Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

ÁLGEBRAS DE LIE AFINES EXTENDIDOS Y FORMAS CUADRÁTICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
GUSTAVO JASSO AHUJA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. MICHAEL BAROT SCHLATTER

2010

1.Datos del alumno
Jasso
Ahuja
Gustavo
55-56582950
Universidad Nacional Autonoma de Mexico
Facultad de Ciencias
Matemáticas
40602652-7

2. Datos del tutor
Dr
Michael
Barot
Schlatter

3. Datos del sinodal 1
Dr
Christof
Geiss
Hahn

4. Datos del sinodal 2
Dr
Octavio
Mendoza
Hernández

5. Datos del sinodal 3
Dra
Edith Corina
Saenz
Valadez

6. Datos del sinodal 4
M en C
Ángel Manuel
Carrillo
Hoyo

7.Datos del trabajo escrito.
Álgebras de Lie afines extendidos y formas cuadráticas
136 p
2010

En memoria de Doña Fala.

Agradecimientos

A mi madre. Por creer en mi.

A Sarai, mi novia. Por estar siempre a mi lado.

A Omar. Por apoyarme siempre que lo necesité

A Michael. Por enseñarme a hacer matemáticas.

A mis maestros. Por enseñarme a seguir aprendiendo.

A mis amigos. Por hacerme reír.

Contenido

Introducción

Las álgebras de Lie fueron introducidas originalmente por el matemático noruego Sophus Lie (1842-1899) como estructuras algebraicas para el estudio de los grupos de Lie. Es sabido que el espacio tangente en el elemento neutro de un grupo de Lie tiene una estructura natural de álgebra de Lie. Fueron estos los primeros ejemplos que Lie estudió, bajo el nombre de *grupos infinitesimales* (ver [**11**]). Posteriormente, las álgebras de Lie comenzaron a desarrollar un interés particular en varios matemáticos de la época. En 1890 Wilhelm Killing había clasificado ya, salvo pequeños detalles, las álgebras de Lie simples sobre el campo de los números complejos (ver [**10**]). Posteriormente, en 1894, Elié Cartan, en su tesis doctoral (ver [**6**]), estudió y profundizó el trabajo de Killing y para 1900 la clasificación estaba completa. Fue gracias a su trabajo y el de Hermann Weyl que la teoría de álgebras de Lie emergió como una disciplina global de interés por si misma, que después se convertiría en una rama de fundamental importancia en las matemáticas. Tanto así, que ahora se considera a la teoría de las álgebras de Lie como una de las ramas clásicas de las matemáticas.

Posteriormente, en 1966, J. P. Serre construyó las álgebras de Lie semisimples de tipo finito por medio de generadores y relaciones (ver [**17**]). Esto brindó un nuevo enfoque a la teoría de álgebras de Lie. En 1967, Victor G. Kac y Robert V. Moody introdujeron de manera independiente una clase bastante amplia de álgebras de Lie, conocida ahora como álgebras de Kac-Moody, generalizando las ideas de Serre (ver [**9**], [**12**]). Las álgebras de Lie de dimensión finita ofrecen ejemplos de álgebras de Kac-Moody, sin embargo la teoría de Kac-Moody es mucho más amplia, ya que incluye muchos ejemplos de dimensión infinita. Esta teoría ha sido testigo de un rápido desarrollo desde su introducción, encontrando numerosas aplicaciones en otras áreas de las matemáticas, como en la teoría de grupos, en la combinatoria, en el estudio de las formas modulares, en las ecuaciones diferenciales, y en la teoría de invariantes, por mencionar algunas.

En 1990, R. Høegh-Krohn y B. Torresani publicaron un artículo donde se propuso un sistema de axiomas para una clase interesante de álgebras de Lie definidas sobre los números complejos (ver [**7**]). Estas álgebras fueron caracterizadas parcialmente por una forma bilineal simétrica no degenerada e invariante, una subálgebra de Cartan de dimensión finita, un sistema de raíces discreto y por la ad-nilpotencia de los espacios raíz asociados a raíces no isotrópicas. Ellos llamaron a estas álgebras de Lie casi-simples. Varios años antes, K. Saito y P. Slodowy estudiaron algunas de estas álgebras y los sistemas de raíces asociados a ellas (ver [**13**], [**14**], [**15**],[**18**], [**19**]). Siguiendo el trabajo de Saito, que llamó a estos últimos, sistemas afines extendidos. De ahi que a estas álgebras se le llame álgebras de Lie de tipo afín extendido, como aparece en [**1**].

El objetivo principal del presente trabajo es relacionar dos construcciones de álgebras de Lie a partir de formas cuadráticas (álgebras que en general resultan ser de dimensión infinita) con el concepto de álgebra de Lie de tipo afín extendido (EALA por sus siglas en inglés). Resulta que una de las construcciones, que es una modificación de una construcción de R. Borcherds que aparece en [**4**], sólo es un EALA cuando la dimensión del radical de la forma cuadrática utilizada en su construcción es 0 ó 1. La segunda construcción, introducida por M. Barot, D. Kussin, H. Lenzing es bastante más complicada. Con ella se construye una familia de álgebras de Lie $\tilde{G}(q)$ que depende de una forma cuadrática q por medio de relaciones de Serre generalizadas. En [**2**] se prueba que esta familia de álgebras de Lie, cuando corrango$(q) \leq 1$, resulta ser de algún tipo ya estudiado: de tipo finito o de Kac-Moody. Ambos son ejemplos de EALAs.

Sin embargo, el estudio de estas álgebras se complica cuando la forma cuadrática tiene tipo de Dynkin $\mathbb{A}_n$ y la dimensión de su radical es mayor o igual que 2. En este caso, no se ha logrado relacionar el álgebra de Lie construida con algún álgebra de Lie ya conocida. Sin embargo, se prueba que en cualquier caso, el álgebra construida a partir de la construcción de Borcherds es un cociente del álgebra construida en [**2**]. Además, se demuestra que siempre es posible hacer un cociente de $\tilde{G}(q)$ para obtener un álgebra de Lie de tipo afín extendido, el resultado principal de este trabajo. Esto muestra que existe una íntima relación entre estas construcciones y las EALAs.

Otro de los objetivos de este trabajo es presentar al lector de manera rápida y accesible el concepto de álgebra de Lie de tipo afín extendido, por lo que en el primer capítulo de éste se da una brevísima introducción a la teoría general de álgebras de Lie. Se dan definiciones y resultados básicos y se enuncia sin demostración el teorema de Serre (cuya demostración se puede consultar en [**8**]), ya que este ofrece cierta motivación para la construcción de M. Barot, D. Kussin, H. Lenzing (ver [**2**]) que aparece en la sección 2.2. Al final del capítulo se introduce el concepto de álgebra de Lie extendido afín tal y como aparece en [**1**]. Posteriormente, en el segundo capítulo, se presentan las dos construcciones antes mencionadas. Se prueba también un resultado que relaciona ambas construcciones. En el tercer capítulo se prueban los resultados mencionados en el párrafo anterior y se comenta sobre la relevancia de éstos.

El primer capítulo sigue a [**5**] y [**8**], el segundo capítulo se basa en [**2**].

Capítulo 1

Definiciones y conceptos básicos

Se introducen las álgebras de Lie y se estudian algunas propiedades generales que serán utilizadas a lo largo de este trabajo. Además, se enuncia el teorema de Serre (sin demostración), con objeto de motivar al lector en la construcción descrita en la sección 2.2. Finalmente, se dan las definiciones necesarias para posteriormente presentar el concepto de álgebra de Lie de tipo afín extendido. El tratamiento de esta sección sigue a [**5**] y [**8**].

1.1. Álgebras de Lie

Definición 1.1 (Álgebra de Lie)**.** *Un* álgebra de Lie *sobre un campo k es un k-espacio vectorial L con una operación binaria*

$$\begin{aligned} L \times L &\to L \\ (x, y) &\mapsto [xy] \end{aligned}$$

que satisface los siguientes axiomas:

(i) $(x, y) \mapsto [xy]$ *es bilineal.*

(ii) $[xx] = 0$ *para todo* $x \in L$.

(iii) $[[xy]z] + [[yz]x] + [[zx]y] = 0$ *para todo* $x, y, z \in L$

Al último axioma se le llama identidad de Jacobi.

A lo largo de esta sección, L denota un álgebra de Lie sobre un campo arbitrario k.

Proposición 1.2. $[xy] = -[yx]$ *para todo* $x, y \in L$*; es decir, la multiplicación en* L *es anticonmutativa.*

Demostración. Sean $x, y \in L$. Entonces, como $[x+y, x+y] = 0$ y además la multiplicación es bilineal, se tiene que $[xx] + [xy] + [yx] + [yy] = 0$. Por lo que $[xy] + [yx] = 0$, es decir, $[xy] = -[yx]$. □

Sean L, M dos álgebras de Lie. Un *homomorfismo de álgebras de Lie* es un homomorfismo de espacios vectoriales $\phi : L \to M$ tal que $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$ para todo $x, y \in L$. Se dice que ϕ es un *monomorfismo* si es inyectivo, un *epimorfismo* si es suprayectivo, o un *isomorfismo* si es biyectivo. Se dice que dos álgebras de Lie L, M son isomorfas si existe un isomorfismo $\phi : L \to M$.

Sean $H, K \subset L$ dos subespacios vectoriales. Se denota por $[HK]$ al subespacio generado por todos los productos $[xy]$ tales que $x \in H$, $y \in K$. Se observa que cada elemento de $[HK]$ es de la forma

$$[x_1 y_1] + [x_2 y_2] + \cdots + [x_r y_r]$$

donde $x_i \in H$, $y_i \in K$ para todo i.

Proposición 1.3. *$[HK] = [KH]$ para todo H, K subespacios de L.*

Demostración. Sea $[xy] \in [HK]$. Entonces $[xy] = -[yx] \in [KH]$, por lo que se tiene que $[HK] \subset [KH]$. Análogamente se prueba que $[KH] \subset [HK]$. □

Definición 1.4. *Sea $I \subset L$ un subespacio. Entonces I es un* ideal *de L si $[IL] \subset I$.*

Observación 1.5. *La condición anterior es equivalente a que $[LI] \subset I$ (ver Proposición 1.3). De esta forma, no hay distinciones entre ideales derechos e izquierdos en el contexto de las álgebras de Lie. Todo ideal es bilateral.*

Se dice que un subespacio $H \subset L$ es una subálgebra de L si al restringir la multiplicación de L a H, H es un álgebra de Lie.

Definición 1.6. *Sea $H \subset L$ una subálgebra. Se define el* centralizador *respecto a L de H como el subespacio*

$$C_L(H) = \{x \in L : [xh] = 0 \text{ para todo } h \in H\}$$

Se dice que un álgebra de Lie L es *abeliana* si $[LL] = 0$. Es decir, $[x, y] = 0$ para todo $x, y \in L$.

Dada un álgebra de Lie L se definen las *potencias* de L por

$$L^1 = L, \qquad L^{n+1} = [L^n L], \qquad \text{para } n \geqslant 1.$$

Así, L es abeliana si y sólo si $L^2 = 0$.

Proposición 1.7. *L^n es un ideal de L. Además*

$$L = L^1 \supset L^2 \supset L^3 \cdots$$

Demostración. Primero se muestra que dados dos ideales $I, J \subset L$, $[IJ]$ es también un ideal de L. Sean $x \in I,\ y \in J,\ z \in L$. Entonces

$$[[xy]z] = [x[yz]] - [y[xz]] \in [IJ]$$

dado que I, J son ideales y que el producto de subespacios de L es conmutativo. Esto muestra que $[IJ]$ es un ideal de L. Ya que L es un ideal de si mismo, inductivamente se tiene que L^n es un ideal de L para todo $n \geqslant 1$. De la propiedad de ideal se sigue que

$$L^{n+1} = [L^n L] \subset L^n. \qquad \square$$

Se dice que un álgebra de Lie es *nilpotente* si $L^n = 0$ para alguna $n \geqslant 1$.

