Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

GRUPOS DE CLASES DE DIVISORES Y GRUPOS DE PICARD SOBRE ESQUEMAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
JORGE ELEAZAR CONTRERAS REYES

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ISRAEL MORENO MEJÍA

2010

HOJA DE DATOS DEL JURADO

Datos del alumno
Apellido paterno: Contreras
Apellido materno: Reyes
Nombres: Jorge Eleazar
Teléfono: 55 23 26 62 13
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Carrera: Matemáticas
Número de cuenta: 405070314

Datos del asesor
Grado: Dr.
Nombre: Israel
Apellido paterno: Moreno
Apellido materno: Mejía

Datos del sinodal 1
Grado: Dr.
Nombre: Javier
Apellido paterno: Elizondo
Apellido materno: Huerta

Datos del sinodal 2
Grado: Dr.
Nombre: Mustapha
Apellido paterno: Lahyane

Datos del sinodal 3
Grado: Dr.
Nombres: Pedro Luis
Apellido paterno: del Ángel
Apellido materno: Rodríguez

Datos del sinodal 4
Grado: Dr.
Nombre: Adriana
Apellido paterno: Ortiz
Apellido materno: Rodríguez

Datos del trabajo escrito
Título: Grupos de clases de divisores y grupos de Picard sobre esquemas
Número de páginas: 81
Año: 2010

Índice general

Resumen II

Introducción III

1. Anillos de valoración y valoración discreta 1

1.1. Anillos de valoración 1

1.2. Anillos de valoración discreta 5

1.3. Dominios de Dedekind 9

2. Divisores 10

2.1. Divisores de Weil 10

2.2. Divisores sobre curvas 25

2.3. Divisores de Cartier 34

2.4. Gavillas invertibles 39

3. Gavillas invertibles amplias 47

4. Sistemas lineales 53

5. Geometría en una superficie 56

6. Transformaciones monoidales 63

7. La dimensión de $H^i(X, \mathcal{F})$ 65

8. Teorema de anulación de Kodaira 73

Bibliografía 80

Resumen

El objetivo de la presente tesis es calcular las dimensiones de todos los grupos de cohomología de cada gavilla invertible sobre la superficie obtenida al hacer un blowup de $\mathbb{P}^2_k$ en un punto y dar el anillo de Cox de la misma.

Introducción

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema. Como la categoría $\mathbf{Ab}(X)$ de gavillas de grupos abelianos en X tiene suficientes inyectivos, podemos hablar de los funtores derivados del funtor de secciones globales sobre X. Aplicando éstos a una gavilla $\mathcal{F}$ sobre X obtenemos los denominados grupos de cohomología $H^i(X, \mathcal{F})$. En particular, por un resultado debido a Serré, cuando $\mathcal{F}$ es una gavilla coherente y X es un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano A, estos grupos resultan ser A-módulos finitamente generados. Así, por ejemplo, si X es el blow up del plano proyectivo $\mathbb{P}^2_k$ (sobre un campo k algebraicamente cerrado) en un punto y $\mathcal{F}$ es una gavilla invertible sobre X, entonces $H^i(X, \mathcal{F})$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita. En este trabajo nuestro principal problema consiste en encontrar la dimensión de cada uno de estos espacios vectoriales (ver §7, Teorema 7.0.41, y Teorema 7.0.48). Nuestro enfoque se basa en las propiedades de intersección en una superficie y la existencia de una sucesión exacta de gavillas para cada subesquema cerrado. Como corolario obtenemos que el llamado Anillo de Cox de esta superficie es un anillo de polinomios de cuatro variables sobre k (ver Proposición 7.0.50).

Recordemos que el blow up de una variedad X a lo largo de una subvariedad Y es a grandes rasgos un mapeo regular birracional $\pi : \widetilde{X} \to X$ que es un isomorfismo fuera de Y pero que puede tener fibras no triviales sobre Y. Durante este trabajo no nos enfocamos en la construcción del blow up, ni en las propiedades de cohomología de una gavilla sobre un esquema. En cambio, presentamos como material introductorio la teoría de divisores a detalle.

La tesis se divide en ocho capítulos. Explicamos a continuación la distribución de los temas en cada uno de ellos.

En el Capítulo 1 demostramos los resultados elementales sobre anillos de valoración discreta. Estos anillos y sus propiedades son fundamentales en la construcción de los divisores.

En el Capítulo 2 introducimos la noción de divisores de Weil y divisores de Cartier y definimos así mismo lo que es una gavilla invertible; se dan ejemplos en cada caso y vemos bajo qué condiciones hay una correspondencia entre divisores de Cartier y de Weil y divisores de Cartier y gavillas invertibles.

En el Capítulo 3 introducimos las gavillas invertibles amplias y en el Capítulo

4 los sistemas lineales; estas dos nociones serán útiles a lo largo de los capítulos siguientes.

En el Capítulo 5 se presenta la teoría de intersección para superficies, y en el Capítulo 6 estudiamos esta teoría para el caso particular del blow up de $\mathbb{P}^2$ en un punto.

En el Capítulo 7 nos dedicamos al problema principal de esta tesis, es decir, encontramos las dimensiones de los grupos de cohomología de todas las gavillas invertibles sobre la superficie resultante de hacer el blow up a $\mathbb{P}^2$ en un punto. Para ello usamos como herramientas principales el Teorema de Riemann-Roch, el Criterio de Nakai para superficies y el Teorema de Kodaira.

En el Capítulo 8 bosquejamos una prueba del Teorema de Kodaira haciendo gran uso de la teoría de divisores desarrollada en los primeros capítulos. A lo largo de este trabajo asumimos que el lector está familiarizado con las propiedades básicas de esquemas y sus morfismos. Para su conveniencia, presentamos a continuación un glosario de las principales definiciones y resultados.

`Esquemas`

Si $\mathfrak{a}$ es un ideal en un anillo A, definimos $V(\mathfrak{a})$ como el conjunto de ideales primos que contienen a $\mathfrak{a}$. Definimos el espacio topológico $\operatorname{Spec} A$ asociado al anillo A como el conjunto de todos los ideales primos de A dotados de una topología que consiste en tomar a los subconjuntos $V(\mathfrak{a})$ (para cada ideal primo $\mathfrak{a}$) como los subconjuntos cerrados.

Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son dos ideales, $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$ si y sólo si $\sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$.

Sea A un anillo. El *espectro* de A es el par consistente del espacio topológico $\operatorname{Spec} A$ junto con una gavilla estructural de anillos $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$. Esta gavilla es tal que en un punto $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ el tallo $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ es isomorfo al anillo local $A_{\mathfrak{p}}$. Además definimos el *abierto distinguido* $D(f)$ como el complemento de $V((f))$. Se tiene también que el anillo $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_X)$ es isomorfo al anillo localizado A_f.

En el caso en que $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ denotamos por $\mathbb{A}_k^n$ al espectro de A.

Un *espacio anillado* es un par $(X, \mathcal{O}_X)$ consistente de un espacio topológico X y una gavilla de anillos $\mathcal{O}_X$ en X. Un *morfismo* de espacios anillados de $(X, \mathcal{O}_X)$ a $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es un par $(f, f^\sharp)$ de un mapeo continuo $f : X \to Y$ y un mapeo $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ de gavillas de anillos en Y. El espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es un *espacio localmente anillado* si para cada punto $P \in X$, el tallo $\mathcal{O}_{X,P}$ es un anillo local. Un morfismo de espacios localmente anillados es un morfismo $(f, f^\sharp)$ de espacios anillados, tal que para cada punto $P \in X$, el mapeo inducido de anillos locales $f_P^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}$ es un homomorfismo local de anillos locales.

Un *esquema afín* es un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ que es isomorfo (como espacio anillado) al espectro de un anillo A. Un *esquema* es un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ en el que cada punto tiene una vecindad abierta U tal que $(U, \mathcal{O}_U)$ es un esquema afín. Un morfismo de esquemas es un morfismo como espacios localmente anillados. A veces escribiremos sólo X para referirnos al par $(X, \mathcal{O}_X)$.

Sea S un anillo graduado. Denotamos por S_+ el ideal $\oplus_{d>0} S_d$. Definimos el conjunto Proj S como el conjunto de todos los ideales primos homogéneos $\mathfrak{p}$ que no contienen todo S_+. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal homogéneo de S, definimos el subconjunto $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj} S | \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$. Se verifica que puede definirse una topologia en Proj S tomando como subconjuntos cerrados los subconjuntos de la forma $V(\mathfrak{a})$. Si A es un anillo, definimos el *n-espacio proyectivo* sobre A como el esquema $\mathbb{P}^n_A = \mathrm{Proj}\ A[x_0, \ldots, x_n]$. Un subesquema cerrado Y de un esquema X está definido por una *gavilla de ideales* $\mathcal{I}(Y)$ en la gavilla estructural $\mathcal{O}_X$ de X dada por el kernel del morfismo $i^\sharp : \mathcal{O}_X \to i_* \mathcal{O}_Y$, donde i es el morfismo inclusión; para cualquier cubierta abierta afín de X, Y corresponde a un ideal en cada anillo coordenado de X. Un subesquema cerrado Y de X viene equipado con una inmersión cerrada $Y \to X$.

Si Y es un subesquema cerrado de un esquema X, $X - Y$ denota el subesquema abierto de X que es el complemento del soporte de Y.

La *dimensión* de un esquema X, denotada dim X es la dimensión del espacio topológico subyacente, esto es el supremo de todos los enteros n tales que existe una cadena

$$Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_n$$

de subconjuntos cerrados irreducibles de X (como espacio topológico). Si Z es un subconjunto cerrado irreducible de X, entonces la *codimensión* de Z en X, denotada $\mathrm{codim}\,(Z, X)$ es el supremo de enteros n tales que existe una cadena

$$Z = Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_n$$

de subconjuntos cerrados irreducibles disntintos de X, empezando con Z. Si Y es un subconjunto cerrado cualquiera de X, definimos

$$\mathrm{codim}\,(Y, X) = \inf_{Z \subseteq Y} \mathrm{codim}\,(Z, X)$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los subconjuntos cerrados irreducibles de Y.

Un esquema X es *irreducible* si su espacio topológico es irreducible. Es *reducido* si para todo conjunto abierto U, el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ no tiene elementos nilpotentes. Es *integral* si para cada abierto $U \subseteq X$, el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ es un anillo entero. Un esquema es entero si y sólo si es tanto reducido como irreducible.

Un esquema X es *noetheriano* si puede ser cubierto por un número finito de subconjuntos abiertos afines $\mathrm{Spec}\, A_i$, donde cada A_i es un anillo noetheriano.

Un esquema X es *normal* si todos sus anillos locales son dominios enteramente cerrados.

Sea A un anillo y sea $X = \mathrm{Spec}\, A$. Existe un funtor $M \to \widetilde{M}$ que da una equivalencia de categorías entre la categoría de A-módulos y la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos casi-coherentes. Si A es noetheriano, el mismo funtor da una equivalencia de categorías entre la categoría de A-módulos finitamente generados y la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos coherentes.

Sea B un A-álgebra y M un B-módulo. Una A-*derivación* de B en M es un mapeo A-lineal $d : B \to M$ tal que se satisface $d(b_1 b_2) = b_1 db_2 + b_2 db_1$, $b_i \in B$. El *módulo de formas diferenciales relativas de B sobre A* es un B-módulo $\Omega_{B/A}$ dotado de una A-derivación $d : B \to \Omega_{B/A}$ que tiene la siguiente propiedad universal: Para cualquier B-módulo M y para cualquier A-derivación $d' : B \to M$, hay un único morfismo de B-módulos $\varphi : \Omega_{B/A} \to M$ tal que $d' = \varphi \circ d$.

Sea $X \to Y$ un morfismo de esquemas. Definimos la *gavilla de diferenciales de X sobre Y* como la única gavilla casi-coherente $\Omega_{X/Y}$ tal que para cualquier abierto afín V de Y y cualquier subconjunto abierto afín U de $f^{-1}(V)$ se tiene $\Omega_{X/Y}|U = (\Omega_{\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_X(V)})^{\sim}$.

`Morfismos`

Sea S un esquema fijo. Un *esquema sobre S* es un esquema X, junto con un morfismo $X \to S$. Si X y Y son esquemas sobre S, un morfismo de X a Y como esquemas sobre S, (también llamado un S-morfismo) es un morfismo $f : X \to Y$ que es compatible con los morfismos dados a S.

Un morfismo $f : V \to W$ de variedades es *dominante* si la imagen de f es densa en W.

Si $f : X \to S$, $g : Y \to S$ son morfismos, el *producto fibrado* de X y Y sobre S es denotado $X \times_S Y$. Si X, Y y S son afines, con anillos coordenados A, B y Λ, entonces $X \times_S Y$ es el esquema afín con anillo coordenado $A \otimes_\Lambda B$; en general $X \times_S Y$ se construye pegando tales esquemas afines [7, II, 3].

Si Y es un esquema, definimos el *n-espacio proyectivo* sobre Y, denotado $\mathbb{P}^n_Y$, como $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} Y$.

Un morfismo $f : X \to Y$ es *finito* si para cada subconjunto abierto afín $\operatorname{Spec} B = U \subset Y$, la imagen inversa $U' = f^{-1}(U)$ es afín, y $\Gamma(U', \mathcal{O}_Y)$ es una $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-álgebra finita. Es de *tipo finito* si U' puede ser cubierto por un número finito de espacios afines $U_{ij} = \operatorname{Spec} A_{ij}$, donde cada A_{ij} es una B-álgebra finitamente generada.

Un morfismo $f : X \to Y$ es *separado* si el morfismo diagonal de X a $X \times_Y X$ es una inmersión cerrada. Para el criterio valorativo de morfismos separados, ver [6, II, 7.2] ó [7, II, 4.3]. Un morfismo $f : X \to Y$ es *propio* si es separado, de tipo finito y universalmente cerrado, i.e. para todo $Y' \to Y$, el morfismo inducido de $X \times_Y Y'$ a Y manda conjuntos cerrados en conjuntos cerrados. Para el criterio valorativo de morfismos propios, ver [6, II, 7.3] o [7, II, 4.7].

Un morfismo $f : X \to Y$ de esquemas es *proyectivo* si se factoriza mediante una inmersión cerrada $i : X \to \mathbb{P}^n_Y$ para algún n, seguido por la proyección $\mathbb{P}^n_Y \to Y$.

Un morfismo $f : X \to Y$ es *plano* si, para todos los puntos x de X, el mapeo inducido $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ es plano.

Capítulo 1

Anillos de valoración y valoración discreta

1.1. Anillos de valoración

Definición. Sea B un dominio entero, K su campo de fracciones. B es un *anillo de valoración* de K si, para cada $x \neq 0$, o bien $x \in B$ ó $x^{-1} \in B$ (o ambos).

Ejemplo 1.1.1.

1. Sea $K = \mathbb{Q}$, y p un primo fijo en $\mathbb{Z}$. Tomamos a B como el conjunto de todos los racionales de la forma $p^r m/n$, donde $r \geq 0$ y p no divide a n ni a m.

2. Sea $K = k(x)$, donde k es un campo cualquiera. Tomamos a B como el conjunto de todas las funciones racionales $p^r m/n$, donde $r \geq 0$, p es un polinomio fijo que es irreducible sobre k y m, n son polinomios arbitrarios en $k[x]$ no divisibles por p. Esto es esencialmente lo mismo que el ejemplo previo.

3. Sea $K = k(x)$, y sea R el conjunto de todas las funciones racionales $f/g \in k(x)$ tales que $\deg f \leq \deg g$.

Proposición 1.1.2. *Sean B y K como en la definición anterior. Entonces:*

i) *B es un anillo local.*

ii) *Si B' es un anillo tal que $B \subseteq B' \subseteq K$, entonces B' es un anillo de valoración de K.*

iii) *B es enteramente cerrado (en K).*

Demostración.

i) Sea $\mathfrak{m}$ el conjunto de no-unidades de B, de modo que $x \in m \Leftrightarrow$ ó bien $x = 0$ ó $x^{-1} \notin B$. Si $a \in B$ y $x \in \mathfrak{m}$ tenemos $ax \in m$, pues de lo contrario $(ax)^{-1} \in B$ y por lo tanto $x^{-1} = a \cdot (ax)^{-1} \in B$. Sean ahora x, y elementos distintos de cero de $\mathfrak{m}$. Entonces o bien $xy^{-1} \in B$ ó $x^{-1}y \in B$. Si $xy^{-1} \in B$ entonces $x + y = (1 + xy - 1)y \in B\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$, y similarmente si $x^{-1}y \in B$. Luego $\mathfrak{m}$ es un ideal y por tanto B es un anillo local (cada ideal $\neq (1)$ consiste de no-unidades, luego está contenido en $\mathfrak{m}$. Por tanto $\mathfrak{m}$ es el único ideal máximo del anillo).

ii) Claro de las definiciones.

iii) Sea $x \in K$ entero sobre B. Entonces tenemos, digamos,

$$x_n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0$$

con los $b_i \in B$. Si $x \in B$ no hay nada que probar. Si no, entonces $x - 1 \in B$, luego $x = -(b_1 + b_2 x^{-1} + \ldots + b_n x^{1-n}) \in B$. □

Sea K un campo, Ω un campo algebraicamente cerrado. Sea Σ el conjunto de todos los pares (A, f), donde A es un subanillo de K y f es un homomorfismo de A en Ω. Ordenamos parcialmente el conjunto Σ como sigue:

$$(A, f) \leq (A', f) \Leftrightarrow A \subseteq A' \text{ y } f'|A = f$$

Las condiciones del lema de Zorn son claramente satisfechas y por lo tanto el conjunto Σ tiene al menos un elemento máximo. Sea (B, g) un elemento máximo de Σ. Queremos probar que B es un anillo de valoración de K. El primer paso para la prueba es

Lema 1.1.3. *B es un anillo local y $\mathfrak{m} = Ker\ (g)$ es su ideal máximo.*

Demostración. Ya que $g(B)$ es un subanillo de un campo y por lo tanto un dominio entero, el ideal $\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}\ (g)$ es primo. Podemos extender a un homomorfismo $\overline{g}: B_{\mathfrak{m}} \to \Omega$ poniendo $\overline{g}(b/s) = g(b)/g(s)$ para todo $b \in B$ y toda $s \in B - \mathfrak{m}$, ya que $g(s)$ no será cero. Ya que el par (B, g) es máximo, se sigue que $B = B_{\mathfrak{m}}$, luego B es un anillo local y $\mathfrak{m}$ su ideal máximo. □

Lema 1.1.4. *Sea x un elemento distinto de cero de K. Sea $B[x]$ el subanillo de K generado por x sobre B y sea $\mathfrak{m}[x]$ la extensión de $\mathfrak{m}$ en $B[x]$. Entonces o bien $\mathfrak{m}[x] \neq B[x]$ ó $\mathfrak{m}[x^{-1}] \neq B[x^{-1}]$.*

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{m}[x] = B[x]$ y $\mathfrak{m}[x^{-1}] = B[x^{-1}]$. Entonces tenemos las ecuaciones

$$u_0 + u_1 x + \ldots + u_m x^m = 1 \quad (u_i \in \mathfrak{m}) \tag{1.1}$$

$$v_0 + v_1 x^{-1} + \ldots + v_n x^{-n} = 1 \quad (v_j \in \mathfrak{m}) \tag{1.2}$$

en las cuales podemos asumir que los grados m, n son tan chicos como sea posible. Supongamos que $m \geq n$, y multipliquemos (1.2) por x^n:

$$(1 - v_0)x^n = v_1 x^{n-1} + \ldots + v_n. \tag{1.3}$$

Ya que $v_0 \in \mathfrak{m}$, se sigue del Lema 1.2 que $1 - v_0$ es una unidad en B, y (1.3) puede ser escrito por lo tanto de la forma

$$x^n = w_1 x^{n-1} + \ldots + w_n (w_j \in \mathfrak{m}).$$

Luego podemos sustituir x_m en (1.1) por $w_1 x^{m-1} + \ldots + w_n x^{m-n}$, y esto contradice la minimalidad del exponente m. □

Teorema 1.1.5. *Sea (B, g) un elemento máximo de Σ. Entonces B es un anillo de valoración del campo K.*

Demostración. Tenemos que mostrar que si $x \neq 0$ es un elemento de K, entonces ó $x \in B$ ó $x^{-1} \in B$. Por el Lema 1.1.4 podemos también asumir que $\mathfrak{m}[x]$ no es el ideal unitario del anillo $B' = B[x]$. Entonces $\mathfrak{m}[x]$ está contenido en un ideal máximo $\mathfrak{m}' de B'$, y tenemos $\mathfrak{m}' \cap B = m$ (porque $\mathfrak{m}' \cap B$ es un ideal propio de B y contiene a $\mathfrak{m}$). Luego, el encaje de B en B' induce un encaje del campo $k = B/\mathfrak{m}$ en el campo $k' = B'/\mathfrak{m}'$; además $k' = k[x]$ donde x es la imagen de x en k', luego x es algebraico sobre k, y por lo tanto k' es una extensión algebraica finita de k. Ahora el homomorfismo g induce un encaje g de k en Ω, ya que por el Lema 1.1.3 $\mathfrak{m}$ es el kernel de g. Como Ω es algebraicamente cerrado, g puede ser extendido a un encaje g' de k' en Ω. Componiendo g' con el homomorfismo natural $B' \to k'$, tenemos, digamos, $g' : B' \to \Omega$ el cual extiende g. Ya que el par (B, g) es máximo, se sigue que $B' = B$, por lo tanto $x \in B$. □

Corolario 1.1.6. *Sea A un subanillo de un campo K. Entonces la cerradura entera $\overline{A}$ de A en K es la intersección de todos los anillos de valoración de K que contienen a A.*

Demostración. Sea B un anillo de valoración de K tal que $A \subseteq B$. Como B es algebraicamente cerrado, por la Proposición 1.1.2 iii), se sigue que $A \subseteq B$. Inversamente, sea $x \notin \overline{A}$. Entonces x no está en el anillo $A' = A[x^{-1}]$. Luego x^{-1} no es unidad en A' y está por lo tanto contenido en un ideal máximo $\mathfrak{m}'$ de A'. Sea Ω una cerradura algebraica del campo $k' = A'/\mathfrak{m}'$. Entonces la restricción a A del homomorfismo natural $A' \to k'$ define un homomorfismo de A en Ω. Por el Teorema 1.1.5 éste puede ser extendido a algún anillo de valoración $B \supseteq A$. Como x^{-1} mapea a cero, se sigue que $x \notin B$. □

Proposición 1.1.7.

i) *Si $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ son ideales de B, entonces o bien $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ ó $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Así los ideales de B están totalmente ordenados por la inclusión.*

ii) *Inversamente, sea B un dominio entero con campo de fracciones K. Si los ideales de B están totalmente ordenados por la inclusión, entonces B es un anillo de valoración de K.*

iii) *Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo del anillo de valoración B, entonces $B_{\mathfrak{p}}$ y $B/\mathfrak{p}$ son anillos de valoración.*

Demostración.

i) Supongamos que $\mathfrak{p}$ no está contenido en $\mathfrak{q}$, y escogamos algún $0 \neq a \in p\ \mathfrak{q}$. Si $b \in \mathfrak{q}$, debemos mostrar que $b \in \mathfrak{q}$. Si $b = 0$ no hay nada que probar, así que asumimos que $b \neq 0$. Tenemos $b/a \in B$, pues de lo contrario $a/b \in B$, así que $a = (a/b)b \in \mathfrak{q}$, una contradicción. Por lo tanto $b = (b/a)a \in \mathfrak{q}$.

ii) Si $\alpha \in K$ es un elemento distinto de cero, entonces $\alpha = a/b$ con a, b no cero, elementos de B. Por hipótesis, o bien $(a) \subseteq (b)$, en cuyo caso $a/b \in B$, o bien $(b) \subseteq (a)$, en cuyo caso $b/a \in B$.

iii) Primero notemos que por ser K el campo de fracciones de B, es también el campo de fracciones de $B_{\mathfrak{p}}$. Además, $B/\mathfrak{p}$ es un dominio entero, luego tiene un campo de fracciones. Ahora, por i), los ideales de B están totalmente ordenados por inclusión, así que lo mismo es cierto para $B_{\mathfrak{p}}$ y $B/\mathfrak{p}$. El resultado sigue de ii). □

Proposición 1.1.8. *Sea B un anillo de valoración noetheriano. Entonces B es un DIP. Más aún, para algún primo $p \in B$, cada ideal es de la forma $(p^m), m \geq 0$. Para cualquier p tal, $\bigcap_{m=1}^{\infty}(p^m) = 0$.*

Demostración. Si B es noetheriano, un ideal $\mathfrak{p}$ de B es finitamente generado, digamos por $a_1, \ldots, a_n$. Por la Proposición 1.1.7 i), podemos renombrar los a_i, de modo que $(a_1) \subseteq (a_2) \subseteq \ldots \subseteq (a_n)$. Pero entonces $\mathfrak{p} \subseteq (a_n) \subseteq \mathfrak{p}$, así que $\mathfrak{p} = (a_n)$. En particular, el ideal máximo $\mathfrak{m}$ de B es (p) para algún p, y p es primo porque $\mathfrak{m}$ es un ideal primo. Si (a) es un ideal arbitrario, entonces $(a) = B$ si a es una unidad, así que asumamos que a no es una unidad, esto es $a \in m$. Pero entonces p divide a a, así que $a = pb$. Si b no es unidad, entonces p divide a b, y obtenemos $a = p^2c$. Continuando inductivamente y usando el hecho de que B es un DIP, y por tanto DFU, tenemos que $a = p^2u$ para algún entero positivo m y una unidad u. Así $(a) = (p^m)$. Finalmente, si a pertenece a (p^m) para cada $m \geq 1$, entonces p^m divide a a para todo $m \geq 1$, entonces p^m divide a a para toda $m \geq 1$. Usando nuevamente la factorización única, debemos tener $a = 0$. □

1.2. Anillos de valoración discreta

Sea K un campo. Una valoración discreta en K es un mapeo v de K^* sobre $\mathbb{Z}$ (donde $K_* = K - \{0\}$ es el grupo multiplicativo de K) tal que

1. $v(xy) = v(x) + v(y)$, i.e. v es un homomorfismo;
2. $v(x + y) \geq \min\ (v(x), v(y))$.

A veces es conveniente extender v a todo K mediante $v(0) = +\infty$. Podemos dar una valoración discreta a todos los campos de la sección pasada. En los ejemplos (a) y (b), tomamos $v(p^r m/n) = r$. En el ejemplo (c), $v(f/g) = \deg g - \deg f$.

Proposición 1.2.1. *Si v es una valoración discreta en el campo K, entonces $B = \{a \in K | v(a) \geq 0\}$ es un anillo de valoración de K con ideal máximo $\mathfrak{m} = \{a \in K | v(a) \geq 1\}$.*

Demostración. Las propiedades que definen una valoración muestran que B es un anillo. Si $a \notin B$, entonces $v(a) < 0$, así que $v(a^{-1}) = v(1) - v(a) = 0 - v(a) > 0$, así que $a^{-1} \in B$, lo cual prueba que B es un anillo de valoración. Como a es una unidad de B si y sólo si tanto a como a^{-1} pertenecen a B, si y sólo si $v(a) = 0$, $\mathfrak{m}$ es el ideal de no unidades y es por lo tanto el ideal máximo del anillo de valoración B. □

Al conjunto B se le llama *anillo de valoración* de v.

Definición. Un dominio entero B es un *anillo de valoración discreta* si hay una valoración discreta v de su campo de fracciones K tal que B es el anillo de valoración de v. Un elemento $t \in B$ con $v(t) = 1$ es llamado *elemento uniformizador.*

Proposición 1.2.2. *Sea t un uniformizador del anillo de valoración discreta B. Entonces t genera el ideal máximo $\mathfrak{m}$ de B; en particular $\mathfrak{m}$ es principal. Inversamente, si t' es cualquier generador de $\mathfrak{m}$, entonces t' es un uniformizador.*

Demostración. Como $\mathfrak{m}$ es el único ideal máximo, $(t) \in \mathfrak{m}$. Si $a \in \mathfrak{m}$, entonces $v(a) \geq 1$, así que $v(at - 1) = v(a) - v(t) \geq 1 - 1 = 0$, así que $at^{-1} \in B$, y consecuentemente $a \in (t)$. Ahora supongamos que $\mathfrak{m} = (t')$. Como $t \in \mathfrak{m}$, tenemos $t = ct'$ para algún $c \in B$. Así

$$1 = v(t) = v(c) + v(t')$$

lo cual implica $v(t') = 1$. □

Proposición 1.2.3. *Si t es un uniformizador, entonces todo elemento no cero $a \in K$ puede ser expresado de manera única como $a = ut^n$, donde u es una unidad de B y $n \in \mathbb{Z}$. Además, $K = B_t$, esto es $K = S^{-1}B$ donde $S = \{1, t, t^2, \ldots\}$.*

Demostración. Sea $n = v(a)$, de modo que $v(at - n) = 0$ y por tanto at^{-n} es una unidad u. Para probar la unicidad, nótese que si $a = ut^n$, entonces $v(a) = v(u) + nv(t) = n$, así que n y luego u están determinados por a. El último enunciado sigue de que K es el campo de fracciones de B, y de que los elementos de B son aquellos cuya valoración es mayor o igual a 0. $\square$

Proposición 1.2.4. *Todo ideal no cero $\mathfrak{p}$ es de la forma $\mathfrak{m}^n$, donde $\mathfrak{m}$ es el ideal máximo de B y n es un entero no negativo único. Escribimos $v(\mathfrak{p}) = n$. (Por convención, $\mathfrak{m}^0 = B$.)*

Demostración. Escojamos $a \in p$ tal que $n = v(a)$ sea tan chico como sea posible. Por la Proposición 1.2.3, $a = ut^n$, así que $t^n = u^{-1}a \in \mathfrak{p}$. Por la Proposición 1.2.2, $\mathfrak{m} = (t)$, y por tanto $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{p}$. Inversamente, sea $b \in \mathfrak{p}$, con $v(b) = k \geq n$ por minimalidad de n. Como en la prueba de la Proposición 1.2.3, bt^{-k} es una unidad u', así que $b = u't^k$. Como $k \geq n$ tenemos $b \in (t^n) = \mathfrak{m}^n$, probando que $\mathfrak{p} \subseteq m^n$. La unicidad de n es una consecuencia del lema de Nakayama. Si $\mathfrak{m}^r = \mathfrak{m}^s$ con $r < s$,entonces $\mathfrak{m}^r = \mathfrak{m}^{r+1} = \mathfrak{m}\mathfrak{m}^r$. Así $\mathfrak{m}^r$,y por tanto, $\mathfrak{m}$ es 0, contradiciendo la hipótesis de que $\mathfrak{p}$ no es cero. $\square$

Podemos interpretar $v(\mathfrak{p})$ como la longitud de una serie de composición.

Proposición 1.2.5. *Sea $\mathfrak{p}$ un ideal no cero del anillo de valoración discreta R. Entonces $v(\mathfrak{p}) = l_R(R/\mathfrak{p})$, la longitud de composición del R-módulo $R/\mathfrak{p}$.*

Demostración. Por la Proposición 1.2.4, tenemos

$$R \supset \mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}^2 \supset \ldots \supset m^n = \mathfrak{p},$$

luego,

$$R/\mathfrak{p} \supset \mathfrak{m}/\mathfrak{p} \supset \mathfrak{m}^2/\mathfrak{p} \supset \ldots \supset \mathfrak{m}^n/\mathfrak{p} = 0$$

Por propiedades básicas de longitud de composición, tenemos, con $l = l_R$,

$$l(R/\mathfrak{p}) = l(\frac{R/\mathfrak{p}}{\mathfrak{m}/\mathfrak{p}}) + l(\frac{\mathfrak{m}/\mathfrak{p}}{\mathfrak{m}^2/\mathfrak{p}}) = l(R/\mathfrak{m}) + l(\frac{\mathfrak{m}/\mathfrak{p}}{\mathfrak{m}^2/\mathfrak{p}}) + l(\mathfrak{m}^2/\mathfrak{p}).$$

Continuando de esta manera, obtenemos

$$l(R/\mathfrak{p}) = \sum_{i=0}^{n-1} l(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}).$$

Como $\mathfrak{m}$ es generado por un uniformizador t, se sigue que $t^i + \mathfrak{m}^{i+1}$ genera $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$. Como $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ es anulado por $\mathfrak{m}$, es un $R/\mathfrak{m}$-módulo, esto es, un espacio vectorial sobre el campo $R/\mathfrak{m}$. El espacio vectorial es uno-dimensional porque los $\mathfrak{m}_i, i =$

$0, 1, \ldots, n$ son distintos (ver prueba de la Proposición 1.2.4). Consecuentemente, $l(R/\mathfrak{p}) = n$. $\square$

Vamos a probar un Teorema que caracteriza los anillos de valoración discreta, así que probaremos unos resultados preeliminares que vamos a ocupar.

