



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

# La gráfica de rotaciones de aristas en gráficas geométricas planas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS  
(COMPUTACIÓN)

P R E S E N T A :

JOEL ESPINOSA LONGI

DIRECTOR DE TESIS  
DR. JORGE URRUTIA GALICIA

México D.F.

2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



---

# Agradecimientos

*Al sol,*

*la luna y*

*las estrellas.*



# Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Conceptos preliminares</b>	<b>5</b>
<b>3. Resultados</b>	<b>21</b>
3.1. Conexidad . . . . .	23
3.2. Diámetro de la gráfica de rotaciones de aristas . . . . .	28
3.3. Hamiltonicidad . . . . .	35
3.4. Otras gráficas geométricas planas . . . . .	36
3.4.1. Gráficas geométricas planas arista etiquetadas . . . . .	37
3.4.2. Gráficas geométricas planas dirigidas . . . . .	41
<b>4. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>45</b>
4.1. Problemas abiertos . . . . .	45



# Índice de figuras

---

2.1. Gráfica dirigida y gráfica no dirigida. . . . .	6
2.2. Gráfica simple y gráfica no simple. . . . .	7
2.3. $H$ subgráfica de $G$ . . . . .	7
2.4. Gráfica plana y gráfica no plana. . . . .	8
2.5. Gráfica completa $K_5$ . . . . .	8
2.6. Gráfica conexa y gráfica no conexa. . . . .	9
2.7. Un árbol y un bosque. . . . .	9
2.8. Ejemplos de gráficas geométricas. . . . .	11
2.9. Gráfica arista etiquetada. . . . .	11
2.10. Gráfica Euleriana y gráfica no Euleriana. . . . .	12
2.11. Gráfica Hamiltoniana y gráfica no Hamiltoniana. . . . .	12
2.12. Gráfica dual. . . . .	13
2.13. Triangulación . . . . .	13
2.14. Triángulo de Delaunay . . . . .	14
2.15. Triangulación de Delaunay . . . . .	15
2.16. Ejemplo de giro en una gráfica plana . . . . .	15
2.17. Giro en una triangulación . . . . .	16
2.18. Círculo una recta que lo atraviesa y cuatro puntos. . . . .	16
2.19. Ángulos en un cuadrilátero después de un giro de arista. . . . .	17
2.20. Un cuadrilátero con una arista ilegal. . . . .	18
2.21. Simetría del criterio para discernir una arista ilegal. . . . .	18
2.22. Construcción de una triangulación de Delaunay. . . . .	19
2.23. Sectores $s^+$ y $s^-$ de un círculo de radio $r$ . . . . .	20
3.1. Rotación de arista. . . . .	21
3.2. Rotación de arista en gráficas geométricas planas. . . . .	22
3.3. Dos gráficas no transformables usando rotaciones de aristas. . . . .	23



3.4. Cambio de posición de una arista ausente dentro de un triángulo.	25
3.5. Pasos para cambiar la posición de una arista ausente dentro de una triangulación. . . . .	26
3.6. Giro de una arista ausente dentro de un cuadrilátero. . . . .	26
3.7. Giro simulado de la diagonal de un cuadrilátero. . . . .	27
3.8. Tres aristas legales formando un triángulo de Delaunay . . . .	29
3.9. Mover una arista ausente a una cuadrilátero necesita a lo más $O(n)$ rotaciones de arista . . . . .	30
3.10. Adición de nuevas aristas ilegales. . . . .	31
3.11. Dos gráficas donde se necesita $O(n^2)$ giros de aristas para una gráfica en la otra. . . . .	33
3.12. Dos gráficas con un número constante de aristas ausentes, donde se necesitan $O(n^2)$ rotaciones de aristas para una convertir una gráfica en la otra. . . . .	34
3.13. Transformación entre dos gráficas geométricas con una arista.	34
3.14. Pasos para la transformación entre dos gráficas geométricas con una arista. . . . .	35
3.15. Abanico de aristas generado por rotaciones de una arista. . . .	35
3.16. Construcción de un ciclo Hamiltoniano. . . . .	37
3.17. Intercambio de aristas etiquetadas en un triángulo. . . . .	38
3.18. Triángulo con aristas etiquetadas y una arista ausente. . . . .	38
3.19. Pasos para intercambiar dos aristas etiquetadas . . . . .	39
3.20. Intercambio de dos aristas etiquetadas. . . . .	40
3.21. Conversión de dos gráficas geométricas planas etiquetadas. . . .	41
3.22. Inversión de la orientación de una arista en un triángulo con dos aristas ausentes. . . . .	42
3.23. Inversión de la orientación de una arista en un triángulo. . . .	44
4.1. Ciclo Hamiltoniano para $\mathcal{ER}\mathcal{G}(V, 2)$ con cuatro puntos en posición convexa. . . . .	47
4.2. Ciclo Hamiltoniano para $\mathcal{ER}\mathcal{G}(V, 2)$ con cinco puntos en posición convexa. . . . .	49
4.3. Ciclo Hamiltoniano para $\mathcal{ER}\mathcal{G}(V, 2)$ con seis puntos en posición convexa. . . . .	50
4.4. Rotación no restringida de aristas. . . . .	51
4.5. Rotación local de aristas. . . . .	51

---

# Capítulo 1

## Introducción

---

El problema de determinar que tan parecidas son dos gráficas entre si, se ha estudiado desde hace tiempo en la teoría de gráficas [12], tratando de determinar una medida de similitud, entre elementos de una misma familia de gráficas. En general se buscan operaciones definidas sobre las aristas, que permitan modificar la configuración de una gráfica, para así poder convertir una gráfica en otra y determinar que tan parecidas son, contando el número de operaciones realizadas para la conversión. Una de las operaciones más estudiadas, es la operación conocida como *giro de arista* (*edge flip*), la cual consiste en remover una arista de una gráfica y agregar una nueva arista (diferente a la que se quitó), manteniendo la gráfica dentro de la misma familia, por ejemplo, si realizamos un giro de arista sobre una gráfica plana, la gráfica resultante debe ser plana.

La operación de giro de arista ha sido estudiada sobre diferentes familias de gráficas, una de las más importantes es la familia de las triangulaciones, donde se ha utilizado la operación de giro de arista, para mejorar la calidad de mallas tridimensionales construidas por triángulos (una triangulación), convirtiendo las mallas en triangulaciones de Delaunay [2, 18, 19]. Del estudio de la operación de giro de arista sobre la familia de triangulaciones surgen algunas preguntas interesantes como, dada una triangulación  $T_1$  y una triangulación diferente  $T_2$  del mismo conjunto de puntos, ¿siempre existirá una secuencia de giros de aristas que permita transformar  $T_1$  en  $T_2$ ?, Wagner dio una respuesta afirmativa a esta pregunta [21], dando pauta a otras preguntas como, ¿cuál es el menor número de giros de aristas necesarios para convertir  $T_1$  en  $T_2$ ?, ¿qué pareja de triangulaciones requiere la mayor cantidad de giros de aristas para poder convertir las gráficas entre si?, ¿es posible obtener de manera ordenada todas las triangulaciones de un conjunto de puntos, tal que cada triangulación difiera de la anterior sólo en una arista y además saber

---

cuantas triangulaciones son?. Estas y otras preguntas se han estudiado en la literatura sobre la operación de giro de arista [6] y se estudia el concepto de *gráfica de giros* para su resolución.

La gráfica de giros se define de la siguiente manera: sus vértices corresponden al conjunto de todas las gráficas definidas sobre un conjunto de vértices  $V$  que tienen  $k$  aristas, y dos vértices de la gráfica de giros están unidos por una arista, si y sólo si, las gráficas asociadas a dichos vértices difieren únicamente en una arista. Entonces las preguntas para determinar el número de giros necesarios para convertir entre cualesquiera dos gráficas y determinar cual es la pareja de gráficas que necesita la mayor cantidad de giros para convertirlas entre si, se responden al encontrar cotas para el diámetro de la gráfica de giros [16, 19]; mientras que la pregunta de encontrar de forma ordenada todas las posibles triangulaciones de un conjunto de puntos y contar cuantas son, se responde al determinar si la gráfica de giros posee o no un ciclo hamiltoniano.

Existe otra operación sobre aristas conocida como *rotación de aristas*, que también se ha estudiado con el propósito de resolver preguntas similares a las planteadas anteriormente [7, 12, 17]. De manera simple una rotación de arista consiste en fijar un extremo de una arista y rotar el extremo libre, considerando al extremo fijo como eje de rotación (pivote), hasta que el extremo libre alcance algún otro vértice de la gráfica. Esta operación se ha estudiado principalmente desde un punto combinatorio, es decir, sin considerar las propiedades geométricas de las gráficas.

El presente trabajo se centra en el estudio de la operación de rotación de aristas, dando una definición más geométrica (considerando que la rotación puede verse restringida por algunas aristas que cumplirán el papel de obstáculos) y definiendo la operación sobre una familia de gráficas llamadas *gráficas geométricas planas*. Se estudian algunas características importantes que presenta la *gráfica de rotaciones de aristas*, como son: la conexidad, la hamiltonicidad y su diámetro. La *conexidad* nos proporciona la cualidad de que siempre es posible convertir entre si, dos gráficas geométricas planas cualesquiera (si están definidas sobre el mismo conjunto de puntos). El *diámetro* nos habla sobre el número máximo de rotaciones de aristas necesarias para convertir una gráfica en otra, lo que corresponde a una medida de similitud entre gráficas. La *hamiltonicidad* brinda la noción para recorrer todas las gráficas geométricas planas definidas sobre el mismo conjunto de puntos.

## 1. Introducción

---

La tesis se encuentra organizada de la siguiente forma: en el capítulo *conceptos preliminares* se proporcionan las definiciones necesarias para el desarrollo de la tesis, haciendo que la lectura de la misma sea lo más auto-contenida posible. En el capítulo de *resultados* se plantean los problemas a tratar y se presenta el desarrollo de los resultados obtenidos en este trabajo. Y por último en el capítulo de *conclusiones y trabajo futuro* se muestran algunos problemas y variantes a la operación de rotación de aristas, los cuales surgieron durante el desarrollo de este trabajo.



---

## Capítulo 2

# Conceptos preliminares

---

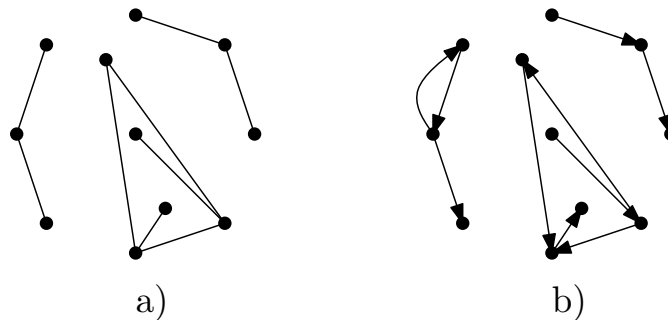
A continuación se presentan las definiciones de los conceptos que se utilizan a lo largo de la presente obra.

Una *gráfica*  $G$  es un par  $(V(G), E(G))$  que consiste de un conjunto  $V(G)$  de vértices (puntos o nodos) y un conjunto  $E(G)$  de aristas (líneas), tal que las aristas están representadas por pares de vértices  $\{u, v\}$ . Si  $e$  es una arista de  $G$  y  $u, v$  son el par vértices asociados a la arista, entonces decimos que la arista  $e = \{u, v\}$  une a los vértices  $u$  y  $v$ , además dichos vértices son los extremos de la arista. Por simplicidad la arista  $\{u, v\}$  se escribirá como  $\overline{uv}$ . Vamos a denotar al número de vértices de una gráfica  $G$ , como  $|V(G)|$  y al número de aristas como  $|E(G)|$ , a estos valores se les conoce como el *orden* y el *tamaño* de  $G$  respectivamente. Cuando no exista confusión sobre a qué gráfica pertenecen el conjunto de vértices y aristas, se escribirá simplemente  $V$  y  $E$ .

Muchas de las definiciones en la teoría de gráficas, se basan fuertemente en la noción intuitiva que brinda el diagrama asociado (el dibujo correspondiente a la gráfica). Los diagramas representan a los vértices como puntos y a las aristas como líneas. En general la posición de los puntos y la forma de las líneas no son importantes ya que el dibujo corresponde únicamente a la representación visual de la gráfica, por lo que sólo sirve para mostrar mediante un dibujo la relación que hay entre los vértices por medio de las aristas. Cabe mencionar que existen familias de gráficas en las que los diagramas asociados (el dibujo de la gráfica) sí son importantes, por lo que la posición de los vértices y la forma de las aristas representan características fundamentales de la gráfica.

Cuando el conjunto de aristas de  $G$  esté compuesto por pares de vértices no ordenados, entonces diremos que  $G$  es una *gráfica no dirigida*. Si por el contrario las aristas son pares ordenados, entonces diremos que  $G$  es una *gráfica dirigida* o *digráfica*. Una arista  $e = \overline{uv}$  de una gráfica dirigida, se

considera que esta orientada de  $u$  a  $v$ , al primer elemento de la pareja se le denomina *cola* y al segundo elemento *cabeza*. Hay que mencionar, que en una gráfica dirigida, la arista  $\overline{uv}$  es diferente de la arista  $\overline{vu}$ , ya que el orden de sus vértices es distinto, por lo que la orientación de la arista no es igual. En el diagrama asociado, las aristas en una gráfica no dirigida se representan como líneas simples que unen dos puntos, mientras que las aristas en una gráfica dirigida se representan por medio de flechas, donde la punta de la flecha apunta en dirección de la cola hacia la cabeza (figura 2.1).



**Figura 2.1:** a) Gráfica no dirigida. b) Gráfica dirigida.

Un extremo de una arista se dice que es *incidente* a la arista a la que pertenece. Si dos vértices son incidentes a la misma arista entonces son *adyacentes*. Una arista cuyos extremos son el mismo vértice se llama *lazo* y una arista cuyos extremos son vértices diferentes se llama *enlace*.

Una *gráfica simple* es aquella que no tiene lazos y ninguno de sus enlaces une al mismo par de vértices (no existen aristas múltiples, figura 2.2).

Una gráfica  $H$  es una *subgráfica* de  $G$ , si  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $E(H) \subseteq E(G)$  y se escribe  $H \subseteq G$  (figura 2.3). Cuando  $H \subseteq G$  pero  $H \neq G$  se escribirá  $H \subset G$  y se dice que  $H$  es una *subgráfica propia* de  $G$ . Si  $H$  es una subgráfica de  $G$ , entonces  $G$  es una *supergráfica* de  $H$ . Si  $V'$  es un subconjunto no vacío de  $V$ , la subgráfica de  $G$  cuyo conjunto de vértices es  $V'$  y cuyas aristas son aristas de  $G$  que tienen ambos extremos en  $V'$ , se llama la subgráfica de  $G$  *inducida* por  $V'$  denotada por  $G[V']$  y decimos que  $G[V']$  es una *subgráfica inducida* de  $G$ .

## 2. Conceptos preliminares

---

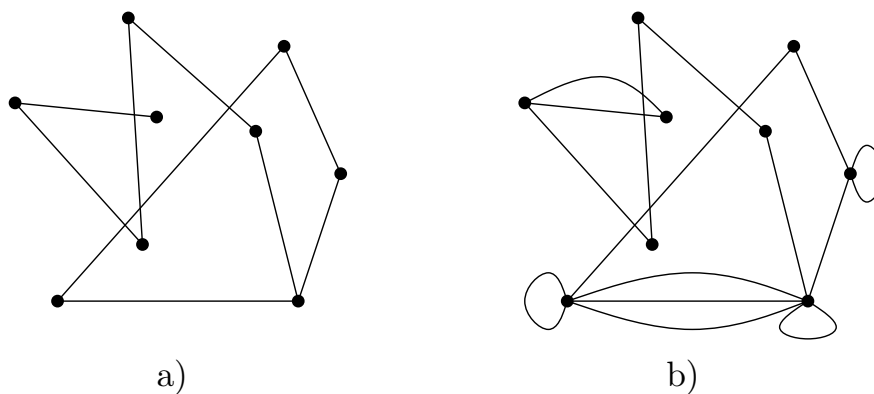


Figura 2.2: a) Gráfica simple. b) Gráfica no simple.

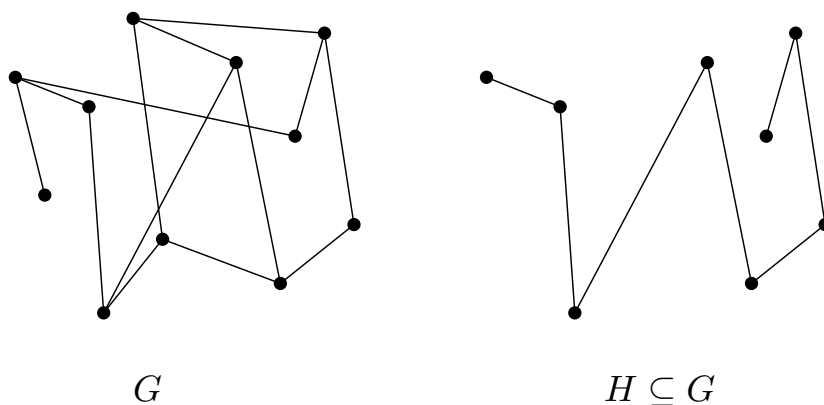


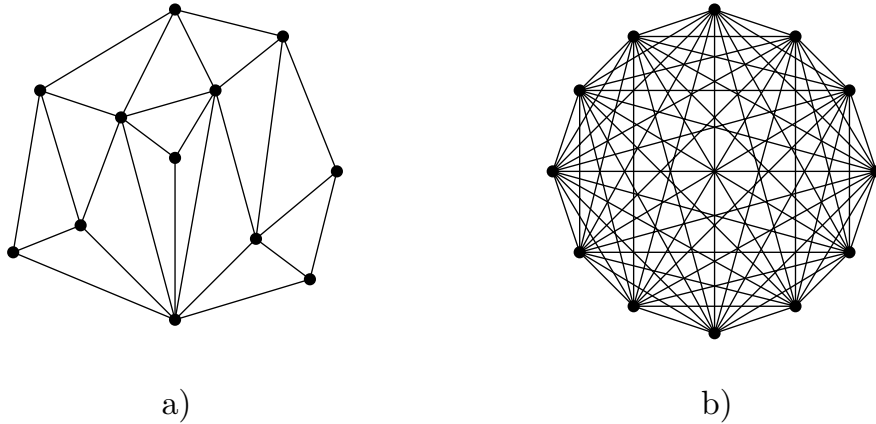
Figura 2.3:  $H$  subgráfica de  $G$ .

