



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

FACULTAD DE QUÍMICA

**GRADIENTES DE PRESIÓN ASIMÉTRICOS  
EN EL DESPLAZAMIENTO  
DE FLUIDOS VISCOSOS**

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
**I N G E N I E R A Q U Í M I C A**  
P R E S E N T A:  
**AIMEE MAGDALENA TORRES ROJAS**



MÉXICO, D.F.

2009



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **JURADO ASIGNADO**

<b>PRESIDENTE</b>	<b>Profesor:</b>	Carlos Guzmán de las Casas
<b>VOCAL</b>	<b>Profesor:</b>	Martha Imelda Moreno Bravo
<b>SECRETARIO</b>	<b>Profesor:</b>	Eugenia Corvera Poiré
<b>1º SUPLENTE</b>	<b>Profesor:</b>	Eduardo Vivaldo Lima
<b>2º SUPLENTE</b>	<b>Profesor:</b>	Edtson Emilio Herrera Valencia

### **Este trabajo fue desarrollado en:**

Departamento de Física y Química Teórica. Facultad de Química.

**ASESOR DEL TEMA:** Eugenia Corvera Poiré

---

**SUSTENTANTE:** Aimee Magdalena Torres Rojas

---

---

## AGRADECIMIENTOS

---

---

En primer lugar, quiero agradecer a la Dra. Eugenia Corvera Poiré por haberme dado la oportunidad de trabajar con ella y por la confianza que ha tenido en mí. Maestra, trabajar con usted ha sido una experiencia enriquecedora en mi vida. Gracias por compartir su conocimiento conmigo. Gracias por su tiempo, por sus consejos y por todas las cosas que ha hecho por mí.

Quiero agradecer también a los miembros del jurado por sus valiosas observaciones y por el tiempo invertido en la revisión de este trabajo.

Agradezco a DGAPA por la beca otorgada a través del proyecto DGAPA IN 101907.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada a través del proyecto 83149.

Agradezco a la Facultad de Química por las facilidades proporcionadas para asistir a la XXXIV Reunión de invierno de Física Estadística celebrada en Taxco, Guerrero del 4 al 7 de enero de 2005. Gracias también por el apoyo proporcionado para adquirir experiencia en el campo docente a través del subprograma 121.

Agradezco a la División de Fluidos y Plasmas de la Sociedad Mexicana de Física por el apoyo proporcionado para asistir a los siguientes congresos:

- XV Seminario Enzo Levi celebrado en Querétaro el 22 y 23 de mayo de 2008.
- XIV Congreso de la División de Fluidos y Plasmas de la Sociedad Mexicana de Física celebrado en Zacatecas del 20 al 24 de octubre de 2008.

Finalmente, agradezco a las personas que quiero y estimo:

A ti Gerardo. Gracias por haber llegado a mi vida. Gracias por ser como eres y por enseñarme nuevas emociones. Eres el amor de mi vida. Te adoro hijo, y te doy gracias por todo lo que aprendo contigo y porque por ti soy mejor persona.

A ti Luis. Gracias por todo el apoyo que me has dado. Gracias por tu paciencia y tu comprensión. Pero sobre todo gracias por ser el mejor padre para Gerardo. Eres una gran persona y me siento afortunada por haberte conocido.

A ti mamá. Te agradezco haber inculcado en mí ese espíritu de lucha, esencial para salir adelante. Gracias por ser un ejemplo de valentía. Gracias por todo lo que haces por mí. Eres una gran mujer. Te quiero y te admiro mucho.

A Eduardo y Nancy. Gracias hermanos por estar siempre conmigo y apoyarme en momentos difíciles. Aunque somos diferentes, considero que son grandes personas y aprendo mucho de ustedes. Los quiero mucho.

A Rebe, Miguel, Peti y Masi. Gracias familia por todo su cariño y su apoyo. Gracias por creer siempre en mí. Los valoro y los quiero mucho.

A mis amigos de la Facultad. En especial, a Joaquín, Israel, Norma, Iván, Isis y Yazmín. Gracias por tantos buenos momentos. Gracias por su cariño y compañía. Gracias por ser grandes seres humanos y por todo lo que he aprendido de ustedes. Los quiero y admiro.

A todos mis compañeros del cubo. Les agradezco los buenos ratos que hemos pasado juntos. Valoro mucho su amistad y su disponibilidad para ayudar a los demás. Los estimo y admiro.

---

# ÍNDICE GENERAL

---

---

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Antecedentes</b>	<b>8</b>
2.1. Dedos viscosos	8
2.2. Ecuaciones de la formulación macroscópica	10
2.3. Problema de fronteras libres	14
2.4. Una alternativa al problema de fronteras libres	14
2.5. Modelo mesoscópico	16
2.6. Resultados de estudios relacionados con este trabajo	23
<b>3. Gradientes de presión asimétricos</b>	<b>33</b>
3.1. Asimetrías tipo escalón	37
3.2. Funciones escalón en series de Fourier	38
3.3. Inestabilidad lateral del dedo	43
3.4. Ancho del dedo como función del tiempo	48
3.4.1. Región cercana a la punta del dedo	48
3.4.2. Región lejana a la punta del dedo	56
<b>4. Conclusiones</b>	<b>66</b>
<b>A. Algoritmo de integración numérica</b>	<b>69</b>
<b>Referencias</b>	<b>72</b>

---

## INTRODUCCIÓN

---

---

La formación de patrones espaciales es un fenómeno común en la naturaleza. El estudio de este fenómeno constituye una rama de la ciencia llamada formación de patrones (*pattern formation*). El objetivo principal en este campo es la comprensión de los procesos físicos, químicos y biológicos que determinan la morfología de los sistemas, en muchos casos existe una interfase que separa dos medios cuya dinámica determina la aparición de un patrón.

El estudio de este trabajo se centra en una clase específica de formación de patrones. Cuando un fluido viscoso es desplazado por otro de baja viscosidad en un medio confinado, la interfase entre ambos fluidos se vuelve inestable dando lugar a la formación de estructuras llamadas dedos. Después de un proceso dinámico de competencia, se alcanza un estado estacionario en el cual un solo dedo, llamado dedo de Saffman-Taylor, ocupa el canal.

En ausencia de anisotropía, los dedos de Saffman-Taylor son más anchos que la mitad del ancho del canal. Estos dedos han sido llamados normales con el fin de diferenciarlos de los dedos más angostos obtenidos en presencia de anisotropía, denominados anómalos [1, 2, 3]. Mientras que las inestabilidades en dedos anómalos se conocen desde hace dos décadas, por mucho tiempo se consideró que los dedos normales de Saffman-Taylor tenían lados planos y estables. Sin embargo, recientemente se han tenido tanto predicciones teóricas, como observaciones experimentales, de inestabilidades laterales en dedos de

Saffman-Taylor. Moore fue el primero en reportar experimentos de este fenómeno [4].

Utilizando un modelo de campo [5] que ha demostrado exitosamente describir el comportamiento experimental de la interfase entre dos fluidos con alto contraste de viscosidades, se reportó una inestabilidad lateral inducida tanto con gradientes de presión que varían en el tiempo como con ruido estático [6, 7, 8, 9]. Posteriormente se confirmó experimentalmente, que el ruido estático genera una inestabilidad de pequeña amplitud y longitud de onda grande a los lados del dedo normal de Saffman-Taylor [10]. Esta inestabilidad tiene una longitud de onda dominante, indicando que el sistema actúa como un amplificador selectivo de ruido estático. También, se comprobó experimentalmente que cuando el dedo de Saffman-Taylor es forzado con un gradiente de presión periódico, se genera en la punta una onda que se propaga hacia los lados del dedo [11]. El valor promedio del ancho del dedo y sus fluctuaciones dependen de la frecuencia del gradiente de presión aplicado. A valores bajos de frecuencia incidente, la frecuencia de respuesta de la inestabilidad lateral del dedo aumenta con la frecuencia incidente, sin embargo, se llega a un punto en el cual la respuesta es independiente del valor de la frecuencia incidente.

Debido a su relativa simplicidad, el estudio del desplazamiento de un fluido viscoso por un gas en una celda de Hele-Shaw se ha convertido en un arquetipo del problema general de formación de patrones en sistemas no lineales. En la aproximación propuesta por Saffman y Taylor en 1958 [12] el flujo de los dos fluidos es considerado en dos dimensiones y la interfase es una línea. En el gas la presión es uniforme y en el fluido viscoso el movimiento obedece la ley de Darcy, por lo que todas las no linealidades del sistema se originan de las condiciones de frontera en la interfase fluido-fluido [13].



De manera explícita, para el estado estacionario, estas no linealidades se encuentran en un par de ecuaciones que relacionan la forma del dedo y la velocidad del mismo. Lo cual implica una relación no lineal entre el ancho del dedo y la velocidad en el bulto del fluido viscoso. Dado que la velocidad del fluido viscoso es proporcional al gradiente de presión, se puede concluir que existe también una relación no lineal entre el ancho del dedo y el gradiente de presión. Debido a que las no linealidades de las ecuaciones se manifiestan cuando se tienen asimetrías, es de suponerse que, en general, la forma del dedo dependerá de la simetría o asimetría del gradiente de presión.

En este trabajo, se encontró que imponiendo gradientes de presión asimétricos de tipo escalón, la inestabilidad lateral del dedo de Saffman-Taylor es distinta a la observada con la señal simétrica cosenoidal de otros trabajos [6]. Para algunas de las perturbaciones estudiadas se observó que la inestabilidad lateral del dedo se satura tanto en frecuencia como en amplitud, en cambio, para otras, la saturación parece darse sólo en amplitud. Las distintas perturbaciones dan lugar a cambios importantes en el tamaño de las fluctuaciones. Además, dichas fluctuaciones presentan más de una frecuencia, por lo que se hizo un análisis de Fourier de estas señales. Se encontró también que los gradientes de presión asimétricos de tipo escalón tienen un efecto en el ancho promedio del dedo viscoso. Este resultado es importante, ya que, la cantidad de fluido desplazado está íntimamente ligada al ancho del dedo, lo que significa un mejor vaciado del canal. Por este motivo los resultados de este trabajo pueden, en principio, tener implicaciones tecnológicas en problemas que se refieren al desplazamiento de fluidos, como en algunos procesos de ingeniería química: limpieza de mantos acuíferos, limpieza de filtros y recuperación secundaria de petróleo, así como en procesos de la industria alimenticia, farmacéutica y cosmetológica [14].

---

## ANTECEDENTES

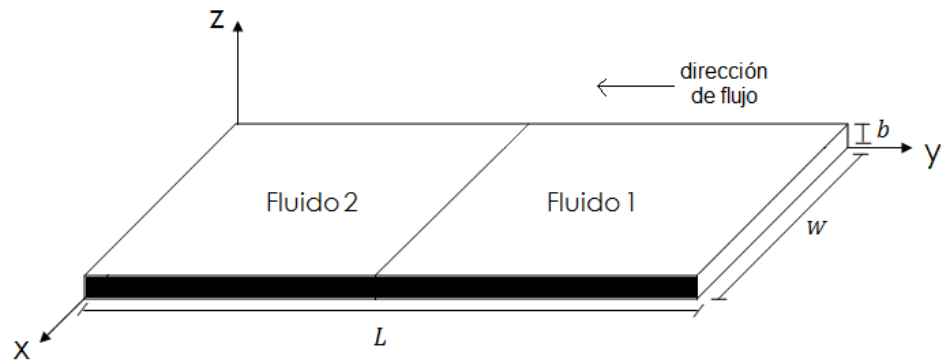
---

En este capítulo, se describen el fenómeno de formación de dedos viscosos y las ecuaciones de la hidrodinámica que constituyen un planteamiento macroscópico para conocer la dinámica del flujo de dos fluidos a cualquier tiempo. Se introduce el problema de fronteras libres, que dificulta la solución de las ecuaciones macroscópicas, y se presenta el modelo de campo utilizado como una alternativa a este problema. Al final de esta sección, se mencionan resultados de trabajos anteriores relacionados con este tema.

### 2.1. Dedos viscosos

Se denomina dedo viscoso a la forma de la interfase fluido-fluido que surge del desplazamiento de un fluido de alta viscosidad por uno de baja viscosidad en un canal cuasi bidimensional llamado celda de Hele-Shaw, (figura (2.1)). Ésta está conformada por un par de placas paralelas rectangulares de dimensiones  $L \times W$  separadas por una pequeña distancia  $b$ , que es mucho menor a las otras dimensiones del sistema, es decir,  $b \ll L, W$ .

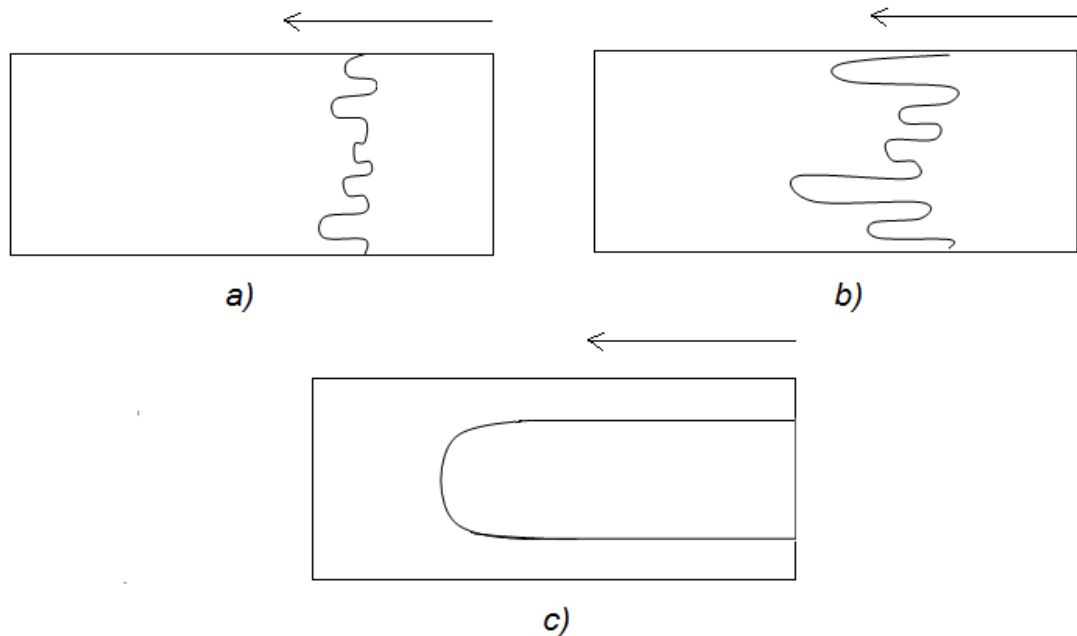
Cuando un fluido de baja viscosidad (fluido 1) empuja a uno de mayor viscosidad (fluido 2), la interfase fluido-fluido se vuelve inestable ante pequeñas perturbaciones, dando lugar



**Figura 2.1-** Esquema de una celda de Hele-Shaw. La interfase fluido-fluido se muestra como una línea recta y las paredes de la celda, paralelas al eje  $y$ , se señalan con una barra negra para indicar que no se permite el flujo a través de ellas.

a la formación de varios modos que compiten entre sí, ya que unos crecen más rápido que otros. La competencia finaliza cuando uno de los modos gana y crece hasta formar un solo dedo que, eventualmente, alcanza el estado estacionario y es llamado dedo de Saffman-Taylor. En esta etapa, la velocidad en la punta del dedo,  $U$ , y el ancho del dedo,  $\lambda W$ , son constantes.  $\lambda$  es la fracción del canal ocupada por el dedo. En la figura (2.2) se muestra la evolución por etapas de un dedo viscoso.

La formación de dedos estacionarios ocurre en el límite de alto contraste de viscosidades, esto es, cuando la viscosidad del fluido menos viscoso es pequeña frente a la del fluido más viscoso. El caso límite es llamado límite de contraste infinito y corresponde a cuando la viscosidad del fluido desplazante es despreciable frente a la del fluido desplazado.



**Figura 2.2-** *Etapas de formación de un dedo viscoso. a) desestabilización de la interfase, b) competencia de dedos, c) estado estacionario. En cada esquema se indica la dirección de flujo con una flecha.*

## 2.2. Ecuaciones de la formulación macroscópica

Desde el punto de vista macroscópico, se puede estudiar el movimiento de la interfase fluido-fluido en las distintas etapas de formación del dedo por medio de las ecuaciones de Navier-Stokes escritas para la geometría y condiciones de flujo de la celda, más un par de condiciones de frontera en la interfase fluido-fluido.

Se parte de la ecuación de balance de cantidad de movimiento para un fluido newtoniano de densidad,  $\rho$ , y viscosidad,  $\eta$ , constantes. Se considera que el fluido se desplaza en una

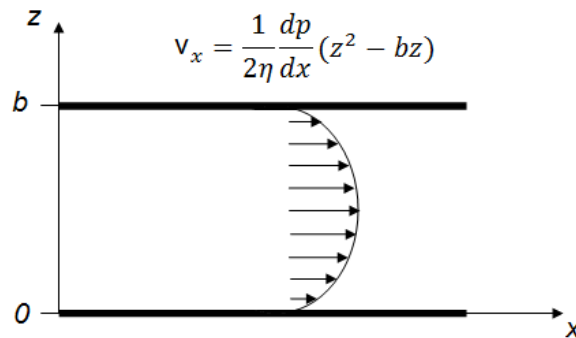
sola dirección que se escoge como la dirección del eje  $x$ , esto es:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right). \quad (2.1)$$

Debido a que el flujo se supone homogéneo en las direcciones  $x$  y  $y$ , la velocidad es solamente función de  $z$ :  $v_x = v_x(z)$ , en estado estacionario, la ecuación (2.1) se reduce a:

$$\eta \frac{d^2 v_x}{dz^2} = \frac{dp}{dx}. \quad (2.2)$$

Al resolver esta ecuación diferencial, con condiciones de frontera de mojado en las paredes, se obtiene un perfil de Poiseuille para la velocidad que se muestra en la figura (2.3).



**Figura 2.3-** Perfil de velocidades en la dirección  $z$ , que considera  $v_x = 0$  en las paredes de las placas ( $z = 0$  y  $z = b$ ). La velocidad es máxima en  $z = b/2$ .

Luego se promedia la velocidad en la dirección  $z$ ,

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{b} \int_0^b v_x(z) dz = -\frac{b^2}{12\eta} \frac{dp}{dx}. \quad (2.3)$$

Si se escogiera otra dirección de flujo, el resultado debería ser el mismo, por lo tanto para

un flujo de dirección arbitraria en el plano  $xy$ , se tiene:

$$\langle \bar{v} \rangle = -\frac{b^2}{12\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} \right), \quad (2.4)$$

o bien,

$$\langle \bar{v} \rangle = -K \nabla p, \quad (2.5)$$

donde  $K = \frac{b^2}{12\eta}$  se conoce como la permeabilidad del sistema. La ecuación (2.5) es conocida como la Ley de Darcy, la cual demuestra que en estado estacionario la velocidad del fluido es proporcional al gradiente de presión.

Si además se considera que los fluidos son incompresibles, la ecuación de continuidad en términos de velocidad promedio es:

$$\nabla \cdot \langle \bar{v} \rangle = 0. \quad (2.6)$$

En lo sucesivo, se omitirán los paréntesis triangulares para denotar a la velocidad en el plano  $xy$  simplemente como  $\bar{v}$ .

A partir de las ecuaciones (2.5) y (2.6) se puede escribir la ecuación de Laplace para la presión, esto es,

$$\nabla^2 p = 0. \quad (2.7)$$

Esta ecuación gobierna la dinámica de bulto de ambos fluidos.

Las condiciones en la interfase fluido-fluido se fijan usando un argumento de equilibrio

termodinámico local y otro de continuidad. La primera condición de frontera, conocida como condición de Gibbs-Thompson o de Laplace es:

$$\Delta p = -\gamma\kappa, \quad (2.8)$$

donde  $\Delta p = p_2 - p_1$ , es la caída de presión a través de la interfase,  $\gamma$  es la tensión interfacial y  $\kappa$  es la curvatura local de la interfase. La segunda condición de frontera establece la impenetrabilidad de los fluidos y garantiza la continuidad de la velocidad normal en la interfase, esto es,

$$\bar{v}_1 \cdot \hat{n}|_{int} = \bar{v}_2 \cdot \hat{n}|_{int} = v_n, \quad (2.9)$$

donde  $v_n$  y  $\hat{n}$  son la velocidad normal de la interfase y el vector unitario normal a la interfase respectivamente. Como se mencionó, la formación de dedos estacionarios ocurre en el límite de alto contraste de viscosidades. En tal caso, la ecuación (2.5) para el fluido invíscido se reduce a la forma:

$$\nabla p_1 = 0. \quad (2.10)$$

Esto significa que la presión es constante en toda la región ocupada por el fluido 1. En este límite, las ecuaciones del sistema están dadas por la ecuación (2.7) para el fluido 2, la condición de frontera

$$v_n = \bar{v}_2 \cdot \hat{n}|_{int}, \quad (2.11)$$

y la ecuación (2.8).

### 2.3. Problema de fronteras libres

Para estudiar el fenómeno de formación del dedo de Saffman-Taylor se desea obtener la dinámica de la interfase fluido-fluido, utilizando la ecuación de bulto (2.7) para el fluido 2 sujeta a las condiciones de frontera (2.8) y (2.11). Sin embargo, una de las condiciones de frontera está escrita en términos de la curvatura de la interfase, es decir, se necesita conocer la forma de la interfase para evaluar esta condición de frontera. La forma (posición) de la interfase podría conocerse una vez conocida la solución del problema. Por esta razón, las ecuaciones no pueden resolverse analíticamente para cualquier tiempo.

Para resolver este problema, se han planteado diversas aproximaciones para las distintas etapas de formación del dedo de Saffman-Taylor, que han reproducido satisfactoriamente las etapas más simples, sin embargo, los métodos numéricos necesarios para resolver las ecuaciones macroscópicas se van complicando para regímenes de flujo más sofisticados, lo que hace necesario buscar modelos más sencillos para reproducir la dinámica del sistema.

### 2.4. Una alternativa al problema de fronteras libres

Como una alternativa a las ecuaciones clásicas, se han usado modelos en los que la interfase constituye una región difusa de ancho proporcional a un parámetro  $\epsilon$ . En una interfase difusa no existen discontinuidades y se elimina la necesidad de una condición de frontera dependiente de la posición de la interfase. La continuidad en la interfase se consigue mediante una ecuación de movimiento para una cantidad llamada parámetro de orden,  $\phi$ , el cual varía de forma suave y continua de una fase a otra entre dos valores de bulto bien definidos. Este parámetro permite conocer la ubicación espacial de ambos fluidos.



En general, esta ecuación de movimiento se conoce como ecuación de Ginzburg-Landau dependiente del tiempo.

En general, la ecuación de Ginzburg-Landau para diversos sistemas, se obtiene a partir de una configuración de energía libre escrita a través de un funcional, el cual define los valores de equilibrio del parámetro de orden. Esta configuración se acopla a algún campo de potencial dinámico propio del sistema, como: temperatura, presión, concentración, etc. A partir de esto, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales parciales que se pueden integrar numéricamente sin que la posición de la interfase sea necesaria para el siguiente paso en la integración. La interfase se ubica mediante la solución de  $\phi(x, y, t)$ , ya que se escoge una curva de nivel  $\phi(x, y, t) = \phi_{int}$ , como la interfase. Los modelos de este tipo se conocen comúnmente como modelos de campo (phase field models).

Para que un modelo de campo pueda usarse para estudiar un fenómeno en particular, se debe probar que es consistente con las ecuaciones de su correspondiente formulación macroscópica. Esto se logra haciendo un estudio en el límite en el cual el parámetro  $\epsilon$  tiende a cero, lo que equivale a tener una interfase bien definida. Si a partir de este planteamiento, las ecuaciones del modelo mesoscópico se reducen a las ecuaciones macroscópicas, se dice que el modelo es válido para describir el fenómeno.

El primer modelo de campo para describir el problema de Saffman-Taylor fue propuesto por Folch, Casademunt y Hernández Machado [15, 16], el cual fue escrito para el caso de viscosidades arbitrarias. Este modelo reproduce exitosamente la competencia de dedos, sin embargo, no describe de forma adecuada el límite de contraste infinito de viscosidades,

que es justamente el límite del dedo de Saffman-Taylor.

