



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

# **POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

## **FACULTAD DE CIENCIAS**

**Sobre la conjetura de Erdős, Faber y Lovász**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE  
MAESTRO(A) EN CIENCIAS**

**P R E S E N T A**

**Adrián Vázquez Ávila**

**DIRECTOR(A) DE LA TESINA: Dr. David Romero Vargas**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>2</b>
2.1. Introducción . . . . .	2
2.2. Definiciones . . . . .	2
2.3. Algunas conjeturas equivalentes . . . . .	4
2.3.1. Equivalencia de Erdős, Faber y Lovász en términos del índice cromático . . .	4
2.3.2. Equivalencia de Romero y Sánchez-Arroyo sobre cúmulos . . . . .	5
2.3.3. Equivalencia de Romero y Sánchez-Arroyo en términos del índice cromático híbrido . . . . .	6
2.3.4. Equivalencia de Romero y Sánchez-Arroyo en términos de coloración de celdas	8
2.3.5. Equivalencia de Sánchez-Arroyo . . . . .	8
2.3.6. Equivalencia de Klein y Margraf . . . . .	9
<b>3. Algunos Avances de la Conjetura</b>	<b>10</b>
3.1. Introducción . . . . .	10
3.2. Resultado de Colbourn y Colbourn . . . . .	10
3.3. Resultado de Jackson, Sethuraman y Whitehead . . . . .	11
3.4. Resultado de Romero y Sánchez-Arroyo . . . . .	14
3.5. Esqueletos . . . . .	16
3.6. Resultado de Sánchez-Arroyo . . . . .	18
3.7. Resultado de Klein y Margraf . . . . .	18
<b>4. Conclusiones</b>	<b>19</b>
<i>Referencias</i>	<b>20</b>

# 1. Introducción

La conjetura de Erdős, Faber y Lovász (E-F-L), propuesta alrededor de 1972, establece: sea  $|A_k| = n$ , para  $1 \leq k \leq n$ ; si cualesquiera dos conjuntos tienen a lo más un elemento en común, entonces se pueden colorear los elementos de la unión  $\bigcup_{k=1}^n A_k$  con  $n$  colores tal que todo conjunto tiene elementos de todos los colores.

Sorprendentemente esta conjetura no ha sido resuelta en su totalidad. Erdős consideró este problema combinatorio entre sus tres favoritos [7]. Al principio, Erdős ofreció 50 dólares para dar una prueba o un contraejemplo de esta conjetura, que posteriormente llegó a los 500 dólares.

Este trabajo presenta un panorama sobre algunos avances que se han hecho sobre esta conjetura. La sección 2 da algunas definiciones para presentar la conjetura E-F-L en términos de hipergráficas y de coloración de vértices. Por el momento, una hipergráfica se puede pensar que consta de un conjunto no vacío de puntos, llamados vértices, y una familia de subconjuntos no vacíos de éstos, llamados aristas. La primera coloración que vamos a mencionar es la coloración de vértices, que en general no es más que una asignación de un conjunto de colores a los vértices de una hipergráfica, ya que la conjetura habla de dar una cierta coloración a los elementos de una familia de subconjuntos de un conjunto dado, por lo que tenemos que dar sentido a esto.

En esa misma sección mostramos equivalencias de la conjetura E-F-L planteada en términos de hipergráficas y de coloración de vértices. Por ejemplo, se prueba que es equivalente a dar una coloración de aristas (que es una asignación de un conjunto de colores a las aristas de una hipergráfica) a hipergráficas sin lazos.

Posteriormente, en la sección 3 presentamos algunos avances que se han hecho sobre esta conjetura, que hasta este momento apunta a ser cierta. Esta sección está basada principalmente en los artículos [5], [14], [15], [16] y [17]. Por último, en la sección 4 se mencionan las conclusiones del trabajo.

## 2. Preliminares

### 2.1. Introducción

Originalmente, la conjetura de Erdős, Faber y Lovász (E-F-L) establece que si  $|A_k| = n$ , para  $1 \leq k \leq n$ , y  $|A_i \cap A_j| \leq 1$ , para  $i < j \leq n$ , entonces uno puede colorear los elementos de la unión  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  con  $n$  colores de forma que todo conjunto tenga elementos de todos los colores.

Esta sección presenta la conjetura de E-F-L en términos de hipergráficas y mencionamos algunas conjeturas equivalentes a ésta.

### 2.2. Definiciones

Una *hipergráfica*  $\mathcal{H}$ , en términos generales, consiste de un conjunto no vacío  $\mathcal{V}$  y de una familia  $\mathcal{E}$  de subconjuntos no vacíos de  $\mathcal{V}$ . A los elementos de  $\mathcal{V}$  les llamamos vértices y a los elementos de  $\mathcal{E}$  les llamamos *aristas* o *hiperaristas*.

A lo largo del trabajo consideramos que  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{E}$  son finitos, y, que todo vértice está en al menos una arista.

**Definición 1.** Sea  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$  un conjunto finito. Una hipergráfica  $\mathcal{H}$  sobre  $\mathcal{V}$  es una familia finita  $\mathcal{V} = \{E_1, \dots, E_m\}$  de subconjuntos no vacíos de  $\mathcal{V}$ , tal que  $\mathcal{V} = \bigcup_{k=1}^m E_k$ . Denotamos a una hipergráfica como  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  o bien  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \{E_1, \dots, E_m\})$ .

Una hipergráfica  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  puede dibujarse como un conjunto de puntos representando los elementos de  $\mathcal{V}$  (vértices), y cada arista de  $\mathcal{H}$  como una curva cerrada juntando los elementos de  $\mathcal{V}$  contenidos en la arista.

**Observación 1.** Una hipergráfica  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \{E_1, \dots, E_m\})$  es una gráfica si  $|E_i| \leq 2$ , para  $i = 1, \dots, m$ . Entonces, una hipergráfica puede pensarse como una generalización de una gráfica.

En una hipergráfica  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \{E_1, \dots, E_m\})$ , dos vértices son *adyacentes* si ambos vértices están en  $E_i$  para algún  $i$ , además, una arista  $E_k$  es *incidente* a un vértice  $v \in \mathcal{V}$ , si  $v \in E_k$ . El *grado* de un vértice  $v \in \mathcal{V}$ , denotado como  $\deg(v)$ , se define como el número de aristas incidentes a  $v$ . Denotamos como  $\delta(\mathcal{H})$  y  $\Delta(\mathcal{H})$  al mínimo y máximo grado de  $\mathcal{H}$ , respectivamente. Cuando todos los grados de una hipergráfica  $\mathcal{H}$  son iguales, decimos que  $\mathcal{H}$  es *regular*. Finalmente, decimos que una hipergráfica  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \{E_1, \dots, E_m\})$  es *k-uniforme* si  $|E_i| = k$ , para  $i = 1, \dots, m$ .

**Definición 2.** Dos hipergráficas  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  y  $\mathcal{H}' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$  se dicen *isomorfas*, denotado como  $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}'$ , si existe una biyección entre los conjuntos  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{V}'$ , y una biyección entre  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{E}'$  tales que, para todo vértice  $v \in \mathcal{V}$  y toda arista  $E \in \mathcal{E}$  tenemos que  $v \in E$  si y sólo si el vértice correspondiente  $v' \in \mathcal{V}'$  y la arista correspondiente  $E' \in \mathcal{E}'$  se cumple  $v' \in E'$  (se preserve adyacencia).

**Definición 3.** El dual de una hipergráfica  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \{E_1, \dots, E_m\})$ , es la hipergráfica  $\mathcal{H}^* = (\mathcal{V}^*, \mathcal{E}^*)$  cuyos vértices  $\mathcal{V}^* = \{e_1, \dots, e_m\}$  son las aristas de  $\mathcal{H}$ , y las aristas  $\mathcal{E}^* = \{E_1^*, \dots, E_n^*\}$  son de la forma  $E_i^* = \{e_j : v_i \in E_j \in \mathcal{H}\}$ .

La formulación que vamos a dar de la conjetura E-F-L está dada en términos de un tipo de hipergráficas en particular, las hipergráficas lineales. Una hipergráfica  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \{E_1, \dots, E_m\})$  se dice *lineal* si cumple  $|E_i \cap E_j| \leq 1$ , para  $1 \leq i < j \leq m$ .

## Observación 2.

- i) Si  $\mathcal{H}$  es una hipergráfica, entonces  $(\mathcal{H}^*)^* \cong \mathcal{H}$ , es decir, la hipergráfica dual de una hipergráfica dual es isomorfa a la primal.
- ii) Si una hipergráfica es lineal entonces su dual también es lineal: sea  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  una hipergráfica lineal y  $\mathcal{H}^* = (\mathcal{V}^*, \mathcal{E}^*)$  su dual. Si existen aristas  $E^*, F^*$  en  $\mathcal{H}^*$  tales que  $|E^* \cap F^*| \geq 2$ , esto implica que en su dual (que es  $\mathcal{H}$ ) hay al menos dos aristas con intersección mayor o igual a dos. Por lo que  $\mathcal{H}^*$  es lineal.