Una gráfica que puede ser dibujada en el plano, de tal forma que sus aristas sólo se intersecten en sus vértices, se llama *gráfica plana* (figura 2.4). Estas gráficas corresponden a gráficas donde el diagrama asociado es muy importante, ya que una de las propiedades de la gráfica se encuentra relacionada directamente con la manera de dibujar el diagrama.

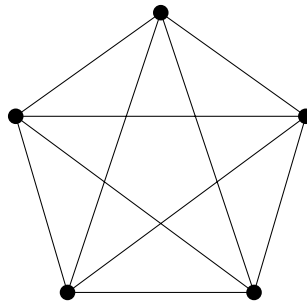
Una *gráfica completa* corresponde a una gráfica simple donde toda pareja de vértices está unida por una arista. La gráfica completa con  $n$  vértices tiene  $n(n-1)/2$  aristas y se denota por  $K_n$  (figura 2.5).

Un *camino* es una secuencia de vértices  $v_0, v_1, \dots, v_n$ , que forman una gráfica simple cuyos vértices están ordenados en sucesión lineal, tal que dos vértices son adyacentes si y sólo si son consecutivos en la secuencia. Un





**Figura 2.4:** a) Gráfica plana. b) Gráfica no plana.



**Figura 2.5:** Gráfica completa  $K_5$ .

camino es *cerrado* si  $v_0 = v_n$  (si el primer y último elemento son iguales) y *abierto* en otro caso. Un *camino simple* es un camino donde no se repite ninguno de los vértices que lo conforman. Un *ciclo* es un camino donde el primero y último vértice son iguales y el resto de sus vértices son diferentes, en otras palabras, es un camino simple cerrado. La *longitud* de un camino o de un ciclo es el número de aristas que contiene. Se dice que dos vértices  $u$  y  $v$  en  $G$  están *conectados* si existe un camino en  $G$  que los une. Si dividimos los vértices de la gráfica en subconjuntos  $V_1, V_2, \dots, V_\omega$  tal que dos vértices  $u$  y  $v$  están conectados si y sólo si ambos vértices pertenecen al mismo conjunto  $V_i$ , las subgráficas  $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_\omega]$  son llamadas las *componentes* de  $G$ . Cuando  $G$  tiene exactamente una componente decimos que  $G$  es *conexa* y si tiene más componentes entonces decimos que es *disconexa* (figura 2.6), denotamos al número de componentes de  $G$  como  $\omega(G)$ .

## 2. Conceptos preliminares

---

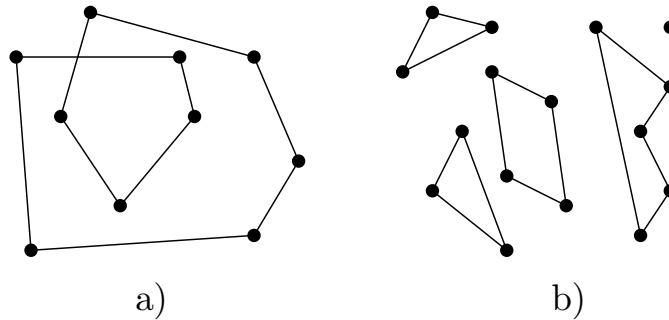


Figura 2.6: a) Gráfica conexa. b) Gráfica desconexa con 5 componentes.

La *distancia* entre dos vértices  $u$  y  $v$  en una gráfica  $G$ , corresponde al número de aristas del camino más corto que los une. Si no existe un camino que los una (pertenecen a diferentes componentes de  $G$ ), entonces la distancia entre ambos se define como infinita. La *excentricidad*  $\varepsilon$  de un vértice  $v$  de  $G$ , es la distancia más grande entre  $v$  y cualquier otro vértice de  $G$ . El *radio* de una gráfica  $G$  es la mínima excentricidad de los vértices. El *diámetro* de una gráfica  $G$  es la máxima excentricidad de los vértices, es decir, la mayor distancia entre cualesquiera dos de sus vértices.

Una *gráfica acíclica* es aquella que no tiene ningún ciclo como subgráfica. Un *árbol* es una gráfica acíclica conexa. Una gráfica acíclica es llamada un *bosque* si cada componente de la gráfica es un árbol, es decir, cada una de sus componentes son gráficas acíclicas (figura 2.7).

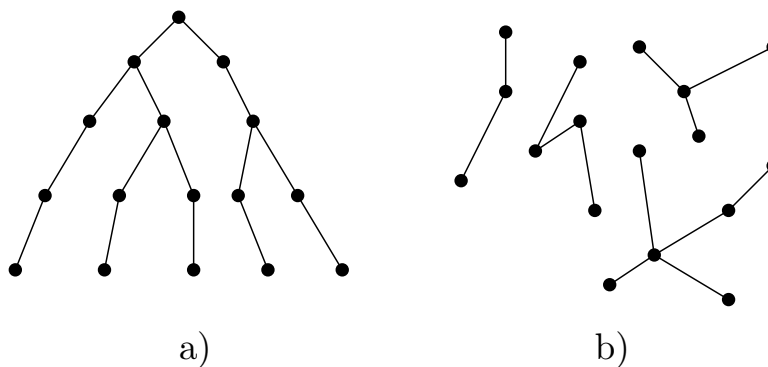


Figura 2.7: a) Un árbol. b) Un bosque con cuatro componentes.

---

Una gráfica  $G$  es *maximal* respecto a una propiedad si al agregar cualquier arista a  $G$ , está deja de cumplir con la propiedad, en otras palabras es la gráfica más grande que cumple con la propiedad.

Una *gráfica geométrica* es una gráfica en la que los vértices y las aristas, se asocian con objetos geométricos o con configuraciones con propiedades geométricas. Principalmente los vértices son asociados con puntos en el plano y las aristas con rectas. Algunos ejemplos de gráficas geométricas son:

- *Las gráficas geométricas planas*, donde los vértices son puntos en el plano y las aristas son líneas rectas que sólo se cruzan en sus extremos (figura 2.8 a).
- Dado un polígono simple  $P$  en el plano, *la gráfica de visibilidad* de  $P$ , es aquella donde sus vértices son los vértices de  $P$  y sus aristas son aquellas que unen cada pareja de vértices y se encuentran completamente contenidas dentro de  $P$  (figura 2.8 b).
- *Las gráficas euclidianas*, donde los vértices representan puntos en el plano euclidiano y las aristas tienen asociada una distancia igual a su longitud (figura 2.8 c).
- *Las gráficas geométricas planas maximales*, que corresponden a gráficas geométricas planas tal que al agregar cualquier arista se generan intersecciones (dejan de ser planas, figura 2.8 d).

Una *gráfica arista etiquetada* es aquella que a cada arista le asigna un nombre con el cual puede ser distinguida (figura 2.9).

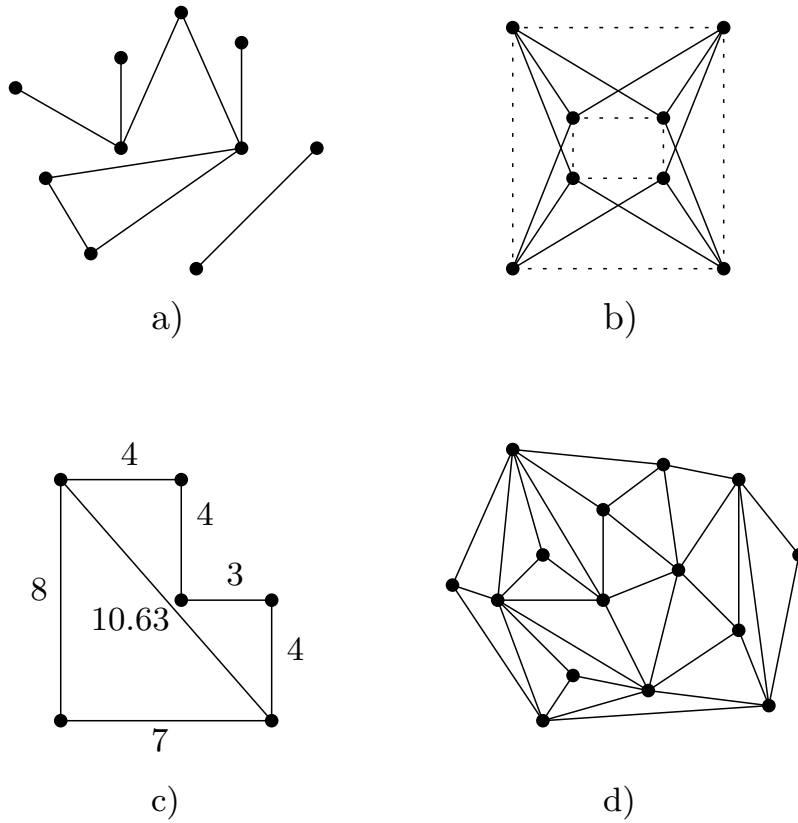
Un *camino Euleriano* es una camino que utiliza una arista exactamente una vez. Un *tour* de  $G$  es un camino cerrado que atraviesa cada arista de  $G$  al menos una vez. Un *tour Euleriano* de  $G$  es un tour que atraviesa cada arista de  $G$  exactamente una vez. Decimos que la gráfica  $G$  es *Euleriana* si existe un tour Euleriano en  $G$  (figura 2.10).

Un *camino Hamiltoniano* es un camino simple que contiene cada vértice de  $G$ . Un *ciclo Hamiltoniano* de  $G$  es un ciclo que contiene cada vértice de  $G$ . Una gráfica  $G$  es *Hamiltoniana* si contiene un ciclo Hamiltoniano (figura 2.11).

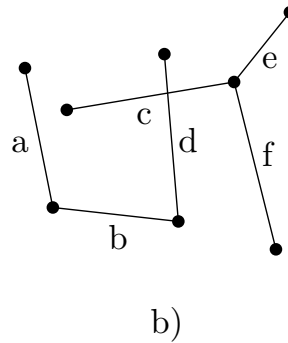
Una gráfica plana  $G$  genera una partición del plano en regiones conexas, donde a la cerradura de cada región se le denomina *cara*. Cada partición generada por una gráfica plana, tiene exactamente una cara no acotada llamada

## 2. Conceptos preliminares

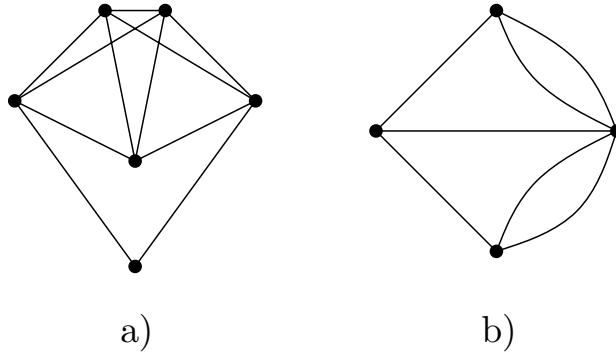
---



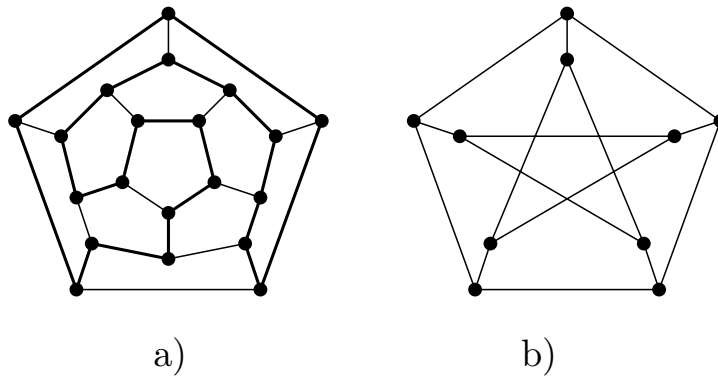
**Figura 2.8:** a) Gráfica plana de líneas rectas. b) Gráfica de visibilidad de un polígono (las aristas punteadas muestran el perímetro del polígono). c) Gráfica euclidiana. d) Gráfica geométrica plana maximal.



**Figura 2.9:** a) Gráfica no etiquetada. b) Gráfica arista etiquetada.



**Figura 2.10:** a) Gráfica Euleriana. b) Gráfica no Euleriana.



**Figura 2.11:** a) Gráfica Hamiltoniana (dodecaedro aplanado). b) Gráfica no Hamiltoniana (gráfica de Petersen).

*cara exterior*. La *frontera* de una cara  $f$  esta determinada por las aristas de  $G$  que la acotan. Una cara es *incidente* a los vértices y las aristas de su frontera. Dos caras son *adyacentes* si sus fronteras tienen al menos una arista en común.

Dada una gráfica plana  $G$ , se puede considerar una segunda gráfica  $G'$ , tal que por cada cara  $f$  en  $G$  se asocia un vértice  $f'$  en  $G'$  y por cada arista  $e$  en  $G$  existe una arista  $e'$  en  $G'$ , donde dos vértices  $f'$  y  $g'$  en  $G'$  están unidos por una arista  $e'$  en  $G'$  si y sólo si las caras correspondiente  $f$  y  $g$  son adyacentes, es decir, colocamos una arista entre dos caras si están separadas por al menos una arista  $e$  en  $G$ . La gráfica  $G'$  se llama *gráfica dual* de  $G$  (figura 2.12).

## 2. Conceptos preliminares

---

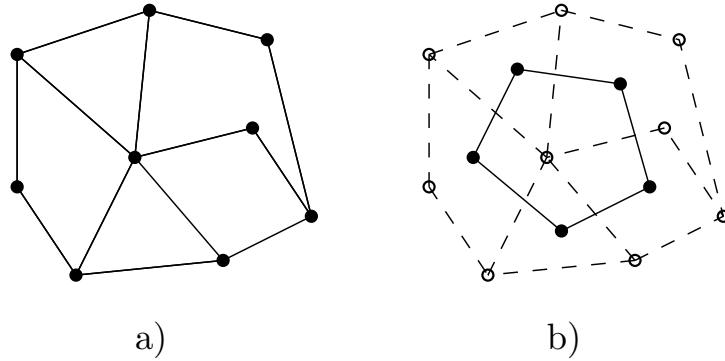


Figura 2.12: a) Una gráfica plana  $G$ . b) Gráfica  $G'$  dual a la gráfica  $G$ .

Una *triangulación*  $T$  de un conjunto de puntos en el plano, corresponde a una gráfica plana tal que todas las caras determinadas por las aristas de  $T$  son triángulos a excepción de la cara exterior. En particular una triangulación es una gráfica geométrica plana máxima, debido a que sus aristas sólo se intersectan en sus vértices y el número de aristas que tiene es máximo (figura 2.13).

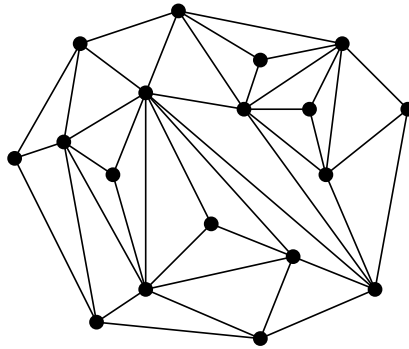
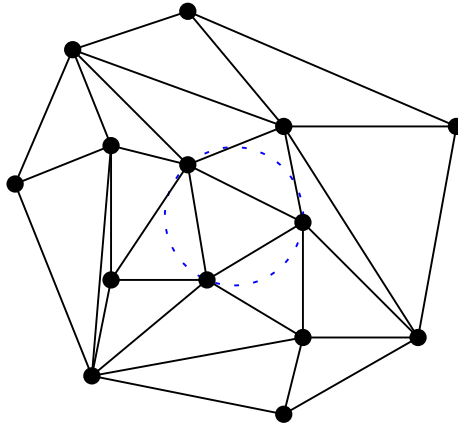


Figura 2.13: Triangulación

---

Dada una triangulación  $T$  y un triángulo  $t \in T$ , si el circuncírculo de  $t$  no contiene ningún vértice de  $T$  en su interior, decimos que  $t$  es un *triángulo de Delaunay* (figura 2.14).



**Figura 2.14:** Triángulo de Delaunay

Si cada triángulo de  $T$  es un triángulo de Delaunay, entonces  $T$  es una *triangulación de Delaunay* (figura 2.15). La triangulación de Delaunay maximiza el ángulo mínimo dentro de cada triángulo que la conforma. Además para una colección de puntos en el plano tal que no existen tres puntos colineales, ni cuatro puntos cocirculares se tiene que la triangulación de Delaunay es única [20, 8].

## 2. Conceptos preliminares

---

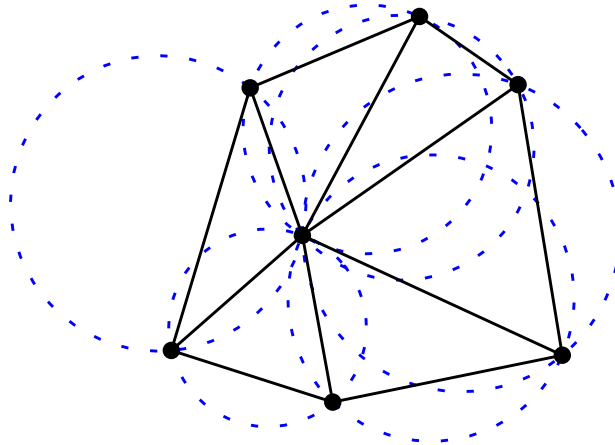


Figura 2.15: Triangulación de Delaunay

Un *giro de arista* en una gráfica  $G$ , es la operación de remover una arista de  $G$  e insertar una nueva arista diferente de la que se removi6, tal que la nueva gráfica sigue siendo del mismo tipo que  $G$  [6], por ejemplo, si  $G$  es una gráfica plana entonces al realizar un giro de arista en  $G$ , la nueva gráfica que se obtiene también debe ser plana y únicamente difiere de  $G$  en la arista girada (figura 2.16).