Proposición 1.2.6. *Sea $\mathfrak{p}$ un ideal de un anillo noetheriano A. Entonces para algún entero positivo m, tenemos $(\sqrt{\mathfrak{p}}) \subseteq \mathfrak{p}$. En particular, tomando $p = 0$, el nilradical de A es nilpotente.*

Demostración. Como A es noetheriano, $\sqrt{\mathfrak{p}}$ es finitamente generado, digamos por $a_1, \ldots, a_t$, con $a_i^{n_i} \in \mathfrak{p}$. Entonces $(\sqrt{\mathfrak{p}})^m$ es generado por todos los productos $a_i^{r_1} \cdots a_t^{r_t}$ con $\sum_{i=1}^t r_i = m$, donde $m = 1 + \sum_{i=1}^t (n_i - 1)$. Afirmamos que $r_i \geq n_i$ para algún i. De lo contrario, $r_i \leq n_i - 1$ para toda i, y

$$m = \Sigma_{i=1}^t r_i < 1 + \Sigma_{i=1}^t (n_i - 1) = m,$$

lo cual es una contradicción. Pero entonces cada producto $a_1^{r_1} \cdots a_t^{r_t}$ está en $\mathfrak{p}$, luego $(\sqrt{\mathfrak{p}}) \subseteq \mathfrak{p}$. $\square$

Proposición 1.2.7. *Sea A un anillo noetheriano, $\mathfrak{m}$ un ideal máximo de A, $\mathfrak{q}$ cualquier ideal de A. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *$\mathfrak{q}$ es $\mathfrak{m}$-primario;*

(2) *$\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$;*

(3) *Para algún entero positivo n, tenemos $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$*

Demostración. Tenemos (1) $\Rightarrow$ (2) por definición. La implicación (2) $\Rightarrow$ (1) se sigue de [1, Prop. 4.2, p. 51]. Para probar que (2) implica (3), aplicamos la Proposición 1.2.6 para obtener que, para algún entero positivo n,

$$\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{p} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}$$

Para probar que (3) implica (2), observamos que sacando radicales: $\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{m}^n} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$. $\square$

Teorema 1.2.8. *Sea A un dominio local noetheriano de dimensión uno, $\mathfrak{m}$ su ideal máximo, $k = R/\mathfrak{m}$ su campo residuo. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *A es un anillo de valoración discreta;*

ii) *A es enteramente cerrado;*

iii) $\mathfrak{m}$ *es un ideal principal;*

iv) $dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$*;*

v) *Cada ideal no cero es una potencia de* $\mathfrak{m}$*;*

vi) *Existe* $x \in A$ *tal que cada ideal no cero es de la forma* $(x^k), k \geq 0$.

Demostración. Antes de empezar hacemos dos observaciones: (A) Si $\mathfrak{a}$ es un ideal $\neq 0, (1)$, entonces a es $\mathfrak{m}$-primario y $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{m}^n$ para algún n. Pues $\sqrt{a} = \mathfrak{m}$, ya que $\mathfrak{m}$ es el único ideal primero distinto de cero, así que la afirmación sigue de la Proposición 1.2.7. (B) $m^n \neq m^{n+1}$ para toda $n \geq 0$. Esto sigue de [3, Prop. 8.6, p. 90] i) $\Rightarrow$ ii) por la Proposición 1.1.2

ii) $\Rightarrow$ iii) Sea $a \in \mathfrak{m}$ y $a \neq 0$. Porla observación (A) existe un entero n tal que $\mathfrak{m}^n \subseteq (a), \mathfrak{m}^{n-1} \subsetneq (a)$. Escojamos $b \in m^{n-1}$ y $b \notin (a)$, y sea $x = a/b \in K$, el campo de fracciones de A. Tenemos $x^{-1} \notin A$ (ya que $b \notin (a)$), luego x^{-1} no es entero sobre A, y por lo tanto por ([3, Prop. 5.1, p. 59]) tenemos $x^{-1}\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{m}$ (pues si $x^{-1}\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ sería un $A[x-1]$-móodulo fiel, finitamente generado como A-módulo). Pero $x^{-1}\mathfrak{m} \subseteq A$ por construccióon de x, luego $x^{-1}\mathfrak{m} = A$ y por lo tanto $\mathfrak{m} = Ax = (x)$.

iii) $\Rightarrow$ iv). Por el lema de Nakayama tenemos $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq 1$, y por la observación (B) $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \neq 0$.

iv) $\Rightarrow$ v). Sea a un ideal $\neq 0, (1)$. Por la observación (A) tenemos $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{m}^n$ para algún n; de [3, Prop. 8.8, p. 91] (aplicado a A/m^n) se sigue que $\mathfrak{a}$ es una potencia de $\mathfrak{m}$.

v) $\Rightarrow$ vi). Por la observación (B), $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$, luego existe $x \in \mathfrak{m}, x \notin \mathfrak{m}^2$. Pero $(x) = \mathfrak{m}^r$ por hipótesis, luego $r = 1, (x) = \mathfrak{m}, (x^k) = \mathfrak{m}^k$.

vi) $\Rightarrow$ i). Claramente $(x) = \mathfrak{m}$, luego $(x^k) \neq (x^{k+1})$ por la observación (B). Luego, si a es un elemento distinto de cero en A, tenemos $(a) = (x^k)$ para exactamente un valor de k. Definamos $v(a) = k$ y extendamos v a K^* definiendo $v(ab^{-1}) = v(a) - v(b)$. Entonces v está bien definido, y A es el anillo de valoración de v. □

Definición. Sean A, B dos anillos locales. Decimos que B domina a A si A es un subanillo de B y el ideal máximo $\mathfrak{m}$ de A está contenido en el ideal máximo $\mathfrak{n}$ de B (o, equivalentemente, si $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A$).

Teorema 1.2.9. *Sea* K *un campo. Un anillo local* R *contenido en* K *es un anillo de valoración de* K *si y sólo si es un elemento máximo del conjunto de anillos locales contenidos en* K*, con respecto a la relación de dominación. Cada anillo local contenido en* K *es dominado por algún anillo de valoración de* K*.*

Demostración. [2, Ch. VI, §1, 3] □

1.3. Dominios de Dedekind

Teorema 1.3.1. *Sea A un dominio noetheriano de dimensión uno. Entonces los siguientes incisos son equivalentes:*

i) *A es enteramente cerrado;*

ii) *Cada anillo local $A_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p} \neq 0)$ es un anillo de valoración discreta.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 1.2.8 y [1, Prop. 5.13, p. 63] $\square$

Un anillo que satisface las condiciones del Teorema 1.3.1 es llamado *Dominio de Dedekind*.

Capítulo 2

Divisores

2.1. Divisores de Weil

Definición. Decimos que un esquema X es regular en codimensión uno (o a veces no singular en codimensión uno) si para cada $x \in X$ el anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ es regular siempre que tenga dimensión uno.

En esta sección consideraremos solamente esquemas que satisfacen la siguiente condición:

(*) X es un esquema noetheriano entero separado, regular en codimensión uno.

Definición. Sea X un esquema que satisface $(*)$. Un divisor primo en X es un subesquema cerrado entero Y de codimensión uno. Un divisor de Weil es un elemento del grupo abeliano libre Div X generado por los divisores primos. Escribimos un divisor como $D = \sum n_i Y_i$, donde los Y_i son divisores primos, los n_i son enteros, y sólo un nuúmero finito de los n_i son distintos de cero. Decimos que D es efectivo si todos los $n_i \geq 0$.

Definición. Sea X un esquema que satisface (*) y $D = \sum_{i=1}^{m} n_i$ con $ni \neq 0$ (para toda i) un divisor de Weil. El soporte de D se define como $\bigcap_{i=1}^{m} Y_i$, y se denota por Supp D.

Definición. Si X es un espacio topológico, y Z un subconjunto cerrado irreducible de X, un punto genérico para Z es un punto ζ tal que $Z = \overline{\{\zeta\}}$.

Proposición 2.1.1. *El espacio* $X = \operatorname{Spec} A$ *es un espacio* T_0.

Demostración. En efecto, si x, y son dos puntos de X correspondientes a ideales primos $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ de A, tenemos alguno de $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ ó $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$, así que alguno de los puntos x, y no aparece en la cerradura del otro. $\square$

Corolario 2.1.2. *El espacio subyacente a un esquema es un espacio T_0.*

Demostración. Si x, y son dos puntos distintos de un esquema X, el resultado es evidente si existe una vecindad afín de uno de los puntos que no contiene al otro. Si x, y están contenidos en un mismo abierto afín, el resultado se sigue de la Proposición 2.1.1. □

Observación 2.1.3. Si un espacio T_0 admite un punto genérico, entonces admite uno solo, ya que cualquier subconjunto abierto no vacío contiene todo punto genérico.

Proposición 2.1.4.

(i) *En la correspondencia biunivoca entre subconjuntos cerrados de $X = \operatorname{Spec} A$ e ideales radicales (es decir, ideales iguales a su radical) de A, los subconjuntos cerrados irreducibles de X corresponden a ideales primos de A. En particular las componentes irreducibles de X corresponden a ideales primos mínimos de$A$.*

(ii) *La función $x \mapsto \{x\}$ establece una correspodencia biunivoca entre X y el conjunto de cerrados irreducibles de X; dicho de otra manera, todo subconjunto cerrado irreducible de X admite un único punto genérico.*

Demostración. (i) resulta de los hechos siguientes: a) para todo ideal $\mathfrak{p}$ de A, hay una identificación canónica entre $V(\mathfrak{p})$ y $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{p})$ y b) $\operatorname{Spec} A$ es irreducible si y sólo si $A/\mathfrak{N}$ es entero, donde $\mathfrak{N}$ es el nilradical de A; para (ii) por a) podemos suponer que X es irreducible; entonces, de acuerdo a a) existe en A un ideal primo mínimo N, que corresponde así a un punto genérico de X. La unicidad del punto genérico resulta de la Proposición 2.1.1 y de la Observación 2.1.3. □

Proposición 2.1.5. *Sea $\varphi : A' \to A$ un homomorfismo de anillos tal que todo $f \in A$ se escribe $f = h\varphi(f')$, donde h es invertible en A (que es en particular el caso cuando φ es sobreyectivo). Entonces el morfismo inducido $\varphi_* : \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A'$ es un homeomorfismo de $X = \operatorname{Spec} A$ sobre $\varphi(X)$.*

Demostración. Mostramos que para todo subconjunto $E \subset A$, existe un subconjunto E' de A' tal que $V(E) = V(\varphi(E'))$; en virtud de que X es T_0 y de que tenemos siempre $\varphi_*^{-1}(V(E')) = V(\varphi(E'))$, esto causa primero que φ_* sea inyectivo, y entonces usando nuevamente que $\varphi_*^{-1}(V(E')) = V(\varphi(E'))$, se tiene que φ_* es un homeomorfismo. Ahora bien, basta para cada $f \in E$ tomar un $f' \in A'$ tal que $h\varphi(f') = f$ con h invertible en A; el conjunto E' es estos elementos f' satisface la Proposición. □

Proposición 2.1.6. *Si S es un conjunto multiplicativo cerrado de A, entonces $\operatorname{Spec}(S^{-1}A)$ se identifica canónicamente (con su topología) al subespacio de $X = \operatorname{Spec} A$ formado por los x tal que $p \cap S = \varnothing$, donde $\mathfrak{p} \subset A$ es el primo correspondiente al punto x.*

Demostración. Sea i_A^S, el homomorfismo natural de $A \to S^{-1}A$. Sabemos [3, Prop. 3.11 (iv), p. 41] que los ideales primos de $S^{-1}A$ son los ideales $S^{-1}\mathfrak{p}$ tales que $p \cap S = \varnothing$ y además $\mathfrak{p} = (i_A^S)^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p})$. Basta entonces aplicar la Proposición 2.1.5 a i_A^S. $\square$

Proposición 2.1.7. *Sea $(Y, \mathcal{O}_Y)$ un esquema; para todo $y \in Y$ sea (ψ, θ) el morfismo canónico $(\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_y), \widetilde{\mathcal{O}}_y) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$. Entonces ψ es un homeomorfismo de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y)$ sobre el subespacio S_y de Y formado por los z tales que $y \in \overline{\{z\}}$.*

Demostración. Como el único punto cerrado a de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y)$ está en la cer-radura de todo punto del espacio y como $\psi(a) = y$, la imagen de $Spec(\mathcal{O}_y)$ bajo la función continua ψ está contenida en S_y. Como S_y está contenido en todo abierto afín que contiene a y, podemos suponer que Y es un esquema afín. En este caso el resultado es consecuencia de la Proposición 2.1.6. $\square$

Proposición 2.1.8. *Si X es un esquema, entonces cada subconjunto cerrado irreducible (no vacío) de X admite un único punto genérico, y la función $x \mapsto x$ es así una biyección de X sobre el conjunto de sus subconjuntos cerrados irreducibles.*

Demostración. Si Y es un subconjunto cerrado irreducible de X y $y \in Y$, y si U es una vecindad abierta afín de y en X, $U \cap Y$ es irreducible; así, por la Proposición 2.1.4, $U \cap Y$ es la cerradura en U de un punto x, y por lo tanto $Y \subset U$ es la cerradura de x en X. La unicidad del punto genérico resulta del Corolario 2.1.2 y la Observación 2.1.3. $\square$

En particular, si X es un esquema entero, es irreducible y por lo anterior tiene un único punto genérico.

Proposición 2.1.9. *Sean X un esquema y Z un subconjunto cerrado irreducible de X con punto genénrico z. Entonces*

$$\mathrm{codim}\,(Z, X) = \dim\,(\mathcal{O}_{X,z}) \tag{2.1}$$

Demostración. Por la Proposición 2.1.7 los subconjuntos cerrados irreducibles de X que contienen a z están en correspondencia 1-1 con los subconjuntos cerrados irreducibles de $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{X,z})$, que a su vez están en correspondencia 1-1 con los ideales primos de $\mathcal{O}_{X,z}$ y (2.1) resulta de las definiciones. $\square$

Proposición 2.1.10. *Sea X un esquema entero con punto genérico η. Para cualquier subconjunto abierto afín $U = \mathrm{Spec}\,A$, el campo de fracciones $Q(A)$ de A es isomorfo a $\mathcal{O}_{X,\eta}$.*

Demostración. Sea $U = \mathrm{Spec}\,A$ un subconjunto abierto afín de X. Entonces, $\eta \in U$. Por ser X entero, es irreducible y entonces U es denso en X. Así, el punto η es también el punto genérico de U. Como X es un esquema entero, A es un dominio entero. El punto genérico de A es el punto determinado por el ideal (0). El tallo de la gavilla estructural en este punto es precisamente el campo de fracciones de A. $\square$

Definición. El anillo local $\mathcal{O}_{X,\eta}$ en un punto genérico η de un esquema entero X es llamado *campo de funciones* de X, y se denota por $K(X)$ (o K si no hay confusión).

Sea v una valoración en un campo K (ver §1). Si k es un subcampo de K tal que $v(x) = 0$ para toda $x \in k - \{0\}$, entonces decimos que v es una valoración de K/k.

Proposición 2.1.11. *Sea X un esquema integral de tipo finito sobre un campo k, con campo de funciones K. Decimos que una valoración de K/k tiene centro x en X si su anillo de valoración R domina al anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$. En este caso,*

(a) *Si X es separado sobre k, entonces el centro de cualquier valoración de K/k en X (si existe) es único.*

(b) *Si X es propio sobre k, entonces cada valoración de K/k tiene un único centro en X.*

Demostración.

(a) Sea v una valoración de K/k. Sea $R \subset K$ el anillo de valoración determinado por v. Supongamos que v tiene dos centros x y y. Sea ξ el punto genérico de X. Entonces la identificación $k(\xi) \to K$ determina un morfismo $U \to X$ donde $U = \operatorname{Spec} K$. Además la inclusión $k \subset R$ determina un morfismo $T \to \operatorname{Spec} k$. donde $T = \operatorname{Spec} R$. Como $\mathcal{O}_{X,x}$ y $\mathcal{O}_{X,y}$ son dominados por R, tanto x como y determinan morfimos $T \to X$, como en el criterio valorativo. Pero entonces estos dos morfimos deben ser el mismo, ya que X es separado, así que $x = y$.

(b) Como en (a) usamos el criterio valorativo. Ya tenemos unicidad del centro. Por el criterio valorativo hay un morfismo $T \to X$. Sea x la imagen del punto cerrado de T. Entonces $\mathcal{O}_{X,x}$ es dominado por R, así que x es el único centro de v. □

Considerando el punto genérico η de un divisor primo Y como un punto de X, tenemos $\overline{\{\eta\}} = Y$ y $\dim(\mathcal{O}_{X,\eta}) = 1$ (Proposición 2.1.9). Por el Teorema 1.2.8, $\mathcal{O}_{X,\eta}$ es entonces un anillo de valoración discreta. El campo de cocientes de $\mathcal{O}_{X,\eta}$ coincide con K (Proposición 2.1.10), el campo de funciones de X. Llamamos a la valoración discreta correspondiente, v_Y , la valoración de Y . Por ser X separado, Y está determinado de manera única por su valoración (Proposición 2.1.11). Ahora, sea $f \in K^*$ una función racional (distinta de cero) en X. Entonces $v_Y(f)$ es un entero. Si es positivo, decimos que f tiene un cero a lo largo de Y , de orden $v_Y(f)$; si es negativo, decimos que f tiene un polo a lo largo de Y de orden $-v_Y(f)$.

Lema 2.1.12. *Sea X con (*), y sea $f \in K^*$ una función no cero en X. Entonces $v_Y(f) = 0$ para todos excepto un número finito de divisores primos.*

Demostración. Sea $U = \operatorname{Spec} A$ un subconjunto abierto afín de X. Consideremos primero el caso en el que $f \in A$. Tenemos que $Z = X - U$ es un subconjunto propio cerrado de X. Como X es noetheriano podemos escribir $Z = Z_1 \cup \ldots \cup Z_n$ [7, I, Prop. 1.5, p.5] con Z_i cerrados irreducibles. Así Z puede contener a lo más un número finito de divisores primos de X, ya que cualquier subconjunto cerrado irreducible de Z de codimensión uno en X debe ser alguno de los Z_i. Los demás divisores primos deben intersectar a U. Así que es suficiente mostrar que entre los divisores primos Y de X que intersectan a U hay sólo un número finito de ellos para los cuales $v_Y(f) \neq 0$.

Si $Y \cap U \neq \varnothing$, entonces U debe contener el punto genérico η de Y. Este punto genérico η corresponde a un ideal primo $\mathfrak{p}$ de altura 1 en A y para que $v_Y(f) > 0$, es necesario y suficiente que $f \in \mathfrak{p}$. Ahora bien, esto ocurre si y sólo si $V(\mathfrak{p})$ está contenido $V(Af) \subseteq U$. Como $f \neq 0$,éste es un subconjunto cerrado propio, así que contiene sólo un número finito de subconjuntos cerrados irreducibles de codimensión uno de U.

Si $f = g/h$ con $g, h \in A$, el resultado se sigue de que $v_Y(g/h) = v_Y(g) - v_Y(h)$ por propiedades de una valoración. □

Definición. Sea X con (*) y sea $f \in K^*$. Definimos el *divisor de* f, denotado por (f), como

$$(f) = \sum v_Y(f) \cdot Y$$

donde la suma se toma sobre todos los divisores primos de X. Por el Lema 2.1.12 ésta es una suma finita, por lo que ciertamente se trata de un divisor. A cualquier divisor que es igual al divisor de una función se le llama divisor *principal*.

Nótese que si $f, g \in K^*$, entonces $(f/g) = (f) - (g)$ por las propiedades de valoraciones. Por lo tanto, mandar una función f a su divisor (f) da un homomorfismo del grupo multiplicativo K^* al grupo aditivo $\operatorname{Div} X$, y la imagen, que consiste de divisores principales, es un subgrupo de $\operatorname{Div} X$.

Definición. Sea X con (*). Dos divisores de Weil D y D' se dice que son *linealmente equivalentes*, denotado $D \sim D'$, si $D - D'$ es un divisor principal. El grupo de divisores de Weil módulo equivalencia lineal es llamado *grupo de clases de divisores* de X, y se denota por $\operatorname{Cl} X$.

A continuación, calculamos algunos casos especiales del grupo de clases para dar una idea de cómo es.

Proposición 2.1.13. *Sea A un dominio noetheriano. Entonces A es un dominio de factorización única si y sólo si $X = \operatorname{Spec} A$ es normal y $\operatorname{Cl} X = 0$.*

Demostración. Todo DFU es enteramente cerrado [21, vol.1, p.261], así que X será normal. Por otro lado, A es un DFU si y sólo si todo ideal primo de altura 1 es principal

[16, 2, p.141]. Así, lo que hay que mostrar es que si A es un dominio enteramente cerrado, entonces cada ideal primo de altura 1 es principal si y sólo si $\mathrm{Cl}(\operatorname{Spec} A) = 0$.

Si cada ideal primo de altura 1 es principal, consideremos un divisor primo $Y \subseteq X = \operatorname{Spec} A$. Entonces $Y = V(\mathfrak{p})$ con $\mathfrak{p}$ un ideal primo de altura 1. Si p es generado por un elemento $f \in A$, entonces el divisor de f es $1 \cdot Y$. En efecto, si $\mathfrak{p} = Af$, entonces $v_Y(f) = 1$ y $v'_Y(f) = 0$ para $Y \neq Y'$, pues si Y' corresponde al ideal primo $\mathfrak{p}'$ de altura 1, $f \notin \mathfrak{p}$ o de lo contrario $0 \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ pero la altura de $\mathfrak{p}'$ es 1. De modo que cada divisor es principal y $\mathrm{Cl}\, X = 0$. Para el inverso, supongamos que $\mathrm{Cl}\, X = 0$. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de altura 1 y sea Y el divisor primo correspondiente. Entonces hay una $f \in K$, el campo de cocientes de A, con $(f) = Y$. Mostraremos que de hecho $f \in A$ y f genera $\mathfrak{p}$. Como $v_Y(f) = 1$, tenemos $f \in A_{\mathfrak{p}}$, y f genera $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Si $\mathfrak{p}' \subseteq A$ es cualquier otro ideal primo de altura 1, entonces $\mathfrak{p}'$ corresponde a un divisor primo Y' de X y $v'_Y(f) = 0$ así que $f \in A_{\mathfrak{p}'}$. Ahora el resultado algebraico de abajo implica que $f \in A$. De hecho, $f \in A \cap \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. Ahora, para mostrar que f genera $\mathfrak{p}$, sea g algún otro elemento de $\mathfrak{p}$. Entonces $v_Y(g) \geq 1$ y $v'_Y(g) \geq 0$ para todo $Y' \neq Y$. Por tanto, $v_Y(g/f) \geq 0$ para todos los divisores Y' (incluso Y). Así $g/f \in A'_{\mathfrak{p}}$ para todo $\mathfrak{p}'$ de altura 1, de modo que de nuevo por el resultado de abajo, $g/f \in A$. En otras palabras, $g \in A_f$ lo cual muestra que $\mathfrak{p}$ es un ideal principal, generado por f. $\square$

Proposición 2.1.14. *Sea A un dominio noetheriano enteramente cerrado. Entonces*

$$A = \bigcap_{ht\mathfrak{p}=1} A_{\mathfrak{p}}$$

donde la intersección se toma sobre todos los ideales primos de altura 1.

Demostración. [16, 2, Teo. 38, p. 124] $\square$

Ejemplo 2.1.15. Si X es el n-espacio afín $\mathbb{A}^n_k$ sobre un campo k, entonces $\mathrm{Cl}\, X = 0$. En efecto, $X = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]$, y el anillo polinomial es un DFU.

En el ejemplo anterior se tiene que un divisor primo $Y \subset X = \mathbb{A}^n_k$ es $V(\mathfrak{p})$, para algún ideal primo p de altura 1, que por [7, I, 1.12 A] es principal. Así que cualquier divisor primo es $V((f))$ para un polinomio irreducible f, que es único salvo multiplicaciíon por una unidad. Inversamente, cualquier polinomio irreducible f determina un ideal primo (f) que tiene altura 1 por [7, I,1.11A], así que $V((f))$ es un divisor primo. Introducimos la relación de equivalencia entre polinomios de $k[x_1, \ldots, x_n]$ dada por

$$f \sim g \Leftrightarrow f = \alpha g, \alpha \in k \tag{2.2}$$

Llamamos *clases asociadas* a las clases de equivalencia resultantes, y los elementos de cada clase se dice que están asociados entre sí. De este modo lo anterior dice que hay una biyección entre divisores primos de $\mathbb{A}^n_k$ y clases asociadas de polinomios irreducibles $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$.

Definición. Sea $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, donde k es un campo y $n \geq 1$. Dado un polinomio g no cero y un polinomio irreducible f, sea $v_f(g)$ el mayor entero $i \geq 0$ tal que f^i divide a g ($1 = f^0$ siempre divide a g). Para cualquier $a \in k$ es claro que $v_f(a) = 0$ para todo polinomio irreducible f. Es también claro que si f, f' son polinomios irreducibles asociados, entonces $v_f(g) = v_{f'}(g)$.

Dado un polinomio no constante distinto de cero $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$, hay esencialmente una factorización única de g de la siguiente forma

$$g = u \cdot f_1^{n_1} \cdots f_s^{n_s}$$

donde u es una unidad y los f_i son polinomios irreducibles, y es claro que $v_{f_i}(g) = n_i$.

Proposición 2.1.16. *Sea k un campo y $A = k[x_1, \ldots, x_n]$. Sea f un polinomio irreducible y $\mathfrak{p} = (f)$. Sea $v_\mathfrak{p}$ la valoración discreta en K con anillo de valoración $A_\mathfrak{p}$ y sean $g, h \in A$ con $g, h \neq 0$. Entonces $v_\mathfrak{p}(g/h) = v_f(g) - v_f(h)$.*

Demostración. Como $v_\mathfrak{p}(g/h) = v_\mathfrak{p}(g) - v_\mathfrak{p}(h)$, basta probar que $v_\mathfrak{p}(g) = v_f(g)$ para $g \neq 0$ en A. Primero supongamos que $v_\mathfrak{p}(g) = t$. Esto significa que $g = f^k u$, con u unidad en $A_\mathfrak{p}$. En tal caso, $sg = af^t$ donde $a, s \in A$ con $a, s \notin \mathfrak{p}$. Esta expresión implica $f^t | g$ pues f es irreducible. Por otro lado, f^{t+1} no divide a g pues f no divide a a. La otra implicación es una consecuencia inmediata de que $v_\mathfrak{p}(g)$ es el mayor $k \geq 0$ con $g/1 \in \mathfrak{p}^t A_\mathfrak{p}$, y $\mathfrak{p}^t = (f^t)$. □

Sea $X = \mathbb{A}_k^n$ el n-espacio afín y sea K el campo de fracciones de $A = k[x_1, \ldots, x_n]$. Dados $g, h \neq 0$ en A, el divisor correspondiente es

$$(g/h) = \sum_{ht\mathfrak{p}=1} v_\mathfrak{p}(g/h) \cdot V(\mathfrak{p}) = \sum_f (v_f(g) - v_f(h)) \cdot V(f)$$

donde la segunda suma es sobre las clases de equivalencia de polinomios irreducibles bajo la relación de asociación (2.1.2), y escogemos un solo f por clase. Por ejemplo si g no es constante con factorización $g = u \cdot p_i^{n_i} \cdots p_s^{n_s}$ con los p_i polinomios no asociados irreducibles y $n_i \geq 1$, entonces

$$(g) = n_i \cdot V((p_i)) + \ldots + n_s \cdot V((p_s))$$

Esto hace claro que $\mathrm{Cl}(\mathbb{A}_k^n) = 0$. En efecto, si $D = \sum_{i=1}^r n_i Y_i$ es un divisor efectivo, escribimos $Y_i = V(f_i)$, con f_i un polinomio irreducible. Entonces $D = (f_1^{n_1} \cdots f_r^{n_r})$, así que todo divisor efectivo es principal. Pero todo divisor D puede ser escrito como una diferencia $D_1 - D_2$ de dos divisores efectivos, así que todo divisor es principal, y el resultado se sigue. Sea ahora k un campo y $S = k[x_0, \ldots, x_n]$ $(n \geq 1)$. Entonces $\mathbb{P}_k^n$

es un esquema finito sobre k, entonces para cualquier subconjunto cerrado irreducible $Y \subset \mathbb{P}_k^n$ tenemos

$$\dim Y + \operatorname{codim}(Y, X) = \dim(\mathbb{P}_k^n) = n$$

Sabemos que $\dim Y = \dim(S/I(Y)) - 1$. Se sigue de [7, 1.8A] que $\operatorname{ht} I(Y) = \operatorname{codim}(Y, X)$. Por otro lado, $\mathbb{P}_k^n$ es un esquema entero separado. La regularidad en codimensión uno se sigue del hecho de que $\mathbb{P}_k^n$ puede cubrirse por abiertos afines isomorfos a $\mathbb{A}_k^n$. Así $\mathbb{P}_k^n$ satisface (*) y tiene sentido hablar de divisores de Weil.

La biyección entre subconjuntos cerrados irreducibles de $\mathbb{P}_k^n$ e ideales primos de S que no contienen a S_+ identifica a los divisores primos de $\mathbb{P}_k^n$ con polinomios homogéneos de altura 1 (ya que $\operatorname{ht} S_+ = \operatorname{ht}(x_0, \cdots, x_n) = n+1$). Por [7, I, 1.12A] cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de altura 1 en S es principal, y si $\mathfrak{p}$ es generado por f, entonces f es necesariamente un polinomio irreducible. Inversamente, cada polinomio homogéneo irreducible genera un primo homogéneo de altura 1 por [7, I, 1.11A]. Así que el mapeo $f \mapsto V((f))$ da una biyección entre clases asociadas de polinomios homogéneos irreducibles $f \in S$ con los divisores primos de $\mathbb{P}_k^n$. Entonces la siguiente definición tiene sentido:

Definición. Sea k un campo y $n \geq 1$ y sea $Y \subset \mathbb{P}_k^n$ un divisor primo. El *grado* de Y, denotado por $\deg Y$, es el grado del polinomio homogéneo irreducible asociado (así que $\deg Y \geq 1$). Para cualquier divisor $D = \sum_i n_i \cdot Y_i$ el grado de D es $\deg D = \sum_i n_i \cdot \deg Y_i$. Para divisores D, D' es claro que $\deg(D + D') = \deg D + \deg D'$.

Denotamos por $S_{((0))}$ el subanillo de elementos de grado 0 en la local- ización de S con respecto al subconjunto multiplicativo T que consiste de elementos homogéneos no en (0).

Con la notación de arriba tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.1.17. *Sea $f \in S$ un polinomio homogéneo irreducible y $\mathfrak{p} = (f)$. Sea $v_\mathfrak{p}$ la valoración discreta en el campo $S_{((0))}$ con anillo de valoración $S(\mathfrak{p})$ y sean g, h polinomios homogéneos del mismo grado. Entonces $v(\mathfrak{p})(g/h) = v_f(g) - v_f(h)$.*

Demostración. Como $v_{(\mathfrak{p})}(g/h) = v_{(\mathfrak{p})}(g) - v_{(\mathfrak{p})}(h)$, basta probar que $v_{(\mathfrak{p})}(g) = v_f(g)$ para $g \neq 0$ en S. Podemos suponer que $\mathfrak{m} = (f/x_i^{\partial f})$ para alguna i. Supongamos ahora que $v_{(\mathfrak{p})}(g) = t$, entonces $g = (f/x_i^{\partial f})^t u$, donde u es una unidad en $S_{(\mathfrak{p})}$, esto es, $u = r/s$, donde r, s son polinomios homogéneos del mismo grado y $r, s \notin \mathfrak{p}$. Entonces tenemos $sg(x_i^{\partial f})^t = f^t r$, y de esta expresión concluimos que $f^k | g$ y f^{k+1} no divide a g, pues f no divide a r. La otra parte es inmediata. $\square$

Sea $X = \mathbb{P}_k^n$. Dados polinomios no cero $g, h \in S$ del mismo grado, el divisor principal correspondiente es

$$(g/h) = \sum_{ht\mathfrak{p}=1} v_{\mathfrak{p}}(g/h) \cdot V(\mathfrak{p}) = \sum_{f} (v_f(g) - v_f(h)) \cdot V(f)$$

donde la primer suma es sobre ideales primos $\mathfrak{p}$ homogéneos y en la segunda tomamos un solo f por clase de equivalencia de polinomios homogéneos irreducibles bajo la relación de asociación.