**Definición 4.** Sea  $\{1, 2, \dots, k\}$  un conjunto de  $k$  colores. Decimos que una hipergráfica  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \{E_1, \dots, E_m\})$  tiene una  $k$  coloración propia de vértices si existe un mapeo sobreyectivo  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  tal que, si dos vértices  $u, v \in \mathcal{V}$  son adyacentes, entonces  $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ . Es decir, dos vértices con el mismo color no pertenecen a la misma arista. Si existe tal coloración ( $\varphi$ ) decimos que  $\mathcal{H}$  es  $k$  coloreable por vértices (o  $k$  vértice coloreable).

El número cromático de una hipergráfica  $\mathcal{H}$  se define como el mínimo entero  $k$  para el cual  $\mathcal{H}$  es  $k$  vértice coloreable.

Con todo lo anterior, ya se puede establecer la conjetura E-F-L en términos de hipergráficas.

**Conjetura 1.** Si  $\mathcal{H}$  es una hipergráfica lineal con  $n$  aristas y  $n$ -uniforme, entonces  $\chi(\mathcal{H}) = n$ .

La conjetura E-F-L se puede formular en términos de gráficas completas.

**Conjetura 2.** Si una gráfica  $G$  es la unión de  $n$  gráficas completas  $G_1, \dots, G_n$  de  $n$  vértices, y  $|V(G_i) \cap V(G_j)| \leq 1$ , para  $1 \leq i < j \leq n$ , entonces  $\chi(G) = n$ .

Aquí, las aristas de la hipergráfica son las gráficas completas.

### 2.3. Algunas conjeturas equivalentes

Antes de continuar, decimos que si una hipergráfica  $\mathcal{H}$  satisface la hipótesis de una conjetura entonces  $\mathcal{H}$  es una instancia de ésta.

#### 2.3.1. Equivalencia de Erdős, Faber y Lovász en términos del índice cromático

**Definición 5.** Sea  $\{1, \dots, k\}$  un conjunto de  $k$  colores. Decimos que una hipergráfica  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \{E_1, \dots, E_m\})$  tiene una  $k$  coloración propia de aristas, si existe un mapeo sobreyectivo  $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  tal que, si las aristas  $E_i, E_j$ , con  $i \neq j$ , son adyacentes entonces  $\phi(E_i) \neq \phi(E_j)$ . Es decir, si dos aristas son adyacentes entonces éstas no pueden tener el mismo color. Si existe tal coloración ( $\phi$ ) decimos que  $\mathcal{H}$  es  $k$ -arista-coloreable.

El índice cromático de una hipergráfica  $\mathcal{H}$ , denotado como  $\chi'(\mathcal{H})$ , lo definimos como el menor entero  $k$  para el cual  $\mathcal{H}$  es  $k$ -arista-coloreable.

**Observación 3.** Una coloración de vértices de una hipergráfica  $\mathcal{H}$  corresponde a una coloración de aristas de  $\mathcal{H}^*$  y viceversa. La arista  $E_i^*$  de  $\mathcal{H}^*$  recibe el color asignado del vértice  $v_i$  de  $\mathcal{H}$ ; similarmente, el vértice  $e_j$  de  $\mathcal{H}^*$  obtiene el color asignado de la arista  $E_j$  de  $\mathcal{H}$ .

**Conjetura 3.** Si  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  es una hipergráfica lineal sin lazos repetidos, entonces  $\chi'(\mathcal{H}) \leq |\mathcal{V}|$ .

**Proposición 1.** [16] Las conjeturas 1 y 3 son equivalentes.

**Demostración:** Para probar la equivalencia, sea  $\mathcal{H}$  una instancia de la conjetura **1** y  $\mathcal{H}^*$  su dual. De las observaciones **3** y **2.ii**, cualquier  $n$  coloración (propia) de aristas de  $\mathcal{H}^*$  nos da una coloración de todos los vértices  $v$  de  $\mathcal{H}$  con  $\deg(v) \geq 2$ , la cual puede ser extendida al resto de los vértices de  $\mathcal{H}$ , de modo que la arista correspondiente de  $\mathcal{H}$  tiene todos los colores.

Por otro lado, sea  $\mathcal{H}$  una instancia de la conjetura **3**. Por la observación **2.ii**, la hipergráfica  $\mathcal{H}^*$  es lineal con  $|\mathcal{V}_{\mathcal{H}^*}|$  aristas de tamaño a lo más  $|\mathcal{V}_{\mathcal{H}}|$ . Añadamos nuevos vértices a cada arista de  $\mathcal{H}^*$  de modo que cada arista tenga  $|\mathcal{V}_{\mathcal{H}}|$  vértices. Entonces, por la conjetura **1** existe una  $|\mathcal{V}_{\mathcal{H}}|$  coloración de vértices, y ésta nos da la coloración propia de aristas deseada de  $\mathcal{H}^*$ .  $\square$

La equivalencia de las conjeturas **1** y **3** fueron, posiblemente, notadas en [12] y [18].

### 2.3.2. Equivalencia de Romero y Sánchez-Arroyo sobre cúmulos

**Definición 6.** [15] Una hipergráfica lineal  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \{E_1, \dots, E_m\})$  es interseccionante si  $|E_i \cap E_j| = 1$ , para  $1 \leq i < j \leq m$ .

**Definición 7.** [15] Una hipergráfica lineal  $\mathcal{H}$  es un  $n$ -cúmulo, si  $\mathcal{H}$  es lineal, interseccionante y  $n$ -uniforme.

**Conjetura 4.** [15] Si  $\mathcal{H}$  es un  $n$ -cúmulo entonces  $\chi(\mathcal{H}) = n$ .

**Proposición 2.** [15] Las conjeturas **1** y **4** son equivalentes.

**Demostración:** Supongamos que  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  es una hipergráfica lineal con  $n$  aristas y  $n$ -uniforme. Probemos que si la conjetura **1** es cierta para hipergráficas interseccionantes, entonces  $\chi(\mathcal{H}) = n$ . La idea de esto es construir una hipergráfica  $\tilde{\mathcal{H}}$  de  $\mathcal{H}$  que sea interseccionante, con la propiedad de que  $\chi(\tilde{\mathcal{H}}) = \chi(\mathcal{H})$ . La construcción es la siguiente:

1. **Afirmación:** Para cualesquiera dos aristas no adyacentes  $E, F$  de  $\mathcal{H}$  existen vértices  $x_1, x_2 \in E$  y  $y_1, y_2 \in F$  tales que  $\deg(x_i) = \deg(y_i) = 1$  para  $i = 1, 2$ .

Como  $\mathcal{H}$  tiene  $n$  aristas de tamaño  $n$ , la arista  $E$  (como la de  $F$ ) se intersecciona en a lo más  $n - 2$  aristas del resto, dejando al menos dos vértices de grado uno.

2. Definamos  $F' = F - y_1 + x_1$ , y consideremos la hipergráfica  $H' = (V', \mathcal{E}')$ , donde  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} - F + F'$  y  $V' = V - y_1$ .

3. **Afirmación:** Cualquier  $k$  coloración propia  $\varphi$  de vértices de  $H'$  se puede extender a una  $k$  coloración propia  $\psi$  de vértices de  $\mathcal{H}$ .

Esto puede hacerse definiendo  $\psi(y_1) = \varphi(x_1)$  y  $\psi(x) = \varphi(x)$  para todo  $x \in V - y_1$ . Por el paso 1, si  $\varphi$  es propia entonces  $\psi$  también lo es. Así,  $\psi$  es una  $k$  coloración propia de vértices de  $\mathcal{H}$ .

4. Construyamos una sucesión de hipergráficas  $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_r$ , tales que:

- a.  $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ ,

- b. para  $i = 1, \dots$  construyamos  $\mathcal{H}_i$  aplicando la operación definida en el paso 2 a  $\mathcal{H}_{i-1}$  hasta obtener una hipergráfica  $\mathcal{H}_r$  intersectante. A saber, reemplacemos la arista  $F_i$  de  $\mathcal{H}_{i-1}$  con la nueva arista  $F'_i = F_i - y_i + x_i$  para obtener  $\mathcal{H}_i$ , donde los vértices  $y_i$  y  $x_i$  tienen grado uno en  $\mathcal{H}_{i-1}$ .

5. **Afirmación:** Los vértices  $x_1, \dots, x_r$  son todos distintos.

Supongamos que  $x_i = x_j$  para algunos  $i, j$  distintos, y que  $i < j$ , entonces el vértice  $x_i$  en  $\mathcal{H}_{j-1}$  tiene grado mayor que uno, en contradicción con el paso 4.