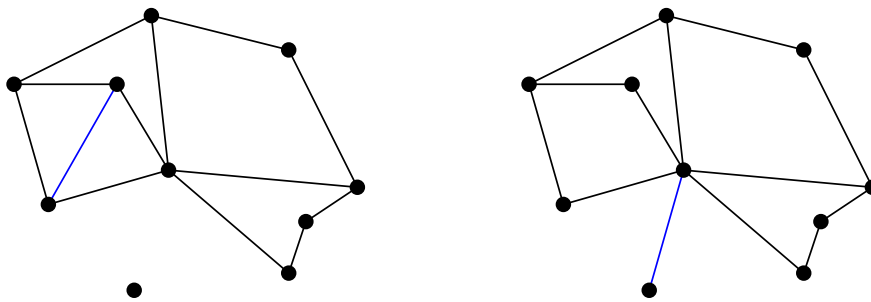


Figura 2.16: Ejemplo de giro en una gráfica plana

La operación de giro de arista, agrega ciertas restricciones dependiendo del tipo de gráfica sobre la cual se realiza, principalmente para mantener las características de la gráfica después de realizada la operación. Por ejemplo, dada una triangulación  $T$ , si una arista  $e$  de  $T$  se encuentra en la frontera de dos triángulos  $t_i, t_j \in T$ , tal que  $c = t_i \cup t_j$  es un cuadrilátero convexo,



entonces podemos realizar un *giro de arista* en  $e$ , es decir, remover la arista  $e$  (que corresponde a una de las diagonales de  $c$ ) y reemplazarla con la otra diagonal de  $c$  (figura 2.17).

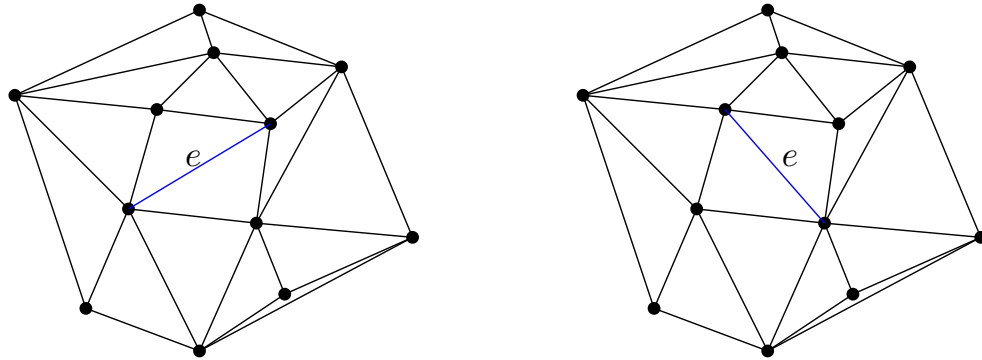


Figura 2.17: Giro de una arista  $e$  dentro de una triangulación

Sea  $C$  un círculo,  $l$  una línea que intersecta a  $C$  en los puntos  $a$  y  $b$ , y sean  $p$ ,  $q$ ,  $r$  y  $s$  puntos que se encuentran del mismo lado de  $l$ . Supongamos que  $p$  y  $q$  se encuentran sobre  $C$ , que  $r$  se encuentra dentro de  $C$  y que  $s$  se encuentra fuera de  $C$  (figura 2.18). Entonces se cumple que  $\angle arb > \angle apb = \angle aqb > \angle asb$ .

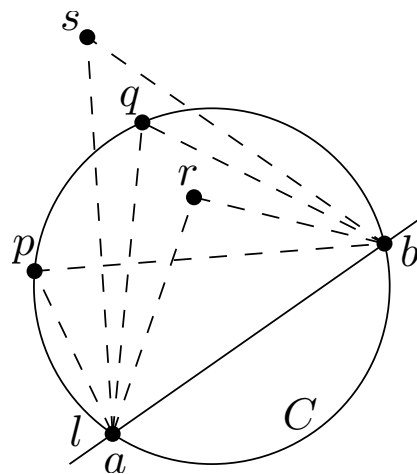
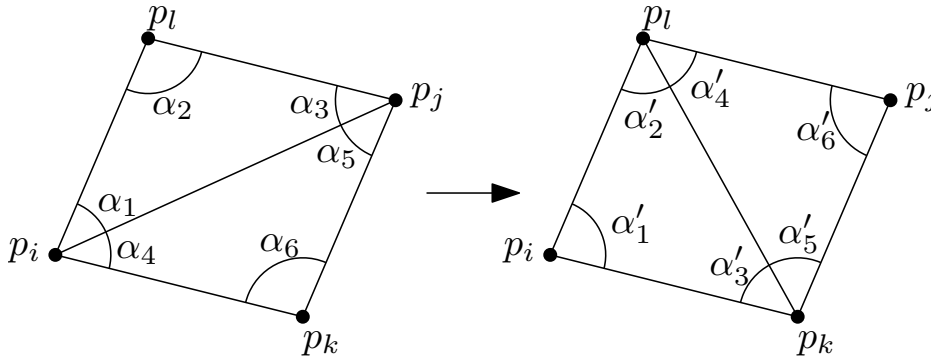


Figura 2.18: Círculo una recta que lo atraviesa y cuatro puntos.

## 2. Conceptos preliminares

Dada una triangulación  $T$ , consideremos la arista  $e = \overline{p_i p_j}$  de  $T$ . Si  $e$  es una arista interior de  $T$  (es decir, no es una arista perteneciente a la cara no acotada de  $T$ ), entonces es incidente a dos triángulos  $\triangle p_i p_j p_k$  y  $\triangle p_i p_j p_l$ . Si estos dos triángulos forman un cuadrilátero convexo, podemos obtener una nueva triangulación  $T'$  removiendo  $\overline{p_i p_j}$  de  $T$  y agregando  $\overline{p_k p_l}$  en su lugar (realizando un giro de arista en  $\overline{p_i p_j}$ ). Las triangulaciones  $T$  y  $T'$  difieren en seis ángulos  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$  en  $T$  que son reemplazados por  $\alpha'_1, \dots, \alpha'_6$  en  $T'$  (figura 2.19).



**Figura 2.19:** Ángulos en los que difiere una triangulación después de un giro de arista.

A la arista  $e = \overline{p_i p_j}$  la vamos a denotar como una *arista ilegal* si

$$\min_{1 \leq i \leq 6} \alpha_i < \min_{1 \leq i \leq 6} \alpha'_i$$

En otras palabras, una arista es ilegal si podemos aumentar localmente el ángulo más pequeño, utilizando un giro de arista. Para verificar si una arista es ilegal, no es necesario calcular los ángulos  $(\alpha_1, \dots, \alpha_6, \alpha'_1, \dots, \alpha'_6)$ , ya que podemos utilizar el siguiente criterio: sea  $e = \overline{p_i p_j}$  una arista incidente a los triángulos  $\triangle p_i p_j p_k$  y  $\triangle p_i p_j p_l$ , sea  $C$  el círculo que pasa por  $p_i, p_j$  y  $p_k$ . La arista  $e$  es ilegal si y sólo si el punto  $p_l$  se encuentra dentro del círculo  $C$ . Además, si los puntos  $p_i, p_j, p_k, p_l$  forman un cuadrilátero convexo que no se encuentra sobre un círculo común, entonces solamente una de las aristas  $\overline{p_i p_j}$  ó  $\overline{p_k p_l}$  es una arista ilegal (figura 2.20).

Observemos que este criterio es simétrico en  $p_k$  y  $p_l$ , es decir,  $p_l$  se encuentra dentro del círculo que pasa por  $p_i, p_j, p_k$  si y sólo si  $p_k$  se encuentra dentro del círculo que pasa por  $p_i, p_j, p_l$ . Cuando los cuatro puntos caen dentro de un círculo común, ambas aristas  $\overline{p_i p_j}$  y  $\overline{p_k p_l}$  son legales (figura 2.21).

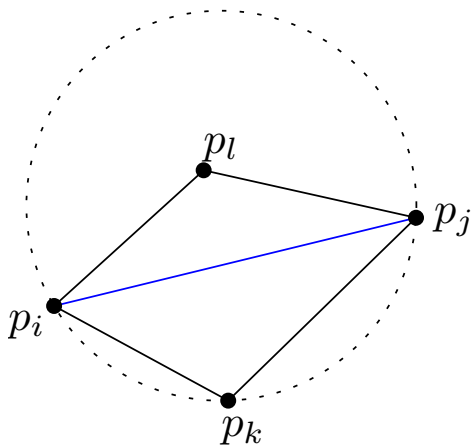


Figura 2.20: Un cuadrilátero con una arista ilegal.

Hay que notar que los triángulos incidentes a una arista ilegal, deben formar un cuadrilátero convexo, por lo que siempre es posible realizar un giro sobre dicha arista.

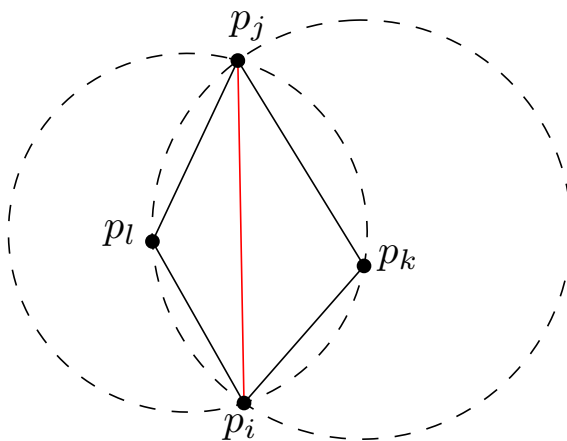
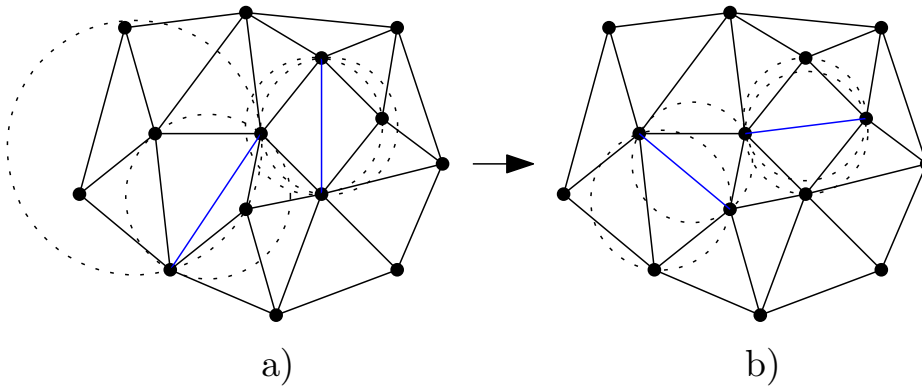


Figura 2.21: Simetría del criterio para discernir una arista ilegal.

Definimos una *triangulación legal* como una triangulación que no contiene ninguna arista ilegal. De la observación anterior se sigue que cualquier triangulación óptima en los ángulos es legal. Además, una triangulación  $T$  de un conjunto de puntos  $P$  es legal si y sólo si  $T$  es la triangulación de Delaunay de  $P$  [19, 8] (figura 2.22).

## 2. Conceptos preliminares

---

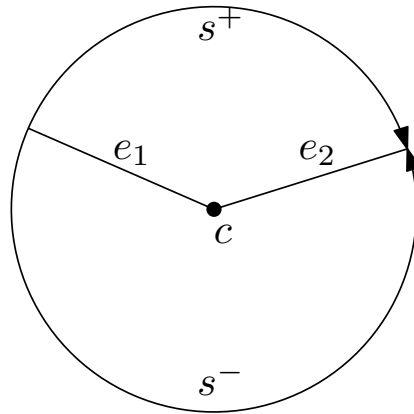


**Figura 2.22:** a) Ubicación de aristas ilegales (en azul). b) Cambio de las aristas ilegales utilizando giros de aristas.

Entonces tenemos que el algoritmo de giro de aristas para la construcción de la triangulación de Delaunay, de un conjunto de  $n$  puntos en posición general en el plano, consiste en construir una triangulación cualquiera  $T$  del conjunto de puntos, identificar una arista ilegal en  $T$  y convertirla en legal realizando un giro de la arista, después revisar la vecindad de la arista buscando nuevas aristas ilegales, repitiendo este proceso hasta que todas las aristas sean legales y se haya construido la triangulación de Delaunay. Como podemos observar este algoritmo se desarrolla de forma local convirtiendo aristas ilegales dentro de una región y propagando los cambios hacia los vecinos cercanos. Observemos que este método realiza a lo más  $O(n^2)$  giros para convertir la triangulación inicial en la triangulación de Delaunay, los cuales corresponden al peor de los casos, cuando se realiza un giro de arista por cada pareja de vértices posible.

---

Dado un círculo de radio  $r$  con centro  $c$  y dos radios  $e_1$  y  $e_2$ , denotamos como  $s^+$  al sector comprendido entre  $e_1$  y  $e_2$  al recorrer su arco en dirección de las manecillas del reloj y como  $s^-$  al complemento de  $s^+$  (es decir, el sector comprendido entre  $e_1$  y  $e_2$  al recorrer su arco en dirección contraria a las manecillas del reloj, figura 2.23)



**Figura 2.23:** Sectores  $s^+$  y  $s^-$  de un círculo de radio  $r$ .

---

## Capítulo 3

# Resultados

---

En el presente capítulo se muestran los resultados obtenidos al estudiar la gráfica de rotaciones de aristas definida en gráficas geométricas planas, así como algunas de sus propiedades.

Intuitivamente una *rotación de arista* la podemos pensar como, fijar uno de los extremos de una arista (un pivote) y rotarla escogiendo una orientación (en dirección o en contra de las manecillas del reloj), imaginando que la arista es flexible (puede reducir o aumentar su longitud sin modificar la propiedad de ser recta) de tal forma que el extremo libre de la arista alcance otro vértice de la gráfica (figura 3.1).

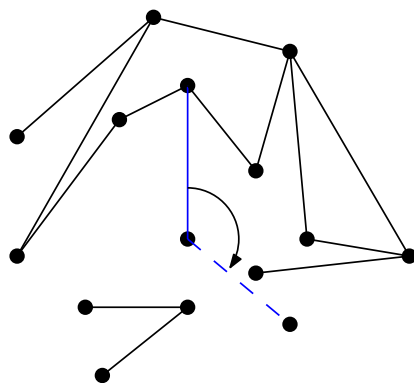
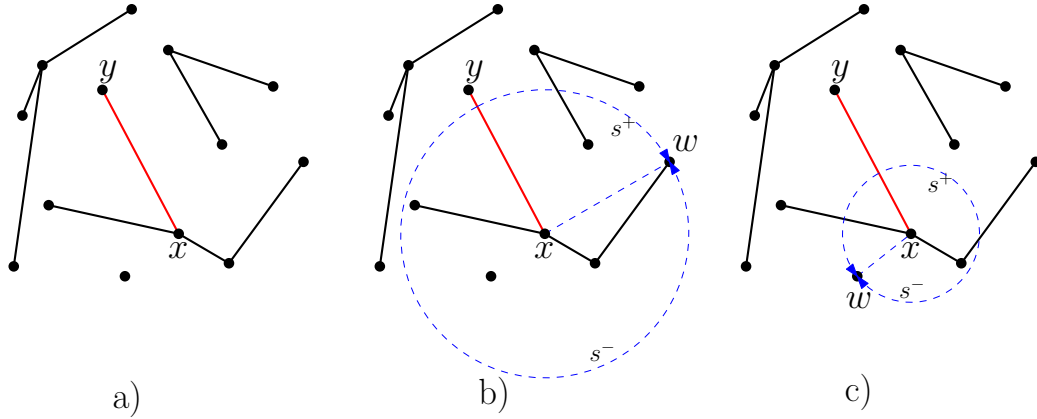


Figura 3.1: Rotación de una arista (azul).

Dada una gráfica geométrica plana  $G = (V, E)$  y una arista  $\overline{xy} \in E$ , si existe  $\overline{xw} \notin E$  tal que no intersecciona ninguna arista de  $G$  y dado un círculo con radio  $r = \min\{\text{long}(\overline{xy}), \text{long}(\overline{xw})\}$  (la más pequeña de las aristas  $\overline{xy}$  o  $\overline{xw}$ ) centrado en  $x$ , se cumple que alguno de los sectores  $s^+$  ó  $s^-$  delimitados

por  $\overline{xy}$  y  $\overline{xw}$  no contienen ni intersectan ninguna arista  $e \in E$  con  $x$  extremo de  $e$  (figura 3.2). A este proceso de mover la arista  $\overline{xy}$  a la arista  $\overline{xw}$  se le llama *rotación de arista*.



**Figura 3.2:** a) Se quiere rotar la arista  $u = \overline{xy}$ . b)  $s^+$  no contiene ni intersecta alguna arista que tiene a  $x$  como extremo pero  $s^-$  si, por lo que sólo se puede rotar  $\overline{xy}$  a  $\overline{xw}$  en dirección de la manecillas del reloj. c) Tanto  $s^+$  como  $s^-$  contienen o intersectan alguna arista que tiene a  $x$  como extremo por lo que no se puede rotar  $\overline{xy}$  a  $\overline{xw}$  en ninguna dirección.

La rotación de aristas en gráficas geométricas planas impone algunas restricciones sobre la idea intuitiva que se mencionó, ya que el ángulo de rotación se ve restringido por aristas adyacentes al pivote, las cuales corresponden a obstáculos que acotan la rotación de la arista, además durante la operación se debe mantener la planaridad de la gráfica, por lo que una arista no puede rotar intersectando otras aristas.

Sea  $V$  un conjunto de puntos en posición general en el plano y sea  $\mathcal{H}(V, k)$  el conjunto de todas las gráficas geométricas planas, definidas sobre el conjunto de vértices  $V$  con  $k$  aristas. La *gráfica de rotación de aristas*  $\mathcal{ERG}(V, k)$  (por sus siglas en inglés “*Edge Rotation Graph*”) se define como la gráfica cuyos vértices corresponden a gráficas de  $\mathcal{H}(V, k)$  y dos vértices son adyacentes si y sólo si es posible convertir las gráficas asociadas a dichos vértices a través de una rotación de arista.