Proposición 2.1.18. *Sea X el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_k$ sobre un campo k. Sea H el hiperplano $x_0 = 0$. Entonces:*

(a) *Si D es un divisor cualquiera de grado d, se tiene $D \sim dH$;*

(b) *Para cualquier $f \in K^*$, $deg\ (f) = 0$;*

(c) *La función deg da un isomorfismo de grupos abelianos $deg : ClX \to \mathbb{Z}$.*

Demostración. Sea $S = k[x_0, ..., x_n]$ y K el campo de funciones de X. Si $f \in K^*$ entonces corresponde a un cociente g/h de dos polinomios homogéneos $g, h \in S$ del mismo grado. Si factorizamos g, h como $g = u \cdot p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$ y $h = v \cdot p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$ para $u, v \in K$ y p_i polinomios irreducibles, entonces los f_i deben ser homogéneos (permitimos exponentes cero para que hayan los mismos p_i) y por la Proposición 2.1.17, el divisor principal (f) está definido por

$$(f) = \sum_{i=1}^{r} (n_i - m_i) \cdot Y_i$$

de donde

$$\begin{aligned} \deg(f) &= \sum_{i=1}^{r} (n_i - m_i) \deg(p_i) \\ &= \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot \deg\ (p_i) - \sum_{i=1}^{r} m_i \cdot \deg\ (p_i) \\ &= \deg\ (g) - \deg\ (h) \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo cual prueba (b). Para probar (a), sea $D = \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot D(p_i)$ cualquier divisor efectivo no cero de grado d. Entonces $p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r} / x_0^d \in S_{((0))}$ y el divisor principal correspondiente es $D - dH$, lo cual muestra que $D \sim dH$. Es inmediato que todo divisor de grado cero es principal. Sacar grados define un morfismo de grupos abelianos Div $X \to \mathbb{Z}$, y hemos visto que el kernel de este mapeo consiste de divisores principales. Como deg $(dH) = d$ para toda $d \in \mathbb{Z}$, obtenemos el isomorfismo deseado. $\square$

Proposición 2.1.19. *Sea X con (*), sea Z un subconjunto cerrado propio de X, y sea $U = X - Z$. Entonces:*

(a) *Hay un homomorfismo sobreyectivo* $\mathrm{Cl}\, X \to \mathrm{Cl}\, U$ *definido por* $D = \sum n_i Y_i \mapsto \sum n_i (Y_i \cap U)$*, donde ignoramos aquellos* $Y_i \cap U$ *que sean vacíos;*

(b) *Si* $\operatorname{codim}(Z, X) \geq 2$*, entonces* $\mathrm{Cl}\, X \to \mathrm{Cl}\, U$ *es un isomorfismo;*

(c) *Si Z es un subconjunto cerrado irreducible de codimensión 1, entonces hay una sucesión exacta*

$$Z \to \mathrm{Cl}\, X \to \mathrm{Cl}\, U \to 0$$

donde el primer mapeo está definido por $1 \mapsto 1 \cdot Z$

Demostración.

(a) Si Y es un divisor primo en X, entonces $Y \cap U$ es vacío o un divisor primo en U. Si $f \in K^*$, y $(f) = \sum n_i Y_i$, entonces considerando f como función racional en U, tenemos $(f)_U = \sum n_i (Y_i \cap U)$, así que en efecto obtenemos un homomorfismo $\mathrm{Cl}\, X \to \mathrm{Cl}\, U$. Es sobreyectivo porque cada divisor primo de U es la restricción de su cerradura en X.

(b) Los grupos Div X y Cl X dependen sólo de subconjuntos de codimensión 1, así que quitar un subconjunto cerrado Z de codimensión ≥ 2 no cambia nada.

(c) El kernel de $\mathrm{Cl}\, X \to \mathrm{Cl}\, U$ consiste de divisores cuyo soporte está contenido en Z. Si Z es irreducible, el kernel es sólo el subgrupo de Cl X generado por $1 \cdot Z$. □

Ejemplo 2.1.20. Sea Y una curva irreducible de grado d en $\mathbb{P}^2_k$. Entonces $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^2_k - Y) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. En efecto, haciendo $X = \mathbb{P}^2_k, U = \mathbb{P}^2_k - Y$ en la Proposición anterior e identificando $\mathrm{Cl}\, \mathbb{P}^2_k$ con $\mathbb{Z}$ mediante la Proposición 2.1.18, se tiene la sucesión exacta

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^2_k - Y) \to 0$$

donde el primer mapeo está definido por $1 \mapsto d$. Así que $\ker \varphi = d\mathbb{Z}$ y el resultado se sigue de que φ es sobreyectivo.

Proposición 2.1.21. *Sea k un campo de característica distinta de 2. Sea* $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ *un polinomio no constante libre de cuadrados , i.e., en la factorización única de f en polinomios irreducibles, no hay factores repetidos. Entonces el anillo* $A = k[x_1, \ldots, x_n, z]/(z^2 - f)$ *es enteramente cerrado.*

Demostración. Consideremos el campo de fracciones K de A. En este campo, tenemos $(1/g+zh)((g-zh)/(g-zh)) = (g-zh)/(g^2-fh^2)$, ya que $z^2 = f$ en A, así que cada elemento de K puede ser escrito de la forma $g+zh$, donde $g, h \in k(x_1, \ldots, x_n)$. Luego K es justamente $k(x_1, \ldots, x_n)[z]/(z^2 - f)$. Ésta es una extensión de Galois de $k(x_1, \ldots, x_n)$ con grupo de Galois $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ generado por $\sigma : z \mapsto -z$. Sea $\alpha = g + hz \in K$, donde $g, h \in k(x_1, \ldots, x_n)$. Afirmamos que α es entero sobre $k[x_1, \ldots, x_n]$ si y sólo si $g, h \in k[x_1, \ldots, x_n]$. En efecto, supongamos primero que $g, h \in k[x_1, \ldots, x_n]$; como el polinomio mínimo de α es $X^2 - 2gX + (g^2 - h^2 f)$ el resultado se sigue. Inversamente, supongamos que α está en B, la cerradura de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Entonces $\alpha + \sigma\alpha = 2f$ es σ-invariante y está en B y por lo tanto en $k[x_1, \ldots, x_n]$ (cf. [1, Ch. 5, Ex. 14]). Similarmente $\alpha - \sigma\alpha = 2hz \in B$, y como $z \in B$ (ya que z es raíz de $x^2 - f$), se tiene que $2hz^2 = 2hf \in B$. Pero esto claramente implica que $h \in B$ y como también es σ-invariante, $h \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Concluimos así que A es la cerradura entera de $k[x_1, \ldots, x_n]$ en K. Por [1, Cor. 5.5] se tiene que A es un anillo enteramente cerrado, como se quería. □

Ejemplo 2.1.22. Sea k un campo, sea $A = k[x, y, z]/(xy - z^2)$ y sea $X = \operatorname{Spec} A$. Entonces X es un cono cuádrico afín en $\mathbb{A}^3_k$. Mostraremos que $\mathrm{Cl}\ X = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Consideremos una recta Y contenida en X. Por ejemplo, $Y : y = z = 0$. Primero notemos que como Y es un divisor primo, se tiene por la Proposición 2.1.19 la sucesión exacta

$$\mathbb{Z} \to \mathrm{Cl}\ X \to \mathrm{Cl}\ (X - Y) \to 0 \tag{2.3}$$

donde el primer mapeo manda $1 \mapsto 1 \cdot Y$. El punto genérico de Y es el correspondiente al ideal $\mathfrak{p} = (y, z) \subset A$. Observemos que también $Y = V((y))$ pues en A se cumple $z^2 = xy$; luego, z está en todo ideal primo que contenga a y. Sea entonces $U = X - Y = D(y)$; tenemos que $U = \operatorname{Spec} A_y$. Ahora, $A_y = k[x, y, y^{-1}, z]/(xy - z^2)$. En este anillo, $x = y^{-1}z^2$, así que podemos eliminar x, y encontramos $A_y \cong k[y, y^{-1}, z]$. Éste es un DFU, así que por la Proposición 2.1.13, $\mathrm{Cl}\ (X - Y) = 0$. Por lo tanto de (2.3) se obtiene que el homomorfismo $\mathbb{Z} \to \mathrm{Cl}\ X$ es sobreyectivo. Vamos a probar que su kernel es $2\mathbb{Z}$.

En primer lugar veamos que $(y) = 2 \cdot Y$. En efecto, para calcular $v_Y(y)$ consideramos el anillo $A_{\mathfrak{p}}$, en el cual podemos expresar $y = z^2/x$, luego tenemos que $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = (z)$, y así $v_Y(z) = 1$ y $v_Y(y) = 2$. Por otra parte, si $\mathfrak{p}'$ es otro primo de altura 1 tiene que pasar $y \notin \mathfrak{p}'$ o de lo contrario $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ y tendría que darse la igualdad. Por consiguiente y es una unidad de $A_{\mathfrak{p}'}+$ y $v_{\mathfrak{p}'}(y) = 0$. Resta probar que Y mismo no es un divisor principal.

Como A es enteramente cerrado (Proposición 2.1.21), esto es equivalente a mostrar que el ideal primo de Y, a saber $\mathfrak{p} = (y, z) \subset A$, no es principal (ver prueba de la Proposición 2.1.13). Para ello nos apoyaremos en la singularidad del cono en el origen. Sea $\mathfrak{m} = (x, y, z) \subset A$ y nótese que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ es un espacio vectorial 3-dimensional sobre

k generado por $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$, las imágenes de x, y, z. Claramente son generadores; la independencia lineal se sigue de que si $a, b, c \in k$ cumplen $a\overline{x} + b\overline{y} + c\overline{z} \in \mathfrak{m}^2$, puesto que $(xy - z^2) \subset (x, y, z)^2 \subset k[x, y, z]$, se debe tener que $ax + by + cz \in (x, y, z)^2 \subset k[x, y, z]$ lo que es posible sólo si $a = b = c = 0$. Si $\mathfrak{p}$ fuera principal, entonces su imagen en $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ estaría generada sobre k por un único elemento y tendría dimensión a lo más 1, pero como contiene a y y z, su dimensión es 2. Por lo tanto, $\mathfrak{p}$ no puede ser un ideal principal.

Proposición 2.1.23. *Sea X con (*). Entonces $X \times \mathbb{A}^1 (= X \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[t]$ también satisface (*), y* $\operatorname{Cl} X \cong \operatorname{Cl} (X \times \mathbb{A}^1)$.

Demostración. Todo morfismo de esquemas afines es separado así que $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[t] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ lo es, y $X \times \mathbb{A}^1 \to X$ lo es también al ser obtenido por extensión de base. Como X es separado, al componer con $X \to \operatorname{Spec} Z$ obtenemos que $X \times \mathbb{A}^1 \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ es separado. Es claro que también es noetheriano y entero. Para ver que es regular en codimensión uno, nótese que hay dos tipos de puntos de codimensión uno en $X \times \mathbb{A}^1$. El tipo 1 es un punto x cuya imagen no es el punto genérico de X. En este caso, si y es la imagen de x bajo la proyección $\pi : X \times \mathbb{A}^1 \to X$, tomando una vecindad afín $V = \operatorname{Spec} A$ de y, vemos que $\pi^{-1}(V) = \operatorname{Spec} A[t]$. En este caso la restricción de π está dada por $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p} \cap A$. Si y corresponde a un ideal $\mathfrak{q} \subset A$ y su altura es mayor a uno, se tiene una cadena de ideales primos $\mathfrak{q}_i$ contenidos en $\mathfrak{q}$ de longitud mayor a uno, y multiplicando por $\mathfrak{q}_i$, obtenemos una cadena de ideales primos $\mathfrak{q}_i A[t] \subset A[t]$ contenidos en $\mathfrak{p}$, de longitud mayor a uno. Así y tiene codimensión uno. Además en este caso $\mathfrak{q} = (\mathfrak{p} \cap A)A[t]$. Su anillo local es $\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_y[t]\mathfrak{m}_y$, el cual es un anillo de valoración discreta, pues $\mathcal{O}_y$ lo es. Además, ($\diamond$) el divisor primo correspondiente a $\overline{\{x\}}$ es justamente $\pi^{-1}(\overline{\{y\}})$. El tipo 2 es un punto $x \in X \times \mathbb{A}^1$ de codimensión uno, cuya imagen en X es el punto genérico de X. En este caso $\mathcal{O}_x$ es la localización de $K[t]$ en algún ideal maximal, donde K es el campo de funciones de X. Es un dominio de valoración discreta porque $K[t]$ es un dominio de ideales principales. Así $X \times \mathbb{A}^1$ satisface (*).

Definimos un mapeo

$$\operatorname{Cl} X \to \operatorname{Cl} (X \times \mathbb{A}^1), D = \sum n_i Y_i \mapsto \pi^* D = \sum n_i \pi^{-1}(Y_i).$$

Si $f \in K^*$, entonces por ($\diamond$) vemos que $\pi^*((f))$ es el divisor principal asociado a f considerado como un elemento de $K(t)$, el campo de funciones de $X \times \mathbb{A}^1$. Así que tenemos un homomorfismo $\pi^* : \operatorname{Cl} X \to \operatorname{Cl}(X \times \mathbb{A}^1)$. Para mostrar que π^* es inyectivo, supongamos que $D \in \operatorname{Div} X$ y $\pi^* D = (f)$, para algún $f \in K(t)$. Por ($\diamond$), el soporte de $\pi^* D$ son sólo divisores primos de tipo 1, así que f debe estar en K. De lo contrario, podríamos escribir $f = g/h$, con $g, h \in K[t]$, primos relativos. Si g, h no están ambos en K, entonces (f) implicará algún divisor primo de tipo 2 en

$X \times \mathbb{A}^1$. En efecto, tomando el caso g no constante y $h = 1$, podemos suponer que g es irreducible, y tomando el ideal generado por g se obtiene un ideal primo en $K[t]$. Tomando la preimagen bajo la inclusión $A[t] \hookrightarrow K[t]$ obtenemos un ideal primo $\mathfrak{p}$.

Si $ag \in p$ para alguna $a \in A$, entonces usando el lema de Zorn, vemos que hay un primo mínimo $\mathfrak{q} \subset A[t]$ tal que $ag \in \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Por el Teorema del ideal principal, $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) = 1$. Entonces $\overline{\{\mathfrak{q}\}}$ es un cerrado irreducible de codimensión 1 y como $\mathfrak{q} \cap A \subseteq \mathfrak{p} \cap A = 0$ se trata de un divisor irreducible de tipo 2. Por otro lado $v_{\mathfrak{q}}(g) = 1$ pues g es el generador del ideal máximo de $A[t]_{\mathfrak{q}} = K[t]_g$ y $v_{\mathfrak{q}}(a) = 0$.

Así que (f) involucra a este divisor primo de $X \times \mathbb{A}^1$. En efecto, para ver que el coeficiente de $\overline{\{\mathfrak{q}\}}$ en (g/h) no es cero, nótese que $v_{\mathfrak{q}}(h) = 0$, pues $(h, g) = 1$ en $K[t]$; entonces $h \in /(g)K[t]_g$, esto es $v_q(h) \leq 0$, pero para toda α tal que $\alpha \in A[t]$ se tiene $v_{\mathfrak{q}}(h) = v_{\mathfrak{q}}(\alpha) \geq 0$ y por lo tanto $v_{\mathfrak{q}}(h) = 0$.

Ahora bien, si $f \in K$, es claro que $D = (f)$, así que π^* es inyectivo. Para mostrar que π^* es sobreyectivo será suficiente mostrar que cualquier divisor primo de tipo 2 en $X \times \mathbb{A}^1$ es linealmente equivalente a una combinación lineal de divisores primos de tipo 1. Sea pues $Z \subseteq X \times \mathbb{A}^1$ un divisor primo de tipo 2. éste corresponde a un ideal $\mathfrak{p}$ de altura 1 en una vecindad afín $\operatorname{Spec} A[t]$ de $X \times \mathbb{A}^1$. El ideal inducido por $\mathfrak{p}$ en $\operatorname{Spec} K[t]$ es primo; como además es principal, tiene un generador irreducible, digamos f. Entonces $f \in K(t)$, y el divisor de f consiste de Z además de algo puramente de tipo 1. No puede implicar ningún otro divisor de tipo 2. En efecto, podemos asumir que $f \in A[t]$, entonces $f \in \mathfrak{p}, v(f) \geq 1$. Si $\mathfrak{q} \subset A[t]$ es otro ideal primo del tipo 2, y $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, entonces $v_{\mathfrak{q}}(f) = 0$, pues $v_{\mathfrak{q}}(f) \geq 0$ ya que $f \in A[t]$, y si $f \in \mathfrak{q}A[t]_{\mathfrak{q}}$ entonces $f \in \mathfrak{q}$ así que $\mathfrak{q}K[t] = \mathfrak{p}K[t] = (f)$ (porser f irreducible).

Así Z es linealmente equivalente a un divisor puramente de tipo 1. Esto completa la prueba. □

Ejemplo 2.1.24. Sea Q la superficie cuádrica no singular $xy = zw$ en $\mathbb{P}^3_k$. Mostraremos que $\mathrm{Cl}\ Q = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Usamos el hecho de que Q es isomorfo a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Sean p_1 y p_2 las proyecciones de Q sobre los dos factores. Entonces como en la prueba de la Proposición 2.1.23 obtenemos homomorfismos $p_1^*, p_2^* : \mathrm{Cl}\ \mathbb{P}^1 \to \mathrm{Cl}\ Q$. Primero mostraremos que p_1^* y p_2^* son inyectivos. Sean $Y_1 = pt \times \mathbb{P}^1, Y_2 = \mathbb{P}^1 \times pt$. Entonces $Q - Y_1 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$, y la composición

$$\mathrm{Cl}\ \mathbb{P}^1 \xrightarrow{p_2^*} \mathrm{Cl}\ Q \xrightarrow{\rho_1} \mathrm{Cl}\ (\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1)$$

(donde ρ_1 es el homomorfismo de la Proposición 2.1.19), es el isomorfismo de la Proposición 2.1.23. Por tanto p_2^* (y similarmente p_1^*) es inyectivo. Ahora considérese la sucesión exacta de la Proposición 2.1.19 (c) para Y,

$$\mathbb{Z} \to \mathrm{Cl}\ Q \xrightarrow{\rho_1} \mathrm{Cl}\ (\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1) \to 0$$

En esta sucesión el primer mapeo manda 1 a Y_1. Pero si identificamos $\mathrm{Cl}\ \mathbb{P}^1$ con $\mathbb{Z}$

haciendo que 1 sea la clase de un punto, entonces este primer mapeo es justamente p_1^*, y por ende es inyectivo. Como la imagen de p_2^* va isomórficamente a Cl $(\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1)$ (como hemos visto), concluimos que Cl $Q \cong \mathrm{Im} p_1^* \oplus \mathrm{Im} p_2^* = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, ya que el primer mapeo tiene un inverso por la izquierda, a saber deg. Si D es cualquier divisor en Q, sea (a, b) el par ordenado de enteros en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ correspondiente a la clase de D bajo este isomorfismo. Entonces decimos que D es de tipo (a, b) en Q.

Proposición 2.1.25. *Sea Y una variedad afín de dimensión r en $\mathbb{A}_n$. Sea H una hipersuperficie en $\mathbb{A}^n$, y asumamos que $Y \nsubseteq H$. Entonces cada componente irreducible de $Y \cap H$ tiene dimensión $r - 1$.*

Demostración. Sea $A(Y)$ el anillo afín coordenado de Y y supongamos que H está definida por una ecuación $f = 0$. Entonces las componentes irreducibles de $Y \cap H$ corresponden a ideales primos mínimos $\mathfrak{p}$ del ideal principal (f) en $A(Y)$. Ahora bien, por [7, I, 1.11A], cada uno de los $\mathfrak{p}$ tiene altura uno, así que por [7, I, 1.8A], $A(Y)/\mathfrak{p}$ tiene dimensión $r - 1$. Por [7, I, 1.7] esto muestra que cada componente irreducible tiene dimensión $r - 1$. □

Ejemplo 2.1.26. Sea k un campo algebraicamente cerrado, y sea X una subvariedad cerrada de $\mathbb{P}_k^n$ que es no singular en codimensión uno (y por tanto satisface (*)). Para cualquier divisor $D = \sum n_i Y_i$ en X, definimos el *grado* de D como $\sum n_i \deg Y_i$, donde $\deg Y_i$ es el grado de la componente Y_i, considerada como variedad proyectiva por sí misma; esto es, tomamos $r!$ veces el coeficiente principal de P_Y , el *polinomio de Hilbert* (ver [7, p.52] para su definición) de su anillo coordenado $S(Y)$.

Sea V una hipersuperficie en $\mathbb{P}^n$ que no contiene a X, y sean Y_i las componentes irreducibles de $V \cap X$. Son todas de codimensión 1 por la Proposición 2.1.25. Para cada i, sea f_i una ecuación local para V en algún conjunto abierto U_i para el cual $Y_i \cap U_i \neq \varnothing$, y sea $n_i = v_{Y_i}(f_i)$, donde f_i es la restricción de f_i a $U_i \cap X$. Entonces definimos el *divisor* $V.X$ como $\sum n_i Y_i$. Extendiendo linealmente obtenemos un homomorfismo bien definido del subgrupo de Div $\mathbb{P}^n$ consistente de divisores, ninguna de cuyas componentes contiene a X, a Div X. Si D es un divisor principal en $\mathbb{P}^n$, para el cual $D.X$ está dado como en la definición anterior, entonces $D.X$ es principal en X. De este modo obtenemos un homomorfismo Cl $\mathbb{P}^n \to$ Cl X.

De hecho, el entero ni que acabamos de definir, coincide con la multiplicidad de intersección $i(X, V; Y_i)$ definida para variedades proyectivas en general [7, I, 7]. Por el Teorema de Bézout generalizado [7, I, 7.7] se tiene que para cualquier divisor D en $\mathbb{P}^n$, ninguna de cuyas componentes contiene a X,

$$\deg(D.X) = (\deg D) \cdot (\deg X)$$

Más aún si D es un divisor principal en X, hay una función racional f en $\mathbb{P}^n$ tal que $D = (f).X$. Se sigue que deg $D = 0$. Así la función grado (deg) define un homomorfismo deg : Cl $X \to Z$. Finalmente, hay un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cl}\ \mathbb{P}^n \arrow[r] \arrow[d, "\deg"', "\cong"] & \mathrm{Cl}\ X \arrow[d, "\deg"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot \deg\ x"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

y en particular, vemos que el mapeo Cl $\mathbb{P}^n \to$ Cl X es inyectivo.

Ejemplo 2.1.27 (Conos)**.** Conos. En este ejemplo comparamos el grupo de clases de una variedad proyectiva V al grupo de clases de su cono. Así que sea V una variedad proyectiva en $\mathbb{P}^n$, la cual es de dimensión mayor o igual a 1 y no singular en codimensión 1. Sea $X = C(V)$ el cono afín sobre V en $\mathbb{A}^{n+1}$, y sea $\overline{X}$ su cerradura proyectiva en $\mathbb{P}^{n+1}$. Sea $P \in X$ el vértice del cono.

Sea $\pi : X - P \to V$ la proyección. Entonces V puede ser cubierto por conjuntos abiertos U_i tales que $\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{A}^1$ para cada i, y entonces, como en la Proposición 2.1.23 se tiene que $\pi^* :$ Cl $V \to$ Cl $(\overline{X} - P)$ es un isomorfismo. Como Cl $\overline{X} \cong$ Cl $(\overline{X} - P)$, tenemos también Cl $V \cong$ Cl $\overline{X}$. Tenemos $V \subset \overline{X}$ como la sección de hiperplano al infinito. La clase del divisor V en Cl X es igual a π^* (clase de $V.H$) donde H es cualquier hiperplano de $\mathbb{P}^n$ que no contiene a V . Se concluye usando la Proposición 2.1.19 que hay una sucesión exacta

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathrm{Cl}\ V \to \mathrm{Cl}\ X \to 0$$

donde la primer fecha manda $1 \mapsto V.H$ y la segunda es π^* seguida por la restricción a $X - P$ e inclusión en X (la inyectividad de la primer fecha sigue del ejemplo previo). Sea $S(V)$ el anillo coordenado homogéneo de V (que es también el anillo coordenado afín de X). Entonces $S(V)$ es un dominio de factorización única si y sólo si (1) V es proyectivamente normal y (2) Cl $V \cong \mathbb{Z}$ y es generado por la clase de $V.H$.

Ahora, sea $\mathcal{O}_P$ el anillo local de P en X. Entonces la restricción natural induce un isomorfismo Cl $X \to$ Cl(Spec $\mathcal{O}_P$).

Ejemplo 2.1.28. Continuando con la superficie $Q \subseteq \mathbb{P}^3$, mostraremos que el encaje induce un homomorfismo Cl $\mathbb{P}^3 \to$ ClQ, y que la imagen de un hiperplano H, que genera Cl $\mathbb{P}^3$, es el elemento $(1, 1)$ en Cl $Q = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Sea Y una hipersuperficie de $\mathbb{P}^3$ que no contiene a Q. Entonces podemos asignar multiplicidades a las componentes irreducibles de $Y \cap Q$ de modo que obtenemos un divisor $Y \cdot Q$ en Q. En efecto, en cada abierto estándar U_i de $\mathbb{P}^3$, Y está definida por una sola función f; podemos tomar el valor de esta función (restringida a Q) para cada valoración de un divisor primo de Q para definir el divisor $Y \cdot Q$. Extendemos este mapeo linealmente para definir un divisor $D \cdot Q$ en Q, para cada divisor $D = \sum n_i Y_i$ en $\mathbb{P}^3$ tal que ninguna Y_i contenga a Q. Claramente divisores linealmente equivalentes se restringen a divisores linealmente equivalentes. Como cualquier divisor en $\mathbb{P}^3$ es linealmente equivalente a uno cuyos divisores primos no contienen a Q por la Proposición 2.1.18, obtenemos un homomorfismo bien definido $\mathrm{Cl}\ \mathbb{P}^3 \to \mathrm{Cl}\ Q$. Ahora, si H es el hiperplano $w = 0$, entonces $H \cap Q$ es el divisor consistente de las líneas $x = w = 0$ y $y = w = 0$, así que $H \cap Q$ es de tipo $(1, 1)$ en $\mathrm{Cl}\ Q = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Nótese que las dos familias de líneas corresponden a $pt \times \mathbb{P}^1$ y $\mathbb{P}^1 \times pt$, así que son de tipo $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

Ejemplo 2.1.29. Sea C la curva cúbica $x = t^3, y = u^3, z = t^2u, w = tu^2$ que yace en Q. Si Y es el cono cuadrático $yz = w^2$, entonces $Y \cap Q = C \cap L$ donde L es la línea $y = w = 0$. Como $Y \sim 2H$ en $\mathbb{P}^3$, $Y \cap Q$ es un divisor de tipo $(2, 2)$. La línea L tiene tipo $(1, 0)$, así que C es de tipo $(1, 2)$. Se sigue que no hay ninguna superficie $Y \subseteq \mathbb{P}^3$ no conteniendo a Q, tal que $Y \cap Q = C$, pues en ese caso el divisor $Y \cap Q$ sería rC para algún entero $r > 0$. éste es un divisor de tipo (d, d), lo cual nunca puede ser igual a $(r, 2r)$. Así que Y no existe.

2.2. Divisores sobre curvas

Definición. Sea k un campo algebraicamente cerrado. Una *curva* sobre k es un esquema entero separado X de tipo finito sobre k, de dimensión uno. Si X es propia sobre k, decimos que X es *completa*. Si todos los anillos locales de X son anillos locales regulares, decimos que X es *no singular*.

Proposición 2.2.1. *Sea X una curva no singular sobre k con campo de funciones K. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *X es proyectiva;*

(ii) *X es completa;*

(iii) *$X \cong t(C_K)$, donde C_K es la curva abstracta no singular de* [7, I,6] *y t es el funtor de variedades a esquemas de* [7, II,2.6].

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) sigue de que todo morfismo proyectivo de esquemas noetherianos es propio [7, II, 4.9].

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Si X es completa, entonces por la Proposición 2.1.11 cada anillo de valoración discreta de K/k tiene un único centro en X. Como los anillos locales de X en los puntos cerrados, son todos anillos de valoración discreta, esto implica que los puntos cerrados de X están en correspondencia 1-1 con los anillos de valoración discreta de K/k, a saber, los puntos de C_K. Así es claro que $X \cong t(C_K)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). [7, I, 6.9]. $\square$

Lema 2.2.2. *Si $f : X \to Y$ es un morfismo finito de curvas sobre k, entonces f manda el punto genérico de X al punto genérico de Y. El grado de la extensión de campos $K(X)/K(Y)$ es finito.*

Demostración. Sean $\xi \in X, \eta \in Y$ los puntos genéricos y supongamos que $f(\xi) = z \neq \eta$. Entonces z es un punto cerrado, así que $f^{-1}(z)$ es cerrado, y por lo tanto $f^{-1}(z) = X$. Pero f es finito, y un morfismo finito es cuasi-finito, así que esto es una contradicción. Usando el homomorfismo canónico de k-álgebras $f^\sharp : K(Y) \to K(X)$ consideramos a $K(Y)$ como subcampo de $K(X)$. Como ambos campos son extensiones de campo finitamente generadas de grado de trascendencia 1 de k, $K(X)$ debe ser una extensión finita algebraica de $K(Y)$. □

Definición. Si $f : X \to Y$ es un morfismo finito de curvas, definimos el *grado* de f, denotado por $\deg f$, como el grado de la extensión de campos $[K(X) : K(Y)]$.

Definición. Sea $f : Z \to X$ un morfismo de esquemas. Llamamos *esquema imagen de f* al único subesquema cerrado Y de X con la siguiente propiedad: el morfismo f se factoriza a través de Y , y si Y' es cualquier otro subesquema cerrado de X a través del cual se factoriza f, entonces $Y \to X$ se factoriza a través de Y' también.

Proposición 2.2.3. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas separados de tipo finito sobre un esquema noetheriano S, con X propio sobre S. Entonces $f(X)$ es cerrado en Y, y $f(X)$ con su estructura de subesquema imagen es propio sobre S.*

Demostración. Veamos primero que $f(X)$ es cerrado en Y . Por la propiedad universal del producto fibrado aplicado a los morfismos f y la identidad en X, i_X, podemos factorizar f como $\Gamma_f : X \to X \times_S Y$, compuesta con la segunda proyección p_2. Como X es propio sobre S y p_2 se obtiene por el cambio de base $Y \to S$ del morfismo $X \to S$, p_2 es propio. Como la composición de morfismos propios es propia, es suficiente probar que Γ_f es propia.

Como toda inmersión cerrada es propia, basta probar que Γ_f es una inmersión cerrada. Por otro lado, nótese que Γ_f se obtiene del morfismo diagonal $\Delta : Y \to Y \times_S Y$ por el cambio de base $f : X \times_S Y \to Y \times_S Y$, ya que al componer con las dos proyecciones, se obtienen los morfismos f e i_X. Como Y es separado, por definición Δ es una inmersión cerrada. Como inmersiones cerradas se preservan bajo cambio de base, se sigue que Γ_f es una inmersión cerrada. Se concluye que f es propio y por lo tanto cerrado, así que su imagen es un cerrado en Y .