Hace algunos años, Hernández Machado, Lacasta, Mayoral y Corvera Poiré [5] propusieron un modelo para el límite de contraste infinito de viscosidades. El modelo consiste en una ecuación de movimiento para el parámetro de orden más una condición de frontera que mantiene al sistema fuera de equilibrio. El uso de este modelo resulta conveniente ya que reduce el problema numérico a la integración de una sola ecuación diferencial parcial. Con este modelo se puede reproducir la desestabilización de la interfase, la competencia de dedos, así como la formación del dedo de Saffman-Taylor en el estado estacionario. Este es el modelo que se utiliza en el presente trabajo.

## 2.5. Modelo mesoscópico

El modelo mesoscópico [5] se compone de una ecuación de movimiento para el parámetro de orden,  $\phi$ , y una condición de frontera que mantiene al sistema fuera de equilibrio.

La ecuación de movimiento para el parámetro  $\phi$  se conoce como ecuación del modelo B, según la clasificación de modelos de dinámica de fenómenos críticos de Halperin y Hohenberg [17]. La ecuación es:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot M \nabla \mu(\phi), \quad (2.12)$$

donde  $M$  es un parámetro relacionado con la permeabilidad del sistema,  $\mu(\phi)$  es el potencial químico del sistema que tiene la forma:

$$\mu(\phi) = \mu_B(\phi) - \epsilon^2 \nabla^2 \phi, \quad (2.13)$$

$$\mu_B(\phi) = \frac{\phi^3}{\phi_{eq}^2} - \phi. \quad (2.14)$$

En la ecuación (2.13),  $\epsilon$  es un parámetro proporcional al ancho de la interfase,  $\mu_B(\phi)$  es el potencial químico en el bulto de las fases,  $\phi_{eq}$  es el valor de equilibrio del parámetro de orden.

Para el caso de una interfase plana y estática en la posición  $y = 0$ , como el sistema se encuentra en equilibrio, la ecuación (2.13) debe ser igual a cero, además, como la interfase es plana, se reduce a su forma unidimensional. Se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\mu(\phi) = -\epsilon^2 \frac{d^2\phi}{dy^2} - \phi + \frac{\phi^3}{\phi_{eq}^2} = 0. \quad (2.15)$$

Sujeta a dos condiciones de frontera,

$$\phi(\pm\infty) = \pm\phi_{eq}, \quad (2.16)$$

$$\phi(0) = 0. \quad (2.17)$$

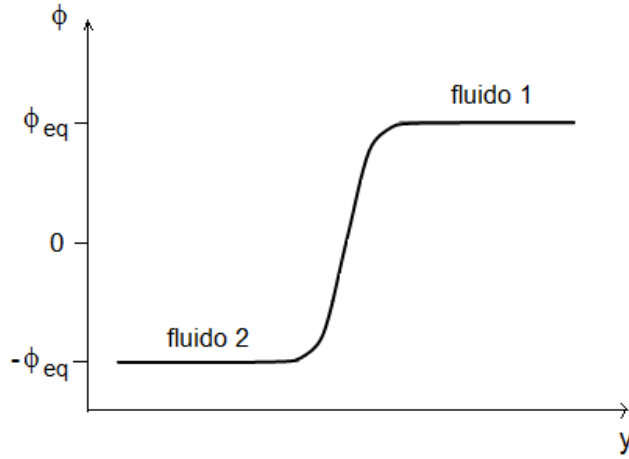
La primer condición de frontera establece que en el bulto de las fases el parámetro de orden es constante e igual a los valores de equilibrio, mientras que la segunda, fija el valor de este parámetro en la interfase. Una solución a la ecuación (2.15) que cumple con las condiciones de frontera es el siguiente perfil de tangente hiperbólica:

$$\phi = \phi_{eq} \tanh \frac{y}{\sqrt{2\epsilon}}. \quad (2.18)$$

En esta ecuación, los límites  $y \rightarrow \pm\infty$  corresponden a los valores de  $\pm\phi_{eq}$  para el paráme-

tro de orden  $\phi$ . Como se puede observar en la figura (2.4), el parámetro de orden varía de forma suave y continua a lo largo de la interfase, para tomar el valor de equilibrio correspondiente en el bulto de cada fase. Dichos valores satisfacen la condición de equilibrio del potencial químico, esto es,

$$\mu(\pm\phi_{eq}) = 0. \quad (2.19)$$



**Figura 2.4-** Perfil de equilibrio del parámetro de orden.

Consideramos a la región con  $\phi > 0$  como el fluido 1 y a la región con  $\phi < 0$  como el fluido 2. Además designamos la posición de la interfase arbitrariamente con la curva de nivel  $\phi_{int}(x, y) = 0$ .

La validez del modelo se confirma al reducir la ecuación (2.12) a las ecuaciones (2.7), (2.8) y (2.11). Lo anterior, se logra mediante un desarrollo asintótico de la ecuación (2.12) en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  reportado en la referencia [5]. La idea de este desarrollo es que en dicho límite, el perfil del parámetro de orden se vuelve discontinuo. En tal caso, la región de transición corresponde a una interfase bien definida, por lo que la ecuación de movimiento

en dicha región se reduce a las condiciones de frontera (2.8) y (2.11). Por otro lado, en las regiones de bulto de ambos fluidos donde  $\phi \rightarrow \pm\phi_{eq}$ , la ecuación de movimiento se reduce a la ecuación (2.7). De esta forma, se obtienen las siguientes identificaciones entre los parámetros macroscópicos y mesoscópicos:

$$p = \phi_{eq}\mu_1, \quad (2.20)$$

$$K = -\frac{M_2}{2\phi_{eq}^2}, \quad (2.21)$$

$$\gamma = \frac{\gamma'}{2\phi_{eq}}, \quad (2.22)$$

en donde  $\mu_1$  es el potencial químico a primer orden en  $\epsilon$ ,  $M_2$  es el parámetro proporcional a la permeabilidad del fluido 2 y  $\gamma' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\phi_0}{\partial w} dw$  es un parámetro donde  $\phi_0$  es el parámetro de orden a cero orden en  $\epsilon$  y  $w$  es una coordenada normal a la interfase. Cabe señalar que para lograr estos resultados, es necesario imponer la condición de alto contraste viscoso, esto es,

$$\begin{aligned} M &= 0 \quad \text{si } \phi > 0, \\ M &= M_2 \quad \text{si } \phi < 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

La identificación de parámetros (2.20) indica que el potencial químico a primer orden en  $\epsilon$ ,  $\mu_1(\phi)$ , juega un papel que en las ecuaciones macroscópicas corresponde a la presión. De esto se puede concluir que al fijar una condición de frontera que contenga un gradiente en el parámetro de orden se fija un cierto gradiente en el potencial químico,  $\mu(\phi)$ , lo que en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , equivale a imponer un gradiente de presión.

La condición de frontera para el parámetro de orden en el bulto del fluido 2 introduce la dinámica del sistema, al imponer un valor  $\phi_B$  diferente del valor de equilibrio que induce

el movimiento de la interfase, esto es,

$$\phi = \phi_B(t) \quad \text{si} \quad (x, y) \text{ está en } B, \quad (2.24)$$

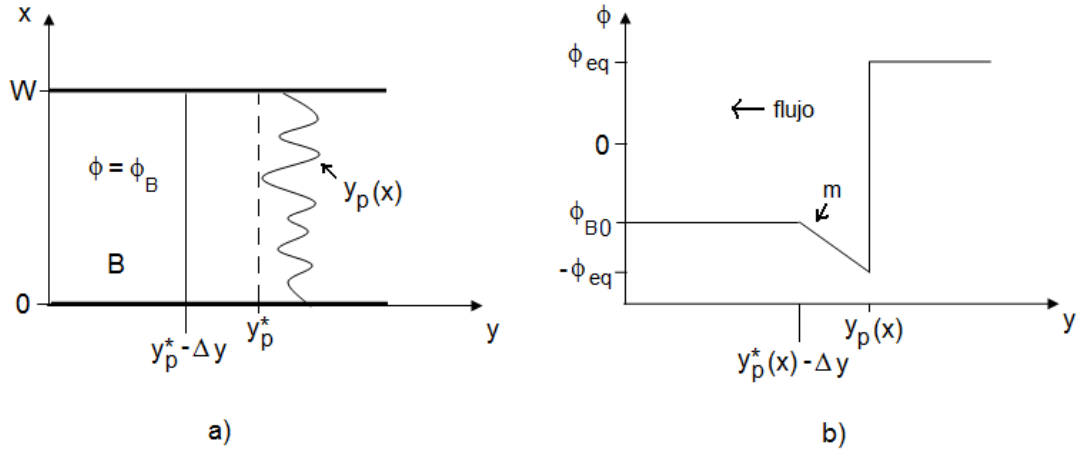
donde la región  $B$  corresponde al bulto del fluido 2, lejos de la interfase. Más adelante se definirá con precisión la ubicación de esta región.

Para observar el efecto de un gradiente dinámico en el modelo, la condición dinámica de frontera debe contener un término constante para lograr la formación de un dedo en estado estacionario, al cual se superpone una perturbación,  $f(t)$ , que varíe en el tiempo. Para esto, se impone el valor de bulto del parámetro de orden como sigue:

$$\phi_B(t) = \begin{cases} \phi_{B0} & \text{si } t \leq t^* \\ \phi_{B0} + f(t) & \text{si } t > t^* \end{cases}, \quad (2.25)$$

en donde el tiempo  $t^*$  es el tiempo necesario para alcanzar la formación del dedo en estado estacionario cuyo ancho,  $\lambda W$ , y velocidad,  $U$ , son constantes.

Lo que sigue es integrar numéricamente la ecuación (2.12) sujeta a la condición de frontera (2.25). Las corridas se llevan a cabo partiendo de una configuración inicial para el parámetro de orden con una interfase perturbada,  $y_p(x)$ , en un sistema de dimensiones  $n_x$  x  $n_y$ , donde  $n_x = W$  y  $n_y$  es el largo del canal. En la figura 2.5 se muestra un diagrama de la configuración inicial que se impone mediante las siguientes ecuaciones:



**Figura 2.5-** (a) Configuración inicial del parámetro de orden  $\phi(x,y)$ . La curva representa la interfase perturbada  $y_p(x)$ , la línea punteada  $y_p^*$  denota la posición más avanzada de la interfase, a la izquierda se muestra la región B que corresponde al bulto del fluido 2 donde el parámetro de orden toma el valor  $\phi = \phi_B$ . (b) Perfil inicial del parámetro de orden  $\phi(y)$  para un valor cualquiera de  $x$ . La región derecha donde  $\phi = \phi_{eq}$  corresponde al fluido 1, la interfase se encuentra en la posición  $y = y_p(x)$ , luego, se impone el valor  $\phi_B = \phi_{B0}$  para todo el bulto del fluido 2, lo cual genera el perfil lineal de pendiente  $m$ .

$$\phi = \phi_{eq} \quad \text{si} \begin{cases} 1 \leq x \leq nx \\ y_p \leq y \leq ny \end{cases},$$

$$\phi = \frac{\phi_B + \phi_{eq}}{y_p^* - y_p - \Delta y} (y - y_p + 1) - \phi_{eq} \quad \text{si} \begin{cases} 1 \leq x \leq nx \\ y_p^* - \Delta y - 1 \leq y \leq y_p - 1 \end{cases},$$

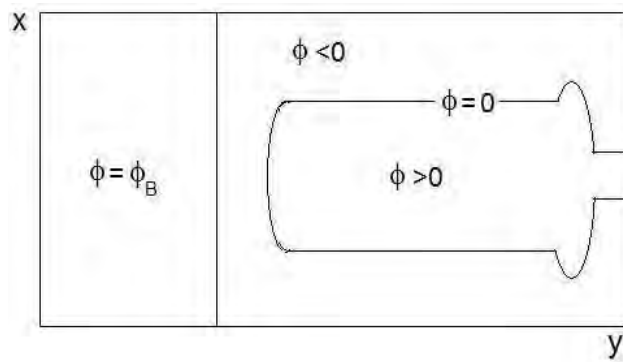
$$\phi = \phi_B \quad \text{si} \begin{cases} 1 \leq x \leq nx \\ 1 \leq y \leq y_p^* - \Delta y - 1 \end{cases},$$

donde  $y_p^*$  es la posición más avanzada de la interfase perturbada,  $\phi_B$  es el valor del parámetro de orden en el bulto del fluido 2, y  $\Delta y$  es una distancia arbitraria tomada a partir de la posición  $y_p^*$ , que fija la frontera en donde se impone el valor  $\phi_B$ . De tal forma que la

región B queda definida por el rectángulo  $1 \leq x \leq W$ , y  $1 \leq y \leq y_p^* - \Delta y$ . Esta configuración inicial llena el espacio con dos fases, una con signo positivo que corresponde al fluido 1, y la otra con signo negativo correspondiente al fluido 2. La condición de frontera establece un perfil lineal en  $\phi$  de pendiente  $m = -\frac{\phi_B + \phi_{eq}}{y_p^* - y_p - \Delta y}$  enfrente del fluido 1. Este perfil mantiene al sistema fuera de equilibrio y provoca el desplazamiento de la interfase de derecha a izquierda en la celda de Hele-Shaw.

Durante la integración numérica, se determina la posición de la interfase y se ubica el punto  $y_p^*$ . Luego, con esta posición se redefine la región B, para la cual se fija  $\phi$  como el valor de bulbo del parámetro de orden. Después, al avanzar un paso de tiempo en la integración, se vuelve a calcular la posición  $y_p^*$  y así sucesivamente. Esto quiere decir, que conforme avanza la interfase, la región B se desplaza junto con ella, manteniendo en todo momento al sistema fuera de equilibrio.

Para el estado estacionario, la figura (2.6) muestra las regiones con distintos valores de  $\phi$ .



**Figura 2.6-** En el esquema se muestra el valor que toma el parámetro de orden en cada región de la celda, definiendo así la posición de la interfase y el seno de ambos fluidos. En una región lejos de la interfase, en el bulbo del fluido 2, el valor del parámetro de orden es  $\phi_B$ .



## 2.6. Resultados de estudios relacionados con este trabajo

En el trabajo realizado por Ledesma-Aguilar y colaboradores [6], se hizo un estudio numérico del efecto que tiene imponer una perturbación oscilatoria en la caída de presión en el dedo de Saffman-Taylor. Para ello, se usó el modelo de campo de la sección (2.5) con una condición de frontera dinámica para el parámetro de orden, de la siguiente forma:

$$\phi_B(t) = \phi_{B0} + \delta \cos(\omega_0 t). \quad (2.26)$$

En donde  $\delta$  es la amplitud de la perturbación y  $\omega_0$  es la frecuencia angular de la misma. El principal resultado de este trabajo fue el hallazgo de una inestabilidad lateral en el dedo de Saffman-Taylor.

Es importante destacar que existen dos cantidades con unidades de frecuencia que son características del dedo en estado estacionario: la frecuencia del dedo,  $\nu_{dedo}$ , que está dada por la velocidad en la punta del dedo,  $U$ , y su ancho,  $\lambda W$ , esto es,

$$\nu_{dedo} \equiv \frac{U}{\lambda W}, \quad (2.27)$$

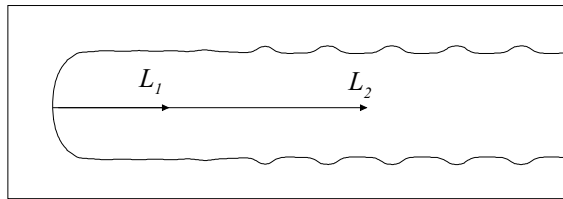
y la frecuencia,  $\nu_\infty$ , dada por la velocidad lejos del dedo,  $V_\infty$ , y el ancho de la celda,  $W$ :

$$\nu_\infty \equiv \frac{V_\infty}{W} = \frac{\lambda U}{W} = \lambda^2 \nu_{dedo}. \quad (2.28)$$

La velocidad del dedo,  $U$ , y la del fluido 2 lejos de la interfase,  $V_\infty$ , están relacionadas por conservación de la materia, esto es,  $\lambda U = V_\infty$ .

La ecuación (2.12) sujeta a la condición de frontera (2.26) fue resuelta para un sistema de  $nx = 32$ ,  $\phi_{B0} = -0.60$ , y  $\delta = 0.09$ , para distintos valores de frecuencia incidente,  $\omega_0$ , y largos de la celda,  $ny$ .

Se encontró que conforme el valor  $\phi_B$  oscila, en la punta del dedo se genera una onda que viaja de la punta hacia los lados del dedo y aparece una inestabilidad lateral en la interfase cuya amplitud crece hasta saturarse.

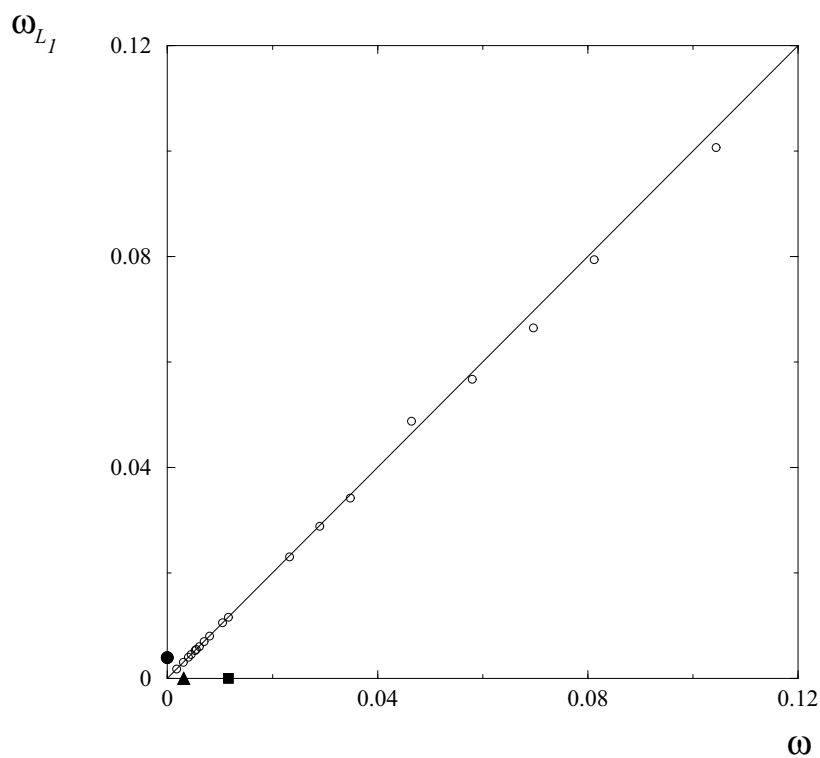


**Figura 2.7-** Regiones del dedo oscilatorio donde se fijan las distancias de medición  $L_1$  y  $L_2$ .

Para cuantificar el crecimiento de la perturbación, se tomaron dos puntos a distancias  $L_1$  y  $L_2$  de la punta del dedo para medir el ancho del mismo,  $\lambda(t)$ . La distancia  $L_1$  fue fijada dentro de la región donde la amplitud no había alcanzado su valor de saturación, mientras que la distancia  $L_2$  se fijó en la región donde la amplitud se había saturado. En la figura (2.7) se muestra un dedo en donde se observa la inestabilidad y los puntos donde se fijaron  $L_1$  y  $L_2$ . Una vez obtenidos los anchos a estas distancias de la punta,  $\lambda_{L_1}(t)$  y  $\lambda_{L_2}(t)$ , se obtuvo su frecuencia angular. Para esto, se midió el periodo correspondiente  $T_{L_i}$  y se usó la siguiente relación:

$$\omega_{L_i} = \frac{2\pi}{T_{L_i}}, \quad i = 1, 2. \quad (2.29)$$

En la figura (2.8) se muestra una gráfica de la frecuencia  $\omega_{L_1}$  vs la frecuencia angular incidente,  $\omega_0$ . Como puede observarse, cerca de la punta la inestabilidad responde linealmente a la frecuencia incidente, esto es,  $\omega_{L_1} = \omega_0$ . Esto quiere decir que en esta zona la longitud de onda de la perturbación está estrictamente regulada por la frecuencia incidente. El comportamiento lineal cerca de la punta del dedo se conservó para todo el rango de frecuencias estudiado.



**Figura 2.8-** Frecuencia del ancho del dedo en la zona cercana a la punta,  $\omega_{L_1}$ , contra la frecuencia incidente,  $\omega_0$ . Se observa que para todo el rango de frecuencias estudiado estas cantidades son iguales.

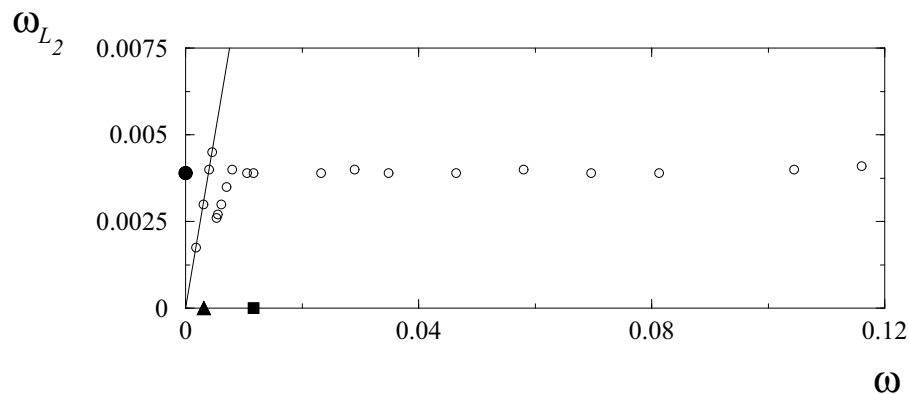
No ocurre lo mismo en la zona lejana a la punta. En la figura (2.9) se muestra una gráfica  $\omega_{L_2}$  vs  $\omega_0$ , en donde pueden distinguirse claramente tres regímenes distintos.

Primero, a frecuencias bajas, la respuesta permanece modulada por la señal incidente y sigue un comportamiento lineal, esto es,  $\omega_{L_2} = \omega_0$ .

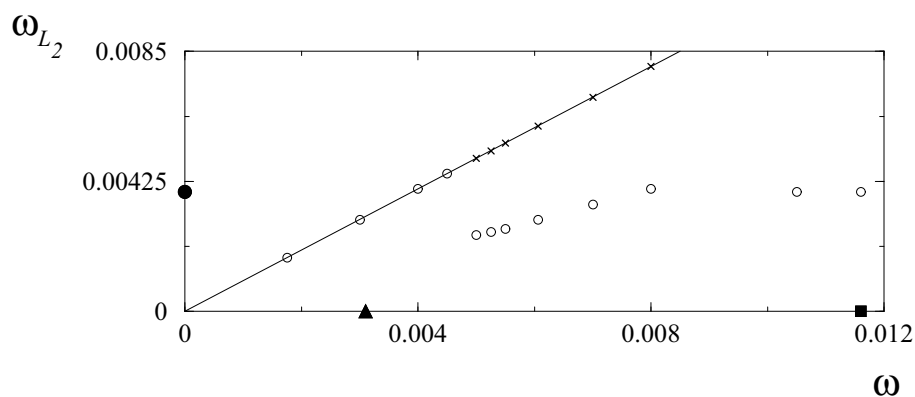
Después, en un intervalo comprendido entre las frecuencias del flujo en el infinito,  $\omega_\infty = 2\pi\nu_{infly}$ , y del dedo estacionario,  $\omega_{dedo} = 2\pi\nu_{dedo}$ , la onda suprime uno de cada dos picos dando lugar a una frecuencia igual a la mitad del valor de la frecuencia incidente, es decir,  $\omega_{L_2} = \frac{1}{2}\omega_0$ . En la gráfica (2.9) este comportamiento se observa en la zona de transición que se ha ampliado en la figura (2.10).

Finalmente, a frecuencias incidentes más altas que la frecuencia  $\omega_{dedo}$ , la onda selecciona una sola frecuencia, de forma que independientemente del valor incidente se cumple que  $\omega_{L_2} = \omega^*$ .

La frecuencia de selección,  $\omega^*$ , corresponde a *grosso modo* a la frecuencia característica del flujo en el infinito, esto es,  $\omega^* \simeq \omega_\infty$ .