Definición 1.8. *Sea $H \subset L$ una subálgebra. Se define el* normalizador *de H respecto a L como*

$$N_L(H) = \{x \in L : [xh] \in H \text{ para todo } h \in H\}.$$

Ahora se define un tipo particular de subálgebras que juegan un papel importante dentro de la teoría de álgebras de Lie, en especial en la clasificación de las álgebras de Lie simples de tipo finito.

Definición 1.9. *Sea $H \subset L$ una subálgebra. H es llamada una* subálgebra de Cartan *de L (CSA por sus siglas en inglés) si H es nilpotente y $H = N_L(H)$.*

Observación 1.10. *Toda álgebra de Lie L contiene una subálgebra de Cartan (ver* [**5**] *pp.23-25).*

Proposición 1.11. *Sea A un álgebra asociativa. Dados $x, y \in A$ se define el* conmutador *como*

$$[xy] = xy - yx.$$

Entonces, A junto con el conmutador es un álgebra de Lie, que se denota por $[A]$.

Demostración. Ya que los dos primeros axiomas se verifican fácilmente, basta verificar la identidad de Jacobi. Sean $x, y, z \in A$, entonces

$$\begin{aligned}[x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] =& x(yz) - (yz)x + y(zx) \\ & - (zx)y + z(xy) - (xy)z \\ =& 0,\end{aligned}$$

ya que A es un álgebra asociativa. Esto muestra que $[A]$ es un álgebra de Lie. $\square$

Sea $k^{n\times n}$ el álgebra asociativa de todas las matrices de tamaño $n \times n$ sobre k y sea $[k^{n\times n}]$ el álgebra de Lie correspondiente. Se define

$$\mathfrak{gl}_n(k) = [k^{n\times n}]$$

y se le llama *el álgebra de Lie general lineal* sobre k. Una *representación* de un álgebra de Lie L sobre k es un homomorfismo de álgebras de Lie

$$\rho : L \to \mathfrak{gl}_n(k)$$

para alguna n, y ρ es llamada una representación de grado n. Dos representaciones ρ, ρ' de grado n son *equivalentes* si existe una matriz no singular $T \in k^{n\times n}$ tal que

$$\rho'(x) = T^{-1}\rho(x)T \qquad \text{para todo } x \in L.$$

Un L-módulo izquierdo es un k-espacio vectorial V con una multiplicación

$$\begin{aligned} L \times V &\to V \\ (x, v) &\mapsto xv \end{aligned}$$

que satisface los siguientes axiomas:

(i) $(x, v) \mapsto xv$ es bilineal;

(ii) $[xy]v = x(yv) - y(xv)$ para todo $x, y \in L,\ v \in V$.

Observación 1.12. *L es un L-módulo. Se define* $\mathrm{ad}_L : L \times L \to L,\ (x, y) \mapsto [x, y]$. *Se sigue de la identidad de Jacobi que* $[[xy]z] = [x[yz]] - [y[xz]]$. *Este es llamado el* módulo adjunto *de L.*

Definición 1.13. *Sea $C \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ una matriz. Se dice que C es una* matriz de Cartan generalizada *si cumple las siguientes propiedades:*

(i) *$C_{ii} = 2$ para todo i.*

(ii) $C_{ij} < 0$ *si* $i \neq j$.

(iii) $C_{ij} = 0$ *si y sólo si* $C_{ji} = 0$

Si $q_C(x) = x^T Cx$ *es una forma cuadrática positiva definida, se dice que* C *es una* matriz de Cartan.

1.1.1. Álgebras de Lie libres. Se introduce ahora el concepto de álgebra de Lie libre $FL(X)$ en un conjunto X. Se define primero el álgebra asociativa libre en el conjunto X. $F(X)$ es el conjunto de todas las sumas finitas de la forma

$$\sum_{k\geqslant 0} \sum_{1,\dots,k} \lambda_{1,\dots,k} x_1 \cdots x_k$$

con $\lambda_{1,\dots,k} \in \mathbb{C}$, sumadas sobre todos los enteros no negativos k y todos los k-tuplos ordenados $x_1, \dots, x_k$ de elementos de X (permitiendo repeticiones). Cuando $k = 0$ el producto $x_1 \cdots x_k$ es el producto vacío, y se escribe como 1. Las operaciones de suma, producto, y multiplicación por un escalar se definen de la manera natural y hacen de $F(X)$ un álgebra asociativa sobre $\mathbb{C}$ con unidad 1. Sea $[F(X)]$ el álgebra de Lie asociada a $F(X)$. Finalmente, se define $FL(X)$ como la intersección de todas las subálgebras de Lie de $[F(X)]$ que contienen a X. A $FL(X)$ se le llama *el álgebra de Lie libre* en el conjunto X. Es claro que X está contenido en $FL(X)$ por lo que se tiene una función inyectiva $i : X \to FL(X)$.

Un álgebra de Lie $\mathbb{Z}^n$-graduada es un álgebra de Lie L con una descomposición

$$L = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} L_\alpha$$

en suma directa de subespacios tal que $[L_\alpha L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$.

1.1.2. Sistemas de raíces. Dado que el estudio de los sistemas de raíces no son necesarios en el presente trabajo, se presentan solamente a las definiciones de sistema de raíces y de base de un sistema de raíces, conceptos necesarios para contextualizar el teorema de Serre. Para un estudio más detallado de éstos, léase el capítulo III de [**8**].

Definición 1.14 (Sistema raíz). *Un subconjunto* ϕ *de un espacio euclidiano* E *(en el sentido clásico del álgebra lineal) es llamado un* sistema de raíces *si se satisfacen los siguientes axiomas:*

(RS1) *ϕ es finito, genera E y $0 \notin \phi$.*

(RS2) *Si $\alpha \in \phi$, los únicos múltiplos de $\alpha \in \phi$ son $\pm\alpha$.*

(RS3) *Si $\alpha \in \phi$, la reflexión en el hiperplano definido por α deja a ϕ invariante.*

(RS4) *Si $\alpha, \beta \in \phi$, entonces $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.*

Definición 1.15. *Un subconjunto Δ de ϕ es llamado una* base *si:*

(RB1) *Δ es una base algebraica de E.*

(RB2) *Cada raíz β puede ser escrita como $\beta = \sum k_\alpha \alpha$, $(\alpha \in \Delta)$ con coeficientes enteros k_α todos no negativos o todos no positivos.*

A las raíces en Δ se les llama raíces simples.

Observación 1.16. *Todo sistema de raíces admite una base. Una bonita construcción se puede consultar en ([**8**] Section 10.1).*

A continuación, se enuncia uno de los teoremas fundamentales en la clasificación de las álgebras de Lie simples de tipo finito. La demostración se puede consultar en ([**8**] Section 18.3).

Teorema 1.17. *[Teorema de Serre] Sea ϕ un sistema de raíces con base $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Sea L el álgebra de Lie generada por $3l$ elementos $\{x_i, y_i, h_i\}$ sujeta a las siguientes relaciones:*

(S1) $[h_i h_j] = 0$ *si* $1 \leq i,\ j \leq l$.

(S2) $[x_i y_i] = h_i,\ [x_i y_j] = 0$ *si* $i \neq j$.

(S3) $[h_i x_j] = \{\alpha_j, \alpha_i\} x_j,\ [h_i y_j] = -\{\alpha_j, \alpha_i\} y_j$.

(S_{ij}^+) $(\operatorname{ad} x_i)^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle + 1}(x_j) = 0$ *si* $i \neq j$.

(S_{ij}^-) $(\operatorname{ad} y_i)^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle + 1}(y_j) = 0.$ *si* $i \neq j$.

Entonces L es un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita con CSA generada por los h_i con sistema raíces ϕ. A las relaciones anteriores se les llama relaciones de Serre.

1.2. Álgebras de Lie de tipo afín extendido

Esta sección sigue una parte del primer capítulo de [**1**]. A lo largo de esta sección, L es un $\mathbb{C}$-álgebra de Lie y $H \subset L$ una subálgebra abeliana de dimensión finita.

Sea $(-,-) : L \times L \to \mathbb{C}$ una forma $\mathbb{C}$-bilineal simétrica. Se dice que $(-,-)$ es *invariante* si $([x,y],z) = (x,[y,z])$ para todo $x,y,z \in L$.

Definición 1.18 (Espacio raíz)**.** *Se denota por H^* al espacio dual de H respecto a $\mathbb{C}$. Sea $\alpha \in H^*$. El subespacio*

$$L_\alpha = \{x \in L : [h,x] = \alpha(h)x \text{ para todo } h \in H\}$$

es el espacio raíz *de $\alpha \in H^*$. El conjunto*

$$R = \{\alpha \in H^* : L_\alpha \neq 0\}$$

es el sistema de raíces *de L con respecto a H. Se observa que $L_0 = C_L(H)$.*

Se prueba el siguiente lema, que es cierto en un contexto más general, y que es necesario para la demostración de la Proposición 1.20.

Lema 1.19. *Sean V un espacio vectorial y S,T dos transformaciones lineales diagonalizables tales que $ST = TS$. Entonces S y T son simultáneamente diagonalizables.*

Demostración. Dado que S es diagonalizable V se descompone como suma directa de espacios propios de S:

$$V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$$

donde V_λ es el espacio propio asociado al valor propio λ. Sea λ un valor propio de S. Luego, dado que $ST = TS$ se tiene que:

$$(S - \lambda 1_V)TV_\lambda = T(S - \lambda 1_V)V_\lambda = T0 = 0.$$

Por lo que $TV_\lambda \subset V_\lambda$. Entonces existe una base $\{v_{i,\lambda}\}$ de V_λ compuesta de vectores propios de T. Es claro entonces que

$$\bigcup_\lambda \{v_{i,\lambda}\}$$

es una base de vectores propios de S y T simultáneamente. $\square$

Proposición 1.20 (Descomposición en espacios raíz). *Sea H una subálgebra de Cartan abeliana no trivial de L de dimensión finita tal que $C_L(H) = H$ y que $\operatorname{ad}_L h$ es diagonalizable para todo $h \in H$. Entonces $L = \bigoplus_{\alpha \in R} L_\alpha$ donde R es el sistema de raíces de L con respecto a H.*

Demostración. Como H es abeliana de dimensión finita y $\operatorname{ad}_L h$ es diagonalizable para todo $h \in H$, existe una base $\{x_i\}$ de L tal que x_i es un vector propio de $\operatorname{ad}_L h$ para todo i y para todo $h \in H$ (ver Lema 1.19). Sean $x \in \{x_i\}$ y $h \in H$ entonces $[h, x] = \lambda_h x$. Se define $\alpha \in H^*$ por $\alpha(h) = \lambda_h$. Es claro que $x \in L_\alpha$. Como $\{x_i\}$ es una base de L, esto muestra que

$$L = \sum_{\alpha \in R} L_\alpha.$$

Falta verificar que la suma es directa. Sea $x \in L_\alpha \cap (\sum_{\beta \neq \alpha} L_\beta)$. Entonces $x = \sum x_{\beta_i}$ con x_{β_i} casi siempre cero. Entonces

$$\begin{aligned}[h, x] &= \alpha(h)x = \alpha(h) \sum x_{\beta_i} \\ &= \sum \beta_i(h) x_{\beta_i}\end{aligned}$$

para todo $h \in H$. Por lo que se ha escrito un vector propio de $\operatorname{ad}_L h$ como combinación lineal de vectores propios de $\operatorname{ad}_L h$ distintos de α. Esto es imposible, por lo que se debe tener que $x = 0$. Esto muestra que

$$L_\alpha \cap (\sum_{\beta \neq \alpha} L_\beta) = 0. \qquad \square$$

Lema 1.21. *$[L_\alpha, L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$ para todo $\alpha, \beta \in H^*$.*

Demostración. Sean $x_\alpha \in L_\alpha$, $x_\beta \in L_\beta$, y $h \in H$, entonces

$$\begin{aligned}[h, [x_\alpha, x_\beta]] &= -([x_\alpha, [x_\beta, h]] + [x_\beta, [h, x_\alpha]]) \\ &= \beta(h)[x_\alpha, x_\beta] + \alpha(h)[x_\alpha, x_\beta] \\ &= (\alpha + \beta)(h)[x_\alpha, x_\beta].\end{aligned}$$