### 3. Resultados

---

#### 3.1. Conexidad

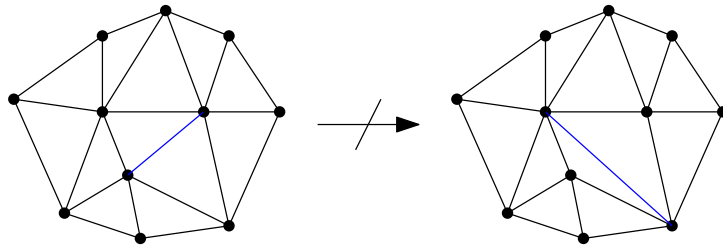
Se quiere encontrar cuales son las condiciones bajo las cuales se cumple que  $\mathcal{ERG}(V, k)$  es conexa.

**Teorema 1.**  $\mathcal{ERG}(V, k)$  con  $k = |E(T(V))|$  (las aristas de una triangulación del conjunto de puntos  $V$ ) no es conexa.

*Demostración.* Primero observemos que  $k = |E(T(V))|$  significa que las gráficas correspondientes a los vértices de  $\mathcal{ERG}(V, k)$ , son gráficas geométricas planas maximales (triangulaciones). Demostraremos que en una gráfica geométrica plana maximal  $G = (V, E)$  con  $G \in \mathcal{ERG}(V, k)$ , no se puede realizar ninguna rotación de arista.

Supongamos que existe una arista  $\overline{xy} \in E$  que puede ser rotada, por la definición sabemos que debe existir otra arista  $\overline{xw} \notin E$  (arista hacia la cual rotaremos a  $\overline{xy}$ ) y además se cumple que  $\forall e \in E, e \cap \overline{xw} = \emptyset$ . Ahora consideremos la gráfica  $H = (V, E')$  con  $E' = E \cup \overline{xw}$ , entonces  $H$  es una gráfica geométrica plana, porque  $\overline{xw}$  no es parte de la gráfica  $G$  y además no cruza ninguna otra arista de  $G$ , por lo que al agregar la arista  $\overline{xw}$  en la gráfica  $G$  construimos una gráfica geométrica plana  $H$  que contiene una arista más que  $G$ , pero este hecho contradice que  $G$  es una gráfica geométrica plana maximal, ya que pudimos agregar una arista más a  $G$  y esta sigue cumpliendo con la propiedad de ser una gráfica geométrica plana. Por lo cual no existe un arista  $\overline{xw} \notin E$  para realizar la rotación.

Por lo tanto  $\mathcal{ERG}(V, k)$  con  $k = |E(T(V))|$  no es conexa (figura 3.3).



**Figura 3.3:** Dos gráficas con el mismo conjunto de vértices  $V$ , con  $|E| = |E(T(V))|$  y que no pueden ser transformadas entre sí usando rotaciones de aristas.

□



Hay que mencionar que si utilizamos la operación de giro de aristas, si es posible transformar una gráfica geométrica plana con  $k = |E(T(V))|$  aristas (una triangulación) en otra gráfica geométrica plana, si ambas están definidas sobre el mismo conjunto de vértices y tienen el mismo número de aristas [21].

Más adelante vamos a demostrar que  $\mathcal{ERG}(V, k)$  es conexa si  $k < |E(T(V))|$ . Para esto necesitamos un par de lemas que nos ayudarán en la demostración.

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica geométrica plana, decimos que  $e$  es una *arista ausente* de  $G$  si  $e \notin E(G)$ .

**Lema 1.** *Dada una gráfica geométrica plana  $G = (V, E)$  con  $|E| < |E(T(V))|$  y una triangulación  $T$  construida al añadir aristas ausentes a  $G$ , siempre es posible colocar una arista ausente  $a \in T$ , en la posición de cualquier arista  $e \in T$  sin alterar la triangulación, utilizando rotaciones de aristas.*

*Demostración.* Sea  $A$  el conjunto de aristas ausentes añadidas a  $G$  para construir  $T$ , sea  $T'$  la gráfica dual de  $T$  y sea  $P$  el camino más corto en  $T'$  entre una cara que contiene a la arista ausente  $a \in A$  y una cara que contiene a la arista  $e \in E$ .

La demostración procede por inducción sobre la longitud del camino  $P$ .

Caso base: La longitud de  $P$  es cero.

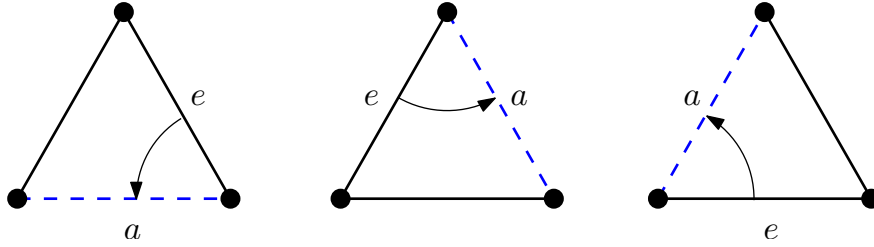
Como la longitud de  $P$  es cero entonces  $a$  y  $e$  pertenecen al mismo triángulo  $t \in T$ . Por la definición de rotación de arista podemos rotar la arista  $e$  hacia la posición de la arista  $a$  (figura 3.4). Esta rotación se puede realizar ya que  $a$  y  $e$  tienen un vértice común al que son adyacentes (por pertenecer al mismo triángulo) y este vértice corresponde al pivote sobre el cual rota la arista  $e$ . Tenemos que  $t \in T$ , por lo que no contiene ni intersecta alguna otra arista que tenga como extremo al vértice común de  $a$  y  $e$  (el pivote), como  $a$  es una arista ausente añadida para construir  $T$  a partir de  $G$  entonces no intersecta ninguna otra arista, por lo que se cumplen todas las condiciones para realizar la rotación de  $e$  hasta la posición de la arista  $a$ . Realizar esta rotación no altera la estructura de la triangulación, es decir, no modifica los triángulos de  $T$ .

Caso inductivo: La longitud de  $P$  es  $l > 0$ .

El camino  $P$  induce una banda de triángulos en  $G$  que conectan a la arista  $a$  con  $e$ . Identificamos la arista  $c$  que corresponde a la arista común entre el primer triángulo (que contienen a la arista  $a$ ) y el siguiente triángulo de la banda. Las aristas  $a$  y  $c$  se encuentran en el mismo triángulo, entonces utilizando el caso base podemos realizar el intercambio de la arista  $a$  por la arista  $c$ , obteniendo como resultado un camino  $P'$  entre  $a$  y  $e$  con longitud

### 3. Resultados

---



**Figura 3.4:** Cambio de la posición de una arista ausente dentro de un triángulo utilizando una rotación de arista.

$l-1$ , entonces aplicando la hipótesis de inducción sobre el camino  $P'$ , sabemos que podemos mover la arista  $a$  hacia la posición de la arista  $e$ .

La demostración nos proporciona un procedimiento para mover la arista  $a$  sobre la banda de triángulos en  $G$ , utilizando las aristas compartidas por los triángulos en la banda para ir cambiando de triángulo y acortar la distancia entre las aristas  $a$  y  $e$ , hasta llegar a un camino de longitud cero, lo que corresponde a llegar al triángulo que contiene a la arista  $e$  (figura 3.5). Por lo tanto siempre podemos cambiar la posición de una arista ausente hacia la posición de cualquier arista dentro de  $T$ .

□

El lema 1 es muy importante ya que nos permite colocar una arista ausente en cualquier lugar de una triangulación de una gráfica geométrica plana, sin alterar la construcción de la triangulación.

**Lema 2.** *Dada una gráfica geométrica plana  $G = (V, E)$  con  $|E| < |E(T(V))|$ , una triangulación  $T$  construida al añadir aristas ausentes a  $G$  y un cuadrilátero convexo  $c$  en  $T$  cuya diagonal es una arista de  $G$ , se puede simular un giro de arista en la diagonal del cuadrilátero, utilizando rotaciones de aristas.*

*Demostración.* Notemos que en un cuadrilátero convexo  $c$  con vértices  $p, q, r, s$  y cuya diagonal  $\overline{pr}$  es una arista ausente añadida a  $G$  para construir la triangulación  $T$ , siempre podemos cambiar dicha arista ausente por la otra diagonal de  $c$  (la arista  $\overline{qs}$ ) ya que las aristas ausentes no son parte de  $G$  (figura 3.6).

Sea  $c$  un cuadrilátero convexo con vértices  $p, q, r, s$ , con  $e \in E$  como su diagonal y una arista ausente  $a$  en el exterior del cuadrilátero. Sin pérdida de generalidad diremos que  $e = \overline{pr}$  y  $a = \overline{ps}$ . Realizando las siguientes rotaciones de aristas, podemos simular un giro de la diagonal de  $c$ .

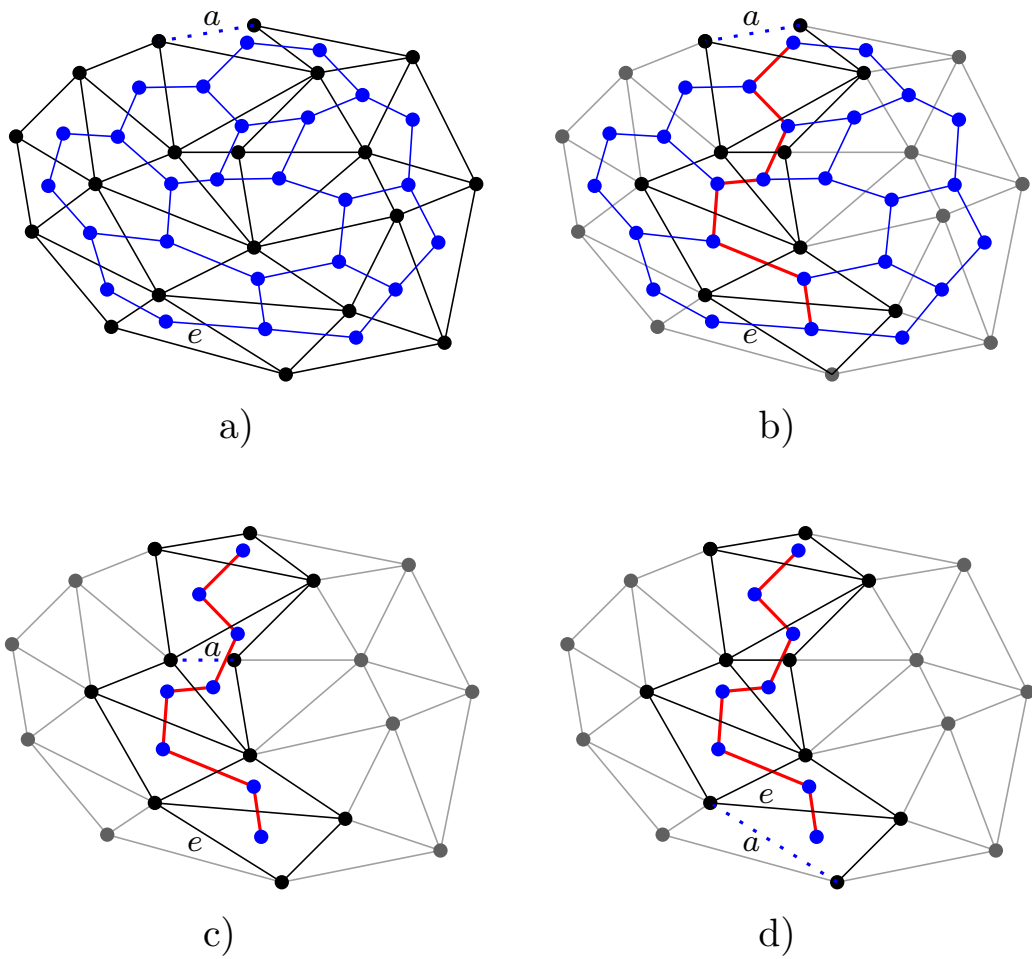


Figura 3.5: a) Gráfica dual de la triangulación con una arista ausente  $a$  y la arista objetivo  $e$ . b) Camino en la gráfica dual entre  $a$  y  $e$ . c) Pasos intermedios al recorrer el camino  $P$  usando rotaciones de aristas. d) Posición final de  $a$  después de recorrer  $P$ .

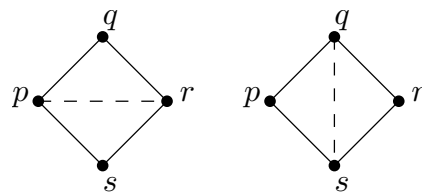
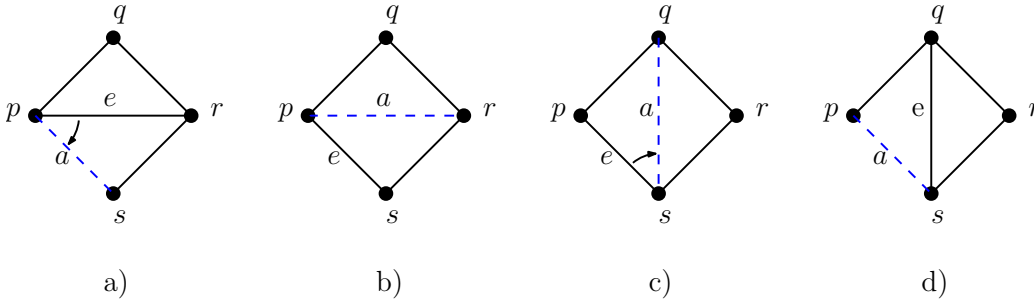


Figura 3.6: Giro de una arista ausente dentro de un cuadrilátero.

### 3. Resultados

- Primero rotamos la arista  $e$  a la posición de la arista  $a$ , obteniendo una arista ausente en el cuadrilátero  $c$  (figura 3.7 a).
- Una vez realizada esta rotación podemos cambiar la arista ausente  $a = \overline{pr}$  por la arista  $\overline{qs}$  (figura 3.7 b).
- Por último rotamos la arista  $e$  hacia  $a = \overline{qs}$  (figura 3.7 c).

Realizando este par de rotaciones de aristas hemos conseguido simular un giro de la diagonal del cuadrilátero  $c$  (figura 3.7 d).



**Figura 3.7:** a) Giro simulado de la arista  $e$  en un cuadrilátero con diagonal y una arista ausente  $a$ . b) Intercambio de la arista ausente  $a$  con la diagonal. c) El giro de la arista ausente  $a$ . d) Reubicación de la arista ausente  $a$ , a su posición original.

□

**Teorema 2.**  $\mathcal{ERG}(V, k)$  es conexa si y sólo si  $k < |E(T(V))|$ .

*Demostración.* Vamos a demostrar que dadas dos gráficas geométricas planas  $G_1 = (V, E_1)$  y  $G_2 = (V, E_2)$ , siempre es posible transformar  $G_1$  en  $G_2$  utilizando rotaciones de aristas si y sólo si  $|E_1| = |E_2| = k < |E(T(V))|$ . En otras palabras, siempre podemos encontrar un camino en  $\mathcal{ERG}(V, k)$  para cualesquiera  $G_1, G_2 \in \mathcal{H}(V, k)$  si y sólo si  $k < |E(T(V))|$ .

Completemos  $G_1$  a una triangulación  $T_1$  añadiendo aristas ausentes a  $G_1$ , de igual manera completemos  $G_2$  a una triangulación  $T_2$  añadiendo aristas ausentes, sabemos que  $T_1$  y  $T_2$  tienen al menos una arista ausente, ya que el número de aristas  $k < |E(T(V))|$  implica que las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  no son gráficas geométricas planas maximales (les falta al menos una arista a cada gráfica para ser maximal). También sabemos que dadas cualesquiera dos triangulaciones sobre el mismo conjunto de vértices, siempre es posible

### 3.2. Diámetro de la gráfica de rotaciones de aristas

---

convertir una triangulación en la otra usando giros de aristas [21]. Entonces vamos a transformar  $T_1$  en  $T_2$  utilizando giros de aristas simulados por medio de rotaciones de aristas. Primero identificamos los giros necesarios para realizar la transformación, una vez determinados los cuadriláteros y el orden en que se realizan los giros, se utiliza el lema 1 para colocar alguna arista ausente en el cuadrilátero donde se debe realizar el giro y con ayuda del lema 2 realizamos el giro, repetimos este procedimiento hasta transformar  $T_1$  en  $T_2$ . Una vez terminada la transformación hay que notar que la nueva  $T_1$  puede diferir de  $T_2$  en la posición de las aristas ausentes, entonces sólo falta colocar las aristas ausentes en la misma posición en ambas triangulaciones, utilizando de nuevo el lema 1 para moverlas y colocarlas en su lugar, por último se remueven las aristas ausentes añadidas, obteniendo la misma gráfica. Con este procedimiento podemos transformar  $G_1$  en  $G_2$  utilizando rotaciones de aristas si y sólo si el número de aristas de  $G_1$  y  $G_2$  es menor que  $|E(T(V))|$ . Esto nos dice que existe un camino entre  $G_1, G_2 \in \mathcal{H}(V, k)$  en  $\mathcal{ERG}(V, k)$  para cualquier par de gráficas  $G_1$  y  $G_2$ . Por lo tanto  $\mathcal{ERG}(V, k)$  es conexa si y sólo si el número de aristas es menor que  $|E(T(V))|$ .  $\square$

### 3.2. Diámetro de la gráfica de rotaciones de aristas

Una de las propiedades estudiadas de  $\mathcal{ERG}(V, k)$  es su diámetro. Se encontró una cota superior para el diámetro de  $O(|V|^2)$  y para el caso en que  $k = |E(T(V))| - c$  con  $c$  una constante, se encontró que la cota es justa.