6. Apliquemos el paso 3 a la sucesión  $\mathcal{H}_0, \dots, \mathcal{H}_r$  procediendo hacia atrás de  $\mathcal{H}_r$ . Por construcción tenemos que la hipergráfica  $\mathcal{H}_r$  es intersectante y si la conjetura es cierta tenemos que  $\mathcal{H}_r$  puede colorearse con  $n$  colores. Finalmente, por el paso 3, tenemos que  $\chi(\mathcal{H}_0) = \chi(\mathcal{H}_r)$ . Lo que demuestra el teorema.

□

### 2.3.3. Equivalencia de Romero y Sánchez-Arroyo en términos del índice cromático híbrido

La siguiente formulación, equivalente a la conjetura E-F-L, introduce un nuevo tipo de coloración de aristas de gráficas, relacionada con la coloración de vértices.

**Definición 8.** [16] *Dada una hipergráfica  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \{E_1, \dots, E_m\})$ , definimos la representación bipartita de  $\mathcal{H}$  como la gráfica bipartita  $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = (\mathcal{V}(\mathcal{B}), \mathcal{E}(\mathcal{B}))$ , con bipartición  $(X, Y)$  de  $\mathcal{V}(\mathcal{B})$ , construida de la siguiente manera:*

**B.1** *Para cada vértice  $v \in \mathcal{V}$  hay un vértice  $x_v \in X$ . Por lo que  $|X| = |\mathcal{V}|$ .*

**B.2** *Para cada arista  $E \in \mathcal{E}$  hay un vértice  $y_E \in Y$ . Por lo que  $|Y| = |\mathcal{E}|$ .*

**B.3** *El par  $(x_v, y_E)$  son adyacentes en  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  si y sólo si  $v \in E$ .*

Usemos esta construcción para explicar propiedades de dualidad, coloración de vértices y coloración de aristas de hipergráficas.

**Observación 4.** [16] *Las hipergráficas  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}^*$  tienen representación bipartita isomorfa (con sus partes intercambiadas).*

**Definición 9.** [16] *La estrella centrada en un vértice  $v$  de una gráfica  $G$ , denotada por  $S_v$ , es el conjunto de aristas incidentes a  $v$ .*

Consideremos una  $n$  coloración de vértices de una hipergráfica  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ . En la representación bipartita  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , tal coloración corresponde a una  $n$  coloración de  $X$  (dejando los vértices de  $Y$  sin colorear). Así que, dada una  $n$  coloración de vértices de  $\mathcal{V}$ , ésta se convierte en una coloración por aristas de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  como sigue:

- si  $u$  es un vértice coloreado de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , entonces asignemos ese color a todas las aristas incidentes a  $v$ , es decir,  $S_u$  recibe el color de  $u$ , y así,  $S_u$  es monocromática.
- Puesto que la  $n$  coloración es propia, ningún par de vértices de una arista reciben el mismo color; así, si  $v$  es un vértice no coloreado de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , entonces, la estrella  $S_v$  es heterocromática.

**Definición 10.** *Un conjunto de vértices de una hipergráfica es independiente si ningún par de vértices se encuentran en una misma arista.*

**Definición 11.** [16] *Sea  $\{1, \dots, k\}$  un conjunto de  $k$  colores. Consideremos un conjunto independiente  $A$  de una gráfica simple  $G$ . Una  $k$  coloración híbrida propia de  $G$ , con respecto a  $A$ , es un mapeo sobreyectivo  $E \mapsto \{1, \dots, k\}$ , tal que cada estrella centrada en un vértice de  $A$  es monocromática, y cada estrella centrada en un vértice de  $E - A$  es heterocromática.*

El *índice cromático híbrido* de una gráfica simple  $G$  con respecto a un conjunto independiente  $A$  de  $G$ , denotado por  $\chi_e(G)$ , se define como el menor entero  $k$  para el cual  $G$  tiene una  $k$ -arista-coloración híbrida propia.

A continuación mostremos cómo una arista-coloración híbrida de una gráfica bipartita determina una coloración de vértices de una hipergráfica.

Supongamos que  $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = (\mathcal{V}(\mathcal{B}), \mathcal{E}(\mathcal{B}))$  es la representación bipartita de  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , con bipartición  $(X, Y)$  de  $\mathcal{V}(\mathcal{B})$ . Consideremos una arista coloración híbrida  $\psi$  de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  con respecto a  $X$ . Observemos, por definición, que si  $x_u \in X$  entonces  $\psi(x_u, y_1) = \psi(x_u, y_2)$ , para todo par de vecinos de  $x_u$  en  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ .

Definamos una coloración  $\varphi$  de vértices de  $\mathcal{H}$  como sigue: asignemos a cada vértice  $u \in \mathcal{V}$  el color  $\psi(x_u, y)$ , es decir, definamos  $\varphi(u) := \psi(x_u, y)$ , donde  $y$  es cualquier vecino de  $x_u$ . Observemos, por definición 8 parte B.3, que existe una arista  $(x_u, y_E)$  en  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  para toda  $u \in E$ . Puesto que  $\psi$  es una arista coloración propia híbrida de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , ningún par de aristas incidentes a un mismo vértice  $y_E \in Y$  comparten color. Así, para cualquier arista  $E$  de  $\mathcal{H}$ , ningún par de vértices  $u, v \in \mathcal{V}$  están coloreados por el mismo color, y así  $\varphi$  es una coloración propia de vértices de  $\mathcal{H}$ , con lo que hemos probado:

**Proposición 3.** [16] *Sean  $k$  un entero positivo y  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  una hipergráfica lineal con representación bipartita  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , y bipartición  $(X, Y)$  de  $\mathcal{V}(\mathcal{B})$ . Entonces,  $\chi_e(\mathcal{B}(\mathcal{H}), X) \leq k$  si y sólo si  $\chi(\mathcal{H}) \leq k$ .*

Con este resultado, es claro que la conjetura E-F-L se puede formular en términos del índice cromático híbrido de gráficas bipartitas.

**Conjetura 5.** [16] *Sea  $G = (V, E)$  una gráfica simple bipartita con bipartición  $(X, Y)$ . Entonces  $\chi_e(G, X) \leq |Y|$ .*

### 2.3.4. Equivalencia de Romero y Sánchez-Arroyo en términos de coloración de celdas

Sea  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  un  $n$ -cúmulo (definición 7), con aristas numeradas de 0 a  $n - 1$ . Sea  $M(\mathcal{H})$  una matriz de  $n \times n$  cuyas filas (y columnas) están numeradas de 0 a  $n - 1$ ; que corresponden a las aristas de  $\mathcal{H}$ . Denotemos por  $M'(\mathcal{H})$  el conjunto de celdas  $(i, j)$  de  $M(\mathcal{H})$ , tales que  $i \neq j$ . Finalmente, sea  $\mathcal{V}'$  el conjunto de vértices de  $\mathcal{V}$  de grado mayor o igual que dos. Para cada vértice  $v \in \mathcal{V}'$ , asociemos el “bloque”  $C_v = \{(i, j) : v \in i \cap j, \text{ y } (i, j) \in M'(\mathcal{H})\}$ .

#### Observación 5. [15]

- (i)  $C_u \cap C_v = \emptyset$  para cualquier par de vértices distintos. Esto es porque  $\mathcal{H}$  es lineal.
- (ii)  $\bigcup_{v \in \mathcal{V}'} C_v = M'(\mathcal{H})$ . Esto es porque  $\mathcal{H}$  es intersectante.

**Definición 12.** [15] Una coloración de celdas de  $M'(\mathcal{H})$  (una coloración de  $M(\mathcal{H})$ ) es propia si para cualesquiera dos celdas distintas  $r, s \in M'(\mathcal{H})$  se cumple:

- ( $\alpha$ ) si  $r$  y  $s$  están en el mismo bloque entonces comparten el mismo color.
- ( $\beta$ ) Si  $r$  y  $s$  no se encuentran en el mismo bloque pero comparten fila o columna entonces tienen distinto color.

**Observación 6.** Toda coloración propia de  $M(\mathcal{H})$  es simétrica con respecto a la diagonal principal.

**Conjetura 6.** [15] Sea  $\mathcal{H}$  un  $n$ -cúmulo. Entonces existe una coloración propia de  $M(\mathcal{H})$  con a lo más  $n$  colores.

**Lema 1.** [15] Las conjeturas 4 y 6 son equivalentes.

**Demostración:** Supongamos primero que la conjetura 6 es cierta, y sea  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  un  $n$ -cúmulo. Una coloración propia de  $M(\mathcal{H})$  con  $k \leq n$  colores nos da una coloración de los vértices de  $\mathcal{V}$ , que puede ser fácilmente extendida a una  $n$  coloración propia de vértices de  $\mathcal{H}$ .

Por otro lado, supongamos que la conjetura 4 es cierta. Demos una  $n$  coloración propia de vértices de  $\mathcal{H}$ , y consideremos sólo los vértices de  $\mathcal{V}'$ ; uno puede obtener de manera directa la coloración propia de  $M(\mathcal{H})$  con a lo más  $n$  colores.  $\square$

### 2.3.5. Equivalencia de Sánchez-Arroyo

#### Observación 7. [17]

- (i) Si  $\mathcal{H}$  es una hipergráfica lineal con  $n$  aristas y  $n$ -uniforme, entonces, para toda arista de  $\mathcal{H}$  existe al menos un vértice de grado uno.

