UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA MEDIDA DE CONVEXIDAD

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

JUAN JOSÉ ALBA GONZÁLEZ

DIRECTOR DE LA TESINA: M. EN C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

MÉXICO, D.F. DICIEMBRE, 2008

Una Medida de Convexidad

por Juan José Alba González
math@ciencias.unam.mx

1 Introducción

En este trabajo se define una medida de convexidad para ciertos subconjuntos del espacio Euclidiano. Esta medida le asocia a cada conjunto un número entre 0 y 1 que representa «qué tan convexo» es el conjunto, de manera que para conjuntos que intuitivamente estén cerca de ser convexos, la medida de convexidad estará cerca de 1, mientras que para conjuntos poco convexos la medida estará cerca de 0.

Se da la definición, que surge de una manera natural; se dan algunos ejemplos y se demuestra que, bajo ciertas condiciones, esta medida de convexidad cumple una propiedad bastante deseable para dicho concepto: la medida de convexidad de un conjunto es 1 si y sólo si el conjunto en cuestión es convexo.

Adicionalmente se prueban algunas cotas que permiten estimar la medida de convexidad de ciertos conjuntos y se ven algunas otras propiedades de la misma.

Finalmente se plantean preguntas que pueden resultar interesantes por sí mismas o por la relación que pueda tener el concepto de la medida de convexidad con la teoría ya existente de conjuntos convexos.

2 Motivación

La convexidad es un concepto geométrico muy intuitivo: alguien con sólo conocimientos de Matemáticas elementales puede entender la definición sin problemas y decir cuándo una figura en el plano es convexa y cuándo no.

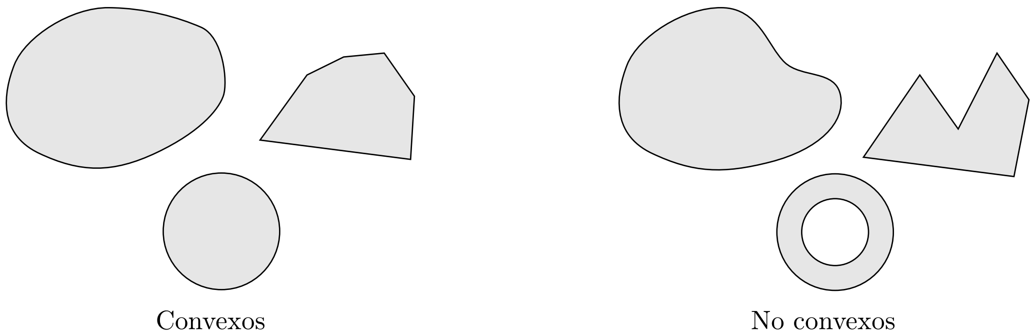

Figura 1.

Esta misma intuición nos podría llevar a decir que un conjunto es más convexo que otro, aunque en un sentido estricto esto no tendría sentido, porque la definición de convexo es tajante: una figura en el plano, o es convexa, o no lo es.

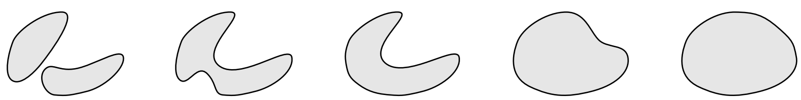

Figura 2.

Con esto en mente vamos a buscar definir una medida de convexidad que formalice esta intuición, un número que nos diga «qué tan convexo es un conjunto».

3 Definición

Consideremos X un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$. Sea p un punto en X, diremos que un punto q en X *se ve desde* p si el segmento $\overline{pq}$ está contenido en X. Para un punto p en X consideraremos la medida del conjunto de puntos que se ven desde p, $\mu(\{q\in\mathbb{R}^n:\overline{pq}\subseteq X\})$ entre la medida de X, $\mu(X)$. Esto nos dice qué proporción de X se alcanza a ver desde p. Llamaremos a esto $\mathcal{P}(p)$, *el panorama de* p,

$$\mathcal{P}(p)=\frac{\mu(\{q\in\mathbb{R}^n:\overline{pq}\subseteq X\})}{\mu(X)}.$$

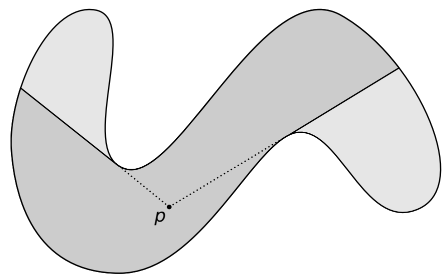

Figura 3. El panorama de p

Como $\{q\in\mathbb{R}^n: \overline{pq}\subseteq X\}\subseteq X$, entonces $\mu(\{q\in\mathbb{R}^n: \overline{pq}\subseteq X\})\leqslant\mu(X)$, por lo que $0\leqslant\mathcal{P}(p)\leqslant 1$ para todo $p\in X$.