**Teorema 3.** *El diámetro de  $\mathcal{ERG}(V, k)$  es a lo más  $O(|V|^2)$ .*

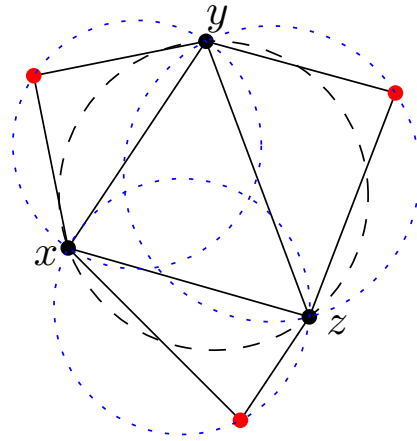
*Demostración.* El procedimiento obtenido en el teorema 2, nos da una forma para convertir una gráfica  $G_1$  en otra gráfica  $G_2$ , primero completando ambas gráficas a una triangulación cualquiera  $T_1$  y  $T_2$  agregando aristas ausentes, después utilizando giros simulados por rotaciones de aristas para convertir  $T_1$  en  $T_2$  y por último colocando las aristas ausentes en su posición final para ser removidas y completar la transformación.

Para determinar la cantidad de rotaciones de aristas realizadas, para convertir una gráfica  $G_1$  en otra gráfica  $G_2$ , después de construir  $T_1$  y  $T_2$  vamos a proporcionar una manera más ordenada para la transformación, convirtiendo ambas triangulaciones en la triangulación de Delaunay, haciendo uso del algoritmo de giro de aristas para su construcción [19].

### 3. Resultados

---

Primero observemos, que dada una triangulación, si existe un triángulo donde todas sus aristas son aristas legales, entonces ese triángulo es un triángulo de Delaunay. Y además cuando este tipo de triángulos aparecen durante la ejecución del algoritmo para la construcción de la triangulación de Delaunay, sus aristas ya no dejan de ser legales, es decir, ya no cambian. Esto es fácil de ver, consideremos un triángulo  $\Delta xyz$  formado por aristas legales, el criterio para determinar si una arista interna  $e$  es ilegal, consiste en tomar el círculo que pasa por un triángulo incidente a  $e$  y verificar si contiene el vértice del otro triángulo que es incidente a  $e$ , entonces si cada una de las aristas del triángulo  $\Delta xyz$  son aristas legales, significa que el círculo que pasa por dicho triángulo no contiene ningún otro vértice de la gráfica, y esto por definición es un triángulo de Delaunay (figura 3.8).

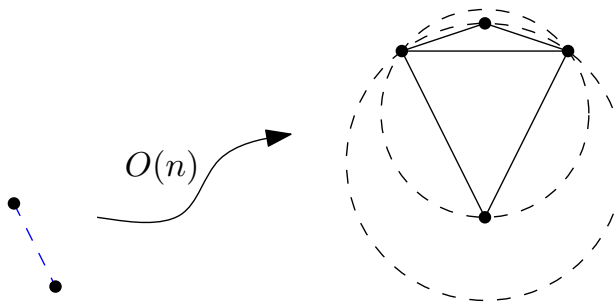


**Figura 3.8:** Tres aristas legales formando un triángulo de Delaunay

Ahora vamos a contar cuantas rotaciones de aristas son necesarias para convertir una triangulación cualquiera en la triangulación de Delaunay utilizando el algoritmo de giros de aristas. Primero hay que localizar una arista ilegal  $e$  dentro de la triangulación y convertirla en una arista legal, para realizarlo es necesario colocar una arista ausente en el cuadrilátero que contiene a  $e$  como diagonal y realizar un giro simulado por rotaciones de aristas. El número de rotaciones utilizadas para colocar alguna arista ausente en el cuadrilátero correspondiente, es igual a la longitud del camino más corto en la gráfica dual entre la cara que contiene la arista ausente y la cara que contiene a  $e$ , esta longitud en el peor de los casos es  $O(n)$  cuando el camino esta formado por todas las caras de la gráfica dual (figura 3.9). Una vez colo-

### 3.2. Diámetro de la gráfica de rotaciones de aristas

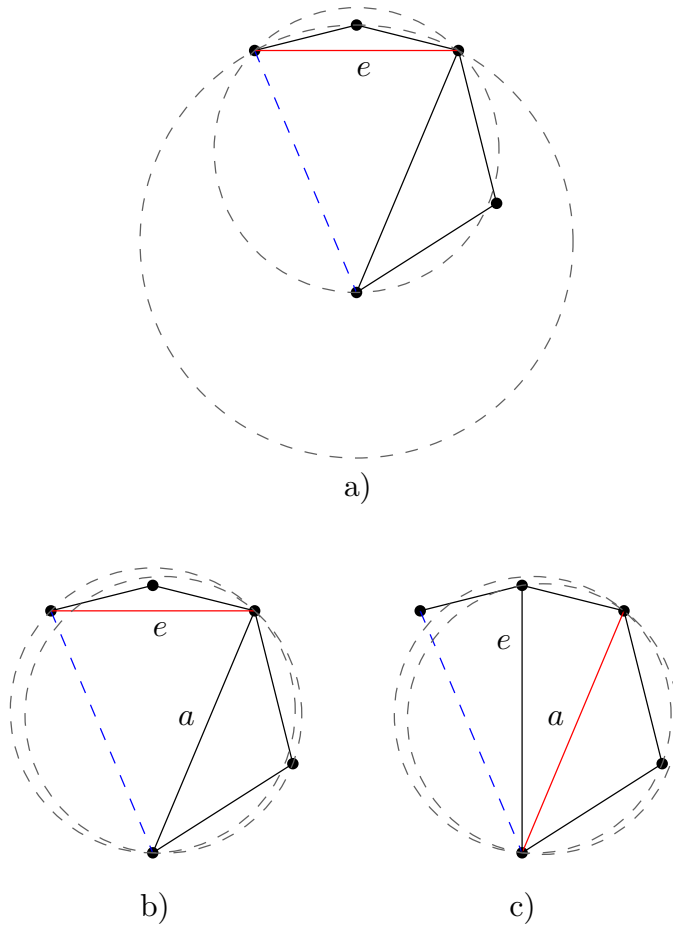
cada la arista ausente en el cuadrilátero, realizando un número constante de rotaciones podemos convertir  $e$  en una arista legal utilizando el lema 2, éste cambio puede convertir a las aristas legales que forman los triángulos adyacentes a  $e$  en aristas ilegales (figura 3.10). Si las aristas de uno de los triángulos adyacentes a  $e$  son legales, entonces dicho triángulo es un triángulo de Delaunay. Si ninguno de los triángulos adyacentes a  $e$  es un triángulo de Delaunay entonces hay una arista ilegal  $e'$  en alguno de los triángulos; podemos convertir  $e'$  en una arista legal utilizando un número constante de rotaciones de aristas, ya que la arista ausente que se utilizó para volver la arista  $e$  en legal, se encuentra a distancia constante de  $e'$ . Podemos repetir este procedimiento de convertir en legal las aristas ilegales de los triángulos nuevos que vamos obteniendo, hasta que ya no sea posible; en cuyo caso hemos obtenido un triángulo de Delaunay. Entonces para obtener un triángulo de Delaunay  $t_i$  es necesario realizar  $O(n)$  rotaciones de aristas para colocar una arista ausente en posición para convertir una arista ilegal en legal, y el número de rotaciones de aristas utilizadas para propagar la conversión de aristas ilegales y obtener el triángulo  $t_i$  lo vamos a denotar como  $k_i$ .



**Figura 3.9:** Mover una arista ausente hasta la posición de un cuadrilátero con una arista ilegal cuesta a lo más  $O(n)$  rotaciones de arista (que corresponde a recorrer todas las caras de la triangulación).

### 3. Resultados

---



**Figura 3.10:** a) La arista  $e$  es una arista ilegal. b) La arista  $a$  es una arista legal. c) Al convertir la arista  $e$  en legal,  $a$  se convierte en ilegal.

Contando el número de rotaciones de aristas utilizadas para construir la triangulación de Delaunay, obtenemos la siguiente suma:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{\#\Delta's} O(n) + k_i \\
 = & \sum_{i=1}^{\#\Delta's} O(n) + \sum_{i=1}^{\#\Delta's} k_i
 \end{aligned}$$

Sabemos que en una triangulación  $\#\Delta's = O(n)$  (el número de triángulos



### 3.2. Diámetro de la gráfica de rotaciones de aristas

---

es lineal), entonces tenemos:

$$= O(n) * O(n) + \sum_{i=1}^{\#\Delta's} k_i$$

Además sabemos que el algoritmo de giros para la construcción de la triangulación de Delaunay realiza  $O(n^2)$  giros de aristas, es decir, cambia a lo más  $O(n^2)$  aristas ilegales (lo que corresponde a explorar las  $O(n^2)$  posibles parejas de vértices). El número  $k_i$  nos dice la cantidad de rotaciones que hay que realizar para obtener el triángulo de Delaunay  $t_i$ , pero como el algoritmo realiza a lo más  $O(n^2)$  giros para construir la triangulación de Delaunay, entonces tenemos que para obtener todos los  $t_i$  realizamos  $O(n^2)$  giros de aristas, por lo tanto  $\sum_{i=1}^{\#\Delta's} k_i = O(n^2)$ . De todo lo anterior tenemos que el número de rotaciones de aristas necesarias son:

$$= O(n) * O(n) + O(n^2) = O(n^2)$$

□

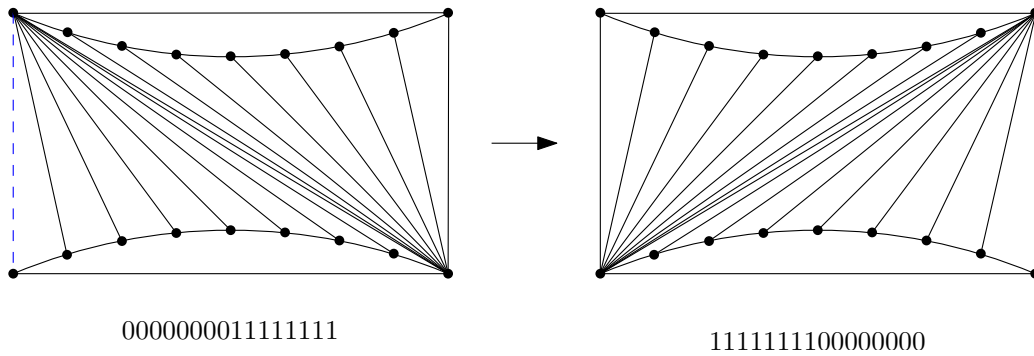
**Teorema 4.** *La cota del diámetro de  $\mathcal{ERG}(V, k)$  es justa cuando  $k = |E(T(V))| - c$ , para  $c$  una constante.*

*Demostración.* Para demostrar que la cota es justa cuando  $k = |E(T(V))| - c$ , vamos a analizar el ejemplo que se utiliza para demostrar que el diámetro de la gráfica de giros es  $\Omega(n^2)$ , [16].

El ejemplo consiste en construir un rectángulo en cuyo interior se forma una curva convexa con  $n$  vértices que conecta las esquinas superiores del rectángulo y una curva cóncava con  $n$  vértices que conecta las esquinas inferiores del rectángulo. Estas curvas tiene la peculiaridad de que una arista que une un vértice de la cadena superior  $U$  con un vértice de la cadena inferior  $L$  no cruza a ninguna de las dos cadenas. Esta configuración nos da un conjunto  $S$  de  $2n$  vértices tal que cualquier triangulación de  $S$  contiene necesariamente ambas cadenas ( $U$  y  $L$ ). Vamos a triangular esta configuración ignorando las regiones convexas delimitadas por las cadenas y concentrándonos sólo en los triángulos que se encuentran definidos entre ambas cadenas. Una triangulación del polígono entre  $U$  y  $L$  consiste de  $n - 1$  triángulos con dos vértices en  $L$  y uno en  $U$ , los cuales etiquetaremos como “0” y  $n - 1$  triángulos con dos vértices en  $U$  y uno en  $L$ , etiquetados como “1”. Si leemos las etiquetas de los triángulos de izquierda a derecha tenemos una secuencia ordenada de ceros

### 3. Resultados

y unos, esta secuencia nos proporciona una biyección entre el conjunto de triangulaciones del polígono definido entre  $U$  y  $L$  y el conjunto de secuencias binarias formadas por  $n - 1$  ceros y  $n - 1$  unos. Un giro dentro de esta configuración es posible si la arista se encuentra entre dos triángulos con etiquetas diferentes (un triángulo con dos vértices en  $U$  y uno en  $L$  y un triángulo con dos vértices en  $L$  y uno en  $U$ ), los cuales forman cuadrilátero convexo y el giro corresponde a invertir las etiquetas de los triángulos que comparten la arista. Por lo que transformar una triangulación codificada como  $00\dots,011\dots,1$  ( $n - 1$  ceros al inicio y  $n - 1$  unos al final) a otra codificada como  $11\dots,100\dots,0$  ( $n - 1$  unos al inicio y  $n - 1$  ceros al final) requiere  $(n - 1)^2$  intercambios de etiquetas (correspondientes a mover todos los triángulos etiquetados con uno hacia la izquierda), generando  $(n - 1)^2$  giros de aristas (figura 3.11).

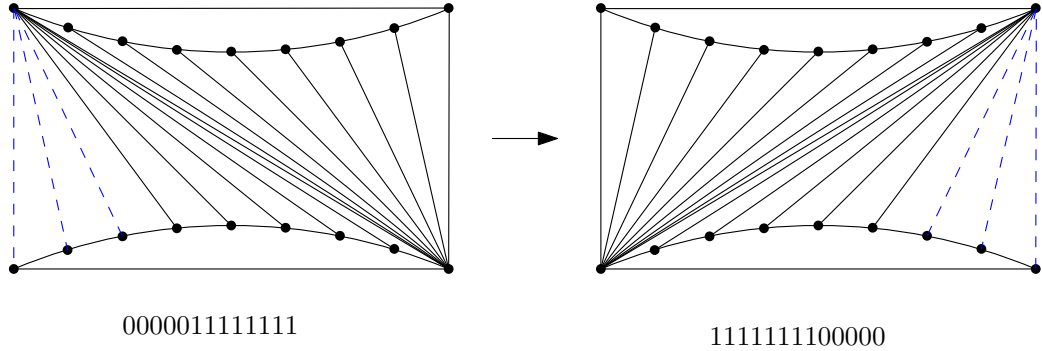


**Figura 3.11:** Dos gráficas donde se necesita  $O(n^2)$  giros de aristas para una gráfica en la otra.

Esta construcción requiere  $\Omega(n^2)$  giros de aristas para convertir una gráfica en otra. Por lo tanto al simular los giros por rotaciones de aristas, es necesario realizar  $\Omega(n^2)$  rotaciones. Ahora notemos que sucede si a esta gráfica se le quita un número constante  $c$  de aristas, lo que obtenemos son cadenas de longitud  $2n - c$ , y dadas dos constantes  $z$  y  $o$  tal que  $c = z + o$ , pasar de la cadena  $00\dots,011\dots,1$  con  $n - z$  ceros y  $n - o$  unos a la cadena  $11\dots,100\dots,0$  con  $n - z$  ceros y  $n - o$  unos (figura 3.12), sigue generando un número cuadrático de intercambios, ya que si queremos mover un triángulo etiquetado con uno hacia la izquierda tenemos que intercambiar dicho triángulo con todos los  $n - z$  triángulos etiquetados con cero y si realizamos esto para los  $n - o$  unos, lo que tenemos nos da  $(n - o)(n - z) = n^2 - n(z + o) + oz$  intercambios, los cuales son un número cuadrático de operaciones. Esto nos dice

### 3.2. Diámetro de la gráfica de rotaciones de aristas

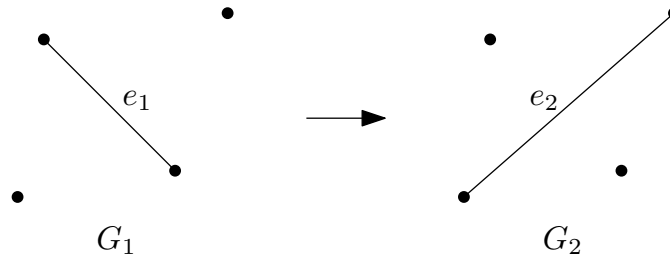
que la cota para el diámetro de la gráfica de rotaciones de aristas cuando  $k = |E(T(V))| - c$  para  $c$  una constante es  $\Omega(n^2)$ .



**Figura 3.12:** Dos gráficas con un número constante de aristas ausentes, donde se necesitan  $O(n^2)$  rotaciones de aristas para una convertir una gráfica en la otra.

□

También se obtuvo que  $\mathcal{ER}\mathcal{G}(V, 1)$  tiene un diámetro de dos, es decir, para cualesquiera  $G_1, G_2 \in \mathcal{ER}\mathcal{G}(V, 1)$  son necesarias a lo más dos rotaciones de aristas, para convertir  $G_1$  en  $G_2$ . Esto es fácil de ver ya que los nodos de  $\mathcal{ER}\mathcal{G}(V, 1)$  son gráficas con una sola arista, entonces para transformar una gráfica  $G_1$  con una arista  $e_1$  a otra gráfica  $G_2$  con una arista  $e_2$  (figura 3.13), primero rotamos la arista  $e_1$  moviendo el extremo libre hacia uno de los extremos que conforman la arista  $e_2$ , después se realiza otra rotación de la nueva arista  $e_1$  tomando el otro extremo como pivote y rotando el extremo libre hacia el otro extremo de de la arista  $e_2$  (figura 3.14).



**Figura 3.13:** Transformación entre dos gráficas geométricas con una arista.

### 3. Resultados

---

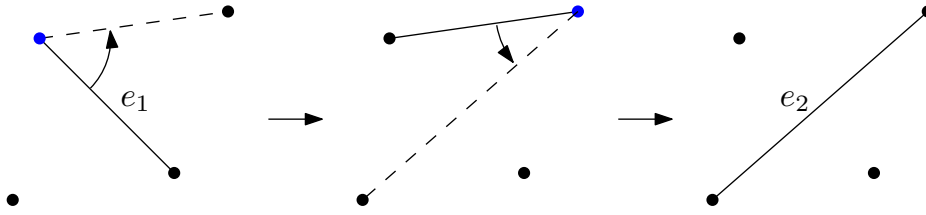


Figura 3.14: Pasos para la transformación entre dos gráficas geométricas con una arista.