(ii) Sea  $\mathcal{H}$  una hipergráfica lineal con  $n$  aristas y  $n$ -uniforme. Sea  $\mathcal{H}'$  la hipergráfica obtenida de  $\mathcal{H}$  al suprimir los vértices de grado uno.  $\mathcal{H}'$  es una hipergráfica lineal con  $n$  aristas de tamaño a lo más  $n - 1$  con  $\delta(\mathcal{H}') \geq 2$ . Si se puede colorear propiamente a los vértices de  $\mathcal{H}'$  con  $n$  colores (o menos), entonces esta coloración se puede extender fácilmente a una  $n$  coloración de  $\mathcal{H}$ .

**Conjetura 7.** [17] Si  $\mathcal{H}$  es una hipergráfica lineal con  $n$  aristas de tamaño a lo más  $n$ , y  $\delta(\mathcal{H}) \geq 2$ , entonces  $\chi(\mathcal{H}) \leq n$ .

De la observación 7 se sigue que:

**Proposición 4.** [17] Las conjeturas 1 y 7 son equivalentes.

### 2.3.6. Equivalencia de Klein y Margraf

En [14], Klein and Margraf usaron la gráfica de línea de un espacio lineal parcial e introdujeron un nuevo parámetro para dar una versión de la conjetura E-F-L en términos de este parámetro. Las definiciones y la equivalencia de la conjetura E-F-L es de [14], pero la notación es de [16].

Un *espacio lineal parcial* es una hipergráfica lineal donde cada arista contiene al menos dos vértices, es decir, es una hipergráfica lineal sin lazos. De aquí en adelante todas las hipergráficas lineales no tienen lazos.

**Definición 13.** Para toda hipergráfica  $\mathcal{H}$ , definimos la gráfica de línea o gráfica de intersección, denotada como  $L(\mathcal{H})$ , como la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de aristas de  $\mathcal{H}$ , donde dos vértices son adyacentes si y sólo si sus correspondientes aristas se intersectan.

**Observación 8.** Una coloración propia de vértices de  $\mathcal{H}$  corresponde a una coloración propia de aristas de  $L(\mathcal{H})$ .

**Definición 14.** [14] Para cualquier gráfica  $G$ , definamos  $\nu(G)$  como el mínimo entero  $\nu \in \mathbb{N}$  para el cual existe una hipergráfica  $\mathcal{H}$  con  $\nu$  vértices tal que  $L(\mathcal{H}) \cong G$ . El entero  $\nu$  es llamado número de intersección lineal.

**Observación 9.** El número de intersección lineal siempre existe. Para ver esto, sea  $G = (V, E)$  una gráfica y un vértice  $v \in V$ . La hipergráfica dual  $G^* = (E, \{S_v : v \in V\})$  de  $G$  cumple que  $L(G^*) \cong G$ .

**Observación 10.**

- La hipergráfica  $G^*$  es casi una hipergráfica lineal (con nuestra nueva definición), ya que cualesquiera dos aristas de  $G^*$  se intersectan en a lo más un vértice. Sin embargo, si  $G$  contiene un vértice de grado uno, entonces en la hipergráfica correspondiente habrá una arista con un solo elemento, es decir, la hipergráfica contiene un lazo. Pero esto no es ningún problema, ya

que si consideremos la hipergráfica  $\overline{G}^*$  obtenida de  $G^*$  añadiendo un vértice a las aristas de  $G^*$  con un solo elemento, se cumple  $L(\overline{G}^*) \cong G$ .

- Cada gráfica es la gráfica de intersección de una cierta hipergráfica lineal.

**Conjetura 8.** [14] Si  $G$  es una gráfica entonces  $\chi(G) \leq \nu(G)$ .

**Proposición 5.** [14] Las conjeturas 3 y 8 son equivalentes.

*Demostración:* Para demostrar la equivalencia, consideremos una instancia de la conjetura 3 y sea  $G$  cualquier gráfica. Para toda hipergráfica lineal  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  con  $L(\mathcal{H}) \cong G$  se tiene

$$|V| \geq \chi'(\mathcal{H}) = \chi(L(\mathcal{H})) = \chi(G),$$

y así  $\nu(G) \geq \chi(G)$ .

Por otro lado, sea  $G$  una gráfica con  $\chi(G) \leq \nu(G)$ . Entonces

$$|V| \geq \nu(G) \geq \chi(G) = \chi'(\mathcal{H}),$$

para toda hipergráfica  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  lineal. □

### 3. Algunos Avances de la Conjetura

#### 3.1. Introducción

En esta sección presentamos algunos avances de la conjetura E-F-L. Los artículos en que nos basamos principalmente son [5], [14], [15], [16] y [17].

#### 3.2. Resultado de Colbourn y Colbourn

Colbourn y Colbourn en [5] probaron la conjetura 3 para sistemas Steiner cíclicas.

**Definición 15.** Un sistema Steiner  $S(2, k, n)$  es una pareja  $(\mathcal{V}, \mathcal{B})$ ; donde  $\mathcal{V}$  es un conjunto de  $n$  elementos y  $\mathcal{B}$  es una colección de subconjuntos de  $\mathcal{V}$ , cada uno de cardinalidad  $k$ , llamados bloques. Cada par de elementos de  $\mathcal{V}$  aparecen precisamente en un bloque.

Una *clase de coloración* en un sistema Steiner es un conjunto de bloques disjuntos por pares. Una *k* *bloque coloración* de  $(\mathcal{V}, \mathcal{B})$  es una partición de  $\mathcal{B}$  en  $k$  clases de coloración.

El *índice cromático* de un sistema Steiner  $S(2, k, n)$ , denotado por  $\chi'(S(2, k, n))$ , es el entero más pequeño  $k$  para el cual  $S(2, k, n)$  tiene una  $k$  clase de coloración.

**Observación 11.** Un sistema Steiner  $S(2, k, n)$  es una hipergráfica  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  lineal  $k$ -uniforme con  $|\mathcal{V}| = n$ . Y una  $k$  clase de coloración es una  $k$  coloración de aristas de una hipergráfica lineal uniforme.

El artículo [5] se centra en dar una cota superior para el índice cromático de un sistema Steiner  $S(2, k, n)$ . Una primera cota está dada por el siguiente lema.

**Lema 2.** [5]  $\chi'(S(2, k, n)) \leq \frac{kn}{k-1}$

**Demostración:** La demostración de este lema utiliza el teorema de Brook, que dice que en toda gráfica  $G$ , diferente de la gráfica completa y de un ciclo de longitud impar, se cumple  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .

Dado un sistema Steiner  $S(2, k, n)$ , construyamos su gráfica de *intersección de bloques* como sigue (que es la gráfica de intersección de un hipergráfica): cada bloque se representa por un vértice; dos vértices van a ser adyacentes si y sólo si los bloques correspondientes se intersectan. El índice cromático de un sistema Steiner  $S(2, k, n)$  es el número cromático de su gráfica de intersección de bloques. En la gráfica de intersección de bloques el grado máximo es menor o igual que  $\frac{kn}{k-1}$ . El teorema de Brook garantiza que el número cromático es a lo más  $\frac{kn}{k-1}$ , finalizando la prueba del lema.  $\square$

Colbourn y Colbourn se dieron cuenta que esta cota es muy grande; una razón a esto fue por la conjetura E-F-L. Ellos demostraron (teorema 1) que el índice cromático para un sistema Steiner  $S(2, k, n)$  cíclico es a lo más  $n$ . Un sistema Steiner  $S(2, k, n)$  es cíclico si su conjunto de elementos es  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  y el mapeo  $i \rightarrow i+1 \pmod{n}$  es un automorfismo. Este automorfismo da una partición a los bloques de un sistema Steiner en órbitas. Cada órbita tiene  $n$  bloques si  $n \equiv 1 \pmod{k(k-1)}$ . Cuando  $n \equiv k \pmod{k(k-1)}$ , cada órbita, excepto una, contiene  $n$  bloques. La excepción, la órbita pequeña, contiene  $\frac{n}{k}$  bloques (para más detalles de sistemas Steiner cíclicos  $S(2, n, k)$  ver [6]). Con lo anterior ya podemos demostrar el resultado principal de Colbourn y Colbourn.

**Teorema 1.** Si  $S(2, k, n)$  es un sistema Steiner cíclico, entonces  $\chi'(S(2, k, n)) \leq n$ .

**Demostración:** Si hay una órbita de bloques pequeña, usemos sólo un color para todos los bloques en esta órbita, ya que éstos son disjuntos [6].

