



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Invariantes analíticos de gérmenes
de transformaciones conformes y singularidades
de una foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
DIEGO RODRÍGUEZ GUZMÁN

DIRECTOR DE TESIS:
LAURA ORTIZ BOBADILLA



2009



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1.Datos del alumno Rodríguez Guzmán Diego 56 18 61 31 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencia Matemáticas 405027167
2.Datos del tutor Dra Laura Ortiz Bobadilla
3.Datos del sinodal 1 Dr Marcelo Alberto Aguilar González de la Vega
4.Datos del sinodal 2 Dr Javier Paez Cárdenas
5.Datos del sinodal 3 Dr Adolfo Guillot Santiago
6.Datos del sinodal 4 Dr Héctor Méndez Lango
7. Datos del trabajo escrito Invariantes analíticos de gérmenes de transformaciones conformes y una foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ 70 p 2009

A toda mi familia, a los profesores y a la bandota.

Índice general

Introducción	I
1. Clasificación de los gérmenes holomorfos en $(\mathbb{C}, 0)$	1
1.1. Clasificación formal	2
1.2. Clasificación Topológica	8
1.3. Clasificación Analítica	14
1.3.1. Teorema de linealización y dinámica de los difeomorfismos tangentes a la unidad	15
1.3.2. Cadenas normalizadoras	22
2. Singularidades silla-nodo complejas en $(\mathbb{C}^2, 0)$	39
2.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias holomorfas en $(\mathbb{C}^2, 0)$	39
2.2. Silla-Nodo en $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$	45
2.3. Clasificación orbital analítica	48
2.4. Transformación de Holonomía	56
Bibliografía	63

Introducción

La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales tiene su origen en el siglo XIX con los trabajos de Paul Painlevé (1863-1933). Sin embargo, son los trabajos de Henri Poincaré (1854-1912) sobre la clasificación de campos vectoriales (reales y complejos) con punto singular, los que marcan un cambio en el estudio de las ecuaciones diferenciales. Éstas dejarán de ser estudiadas mediante la obtención explícita de sus soluciones (que por lo general no es posible) y pasarán a ser estudiadas mediante el análisis del comportamiento geométrico, topológico y analítico de los campos vectoriales que las definen. A principios del siglo XX, el estudio de campos vectoriales en una vecindad de un punto singular fue desarrollado principalmente por H. Poincaré (que ya en 1876 había demostrado el Teorema de Linealización) y H. Dulac, motivados por el problema 16 de Hilbert sobre la existencia de ciclos límite de campos vectoriales polinomiales en el plano real. Después de los trabajos de Poincaré y Dulac se dieron avances en la teoría esencialmente en Rusia como resultado de la escuela de Andronov y Pontriaguin. Fue sólo hasta mediados de los años sesenta del siglo XX que el estudio local de las ecuaciones analíticas complejas reapareció con los trabajos de Bryuno. A éstos le siguieron entre otros las aportaciones en Rusia de V.I. Arnold, Yu. Ilyashenko, A.A. Sherbakov, S. Voronin, P. Elizarov, en Francia de R. Moussu, J.-F. Mattei, D. Cerveau, J. Martinet y J.-P. Ramis, en Brasil con I. Kupka, C. Camacho, A. Lins Neto y P. Sad y en México con A. Verjovsky, X. Goment-Mont y J. Seade. A partir de los años ochenta, resultados profundos sobre la clasificación analítica han sido demostrados.

La partición (foliación) de una vecindad del origen en \mathbb{C}^2 por las curvas de fase (hojas) definida por las soluciones de una ecuación diferencial es un objeto cuyo análisis es complicado. Por está razón, una forma de comprender parte del comportamiento de dicha foliación es haciendo uso de una transversal Σ a una hoja determinada de la foliación y considerar sobre ella el grupo de gérmenes de transformaciones de retorno o grupo de holonomía. Este grupo actúa sobre los puntos de la transversal de modo tal que el cociente de ésta bajo la acción de dicho grupo es el espacio de las hojas de la foliación. Es precisamente por esta razón que resurge el interés por la clasificación analítica local de los gérmenes de transformaciones conformes de $(\mathbb{C}, 0)$ en $(\mathbb{C}, 0)$ ($Diff(\mathbb{C}, 0)$). Este estudio se remonta a más de un siglo con trabajos de E. Schröder, A. Koenings y L.

Leau. Los dos primeros demuestran, por dos caminos distintos, que un germen holomorfo $f \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, $f(z) = \mu z + O(z^2)$ es analíticamente linealizable si $|\mu| \neq 1$. Por otra parte cuando $|\mu| = 1$ el estudio se divide en tres casos: cuando $\mu = 1$, cuando $\mu = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{Q}$ y cuando $\mu = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Este último caso fue estudiado por Siegel quien demostró que si μ es mal aproximado por los racionales (condición diofantina) entonces f es analíticamente equivalente a su parte lineal. Posteriormente Bryuno mejoró las condiciones dadas en el trabajo de Siegel, mediante el uso de fracciones continuas, para saber cuando f es linealizable, y finalmente, en 1995, Yoccoz probó que las condiciones encontradas por Bryuno son necesarias para linealización de una silla. Cabe mencionar que por sus trabajos en este tema Yoccoz recibió la medalla Fields.

A finales del siglo XIX, motivado por la ecuación de Abel, Leau comienza a trabajar con transformaciones de la forma $f(z) = z + O(z^2)$ (conocidas como transformaciones conformes tangentes a la identidad). Aquél abordó el problema mediante la partición de una vecindad del cero en pétalos, donde la dinámica de las iteraciones enteras de la transformación era contractante en algunos y dilatante en otros. En 1920 Fatou construye un atlas normalizante de funciones que en cada pétalo conjuga al germen de una transformación conforme $f(z) = z + O(z^2)$ con su forma normal formal. Para 1939 Birkhoff retoma el trabajo de Leau y Fatou, y da una lista de invariantes analíticos de las transformaciones conformes $f(z) = \mu z + O(z^2)$ con $\mu \in \mathbb{Q}$. Pero no es, si no hasta los años ochentas, que Écalle y Voronin demuestran independientemente el teorema que da una clasificación analítica de los gérmenes de transformaciones tangentes a la identidad, usando funciones de transición entre los pétalos con la estructura heredada del atlas normalizante.

En el primer Capítulo se comienza con la clasificación formal de las transformaciones conformes en $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, la cual muestra las dificultades que se presentan para elaborar una clasificación analítica de las transformaciones conformes $f(z) = \mu z + O(z^2)$ con μ igual a uno o a una raíz n -ésima de la unidad. Se da la clasificación topológica de estos gérmenes basada en un artículo de Camacho [C2], la cual muestra como único invariante topológico la cantidad de pétalos. Después pasamos a demostrar el teorema de la flor de Leau, el cual nos da las condiciones para contruir el atlas normalizante. Se definen las funciones de transición mediante la composición de restricciones de funciones del atlas normalizante. Mediante un análisis de las funciones de transición se llega a una relación de equivalencia entre ellas. La clase de las funciones de transición son conocidas como el moduli de la transformación f . Con esto se enuncia el teorema de clasificación analítica de Écalle-Voronin, del cual se demuestran las primeras dos afirmaciones y se da un esbozo de la tercera.

El Capítulo dos introduce las definiciones y teoremas para trabajar con ecuaciones diferenciales inducidas por campos vectoriales en $(\mathbb{C}^2, 0)$ con tiempo complejo $(\mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0))$. Luego nos enfocamos en el caso de campos vectoriales en $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$ con singularidad silla-nodo complejo. Damos la forma normal formal de estos campos y dividimos una vecindad del cero en secciones para enun-

ciar el teorema de normalización sectorial de Hukuhara, Kimura y Matuda. Con la colección de funciones normalizadoras que da este teorema definimos las funciones de transición. Con ellas definimos una relación de equivalencia entre éstas (moduli), y así enunciar el teorema de clasificación analítica orbital Martinet-Ramis que del espacio de gérmenes de campos vectoriales con singularidad silla-nodo. Finalmente definimos la transformación de holonomía sobre la variedad fuerte del campo silla-nodo, que resulta ser una transformación conforme tangente a la identidad. Así logramos dar una relación entre los respectivos espacios de moduli definidos por los gérmenes de campos silla-nodo complejo y los gérmenes de transformaciones conformes tangentes a la identidad. Concluimos que dos gérmenes de campos silla-nodo complejo son analíticamente equivalentes si y sólo si sus transformaciones de holonomía sobre la variedad fuerte son analíticamente equivalentes.

Capítulo 1

Clasificación de los gérmenes holomorfos en $(\mathbb{C}, 0)$

Para este Capítulo y en la Tesis, es necesaria la noción de germen de función analítica. Para ello, considérese una función f definida en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ (que denotaremos por (f, Ω)). Sea ξ un punto en Ω tal que f es analítica en ξ . Por (f, ξ) denotaremos la siguiente relación de equivalencia definida en el espacio de funciones analíticas: Decimos que (f_1, ξ_1) es equivalente a (f_2, ξ_2) si y sólo si $\xi_1 = \xi_2$ y $f_1(z) = f_2(z)$ en una vecindad de ξ_1 , a cada clase se le conoce como *el germen de la función* f_1 en ξ . El estudio de esta Tesis se centra en la clasificación de gérmenes (f, ξ) tales que $f(\xi) = \xi$, los cuales mediante una conjugación en su dominio se pueden ver como $\tilde{f}(0) = 0$; o sea que fijan el cero. Los gérmenes de difeomorfismos analíticos $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ denotan transformaciones analíticas que fijan el cero y son invertibles en una vecindad del cero; a este espacio se le denota $Diff(\mathbb{C}, 0)$. Dado que $f \in Diff(\mathbb{C}, 0)$ es analítica existe su serie de Taylor en una vecindad del cero. Más adelante se consideran series que pueden no tener un radio de convergencia (series formales) y con parte lineal no nula, este espacio será denotado por $\widehat{Diff}(\mathbb{C}, 0)$.

En este Capítulo clasificaremos a los gérmenes en $Diff(\mathbb{C}, 0)$, mediante una relación de equivalencia dada por:

Definición 1.0.1 *Dos gérmenes f, \hat{f} de difeomorfismos conformes de $(\mathbb{C}, 0)$ son analíticamente equivalentes (respectivamente formalmente equivalentes, topológicamente equivalentes) si existe un germen $h(z)$ de un difeomorfismo analítico (respectivamente una serie formal $h(z) = h_1z + h_2z^2 + O(z^3)$, un homeomorfismo $h(z)$) que conjugue a f con \hat{f} :*

$$\hat{f} = h^{-1} \circ f \circ h$$

2CAPÍTULO 1. CLASIFICACIÓN DE LOS GÉRMESES HOLOMORFOS EN $(\mathbb{C}, 0)$

La clasificación analítica de gérmenes de transformaciones conformes de $(\mathbb{C}, 0)$ en $(\mathbb{C}, 0)$ fue realizada por E. Schröder (1870) y por A. Koenings (1984), quienes, por caminos distintos, demostraron que un germen holomorfo f en $\widehat{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ de la forma $f(z) = \mu z + O(z^2)$ (donde $O(z^n)$ denota a los términos de orden superior a n) con $|\mu| \neq 1$ es analíticamente linealizable. El caso en que $|\mu| = 1$, puede ser dividido en dos casos: $\mu = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{Q}$ y $\theta \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

El primer caso es el que se trabajará a fondo en este Capítulo. Del segundo caso, en los 40's, Siegel dio condiciones sobre la variable θ bajo las cuales $f(z) = e^{2\pi i\theta} z + O(z^2)$ es linealizable. Condiciones que Bryuno traduciría a una desigualdad en términos de la fracción continua de θ . En los 90's Yoccoz demostró que la condición de Bryuno es necesaria y suficiente para asegurar que f es linealizable.

1.1. Clasificación formal

Los objetos con los que se trabajará son las series (de Taylor) formales en el origen de \mathbb{C}

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j, \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

El *orden* de f es el mínimo j para el cual c_j es distinto de 0.

El conjunto de las series formales se denota por $\mathbb{C}[[z]]$, de este conjunto sólo se tendrá en cuenta el conjunto $\widehat{Diff}(\mathbb{C}, 0) = \{f \in \mathbb{C}[[z]] : f(0) = 0, \text{ y } f'(0) \neq 0\}$. Cabe notar que f' está definida como derivada de cada monomio de la serie y la igualdad entre series formales es coeficiente a coeficiente de los respectivos monomios. Para las series formales no se considera la convergencia o divergencia de éstas, lo cual facilita su manejo.

Así, el conjunto $\widehat{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es un grupo con la composición y la serie de la transformación identidad Id como elemento neutro. Será de utilidad conocer los primeros monomios explícitamente de la inversa de una serie formal f dada. Se tomará el caso de las funciones de la forma $H_n(z) = z + h_n z^n$, ya que son las transformaciones cuyas inversas serán utilizadas para la clasificación formal:

$$\begin{aligned}
H_n^{-1} \circ H_n(z) &= z \text{ y } H_n(z) = z + h_n z^n = z(1 + h_n z^{n-1}) \\
H_n^{-1}(H_n(z)) &= \frac{z(1 + h_n z^{n-1})}{1 + h_n z^{n-1}} = z \\
H_n^{-1}(w) &= \frac{w}{1 + h_n (H_n^{-1}(w))^{n-1}} \\
H_n^{-1}(w) &= w \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l [h_n (H_n^{-1}(w))^{n-1}]^l \right) \\
H_n^{-1}(w) &= w(1 - h_n (H_n^{-1}(w))^{n-1} + O(w^{2n-2})) \\
H_n^{-1}(w) &= w(1 - h_n (w - h_n w (H_n^{-1}(w))^{n-1}) \\
H_n^{-1}(w) &= w - h_n w^n + O(w^{2n-1})
\end{aligned}$$

Bastará conocer los primeros dos monomios para trabajar. Con un proceso análogo al anterior es fácil concluir que si una función $h \in \widehat{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es de la forma $h(z) = a_1 z + O(z^2)$, entonces su inversa es de la forma $h^{-1}(z) = \frac{1}{a_1} z + \dots$.

Retomando la definición de la equivalencia formal entre dos funciones, nos detendremos a ver qué propiedades se conservan al conjugar una función $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j z^j$, $f_j \in \mathbb{C}$, analítica con las funciones $h \in \widehat{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. A saber, de la composición

$$f \circ h(z) = f_1(a_1 z + \dots) + \dots$$

se tiene,

$$\begin{aligned}
h^{-1} \circ f \circ h(z) &= \frac{1}{a_1} (a_1 f_1 z + \dots) + \dots \\
h^{-1} \circ f \circ h(z) &= f_1 z + \dots,
\end{aligned}$$

Donde los puntos múltiples denotan términos de orden superior al lineal en z .

Esto muestra que la parte lineal de $h^{-1} \circ f \circ h$ es igual a la parte lineal de f . Hacemos notar que la parte lineal de una transformación es invariante bajo conjugación. Lo anterior nos lleva a la pregunta: ¿para toda $f \in Diff(\mathbb{C}, 0)$ existirá una $h \in \widehat{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, tal que conjugue a f con su parte lineal?. La respuesta es NO siempre. Pero se tiene el siguiente teorema que describe algunos casos en donde la respuesta es afirmativa.

Teorema 1.1.1 (de la forma normal Poincaré-Dulac) Sea $f \in \widehat{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ con parte lineal $\mu \in \mathbb{C} - 0$

$$z \xrightarrow{f} \mu z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

4CAPÍTULO 1. CLASIFICACIÓN DE LOS GÉRMEENES HOLOMORFOS EN $(\mathbb{C}, 0)$

Si μ no es raíz de la unidad, entonces f es formalmente equivalente a su parte lineal, o sea a la transformación lineal $z \mapsto \mu z$.

Demostración. Para linealizar una transformación $f \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, se sigue la estrategia de quitar los términos no lineales uno a uno mediante transformaciones en $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ de la forma $H_k(z) = z + h_k z^k$, cuya inversa es $H_k^{-1}(z) = z - h_k z^k + \dots$. Se notará más adelante que el coeficiente h_k depende del coeficiente k -ésimo de la transformación f ; pues se busca que la conjugación $H_k^{-1} \circ f \circ H_k$ tenga al cero como coeficiente del término de orden k .

Sin pérdida de generalidad, hacemos la suposición de que el primer término no lineal de f distinto de cero es $a_{k_1} z^{k_1}$, por lo que se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} f \circ H_{k_1}(z) &= \mu(z + h_{k_1} z^{k_1}) + a_{k_1} (z + h_{k_1} z^{k_1})^{k_1} + O(z^{k_1+1}) \\ &= \mu z + \mu h_{k_1} z^{k_1} + a_{k_1} z^{k_1} + O(z^{k_1+1}) \\ &= \mu z + (\mu h_{k_1} + a_{k_1}) z^{k_1} + O(z^{k_1+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{k_1}^{-1} \circ f \circ H_{k_1}(z) &= (\mu z + (\mu h_{k_1} + a_{k_1}) z^{k_1} + O(z^{k_1+1})) - \\ &\quad - h_{k_1} (\mu z + (\mu h_{k_1} + a_{k_1}) z^{k_1} + O(z^{k_1+1}))^{k_1} + O(z^{2k_1-1}) \\ &= \mu z + (\mu h_{k_1} + a_{k_1} - h_{k_1} \mu^{k_1}) z^{k_1} + O(z^{k_1+1}) \end{aligned}$$

Del último renglón se obtiene la siguiente ecuación, que es la condición para que h_{k_1} exista y cumpla con el propósito de eliminar el término de orden k_1 .

$$\begin{aligned} \mu h_{k_1} + a_{k_1} - h_{k_1} \mu^{k_1} &= 0 \\ a_{k_1} &= h_{k_1} (\mu^{k_1} - \mu) \\ \frac{a_{k_1}}{\mu^{k_1} - \mu} &= h_{k_1} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Esta última expresión tiene sentido siempre y cuando $\mu(\mu^{k_1-1} - 1) \neq 0$. Por hipótesis se sabe que μ no es raíz de la unidad, luego entonces se propone la función H como sigue:

$$H = \lim_{n \rightarrow \infty} H_{k_n} \circ \dots \circ H_{k_1}$$

donde H_{k_j} se construye de manera análoga a H_{k_1} , pero para la transformación $H_{k_{j-1}}^{-1} \circ \dots \circ H_{k_1}^{-1} \circ f \circ H_{k_1} \circ \dots \circ H_{k_{j-1}}$ (esta transformación no tiene términos de orden menor a k_{j-1} diferentes del lineal), y en general si $j > i$ entonces $k_j > k_i$.

El proceso al infinito nos da una serie H no necesariamente convergente, pero ésta sigue siendo un elemento de $\widehat{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. ■

Como se dijo en la introducción, el estudio se centrará en el caso $\mu = 1$. A este tipo de gérmenes se les conoce comúnmente como *difeomorfismos analíticos tangentes a la identidad* o *transformaciones tangentes a la identidad*. Se conjugará una transformación $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$ con una transformación H_k , como la utilizada para linealizar en el Teorema 1.1.1 para modificar el coeficiente del término de orden k . Se observa que, puesto que H_k es localmente invertible, la conjugación $H_k^{-1} \circ f \circ H_k$ es analítica en una vecindad del origen.

Inicialmente, y para simplificar los cálculos que se harán posteriormente, se probará que mediante un cambio de variable lineal, $H(z) = bz$, puede ser normalizado el coeficiente del primer término no lineal distinto de cero de f . A saber, para la transformación $f(z) = z + az^{p+1} + O(z^{p+2})$ se busca $b \in \mathbb{C}$ tal que $H^{-1} \circ f \circ H(z) = z + z^{p+1} + O(z^{p+2})$. Para ello consideramos la composición

$$H^{-1} \circ f \circ H(z) = z + z^{p+1} + O(z^{p+2})$$

es decir,

$$H^{-1} \circ f(bz) = z + z^{p+1} + O(z^{p+2})$$

por definición de f , el miembro izquierdo de la anterior igualdad se escribe como

$$H^{-1}(bz + a(bz)^{p+1} + O(z^{p+2})) =$$

de aquí,

$$\begin{aligned} H^{-1}(bz + ab^{p+1}z^{p+1} + O(z^{p+2})) &= \\ &= \frac{1}{b}(bz + ab^{p+1}z^{p+1} + O(z^{p+2})) \\ &= z + \frac{ab^{p+1}}{b}z^{p+1} + O(z^{p+2}) \end{aligned}$$

Así, si $b = (a^{-1})^{\frac{1}{p}}$ se obtiene la igualdad deseada. De ahora en adelante consideraremos a siempre normalizada: $f(z) = z + z^{p+1} + O(z^{p+2})$. Al conjunto de las transformaciones tangentes a la identidad cuyo primer término con coeficiente cero y distinto del lineal es de orden $p+1$ se le denota por \mathcal{A}_p . Tenemos así todo lo necesario para enunciar y demostrar el siguiente teorema.

Teorema 1.1.2 (Clasificación Formal, [Sze1]) *Cualquier germen de transformación $f \in \mathcal{A}_p$ es formalmente equivalente a algún germen de transformación*

$$f_{p,\lambda} = g_{\omega_{p,\lambda}}^1,$$

6CAPÍTULO 1. CLASIFICACIÓN DE LOS GÉRMEENES HOLOMORFOS EN $(\mathbb{C}, 0)$

donde $g_{\omega_{p,\lambda}}^t$ es la transformación a tiempo t a lo largo de las soluciones de la ecuación diferencial asociada al campo $\omega_{p,\lambda}$,

$$\omega_{p,\lambda} = \frac{z^{p+1}}{1 + \lambda z^p} \frac{\partial}{\partial z}$$

y $\lambda \in \mathbb{C}$ es el invariante de la clasificación formal.