La idea es que esto nos dice qué tan convexo se ve X desde p. Es claro que para conjuntos convexos el panorama es 1 para cualquier punto de X, pero para otros conjuntos el panorama puede tomar otros valores entre 0 y 1. Intuitivamente, mientras más puntos tenga X con un panorama cercano a 1, más cerca está el conjunto de ser convexo. Esto nos lleva a definir la medida de convexidad de X, que denotaremos con $\mathcal{J}(X)$, como el promedio de los panoramas de los puntos de X:

$$\mathcal{J}(X)=\frac{\int_X\mathcal{P}(p)\,dp}{\mu(X)}.$$

Como para cualquier punto $p\in X$, se tiene que $0\leqslant\mathcal{P}(p)\leqslant 1$, entonces también $0\leqslant\mathcal{J}(X)\leqslant 1$.

Consideremos ahora la función $\nu: X\times X\to\mathbb{R}$ dada por

$$\nu(p,q)=\begin{cases}0 & \text{si } \overline{pq}\nsubseteq X\\ \\ 1 & \text{si } \overline{pq}\subseteq X\end{cases}.$$

En términos de esta función podemos escribir

$$\mathcal{P}(p)=\frac{\int_X\nu(p,q)\,dq}{\mu(X)}$$

y entonces

$$\mathcal{J}(X)=\frac{1}{\mu(X)}\int_X\frac{\int_X\nu(p,q)dq}{\mu(X)}dp=\frac{1}{\mu(X)^2}\int_X\int_X\nu(p,q)\,dq\,dp=\frac{1}{\mu(X\times X)}\int_{X\times X}\nu(p,q)\,d(p,q)$$

lo que nos dice que $\mathcal{J}$ no es otra cosa que la probabilidad de que, dados dos puntos p y q en X, el segmento que los une esté contenido en X.

4 Ejemplos

Calculemos ahora la medida de convexidad de algunos conjuntos.

Ejemplo 1. Obviamente para cualquier conjunto convexo X se tiene que $\mathcal{J}(X)=1$.

Ejemplo 2. Consideremos la corona circular $A_r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : r^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

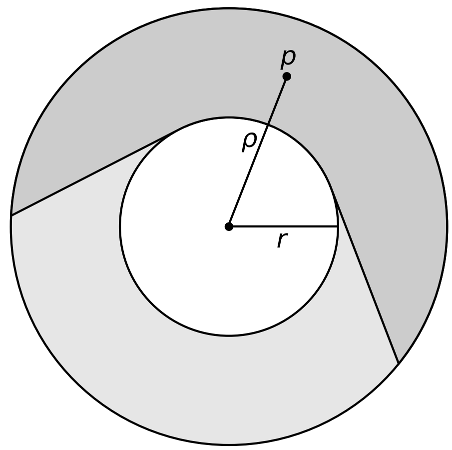

Figura 4.

En este caso $\mu(A_r)=\pi\,(1-r^2)$. Si tomo un punto $p\in A_r$ con $\|p\|=\rho$, como se ve en la figura, el área que se ve desde p está dada por $\arccos(r)-r\sqrt{1-r^2}+(1-r^2)\arccos(\frac{r}{\rho})$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(A_r) &= \frac{1}{\pi\,(1-r^2)}\int_{A_r}\frac{\arccos(r)-r\sqrt{1-r^2}+(1-r^2)\arccos(\frac{r}{\rho})}{\pi\,(1-r^2)}\,dp\\
&= \frac{1}{\pi^2(1-r^2)^2}\int_0^{2\pi}\int_r^1 (\arccos(r)-r\sqrt{1-r^2}+(1-r^2)\arccos(\frac{r}{\rho}))\,\rho\,d\rho\,d\theta\\
&= \frac{2(\arccos(r)-r\sqrt{1-r^2})}{\pi\,(1-r^2)}
\end{aligned}$$

Esta función es continua en $(0,1)$ y estrictamente decreciente. Tiende a 1 cuando r tiende a 0 por la derecha, y a 0 cuando r tiende a 1 por la izquierda. Por lo tanto, este ejemplo prueba que podemos encontrar conjuntos con cualquier medida de convexidad entre 0 y 1.