Ahora mostramos que $f(X)$ con su estructura de subesquema imagen es propio sobre S. La inmersión cerrada $f(X) \hookrightarrow Y$ es separada, así que la composición $f(Z) \hookrightarrow Y \to S$ es separada, de tipo finito. Para ver que es universalmente cerrado notemos primero que si Z, la imagen de X en Y , es cerrada y tiene la estructura de subesquema imagen, entonces $X \to Z$ es sobreyectivo. Se sigue que $Z \hookrightarrow Y$ es un morfismo cerrado. Ahora bien, consideremos la siguiente composición

$$X \times_S S' \xrightarrow{\alpha} Z \times_S S' \xrightarrow{\beta} Y \times_S S'$$

Se puede ver que β es una inmersión cerrada y que $Z \times_S S'$ tiene la estructura de subesquema imagen de $X \times_S S \xrightarrow{\beta\circ\alpha} Y \times_S S'$. Entonces α es sobreyectivo y con esto se muestra que $Z \times_S S' \to S'$ es cerrado, ya que $X \times_S S' \to S'$ lo es, por ser X propio sobre S. □

Lema 2.2.4. *Sea R un dominio normal, K su campo de fracciones, L una extensión finita de K, y R' la cerradura entera de R en L (esto es, el conjunto de elementos de L que son enteros sobre R). Entonces L es el campo cociente de R'.*

Demostración. [21, vol. 1, Th.7, p.264] □

A continuación hacemos uso del concepto de dominio de Dedekind. Ver §1 para su definición.

Teorema 2.2.5. *Sea R un dominio Dedekind, y L una extensión finita algebraica del campo de fracciones K de R. Entonces la cerradura entera R' de R es un dominio Dedekind.*

Demostración. [21, vol. 1, Th. 19, p.281] □

Teorema 2.2.6 (Finitud de la cerradura entera)**.** *Sea A un dominio entero que es un algebra finitamente generada sobre un campo k. Sea K el campo cociente de A, y sea F una extensión finita algebraica de K. Entonces la cerradura algebraica A' de A en F es un A-módulo finitamente generado, y también es una k-álgebra.*

Demostración. [21, vol. 1, Ch. V., Th. 9, p.267.] □

Proposición 2.2.7. *Sea A un dominio Dedekind con campo cociente K. Entonces los anillos de valoración de K que contienen a A son precisamente los subanillos de $A_\mathfrak{p}$ donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A.*

Demostración. La condición es necesaria por [1, Th. 9.3, p. 95]. Para ver que es suficiente, supongamos que $(V, \mathfrak{m})$ es un anillo de valoración de K que contiene a A, entonces $\mathfrak{m} \cap A = \mathfrak{p}$ es un ideal primo de A. Si $\mathfrak{p} = 0$, entonces $V = K$. De lo contrario V debe dominar al anillo de valoración $A_\mathfrak{p}$, con lo que $V = A_\mathfrak{p}$. □

Proposición 2.2.8. *Sea X una curva completa no singular sobre k, sea Y una curva no singular sobre k, y sea $f : X \to Y$ un morfismo. Entonces, o bien (1) $f(X) =$ un punto,ó (2) $f(X) = Y$. En el caso (2), $K(X)$ es una extensión finita de campo de $K(Y)$, f es un morfismo finito, y Y es también completa.*

Demostración. Como X es completa, $f(X)$ debe ser cerrado en Y y propio sobre $\operatorname{Spec} k$ por la Proposición 2.2.3. Por otro lado, $f(X)$ es irreducible. Así que o bien (1) $f(X) =$ un punto, ó (2) $f(X) = Y$, y en el caso (2) Y es también completa.

En el caso (2), f es dominante, así que induce una inclusión $K(Y) \subseteq K(X)$ de campos de funciones. Como ambos campos son extensiones de campo finitamente generadas de k de grado de trascendencia 1, $K(X)$ debe ser una extensión finita algebraica de $K(Y)$. Para mostrar que f es un morfismo finito, usemos ahora que Y es no singular. Sea $V = \operatorname{Spec} B$ un subconjunto abierto afín de Y, donde B es un k-dominio finitamente generado.

Como V es un subconjunto abierto de Y , $\dim V = \dim Y$ y como también $\dim(V = \operatorname{Spec} B) = \dim B$, se tiene que $\dim B = 1$. Además, Y es no singular, de modo que $B_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local regular para cada ideal primo $\mathfrak{p} \in B$, y por [16, Th. 36, p. 121] es enteramente cerrado, así que por [1, Prop. 5.13, p. 63], B es enteramente cerrado. Como es además una k-álgebra finitamente generada, es noetheriano y concluimos que B es un dominio Dedekind.

Podemos identificar B con un subanillo de $K(Y)$ (que es entonces el campo de fracciones de B), y luego con un subanillo de $K(X)$. Sea A la cerradura entera de B en $K(X)$. Entonces por los Teoremas 2.2.5 y 2.2.6 vemos que A es un k-dominio Dedekind finitamente generado que es además finitamente generado como B-módulo. Por el Lema 2.2.4 el campo de fracciones de A es $K(X)$.

Por tanto podemos encontrar una curva no singular $Z \subseteq \mathbb{A}^n$ para algún $n \geq 1$ (en el sentido de [7, §1]) con anillo coordenado $A(Z)$ isomorfo a A como k-álgebras, y campo de funciones $K(Z)$ isomorfo a $K(X)$ como k-álgebras. Por [7, Ch. 1, 6.7] hay un isomorfismo de *curvas no singulares abstractas* $Z \cong U$, donde U es un subconjunto abierto de la curva no singular abstracta $C_K(Z)$. Luego, $t(Z) \cong t(U) \subseteq t(C_K(Z)) = t(C_K(X))$ como esquemas sobre k. Como hay un isomorfismo de esquemas $t(Z) \cong \operatorname{Spec} A$ sobre k, se tiene finalmente que $\operatorname{Spec} A$ es isomorfo a un subconjunto abierto afín de $t(C_K(X)) \cong X$. Este isomorfismo manda un primo no cero $\mathfrak{p} \subseteq A$ en un anillo de valoración discreta $A_{\mathfrak{p}}$ de $K(X)$ y luego al punto correspondiente de X.

Como X y Y son completas, para ambas curvas hay una biyección entre anillos de valoración discreta sobre k y puntos cerrados. Los puntos cerrados $y \in V$ corresponden a subanillos $\mathcal{O}_{Y,y} \subseteq K(Y)$, que por la Proposición 2.2.7 son precisamente los anillos de valoración discreta de $K(Y)$ que contienen a B. Por lo tanto, para $x \in X$ tenemos que $f(x) \in V$ si y sólo si $\mathcal{O}_{X,x} \supseteq B$: en efecto, si $\mathcal{O}_{X,x} \supseteq B$, entonces $\mathcal{O}_{X,x} \cap K(Y) \supseteq B$; la intersección $\mathcal{O}_{X,x} \cap K(Y)$ da un anillo de valoración de $K(Y)$, el cual domina a $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ (para la definición de dominación ver §1) ya que el homomorfismo local $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ da $\mathfrak{m}_x \cap \mathcal{O}_{Y,f(x)} = \mathfrak{m}_{f(x)}$, o sea que $\mathfrak{m}_{f(x)} \subset \mathfrak{m}_x \cap K(Y)$. Así que $\mathcal{O}_{X,x} \cap K(Y) = \mathcal{O}_{Y,f(x)}$, ya que los anillos de valoración son maximales con respecto a la relación de dominación (Teorema 1.2.9) y entonces $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \supseteq B$, por lo tanto $f(x) \in V$. La afirmación inversa es obvia.

Ahora bien, como A es la cerradura entera de B y $\mathcal{O}_{X,x}$ es un AVD (en particular enteramente cerrado), se tiene que $\mathcal{O}_{X,x} \supseteq B$ si y sólo si $\mathcal{O}_{X,x} \supseteq A$. Por el Corolario 1.1.6, A es la intersección de todos los anillos de valoración de $K(X)$ que contienen a A, pero según vimos $f(x) \in V$ si y sólo si $\mathcal{O}_{X,x} \supset A$, así que tenemos

$$A = \bigcap_{x \in f^{-1}(V)} \mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$$

Hemos construido un isomorfismo de esquemas sobre k entre $\operatorname{Spec} A$ y el subconjunto abierto $f^{-1}(V)$ de X. Por construcción A es un B-módulo finitamente generado, y además podemos cubrir Y con conjuntos abiertos afines de la forma V , así que esto muestra que f es finito. □

Si X es una curva no singular en el sentido clásico, el anillo local de cada punto cerrado es regular [7, I, 5.1], luego, en el esquema correspondiente (i.e., en $t(X)$) todos los anillos locales son regulares, ya que son localizaciones de anillos locales de puntos cerrados y cualquier localización de un anillo local regular en un ideal primo es de nuevo un anillo local regular [16, 2, p.139]. Entonces X satisface la condición $(*)$ y podemos hablar de divisores en X. Un divisor primo es sólo un punto cerrado, así que un divisor de Weil puede escribirse $D = \sum n_i P_i$, donde los P_i son puntos cerrados, y $n_i \in \mathbb{Z}$. Definimos el grado de D como $\sum n_i$.

Proposición 2.2.9. *Si $f : X \to Y$ es un morfismo finito de esquemas entonces para toda $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto finito.*

Demostración. Podemos considerar sólo el caso de un morfismo $\operatorname{Spec} B = X \to Y = \operatorname{Spec} A$ inducido por un homomorfismo finito de anillos $A \to B$. En este caso la fibra sobre un punto $y \in Y$ está dada por $\operatorname{Spec}(B \otimes_A k(y))$ [17, p. 47]. Ahora bien, como B es finitamente generada como A-módulo, $B \otimes_A k(y)$ es finitamente generado como $k(y)$-módulo, i.e. es un espacio vectorial de rango finito y por tanto un anillo artiniano, así que $\operatorname{Spec}(B \otimes_A k(y))$ tiene un número finito de puntos. □

Definición. Dado $f : X \to Y$ un morfismo finito de curvas no singulares, queremos definir un homomorfismo $f^* : \operatorname{Div} Y \to \operatorname{Div} X$. Considérese la inclusión $K(Y) \subset K(X)$. Es suficiente definirlo en generadores de $\operatorname{Div} Y$, i.e., en el subconjunto de puntos cerrados de Y . Para cualquier punto cerrado $Q \in Y$, sea t un *parámetro local* en Q, i.e., t es un elemento de $K(Y)$ tal que $v_Q(t) = 1$, donde v_Q es la valoración correspondiente al anillo de valoración discreta $\mathcal{O}_Q$. Definimos $f^*(Q) = \sum_{f(P)=Q} v_P(t) \cdot P$. Como f es un morfismo finito, por la Proposición 2.2.9 ésta es una suma finita, así que obtenemos un divisor en X. Nótese que esta definición es independiente de la elección del parámetro t; en efecto, si t' es otro parámetro local en Q, entonces $t' = tu$, donde u es una unidad en $\mathcal{O}_Q$. Entonces para cualquier punto $P \in Q$ con $f(P) = Q$, del homomorfismo local $f_P^\sharp : \mathcal{O}_Q \to \mathcal{O}_P$, sabemos que u es también unidad en $\mathcal{O}_P$, así que $v_P(t') = v_P(tu) = v_P(t) + v_P(u) = v_P(t)$.

Observación 2.2.10. El mapeo definido preserva divisores principales: si $g \in K(Y)$, entonces $f^*((g)_Y) = (g_X)$, donde g_X en el lado derecho de la igualdad es la función g vista como función de $K(X)$, vía el mapeo que induce f.

En efecto, afirmamos que $v_p(g) = v_P(t) \cdot v_Q(g)$ (con t un parámetro local en Q). Esto es trivial si $v_Q(g) = 0$, ya que entonces $v_P(g) = 0$. Si $v_Q(g) = k \geq 1$, entonces $g = ut^k$, donde u es una unidad. Como u es unidad también en $\mathcal{O}_P$, se tiene que $v_P(g) = v_P(t^k) = v_P(t) \cdot k$ en $\mathcal{O}_Q$, como se quería. De modo que obtenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} f^*((g)_Y) &= f^*(\sum_{y \in Y_0} v_y(g) \cdot y) = \sum_y v_y(g) \sum_{f(x)=y} v_x(t_y) \cdot x = \\ &= \sum_y \sum_{f(x)=y} v_y(g) \cdot v_x(t_y) \cdot x = \sum_{x \in X_0} v_x(g) \cdot x = (g)_X \end{aligned}$$

así que tenemos el siguiente

Corolario 2.2.11. *El homomorfismo f^* induce un homomorfismo $f^* : \mathrm{Cl}\, Y \to \mathrm{Cl}\, X$.* □

Proposición 2.2.12. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo finito de curvas no singulares. Entonces para un divisor D en Y tenemos* $\deg f^*(D) = \deg f \cdot \deg D$.

Demostración. Será suficiente mostrar que para cualquier punto cerrado $Q \in Y$ tenemos $\deg f^*Q = \deg f$. Sea $V = \operatorname{Spec} B$ un subconjunto abierto afín de Y que contenga a Q. Sea A la cerradura entera de B en $K(X)$. Entonces, como en la prueba de la Proposición 2.2.8, $U = \operatorname{Spec} A$ es el subconjunto abierto $f^{-1}V$ de X. Sea $\mathfrak{m}_Q$ el ideal máximo de Q en B. Localizamos a A y B con respecto al sistema multiplicativo $S = B - \mathfrak{m}_Q$ y denotando $A' = S^{-1}A$, obtenemos entonces una extensión de anillos $\mathcal{O}_Q \hookrightarrow A'$. Ahora bien, como todos estos anillos están dentro del campo $K(X)$, se tiene que A' es un $\mathcal{O}_Q$- módulo libre de torsión finitamente generado, y como $\mathcal{O}_Q$ es un AVD, en particular un DIP, se sigue que A' es un $\mathcal{O}_Q$ módulo libre. Su rango es igual a $r = [K(X) : K(Y)] = \deg f$ [15, Th. 1,p. 7]. Sea t un parámetro local en Q, se sigue que A'/tA' es un k-espacio vectorial de dimensión r.

Por otro lado, notemos que los puntos en $f^{-1}(Q)$ corresponden a ideales máximos $\mathfrak{p} \subset A$ tales que $\mathfrak{p} \cap B = \mathfrak{m}_Q$, los cuales a su vez corresponden a ideales máximos en $A_{\mathfrak{m}_Q} = A'$. Así hay una correspondencia biunícova entre puntos P_i de X tales que $f(P_i) = Q$ e ideales máximos $\mathfrak{m}_i$ de A', y para cada i, $A'_{\mathfrak{m}_i} = \mathcal{O}_{P_i}$. Por [17, Teo. 4.7, p. 27], $tA' = \cap_i(tA'_{\mathfrak{m}_i} \cap A')$. Además por la Proposición 1.2.4 cada $tA'_{\mathfrak{m}_i} \cap A'$ es igual a una potencia de $\mathfrak{m}_i$, de modo son coprimos por parejas, ya que sus radicales lo son, y entonces podemos aplicar el Teorema Chino del residuo, obteniendo que

$$\dim_k A'/tA' = \sum_i \dim_k A'/(tA'_{\mathfrak{m}_i} \cap A') \tag{2.4}$$

Pero

$$A'/(tA'_{\mathfrak{m}_i} \cap A') \cong A'_{\mathfrak{m}_i}/tA'_{\mathfrak{m}_i} = \mathcal{O}_{P_i}/t\mathcal{O}_{P_i},$$

así que por la Proposición 1.2.5 las dimensiones en la suma del miembro derecho de (2.4) no son otras que $v_{P_i}(t)$. Pero $f^*Q = \Sigma v_{P_i}(t) \cdot P_i$, así que hemos mostrado que $\deg f^*Q = \deg f$ como se requería. $\square$

Corolario 2.2.13. *Un divisor principal sobre una curva completa no singular X tiene grado cero. Consecuentemente la función grado induce un morfismo sobreyectivo* $\deg : \mathrm{Cl}\, X \to \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $f \in K(X)^*$. Si $f \in k$, entonces $(f) = 0$, y no hay nada que probar. Si $f \notin k$, como $k = \overline{k}$, f es trascendente sobre k y $k(f) \cong K(\mathbb{P}^1)$, de modo que $k(f) \subseteq K(X)$ induce un morfismo finito $\varphi : X \to \mathbb{P}^1$. Es un morfismo por [7, I, 6.12], y es finito por la Proposición 2.2.8. Por la Observación 2.2.10, $\varphi^*((x)) = (f)$. Ahora, el divisor de $x \in K(\mathbb{P}^1)$ se puede calcular de la siguiente manera: hay un isomorfismo entre $k(x)$ y $k[x_0, x_1]_{((0))}$ (elementos homogéneos de grado cero en la localización de $k[x_0, x_1]$ en el ideal (0)), que hace corresponder a x con x_0/x_1; sabemos que el divisor de este último está dado por $V(x_0) - V(x_1)$ (ver prueba de la Proposición 2.1.18). Pensando en $\mathbb{P}^1$ como $\mathbb{A}^1 \cup \infty$, podemos denotar a este divisor como $\{0\} - \{\infty\}$.

éste es un divisor de grado cero, así que $(f) = \varphi^*(\{0\} - \{\infty\})$ tiene grado 0 en X por la Proposición 2.2.12. Entonces el grado de un divisor en X depende sólo de su clase de equivalencia lineal, y obtenemos un homomorfismo $\mathrm{Cl}\, X \to \mathbb{Z}$ como se enunció. Es sobreyectivo porque el grado de un punto es 1. $\square$

Ejemplo 2.2.14. Una curva completa no singular X es racional si y sólo si existen dos puntos distintos $P, Q \in X$ con $P \sim Q$. Recordemos que racional significa birracional a $\mathbb{P}^1$. Si X es racional, entonces por [7, I,4.5] se tiene que $K(X) \cong K(\mathbb{P}^1)$ como k/álgebras. Como X es completa, se sigue de la Proposición 2.2.1 que $X \cong t(C_K(X)) \cong t(C_K(\mathbb{P}^1)) \cong \mathbb{P}^1$. Y en $\mathbb{P}^1$ ya hemos visto que dos cualesquiera dos puntos son linealmente equivalentes (Proposición 2.1.18). Inversamente, supongamos que X tiene dos puntos $P \neq Q$ con $P \sim Q$. Entonces hay una función racional $f \in K(X)$ con $(f) = P - Q$. Consideremos el morfismo $\varphi : X \to \mathbb{P}^1$ determinado por f como en la prueba del Corolario 2.2.13. Tenemos que $\varphi(0) = P$, así que φ debe ser un morfismo de grado 1, de modo que se induce un isomorfismo de campos de funciones, y por [7, I,4.5] X es racional.

Definición. La *multiplicidad de intersección* de dos curvas planas Y y Z (definidas por polinomios f, g) en un punto $P \in \mathbb{P}^2_k$ está definida como $\dim_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k,P}/(f,g)$ y se denota $i(Y, Z; P)$

Proposición 2.2.15. *Sea $Y \in \mathbb{P}^2_k$ una curva de grado d y L una línea no contenida en Y. Entonces Y y L se intersectan en d puntos (contados con multiplicidad), i.e., $\sum_P (i(Y, L; P) = 1$.*

Demostración. Sean $L : x_2 = 0$ y $Y : f = 0$, donde $f = f(x_0, x_1, x_2)$ es un polinomio homogéneo de grado d. Entonces $f|_L = f(x_0, x_1, 0) = a_0x_0^d + a_1x_0^{d-1}x_1 + \ldots + a_dx_1^d$ es un polinomio homogénero de grado d en dos variables. Podemos asumir que el sistema de coordenadas se ha escogido de modo tal que $(1 : 0 : 0) \in L$ no es un cero de $f|_L$. Entonces el número de puntos donde Y y L se intersectan se obtiene contando, con multiplicidad, los ceros del polinomio $f(x) = a_0x^d + a_1x^{d-1} + \ldots + a_d$. Por el Teorema fundamental del álgebra sabemos que hay exactamente d ceros. □

Para ver otro ejemplo, demostramos primero la siguiente

Proposición 2.2.16. *Sea Y la curva $y^2 = x^3-x$ en $\mathbb{A}^2$, y asuma que la característica del campo base k es $\neq 2$. Entonces Y no es una curva racional.*

Demostración. Sabemos que el anillo coordenado de una curva racional no singular no isomorfa a $\mathbb{P}^1$ es un DFU. Claramente Y no es $\mathbb{P}^1$. Ahora, ver que Y es no singular es fácil: los puntos singulares deben satisfacer $y^2 - x^3 + x = 0, 2y = 0, -3x^2 + 1 = 0$, y si k no tiene característica 2, esto implica $y = 0, x = 0, \pm 1$ lo cual contradice $-3x^2 + 1 = 0$.

Probaremos que el anillo coordenado, $A = k[x, y]/(y^2 - x^3 + x)$ de Y no es un DFU. Definimos primero un homomorfismo $\sigma : A \to A$ que mande y a $-y$ y deje fijo x. Esto está bien definido porque el automorfismo $x \mapsto x$, $y \mapsto -y$ es un automorfismo de $k[x, y]$ que mapea el ideal $(y^2 - x^3 + x)$ a sí mismo y por lo tanto induce un automorfismo de A.

Sea $k[x]$ es el subanillo de $K(Y)$ definido por la imagen de x en A (de hecho es un anillo polinomial). Todo elemento de A puede ser escrito como $yf + g$, donde $f, g \in k[x]$, así que su norma es $(g + yf)(g - yf) = g^2 - f^2(x^3 - x) \in k[x]$. Es claro que también se tiene $N(ab) = N(a) \cdot N(b)$.

Si a es una unidad, entonces $N(a)$ es también una unidad (con inversa $N(1/a)$) así que debe ser un elemento de k, ya queéstas son los únicas unidades en $k[x]$. Pero si $a = yf + g$ entonces su norma es $g^2 - f^2(x^3 - x)$ y si f es distinto de cero entonces el segundo término tiene grado impar, mientras que el primero tiene grado par así que su suma no puede ser una constante. Luego $f = 0$ y g^2 es una constante, de modo que a es constante.

Nótese que x y y son irreducibles (esto se sigue fácilmente viendo sus normas x^2 y $x^3 - x$ y notando que no hay elementos cuya norma sea un polinomio de grado 1).

Pero x divide a y^2, y y no es una unidad veces x, así que A no puede ser un DFU, y se sigue que Y no es racional.

Este resultado es también una consecuencia inmediata de [7, II,8.20.3]. $\square$

Ejemplo 2.2.17. Sea X una curva cúbica no singular $y^2z = x^3 - xz^2$ en $\mathbb{P}_k^2$ con char $k \neq 2$. Sabemos por la Proposición anterior que X no es racional. Sea $Cl^\circ X$ el kernel del mapeo deg : Cl $X \to \mathbb{Z}$. Entonces por el ejemplo previo, si $P, Q \in X$ son dos puntos distintos, $D = P - Q$ no es principal, y sin embargo deg$D = 0$. Esto quiere decir que $\mathrm{Cl}^\circ X \neq 0$. Mostraremos que de hecho hay una correspondencia natural 1-1 entre los puntos cerrados de X y los elementos del grupo $\mathrm{Cl}^\circ X$. Por un lado esto aclara la estructura del grupo $\mathrm{Cl}^\circ X$. Por otro, nos da una estructura de grupo en el conjunto de los puntos cerrados de X, haciéndolo un grupo algebraico.

Sea P_0 el punto $(0, 1, 0)$ en X. Es un punto de inflexión, así que la línea tangente $z = 0$ en este punto intersecta a la curva en el divisor $3P_0$. Si L is cualquier otra línea en $\mathbb{P}_k^2$, intersectando a X en tres puntos P, Q, R (que pudieran coincidir), entonces como L es linealmente equivalente a la línea $z = 0$ en $\mathbb{P}_k^2$, tenemos $P+Q+R \sim 3P_0$ en X, como en el Ejemplo 2.1.28. Ahora, a cualquier punto cerrado $P \in X$, le asociamos el divisor $P - P0 \in \mathrm{Cl}^\circ X$. Este mapeo es inyectivo, porque si $P - P_0 \sim Q - P_0$, entonces $P \sim Q$, y X sería racional por el ejemplo previo, lo cual no es cierto. Para mostrar que el mapeo de puntos cerrados de X a $\mathrm{Cl}^\circ X$ es sobreyectivo, procedemos en varios pasos. Sea $D \in \mathrm{Cl}^\circ X$. Entonces $D = \Sigma n_i P_i$ con $\sum n_i = 0$. De modo que también podemos escribir $D = \sum n_i(P_i - P_0)$. Ahora, para cualquier punto R supongamos que la línea P_0R intersecta a X además en el punto T (siempre contando intersecciones con multiplicidades -por ejemplo, si $R = P_0$, tomamos la línea tangente a P_0, y la tercer intersección es también P_0). Entonces $P_0 + R + T = 3P_0$, así que $R - P_0 \sim -(T - P_0)$. Si i es un índice tal que $n_i < 0$ en D, tomamos $P_i = R$. Entonces reemplazando P_i por T, obtenemos un divisor linealmente equivalente con el i-ésimo coeficiente $-n_i > 0$. Repitiendo este proceso, podemos asumir que $D = \sum n_i(P - P_0)$ con todos los $n_i > 0$. Ahora mostramos por inducción sobre Σn_i que $D \sim P - P_0$ para algún punto P. Si $\sum n_i = 1$, no hay nada que probar. Así que supongamos $\Sigma n_i \geq 2$, y sean P, Q dos de los puntos P_i (tal vez los mismos) que ocurren en D. Supongamos que la línea PQ intersecta a X en R, y que la línea P_0R intersecta a X en T . Así que tenemos

$$P + Q + R \sim 3P_0 \quad \text{y} \quad P_0 + R + T \sim 3P_0$$

y entonces

$$(P - P_0) + (Q - P_0) \sim (T - P_0)$$

Sustituyendo P y Q por T, obtenemos que D es linealmente equivalente a otro divisor de la misma forma cuya Σn_i es menor, así que por inducción $D \sim P - P_0$ para algún P.

2.3. Divisores de Cartier

Vamos a generalizar la noción de funciones racionales a esquemas que no son necesariamente reducidos. Sea A un anillo. Un elemento $f \in A$ que no divide a cero es llamado *elemento regular*. Esto es equivalente a decir que el anulador $\mathrm{Ann}(f)$ de f es cero.

Definición. Sea X un esquema. Para cada conjunto abierto U, denotamos por $S(U)$ al conjunto de elementos en $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ que son regulares en cada anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ para toda $x \in U$. Este conjunto es un conjunto multiplicativo en $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$.

2.3.1. Sea A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto cerrado multiplicativo. Recordemos (ver [1, 3]) que el anillo de fracciones $S^{-1}A$ y el homomorfismo canónico i_A^S son soluciones de un problema de mapeo universal: todo homomorfismo u de A sobre un anillo B tal que $u(S)$ se compone de elementos invertibles en B se factoriza de una sola manera

$$u : A \xrightarrow{i_A^S} S^1 A \xrightarrow{u^*} B$$

donde u^* es un homomorfismo de anillos

2.3.2. Sean A, A' dos anillos, φ un homomorfismo de A' en A, S (resp. S') un cerrado multiplicativo de A (resp. A'), tal que $\varphi(S') \subset S$; el homomorfismo compuesto $A' \overset{\varphi}{\to} A \to S^{-1}A$ se factoriza en $A \to SA \overset{\varphi^{S'}}{\to} SA$ como consecuencia de 2.3.1; tenemos $\varphi^{S'}(a'/s') = \varphi(a')/\varphi(s')$.

2.3.3. Sea A'' un tercer anillo, $\varphi' : A'' \to A'$ un homomorfismo de anillos, S'' un conjunto multiplicativo de A'' tal que $\varphi'(S'') \subset S'$. Pongamos $\varphi'' = \varphi \circ \varphi'$; entonces tenemos

$$\varphi''^{S''} = \varphi^{S'} \circ \varphi'^{S''}$$

Ahora, notemos que si $V \subseteq U$ son dos subconjuntos abiertos de X, el mapeo restricción $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ manda $S(U)$ en $S(V)$. Así que tenemos la situación de 2.3.2 y con un tercer abierto $W \subseteq V$, también la situación de 2.3.3, y en consecuencia se tiene una pregavilla bien definida mediante el mapeo $U \mapsto S(U)^{-1}\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$; ésta induce una gavilla $\mathcal{K}_X$, la cual es llamada gavilla de anillos totales de fracciones. Denotaremos por Q a la pregavilla que a cada abierto U de X hace corresponder $S(U)^{-1}\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Escribimos simplemente $\mathcal{K}$ por $\mathcal{K}_X$ si no hay posibilidad de confusión.

Es inmediato que para toda $x \in X$, tenemos un isomorfismo canónico

$$([S^{-1}]\mathcal{O}_X)_x \cong \mathcal{K}_x$$

Proposición 2.3.4. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y sea $M(U)$ el conjunto de elementos invertibles del anillo $\mathcal{O}_X(U)$. Entonces M es una gavilla de grupos abelianos multiplicativos.*

Denotamos por K^* la gavilla de grupos multiplicativos tal que $\Gamma(U, \mathcal{K}*)$ es (para todo abierto U de X) el grupo de elementos invertibles de $\Gamma(U, \mathcal{K})$. Similarmente denotamos por $\mathcal{O}^*$ a la gavilla de elementos invertibles de $\mathcal{O}_X$. Hay morfismos canónicos $\mathcal{O}_X \to Q$ y $Q \to \mathcal{K}$. La composición $\mathcal{O}_X \to \mathcal{K}$ hace de $\mathcal{K}$ una gavilla de $\mathcal{O}_X$-álgebras y da lugar a un morfismo de grupos abelianos.

Proposición 2.3.5. *El morfismo $\mathcal{O}_X \to \mathcal{K}$ es un monomorfismo de gavillas de anillos conmutativos y $\mathcal{O}^* \to K*$ es un monomorfismo de gavillas de grupos abelianos.*

Demostración. La segunda afirmación se sigue inmediatamente de la primera. Para $x \in X$ debemos mostrar que la composición $\mathcal{O}_{X,x} \to Q_x \to \mathcal{K}_x$ es inyectiva. El segundo homomorfismo en un isomorfismo así que sólo hay que mostrar que $\mathcal{O}_X(U) \to Q(U)$ es inyectivo para cada $U \subseteq X$. Si $a \in \mathcal{O}_X(U)$ y $0 = a/1 \in Q(U)$ entonces $sa = 0$ para algún $s \in S(U)$. Pero sx es regular en $\mathcal{O}_{X,x}$ para toda $x \in U$ y consecuentemente $ax = 0$ para cada $x \in U$, lo cual implica $a = 0$, como se quería. □

Proposición 2.3.6. *Sea X es un esquema reducido. Si un elemento $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ es tal que $s_\xi \neq 0$ para todo punto máximo ξ de U (i.e., el punto genérico de una componente de X), entonces s es regular.*

Demostración. En efecto, si $st = 0$ para un $t \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, tenemos $s_\xi t_\xi = 0$, así $t_\xi = 0$ porque $\mathcal{O}_{X,\xi}$ es un campo, y afirmamos que $t_\xi = 0$ para todo punto máximo de U sigifica que $t = 0$; en efecto, podemos reducirnos al caso donde U es afín, y un elemento de un anillo reducido que pertenece a todos los ideales primos mínimos es nulo por definición. □

Observación 2.3.7. El recíproco de la Proposición 2.3.6 es verdadero si el conjunto de componentes irreducibles de X es localmente finito (i.e., cada punto tiene una vecindad que intersecta sólo a un número finito de conjuntos en la colección). Podemos en efecto reducirnos al caso donde $X = \operatorname{Spec} A$ es afín; si $\mathfrak{p}_i (1 \leq i \leq n)$ son los ideales primos mínimos de A y si $s \in \mathfrak{p}_i$ para un índice i, existe $t \in A$ tal que $t \in \mathfrak{p}_j$ para $j \neq i$ y $t \notin \mathfrak{p}_i$ [2, Ch. II,§1,num. 1, prop. 1], por lo tanto $st \in \mathfrak{p}_i$ para toda i, y por siguiente $st = 0$ porque A es reducido; s es así no regular.

Proposición 2.3.8. *Si X es un esquema entero entonces $\mathcal{K}$ es isomorfa como gavilla de $\mathcal{O}_X$-álgebras a la gavilla constante asociada al campo de funciones K de X.*

Demostración. Comenzamos por probar que para cada $x \in X$ hay un isomorfismo de anillos $Q_x \cong K$. Primero notemos que por la Proposición 2.3.6, para un subconjunto abierto no vacío U, el conjunto $S(U)$ consiste precisamente de aquellos $s \in \mathcal{O}_X(U)$ con $s_\xi \neq 0$ (donde ξ es el punto genérico de X). Así que el homomorfismo de anillos $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,\xi} = K$ manda elementos de $S(U)$ a unidades e induce un homomorfismo de anillos $Q(U) \to K$, y por lo tanto un homomorfismo de anillos $\rho_x : Q_x \to K$ para cualquier $x \in K$, definido por $(U, a/s) \mapsto a_\xi(s_\xi)^{-1}$. Para mostrar que ρ_x es inyectivo para toda x, basta mostrar que $Q(U) \to K$ es inyectivo para todo U abierto no vacío. Pero si $a, b \in \mathcal{O}_X(U)$ y $s, t \in S(U)$ son tales que $a_\xi(s_\xi)^{-1} = b_\xi(t_\xi)^{-1}$ entonces $(at-bs)_\xi = 0$ y así $at-bs = 0$ en $\mathcal{O}_X(U)$, mostrando que $a/s = b/t$ en $Q(U)$. El mapeo ρ_x es sobreyectivo porque K es el campo de fracciones de $\mathcal{O}_{X,x}$ para todo $x \in X$. Luego ρ_x es un isomorfismo de anillos.