Antes de dar la demostración de este resultado observaremos que para las transformaciones $f \in \mathcal{A}_p$ no existe una transformación H_{p+1} que elimine el término z^{p+1} como se hizo en el Teorema 1.1.1. Sin embargo considerando la transformación $H_l(z) = z + h_l z^l$ se buscará remover los términos $a_l z^{p+l}$. A saber, supongamos que $f(z) = z + z^{p+1} + a_l z^{p+l} + \dots$ para algún entero $l \geq 2$ y sean

$$H_l(z) = z + h_l z^l \quad \text{y} \quad H_l^{-1}(z) = z - h_l z^l + O(z^{l+1})$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f \circ H_l(z) &= (z + h_l z^l) + (z + h_l z^l)^{p+1} + a_l z^{p+l} + \dots \\ &= z + h_l z^l + z^{p+1} + (p+1)z^p h_l z^l + a_l z^{p+l} + \dots \\ &= z + h_l z^l + z^{p+1} + ((p+1)h_l + a_l)z^{p+l} + \dots \\ H_l^{-1} \circ f \circ H_l(z) &= (z + h_l z^l + z^{p+1} + z^{p+l}((p+1)h_l + a_l)) - \dots \\ &\quad - h_l(z^l + l h_l z^{2l-1} + l z^{p+l} + l((p+1)h_l + a_l)z^{p+2l-1} + \dots) \\ &= z + z^{p+1} + z^{p+l}((p+1)h_l + a_l - l h_l) + \dots \end{aligned}$$

de donde se tiene que $h_l = \frac{a_l}{p+1-l}$. Notemos que si $l \neq p+1$ la función H_l está bien definida por lo que el término $a_l z^{p+l}$ puede ser eliminado de la serie. Sin embargo si $l = p+1$ entonces el coeficiente h_l no puede ser definido y, por consiguiente, el monomio de grado $2p+1$ no puede ser eliminado. Por esta razón f es formalmente equivalente a

$$z \longrightarrow z + z^{p+1} + \nu z^{2p+1} \quad (1.2)$$

Lo anterior muestra que un invariante formal de la clasificación de transformaciones de la clase \mathcal{A}_p está dado por el coeficiente ν .

Demostración del teorema 1.1.2 (clasificación formal) Pensando en el campo $\omega_{p,\lambda} = \frac{z^{p+1}}{1+\lambda z^p}$ y desarrollando el monomio $\frac{1}{1+\lambda z^p}$ en una vecindad del cero se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{1 + \lambda z^p} = 1 - \lambda z^p + \lambda^2 z^{2p} - \lambda^3 z^{3p} + \dots$$

Aplicando esta igualdad al campo $\omega_{p,\lambda}$ se tiene

$$\frac{z^{p+1}}{1 + \lambda z^p} = z^{p+1} - \lambda z^{2p+1} + \lambda^2 z^{3p+1} + \dots$$

Esta última expresión es más fácil manejar para lo que se hará a continuación.

Del teorema de Existencia y Unicidad se sabe que existe una única solución g_ω^t (por comodidad se tomará $\omega = \omega_{p,\lambda}$) de la ecuación diferencial $\dot{z} = \omega$ asociada al campo

$$\omega(z) = z^{p+1} - \lambda z^{2p+1} + O(z^{3p+1}) \frac{\partial}{\partial z}$$

para alguna vecindad del cero, que satisface la condición inicial $g_\omega^0(z) = z$. La transformación g_ω^t es el flujo a tiempo t de la solución con condición inicial z . Utilizando el desarrollo de Taylor de g_ω^t alrededor del cero tenemos

$$g_\omega^t(z) = z + \frac{t}{1!} \left[\frac{\partial}{\partial t} g_\omega^t(z) \right]_{t=0} + \frac{t^2}{2!} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} g_\omega^t(z) \right]_{t=0} + \dots$$

y como g_ω^t es solución de $\dot{z} = \omega_{p,\lambda}$ entonces

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} g_\omega^t(z) \right]_{t=0} &= \omega = z^{p+1} - \lambda z^{2p+1} + O(z^{3p+1}) \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} g_\omega^t(z) \right]_{t=0} &= \omega^2 = (z^{p+1} - \lambda z^{2p+1} + O(z^{3p+1}))((p+1)z^p - \lambda(2p+1)z^{2p} + O(z^{3p})) \end{aligned} \quad (1.3)$$

y en general pasa que $\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} g_\omega^t(z) \right]_{t=0} = \omega_{p,\lambda}^n$ donde el supraíndice indica la iteración de la derivada. Esto da una nueva expresión de g_ω^t

$$g_\omega^t(z) = z + \frac{t}{1!} z^{p+1} + \left(\frac{p+1}{2!} t^2 - \lambda \frac{t}{1!} \right) z^{2p+1} + O(z^{3p+1})$$

de donde, evaluando en tiempo 1, se tiene

$$g_\omega^1(z) = z + z^{p+1} + \left(\frac{p+1}{2} - \lambda \right) z^{2p+1} + O(z^{3p+1})$$

lo que nos muestra que el invariante formal tiene la forma $\nu = \frac{p+1}{2} - \lambda$. ■

Así se logra una caracterización formal de las transformaciones tangentes a la identidad la cual será muy útil posteriormente.

8CAPÍTULO 1. CLASIFICACIÓN DE LOS GÉRMENES HOLOMORFOS EN $(\mathbb{C}, 0)$

Continuemos ahora con otro caso de interés: μ raíz de la unidad. Recordando las H_k definidas al principio de esta sección, se tiene para el caso $\mu = 1$ la siguiente restricción de su coeficiente h_k

$$h_k = \frac{a_k}{\mu(\mu^{k-1} - 1)}$$

Entonces, suponiendo que $\mu^n = 1$ y $\mu^m \neq 1$ si $m < n$, los monomios resonantes (son aquellos que no se pueden quitar mediante transformaciones formales, analíticas) son de la forma

$$a_k z^k \quad \text{con } k = ln + 1,$$

por lo que $f(z) = \mu z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ es formalmente equivalente a la transformación

$$\begin{aligned} z &\rightarrow \mu z + \sum_{l=1}^{\infty} a_l z^{ln+1} \\ z &\rightarrow \mu \left(z + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_l}{\mu} z^{ln+1} \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

La expresión que está dentro del paréntesis se escribe, por la igualdad 1.2, como

$$z \rightarrow \mu (z + z^{rn+1} + \nu z^{2rn+1}),$$

donde r es el natural tal que a_r es el primer término no cero de $\sum a_l z^{ln+1}$. Por consiguiente f es formalmente equivalente a la transformación

$$z \rightarrow \mu(g_{\omega}^1) \quad \text{donde } \omega = \omega_{rn,\lambda}.$$

1.2. Clasificación Topológica

Las transformaciones holomorfas f con parte lineal μ , tal que $\mu^n = 1$ y no linealizables tienen un invariante topológico muy marcado en su estructura dinámica, ya que si se dibujan las órbitas de f en una vecindad del cero de radio adecuado, éstas asemejan una flor. C. Camacho junto con P. Sad (1982) y A.A. Shcherbakov (1982) independientemente, demostraron que el invariante topológico es el número de pétalos de la flor dibujada por las órbitas continuas. El teorema siguiente ilustra geoméricamente métodos que nos serán útiles en el problema central de este capítulo: la clasificación analítica.

Teorema 1.2.1 (Clasificación Topológica) *Sea $f \in \text{Diff}(\mathbb{C})$ de la forma:*

$$f(z) = \mu z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + O(z^4)$$

Con $\mu^n = 1$ tal que $\mu^m \neq 1$ para $0 < m < n$. Entonces o la n -ésima iterada f^n es la identidad o existe un homeomorfismo h , $h(0) = 0$ y un entero $k \geq 1$ tal que

$$h \circ f \circ h^{-1}(z) = f_{k,n}(z) = \mu z(1 - z^{kn})^{-\frac{1}{kn}},$$

donde k es el primer entero de la forma normal formal de $(\mu z + \sum_{j=1}^{\infty} a_{jn+1} z^{jn+1})$ tal que el coeficiente a_{kn+1} es distinto de cero.

Demostración. Dada $f \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ como en las hipótesis y usando un número finito de las transformaciones analíticas H_j utilizadas en la clasificación formal obtenemos una H tal que si $f(z) = \mu z + a_j z^j + O(z^{j+1})$ entonces $H \circ f \circ H^{-1}(z) = \mu z + \mu z^{kn+1} + O(z^{kn+2})$. Como sólo nos interesa llegar a eliminar hasta el término de orden $kn + 1$ y que el coeficiente de éste sea μ , entonces H es, a lo más, composición de $kn + 1$ funciones H_j . Por esta razón H es una transformación analítica.

En adelante, cuando se escriba f ésta representará a su transformación asociada $H \circ f \circ H^{-1}$, que es más práctica para procesos posteriores. Es decir, pensaremos en que f ya ha sido “normalizada”.

Viendo primero cómo es la función $f_{k,n}$ en una vecindad del cero tan pequeña como sea necesario, se nota que ésta fija a los $2kn$ rayos de la forma $z = r e^{i\pi \frac{j}{kn}}$, ya que la expresión $(1 - z^{kn})$ es un número real para $r < 1$. Por esta razón $z/(1 - z^{kn})^{\frac{1}{kn}}$ es una homotecia del rayo en sí mismo, que al multiplicar por μ cae en otro rayo. De donde $f_{k,n}$ deja invariantes $2kn$ rayos.

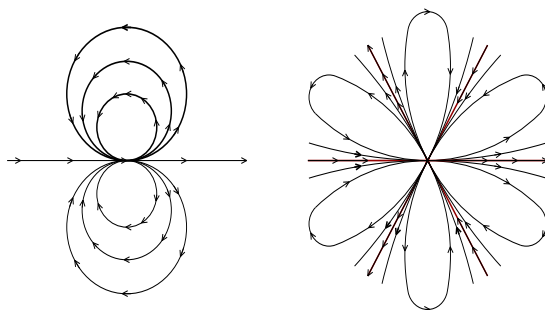


Figura 1.1: Las transformaciones $f_{1,1}$ y $f_{3,1}$

Se puede ver que $1/(1 - z^{kn})^{\frac{1}{kn}}$ es una función multivaluada, que está bien definida y es univaluada en las regiones delimitadas por los $2kn$ rayos para z en una vecindad del origen. Luego, al multiplicar por z quedan definidos los contradominios, por lo tanto $f_{k,n}$ está bien definida para alguna $r < 1$.

Teniendo lo anterior, se hará el cambio de variable $z \rightarrow (\frac{1}{z})^{kn}$ que llevará nuestro estudio de una vecindad del cero a una vecindad del infinito. Este cambio de coordenadas genera una kn cubierta $\mathbb{C}^{*[kn]}$ de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Se observa que la ecuación $z^{-kn} = w$ tiene kn soluciones. Y si se considera que $z^{-kn} - w = 0$ es una variedad analítica M en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, no hay que preocuparse por la diferenciabilidad de sus cartas coordenadas que son funciones de esta variedad M en \mathbb{C} o \mathbb{C}^* . Más adelante se tomará el cambio de variable como un tipo de cartas coordenadas de la variedad $z^{-kn} - w = 0$, las cuales cubrirán toda la variedad M excepto un conjunto flaco. También hay que recordar que los puntos $p_1, \dots, p_{kn} \subset \mathbb{C}$ tales que $w(p_1) = \dots = w(p_{kn})$, son distintos entre sí. Tomando los cambios de variable anteriores se tienen las siguientes relaciones,

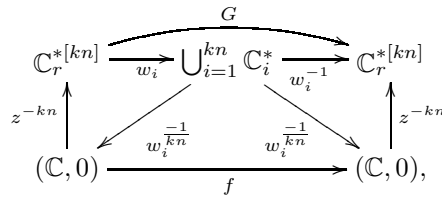
$$w(z) = z^{-kn} \qquad z(w) = w^{-\frac{1}{kn}} \qquad (1.5)$$

Cabe señalar que la segunda expresión es multivaluada. Se definirán, por lo tanto, los subconjuntos $\mathbb{C}_r^{*[kn]}$ de la cubierta $\mathbb{C}^{*[kn]}$ como $\mathbb{C}_r^{*[kn]} = \{p \in \mathbb{C}^{*[kn]} : |w(p)| > r, r \in \mathbb{R}\}$, donde $w(p)$ es la proyección de p en el eje \mathbb{C}^* . Esto es por que con las proyecciones de $\mathbb{C}^{*[kn]}$ en \mathbb{C} se trabajará en una vecindad del infinito.

Lo siguiente es transformar f en un difeomorfismo G bien definido en $\mathbb{C}_r^{*[kn]}$ (tan cerca del infinito, como grande sea r)

$$G : \mathbb{C}_r^{*[kn]} \rightarrow \mathbb{C}^{*[kn]}$$

Se trabajará con G en la \mathbb{C}^* -coordenada w utilizando el siguiente diagrama



donde las w_i son las cartas coordenadas mencionadas anteriormente. Además están definidas con los rangos donde z^{-kn} no es multivaluada, están delimitados por un par de rayos $z = e^{\frac{i\pi q}{kn}}$ con q 's consecutivas que cumplen $z^{kn} \in \mathbb{R}^+$, por lo que son invariantes de la función $\mu z / (1 - z^{kn})^{\frac{1}{kn}}$. Además con la transformación $w^{-\frac{1}{kn}}$ indicarán quienes son los \mathbb{C}_i^* . Teniendo en cuenta lo anterior, se expresa G en las \mathbb{C}^* -coordenadas w como levantamiento de una función g que a continuación se desarrollará

$$\begin{aligned}
g &= z^{-kn} \circ f \circ w^{\frac{-1}{kn}} \\
g(w) &= \left[\mu w^{\frac{-1}{kn}} + \mu w^{-1-\frac{1}{kn}} + O(w^{-1-\frac{2}{kn}}) \right]^{-kn} \\
g(w) &= \left[\mu w^{-\frac{1}{kn}} \left(1 + w^{-1} + O(w^{-\frac{1}{kn}}) \right) \right]^{-kn} \\
g(w) &= w \left(1 + w^{-1} + O(w^{-1-\frac{1}{kn}}) \right)^{-kn} \\
g(w) &= \frac{w}{\left(1 + w^{-1} + O(w^{-1-\frac{1}{kn}}) \right)^{kn}} \\
g(w) &= \frac{w}{1 + knw^{-1} + O(w^{-1-\frac{1}{kn}})} \\
g(w) &= w \left(1 - knw^{-1} + O(w^{-1-\frac{1}{kn}}) \right) \\
g(w) &= w - kn + O(w^{-\frac{1}{kn}})
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Como $O(w^{-\frac{1}{kn}})$ tiende a cero conforme w se acerca a infinito, se nota que la función g en una vecindad del infinito se parece mucho a la transformación

$$w \rightarrow w - kn$$

El coeficiente libre $-kn$ puede ser cambiado por -1 , ya que las traslaciones no afectan al infinito. Entonces, por simplicidad, se define g y g_τ como sigue

$$g(w) = w - 1 + O(w^{\frac{-1}{kn}}) \qquad g_\tau(w) = w - 1$$

Las cuales, bajo un difeomorfismo suave por pedazos (o sea con cartas), son levantadas a $\mathbb{C}_r^{*[kn]}$, obteniéndose, respectivamente,

$$G : \mathbb{C}_r^{*[kn]} \rightarrow \mathbb{C}^{*[kn]} \qquad G_\tau : \mathbb{C}_r^{*[kn]} \rightarrow \mathbb{C}^{*[kn]}$$

Se observa que este par de transformaciones son muy parecidas cerca del infinito, por lo que, a continuación se define una nueva transformación G_η que nos ayudará a construir un homeomorfismo H tal que conjugue a G con G_τ .

Sean $r_0, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ tales que $(kn)^2 < r_0 < r_1 < r_2 < r_3$ y $(kn)^2 < r_1 - r_0, r_2 - r_1, r_3 - r_2$. Se toma la restricción de la transformación G en $\mathbb{C}_{r_3}^{*[kn]}$ para pegarla mediante una función suave con la restricción de G_τ en $\mathbb{C}_{r_0}^{*[kn]} - \mathbb{C}_{r_2}^{*[kn]}$ y obtener una transformación con dominio $\mathbb{C}_{r_0}^*$

$$G_\eta : \mathbb{C}_{r_0}^{*[kn]} \rightarrow \mathbb{C}^{*[kn]}$$

12CAPÍTULO 1. CLASIFICACIÓN DE LOS GÉRMEENES HOLOMORFOS EN $(\mathbb{C}, 0)$

Esta transformación queda definida al hacer el levantamiento de g_η en las \mathbb{C}^* -coordenadas w , que está expresada como sigue

$$g_\eta(w) = g_\tau(w) + \varphi\left(\frac{|w| - r_2}{r_3 - r_2}\right)[g(w) - g_\tau]$$

$$\text{donde } \varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \\ \frac{\int_0^t \exp(\frac{1}{i(t-1)}) dt}{\int_0^1 \exp(\frac{1}{i(t-1)}) dt} & \text{si } 0 < t < 1 \end{cases}$$

Se puede ver que φ es una función pastel C^∞ .

G_η y G coinciden en $\mathbb{C}_{r_3}^{*[kn]}$, lo cual es muy cómodo estando en una vecindad del infinito. Bastando con probar la existencia de un homeomorfismo H tal que conjugue G_η con G_τ

$$H \circ G_\tau \circ H^{-1} := G_\eta$$

Se hará primero la prueba para el caso $n = 1$.

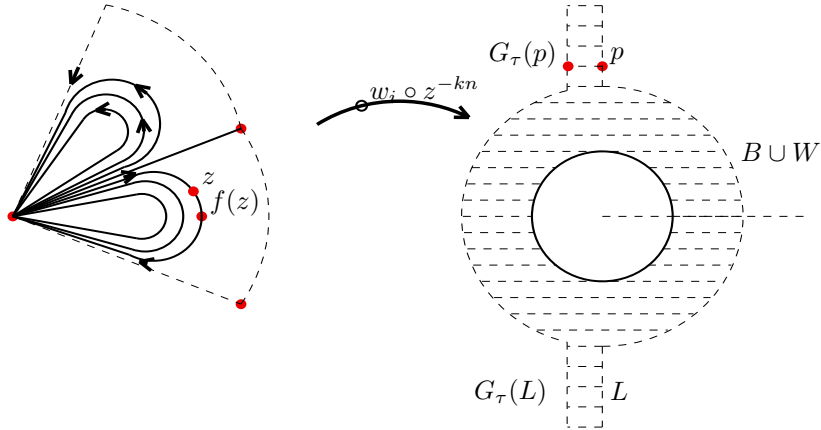


Figura 1.2: $B \cup W$ en una proyección w_i

Para este caso se define un dominio $B \cup W$ de manera que para cualquier punto $p \in \mathbb{C}_{r_0}^{*[kn]}$ exista $l \in \mathbb{Z}$ tal que $G_\tau^l(p) \in B \cup W$, donde

$$B := \mathbb{C}_{r_0}^{*[kn]} - \mathbb{C}_{r_1}^{*[kn]} \quad \text{y} \quad W := \left\{ p \in \mathbb{C}_{r_0}^{*[kn]} : -1 \leq \text{Re}(w(p)) \leq 0 \right\}$$

Notando que en B coinciden G_τ y G_η , será definida la transformación H como la identidad en B . En lo siguiente hay que pensar en $\mathbb{C}_{r_0}^{*[kn]}$ como una variedad con cartas en \mathbb{C}^* (que eran las cartas $(w_{i-1}, \mathbb{C}_i^*)$). Se define el conjunto $L := \{w(p) \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re}(w) = 0, p \in \mathbb{C}_{r_0}^{*[kn]}\}$, que es una transversal para las trayectorias de G_τ , y se define una función H ahí tal que haga conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{G_\tau} & G_\tau(L) \\ \downarrow H & & \downarrow H \\ L & \xrightarrow{G_\eta} & G_\eta(L) \end{array}$$

Dado que g_τ y g_η son muy cercanas en su respectivas cartas, sus levantamientos cumplen que $d(G_\tau(p), G_\eta(p)) < \epsilon$ en una vecindad del infinito suficientemente grande, como es $\mathbb{C}_{r_0}^{*[kn]}$. Esta cercanía además permite que $G_\tau(L)$ y $G_\eta(L)$ sean homotópicos, y como no tienen autointersecciones (ya que L es transversal a sus trayectorias), también son homeomorfos a L intersectado con $\mathbb{C}_{r_0}^{*[kn]}$. Por lo tanto la conjugación H como función continua está bien definida. Además L y $G_\tau(L)$ son la frontera de W . Entonces, por el Teorema de Extensión de Tietze, H se extiende a $B \cup W$ y se define \tilde{H} en $\mathbb{C}_{r_0}^{*[kn]}$ como sigue:

$$G_\eta^{-l} \circ H \circ G_\tau^l(p) = \tilde{H}, \quad \text{donde } l \text{ es tal que } G_\tau^l(p) \in B \cup W.$$

Esta \tilde{H} puede no ser el homeomorfismo deseado, ya que la órbita α de G_τ desde un punto en L a un punto en $G_\tau(L)$ bajo \tilde{H} no necesariamente cae sobre la órbita β de G_η desde L a $G_\eta(L)$; pero como éstas coinciden en los extremos, las condiciones de las r_i aseguran que $\tilde{H}(\alpha)$ y β son homotópicas. Así que, salvo por una homotopía, \tilde{H} es el homeomorfismo deseado.