### 3.3. Hamiltonicidad

Se encontró que  $\mathcal{ERG}(V, 1)$  con  $V$  un conjunto de puntos en posición general en el plano y con sólo una arista, es Hamiltoniana. Además se presenta un algoritmo para construir el ciclo Hamiltoniano correspondiente.

**Teorema 5.**  $\mathcal{ERG}(V, 1)$  es Hamiltoniana.

*Demostración.* Los nodos de  $\mathcal{ERG}(V, 1)$  corresponden a gráficas geométricas planas con una sola arista. Si superponemos todos estos nodos sobre una misma gráfica, lo que obtenemos es la gráfica completa del conjunto de vértices  $V$ . Entonces si proporcionamos un algoritmo para “trazar” todas las aristas de la gráfica completa, por medio de una secuencia de rotaciones de aristas, con esto obtenemos un ciclo Hamiltoniano para  $\mathcal{ERG}(V, 1)$ .

Ahora observemos que dada una gráfica  $G \in \mathcal{ERG}(V, 1)$ , si tomamos la arista que la conforma y fijando uno de sus vértices trazamos todas las aristas entre el vértice fijo y el resto de los vértices de la gráfica, obtenemos un abanico de aristas entre las cuales podemos movernos de una a otra utilizando rotaciones de aristas (figura 3.15), esto nos genera un camino en  $\mathcal{ERG}(V, 1)$ .

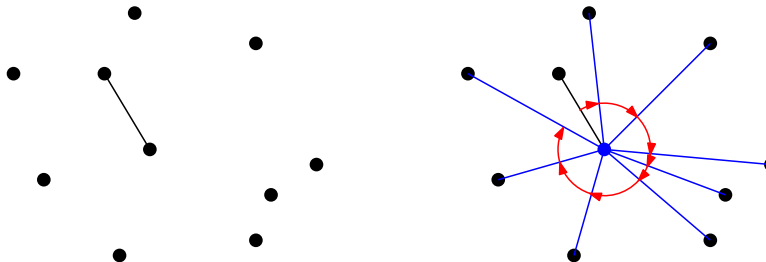


Figura 3.15: Abanico de aristas generado por rotaciones de una arista.

### 3.4. Otras gráficas geométricas planas

---

Entonces, dada una gráfica  $G \in \mathcal{ERG}(V, 1)$  con  $|V| = n$ , el algoritmo inicia ordenando los vértices respecto a su coordenada  $x$ , obteniendo una secuencia  $v_1, v_2, \dots, v_n$  (figura 3.16 a) y recorriendo los vértices en este orden se realiza lo siguiente:

1. Al vértice  $v_1$  se le une con los vértices  $v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_2$  añadiendo las aristas en orden decreciente, es decir, se trazan las aristas entre  $v_1$  y todos los demás vértices, excepto la arista que une a  $v_1$  con el último vértice  $v_n$ . Este abanico de aristas genera un camino entre las gráficas que tienen sólo una arista y tienen como extremo común al vértice  $v_1$  (figura 3.16 b).
2. Para los vértices  $v_i$  tal que  $v_1 < v_i < v_n$ , se trazan las aristas  $\overline{v_i v_j}$  en orden decreciente para  $i < j \leq n$ , es decir, se trazan todas las aristas en orden decreciente entre  $v_i$  y todos los vértices mayores (figura 3.16 c-g).
3. Por último para  $v_n$  se traza la única arista que falta (la que no se trazo en el primer paso), la cual corresponde a la arista  $\overline{v_1 v_n}$  (figura 3.16 h).

Al terminar el algoritmo lo que se obtiene es la construcción de la gráfica completa del conjunto de puntos  $V$ , ya que cada vértice se une con todos los demás vértices. Hay que notar que para cada vértice  $v_i$ , la última arista que se agrega es la arista  $\overline{v_i v_{i+1}}$ , la cual nos proporciona un enlace entre un vértice y el siguiente, este enlace nos permite juntar los caminos que se construyen en cada paso y con la última arista que agregamos cerramos el camino, uniendo el extremo final del camino con el inicial formando un ciclo (figura 3.16 i). Por lo tanto si recorremos en orden las aristas añadidas por el algoritmo, obtenemos un ciclo Hamiltoniano para  $\mathcal{ERG}(V, 1)$ .  $\square$

### 3.4. Otras gráficas geométricas planas

Otras gráficas sobre las cuales se estudió la gráfica de rotaciones de aristas son: las gráficas geométricas planas arista etiquetadas y las gráficas geométricas planas dirigidas. Donde se quiere determinar si la gráfica de rotaciones de aristas definida en gráficas geométricas planas arista etiquetadas y en gráficas geométricas planas dirigidas, es conexa.

### 3. Resultados

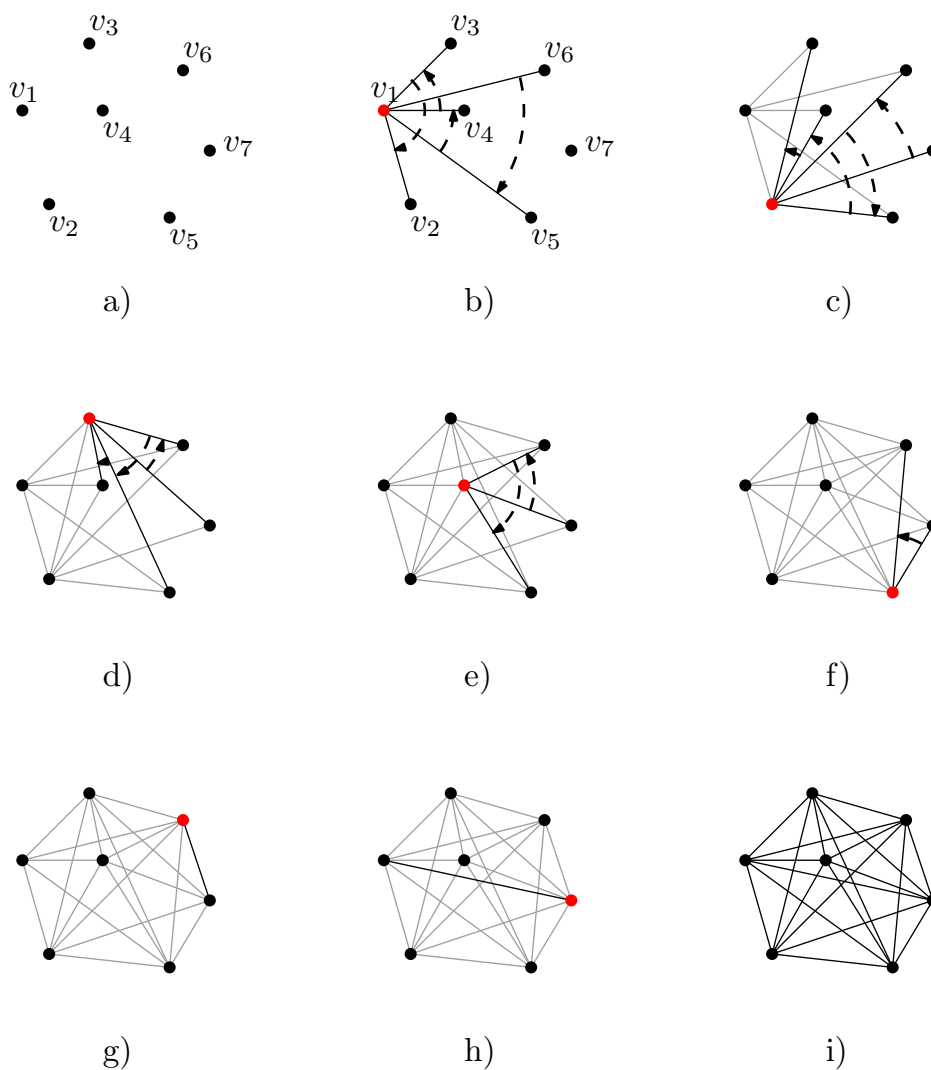


Figura 3.16: Construcción de un ciclo Hamiltoniano para  $\mathcal{ER}\mathcal{G}(V, 1)$  con  $|V| = 7$ .

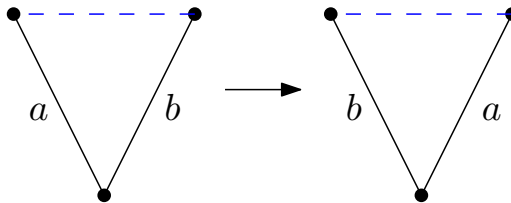
#### 3.4.1. Gráficas geométricas planas arista etiquetadas

Vamos a denotar  $\mathcal{ER}\mathcal{L}\mathcal{G}(V, k)$  como la gráfica de rotaciones de aristas definida en gráficas geométricas planas arista etiquetadas. Entonces, dado un conjunto  $V$  de puntos en posición general en el plano y dos gráficas geométricas planas  $G_1 = (V, E_1)$  y  $G_2 = (V, E_2)$  con  $|E_1| = |E_2| = k$  y con etiquetas en sus aristas, se quiere determinar si la  $\mathcal{ER}\mathcal{L}\mathcal{G}(V, k)$  es conexa, es

### 3.4. Otras gráficas geométricas planas

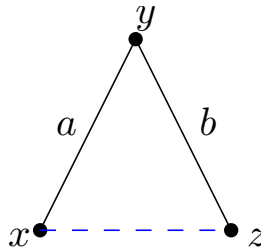
decir, si siempre es posible transformar  $G_1$  en  $G_2$  usando rotaciones de aristas, conservando la asignación de las etiquetas. Para demostrar esto, vamos a requerir un par de lemas que se presentan a continuación.

**Lema 3.** *Dado un triángulo con dos aristas etiquetadas y con una arista ausente, siempre se puede intercambiar la posición de las aristas etiquetadas usando rotaciones de aristas (figura 3.17).*



**Figura 3.17:** Intercambio de aristas etiquetadas en un triángulo con una arista ausente.

*Demostración.* Sea  $t$  un triángulo con vértices  $x, y, z$  formado por dos aristas etiquetadas y una arista ausente. Sin pérdida de generalidad digamos que la arista  $\overline{xy}$  tiene asignada la etiqueta  $a$ , la arista  $\overline{yz}$  tiene asignada la etiqueta  $b$  y la arista  $\overline{xz}$  es la arista ausente (figura 3.18).



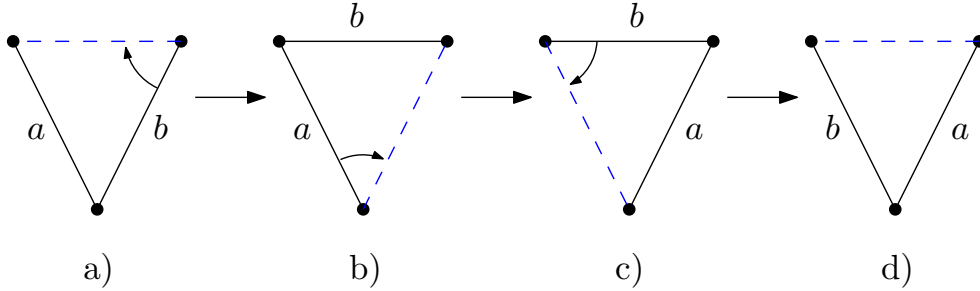
**Figura 3.18:** Triángulo con aristas etiquetadas y una arista ausente.

Realizando la siguiente secuencia de rotaciones de aristas, podemos efectuar el intercambio de las aristas.

- Rotamos la arista  $b$  hacia la posición de la arista ausente en el triángulo (figura 3.19 a).
- Ahora rotamos la arista  $a$  hacia la nueva posición de la arista ausente, que corresponde a la posición inicial donde se encontraba la arista  $b$  (figura 3.19 b).

### 3. Resultados

- Por último rotamos de nuevo la arista  $b$  hacia la posición donde se encuentra la arista ausente, que corresponde a la posición inicial donde se encontraba  $a$  (figura 3.19 c).



**Figura 3.19:** a) Queremos intercambiar la aristas  $a$  con la arista  $b$ . b) Rotamos la arista  $b$  dentro del triángulo. c) Rotamos la arista  $a$  dentro del triángulo. d) Se ha realizado el intercambio entre  $a$  y  $b$ .

Al realizar estos pasos hemos intercambiado la posición de las aristas etiquetadas  $a$  y  $b$  dentro del triángulo (figura 3.19 d). Por lo que dado un triángulo con dos aristas etiquetadas y una arista ausente, siempre se pueden intercambiar las etiquetas de las aristas.  $\square$

**Lema 4.** *Dada una gráfica geométrica plana con etiquetas  $G = (V, E)$  con  $|E| < |E(T(V))|$  y una triangulación  $T$  construida al añadir aristas ausentes a  $G$ , siempre se puede intercambiar cualesquiera dos aristas de  $G$ , sin modificar las etiquetas de las demás aristas.*

*Demostración.* Sea  $T'$  la gráfica dual de  $T$ , sea  $e, e' \in E(G)$  las aristas que se quieren intercambiar y sea  $P$  el camino más corto en  $T'$  entre la cara que contiene la arista  $e$  y la cara que contiene la arista  $e'$ .

La demostración procede por inducción sobre la longitud del camino  $P$ .

Caso base: La longitud de  $P$  es cero.

Como la longitud de  $P$  es cero entonces  $e$  y  $e'$  se encuentran en el mismo triángulo  $t \in T$ . Si  $t$  contiene una arista ausente, entonces por el lema 3 terminamos y podemos realizar el intercambio. Si el triángulo no tiene una arista ausente, entonces usando el lema 1 podemos mover alguna arista ausente al triángulo  $t$ , una vez ubicada la arista ausente en  $t$  podemos utilizar el lema 3 y realizar el intercambio de las aristas. Por último para garantizar que las

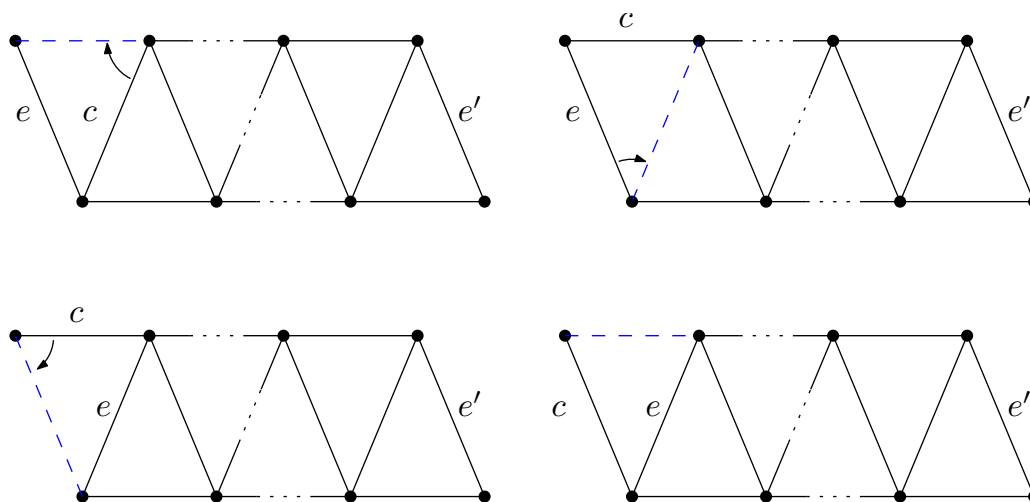


### 3.4. Otras gráficas geométricas planas

únicas etiquetas que se cambian son las de  $e$  y  $e'$  hay que regresar la arista ausente a su posición inicial, atravesando de manera inversa el camino que recorrió, deshaciendo las rotaciones que haya realizado durante el recorrido, restaurando su posición a todas aquellas aristas por las que paso.

Caso inductivo: La longitud de  $P$  es  $l > 0$ .

Cuando el camino entre  $e$  y  $e'$  tiene longitud  $l$ , identificamos a la primera arista  $c$  que comparten los triángulos en la banda de triángulos determinada por el camino  $p$  y realizamos un intercambio entre  $e$  y  $c$ . Podemos realizar este intercambio sin modificar la triangulación ni la asignación de las etiquetas de las aristas utilizando el caso base, entonces lo que nos queda es un camino  $P'$  entre  $e$  y  $e'$  de longitud  $l - 1$  y por hipótesis de inducción podemos intercambiar la arista  $e$  con la arista  $e'$  sin modificar la triangulación, ni la asignación de las etiquetas. Por último utilizando una vez más el caso base, intercambiamos  $e'$  con  $c$  que se encuentra en la posición inicial de  $e$  y con esto se ha intercambiado la posición de  $e$  con la de  $e'$  (figura 3.20).



**Figura 3.20:** Intercambio de dos aristas etiquetadas  $e$  y  $e'$  en una banda de triángulos.

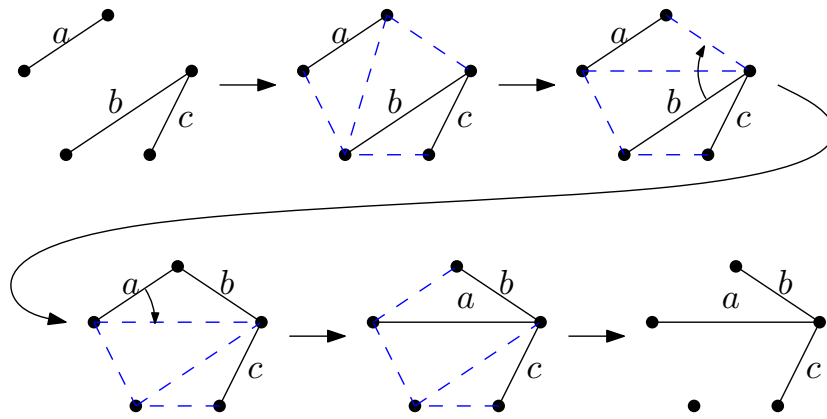
Por lo tanto podemos intercambiar la posición de cualesquiera dos aristas de  $G$ , sin modificar las etiquetas del resto de las aristas y sin modificar la triangulación.  $\square$

**Teorema 6.**  $\mathcal{ERLG}(V, k)$  con  $k < |E(T(V))|$  definida para gráficas geométricas planas con etiquetas en las aristas es conexa.