Para cada órbita de bloques grande, consideremos la subgráfica de intersección de bloques inducida por esta órbita. Esta subgráfica tiene grado  $k(k-1)$ . El teorema de Brook garantiza que se puede colorear con a lo más  $k(k-1)$  colores, a menos que éste esté compuesto de  $k(k-1)+1$  clanes. A lo más una órbita puede inducir tal gráfica, y esto sólo pasa cuando  $k(k-1)+1$  divide a  $n$ . Así, para  $n \equiv 1 \pmod{k(k-1)}$ , necesitamos a lo más  $n$  colores, donde hay  $\frac{n-1}{k(k-1)}$  órbitas grandes.

Similarmente, para  $n \equiv k \pmod{k(k-1)}$ , tenemos una órbita pequeña, y  $\frac{n-k}{k(k-1)}$  órbitas grandes, por lo que necesitamos a lo más  $n-k+2$  colores. Completando así la prueba.  $\square$

### 3.3. Resultado de Jackson, Sethuraman y Whitehead

A lo largo de esta sección,  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  denota una hipergráfica lineal sin lazos con  $n$  vértices, y  $\mathcal{V}'$  denota el conjunto de vértices de  $\mathcal{H}$  de grado mayor o igual a dos.

**Definición 16.** Sean  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \{E_1, \dots, E_m\})$  una hipergráfica, y  $J \subset \{1, \dots, m\}$ . Definimos la hipergráfica parcial inducida por  $J$  como  $\mathcal{H}' = (\mathcal{V}', \{E_j : j \in J\})$ , donde  $\mathcal{V}' = \bigcup_{j \in J} E_j$ .

Sea  $\mathcal{H}$  una hipergráfica lineal. Definamos  $\mathcal{S}$  como la hipergráfica lineal parcial de  $\mathcal{H}$  inducida por las aristas de  $\mathcal{H}$  de tamaño al menos tres. Mostraremos que la conjetura 3 (sección 2.3.1) es cierta para toda hipergráfica  $\mathcal{H}$  para el cual  $\mathcal{S}$  tiene una arista-coloración propia y  $\Delta(\mathcal{S}) \leq 3$ .

**Observación 12.** Si  $G = \mathcal{H} - E(\mathcal{S})$ , entonces toda arista de  $G$  tiene tamaño a lo más dos, y así  $G$  es una gráfica simple.

Denotaremos a la subgráfica de  $G$  inducida por el conjunto de vértices  $\mathcal{V} - \mathcal{V}(\mathcal{S})$  por  $T$ , y la subgráfica de  $G$  inducida por los vértices de grado  $\Delta(G)$  por  $G_\Delta$ . A continuación presentaremos algunos resultados que se van a utilizar más adelante.

**Teorema 2.** [19] Sea  $G$  una gráfica simple. Entonces  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

**Teorema 3.** [10] Sea  $G$  una gráfica simple. Si  $G_\Delta$  es acíclica, entonces  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .

**Proposición 6.** [2] Sea  $\mathcal{H}$  una hipergráfica lineal. Si  $\Delta(\mathcal{S}) = 1$  entonces  $\chi'(\mathcal{H}) \leq \Delta(\mathcal{H}) + 1$ .

Si  $\mathcal{H}$  es una hipergráfica lineal (sin lazos), con  $\Delta(\mathcal{H}) \leq n - 1$ , entonces por el Lema 6 implica que la conjetura 3 es cierta si  $\Delta(\mathcal{S}) = 1$ .

**Afirmación 1.** [13] Supongamos que todo par de vértices de  $\mathcal{H}$  son incidentes a una sola arista de  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ . Consideremos el vértice  $v \in \mathcal{V}$  y los vértices  $x, y \in \mathcal{V}(\mathcal{S})$

- (i) Si  $T \neq \emptyset$ , entonces  $T$  es una gráfica completa y cada vértice de  $T$  es incidente a una arista de tamaño dos de  $\mathcal{S}$ . Así que  $\deg_G(u) = n - 1$ .
- (ii)  $x$  y  $y$  no son adyacentes en  $G$  si y sólo si estos vértices están contenidos en una misma arista de  $\mathcal{S}$ .
- (iii)  $\deg_G(x) \leq n - 3$  y  $\deg_G(x) = n - 3$  si y sólo si  $x$  está contenido en una única arista  $E \in E(\mathcal{S})$  con  $|E| = 3$ .
- (iv) Si  $\deg_{\mathcal{S}} = 2$ , entonces  $\deg_G(x) \leq n - 5$ .
- (v) Si  $\deg_{\mathcal{S}}(x) = 3$ , entonces  $\deg_G(x) \leq n - 7$ .

**Proposición 7.** [13] Sea  $\mathcal{H}$  una hipergráfica lineal tal que  $\Delta(\mathcal{S}) = \chi'(\mathcal{S}) = 2$ . Entonces  $\chi'(\mathcal{H}) \leq n$ .

**Demostración:** Sin pérdida de generalidad podemos suponer que cada par de vértices de  $\mathcal{H}$  están en una sola arista. Sea  $\mathcal{S}$ , como antes, y démosle una bicoloración de aristas con colores  $c_1$  y  $c_2$ .

- Si  $V(T) = \emptyset$ , entonces  $\Delta(G) \leq n-3$  (afirmación **1 inciso (c)**). Así, la gráfica  $G$  es  $(n-2)$ -arista coloreable, y por el teorema **2** se tiene que  $\chi'(\mathcal{H}) \leq n$ .
- Supongamos  $V(T) = \{u\}$ . Si existe un vértice  $w \in V(\mathcal{S})$  tal que  $\deg_{\mathcal{S}}(w) = 1$ , entonces existe un color, digamos  $c_1$ , que no es incidente a  $w$ . Asignemos el color  $c_1$  a la arista  $uw$  y consideremos  $G' = \mathcal{H} - E(\mathcal{S}) - uw$ . Entonces  $V(G'_{\Delta}) = \{u\}$  y  $\Delta(G') = n - 2$  (afirmación **1 incisos (i) y (iii)**). Así,  $G'$  es  $(n - 2)$ -arista-coloreable (por el teorema **3**), y otra vez se cumple  $\chi'(\mathcal{H}) \leq n$ . Ahora, si todo vértice en  $\mathcal{S}$  es incidente a una arista de cada color, entonces  $\deg_G(u) \leq n - 5$  para todo  $u \in V(\mathcal{S})$  (afirmación **1 inciso (iv)**). Sea  $e \in V(\mathcal{S})$  tal que está coloreado con  $c_2$ , entonces asignémosle a  $e$  el color  $c_3$ . Entonces  $\mathcal{S}$  contiene vértices  $w_2$  y  $w_3$  tales que el color  $c_j$  no toca a  $w_j$ , para  $j = 2, 3$ . Asignemos el color  $c_j$  a la arista  $uw_j$ , para  $j = 2, 3$ , y consideremos  $G' = \mathcal{H} - (E(\mathcal{S}) \cup \{uw_2, uw_3\})$ . Entonces  $V(G'_{\Delta}) = \{u\}$  y  $\Delta(G') = n - 3$  (afirmación **1 incisos (i) y (iv)**). Así, la gráfica  $G'$  es  $(n - 3)$ -arista-coloreable (teorema **3**), y otra vez  $\chi'(\mathcal{H}) \leq n$ .
- Si  $V(T) = \{u_1, u_2\}$ . Supongamos que  $u_1u_2$  está coloreado con  $c_1$ , y sea  $G' = \mathcal{H} - E(\mathcal{S}) - u_1u_2$ . Entonces  $V(G'_{\Delta}) = \{u_1, u_2\}$  y  $\Delta(G') = n - 2$  (afirmación **1 incisos (i) y (iii)**). Así, la gráfica  $G'$  es  $(n - 2)$ -arista coloreable, y como antes  $\chi'(\mathcal{H}) \leq n$ .
- Finalmente, si  $V(T) \geq t \geq 3$ , supongamos que  $t$  es par, sean  $M_1$  y  $M_2$  dos acoplamientos perfectos disjuntos en  $T$ , y coloreemos  $M_i$  con  $c_i$ , para  $i = 1, 2$ . Sea  $G' = \mathcal{H} - E(\mathcal{S} \cup M_1 \cup M_2)$ . Entonces  $\Delta(G') = n - 3$  (afirmación **1 incisos (i) y (iii)**), por lo que  $G'$  es  $(n - 2)$ -arista coloreable (teorema **2**). Si  $t$  es impar, sean  $u_1$  y  $u_2$  dos vértices distintos en  $T$ . Sea  $M_i$  un acoplamiento perfecto en  $T - u_i$ , y coloreemos las aristas de  $M_i$  con el color  $c_i$ , para  $i = 1, 2$ . Sea  $G' = \mathcal{H} - E(\mathcal{S} \cup M_1 \cup M_2)$ , entonces  $G'$  es  $(n - 2)$ -arista coloreable, y como antes  $\chi'(\mathcal{H}) \leq n$ . En ambos casos  $\mathcal{H}$  es  $n$ -arista coloreable.  $\square$