Ejemplo 3. Sea $A_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1 \text{ y } 0 \leqslant \arg(x+iy) \leqslant \alpha\}$. Para α entre 0 y π, A_α es convexo y entonces $\mathcal{J}(A_\alpha) = 1$. Para calcular la medida de convexidad cuando $\pi < \alpha < 2\,\pi$, observemos las siguientes figuras.

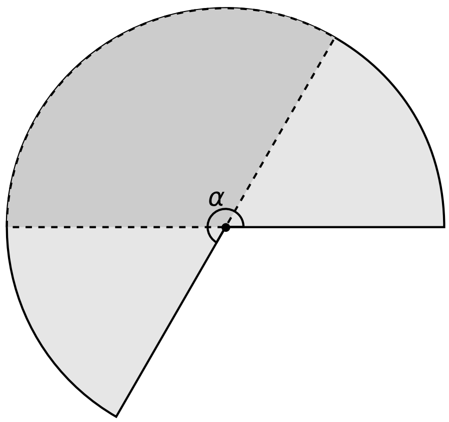

Figura 5. Puntos de panorama 1

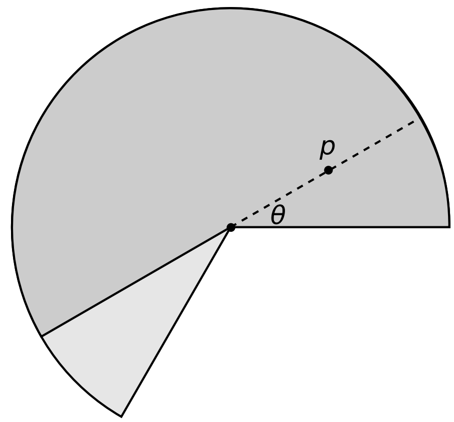

Figura 6. El panorama de p

Los puntos de la región sombreada de la figura 5 tienen panorama igual a 1. El punto p que está fuera de esa región (figura 6) tiene un panorama de $\frac{\theta+\pi}{\alpha}$. Usando la simetría del conjunto podemos calcular

$$\mathcal{J}(A_\alpha) = \frac{1}{\alpha/2}\left(2\int_0^{\alpha-\pi}\int_0^1 \frac{\theta+\pi}{\alpha}\,\rho\,d\rho\,d\theta + \int_{\alpha-\pi}^{\pi}\int_0^1 1\,\rho\,d\rho\right) = \frac{\pi}{\alpha}\left(2 - \frac{\pi}{\alpha}\right)$$

Nótese que cuando α tiende a 2π por la izquierda esto converge a $\frac{3}{4}$, que es la medida de convexidad del disco unitario menos el segmento que une al $(0,0)$ con el $(1,0)$. Sin embargo, $\mathcal{J}(A_{2\pi}) = 1$, pues $A_{2\pi}$ es todo el disco.

Ejemplo 4. El siguiente conjunto está formado por tres cuadrados del mismo tamaño. Calcular directamente la medida de convexidad de este conjunto es engorroso, sin embargo, en el capítulo 8 veremos una manera más sencilla de probar que la medida de convexidad es $\frac{8}{9}$. Esta coincide con la del ejemplo anterior para $\alpha = \frac{3}{2}\pi$.

