despite the changes of visibility in image features. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 21 no. 6:pp. 1214–1220, diciembre 2005.
- [21] B.K. Gosh, XiÑing, and T.J. Tarn. *Control in Robotics and Automation. Sensor-Based integration*. Academic Press, 1999.
- [22] G. Gudiño-Lau and M. Arteaga. Dynamic model and simulation of cooperative robots. *Robotica Cambridge University Press*, vol. 23:pp. 615–624, 2005.
- [23] N. Guenard, T. Hamel, and R. Mahony. A practical visual servo control for an unmanned aerial vehicle. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 24 no. 2:pp. 331–340, abril 2008.
- [24] H. Hadj-Abdelkader, Y. Mezouar, P. Martinet, and F. Chaumette. Cata-dioptric visual servoing from 3d straight lines. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 24 No. 3:pp. 652–665, 2008.
- [25] L. Hsu, R.R. Costa, and F. Lizarralde. Lyapunov/passivity-based adaptive control of relative degree two mimo systems with an application to visual servoing. *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, vol. 52 no. 2:pp. 364–371, febrero 2007.
- [26] S.A. Hutchinson, G.D. Hager, and P.I. Corke. A tutotial on visual servo control. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS AND AUTOMATION*, vol. 12 No. 5:pp. 651–670, 1996.
- [27] M. Iwatsuki and N. Okiyama. A new formulation of visual servoing based on cylindrical coordinate system. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 21, no. 2:pp. 266–273, abril 2005.
- [28] H.L. Jin and M. Zacksenhouse. Robotic yoyo playing with visual feedback. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 20 no. 4:pp. 736–744, agosto 2004.

- [29] R. Kelly, J. Moreno, and R. Campa. Visual servoing of planar robots via velocity fields. *IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL*, pages 14–17, diciembre 2004.
- [30] R. Kelly and F. Reyes. On vision system identification with application to fixed-camera robotic systems. *John Wiley and Sons, Inc.*, vol. 11:pp. 170–180, 2000.
- [31] R. Kelly and V. Santibáñez. *Control de Movimiento en Robots Manipuladores*. Pearson Prentice Hall, 2003.
- [32] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [33] J.H. Kim, S.K. Kuo, and C.H. Menq. An ultraprecision six-axis visual servo-control system. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 21 no. 5:pp. 985–993, octubre 2005.
- [34] J.H. Kim and C.H. Menq. Visual servo control achieving nanometer resolution in x-y-z. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 25 no. 1:pp. 109–116, febrero 2009.
- [35] V. Lipiello, B. Siciliano, and L. Villani. Position-based visual servoing in industrial multirobot cells using a hybrid camera configuration. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 23 no. 1:pp. 73–86, febrero 2007.
- [36] Y. Liu, A.W. Hoover, and I.D. Walker. A timing model for vision-based control of industrial robot manipulators. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 20 no. 5:pp. 891–898, octubre 2004.
- [37] Y.H. Liu, H. Wang, C. Wang, and K.K. Lam. Uncalibrated visual servoing of robots using a depth-independent interaction matrix. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 22 no. 4:pp. 804–817, agosto 2006.
- [38] Philippe Martinet. Tutorial on advanced visual servoing. part i : Introduction to visual servoing. Technical report, Blaise Pascal University, 2004.
- [39] Shimon Y. Nof. *Handbook of Industrial Robotics*. Jhon Wiley and Sons Inc., 1999.

- [40] N. Ogawa, H. Oku, K. Hashimoto, and Ishikawa M. Microrobotic visual control of motile cells using high-speed tracking system. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 21 no. 3:pp. 704–712, junio 2005.
- [41] Tobias Ortmaier. Medical applications of visual servoing. Technical report, Institute of Robotics and Mechatronics. German Aerospace Center (DLR), 2005.
- [42] V. Parra-Vega, S. Arimoto, Y.H. Liu, H. Hirzinger, and P. Akella. Dynamic sliding pid control for tracking of robot manipulators : Theory and experiments. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS AND AUTOMATION*, vol. 19 no. 6:pp. 967–976, diciembre 2003.
- [43] V. Parra-Vega, M. Arteaga, and A. Castillo. Cartesian control of robots without dynamic model and observer design. *Automatica*, vol. 42:pp. 473–480, 2006.
- [44] G. Pájarez and J. De la Cruz. *Vision por Computador. Imágenes digitales y aplicaciones*. Alfaomega, Ra-Ma, 2008.
- [45] R. Pérez, M. Arteaga, R. Kelly, and A. Espinosa. On output regulation of direct visual servoing via velocity fields. *International Journal of Control*, vol. 00 no. 00:pp. 1–18, 2008.
- [46] F. Schramm and G. Morel. Ensuring visibility in calibration-free path planing for image-based visual servoing. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 22 no. 4:pp. 848–854, agosto 2006.
- [47] B. Siciliano and O. Khatib. *Springer Handbook of Robotics*. Springer, 2008.
- [48] B. Siciliano and L. Sciavicco. *Modelling and Control of Robot Manipulator*. Springer, 2003.
- [49] O. Tahri, Y. Mezouar, N. Andreff, and P. Martinet. Omnidirectional visual-servo of a gough-stewart platform. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 25 no. 1:pp. 178–183, febrero 2009.
- [50] O. Tonet, F. Focacci, M. Piccigallo, L. Mattei, C. Quaglia, G. Megali, B. Mazzolai, and P. Dario. Bioinspired robotic dual-camera system for high-resolution vision. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 24 no. 1:pp. 55–64, febrero 2008.

- [51] H. Wang, Y.H Liu, and D. Zhou. Adaptive visual servoing using point and line features with an uncalibrated eye-in-hand camera. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 24 No. 4:pp. 843–857, 2008.
- [52] H. Wang, Y.H. Liu, and D. Zhou. Dynamic visual tracking for manipulators using an uncalibrated fixed camera. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, vol. 23 no.3:pp. 610–617, junio 2007.