Para U abierto no vacío, definimos $\mathcal{K}(U) \to K$ por $a \mapsto \rho_\xi(a(\xi))$. Los elementos de $K(U)$ mapean puntos $x \in U$ a gérmenes $a(x) \in Q_x$, y como X es entero, $\rho_x(a(x))$ será constante para toda $x \in U$. Así que podemos usar también a ξ. No es difícil ver que esto da un isomorfismo de gavillas de anillos de $\mathcal{K}$ con la gavilla constante en X correspondiente al campo K. Claramente la gavilla de grupos abelianos $\mathcal{K}^*$ es isomorfa a la gavilla constante en X correspondiente al grupo abeliano multiplicativo K^*. □

Proposición 2.3.9. *Sea X un esquema y $U \subset X$ un suconjunto abierto. Entonces $f \in \mathcal{K}(U)$ es una unidad si y sólo si $f_x \in \mathcal{K}_x$ es $\mathcal{O}_{X,x}$-libre de torsión para cada $x \in U$.*

Demostración. Supongamos que $f(x) \in Q_x$ es una unidad para todo $x \in U$ y definamos $g(x) = f(x)^{-1}$. Entonces g es un elemento bien definido de $K(U)$ ya que si $x \in U$ está dado podemos encontrar una vecindad V de x contenida en U y $a \in Q(V)$ con $f(y) = (V, a)$ para toda $y \in V$. Si $(W, b) = (V, a)^{-1}$ en Q_x, entonces $(W, b) = (V, a)^{-1}$ en Q_y para toda y en alguna vecindad U' de x contenida en $V \cap W$ y consencuentemente $g(y) = (U', b|_Q)$ para toda $y \in U'$. Así que es unidad en $\mathcal{K}(U)$ si y sólo si $f(x)$ es unidad en Q_x para toda $x \in U$.

Como hay un isomorfismo de anillos $Q_x \cong \mathcal{K}_x$ hemos reducido el problema a mostrar que $f(x)$ es una unidad en Q_x para toda $x \in U$ si y sólo si f_x es $\mathcal{O}_{X,x}$-libre de torsión para todo $x \in U$. Una implicación es clara. Para la otra supongamos $x \in U$ dado y escojamos una vecindad V de x contenida en U tal que $f(y) = (V, a/s) \in Q_y$ paratodo $y \in V$, donde $a \in \mathcal{O}_x(V)$ y $s \in S(V)$. Por hipótesis, $(V, a/s)$ es libre de torsión en Q_y para toda $y \in V$, de lo cual se sigue que (V, a) es libre de torsión y por lo tanto no es un divisor decero en $\mathcal{O}_y$. Esto es $a \in S(V)$, de lo cual sigue que $(V, a/s)$ es una unidad en Q_x. Así que en efecto, f_x es unidad para todo $x \in U$. □

Definición. Un *divisor de Cartier D* en un esquema X es una sección global de la gavilla $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$. Más concretamente, un divisor de Cartier está dado por una colección de elementos

$$D_x \in \mathcal{K}_x^*/\mathcal{O}_x^*$$

tal que, para toda x, hay una vecindad U de X, y un elemento $f \in \Gamma(U, \mathcal{K}^*)$ que induce D_x para toda $x \in U$. El elemento f será llamado una ecuación local de D en U ; es único salvo multiplicación por unidades en $\mathcal{O}_X$. Un divisor de Cartier puede ser determinado especificando ecuaciones locales $\{f_i\}$ con respecto a una cubierta abierta $\{U_i\}$, siempre que f_i/f_j sea una unidad en $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$. En este caso decimos que el divisor de Cartier está representado por $\{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$.

Definición. El *soporte* de un divisor de Cartier D es el subconjunto cerrado consistente de aquellos $x \in X$ en los cuales 1 no es una ecuación local.

Definición. Decimos que un divisor efectivo de Cartier D es *reducido*, si para todo divisor D' cuyo soporte contiene el de D, el divisor $D' - D$ es efectivo; decimos que es *irreducible* si no puede escribirse como la suma de dos divisores efectivos distintos de cero.

Observación 2.3.10. Como se muestra en [4, p. 35], un divisor $D = n_1 D_1 + \ldots + n_r D_r$ es reducido si y sólo si todos los n_j son iguales a 1. Ocuparemos este hecho en el bosquejo de prueba del Teorema de Kodaira más adelante (ver §8).

Notemos que el conjunto de todos los divisores de Cartier $\Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$ forma un grupo. Aunque esta ley venga de multiplicar ecuaciones locales convenimos en escribirla adiviamente, i.e., como $D_1 \pm D_2$ para la combinación $f \cdot f^{\pm 1}$ de ecuaciones locales. Denotamos por $\mathrm{Ca}(X)$ a este grupo.

Definición. Para toda sección $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}^*)$ llamamos divisor de f y denotamos $\mathrm{div}(f)$ (o $\mathrm{div}_X(f)$) al divisor sobre X imagen de f por el homomorfismo canónico $\Gamma(X, \mathcal{K}^*) \to \Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$. Tales divisores son llamados principales.

Por definición, para todo elemento $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}^*)$, se tiene la equivalencia

$$\mathrm{div}\,(f) = 0 \Leftrightarrow f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^*) \tag{2.5}$$

o bien, para funciones $f, g \in \Gamma(X, \mathcal{K}^*)$,

$$\mathrm{div}\,(f) = \mathrm{div}\,(g) \Leftrightarrow fg^{-1} \in \Gamma(X, \mathcal{O}^*) \tag{2.6}$$

Definición. Un divisor de Cartier en un esquema X es *efectivo* si puede ser representado por $\{(U_i, f_i)\}$ donde todos los $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$. En este caso definimos el *subesquema asociado de codimensión 1*, Y, como el subesquema cerrado definido por la gavilla de ideales $\mathcal{J}$ que es localmente generada por f_i.

Definición. Sea X un esquema. Si C, D son divisores de Cartier entonces escribimos $D \geq C$ si $D - C$ es un divisor de Cartier efectivo. Así que un divisor de Cartier es efectivo si y sólo si $D \geq 0$. Esto hace del grupos de divisores de Cartier un grupo abeliano parcialmente ordenado (aunque no necesariamente es un orden total).

Proposición 2.3.11. *Sea X un esquema normal que satisface $(*)$ y sea U un subconjunto abierto no vacío. Si $f, g \in K^*$ son tales que $v_Y(f/g) = 0$ para todos los divisores primos Y con $Y \cap U \neq \varnothing$, entonces $f/g \in \mathcal{O}_X*$.*

Demostración. Considerando $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ como sub-anillo de K, es suficiente mostrar que $f/g, g/f \in \mathcal{O}_X(U)$. Por simetría basta mostrar que $f/g \in \mathcal{O}_X(U)$ y para esto es suficiente dar una cubierta abierta $(U_i)_{i\in I}$ de U con $f/g \in \mathcal{O}_X(U_i)$ para toda i. Dado $x \in U$, sea $V = \operatorname{Spec} A$ una vecindad abierta afín de x. Como X es normal, A es un dominio normal noetheriano. Si p es un ideal primo de altura 1 en A, entonces $V(\mathfrak{p})$ corresponde a un divisor primo de U, el cual es la restricción de un divisor primo Y de X (con punto genérico $\eta \in U$ correspondiente a $\mathfrak{p}$). Sea Q el campo de fracciones de A, y sea $h \in Q$ la imagen de f/g bajo el isomorfismo $K \cong Q$. Entonces $h \in A_{\mathfrak{p}}$ ya que $v_Y(f/g) = 0$ implica $f/g \in \mathcal{O}_{X,\eta}$. Por la Proposición 2.1.14 se sigue que $h \in A \subset K$ y por tanto $f/g \in \mathcal{O}_X(V)$, lo cual da la cubierta abierta de U requerida. $\square$

Proposición 2.3.12. *Sea X un esquema entero, separado y noetheriano, cuyos anillos locales son todos dominios de factorización única (en cuyo caso decimos que X es localmente factorial). Entonces el grupo* Div X *de divisores de Weil en X es isomorfo al grupo de divisores de Cartier $\Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$, y más aún, los divisores de Weil principales corresponden a divisores de Cartier principales bajo este isomorfismo.*

Demostración. Primero notemos que, como un DFU es enteramente cerrado, X es normal y por tanto satisface $(*)$. De modo que tiene sentido hablar de divisores de Weil. Como X es entero, la gavilla $\mathcal{K}$ es justamente la gavilla constante correspondiente al campo de funciones K de X. Ahora, sea un divisor de Cartier dado por (U_i, f_i) donde U_i es una cubierta abierta de X y $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^*) = K*$. Definimos el divisor de Weil asociado como sigue. Para cada divisor primo Y , tomemos como coeficiente de Y a $v_Y(f_i)$, donde i es uníndice cualquiera para el que $Y \cap U_i = \varnothing$. Si j es otroíndice tal, entonces f_i/f_j es invertible en $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$, así que $v_Y(f_i/f_j) = 0$ y $v_Y(f_i) = v_Y(f_j)$. Así obtenemos un divisor de Weil bien definido $D = \sum v_Y(f_i) \cdot Y$ en X ya que además la suma es finita por ser X noetheriano.

Inversamente, si D es un divisor de Weil en X, sea $x \in X$ un punto cualquiera. Los divisores primos del esquema local $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_x$ están en correspondencia 1-1 con los divisores primos de X que pasan por x, de modo que podemos hablar del divisor de Weil inducido, D_x sin más que eliminar de D los divisores primos que no pasan por x. Como $\mathcal{O}_x$ es un DFU, D_x es un divisor principal por la Proposición 2.1.13; sea pues $D_x = (f_x)$ para algún $f_x \in K$. Ahora, el divisor principal (f_x) en X tiene la misma restricción a $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_x$ que D, por lo tanto difieren sólo en divisores primos que no pasan por x. Hay sólo un número finito deéstos que tienen un coeficiente no cero en D o en (f_x), así que hay una vecindad abierta U_x de x tal que D y (f_x) tienen la misma restricción a U_x. Cubriendo X con tales conjuntos abiertos U_x, las funciones

f_x dan un divisor de Cartier en X. Nótese que si f, f' dan el mismo divisor de Weil en un abierto U, entonces $f/f' \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}^*)$ por la Proposición 2.3.11, ya que X es normal. Así que tenemos un divisor de Cartier bien definido.

Estas dos construcciones son inversas una de la otra, así que los grupos de divisores de Weil y de divisores de Cartier son isomorfos. Más aún, los divisores principales se corresponden unos a otros. $\square$

Observación 2.3.13. . Como un anillo local regular es DFU, esta Proposición se aplica en particular a cualquier esquema noetheriano entero separado regular. Un esquema es regular si todos sus anillos locales son anillos locales regulares.

Observación 2.3.14. Si X es un esquema que satisface $(*)$, pero no necesariamente localmente factorial, podemos definir un subgrupo Div X consistente de los divisores de Weil localmente principales: D es localmente principal si X puede ser cubierto por conjuntos abiertos U tales que $D|_U$ es principal para cada U. Entonces la prueba de arriba muestra que los divisores de Cartier son los mismos que los divisores de Weil localmente principales.

Ejemplo 2.3.15. Sea X el cono cuádrico afín $\operatorname{Spec} k[x, y, z]/(xy - z^2)$ tratado arriba. Hemos visto que Y es un divisor de Weil que no es localmente principal en una vecindad del vértice del cono. En efecto, la prueba muestra que su ideal primo $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$ no es principal ni siquiera en el anillo local $A_{\mathfrak{m}}$, lo que no sólo implica que Y no es principal, sino que no lo es su restricción a cualquier vecindad de $\mathfrak{m}$. Así que Y no corresponde a un divisor de Cartier. Por otro lado, $2 \cdot Y$ es localmente principal, y de hecho principal. Así que en este caso el grupo de divisores de Cartier módulo divisores principales es 0, mientras que Cl $X \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2.4. Gavillas invertibles

Definición. Sea X un espacio anillado. Decimos que un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ es *localmente libre* si, para toda $x \in X$, existe una vecindad abierta de U tal que $\mathcal{F}|U$ es isomorfo a un $(\mathcal{O}_X|U)$-módulo de la forma $\mathcal{O}_X^{(I)}|U$, para algún conjunto de índices I (que puede depender de U). Si para todo U, I es finito, decimos que $\mathcal{F}$ es de *rango finito*; si para todo U, I tiene el mismo número finito de elementos n, decimos que $\mathcal{F}$ es de rango n.

Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre de rango finito, para toda $x \in X$, $\mathcal{F}_x$ es un $\mathcal{O}_{X,x}$-módulo libre de rango $n(x)$, y existe una vecindad U de x tal que $\mathcal{F}|U$ es de rango $n(x)$; si X es conexo, $n(x)$ es entonces constante.

Si $\mathcal{E}$ es localmente libre, $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ es un funtor exacto en $\mathcal{F}$ sobre la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos [7, III, 9.2(e)].

Definición. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y sea $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo de rango finito. Definimos el dual de $\mathcal{E}$, denotado $\mathcal{E}^\vee$, como la gavilla $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$.

Si $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ son dos $\mathcal{O}_X$-módulos, hay un homomorfismo canónico funtorial

$$\mathcal{E}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \to \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \tag{2.7}$$

definido de la siguiente manera: para todo abierto U, y para todo par (u, t) donde $u \in \Gamma(U, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)) = \mathrm{Hom}\ (\mathcal{E}|U, \mathcal{O}_X|U)$ y $t \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, hacemos corresponder el elemento de Hom $(\mathcal{E}|U, \mathcal{F}|U)$ que, para toda $x \in U$, hace corresponder $s_x \in \mathcal{E}_x$ el elemento $u_x(s_x)t_x$ de $\mathcal{F}_x$. Si $\mathcal{E}$ es localmente libre de rango finito, este homomorfismo es biyectivo; siendo local la propiedad, podemos en efecto reducirnos al caso donde $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X^n$; como para todo $\mathcal{O}_X$- módulo $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{G})$ es canónicamente isomorfo a $\mathcal{G}^n$, podemos reducirnos al caso $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$ que es inmediato.

Definición. Una *gavilla invertible* es una gavilla localmente libre de rango uno.

Proposición 2.4.1. *Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ son gavillas invertibles en un espacio anillado X, entonces también lo es $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$. Si $\mathcal{L}$ es una gavilla invertible en X, entonces existe una gavilla invertible $\mathcal{L}^{-1}$ en X tal que $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \cong \mathcal{O}_X$.*

Demostración. La primer parte es clara, ya que $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ son ambas localmente libres de rango 1, y $\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_X \cong OX$. Para la segunda parte, sea $\mathcal{L}$ una gavilla invertible, y tomemos $\mathcal{L}^{-1}$ como la gavilla dual $\mathcal{L}^\vee$, entonces $\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{L} \cong \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ por el isomorfismo que da (2.7). Basta definir un isomorfismo $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L}) \to \mathcal{O}_X$. Pero para todo $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$, tenemos un homomorfismo canónico $\mathcal{O}_X \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ como sigue: a toda sección $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, hacemos corresponder la multiplicación por s en $Hom(\mathcal{F}|U, \mathcal{F}|U)$. Resta probar que si $\mathcal{F} = \mathcal{L}$ es localmente libre de rango 1, este homomorfismo es biyectivo, y como la situación es local, nos reducimos al caso $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ que es inmediato. □

Definición. Sea X un espacio anillado. Definimos el *grupo de Picard* de X, denotado por $\mathrm{Pic}\, X$, como el grupo de clases de isomorfismo de gavillas invertibles en X, bajo la operación $\otimes$. La Proposición anterior muestra que de hecho sí es un grupo.

Observación 2.4.2. Podemos expresar a $\mathrm{Pic}\,(X)$ como el grupo de cohomología $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$.

En efecto, dada una gavilla invertible $\mathcal{L}$ en X, sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta por conjuntos abiertos de X, en la cual $\mathcal{L}$ es libre, y fijemos isomorfismos $\varphi_i : \mathcal{O}_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_{U_i}$. Entonces en $U_i \cap U_j$ obtenemos un isomorfismo $\varphi_{ij} = \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ de $\mathcal{O}_{U_i \cap U_i}$ consigo mismo. Cada uno de los φ_{ij} está determinado de manera única por $\varphi_{ij}(1) = f_{ij}$, y por ser un isomorfismo, $f_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_{ij}}^*)$, así que $f = \{f_{ij}\}$ define una 1-cadena de Čech de $\mathcal{U}$ con coeficientes en $\mathcal{O}^*$. Se pueden tomar los φ_i de modo que $\varphi_{ik} = \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk}$

sobre U_{ijk}, así que obtenemos $f_{ik} = f_{ij} \cdot f_{jk}$. Esto es, $\{f_{ij}\}$ define un 1-ciclo de Čech, el cual induce un elemento en $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$.

Por otro lado, sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ gavillas invertibles que determinan cociclos f y g, a través de isomorfismos locales $\{\varphi_i\}$ y $\{\psi_i\}$ para alguna cubierta $\mathcal{U}$ como arriba. Si $\theta : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ es un isomorfismo entre estas dos gavillas, entonces sea $\theta_i = \psi_i \circ \theta \circ \varphi^{-1} : \mathcal{O}_{U_i} \to \mathcal{O}_{U_i}$ y $\theta_i(1) = h_i$. Tenemos $h_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O})$ y $h_i^{-1} f_{ij} h_j = g_{ij}$, es decir, los cociclos f y g son equivalentes y por tanto definen el mismo elemento de $H^1(X, \mathcal{O})$. Se sigue que hay un mapeo bien definido de $\operatorname{Pic} X$ a $H^1(X, \mathcal{O}^*)$.

Ahora supongamos que $\mathcal{L}$ es una gavilla tal que la imagen de la cadena correspondiente a f en $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ es 1. Entonces existen $h_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O})$ tales que $f_{ij} \cdot h_j = h_i$ en U_{ij}. Definiendo isomorfismos $\theta : \mathcal{O}_{U_i} \to \mathcal{L}|_{U_i}$ por $1 \mapsto h_i f_i$, vemos que estos se pegan bien en $U_i \cap U_j$ así que la gavilla $\mathcal{L}$ es libre. No es dificil ver que si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ son gavillas invertibles que dan familias $\{f_{ij}\}$ y $\{g_{ij}\}$, entonces $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ y $\mathcal{L}^{-1}$ dan familias $\{f_{ij} \cdot g_{ij}\}$ y $\{f_{ij}^{-1}\}$, respectivamente.

Finalmente, un elemento dado $\overline{f} \in \check{\mathrm{H}}^1(X, \mathcal{O})$ es el límite directo de la clase cohomológica $\{f_{ij}\} \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ para una cierta cubierta $\mathcal{U}$ de X. Usando los $\{f_{ij}\}$, podemos pegar $\mathcal{O}_{U_i}$ y $\mathcal{O}_{U_j}$ sobre U_{ij} para obtener una gavilla invertible $\mathcal{L}$. Esta gavilla da clases $\{f_{ij}\}$.

Proposición 2.4.3. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas. Entonces $\mathcal{L} \mapsto f^*(\mathcal{L})$ induce un homomorfismo de grupos de Picard, $f^* : \operatorname{Pic} Y \to \operatorname{Pic} X$.*

Demostración. Si $\mathcal{L}$ es un $\mathcal{O}_Y$-módulo invertible, $f^*(\mathcal{L})$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo invertible: esto resulta inmediato de que las imágenes inversas de dos $\mathcal{O}_Y$-módulos localmente isomorfos son localmente isomorfas y de que $f^*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X$. Bajo el mismo argumento, si $\mathcal{L}'$ es otro $\mathcal{O}_Y$-módulo invertible y $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}'$, entonces $f^*(\mathcal{L}) \cong f^*(\mathcal{L}')$. Entonces tenemos un mapeo bien definido de $\operatorname{Pic} Y$ en $\operatorname{Pic} X$. Para ver que es un homomorfismo notemos que

$$\begin{aligned} f^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') &= f^{-1}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{O}_X \\ &= (f^{-1}(\mathcal{L}) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} f^{-1}(\mathcal{L}')) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{O}_X \\ &= f^{-1}(\mathcal{L}) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} f^{-1}(\mathcal{L}') \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{O}_X \\ &= f^*(\mathcal{L}) \otimes f^*(\mathcal{L}') \end{aligned}$$ □

Definición. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Supongamos que $\mathcal{L}$ es una gavilla de $\mathcal{O}_X$-álgebras, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ dos sub-$\mathcal{O}_X$-módulos de $\mathcal{L}$; denotamos por $\mathcal{F}\mathcal{G}$ el sub-$\mathcal{O}_X$-módulo de $\mathcal{L}$, imagen de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ por el mapeo canónico $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{L}$. Es inmediato que $\mathcal{F}\mathcal{G}$ es también el $\mathcal{O}_X$-módulo asociado a la pregavilla $U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{F})\Gamma(U, \mathcal{G})$.

Proposición 2.4.4. *Sea X un esquema y $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sub-$\mathcal{O}_X$-módulos de $\mathcal{K}_X$. Entonces $(\mathcal{F}\mathcal{G})_x \cong \mathcal{F}_x \mathcal{G}_x$.*

Demostración. Del hecho de que el funtor tallo es exacto resulta que $(\mathcal{F}\mathcal{G})_x$ es la imagen del morfismo $\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x \to \mathcal{L}_x$, que es obviamente $\mathcal{F}_x\mathcal{G}_x$. □

Proposición 2.4.5. *Sea A un anillo y B una A-álgebra. Sean M, N A-submódulos de B con alguno de M, N generado como A-módulo por algún elemento de B que no divide a cero. Entonces hay un isomorfismo canónico de A-módulos $M \otimes_A N \to M \cdot N$ dado por $m \otimes n \mapsto mn$.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que M es generado como A-módulo por $a \in B$, donde a no divide a cero. El mapeo $M \times N \to M \cdot N$ dado por $(m, n) \mapsto mn$ es claramente A-bilineal, e induce un morfismo sobreyectivo de A-módulos $M \otimes AN \to M \cdot N$. Supongamos que $\sum_i (a_i a \otimes b_i)$ es mapeado a cero en B. Entonces $(\sum_i a_i b_i)a = 0$ y por lo tanto $\sum_i a_i b_i = 0$. Pero entonces

$$\sum_i (a_i a \otimes b_i) = a \otimes (\sum_i a_i b_i) = 0$$

Por lo tanto $M \otimes_A N \to M \cdot N$ es un isomorfismo. □

Definición. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Un sub-$\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{J}$ del $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{K}$ es llamado *ideal fraccionario*. Un ideal fraccionario $\mathcal{J}$ sobre X que es un $\mathcal{O}_X$-módulo invertible es llamado *ideal fraccionario invertible*.

Proposición 2.4.6. *Para que un ideal fraccionario $\mathcal{J}$ sobre X sea invertible, es necesario y suficiente que para toda $x \in X$, exista una vecindad abierta U de x y una sección $f \in \Gamma(U, \mathcal{K}^*)$ tales que $\mathcal{J}|U = \mathcal{O}_U \cdot f$.*

Demostración. La condición es evidentemente suficiente, ya que el morfismo de $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ en $\Gamma(V, \mathcal{J})$ definido por $s \mapsto s \cdot (f|V)$ es evidentemente biyectivo para todo abierto $V \subset U$. Para ver que es necesaria notamos que existe por hipótesis una vecindad abierta U de x y un isomorfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}|U$. Si f es la imagen de la sección $1 \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ para este isomorfismo, podemos suponer, restringiéndonos a U, que $f = u/s$ donde $u \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ y $s \in \Gamma(U, S(\mathcal{O}_X)$, y el isomorfismo considerado hace ahora corresponder, a toda sección $v \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ (donde V es un abierto contenido en U) la sección $v(u|V)/(s|V)$; decir que la función así definida es biyectiva significa que $u|V$ es un elemento regular de $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$, así $f \in \Gamma(U, \mathcal{K}^*)$. □

Observación 2.4.7. Notemos que para abierto U de X tal que $\mathcal{J}|U = \mathcal{O}_U \cdot f$ con $f \in \Gamma(U, \mathcal{K}^*)$, la sección f está determinada salvo por multiplicación por un elemento de $\Gamma(U, \mathcal{O}_{X,x})$, porque la multiplicación por estos elementos dan todos los automorfismos del $\mathcal{O}_U$-módulo $\mathcal{O}_U$.

Corolario 2.4.8.

(i) *Sea $\mathcal{J}$ un ideal fraccionario invertible; entonces el $\mathcal{O}_X$-módulo invertible $\mathcal{J}^{-1}$ se identifica canónicamente al ideal $\mathcal{J}'$ definido de la siguiente manera: para todo abierto U de X tal que $\mathcal{J}|U = \mathcal{O}_U \cdot f$, donde $f \in \Gamma(U, \mathcal{K}^*)$ tenemos $\mathcal{J}'|U = \mathcal{O}_U \cdot f^{-1}$;*

(ii) *Si $\mathcal{J}_1$ y $\mathcal{J}_2$ son dos ideales fraccionarios invertibles, el morfismo canónico $\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2 \to \mathcal{J}_1\mathcal{J}_2$ es un isomorfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos.*

Demostración. La afirmación (ii) resulta inmediata de las Proposiciones 2.4.5 y 2.4.6. Por otro lado, la Observación 2.4.7 prueba que existe un ideal fraccionario $\mathcal{J}'$ y uno solo definido por la condición del enunciado; el isomorfismo canónico de $\mathcal{J}'$ sobre $\mathcal{J}^{-1} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}, \mathcal{O}_X)$ se obtiene haciendo corresponder a toda sección $s \cdot (f^{-1}|V)$ de $\Gamma(V, \mathcal{J}')$ (donde V es un abierto contenido en U y $s \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ el homomorfismo $t \cdot (f|V) \mapsto st$ de $\Gamma(V, \mathcal{J})$ sobre $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ □

En virtud del Corolario 2.4.8(i) se suele identificar los $\mathcal{O}_X$-módulos invertibles $\mathcal{J}'$ y $\mathcal{J}^{-1}$, considerando así a $\mathcal{J}^{-1}$ como un sub-$\mathcal{O}_X$-módulo de $\mathcal{K}^*$.

Resulta del Corolario 2.4.8 que el conjunto $\mathrm{Id.inv}(X)$ de ideales fraccionales invertibles sobre X está dotado de una estructura de grupo conmutativo por la ley de composición $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) \mapsto \mathcal{J}_1\mathcal{J}_2$, siendo $\mathcal{O}_X$ el elemento neutro del grupo. Es claro que para todo abierto U de X, tenemos $(\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2)|U = (\mathcal{J}_1|U(\mathcal{J}_2|U)$, así que el mapeo de restricción $\mathcal{J} \mapsto \mathcal{J}|U$ es un homomorfismo de grupos $\mathrm{Id.inv}(X) \mapsto \mathrm{Id.inv}(U)$; definiendo así una pregavilla de grupos conmutativos $U \mapsto \mathrm{Id.inv}(U)$; de hecho esta pregavilla es una gavilla de grupos conmutativos a la que denotamos $Id.invX$. Para todo elemento $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}^*)$, resulta de la Proposición 2.4.6 que $\mathcal{J}(f) = \mathcal{O}_X \cdot f$ es un ideal fraccionario invertible, y tenemos evidentemente $\mathcal{J}(f_1f_2) = \mathcal{J}(f_1)\mathcal{J}(f_2)$, es decir el mapeo $f \mapsto \mathcal{J}(f)$ es un homorfismo del grupo conmutativo $\Gamma(U, \mathcal{K}^*)$ sobre el grupo conmutativo $\mathrm{Id.inv}(X)$. Reemplazando X por un abierto cualquiera U de X y notando que los homomorfismos obtenidos son compatibles con las operaciones de resctricción, obtenemos un homomorfismo canónico de gavillas de grupos conmutativos

$$I_0 : \mathcal{K}^* \to Id.inv_X. \tag{2.8}$$

Notemos que si $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^*)$, entonces $\mathcal{J}(f) = \mathcal{O}_X$, luego el homomorfismo I_0 se factoriza en

$$I_0 : \mathcal{K}^* \to \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^* \to Id.inv_X \tag{2.9}$$

En particular, para todo abierto U de X obtenemos un homomorfismo $\mathcal{I}_U$: $\mathrm{Ca}(U) \to \mathrm{Id.inv}(U)$ de grupos conmutativos, tal que para toda sección $f \in \Gamma(U, \mathcal{K}^*)$, tenemos

$$\mathcal{I}_U(\mathrm{div}_U(f)) = \mathcal{O}_U \cdot f \tag{2.10}$$

Concluimos que $\mathcal{I}_X(D)$, para todo divisor $D \in \mathrm{Ca}\, X$, es el ideal fraccionario invertible definido de la siguiente manera: para todo abierto U de X tal que $D|U = \mathrm{div}_U(f)$, donde $f \in \Gamma(U, \mathcal{K}^*)$, $\mathcal{I}_X(D)|U$ es el ideal fraccionario invertible $\mathcal{O}_U \cdot f$. Tenemos así, en virtud de la definición de divisores efectivos, para todo elemento $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}^*)$, la relación

$$f \in \Gamma(X, \mathcal{I}_X(D)) \Leftrightarrow \mathrm{div}\,(f) \geq D \tag{2.11}$$

Proposición 2.4.9. *El homomorfismo $I : \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^* \to Id.inv_X$ es biyectivo.*

Demostración. Definimos un homomorfismo I'_X de Id.inv(X) sobre Ca(X) haciendo corresponer a todo ideal fraccionario invertible $\mathcal{J}$ sobre X el divisor $I'_X(\mathcal{J})$ definido de la siguiente manera: para todo abierto U de X tal que $\mathcal{J}|U = \mathcal{O}_U \cdot f$, donde $f \in \Gamma(U, \mathcal{K}^*)$ (Proposición 2.4.6), tomamos $I'_X(\mathcal{J})|U = \mathrm{div}_U(f)$; en virtud de la Observación 2.4.7, esta definición es independiente del generador f escogido sobre $\mathcal{J}|U$, y determina bien un divisor sobre X. Además, esta definición muestra inmediatamente que los homomorfismos $\mathcal{I}_X$ e I'_X son recíprocos uno del otro. Reemplazando X por un abierto cualquiera U, deducimos la definición del isomorfismo $I' : Id.inv_X \to \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$, recíproco de I. $\square$

Ponemos $I'_X(\mathcal{J}) = \mathrm{div}\,\mathcal{J}$, de tal modo que para toda $f \in (X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$ se tiene,

$$\mathrm{div}\,(\mathcal{O}_X \cdot f) = \mathrm{div}\,(f)$$

Se suelen identificar las gavillas $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$ e $Id.inv_X$ (respectivamente los grupos Ca(X) e Id.inv(X)) por medio de los isomorfismos I e I' (resp. $\mathcal{I}_X$ e I'_X) precedentes.

Notemos que se tiene la relación

$$D \geq 0 \Leftrightarrow \mathcal{I}_X(D) \subset \mathcal{O}_X$$

la cual resulta inmediata de las definiciones de divisor de Cartier efectivo y de los axiomas de pegado de gavillas; por otro lado, la imagen $\mathcal{I}_X(\mathrm{Ca}^+(X))$ es el conjunto de ideales de $\mathcal{O}_X$ que como $\mathcal{O}_X$-módulos son invertibles: un tal ideal $\mathcal{J}$ está caracterizado por el hecho de que para toda $x \in X$, hay una vecindad abierta U de x sobre X tal que $\mathcal{J}|U = \mathcal{O}_U \cdot f$, donde f es un elemento regular de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, ie no es divisor de cero.