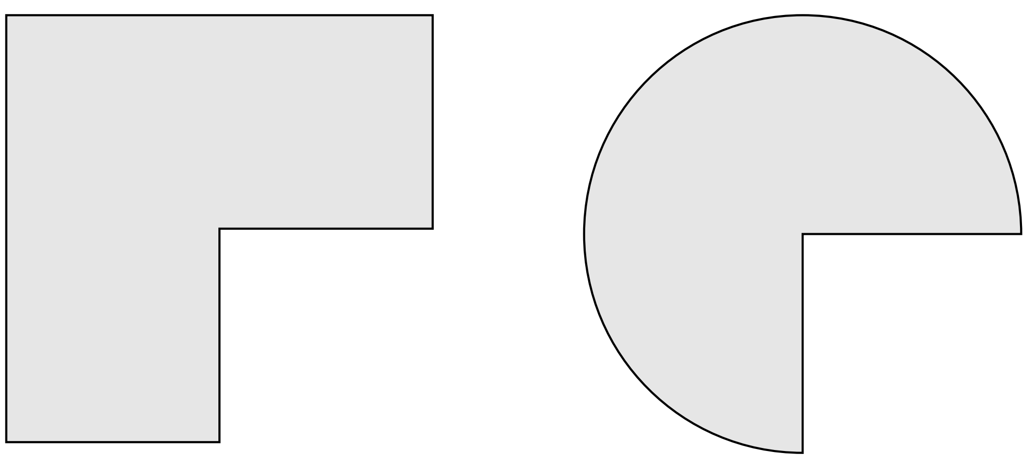

Figura 7. Conjuntos con medida de convexidad igual a $\frac{8}{9}$

Ejemplo 5. Consideremos dos convexos cerrados ajenos A y B de medidas a y b respectivamente. Entonces cada punto de A ve a todos los puntos de A pero no ve a ninguno de B, y viceversa. Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(A\cup B) &= \frac{1}{\mu(A\cup B)^2}\left(\int_A\int_A \nu+\int_A\int_B \nu+\int_B\int_A \nu+\int_B\int_B \nu\right)\\ &= \frac{1}{(\mu(A)+\mu(B))^2}\big(\mu(A)^2+0+0+\mu(B)^2\big)\\ &= \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\end{aligned}$$

En particular si A y B son de la misma medida, obtenemos $\mathcal{J}(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

5 Un compacto regular es convexo si y sólo si su medida de convexidad es 1

Como ya se mencionó antes, la medida de convexidad de un conjunto convexo es 1. Como nuestra definición de medida de convexidad está basada en integrales, resulta que el recíproco no es cierto. Para verlo basta considerar un convexo al que se le quita un punto interior. La medida de convexidad del conjunto no cambia, pues lo hemos alterado en un conjunto de medida 0, sin embargo el conjunto no es convexo. Obtenemos un ejemplo similar si en lugar de quitar un punto interior al convexo le agregamos un punto aislado. Podríamos añadir incluso un segmento, pues tiene medida 0 (en dimensión mayor que 1) y obtendríamos también un conjunto no convexo con medida de convexidad 1.

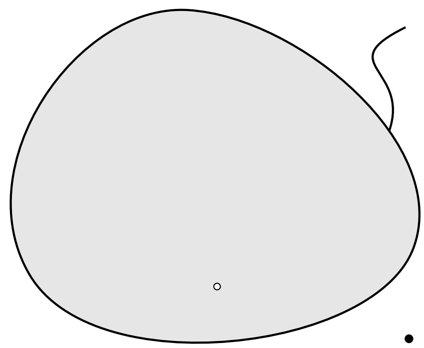

Figura 8.

Pero ¿qué pasa si el conjunto es más bonito? Para evitar que el conjunto pueda tener agujeros de medida 0, podemos pedir que el conjunto sea cerrado. Como estamos considerando conjuntos acotados en $\mathbb{R}^n$, esto equivale a pedir que sea compacto. Por otra parte, para evitar que el conjunto tenga puntos aislados y otros conjuntos flacos podemos pedir que todos los puntos estén cerca del interior. Vamos entonces a pedir que el conjunto sea un compacto regular, esto es, un compacto que es igual a la cerradura de su interior. El siguiente teorema muestra que con esta hipótesis basta.

Teorema 6. *Un compacto regular X es convexo si y sólo si $\mathcal{J}(X)=1$.*

Demostración. Si X es convexo, ya sabemos que $\mathcal{J}(X)=1$.

Supongamos ahora que X es un compacto regular tal que $\mathcal{J}(X)=1$, y sean p y q dos puntos en el interior de X. Tomemos ε y δ mayores que 0, tales que $U=B_\varepsilon(p)$ y $V=B_\delta(q)$ están contenidas en X.

Veamos que existen puntos $p_1\in U$ y $q_1\in V$ tales que $\overline{p_1q_1}\subseteq X$. Si ese no fuera el caso, desde ningún punto de U se vería a ningún punto de V y tendríamos que

$$\int_{U\times V}\nu=\int_{U\times V}\nu(u,v)\,d(u,v)=0$$

pero entonces

$$\begin{aligned}
\int_{X\times X}\nu &= \int_{U\times(X\setminus V)}\nu+\int_{(X\setminus U)\times V}\nu+\int_{(X\setminus U)\times(X\setminus V)}\nu\\
&\leqslant \int_{U\times(X\setminus V)}1+\int_{(X\setminus U)\times V}1+\int_{(X\setminus U)\times(X\setminus V)}1\\
&= \mu(X\times X)-\mu(U\times V)\\
&< \mu(X\times X)
\end{aligned}$$

y esto nos diría que $\mathcal{J}(X) = \dfrac{1}{\mu(X \times X)} \displaystyle\int_{X\times X} \nu < 1$, contradiciendo la hipótesis. Esta contradicción muestra la existencia de los puntos p_1 y q_1 deseados.