$\square$

Lema 1.22. *Sea $(-, -) : L \times L \to \mathbb{C}$ una forma $\mathbb{C}$-bilineal simétrica e invariante. Entonces $(L_\alpha, L_\beta) = 0$ si $\alpha + \beta \neq 0$.*

Demostración. Sean $x_\alpha \in L_\alpha$ y $x_\beta \in L_\beta$, entonces

$$\alpha(h)(x_\alpha, x_\beta) = (\alpha(h)x_\alpha, x_\beta) = ([h, x_\alpha], x_\beta) = -(x_\alpha, [h, x_\beta]) = -\beta(h)(x_\alpha, x_\beta)$$

Por lo tanto $(\alpha+\beta)(h)(x_\alpha, x_\beta) = 0$ para todo $h \in H$, y como $\alpha + \beta \neq 0$, se tiene $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ □

Proposición 1.23. *Sea $(-,-) : L \times L \to \mathbb{C}$ una forma $\mathbb{C}$-bilineal simétrica, invariante y no degenerada. Entonces la restricción de la forma a H es no degenerada.*

Demostración. $(L_0, L_\alpha) = 0$ para todo $\alpha \neq 0$. Sea $h \in H$ tal que $(h, L_0) = 0$, entonces $(h, L) = 0$ por lo que $h = 0$, ya que $(-,-)$ es no degenerada. □

La proposición anterior garantiza que $\Phi : H \to H^*$, $h \mapsto (?, h)$ es un isomorfismo. Se define $t_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ para todo $\alpha \in H^*$. De esta forma, $\alpha(h) = (t_\alpha, h)$ para todo $h \in H$ y se transfiere la forma bilineal en H a H^* de manera natural definiendo $(\alpha, \beta) = (t_\alpha, t_\beta)$ para todo $\alpha, \beta \in H^*$. La siguiente proposición brinda motivación para la construcción de la forma bilineal que se definirá en el álgebra de Lie que se construye en la siguiente sección.

Proposición 1.24. *Sean $\alpha \in R$, $x_\alpha \in L_\alpha$, $x_{-\alpha} \in L_{-\alpha}$, y $(-,-) : L \times L \to \mathbb{C}$ una forma $\mathbb{C}$-bilineal simétrica, invariante y no degenerada en H. Entonces $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = (x_\alpha, x_{-\alpha})t_\alpha$ y $[L_\alpha, L_{-\alpha}] = \mathbb{C}t_\alpha$.*

Demostración. Para $h \in H$ se tiene

$$\begin{aligned}([x_\alpha, x_{-\alpha}], h) =& (x_\alpha, [x_{-\alpha}, h]) = \alpha(h)(x_\alpha, x_{-\alpha}) \\ =& (t_\alpha, h)(x_\alpha, x_{-\alpha}) = ((x_\alpha, x_{-\alpha})t_\alpha, h).\end{aligned}$$

Como $[L_\alpha, L_{-\alpha}] \subset L_0 = H$ se tiene que $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = (x_\alpha, x_{-\alpha})t_\alpha$. □

Definición 1.25. *Sea $\delta \in H^*$. Decimos que δ es isotrópico si $(\delta, \delta) = 0$. Si $\delta \in R$ es isotrópico decimos que δ es una raíz isotrópica. Definimos $R^0 = \{\alpha \in R : (\alpha, \alpha) = 0\}$ y $R^\times = R \setminus R^0$. Observamos que $0 \in R^0$.*

Definición 1.26. *L es irreducible respecto a H si las siguientes condiciones se cumplen:*

(i) *$R^\times$ no se puede descomponer en una unión ajena $R_1 \uplus R_2$, donde R_1, R_2 son subconjuntos no vacíos de R tales que $(R_1, R_2) = 0$.*

(ii) *Para todo* $\alpha \in R^0$ *existe* $\gamma \in R^\times$ *tal que* $\alpha + \gamma \in R$.

Cuando se cumple la condición (ii) *se dice que las raíces isotrópicas no están aisladas.*

Observación 1.27. *Claramente* (ii) *implica que* $R^\times \neq \emptyset$, *ya que siempre* $0 \in R^0$.

Definición 1.28 (EALA)**.** *Sean* L *una* $\mathbb{C}$*-álgebra de Lie,* $(-,-)$ *una forma bilineal en* L *y* $H \subset L$ *una subálgebra abeliana no trivial de dimensión finita. Llamamos al triple* $(L, (-,-), H)$ *álgebra de Lie de tipo afín extendido (EALA por sus siglas en inglés) si cumple los siguientes axiomas:*

(EA1) $(-,-) : L \times L \to \mathbb{C}$ *es simétrica, no degenerada e invariante en* L.

(EA2) H *es igual a su centralizador y* $\operatorname{ad}_L h$ *es diagonalizable para todo* $h \in H$.

(EA3) $\operatorname{ad}_L x_\alpha$ *es localmente nilpotente en* L *para todo* $\alpha \in R^\times, x_\alpha \in L_\alpha$. *Es decir, dados* $\alpha \in R^\times$, $x_\alpha \in L_\alpha$, $y \in L$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $(\operatorname{ad}_L x_\alpha)^n y = 0$

(EA4) R *es un subconjunto discreto de* H^* *(respecto a la topología usual de* $\mathbb{C}^n$*).*

(EA5) L *es irreducible respecto a* H.

Observación 1.29. *Se sigue de* (EA2) *que* H *es una subálgebra de Cartan de* L, *y* $H = L_0$.

Capítulo 2

Dos construcciones

Se presentan dos construcciones independientes de álgebras de Lie a partir de una forma cuadrática. Primero se construyen las álgebras de Lie $\tilde{N}$, basándose en una construcción de Borcherds que apareció originalmente en [**4**]. En la segunda sección se presentan la construcción de la familia de álgebras $\tilde{G}(q)$ y un teorema, sin demostración, que relaciona esta construcción con diferentes tipos de álgebras de Lie ya conocidos, todos de tipo afín extendido. Finalmente se presenta un resultado que relaciona ambas construcciones, a saber, resulta que el álgebra $\tilde{N}$ es un cociente del álgebra $\tilde{G}(q)$. Este capítulo sigue la presentación dada en [**2**].

2.1. Una construcción de Borcherds

A partir de una forma unitaria positiva semidefinida se construye un álgebra de Lie $\mathbb{Z}^n$-graduada, siguiendo la construcción que aparece en [**2**] y extendiendo el espacio N_0 por el dual del radical de la forma.

Recordamos que una *forma unitaria* es una forma cuadrática $q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$, $q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i<j}^n q_{ij}x_ix_j$ con coeficientes enteros $q_{ij} \in \mathbb{Z}$ (ver Apéndice A).

Sea $q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ una forma unitaria positiva semidefinida. Se definen $R^1 = q^{-1}(1)$, $R^0 = q^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{Z}^n : q(x,x) = 0\}$ y $R = R^1 \cup R^0$. Para $\alpha \in R$ se definen

$$\tilde{N}_0 = \mathbb{C}^n \times (\operatorname{rad} q)^*,$$

$$N_\alpha = \begin{cases} \mathbb{C}E_\alpha \text{ si } \alpha \in R^1, \\ \mathbb{C}^n/\mathbb{C}\alpha \text{ si } \alpha \in R^0 \setminus \{0\}, \end{cases}$$

$\pi_\alpha : \mathbb{C}^n \to N_\alpha$ la proyección canónica para cualquier $\alpha \in R^0 \setminus \{0\}$ (se define también por conveniencia $\pi_0 := id_{\tilde{N}_0}$) y $\rho : \mathbb{C}^n \to \text{rad q}$ una proyección. Sean $B : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ una forma bilineal tal que $q(x) = B(x,x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}^n$ y $\epsilon(\alpha,\beta) = (-1)^{B(\alpha,\beta)}$. Además, sea $(-|-) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ la forma $\mathbb{C}$-bilineal que satisface

$$(\alpha|\beta) = B(\alpha,\beta) + B(\beta,\alpha) \text{ para todo } \alpha,\beta \in \mathbb{Z}^n.$$

Observación 2.1. $R^0 = \{x \in \mathbb{Z}^n : (x|-) = 0\}$ *(ver Teorema A.3).*

Se define además $(\xi|f) = (f|\xi) := \xi(\rho(f))$ para todo $\xi \in (\operatorname{rad} q)^*$ y para todo $f \in \mathbb{C}^n$.

Se define $\tilde{N} = (\bigoplus_{\alpha\in R\setminus\{0\}} N_\alpha) \oplus \tilde{N}_0$ junto con las siguientes reglas, que dependen de la elección de B y ρ:

Para $\alpha,\beta \in R^0$, $\gamma,\delta \in R^1$, $f,g \in \mathbb{C}^n$, $\xi,\zeta \in (\operatorname{rad} q)^*$, se define

$$[\pi_\alpha(f), \pi_\beta(g)] = \epsilon(\alpha,\beta)(f|g)\pi_{\alpha+\beta}(\alpha); \tag{B1}$$

$$[\pi_\alpha(f), E_\delta] = \epsilon(\alpha,\delta)(f|\delta)E_{\alpha+\delta}; \tag{B2}$$

$$[E_\gamma, E_\delta] = \begin{cases} \epsilon(\gamma,\delta)E_{\gamma+\delta}, & \text{si } \gamma+\delta \in R^1; \\ \epsilon(\gamma,\delta)\pi_{\gamma+\delta}(\gamma), & \text{si } \gamma+\delta \in R^0; \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \tag{B3}$$

$$[\xi, \pi_\beta(g)] = (\xi|\beta)\pi_\beta(g); \tag{B4}$$

$$[\xi, E_\delta] = (\xi|\delta)E_\delta; \tag{B5}$$

$$[\xi, \zeta] = 0. \tag{B6}$$

La construcción que aquí se presenta difiere ligeramente de la presentada en [**2**], ya que la subálgebra N_0 no es igual a su centralizador, por lo que N no es un EALA. Ahora se demuestran algunas propiedades para $\epsilon(-,-)$ que resultarán útiles después.

Proposición 2.2. $\epsilon(-,-)$ *cumple las siguientes propiedades:*

(i) $\epsilon(\alpha,\beta) = \epsilon(\beta,\alpha)$ *para todo* $\alpha,\beta \in R^0$

(ii) $\epsilon(\gamma,\delta) = \epsilon(\delta,\gamma)$ *para todo* $\gamma,\delta \in R^1$ *tales que* $\gamma+\delta \in R^0$

(iii) $\epsilon(\gamma,\delta) = -\epsilon(\delta,\gamma)$ *para todo* $\gamma,\delta \in R^1$ *tales que* $\gamma+\delta \in R^1$

(iv) $\epsilon(\alpha,\gamma) = \epsilon(\gamma,\alpha)$ *para todo* $\alpha \in R^0$, $\gamma \in R^1$

Demostración. Si $\alpha, \beta \in R^0$ es claro que $\alpha + \beta \in R^0$, entonces $0 = B(\alpha+\beta, \alpha+\beta) = B(\alpha,\alpha) + B(\alpha,\beta) + B(\beta,\alpha) + B(\beta,\beta) = B(\alpha,\beta) + B(\beta,\alpha)$. Por lo tanto $B(\alpha,\beta) = -B(\beta,\alpha)$ y $\epsilon(\alpha,\beta) = \epsilon(\beta,\alpha)$.

En el caso en que $\gamma, \delta \in R^1$, primero se supone que $\gamma + \delta \in R^0$. Entonces, $0 = B(\gamma+\delta, \gamma+\delta) = B(\gamma,\gamma) + B(\gamma,\delta) + B(\delta,\gamma) + B(\delta,\delta) = 2 + B(\gamma,\delta) + B(\delta,\gamma)$. Así, $B(\gamma,\delta)$ y $B(\delta,\gamma)$ deben tener la misma paridad. Esto muestra que $\epsilon(\gamma,\delta) = \epsilon(\delta,\gamma)$.