Definición. Para todo divisor de Cartier D sobre X, hacemos

$$\mathcal{O}_X(D) = (\mathcal{I}_X(D))^{-1}$$

$\mathcal{O}_X(D)$ es así un ideal fraccionario invertible, definido de la siguiente manera: para todo abierto U de X tal que $D|U = \mathrm{div}_U(f)$, donde $f \in \Gamma(U, \mathcal{K}^*)$, $\mathcal{O}_X(D)|U$ es el ideal fraccinario invertible $\mathcal{O}_U \cdot f^{-1}$.

De nuevo usando la definición de divisores efectivos, tenemos la relación

$$f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) \Leftrightarrow \mathrm{div}\,(f) \geq -D \tag{2.12}$$

Proposición 2.4.10. *Sea X un esquema. Entonces se tienen los siguientes isomorfismos canónicos*

$$\mathcal{O}_X(0) = \mathcal{O}_X,$$
$$\mathcal{O}_X(D_1 + D_2) = \mathcal{O}_X(D_1)\mathcal{O}_X(D_2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2)$$
$$\mathcal{O}_X(nD) = (\mathcal{O}_X(D))^n \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X(D))^{\otimes n}$$

para todo entero $n \in \mathbb{Z}$, y para divisores de Cartier cualesquiera D, D_1, D_2 sobre X.

Demostración. Sean D_1, D_2 divisores de Cartier dados. Podemos escoger una cubierta de X por abiertos no vacíos $\{U_i\}_{i\in I}$ tal que D_1 está representado por $\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$ y D_2 por $\{(U_i, g_i)\}_{i\in I}$ para $f_i, g_i \in K^*(U)$. Como podemos representar el divisor $D_1 + D_2$ por $\{(U_i, f_i g_i)\}_{i\in I}$ tenemos $\mathcal{O}_X(D_1 + D_2)_x = (f_i^{-1} g_i^{-1})_x$ para $x \in U_i$. Como $\mathcal{O}_X(D_1)x = ((f_i^{-1})_x), \mathcal{O}_X(D_2)_x = ((g_i^{-1})_x)$ para $x \in U_i$, se sigue de la Proposición 2.4.4 que $\mathcal{O}_X(D_1+D_2) = \mathcal{O}_X(D_1)\mathcal{O}_X(D_2)$ como sub-$\mathcal{O}_X$-módulos de $\mathcal{K}$. La Proposición 2.4.8(ii) implica entonces que hay un isomorfismo canónico $\mathcal{O}_X(D_1 + D_2) \cong \mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2)$ de gavillas de $\mathcal{O}_X$-módulos. □

Recordemos que un divisor de Cartier D sobre X es principal si es de la forma $\mathrm{div}\,(f)$, donde $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}^*)$. Consideremos una gavilla invertible $\mathcal{L}$ y escribamos $\mathrm{cl}(\mathcal{L})$ para la clase de isomorfismo de $\mathcal{L}$. Tenemos un homomorfismo

$$l_X : \mathrm{Ca}(X) \to \mathrm{Pic}\,(X) \tag{2.13}$$

tal que, para todo divisor D, se tiene

$$l_X(D) = \mathrm{cl}(\mathcal{O}_X(D)) \tag{2.14}$$

Proposición 2.4.11. *El kernel de $l_X : \mathrm{Ca}(X) \to \mathrm{Pic}\,(X)$ consiste de los divisores principales, i.e., $\mathcal{O}_X(D_1) \cong \mathcal{O}_X(D_2)$ si y sólo si D_1 es linealmente equivalente a D_2. Tenemos así un homomorfismo de grupos conmutativos*

$$\mathrm{CaCl}\ (X) \to \mathrm{Pic}\,(X) \tag{2.15}$$

donde CaCl (X) es el grupo de divisores de Cartier módulo equivalencia lineal.

Demostración. Usando la Proposición 2.4.10 será suficiente mostrar que $D = D_1 - D_2$ es principal si y sólo si $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X$. Si D es principal, definido por $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}^*)$, entonces $\mathcal{O}_X(D)$ es generado globalmente por f^{-1}, así que enviando $1 \mapsto f^{-1}$ da un isomorfismo $\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X(D)$. Inversamente, dado tal isomorfismo, la imagen de 1 da un elemento $\Gamma(X, \mathcal{K}^*)$ cuyo inverso define D como divisor principal. $\square$

Proposición 2.4.12. *Si X es un esquema entero, el homomorfismo* $\mathrm{CaCl}(X) \to \mathrm{Pic}\,(X)$ *de* (2.15) *es un isomorfismo.*

Demostración. Sólo debemos mostrar que toda gavilla invertible es isomorfa a una subgavilla de $\mathcal{K}$, que en este caso es la gavilla constante K, donde K es el campo de funciones de X. Sea pues $\mathcal{L}$ una gavilla invertible, y considérese la gavilla $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K}$. En cualquier conjunto abierto U donde $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X$, tenemos $\mathcal{L} \otimes \mathcal{K} \cong \mathcal{K}$, así que ésta es una gavilla constante en U. Ahora por ser X irreducible, se sigue que cualquier gavilla cuya restricción a cada conjunto abierto de una cubierta de X es constante, es de hecho una gavilla constante. Así $\mathcal{L} \otimes \mathcal{K}$ es isomorfa a la gavilla constante $\mathcal{K}$ y el mapeo natural $\mathcal{L} \to \mathcal{L} \otimes \mathcal{K} \cong \mathcal{K}$ expresa $\mathcal{L}$ como subgavilla de $\mathcal{K}$. $\square$

Corolario 2.4.13. *Si X es noetheriano, entero, separado, localmente factorial, hay un isomorfismo natural* $\mathrm{Cl}\, X \cong \mathrm{Pic}\, X$.

Demostración. Inmediato de las Proposiciones 2.3.12 y 2.4.12. $\square$

Corolario 2.4.14. *Si $X = \mathbb{P}^n_k$ para algún campo k, entonces cada gavilla invertible X es isomorfa a $\mathcal{O}(l)$ para algún $l \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Por la Proposición 2.1.18, $\mathrm{Cl}\, X \cong \mathbb{Z}$, así que por el Corolario 2.4.13, $\mathrm{Pic}\, X \cong \mathbb{Z}$. Más aún, el generador de $\mathrm{Cl}\, X$ es un hiperplano que corresponde a la gavilla invertible $\mathcal{O}(1)$. Por ende $\mathrm{Pic}\, X$ es el grupo libre generado por $\mathcal{O}(1)$ y cualquier gavilla invertible $\mathcal{L}$ es isomorfa a $\mathcal{O}(l)$ para algún $l \in \mathbb{Z}$. $\square$

Capítulo 3

Gavillas invertibles amplias

Definición. Sea X un esquema y $\mathcal{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos. Decimos que $\mathcal{F}$ es *generada por secciones globales* si hay una familia de secciones globales $\{s_i\}_{i\in I}$, $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{F})$, tal que para cada $x \in X$, las imágenes de s_i en el tallo $\mathcal{F}_i$ generan ese tallo como $\mathcal{O}_{X,x}$-módulo.

Definición. Sea X un esquema sobre Y , una gavilla invertible $\mathcal{L}$ en X es *muy amplia relativa a* Y, si hay una inmersión $i : X \to \mathbb{P}^r_Y$ para algún r, tal que $i^*(\mathcal{O}(1)) \cong \mathcal{L}$. Decimos que un morfismo $i : X \to Z$ es una *inmersión* si da un isomorfismo de X con un subesquema abierto de un subesquema cerrado de Z.

Definición. Una gavilla invertible $\mathcal{L}$ sobre un esquema noetheriano X se dice que es *amplia* si para cada gavilla coherente $\mathcal{F}$ en X, hay un entero $n_0 > 0$ (dependiente de $\mathcal{F}$) tal que para cada $n \geq n_0$, la gavilla $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$ es generada por sus secciones globales.

Ejemplo 3.0.15. Si $X = \operatorname{Spec} A$, donde A es un anillo noetheriano, entonces cualquier gavilla invertible es amplia. Esto sigue del hecho de que cualquier gavilla invertible es coherente, y por [7, II,5.16.2] cualquier gavilla coherente en X es generada por secciones globales. Como X es noetheriano, el producto tensorial de gavillas coherentes es coherente, así que si $\mathcal{F}$ es una gavilla coherente, entonces $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ es coherente y por lo tanto generada por secciones globales para toda $n \geq 1$.

Observación 3.0.16. El Teorema de Serre [7, II,5.17] afirma que una gavilla muy amplia $\mathcal{L}$ en un esquema proyectivo X sobre un anillo noetheriano A es amplia. El inverso no es cierto, pero veremos abajo (Teorema 3.0.20) que si $\mathcal{L}$ es amplia, entonces alguna potencia tensorial $\mathcal{L}^{\otimes m}$ de $\mathcal{L}$ es muy amplia. Así que amplia puede ser visto como una versión estable de muy amplia.

Proposición 3.0.17. *Sea $\mathcal{L}$ una gavilla invertible sobre un esquema noetheriano X. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathcal{L}$ *es amplia;*

(ii) $\mathcal{L}^m$ *es amplia para toda* $m > 0$*;*

(iii) $\mathcal{L}^m$ *es amplia para algún* $m > 0$*.*

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) es inmeadiato de la definición de amplia; (ii) $\Rightarrow$ (iii) es trivial. Para probar (iii) $\Rightarrow$ (i), supongamos que $\mathcal{M} = \text{Ł}^m$ es amplia y sea $\mathcal{F}$ una gavilla coherente. Para cada $0 \leq i \leq m-1$, sea $F_i = \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^i$. Por hipótesis, hay un entero n_i tal que $F_i \otimes \mathcal{M}^n$ es generada globalmente por sus secciones globales para cada $n \geq n_i$. Sea n_0 el máximo de los n_i. Si $n \geq (n_0+1)m$, entonces podemos escribir $n = qm + i$, donde $0 \leq i \leq m-1$ y $q \geq n_0 \geq n_i$.

Pero entonces

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n = \mathcal{F}_i \otimes \mathcal{M}^q$$

la cual está globalmente generada. □

Teorema 3.0.18. *Sea X un esquema noetheriano, sea U un subconjunto abierto, y sea $\mathcal{F}$ una gavilla en U. Entonces existe una gavilla coherente $\mathcal{F}'$ en X tal que $\mathcal{F}'|U \cong \mathcal{F}$.*

Demostración. Probaremos este resultado en varios pasos:

(a) Decimos que una gavilla $\mathcal{F}$ es la unión de sus subgavillas $\mathcal{F}_\alpha$ si para todo conjunto abierto U, el grupo $\mathcal{F}(U)$ es la unión de los subgrupos $\mathcal{F}_\alpha(U)$. En un esquema afín noetheriano, toda gavilla cuasi-coherente es la unión de sus subgavillas coherentes. En efecto, en un esquema afín hay una correspondencia entre gavillas cuasi-coherentes (resp. coherentes) y módulos (resp. módulos finitamente generados). Así que si $X = \operatorname{Spec} A$, es suficiente mostrar que cada A-módulo es la unión de sus sub-módulos finitamente generados. Pero esto es claro ya que cada para un A-módulo M, cada elemento $m \in M$ está contenido en un submódulo finitamente generado (tómese el submódulo generado por m).

(b) Sea X un esquema afín noetheriano, U un subconjunto abierto, y $\mathcal{F}$ coherente en U. Entonces existe una gavilla coherente $\mathcal{F}'$ en X con $\mathcal{F}'|U \cong \mathcal{F}$. En efecto, sea $i : U \to X$ el mapeo inclusión y consideremos la gavilla $i^*\mathcal{F}$. Por [7, Prop. 5.8 (c)] sabemos que es cuasi-coherente. Entonces por (a) es la unión de sus subgavillas coherentes, i.e. $i^*\mathcal{F} = \cap_{\mathcal{G}coh}\mathcal{G}$. Restringiendo esta unión obtenemos un conjunto de sub-gavillas de $\mathcal{F}$ cuya unión es $\mathcal{F}$. Pero $\mathcal{F}$ es coherente es un esquema afín noetheriano, así que el módulo correspondiente es noetheriano. Esto significa que el sistema de módulos correspondiente a gavillas de la forma $\mathcal{G}|U$ (donde $\mathcal{G}$ es una sub-gavilla coherente de $i^*\mathcal{F}$) tiene un elemento máximo. Pero este sistema es directo, así que el elemento máximo es la unión. Si $\mathcal{F}'|U$ es la gavilla correspondiente a este elemento máximo, entonces hemos encontrado una sub-gavilla coherente $\mathcal{F}'$ de $i^*\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}'|U \cong \mathcal{F}$.

(c) Con $X, U, \mathcal{F}$ como en (b), supongamos además que se está dada una gavilla cuasi-coherente $\mathcal{G}$ en X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}|U$. Entonces existe $\mathcal{F}'$ una subgavilla coherente de $\mathcal{G}$, con $\mathcal{F}'|U \cong \mathcal{F}$. Tenemos el morfismo natural $\rho : \mathcal{G} \to i^*(\mathcal{G}|U)$ así que podemos considerar la subgavilla $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ que es la preimagen de $i^*\mathcal{F} \subseteq i^*(\mathcal{G}|U)$. En subconjuntos abiertos $V \subseteq U$ el morfismo $\mathcal{G}(V) \to i^*(i^{-1}\mathcal{G}(V))$ es un isomorfismo así que $\mathcal{G}'|U \cong \mathcal{F}$. Considérese el sistema dirigido de subgavillas coherentes de $\mathcal{G}$ que están contenidas en $\mathcal{G}'$. Nótese que por el siguiente diagrama y el hecho de que los morfismos horizontales son inyectivos, éstas están en correspondencia uno a uno con las gavillas coherentes de $i^*\mathcal{F}$ así que su unión es $\mathcal{G}'$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}' \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[d] \\
i_*\mathcal{F} \arrow[r, hook] & i_*(\mathcal{G}|U)
\end{tikzcd}$$

Ahora podemos usar el argumento de (b). Como $\mathcal{G}'$ es la unión de nuestro sistema dirigido, y la restricción de esta unión a U es $\mathcal{F}$, hay un elemento máximo $\mathcal{F}'$ cuya restricción a U es F. Así que hemos encontrado una subgavilla coherente de $\mathcal{G}$ cuya restricción a U es $\mathcal{F}$.

(d) Sea ahora X un esquema noetheriano, U un subconjunto abierto, $\mathcal{F}$ una gavilla coherente en U, y $\mathcal{G}$ una gavilla cuasi-coherente en X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}|U$. Entonces hay una subgavilla coherente $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{G}$ en X con $\mathcal{F}'|U \cong \mathcal{F}$.

Sea $\{U_i\}$ una cubierta afín de X. Como X es noetheriano, podemos asumir que la cubierta es finita. Restringiendo a U_1 y $U \cap U_1$, las hipótesis de la parte previa se satisfacen así que podemos encontrar una subgavilla coherente $\mathcal{F}_l$ de $\mathcal{G}|U_l$ tal que la restricción a $U1 \cap U$ es isomorfa a $F|U_1$. Ahora considérese $\mathcal{G}|U_1 \cap U_2$. Haciendo $X' = U_2$ y $U' = U_2 \cap (U \cap U_1)$ tenemos una gavilla cuasi-coherente $G|U_2$ en $X = U_2$ y una sub-gavilla coherente $\mathcal{F}_1|U'$ en U'. Las condiciones de la parte previa se satisfacen así que podemos encontrar una sub-gavilla $\mathcal{F}_2$ de $\mathcal{G}|U_2$ cuya restricción a U' es isomorfa $\mathcal{F}|U'$. En particular la restricción a $U_1 \cap U_2$ es la misma que la de $\mathcal{F}_1$ así que su unión es una sub-gavilla coherente de $\mathcal{G}|U_1 \cap U_2$, cuya restricción a $U \cap (U_1 \cap U_2)$ es isomorfa a $\mathcal{F}|U \cap (U_1 \cap U_2)$. Continuando de esta manera abarcamos todos los U_i y obtenemos finalmente una subgavilla coherente $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{G}$ tal que la restricción a U es isomorfa a $\mathcal{F}$. En general, para el paso iterativo tendremos $X' = U_i$ y $U' = U_i \cap (U \cap U_1 \cap \ldots \cap U_i - 1)$.

Tomando $\mathcal{G} = i^*\mathcal{F}$ en (d) el Teorema se sigue. □

Proposición 3.0.19. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas. Entonces f es de tipo finito si y sólo si para todo subconjunto abierto afín $V = \operatorname{Spec} B$ de Y, $f^{-1}(V)$*

puede ser cubierto por un número finito de abiertos afines $U_j = \operatorname{Spec} A_j$ *, donde cada* A_j *es una* B*-álgebra finitamente generada.* $\square$

Teorema 3.0.20. *Sea* X *un esquema de tipo finito sobre un anillo noetheriano* A*, y sea* $\mathcal{L}$ *una gavilla invertible en* X*. Entonces* $\mathcal{L}$ *es amplia si y sólo si* $\mathcal{L}^m$ *es muy amplia sobre* $\operatorname{Spec} A$ *para algún* $m > 0$.

Demostración. Primero supongamos que $\mathcal{L}^{\otimes m}$ es muy amplia para algún $m > 0$. Entonces existe una inmersión $i : X \to \mathbb{P}^n_A$ para algún $n \geq 1$, tal que $\mathcal{L}^{\otimes m} \cong i^*\mathcal{O}(1)$. Sea $\overline{X}$ la cerradura de $i(X)$ en $\mathbb{P}^n_A$ y sea $j : X \to \mathbb{P}^n_A$ una inmersión cerrada con la propiedad de que i se factoriza a través de j vía una inmersión abierta $k : X \to X$. Sea U la imagen de esta inmersión abierta, y sea $n : X \to U$ el isomorfismo en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "t"] & \overline{X} \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[u, Rightarrow, "n"] \arrow[ur, "k"] \arrow[r, "i"'] & \mathbb{P}^n_A \end{tikzcd}$$

Entonces $\overline{X}$ es un esquema proyectivo sobre A, así que X es noetheriano y por [7, II,5.17] la gavilla invertible $\mathcal{O}_{\overline{X}}(1) := j^*\mathcal{O}(1)$ es amplia en X. Para todo entero $l \in \mathbb{Z}$ escribimos $(O)_{\overline{X}}(l)$ por $\mathcal{O}_{\overline{X}}(1)^{\otimes l}$. Ahora bien, dada cualquier gavilla coherente $\mathcal{F}$, la gavilla $n_*\mathcal{F}$ se extiende por el Teorema 3.0.18 a una gavilla coherente $\overline{\mathcal{F}}$ en $\overline{X}$. Si para algún entero positivo l la gavilla $\overline{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}(l)$ es generada por secciones globales, entonces también lo es la gavilla (escribiendo m por $n-1$)

$$\begin{aligned} m * (\overline{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}(l))|U &\cong m_*(n_*\mathcal{F} \otimes (\mathcal{O}_{\overline{X}}(1)|U)^{\otimes l}) \\ &\cong \mathcal{F} \otimes m_*(\mathcal{O}_{\overline{X}}(1)|U)^{\otimes l} \\ &\cong \mathcal{F} \otimes (m_* j^*\mathcal{O}(1)|U)^{\otimes l} \end{aligned}$$

Pero $m_* = n^*$ y $|U = t^*$, así que $m_* j^*\mathcal{O}(1)|U \cong n^*t^*j^*\mathcal{O}(1) \cong i * \mathcal{O}(1)$. Por lo tanto $\mathcal{F} \otimes (\mathcal{L}^{\otimes l})^{\otimes l}$ es generada por secciones globales. Como $\mathcal{O}_{\overline{X}}(1)$ es amplio, se sigue que $\mathcal{L}^{\otimes m}$ es amplia en X, y por lo tanto, por la Proposición 3.0.17 también lo es $\mathcal{L}$. Para el inverso, supongamos que $\mathcal{L}$ es amplia en X. Dado cualquier $P \in X$, sea U una vecindad abierta afín de P tal que $\mathcal{L}|U$ es libre en U. Sea Y el subconjunto cerrado $X - U$ y sea $\mathcal{I}_Y$ la gavilla de ideales correspondiente (i.e., la gavilla de ideales de la estructura inducida de esquema reducido). Entonces $\mathcal{I}_Y$ es una gavilla coherente en X, así que para alguna $n > 0$ el $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{I}_Y \otimes L^{\otimes n}$ es generada por secciones globales. Como

$$Y = \operatorname{Supp}\,(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y) = \{x \in X | \mathcal{I}_{Y,x} \neq \mathcal{O}_{X,x}\}$$

y $(\mathcal{I}_Y \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})_P \cong \mathcal{I}_{Y,P} \cong \mathcal{O}_{X,P}$, se sigue del Lema de Nakayama que hay una sección

$s \in \Gamma(X, \mathcal{I}_Y \otimes \mathcal{L}^{\otimes m})$ tal que $s_P \in \mathfrak{m}_P(\mathcal{I}_Y \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})_P$. En particular s_P es una base para $(\mathcal{I}_Y \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})_P$. Como $\mathcal{L}^{\otimes n}$ es invertible, es plana, así que hay un monomorfismo $\varphi : \mathcal{I}_Y \otimes \mathcal{L}^{\otimes n} \to \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{L}^{\otimes n} cong \mathcal{L}^n$ y consideramos a s como una sección global de $L^{\otimes n}$. El diagrama conmutativo siguiente muestra que φ_P es un isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{I}_Y \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})_P \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & (\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{L}_P^{\otimes n} \arrow[r, Rightarrow, "t"] \arrow[d, Rightarrow] & \mathcal{L}_P^{\otimes n} \\
\mathcal{I}_{Y,P} \arrow[r, Rightarrow] & \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{L}_P^{\otimes n} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto s_P es una base para $L^{\otimes n}$ así que si X_s denota el conjunto P abierto $\{Q \in X | s_Q \notin \mathfrak{m}_Q L_Q^{\otimes n}\}$ es claro que $P \in X_s$. Si $Q \notin U$ entonces como $\mathcal{I}_{Y,Q}$ es un ideal propio, debe estar contenido en $\mathfrak{m}_Q$, y por lo tanto $s_P \in \mathfrak{m}_Q L_Q^{\otimes n}$. Luego $P \in X_s \subseteq U$. Ahora bien, U es afín, y $\mathcal{L}|U$ es trivial, así que s induce un elemento $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ y entonces $Xs = U_f$ es también afín. Así que hemos mostrado que para cualquier punto $P \in X$, hay una $n > 0$ y una sección $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ tal que $P \in X_s$ y X_s es afín. Como X es cuasi-compacto, podemos cubrirlo con un número finito de tales abiertos afines, correspondientes a secciones $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes ni})$. Reemplazando cada s_i por una potencia adecuada $s_i^k \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes kn_i})$, que no cambie X_s, podemos asumir que todos los n_i son iguales a un solo n. Finalmente, como $\mathcal{L}^{\otimes n}$ es también amplia, y como sólo estamos intentando mostrar que alguna potencia de $\mathcal{L}$ es muy amplia, podemos reemplazar $\mathcal{L}$ por $\mathcal{L}^{\otimes n}$. Así que ahora podemos asumir que tenemos secciones globales $s_1, \ldots, s_k \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ tales que cada $X_i = X_{s_i}$ es afín, y los X_i cubren a X. Ahora para cada i, sea $B_i = \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$. Como X es un esquema de tipo finito sobre A, por la Proposición

Sean $\{x_i | 1 \leq i \leq k\}$ y $\{x_{ij} | 1 \leq i, j \leq k\}$ las coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}_A^N$ correspondientes a las secciones de arriba de $\mathcal{L}^{\otimes n}$. Para cada $i = 1, \ldots, k$, sea $U_i \subseteq \mathbb{P}_A^N$ el subconjunto abierto $D_+(x_i)$. Entonces $\varphi^{-1}(U_i) = X_i$, y el correspondiente morfismo de A-álgebras

$$A[\{y_i\}; \{y_{ij}\}] \to B_i$$

es sobreyectivo, porque $y_{ij} \mapsto c_{ij}/s_i^n = b_{ij}$, y escogimos los b_{ij} de tal modo que generarán B_i como un A-álgebra. As]'i $X_i \to U_i$ es una inmersión cerrada, luego la factorización de φ a través de $\bigcup_i U_i \subseteq \mathbb{P}_A^n$ es una inmersión cerrada. Se sigue que $X \to \mathbb{P}_A^n$ es una inmersión, como se requería. □

Ejemplo 3.0.21. Sea X = $\mathbb{P}_k^n$, donde k es un campo. Entonces $\mathcal{O}(1)$ es muy amplia sobre k por definición. Para cualquier $d > 0$, $\mathcal{O}(d)$ corresponde al encaje d-uplo (también conocido como inmersión de Veronese), así que $\mathcal{O}(d)$ es también muy amplia sobre k. Luego $\mathcal{O}(d)$ es amplia para toda $d > 0$. Por otro lado, si $l < 0$ entonces el $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{O}(l)$ no tiene secciones globales y por lo tanto no puede ser generado por secciones globales. Pero entonces $\mathcal{O}(l)$ no puede ser amplia, pues si lo fuera habría algún $n_0 > 0$ con $O(l)^{\otimes n} \cong \mathcal{O}(nl)$ generado por secciones globales para toda $n \geq n_0$. Ya que existen módulos coherentes que no son amplios, $\mathcal{O}_X$ no puede ser amplia. Así que en $\mathbb{P}^n_k$ tenemos

$$\mathcal{O}(l) \text{ es amplia } \Leftrightarrow \text{ muy amplia } \Leftrightarrow l > 0. \tag{3.1}$$

Capítulo 4

Sistemas lineales

Sea X una variedad proyectiva no singular sobre un campo k algebraicamente cerrado. En este caso las nociones de divisor de Weil y divisor de Cartier son equivalentes, según la Proposición 2.3.12. Más aún tenemos una correspondencia biunivoca entre clases de equivalencia lineal de divisores y clases de isomorfismo de gavillas invertibles (Proposición 2.4.12. Otro hecho útil en esta situación es que para cualquier gavilla invertible $\mathcal{L}$ en X, las secciones globales $\Gamma(X, \mathcal{L})$ forman un k-espacio vectorial de dimensión finita [7, II, 5.19, p.122].

Lema 4.0.22. *Sea X un esquema entero con punto genérico η y $\mathcal{L}$ una gavilla invertible en X. Entonces*

(a) *Para $x \in X$ el morfismo canónico $\mathcal{L}_x \to \mathcal{L}_\eta$ es inyectivo;*

(b) *Para subconjuntos abiertos $W \subset V$, el mapeo restricción $\mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(W)$ es inyectivo.*

Demostración. (a) se sigue de que $\mathcal{L}$ es invertible y de que el homomorfismo canónico $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,\eta}$ es inyectivo; (b) sigue de (a). □

Sea $\mathcal{L}$ una gavilla invertible en X, y sea $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ una sección no cero de $\mathcal{L}$. Definimos un divisor efectivo $D = (s)_0$, el *divisor* de ceros de s, como sigue. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta de X por subconjuntos abiertos afines sobre los cuales $\mathcal{L}$ es trivial. Esto es, para cada $i \in I$ hay un isomorfismo de gavillas de módulos $\varphi_i : \mathcal{L}|_{U_i} \to \mathcal{O}_{U_i}$ tales que $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ satisfacen las condiciones de pegado. Entonces $\varphi_i(s)$ es un elemento no cero de $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ por el Lema 4.0.22(b), que es por lo tanto invertible como elemento de $\mathcal{K}(U_i)$. Se verifica directamente que $\{(U_i, \varphi_i(s))\}_{i\in I}$ determina un divisor efectivo D en X, el cual depende sólo de $\mathcal{L}$ y s (no en la elección de la cubierta).

Proposición 4.0.23. *Sea X una variedad proyectiva no singular sobre el campo algebraicamente cerrado k. Sea D_0 un divisor en X y sea $L = \mathcal{O}_X(D_0)$ la gavilla invertible correspondiente. Entonces:*

(a) *para cada $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ no cero, el divisor de ceros $(s)_0$ es un divisor efectivo linealmente equivalente a D_0;*

(b) *cada divisor efectivo linealmente equivalente a D_0 es $(s)_0$ para algún $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$; y*

(c) *dos secciones $s, s' \in \Gamma(X,\ L)$ tienen el mismo divisor de ceros si y sólo si hay una $\lambda \in k^*$ tal que $s' = \lambda s$.*

Demostración.

(a) Identificando L con la subgavilla $\mathcal{O}_X(D_0)$ de $\mathcal{K}$, s corresponde a una función racional $f \in K$. Supongamos que D_0 está definido como divisor de Cartier por la familia $\{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$. Entonces para cada $i \in I$ hay un isomorfismo $\mathcal{L}|U_i \cong \mathcal{O}_{U_i}$ correspondiente a la base f_i^{-1} de $\mathcal{L}(U_i)$. El elemento $s|U_i$ de $\mathcal{L}(U_i)$ es mapeado al producto $f_i \cdot s|Ui$ en $\mathcal{K}(U_i)$, el cual pertenece a $\mathcal{O}_X(U_i)$. Por tanto $D = (s)_0$ es el divisor de Cartier determinado por la familia $\{(U_i, f_i \cdot s|U_i)\}_{i \in I}$. Así $D = D_0 + \operatorname{div}(f)$, lo cual muestra que $D \sim D_0$.

(b) Sea D un divisor de Cartier efectivo y $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}^*)$ un elemento tal que $D - D_0 = \operatorname{div}(f)$. Entonces $\operatorname{div}(f) \geq -D_0$, así que f da una sección global de $\mathcal{O}_X(D_0)$ y mostramos en (a) que su divisor de ceros es $(f)_0 = D_0 + \operatorname{div}(f)$. Se sigue que $D = D_0 + \operatorname{div}(f) = (f)_0 - \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(f) = (f)_0$, como se requería.

(c) Supongamos que s, s' corresponden a funciones racionales f, f' y que $(s)_0 = (s')_0$. Entonces $\operatorname{div}(f/f') = 0$, así que $f/f' \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$. Pero ya que X es una variedad proyectiva sobre un campo algebraicamente cerrado k, tenemos $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$ [7, I,3.4] y así $f/f' \in k$. □

Definición. Sea D_0 un divisor en una variedad proyectiva no singular. El *sistema lineal completo* asociado a D_0 se define como el conjunto (tal vez vacío) de todos los divisores efectivos linealmente equivalentes a algún divisor dado D_0. Se denota por $|D_0|$.

Según la Proposición 4.0.23, para un divisor D se tiene,

$$|D| = \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D_0)))$$

Así $|D|$ es un espacio proyectivo de manera natural.

Definición. Un *sistema lineal* $\mathfrak{d}$ es cualquier subespacio lineal de un sistema lineal completo $|D_0|$.

En otras palabras, un sistema lineal corresponde a un subespacio lineal, $V \subset H^0(X, \mathcal{O}_X(D_0))$. Escribimos entonces

$$|V| = \{D \in |D_0| | D = (s)_0, s \in V\} \cong \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D_0)))$$

Capítulo 5

Geometría en una superficie

Definición. Sea X un esquema sobre un campo k, y sea $\mathcal{F}$ una gavilla coherente sobre X. Definimos la *característica de Euler* de $\mathcal{F}$, denotada por $\chi(\mathcal{F})$, como

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \mathrm{dim}_k H^i(X, \mathcal{F})$$

Se tiene que $\chi(\mathcal{F})$ es un entero por un Teorema de Serré [7, III,5.2] y porque $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ si $i > \dim X$.