Tomando vecindades de p y de q de la mitad de los radios, por el mismo argumento, podemos obtener p_2 y q_2 en las vecindades correspondientes tales que $\overline{p_2q_2} \subseteq X$. Siguiendo con este proceso construimos dos sucesiones (p_n) y (q_n) tales que (p_n) converge a p, (q_n) converge a q, y para cada n, $\overline{p_nq_n} \subseteq X$.

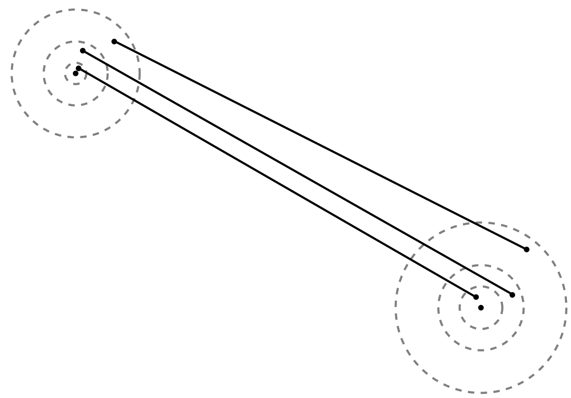

Figura 9.

Es claro que esta sucesión de segmentos converge al segmento $\overline{pq}$, pues para cada $t \in [0,1]$, la sucesión $((1-t)p_n + tq_n)$ converge a $(1-t)p + tq$. Pero esto nos dice además que cualquier punto del segmento $\overline{pq}$ es límite de una sucesión de puntos de X, pues los segmentos $\overline{p_nq_n}$ están contenidos en X. Como X es cerrado, el segmento $\overline{pq} \subseteq X$. Esto concluye el caso en el que p y q son puntos interiores de X.

Sean ahora p y q dos puntos cualesquiera de X. Como X es un cerrado regular, podemos aproximar a p y q con puntos del interior de X, esto es, podemos encontrar dos sucesiones de puntos (p_n) y (q_n) contenidas en el interior de X tales que (p_n) converge a p y (q_n) converge a q. Por lo ya probado para puntos del interior, los segmentos $\overline{p_nq_n}$ están contenidos en X. Una vez más, estos segmentos convergen al segmento $\overline{pq}$, y como X es cerrado, tenemos que $\overline{pq} \subseteq X$.

$\square$

6 Cotas

Como se ve en algunos de los ejemplos, el cálculo de la medida de convexidad puede ser complicado, por eso nos conviene tener algunas desigualdades que permitan acotarla.

6.1 Cota con la medida de un subconjunto convexo

Supongamos que C es un convexo contenido en X.

En ese caso podemos afirmar que

$$\mathcal{J}(X) \geqslant \left(\frac{\mu(C)}{\mu(X)}\right)^2.$$

La demostración es bastante directa:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(X) &= \frac{1}{\mu(X)^2}\left(\int_C\int_C \nu + \int_C\int_{X\setminus C}\nu + \int_{X\setminus C}\int_C \nu + \int_{X\setminus C}\int_{X\setminus C}\nu\right)\\ &\geqslant \frac{1}{\mu(X)^2}\int_C\int_C \nu = \frac{\mu(C)^2}{\mu(X)^2} = \left(\frac{\mu(C)}{\mu(X)}\right)^2\end{aligned}$$

pues $\nu \geqslant 0$ y para parejas de puntos en $C\times C$ se tiene que ν vale 1.

Es claro que mientras más grande sea la medida de C, mejor será la cota obtenida, de manera que para acotar por debajo la medida conviene tomar el convexo más grande que podamos encontrar dentro de X. En el caso del ejemplo 4, uno de los convexos de medida máxima que podemos tomar como C es el rectángulo formado por dos de los tres cuadrados que forman el conjunto. En este caso obtenemos que $\left(\frac{\mu(C)}{\mu(X)}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$, una cota bastante floja pues $\mathcal{J}(X) = \frac{8}{9}$.