**Proposición 8.** [13] *Sea  $\mathcal{H}$  una hipergráfica lineal con  $\Delta(\mathcal{S}) = \chi'(\mathcal{H}) = 3$ . Entonces  $\chi'(\mathcal{H}) \leq n$ .*

Con todo lo anterior, se tienen los siguientes resultados:

**Teorema 4.** [13] *Sean  $\mathcal{H}$  una hipergráfica lineal y  $\mathcal{S}$  la hipergráfica parcial inducida por las aristas de tamaño al menos 3. Si  $\chi'(\mathcal{S}) = \Delta(\mathcal{S})$ , con  $\Delta(\mathcal{S}) \leq 3$ , entonces  $\chi'(\mathcal{H}) \leq n$ .*

**Definición 17.** *Sea  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \{E_1, \dots, E_m\})$  una hipergráfica, y sea  $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ . La subhipergráfica  $\mathcal{H}'$  de  $\mathcal{H}$  con conjunto de vértices  $\mathcal{V}'$  y conjunto de aristas*

$$\mathcal{E}' = \{E_i \cap \mathcal{H}' : 1 \leq i \leq m, E_i \cap \mathcal{V}' \neq \emptyset\}$$

*es llamada subhipergráfica de  $\mathcal{H}$  inducida por  $\mathcal{V}'$ .*

Por dualidad, el teorema **4** da un caso especial de la conjetura **1**.

**Corolario 1.** [13] *Sea  $\mathcal{H}$  una hipergráfica lineal que consiste de  $n$  aristas, cada una de tamaño  $n$ , y sea  $\mathcal{S}$  la hipergráfica parcial de  $\mathcal{H}$  inducida por los vértices de grado al menos 3. Si  $|E| \leq 3$ , para todo  $E \in E(\mathcal{S})$ , y  $\mathcal{S}$  es 3-vértice-coloreable, entonces  $\chi(\mathcal{H}) = n$ .*

### 3.4. Resultado de Romero y Sánchez-Arroyo

**Definición 18.** [15] Sea  $W$  un conjunto finito no vacío de enteros positivos. Decimos que  $W$  es compacto si  $|W| = 1$ , o bien existe un orden  $a_1, \dots, a_{|W|}$  de  $W$  tal que  $a_{i+1} = a_i + 1$ , para  $i = 1, \dots, |W| - 1$ .

**Definición 19.** [15] Sea  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  una hipergráfica con  $n$  aristas. Decimos que  $\mathcal{H}$  es arista-conforme si existe una biyección  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$ , llamada etiquetamiento conforme, tal que para cada vértice  $v \in \mathcal{V}$ , el conjunto  $F(v) = \{\varphi(E) : v \in E \in \mathcal{E}\}$  puede ser particionado en dos conjuntos compactos.

**Observación 13.** Una hipergráfica cuyos vértices tienen grado a lo más dos es trivialmente arista-conforme.

**Definición 20.** [15] Sea  $\mathcal{V}'$  el conjunto de vértices  $\mathcal{H}$  de grado mayor o igual a dos. Los vértices de  $\mathcal{V}'$  y las celdas de  $C'_v = C_v \cap M^\circ$  son llamados libres o amarrados si  $\deg(v) = 2$  ó  $\deg(v) \geq 3$ , respectivamente.

**Teorema 5.** [15] Sea  $\mathcal{H}$  un  $n$ -cúmulo. Si  $\mathcal{H}$  es arista-conforme entonces  $\chi(\mathcal{H}) = n$ .

**Demostración:** A continuación damos la idea de la demostración (para más detalles consultar [15]): supongamos que  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  es arista conforme, y supongamos que las aristas de  $\mathcal{H}$  están etiquetadas por un etiquetamiento conforme  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$ . En vista de la observación 6 de la sección 2 subsección 2.3.4, es conveniente considerar en  $M(\mathcal{H})$  el conjunto  $M^\circ(\mathcal{H}) = \{(i, j) : 0 \leq i < j \leq n-1\}$ . Una coloración propia de celdas de  $M^\circ(\mathcal{H})$ , por simetría, puede ser extendida a una coloración propia de  $M(\mathcal{H})$ . Para facilidad de notación, denotemos por  $M$  y  $M^\circ$  a las matrices  $M(\mathcal{H})$  y  $M^\circ(\mathcal{H})$ , respectivamente.

Las celdas de  $C'_v$  en  $M^\circ$  se pueden ver como una de las cuatro posibilidades mostradas en la figura 1, que a continuación explicamos:

Supongamos que  $(x_1, \dots, x_{\deg(v)})$  es un orden de  $F(v)$  con respecto a  $\varphi$  (se cumple que  $x_1 < x_2 < \dots < x_{\deg(v)}$ ). A la celda  $(x_1, x_{\deg(v)})$  la llamamos la *cabeza* de  $C'_v$ ; más aún, sea  $t_v \in \{1, \dots, \deg(v)\}$  un índice tal que  $\{x_1, \dots, x_{t_v}\}$  y  $\{x_{t_v+1}, \dots, x_{\deg(v)}\}$  son compactos. Ahora, si  $x_{t_v} + 1 < x_{t_v+1}$  se tienen los siguientes dos casos:

- Cuando  $x_{t_v} + 1 < x_{t_v+1}$ , el conjunto  $C'_v$  es de la forma (a), (b) ó (d) de la figura 1, si  $2 \leq t_v \leq \deg(v) - 2$ ,  $t_v = 1$  ó  $t_v = \deg(v) - 1$ , respectivamente.
- Cuando  $x_{t_v} + 1 = x_{t_v+1}$ , el conjunto  $C'_v$  tiene la forma de escalera (b).

Para nuestros propósitos, será conveniente aumentar una columna y una fila a la matriz  $M^\circ$  para agregar el conjunto de celdas  $P = \{(-1, 2), (-1, 3), \dots, (-1, n), (0, n), (1, n), \dots, (n-3, n)\}$ . Los elementos de  $P$  se consideran libres. Sea  $r = (i, j)$  y  $s = (k, l)$  dos distintas celdas de la matriz aumentada. Llamamos a  $s$  el *inmediato sucesor* de  $r$  si una de las siguiente cuatro situaciones se tiene:

**I**  $r$  es cabeza, y existe un vértice  $v \in \mathcal{V}$  tal que  $r, s \in C'_v$ .

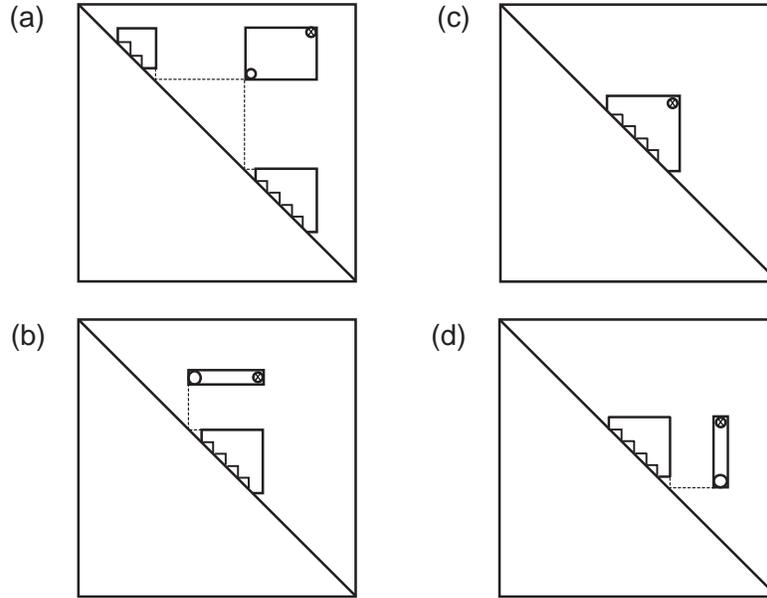


Figura 1: Las diferentes formas de  $C'_u$  cuando  $\delta(u) \geq 3$ . Las cabezas y colas están indicadas por  $\bigcirc$  y  $\otimes$ , respectivamente.

**II**  $r$  es cola o libre,  $s$  es libre o cabeza,  $k = i + 1$  y  $l = j - 1$ .

**III**  $r$  es cola o libre,  $(i + 1, j), (i + 1, j - 1) \in C'_v$ , para algún  $v \in \mathcal{V}$ ,  $s \notin C'_v$ ,  $k = x_{t_v} + 1$ , y  $l = j - 1$ .

**IV**  $r$  es cola o libre,  $(i, j - 1), (i + 1, j - 1) \in C'_v$ , para algún  $v \in \mathcal{V}$ ,  $s \notin C'_v$ ,  $k = i + 1$ , y  $l = x_{t_{v+1}} - 1$ .