Sólo falta mencionar que \tilde{H} fue definido en las cartas (w_i^{-1}, \mathbb{C}^*) las cuales cubren $\mathbb{C}_r^{*[kn]}$ excepto por un conjunto de medida cero (lo que no impide que \tilde{H} sea extendida continuamente).

Para los casos en que $n \neq 1$ se hacen algunas modificaciones. Primero $W := \{w(p) \in \mathbb{C}^* : -n < \operatorname{Re}(w) < 0, p \in \mathbb{C}^{*[kn]}\}$, luego, cabe remarcar que en el caso anterior se tenía

$$g : \mathbb{C}_i^* \rightarrow \mathbb{C}_i^*,$$

y para este caso sucede que

$$g : \mathbb{C}_i^* \rightarrow \mathbb{C}_j^* \quad \text{con } i \neq j$$

Como consecuencia de la rotación que genera μ sobre los ejes invariantes (los cuales son las fronteras de nuestras cartas). Luego, también es necesario definir H en base a que conmute el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{G_\tau} & G_\tau^n(L) \\ \downarrow H & & \downarrow H \\ L & \xrightarrow{G_\eta} & G_\eta^n(L) \end{array}$$

donde G_τ^n y G_η^n son levantamientos de las funciones $g_\tau^{\circ n}$, $g_\eta^{\circ n}$, respectivamente, en las \mathbb{C}^* -coordenadas w . Entonces

$$g^n : \mathbb{C}_i^* \rightarrow \mathbb{C}_i^*$$

Y así se construye H notando que la definición es sobre n cartas. Estas cartas son por las que pasa un punto $w(p)$ al iterar n veces g_τ antes de regresar a la carta en la que comenzó, y para cada punto en ellas existe una $l \in \mathbb{Z}$ tal que $G_\tau^l(w) \in B \cup W$. Definiendo H como la identidad en L y B . Luego extendemos H como en el caso anterior.

Para terminar, sólo nos falta pasar G_τ a las coordenadas- z utilizando el primer diagrama

$$\begin{aligned} f_{kn} &= w^{\frac{-1}{kn}} \circ g_\tau \circ z^{-kn} \\ f_{kn}(z) &= (z^{-kn} - 1)^{\frac{-1}{kn}} \\ f_{kn}(z) &= (\mu^{-kn} z^{-kn} (1 - z^{kn}))^{\frac{-1}{kn}} \end{aligned}$$

(en este paso se retoma la μ , que se perdió al pasar f a las \mathbb{C}^* -coordenadas w)

$$f_{kn}(z) = \mu z (1 - z^{kn})^{\frac{-1}{kn}} \tag{1.7}$$

■

Cabe notar que este Teorema también puede enunciarse diciendo que f es topológicamente equivalente a la transformación a tiempo 1, $g_{\tilde{\omega}}^1$, a lo largo de las soluciones de la ecuación diferencial $\dot{z} = \tilde{\omega}(z)$, donde $\tilde{\omega}(z) = z^{p+1}$.

1.3. Clasificación Analítica

En la sección 1 se obtuvo una clasificación formal de los gérmenes de transformaciones conformes $Diff(\mathbb{C}, 0)$. Esto conduce a una buena pregunta: ¿cuándo una transformación $f \in Diff(\mathbb{C}, 0)$ es analíticamente equivalente a su forma normal formal?. Como en la primera sección, la respuesta a esta pregunta no es trivial. Si se retoma el límite H de las H_{k_i} que conjugaban a f con su forma normal formal, se puede ver bajo qué condiciones H es analítica. Para este efecto, se recordará cómo son los coeficientes h_{k_i} de estas funciones:

$$h_{k_i} = \frac{a_{k_i}}{\mu(1 - \mu^{k_i-1})}, \quad \text{donde } \mu \text{ es la parte lineal de } f.$$

Observando el factor $1/\mu(1 - \mu^{k_i-1})$ y recordando que la analiticidad de f (vista como una serie) depende de la existencia de un radio de convergencia, expresado como $\limsup_{i \rightarrow \infty} \sqrt[k_i]{|h_{k_i}|}$, se tiene que μ^{k_i} no debe de aproximarse a 1 demasiado, pues de lo contrario el coeficiente h_{k_i} crece en norma sin cota superior arruinando la existencia del radio de convergencia. De esto se pueden observar tres casos: que μ sea igual a 1, o raíz n -ésima de la unidad, o de la forma $\mu = e^{2\pi i\theta}$ con θ irracional. Para los dos primeros quedó claro que f no es ni siquiera formalmente equivalente a su parte lineal. En el tercer caso sí se tiene la equivalencia formal; pero recordando que la iteración de $e^{2\pi i\theta}$ es densa en la circunferencia unitaria, muchos de los coeficientes h_{k_i} van a crecer en norma sin cota superior alguna. De hecho tanto Siegel como Yoccoz dieron ejemplos de transformaciones de la forma $f(z) = e^{2\pi i\theta}z + \dots$ que no son analíticamente equivalentes a su parte lineal.

Una situación completamente distinta se observa si la norma $|\mu|$ es distinta de 1. En efecto, en este caso resulta que f sí es analíticamente equivalente a su parte lineal; este teorema fue demostrado por Schroder (1820) y Koenings (1884) y se demostrará en el siguiente punto.

1.3.1. Teorema de linealización y dinámica de los difeomorfismos tangentes a la unidad

Entre los casos que se obtienen en la clasificación analítica de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, el de $|\mu|$ distinto a la unidad es el más sencillo; además, tiene varias demostraciones. A continuación se da una demostración bastante accesible.

Teorema 1.3.1 (de Linealización de Schroder, Koenings) *Sea $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germen de transformación conforme tal que $f'(0) = \mu$, $|\mu| \neq 1$. Bajo estas condiciones, f es analíticamente equivalente a su parte lineal.*

Demostración. Se hará la demostración en dos casos: $|\mu| < 1$ y $|\mu| > 1$. Como la construcción de la transformación analítica h que va conjugar a f con su parte lineal en los dos casos es casi idéntica, se construirá h sólo para el primer caso y para el segundo se mencionarán las respectivas modificaciones para que funcione la construcción.

i) Suponiendo que $|f'(0)| = |\mu| < 1$, y como por hipótesis se tiene que f' es analítica, existen constantes $\nu, r \in \mathbb{R}^+$, $\nu < 1$ tales que $|f'(z)| \leq \nu < 1$ para $|z| \leq r$. Si $\alpha : [0, 1] \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ es una curva que cumple las siguientes condiciones $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = z$ y $\alpha(t) = tz$, entonces

$$\begin{aligned}
 f(z) - f(0) &= \int_0^1 f'(\alpha(t))\alpha'(t)dt \\
 |f(z)| &= \left| \int_0^1 f'(\alpha(t))\alpha'(t)dt \right| \leq \int_0^1 |f'(tz)||z|dt \leq \int_0^1 \nu|z|dt \\
 |f(z)| &\leq \nu|z|
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

Ahora, componiendo f consigo, misma se tiene que

$$|f^{\circ 2}(z)| = |f(f(z))| \leq \nu|f(z)| < \nu^2|z|;$$

y así, para toda n , se puede ver que la composición n -ésima $f^{\circ n}$ satisface la desigualdad

$$|f^{\circ n}| \leq \nu^n|z|. \tag{1.9}$$

Considerando la sucesión de funciones $h_n : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ definida por

$$h_n(z) = \frac{f^{\circ n}}{\mu^n},$$

queda demostrar que h_n converge uniformemente en $|z| \leq r$ a una función h . Notando que

$$h_{n+1}(z) = \frac{f^{\circ n+1}(z)}{\mu^{n+1}} = \frac{f(f^{\circ n}(z))}{\mu\mu^n}$$

y por (1.9), se concluye que h_{k+1} y h_k tienen un cero del mismo orden en cero; lo cual permite tener la siguiente expresión

$$h_{n+1}(z) = h_1(z) \prod_{k=1}^n \frac{h_{k+1}(z)}{h_k(z)}.$$

Como

$$\frac{h_{k+1}(z)}{h_k(z)} = \frac{f(f^{\circ k}(z))}{\mu^{k+1}} \frac{\mu^k}{f^{\circ k}(z)} = \frac{f(z_k)}{\mu z_k}$$

donde $z_k = f^{\circ k}(z)$, y recordando que

$$\frac{f(z)}{\mu z} = 1 + O(z) = 1 + \xi(z)$$

(ya que $\xi(z)$ es de orden al menos 1), es posible la desigualdad $|\xi(z)| \leq \beta|z|$, $|z| < r < 1$ para alguna $\beta > 0$. Entonces se tiene que

$$\frac{h_{k+1}(z)}{h_k(z)} = \frac{f(z_k)}{\mu z_k} = 1 + \xi(z_k) \quad , \text{ con } |z_k| < r,$$

obteniéndose así otra expresión para las h_n

$$h_{n+1}(z) = h_1(z) \prod_{k=1}^n (1 + \xi(z_k)).$$

De donde la sucesión converge si el producto $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \xi(z_k))$ converge. Para demostrar la convergencia del producto anterior basta recordar el siguiente criterio de convergencia de los productos infinitos.

Lema 1.3.2 *El producto $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \alpha_k)$ converge si la serie $\sum_1^{\infty} |\alpha_k|$ converge y ningún factor $1 + \alpha_k$ es cero.*

En este caso se tiene que $|\xi(z_k)| \leq \beta|z_k| = \beta|f^{o k}(z)|$ de donde

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi(z_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \beta|f^{o k}(z)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \beta \nu^k |z| = \beta|z| \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k.$$

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \nu^k$ converge pues $\nu < 1$; entonces, por el lema 1.3.2, el producto $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \xi(z_k))$ converge uniformemente. Luego, sólo falta verificar que la función límite $h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$ es la que conjuga a f con su parte lineal

$$h \circ f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(f(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{o n}(f(z))}{\mu^n} = \mu \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{o n+1}(z)}{\mu^{n+1}} = \mu h(z)$$

□

ii) Cuando $|\mu| > 1$ hay que considerar a $f^{-1}(z) = \frac{1}{\mu}z + O(z^2)$, que es la inversa de f . Del inciso anterior sabemos que existe h biholomorfismo que conjuga a f^{-1} con su parte lineal. Y justo la inversa de h conjuga a f con su parte lineal.

■

El Teorema anterior permite ahora concentrar el estudio de las transformaciones conformes en $(\mathbb{C}, 0)$ a los casos cuando $|\mu| = 1$. El caso en el cual se profundizará es cuando f es tangente a la identidad. Sucede que las series formales que conjugan a $f \in \mathcal{A}_p$ con su forma normal formal $f_{p,\lambda}$ en general son divergentes, pero Poincaré se dio cuenta que partiendo el dominio en secciones con vértice en el cero se obtienen expansiones para transformaciones analíticas que conjugan a la función inicial con su forma normal en cada sección. Por esta razón se definirá una cubierta abierta de la vecindad agujerada, con sectores de la forma

$$S_j = \left\{ z : \left| \arg(z) - \frac{\pi(j-1)}{p} \right| < \alpha, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2p}, \frac{\pi}{p} \right) \right\}$$

Donde $p + 1$ es el exponente del primer término no lineal distinto de cero. Se observa que estas secciones contienen a los rayos invariantes de $z/(1 - z^p)^{\frac{1}{p}}$, de la clasificación topológica de f ; éstos marcan cómo se acerca f al origen en cada sección. La primera descripción de la dinámica inducida por iteraciones, $f^{\circ n}$ con $n \in \mathbb{Z}$, de f en una vecindad del cero se remonta a la tesis de Leau donde se encuentra la primera versión del *Teorema de la Flor*:

Teorema 1.3.3 (de la flor, Leau) *Sea U una vecindad del cero, sobre la cual está definida el germen de transformación conforme tangente a la identidad f . Aunque se encoja la vecindad U , existe una cubierta de $U - \{0\}$ por $2p$ sectores S_j abiertos, dispuestos alrededor del origen como los pétalos de una flor alrededor de su corazón, sobre los cuales la dinámica de f es contractante en unos y dilatante en otros.*

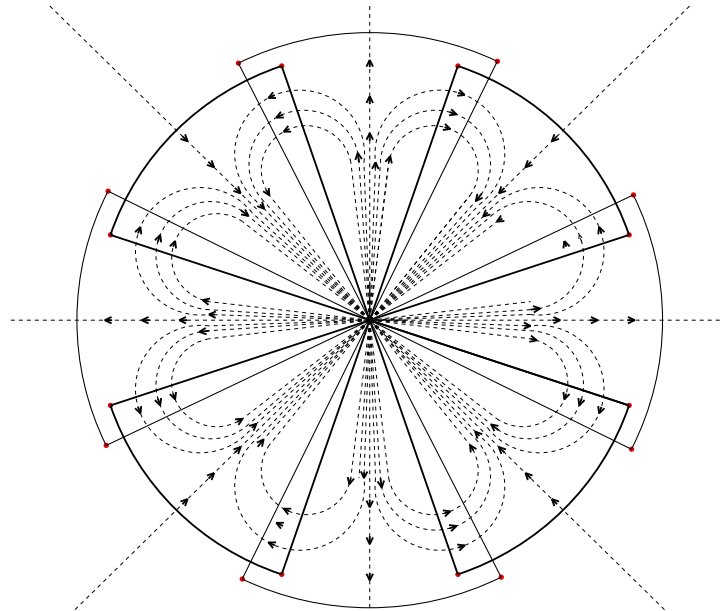


Figura 1.3: Flor seccionada

Numerados por $j = 1, \dots, 2p$, los p pétalos atractores corresponden a los sectores S_j con j par y los pétalos repulsivos son los S_j con j impar. De donde se obtiene

$$f(S_j) \subset S_j \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f^{\circ n}(z)| = 0 \quad \text{si } j \text{ es par,}$$

$$f^{-1}(S_j) \subset S_j \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f^{\circ -n}(z)| = 0 \quad \text{si } j \text{ es impar}$$

Más aún, sobre cada pétalo, se tiene una estimación del tipo

$$|f^{\circ n}(z)| < \frac{C|z|}{(1 + nz^p)^{\frac{1}{p}}}$$

para una constante $C > 0$.

Demostración. Para efectos de la demostración se usará el cambio de variable $z \rightarrow -1/pz^p$, el cual transforma a las secciones S_j alrededor del cero en los abiertos

$$\tilde{S}_j = \{w : |w| > r > 1, |\arg(w)| < \pi - \theta \text{ con } \varepsilon < \text{sen}(\theta) < 1\} \text{ si } j \text{ es par,}$$

$$\tilde{S}_j = \{w : |w| > r > 1, |\arg(w)| > \theta \text{ con } \varepsilon < \text{sen}(\theta) < 1\} \text{ si } j \text{ es impar}$$

Análogo a lo que sucedió en la Sección 1.2 se observa que al levantar f con el cambio de variable $z \rightarrow -1/pz^p$ se obtiene la expresión:

$$\tilde{f}(w) = w + 1 + R(w),$$

donde $R(w)$ es de orden $O(\frac{1}{|w|})$. Por esta razón, en una vecindad del infinito con la elección de una r suficientemente grande se puede suponer que $|\tilde{f}(w) - (w + 1)| < \varepsilon < 1$ en cada sección \tilde{S}_j . Con la propiedad de que \tilde{f} es muy cercana a la transformación $Id + 1$ se construirá la constante C_0 , tal que $|\tilde{f}^{\circ n}(w)| > C_0(|w| + n)$. Para esto se encontrará el mínimo de una función $F : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}$. Con el propósito de trabajar con iteraciones positivas se toma \tilde{S}_j con j par. La función se deduce de las siguientes desigualdades:

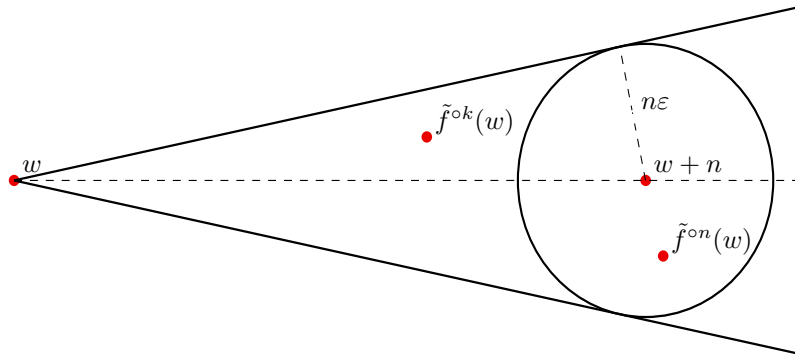


Figura 1.4: Iteradas de \tilde{f}

$$|\arg(\tilde{f}^{\circ n}(w) - w)| < 2\arctan(\varepsilon/(1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}).$$

Esta desigualdad muestra que las iteraciones de \tilde{f} en w se quedan en una región delimitada por los rayos $w + t \cdot \exp(\pm i2\arctan(\varepsilon/(1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}))$ con $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} |\tilde{f}^{\circ n}(w)| &= \left| w + n + \sum_{l=0}^{n-1} R(\tilde{f}^{\circ l}(w)) \right| \geq |w + n| - \sum_{l=0}^{n-1} |R(\tilde{f}^{\circ l}(w))| \\ |\tilde{f}^{\circ n}(w)| &> |w + n| - n\varepsilon \end{aligned} \quad (1.10)$$

de donde se tiene

$$\frac{|\tilde{f}^{\circ n}(w)|}{|w + n|} > \frac{|w + n| - n\varepsilon}{|w + n|} \quad (1.11)$$

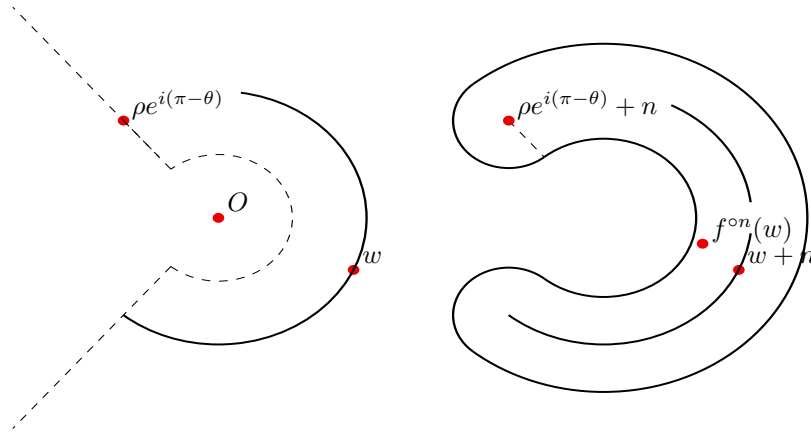


Figura 1.5: :

Si se encuentra un mínimo o una cota inferior de $F(w, n) = |w+n| - n\varepsilon / |w+n|$ entonces éste será cota inferior para $|\tilde{f}^{\circ n}(w)| / |w + n|$. Las variables que se van considerar para encontrar la cota van a ser el $\arg(w) = \alpha$ y n ; se considerará w de norma constante ρ . Otra cosa a ver, es quién va ser nuestro dominio en este caso. Como \tilde{S}_j es una región simétrica respecto al eje real, el dominio será $[0, \pi - \theta] \times \mathbb{R}^+$, que es cerrado para asegurar la existencia de un mínimo. Si se considera el triángulo con vértices $A = 0$, $B = \rho e^{i\alpha}$ y $C = \rho e^{i\alpha} + n$, nos interesa saber cuando la longitud del lado $|AC| = |w + n|$ es la mínima respecto a α . Usaremos los siguientes hechos geométricos derivados de la ley de cosenos:

Lema 1.3.4 Si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen dos lados congruentes $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$ y $\angle ABC > \angle A'B'C'$ entonces $|AC| > |A'C'|$

Lema 1.3.5 *Sea ABC un triángulo del cual se conoce la longitud de sus lados AB , BC y el ángulo que forman entre ellos $\angle ABC$, entonces*

$$|CA|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB||BC|\cos(\angle ABC).$$

El primer Lema indica que el mínimo para $|AC|$ es cuando el ángulo $\angle ABC = \pi - \alpha$ es mínimo, que justo pasa cuando $\alpha = \pi - \theta$. Ahora se encontrará el mínimo de la función $g(n) = |w + n| - n\varepsilon/|w| + n$ respecto a n variando en \mathbb{R}^+ . Usando el lema 1.3.5 en el triángulo ABC se tiene la igualdad

$$\begin{aligned} |CA|^2 &= |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB||BC|\cos(\theta) \\ \left| \rho e^{i(\pi-\theta)} + n \right|^2 &= \rho^2 + n^2 - 2\rho n \cos(\theta), \end{aligned} \quad (1.12)$$

que simplifica la función $g(n) = F(w, n)$

$$g(n) = \frac{\sqrt{\rho^2 + n^2 - 2\rho n \cos(\theta)} - n\varepsilon}{\rho + n}.$$

Derivando la función se obtiene

$$g'(n) = \frac{\rho(1 + \cos(\theta))(n - \rho) - \rho\varepsilon\sqrt{\rho^2 + n^2 - 2\rho n \cos(\theta)}}{\rho + n},$$

que al igualar a cero y elevar al cuadrado, se llega a la siguiente ecuación cuadrática

$$n^2 - 2n\rho\alpha + \rho^2 = 0,$$

donde $\alpha = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{(1+\cos(\theta))^2} \cos(\theta)\right) / \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{(1+\cos(\theta))^2}\right)$. De donde se obtiene que g' se anula en

$$n_1 = \rho \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) \quad \text{y} \quad n_2 = \rho \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \right)$$

Y con algunos cálculos se obtiene que $g'(\alpha) < 0$, para ε suficientemente pequeña $g'(\alpha) < 0$, de donde concluimos que n_2 es el mínimo que buscamos. Luego entonces

$$g(n) > g(n_2),$$

obteniendo la constante deseada

$$C_0 = \frac{\sqrt{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^2 + 1} - 2(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})\cos(\theta) - (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})\cos(\theta)}{1 + \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}},$$

por lo que se tiene

$$|\tilde{f}^{\circ n}(w)| > C_0(|w| + n).$$

De aquí ya es fácil regresar la constante a los abiertos S_j . La demostración cuando las iteraciones son negativas es análoga. ■

1.3.2. Cadenas normalizadoras

Como sucedió en la sección 1.2, el estudio de los difeomorfismos tangentes a la identidad o con parte lineal raíz de la unidad, va ser pasado de una vecindad del cero a una vecindad del infinito. El cambio de variable ξ va tomar en cuenta la forma normal formal $f_{p,\lambda}$ de f , pues se quiere que conjuge a $f_{p,\lambda}$ con la traslación $Id + 1$. Para ello basta encontrar un cambio de variable que mande al campo $\omega_{p,\lambda} = \omega$ al campo constante $1 \frac{\partial}{\partial w}$ en cada sección S_j .