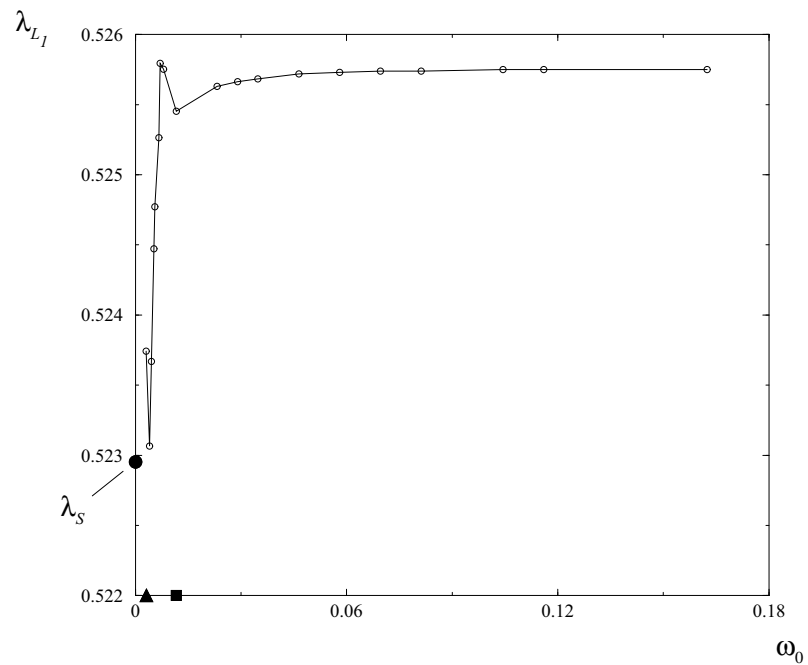
**Figura 2.9-** Frecuencia del ancho del dedo en la zona lejana a la punta del dedo,  $\omega_{L_2}$ , vs la frecuencia incidente,  $\omega_0$ . Se observa una zona de transición donde la frecuencia de respuesta es distinta a la de la señal incidente, y una zona de selección en donde se observa una frecuencia igual a la mitad del valor de la frecuencia incidente. La frecuencia de selección,  $\omega^*$ , se indica sobre el eje de las ordenadas con un círculo. Las frecuencias características  $\omega_\infty$  y  $\omega_{dedo}$  se señalan sobre el eje de las abscisas con un triángulo y un cuadrado respectivamente. En cada una de estas integraciones numéricas,  $t^* = 4500$  y el tiempo total fue de 44500.



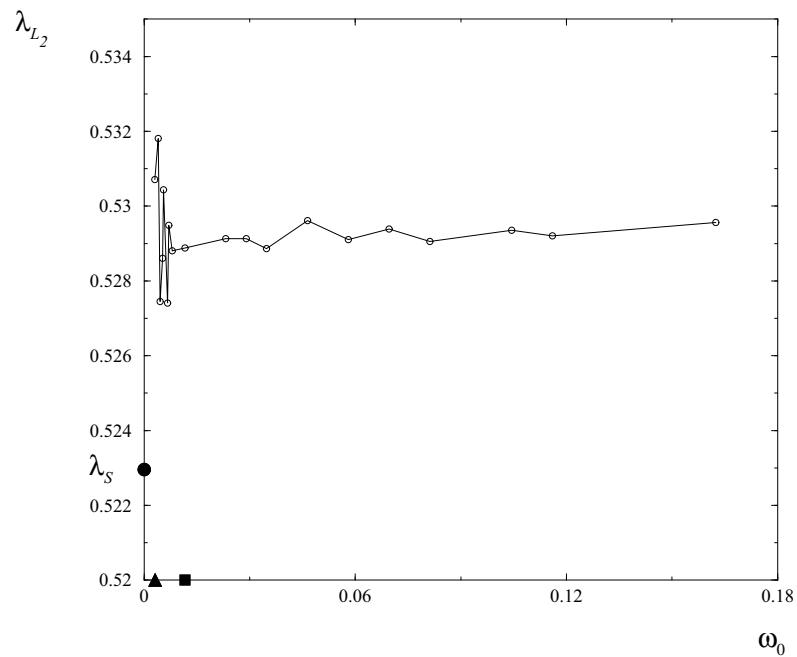
**Figura 2.10-** Zonas de régimen lineal y de transición de la curva  $\omega_{L_2}$  vs  $\omega_0$ . Las frecuencias de respuesta en la zona de transición corresponden a la mitad de la frecuencia incidente. Para ilustrarlo, se han graficado con cruces el doble de las frecuencias de respuesta y se observa que en todos los casos caen sobre la línea de respuesta lineal.

---

En la zona cercana a la punta, se encontró un máximo entre las frecuencias características del estado estacionario seguido por un rango de frecuencias altas donde el ancho del dedo se satura. Para la zona lejana a la punta del dedo, se observa que, con frecuencias altas, el ancho del dedo permanece más o menos constante. Para frecuencias bajas, el ancho del dedo presenta un comportamiento no monótono con la frecuencia. Con todas las frecuencias incidentes, el ancho del dedo es mayor que el ancho del estado estacionario por un factor no mayor al 0.5% en la zona cercana a la punta del dedo, y por un factor no mayor al 1.5% en la zona lejana a la punta del dedo.



a)



b)

**Figura 2.11-** Efecto de la frecuencia sobre el ancho del dedo medido a las distancias  $L_1$  y  $L_2$ . En ambas gráficas se indica el valor del ancho del dedo en el estado estacionario,  $\lambda_s$ . Las frecuencias angulares características del estado estacionario,  $\omega_{dedo}$  y  $\omega_\infty$  se indican con un triángulo y un cuadrado respectivamente.

Como parte de [6] también se estudió el efecto que tiene imponer como perturbación en el gradiente de presión una señal dinámica que consiste en ruido temporal, la cual contiene una combinación de varios modos:  $\phi(t) = \phi_{B0} + \delta g(t)$ . En donde  $g(t)$  es un número aleatorio que toma valores entre -1 y 1 para cada paso de tiempo, con un valor de  $\delta = 0.05$ . Con esta señal, el dedo de Saffman-Taylor desarrolla una inestabilidad lateral que nace en la punta del dedo y se propaga hacia los lados. La amplitud de la inestabilidad crece conforme la perturbación se propaga lejos de la punta y alcanza un valor casi constante. A pesar de que esta inestabilidad es no periódica, sufre un proceso de selección similar al de la perturbación oscilatoria. Cuando se induce ruido temporal en el sistema, algunos de los modos de la perturbación aleatoria inicial crecen mientras que otros decaen cuando ésta se propaga lejos de la punta del dedo. dando lugar a una distribución de frecuencias con un valor cercano a la frecuencia característica del flujo en el infinito, esto es, cerca del valor de la frecuencia de selección del caso oscilatorio.

En la integración numérica del modelo de campo [5] hay dos formas de inducir la inestabilidad lateral en los dedos normales de Saffman-Taylor. La primera, imponiendo al dedo un gradiente de presión dependiente del tiempo que se superpone al término constante necesario para producir el dedo de estado estacionario [6]. La segunda, a través de perturbaciones espaciales [8]. Numéricamente, se ha encontrado que ambas perturbaciones son capaces de desestabilizar los lados planos del dedo, dando lugar a fluctuaciones de baja amplitud y longitud de onda grande.

Se ha reportado también un estudio numérico del efecto que tienen las perturbaciones espaciales en dedos normales de Saffman-Taylor que se propagan por gradientes de presión



constantes [8]. Las variaciones espaciales en la celda de Hele-Shaw fueron introducidas con el modelo descrito anteriormente, como una  $M(\vec{r})$  en la ecuación (2.12) y con un gradiente de presión constante de la forma:  $\phi_B(t) = \phi_{B0}$ . En este trabajo se encontró que sin importar la forma de las variaciones espaciales, se genera una inestabilidad que se propaga a los lados del dedo de Saffman-Taylor. Si la perturbación espacial sentida por la punta del dedo cambia conforme el dedo se propaga, la inestabilidad es no periódica. En cambio, si la perturbación espacial sentida por la punta del dedo es constante, la inestabilidad desarrollada es periódica. En este último caso, la inestabilidad es simétrica o asimétrica dependiendo de la intensidad de la perturbación.

El comportamiento reportado en estos estudios numéricos fue observado más tarde en dos estudios experimentales [10], [11].

En el primero, realizado por Torralba y colaboradores [10] se estudió el efecto que tiene el desorden estático en la forma del dedo de Saffman-Taylor. Se encontró que el ruido estático induce una inestabilidad de pequeña amplitud y longitud de onda grande a los lados del dedo. Estas fluctuaciones laterales tienen una longitud de onda dominante indicando que el sistema actúa como un amplificador selectivo de ruido estático. El tamaño de las fluctuaciones del ancho del dedo disminuye cuando decrece la intensidad del ruido estático. Comparando este resultado con el obtenido en los estudios numéricos del efecto que tiene el ruido temporal en el dedo de Saffman-Taylor [6], se concluyó que el efecto del ruido temporal y del ruido estático son similares. El comportamiento de las fluctuaciones del ancho del dedo encontrado en este experimento es cualitativamente similar al reportado recientemente [4] en el que se obtuvo que el tamaño de las fluctuaciones del ancho

del dedo decrece como una ley de potencias del número capilar, a bajas velocidades de flujo; y aumenta con el número capilar, a velocidades grandes.

En el segundo estudio [11] se encontró que cuando el dedo de Saffman-Taylor es forzado con un gradiente de presión periódico, se genera en la punta una onda que se propaga hacia los lados del dedo. El valor promedio del ancho del dedo y sus fluctuaciones dependen de la frecuencia del gradiente de presión aplicado. A valores bajos de frecuencia incidente, la frecuencia de respuesta de la inestabilidad lateral del dedo aumenta con la frecuencia incidente, sin embargo, se llega a un punto en el cual la respuesta es independiente del valor de la frecuencia incidente, tal y como se predijo [6] con la integración numérica del modelo de campo.

---

## GRADIENTES DE PRESIÓN ASIMÉTRICOS

---

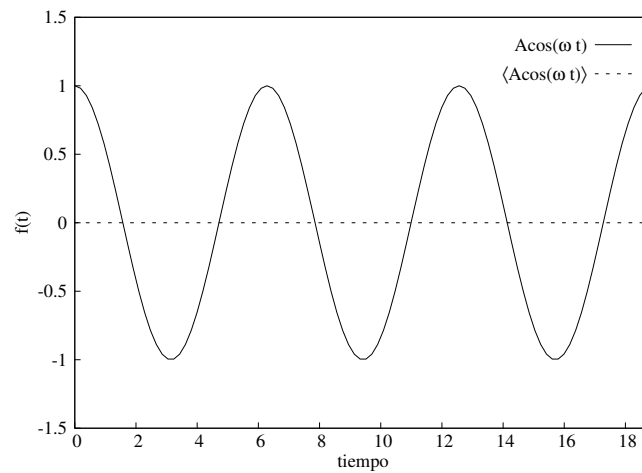
Se ha demostrado [18] que, para el estado estacionario, las ecuaciones de la formulación macroscópica (2.7), (2.8) y (2.11) pueden ser transformadas por técnicas de mapeo conforme a dos ecuaciones integrodiferenciales, no lineales, acopladas, para la forma del dedo y la velocidad del mismo.

La solución de estas ecuaciones implica una relación no lineal entre el ancho del dedo y la velocidad lejos de la punta, en el bulto del fluido viscoso. Dado que la velocidad en el bulto del fluido viscoso es directamente proporcional al gradiente de presión, se puede concluir que hay una relación no lineal entre el ancho del dedo y el gradiente de presión que mueve al sistema.

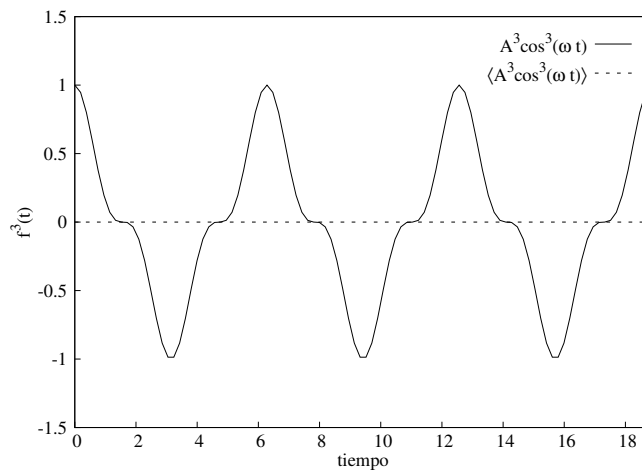
Las no linealidades de las ecuaciones se manifiestan cuando se tienen asimetrías, por ello, la forma del dedo dependerá de la simetría o asimetría del gradiente de presión. Introducir como perturbación una señal asimétrica en el tiempo en la condición de frontera,  $\phi_B(t)$ , hará que la inestabilidad lateral del dedo sea diferente a la obtenida con la señal simétrica de otros trabajos [6, 7].

Para ilustrar cómo se manifiestan las no linealidades cuando las funciones son asimétricas, consideremos una función simétrica  $f(t)_{simétrica} = A \cos(\omega t)$ . Ésta tiene promedio tem-

poral de cero en un periodo, esto es,  $\langle A \cos(\omega t) \rangle = 0$ , lo mismo se cumple para su cubo,  $\langle A^3 \cos^3(\omega t) \rangle = 0$ . Además, el intervalo de tiempo en que la señal es positiva, es igual al intervalo en que ésta es negativa, como se observa en la figura (3.1).



a)



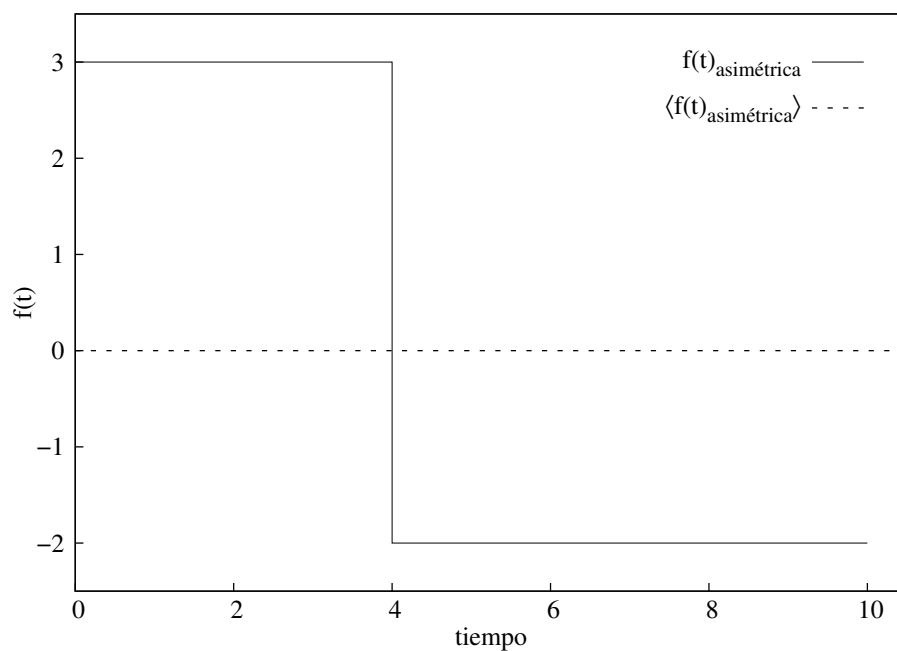
b)

**Figura 3.1-** a) Función simétrica cosenoidal, donde  $A = 1$ ,  $\omega = 1$ . b) Función simétrica al cubo. En cada gráfica se muestra con línea punteada el promedio de la función. Cabe mencionar que las unidades de la función en este ejemplo son arbitrarias.

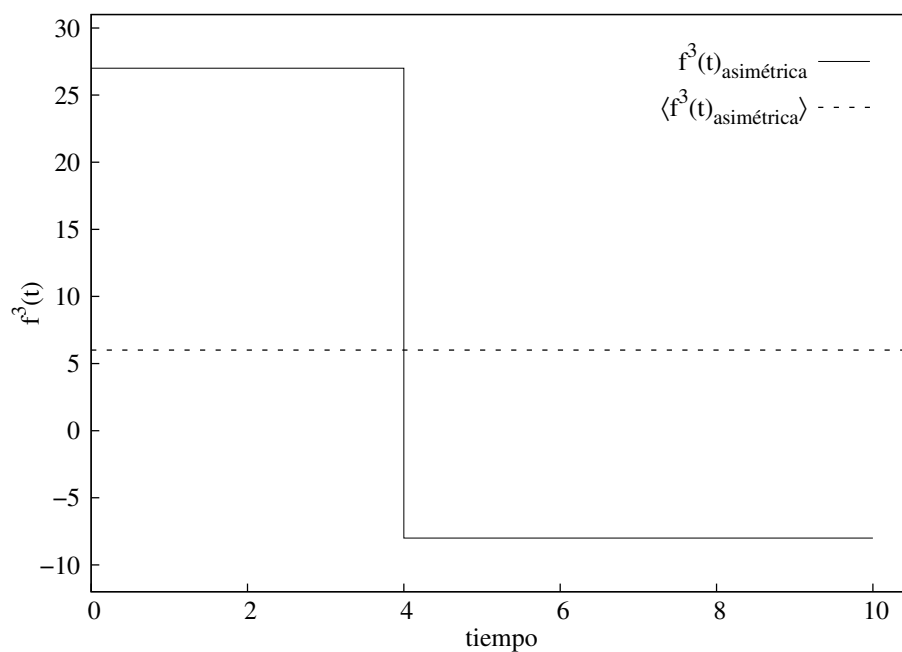
En cambio, consideremos la función asimétrica de tipo escalón:

$$f(t)_{\text{asimétrica}} = \begin{cases} F_1 & 0 < t \leq T_1 \\ F_2 = \frac{-F_1 T_1}{T - T_1} & T_1 < t < T \end{cases},$$

en donde  $T$  es el periodo,  $T_1$  el tiempo al cual la función cambia de valor, y las constantes  $F_1$  y  $F_2$  son el valor positivo y negativo que toma la función, respectivamente. Estas constantes se relacionan de tal forma que el promedio de la función es cero en un periodo,  $\langle f(t)_{\text{asimétrica}} \rangle = 0$ , sin embargo, el promedio del cubo de la función, en el mismo periodo, es diferente de cero  $\langle f^3(t)_{\text{asimétrica}} \rangle = F_1^3 T_1 (T^2 - 3TT_1 + 2T_1^2) / (T - T_1)^3$ . Además, el intervalo de tiempo en que la función es positiva es diferente del intervalo de tiempo en que ésta es negativa, como se observa en la figura (3.2).



a)



b)

**Figura 3.2-** a) Función asimétrica de tipo escalón, donde  $F_1 = 3$ ,  $F_2 = -2$ ,  $T_1 = 4$  y  $T = 10$ . b) Función asimétrica al cubo. Cada gráfica muestra el promedio de la función con línea punteada. Cabe mencionar que las unidades de la función en este ejemplo son arbitrarias.

### 3.1. Asimetrías tipo escalón

Se hicieron integraciones numéricas del modelo de campo presentado en la sección (2.5), imponiendo una condición de frontera para el valor de bulto del parámetro de orden como sigue:

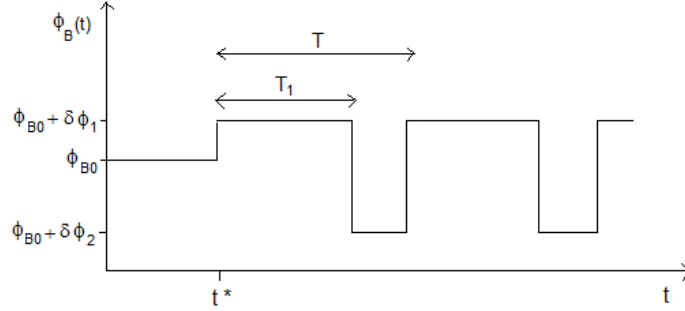
$$\phi_B(t) = \begin{cases} \phi_{B0} & \text{si } t \leq t^* \\ \phi_{B0} + f(t)_{\text{asimétrica}} & \text{si } t > t^* \end{cases} .$$

La integración numérica comienza con el valor  $\phi_{B0} = -0.6$  que es el valor del parámetro de orden que lleva al estado estacionario en un tiempo  $t^* = 5400$ . A partir de este tiempo se impusieron las perturbaciones  $f(t)_{\text{asimétricas}}$  de tipo escalón con  $\delta = 0.09$ , para un sistema de  $nx = 32$ ,  $ny = 1270$ . Estas perturbaciones tienen la forma:

$$f(t + nT)_{\text{asimétrica}} = \begin{cases} \phi_1 & \text{si } t^* < t \leq T_1 \\ \phi_2 = \frac{-\phi_1 T_1}{T - T_1} & \text{si } T_1 < t < T \end{cases} , \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

donde  $T$  es el periodo,  $T_1$  el tiempo al cual la función cambia de valor, y las constantes  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son el valor positivo y negativo que toma la función. Estas constantes se relacionan de tal forma que la función tiene promedio temporal de cero, de modo que, en un periodo, el promedio del parámetro de orden es únicamente el que contribuye a la formación del dedo en estado estacionario, figura (3.3). La integración numérica se realizó hasta llegar a un tiempo total de 40400.

Las diferentes perturbaciones que fueron impuestas difieren entre sí en que, dentro de un mismo periodo, pasan más o menos tiempo arriba del promedio. De esta forma se introdujeron once perturbaciones tipo escalón, incrementando el valor de  $T_1$  ( $T_1 = 252$ ,  $T_1 = 276$ ,  $T_1 = 300$ , ..., hasta  $T_1 = 492$ ).



**Figura 3.3-** Dependencia temporal del parámetro de orden  $\phi_B(t)$ . A tiempos menores que  $t^*$  el valor se mantiene constante e igual a  $\phi_{B0}$  para lograr el estado estacionario; para tiempos mayores, se impone la señal escalón de modo que  $\phi_B(t)$  oscile entre  $\phi_{B0} + \delta\phi_2$  y  $\phi_{B0} + \delta\phi_1$ .

### 3.2. Funciones escalón en series de Fourier

Para facilitar la integración numérica del modelo las perturbaciones fueron expresadas en series de Fourier de la siguiente forma:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)),$$

en donde los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  están dados por

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt,$$



que para la señal escalón son:

$$a_0 = 0 ,$$

$$a_n = \frac{\phi_1 T}{n\pi(T - T_1)} \text{sen}(n\omega_0 T_1) ,$$

$$b_n = \frac{\phi_1 T}{n\pi(T - T_1)} [1 - \text{cos}(n\omega_0 T_1)] .$$

Para todas las funciones asimétricas, se eligió una frecuencia de 0.01, denominada frecuencia incidente,  $\omega_0$ , que se encuentra entre los valores de las frecuencias características del sistema  $\omega_\infty = 0.003$  y  $\omega_{dedo} = 0.011$  explicadas en la sección (2.6). Este valor de frecuencia incidente corresponde a un periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 628.319$ . Cabe mencionar que  $T_1$  también puede ser expresada como una fracción del periodo,  $T$ .