### 3. Resultados

*Demostración.* Sea  $V$  un conjunto de puntos en posición general en el plano, sea  $G_1 = (V, E_1)$  y  $G_2 = (V, E_2)$  dos gráficas geométricas planas con etiquetas en las aristas, con  $|E_1| = |E_2| = k < |E(T(V))|$ , por demostrar que siempre se puede transformar  $G_1$  en  $G_2$  utilizando rotaciones de aristas.

La demostración del teorema 2 nos proporciona un esquema para transformar  $G_1$  en  $G_2$  si no se considera la asignación de las etiquetas. Entonces, utilizando este esquema transformamos a  $G_1$  (sin considerar la asignación de sus etiquetas) en una gráfica  $G'_2$  que es una gráfica con aristas en la misma posición que las aristas de  $G_2$ , pero con diferencias en la asignación sus etiquetas. Entonces falta reubicar la posición de las etiquetas de las aristas de  $G'_2$  para que sea igual a  $G_2$ , esto se realiza utilizando el lema 4 para intercambiar la posición de cualesquiera dos aristas y colocarlas en la posición que le corresponde, realizando estos intercambios para cada arista de  $G'_2$  que se encuentre fuera de lugar (figura 3.21).



**Figura 3.21:** Conversión de dos gráficas geométricas planas etiquetadas.

Por lo tanto, al aplicar el teorema 2 y el lema 4 podemos transformar cualquier gráfica geométrica plana con etiquetas en las aristas en otra. Por lo tanto  $\mathcal{ERLG}(V, k)$  con  $k < |E(T(V))|$  definida para gráficas geométricas planas arista etiquetadas es conexa.  $\square$

#### 3.4.2. Gráficas geométricas planas dirigidas

Denotemos a  $\mathcal{ERDG}(V, k)$  como la gráfica de rotaciones de aristas definida en gráficas geométricas planas dirigidas. Entonces, dado un conjunto  $V$

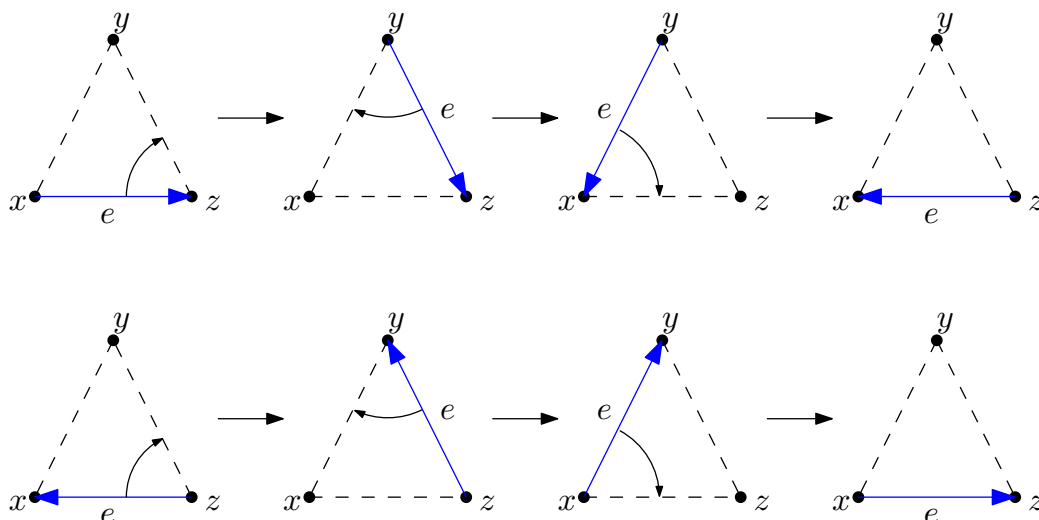
### 3.4. Otras gráficas geométricas planas

de puntos en posición general en el plano y dos gráficas geométricas planas dirigidas  $G_1 = (V, E_1)$  y  $G_2 = (V, E_2)$  con  $|E_1| = |E_2| = k$ , se quiere determinar si la  $\mathcal{ERDG}(V, k)$  es conexa, es decir, si siempre es posible transformar  $G_1$  en  $G_2$  usando rotaciones de aristas, manteniendo la orientación de sus etiquetas.

**Lema 5.** *Dada una gráfica geométrica plana dirigida  $G = (V, E)$  con  $|E| < |E(T(V))|$  y una triangulación  $T$  construida al añadir aristas ausentes a  $G$ , siempre se puede invertir la dirección de una arista de  $G$ , sin modificar la orientación de las demás aristas.*

*Demostración.* Sea  $e$  la arista de  $G$  que se quiere rotar, sea  $t$  un triángulo de  $T$  con vértices  $x, y, z$  tal que contiene a la arista  $e$ . De aquí se derivan algunos casos en la forma en la que esta determinado el triángulo  $t$ .

Si el triángulo  $t$  esta conformado por dos aristas ausentes, sin perdida de generalidad diremos que  $e = \overline{xz}$  y lo que queremos es invertir su dirección para obtener  $e = \overline{zx}$ . Primero rotamos la arista  $\overline{xz}$  hacia la arista  $\overline{yz}$ , luego se realiza una rotación hacia la arista  $\overline{yx}$  y por último se rota hacia la arista  $\overline{zx}$ . Entonces realizando esta sucesión de rotaciones de aristas obtenemos el resultado deseado. El caso donde  $e = \overline{zx}$  y se quiere invertir a  $e = \overline{xz}$  es análogo (figura 3.22).



**Figura 3.22:** Inversión de la orientación de una arista en un triángulo con dos aristas ausentes.

### 3. Resultados

---

Si el triángulo  $t$  tiene sólo una arista ausente y otra arista dirigida  $e'$ . De aquí tenemos varios casos:

- Si  $e = \overline{xz}$ ,  $e' = \overline{yx}$  y la arista ausente  $a = \overline{yz}$ . Primero se rota  $\overline{xz}$  a  $\overline{yz}$ , luego se rota  $\overline{yx}$  hacia  $\overline{zx}$  y por ultimo se rota  $\overline{yz}$  hacia  $\overline{yx}$  (figura 3.23 a).
- Si  $e = \overline{xz}$ ,  $e' = \overline{xy}$  y la arista ausente  $a = \overline{yz}$ . Primero se rota  $\overline{xy}$  a  $\overline{zy}$ , luego se rota  $\overline{xz}$  hacia  $\overline{xy}$  y por ultimo se rota  $\overline{zy}$  hacia  $\overline{zx}$  (figura 3.23 b).
- Si  $e = \overline{zx}$ ,  $e' = \overline{yx}$  y la arista ausente  $a = \overline{yz}$ . Primero se rota  $\overline{yx}$  a  $\overline{yz}$ , luego se rota  $\overline{zx}$  hacia  $\overline{yx}$  y por ultimo se rota  $\overline{yz}$  hacia  $\overline{xz}$  (figura 3.23 b).
- Si  $e = \overline{zx}$ ,  $e' = \overline{xy}$  y la arista ausente  $a = \overline{yz}$ . Primero se rota  $\overline{xz}$  a  $\overline{yz}$ , luego se rota  $\overline{yx}$  hacia  $\overline{zx}$  y por ultimo se rota  $\overline{yz}$  hacia  $\overline{yx}$  (figura 3.23 c).

Con esto tenemos una sucesión de rotaciones de aristas que nos permiten, invertir la orientación de las arista de una gráfica geométrica plana orientada. Sólo resta hacer la observación de que si los triángulos que contienen a la arista  $e$  no contienen una arista ausente, entonces podemos utilizar el lema 1 para colocar una arista ausente en  $t$  realizar el procedimiento anterior y regresar la arista ausente a su lugar.

□

**Teorema 7.**  $\mathcal{ERDG}(V, k)$  con  $k < |E(T(V))|$  definida para gráficas geométricas planas dirigidas es conexa.

*Demostración.* Hay que demostrar que dado un conjunto  $V$  de puntos en posición general en el plano y dos gráficas geométricas planas dirigidas  $G_1 = (V, E_1)$  y  $G_2 = (V, E_2)$ , tal que  $|E_1| = |E_2| = k < |E(T(V))|$ , siempre podemos transformar  $G_1$  en  $G_2$  utilizando rotaciones de aristas.

Retomando de nuevo el teorema 2 tenemos un método que nos permite transformar entre si cualesquiera dos gráficas geométricas planas. Entonces utilizando dicho teorema podemos transformar una gráfica  $G_1$  en otra gráfica  $G_2$  sin considerar la orientación de las aristas de las gráficas. Y por ultimo hay que invertir la orientación de aquellas aristas en las que difieren utilizando el lema 5.

### 3.4. Otras gráficas geométricas planas

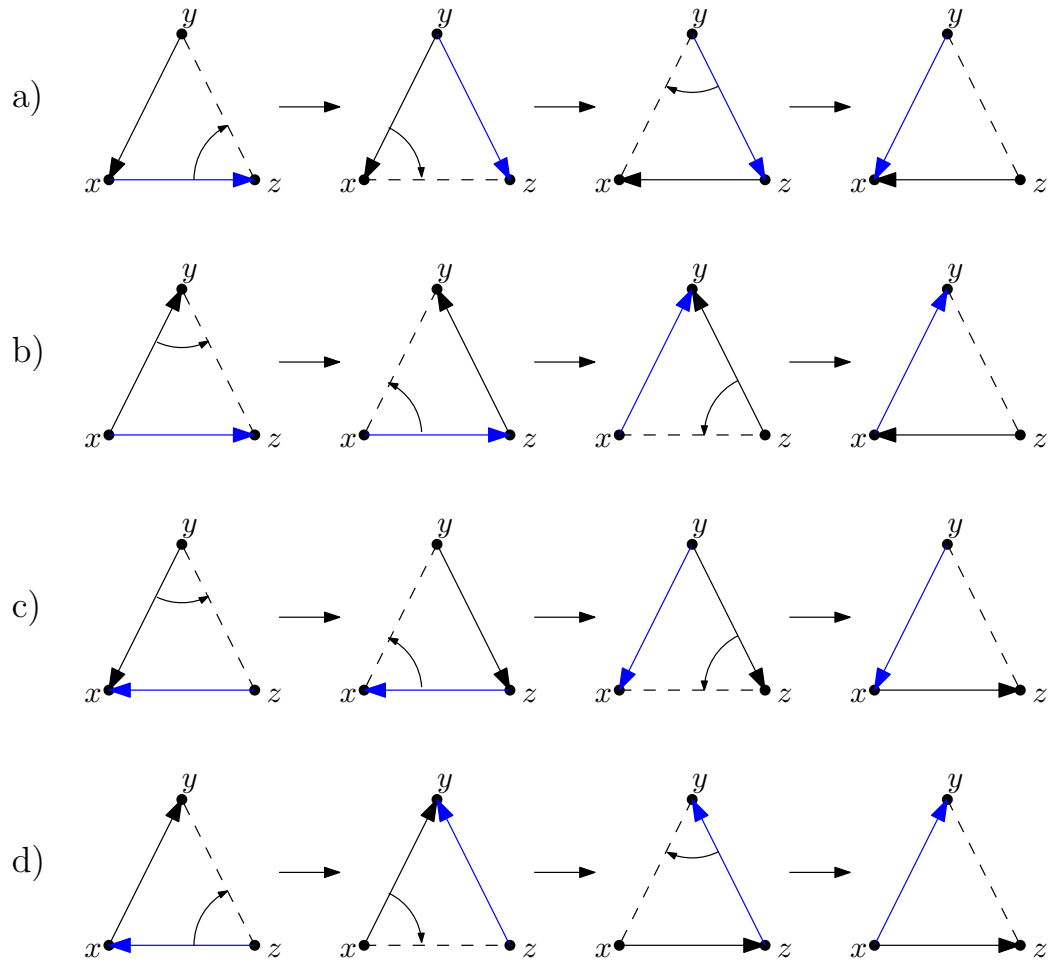


Figura 3.23: Inversión de la orientación de una arista en un triángulo.

Por lo que siempre podemos transformar una gráfica geométrica plana dirigida  $G_1$  en otra gráfica geométrica plana dirigida  $G_2$ . Por lo tanto  $\mathcal{ERDG}(V, k)$  con  $k < |E(T(V))|$  definida para gráficas geométricas planas dirigidas es conexa.

□

# Conclusiones y trabajo futuro

---

Durante el desarrollo de este trabajo surgieron algunos problemas que solo pudieron ser resueltos parcialmente, así como ideas para algunas variantes en el problema. A continuación se presentan dichas ideas, que se espera servirán como motivación para el futuro estudio de este tema.

Durante el desarrollo de este trabajo surgieron algunos problemas que sólo pudieron ser resueltos de manera parcial, así como ideas para algunas variantes en la definición de rotación de arista. A continuación se presentan los problemas que quedaron sin solución completa y se espera sirvan como motivación para el futuro estudio de este tema.

## 4.1. Problemas abiertos

- Probar que la gráfica de rotaciones de aristas, tiene un ciclo Hamiltoniano cuando  $1 < k < |E(T(V))|$ .

Para obtener este resultado se intentó generalizar el algoritmo que encuentra un ciclo Hamiltoniano en la gráfica de rotaciones de aristas con una sola arista. Se analizó el caso donde las gráficas cuentan con dos aristas  $e_1$  y  $e_2$ , fijando una de las aristas, digamos  $e_1$  y obteniendo con  $e_2$  un camino Hamiltoniano que recorra todas las aristas posibles de la gráfica sin considerar la arista  $e_1$ , utilizando el algoritmo para encontrar el ciclo Hamiltoniano en gráficas con una sola arista; una vez encontrado dicho camino se deja fija la arista  $e_2$  un momento y se rota la arista  $e_1$  hacia otra posición y se prosigue a construir un camino Hamiltoniano con  $e_2$  sobre todas las aristas, sin considerar la posición anterior de  $e_1$  ni su actual posición, repitiendo este proceso hasta encontrar un ciclo Hamiltoniano de la gráfica.

Uno de los problemas para realizar con éxito esta generalización, radica en determinar como iniciar y terminar la construcción de los caminos Hamiltonianos intermedios, para que entre cada cambio de posición de la arista fija, se garantice que ya no se repitan configuraciones de la gráfica obtenidas anteriormente y que además los caminos puedan conectarse entre si de forma continua sin que se bloquee su construcción.

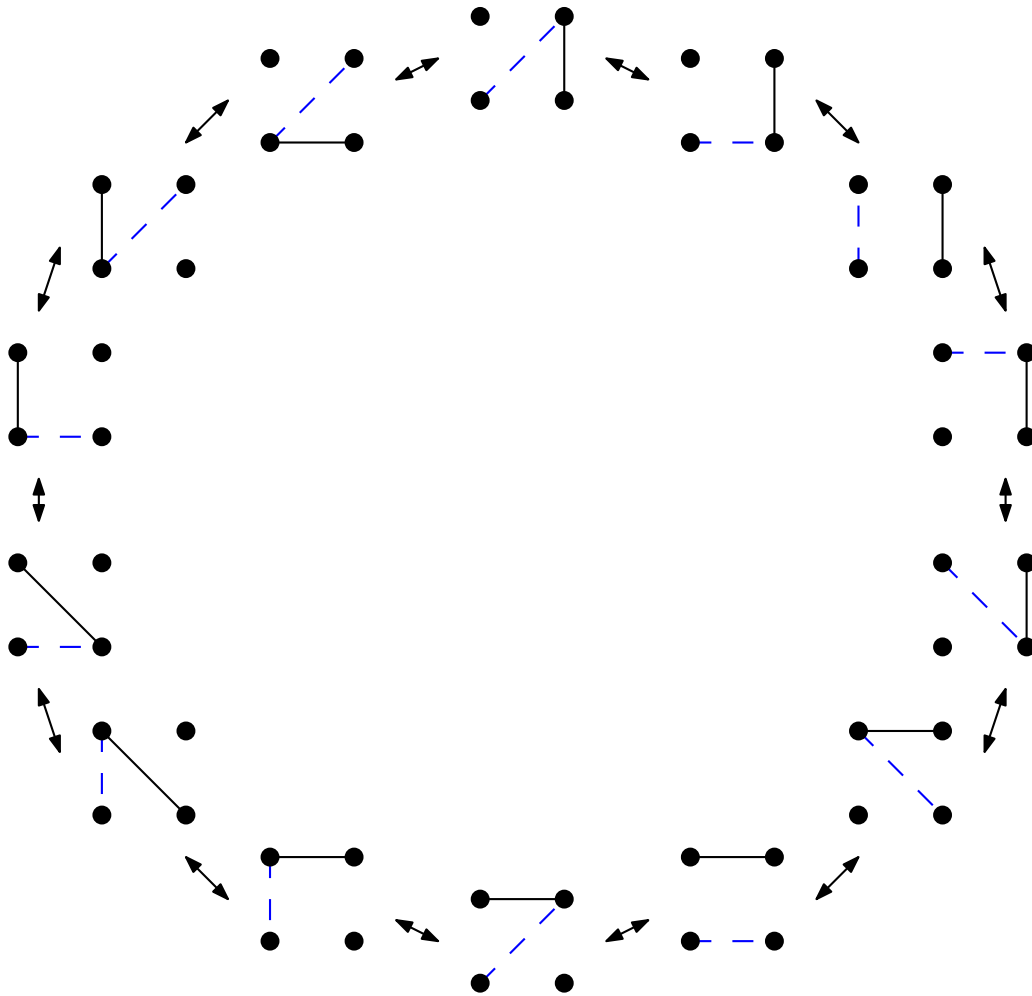
Durante el análisis de este método se obtuvo, que para gráficas geométricas planas con dos aristas y con 4, 5 y 6 vértices en posición convexa, existe un ciclo Hamiltoniano (figuras 4.1, 4.2 y 4.3). Estos ciclos se encontraron por medio de prueba y error, al intentar determinar la manera correcta para encontrar los caminos Hamiltonianos intermedios utilizando la idea de la generalización antes mencionada. El principal problema encontrado en la generación de estos ciclo, radica en que se tuvo que corregir manualmente los caminos intermedios para poder construir el ciclo hamiltoniano final.