Recordando que ω como campo vectorial de S_j está contenido en el haz tangente TS_j de S_j y suponiendo además que ξ es el cambio de variable y $\tilde{S}_j = \xi(S_j)$, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_j & \xrightarrow{\xi} & \tilde{S}_j \\ (id, \omega) \downarrow & & (id, 1) \downarrow \\ TS_j & \xrightarrow{D\xi} & T\tilde{S}_j \end{array}$$

Donde $D\xi$ en cada punto z de S_j es una transformación lineal entre $T_z S_j$ y $T\tilde{S}_j$. Como éstos son de dimensión 1-compleja, $D\xi$ es un valor complejo para cada $z \in S_j$ y el campo en \tilde{S}_j es igual a $D\xi(z)\omega_{p,\lambda}(z)$. La solución de la siguiente ecuación permite encontrar explícitamente el cambio de coordenadas ξ . En efecto, de la igualdad

$$D\xi(z)\omega_{p,\lambda} = 1 \frac{\partial}{\partial w} \quad (\tilde{S}_j \text{ tiene } w\text{-coordenadas})$$

se tiene,

$$D\xi(z) \frac{z^{p+1}}{1 + \lambda z^p} = 1$$

y por lo tanto,

$$D\xi(z) = \frac{1 + \lambda z^p}{z^{p+1}}.$$

Integrando de z_0 a z

$$\begin{aligned}\xi_j(z) - \xi_j(z_0) &= \int_{z_0}^z \frac{1 + \lambda s^p}{s^{p+1}} ds \\ &= \int_{z_0}^z \frac{1}{s^{p+1}} + \frac{\lambda}{s} ds = \frac{-1}{ps^p} \Big|_{z_0}^z + \lambda \ln(z) \Big|_{z_0}^z.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\xi_j(z) = \frac{-1}{pz^p} + \lambda \log(z), \quad (1.13)$$

el cual sobre el sector S_j es un difeomorfismo pues ahí está bien definida una rama de logaritmo y no contiene al cero.

De la sección 1.1 tenemos que si $f \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es tangente a la identidad, entonces es analíticamente conjugada a una transformación \hat{f} tal que

$$\hat{f} := g_\omega^1 + O(z^N),$$

con N tan grande como sea necesario. Por lo que, en adelante, se pensará a f como \hat{f} . Por esta razón, al aplicar el cambio de variable ξ a f se obtiene

$$\tilde{f}(\xi) = \xi + 1 + R(\xi)$$

con $R(\xi) = O(\xi^{-M})$ y donde M es tan grande como se desee, ya que depende de la N elegida anteriormente para \hat{f} . Y todo esto está definido en cada sector \tilde{S}_j , que es el complemento del conjunto $\{\xi : |\arg(\xi)| < \frac{\pi}{2} - \alpha, |\xi| \leq K\}$ con $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ y $K(\xi) \in \mathbb{R}^+$ tal que $|R(\xi)| \leq \varepsilon$ si j es impar (si j es par el conjunto es $\{\xi : |\arg(\xi) - \pi| < \frac{\pi}{2} - \alpha, |\xi| \leq K\}$).

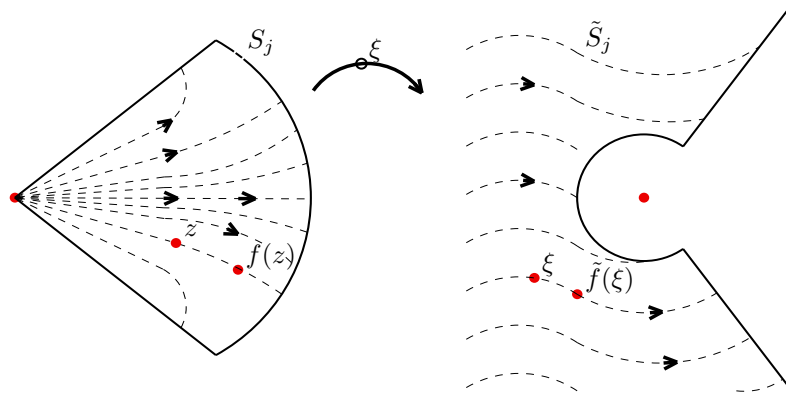


Figura 1.6: :

En este caso se obtendrá una función analítica \tilde{H}_j en cada \tilde{S}_j que conjugue a \tilde{f} con la traslación $id + 1$. Se debe notar que el problema son los impedimentos para poder pegar analíticamente todas las \tilde{H}_j en una sola función. Sin embargo, se construirán funciones de pegado entre \tilde{H}_j y \tilde{H}_{j+1} , y esta colección de funciones va ser la que determine la clasificación analítica buscada. Pero primero se demostrará que las \tilde{H}_j siempre existen.

Teorema 1.3.6 (de normalización para un sector) *En todo sector S_j de la cubierta antes mencionada, existe una única transformación holomorfa H_j de la forma*

$$z \rightarrow z + h_j(z), \quad h_j(z) = O(z^{p+1})$$

la cual conjugua a f con su forma normal formal

$$f_{p,\lambda} = g_{\omega_{p,\lambda}}^1, \quad \omega_{p,\lambda} = \frac{z^{p+1}}{1 + \lambda}$$

Demostración. Como se venía viendo, la construcción de H_j será en la ξ -carta; i.e. $\tilde{H}_j(\xi) = \xi + \tilde{h}_j(z)$, $\xi \in \tilde{S}_j$. De donde $H_j = \xi^{-1} \circ \tilde{H}_j \circ \xi$. De la condición de conjugación se obtiene una ecuación funcional

$$\begin{aligned} \tilde{H}_j \circ \tilde{f} &= \tilde{f}_{p,\lambda} \circ \tilde{H}_j \\ \xi + 1 + R_j(\xi) + \tilde{h}_j \circ \tilde{f} &= \xi + \tilde{h}_j + 1 \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$R_j + \tilde{h}_j \circ \tilde{f} = \tilde{h}_j \quad \text{y} \quad R_j = \tilde{h}_j - \tilde{h}_j \circ \tilde{f} \quad (1.15)$$

de la cual iterando la segunda con \tilde{f} por la derecha se obtiene que

$$R \circ \tilde{f}^{on} = \tilde{h} \circ \tilde{f}^{on} - \tilde{h} \circ \tilde{f}^{on+1}. \quad (1.16)$$

Tomando la serie $\sum_{n=0}^{\infty} R \circ \tilde{f}^{on}$ y haciendo uso de la igualdad (1.16) se observa que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{h} \circ \tilde{f}^{on} - \tilde{h} \circ \tilde{f}^{on+1}$ es telescópica. Por lo tanto $\tilde{h} = \sum_{n=0}^{\infty} R \circ \tilde{f}^{on}$.

Suponiendo que j es par, del teorema 1.3.3 se tiene, para alguna $C \in \mathbb{R}^+$, la desigualdad $|\tilde{f}^{on}(\xi)| > C(|\xi| + n) > Cn$ y, por lo tanto, $|R_j \circ \tilde{f}^{on}| < C_1 n^{-M}$ pues R_j es de orden $-M$. Entonces, como M es tan grande como sea necesario, la serie que representa a \tilde{h}_j es absolutamente convergente en \tilde{S}_j y por lo tanto es analítica en esta región. Además cada término de $\sum_{n=0}^{\infty} R \circ \tilde{f}^{on}$ tiende a cero conforme ξ se acerca al infinito, por lo que $\tilde{H}_j \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} Id$.

Ahora supongamos la existencia de una \tilde{G}_j que también conjugue a \tilde{f} con la traslación $Id + 1$. Como $\tilde{G}_j = Id + \tilde{g}_j$, se tiene que \tilde{g}_j cumple la misma ecuación funcional (1.16)

$$\tilde{g}_j = \tilde{g}_j \circ \tilde{f} + R_j$$

por lo que $\tilde{g}_j = \tilde{h}_j$, luego entonces \tilde{H}_j es única. ■

Observemos ahora que $\tilde{S}_j \cap \tilde{S}_{j+1}$ está contenido en el semiplano superior si j es impar (en el semiplano inferior si j es par). De como se construyó cada \tilde{S}_j , se sabe que la ε que acota a $R(\xi)$ puede ser modificada para lograr que un semiplano superior bajo la acción de la traslación tenga como región fundamental a $\tilde{S}_j \cap \tilde{S}_{j+1}$. Así se puede hablar del espacio cociente \tilde{S}_j / \tilde{f} que es biholomorfo a una esfera de Riemann doblemente agujerada y de la relación entre las regiones fundamentales de \tilde{S}_j / \tilde{f} y $\tilde{S}_{j+1} / \tilde{f}$, se puede definir la siguiente colección de funciones

$$\varphi : (\bar{\mathbb{C}}, 0) \times \{j\} \longrightarrow (\bar{\mathbb{C}}, 0) \times j + 1 \quad \text{si } j \text{ es par}$$

$$\varphi : (\bar{\mathbb{C}}, \infty) \times \{j\} \longrightarrow (\bar{\mathbb{C}}, \infty) \times j + 1 \quad \text{si } j \text{ es impar}$$

La cual es conocida como el moduli de la función f . Además, el hecho de que estas funciones sean holomorfas o no, depende del siguiente resultado.

Proposición 1.3.7 *El espacio cociente $\frac{\tilde{S}_j}{\tilde{f}}$ conserva una estructura analítica*

Nota: La demostración de esta proposición depende de la teoría de transformaciones cuasiconformes. Esta teoría estudia las transformaciones que van de una variedad holomorfa M de dimensión n compleja a la misma variedad M , pero vista en dimensión $2n$ real con cartas no holomorfas. Este tipo de funciones dejan una huella de la estructura holomorfa que se perdió, que cuando $\dim_{\mathbb{C}}(M) = 1$, se mide usando la una forma

$$\eta = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z},$$

donde $d\bar{z}$ mide la parte antiholomorfa de la función. Cuando se obtiene una estructura cuasiconforme que preserva ángulos, entonces se dice que la estructura es integrable. Para saber si una estructura cuasiconforme dada por f es integrable se usa la *ecuación diferencial de Beltrami* $\mu d\bar{z}/dz$, donde $\mu = \frac{\partial f}{\partial z} / \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, que da condiciones suficientes en el siguiente teorema

Teorema 1.3.8 *Para la integrabilidad de una μ -estructura cuasiconforme definida sobre una variedad M de dimensión 1 compleja con la correspondiente ecuación diferencial de Beltrami $\mu d\bar{z}/dz$, es suficiente pedir que μ sea continua y satisfaga la desigualdad $|\mu| \leq k < 1$.*

Cuando se tiene una función f de $\mathbb{C}^* = \hat{\mathbb{C}} - \{0, \infty\}$ a \mathcal{S} que define una estructura cuasiconforme y μ , de la correspondiente forma diferencial, se puede extender a los puntos $0, \infty$, decimos que f es regular. Con esta definición y el siguiente Corolario se demuestra la Proposición 1.3.7

Corolario 1.3.9 *Sea $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathcal{S}$ una función regular. Entonces existe una función conforme $H : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathcal{S}$; esto nos dice que \mathcal{S} tiene el mismo tipo conforme que \mathbb{C}^* o sea que un anillo o un disco punteado.*

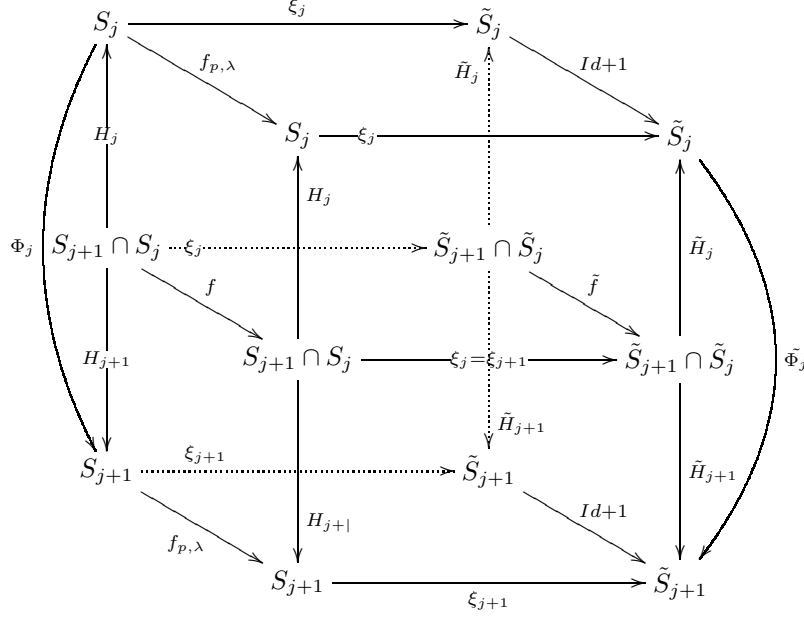
La Proposición 1.3.7 muestra que la colección de funciones que se define antes es holomorfa. A continuación seguiremos estudiando el atlas S_j que se definió para el Teorema 1.3.6.

La construcción de un atlas (S_j, H_j) con $j = 1, \dots, 2p$ fue dada por Fatou en 1920. Pero no fue hasta los años 80 que S.M. Voronin, J. Ecalle y B. Malgrange comenzaron a trabajar en las funciones de transición definidas en $S_j \cap S_{j+1}$.

Las funciones de *transición* se definen como

$$\tilde{\Phi}_j := \tilde{H}_{j+1} \circ \tilde{H}_j^{-1} : \tilde{S}_{j+1} \cap \tilde{S}_j \rightarrow \tilde{S}_{j+1} \cap \tilde{S}_j$$

Donde \tilde{H}_j es la transformación que conjuga a \tilde{f} con la transformación $Id + 1$



Se observa que las transformaciones \tilde{H}_j y \tilde{H}_{j+1} conjugan a la función \tilde{f} con la traslación $Id + 1$ en $\tilde{S}_{j+1} \cap \tilde{S}_j$, de donde la composición $\tilde{\Phi}_j = \tilde{H}_{j+1} \circ \tilde{H}_j^{-1}$ cumple las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Phi}_j \circ (Id + 1) &= \tilde{\Phi}_j \circ (\tilde{H}_j \circ \tilde{f} \circ \tilde{H}_j^{-1}) \\
 &= \tilde{H}_{j+1} \circ \tilde{H}_j^{-1} \circ \tilde{H}_j \circ \tilde{f} \circ \tilde{H}_j^{-1} \\
 &= \tilde{H}_{j+1} \circ \tilde{f} \circ \tilde{H}_j^{-1} \\
 &= (Id + 1) \circ \tilde{H}_{j+1} \circ \tilde{H}_j^{-1} \\
 \tilde{\Phi}_j \circ (Id + 1) &= (Id + 1) \circ \tilde{\Phi}_j,
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

por lo tanto, $\tilde{\Phi}_j$ conmuta con la traslación $Id + 1$.

Como $\tilde{\Phi}_j$ es la función de transición y ésta parece tener una relación estrecha con la identidad, se observará que tanto se parecen estas funciones en el infinito. Para ello, se hará uso de la transformación de corrección $\Psi_j = \tilde{\Phi}_j - Id$. Esta transformación es periódica de periodo 1.

$$\begin{aligned}
\Psi_j(\xi + 1) &= \tilde{\Phi}_j(\xi + 1) - (\xi + 1) \\
&= \tilde{\Phi}_j(\xi) + 1 - \xi - 1 \\
&= \tilde{\Phi}_j(\xi) - \xi \\
&= \Psi_j(\xi)
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Entonces Ψ_j tiene expansión en series de Fourier $\Psi_j(\xi) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l e^{2\pi i l \xi}$.

Se retoma el hecho de que las funciones $\tilde{h}_j(\xi), \tilde{h}_{j+1}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0$, las cuales son las diferencias entre $\tilde{H}_j, \tilde{H}_{j+1}$ y la función identidad, para concluir que $\tilde{\Phi}(\xi) = \xi + O(\xi^{-n})$. Lo cual sirve para asegurar que la serie tiene términos libres igual a cero para toda $j \neq 2p$; en efecto, ya que las cartas ξ_j alrededor del infinito sobre las secciones S_j cumplen que $\xi_j = \xi_{j+1}$ en $S_{j+1} \cap S_j$, salvo en $S_{2p} \cap S_1$ porque la función $\lambda \ln(z)$ no es continua alrededor del cero necesariamente. Entonces para no perder la continuidad es necesario tomar $\xi_{2p} = \xi_1 + 2\pi i \lambda$ lo que se ve reflejado en la expansión de series de Fourier de Ψ_{2p} con un término libre.

Ahora se observará el comportamiento de $Im(\xi)$ en $\tilde{S}_j \cap \tilde{S}_{j+1}$, ya que la norma de los términos $e^{2\pi i l n \xi}$ depende de $Im(\xi)$. Cuando j es impar la parte imaginaria de $\xi \in \tilde{S}_j \cap \tilde{S}_{j+1}$ cumple que $Im(\xi) > c$, para alguna $c \in \mathbb{R}^+$. Por lo que $-1Im(\xi) < 0$. Entonces los términos a_n con $n \in \mathbb{Z}^-$ crecen sin cota, pues $|e^{2\pi i n \xi}|$ tiene como exponente real al positivo $-2\pi n Im(\xi)$, cuando ξ tiende a infinito. Como la serie de Fourier es convergente en una vecindad del infinito implica que satisfacen $a_n = 0$.

$$\Psi_j(\xi) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{j,l} e^{2\pi i l \xi} \quad j = 1, 3, \dots, 2p-1 \text{ (impar)}$$

Cuando j es par la $\xi \in \tilde{S}_j \cap \tilde{S}_{j+1}$ tiene parte imaginaria $Im(\xi) < -c$. Análogo al caso anterior, los términos a_n con $n \in \mathbb{Z}^+$ son cero; de donde

$$\Psi_j(\xi) = \sum_{l=-1}^{-\infty} a_{j,l} e^{2\pi i l \xi} \quad j = 2, 4, \dots, 2p-2 \text{ (par)}.$$

Dado que en $\tilde{S}_{2p} \cap \tilde{S}_1$ se tienen problemas, se debe hacer una corrección a ξ_{2p} , o sea tomamos $\xi_{2p} - 2\pi i \lambda$ para que esté bien definida $\Psi_{2p} : \tilde{S}_{2p} \rightarrow \tilde{S}_1$. Obteniendo

$$\Psi_{2p}(\xi) = -2\pi i \lambda + \sum_{l=-1}^{-\infty} a_{2p,l} e^{2\pi i l \xi}.$$

Como se quiere que las correcciones Ψ_j tiendan a cero exponencialmente se toma $\tilde{\Psi}_{2p} = \Psi_{2p} + 2\pi i\lambda$ para este caso.

$$|\Psi_j(\xi)| \leq \sum_{|l|}^{\infty} |a_{j,l}| e^{2\pi i l \xi} = \sum_{|l|=1}^{\infty} |a_{j,k}| e^{-2\pi |l| |Im\xi|}.$$

Mediante la desigualdad anterior es fácil notar que Ψ_j decrece exponencialmente $\exp(-c|\xi|)$ a cero cuando $|Im\xi| \rightarrow \infty$ sobre el dominio de $\tilde{\Phi}_j$ para $j \neq 2p$. En las z -cartas decrece como $\exp\left(\frac{-c}{|z|^p}\right)$. Hay que hacer una observación para ver que pasa lo mismo para Φ_{2p}

$$\begin{aligned} H_1 \circ H_{2p}^{-1} &= \xi_1^{-1} \circ (Id - 2\pi i\lambda + \tilde{\Psi}_{2p}) \xi_{2p} \\ &= \xi_1^{-1} (\xi_{2p} - 2\pi i\lambda + \tilde{\Psi}_{2p} \circ \xi_{2p}) \\ &= \xi_1^{-1} \circ (\xi_1 + \tilde{\Psi}_{2p} \circ \xi_{2p}) \\ &= Id + O\left(\exp\left(\frac{-c}{|z|^p}\right)\right). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Queda así definida la colección de funciones $H = \{H_1, \dots, H_{2p}\}$, la cual es conocida como *cocadena funcional* de f y la colección $\delta_\circ H = \Phi = \{\Phi_1, \dots, \Phi_{2p}\}$ nombrada como *cofrontera iterativa* dado que $\Phi_j = H_{j+1} \circ H_j^{-1}$. Todo esto lleva a definir el conjunto de moduli.