6.2 Cota con la medida del subconjunto de puntos estrellados

Consideremos ahora el conjunto E de todos los puntos de panorama 1, es decir, el conjunto de puntos desde los cuales X tiene forma de estrella o «puntos estrellados». En este caso obtenemos que

$$\mathcal{J}(X) \geqslant \frac{\mu(E)}{\mu(X)}\left(2 - \frac{\mu(E)}{\mu(X)}\right).$$

La prueba es similar a la anterior:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(X) &= \frac{1}{\mu(X)^2}\left(\int_E\int_X \nu + \int_{X\setminus E}\int_E \nu + \int_{X\setminus E}\int_{X\setminus E}\nu\right)\\ &\geqslant \frac{1}{\mu(X)^2}\left(\int_E\int_X \nu + \int_{X\setminus E}\int_E \nu\right) = \frac{\mu(E)\mu(X) + \mu(X\setminus E)\mu(E)}{\mu(X)^2}\\ &= \frac{\mu(E)}{\mu(X)}\left(1 + \frac{\mu(X\setminus E)}{\mu(X)}\right) = \frac{\mu(E)}{\mu(X)}\left(1 + \frac{\mu(X) - \mu(E)}{\mu(X)}\right)\\ &= \frac{\mu(E)}{\mu(X)}\left(2 - \frac{\mu(E)}{\mu(X)}\right)\end{aligned}$$

porque $\nu \geqslant 0$ y para parejas de puntos en $E\times X$ y en $(X\setminus E)\times E$ tenemos que ν vale 1. En el ejemplo 4, el conjunto de puntos de panorama 1 es uno de los cuadrados que forman el conjunto. La cota en este caso es $\frac{\mu(E)}{\mu(X)}\left(2 - \frac{\mu(E)}{\mu(X)}\right) = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$, una mejor cota que la anterior, pero todavía un poco lejos de $\frac{8}{9}$.

6.3 Cota para la medida de convexidad de una unión

En casos muy particulares es posible obtener una mejor cota para la medida de convexidad descomponiendo el conjunto como unión de dos subconjuntos. Sean A y B dos conjuntos, una cota para la medida de convexidad de $A\cup B$ es la siguiente:

$$\mathcal{J}(A\cup B) \geqslant \frac{\mu(A)^2\mathcal{J}(A) + \mu(B)^2\mathcal{J}(B) - \mu(A\cap B)^2\,\mathcal{J}(A\cap B)}{\mu(A\cup B)^2}.$$

La demostración es como sigue:

$$\begin{aligned}
\mu(A\cup B)^2\,\mathcal{J}(A\cup B) &= \int_{A\cup B}\int_{A\cup B}\nu\\
&= \int_{A\setminus B}\int_{A}\nu+\int_{A\setminus B}\int_{B\setminus A}\nu+\int_{A\cap B}\int_{A\cup B}\nu+\int_{B\setminus A}\int_{A\setminus B}\nu+\int_{B\setminus A}\int_{B}\nu\\
&\geqslant \int_{A\setminus B}\int_{A}\nu+\int_{A\cap B}\int_{A\cup B}\nu+\int_{B\setminus A}\int_{B}\nu\\
&= \int_{A\setminus B}\int_{A}\nu+\int_{A\cap B}\int_{A}\nu+\int_{A\cap B}\int_{B}\nu+\int_{B\setminus A}\int_{B}\nu-\int_{A\cap B}\int_{A\cap B}\nu\\
&= \int_{A}\int_{A}\nu+\int_{B}\int_{B}\nu-\int_{A\cap B}\int_{A\cap B}\nu\\
&= \mu(A)^2\,\mathcal{J}(A)+\mu(B)^2\,\mathcal{J}(B)-\mu(A\cap B)^2\,\mathcal{J}(A\cap B)
\end{aligned}$$

ya que $\nu \geqslant 0$. Observemos además que, como $\mathcal{J}(A\cap B)\leqslant 1$, podemos también deducir la desigualdad

$$\mathcal{J}(A\cup B)\geqslant \frac{\mu(A)^2\mathcal{J}(A)+\mu(B)^2\mathcal{J}(B)-\mu(A\cap B)^2}{\mu(A\cup B)^2},$$

que puede resultar más útil pues no necesita el cálculo de $\mathcal{J}(A\cap B)$. En particular, si tanto A como B son convexos, $A\cap B$ también lo es y ambas cotas se reducen a

$$\mathcal{J}(A\cup B)\geqslant \frac{\mu(A)^2+\mu(B)^2-\mu(A\cap B)^2}{\mu(A\cup B)^2}.$$

Probemos esta cota con el ejemplo 4. El conjunto se puede poner como la unión de dos rectángulos de 2×1, con intersección un cuadrado de lado 1.

Usando la cota obtenemos $\frac{\mu(A)^2+\mu(B)^2-\mu(A\cap B)^2}{\mu(A\cup B)^2}=\frac{2^2+2^2-1^2}{3^2}=\frac{7}{9}$, que es una mejor cota que las que habíamos obtenido, bastante más cercana a $\frac{8}{9}$, el valor preciso de la medida de convexidad del conjunto.