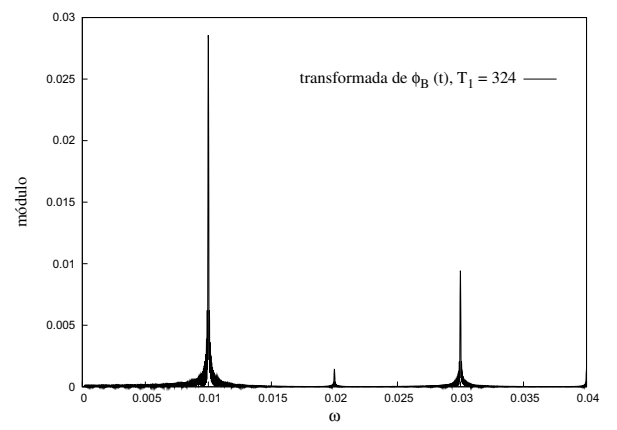
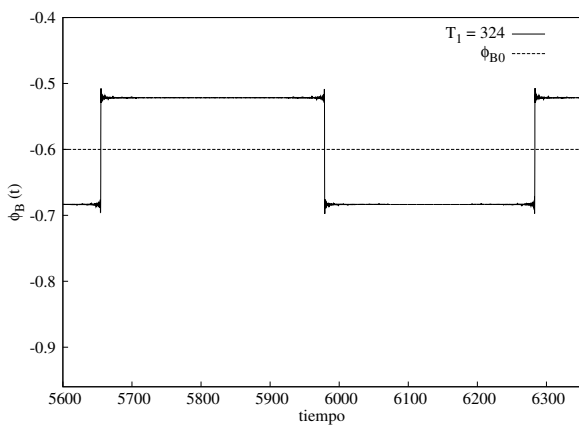
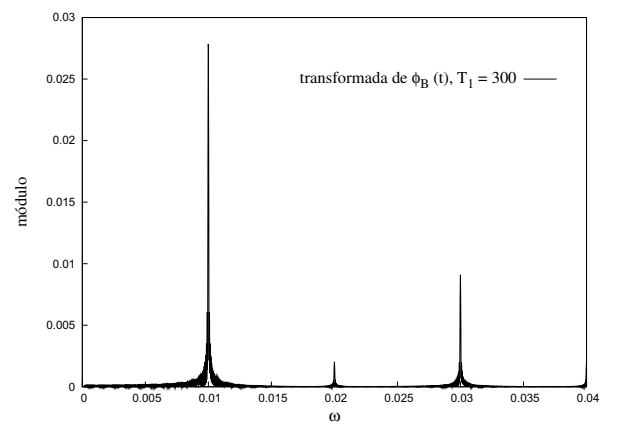
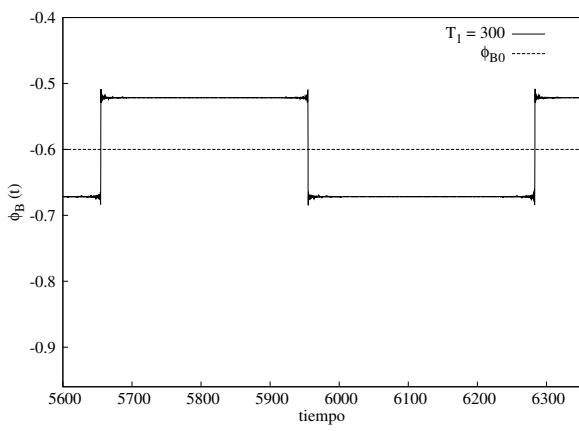
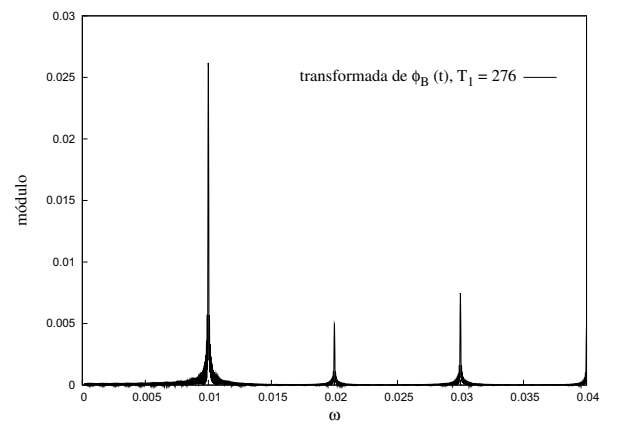
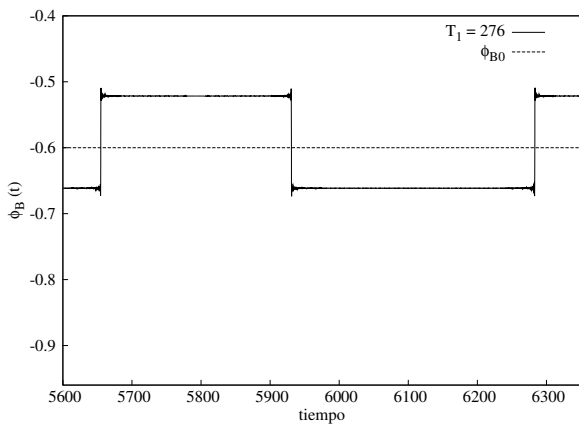
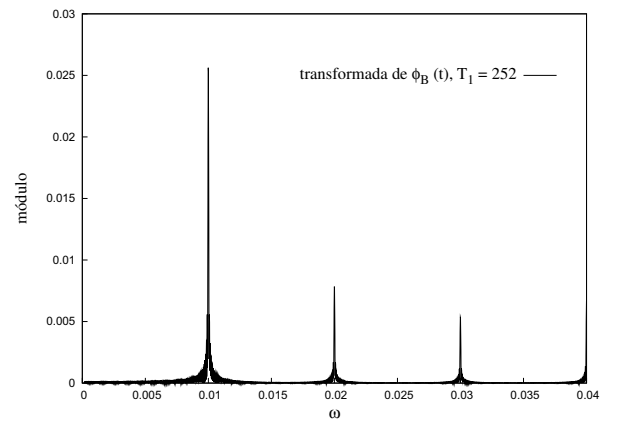
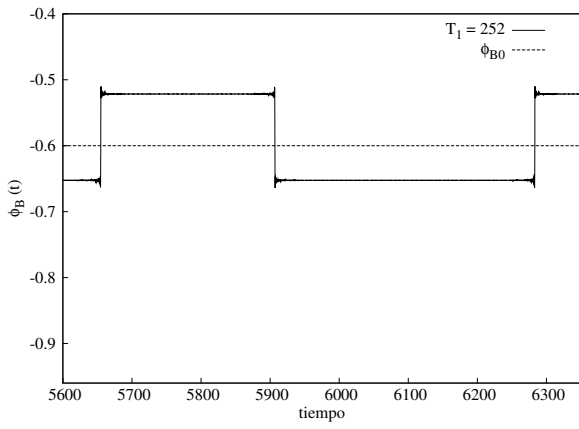
De esta manera, se impusieron las señales  $\phi_B(t)$  de tipo escalón que se muestran en la figura (3.4). Aunque se conoce la frecuencia dominante de estas señales, se hizo la transformada de Fourier <sup>1</sup> con el fin de realizar una comparación con la respuesta del sistema.

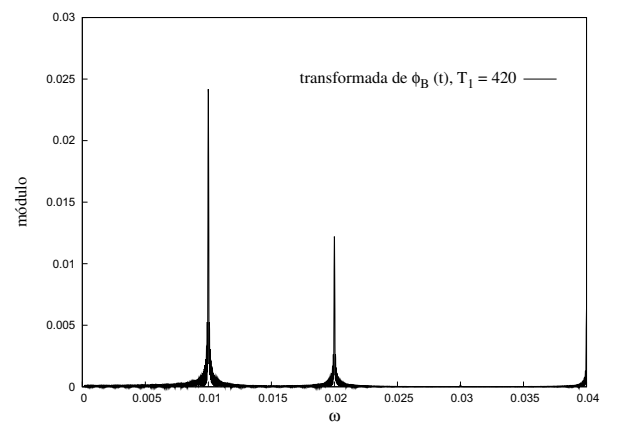
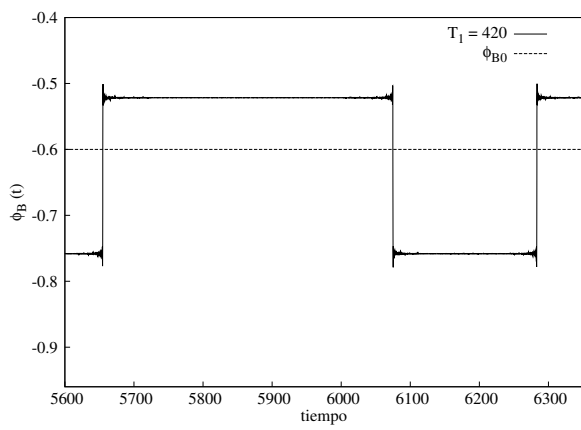
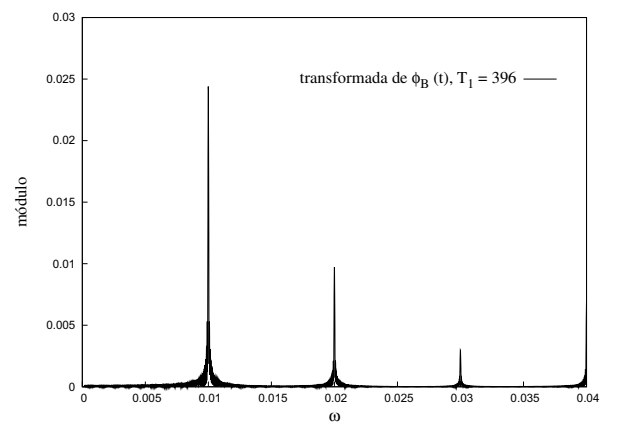
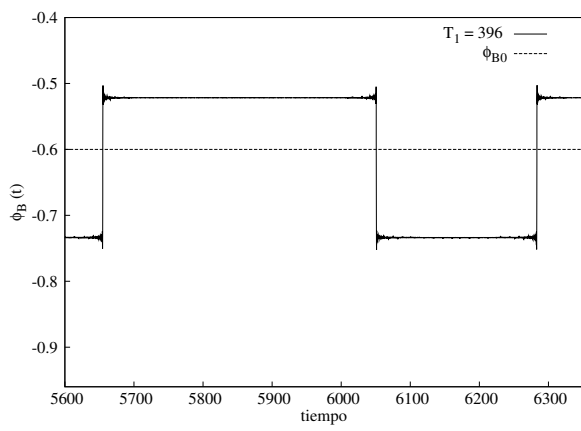
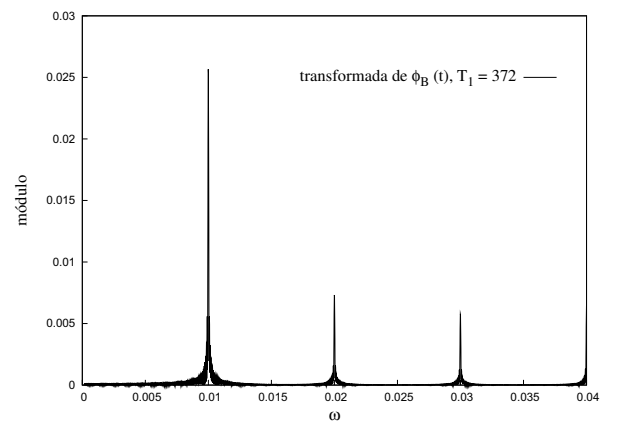
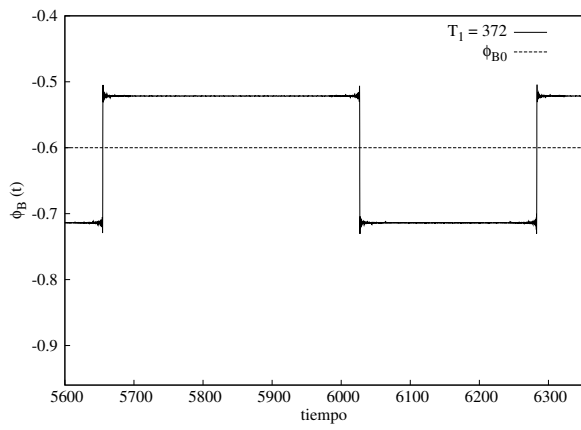
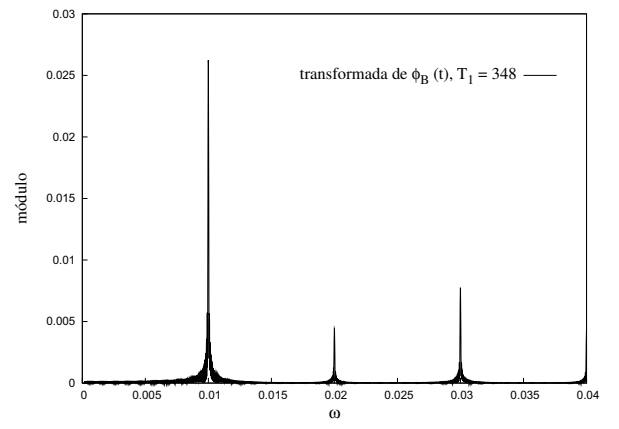
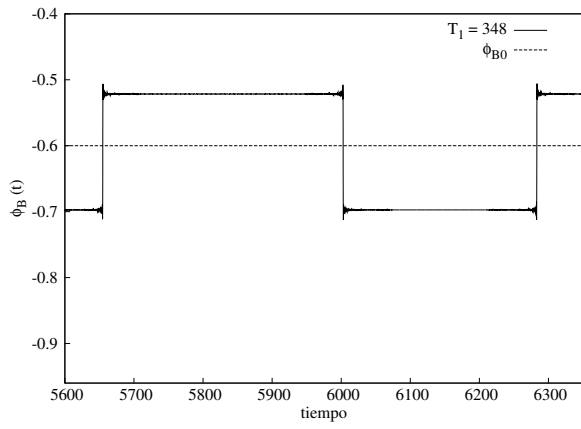
<sup>1</sup>La transformada de Fourier de las señales se hizo de forma numérica, utilizando los valores  $\phi_B(t)$ , y después se calculó el módulo de la transformada:

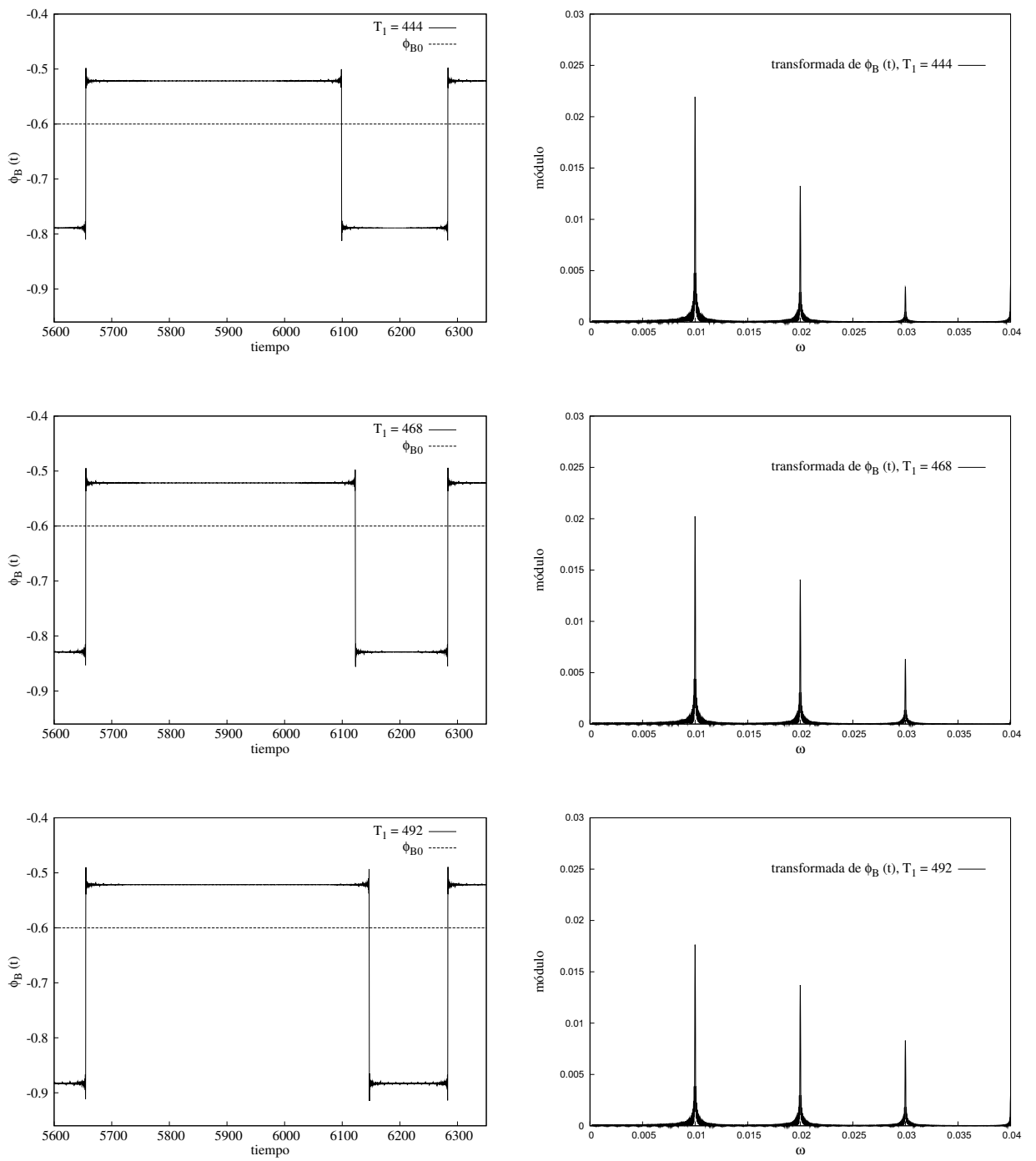
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_B(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_B(t) [\text{cos}(\omega t) - i \text{sen}(\omega t)] dt$$

$$|F| = \sqrt{[\int_{-\infty}^{\infty} \phi_B(t) \text{cos}(\omega t) dt]^2 + [\int_{-\infty}^{\infty} \phi_B(t) \text{sen}(\omega t) dt]^2}$$

de manera análoga, se hizo para la señal de respuesta, usando los valores obtenidos del ancho del dedo,  $\lambda(t)$





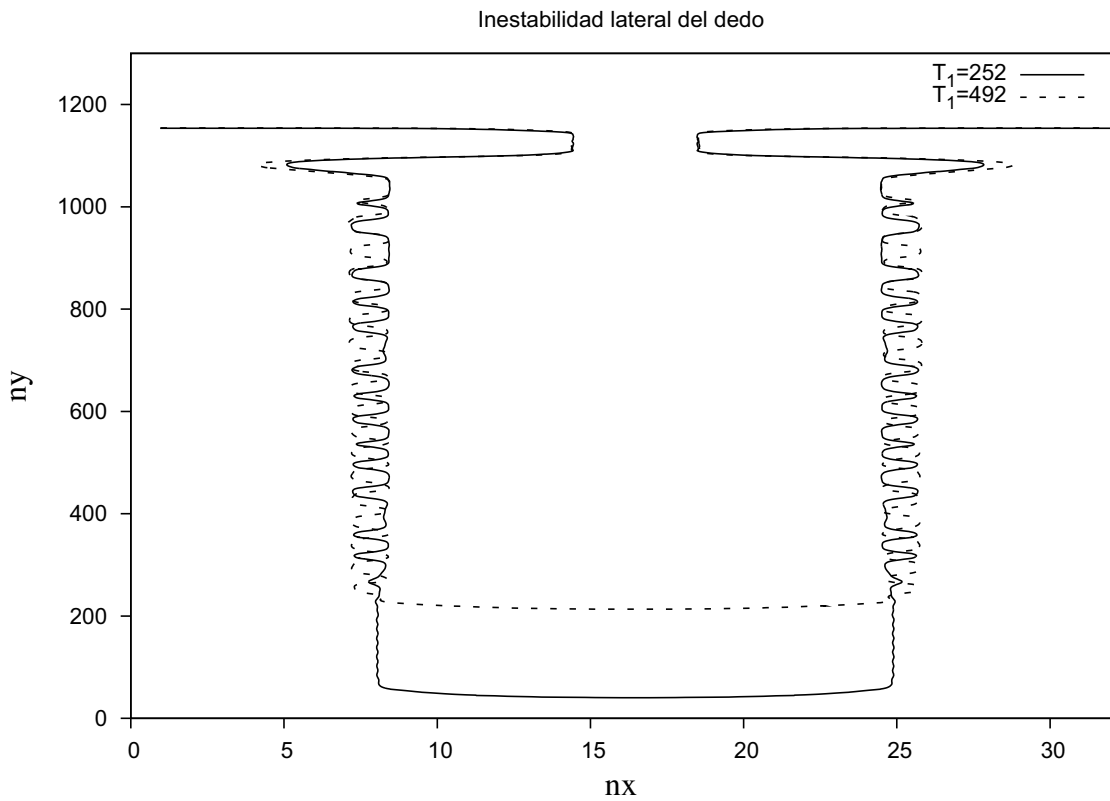


**Figura 3.4-** Señales incidentes  $\phi_B(t)$  de tipo escalón con sus correspondientes transformadas de fourier. Se puede ver el pico correspondiente a la frecuencia incidente,  $\omega_0 = 0.01$ , que se escogió para todas las señales, también se pueden apreciar otros picos de menor intensidad que indican los armónicos que componen la señal.

### 3.3. Inestabilidad lateral del dedo

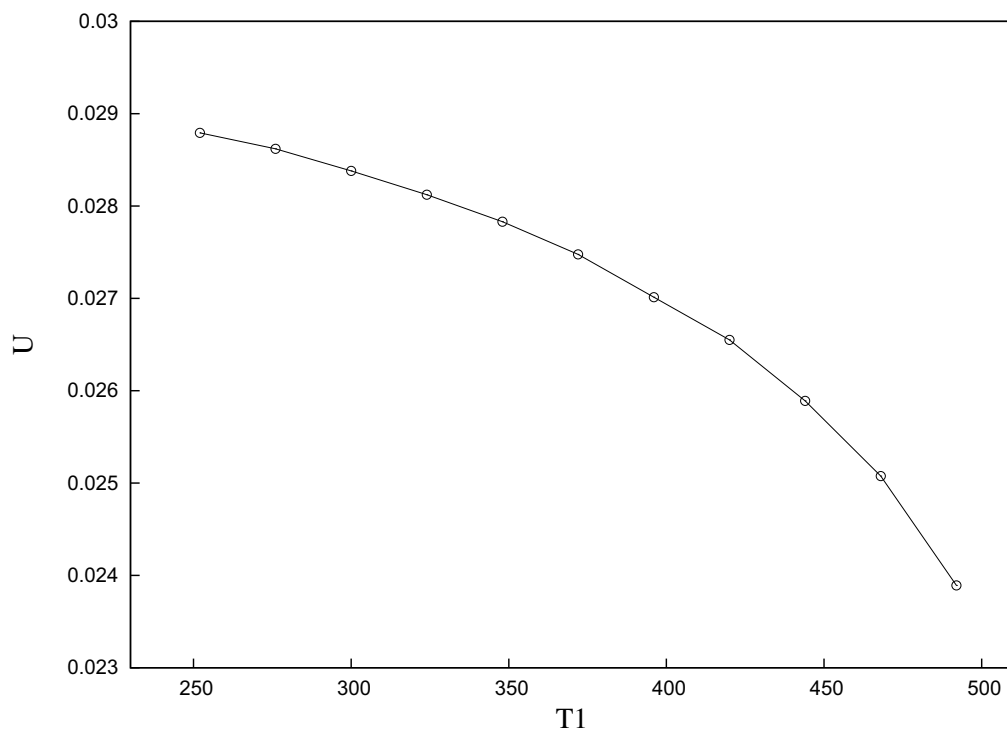
Se encontró que imponiendo los gradientes de presión asimétricos de tipo escalón que se muestran en la figura (3.4), la inestabilidad lateral del dedo de Saffman-Taylor efectivamente es distinta a la observada con la señal simétrica cosenoidal.

En la figura (3.5), se muestra la inestabilidad lateral de la interfase fluido-fluido que resulta de las perturbaciones más extremas, es decir, con los valores mínimo y máximo de  $T_1$ .