Definición 1.3.10 *Consideremos la cofrontera iterativa $\tilde{\Phi} = \{\tilde{\Phi}_1, \dots, \tilde{\Phi}_{2p}\}$. Dos cofronteras iterativas son consideradas equivalentes, $\tilde{\Phi} \sim \tilde{\Phi}'$, si y sólo si $\tilde{\Phi}' = (Id - \alpha) \circ \tilde{\Phi} \circ (Id + \alpha)$ para alguna $\alpha \in \mathbb{C}$. El conjunto de clases de equivalencia de las cofronteras iterativas es denotado por $\mathcal{M}_{p,\lambda}^+$.*

Observando la definición de la equivalencia entre cofronteras iterativas en las coordenadas ξ , nos preguntamos ¿cómo se pueden definir éstas en las z -coordenadas?. Recordando que ξ , como cambio de variable, conjuga a g_ω^α con la traslación $Id + \alpha$, y considerando la colección $G = \{G_1, \dots, G_{2p}\}$ definida como $G_j = g_\omega^\alpha \circ H_j$, se tienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} g_\omega^1 \circ g_\omega^\alpha \circ H_j &= g_\omega^\alpha \circ g_\omega^1 \circ H_j \\ &= g_\omega^\alpha \circ H_j \circ f \\ g_\omega^1 \circ G_j &= G_j \circ f \end{aligned} \quad (1.20)$$

Luego entonces, la colección G también es una cocadena funcional de f , por lo que H no es única. Ahora, suponiendo que existe otra colección G que también normaliza a f y observando el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{S}_j & \xrightarrow{Id+1} & \tilde{S}_j \\
\uparrow \tilde{H}_j & & \uparrow \tilde{H}_j \\
\tilde{S}_j & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{S}_j \\
\downarrow \tilde{G}_j & & \downarrow \tilde{G}_j \\
\tilde{S}_j & \xrightarrow{Id+1} & \tilde{S}_j
\end{array}$$

se tiene que $\tilde{G}_j \circ \tilde{H}_j^{-1}$ conmuta con la identidad. De manera análoga a lo hecho con $\tilde{\Phi}_j$, se concluye que $\tilde{G}_j \circ \tilde{H}_j^{-1}$ es periódica de periodo uno; además, como está definida en el semiplano derecho o izquierdo \tilde{S}_j , y se puede extender a todo el plano, también es entera. Del teorema 1.3.6 se tiene que \tilde{h}_j y \tilde{g}_j están acotadas en \tilde{S}_j , por esta razón $\tilde{h}_j^{-1} + \tilde{g}_j \circ \tilde{H}_j$ es acotada y se extiende a todo el plano. Por el teorema de Liouville, es constante. Entonces, $\tilde{G}_j \circ \tilde{H}_j^{-1} = Id + c$.

Por lo tanto, hemos probado que la cadena funcional H es única salvo composiciones con las transformaciones g_ω^α con $\alpha \in \mathbb{C}$.

Todo lo que se demostró anteriormente se resume en el enunciado del siguiente Teorema.

Teorema 1.3.11 (de Normalización Sectorial) 1. Para cualquier germen f del conjunto A_p existe una cadena normalizadora

$$H = (H_1, \dots, H_{2p}),$$

donde las funciones H_j son biholomorfas en el sector S_j de la p -cubierta y conjugan a f con su forma normal formal $f_{p,\lambda}$.

2. La cofrontera de la cadena $\delta_\circ H = \{H_{j+1} \circ H_j^{-1}\}$ es una colección de transformaciones con una corrección respecto a la función identidad que decrece exponencialmente conforme $z \rightarrow 0$:

$$|H_{j+1} \circ H_j^{-1}(z) - z| < \exp\left(\frac{-c}{|z|^p}\right)$$

para alguna $c > 0$ que depende de f .

3. La cocadena normalizante es única salvo composición con la transformación a tiempo α ($\alpha \in \mathbb{C}$) a lo largo de las soluciones para el campo $\omega_{p,\lambda}$: cualesquiera dos cadenas normalizantes G, H satisfacen que $G = g_\omega^\alpha \circ H$ para algún complejo α

Todo lo anterior se logró mediante el uso de conjugaciones de f con su forma normal formal en cada sector S_j . Pero si ahora se considera el cambio de variable

$$\tau_j = \xi_j \circ H_j = \tilde{H}_j \circ \xi_j, \quad (1.21)$$

éste conjuga a f con la traslación $Id+1$. Entonces el espacio \tilde{S}/\tilde{f} es equivalente al espacio cociente del τ_j -plano bajo la acción de la traslación $Id+1$. También bajo este cambio de variable se tienen las siguientes igualdades

$$\tilde{\Phi}_j = \tau_{j+1} \circ \tau_j^{-1},$$

y análogamente a lo hecho en las ξ -coordenadas, se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_j(\tau_j) &= \tau_j + \sum_{l=-1}^{-\infty} c_{j,l} \exp(2\pi i l \tau_j) \quad \text{para } j \text{ impar,} \\ \tilde{\Phi}_{2p}(\tau_{2p}) &= \tau_{2p} + \sum_{l=-1}^{-\infty} c_{j,l} \exp(2\pi i l \tau_{2p}), \\ \tilde{\Phi}_j(\tau_j) &= \tau_j + \sum_{l=-1}^{-\infty} c_{j,l} \exp(2\pi i l \tau_j) \quad \text{para } j \text{ par.} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Se observa que el espacio \tilde{S}/\tilde{f} bajo el cambio de variable τ es un cilindro con estructura conforme no Hausdorff y notamos que al aplicar la transformación $\nu_j(\tau_j) = \exp(2\pi i \tau_j)$, esta superficie se convierte en una esfera de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$ doblemente punteada (ya que no tiene ni el polo norte(∞) ni el polo sur (0)). En esta superficie podemos definir una ϕ_j tal que conmute el siguiente diagrama cuando j es par.

$$\begin{array}{ccc} \tau_j(S_j \cap S_{j+1}) & \xrightarrow{\tilde{\Phi}_j} & \tau_j(S_j \cap S_{j+1}) \\ \downarrow \exp \circ 2\pi i & & \downarrow \exp \circ 2\pi i \\ (\bar{\mathbb{C}}, 0) \times \{j\} & \xrightarrow{\phi_j} & (\bar{\mathbb{C}}, 0) \times \{j+1\} \end{array}$$

Donde $(\bar{\mathbb{C}}, 0)$ es cambiado por $(\bar{\mathbb{C}}, \infty)$ cuando j es impar. Observando ahora las series (1.22) se logra obtener una expresión de ϕ_j

$$\begin{aligned} \phi_j(\nu_j) &= \exp\left(2\pi\left(\tau_j + \sum c_{j,l} \exp(2\pi i l \tau_j)\right)\right) \\ &= \nu_j\left(\exp\left(2\pi i \sum c_{j,l} \nu_j^l\right)\right) \\ &= \nu_j(1 + \tilde{\phi}_j(\nu_j)) \end{aligned} \quad (1.23)$$

De esta colección de funciones holomorfas se da otra definición de conjunto de moduli $\mathcal{M}_{p,\lambda}^*$

Definición 1.3.12 *Considera el conjunto de las colecciones $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_{2p})$ de gérmenes de transformaciones $(\bar{\mathbb{C}}, 0(\infty)) \times \{j\} \xrightarrow{\phi_j} (\bar{\mathbb{C}}, 0(\infty)) \times \{j+1\}$ con parte lineal la identidad para $j < 2p$ y $\phi'_{2p}(\infty) = \eta$. Dos colecciones ϕ, ϕ' son equivalentes si existe $C \in \mathbb{C}$ tal que*

$$\phi_j \circ C = C\phi'_j$$

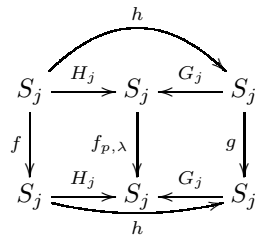
El conjunto de clases de equivalencia de las colecciones ϕ es denotado por $\mathcal{M}_{p,\lambda}^*$.

Ahora ya se tienen los elementos para enunciar y demostrar el teorema central del capítulo.

Teorema 1.3.13 [*Clasificación Analítica, Ecalle-Voronin*] *Existe una función $\mathcal{A}_{p,\lambda} \rightarrow \mathcal{M}_{p,\lambda}^*$ con las siguientes propiedades*

1. *Si f y g en $\mathcal{A}_{p,\lambda}$ son analíticamente equivalentes, entonces $\mu_f^* = \mu_g^*$ (invarianza).*
2. *Si $\mu_f^* = \mu_g^*$, entonces f y g son analíticamente equivalentes (equimodalidad).*
3. *Para cualquier clase $[\phi] \in \mathcal{M}_{p,\lambda}^*$ existe una función holomorfa f en $\mathcal{A}_{p,\lambda}$ tal que $[\phi] = \mu_f^*$ (realización).*

Demostración 1.) Si f y g son gérmenes de $\mathcal{A}_{p,\lambda}$ analíticamente equivalentes, entonces existe una función h holomorfa tal que $h \circ f = g \circ h$. Sean H y G las cocadenas normalizadoras de f y g respectivamente, de donde se obtiene lo siguiente



De este último diagrama se observa que $G \circ h$ también es una cadena normalizadora de f . Por el teorema 1.3.11 se sabe que $G_j \circ h = g_\omega^c \circ H_j$ para alguna $c \in \mathbb{C}$ y para toda $j = 1, \dots, 2p$; entonces,

$$G_{j+1} \circ G_j = g_\omega^c \circ H_{j+1} \circ H_j^{-1} \circ g_\omega^{-c}$$

$$\Phi_j^G = g_\omega^c \circ \Phi_j^H \circ g_\omega^{-c}$$

que en las coordenadas τ se ve como

$$\tilde{\Phi}_j^G = (Id + c) \circ \tilde{\Phi}_j^H \circ (Id - c).$$

Por lo tanto las colecciones ϕ^G y ϕ^H son equivalentes.

2.) Sean $\mu_f^*, \mu_g^* \in \mathcal{M}_{p,\lambda}$ equivalentes y donde μ_f^*, μ_g^* son el moduli correspondiente a f y g respectivamente. Luego entonces las colecciones $\tilde{\Phi}^f$ y $\tilde{\Phi}^g$ se pueden deformar mediante traslaciones $Id + c$ para que éstas coincidan, para tener las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{j+1} \circ \tilde{H}_j^{-1} &= \tilde{G}_{j+1} \circ \tilde{G}_j^{-1} \\ \tilde{H}_{j+1} \circ \tilde{H}_j^{-1} \circ \tilde{G}_j &= \tilde{G}_{j+1} \\ \tilde{H}_j^{-1} \circ \tilde{G}_j &= \tilde{H}_{j+1}^{-1} \circ \tilde{G}_{j+1} \end{aligned} \tag{1.24}$$

Como H_j y G_j comparten dominio y rango, se puede afirmar que $H_j^{-1} \circ G_j$ está bien definida en cada sector S_j . Por la igualdad $H_j^{-1} \circ G_j = H_{j+1}^{-1} \circ G_{j+1}$ se tiene que $H_j^{-1} \circ G_j$ y $H_{j+1}^{-1} \circ G_{j+1}$ son idénticas en la intersección $S_j \cap S_{j+1}$, las funciones se pegan analíticamente en la intersección con la función identidad. Por consiguiente, se obtiene una función $H^{-1} \circ G$ analítica en el disco agujerado. Además, conociendo H_j y G_j , se tiene que en cada sector

$$\lim_{z \rightarrow 0} H_j^{-1} \circ G_j(z) = 0$$

Por lo tanto el 0 es una singularidad removible de $H^{-1} \circ G = h$, entonces h es una función analítica que conjuga a f con g .

3.) Se toma $\mu^+ \in \mathcal{M}_{p,\lambda}^+$ y la p -cubierta $\{S_j\}_{j=1,\dots,2p}$ del disco agujerado, cuyos abiertos asociamos a un atlas con cartas $(S_j, z_j^{-1} = Id)$ donde $z_j : S_j \rightarrow \mathbb{C} \times \{j\}$, pues se considerará el espacio \mathcal{S} como el cociente de la unión disjunta $\coprod_{j=1}^{2p} S_j$ bajo la acción del moduli funcional Φ . Por la construcción de este espacio es fácil probar que es homeomorfo al disco agujerado.

Sobre \mathcal{S} se construirá una función H_0 con ayuda de una partición de la unidad $\{\theta_j\}_{j=1,\dots,2p}$ subordinada a la p -cubierta, cuyas derivadas crecen no más rápido que una potencia (negativa, que depende del número de la derivación) de $|z_j|$ en cada abierto de la cubierta.

$$H_0 : \mathcal{S} \rightarrow D^*$$

donde D^* es el disco agujerado y H_0 se define como

$$H_0 = \sum_{j=1}^{2p} \theta_j z_j.$$

Hay que notar que fuera de las intersecciones $S_j \cap S_{j+1}$ la transformación H_0 se comporta como la función z_j , así que justo ahí es holomorfa. Por esta razón basta ver que la ecuación de Beltrami se cumple en las intersecciones donde H_0 se ve

$$\begin{aligned} H_0|_{S_j \cap S_{j+1}} &= z_j \theta_j + z_{j+1} \theta_{j+1} \\ &= z_j (\theta_j + \theta_{j+1}) + (z_{j+1} - z_j) \theta_{j+1} \\ &= z_j + (\Phi_j(z_j) - z_j) \theta_{j+1}, \end{aligned}$$

por lo que su parte antiholomorfa queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_0}{\partial \bar{z}}|_{S_j \cap S_{j+1}} &= \frac{\partial z_j}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial(\Phi_j \circ z_j - z_j)}{\partial \bar{z}} \theta_{j+1} + (\Phi_j \circ z_j - z_j) \frac{\partial \theta_{j+1}}{\partial \bar{z}} \\ &= (\Phi_j \circ z_j - z_j) \frac{\partial \theta_{j+1}}{\partial \bar{z}}. \end{aligned}$$

Por las condiciones sobre el crecimiento de las derivadas que se pidieron para la partición de la unidad y de las propiedades de $\Phi - Id$, se sabe que la parte antiholomorfa de H_0 decrece exponencialmente cuando $z_j \rightarrow 0$, entonces la norma de la ecuación de Beltrami $\mu_{H_0} = \frac{\partial H_0}{\partial \bar{z}} / \frac{\partial H_0}{\partial z}$

$$|\mu_{H_0}| \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$$

Y de las propiedades de μ_{H_0} , las cuales se pueden consultar en [Ah], se tiene que

$$|\mu_{H_0^{-1}}| = |\mu_{H_0} \circ H_0^{-1}|$$

de donde podemos concluir que $\frac{\partial H_0^{-1}}{\partial \bar{z}} / \frac{\partial H_0^{-1}}{\partial z}$ decrece a cero. Por lo tanto cumple la ecuación de Beltrami y es regular, entonces por el corolario 1.3.9 existe un difeomorfismo $G : D^* \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $H = G \circ H_0^{-1}$ es holomorfa y también se obtiene que \mathcal{S} tiene la misma estructura conforme que D^* (que es el disco agujerado).

Ahora, considerando la función $f_0 : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ inducida por $f_{p,\lambda}$, se observa que está bien definida en este espacio cociente, pues $f_{p,\lambda}$ conmuta con Φ (por lo cual no hay problema con el representante que se tome). Es importante notar que f_0 es analítica en la estructura conforme de \mathcal{S} , y que está bien definida en la cerradura $(\bar{\mathcal{S}})$. Entonces, considerando la función f , que es conjugada por H con f_0

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{f_0} & \mathcal{S} \\ H \uparrow & & \uparrow H \\ D^* & \xrightarrow{f} & D^* \end{array}$$

es analítica en D^* , pero como $\lim f_0(z)/z$ cuando $z \rightarrow 0$ se puede ver como $\lim f_{p,\lambda}(z)/z = 0$, ya que los Φ_j son exponencialmente parecidos a la identidad y $f_{p,\lambda}$ es analítica en cero. Entonces se puede extender a f_0 al cero sin ningún problema. Notando que en cada sector S_j f es conjugada por H con $f_{p,\lambda}$, se tiene que la parte lineal de f es tangente a la identidad. Por tanto $f \in \mathcal{A}_l$ para alguna l .

Recordando la clasificación topológica y al observar que la función H induce un homeomorfismo h de D en \mathcal{S} que conjugua a $f_{p,\lambda}$ con f , ya que las funciones de pegado son continuas, se tiene, por el teorema 1.2.1, la igualdad en la cantidad de pétalos que genera cada función; entonces $l = p$ lo que concluye la pertenencia de f a $\mathcal{A}_{p,\lambda}$. Notando que $H_j = z_j \circ H^{-1}$ se tiene que el moduli de f es μ^+ , el cual se había elegido al principio de la demostración. ■

Aplicaciones

El Teorema 1.3.13 tiene varias implicaciones en problemas relacionados con la clasificación analítica de gérmenes en $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ y la interacción de las transformaciones tangentes a la identidad como un grupo \mathcal{G} con la composición. Las principales implicaciones directas del Teorema 1.3.13 que se tienen acerca de \mathcal{G} son:

Teorema 1 *Cualquier germen de difeomorfismo f en $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ que sea formalmente equivalente a la transformación $f_{p,\lambda} = g_\omega^1$ a tiempo 1 del campo*

$$\omega = z^{p+1}(1 + \lambda z^p)^{-1} \partial / \partial z$$

es analíticamente equivalente a esta transformación si y sólo si su correspondiente moduli es

$$Id, \dots, Id, Id - 2\pi i \lambda$$

Entonces decimos que f es encajable en las soluciones de alguna ω .

Nota. Es una aplicación directa del Teorema de Ecalle-Voronin. Pues el moduli de $f_{p,\lambda}$ es el indicado arriba y ya se sabe que este es único salvo las condiciones de relación de equivalencia, que implican equivalencia analítica entre gérmenes.

Teorema 2 *Supongamos que un germen de transformación $f \in \mathcal{A}_{p,\lambda}$ admite una raíz n -ésima g tangente a la unidad:*

$$\exists g : g^{\circ n} = f, g'(0) = 1.$$

Entonces el moduli μ_f consiste de transformaciones que no sólo conmutan con la traslación $Id+1$, si no que también conmutan con la transformación $Id + \frac{1}{n}$ que es raíz n -ésima de dicha traslación.

Nota. Ya que g es raíz n -ésima de f se nota rápido que conmutan entre sí, también que g manda órbitas de la función f , $o_f(z)$, en órbitas de f , pues

$$g(f(z)) = f(g(z)) \quad g(o_f(z)) = o_f(g(z))$$

Entonces g genera una transformación π_*g en el espacio de órbitas que se describió como las esferas $(\bar{\mathbb{C}}, 0) \times \{j\}$

$$\pi_*g : (\bar{\mathbb{C}}, 0) \times \{j\} \rightarrow (\bar{\mathbb{C}}, 0) \times \{j\}.$$

Como π_*g es una función conforme de la esfera en la esfera que fija los polos y su n -ésima iteración es la identidad, entonces esta función sólo puede ser una rotación sobre el eje que pasa por los polos. Luego entonces, g vista en el espacio de órbitas se puede ver como una simple rotación $e^{2\pi i/n}$, que al ser levantada nuevamente a las τ -coordenadas se ve como la traslación $Id + \frac{1}{n}$. Observando las propiedades en 1.23 se ve cómo se puede factorizar π_*g a través de las ϕ_j para toda $j = 1, \dots, 2p$. Por esta razón podemos decir que g en las τ -coordenadas conmuta con $\{\Phi\}$.

Teorema 3 *Considérese el grupo con la composición de los gérmenes f en $Diff(\mathbb{C}, 0)$ tangentes a la unidad, tales que*

1.-No admite raíces n -ésimas tangentes a la unidad, entonces su centralizador es el típico, o sea todas las iteraciones de la función (tanto positivas como negativas).

2.-Si admite raíces, entonces su centralizador consiste también de las iteraciones de la raíz de grado máximo.

3.-El centralizador de los gérmenes que son encajables para alguna ω , consiste de todas las transformaciones de flujo g_ω^T con $T \in \mathbb{C}$.

Nota. Los incisos 1 y 2 se implican del Teorema 2, y el inciso 3 se implica del Teorema 1 y de la definición de equivalencia entre distintos moduli.

Otra aplicación de la demostración del teorema 1.3.13 y de la definición del moduli invariante, es la demostración del Teorema de clasificación analítica de las transformaciones con parte lineal raíz de la identidad $f(z) = \exp(2\pi im/n)z + z^{nk} + \dots$:

Teorema 1.3.14 [Clasificación analítica de gérmenes de difeomorfismos resonantes 1-dimensionales] *El conjunto $\mathcal{A}_{m,n,k,\lambda}$ de gérmenes de difeomorfismos conformes módulo la equivalencia analítica es uno a uno con el conjunto correspondiente $\mathcal{M}_{m,n,k,\lambda}^*$ de las colecciones*

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_{2k})$$

(de gérmenes de difeomorfismo analíticos $\phi_j : (\bar{\mathbb{C}}, 0) \rightarrow (\bar{\mathbb{C}}, 0)$ o $\phi_j : (\bar{\mathbb{C}}, \infty) \rightarrow (\bar{\mathbb{C}}, \infty)$ con parte lineal la identidad) módulo la equivalencia $\phi \sim D\phi \circ D^{-1}$, donde D es la función multiplicar por la constante D .

La demostración de este Teorema se basa en la clasificación analítica de f^{on} , dada por 1.3.13, y la modificación de $\mu_{f^{on}}$ a partir de que la parte lineal es una rotación (véase la clasificación topológica de este caso). Lo que evidencia que la colección ϕ sólo tenga $2k$ elementos en vez de $2nk$.