7 La convexidad de conjuntos disconexos

Consideremos ahora el caso en el que $X = A \cup B$, con A y B dos conjuntos separados, es decir, tales que desde ningún punto de A se ve a ningún punto de B. Obsérvese que en general no basta pedir que sean ajenos porque no estamos suponiendo que sean cerrados. En este caso podemos concluir que

$$\mathcal{J}(X) = \frac{\mu(A)^2\,\mathcal{J}(A) + \mu(B)^2\,\mathcal{J}(B)}{\mu(X)^2}.$$

La demostración es sencilla:

$$\begin{aligned}
\mu(A\cup B)^2\,\mathcal{J}(A\cup B) &= \int_{A\cup B}\int_{A\cup B}\nu \\
&= \int_A\int_A \nu + \int_A\int_B \nu + \int_B\int_A \nu + \int_B\int_B \nu \\
&= \mu(A)^2\,\mathcal{J}(A) + \mu(B)^2\,\mathcal{J}(B)
\end{aligned}$$

pues para las parejas de puntos en $A\times B$ o en $B\times A$ tenemos que ν vale 0.

En particular, si A y B son convexos obtenemos el resultado del ejemplo 5.

Es claro que este resultado se puede generalizar a cualquier número finito de uniendos, siempre y cuando cada uno de ellos esté separado de los demás.

8 Cálculo de la medida de convexidad usando simetrías

En algunos casos es posible calcular la medida de convexidad de un conjunto calculando el panorama de algunas partes del conjunto y usando las simetrías que podamos encontrar entre dichas partes, como muestra el siguiente ejemplo.

Tomamos como X el conjunto del ejemplo 4, formado por tres cuadrados del mismo tamaño. Es claro que para puntos en el cuadrado de en medio, el panorama es 1. Obsérvese también que para puntos en las diagonales de los otros dos cuadrados indicadas en la figura 10, el panorama es $\frac{5}{6}$.

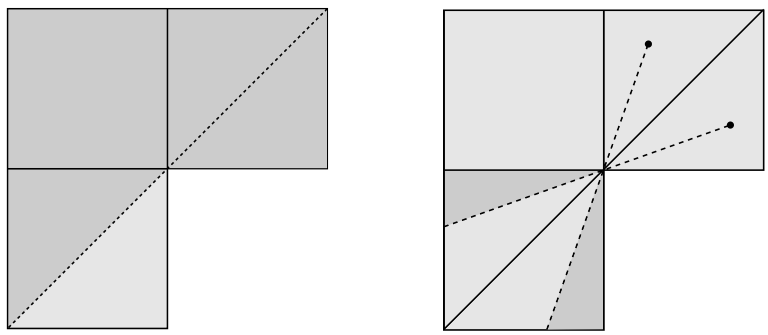

Figura 10.

Sea ahora p un punto en alguno de esos dos cuadrados. Consideremos p y su reflejo con respecto a la diagonal. Uno de ellos ve dos cuadrados junto con un triángulo y el otro ve los tres cuadrados con excepción de un triángulo. Pero los dos triángulos son congruentes, eso nos dice que entre ambos puntos ven un área de medida 5, o sea que *en promedio* cada uno ve un área de $\frac{5}{2}$ y tiene por lo tanto un panorama de $\frac{5}{6}$, igual al de la diagonal. Tenemos entonces que desde una tercera parte del conjunto el panorama es 1, y desde las otras dos terceras partes, el panorama es, en promedio, $\frac{5}{6}$. Así pues, la medida de convexidad del conjunto es $\frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{8}{9}$.

En el ejemplo 3 también se puede calcular la medida de convexidad de esta forma y obtener el mismo resultado sin hacer ninguna integral.

9 La medida de convexidad del producto

Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ acotados, entonces $X \times Y$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^{n+m}$, y resulta que su medida de convexidad es $\mathcal{J}(X \times Y) = \mathcal{J}(X)\,\mathcal{J}(Y)$.

Para probar esto, notemos primero que si $p = (p_x, p_y)$ y $q = (q_x, q_y)$ son puntos de $X \times Y$, entonces un punto del segmento $\overline{pq}$ es de la forma $(1-t)\,p + t\,q = ((1-t)\,p_x + t\,q_x, (1-t)\,p_y + t\,q_y)$ con $t \in [0,1]$, y este punto está en $X \times Y$ si y sólo si $(1-t)\,p_x + t\,q_x$ está en X y $(1-t)\,p_y + t\,q_y$ está en Y.