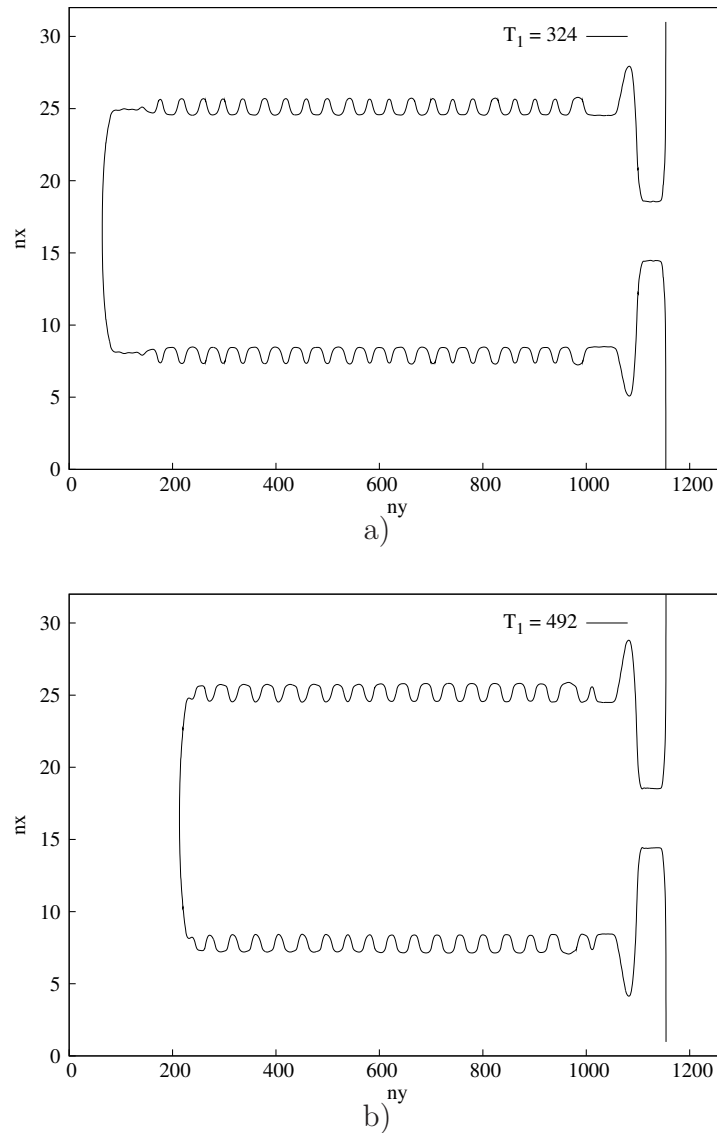
**Figura 3.5-** *Interfases obtenidas con los valores mínimo y máximo de  $T_1$ . Se puede observar una diferencia en el avance del frente del dedo para las dos perturbaciones.*

Es importante destacar que el avance del frente del dedo es considerablemente menor para la señal con mayor  $T_1$ , es decir, entre mayor sea el valor de  $T_1$  la velocidad del dedo es menor, lo que por conservación de la masa indica un mayor ancho del dedo y un mejor vaciado del canal. En la figura (3.6) se muestra la gráfica de la velocidad en la punta del dedo,  $U$ , como función de  $T_1$ .



**Figura 3.6-** Gráfica de la velocidad en la punta del dedo,  $U$ , como función de  $T_1$ . Se puede ver que la velocidad disminuye conforme aumenta  $T_1$ .

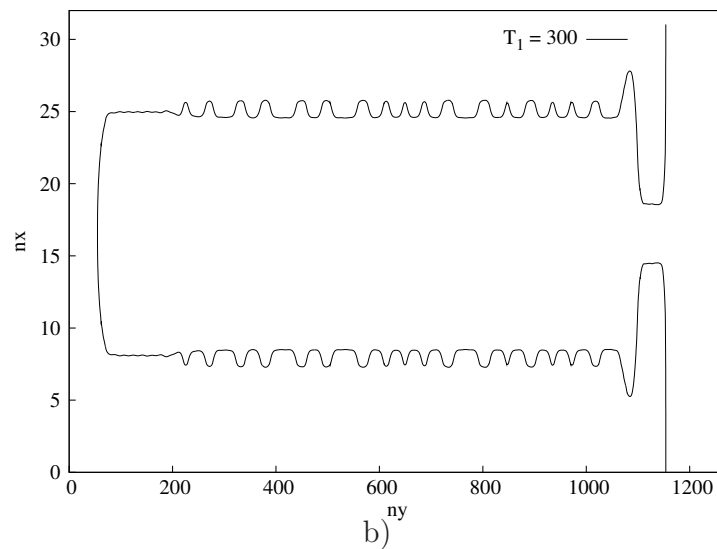
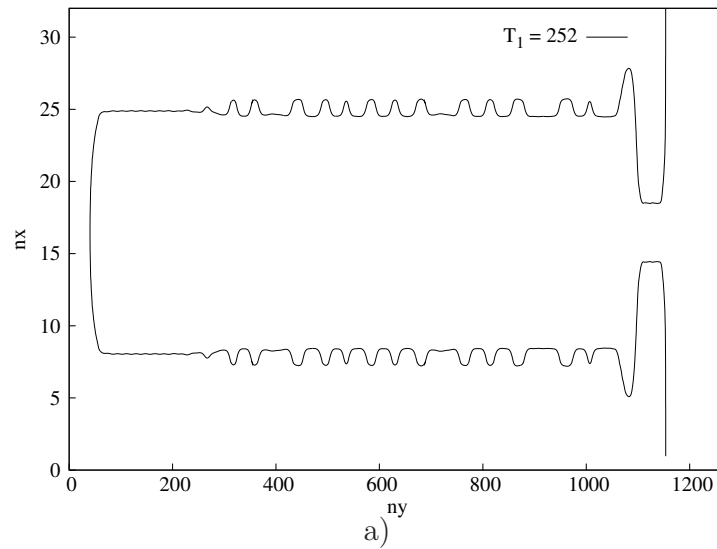
Se observó también que para valores relativamente grandes de  $T_1$  (a partir de  $T_1 = 324 = 0.516T$ ), conforme más grande es  $T_1$  más cerca de la punta se satura la inestabilidad. Esta saturación ocurre tanto en frecuencia como en amplitud, como se muestra en las figuras (3.7 a) y (3.7 b) para dos valores de  $T_1$ .



**Figura 3.7-** Interfases obtenidas para dos valores de  $T_1$ , ambos perfiles corresponden a un mismo tiempo de integración  $t = 40400$ . Se puede observar que para estos valores de  $T_1$  tanto la frecuencia como la amplitud de la inestabilidad lateral del dedo se han saturado.

Por otro lado, se encontró que para valores relativamente pequeños de  $T_1$  (hasta  $T_1 = 300 = 0.478T$ ) la inestabilidad lateral parece saturarse en amplitud mas no en frecuencia,

como se observa en la figura (3.8). Además, esta saturación en amplitud ocurre a distancias más alejadas de la punta que para los valores grandes de  $T_1$  de la figura (3.7).

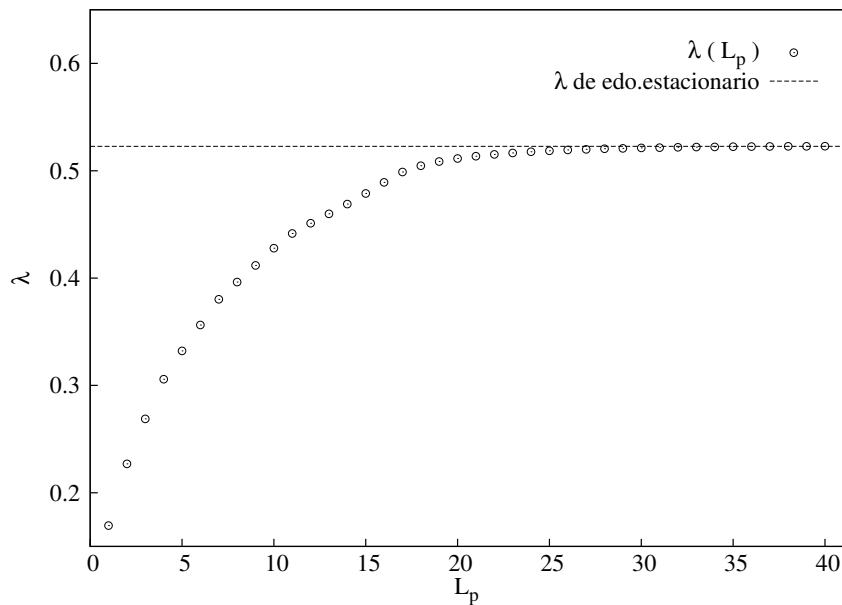


**Figura 3.8-** Interfases obtenidas para dos valores de  $T_1$ , ambos perfiles corresponden a un mismo tiempo de integración  $t = 40400$ . Se puede observar que para estos valores de  $T_1$  la frecuencia de la inestabilidad lateral del dedo no se ha saturado.



Es importante hacer notar que “cerca” y “lejos” de la punta del dedo son términos relativos con definiciones arbitrarias, y sin embargo útiles para estudiar distintas etapas en la dinámica de este sistema.

El dedo en estado estacionario tiene un radio de curvatura tal, que el largo de la punta es aproximadamente igual al ancho del canal. Esto se puede observar cuando se mide el ancho del dedo estacionario a diferentes distancias de la punta,  $L_p$ , como se muestra en la figura (3.9).



**Figura 3.9-** Gráfica del ancho del dedo,  $\lambda$ , como función de  $L_p$ . Se puede ver que el valor constante del ancho del dedo en estado estacionario se alcanza a una distancia  $L_p = 35$  que es aproximadamente igual al ancho del canal,  $W = 32$ .

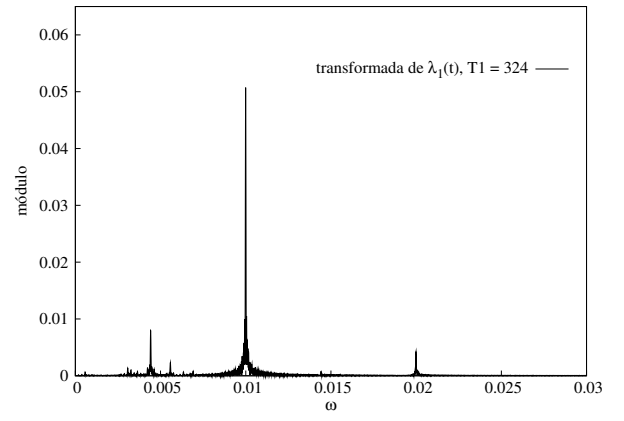
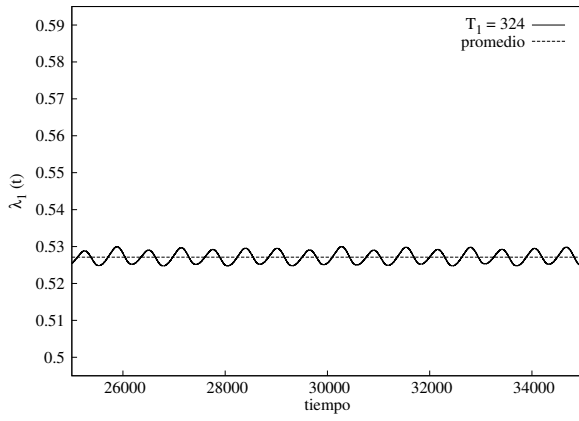
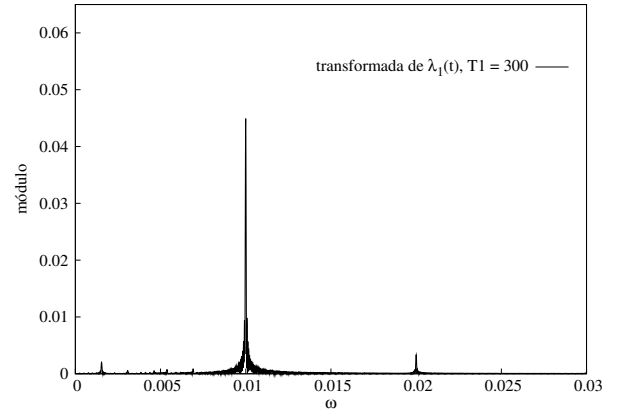
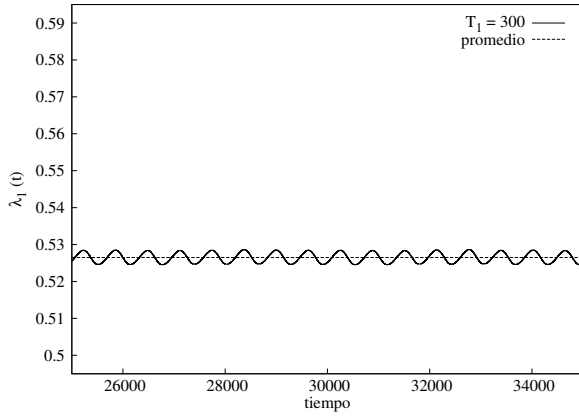
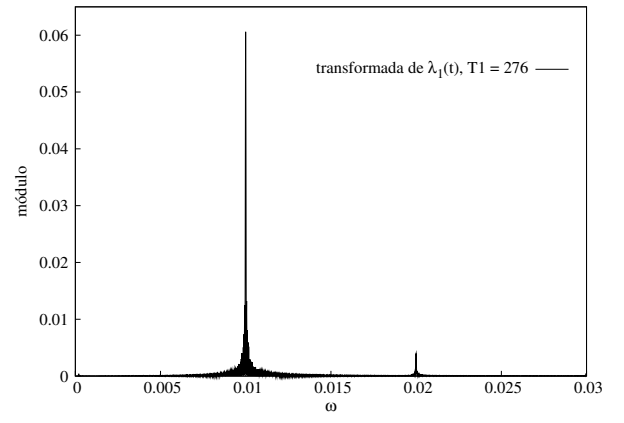
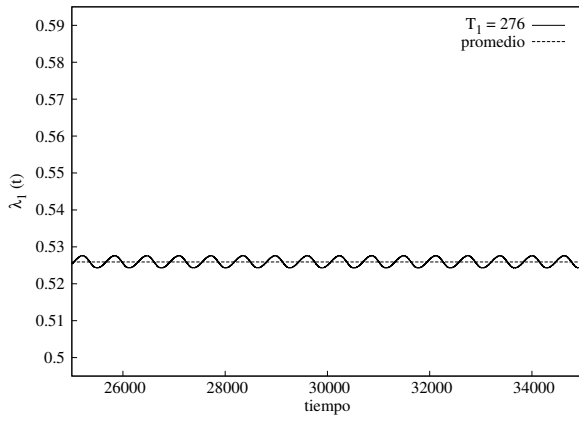
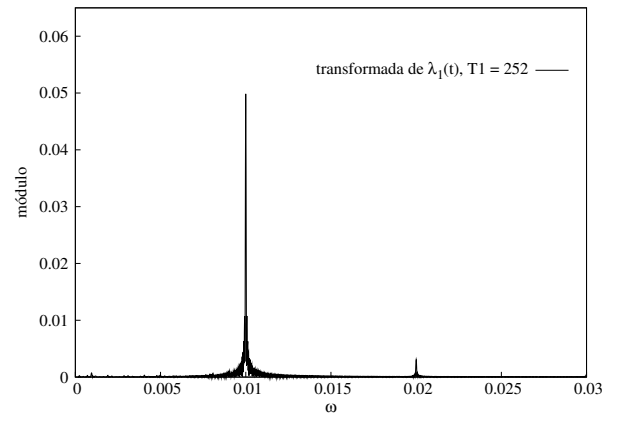
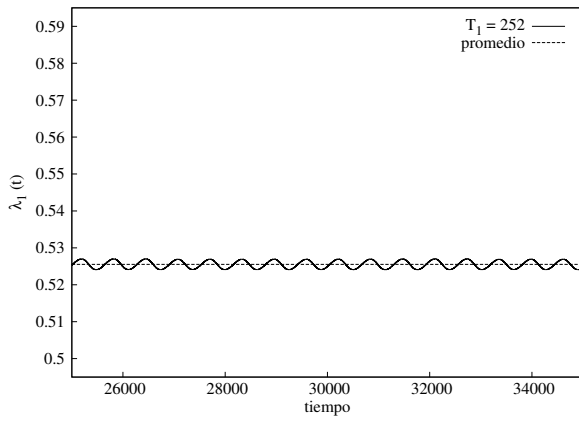
Se puede por tanto considerar que “el cuerpo” del dedo comienza a una distancia de la punta mayor a  $L_p = 35$ . Es por ello que para estudiar la dinámica de la inestabilidad “cerca” de la punta, se eligió una distancia  $L_1 = 40$ .

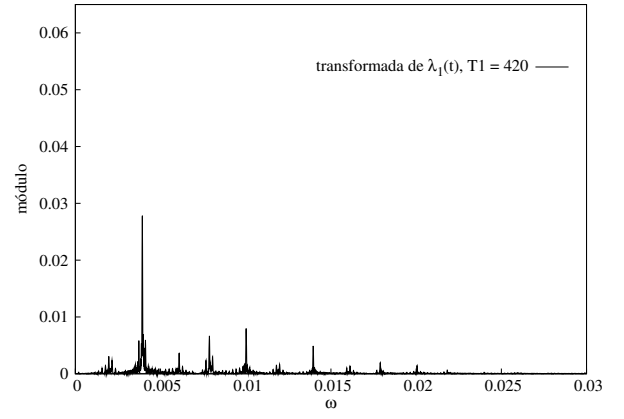
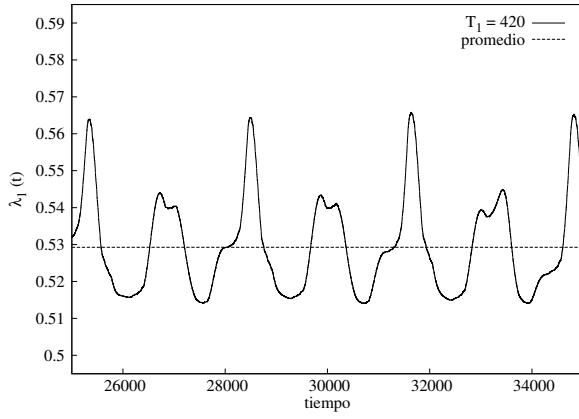
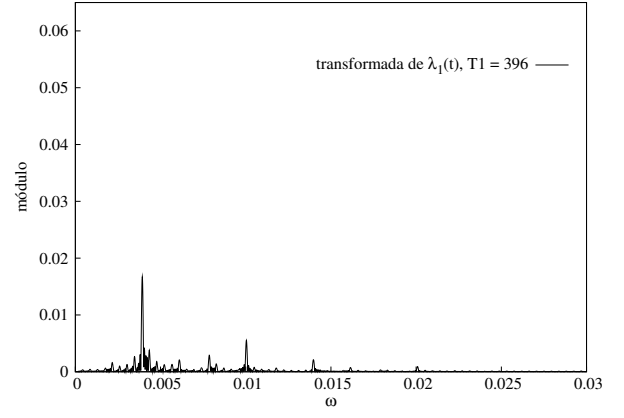
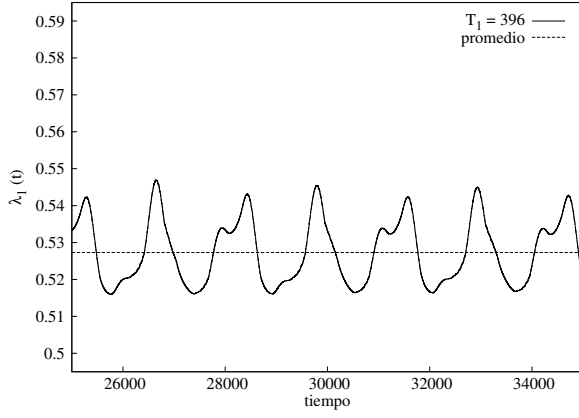
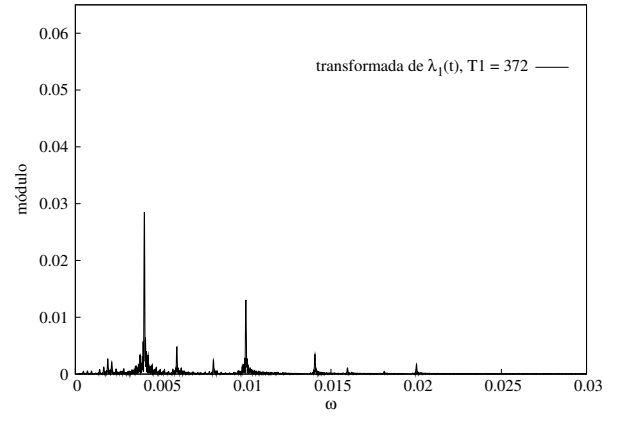
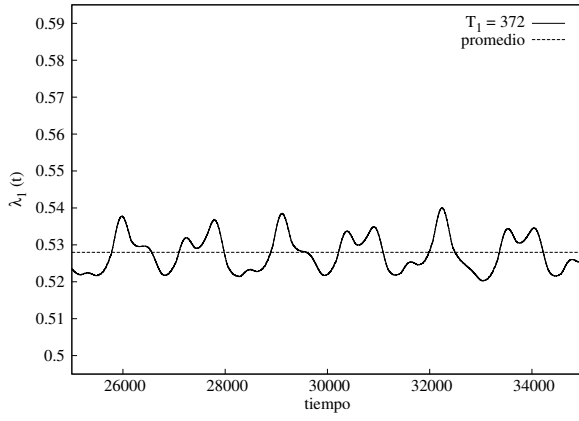
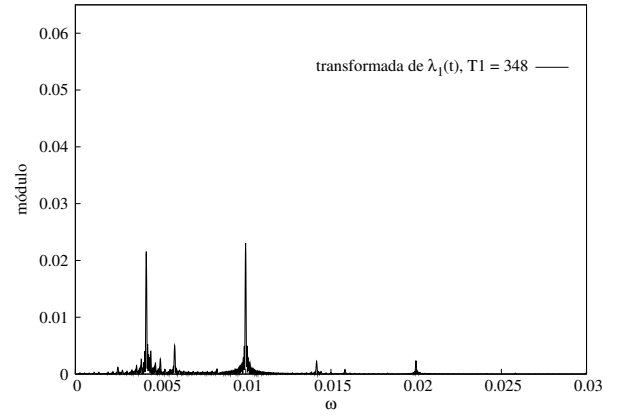
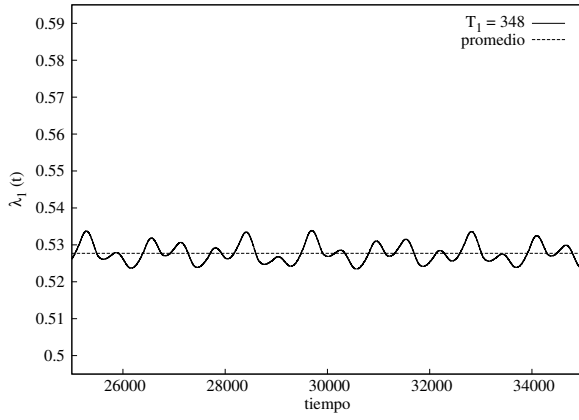
### 3.4. Ancho del dedo como función del tiempo