Si $\gamma + \delta \in R^1$ se tiene que $1 = B(\gamma+\delta, \gamma+\delta) = B(\gamma,\gamma) + B(\gamma,\delta) + B(\delta,\gamma) + B(\delta,\delta) = 2 + B(\gamma,\delta) + B(\delta,\gamma)$. Por lo tanto $0 = 1 + B(\gamma,\delta) + B(\delta,\gamma)$, entonces $B(\gamma,\delta)$ y $B(\delta,\gamma)$ deben tener diferente paridad, por lo que $\epsilon(\gamma,\delta) = -\epsilon(\delta,\gamma)$.

Finalmente, si $\alpha \in R^0$ y $\gamma \in R^1$ se tiene que $\alpha+\gamma \in R^1$ y $1 = B(\alpha+\gamma, \alpha+\gamma) = B(\alpha,\alpha) + B(\alpha,\gamma) + B(\gamma,\alpha) + B(\gamma,\gamma)$. Por lo que $0 = B(\alpha,\gamma) + B(\gamma,\alpha)$ y entonces $\epsilon(\alpha,\gamma) = \epsilon(\gamma,\alpha)$. $\square$

Como corolario, se obtienen dos propiedades que serán de utilidad para definir una forma bilineal simétrica no degenerada e invariante en $\tilde{N}$.

Corolario 2.3. $\epsilon(-,-)$ *además cumple las siguientes propiedades:*

(i) $\epsilon(\alpha,\gamma) = -\epsilon(\gamma,\delta)$ *para todo* $\alpha \in R^0$, $\gamma, \delta \in R^1$ *tales que* $\alpha + \gamma + \delta = 0$,

(ii) $\epsilon(\gamma,\delta) = \epsilon(\delta,\varepsilon)$ *para todo* $\gamma, \delta, \varepsilon \in R^1$ *tales que* $\gamma + \delta + \varepsilon = 0$.

Demostración. Para $\alpha \in R^0$, $\gamma, \delta \in R^1$ con $\alpha + \gamma + \delta = 0$ se tiene que $\epsilon(\alpha,\gamma) = \epsilon(\gamma,\alpha) = \epsilon(\gamma, -(\gamma+\delta)) = \epsilon(\gamma,\gamma)\epsilon(\gamma,\delta) = -\epsilon(\gamma,\delta)$.

Para $\gamma, \delta, \varepsilon \in R^1$ con $\gamma+\delta+\varepsilon = 0$ se tiene que $\epsilon(\gamma,\delta) = -\epsilon(\delta,\gamma) = -\epsilon(\gamma, -(\gamma+\varepsilon)) = -\epsilon(\gamma,\gamma)\epsilon(\gamma,\varepsilon) = \epsilon(\gamma,\varepsilon)$. $\square$

Proposición 2.4. *Las reglas (B1) - (B6) definen una estructura de álgebra de Lie* $\mathbb{Z}^n$*-graduada en el espacio* $\tilde{N}$*. Además, la clase de isomorfismo de* $\tilde{N}$ *es independiente de la elección de* $B(-,-)$*.*

Demostración. Las reglas anteriores definen claramente una operación bilineal en $\tilde{N}$. El hecho de que $[x,x] = 0$ para todo $x \in \tilde{N}$ se sigue fácilmente de (B1), (B3), y (B6). La identidad de Jacobi se satisface para los elementos en $\tilde{N}/(\operatorname{rad} q)^*$ (ver [**2**] Proposition 2.2). Así, basta verificar la identidad de Jacobi para los elementos en $(\operatorname{rad} q)^*$.

Sean $x \in N_\alpha$, $y \in N_\beta$ y $\xi, \zeta \in (\operatorname{rad} q)^*$. Entonces

$$\begin{aligned}[[\xi,\zeta],x] + [[\zeta,x],\xi] + [[x,\xi],\zeta] &= (\zeta|\alpha)[\xi,x] - (\xi|\alpha)[\zeta,x] \\ &= (\zeta|\alpha)(\xi|\alpha)x - (\xi|\alpha)(\zeta|\alpha)x \\ &= 0,\end{aligned}$$

además, es claro de (B1) - (B6) que $[x,y] \in N_{\alpha+\beta}$, por lo que

$$\begin{aligned}[[\xi,x],y] + [[x,y],\xi] + [[y,\xi],x] &= (\xi|\alpha)[x,y] - (\xi|\alpha+\beta)[x,y] - (\xi|\beta)[y,x] \\ &= 0.\end{aligned}$$ □

En ([**2**] Proposition 2.2) se demuestra que N es independiente de la elección de $B(-,-)$, y dado que $(\operatorname{rad} q)^*$ no depende de $B(-,-)$, se tiene el resultado.

2.2. Las álgebras $\tilde{G}(q)$

A lo largo de esta sección q denota una forma unitaria $q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$, $q(x) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i<j} q_{ij} x_i x_j$. A cada forma unitaria q asociamos una matriz casi-Cartan C tal que $C_{ij} = q(c_i + c_j) - q(c_i) - q(c_j)$, donde $c_1, \ldots, c_n$ es la base canónica de $\mathbb{Z}^n$.

Sea L el álgebra de Lie libre con generadores e_i, e_{-i}, h_i $(1 \le i \le n)$. Sea $I(q)$ el ideal $\mathbb{Z}^n$-graduado con respecto a $e_i, e{-i}, h_i$ $(1 \le i \le n)$ generado por las siguientes relaciones de Serre generalizadas:

(R1) $[h_i, h_j] = 0$ para todo i, j.

(R2) $[h_i, e_{\varepsilon j}] = \varepsilon C_{ij} e_{\varepsilon j}$ para todo i, j y $\varepsilon = \pm 1$.

(R3) $[e_{\varepsilon i}, e_{-\varepsilon i}] = \varepsilon h_i$ para todo i, j y $\varepsilon = \pm 1$.

(R∞) $[e_{\varepsilon_1 i_1}, \ldots, e_{\varepsilon_t i_t}] = 0$ si $q(\sum_{j=1}^t \varepsilon_j c_{i_j}) > 1$ para $\varepsilon = \pm 1$.

Observación 2.5. *Las relaciones de Serre*

(R4) $(\operatorname{ad}\ e_{\varepsilon i})^{1+n}(e_{\delta j}) = 0$ *donde* $n = \max\{0, -\varepsilon\delta C_{ij}\}$, *para* $\varepsilon, \delta = \pm 1$ *y* $(1 \le i \le n)$,

son un caso particular de la relaciones (R∞).

Se define $G(q) := L/I(q)$. Ahora, es necesario extender $G(q)$ por el $\mathbb{C}$-dual del radical de la forma, $(\operatorname{rad} q)^*$, ya que en general $G(q)$ no tiene una descomposición en espacios raíz (ver [**2**] Proposition 5.1).

Sea $\rho : \mathbb{C}^n \to \operatorname{rad} q$ una proyección y sea $\tilde{G}^\rho(q) := G(q) \oplus (\operatorname{rad} q)^*$, como espacio vectorial. Para $\xi, \xi' \in (\operatorname{rad} q)^*$ y $x \in G(q)_\alpha$ se definen

$$[\xi, \xi'] = 0 \text{ y } [\xi, x] = -[x, \xi] = \xi\rho(\alpha)x.$$

Lema 2.6. *Utilizando la estructura de álgebra de Lie de $G(q)$, las reglas anteriores inducen una estructura de álgebra de Lie en $\tilde{G}^\rho(q)$.*

Demostración. Se verifica la identidad de Jacobi. Sean $\xi, \xi' \in (\operatorname{rad} q)^*$, $x \in G(q)_\alpha$ e $y \in G(q)_\beta$. Entonces,

$$\begin{aligned} [\xi, [\xi', x]] + [\xi', [x, \xi]] + [x, [\xi, \xi']] =& \xi'\rho(\alpha)[\xi, x] - \xi\rho(\alpha)[\xi', x] \\ =& \xi'\rho(\alpha)\xi\rho(\alpha)x - \xi\rho(\alpha)\xi'\rho(\alpha)x \\ =& 0, \end{aligned}$$

y como $[x, y] \in G(q)_{\alpha+\beta}$, se tiene que

$$\begin{aligned} [\xi, [x, y]] + [x, [y, \xi]] + [y, [\xi, x]] =& \xi'\rho(\alpha+\beta)[x, y] - \xi\rho(\beta)[x, y] + \xi\rho(\alpha)[y, x] \\ =& 0. \end{aligned}$$

□

Ahora, se define una forma bilineal que nos permite obtener una descomposición en espacios raíz para $\tilde{G}(q)$. Sea $H = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}h_i$. Para cualquier $h = \sum \lambda_i h_i$ se define $r(h) = \sum \lambda_i c_i \in \mathbb{C}^n$. Además, se define $\langle h, \alpha \rangle = r(h)^T C\alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}^n$. Por abuso de notación, se denota a la extensión natural de q a $\mathbb{C}^n$ por el mismo símbolo. Sean

$$\tilde{H} = H \oplus (\operatorname{rad} q)^*,$$

$deg(\xi) = 0 \in \mathbb{Z}^n$ para todo $\xi \in (\operatorname{rad} q)^*$ y se extiende la forma bilineal anterior a una forma bilineal $\langle \_, \_ \rangle : \tilde{H} \times H \to \mathbb{C}$ como $\langle \xi, \alpha \rangle = \xi\rho(\alpha)$ para $\xi \in (\operatorname{rad} q)^*$.

La demostración de la siguiente proposición se puede consultar en ([**2**] Proposition 5.3).

Proposición 2.7. *Sea q una forma unitaria. Entonces*

(i) *el álgebra $\tilde{G}^\rho(q)$ es, salvo isomorfismo de álgebras de Lie graduadas, independiente de la elección de la proyección $\rho : \mathbb{C}^n \to \operatorname{rad} q$, y se denotará por $\tilde{G}(q)$ de ahora en adelante.*

(ii) *$\tilde{G}(q)$ admite una descomposición en espacios raíz, esto es*

$$\tilde{G}(q)_\alpha = \{x \in \tilde{G} : [h, x] = \langle h, \alpha \rangle \text{ para todo } h \in \tilde{H}\}.$$

Teorema 2.8. *Sea $q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ una forma unitaria conexa, positiva definida. Sean $r = \text{corrango}(q)$ y Δ el tipo de Dynkin de q (ver Apéndice A).*

(a) *Si $r = 0$, es decir, si q es positiva definida, entonces las álgebras $G(q) = \tilde{G}(q)$ son exactamente las álgebras de Lie simples de dimensión finita que son simplemente enlazadas.*

(b) *Si $r = 1$, entonces las álgebras $\tilde{G}(q)$ son exactamente las álgebras de Kac-Moody afines simplemente lazadas.*

(c) *Sea $r = 2$, entonces se tiene lo siguiente:*

(i) *Si $\Delta = \mathbb{D}_n$ $(n \geqslant 4)$ o $\Delta = \mathbb{E}_n$ $(n = 6, 7, 8)$, entonces las álgebras $\tilde{G}(q)$ son exactamente las álgebras de Lie asociadas a un sistema de raíces elíptico simplemente lazado $\Gamma(R, G)$ con $\Delta(R) = \Delta$.*

(ii) *Si $\Delta = \mathbb{A}_n$ $(n \geqslant 2)$, entonces el álgebra de Lie asociado a un sistema de raíces elíptico simplemente lazado $\Gamma(R, G)$ con $\Delta(R) = \Delta$ es un cociente de $\tilde{G}(q)$*

Observación 2.9. *La demostración del teorema anterior se puede consultar en ([**2**] Section 6). Para información general acerca de sistemas de raíces simplemente enlazados, consúltese [**16**].*

Finalmente, se tiene una proposición que conecta ambas construcciones.