**Observación 14.** *Cada cabeza tiene dos inmediatos sucesores. Cada celda cola o celda libre tiene a lo más un inmediato sucesor. El resto de las celdas no tienen inmediato sucesor.*

Si hay una sucesión de celdas  $r = c_1, \dots, c_\alpha = s$ , tal que  $c_{i+1}$  es un inmediato sucesor de  $c_i$ , para  $i = 1, \dots, \alpha - 1$ , entonces la celda  $s$  es un sucesor de la celda  $r$ , y  $r$  es un predecesor de  $s$ . Por la observación 5 (subsección 2.3.4), toda celda de  $M^o$  es un sucesor de al menos una celda de la matriz aumentada de  $M^o$ , pero esta celda es un sucesor de una única celda de  $P$ .

**Observación 15.**

(i) *Si dos sucesores distintos en una celda dada comparten fila o columna, entonces estos están el mismo bloque.*

(ii) *Si la celda  $(i, j)$  es un sucesor de la celda  $(k, l)$ , entonces  $i \geq k$ ,  $l \geq j$ .*

(iii) *Si dos celdas comparten el mismo predecesor, y ninguno es sucesor del otro, entonces al menos una celda es amarrada.*

Como  $\varphi$  es un etiquetamiento conforme, cada vértice amarrado  $v \in \mathcal{V}$  y la celda correspondiente  $C'_v$  es una de las cuatro formas de la figura 1. Con esto en mente, consideremos el siguiente algoritmo:

### Algoritmo $\Lambda$

**Paso 1** Asignemos el color  $(i + j) \pmod{n}$  a cada celda  $(i, j) \in P$ .

**Paso 2** Los colores de las celdas de  $P$  se asignan a sus respectivos sucesores.

**Paso 3** Por simetría, extendamos esa coloración de  $M^o$  a  $M$ .

A continuación probamos que el algoritmo  $\Lambda$  produce una coloración de  $M$  que

- usa a lo más  $n$  colores, y
- es propia (satisface las condiciones  $(\alpha)$  y  $(\beta)$  de la definición **12**, subsección **2.3.4**).

Cuando coloreamos una celda de  $M$ , el algoritmo  $\Lambda$  asigna explícitamente un elemento de  $\{0, \dots, n-1\}$  en el paso **1**, o duplica el color ya existente en el paso **2** ó **3**; así el número total de colores que estamos utilizando nunca excede  $n$ .

Por la condición **I** de arriba, toda celda amarrada, que no es cabeza, hereda el color de su cabeza en el paso **2**. Esta coloración es extendida en el paso **3**, y la condición  $\alpha$  (que es sólo para celdas amarradas) se satisface. La condición  $\beta$  se satisface también (para ver el resto de la demostración consultar [15]). Así hemos probado que podemos encontrar una coloración propia de  $M$  con a lo más  $n$  colores, lo que implica que los vértices de  $\mathcal{H}$  pueden ser coloreados propiamente con  $n$  colores.  $\square$

### 3.5. Esqueletos

Sea  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  una hipergráfica. Recordemos que un vértice  $v \in \mathcal{V}$  es amarrado si  $\deg(v) \geq 3$ . Decimos que una arista de cardinalidad uno es un *singulete*. Claramente, la conjetura es cierta para los  $n$ -cúmulos sin vértices amarrados.

**Definición 21.** [15] *El esqueleto de una hipergráfica  $\mathcal{H}$  es la hipergráfica  $\mathcal{H}^1$  obtenida al remover los vértices que no son amarrados.*

**Observación 16.** *Si  $\mathcal{H}$  es un  $n$ -cúmulo, entonces  $\mathcal{H}^1$  es lineal o la gráfica nula.*

El esqueleto de  $\mathcal{H}^1$  se denotará como  $\mathcal{H}^2$ , y en general, para  $k \geq 1$ ,  $\mathcal{H}^{k+1}$  denota el esqueleto de  $\mathcal{H}^k$ . Supongamos además que esqueleto de la gráfica nula es la gráfica nula, y definamos  $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}$ .

**Observación 17.** *Si  $\mathcal{H}^k = \mathcal{H}^{k+1}$ , entonces para toda  $t \geq 1$  se cumple  $\mathcal{H}^{t+k} = \mathcal{H}^k$ .*

Definamos  $w(\mathcal{H})$  como el entero (positivo) más pequeño tal que  $\mathcal{H}^k = \mathcal{H}^{k+1}$ .

**Teorema 6.** [15] *Sea  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  una hipergráfica. Si su esqueleto  $\mathcal{H}^1 \neq \mathcal{H}$  es arista conforme o es la gráfica nula, entonces  $\mathcal{H}$  es arista-conforme.*

**Demostración:** Supongamos primero que  $\mathcal{H}^1$  es una hipergráfica arista conforme con etiquetamiento conforme  $\varphi$ . Sea  $F$  el conjunto de las aristas removidas de  $\mathcal{H}$  para obtener  $\mathcal{H}^1$ . Supongamos que  $|F| \geq 1$ , de lo contrario obtendríamos una trivialidad. Nuestro objetivo es construir un etiquetamiento conforme  $\tilde{\varphi}$  de  $\mathcal{H}$  obtenido de la siguiente manera: primero, a cada arista  $E \in \mathcal{E} - F$  le corresponde la etiqueta de la arista en  $\mathcal{H}^1$ , y para las demás aristas repetimos los siguientes pasos hasta que no se tengan más aristas que etiquetar:

- sea  $E \in \mathcal{E}$  una arista no etiquetada. Definamos  $V_E$  como el conjunto de los vértices amarrados de  $E$ . Por definición  $|V_E| \leq 1$ .
- Si  $V_E = \emptyset$ , entonces definamos  $\tilde{\varphi} = z + 1$ , donde  $z$  es hasta ahora la etiqueta de tamaño más grande.
- Por otro lado, si  $V_E = \{u\}$ , existen al menos tres aristas etiquetadas de  $\mathcal{H}$  que contienen a  $u$ , por lo que hay al menos dos aristas etiquetadas con numeración consecutiva, digamos  $a - 1$  y  $a$ . Sumemos uno a la etiqueta de todas las aristas de  $\mathcal{H}$  con etiqueta mayor o igual a  $a$ , y hagamos  $\tilde{\varphi}(E) = a$ . Por otra parte, si hay exactamente dos aristas etiquetadas de  $\mathcal{H}$  que contienen a  $u$ , digamos  $x$  e  $y$ , etiquetemos como  $\tilde{\varphi}(x) = a < b = \tilde{\varphi}(y)$ , luego, sumemos uno a todas las aristas etiquetadas con etiqueta mayor o igual que  $a$  y hagamos  $\tilde{\varphi}(E) = a$ . Finalmente, si hay una arista con etiqueta uno o cero que contiene a  $u$ , hagamos  $\tilde{\varphi}(E) = z + 1$ , donde  $z$  hasta ahora es la etiqueta de tamaño más grande.

Cuando  $\mathcal{H}^1$  es la gráfica nula, entonces  $\mathcal{H}$  no tiene vértices amarrados y por la observación **13** es arista conforme, o ninguna arista de  $\mathcal{H}$  contiene dos o más vértices amarrados (para más detalles ver [15]).  $\square$

Hemos mostrado, en cada caso, que es posible obtener un etiquetamiento, y así  $\mathcal{H}$  es arista-conforme.

Una consecuencia del teorema anterior es que basta ver que el esqueleto  $H^1$  de una hipergráfica  $\mathcal{H}$  (que en algunos casos tiene una forma más simple que  $\mathcal{H}$ ) sea arista conforme.

**Observación 18.** Si  $\mathcal{H}^{w(\mathcal{H})}$  no es la gráfica nula, entonces cada uno de sus vértices es amarrado.

Un problema que se deja abierto ([15]) es caracterizar las hipergráficas aristas conformes.

**Proposición 9.** [15] Si una hipergráfica  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  es arista conforme y  $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ , entonces la hipergráfica parcial inducida por  $\mathcal{E}'$ ,  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}')$ , es también arista-conforme.

**Demostración:** Basta demostrar que si  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  es arista conforme entonces  $\mathcal{H}^* = (\mathcal{V}, \mathcal{E} - E)$  es arista conforme, para cualquier arista  $E \in \mathcal{E}$ .

Sea  $\mathcal{H}$  una hipergráfica arista-conforme, y sea  $\varphi$  un etiquetamiento conforme de  $\mathcal{E}$ . Removamos cualquier arista  $E \in \mathcal{E}$ , y sea  $F \in \mathcal{E} - E$  cualquiera tal que  $\varphi(F) > \varphi(E)$  (si la hay). Definamos  $\tilde{\varphi}(F) = \varphi(F) - 1$ , y  $\tilde{\varphi}(E) = \varphi(E)$  para todo  $E \in \mathcal{E} - F$ . Así,  $\tilde{\varphi}$  es un etiquetamiento conforme de  $\mathcal{H}^*$ , demostrando que  $\mathcal{H}^*$  es arista-conforme.  $\square$

### 3.6. Resultado de Sánchez-Arroyo

**Definición 22.** [17] Una hipergráfica  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  es densa si  $\delta(\mathcal{H}) > \sqrt{|\mathcal{E}|}$ .