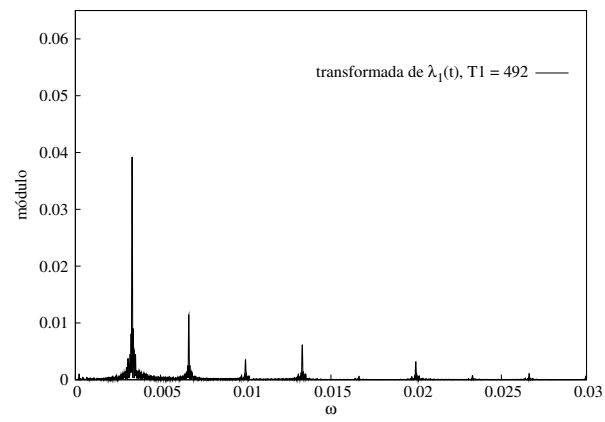
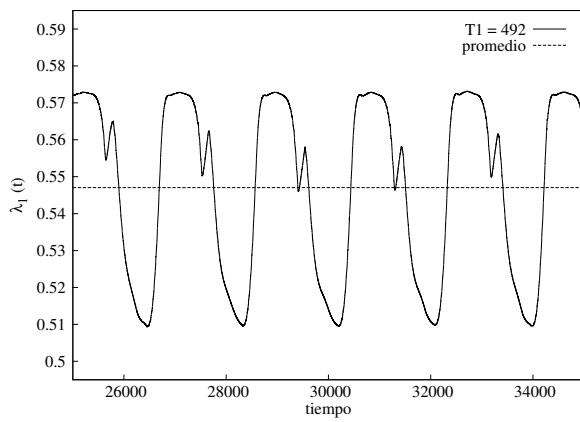
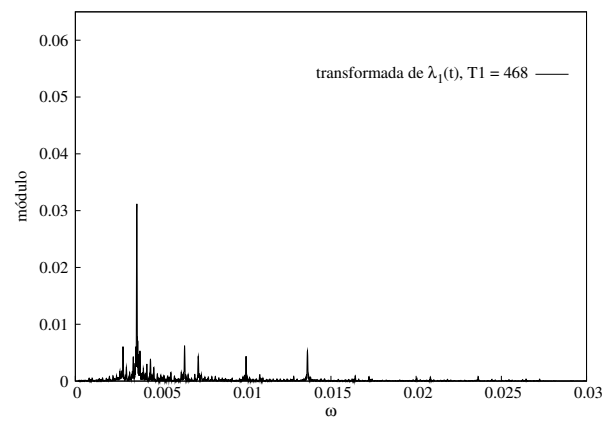
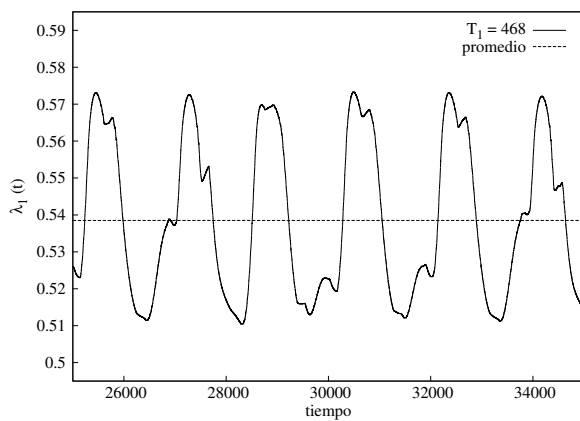
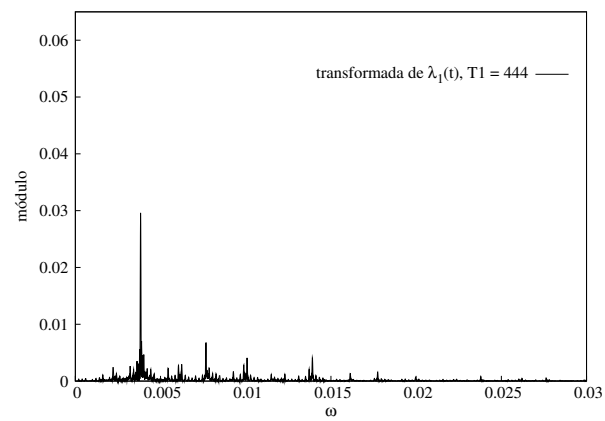
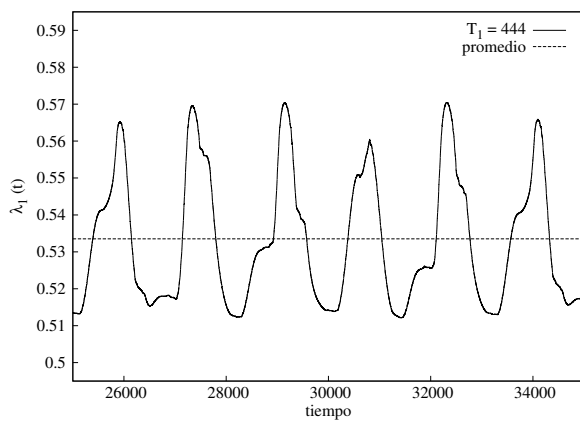
#### 3.4.1. Región cercana a la punta del dedo

Se estudió el comportamiento de la inestabilidad lateral del dedo en el tiempo para distintos valores de  $T_1$ , para ello se midió el ancho del dedo,  $\lambda_1(t)$ , en una región cercana a la punta del dedo, a una distancia  $L_1 = 40$  de la punta, en la que para la señal simétrica la amplitud de la inestabilidad no se ha saturado [6, 7].

En general, la señal  $\lambda_1(t)$  obtenida para distintos valores de  $T_1$  es una función que presenta más de una frecuencia. Por esta razón fue necesario aplicar la transformada de Fourier a cada señal, ya que esta herramienta permite pasar del dominio temporal al dominio de frecuencias. En este dominio, el módulo de la transformada de  $\lambda_1(t)$  en función de la frecuencia, presenta una serie de picos que indican los valores de frecuencia que componen la señal. En la figura (3.10), se muestran el ancho del dedo como función del tiempo,  $\lambda_1(t)$ , en la columna de la izquierda y su correspondiente transformada de Fourier en la columna de la derecha para once valores de  $T_1$ .

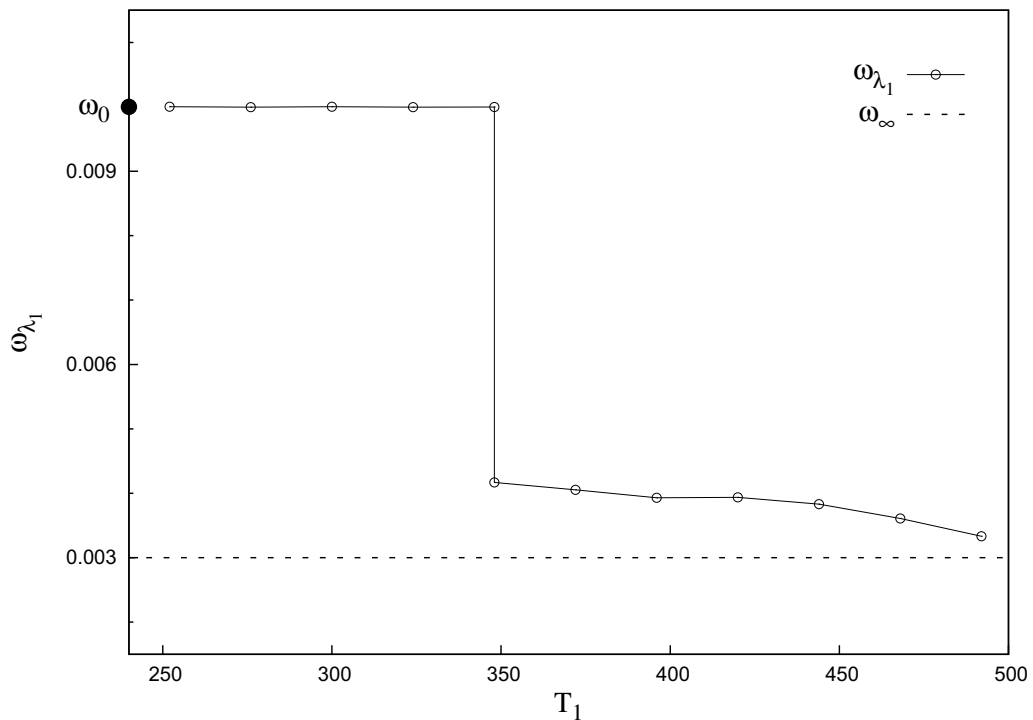






**Figura 3.10-** En la columna izquierda se encuentran las señales  $\lambda_1(t)$  obtenidas con cada  $T_1$ , en la columna derecha se muestran sus correspondientes transformadas de Fourier.

Al analizar la columna derecha de la figura (3.10) se puede observar que al incrementar el valor de  $T_1$ , la transformada de  $\lambda_1(t)$  pasa de tener una frecuencia dominante igual a la frecuencia incidente ( $\omega_0 = 0.01$ ) a tener otra de menor valor. Hasta  $T_1 = 324$  la frecuencia dominante es igual a la frecuencia incidente, indicada por un pico de gran intensidad en la transformada de Fourier. Para  $T_1 = 348$  se tiene una transición a dos frecuencias, con picos de prácticamente la misma intensidad. A partir de este valor de  $T_1$ , la frecuencia dominante es menor a la incidente y su valor disminuye conforme aumenta  $T_1$ . Con las transformadas de Fourier de las señales  $\lambda_1(t)$  se obtuvieron los valores de frecuencia que componen cada señal,  $\omega_{\lambda_1}$ . La figura 3.11 muestra la transición en la frecuencia de respuesta al variar  $T_1$ .



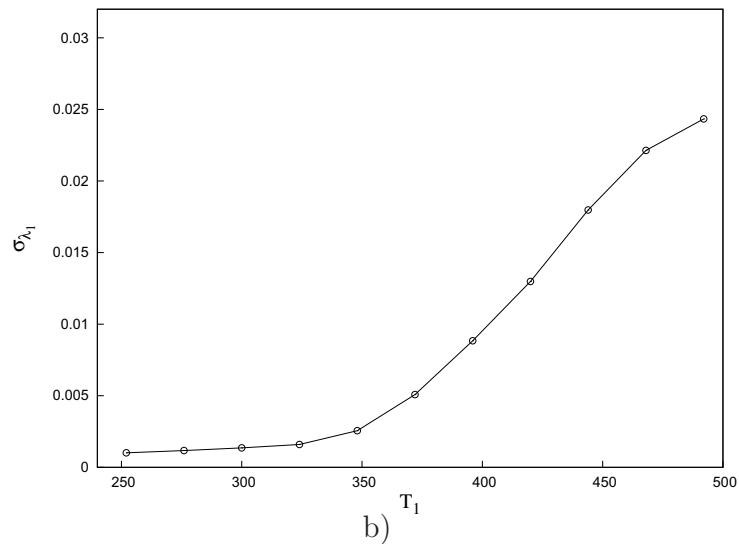
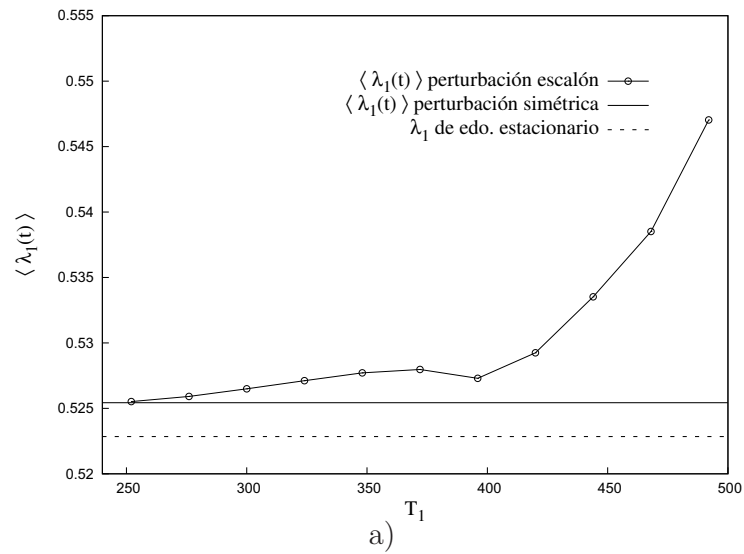
**Figura 3.11-** Frecuencia de las señales  $\lambda_1(t)$  como función de  $T_1$ . Puede observarse en el eje de las ordenadas un círculo correspondiente al valor de la frecuencia incidente,  $\omega_0 = 0.01$ . La línea punteada indica la frecuencia característica del sistema lejos de la punta del dedo,  $\omega_\infty$ .

En esta figura se puede ver más claramente que hasta  $T_1 = 324$ , la frecuencia dominante del sistema es igual a la frecuencia incidente, esto es,  $\omega_{\lambda_1} = \omega_0 = 0.01$ . Con  $T_1 = 348$  se tienen dos frecuencias de respuesta igualmente importantes, una con un valor de 0.0041 y otra que corresponde a la frecuencia incidente. A partir de este valor de  $T_1$  la frecuencia de respuesta dominante disminuye lentamente hasta un valor de 0.0033. Esto sugiere que al incrementar el valor de  $T_1$ , la frecuencia de respuesta dominante,  $\omega_{\lambda_1}$ , tiende a la frecuencia característica del sistema lejos de la punta del dedo,  $\omega_\infty = 0.003$ .

En la figura (3.12 a) se muestra la gráfica del ancho promedio del dedo  $\langle \lambda_1(t) \rangle$  como función de  $T_1$ . En ésta se ve claramente que el ancho promedio del dedo obtenido con las señales asimétricas de tipo escalón, no sólo es más grande que el valor de estado estacionario, sino que siempre es mayor al obtenido con la señal simétrica cosenoidal. El ancho promedio crece conforme aumenta  $T_1$ . Esta tendencia presenta dos comportamientos distintos, el primero, es un crecimiento aproximadamente lineal hasta  $T_1 = 372$ , a partir del cual se tiene un comportamiento exponencial. Este último corresponde a los valores de  $T_1$  para los cuales la inestabilidad lateral está saturada. El valor más grande del ancho del dedo se obtiene con la  $T_1$  máxima. Este representa un incremento de 4.6 % con respecto al valor del dedo en estado estacionario y de 4.1 % con respecto al valor del ancho obtenido con la señal simétrica.

Como se puede observar en la columna izquierda de la figura (3.10), para los primeros cuatro valores de  $T_1$ , las fluctuaciones de las señales  $\lambda_1(t)$  permanecen prácticamente constantes, en cambio, para los siguientes valores de  $T_1$  se tiene un crecimiento considerable en dichas fluctuaciones. Con el propósito de cuantificar estas variaciones, se calculó la

desviación estándar del ancho del dedo como  $\sigma_{\lambda_1} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\lambda_1(t) - \langle \lambda_1(t) \rangle)^2}$ . En la figura (3.12 b) se encuentra la gráfica de la desviación estándar del ancho del dedo como función de  $T_1$ .

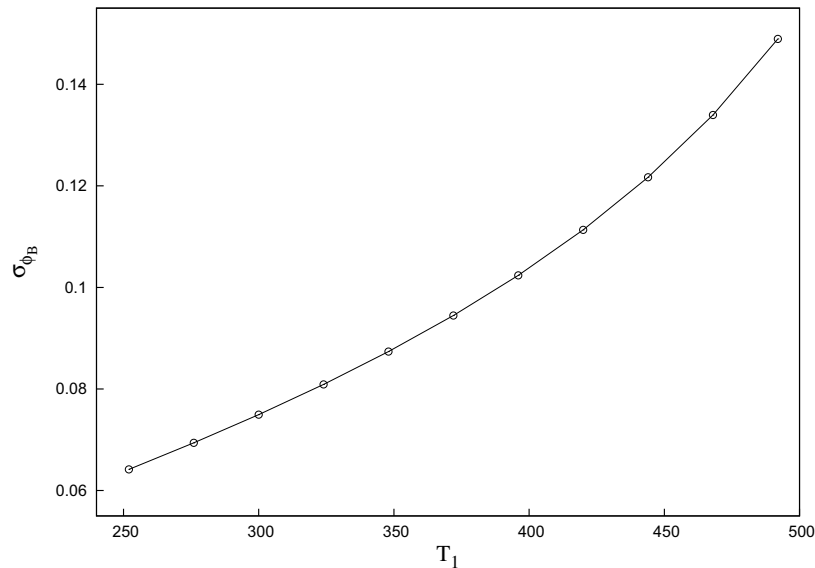


**Figura 3.12-** a) Valores promedio de las señales  $\lambda_1(t)$  vs  $T_1$ . La línea punteada indica el ancho del dedo de estado estacionario, la línea continua indica el ancho promedio del dedo obtenido con la perturbación simétrica. b) Desviación estándar de estas señales como función de  $T_1$ .



En ésta se observa que la desviación estándar de  $\lambda_1(t)$  crece conforme aumenta  $T_1$ , este crecimiento es mayor a partir de que se presenta el cambio de frecuencia dominante que coincide con el valor de  $T_1$  al cual la inestabilidad se satura ( $T_1 = 348$ ). El valor de la desviación estándar para  $T_1 = 492$  es 24 veces mayor que aquel para  $T_1 = 252$ , esto es, las fluctuaciones en la respuesta del sistema crecen conforme aumenta el valor de  $T_1$  de la señal incidente.

Cabe destacar que mayor  $T_1$  también quiere decir mayores fluctuaciones de la señal incidente, como se ve en la figura (3.13), dichas fluctuaciones se reflejan de algún modo en la respuesta del sistema, ya que, como se mostró en las figuras (3.7) y (3.8), conforme más grande es  $T_1$  más cerca de la punta se satura la amplitud de la inestabilidad lateral. Con esto se puede concluir que la distancia de saturación de la inestabilidad lateral es menor a valores altos de amplitud incidente.



**Figura 3.13-** Desviación estándar de las señales incidentes,  $\sigma_{\phi_B}$ , como función de  $T_1$ .

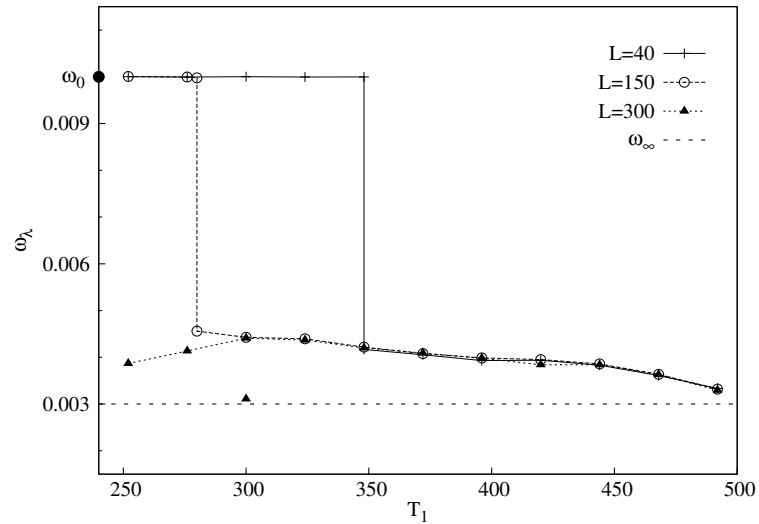
### 3.4.2. Región lejana a la punta del dedo

Como se mencionó en la sección (3.3), para valores relativamente grandes de  $T_1$ , la inestabilidad se satura más cerca de la punta conforme mayor es el valor de  $T_1$ . Por otro lado, para valores pequeños de  $T_1$ , la inestabilidad lateral parece no saturarse en frecuencia aunque sí lo hace en amplitud. Por este motivo se decidió estudiar la inestabilidad a otras dos distancias “lejos” de la punta. Las distancias fueron escogidas de modo tal que para una de ellas ( $L_2 = 300$ ) tanto la frecuencia de respuesta como la amplitud hubieran alcanzado su valor de saturación (para aquellos valores de  $T_1$  en que existe saturación de frecuencia).

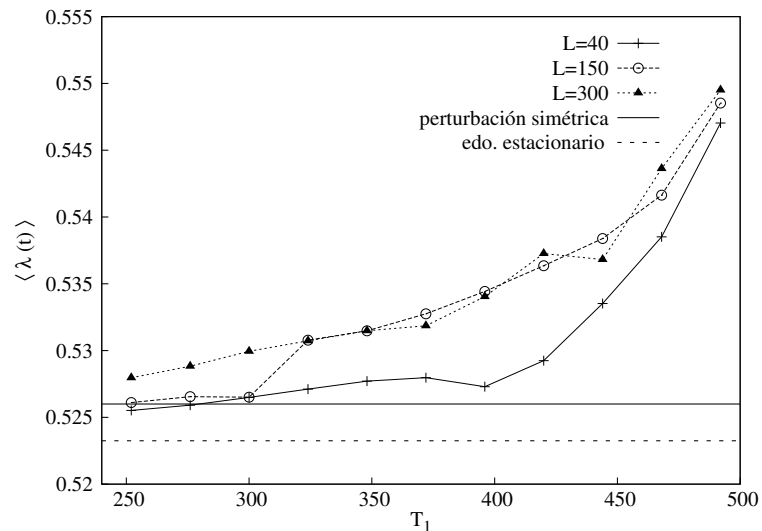
Se escogió una distancia “intermedia” ( $L_2 = 150$ ) de tal modo que mostrara la transición entre lo que se obtiene “cerca” de la punta y lo que se obtiene en la región saturada.

La figura (3.14), muestra la frecuencia de respuesta dominante medida a tres diferentes distancias de la punta. Se puede ver que la transición en frecuencia se recorre hacia la izquierda en  $T_1$  conforme más lejos se está de la punta del dedo.

La figura (3.15) muestra cómo es que a la distancia “intermedia”  $L_1 = 150$  entre la región cercana y la región saturada, el ancho del dedo como función de  $T_1$  pasa de una a otra curva a cierto valor de  $T_1$ . Muestra además, que en el cuerpo del dedo, sin importar que tan lejos se está de la punta, el ancho promedio del dedo es siempre mayor que aquel obtenido con una perturbación simétrica, y que a mayor valor de  $T_1$  mayor es (a cualquier distancia de la punta) el ancho del dedo.

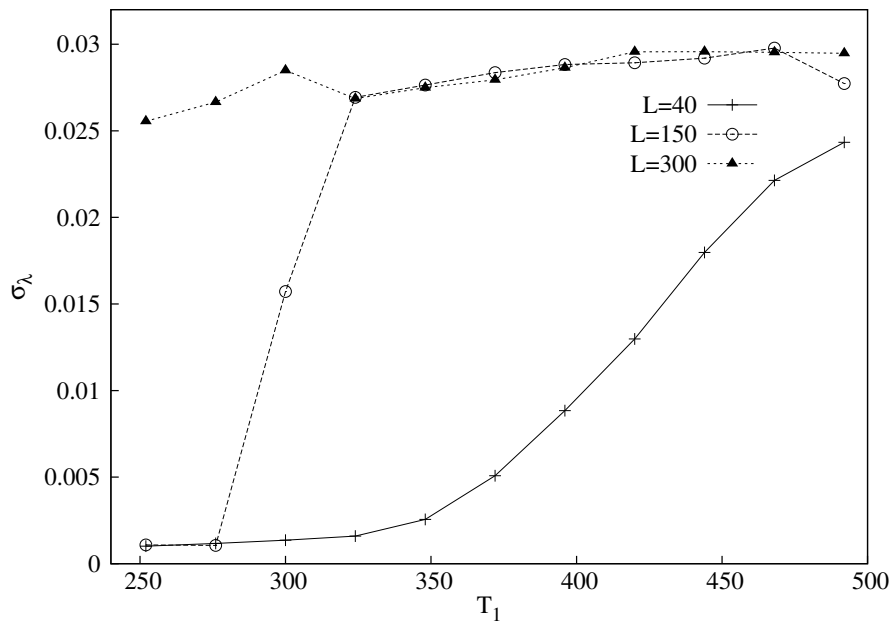


**Figura 3.14-** Frecuencia dominante de las señales  $\lambda(t)$  como función de  $T_1$  para distintas distancias de la punta del dedo. En el eje de las ordenadas se encuentra un círculo correspondiente al valor de la frecuencia incidente,  $\omega_0 = 0.01$ . La línea punteada indica la frecuencia característica del sistema lejos de la punta,  $\omega_\infty$ .



**Figura 3.15-** Valores promedio de las señales  $\lambda(t)$  vs  $T_1$  para diferentes distancias de la punta del dedo. La línea punteada indica el ancho del dedo de estado estacionario. La línea continua indica el ancho promedio del dedo obtenido con la perturbación simétrica.

Por último, la figura (3.16) muestra nuevamente cómo, a la distancia “intermedia”  $L_2 = 150$ , las fluctuaciones en amplitud pasan de tener un comportamiento como aquellas que están cerca de la punta (para valores pequeños de  $T_1$ ) a comportarse como aquellas en la región saturada para valores grandes de  $T_1$ .