- Obtener cotas para el diámetro de la gráfica de rotaciones de aristas en gráficas geométricas planas etiquetadas y gráficas geométricas planas dirigidas.

El estudio de otro tipo de gráficas geométricas planas, como los son las arista etiquetadas y las dirigidas, se encuentra encaminado por la intención de generalizar los resultados obtenidos para gráficas geométricas planas. En el capítulo de resultados se presenta la demostración de la conexidad para las gráficas geométricas planas arista etiquetada y para las gráficas geométricas planas dirigidas, en dichas demostraciones se hace uso del teorema 2, definido para gráficas geométricas planas y para finalizar la conversión entre dos gráficas se deben considerar las peculiaridades generadas por las restricciones extra de las gráficas (que sean arista etiquetadas o dirigidas) y estos pasos finales son los que potencialmente aumentan la cantidad de rotaciones realizadas para pasar de una gráfica a otra. En particular hay que hacer un análisis del número de veces que se utilizan el lema 4 (para el caso de las gráficas geométricas planas arista etiquetadas) y el lema 5 (para el caso de las gráficas geométricas planas dirigidas), analizando la complejidad de dichos lemas se puede determinar el número de rotaciones de aristas realizadas y de esta manera estimar el diámetro de las gráficas  $\mathcal{ERLG}(V, k)$  y  $\mathcal{ERDG}(V, k)$ .

## 4. Conclusiones y trabajo futuro

---



**Figura 4.1:** Ciclo Hamiltoniano para  $\mathcal{ERG}(V, 2)$  con cuatro puntos en posición convexa.

- Considerar algunas variaciones en la definición de rotación de aristas y ver que sucede con la conexidad, la hamiltonicidad y el diámetro. Dos de las variaciones en la operación, se definen a continuación:
  - *La rotación sin restricciones de aristas*, donde podemos rotar el vértice libre de la arista, hacia cualquier vértice visible en la gráfica de visibilidad del vértice fijo (figura 4.4)
  - *La rotación local de aristas*, donde dada una arista se determinan



todas las posibles aristas hacia donde se puede rotar (con la definición de rotación de arista estudiada) y la rotación se restringe a considerar únicamente a la primera arista en una rotación en el sentido de las manecillas del reloj y a la primera arista en una rotación en contra sentido de las manecillas del reloj (figura 4.5)

Para ambas definiciones de rotaciones, se define su gráfica de rotaciones de aristas correspondiente. Llamaremos  $\mathcal{UERG}(V, k)$  a la gráfica de rotaciones de aristas definida en gráficas geométricas planas obtenida al utilizar la rotación sin restricciones. Y llamaremos  $\mathcal{LERG}(V, k)$  a la gráfica de rotaciones de aristas definida en gráficas geométricas planas obtenida al utilizar la rotación local de arista.

Particularmente  $\mathcal{UERG}(V, k)$  y  $\mathcal{LERG}(V, k)$  son conexas. Para  $\mathcal{UERG}(V, k)$  debemos notar que la operación utilizada es una rotación más general que la rotación de aristas definida y utilizada en el capítulo anterior, por lo que utilizando los resultados obtenidos anteriormente podemos garantizar su conexidad, por otra parte una cota inferior en el diámetro y la hamiltonicidad, no se obtienen de forma directa de los resultados anteriores, ya que por ejemplo  $\mathcal{UERG}(V, k)$  presenta más aristas que  $\mathcal{ERG}(V, k)$  lo que aumenta el grado de sus nodos, permitiendo de esta manera la posibilidad de obtener un diámetro menor que  $\mathcal{ERG}(V, k)$  y además esta característica podría garantizar la hamiltonicidad para cualquier  $k < |E(T(V))|$ , ya que se proporcionan más formas de pasar de una gráfica a otra. Para  $\mathcal{LERG}(V, k)$  debemos notar que una secuencia de rotaciones locales de una misma arista sobre un mismo vértice es equivalente a una rotación de arista, por lo que en la demostración de conexidad para  $\mathcal{ERG}(V, k)$  podemos descomponer cada rotación realizada, por una sucesión de rotaciones de aristas locales, por lo que el resultado de la conexidad para  $\mathcal{ERG}(V, k)$  nos permite demostrar la conexidad de  $\mathcal{LERG}(V, k)$ , por otra parte los resultados en el diámetro y la hamiltonicidad no se pueden reutilizar directamente.

- Restringir el ángulo de rotación de la arista y ver como se comportan las propiedades de conexidad, hamiltonicidad y el diámetro de la gráfica.

#### 4. Conclusiones y trabajo futuro

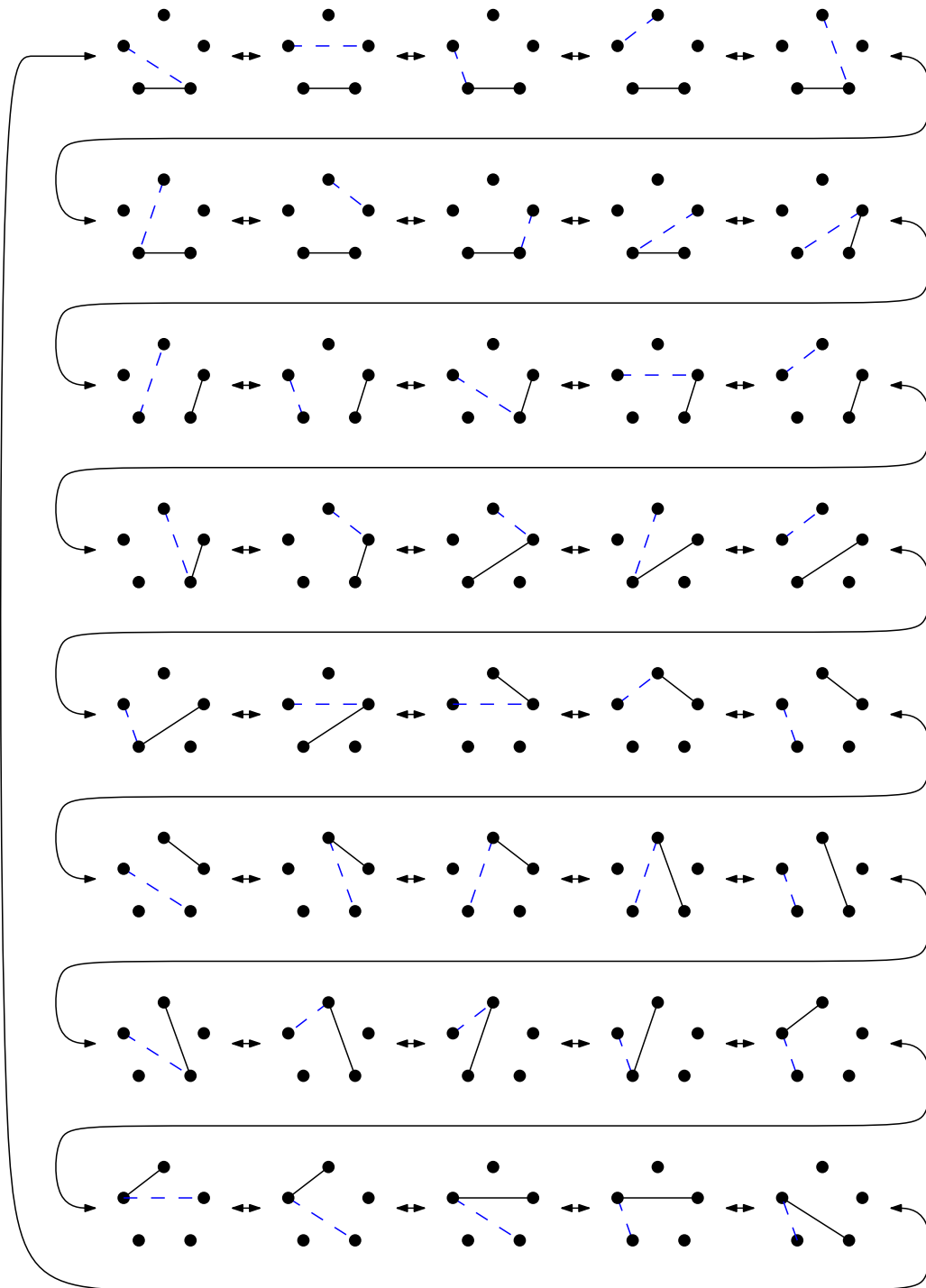


Figura 4.2: Ciclo Hamiltoniano para  $\mathcal{ERG}(V, 2)$  con cinco puntos en posición convexa.

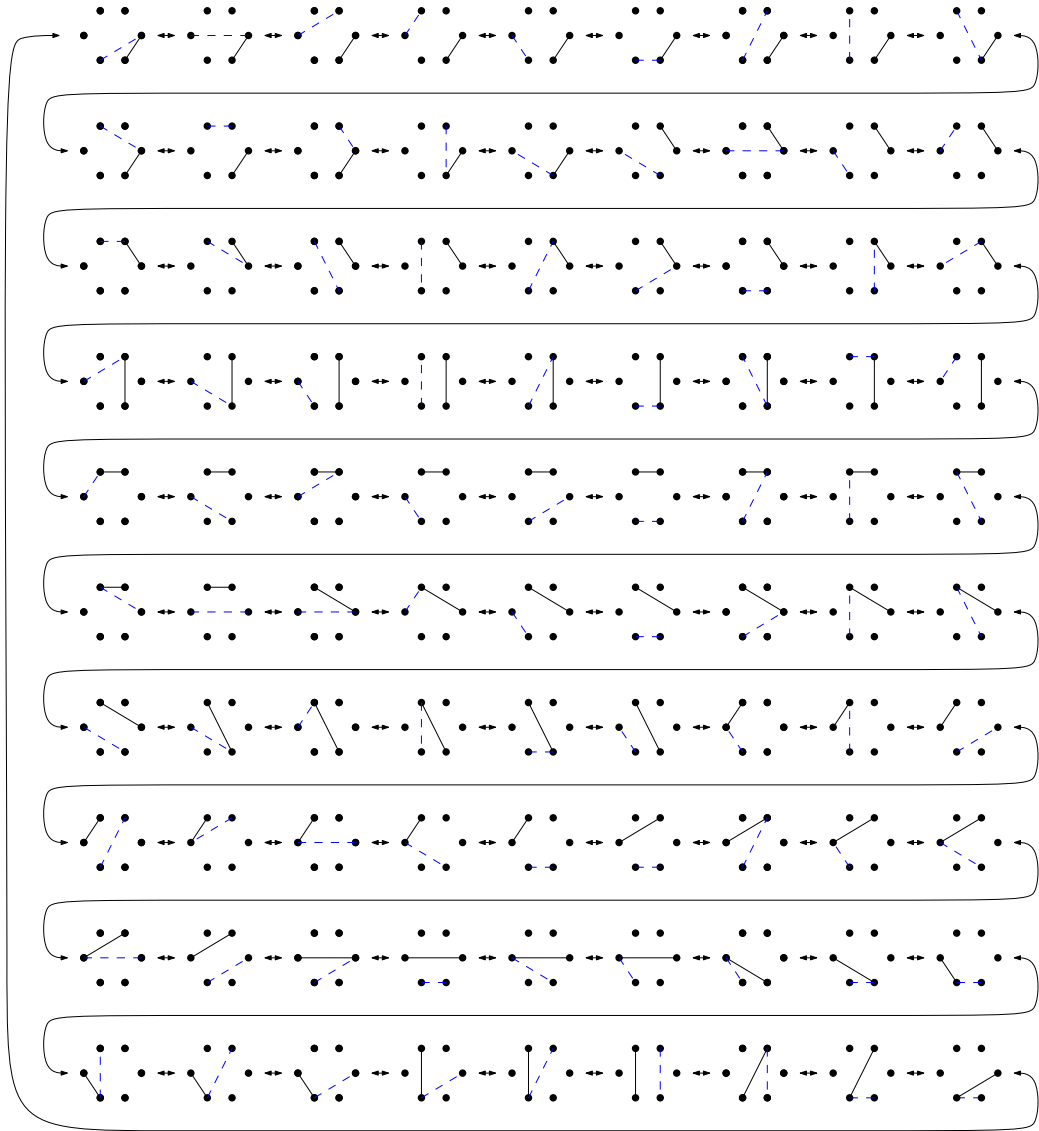
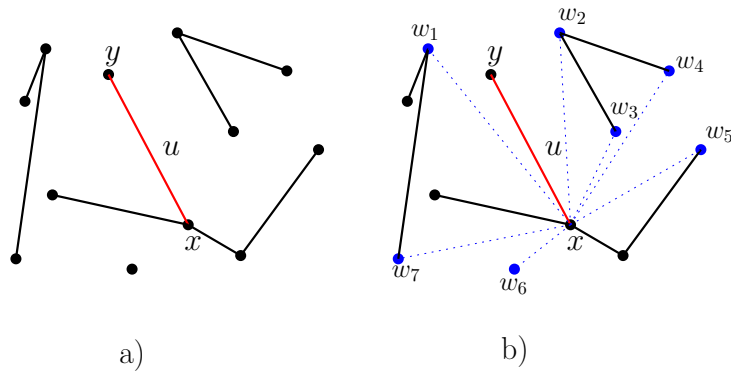


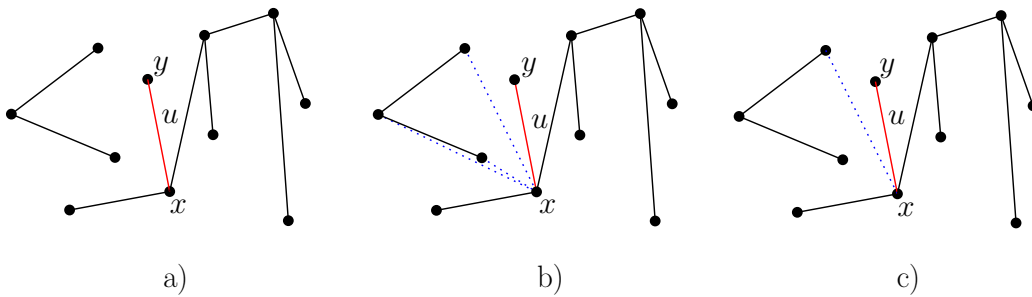
Figura 4.3: Ciclo Hamiltoniano para  $\mathcal{ERG}(V, 2)$  con seis puntos en posición convexa.

## 4. Conclusiones y trabajo futuro

---



**Figura 4.4:** a) Rotación no restringida de la arista  $u = \overline{xy}$ , b) Los posibles candidatos para la rotación no restringida de la arista  $u$ , considerando como vértice fijo a  $x$ .



**Figura 4.5:** a) Rotación local de la aristas  $u = \overline{xy}$ , b) Todas las posibles aristas hacia donde puede rotar  $u$  tomando a  $x$  como pivote c) Las aristas hacia donde puede rotar la arista  $u$  bajo una rotación local (en este ejemplo solo existe una arista, que corresponde a la primera arista en una rotación en contra del sentido de las manecillas del reloj).



# Bibliografía

---

- [1] O. Aichholzer, F. Aurenhammer, C. Huemer, and B. Vogtenhuber. Gray code enumeration of plane straight-line graphs. *Graph. Comb.*, 23(5):467–479, 2007.
- [2] Oswin Aichholzer, Franz Aurenhammer, Hannes Krasser, and Peter Brass. Pseudo-triangulations from surfaces and a novel type of edge flip. *Journal of Computing*, 2003.
- [3] Oswin Aichholzer and Klaus Reinhardt. A quadratic distance bound on sliding between crossing-free spanning trees. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 37(3):155–161, 2007.
- [4] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. North-Holland, first edition edition, 1967.
- [5] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2008.
- [6] Prosenjit Bose and Ferran Hurtado. Flips in planar graphs. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 42(1):60–80, 2009.
- [7] Gary Chartrand, Grzegorz Kubicki, and Michelle Schultz. Graph similarity and distance in graphs. *Aequationes Mathematicae*, 55(1-2), 1998.
- [8] Mark de Berg, Otfried Cheong, Marc van Kreveld, and Mark Overmars. *Computational Geometry Algorithms and Applications*. Springer Berlin Heidelberg, third edition edition, 2008.
- [9] Reinhard Diestel. *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag Heidelberg, third edition edition, 2005.

- 
- [10] H. Edelsbrunner and N. R. Shah. Incremental topological flipping works for regular triangulations. *Algorithmica*, pages 223–241, 1996.
- [11] Stefan Felsner, Ferran Hurtado, Marc Noy, and Ileana Streinu. Hamiltonicity and colorings of geometric graphs. *Proc. of 11th ACM-SIAM Symp. on Disc. Algorithms (SODA)*, pages 155–164, 2000.
- [12] Wayne Goddard and Henda C. Swart. Distances between graphs under edge operations. *Discrete Mathematics*, pages 121–132, 1996.
- [13] Jonathan L. Gross and Jay Yellen, editors. *Handbook of Graph Theory (Discrete Mathematics and Its Applications)*. CRC Press, first edition, 2003.
- [14] Clemens Huemer, Ferran Hurtado, and Julian Pfeifle. The rotation graph of  $k$ -ary trees is hamiltonian. *Information Processing Letters*, 109:124–129.
- [15] F. Hurtado and M. Noy. Graph of triangulations of a convex polygon and tree of triangulations. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 13(3):179–188, 1999.
- [16] F. Hurtado, M. Noy, and J. Urrutia. Flipping edges on triangulations. *Discrete and Computational Geometry*, 22:333–346, 1999.
- [17] E.B. Jarret. Edge rotation and edge slide distance graphs. *Computers and Mathematics with Applications*, 34(11):81–87, 1997.
- [18] C. L. Lawson. Generation of a triangular grid with applications to contour plotting. *Memo 299, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, CA*, 1972.
- [19] C. L. Lawson. Software for  $c^1$  surface interpolation. *In Mathematical Software III*, pages 161–194, 1977.
- [20] Franco P. Preparata and Michael Ian Shamos. *Computational Geometry: An Introduction*. Springer, 1993.
- [21] K. Wagner. Bemerkung zum vierfarbenproblem. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 46:26–32, 1936.