**Teorema 7.** [17] Sea  $\mathcal{H}$  una hipergráfica lineal con  $n$  aristas de tamaño a lo más  $n$ , y  $\delta(\mathcal{H}) \geq 2$ . Entonces, si  $\mathcal{H}$  es densa entonces  $\chi(\mathcal{H}) \leq n$ .

**Demostración:** Coloreemos los vértices de  $\mathcal{H}$  en orden descendiente con respecto a los grados de sus vértices. Supongamos que ya hemos coloreado todos los vértices de grado mayor a  $r$ . Para colorear un vértice  $v$  de grado  $r$  consideremos una arista  $E$  que contiene a  $v$ , ¿cuántos vértices de  $E$  están coloreados?. Observemos primero que hay  $n - r$  aristas no incidentes a  $v$ . Si un vértice  $y$  de  $E$  está coloreado, quiere decir que el grado de éste es mayor que  $r$ . Por la linealidad de  $\mathcal{H}$  se tiene que hay a lo más  $\frac{n-r}{r-1}$  vértices en  $E$  coloreados. Esta misma conclusión se tiene para cada una de las  $r$  aristas incidentes a  $v$ , por lo que hay a lo más  $\frac{r(n-r)}{r-1}$  vértices adyacentes a  $v$  coloreados. Finalmente, el vértice  $v$  es coloreable si  $n$  es estrictamente más grande que  $\frac{r(n-r)}{r-1}$ . Así, si  $\mathcal{H}$  es densa, podemos colorear el vértice  $v$ .  $\square$

### 3.7. Resultado de Klein y Margraf

El siguiente resultado (teorema 9) que vamos a ver es de Klein y Margraf, cuya demostración necesita el teorema de Brujin-Erdős, que establece:

**Teorema 8.** [4] Sea  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  una hipergráfica lineal intersectante. Entonces  $|\mathcal{E}| \leq |\mathcal{V}|$ .

**Teorema 9.** [14] Sea  $G = (V, E)$  una gráfica y  $G^c$  su complemento. Entonces  $|V| \leq \chi(G) + \chi(G^c)$ . Más aún  $\chi(G) + \chi(G^c) \leq \nu(G) + \nu(G^c)$ .

**Demostración:** Demostremos primero que  $|V| \leq \nu(G) + \nu(G^c)$ : sean  $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  y  $\bar{\mathcal{H}} = (\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{E}})$  dos hipergráficas lineales tales que  $L(\mathcal{H}) \cong G$  y  $L(\bar{\mathcal{H}}) \cong G^c$  (recordemos que  $L(\mathcal{H})$  denota la gráfica de intersección de la hipergráfica  $\mathcal{H}$ ), con  $|\mathcal{V}| = \nu(G)$  y  $|\bar{\mathcal{V}}| = \nu(G^c)$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\mathcal{V}$  y  $\bar{\mathcal{V}}$  son disjuntos.

Sean  $p : V(L(\mathcal{H})) \rightarrow V$  y  $\bar{p} : V(L(\bar{\mathcal{H}})) \rightarrow V$  los isomorfismos del conjunto de vértices de  $L(\mathcal{H})$  y  $L(\bar{\mathcal{H}})$  a  $V$ , respectivamente. Consideremos ahora el espacio

$$\mathcal{H} \cup \bar{\mathcal{H}} := \{\mathcal{V} \cup \bar{\mathcal{V}}, \mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}} := \{p^{-1}(v) \cup \bar{p}^{-1}(v) : v \in V\}\}.$$

Para cualquier par de vértices diferentes  $u, v \in V$  tenemos

$$(p^{-1}(u) \cup \bar{p}^{-1}(u)) \cap (p^{-1}(v) \cup \bar{p}^{-1}(v)) \in \begin{cases} \mathcal{V}, & \text{si } \{u, v\} \in E \\ \bar{\mathcal{V}}, & \text{si } \{u, v\} \notin E, \end{cases}$$

se sigue que  $\mathcal{H} \cup \bar{\mathcal{H}}$  es una hipergráfica lineal intersectante. Por el teorema 8 se tiene que

$$|V| = |\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}| \leq |\mathcal{V} \cup \bar{\mathcal{V}}| = |\mathcal{V}| + |\bar{\mathcal{V}}| = \nu(G) + \nu(G^c).$$

En el teorema 2 del capítulo 15 de [1] se demuestra que  $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq |V| + 1$ . Más aún, Finck demostró que hay dos tipos de gráficas  $F_1$  y  $F_2$  que alcanzan la cota (ver [9]).

Entonces, si  $G$  es diferente\* de las gráficas  $F_1$  y  $F_2$  se tiene que  $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq |V|$ , y así  $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq \nu(G) + \nu(\overline{G})$ .  $\square$

**Corolario 2.** [15] *Sea  $G$  una gráfica, entonces  $G$  ó  $G^c$  satisface la conjetura 3.*

## 4. Conclusiones

La conjetura de Erdős, Faber y Lovász no es difícil de enunciar. Sin embargo, su solución no se ha dado en su totalidad, a pesar de que lleva más de treinta y cinco años propuesta. Esto sugiere pensar que el problema es muy difícil de resolver. En mi opinión, es un problema muy interesante, por lo que vale la pena trabajar en él.

El propósito de este trabajo fue mostrar las diferentes formulaciones que tiene la conjetura y dar un panorama de algunos avances en su solución. Cabe aclarar que existen otras formulaciones y otros pocos avances de la conjetura que en este trabajo no se expusieron; por ejemplo, se puede formular algebraicamente [11]. Además de que existen algunas generalizaciones de esta conjetura (ver por ejemplo [16]).

---

\* Cuando  $G$  es del tipo  $F_1$  ó  $F_2$  la demostración completa está en [14]

## Referencias

- [1] C. Berge, *Graphs*, Elsevier Science Publishers B.V. North-Holland, 1991.
- [2] C. Berge, A.J.W. Hilton, *On two conjectures on edge colouring hypergraphs*, *Congressus Numer.* **70** (1990) 99-104.
- [3] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, The MacMillan Press Ltd., 1976.
- [4] N.G de Bruijn, P. Erdős, *A combinatorial problem*, *Indagationes Math.* **8** (1946) 461–467.
- [5] C.J. Colbourn and M.J. Colbourn, *The chromatic index of cyclic Steiner 2-designs*, *Internat. J. Math. & Math Sci.* **5/4** (1982) 823–825.
- [6] M.S. Colbourn y R.A Mathon, *On cyclic steiner 2-design*, *Annals of Discrete Mathematics* **7** (1980) 215–253.
- [7] P. Erdős. *On the combinatorial problems which I would most like to see solved*, *Combinatorica* **1** (1981) 313–318.
- [8] P. Erdős, *Problems and results in graph theory and combinatorial analysis*, *Discrete Mathematics* **72** (1988) 81–92.
- [9] H.J. Finck, *Über die chromatischen Zahlen eines Graphen und seines Komplements I, II*, *Wiss. Z. Tech. Hosch. Ilmenau* **12** (1966) 243–246.
- [10] J.C. Fournier, *Colorations des aretes d'un graphe*, *Cahiers Centre Etudes Roch. Oper.* **15** (1964) 311–314.
- [11] L. Haddad, C. Tardif, *A clone-theoric formulation of the Erdős-Faber-Lovász Conjecture*, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **24/3** (2004) 545–549.
- [12] N. Hindman, *On a conjecture of Erdős, Faber and Lovász about  $n$ -colorings*, *Canadian J. Math.* **33** (1981) 545–549.
- [13] B. Jackson, G. Sethuraman, C.Whitehead, *A note on the Erdős-Faber-Lovász*, *Discrete Mathematics* **307** (2007) 911–915.
- [14] H. Klein, M. Margraf, *A remark on conjecture of Erdős, Faber and Lovász*, *Journal of Geometry* **88** (2008) 116–119.
- [15] D. Romero and A. Sánchez-Arroyo, *Adding evidence to the Erdős-Faber-Lovász conjecture*, *Ars Combinatoria* **85** (2007) 71–84.
- [16] D. Romero, A. Sánchez-Arroyo, *Advances on the Erdős-Faber-Lovász conjecture*, in G. Grimmet; C. McDiarmid, *Combinatorics, Complexity, and Chance: A Tribute to Dominic Welsh*, *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*, Oxford University Press **34** 2007 285–298.
- [17] A. Sánchez-Arroyo, *The Erdős-Faber-Lovász conjecture for dense hypergraphs*, *Discrete Mathematics* **308** (2008) 991–992.

- [18] P.D. Seymour, *Packing nearly-disjoint sets*, *Combinatorica* **2** (1982) 91–97.
- [19] V.G. Vizing, *On an estimate of the chromatic class of a  $p$ -graph*, *Diskret. Analiz.* **3** (1964) 9–17.