Cabe notar que la aplicación que más nos interesa es cuando las transformaciones con parte lineal tangente a la identidad son la holonomía (se definirá más adelante) de un sistema con singularidad elemental degenerada, que será tratado en el siguiente Capítulo.

Capítulo 2

Singularidades silla-nodo complejas en $(\mathbb{C}^2, 0)$

En este Capítulo se estudiarán las singularidades elementales degeneradas de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias holomorfas. En la primera Sección se dará una breve introducción a ecuaciones diferenciales holomorfas para retomar definiciones, teoremas y caracterizaciones de ellas necesarias para el desarrollo de este Capítulo. En la segunda y tercera Secciones se verán algunos resultados relativos a los puntos singulares no degenerados elementales de las ecuaciones diferenciales holomorfas en $(\mathbb{C}^2, 0)$ que permiten enunciar el Teorema de clasificación analítica de Martinet-Ramis y dar un esbozo de la demostración. En la sección cuatro se introduce la transformación de holonomía asociada a una ecuación diferencial y se ve cómo mediante ésta se relacionan el Teorema 1.3.13 de clasificación analítica de gérmenes de transformaciones conformes con el Teorema de clasificación de Martinet-Ramis.

2.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias holomorfas en $(\mathbb{C}^2, 0)$

Sobre un dominio abierto $U \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ tomamos una función vectorial holomorfa $F = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{C}^n$. Una ecuación diferencial holomorfa definida por F sobre U es un sistema de n ecuaciones o una ecuación vectorial dada por

$$\frac{dz}{dt} = F(t, z), \quad (t, z) \in U \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \quad (2.1)$$

La solución de la ecuación 2.1 es una curva holomorfa parametrizada $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) : V \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$, cuya imagen cae dentro de U . Su derivada respecto a t

$$\frac{d\sigma}{dt} = \left(\frac{d\sigma_1}{dt}, \dots, \frac{d\sigma_n}{dt} \right) \in \mathbb{C}^n,$$

cumple que para todo punto $t_0 \in V$ coincide con el vector $F(t_0, \sigma(t_0)) \in \mathbb{C}^n$. Este tipo de curva σ dentro de U se llama la *curva integral*.

Como en las ecuaciones diferenciales con tiempo real diremos que la ecuación es *autónoma*, si F no depende de la variable t . Para este caso la curva holomorfa $\sigma(V)$ se nombra la *curva fase* de (2.1). Cualquier ecuación diferencial (2.1) puede ser llevada a una ecuación diferencial autónoma mediante el uso de una variable ficticia $z \in \mathbb{C}$, la cual es gobernada por la ecuación $\frac{dz}{dt} = 1$. En estos casos se puede considerar la función vectorial $z \rightarrow F(z)$, que no depende de t , como un *campo vectorial holomorfo* sobre su dominio $U' \subseteq \mathbb{C}^n$, asociado a la ecuación diferencial (2.1):

$$F = \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

El espacio de los campos vectoriales holomorfos sobre el dominio $U \subseteq \mathbb{C}^n$ será denotada por $\mathcal{D}(U)$; donde la notación $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n, z_0)$ es usada para germines de campos vectoriales holomorfos que tienen una singularidad en el punto $z_0 \in \mathbb{C}^n$, que generalmente es el origen.

Cabe notar que la solución σ de (2.1), es una curva compleja que satisface que la derivada con respecto a t de cada una de sus componentes $\sigma_j(t)$ coincide con la componente f_j correspondiente al campo F :

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = f_i(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \tag{2.2}$$

En las ecuaciones diferenciales holomorfas también se tiene el Teorema de existencia y unicidad de soluciones con condición inicial.

Teorema 2.1.1 Sean f_1, \dots, f_n funciones holomorfas definidas en el abierto U de \mathbb{C}^n , entonces para todo punto p de U y t_0 de \mathbb{C} , existe una única solución de la ecuación diferencial holomorfa (2.1) definida en una vecindad de t_0 en \mathbb{C} y satisfaciendo la condición inicial $\sigma(t_0) = p$

La demostración de este resultado se puede obtener extendiendo al caso holomorfo la demostración del teorema de existencia y unicidad para el caso real (ver [P]) o bien seguir directamente la demostración realizada en [I-Y] para el caso holomorfo.

Tomando en cuenta la definición del campo F asociado a (2.1), se dice que $p \in U$ es un punto singular del campo si satisface la condición $F(p) = 0$, además si p es el único punto en U que cumple tal condición entonces el punto p es un punto singular aislado. En este caso la ecuación diferencial (2.1) tiene como

2.1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS HOLOMORFAS EN $(\mathbb{C}^2, 0)$ 41

solución con condición inicial $F(p) = 0$ a la curva constante $\sigma(t) = p$ para toda t en \mathbb{C} .

En las ecuaciones diferenciales ordinarias holomorfas un tema de gran importancia son las relaciones de equivalencia que puedan existir entre ellas. Pues ello permite generalizar resultados en toda una clase de equivalencia o tener información de todo un espacio de ecuaciones sobre sus invariantes a nivel formal, topológico o analítico. Para estos efectos se trabajará con campos vectoriales, sabiendo que éstos inducen una ecuación diferencial.

Definición 2.1.2 *Dos campos vectoriales $F \in \mathcal{D}(U)$ y $F' \in \mathcal{D}(U')$ son analíticamente (formalmente, topológicamente) equivalentes si existe una transformación $H : U \rightarrow U'$ holomorfa (formal, continua) que conjugue a los campos vectoriales. Para el caso formal y holomorfo lo anterior se expresa en la siguiente igualdad*

$$H_*F = F' \circ H$$

Donde $H_* = \left(\frac{\partial h_i}{\partial z_j}\right)$ es la matriz jacobiana de H . En el caso continuo decimos que dos campos F y F' son topológicamente equivalentes si las soluciones de las ecuaciones diferenciales correspondientes a uno y otro campo son conjugadas por un homeomorfismo.

Hay que notar que la equivalencia analítica implica la equivalencia formal; ya que a las transformaciones analíticas se les puede asociar su serie de Taylor.

Como se estudiarán campos vectoriales F con singularidades aisladas, sin pérdida de generalidad, de aquí en adelante sólo se considerarán campos vectoriales holomorfos en $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$.

Dado que F es un campo vectorial holomorfo, existe una vecindad alrededor del cero la cual permite tener el desarrollo en una serie analítica para cada f_i . Esta expresión nos ayudará a establecer condiciones para poder decidir si dos ecuaciones diferenciales holomorfas asociadas a los campos F y F' en $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$ son equivalentes analítica o formalmente. También ayuda a definir los monomios resonantes que salen a relucir en la clasificación formal desarrollada en la teoría Poincaré-Dulac de Formas Normales, que da las condiciones para decir cuándo un campo F es formalmente equivalente a su parte lineal.

Ejemplo. Tomaremos el campo vectorial holomorfo F

$$(3z + z^2w^4 + z^6w^{12})\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{4}w\frac{\partial}{\partial w},$$

vamos a reducirlo a su parte lineal, eliminando los monomios no lineales $z^{k_1}w^{k_2}$, con $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, mediante difeomorfismos en $(\mathbb{C}^2, 0)$ de la forma

$$H_{1,k}(z, w) = (z + h_{1,k}z^{k_1}w^{k_2}, w), \quad \text{con } k = (k_1, k_2),$$

que tienen como inversa a

$$H_{1,k}^{-1}(z, w) = (z - h_{1,k}z^{k_1}w^{k_2} + \dots, w)$$

Se comenzará por eliminar el monomio z^2w^4 , para lo cual veremos cómo tiene que ser $H_{1,(2,4)}$ con ayuda de la definición de equivalencia

$$H_{1,(2,4)*}F \circ H_{1,(2,4)}^{-1}(z, w) = (3z + a_{1,k}z^{k_1}w^{k_2} + \dots) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{4}w \frac{\partial}{\partial w}$$

donde $k_1 > 2$ y $k_2 > 4$. Haciendo las sustituciones en la formula anterior con

$$H_{1,(2,4)*}(z, w) = \begin{pmatrix} 1 + 2h_{1,k}zw^4 & 4h_{1,k}z^2w^3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$F \circ H_{1,(2,4)}^{-1}(z, w) = \begin{pmatrix} 3(z - h_{1,k}z^2w^4 + \dots) + (z - h_{1,k}z^2w^4 + \dots)^2w^4 + \dots \\ -\frac{1}{4}w \end{pmatrix},$$

se obtiene la siguiente igualdad

$$H_{1,(2,4)*}F \circ H_{1,(2,4)}^{-1}(z, w) = \begin{pmatrix} 3z + z^2w^4(-3h_{1,k} + 1 + 6h_{1,k} - h_{1,k}) + \dots \\ -\frac{1}{4}w \end{pmatrix}.$$

De donde se concluye que para eliminar el monomio $z^2w^4(-3h_{1,k} + 1 + 6h_{1,k} - h_{1,k})$ es necesario definir $h_{1,k} = -1/2$. Haciendo los cálculos anteriores para un monomio $z^{k_1}w^{k_2}$ se obtiene la forma general de $h_{j,k}$

$$h_{j,k} = \frac{-a_{j,k}}{\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 - \lambda_i}.$$

Observemos que esta última expresión nos dice que el monomio z^6w^{12} , no puede ser eliminado. Entonces F no es formalmente equivalente a su parte lineal.

La expresión que se consiguió de los coeficientes de las transformaciones que llevan a un campo vectorial a su forma normal, relacionada con los eigenvalores λ_1, λ_2 de la parte lineal $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ de su desarrollo en serie analítica, muestra que los monomios donde se haga cero la expresión $\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 - \lambda_i$ no pueden ser eliminados, por ello son conocido como monomios resonantes.

Definición 2.1.3 *Se dice que los eigenvalores satisfacen la relación de resonancia del tipo (i, k) si*

$$\lambda_i = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2,$$

donde $k = (k_1, k_2)$ y k_j es un entero no negativo $j = 1, 2$, $k_1 + k_2 \geq 2$.

Procedemos ahora a enunciar el Teorema de formas normales de Poincaré-Dulac

Teorema 2.1.4 (de formas normales, Poincaré-Dulac) *Para toda ecuación diferencial asociada a un campo vectorial en $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$. Existe un cambio de variable formal $\bar{w} = \bar{z} + \dots$ ($\bar{w} = (w_1, w_2)$), para el cual la ecuación diferencial toma la siguiente forma*

$$\dot{z}_i = (A\bar{w})_i + \sum a_{i,k} \bar{w}^k \quad , \quad i = 1, 2$$

donde la suma corre sobre los multiíndices k tales que los eigenvalores satisfacen relaciones de resonancia del tipo (i, k) .

La demostración de este Teorema se basa en la composición infinita de los difeomorfismos $H_{i,k}$, la cual puede que no sea analítica. El total de la demostración puede ser consultada en [I-Y] o en [Zo].

Además, si se le agrega la condición de que los eigenvalores de la parte lineal del campo vectorial F estén en el dominio de Poincaré, o sea que la cerradura convexa de λ_1 y λ_2 en \mathbb{C} no contenga al cero, se obtiene el Teorema de Linealización de Poincaré que asegura la existencia de un difeomorfismo analítico H tal que conjuga a F con su parte lineal en una vecindad del cero. Por otro lado, si λ_1 y λ_2 están en el dominio de Siegel, lo cual refiere a que su cerradura convexa contiene al cero, el teorema anterior no funciona en varios casos, como los que se nombran resonantes por tener relaciones de resonancia de algún tipo.

Ha salido a relucir la importancia de los eigenvalores de la parte lineal del desarrollo en serie de un campo analítico. En $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$ centraremos nuestra atención en aquellos campos vectoriales cuya parte lineal en el origen tenga al menos uno de sus eigenvalores distinto de cero. A las singularidades de este tipo se les conoce *singularidades elementales*. Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $\lambda_1 \neq 0$, se define el radio de los eigenvalores

$$\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

que es un invariante importante. En función de λ se tiene la siguiente clasificación de las ecuaciones diferenciales relacionadas con los campos diferenciales holomorfos en $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$:

- Si $\lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ entonces decimos que el punto singular es un foco
- Si $\lambda > 0$ entonces decimos que el punto singular es un nodo
- Si $\lambda < 0$ entonces decimos que el punto singular es una silla
- Si $\lambda = 0$ entonces decimos que el punto singular es un silla-nodo

Además, si también sucede que $\lambda \in \mathbb{Q}$ decimos que el punto singular es resonante. Esta clasificación se puede encontrar con más detalle en libros que tratan ecuaciones diferenciales holomorfas (ver [I-Y],[Zo],[C1]).

Otra enfoque para el estudio de estos campos vectoriales es el análisis del retrato fase de las ecuaciones. Para ello se definirá el concepto de foliación:

Definición 2.1.5 Una foliación holomorfo no singular por curvas \mathcal{F} de un abierto U de \mathbb{C}^n es una descomposición de U en subconjuntos conexos disjuntos $\{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ donde Λ es un conjunto de índices (cada \mathcal{L}_α es denominada hoja de la foliación), tal que todo punto p en U tiene una vecindad U_p y un biholomorfismo $\varphi : U_p \rightarrow W_p \subset \mathbb{C}^n$, que satisface que para toda hoja \mathcal{L}_α , las componentes conexas de $U_p \cap \mathcal{L}_\alpha$ quedan descritas por las ecuaciones

$$w_1 = k_1, \dots, w_{n-1} = k_{n-1}$$

en W_p . A las parejas (U_p, φ) así definidas se les denomina cartas coordenadas distinguidas de la foliación.

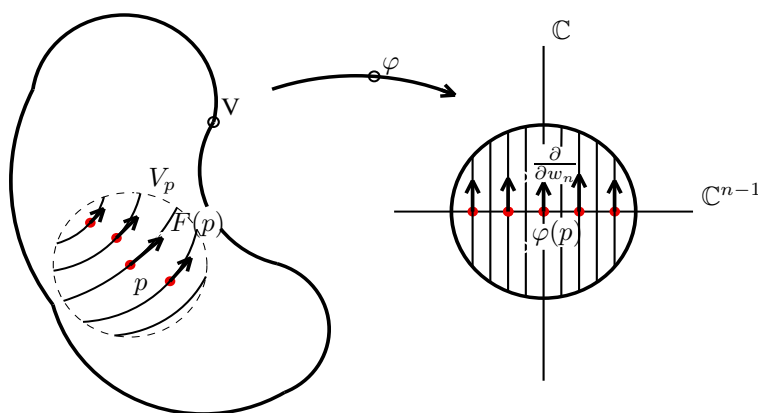


Figura 2.1: Foliació asociada a un campo F

Cabe notar que la definición dice no singular, lo cual no ocasiona ningún problema pues sólo se va a tener una singularidad aislada. Entonces en la definición anterior tomaremos $U = U' / \{0\}$, así se obtiene la definición para una foliación con una singularidad aislada en el cero. Ahora mediante un lema de foliaciones relacionaremos las foliaciones con campos vectoriales holomorfos.

Lema 2.1.6 Sea F un campo vectorial holomorfo nunca nulo, definido en un abierto V de \mathbb{C}^n , entonces las soluciones de la ecuación 2.1 asociada a F constituyen una foliación no singular por curvas $\mathcal{F}(F)$ de V . Además, si F' es otro campo vectorial holomorfo en V nunca nulo, entonces la foliaciones $\mathcal{F}(F)$ y $\mathcal{F}(F')$ coinciden si y sólo si existe una función holomorfa g nunca nula definida en V , tal que $F' = g \cdot F$

En otras palabras, la última parte del lema dice que las foliaciones $\mathcal{F}(F)$ y $\mathcal{F}(G)$ coinciden si para cada punto $p \in V$, los campos tienen asociada, en p , la

misma curva compleja. También hay que notar que en nuestro caso $V = U/\{0\}$. Con esto obtenemos una nueva definición de equivalencia

Definición 2.1.7 *Dos gérmenes de campos vectoriales F, F' en $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$ son llamados analíticamente (topológicamente, formalmente) orbitalmente equivalentes si existe un difeomorfismo analítico (C^0 , formal) H que transforme las curvas fase de F en las curvas fase de F' . (Esto quiere decir que las foliaciones correspondientes definidas por el retrato fase de F y F' son transformadas unas en otras mediante H) En el caso formal y holomorfo se tiene*

$$H_*F = g \cdot F' \circ H$$

Donde g es una función analítica (formal) y $g(z) \neq 0$ para toda z en la vecindad del cero.

De ahora en adelante ésta va ser la definición de equivalencia que se usará. Cabe notar que la equivalencia analítica (formal, topológica) implica la equivalencia analítica (formal, topológica) orbital. De ahora en adelante solamente nos ocuparemos del caso en donde el campo F en $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$ tenga una singularidad elemental no degenerada, que se definirá más adelante.

2.2. Silla-Nodo en $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$

Un campo vectorial holomorfo F en $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$ tiene una singularidad elemental degenerada en 0 si su parte lineal, en su desarrollo en serie, tiene un eigenvalor distinto de cero y el otro es cero. Por comodidad diremos que es una singularidad silla-nodo compleja y se tomará el eigenvalor $\lambda_2 \neq 0$; además F puede ser multiplicado por una constante, *i.e.* usar la transformación multiplicar por una constante para que el eigenvalor λ_2 sea igual a -1.

Teorema 2.2.1 *Cada campo vectorial holomorfo F en $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$ con una singularidad silla-nodo en el origen es formalmente orbitalmente equivalente al campo correspondiente a la ecuación diferencial*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z^{p+1}(1 + \lambda z^p)^{-1} \\ \dot{w} &= -w \end{aligned} \tag{2.3}$$

Demostración. Se observa que puesto que por hipótesis $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1$, las resonancias de tipo $(1, k)$ son

$$0 = k \cdot 0 + 0 \cdot \lambda_2, \quad a_{1,k} z^k w^0, \quad k \geq 2$$

y las de tipo $(2, k)$

$$-1 = k \cdot 0 + 1 \cdot \lambda_2, \quad a_{2,k} z^k w$$

Entonces por el Teorema 2.1.4 el campo F es formalmente orbitalmente equivalente al campo

$$\dot{z} = a_{1,p+1}z^{p+1} + a_{1,p+2}z^{p+2} + \dots, \quad \dot{w} = -w(1 + a_{2,1}z + a_{2,2}z^2 + \dots)$$

donde $a_{1,p+1} \neq 0$ con $p \geq 1$; si todos los $a_{1,k}$ fueran ceros entonces cada punto del eje z sería una singularidad por lo que el origen no cumpliría las condiciones de singularidad aislada. Bajo un cambio de variable analítico $(z, w) \rightarrow (cz, w)$ se puede asumir que $a_{1,p+1} = 1$. Considerando la definición 2.1.7 se puede dividir el campo por $1 + a_{2,1}z + a_{2,2}z^2 + \dots$, y notando que $1 + a_{1,2}z + \dots / 1 + a_{2,1}z + a_{2,2}z^2 + \dots = 1 + b_1z + \dots$ se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z^{p+1}(1 + b_1z + \dots) \\ \dot{w} &= -w \end{aligned}$$

Ahora el problema de transformar formalmente $z^{p+1}(1 + b_1z + \dots)$ en $z^{p+1}(1 + \lambda z^p)^{-1}$ se resuelve de manera análoga a lo hecho en el Teorema 1.1.2 usando transformaciones $(z, w) \rightarrow (z + h_l z^l, w)$, donde el coeficiente correspondiente al monomio $h_l z^l$ está definido por $h_l = b_{l-1}/l - (p+1)$, condición que impide quitar el término de orden $2p+1$. Y así se obtiene la equivalencia orbital formal con

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z^{p+1}(1 + \nu z^p) \\ \dot{w} &= -w \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dado que la transformación usada para normalizar la ecuación diferencial (2.4) fija la coordenada- z y la coordenada- w , del teorema 1.1.2 sabemos que existe una transformación formal $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que la transformación definida por $H(z, w) = (h(z), w)$ da la equivalencia formal orbital entre (2.4) y

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z^{p+1}(1 + \lambda z^p)^{-1} \\ \dot{w} &= -w \end{aligned}$$

□

El entero p es nombrado la *codimensión* de un silla-nodo y el complejo λ es el *moduli* de la clasificación formal. El conjunto de los gérmenes con forma normal formal con codimensión p y moduli λ será denotado por $\mathcal{E}_{p,\lambda}$.

El siguiente Teorema refleja algunas propiedades de las hojas de la foliación de un silla-nodo.

Teorema 2.2.2 (analítico Hadamard-Perron) *Consideremos la ecuación diferencial*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \lambda_1 z + \dots \\ \dot{w} &= \lambda_2 w + \dots \end{aligned}$$

tal que $\lambda_2 \neq 0$ y $\lambda_1/\lambda_2 \leq 0$. Entonces existe una curva invariante analítica tangente a $z = 0$ (eje- w) en el origen.