Proposición 2.10. *Existe un homomorfismo suprayectivo de álgebras de Lie graduadas $G(q) \to N$, y por lo tanto un morfismo suprayectivo de álgebras de Lie graduadas $\tilde{G}(q) \to \tilde{N}$.*

Demostración. En [**2**] se demuestra que

$$\begin{aligned} \varphi : G(q) &\to N \\ e_{\varepsilon i} &\mapsto \varepsilon E_{\varepsilon c_i} \\ h_i &\mapsto H_i. \end{aligned}$$

es un homomorfismo suprayectivo de álgebras de Lie. Es claro que este resultado se extiende directamente a $\tilde{N}$ y $\tilde{G}(q)$. Aquí sólo se prueba que φ es en efecto un homomorfismo de álgebras de Lie graduadas. Para ello se verifica que los elementos

$$E_{c_i}, -E_{-c_i}, H_i = [E_{c_i}, -E_{-c_i}] \in N \ (i \leq n)$$

satisfacen las relaciones (R1)-(R∞).

(R1) Ya que $c_1 - c_i = 0 \in R^0$, en vista de (B3) y (B1) se tiene que

$$H_i = [E_{c_i}, -E_{-c_i}] = -\epsilon(c_i, -c_i)\pi_0(c_i) = c_i,$$

por lo que se tiene

$$[H_i, H_j] = [c_i, c_j] = \epsilon(c_i, c_j)(c_i|c_j)\pi_0(0) = 0$$

para todo i, j.

(R2) Sea $\varepsilon = \pm 1$. Entonces, en vista de (B2),

$$[H_i, E_{\varepsilon j}] = [\pi_0(c_i), E_{\varepsilon c_j}] = \epsilon(0, \varepsilon c_j)(c_i|\varepsilon c_j)E_{\varepsilon c_j} = \varepsilon C_{ij} E_{\varepsilon c_j}$$

para todo i, j y $\varepsilon = \pm 1$.

(R3) En vista de (B3) se tiene que

$$[E_{\varepsilon c_i}, E_{-\varepsilon c_i}] = \epsilon(\varepsilon c_i, \varepsilon c_j)\pi_0(\varepsilon c_i) = \varepsilon H_i$$

para todo i, j y $\varepsilon = \pm 1$.

(R∞) Si se tiene que $q(\sum_{j=i}^{t} \varepsilon)_j c_{i_j}) > 1$ es inmediato de (B3) que

$$[E_{\varepsilon_1 c_{i_1}}, \ldots, E_{\varepsilon_t c_{i_t}}] = 0. \qquad \square$$

De esta forma se tiene que el álgebra $\tilde{N}$ es un cociente de $\tilde{G}(q)$.

Capítulo 3

Conexión con las EALAs

Se analiza brevemente la conexión entre los EALAs, la construcción de Borcherds y las álgebras $G(q)$. Se prueba un teorema que conecta la construcción de Borcherds con los EALAs en ciertos casos. Posteriormente, en la sección 3.2, se demuestra que siempre es posible obtener un EALA como un cociente de un álgebra $\tilde{G}(q)$. Finalmente, se discute la relevancia de estos resultados y se comenta acerca de la importancia de conseguir ejemplos de EALAs utilizando métodos similares a los empleados en las construcciones presentadas en este trabajo.

3.1. Álgebras de Borcherds que son un EALA

Una vez que se ha establecido que $\tilde{N}$ es un álgebra de Lie, se demuestra un teorema que da una condición necesaria y suficiente para que esta sea un álgebra de Lie de tipo afín extendido.

Definición 3.1. *Al álgebra de Lie $\tilde{N}$ se le asocia una forma bilineal*

$$(-,-) : \tilde{N} \times \tilde{N} \to \mathbb{C}$$

definida por las siguientes reglas:

$$\begin{aligned}(\pi_\alpha(f), \pi_{-\alpha}(g)) &= (f|g)\\ (\pi_0(f), \xi) = (\xi, \pi_0(f)) &= (\xi|f)\\ (E_\gamma, -E_{-\gamma}) &= 1\end{aligned}$$

y cero en los demás casos. Es claro que estas reglas en efecto definen una forma bilineal, ya que $(-|-)$ lo es.

Teorema 3.2. *Sea q una forma unitaria conexa no negativa. Entonces el triple $(\tilde{N}, (-,-), \tilde{N}_0)$ asociado a q es un EALA si y sólo si* $\operatorname{corrango} q = 0, 1$.

Demostración. Se supone primero que corrango $q = 0, 1$. Verificamos que $(\tilde{N}, (-,-), \tilde{N}_0)$ satisface los axiomas (EA1) - (EA5).

(EA1) Se verifica que la forma bilineal $(-,-)$ es no degenerada. Distinguimos casos:

(i) Sean $\alpha \in R^0 \setminus \{0\}$ y $f \in \mathbb{C}^n$. Si $(\pi_\alpha(f), \pi_{-\alpha}(g)) = (f|g) = 0$ para todo $g \in \mathbb{C}^n$ entonces $f \in \operatorname{rad} q$, si corrango $q = 0$ entonces $f = 0$ y $\pi_\alpha(f) = 0$; si corrango $q = 1$ entonces $f = k\alpha$ para algún $k \in \mathbb{C}$ y $\pi_\alpha(f) = 0$. Esto muestra que $(-,-)$ es no degenerada en este caso.

(ii) Sea $f \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Entonces existe $\xi \in (\operatorname{rad} q)^*$ tal que $(\pi_0(f), \xi) = (\xi|f) = \xi(\rho(f)) \neq 0$.

(iii) Sea $\xi \in (\operatorname{rad} q)^* \setminus \{0\}$. Entonces existe $\alpha \in \operatorname{rad} q$ tal que $(\xi, \pi_0(\alpha)) = (\xi|\alpha) = \xi(\alpha) \neq 0$.

(iv) Sea $\gamma \in R^1$. Entonces $(E_\gamma, -E_{-\gamma}) = 1 \neq 0$.

Esto muestra que $(-,-)$ es no degenerada. Ahora se verifica que además es invariante. Para ello, recordamos que $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ siempre que $\alpha + \beta \neq 0$. Se observa también que $[x_\alpha, x_\beta] \in N_{\alpha+\beta}$ si $\alpha + \beta \neq 0$ y $[x_\alpha, x_\beta] \in \tilde{N}_0$ si $\alpha + \beta = 0$. Basta entonces analizar los siguiente casos, ya que en los demás la forma bilineal se anula. Se verifica que la forma es invariante.

(i) Sean $\alpha, \beta, \gamma \in R^0$ tales que $\alpha + \beta + \gamma = 0$ y $f, g, h \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$\begin{aligned}([\pi_\alpha(f), \pi_\beta(g)], \pi_\gamma(h)) &= (\epsilon(\alpha,\beta)(f|g)\pi_{\alpha+\beta}(\alpha), \pi_\gamma(h)) \\ &= \epsilon(\alpha,\beta)(f|g)(\alpha|h) = 0\end{aligned}$$

ya que $(\alpha|h) = 0$.

$$\begin{aligned}(\pi_\alpha(f), [\pi_\beta(g), \pi_\gamma(h)]) &= (\pi_\alpha(f), \epsilon(\beta,\gamma)(g|h)\pi_{\beta+\gamma}(\beta)) \\ &= \epsilon(\beta,\gamma)(g|h)(f|\beta) = 0\end{aligned}$$

ya que $(f|\beta) = 0$.

(ii) Sea $\alpha \in R^0$, $f, g \in \mathbb{C}^n$, y $\xi \in (\operatorname{rad} q)^*$ entonces

$$([\pi_\alpha(f), \pi_{-\alpha}(g)], \xi) = ((f|g)\pi_0(\alpha), \xi) = (f|g)(\xi|\alpha)$$

$$(\pi_\alpha(f), [\pi_{-\alpha}(g), \xi]) = (\pi_\alpha(f), (\xi|\alpha)\pi_{-\alpha}(g)) = (\xi|\alpha)(f|g)$$

(iii) Sean $\xi, \zeta \in (\operatorname{rad} q)^*$, entonces

$$([\pi_0(f), \xi], \zeta) = (0, \zeta) = 0$$

$$(\pi_0(f), [\xi, \zeta]) = (\pi_0(f), 0) = 0$$

(iv) Sean $\alpha \in R^0$, $\gamma, \delta \in R^1$ tales que $\alpha + \gamma + \delta = 0$ y $f \in \mathbb{C}^n$, entonces $\gamma + \delta \in R^0$ y se tiene que

$$([\pi_\alpha(f), E_\gamma], E_\delta) = (\epsilon(\alpha, \gamma)(f|\gamma)E_{\alpha+\gamma}, E_\delta) = -\epsilon(\alpha, \gamma)(f|\gamma)$$

$$(\pi_\alpha(f), [E_\gamma, E_\delta]) = (\pi_\alpha(f), \epsilon(\gamma, \delta)\pi_{\gamma+\delta}(\gamma)) = \epsilon(\gamma, \delta)(f|\gamma)$$

Utilizando (ii) de la Proposición 2.2 se tiene que $-\epsilon(\alpha, \gamma) = -\epsilon(\gamma + \delta, \gamma) = -\epsilon(\gamma, \gamma)\epsilon(\delta, \gamma) = \epsilon(\gamma, \delta)$, por lo que se da la igualdad.

(v) Sean $\gamma, \delta, \varepsilon \in R^1$ tales que $\gamma + \delta + \varepsilon = 0$, entonces $\gamma + \delta, \delta + \varepsilon \in R^1$ y se tiene que

$$([E_\gamma, E_\delta], E_\varepsilon) = (\epsilon(\gamma, \delta)E_{\gamma+\delta}, E_\varepsilon) = -\epsilon(\gamma, \delta)$$

$$(E_\gamma, [E_\delta, E_\varepsilon]) = (E_\gamma, \epsilon(\delta, \varepsilon)E_{\delta+\varepsilon}) = -\epsilon(\delta, \varepsilon)$$

Utilizando (iii) de la Proposición 2.2 se tiene que $\epsilon(\gamma, \delta) = \epsilon(\delta + \varepsilon, \delta) = \epsilon(\delta, \delta)\epsilon(\varepsilon, \delta) = \epsilon(\delta, \varepsilon)$, y se tiene la igualdad.

(vi) Sean $\gamma \in R^1$ y $\xi \in (\operatorname{rad} q)^*$, entonces

$$([E_\gamma, E_{-\gamma}], \xi) = (-\pi_0(\gamma), \xi) = -(\xi|\gamma)$$

$$(E_\gamma, [E_{-\gamma}, \xi]) = (E_\gamma, (\xi|\gamma)E_{-\gamma}) = -(\xi|\gamma)$$

Esto muestra que la forma es invariante. Así, $(-, -)$ tiene las propiedades requeridas.

(EA2) Sea $\tilde{H} = N_0$. $\tilde{H}$ es claramente una subálgebra abeliana de $\tilde{N}$ de dimensión finita. Sea $x \in N_\alpha$ tal que $[h, x] = 0$ para todo $h \in \tilde{H}$. Entonces $[\xi, x] = (\xi|\alpha)x = 0$ para todo $\xi \in (\operatorname{rad} q)^*$, por lo tanto $\alpha = 0$. Esto muestra que H es igual a su centralizador. Es claro a partir de (B1), (B2), (B4), y (B5) que $\operatorname{ad}_{\tilde{N}} h$ es diagonalizable para todo $h \in \tilde{H}$.

(EA3) Para verificar (EA3), se observa que $R = R^1 \cup R^0$, por lo que en este caso $R^\times = R^1$. Sean $\gamma \in R^1$ y $\alpha \in R$. Si $\alpha \in R^0$ se tiene que $q(2\gamma + \alpha) = q(2\gamma) = 4q(\gamma) = 4$, por lo que $2\gamma + \alpha \notin R$. Esto muestra que $(\operatorname{ad}_{\tilde{N}} E_\gamma)^2 x = 0$ para todo $x \in N_\alpha$. Si $\alpha \in R^1$ se distinguen dos casos:

(i) Si $\gamma+\alpha\in R^0$ entonces $q(3\gamma+\alpha)=q(2\gamma)=4q(\gamma)=4$, por lo que $3\gamma+\alpha\notin R$. En este caso $(\mathrm{ad}_{\tilde{N}}\, E_\gamma)^3x=0$ para todo $x\in N_\alpha$.