Proposición 5.0.24. *Sea X una variedad proyectiva. Sea*

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0 \tag{5.1}$$

una sucesión exacta de gavillas coherentes en X. Entonces tenemos que

$$\chi(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{F}') + \chi(\mathcal{F}'')$$

Demostración. Si tenemos una sucesión exacta de espacios vectoriales sobre k

$$0 \to E_0 \to E_1 \to \ldots \to E_n \to 0$$

entonces $\Sigma_{0\ \leq i \leq n}(-1)^i \mathrm{dim}_k E^i = 0$. Basta aplicar este resultado a la sucesión larga de cohomología inducida de la sucesión exacta (5.1). □

A lo largo de esta sección, una *superficie* significará una superficie proyectiva no singular sobre un campo algebraicamente cerrado k. Recordemos que los divisores de Cartier en X pueden ser identificados con los divisores de Weil en X. Para cualquier divisor de C, sea $\mathcal{O}_X(C)$ la gavilla invertible asociada a C. Diremos que un divisor D es amplio si $\mathcal{O}_X(D)$ es una gavilla amplia. Si C es efectivo, entonces $\mathcal{O}_X(-C)$ es una gavilla de ideales de $\mathcal{O}_X$. Consecuentemente, C está naturalmente dotado con una estructura de subesquema cerrado de X. Así, una *curva* en una superficie significará cualquier divisor efectivo en la superficie X. En particular, puede ser singular, reducible o aun tener múltiples componentes. Un *punto* significará un punto cerrado, al menos que se especifique lo contrario. Sea $C \subset X$ una curva. A diferencia de divisores efectivos en una curva, no podemos contar el número de puntos en el soporte y llamarlo el grado, ya que el soporte tiene dimensión positiva. Lo que podemos hacer en la manera de contar es lo siguiente: Sean C, D dos curvas en X tales que

$$\dim\,(\mathrm{Supp}(C) \cap \mathrm{Supp}(D)) = 0$$

Sea $\{x_1, \ldots, x_n\} = \mathrm{Supp}(C) \cap \mathrm{Supp}(D)$. Sea f_i (resp. g_i) la ecuación local para C (resp. D) en x_i. Definimos el entero

$$C.D = \sum_{i=1}^{n} \dim_k(\mathcal{O}_{X,x_i}/(f_i, g_i))$$

Esto tiene sentido porque el ideal (f_i, g_i) define un subesquema de X en x_i, que es como conjunto la intersección $\mathrm{Supp}(C) \cap \mathrm{Supp}(D)$, i.e., que es x_i mismo. Por lo tanto

$$\sqrt{(f_i, g_i)} = \mathfrak{m}_{x_i}$$

luego $\mathcal{O}_{x_i}/(f_i, g_i)$ es un anillo artiniano, y por lo tanto tiene longitud finita. Este es el número de intersección de C y D, y es fácil ver que es bilineal siempre que esté definido. Como el grado en la geometría sobre curvas, depende sólo de las clases de divisores, no de los divisores. La gavilla

$$\mathcal{O}_{C\cap D} = \mathcal{O}_X/(\mathcal{O}_X(-C) + \mathcal{O}_X(-D)) \tag{5.2}$$

es una gavilla rascacielos, cuyo soporte es el conjunto finito de puntos $C \cap D$; en cada uno de estos puntos x_i tenemos $\mathcal{O}_{C\cap D, x_i} = \mathcal{O}_{X,x_i}/(f_i, g_i)$. Es claro entonces que $C.D = \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_{C\cap D})$.

Proposición 5.0.25. *Si $C.D$ está definido, entonces*

$$C.D = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_X(-C)) - \chi(\mathcal{O}_X(-D)) + \chi(\mathcal{O}_X(-C-D))$$

Demostración. Sea $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(C))$ (resp. $s' \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$) una sección no cero anulándose en C (resp. D), esto es, tal que su imagen bajo el mapeo natural

$$\mathcal{O}_X(C) \to \mathcal{O}_X(C)|C \quad \text{(resp. } \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_X(D)|D)$$

es cero. Mostraremos la exactitud de

$$0 \to \mathcal{O}_X(-C-D) \xrightarrow{(-s',s)} \mathcal{O}_X(-C) \oplus \mathcal{O}_X(-D) \xrightarrow{(s,s')} \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{C\cap D} \to 0 \tag{5.3}$$

donde $C \cap D$ es considerado como esquema, con la gavilla (5.2), y los mapeos son matriciales, considerando a s y s' como funciones racionales, por medio de (2.12). Si supiéramos que esto es cierto, entonces tomando características de Euler tendríamos el resultado deseado. Sean $f, g \in \mathcal{O}_{X,x}$ ecuaciones locales de C, D en x; basta verificar lo anterior en los tallos, así que debemos mostrar la exactitud de la sucesión

$$0 \to \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{(g,-f)} \mathcal{O}_{X,x}^2 \xrightarrow{(f,g)} \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}/(f,g) \to 0 \tag{5.4}$$

Las composiciones son todas cero. La inyectividad a la izquierda es clara, y el término de la derecha es por definición el cokernel. Así que lo principal a mostrar es la exactitud en el segundo término, i.e. que si $a, b \in \mathcal{O}_{X,x}$ son tales que $af + bg = 0$, entonces existe $k \in \mathcal{O}_{X,x}$ talque $a = kg, b = -kf$. Esto se sigue del hecho de que $\mathcal{O}_{X,x}$ es un DFU y f, g son primos relativos (si tuvieran un factor común, éste sería una componente de su intersección). □

Esto motiva la siguiente

Definición. Sean $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ gavillas invertibles en X. Definimos el *número de intersección* de tales gavillas como

$$\mathcal{L}.\mathcal{M} = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{L}^{-1}) - \chi(\mathcal{M}^{-1}) + \chi(\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{M}^{-1})$$

Si C, D son dos divisores *cualesquiera* en X, entonces definimos su número de intersección como

$$C.D = \mathcal{O}_X(C).\mathcal{O}_X(D)$$

Lema 5.0.26. *Sea C una curva irreducible no singular en X. Para toda $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic} X$, tenemos*

$$\mathcal{O}_X(C).\mathcal{L} = deg_C(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C)$$

Demostración. Las sucesiones exactas

$$0 \to \mathcal{O}_X(-C) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_C \to 0$$

$$0 \to \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{O}_X(-C) \to \mathcal{L}^{-1} \to \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{O}_C \to 0$$

dan las siguientes relaciones entre características de Euler

$$\chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_X(-C)) = \chi(\mathcal{O}_C)$$
$$-\chi(\mathcal{L}^{-1}) + \chi(\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{O}_X(-C)) = -\chi(\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{O}_C)$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X.\mathcal{L} &= \chi(\mathcal{O}_C) - \chi(\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{O}_C) \\ &= -\deg_C(\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{O}_C) \\ &= \deg_C(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C) \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se da por el Teorema de Riemann-Roch en C. □

Proposición 5.0.27. *Sean $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ dos gavillas invertibles sobre la superficie X. Supongamos que $\mathcal{L}$ es generada por sus secciones globales y que $\mathcal{M}$ es muy amplia. Entonces $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ es muy amplia.*

Demostración. Ya que $\mathcal{L}$ es generada por sus secciones, hay un morfismo $\varphi : X \to \mathbb{P}^{m_1}$ tal que $\mathcal{L} \cong \varphi^*(\mathcal{O}(1))$ [7, II,7.1(b)]; ya que $\mathcal{M}$ es muy amplia, por definición hay una inmersión cerrada $\psi : X \to \mathbb{P}^{m_2}$ tal que $\mathcal{M} \cong \psi^*(\mathcal{O}(1))$. Juntas, definen una inmersión cerrada

$$(\varphi, \psi) : X \longrightarrow \mathbb{P}^{m_1} \times \mathbb{P}^{m_2}$$

Por otro lado, tenemos el morfismo de Segre [6, II, 4.3]

$$i : \mathbb{P}^{m_1} \times \mathbb{P}^{m_2} \longrightarrow \mathbb{P}^{m_1 m_2 + m_1 + m_2}$$

el cual se define mediante los siguientes requerimientos

$$\begin{cases} i^*(\mathcal{O}(1)) = q_1^*(\mathcal{O}(1)) \otimes q_2^*(\mathcal{O}(1)), \\ i^*(X_j), \text{para } 0 \le j \le m_1 m_2 + m_1 + m_2, \\ \text{son las secciones } q_1^*(X_k) \otimes q_2^*(X_l) \text{ para} \\ 0 \le k \le m_1, 0 \le l \le m_2, \text{ en algún orden.} \end{cases}$$

donde q_1, q_2 son las proyecciones en $\mathbb{P}^m 1 \times \mathbb{P}^{m_2}$ en $\mathbb{P}^{m_1}$ y $\mathbb{P}^{m_2}$, resp. Este morfismo es una inmersión cerrada [6, II, Prop (4.3.3)] y por lo tanto $i \circ (\varphi, \psi)$ es una inmersión cerrada de X en $\mathbb{P}^{m_1 m_2 + m_1 + m_2}$ y

$$\begin{aligned} (i \circ (\varphi, \psi))^*(\mathcal{O}(1)) &= (\varphi, \psi)^*(q_1^*(\mathcal{O}(1)) \otimes q_2^*(\mathcal{O}(1))) \\ &= \varphi^*(\mathcal{O}(1)) \otimes \psi^*(\mathcal{O}(1)) \\ &= \mathcal{M} \otimes \mathcal{L} \end{aligned}$$

□

Proposición 5.0.28. *Sea D un divisor cualquiera en una superficie X y H es una sección de hiperplano de X (i.e. una sección de una gavilla muy amplia), entonces para $n \gg 0$, $D + nH$ y nH son también muy amplios.*

Demostración. En efecto, primero escogemos $k > 0$ tal que $\mathcal{O}_X(C + kH)$ y $\mathcal{O}_X(kH)$ son ambas generadas por secciones globales. Esto es posible por definición de amplitud. Luego escogemos $l > 0$ tal que lH es muy amplia por el Teorema 3.0.20. Tomando $n = k + l$, se sigue de la Proposición 5.0.27 y de la Proposición 3.0.17(ii), respectivamente, que $c + nH$ y nH son muy amplios. □

Si C y D son curvas en X, y $x \in C \cap D$ es un punto de intersección de C y D, decimos que C y D se intersectan *transversalmente* en x si las ecuaciones locales f, g de C, D en x generan el ideal máximo $\mathfrak{m}_x$ de $\mathcal{O}_{X,x}$. Esto implica, por cierto, que C y D son cada una no singular en x, porque f generará el ideal máximo de x en $\mathcal{O}_{D,x} = \mathcal{O}_{X,x}/(g)$, y viceversa.

Proposición 5.0.29. *Sean $C_1, \ldots, C_r$ curvas irreducibles en la superficie X, y sea D un divisor muy amplio. Entonces casi todas las curvas D' en el sistema lineal completo $|D|$ son irreducibles, no singulares, y se intersectan a cada C_i transversalmente.*

Demostración. Encajamos X en un espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ usando el divisor muy amplio D. Entonces D se vuelve una sección de hiperplano y podemos aplicar el Teorema de Bertini [7, II, 8.18, III, 7.9.1] simultáneamente a X y a las curvas $C_1, \ldots, C_r$. Concluimos que casi todos los $D' \in |D|$ son curvas no singulares irreducibles en X, y que las intersecciones $C_i \cap D'$ son no singulares, i.e. puntos con multiplicidad uno, lo cual significa que los C_i se intersectan transversalmente con los D'. Como no asumimos que los C_i fueran no singulares, necesitamos usar [7, II, 8.18.1]. □

En particular, todo divisor D puede ser escrito como la diferencia de dos curvas no singulares en X. En efecto, sea H un divisor amplio en X. Entonces por la Proposición 5.0.28, $D + nH$ y nH son amplias, para algún $n \geq 0$, así que usando la Proposición 5.0.29, basta tomar

$$\begin{aligned} A &\in |D + nH| \\ B &\in |nH| \end{aligned}$$

tal que A, B sean no singulares.

Teorema 5.0.30. *El par* $\operatorname{Pic} X \times \operatorname{Pic} X \to \mathbb{Z}$ *denotado por $\mathcal{L}.\mathcal{M}$ para cualesquiera dos gavillas $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$, tiene las siguientes propiedades:*

(1) *es simétrico: $\mathcal{L}.\mathcal{M} = \mathcal{M}.\mathcal{L}$,*

(2) *es aditivo: $(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2).\mathcal{M} = \mathcal{L}_1.\mathcal{M} + \mathcal{L}_2.\mathcal{M}$, y*

(3) *$\mathcal{L}^{-1}.\mathcal{M} = -\mathcal{L}.\mathcal{M}$.*

Demostración. (1) es claro de la definición, y (3) sigue de (2) en virtud del hecho $\mathcal{O}_X.\mathcal{M} = 0$.

(3) Para $\mathcal{L},\mathcal{M},\mathcal{N}\in \operatorname{Pic} X$, considérese la expresión

$$s(\mathcal{L},\mathcal{M},\mathcal{N})=\mathcal{L}.(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})-\mathcal{L}.\mathcal{M}-\mathcal{L}.\mathcal{N}$$

Es claro por defición de los números de intersección que s es simétrica en $\mathcal{L},\mathcal{M},\mathcal{N}$; más aún es cero cuando $\mathcal{L}=\mathcal{O}_X(C)$, con C una curva no singular. Similarmente, $s(\mathcal{L},\mathcal{M},\mathcal{N})$ es cero si alguno de $\mathcal{M}$ ó $\mathcal{N}$ es de esta forma. A continuación, supongamos que $\mathcal{L},\mathcal{M}$ son dos gavillas invertibles. Podemos escribir entonces $\mathcal{M}=\mathcal{O}_X(A-B)$, donde A,B son dos curvas no singulares en X. Notando que $s(\mathcal{L},\mathcal{M},\mathcal{O}_X(B))=0$, obtenemos al expandir

$$\mathcal{L}.\mathcal{M}=\mathcal{L}.\mathcal{O}_X(A)-\mathcal{L}.\mathcal{O}_X(B)$$

Por la Proposición 5.0.26, el lado derecho es lineal en $\mathcal{L}$, así que también el lado izquierdo lo es, y esto completa la prueba. □

Ejemplo 5.0.31. . Sea $X=\mathbb{P}^2_k$. Entonces $\operatorname{Pic} X\cong\mathbb{Z}$ y podemos tomar la clase h de una línea como generador. Como cualesquiera dos líneas son linealmente equivalentes, y como dos líneas distintas se intersectan en un punto, tenemos $h^2=1$. Esto determina el par de intersección de $\mathbb{P}^2_k$, por linealidad. Así, si C,D son dos curvas de grados n,m respectivamente, tenemos $C\sim nh$, $C\sim mh$ y así $C.D=nm$. Si C y D no tienen componente en común esto puede ser interpretado en términos de las intersecciones de multiplicidad locales, y obtenemos una prueba del Teorema de Bézout.

Ejemplo 5.0.32. Si D es cualquier divisor en la superficie X, el número $D.D$ es llamado el número de auto-intersección, y usualmente se denota por D^2. Por el Lema 5.0.26, vemos que $C^2=\deg_C(\mathcal{O}_X(C)\otimes\mathcal{O}_C)$. Para reinterpretar esto, nótese que ya que la gavilla de ideales $\mathcal{I}$ de C en X es $\mathcal{O}_X(-C)$, tenemos $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2\cong\mathcal{O}_X(-C)\otimes\mathcal{O}_C$. Por lo tanto su dual $\mathcal{O}_X(C)\otimes\mathcal{O}_C$ es isomorfo a la gavilla normal $\mathcal{N}_{C,X}$, la cual se define como $\mathcal{H}om(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2,\mathcal{O}_C)$ (ver [7, II, §8]). Así que tenemos $C^2=\deg\mathcal{N}_{C/X}$.

Ejemplo 5.0.33. Usando la auto-intersección podemos definir un nuevo invariante de una superficie. Sea $\omega_{X/k}$ la gavilla de diferenciales de X/k [I, II, §8], y sea $\omega_X=\bigwedge^2\omega_{X/k}$ la gavilla canónica. Cualquier divisor K en la clase de equivalencia lineal correspondiente a ω_X es llamado divisor canónico. Entonces K^2, la autointersección del divisor canónico, es un número que sólo depende de X. Por ejemplo, si $X=\mathbb{P}^2_k$, $K=3h$ [7, II, 8.20.1], así que $K^2=9$.

Proposición 5.0.34 (Fórmula de Adjunción)**.** *Si C es una curva no singular de género g en la superficie X, y si K es el divisor canónico en X, entonces*

$$2g-2=C.(C+K)$$

Demostración. De acuerdo a [7, II, 8.20] tenemos $\omega_C \cong \omega_X \otimes \mathcal{O}_X(C) \otimes \mathcal{O}_C$. El grado de ω_C es $2g-2$ [7, IV, 1.33]. Por otro lado, por la Proposición 5.0.26 tenemos

$$\deg_C(\omega_X \otimes \mathcal{O}_X(C) \otimes \mathcal{O}_C) = C.(C+K)$$

lo cual completa la prueba. $\square$

Capítulo 6

Transformaciones monoidales

Definimos una *transformación monoidal* de una superficie X como la operación de hacer un blow-up [7, II, §7] en un solo punto P. La denotamos por $\pi : \widetilde{X} \to X$. Entonces sabemos [7, II, Prop. 7.13(b), p.164] que π induce un isomorfismo de $\widetilde{X} - \pi^{-1}(P)$ sobre $X - P$. La imagen inversa de P es una curva E que llamaremos la *curva excepcional.*

Proposición 6.0.35. *La nueva variedad $\widetilde{X}$ es una superficie proyectiva no singular. La curva E es isomorfa a $\mathbb{P}^1$. La auto-intersección de E en X es $E^2 = -1$.*

Demostración. Como un solo punto es no singular, podemos aplicar [7, II, Prop. 8.24]. ésta nos dice que $\widetilde{X}$ es no singular, y ya sabemos de [7, II,Prop. 7.16] que $\widetilde{X}$ es proyectiva, birracional a X y por lo tanto de dimensión 2. También de [7, II, 8.24 (b)] concluimos que E es isomorfo a $\mathbb{P}(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)$, el fibrado de espacios asociado a la gavilla (localmente libre) $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ en X. ésta no es otra sino $\mathbb{P}^1$, y de (c) se sigue finalmente que la gavilla normal $\mathcal{N}_{E/\widetilde{X}}$ es justamente $\mathcal{O}_E(-1)$, así que por el Ejemplo 5.0.32 tenemos que $E^2 = -1$. □

Proposición 6.0.36. *Los mapeos naturales $\pi^* : \operatorname{Pic} X \to \operatorname{Pic} \widetilde{X}$ y $\mathbb{Z} \to \operatorname{Pic} \widetilde{X}$ definido por $1 \mapsto 1 \cdot E$ dan lugar a un isomorfismo $\operatorname{Pic} \widetilde{X} \cong \operatorname{Pic} X \oplus \mathbb{Z}$.*

Demostración. De la Proposición 2.1.19 (b) vemos que $\operatorname{Pic} X \cong \operatorname{Pic} X - P$. Pero $X - P \cong \widetilde{X} - E$, así que por (c) de la misma Proposición tenemos una sucesión exacta

$$\mathbb{Z} \to \operatorname{Pic} \widetilde{X} \to \operatorname{Pic} X \to 0$$

donde el primer mapeo manda 1 a $1 \cdot E$. Como para cualquier $n \neq 0$ tenemos $(nE)^2 = -n^2 \neq 0$, este mapeo es inyectivo. Por otro lado, π^* es un inverso por la derecha del mapeo $\operatorname{Pic} \widetilde{X} \to \operatorname{Pic} X$ así que la sucesión se escinde. □

Proposición 6.0.37. *La teoría de auto-intersección en $\widetilde{X}$ está determinada por*

(a) *si* $C, D \in \operatorname{Pic} X$*, entonces* $(\pi^*C).(\pi^*D) = C.D$*;*

(b) *si* $C \in \operatorname{Pic} X$*, entonces* $(\pi^*C).E = 0$*;*

(c) $E^2 = -1$.

Finalmente, si $\pi^* : \operatorname{Pic} \widetilde{X} \to \operatorname{Pic} X$ *denota la proyección en el primer factor (bajo el isorfismo de la Proposición 6.0.36), entonces:*

(d) *si* $C \in \operatorname{Pic} X$ *y* $D \in \operatorname{Pic} \widetilde{X}$*, entonces* $(\pi^*C).D = C.(\pi^*D)$

Demostración. [7, Prop. 3.2] □

Proposición 6.0.38. *El divisor canónico de* $\widetilde{X}$ *está dado por* $K_{\widetilde{X}} = \pi^*K_X + E$

Demostración. Como $\widetilde{X} - E \to X - P$ es un isomorfismo, las gavillas $\omega_{\widetilde{X}}$ y $\pi^*\omega_X$ son idénticas en $\widetilde{X} - E$. Por lo tanto tenemos

$$K_{\widetilde{X}} = \pi^*K_X + nE$$

Para determinar n, usamos la Fórmula de adjunción para E. Nos dice que $-2 = E.(E + K_{\widetilde{X}})$, así que usando la Proposición 6.0.37 encontramos $n = 1$. □

Definición. Sea X un esquema proyectivo de dimensión r sobre un campo k. Definimos el *género aritmético* p_a de X por

$$p_a(X) = (-1)^r(\chi(\mathcal{O}_X) - 1)$$

Ejemplo 6.0.39. Sea $X = \mathbb{P}^2_k$. Entonces $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$ por [7, 3, Th. 5.1(a)]; $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ por [7, 3, Th. 5.1(c)]; y $H^2(X, \mathcal{O}_X) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(-3))' = 0$ por [7, 3, Th. 5.1(c)]. Se concluye que $p_a(X) = 0$.

Proposición 6.0.40. *Sea* $\pi : \widetilde{X} \to X$ *una transformación monoidal. Entonces* $p_a(X) = pa(\widetilde{X})$*.*

Demostración. [7, V, Cor. 3.5] □

Capítulo 7

La dimensión de $H^i(X, \mathcal{F})$

Sea $\pi : X \to \mathbb{P}_k^2$ una transformación monoidal, donde k es un campo algebraicamente cerrado de característica arbitraria. En este caso la Proposición 6.0.36 nos dice que $\operatorname{Pic} X$ es generado por E y $H = \pi^* L$, donde L es una recta en $\mathbb{P}_k^2$. También tenemos que $K_X = -3H + E$, debido a la Proposición 6.0.38. Del Ejemplo 6.0.39 y el Corolario 6.0.40 obtenemos $p_a(X) = 0$.

A lo largo de esta sección, denotamos por $h^i(D)$ al entero $\dim_k H^i(X, \mathcal{O}_X(D))$, para cualquier divisor D sobre X.

Nos proponemos a probar el siguiente

Teorema 7.0.41. *Sea k un campo algebraicamente cerrado de cualquier característica y sea $\pi : X \to \mathbb{P}_k^2$ una transformación monoidal con curva excepcional E. Entonces*

1. $h^0(\alpha H + \beta E) = \binom{\alpha+2}{2}$, *para toda* $\alpha \geq 0$ *y* $\beta \geq 0$*;*
2. $h^0(\beta E) = 1$, *si* $\beta > 0$*;*
3. $h^0(\alpha H + \beta E) = 0$ *si* $\alpha < 0, \beta \geq 0$*;*
4. $h^0(\alpha H + \beta E) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha(\alpha+3) + (\beta(1-\beta)) + 1 & si\ \alpha > 0, 1 - \alpha \leq \beta \leq 0; \\ 0 & si\ \alpha > 0, -\alpha > \beta \end{cases}$
5. $h^0(\alpha H + \beta E) = 0$ *para todas* $\alpha, \beta \leq 0$

Antes de la prueba enunciaremos algunos resultados que usaremos en la misma.

Proposición 7.0.42. *Sea $f : X \to Y$ un mapeo continuo de espacios topológicos. Sea $\mathcal{F}$ una gavilla de grupos abelianos en X, y asúmase que $R^i f_*(F) = 0$ para toda $i > 0$. Entonces hay isomorfismos naturales, para cada $i \geq 0$,*

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(Y, f_* \mathcal{F})$$

Demostración. Si $\mathcal{I}^\bullet$ es una resolución inyectiva de $\mathcal{F}$ en X, entonces $R^i f_*(\mathcal{F}) = 0$ si $i > 0$, nos dice que $f^*\mathcal{I}^\bullet$ es una resolución inyectiva de $f^*\mathcal{F}$ en Y; además para cada i, $\Gamma(X,\mathcal{I}^i) = \Gamma(Y, f^*\mathcal{I}^i)$. Así que obtenemos los mismos grupos de cohomología. □

Teorema 7.0.43 (Teorema de Riemann-Roch sobre una superficie)**.** *Si D es cualquier divisor en la superficie X, entonces*

$$\chi(\mathcal{O}_X(D) = \frac{1}{2}D.(D - K_X) + 1 + p_a$$

Demostración. [7, V, Teorema 1.6, p. 362-363] □

Teorema 7.0.44 (Criterio de amplitud de Nakai-Moishezon)**.** *Un divisor D en la superficie X es amplio si y sólo si $D^2 > 0$ y $D.C > 0$ para toda curva irreducible C en X.*

Demostración. [7, V, Teorema 1.10, p.365] □

Teorema 7.0.45 (Teorema de anulación de Kodaira)**.** *Sea X una variedad proyectiva no singular sobre un campo k de característica cero y A un divisor amplio en X. Entonces*

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + A)) = 0 \text{ para } i > 0$$

Demostración. Ver §7. □

Observación 7.0.46. Aunque el Teorema anulación de Kodaira no es cierto en general para variedades sobre campos de característica positiva, sí es válido para superficies racionales no singulares propias, por ejemplo el blow up de $\mathbb{P}^2_k$ en un punto.

Teorema 7.0.47 (Dualidad de Serré)**.** *Sea X una variedad proyectiva no singular de dimensión n, con gavilla canónica ω_X. Entonces para cualquier gavilla localmente libre $\mathcal{F}$ sobre X hay isomorfismos naturales*

$$H^i(X,\mathcal{F}) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{F}^\wedge \otimes \omega_X)'$$

Demostración. [7, III, Corolario 7.7, p. 244] □

Demostración del Teorema 7.0.41. Probaremos (a) por inducción sobre β fijando α. Por la Fórmula de Proyección y la Proposición 6.0.40, $R^i\pi_*(\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(\alpha)) = 0$ para $i > 0$ así que de la Fórmula de proyección y la Proposición 7.0.42 con $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(\alpha)$ obtenemos para cada $i \geq 0$,

$$H^i(X, \pi * \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(\alpha)) \cong H^i(\mathbb{P}^2_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(\alpha))$$

Cuando $i = 0$, el miembro derecho consiste del espacio de todos los polinomios homogéneos en x_0, x_1, x_2 de grado α. éste es un espacio de dimensión $\binom{\alpha+2}{2}$ así que el caso $\beta = 0$ queda demostrado. Para el caso $\beta = n+1$ consideramos la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_X(-E) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_E \to 0 \tag{7.1}$$

correspondiente a la curva excepcional. Haciendo producto tensorial con $\mathcal{O}_X(\alpha H + (n+1)E)$ se obtiene

$$0 \to \mathcal{O}_X(\alpha H + nE) \to \mathcal{O}_X(\alpha H + (n+1)E) \to \mathcal{O}_X(\alpha H + (n+1)E)|E \to 0$$

Notemos que por el Lema 5.0.26, $\mathcal{O}_X(\alpha H + (n+1)E)|E$ es una gavilla de grado negativo en $E \cong \mathbb{P}^1_k$, así que no tiene secciones globales, y por lo tanto, usando la sucesión exacta de cohomología se tiene

$$h^0(\alpha H + nE) = h^0(\alpha H + (n+1)E)$$

así que por hipótesis inductiva el resultado se sigue.

(b) Por la dualidad de Serré se tiene $h^0(E) = h^2(-3H)$, que por la Proposición 7.0.42 y [7, III, 5.1 (c), p.225] es 1. Así que usando inducción con el mismo argumento de (a) se sigue el resultado.

(c)Sea Ł $= \alpha H - \beta E$ con $a > b > 0$. Entonces Ł es amplia; en efecto, por el criterio de Nakai basta verificar que $(\alpha H - \beta E).C > 0$ para toda curva irreducible C en X. Podemos asumir que $C \neq E$ pues de lo contrario esto es trivial. Entonces $\pi(C)$ es una curva de grado d en $\mathbb{P}^2_k$, y usando [7, Prop. 3.6, p. 389] vemos que

$$C = dH - mE$$

donde $m \leq d$ es la multiplicidad de $\pi(C)$ en P, el punto donde se hizo el blow up. Por lo tanto

$$L.C = \alpha d - \beta m > 0$$

as í que por el Teorema de Kodaira y la dualidad de Serré, $h^i(\beta E - \alpha H) = 0$ si $i = 0, 1$ y $\alpha > \beta > 0$. Uno prueba por inducción que $h^0((\alpha+n)E - \alpha H) = 0$ para $n \geq 0$ usando la sucesi on exacta

$$0 \to \mathcal{O}_X((\alpha+n)E - \alpha H) \to \mathcal{O}_X((\alpha+n+1)E - \alpha H) \to \mathcal{O}_X((\alpha+n+1)E - \alpha H)|E \to 0$$

la cual resulta de hacer el producto tensorial de (7.1) con $\mathcal{O}_X((\alpha+n+1)E - \alpha H)$.

(d) Sea $D' = (\alpha+3) - (\beta+1)E$ con $0 \leq \beta \leq \alpha + 1$. Como en (c) se verifica fácilmente que D' es amplio, luego por el Teorema de Kodaira $h^i(D' + K_X) = 0$ para $i = 1, 2$. Pero $D = D' + K_X$, así que basta aplicar el Teorema de Rieman-Roch a este divisor. En particular si $\beta = \alpha + 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} h^0(\alpha H - (\alpha+1)E) &= \frac{1}{2}(\alpha(\alpha+3) - (\alpha+1)(\alpha+2)) + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

así que la sucesión

$$0 \to \mathcal{O}_X(\alpha H - (\alpha+n+1)E) \to \mathcal{O}_X(\alpha H - (\alpha+n)E) \to \mathcal{O}_X(\alpha H - (\alpha+n+1)E)|E \to 0$$

obtenida a partir de (7.0.41), nos da por inducción el caso $\beta > \alpha + 1$.

(e) Por contradiccón. Sea D efectivo. Si $h^0(-D) \neq 0$, entonces el sistema lineal completo $|D|$ es no vacío. Luego D es linealmente equivalente a algún divisor efectivo, esto es

$$\operatorname{div}(f) = E + D; E \geq 0, f \in K \tag{7.2}$$

Consideremos una cubierta por abiertos afines $\{U_i = \operatorname{Spec} A_i\}$ de X. Entonces de la Proposición 2.1.14 se sigue que $f \in A_i$ para cada i, de modo que f es una función regular, y como X es una variedad proyectiva, $f \in k = \overline{k}$, y por lo tanto $\operatorname{div}(f) = 0$, así que (7.2) no es posible. □

Ya que tenemos $h^0(D)$ para todo divisor D en X, es inmediato encontrar cada $h^i(D)$, con $i = 1, 2$, usando la dualidad de Serré y el Teorema de Riemann-Roch, así que tenemos el siguiente

Teorema 7.0.48. *Bajo las hipótesis del Teorema 7.0.41 se tiene lo siguiente:*

1. $h^1(\alpha H + \beta E) = \begin{cases} \binom{\alpha+1}{2} - \frac{1}{2}(\alpha(\alpha+3) + (\beta(1-\beta)) - 1 & \text{si } \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha \geq 0, 1-\alpha \leq \beta \leq 0 \\ -\frac{1}{2}(\alpha(\alpha+3) - \beta(\beta-1)) - 1 & \text{si } \alpha = -1, -2, \text{ todo } \beta \end{cases}$

2. $h^1(\alpha H + \beta E) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\alpha(\alpha+3) + (\beta(1-\beta)) & \text{si } \alpha = 3, \beta < 0 \\ -\frac{1}{2}(\alpha(\alpha+3) - \beta(\beta-1)) - 1 & \text{si } \alpha = -3, \beta \geq 1 \end{cases}$

3. $h^1(\alpha H + \beta E) = \begin{cases} \binom{-\alpha-1}{2} - \frac{1}{2}(\alpha(\alpha+3) + (\beta(1-\beta)) - 1 & \text{si } \alpha < 3, \beta < 1 \\ 0 & \text{si } \alpha < -3, \alpha+4 \leq 1-\beta < 0 \\ -\frac{1}{2}(\alpha(\alpha+3) - \beta(\beta-1)) - 1 & \text{si } \alpha < 3, \text{ casos restantes} \end{cases}$

y

1. $h^2(\alpha H + \beta E) = 0$, *para todo* β *y* $\alpha \geq 2$

2. $h^2(\alpha H + \beta E) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = -3, \beta < 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = -3, \beta \geq 1 \end{cases}$

3. $h^2(\alpha H+\beta E) = \begin{cases} \binom{-\alpha-1}{2} & si\ \alpha < -3, \beta < 1 \\ \frac{1}{2}(\alpha(\alpha+3) - \beta(\beta-1)) + 1 & si\ \alpha < -3, \alpha + 4 \leq 1 - \beta < 0 \\ 0 & si\ \alpha < 3,\ casos\ restantes \end{cases}$

Consideremos ahora dos divisores de Cartier efectivos D_1, D_2 sobre X tales que $\langle D_1, D_2 \rangle = \mathbb{Z}^2$. Entonces

$$\bigoplus_{\alpha,\beta \in N} H^0(X, \mathcal{O}_X(\alpha D_1 + \beta D_2)) \tag{7.3}$$

es un anillo cuya multiplicación está inducida por el producto de fracciones racionales. En efecto, sean D y D' dos divisores cualesquiera, y sean $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ y $g \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D'))$, entonces por (2.12), se tiene

$$\operatorname{div}(f) \geq -D \text{ y } \operatorname{div}(g) \geq -D'$$

y entonces $f \cdot g \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D+D'))$. Si cada D, D' es una combinación lineal de D_1 y D_2 con números naturales como coeficientes, esto nos asegura que la multiplicación en (7.3) está bien definida, ya que claramente $D + D'$ es también una combinación lineal de D_1 y D_2 con números naturales como coeficientes.