Aplicado al caso silla-nodo complejo el Teorema muestra que existe una **variedad invariante** o **fuerte** tangente al eje- w y que es analítica. También se sabe de la **variedad central**, que corresponde al eigenvalor cero y a la cual no es posible aplicar el teorema anterior, que generalmente no es analítica. A continuación se transformará la variedad fuerte en el eje w , siempre pensando que se está actuando bajo la definición 2.1.7. Se puede asumir que el campo vectorial $F \in \mathcal{E}_{p,\lambda}$ ha sido normalizado hasta el $(p+1)$ -jet (i.e el término de orden $p+1$) en el origen. Gracias a un trabajo de Dulac [Dul] se sabe que existen coordenadas analíticas en donde la ecuación diferencial inducida por F toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z f(z, w) & j_0^p f &= z^p \\ \dot{w} &= -w + g(z, w) & j_0^1 g &= 0, \end{aligned}$$

donde $j_k^l f$ son los jets desde orden k hasta orden l . Más aún, con ayuda de transformaciones de la forma $H_k(z, w) = (z + z^k \psi_k(w), w)$, podemos transformar una ecuación diferencial de la forma

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z^k f_k(z, w) \\ \dot{w} &= -w + g_k(z, w) \end{aligned}$$

a una de la forma

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z^{k+1} f_{k+1}(z, w) \\ \dot{w} &= -w + g_{k+1}(z, w). \end{aligned}$$

Este método es conocido como “normalización a lo largo de la variedad invariante”. Con este método se demuestra el siguiente resultado

Lema 2.2.3 *Si $F \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$ con singularidad silla-nodo, existe un cambio de variable analítico que lo conjuga con el campo vectorial asociado a la ecuación diferencial*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z^{p+1} \\ \dot{w} &= -w(1 + \lambda) + g_0(z) + w^2 g_2(z, w) \end{aligned}$$

donde g_0 y $w^2 g_2$ tienen orden $p+2$. Ésta es la forma analítica inicial de F .

Dado que la forma analítica inicial de F no es analíticamente orbitalmente equivalente a su forma normal formal en una vecindad del 0, se requiere dividir el dominio de F en sectores de la forma

$$T_j = \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|, |w| < \varepsilon \text{ y } \left| \arg(z) - \frac{(2j-1)\pi}{2p} \right| < \alpha \text{ con } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2p}, \frac{\pi}{p} \right) \right\}$$

se tiene el siguiente Teorema

Teorema 2.2.4 (Normalización Sectorial) *Sea $F \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$ con singularidad silla-nodo. En cada sector T_j existe un único difeomorfismo*

$$H_j(z, w) = (z, w + h_j(z, w)), \quad h_j = O(z^{p+1}),$$

que conjuga su forma analítica inicial con su forma normal formal

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z^{p+1}/(1 + \lambda z^p) \\ \dot{w} &= -w \end{aligned}$$

La transformación H_j preserva la coordenada z : $H_j(z, w) = (z, w + \tilde{H}_j(z, w))$. Más aún \tilde{H}_j es de orden z^{p+1} cuando $z \rightarrow 0$, $z \in T_j$. La transformación que cumple todo lo anterior es única.

La demostración de éste teorema que fue hecha por Hukuhara, Kimura y Matuda en [HKM] queda fuera del alcance del breve material que se ha desarrollado en esta tesis, pero es vital para el desarrollo de las siguientes secciones.

2.3. Clasificación orbital analítica

Ahora que se ha logrado normalizar el campo F en cada sector T_j , lo primero que se va a analizar es la propiedad de que la ecuación diferencial asociada al campo $W_{p,\lambda}$

$$z^{p+1}/(1 + \lambda z^p) \frac{\partial}{\partial z} - w \frac{\partial}{\partial w} \tag{2.5}$$

tiene primera integral $u : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en cada T_j . Recordemos la definición de primera integral

Definición 2.3.1 *Sea F un campo vectorial en un dominio U , y sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Se dice que f es la primera integral de la ecuación diferencial*

$$\dot{z} = F(z), \quad z \in U$$

si la derivada en la dirección del campo vectorial F se anula

$$L_F f = 0.$$

La última condición es equivalente a las siguientes afirmaciones

1. La función f es constante a lo largo de toda solución $\sigma : V \subset \mathbb{C} \rightarrow U$, i.e., si σ es una solución entonces la función $f \circ \sigma : V \rightarrow \mathbb{C}$ es constante.
2. Toda curva fase está contenida solamente en un conjunto de nivel de la función f .

Las curvas de fase de $W_{p,\lambda}$ distintas de la singular son sencillas de calcular, pues la ecuación normalizada es de variables separadas. Si consideramos la ecuación

$$\frac{dw}{dz} = -w \frac{(1 + \lambda z^p)}{z^{p+1}},$$

se tiene que

$$\int w dw = - \int \frac{1 + \lambda z^p}{z^{p+1}} dz.$$

Por lo que nuestras curvas de fase se parametrizan de la siguiente forma

$$w(z) = c \exp(-t(z)) = cz^{-\lambda} \exp(p^{-1}z^{-p}).$$

Ya con la expresión de las curvas de fase y la equivalencia 1 de la definición de primera integral, se puede expresar a ésta como la función $u : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$u(z, w) = w \exp(t(z)), \quad t(z) = -p^{-1}z^{-p} + \lambda \ln(z).$$

De la última expresión, y recordando que $|\exp(p^{-1}z^{-p})|$ sólo depende de la parte real de $p^{-1}z^{-p}$, se observa el comportamiento exponencial de las normas de las soluciones y de las primeras integrales. Notemos que cuando z tiende a cero la parte real de z^{-p} puede irse a ∞ o $-\infty$. Esto nos permite delimitar algunas secciones del dominio de $W_{p,\lambda}$, según el comportamiento de la norma de las soluciones en ellas. Cabe señalar que en estas secciones el comportamiento de $|u(z, w)|$ es inverso al de la norma $|w(z)|$.

$$\lim_{\operatorname{Re} z^{-p} \rightarrow \infty} |w(z)| = \infty, \quad \text{sección de salto}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} |u(z, w)| = 0, \quad \text{cuando } z \text{ está en una sección de salto}$$

y

$$\lim_{\operatorname{Re} z^{-p} \rightarrow -\infty} |w(z)| = 0, \quad \text{sección de caída}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} |u(z, w)| = \infty, \quad \text{con } z \text{ en una sección de caída}$$

Al tomar en cuenta la definición de los sectores T_j y el comportamiento de z^{-p} en éstos, se tiene que $T_j \cap T_{j+1}$ es una sección de salto si j es par, y de caída si j es impar. Con esto a la mano se construirán funciones de transición pensando en la ecuación 2.3; a saber, usando las transformaciones H_j del teorema 2.2.4 en las intersecciones $T_j \cap T_{j+1}$ se define una nueva función

$$\Phi_j = H_{j+1} \circ H_j^{-1} : T_j \cap T_{j+1} \rightarrow T_j \cap T_{j+1}.$$

Dado que una de las propiedades de las H_j es preservar la coordenada z y que la función \tilde{H}_j tiene orden z^{p+1} , entonces $\Phi_j(z, w) = (z, w + \tilde{\Phi}_j(z, w))$ preserva la coordenada z y $\tilde{\Phi}_j$ tiene orden z^{p+1} (así $\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{\Phi}_j(z, w) = 0$). La función Φ_j también preserva las curvas de fase, ya que H_j es una equivalencia orbital analítica en T_j . La propiedad de preservar las curvas de fase nos dice que existe una función φ_j que hace conmutar el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} T_j \cap T_{j+1} & \xrightarrow{\Phi_j} & T_j \cap T_{j+1} \\ u_j \downarrow & & u_{j+1} \downarrow \\ \mathbb{C} \times \{j\} & \xrightarrow{\varphi_j} & \mathbb{C} \times \{j+1\} \end{array} \quad (2.6)$$

De las propiedades de Φ_j y de la igualdad $u_{j+1} \circ \Phi_j = \varphi_j \circ u_j$, se tiene una forma de expresar a Φ_j mediante φ_j . En efecto, de las expresiones obtenidas para Φ_j y u_{j+1} se sigue que

$$\begin{aligned} u_{j+1} \circ \Phi_j(z, w) &= u_{j+1} \left(z, w + \tilde{\Phi}_j(z, w) \right) \\ &= \left(w + \tilde{\Phi}_j(z, w) \right) \exp(t_{j+1}(z)), \end{aligned}$$

de donde se obtiene $w + \tilde{\Phi}_j(z, w) = \varphi_j(u_j) \exp(-t_{j+1})$, y por lo tanto,

$$\Phi_j(z, w) = (z, \varphi_j(u_j) \exp(-t_{j+1}(z))).$$

El hecho de que $\tilde{\Phi}_j$ sea de orden z^{p+1} nos dice que el límite de $\Phi_j - Id$ cuando $z \rightarrow 0$ es cero. Ahora queremos ver cómo se va a cero la función $\Phi_j - Id$. Para esto utilizaremos la expansión de Taylor de $\varphi_j(u_j) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,n} u_j^n$. Entonces se tiene la siguiente expresión de Φ_j

$$\begin{aligned} \Phi_j(z, w) &= \left(z, \varphi_j(u_j) e^{-t_{j+1}(z)} \right) \\ &= \left(z, a_{j,0} e^{-t_{j+1}} + a_{j,1} w + \sum_{n=2}^{\infty} a_{j,n} w^n e^{(n-1)t_j} \right), \end{aligned}$$

notando que en la última igualdad se hace uso de que $t_j = t_{j+1}$ en $T_j \cap T_{j+1}$. Observamos que, por argumentos de continuidad, la igualdad $t_{2p} = t_1$ no se

cumple. La presencia de la función multivaluada $\lambda \ln(z)$ implica que $t_{2p} = t_1 + 2\pi i\lambda$. Supongamos que j es impar, entonces $T_j \cap T_{j+1}$ es una sección de caída, por lo tanto el factor $e^{nt_j} \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow 0$. Como $\Phi_j - Id$ tiende a cero en esos casos, los coeficientes $a_{j,n}$ con $n > 2$ tienen que ser 0 y $a_{j,1} = 1$. Por lo tanto

$$\varphi_j(u_j) = a_{j,0} + u_j$$

Si j es par, la intersección $T_j \cap T_{j+1}$ es una sección de salto y entonces los factores $e^{nt_j} \rightarrow 0$ cuando z tiende a cero. Luego entonces para $j \neq 2p$, se tiene que $a_{j,0} = 0$ y $a_{j,1} = 1$, y la función φ_j tiene la forma

$$\varphi_j(u_j) = u_j + \sum_{n=2}^{\infty} a_{j,n} u_j^n.$$

Para el caso $j = 2p$ se considera la siguiente igualdad

$$\varphi_{2p}(u_{2p})e^{-t_1} = e^{2\pi i\lambda} \varphi_{2p}(u_{2p})e^{-t_{2p}},$$

de donde $a_{2p,1} = e^{-2\pi i\lambda}$ y $a_{j,0} = 0$, por lo que

$$\varphi_{2p}(u) = e^{-2\pi i\lambda} u + \sum_{n=2}^{\infty} a_{j,n} e^{-2\pi i\lambda} e^{(n-1)t_{2p}}$$

Esta colección $\varphi = \{\varphi_j\}$ es la colección de invariantes analíticos del campo F . Antes de enunciar el teorema que involucra a estas colecciones nos interesa establecer cuándo dos de ellas son equivalentes. Esto se ve en cada sección T_j bajo los campos ya normalizados con las transformaciones H_j al considerar la existencia de otra colección de transformaciones $G = \{G_j\}$ tal que cada G_j normaliza al campo F en T_j .

$$\begin{array}{ccccc} T_j & \xleftarrow{H_j} & T_j & \xrightarrow{G_j} & T_j \\ (Id, W_{p,\lambda}) \downarrow & & (Id, F) \downarrow & & (Id, \lambda) \downarrow \\ \mathbf{T}T_j & \xleftarrow{H_{j*}} & \mathbf{T}T_j & \xrightarrow{G_{j*}} & \mathbf{T}T_j \end{array}$$

Del diagrama se observa que $H_j \circ G_j^{-1}$ preserva a $W_{p,\lambda}$. En efecto, buscamos difeomorfismos $H \in Diff(\mathbb{C}^2, 0)$ que al conjugarse con el campo (2.5) la foliación queda fija, i.e.

$$H_* W_{p,\lambda} = W_{p,\lambda} \circ H,$$

para encontrar una relación entre la transformación H_j y G_j . Tomando $H(z, w) = (h^1(z, w), h^2(z, w))$ y su inversa como $H^{-1} = (\tilde{h}^1, \tilde{h}^2)$ se tiene la siguiente expresión

$$\begin{pmatrix} h_z^1 & h_w^1 \\ h_z^2 & h_w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\tilde{h}^1)^{p+1} (1 + \lambda (\tilde{h}^1)^p)^{-1} \\ -\tilde{h}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{p+1} (1 + \lambda z^p)^{-1} \\ -w \end{pmatrix}.$$

Es claro que el difeomorfismo H debe preservar la coordenada z , de donde definiendo $H(z, w) = (z, h(z, w))$ se tiene la siguiente ecuación

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h_z & h_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{p+1}(1 + \lambda z^p)^{-1} \\ -w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{p+1}(1 + \lambda z^p) \\ -h(z, w) \end{pmatrix}.$$

Esta última ecuación nos da una ecuación diferencial de h

$$\frac{z^{p+1}}{1 + \lambda z^p} h_z - w h_w = -h. \quad (2.7)$$

Dado que h es holomorfa en una vecindad del cero se puede expresar como una serie de Taylor, que se puede ver de la siguiente forma: $h(z, w) = a_0 w + w^2 a(w) + \sum_{j=0}^{\infty} h_{k+j}(w) z^{k+j} + O(z^l)$, donde $a_0 \in \mathbb{C}$, $a(w)$ y las $h_{k+j}(w)$ son funciones holomorfas (con h_k no nula) y k es un entero no negativo. Al considerar las igualdades

$$\begin{aligned} h_z(z, w) &= \sum_{j=0}^{\infty} (k+j) h_{k+j}(w) z^{k+j-1} + O(z^{l-1}) \\ h_w(z, w) &= a_0 + 2wa(w) + w^2 a'(w) + \sum_{j=0}^{\infty} h'_{k+j}(w) z^{k+j}, \end{aligned}$$

sustituirlas en (2.7) y quedarnos sólo con los términos que tienen como factor una potencia de z , obtenemos

$$\frac{z^{p+1}}{1 + \lambda z^p} h_z(z, w) - w \sum_{j=0}^{\infty} h'_{k+j}(w) z^{k+j} = \sum_{j=0}^{\infty} h_{k+j}(w) z^{k+j} + O(z^l).$$

Primero hay que señalar que el término $b_l z^l$ es cero, pues del lado derecho de la igualdad el término que sólo depende de z tiene orden mínimo $l+p$; análogamente los términos de la forma $b_j z^j$ son cero. Después dividimos la igualdad entre z^k y evaluamos en $z = 0$, de donde se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$-w h'_k(w) = -h_k(w),$$

cuya solución es $h_k(w) = c_k w$ con $c_k \in \mathbb{C}$. De manera análoga se tiene que $h_{k+j}(w) = c_{k+j} w$ con $j = 0, 1, \dots, p-1$. Cuando se intenta con h_{k+p} se llega a una ecuación diferente

$$k c_k w - w h'_{k+p}(w) = -h_{k+p}(w).$$

En este caso se usará el hecho que h_{k+p} tiene una serie de Taylor en una vecindad del cero, para obtener la siguiente igualdad

$$k c_k w - w \left(h'_{k+p}(0) + h_{k+p}^{(2)}(0) w + \dots \right) + \left(h_{k+p}(0) + h'_{k+p}(0) w + \frac{h_{k+p}^{(2)}(0)}{2!} w^2 + \dots \right) = 0,$$

de donde $c_k = 0$. Ésto implica que h no depende de z . Por lo que

$$\begin{aligned} wh_w(w) &= h(w) \\ \frac{h_w}{h}(w) &= \frac{1}{w}. \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación queda que $h(w) = cw$ para alguna $c \in \mathbb{C}$. Con esto se tiene que los difeomorfismos que fijan la foliación de $W_{p,\lambda}$ son de la forma $H_c(z, w) = (z, cw)$. Por lo tanto, $H_j = H_c \circ G_j$. Lo cual induce la siguiente definición

Definición 2.3.2 *Dos colecciones φ y $\tilde{\varphi}$ son llamadas equivalentes si conjugados por una transformación lineal que conjuga a ambas colecciones, i.e.,*

$$\varphi \sim \tilde{\varphi}, \text{ si y sólo si existe } c \in \mathbb{C} - 0 : \varphi \circ c = c\tilde{\varphi}$$

Esta definición tiene cierto parecido con la definición 1.3.12, lo cual, como veremos más adelante, no es coincidencia. Las clases de equivalencia $[\varphi]$ de dichas colecciones son llamadas el moduli de Martinet-Ramis. El conjunto de moduli de Martinet-Ramis es denotado por $\mathcal{N}_{p,\lambda}$. La construcción de este moduli define un mapeo \mathfrak{F} entre los campos vectoriales F en $\mathcal{E}_{p,\lambda}$ y su respectivo moduli ϵ_F en $\mathcal{N}_{p,\lambda}$

$$\mathfrak{F}(F) \rightarrow \epsilon_F$$

Teorema 2.3.3 (de clasificación de sillan-nodo, Martinet-Ramis) *La función $\mathfrak{F} : \mathcal{E}_{p,\lambda} \rightarrow \mathcal{N}_{p,\lambda}$ tiene las siguientes propiedades*

1. Sean F y F' dos gérmenes de campos vectoriales, en $\mathcal{E}_{p,\lambda}$, con singularidad silla-nodo. Si F y F' son analíticamente orbitalmente equivalentes entonces ϵ_F y $\epsilon_{F'}$ son equivalentes (**Invarianza**).
2. Dos gérmenes de campos F y F' que tienen moduli equivalente son analíticamente orbitalmente equivalentes (**Equimodalidad y equivalencia**).
3. Cualquier colección φ en $\mathcal{N}_{p,\lambda}$ puede ser realizada como el invariante funcional de un germen de campo apropiado en $\mathcal{E}_{p,\lambda}$ (**Realización**).

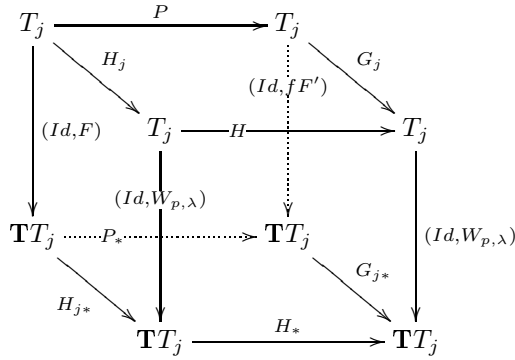
Demostración.1. Sean F y F' dos gérmenes de campos vectoriales con singularidad silla-nodo compleja analíticamente orbitalmente equivalentes. Entonces existe un difeomorfismo P en $\text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ y una función $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ no nula, tal que

$$P_*F \circ P^{-1} = fF'$$

Queremos ver lo que pasa en cada sector T_j , al suponer que la colección de funciones del teorema 2.2.4 para F es $\{H_j\}$ y para F' es $\{G_j\}$. A saber que las colecciones que se define para fF' y F' son iguales, pues se consideran las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} G_{j*}F' &= W_{p\lambda} \circ G_j \\ fG_{j*}F' &= W_{p,\lambda} \circ G_j \\ G_{j,*}fF' &= W_{p,\lambda} \circ G_j. \end{aligned}$$

Esto sucede gracias a que f al no ser nula actúa como un escalar en $\mathbf{T}_p T_j$ para toda $p \in (\mathbb{C}^2, 0)$.



Los difeomorfismos $G_j \circ P$ normalizan al campo F en cada T_j , entonces $G_j \circ P = H_c \circ H_j$ para alguna $c \in \mathbb{C}$. De donde

$$G_{j+1} \circ G_j^{-1} = H_c \circ H_{j+1} \circ H_j^{-1} \circ H_c^{-1}.$$

Igualdad que implica la equivalencia $\epsilon_F \sim \epsilon_{F'}$.

2. Sean $\epsilon_F \sim \epsilon_{F'}$ los moduli respectivos de los campos F y F' . Cuando se está normalizando a F' se puede usar un difeomorfismo H_c , para que $\epsilon_{F'}$ coincida con ϵ_F . Entonces las funciones de transición son iguales $\Phi_j^F = \Phi_j^{F'}$ en $T_j \cap T_{j+1}$. Si $\{H_j\}$ y $\{G_j\}$ son las funciones que normalizan a los campos F y F' respectivamente, se tienen las siguientes igualdades

$$H_{j+1} \circ H_j^{-1} = G_{j+1} \circ G_j^{-1},$$

en $T_j \cap T_{j+1}$. De lo anterior se tiene que

$$G_{j+1}^{-1} \circ H_{j+1} = G_j^{-1} \circ H_j \tag{2.8}$$

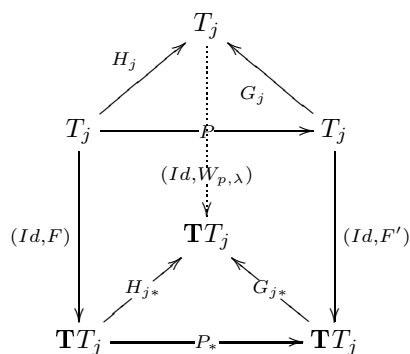
en la intersección. Tomando la unión ajena de los sectores T_j definimos una función $P : \amalg_{j=1}^{2p} T_j \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ en cada sector T_j como

$$P(z, w) = G_j^{-1} \circ H_j.$$

De la igualdad (2.8) se sigue que al hacer el cociente de $\Pi_{j=1}^{2p} T_j$ con la función identidad en $T_{j+1} \cap T_j$ la función P está bien definida en el cociente. Dado que P era holomorfa en cada T_j y las funciones de pegado son la identidad, P es holomorfa en $\cup_{j=1}^{2p} T_j$. Recordando que las funciones \tilde{H}_j y \tilde{G}_j tienen orden z^{p+1} se concluye que P se puede extender continuamente a $\{z = 0\}$, ya que $\{z = 0\} \cap T_j = \emptyset$. La extensión holomorfa de P a una vecindad del origen es consecuencia del Teorema de Hartogs [Sh], del cual se deriva el siguiente Teorema

Teorema 2.3.4 [Sh] *Si la función f es continua en un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$ y holomorfa en $D - S$, donde S es una hipersuperficie real suave, entonces f es holomorfa en D .*

Por lo tanto la función P es holomorfa en una vecindad del origen; además, como las funciones $G_j^{-1} \circ H_j$ son difeomorfismos para cada T_j , entonces P es un difeomorfismo que conjuga analíticamente orbitalmente a F con F' .