(ii) Si $\gamma+\alpha\in R^1$ entonces $1=q(\gamma+\alpha)=B(\gamma+\alpha,\gamma+\alpha)=B(\gamma,\gamma)+B(\gamma,\alpha)+B(\alpha,\gamma)+B(\alpha,\alpha)=2+B(\gamma,\alpha)+B(\alpha,\gamma)$ por lo que $B(\gamma,\alpha)+B(\alpha,\gamma)=-1$ $q(2\gamma+\alpha)=B(2\gamma+\alpha,2\gamma+\alpha)=B(2\gamma,2\gamma)+B(2\gamma,\alpha)+B(\alpha,2\gamma)+B(\alpha,\alpha)=5+B(2\gamma,\alpha)+B(\alpha,2\gamma)=5+2(B(\gamma,\alpha)+B(\alpha,\gamma))=3$. Entonces $2\gamma+\alpha\notin R$, lo que muestra que en este caso $(\mathrm{ad}_{\tilde{N}}\, E_\gamma)^2x=0$ para todo $x\in N_\alpha$.

Esto muestra que $\mathrm{ad}_{\tilde{N}}\, E_\gamma$ es localmente nilpotente en $\tilde{N}$.

(EA4) $\tilde{N}$ cumple trivialmente (EA4) ya que $R\subset\mathbb{Z}^n$ y $\mathbb{Z}^n$ es un subconjunto discreto de $\mathbb{C}^n$ por lo que R es también un subconjunto discreto de $\mathbb{C}^n$.

(EA5) En vista de la Proposición A.5, R^1 no se puede descomponer como unión ajena de conjuntos ortogonales no vacíos. Sea $\alpha\in R^0$, entonces $\alpha+c_i\in R^1$ y $c_i\in R^1$. Esto muestra que las raíces isotrópicas no están aisladas. Por lo tanto R es irreducible.

Se supone ahora que $(\tilde{N},(-,-)',N_0)$ es un EALA para alguna forma bilineal $(-,-)'$. En vista de la Proposición 1.24, se tiene que

$$[\pi_\alpha(f),\pi_{-\alpha}(g)]=(\pi_\alpha(f),\pi_-\alpha(g))'t'_\alpha,\ \text{para todo }\alpha\in R^0,\ \ f,g\in\mathbb{C}^n.$$

Se recuerda que en vista de (B1)

$$[\pi_\alpha(f),\pi_{-\alpha}(g)]=\epsilon(\alpha,-\alpha)(f|g)\pi_0(\alpha)\ \text{para todo }\alpha\in R^0,\ \ f,g\in\mathbb{C}^n.$$

Utilizando que $\epsilon(\alpha,-\alpha)=1$ para todo $\alpha\in R^0$, se tiene que $(\pi_\alpha(f),\pi_\alpha(g))'=\lambda(f|g)$ para algún $\lambda\in\mathbb{C}$ y $t'_\alpha=\mu\pi_0(\alpha)=\mu\alpha$ para algún $\mu\in\mathbb{C}$.

Si corrango$(q)\geqslant 2$, sean $\alpha,\beta\in R^0$ linealmente independientes. Entonces $\pi_\alpha(\beta)\neq 0$, pero $(\pi_\alpha(\beta),\pi_{-\alpha}(f))'=\lambda(\alpha|f)=0$ para todo $f\in\mathbb{C}^n$ (ver Observación 2.1). Esto implica que $(-,-)'$ es degenerada, contradiciendo el axioma (EA1). Por lo tanto se debe tener corrango$(q)=0,1$. $\square$

3.2. EALAs y las álgebras $\tilde{G}(q)$

Se describe la relación entre las álgebras $\tilde{G}(q)$ y las álgebras de Lie de tipo afín extendido. Se demuestra que siempre es posible obtener un EALA como cociente de un álgebra $\tilde{G}(q)$.

Sea $q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ una forma unitaria conexa positiva semidefinida. Utilizando la forma bilineal de la Definición 3.1 se puede definir una forma bilineal en $\tilde{G}(q)$ con la siguiente convención:

$$(x, y) := (x + I_0, y + I_0) \text{ para todo } x, y \in \tilde{G}(q), \tag{1}$$

donde I_0 es un ideal de $\tilde{G}(q)$ tal que $\tilde{N} \simeq \tilde{G}(q)/I_0$ y la forma bilineal de la derecha denota la forma bilineal de la Definición 3.1. Es claro que esta forma bilineal es simétrica e invariante, ya que la forma bilineal de la derecha lo es (ver demostración del Teorema 3.2).

Observación 3.3. *La forma bilineal (1) es degenerada siempre que $I_0 \neq 0$, ya que*

$$(x, -) = 0 \textit{ para todo } x \in I_0.$$

Además, se tiene que $I_0 \cap \tilde{H} = 0$.

La siguiente proposición muestra que, salvo en $(\operatorname{rad} q)^* \times (\operatorname{rad} q)^*$, la forma bilineal (1) es la única forma bilineal simétrica e invariante en $\tilde{G}(q)$ hasta un múltiplo escalar.

Proposición 3.4. *Sea $(-,-) : \tilde{G}(q) \times \tilde{G}(q) \to \mathbb{C}$ una forma bilineal simétrica, invariante y no degenerada en $\tilde{H}$. Entonces $(-,-)|_{\tilde{H}\times H} : \tilde{H} \times H \to \mathbb{C}$ debe ser un múltiplo de la forma bilineal dada por las siguientes reglas (ver Definición 3.1):*

$$\begin{aligned}(h_i|h_j) =& c_i^T C c_j \textit{ para todo } h \in H,\\ (\xi|h_i) =& \xi\rho(c_i) \textit{ para todo } h \in H, \quad \xi \in (\operatorname{rad} q)^*,\end{aligned}$$

donde $\{c_i\}$ es la base canónica de $\mathbb{Z}^n$ y $C \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ es la matriz casi-Cartan de q. Mas aún, $(-,-)|_{\tilde{G}(q)\times G(q)} : \tilde{G}(q) \times G(q) \to \mathbb{C}$ está completamente determinada por su restricción a $\tilde{H} \times H$.

Demostración. Se demuestra primero que $(-,-)|_{\tilde{H}\times H}$ es un múltiplo de la forma bilineal $(-|-)$. De la Proposición 1.24 y (R3) se sigue que

$$(e_i, e_{-i}) = \lambda_i$$

para algún $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por otro lado, de la Proposición 1.24 y (R2) se tiene que

$$\begin{aligned}(h_i, h_j)|_{\tilde{H}\times H} =&(h_i, [e_j, e_{-j}])_{\tilde{H}\times H}\\ =&([h_i, e_j], e_{-j})\\ =&C_{ij}(e_j, e_{-j})\\ =&\lambda_i(h_i|h_j).\end{aligned}$$

Cambiando los papeles de h_i, h_j se tiene también que $\lambda_i = \lambda_j = \lambda \in \mathbb{C}$. Finalmente, dado $\xi \in (\operatorname{rad} q)^*$ se tiene que

$$\begin{aligned}(\xi, h_i)|_{\tilde{H}\times H} =&(\xi, [e_i, e_{-i}])|_{\tilde{H}\times H}\\ =&([\xi, e_i], e_{-i})\\ =&\xi\rho(c_i)(e_i, e_{-i})\\ =&\lambda(\xi|h_i).\end{aligned}$$

Esto muestra que $(-,-)|_{\tilde{H}\times H} = \lambda(-|-)$.

Se demuestra ahora que $(-,-)|_{\tilde{G}(q)\times G(q)}$ está completamente determinada por su restricción a $\tilde{H}\times H$. Sean $\alpha \in R^1$ y $x_{\varepsilon\alpha} \in \tilde{G}(q)_{\varepsilon\alpha}$. Entonces, dado que $(-,-)$ es invariante y $(t_\alpha, t_\alpha) = 1$ se tiene que

$$(x_\alpha, x_{-\alpha}) = (t_\alpha, [x_\alpha, x_{-\alpha}])|_{\tilde{H}\times H}$$

donde $t_\alpha \in H$ es el único elemento tal que $(t_\alpha, h) = \alpha(h)$ para todo $h \in \tilde{H}$. Mientras que para $\alpha \in R^0$ y $x_{\varepsilon\alpha} \in \tilde{G}(q)_{\varepsilon\alpha}$ se tiene que

$$(x_\alpha, x_{-\alpha}) = (\xi_\alpha, [x_\alpha, x_{-\alpha}])|_{\tilde{H}\times H}$$

donde $\xi_\alpha \in (\operatorname{rad} q)^*$ es tal que $\xi_\alpha(\alpha) = 1$. Esto muestra que la forma bilineal $(-,-)|_{\tilde{G}(q)\times G(q)}$ está completamente determinada por su restricción a $\tilde{H}\times H$ (ver Lema 1.22). $\square$

Proposición 3.5. *Sea $B(-,-) : \tilde{G}(q)\times\tilde{G}(q) \to \mathbb{C}$ una forma bilineal simétrica, invariante y no degenerada en $\tilde{H}$. Además, sean $\pi : \tilde{G}(q) \to (\operatorname{rad} q)^*$ la proyección sobre $(\operatorname{rad} q)^*$ como sumando directo de $\tilde{G}(q)$ y $T : (\operatorname{rad} q)^*\times(\operatorname{rad} q)^* \to \mathbb{C}$ cualquier forma bilineal simétrica. Entonces $B' := B + T\circ(\pi\times\pi)$ es una forma bilineal simétrica, invariante y no degenerada en $\tilde{H}$.*

Demostración. Es claro que la forma T es bilineal y simétrica. Se verifica que es invariante. Sean $\xi, \zeta, \eta \in (\operatorname{rad} q)^*$, $x, y, z \in G(q)$. Entonces

$$\begin{aligned} B'(x+\xi, [y+\zeta, z+\eta]) =& B'(x+\xi, [y,z] + [y,\eta] + [\zeta, z] + [\zeta,\eta]) \\ =& B'(x+\xi, [y,z] + [y,\eta] + [\zeta, z]) \\ =& B(x+\xi, [y+\zeta, z+\eta]) \\ =& B([x+\xi, y+\zeta], z+\eta) \\ =& B'([x+\xi, y+\zeta], z+\eta). \end{aligned}$$

Se observa que $\pi(x) = 0$ para todo $x \in G(q)$, por lo que $T(\pi \times \pi)(x, -) = 0$ para todo $x \in G(q)$. Finalmente, se verifica ahora que $B'(-,-)$ es no degenerada en $\tilde{H}$. Sean $h \in H$ y $\xi \in (\operatorname{rad} q)^*$. Dado que $B(x+\xi, -)|_H : H \to \mathbb{C}$ es no degenerada, y que $B(x+\xi, -)|_H = B'(x+\xi, -)|_H$ se tiene que $B'(-,-)$ es no degenerada en todo $\tilde{H}$. Esto concluye la prueba. $\square$

Observación 3.6. *Las Proposiciones 3.4 y 3.5 muestran que la forma bilineal esta determinada por su restricción a $\tilde{H} \times H$ salvo en $(\operatorname{rad} q)^* \times (\operatorname{rad} q)^*$, donde no se tiene control sobre la forma. Por simplicidad, se supondrá que*

$$(\xi, \zeta) = 0 \textit{ para todo } \xi, \zeta \in (\operatorname{rad} q)^*.$$

Observamos que la forma bilineal $(-|-)$ de la Observación 3.4 coincide en $\tilde{H}$ con la forma bilineal de $\tilde{N}_0$ de la Definición 3.1. A continuación se demuestra que el álgebra $\tilde{G}(q)$ verifica casi todos los axiomas de álgebra de Lie de tipo afín extendido:

Proposición 3.7. *Sea q una forma unitaria conexa positiva semi-definida. Entonces el triple $(\tilde{G}(q), \tilde{H}, (-,-))$ verifica los axiomas (EA2)-(EA5), donde $(-,-)$ es la forma bilineal (1).*

Demostración.