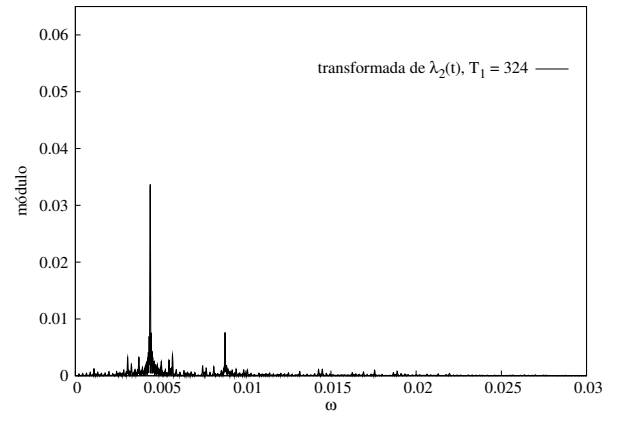
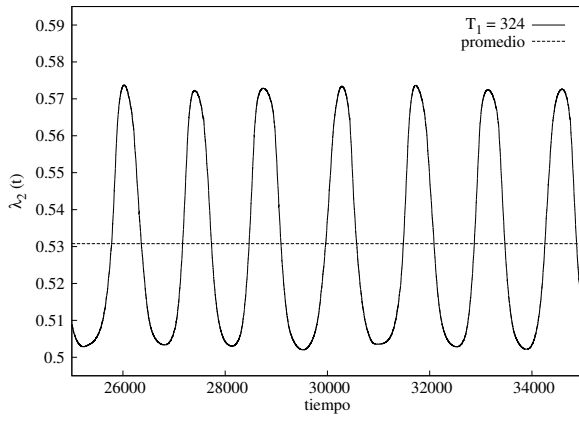
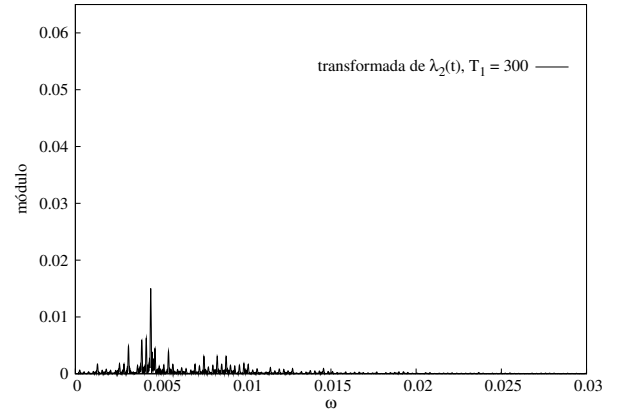
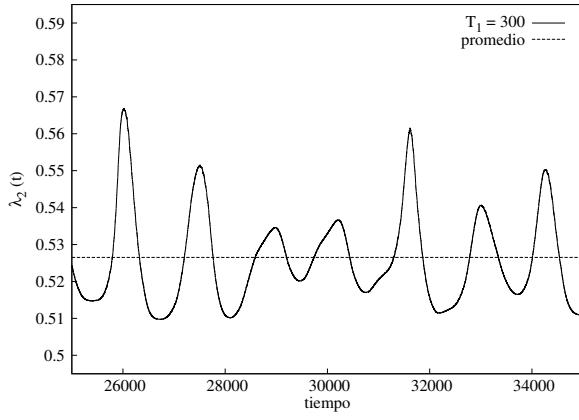
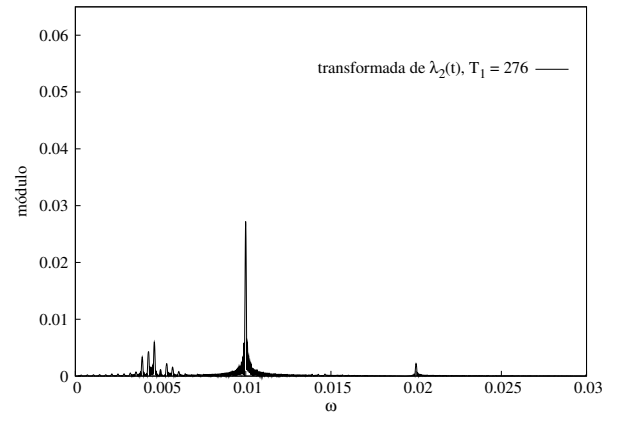
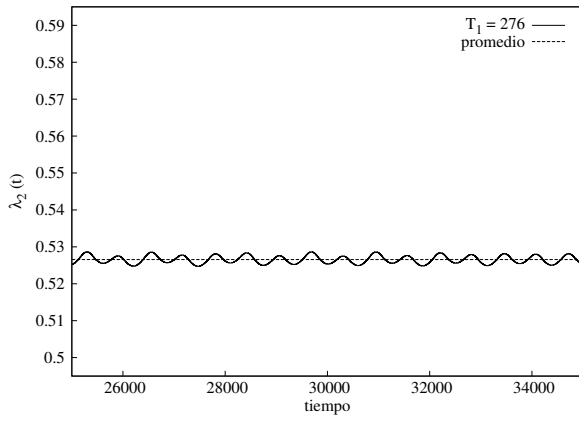
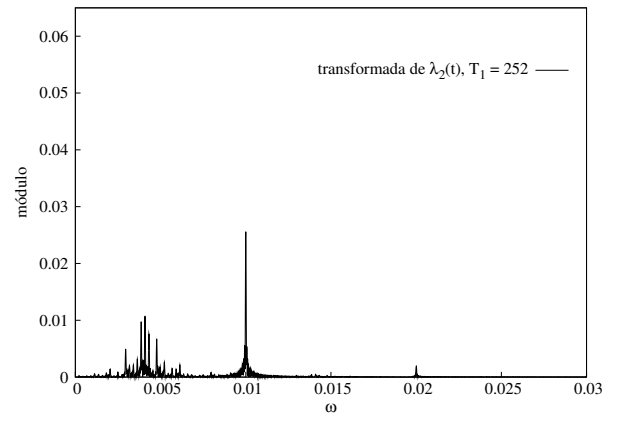
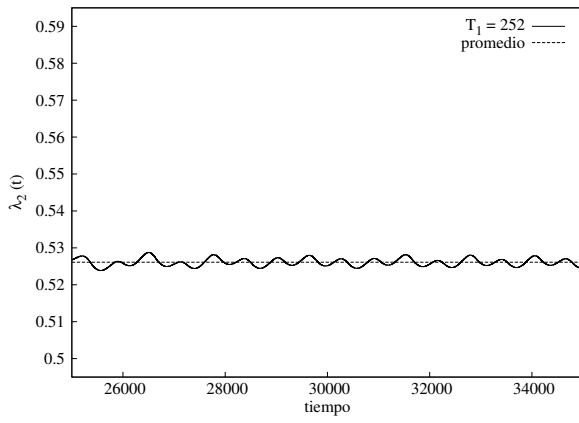
**Figura 3.16-** Desviación estándar de las señales  $\lambda(t)$  como función de  $T_1$  para diferentes distancias de la punta del dedo.

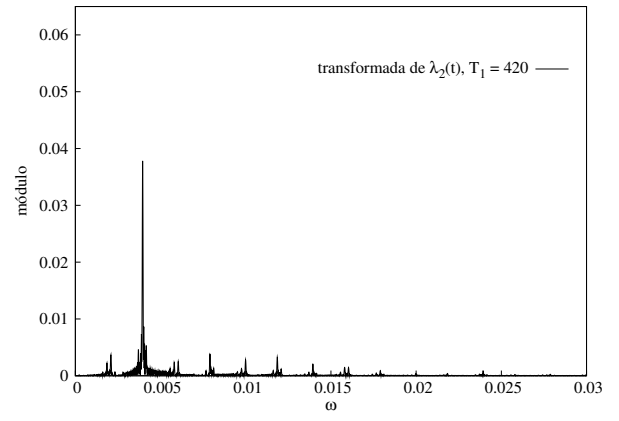
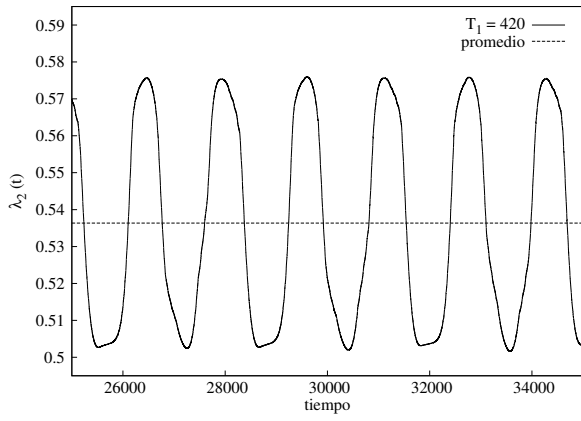
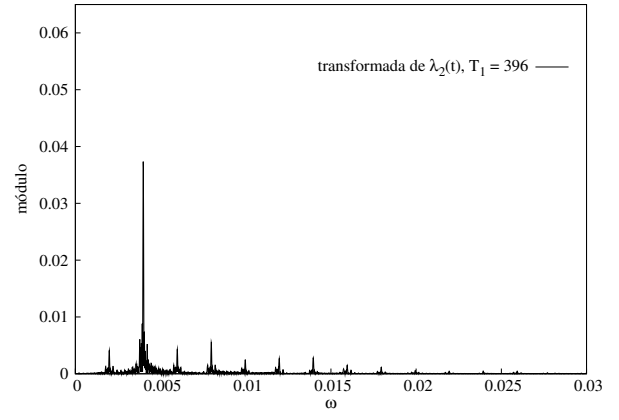
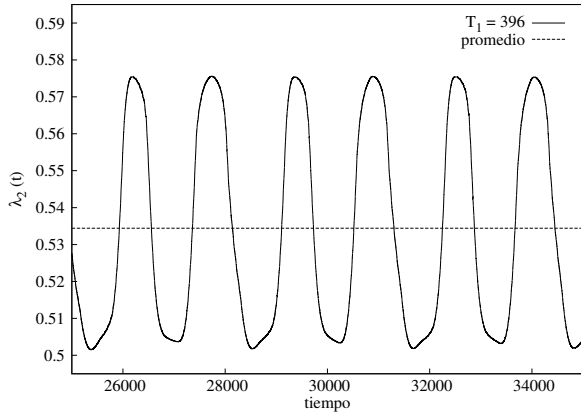
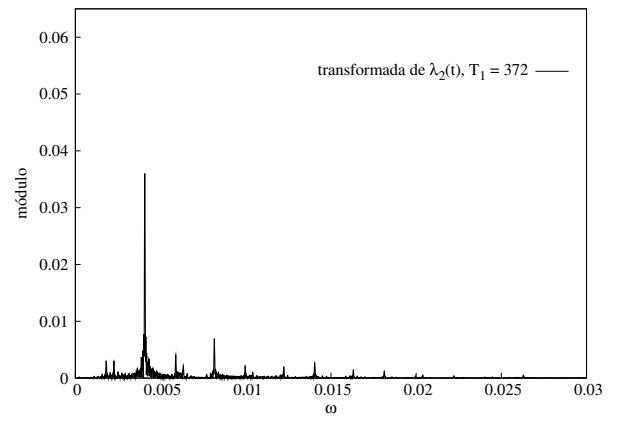
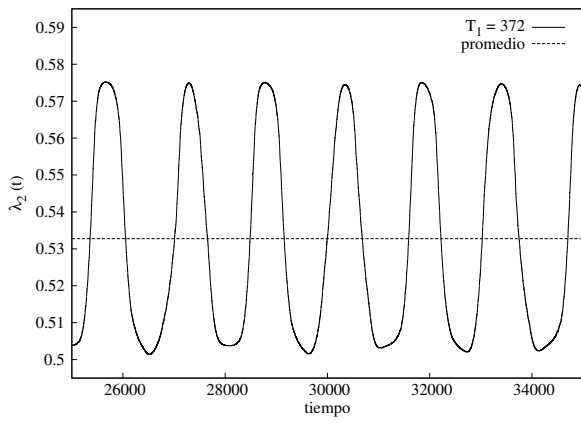
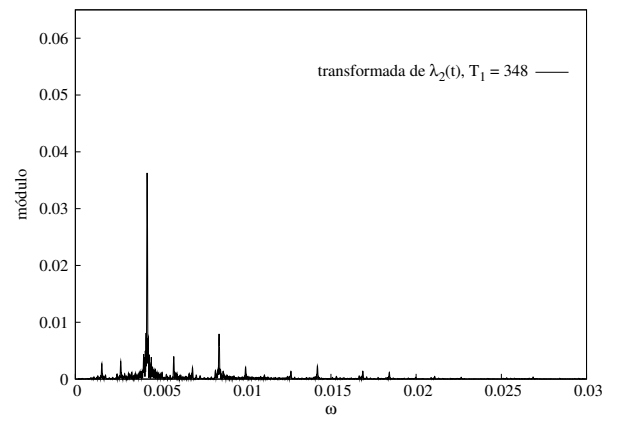
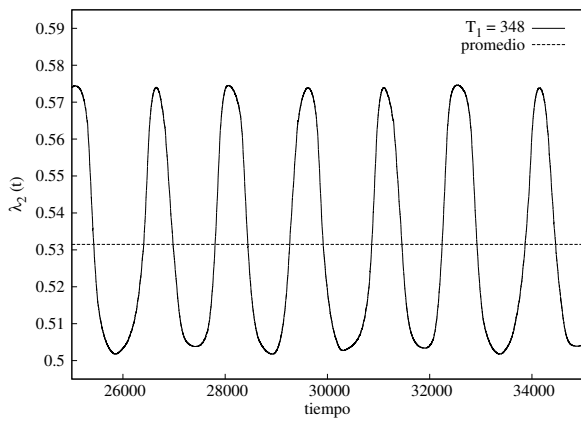
Al analizar el punto correspondiente a  $T_1 = 300$  en las gráficas (3.14) y (3.16), se puede observar que, a cualquier distancia de la punta, la frecuencia de respuesta del sistema en este punto se encuentra saturada, sin embargo, las fluctuaciones aún no se han saturado. Con esto, podemos concluir que para valores relativamente grandes de  $T_1$  existe primero (más cerca de la punta) una saturación en frecuencia y luego (más lejos de la punta) una saturación en amplitud.

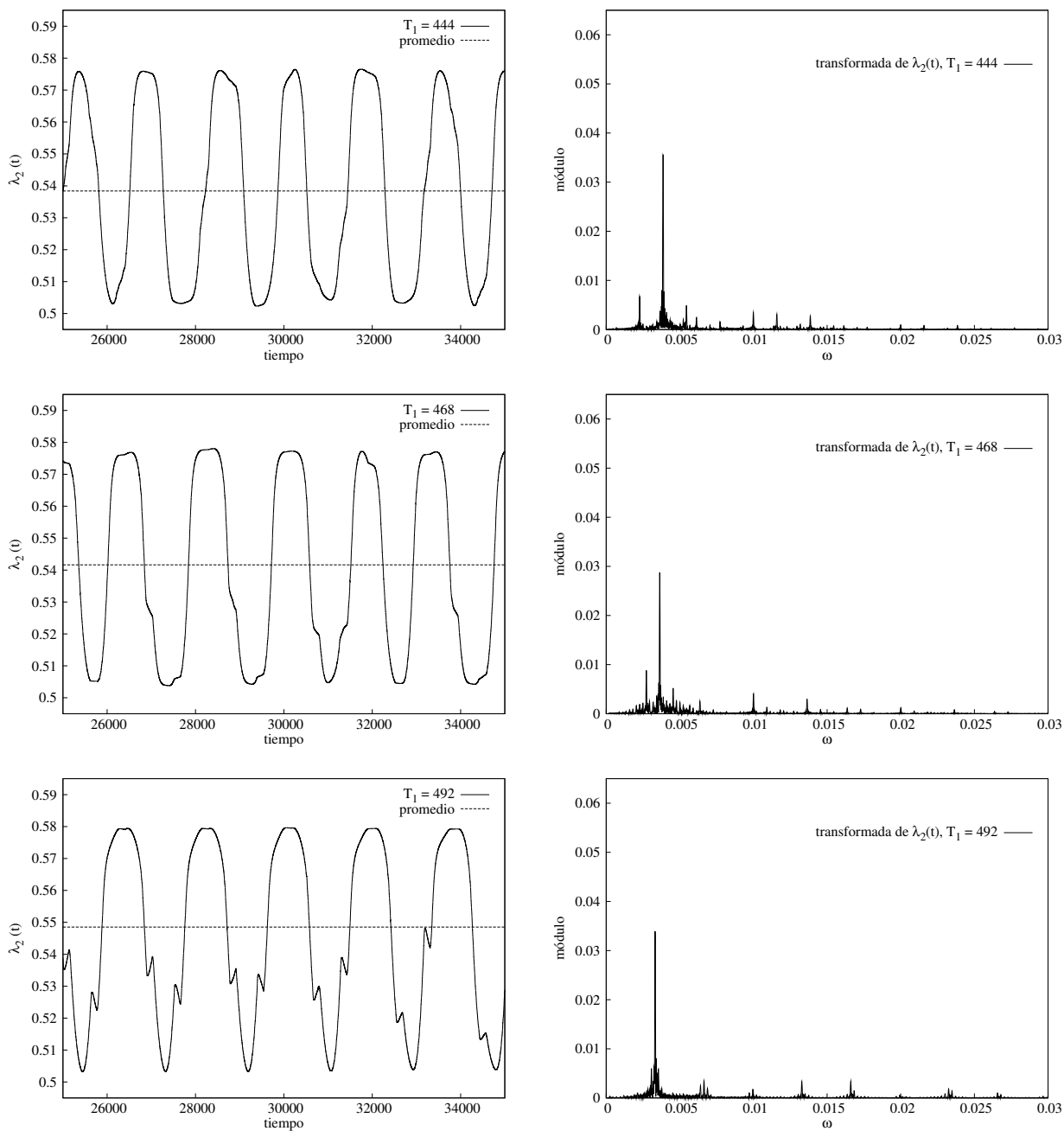
---

Para poder ver en detalle este comportamiento en la respuesta del dedo, se incluyen por completez, en las figuras (3.17) y (3.18), las gráficas de las señales del ancho del dedo,  $\lambda_2(t)$ , obtenidas para todos los valores de  $T_1$  a una distancia de la punta de  $L_2 = 150$  y  $L_2 = 300$ , respectivamente.

Cabe aclarar que aunque para los primeros valores de  $T_1$  no existe saturación, como visualmente puede apreciarse en la figura (3.8), las transformadas de Fourier del ancho del dedo como función del tiempo sí muestran una frecuencia dominante.

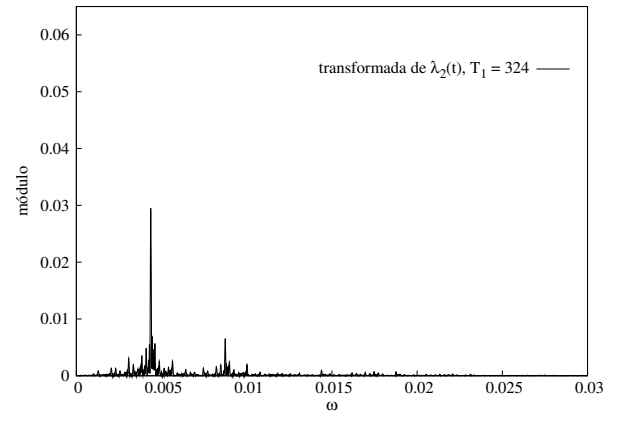
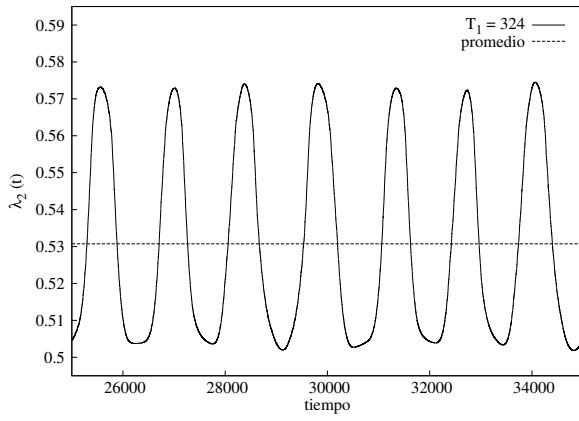
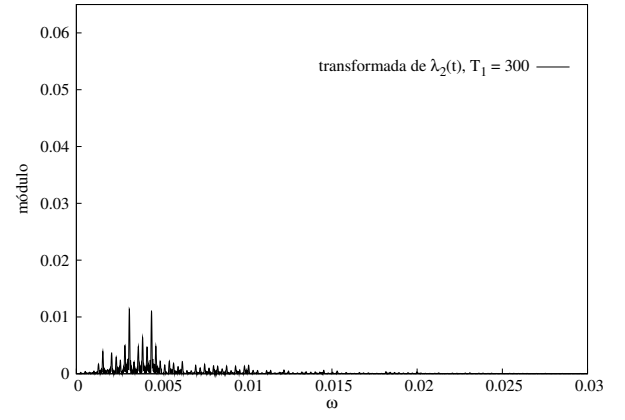
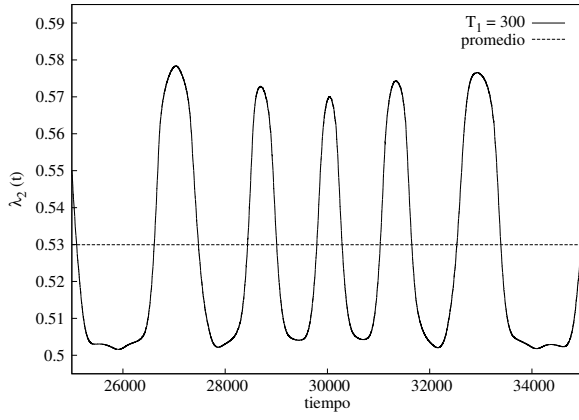
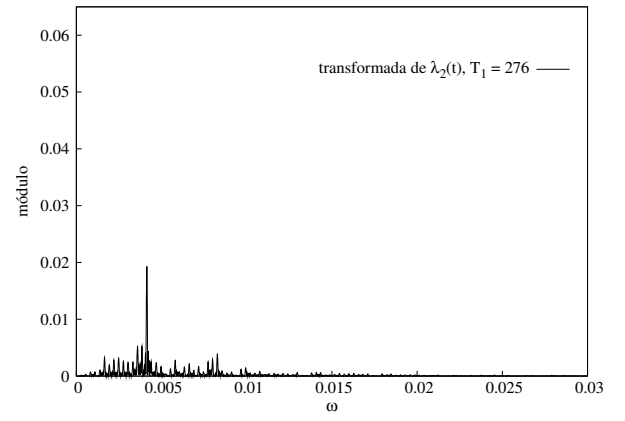
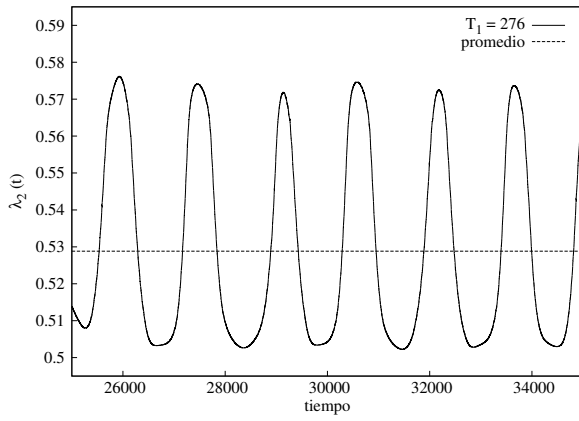
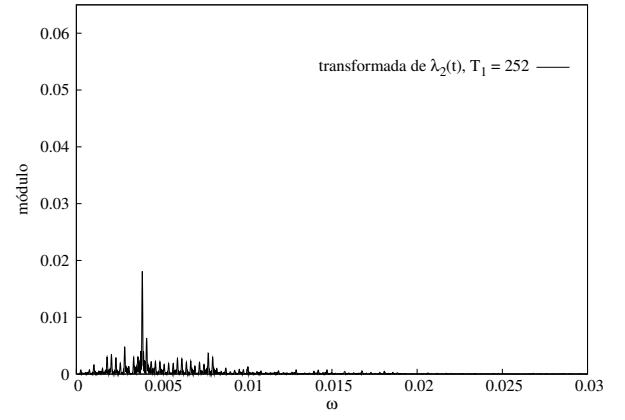
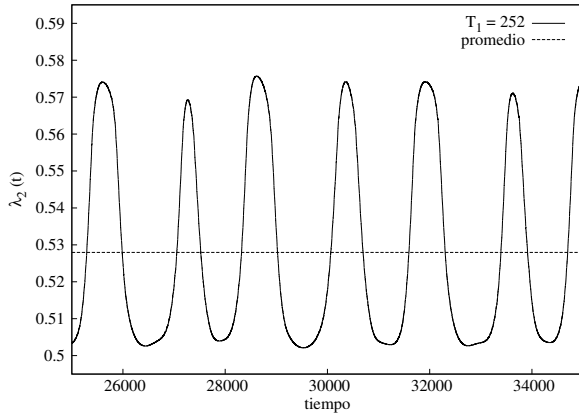