3. Sea $\epsilon \in \mathcal{N}_{p,\lambda}$, el cual tiene algún representante $\varphi = (\varphi_j)$. Estos definen las funciones de transición Φ_j en las intersecciones $T_j \cap T_{j+1}$. Ahora se toma la unión disjunta $\Pi_{j=1}^{2p} T_j \times \{j\}$ con cartas $\vec{z}_j = (z, w)$, a saber, $z_{j+1} = \Phi_j(\vec{z}_j)$. Hacemos el cociente de este espacio usando como funciones de pegado en las “intersecciones” las funciones Φ_j . De donde se obtiene una variedad \mathcal{S} de $dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}) = 4$.

En cada sector T_j se toma la foliación $\mathcal{F}_{p,\lambda}$ asociada al campo vectorial $W_{p,\lambda}$. Esto define una foliación \mathcal{F}_0 en \mathcal{S} , pues las funciones de pegado Φ_j son una equivalencia analítico orbital en cada $T_{j+1} \cap T_j$.

Ahora definimos una función $H_0 : \mathcal{S} \rightarrow W - \{z = 0\} \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ como

$$H_0 = \sum \theta_j \vec{z}_j,$$

donde θ_j es una partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{T_j\}$, tal que las derivadas no crecen más rápido que un polinomio en $|z|^{-1}$ cuando $z \rightarrow 0$.

H_0^{-1} define una estructura cuasiconforme desde W . Si consideramos la complejificación del espacio tangente a \mathcal{S} , ${}^{\mathbb{C}}T\mathcal{S}$ sabemos que este se escinde en dos: ${}^{\mathbb{C}}T\mathcal{S} = T^{10} \oplus T^{01}$. El teorema de Newlander-Nirenberg (que es, en cierto sentido, una consecuencia del teorema de Frobenius) nos dice que la estructura cuasiconforme inducida por H_0^{-1} es integrable si y sólo si para cualesquiera dos campos vectoriales en T^{10} se tiene que su conmutador está también en T^{10} . Esto, escrito en el lenguaje de formas, nos lleva a hablar del tensor de Nijenhuis (ver[Zo]). Con sus respectivas precauciones se hace algo análogo al inciso 1 del teorema 1.3.13, ya que se tiene que hablar de formas de tipo $(1, 1)$ y $(2, 0)$ que definen la estructura cuasiconforme. Utilizando que la transformación Φ_j y la función Id se parecen exponencialmente se demuestra que las formas diferenciales que describen la estructura cuasiconforme dada por H_0^{-1} se anulan bajo el tensor Nijenhuis. El teorema de Newlander-Nirenberg en el lenguaje de formas afirma:

Teorema 2.3.5 (de Newlander-Nirenberg.([Arn1])) *Una estructura cuasiconforme es integrable si y sólo si su tensor Nijenhuis es idénticamente cero.*

En nuestro caso asegura la existencia de alguna transformación $G : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ diferenciable que lleva una estructura conforme estandar. La composición $G^{-1} \circ H_0 : \mathcal{S} \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ es holomorfa en \mathcal{S} . Además transforma a la foliación \mathcal{F}_0 en una foliación \mathcal{F} silla-nodo con invariante Martinet-Ramis igual a φ . ■

2.4. Transformación de Holonomía

En la teoría de foliaciones para describir la dinámica de una foliación \mathcal{F} en $(\mathbb{C}^2, 0)$ se utilizan transversales locales Σ , *i.e.*

$$T_p(\mathbb{C}^2, 0) = T_p\mathcal{L}_p \oplus T_p\Sigma,$$

donde $\mathcal{L}_p \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{L}_p \cap \Sigma = p$, a lo largo de una curva contenida en una de las hojas de \mathcal{F} . Para este propósito se tomará la siguiente definición

Definición de transformación de holonomía

Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$, \mathcal{L} una hoja no singular de \mathcal{F} y $\gamma \subset \mathcal{L}$ una curva cerrada con punto inicial p_0 . Se toma un pequeño disco D transversal a \mathcal{L} por p_0 y parametrizado por $z : D \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $z(p_0) = 0$. Dado que γ es compacto existe una cubierta finita de abiertos $\{U_j\}$, donde la foliación es una caja de flujo: $\mathcal{F}|_{U_j} = \{dy = 0\}$

Sea $p \in D$, se toma la hoja \mathcal{L}_p que pasa por p . En cada abierto U_j se puede levantar el camino $\gamma \cap U_j$ a la hoja $\mathcal{L}_p \cap U_j$. Después de regresar por γ al punto p_0 , el levantamiento de γ en \mathcal{L}_p corta de nuevo al disco D . La nueva intersección puede ser diferente del punto p y se denota por $\Delta_\gamma(p)$. Todo lo anterior da un esbozo de la demostración del siguiente resultado

Lema 2.4.1 Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ una curva cerrada y continua en una hoja \mathcal{L} de \mathcal{F} y sea Σ transversal local a la foliación en el punto $\gamma(0) = p_0$. Si Σ es suficientemente pequeña, existe una función continua $\Gamma : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que:

1. $\Gamma(q, 0) = q \in \Sigma, \quad \Gamma(q, 1) \in \Sigma$
2. $\Gamma(q, \cdot) : [0, 1] \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ es una curva continua en la hoja \mathcal{L}_q de \mathcal{F} que pasa por q
3. $\Gamma(p_0, \cdot) = \gamma$

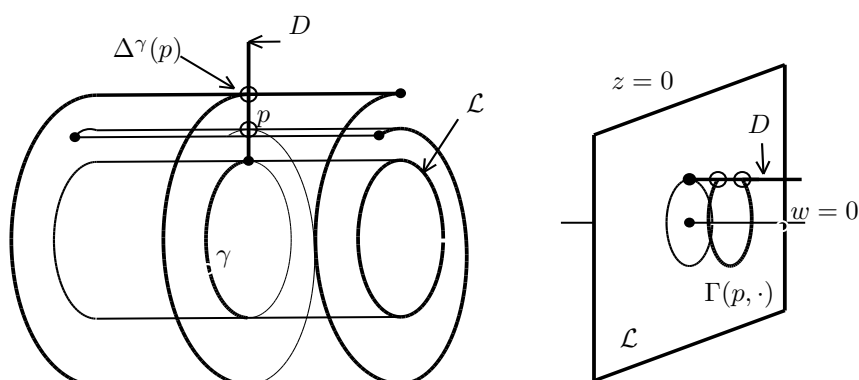


Figura 2.2: Holonomía sobre \mathcal{L}

Así se define como *transformación de holonomía* (o la *transformación de monodromía*) asociada a la curva cerrada γ como la función

$$p \rightarrow \Delta_\gamma(p),$$

donde $\Delta_\gamma = \Gamma(\cdot, 1)$. Es importante notar que si se toma otra curva cerrada $\tilde{\gamma}$ basada en p_0 y homotópica a γ , las transformaciones de holonomía que definen son la misma, i.e. $\Delta_\gamma = \Delta_{\tilde{\gamma}}$. La demostración de esto puede verificarse en (Cap.2 de [GM-OB]).

En el caso de una foliación asociada a $F \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$ con $F(0) = 0$ nos interesa la transformación de holonomía definida por una curva cerrada γ contenida en una separatriz, i.e. una curva C holomorfa lisa y cerrada en $(\mathbb{C}^2, 0)$ que pasa por 0 y es tangente a F . Se sabe que la j -ésima variación de la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{dw} = \frac{A(z, w)}{B(z, w)} = G(z, w),$$

donde $F(z, w) = A(z, w)\partial/\partial z + B(z, w)\partial/\partial w$, permite encontrar la serie analítica de la transformación de holonomía de una foliación a lo largo de una curva cerrada γ contenida en una hoja \mathcal{L} , donde la j -ésima variación evaluada en w_0 da el coeficiente del término de orden j . En nuestro caso utilizaremos el concepto de j -variación con respecto a una solución $\psi(w)$, donde esta última es la variedad fuerte de F : $C = \{z = 0\}$. Para ello se toma la solución $\psi(w)$ que corresponde a la separatriz C .

$$\frac{d\psi(w)}{dw} = G(\psi(w), w), \quad \psi(w_0) = z_0 = 0.$$

Se considera una familia de soluciones $\Psi(z, w)$ de G que satisface

$$\frac{\partial \Psi}{\partial w}(z, w) = G(\Psi(z, w), w), \quad \Psi(z, w_0) = z.$$

Se toma la expansión en serie de potencias pensando a Ψ como una función que sólo depende de z . En una vecindad de $(0, w_0)$, se tiene la siguiente igualdad

$$\Psi(z, w) = \psi_0(w) + \psi_1(w)z + \cdots + \frac{1}{j!}\psi_j(w)z^j + \cdots,$$

donde $\psi_j(w)$ es una función holomorfa en la variable w , junto con las siguientes condiciones

$$\psi_0(w) = \psi(w) = \Psi(0, w), \quad \psi_j(w) = \frac{\partial \Psi}{\partial z^j}(0, w), \quad j = 0, \dots$$

La función ψ_j es conocida como la j -ésima variación de la solución ψ . $\Psi(z, w_0)$ va ser nuestra transformación de holonomía, donde ψ_j se considera como la solución de una ecuación diferencial a lo largo de γ .

Para los campos vectoriales normalizados se va calcular la $p+1$ -ésima variación. Ahora haremos un cálculo que nos dice como es ψ_1 ,

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dw}(w) &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial w \partial z}(z_0, w) = \left[\frac{\partial}{\partial z} G(\Psi(z, w), w) \right] \\ &= G_z(\psi(w), w) \frac{\partial \Psi}{\partial w}(z, w_0) = G_z(z, \psi(w))\psi_1(w) \end{aligned}$$

Así la primera variación ψ_1 satisface la ecuación diferencial lineal

$$\frac{d\psi_1}{dw} = G_z(\psi(w), w) \psi_1(w), \quad \psi_1(w_0) = 1$$

y su solución está dada por

$$\psi_1(w) = \exp \int_{(0, w_0)}^{(\psi(w), w)} G_z dw.$$

Hay que notar que cuando se ha prenormalizado el campo F la solución $\psi(w)$ coincide con la curva $z = 0$, luego entonces $\psi_1(w)$ es la constante 1. Para las demás variaciones se nota que $G_{z^j}(0, w) = 0$ con $j = 1, \dots, p$, ya que $A(z, w) = z^{p+1}f(z, w)$ donde $f(z, w) = 1 + f_1(z, w)$ con $f_1(0, 0) = 0$. Al observar que la derivada j -ésima de A se le puede factorizar una z mientras $j = 1, \dots, p$ se tiene la igualdad

$$\frac{\psi_j(w)}{dw} = 0, \quad \text{con condición inicial } \psi_j(w_0) = 0$$

que nos dice que ψ_j con $j = 1, \dots, p$ son funciones idénticamente nulas. Cuando se deriva por $p + 1$ -ésima vez a G se tiene que

$$G_{z^{p+1}}(0, w) = (p + 1)! \frac{(1 + f_1(0, w))}{(-w + g(0, w))},$$

i.e. que la función ψ_{p+1} no se anula y además muestra que $\Psi(z, w_0)$ pertenece al conjunto de difeomorfismos tangentes a la identidad $\mathcal{A}_{p, \alpha}$ para alguna α en \mathbb{C} . Haciendo lo análogo para la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{dw} = \frac{z^{p+1}}{-w(1 + \lambda z^p)} = \frac{z^{p+1}(1 - \lambda z^p + \lambda^2 z^{2p} + \dots)}{-w},$$

también cumple que la primera variación $\psi_1(w)$ es la constante uno. Además queda explícita la ecuación de la $p + 1$ -variación,

$$\psi_{p+1}(w) = -(p + 1)! \int_{\gamma_w} \frac{1}{s} ds$$

donde $\gamma_w : [a, b] \rightarrow \{z = 0\}$ y $\gamma_w(a) = (0, w_0)$, $\gamma_w(b) = (0, w)$. La curva γ que nos interesa es cerrada y rodea al 0, de donde $\psi_{p+1}(w_0) = -(p + 1)!2\pi i$. De observar el término $z^{p+1}(1 - \lambda z^p + \dots)$ se tiene que los términos $G_{z^j}(0, w)$ van a ser cero para $j \neq np + 1$. Esto junto a unos cálculos combinatorios que relacionan la n -ésima derivada de la composición de dos funciones con una suma de renglones del triángulo de Pascal, permite observar que la derivada n -ésima de $G(\Psi(z, w), w)$ es la suma de funciones $G_{z^k}(\partial^l \Psi / \partial z^l)^{j_l} (\partial^m \Psi / \partial z^m)^{j_m}$, donde $k + l + m = n + 1$, cuyos coeficientes son números del triángulo de Pascal de los renglones $n - 1$, n y $n + 1$. Así, se puede expresar la ecuación para la $2p + 1$ -variación como

$$\int_{\gamma} \left(\frac{(2p + 1)!}{(p + 1)!p!} G_{z^{p+1}}(0, w) \psi_1^p(w) \psi_{p+1}(w) + (2p + 1)! G_{z^{2p+1}}(0, w) \psi_1^{2p+1}(w) \right) dw;$$

sustituyendo se tiene

$$\frac{(2p + 1)!}{(p + 1)!p!} (p + 1)!^2 \int_{\gamma} \frac{1}{w} \int_{\gamma_w} \frac{1}{s} ds dw - (2p + 1)! \lambda \int_{\gamma} \frac{1}{w} dw,$$

de donde

$$\frac{\psi_{2p+1}(w_0)}{(2p+1)!} = \left(\frac{-(p+1)}{2} 4\pi^2 + \lambda 2\pi i \right).$$

Entonces la función de holonomía para $W_{p,\lambda}$ es

$$\Delta_\gamma^{W_{p,\lambda}}(z) = z - 2\pi i z^{p+1} + \left(-\frac{(p+1)}{2} 4\pi^2 + \lambda 2\pi i \right) z^{2p+1} + \dots,$$

al observar la demostración del teorema 1.1.2 se tiene que la expresión anterior coincide con la fórmula de $g_{\omega_{p,\lambda}}^{-2\pi i}$ la cual es equivalente a $g_{-2\pi i \omega_{p,\lambda}}^1$. Ahora, tomando el cambio de variable $z \rightarrow cz$ con $c \in \mathbb{C}$ tal que $c^p = -2\pi i$, se tiene que

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{cz} & (\mathbb{C}, 0) \\ \downarrow \text{Id, } -2\pi i \omega_{p,\lambda} & & \downarrow \text{Id, } \omega_{p,\alpha} \\ T(\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{c} & T(\mathbb{C}, 0) \end{array}$$

de donde

$$\frac{-2\pi i c (c^{-1}w)^{p+1}}{1 + \lambda (c^{-1}w)^p} = \frac{w^{p+1}}{1 + \alpha w^p}.$$

Por lo que Δ_γ está en $\mathcal{A}_{p,\alpha}$, con $\alpha = \lambda/2\pi i$.

Recordando que curvas homotópicas definen la misma holonomía, se va a pedir que al ser levantada γ a la hoja \mathcal{L}_p con $p \in T_j \cap D = S_j \times \{w_0\}$, su levantamiento $\tilde{\gamma}$ quede totalmente contenido en T_j . Esto para que las funciones H_j del teorema 2.2.4 conjuguen a los campos $W_{p,\lambda}$ y F y sus restricciones en cada $S_j \times w_0$ queden bien definidas, para conjugar analíticamente al difeomorfismo Δ_γ^F con $g_{\omega_{p,\alpha}}$. Hay que notar que la función $u(z, w) = we^{t(z)}$ restringida a $S_j \times \{w_0\}$ mapea las órbitas de $g_{-2\pi i \omega_{p,\lambda}}$ a la esfera doblemente punteada $\bar{\mathbb{C}} \times \{j\}$, y recordando las ecuaciones 1.23 que nos dan el moduli de Ecalle-Voronin y la definición 1.3.12 de equivalencia entre ellos se toma la función

$$\tau_j = u \circ H_j|_{S_j \times w_0},$$

la cual mapea las órbitas de Δ_γ^F a la esfera $\bar{\mathbb{C}} \times \{j\}$. Retomando el diagrama (2.6) y agregándole las transformaciones τ_j tenemos

$$\begin{array}{ccccc} & & \Phi_j & & \\ & & \curvearrowright & & \\ T_j \cap T_{j+1} \cap D & \xleftarrow{H_j} & T_j \cap T_{j+1} \cap D & \xrightarrow{H_{j+1}} & T_j \cap T_{j+1} \cap D \\ \downarrow u_j & \swarrow \tau_j & & \searrow \tau_{j+1} & \downarrow u_{j+1} \\ \bar{\mathbb{C}} \times \{j\} & \xrightarrow{\varphi_j} & & \xrightarrow{\varphi_j} & \bar{\mathbb{C}} \times \{j+1\} \end{array}$$

Luego entonces las funciones de transición $\tau_{j+1} \circ \tau_j^{-1} = \varphi_j$ definidas en 2.3.2 son el moduli funcional de la transformación de holonomía Δ_γ^F definido en 1.3.12. Acabamos de probar

Teorema 2.4.2 1. *La transformación de holonomía Δ^F del germen de un campo vectorial F con singularidad silla-nodo en $\mathcal{E}_{p,\lambda}$ pertenece a las clases formales $\mathcal{A}_{p,\alpha}$, con $\alpha = \lambda/2\pi i$.*

2. *El moduli funcional ϵ_F del germen F coincide con el moduli funcional $\mu_{\Delta^F}^*$ de la transformación Δ^F .*

Estos teorema junto a los teoremas de clasificación Ecalle-Voronin 1.3.13 y Martinet-Ramis 2.3.3 dan como resultado el siguiente corolario:

Corolario 2.4.3 *Considera dos germenos F y F' de campos vectoriales holomorfos con singularidad silla-nodo, junto con sus correspondientes variedades holomorfas invariantes. Estos gérmenes de campos son analíticamente orbitalmente equivalentes si y sólo si sus transformaciones de holonomía Δ^F y $\Delta^{F'}$ respectivas son analíticamente equivalentes.*

Para finalizar este trabajo mencionamos únicamente que una aplicación más del teorema de clasificación Martinet-Ramis 2.3.3, es la construcción de un espacio de moduli para los campos vectoriales holomorfos con singularidad silla compleja, esto junto al teorema 1.3.14 demuestra el siguiente resultado:

Teorema 2.4.4 *Sean F y F' en $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$ con singularidad silla compleja que tiene la misma parte lineal y sus transformaciones de holonomía correspondientes al eje- z son analíticamente equivalentes. Entonces los gérmenes de campos holomorfos F y F' son analítica orbitalmente equivalentes.*

Una demostración completa de este resultado se encuentra en el capítulo 4 de [I-Y].

Bibliografía

- [Ah] L. V. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, ULECT, v.**38**, Amer. Math. Soc., Providence, 2006 p.162
- [Arn1] V.I. Arnold, *Geometrical Methods in the theory of differential equations*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983, [Russian: Nauka, Moscow, 1978]. p.334
- [C1] C. Camacho, P. Sad, *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas*, 16 Colóquio Brasileiro de Matemática ,IMPA-CNPQ, Rio de Janeiro 1987, p.131
- [C2] C. Camacho, *On the local structure of conformal mappings and holomorphic vectors fields in \mathbb{C}^2* , en Journées Singulières de Dijon (Univ. Dijon, Dijon, 1978), Astérisque, v.**59**, Soc. Math. France, Paris, 1978, p.83-94
- [Ca-Co] A. Candel, L. Conlon, *Foliations I*, GSM. v.**23**, Amer. Math. Soc., Providence, 2000, p.402
- [Dul] H. Dulac, *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles*, J. École Polytechnique **2**(1904),p.1-125
- [GM-OB] X. Gómez-Mont Ávalos, L. Ortiz-Bobadilla, *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies*, Apo. Mate., Soc. Mate. Mex. 2004, p.194
- [HKM] H.Hukuhara, T. Kimura y T. Matuda, *Equations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe*, Math. Soc. of Japan, Tokyo, 1961
- [II] Yu. S. Il'yashenko, *Nonlinear Stokes phenomena*, en "Nonlinear Stokes phenomena", (Yu. S. Il'yashenko, Ed.), Adv. in Sov. Math.,v.**14**, Amer. Math. Soc., Providence, 1992, pp.1-55
- [I-Y] Yu. S. Il'yashenko, S. Yakovenko, *Lectures on analytic differential equations*, GSM. v.**86**, Amer. Math. Soc., Providence, 2007, p.625
- [P] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, New York, Springer, 2001, p.553

- [Sh] B. V. Shabat, *Introduction to complex analysis, Part II Funtion of several variables*, MMONO. ,v.**110**, Amer. Math. Soc., Providence, 1992, p.371
- [Sze1] G. Szekeres, *Regular iteration of real and complex functions*, Acta Math. **100** (1958), p. 203-258
- [Zo] H. Żołądek, *The Monodromy Group* Mon. Mate. v.**67**, Birkhäuser Verlag Basel-Boston-Berlin, 2006, p.580