(EA2) La subálgebra $\tilde{H}$ es una subálgebra abeliana de dimensión finita de $\tilde{G}(q)$ (ver [**2**] Corollary 2.3) y se verifica que $\tilde{H}$ es igual a su centralizador de manera similar que para $\tilde{N}$. Dada la descomposición en espacios de raíces de $\tilde{G}(q)$ con respecto a $\tilde{H}$ se tiene que $\operatorname{ad}_{\tilde{G}(q)} h$ es diagonalizable para todo $h \in \tilde{H}$.

(EA3) Se sigue del Lema 1.21 que $(\operatorname{ad}_{\tilde{G}(q)} x_\gamma)^n y_\alpha \in \tilde{G}(q)_{n\gamma+\alpha}$. Dado que $f(n) = q(n\gamma + \alpha)$ es un polinomio que sólo toma valores no negativos, para n suficientemente grande se tiene que $q(n\gamma + \alpha) > 1$, por lo que $\tilde{G}(q)_{n\gamma+\alpha} = 0$.

(EA4) $R \subset \mathbb{Z}^n$ es ciertamente un subconjunto discreto en $\mathbb{C}^n$.

(EA5) Se sigue de la Proposición A.5 que R^1 no se puede descomponer como unión ajena de conjuntos ortogonales no vacíos. Dado $\alpha \in R^0$ se tiene que $q(\alpha + c_i) = q(c_i) = 1$ por lo que $\alpha + c_i \in R^1$. Esto muestra que $\tilde{G}(q)$ es irreducible respecto a $\tilde{H}$. □

Observación 3.8. *$\tilde{G}(q)$ es un EALA si y sólo si $\tilde{G}(q) \simeq \tilde{N}$ y* corrango $q = 0, 1$. *En general, para obtener un EALA como cociente de un álgebra $\tilde{G}(q)$ es necesario factorizar un ideal que contenga a I (ver Observación 3.3). Es decir, para obtener un EALA como un cociente de un álgebra $\tilde{G}(q)$ es necesario obtener un EALA como un cociente de $\tilde{N}$.*

Los siguientes resultados proporcionan una manera estándar de construir un cociente adecuado. Se hace un cociente de $\tilde{G}(q)$ por un ideal natural I (ver Proposición 3.12), y se demuestra que este cociente resulta ser un EALA. Posteriormente, utilizando la relación entre las álgebras $\tilde{G}(q)$ y $\tilde{N}$, se demuestra que el ideal I es de hecho el único ideal maximal de $\tilde{G}(q)$ respecto a $I \cap \tilde{H} = 0$.

Lema 3.9. *Sea J un ideal de $\tilde{G}(q)$. Entonces*

$$J = \bigoplus_{\alpha \in R} (J \cap \tilde{G}(q)_\alpha).$$

Observación 3.10. *El lema anterior es válido en general para módulos sobre un álgebra de Lie H abeliana de dimensión finita con una descomposición en espacios de raíces con respecto a H cambiando* ideal *por* submódulo*. La demostración se puede consultar en ([**5**] Lemma 14.12).*

Corolario 3.11. *Sea q una forma unitaria conexa positiva semi-definida. Entonces el triple $(\tilde{G}(q)/J, \tilde{H}, (-,-))$ verifica los axiomas (EA2)-(EA5), donde*

$$I = \{x \in \tilde{G}(q) : (x, -) = 0\}$$

y $J \subset I$ es un ideal de $\tilde{G}(q)$.

Demostración. Es claro que $\tilde{G}(q)/J$ verifica los axiomas (EA3)-(EA5). De la descomposición en espacios de raíces de $\tilde{G}(q)$, del Lema 3.9, y de que

$J \cap \tilde{H} = 0$ se tiene que $\tilde{G}(q)/J$ se descompone también en espacios raíces, por lo que $\mathrm{ad}_{\tilde{G}(q)/J}(h)$ es diagonalizable para todo $h \in \tilde{H}$. Falta demostrar que $\tilde{H}$ es igual a su centralizador. Sea $x + J \in C_{\tilde{G}(q)/J}(\tilde{H} + J)$ entonces

$$[x + J, h + J] = [x, h] + J = J \text{ para todo } h \in \tilde{H}.$$

Entonces se tiene que $[x, h] \in J$ para todo $h \in \tilde{H}$. Sea $x = \sum x_\alpha$ con $x_\alpha \in \tilde{G}(q)_\alpha$. Entonces, en vista de que para todo $\alpha \neq 0$ existe $h_\alpha \in \tilde{H}$ tal que $\alpha(h_\alpha) \neq 0$ y de que $[x_\alpha, h_\alpha] = -\alpha(h_\alpha)x_\alpha \in J$ (ver Lema 3.9), se tiene que $x_\alpha \in J$ para todo $\alpha \neq 0$. Por lo tanto $x + J \in \tilde{H} + J$. Esto muestra que $\tilde{G}(q)/J$ verifica el axioma (EA2). □

Proposición 3.12. *Sean L un $\mathbb{C}$-álgebra de Lie y $(-,-)$ una forma bilineal simétrica e invariante. Entonces*

$$I = \{x \in L : (x, -) = 0\}$$

es un ideal de L.

Demostración. Sean $x \in I$, $\quad y, z \in L$. Entonces

$$([xy], z) = (x, [yz]) = 0$$

ya que $x \in I$. □

El siguiente teorema muestra la conexión entre las álgebras $\tilde{G}(q)$ y los EALAs, a saber, que siempre es posible pasar de $\tilde{G}(q)$ a un EALA haciendo un cociente de $\tilde{G}(q)$ por un ideal adecuado.

Teorema 3.13. *Sea q una forma unitaria conexa positiva semi-definida. Entonces el triple $(\tilde{G}(q)/I, \tilde{H}, (-,-))$, donde*

$$I = \{x \in L : (x, -) = 0\}$$

es un EALA.

Demostración. En vista de la proposición 3.12, $\tilde{G}(q)/I$ es un álgebra de Lie. Sigue de la Proposición 3.7 que $\tilde{G}(q)/I$ verifica los axiomas (EA2)-(EA5). Se afirma que la forma bilineal simétrica e invariante de $\tilde{G}(q)$ desciende a una forma bilineal con las mismas propiedades. En efecto, se define

$$(x + I, y + I) = (x, y) \text{ para todo } x, y \in \tilde{G}(q). \tag{2}$$

La forma bilineal (2) está bien definida ya que

$$(x + x', y + y') = (x, y) + (x, y') + (x', y) + (x', y') = 0$$

para todo $x, y \in \tilde{G}(q)$ y para todo $x', y' \in I$. Es claro que la forma (2) es simétrica e invariante. Es también claro de la definición que la forma (2) es no degenerada en $\tilde{G}(q)$. Esto muestra que $\tilde{G}(q)$ verifica el axioma (EA1) y es por tanto un EALA. □

Proposición 3.14. *El álgebra de Lie $\tilde{G}(q)$ contiene un único ideal J maximal con respecto a $J \cap \tilde{H} = 0$.*

Demostración. Sea I un ideal de $\tilde{G}(q)$ tal que $I \cap \tilde{H} = 0$. Se sigue de la Proposición 1.20 y la Proposición 3.9 que

$$I = \bigoplus_{\alpha \in R \setminus \{0\}} (I \cap \tilde{G}(q)_\alpha).$$

Sea J el ideal generado por todos los ideales I con $I \cap \tilde{H} = 0$. Es claro que $J \subset \bigoplus_{\alpha \in R \setminus \{0\}} \tilde{G}(q)_\alpha$ y que es el único ideal de $\tilde{G}(q)$ maximal con respecto a $J \cap \tilde{H}$. □

Observación 3.15. *Un resultado análogo es cierto para el álgebra $\tilde{N}$.*

Proposición 3.16. *Sea J el único ideal de $\tilde{N}$ respecto a $J \cap \tilde{N}_0 = 0$. Si* corrango $q > 0$*, se elige B una base de* $\operatorname{rad} q$*. Entonces J coincide con el ideal K de $\tilde{N}$ generado por el siguiente conjunto:*

$$X = \{\pi_\alpha(\beta) \in \tilde{N} : \alpha, \beta \in B, \alpha \neq \beta\}$$

Mas aún, X es una base como $\mathbb{C}$-espacio vectorial de J.

Demostración. Supóngase que K no es maximal respecto a $K \cap \tilde{N}_0 = 0$. Entonces existe I un ideal de $\tilde{N}$ tal que $I \cap \tilde{N}_0 = 0$ y con $K \subsetneq I$. Entonces se tiene que

$$I = \bigoplus_{\alpha \in R} (I \cap \tilde{N}_\alpha).$$

(ver Proposición 3.9). Sean $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, y $x \in I \cap \tilde{N}_\alpha$, $x \neq 0$, tales que $x \notin K$. Se distinguen dos casos:

(i) Si $\alpha \in R^1$ entonces $x = \lambda E_\alpha$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\lambda = 1$. Entonces, en vista de (B3) se tiene que

$$[E_{-\alpha}, E_\alpha] = -\lambda \pi_0(\alpha) \in \tilde{N}_0 \setminus \{0\}.$$

Dado que I es un ideal se tiene que $I \cap \tilde{N}_0 \neq 0$, una contradicción.

(ii) Si $\alpha \in R^0$ entonces $x = \pi_\alpha(f)$ para algún $f \in \mathbb{C}^n$ con α, f linealmente independientes. Entonces, en vista de (B1) se tiene que

$$[\pi_{-\alpha}(g), \pi_\alpha(f)] = (g|f)\pi_0(\alpha) \in \tilde{N}_0.$$

Dado que $x \notin K$ (en particular $f \notin \operatorname{rad} q$), existe $g \in \mathbb{C}^n$ tal que $(g|f) \neq 0$; para tal g se tiene que $[\pi_{-\alpha}(g), \pi_\alpha(f)] \in \tilde{N}_0 \setminus \{0\}$. Por lo que $I \cap \tilde{N}_0 \neq 0$ en este caso también se tiene que $I \cap \tilde{N}_0 \neq 0$, de nuevo una contradicción.

Esto muestra que J coincide con K el ideal generado por el conjunto X. Es claro que X es una base de J. $\square$

Observación 3.17. *En los casos en que* corrango $q = 0, 1$ *se tiene que* $X = \emptyset$*, por lo que* $J = 0$*. Esto se debe a que en esos casos* $\tilde{N}$ *es ya un álgebra de Lie de tipo afín extendido.*

Con el siguiente resultado se obtiene una descripción completa del ideal I del Teorema 3.13.

Corolario 3.18. *El ideal I de $\tilde{G}(q)$ del Teorema 3.13 es maximal respecto a $I \cap \tilde{H} = 0$.*

Demostración. Supongamos que el ideal I no es maximal respecto a $I \cap \tilde{H} = 0$. Entonces existe I' un ideal de $\tilde{G}(q)$ tal que $I \subsetneq I'$ y $I' \cap \tilde{H} = 0$. Entonces $I + I_0 \subsetneq I' + I_0$ son ideales de $\tilde{N} \simeq \tilde{G}(q)/I_0$ con $(I + I_0) \cap \tilde{N}_0 = 0, (I' + I_0) \cap \tilde{N}_0 = 0$. Basta demostrar que $I + I_0 = J$ (ver Proposición 3.16) para obtener una contradicción, ya que J es maximal respecto a $J \cap \tilde{H} = 0$. Por la maximalidad de J basta ver que $J \subset I + I_0$. Sea $\pi_\alpha(\beta) \in J$ entonces existe $x \in \tilde{G}(q)$ tal que $\pi_\alpha(\beta) = x + I_0$. De lo anterior se sigue que

$$(x, -) = (x + I_0, -) = (\pi_\alpha(\beta), -) = 0,$$

por lo que $x \in I$. Esto concluye la prueba $\square$

Observación 3.19. *Las Proposiciones 3.16 y 3.14 muestran que la construcción presentada en el Teorema 3.13 es similar a la construcción de las álgebras de Kac-Moody (ver* [**5**]*).*

3.3. Comentario final

Como se menciona en la Introducción, el objetivo del presente trabajo es mostrar la conexión que existe entre las formas cuadráticas y la teoría de las álgebras de Lie. En particular, se busca encontrar una descripción de alguna clase amplia de álgebras de Lie, en este caso los EALAs, a través de formas cuadráticas. Se pueden encontrar varios ejemplos de EALAs que no son álgebras de Lie de tipo finito o álgebras de Kac-Moody afines (ver, [**1**] Chapter III). El lector podrá constatar que estos ejemplos no son de ninguna manera elementales.