Más aún, ya que

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \cdot H^0(X, \mathcal{O}_X(D')) \subseteq H^0(X, \mathcal{O}_X(D + D'))$$

podemos considerar una graduación natural en este anillo. Daremos a continuación dos ejemplos de esta construcción.

Corolario 7.0.49. *Sea $\pi : X \to \mathbb{P}^2_k$ una transformación monoidal con curva excepcional E. Entonces*

$$\oplus_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}} H^0(X, \mathcal{O}_X(\alpha H + \beta E)) \cong k[x_0, x_1, x_2, x_3] \tag{7.4}$$

Demostración. En efecto, en la demostración de (a) y (b) del Teorema 7.0.41 se vio que $H^0(X, \mathcal{O}_X(\alpha H + \beta E)) = H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\alpha))$ si $\alpha > 0$, y que $H^0(X, \mathcal{O}_X(\beta E)) = k$

si $\beta > 0$, así que tenemos:

$$\begin{aligned}
\bigoplus_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^+} H^0(X,\mathcal{O}_X(\alpha H+\beta E)) &= \bigoplus_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^+} (H^0(X,\mathcal{O}_X(\alpha H))\otimes H^0(X,\mathcal{O}_X(\beta E)))\\
&= (\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}^+} H^0(X,\mathcal{O}_X(\alpha H)))\otimes(\bigoplus_{\beta\in\mathbb{Z}^+} H^0(X,\mathcal{O}_X(\beta E)))\\
&= (\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}^+} H^0(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\alpha)))\otimes(\bigoplus_{\beta\in\mathbb{Z}^+} H^0(X,\mathcal{O}_X(\beta E)))\\
&= k[x_0,x_1,x_2]\otimes k[x_3]\\
&= k[x_0,x_1,x_2,x_3]
\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad es consecuencia de [7, III, 5.1(a), p. 225]. □

Observemos que hay divisores de Cartier efectivos que no son linealmente equivalentes a divisores de la forma $\alpha H+\beta E$ con α y β números naturales (ver por ejemplo la prueba del inciso (c) del Teorema 7.0.41), de modo que los sumandos en el miembro izquierdo de (7.0.44) no abarcan representantes para cada clase efectiva de divisores sobre X. Si consideramos en cambio $D_1 = H-E$ y $D_2 = E$ en (7.3), al tomar la suma sobre $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$ setieneque para cada clase efectiva de divisores, hay un sumando $H^0(X,\mathcal{O}_X(D))$ tal que D es un representante de dicha clase; en efecto, notemos primero que estos dos divisores de hecho forman una base para $\operatorname{Pic} X$. Así que sea $\operatorname{cl}(D)$ la clase de un divisor efectivo irreducible, y sea

$$\alpha(H-E)+\beta E$$

una representación de D. Supongamos que D no es alguno de $H-E$ ó E. Entonces $D.E = \alpha-\beta \geq 0$ y $D.(H-E) = \beta \geq 0$, así que los coeficientes α,β son no negativos, como queríamos.

Más aún, haciendo una modificación en la elección de $D_1 = H-E$ podemos hacer que cada clase efectiva aparezca representada por un divisor de Cartier efectivo. Para ello consideremos una recta C en $\mathbb{P}^2_k$ que pase por P. Entonces por [7, Prop. 3.6, p. 389]

$$\widetilde{C} = \pi^*C - E \sim H - E$$

y $\widetilde{C}$ es efectivo. Es así como llegamos a la construcción del anillo de Cox en el caso particular del blow up de $\mathbb{P}^2$ en un punto P (ver [9, 3, 11] para la construcción general hecha vía $\operatorname{Cl}(X)$, y [8, 10] para una definición general basada en $\operatorname{Pic} X$). Consideremos $\operatorname{cl}(\widetilde{C})$ y $\operatorname{cl}(E)$; estas dos clases generan $\operatorname{Pic} X$. El anillo de Cox está dado por

$$\operatorname{Cox}(X) = \bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2} H^0(X,\alpha\widetilde{C}+\beta E) \tag{7.5}$$

Proposición 7.0.50. *El anillo de Cox* (7.5) *es isomorfo a un anillo de polinomios en cuatro variables.*

Demostración. Dividimos los sumandos de $\mathrm{Cox}(X)$ en tres tipos como sigue. Para un divisor $D = \alpha\widetilde{C} + \beta E$ con α y $\beta \in \mathbb{N}$, decimos que $H^0(X, D)$ es del tipo 1 si $\beta \geq \alpha$, del tipo 2 si $\alpha > \beta > 0$ y del tipo 3 si $\beta = 0$.

Por el Teorema 7.0.41(4), $H^0(X, \widetilde{C})$ tiene dimensión 2; escojamos una base $\{w, z\}$ para este espacio. Así mismo por el Teorema 7.0.41(1), $H^0(X, E)$ tiene dimensión 1; escojamos una base $\{y\}$ para el mismo.

Entonces, vía la multiplicación del anillo, wy y zy son elementos del espacio $H^0(X, \widetilde{C}+E)$, cuya dimensión es 3 por el Teorema 7.0.41(1). Completemos una base anádiendo algún elemento $x \in H^0(X, \widetilde{C} + E)$ al conjunto $\{wy, zy\}$.

Ahora bien, como dos divisores linealmente equivalentes $D \sim D'$ dan gavillas isomorfas $\mathcal{O}_X(D) \cong OX(D')$, tenemos

$$\bigoplus_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(\alpha H + \beta E)) \cong \bigoplus_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z},\alpha\geq 0,\beta\geq\alpha} H^0(X, \mathcal{O}_X(\alpha\widetilde{C} + \beta E))$$

así que por el Corolario 7.0.49, la parte de $\mathrm{Cox}(X)$ que abarca sumandos del tipo 1, es isomorfa al anillo de polinomios en las variables $x_0 = wy, x_1 = zy, x_2 = x, x_3 = y$.

Por otro lado, el Teorema 7.0.41(4) nos dice que cada sumando del tipo 3, $H^0(X, \alpha\widetilde{C})$, tiene dimensión $\alpha+1$, esto es, la misma dimensión que el espacio de polinomios homogeneos de grado α en las variables w, z. Veamos que en efecto, podemos identificar ambos espacios. Para esto consideremos el conjunto

$$\{w^\alpha, w^{\alpha-1}z, \ldots, wz^{\alpha-1}, z^\alpha\}$$

en $H^0(X, \alpha\widetilde{C})$. Supongamos que tenemos una ecuación de la forma

$$a_{\alpha,0}w^\alpha + a_{\alpha-1,1}w^{\alpha-1}z + \ldots + \alpha_{1,\alpha-1}wz^{\alpha-1} + a_{0,\alpha}z^\alpha = 0 \tag{7.6}$$

Multiplicando (7.6) por $y^\alpha \in H^0(X, \alpha E)$ obtenemos

$$a_{\alpha,0}(wy)^\alpha + a_{\alpha-1,1}(wy)^{\alpha-1}(zy) + \ldots + \alpha^{1,\alpha-1}(wy)(zy)^{\alpha-1} + a_{0,\alpha}(zy)^\alpha = 0$$

donde el miembro izquierdo es un elemento del espacio $H^0(X, \mathcal{O}_X(\alpha\widetilde{C} + \alpha E))$, que hemos identificado ya con el espacio de polinomios homogeneos de grado α en las variables wy, zy, x (que son algebraicamente independientes). Por lo tanto $a_{r,t} = 0$ para $0 \leq r, t \geq \alpha$.

Ahora, consideremos el siguiente mapeo natural

$$H^0(X,\mathcal{O}_X(\gamma\widetilde{C}))\times H^0(X,\mathcal{O}_X((\alpha-\gamma)\widetilde{C}+\beta E)\to H^0(X,\mathcal{O}_X(\alpha\widetilde{C}+\beta E))$$

para cada γ con $\alpha-\beta\geq\gamma\geq\alpha$. Multipliquemos cada elemento del conjunto

$$\{z^\gamma, z^{\gamma-1}w,\dots,w^\gamma\}$$

de $H^0(X,\mathcal{O}_X(\gamma\widetilde{C}))$, por elelemento $x^{\alpha-\gamma}y^{\gamma+\beta-\alpha}\in H^0(X,\mathcal{O}_X((\alpha-\gamma)\widetilde{C}+\beta E)$. Obtenemos así el siguiente conjunto en el sumando de tipo 2, $H^0(X,\alpha\widetilde{C}+\beta E)$:

$$z^{\alpha-\beta}x^\beta, z^{\alpha-\beta-1}wx^\beta, z^{\alpha-\beta-1}w^2x^\beta,\dots,w^{\alpha-\beta}x^\beta$$

$$z^{\alpha-\beta+1}x^{\beta-1}y, z^{\alpha-\beta}wx^{\beta-1}y, z^{\alpha-\beta-2}w^2x^{\beta-1}y,\dots,w^{\alpha-\beta+1}x^{\beta-1}y$$

$$\cdots$$

$$z^{\alpha-1}xy^{\beta-1}, z^{\alpha-2}wxy^{\beta-1}, z^{\alpha-3}w^2xy^{\beta-1},\dots,w^{\alpha-1}xy^{\beta-1}$$

$$z^\alpha y^\beta, z^{\alpha-1}wy^\beta, z^{\alpha-2}w^2y^\beta, w^\alpha y^\beta$$

Nótese que en la m-ésima fila (donde $1\geq m\geq\beta$) hay $(\alpha-\beta)+m$ elementos, así que en total tenemos

$$\sum_{m=1}^{\beta}((\alpha-\beta)+m)=(\alpha-\beta)(\beta+1)+1(\beta+1)(\beta+2)=\alpha+\alpha\beta+1\beta(1-\beta)$$

elementos. De modo que la cardinalidad de este conjunto es $\alpha+\alpha\beta+1\beta(1-\beta)=1((\alpha(\alpha+3)-(\alpha-\beta)(\alpha-\beta+1))+1$, es decir, coincide con la dimensión del sumando de tipo 2, $H^0(X,\alpha\widetilde{C}+\beta E)$, según el Teorema 7.0.41(4).

Aplicamos ahora el razonamiento anterior a este conjunto, esta vez multiplicando por el elemento $y^{\alpha-\beta}\in H^0(X,(\alpha-\beta)E)$ para ver que no hay relaciones de dependencia entre ellos.

Resta verificar que w,x,y,z son algebraicamente independientes sobre k. Esto se sigue de la independencia lineal de monomios generadores en cada componente homogénea, lo cual se probó arriba. $\square$

Capítulo 8

Teorema de anulación de Kodaira

Los esquemas algebraicos definidos sobre $\mathbb{C}$ están dotados, además de la topología de Zariski, de una topología clásica más convencional y fuerte. Esta topología está inducida localmente por la métrica euclidiana de $\mathbb{C}^n$. Dado un $\mathbb{C}$-esquema X, podemos considerar el espacio analítico X^{an} consistente de un cierto conjunto $X(\mathbb{C})$ (con la topología clásica) y la gavilla de anillos $\mathcal{O}^{\text{an}}$. Como ejemplo, consideremos un esquema afín X dado como subconjunto cerrado de un espacio afín $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ por ecuaciones $f_i = 0$, donde cada f_i es un polinomio en $T_i, \ldots, T_n$. Pensando estos polinomios como funciones analíticas sobre $\mathbb{C}^n$, obtenemos un subespacio analítico en $\mathbb{C}^n$ denotado por X^{an}. Como conjunto se identifica con $X(\mathbb{C})$, el conjunto de puntos $\mathbb{C}$-valuados de X. La topología clásica en $X(\mathbb{C})$ es inducida por la métrica euclidiana en $\mathbb{C}^n$. La gavilla $\mathcal{O}^{\text{an}}$ es la gavilla de funciones analíticas X en $X(\mathbb{C})$. Esta construcción se extiende a esquemas arbitrarios obteniendo un funtor de enanaliticación $X \mapsto X^{\text{an}}$ de la categoría de esquemas a la categoría de espacios analíticos. La anterior discusión tendrá sentido durante el bosquejo de demostración al que dedicamos este capítulo, del conocido

Teorema 8.0.51 (Teorema de anulación de Kodaira)**.** *Sea X una variedad proyectiva no singular (sobre $\mathbb{C}$) y A un divisor amplio en X. Entonces*

$$H^p(X, \mathcal{O}_X(K_X + A)) = 0 \text{ para } p > 0$$

El Teorema fue probado originalmente por Kodaira [12] vía análisis armónico. La prueba que damos aquí es debida a Kollár [13], y sigue la filosofía general trazada en [14, Section 5]. De acuerdo a este enfoque, un Teorema de anulación se sigue si hay una gavilla topológica $\mathbf{G}$ -esto es, una gavilla construida a partir de la topología clásica descrita arriba-, una gavilla coherente $\mathcal{F}$, y un morfismo $\mathbf{G} \to \mathcal{F}$ que es sobreyectivo en cohomologías. El resultado que necesitamos en este caso es el siguiente resultado básico de Teoría de Hodge. Para la prueba referimos al lector a los libros de texto estándar sobre geometría de Kahler (ver, p. ej. [5, p. 116])

Teorema 8.0.52. *Sea X una variedad propia no singular (o una variedad de Kahler compacta) con gavilla estructural $\mathcal{O}_X$. Denotemos por $\mathbb{C}_X \subset \mathcal{O}_X$ la gavilla constante. Entonces*

$$H^i(X, \mathbb{C}_X) \to H^i(X, \mathcal{O}_X) \tag{8.1}$$

es sobreyectivo para toda i.

Dividimos la prueba en pasos.

`Paso 1`: Principio GAGA

Sea X un esquema de tipo finito sobre $\mathbb{C}$. Si $\mathcal{F}$ es una gavilla coherente en X entonces $\mathcal{F}^{\text{an}}$ denota la correspondiente gavilla analítica coherente. A nivel de tallos, se obtiene como

$$\mathcal{F}^{\text{an}}_{x,X}\text{an} = F_x \otimes \mathcal{O}^{\text{an}}_{x,X}\text{an}$$

El bien conocido principio GAGA (acrónimo del título de [20]) asegura que en muchos casos, los objetos algebraicos y los analíticos se comportan de la misma manera. El siguiente caso especial es formulado para imágenes directas superiores, aunque sólo necesitamos la versión cohomológica.

Teorema 8.0.53. *Sean X, Y esquemas separados de tipo finito sobre $\mathbb{C}$, $f : X \to Y$ un morfismo propio y $\mathcal{F}$ un gavilla coherente en X. Entonces*

$$(R^i f_*)^{an} \cong R^i (f^{an})^* (\mathcal{F}^{an}) \text{ para toda } i$$

Si X es propio, entonces $H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(X^{an}, \mathcal{F}^{an})$ para toda i.

Por esto, el resto del capítulo, podemos calcular cohomologías en la configuración analítica compleja. Para simplicar notación, no usaremos el superfijo an.

`Paso 2`: Construcción de una cubriente de Galois especial ramificada a lo largo del complemento de un espacio afín.

Como $\mathcal{O}_X(A)$ es amplia, por el Teorema 3.0.20 existe algún $m > 0$ tal que $\mathcal{O}_X(mA)$ es muy amplia. Entonces por el Teorema de Bertini existe un elemento en $|mA|$ con la propiedad de ser no singular y reducido. Por la Proposición 4.0.23 (b) es de la forma $(s)_0$ para algún $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(mA))$, i.e.

$$D = (s)_0 = \text{div}\,(f) + mA, f \in \mathbb{C}(X) \tag{8.2}$$

Afirmación 8.0.54. $T^m - f$ *es un polinomio irreducible en* $\mathbb{C}(X)[T]$

Demostración. Tomemos $\sqrt[m]{f}$ de la cerradura algebraica $\overline{\mathbb{C}(X)}$. Si $T^m - f$ no es irreducible, entonces $(\sqrt[m]{f})^r \in \mathbb{C}(X)$ para algún $0 < r < m$. Escogiendo el menor r

entre los que cumplen tal condición, podemos asumir que $r|m$. Pero entonces

$$D' = \operatorname{div}((\sqrt[m]{f})^r) + rA \geq 0$$

lo cual contradice

$$D = \frac{m}{r} \cdot D'$$

sea reducido (ver Observación 2.3.10). $\square$

Por la Afirmación 8.0.54 vemos que $\mathbb{C}(X)[\sqrt[m]{f}] = \mathbb{C}(X)[T]/(T^m - f)$ es un extensión finita de campo de $\mathbb{C}(X)$. Para conveniencia del lector, damos dos definiciones conocidas que usaremos a continuación.

Definición. Sea X un esquema entero, y sea L una extensión algebraica del campo de funciones $K(X)$. Definimos la normalización de X en L como un morfismo entero $\pi : X' \to X$ con X' normal, $K(X') = L$, y tal que π extiende el morfismo canónico $\operatorname{Spec} L \to X$. Se puede ver que la normalización $\pi : X' \to X$ de X en L existe y es única. Más aún, para cualquier subconjunto abierto U de X, $\pi^{-1}(U)$ es afín y $\Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}'_X)$ es la cerradura entera de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ en L.

Ejemplo 8.0.55. La normalización de X en $K(X)$ no es otra que la normalización de X como en [7, p. 91].

Definición. Un morfismo $f : X \to Y$ de esquemas de tipo finito no se ramifica si para toda $x \in X$, haciendo $y = f(x)$, tenemos $\mathfrak{m}_y \cdot \mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_x$, y $k(x)$ es una extensión algebraica separable de $k(y)$. Es étale si no se ramifica y es plano.

Ahora bien, regresando a nuestra demostración, sea

$$\pi : Z \to X$$

la normalización de X en $\mathbb{C}(X)[\sqrt[m]{f}]$. Nótese que $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ actúa en Z sobre X. En efecto, tómese una cubierta de X por subconjuntos abiertos afines $U_i = \operatorname{Spec} A_i$. Entonces sus imágenes inversas consisten de subconjuntos abiertos afines $V_i = \operatorname{Spec} B_i$, donde B_i es la cerradura entera de A_i en L. Así que $\sigma(B_i) = B_i$ para toda i y toda $\sigma \in G$ [1, Ch. 5, Ex. 14] y si Q es un ideal primo de B_i, entonces $\sigma(Q)$ es también un ideal primo de B_i. De esto deducimos una acción de G en Z como espacio topológico, pero en realidad tenemos más: del automorfismo $\sigma|_{B_i} : B_i \to B_i$ deducimos un automorfismo de V_i. Se verifica que estos automorfismos son compatibles en las intersecciones $V_i \cap V_j$, así que obtenemos una acción de G en X como esquemas.

Más aún, esta acción es transitiva en las fibras de π. En efecto, podemos suponer $\pi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$, donde B es la cerradura entera de A en L, una extensión de

Galois de K, el campo cociente de A. En este caso el resultado es [17, Th. 9.3 (c), p. 66].

Afirmación 8.0.56. *Z es no singular y $\pi : Z \to X$ es étale fuera de D.*

Demostración. Estudiamos la estructura local de

$$\pi : Z \to X$$

Tomemos un punto $p \in X$ y una vecindad afín $U = \operatorname{Spec} R$ de éste, tal que $g \in \mathbb{C}(X)$ es una ecuación local en U para el divisor A de (8.2), es decir

$$A|U = \operatorname{div}_U(g)$$

Entonces por construcción $x = f \cdot g^m$ da una ecuación local de D en U. Nótese que $\mathbb{C}(X)[\sqrt[m]{f}] = \mathbb{C}(X)[\sqrt[m]{x}]$. Más aún, la cerradura entera S de R en $\mathbb{C}(X)[\sqrt[m]{x}]$ se escinde en suma directa de eigenespacios

$$S = R_{m-1} \cdot (\sqrt[m]{x})^{m-1} \oplus R_{m-2} \cdot (\sqrt[m]{x})^{m-2} \oplus ... \oplus R_1 \cdot (\sqrt[m]{x}) \oplus R_0$$

donde

$$R_i \subset \mathbb{C}(X)$$

Verificamos el criterio según el cual $r_i \in \mathbb{C}(X)$ está en R_i como sigue

$$\begin{aligned} r_i \in R_i &\Leftrightarrow r_i \cdot ((\sqrt[m]{x})^i) \in S \\ &\Leftrightarrow \operatorname{div}(r_i \cdot (\sqrt[m]{x})^i) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow m \cdot \operatorname{div}(r_i) + iD|U \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{div}(r_i) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow r_i \in R \end{aligned}$$

Nótese que la segunda última implicación se sigue del hecho de que D es reducido por elección, y así todos los coeficientes de $\frac{i}{m}D(0 \leq i \leq m-1)$ son menores que 1. Entonces, localmente, el morfismo π está dado por

$$\operatorname{Spec} R[T]/(T^m - x) \to \operatorname{Spec} R$$

Ahora bien, si p no está en el soporte de D, podemos tomar U suficientemente chica para que x sea una unidad. Entonces por [18, p. 23], π es étale, la preimagen de p está dada por m puntos, correspondientes a las m raíces de $T^m - x(p)$ y por [18, I, 3.17(c)], éstos son no singulares. Si por el contrario, p está en el soporte de D, entonces x no es una unidad, así que podemos escoger un sistema de coordenadas locales $(x, x_2, ..., x_n)$ tal que p esté definido por $x = x_2 = ... = x_n = 0$ y entonces hay un solo punto arriba de p definido por $\sqrt[m]{x} = x_2 = ... = x_n = 0$, que es por lo tanto no singular. Esto prueba la afirmación. □

Afirmación 8.0.57. *G actúa en $\pi_*\mathcal{O}_Z$, cuya descomposición en eigengavillas coincide con*

$$\pi_*\mathcal{O}_Z = \oplus_{i=0}^{m-1}\pi_*\mathcal{O}_Z[\epsilon^i] = \oplus_{i=0}^{m-1}\mathcal{O}_X(-iA).$$

Además, la igualdad se da como un isomorfismo de $\mathcal{O}_X$-álgebras, donde la estructura de $\mathcal{O}_X$-algebra en el miembro del lado derecho está dada por (cuando $i + j \geq m$)

$$\begin{gathered}\mathcal{O}_X(-iA) \times \mathcal{O}_X(-jA) \to \mathcal{O}_X(-(i + j - m)A) \\ a \cdot b \mapsto a \cdot b \cdot s\end{gathered}$$

Demostración. Tal como arriba, localmente S se descompone en sumandos directos de eigenespacios

$$S = R'_{m-1} \cdot (\sqrt[m]{f})^{m-1} \oplus R'_{m-2} \cdot (\sqrt[m]{f})^{m-2} \oplus \ldots \oplus R'_1 \cdot (\sqrt[m]{f}) \oplus R'_0$$

donde

$$R'_i \subset \mathbb{C}(X)$$

Verificamos el criterio segú el cual $r'_i \in \mathbb{C}(X)$ está en R'_i como sigue

$$\begin{aligned} r'_i \in R'_i &\Leftrightarrow r'_i \cdot ((\sqrt[m]{f})^i) \in S \\ &\Leftrightarrow \operatorname{div}(r'_i \cdot (\sqrt[m]{f})^i)|U \geq 0 \\ &\Leftrightarrow m \cdot \operatorname{div}(r'_i) + i(D - mA)|U \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{div}(r'_i) - iA|U \geq 0, r'_i \in \mathcal{O}_X(-iA) \end{aligned}$$

Nótese que la segunda a última implicación se sigue del hecho de que D es reducido por elección, y así todos los coeficientes de $\frac{i}{m}D(0 \leq i \leq m-1)m$ son menores que 1. Por lo tanto, el eigenespacio es isomórfo a $\mathcal{O}_X(-iA)$, y esto prueba la primer parte. La segunda se sigue inmediatamente de la descripción de arriba. □

`Paso 3`. Descomposición de $\pi * \mathbb{C}_Z$.

Primero escogemos el generador $g \in G$ tal que g actúa como multiplicación por ϵ^i, donde ϵ es un raíz m-ésima primitiva de la unidad, en el eigenespacio $\pi * \mathcal{O}_Z[\epsilon^i]$ en la descomposición de la afirmación 8.0.57. El grupo de Galois G actúa en $\pi_*\mathbb{C}_Z$, y sea

$$\pi_*\mathbb{C}_Z = \oplus_{i=0}^{m-1}\pi_*\mathbb{C}_Z[\epsilon^i]i = 0$$

su descomposición en eigenespacios con la misma convención con respecto a la acción del generador g. Nótese que si π se ramifica sobre $p \in X$, entonces

$$\pi_*\mathbb{C}_Z[\epsilon^0]_p = C \text{ y } \pi_*\mathbb{C}_Z[\epsilon^i]_p = 0 \text{ para } i \neq 0$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\begin{aligned} \pi_*\mathbb{C}_Z[\epsilon^0] &= \mathbb{C}_X, \\ \pi_*\mathbb{C}_Z[\epsilon^i] &= i_!\mathcal{C}_{X-D,i} \end{aligned}$$

donde $\mathcal{C}_{X-D,i}$ es una gavilla localmente constante de rango 1 sobre $X - D$ y donde $i_!$ denota la extensión de la gavilla constante $\mathcal{C}_{X-D,i}$ a todo X haciendo que cada tallo en $p \in D$ sea 0. Nótese que la gavilla $\mathcal{C}_{X-D,i}$ es diferente a la gavilla constante $\mathcal{C}_{X-D}$, ya que la monodromía actua no trivialmente en la primera y trivialmente en la última.

La acción de G en $\pi_*\mathbb{C}_Z$ induce la acción de G en los grupos de cohomología de la gavilla, y concluimos lo siguiente del argumento de arriba:

Afirmación 8.0.58. *Para $i \neq 0$ tenemos*

$$\begin{aligned} H^j(X, \pi_*\mathbb{C}_Z)[\epsilon^i] &= H^j(X, \pi_*\mathbb{C}_Z[\epsilon^i]) \\ &= H^j(X, i_!\mathcal{C}_{X-D,i}) \\ &= H^j(X - D, \mathbb{C}_{X-D,i}) \end{aligned}$$

`Paso 4`. Anulación topológica.

Recordemos el siguiente Teorema que se sigue de Teoría de Morse (ver [19]).

Teorema 8.0.59. *Para una variedad algebraica afín no singular $Z - \pi^{-1}(D)$ de dimensión compleja n,*

$$H^j(Z - \pi^{-1}(D), \mathbb{C}_{Z-\pi^{-1}(D))}) = 0 \text{ para } j = 2n - k, k < n,$$

ya que $Z - \pi^{-1}(D)$ tiene el tipo de homotopía de un complejo CW de dimensión real menor o igual a n.

El Teorema 8.0.59 implica, ya que $R^q\pi_*\mathbb{C}_{Z-\pi^{-1}(D)} = 0$ para $q > 0$, que

$$\begin{aligned} 0 &= H^j(Z - \pi^{-1}(D), \mathbb{C}_{Z-\pi^{-1}(D)}) \\ &= H^j(X - D, \pi_*\mathbb{C}_{Z-\pi^{-1}(D)}) \text{ para } j = 2n - k, k < n. \end{aligned}$$

Tomando el eigenespacio concluimos lo siguiente

Afirmación 8.0.60.

$$\begin{aligned}
0 &= H^j(Z-\pi^{-1}(D), \mathbb{C}_{Z-\pi^{-1}(D)})[\epsilon^i] \\
&= H^j(X-D, \pi_*\mathbb{C}_{Z-\pi^{-1}(D)})[\epsilon^i] \\
&= H^j(X-D, \pi_*\mathbb{C}_{Z-\pi^{-1}(D)}[\epsilon^i]) \\
&= H^j(X-D, \pi_*\mathbb{C}_Z)[\epsilon^i]) \\
&= H^j(X-D, \mathbb{C}_{X-D,i}) \text{ para } j = 2n-k, k < n.
\end{aligned}$$

Finalmente, usando la dualidad de Poincaré tenemos la siguiente

Afirmación 8.0.61. *Para $i \neq 0$,*

$$\begin{aligned}
0 &= H^j(X-D, \mathcal{C}_{X-D,i}) \\
&= H^j(X, \pi_*\mathbb{C}_Z)[\epsilon^i] \\
&= H^j(Z, \mathbb{C}_Z)[\epsilon^i] \text{ (ya que } R^q\pi_*\mathbb{C}_Z = 0 \text{ para } q > 0) \\
&= H^j(Z, \mathbb{C}_Z)[\epsilon^{m-1}] \text{ (por dualidad de Poincaré con } j = 2n-k) \\
&= H^i(X, \pi_*)[\epsilon^{m-i}] \text{ para } k < n.
\end{aligned}$$

`Paso 5`. Teoría de Hodge

Como las fibras de π son 0-dimensionales, no hay imágenes directas superiores, y de (8.1) se tiene que

$$H^i(X, \pi_*\mathbb{C}_Z) \to H^i(X, \pi_*\mathcal{O}_Z)$$

es sobreyectivo. La acción de G descompone este último mapeo en una sobreyección de eigengavillas individualmente:

$$0 = H^k(X, \pi_*\mathbb{C}_Z)[\epsilon^{m-i}] \to H^k(X, \pi_*\mathcal{O}_Z)[\epsilon^{m-i}] = H^k(X, \mathcal{O}_X(-(m-i)A)).$$

Haciendo $i = m-1$, tenemos

$$H^k(X, \mathcal{O}_X(-A)) = 0 \text{ para } k < n$$

`Paso 6`. Dualidad de Serre.

Finalmente, por Dualidad de Serre, haciendo $k = n-p$, tenemos

$$H^p(X, \mathcal{O}_X(K_X + A)) \cong H^k(X, \mathcal{O}_X(-A)) = 0, p > 0.$$

Esto completa la prueba del Teorema 8.0.51. $\square$

Bibliografía

[1] M.F. Atiyah and I.G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.

[2] N. Bourbaki, *Algebre commutative*, Hermann, 1961-1965.

[3] D. Cox, *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, J. Algebraic Geom. **4(1)** (1995), 17–50.

[4] O. Debarre, *Complex tori and abelian varieties*, AMS Bookstore, 2005.

[5] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, John Wiley and Sons, Inc., 1978.

[6] A. Grothendieck and J. Dieudonné, *Elements de geometrie algebraique*, IHES, 1978.

[7] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1992.

[8] J. Hausen and F. Berchtold, *Homogeneous coordinates for algebraic varieties*, J. Algebra **266(2)** (2003), 636–670.

[9] ———, *Cox rings and combinatorics*, Trans. Amer. Math. Soc. **359(3)** (2007), 1025–1252.

[10] T. Kajiwara, *The functor of a toric variety with enough invariant effective cartier divisors*, Tohoku Math. J. (2) **43** (1991), 375–399.

[11] K. Kazuhiko, K. Watanabe, and E.J. Elizondo, *The total coordinate ring of a normal projective variety*, J. Algebra **276(2)** (2004), 625–637.

[12] K. Kodaira, *On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks*, Anns. Inst. Fourier **6** (1956), 1–46.

[13] J. Kollár, *Higher direct images of dualizing sheaves ii*, Annals of Math. **124** (1986), 171–202.

[14] ______, *Shafarevich maps and automorphic forms*, Princeton University Press, 1995.

[15] S. Lang, *Algebraic number theory*, Addison-Wesley, 1970.

[16] H. Matsumura, *Commutative algebra*, Benjamin/Cummings, 1969.

[17] ______, *Commutative ring theory*, Cambridge, Univ. Press, 1986.

[18] J. Milne, *Étale cohomology*, 1990.

[19] J. Milnor, *Morse theory*, Annals of mathematics Studies, 51, Princeton University Press, 1969.

[20] J.P. Serré, *Géometrie algébrique et géometrie analytique*, Ann. Insti. Fourier **6** (1956), 1–42.

[21] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative algebra*, Springer-Verlag, 1979.