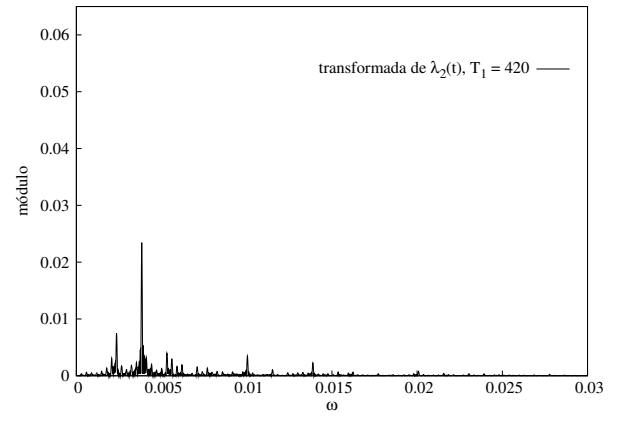
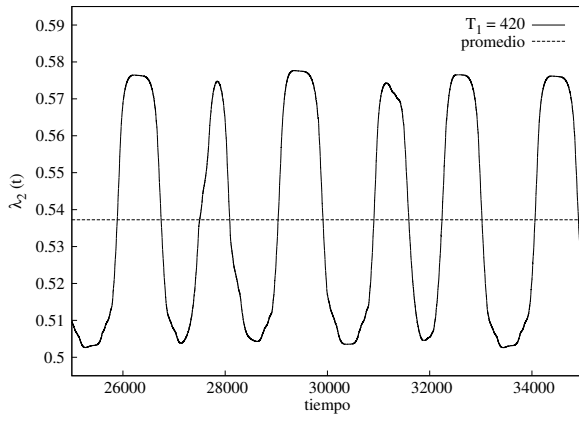
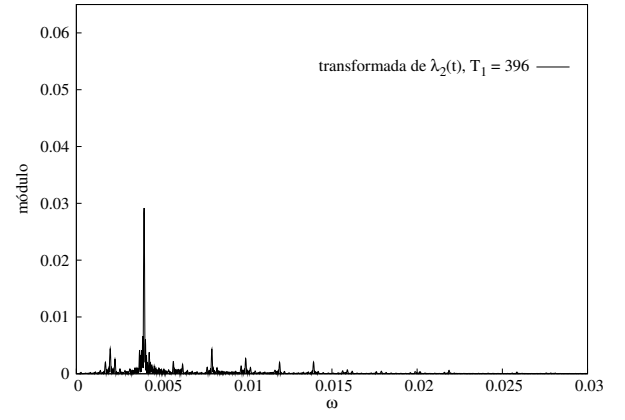
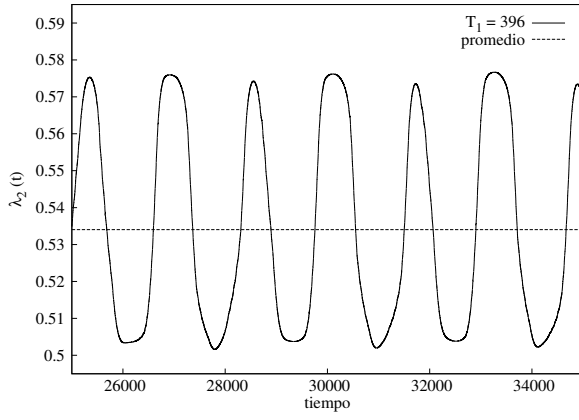
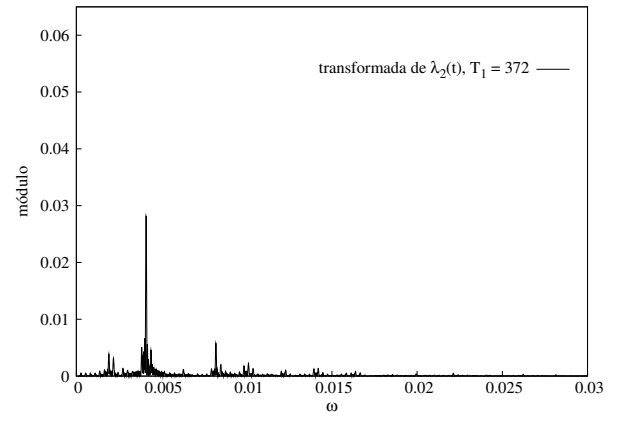
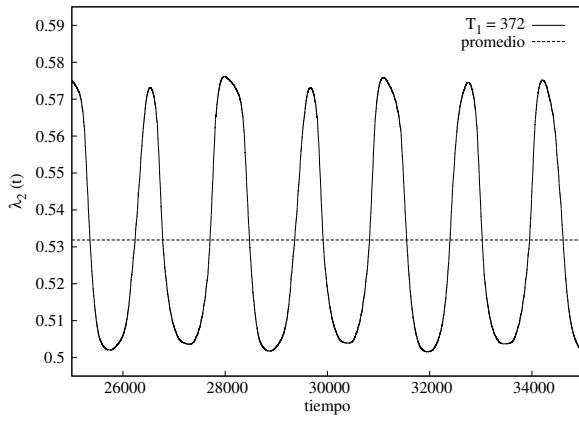
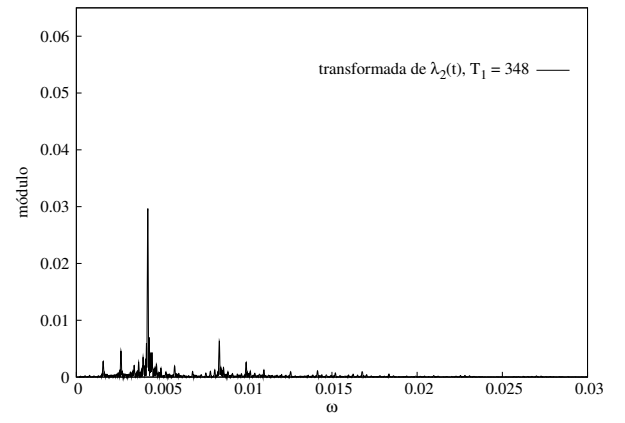
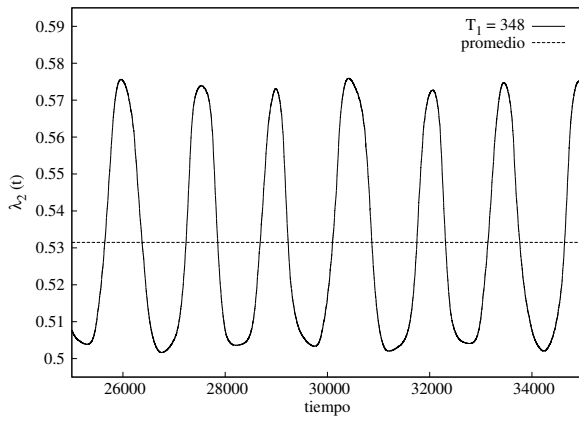


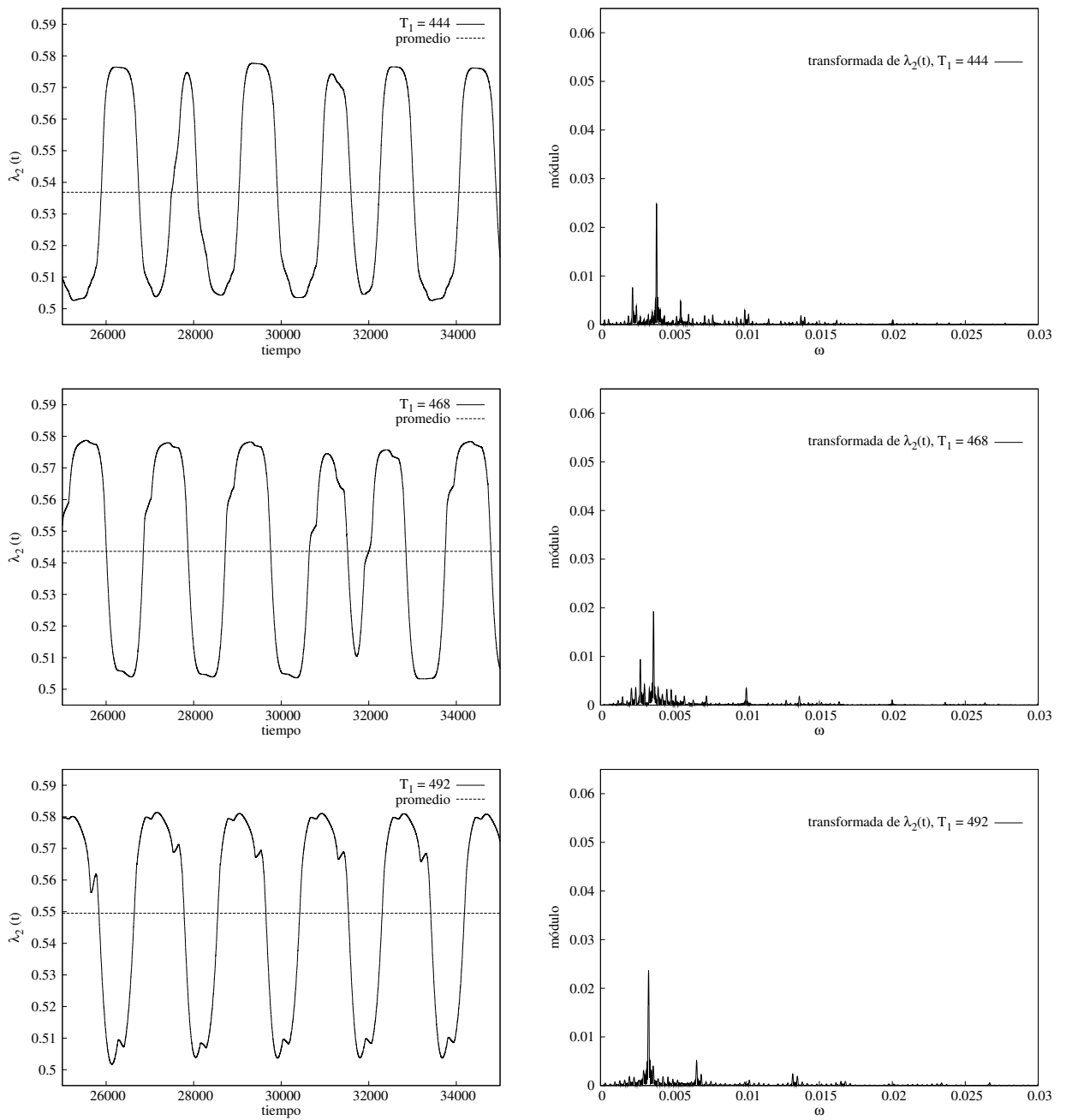


**Figura 3.17-** La columna izquierda muestra para cada  $T_1$  las señales  $\lambda_2(t)$  obtenidas a una distancia de la punta del dedo de  $L_2 = 150$ , la columna derecha contiene las transformadas de Fourier de dichas señales.









**Figura 3.18-** La columna izquierda muestra para cada  $T_1$  las señales  $\lambda_2(t)$  obtenidas a una distancia de la punta del dedo de  $L_2 = 300$ , la columna derecha contiene las transformadas de Fourier de dichas señales.

---

## CONCLUSIONES

---

Se encontró que con los gradientes de presión asimétricos de tipo escalón presentados en este trabajo, la inestabilidad lateral en el dedo de Saffman-Taylor es distinta a la observada con la señal simétrica cosenoidal de estudios anteriores.

Esto indica que efectivamente las no linealidades de las ecuaciones son observadas al introducir señales asimétricas en el gradiente de presión.

Se observó que conforme se propaga la inestabilidad lateral del dedo lejos de la punta, para valores relativamente grandes de  $T_1$  (a partir de  $T_1 = 324$ ), se llega a una saturación de la inestabilidad lateral que ocurre tanto en frecuencia como en amplitud. Por otro lado, se encontró que para valores pequeños de  $T_1$  (hasta  $T_1 = 300$ ) la inestabilidad lateral se satura en amplitud mas no en frecuencia.

Asimismo, se observó que mientras más grande es  $T_1$  más cerca de la punta se satura la inestabilidad. Como mayor  $T_1$  también significa mayor amplitud de la señal incidente se puede concluir que la distancia de saturación de la inestabilidad lateral es menor a valores altos de la amplitud incidente.

Se estudiaron distintas etapas de la dinámica del sistema al medir el ancho del dedo como función del tiempo a diferentes distancias de la punta, y se observó que para valores relativamente grandes de  $T_1$  existe primero (más cerca de la punta) una saturación en frecuencia y luego (más lejos de la punta) una saturación en amplitud.

Se encontró que existe una transición en la frecuencia de respuesta del sistema. En la región en donde la inestabilidad lateral no se ha saturado, la frecuencia dominante del sistema es igual a la frecuencia incidente,  $\omega_0$ . En cambio, en la región saturada, la frecuencia de respuesta dominante es igual a la frecuencia característica del sistema lejos de la punta del dedo,  $\omega_\infty$ .

Se observó también que las fluctuaciones del ancho del dedo tienen un incremento considerable (de 24 veces su tamaño) al pasar de la zona no saturada a la zona de saturación.

Por otra parte, los gradientes de presión asimétricos impuestos en la condición de frontera  $\phi_B(t)$  tienen un efecto en el ancho del dedo viscoso. Se encontró que el ancho promedio del dedo no sólo es más grande que el valor de estado estacionario, sino que siempre es mayor al obtenido con la señal simétrica cosenoidal. Además el ancho promedio del dedo aumenta conforme aumenta  $T_1$ . Por lo que, mientras más grande sea la amplitud de la señal incidente obtendremos dedos más anchos.

En particular, para las perturbaciones asimétricas de tipo escalón utilizadas en este trabajo este efecto es el deseado, ya que, se logró un incremento en el ancho del dedo de 5% con respecto al valor del ancho en estado estacionario. Este resultado es significativo

---

ya que el ancho del dedo,  $\lambda$ , está reportado como una fracción del ancho del canal,  $W$ . Debido a que la cantidad de fluido desplazado está íntimamente ligada al ancho del dedo en un medio confinado, esto también significa un 5% más de volumen desplazado y por tanto, un mejor vaciado del canal.

Las ecuaciones que describen el flujo de dos fluidos en un medio poroso son matemáticamente similares a las del flujo de dos fluidos en una celda de Hele-Shaw. Por este motivo los resultados de este trabajo pueden, en principio, tener implicaciones tecnológicas en problemas que se refieren al desplazamiento de fluidos.

## ALGORITMO DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

---

El método numérico que se usó para integrar la ecuación (2.12) es un método de Euler. Para utilizar dicho método, se planteó una malla cuadrada de espaciamiento  $\Delta x = \Delta y$  y paso temporal  $\Delta t$ . Para asegurar la estabilidad del método numérico se utiliza un paso de tiempo pequeño en comparación con el paso espacial, esto es,  $\Delta t \leq 0.01\Delta x$ , y  $\Delta x = 1.0$ . El tamaño de la malla es  $nx \times ny$  y se usan índices enteros espaciales tales que

$$1 \leq i \leq nx$$

y

$$1 \leq j \leq ny.$$

El índice temporal es  $k$ . Así, la ecuación (2.12) en su forma discreta es

$$\phi_{i,j}^{k+1} = \phi_{i,j}^k + \Delta t (\nabla \cdot M \nabla \mu_k)_{i,j}^k. \quad (\text{A.1})$$

En esta ecuación, los operadores se evalúan por el método de diferencias finitas considerando contribuciones de primeros vecinos. De esta forma, el potencial químico se calcula como

$$\mu_{i,j}^k = \phi_{i,j}^k - \epsilon^2 \nabla^2 \phi_{i,j}^k,$$

y el Laplaciano se calcula como

$$\nabla^2 \phi_{i,j}^k = \frac{1}{\Delta x^2} (\phi_{i+1,j}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i-1,j}^k) + \frac{1}{\Delta x^2} (\phi_{i,j+1}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i,j-1}^k).$$

Como el parámetro  $M$  varía de forma abrupta de una a otra fase, como se ve en la ecuación (2.23), es necesario introducir una forma ponderada para el segundo término del lado derecho en la ecuación (A.1), esto es,

$$\nabla \cdot (M \nabla \mu)_{i,j}^k = \frac{1}{2} (\nabla \cdot M \nabla \mu)_{i,j}^k{}^I + \frac{1}{2} (\nabla \cdot M \nabla \mu)_{i,j}^k{}^D,$$

donde los superíndices  $D$  e  $I$  indican que el gradiente se evalúa por la derecha o por la izquierda respectivamente, esto es,

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot M \nabla \mu)_{i,j}^k{}^I &= \frac{1}{\Delta x} \left( M_{i,j}^k \left( \frac{\mu_{i+1,j}^k - \mu_{i,j}^k}{\Delta x} \right) - M_{i-1,j}^k \left( \frac{\mu_{i,j}^k - \mu_{i-1,j}^k}{\Delta x} \right) \right) \\ &+ \frac{1}{\Delta x} \left( M_{i,j}^k \left( \frac{\mu_{i,j+1}^k - \mu_{i,j}^k}{\Delta x} \right) - M_{i,j-1}^k \left( \frac{\mu_{i,j}^k - \mu_{i,j-1}^k}{\Delta x} \right) \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot M \nabla \mu)_{i,j}^k{}^D &= \frac{1}{\Delta x} \left( M_{i+1,j}^k \left( \frac{\mu_{i+1,j}^k - \mu_{i,j}^k}{\Delta x} \right) - M_{i,j}^k \left( \frac{\mu_{i,j}^k - \mu_{i-1,j}^k}{\Delta x} \right) \right) \\ &+ \frac{1}{\Delta x} \left( M_{i,j+1}^k \left( \frac{\mu_{i,j+1}^k - \mu_{i,j}^k}{\Delta x} \right) - M_{i,j}^k \left( \frac{\mu_{i,j}^k - \mu_{i,j-1}^k}{\Delta x} \right) \right). \end{aligned}$$

Para correr el código que integra la ecuación (A.1) se utiliza fortran 77.



---

## SIMBOLOGÍA

---

Símbolo	Significado
$L$	largo de la celda
$W$	ancho de la celda
$b$	espacio entre placas
$U$	velocidad en la punta del dedo
$\lambda$	ancho del dedo (como una fracción del ancho del canal)
$\lambda_1$	$\lambda$ medida en una región “cercana” a la punta
$\lambda_2$	$\lambda$ medida en una región “lejana” a la punta
$\phi$	parámetro de orden
$\phi_B$	valor de $\phi$ en el bulto del fluido 2
$\phi_{B0}$	valor constante de $\phi$ que lleva al estado estacionario
$\epsilon$	parámetro proporcional al ancho de la interfase
$\phi_{eq}$	valor de equilibrio del parámetro de orden
$M$	parámetro relacionado con la permeabilidad del sistema
$\mu$	potencial químico
$\mu_B$	potencial químico en el bulto del fluido 2
$\delta$	amplitud de la perturbación simétrica
$L_1$	distancia “cercana” a la punta del dedo
$L_2$	distancia “lejana” a la punta del dedo

$L_p$	distancia medida desde la punta
$V_\infty$	velocidad lejos de la punta del dedo
$\nu_{dedo}$	frecuencia dada por la velocidad en la punta del dedo
$\nu_\infty$	frecuencia dada por la velocidad lejos de la punta
$\omega_{dedo}$	$2\pi\nu_{dedo}$
$\omega_\infty$	$2\pi\nu_\infty$
$\omega_0$	frecuencia angular de la señal incidente
$\omega_{\lambda_1}$	frecuencia de respuesta a la distancia $L_1$
$\omega_{\lambda_2}$	frecuencia de respuesta a la distancia $L_2$
$\omega^*$	frecuencia de selección
$T$	periodo de la señal incidente
$T_1$	fracción de $T$ en que la función escalón pasa arriba del promedio
$\sigma_{\lambda_1}$	desviación estándar de $\lambda_1$
$\sigma_{\lambda_2}$	desviación estándar de $\lambda_2$
$\sigma_{\phi_B}$	desviación estándar de la señal incidente

---

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] A. T. Dorsey, y O. Martin, Saffman-Taylor fingers with anisotropic surface tension, *Phys. Rev. A* **35**, 3989 (1987).
- [2] Y. Couder, N. Gérard, y M. Rabaud, Narrow fingers in the Saffman-Taylor instability, *Phys. Rev. A* **34**, 5175 (1986).
- [3] M. Rabaud, Y. Couder, y N. Gérard, Dynamics and stability of anomalous Saffman-Taylor fingers, *Phys. Rev. A* **37**, 935 (1988).
- [4] M. G. Moore, A. Juel, J. M. Burgess, W. D. McCormick, y H. L. Swinney, Fluctuations in viscous fingering, *Phys. Rev. E* **65**, 030601 (2002).
- [5] A. Hernández-Machado, A. M. Lacasta, E. Mayoral, y E. Corvera Poiré, Phase-field model of Hele-Shaw flows in the high-viscosity contrast regime, *Phys. Rev. E* **68**, 046310 (2003).
- [6] R. Ledesma-Aguilar, M. Quevedo-Reyes, y E. Corvera Poiré, Lateral instability in normal viscous fingers, *Phys. Rev. E* **71**, 016312 (2005).
- [7] R. Ledesma-Aguilar, *Interfases en sistemas dependientes de la frecuencia*, Tesis de licenciatura, Facultad de Química, UNAM, México (2004).

- 
- [8] M. Quevedo-Reyes, A. Hernández-Machado, y E. Corvera Poiré, Phase field approach to spatial perturbations in normal Saffman-Taylor fingers, *Phys. Rev. E* **73**, 066308 (2006).
- [9] M. Quevedo-Reyes, *Efecto del ruido sobre los dedos de Saffman-Taylor en un Modelo Mesoscópico*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias Químicas, Universidad Veracruzana, México (2004).
- [10] M. Torralba, J. Ortín, A. Hernández-Machado, y E. Corvera Poiré, Fluctuations in Saffman-Taylor fingers with quenched disorder, *Phys. Rev. E* **73**, 046302 (2006).
- [11] M. Torralba, J. Ortín, A. Hernández-Machado, y E. Corvera Poiré, Experiments of periodic forcing of Saffman-Taylor fingers, *Phys. Rev. E* **77**, 036207 (2008).
- [12] P. G. Saffman, y G. I. Taylor, The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **245**, 312 (1958).
- [13] P. Tabeling, G. Zocchi, y A. Libchaber, An experimental study of the Saffman-Taylor instability, *J. Fluid Mech.* **177**, 67 (1987).
- [14] E. Corvera Poiré, M. López de Haro, y J. del Río Portilla, US Patent No. 7,201,224 (10 April 2007).
- [15] R. Folch, J. Casademunt, A. Hernández-Machado, y L. Ramírez-Piscina, Phase-field model for Hele-Shaw flows with arbitrary viscosity contrast. I. Theoretical approach, *Phys. Rev. E* **60**, 1724 (1999).

- 
- [16] R. Folch, J. Casademunt, A. Hernández-Machado, y L. Ramírez-Piscina, Phase-field model for Hele-Shaw flows with arbitrary viscosity contrast . II. Numerical study, *Phys. Rev. E* **60**, 1734 (1999).
- [17] P. C. Halperin, y B. I. Hohenberg, Theory of dynamic critical phenomena, *Rev. Mod. Phys.* **49**, 435 (1977).
- [18] J. W. McLean, y P. J. Saffman, The effect of surface tension on the shape of fingers in a Hele Shaw cell, *J. Fluid Mech.* **102**, 455 (2006).
- [19] P. Pelcé, *Dynamics of curved fronts*, (Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1998).
- [20] R. B. Bird, W. E. Stewart, y E. N. Lightfoot, *Fenómenos de transporte*, (Reverté, México, 1960).
- [21] H. J. Weber, y G. B. Arfken, *Mathematical methods for physicists*, (Academic Press, San Diego, 2005).
- [22] H. P. Hsu, R. G. Florez Torrez, *Análisis de Fourier*, (Addison Wesley, Madrid, 1987).