Si bien una de las ventajas del tratamiento axiomático de los EALAs es que el estudio teórico de ellos se facilita, una gran desventaja es el nivel de abstracción y de conocimientos necesarios que se requieren para acceder a construcciones y ejemplos no elementales. Una ventaja de poder caracterizar a los EALAs (o a una buena parte de ellos) por medio de formas cuadráticas es que el carácter combinatorio de éstas facilita la creación de ejemplos y la comprensión de la estructura de los EALAs mismos.

Previo al inicio de este trabajo, se sabía ya que los tipos de álgebras de Lie que aparecen en el Teorema 2.8, cuando corrango $q = 0, 1$, son además ejemplos de álgebras de Lie de tipo afín extendido (ver [**1**] Remark 1.34). Este teorema muestra la fuerte conexión que existe entre las álgebras $\tilde{G}(q)$ y las EALAs, además de mostrar que esta construcción brinda un nuevo punto de vista de los tipos de álgebras de Lie más conocidos.

La conjetura inicial fue que las álgebras $\tilde{G}(q)$ eran siempre EALAs, sin embargo la dificultad para construir una forma bilineal simétrica, invariante y no degenerada en $\tilde{G}(q)$ sugirió la falsedad de esta conjetura. Se buscó entonces obtener EALAs como cocientes de álgebras $\tilde{G}(q)$. Se sabía de ([**2**] Proposition 2.2) que las álgebras de Borcherds N se podían obtener como cocientes de álgebras $G(q)$. Se obtuvo entonces un resultado completo que relaciona las álgebras de Borcherds con los EALAs, a saber, que el álgebra $\tilde{N}$ es un EALA si y sólo si el corrango de la forma cuadrática q es 0 ó 1, (ver 3.2). Se logró demostrar que siempre es posible obtener un EALA como cociente de un álgebra $\tilde{G}(q)$ (ver Teorema 3.13).

En conclusión, se logró construir una familia de ejemplos de EALAs, clasificada por el tipo de Dynkin de q y el corrango de q.

Apéndice A

Formas Cuadráticas

Este apéndice fue tomado de [**3**]. Se introducen algunos conceptos y resultados acerca de formas cuadráticas que serán utilizados a lo largo del presente trabajo.

Sea $q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ una forma cuadrática (entera) de la forma

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i x_i + \sum_{i<j} q_{ij} x_{ij}$$

se dice que q es una *forma unitaria* (resp. *semi-unitaria*) si $q_i = 1$ (resp. $q_i = 0, 1$) para todo $1 \leq i \leq n$. Se dice que q es *positiva semi-definida* si $q(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Se define la *forma polar* de q como

$$q(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y).$$

Se observa que $q(-, -)$ es una forma bilineal simétrica, y que hay una clara relación entre la forma cuadrática q y la forma polar asociada dada por

$$\frac{1}{2}q(x, x) = \frac{1}{2}(q(2x) - q(x) - q(x)) = \frac{1}{2}(4q(x) - 2q(x) = q(x)$$

Definición A.1. *Se define el* radical *de q como*

$$\operatorname{rad} q = \{x \in \mathbb{Z}^n : q(x, -) = 0\}$$

Claramente $\operatorname{rad} q \subset q^{-1}(0)$*. También, se define el* corrango *de q como* $\operatorname{corrango} q = \operatorname{rango}(\operatorname{rad} q)$.

Proposición A.2. *Sea $q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ una forma unitaria positiva semi-definida. Entonces*

$$-2 \leq q_{ij} \leq 2 \text{ para todo } i < j.$$

Demostración. Supónganse que q es positiva semi-definida y que existen índices $i < j$ tales que $|q_{ij}| > 2$, entonces $q(c_i + c_j) = 2 + q_{ij} < 0$ si $q_{ij} < -2$

o $q(c_i - c_j) = 2 - q_{ij} < 0$ si $q_{ij} > 2$, lo que contradice que q es positiva semi-definida. Así, no pueden existir tales índices. $\square$

El resultado anterior se puede ampliar para caracterizar las formas cuadráticas unitarias positivas semi-definidas. La demostración del teorema anterior se puede consultar en [**3**].

Teorema A.3. *Sea $q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ una forma cuadrática unitaria. Entonces q es no negativa si y sólo si las siguientes condiciones se satisfacen:*

(i) $-2 \leq q_{ij} \leq 2$ *para todo* $i < j$.

(ii) *Para todo $v \in \mathbb{Z}^n$ tal que $q(v) = 0$ se tiene que $q(v, -) = 0$.*

A una forma unitaria q se le asocia una bigráfica que tiene vértices $\{1, \ldots, n\}$ y $|q_{ij}|$ aristas sólidas (resp. punteadas) entre i y j si $q_{ij} < 0$ (resp. $q_{ij} > 0$). Se dice que q es *conexa* si esta bigráfica es conexa. Dada una gráfica Δ se considera la forma semi-unitaria q_Δ con bigráfica Δ.

Observación A.4. *La demostración del teorema anterior se puede consultar en* [**3**].

Proposición A.5. *Sea q una forma unitaria conexa. Entonces $R^1 = q^{-1}(1)$ no se puede descomponer en una unión ajena de subconjuntos ajenos R_1, R_2 no vacíos tales que $q(R_1, R_2) = 0$.*

Demostración. Se muestra primero que $\{c_i\}$ no se puede descomponer de dicha forma. Supongamos que R_1, R_2 son subconjuntos de $\{c_i\}$ ajenos no vacíos tales que $\{c_i\} = R_1 \cup R_2$ y $q(R_1, R_2) = 0$. Dado que $q(c_i, c_j) = q_{ij}$ se tiene que $q_{ij} = 0$ para todo $c_i \in R_1, c_j \in R_2$, es decir, $\Delta_1 = \{i : c_i \in R_1\}$ y $\Delta_2 = \{j : c_j \in R_2\}$ es una partición disconexa de Δ, lo que contradice la conexidad de q. Es claro que no puede existir $\alpha \in R^1$ con $q(\alpha, c_i)$ para todo i, ya que entonces

$$q(\alpha, -) = 0,$$

lo cual es imposible. $\square$

Teorema A.6. *Sea $q : \mathbb{Z}^n \to Z$ una forma semi-unitaria no negativa. Entonces existe una transformación $\mathbb{Z}$-invertible $T : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ tal que*

$$qT(x_1, \ldots, x_n) = q_\Delta(x_1, \ldots, x_{n-c}),$$

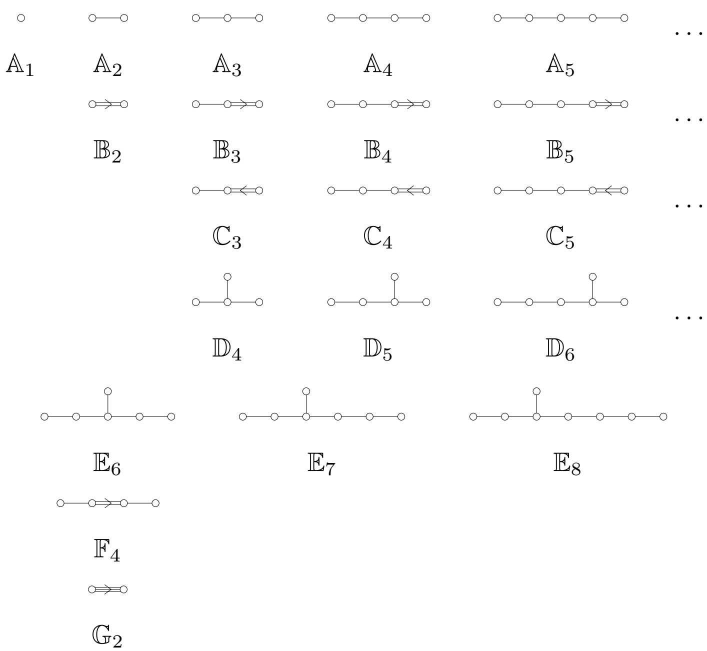
donde $c = \operatorname{corrango} q$ y Δ es un diagrama de Dynkin (ver Apéndice B) determinado por q. A Δ se le llama el tipo de Dynkin de q.

Observación A.7. *La demostración se puede consultar en* [**3**].

Apéndice B

Diagramas de Dynkin

Se presenta la lista completa de los diagramas de Dynkin conexos. Se observa que dado que los diagramas $\mathbb{B}_2, \mathbb{F}_4, \mathbb{G}_2$ son simétricos, no importa hacia que lado apunta la flecha. Los diagramas de Dynkin tienen varias aplicaciones, por ejemplo, son utilizados para clasificar los sistemas de raíces irreducibles y con estos clasificar las álgebras de Lie semi-simples. Para un desarrollo detallado de estas aplicaciones se pueden consultar [**5**] y [**8**]. Los diagramas fueron realizados utilizando el programa de A. Spiridonov que se puede encontrar en [**20**].



Bibliografía

[1] B. Allison, S.Azam, S. Berman, Y. Gao and A. Pianzola: *Extended affine Lie algebras and their root systems, cap. I.* Memoires of the American Mathematical Society, 603 (1997)

[2] M. Barot, D. Kussin and H. Lenzing: *The Lie algebra associated to a unit form.* Journal of Algebra 296 (2006), 1-17.

[3] M. Barot, J. A. de la Peña: *The Dynkin type of a non-negative unit form.* Expo. Math. 17 (1999), 339-348.

[4] R. Borcherds: *Vertex algebras, Kac-Moody algebras and the monster.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA 83 (1986), 3068-3071.

[5] R. Carter: *Lie Algebras of Finite and Affine Type, caps. 1,3,4,6,7.* Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[6] Elié Cartan: *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus.* Dissertation. Université de Paris. 1894.

[7] R. Høegh-Krohn, B. Torresani: *Classification and construction of quasi-simple Lie algebras.* J. Funct. Anal. 89 (1990), 106-136.

[8] J. E. Humphreys: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, cap. II.* Springer, Berlin, 1994.

[9] V. G. Kac: *Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth.* Math. USSR Izv. 2 (1968) 1271–1311 Izv. Akad. Nauk USSR Ser. Mat. 32 (1968) 1923–1967.

[10] W. Killing: *Die Zusammensetzung der stetigen/endlichen Transformationsgruppen.* Mathematische Annalen, Volume 31, Number 2 (1888), 252-290. Volume 33, Number 1 (1888), 1-48. Volume 34, Number 1 (1889), 57-122. Volume 36, Number 2 (1890), 161-189.

[11] S. Lie, F. Engel: *Theorie der Transformationsgruppen.* B. G. Teubner, Leipzig. 1888.

[12] R. V. Moody: *A new class of Lie algebras.* Journal of Algebra 10 (1968), 1923-1967.

[13] K. Saito: *The root systems of sign* $(1, 0, 1)$. Preprint RIMS-475 (1984).

[14] K. Saito: *Extended affine root systems 1 (Coxeter transformations).* Publ. RIMS., Kyoto. Univ. 21 (1985), 75-179.

[15] K. Saito: *Extended Affine Root Systems (flat invariants).* Publ. RIMS., Kyoto Univ. 26 (1990), 15-78.

[16] K. Saito and D. Yoshii: *Extended affine root system IV (simply-laced elliptic Lie algebras).* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 36 (2000), 385-421.

[17] J. P. Serre: *Algébres de Lie semi-simples complexes.* W. A. Benjamin, New York, 1966.

[18] P. Slodowy: *Kac-Moody algebras, assoziiert Gruppen und Verallgemeinerugen.* Habilitation-sschrift, Universitat Bonn, 1984.

[19] P. Slodowy: *Beyond Kac-Moody algebras and inside.* Can. Math. Soc. Proc. 5 (1986), 361-371.

[20] A. Spiridonov *http://www-math.mit.edu/∼lesha/dynkin-diagrams.html.*