Como eso es para cada t, tenemos entonces que $\overline{pq} \subseteq X \times Y$ si y sólo si $\overline{p_x q_x} \subseteq X$ y $\overline{p_y q_y} \subseteq Y$, de donde $\nu(p,q) = \nu(p_x, q_x)\,\nu(p_y, q_y)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(X \times Y) &= \frac{1}{\mu(X \times Y)^2} \int_{X \times Y} \int_{X \times Y} \nu(p,q)\,dp\,d\,q \\
&= \frac{1}{\mu(X)^2\,\mu(Y)^2} \int_X \int_Y \int_X \int_Y \nu(p_x, q_x)\,\nu(p_y, q_y)\,d\,p_y\,d\,p_x\,d\,q_y\,d\,q_x \\
&= \frac{1}{\mu(X)^2}\,\frac{1}{\mu(Y)^2} \int_X \int_X \nu(p_x, q_x)\,d\,p_x\,d\,q_x \int_Y \int_Y \nu(p_y, q_y)\;d\,p_y\,d\,q_y \\
&= \mathcal{J}(X)\,\mathcal{J}(Y)
\end{aligned}$$

En particular, si Y es convexo, por ejemplo un intervalo en $\mathbb{R}$, entonces $\mathcal{J}(X \times Y) = \mathcal{J}(X)$.

10 Otras consideraciones

Dado el alcance de este trabajo y ya que se está definiendo un concepto nuevo, no se ha hecho un estudio exhaustivo de dicho concepto y sus propiedades. A continuación mencionamos algunos de los aspectos que podría ser interesante estudiar mas a fondo.

10.1 Definiciones alternativas

La definición que se dio de la medida de convexidad surge de manera natural. Además, como vimos, coincide con la probabilidad de que, dados dos puntos en el conjunto, el segmento que los une esté contenido en el conjunto. El hecho de que coincidan ambas definiciones podría indicar que éstas son las adecuadas, pero no son las únicas que se pueden considerar.

Tomemos por ejemplo la que se obtiene de la siguiente manera. Dados dos puntos en el conjunto, observamos qué proporción del segmento está contenida en el conjunto. Esto es un número entre 0 y 1, que cuando promediamos sobre todas las parejas de puntos del conjunto nos daría una definición distinta de medida de convexidad. Esta definición equivale a la probabilidad de que, escogidos al azar dos puntos del conjunto y un punto sobre el segmento que los une, dicho punto esté en el conjunto.

Esta definición tiene propiedades distintas a la dada en este trabajo. Por ejemplo, la medida de convexidad de un conjunto formado por dos convexos separados no depende sólo de las medidas de los convexos sino también de la forma que tengan y de su distancia y posición relativa. Puede entonces resultar ser más adecuada para estudiar algunos aspectos del conjunto.

No es difícil modificar la prueba que se dio en el capítulo 5 para ver que esta otra definición también cumple que, para compactos regulares, la medida de convexidad es 1 si y sólo si el conjunto es convexo.

Dado que un conjunto cerrado es convexo si y sólo si para cualesquiera dos puntos en la frontera, el segmento que los une también está en el conjunto, las dos definiciones dadas pueden modificarse si uno se limita a tomar los promedios sobre los puntos de la frontera del conjunto.

Otras dos definiciones relacionadas con las cotas que se dieron en el capítulo 6 podrían ser la proporción entre la máxima medida de un subconjunto convexo contenido en el conjunto y la medida del conjunto; o la proporción entre la medida el conjunto de puntos estrellados y la medida del conjunto. En la misma línea podríamos también considerar la proporción entre la medida del conjunto y la medida de su envolvente convexa.

Una vez más, cada una de estas definiciones podría ser mejor que la de este trabajo para medir otras características del conjunto.

10.2 Generalizaciones

En la definición de la medida de convexidad se usan integrales sobre el conjunto y se divide entre la medida del conjunto. Esto nos limita a conjuntos de medida finita distinta de 0. ¿Será posible definir la medida de convexidad para conjuntos de medida infinita o de medida 0? En ambos casos, ¿habrá un teorema para cerrados regulares similar al que probamos aquí para compactos regulares?

10.3 Existencia

Aunque la definición de la medida de convexidad está dada en términos de integrales y medidas, realmente el objetivo de la definición es estudiar a los conjuntos desde un punto de vista geométrico, no analítico. Por eso hemos supuesto a lo largo de este trabajo que los conjuntos que se están estudiando son lo suficientemente «bonitos» como para que la existencia de las integrales no se sea un problema. Podría, sin embargo, resultar interesante determinar condiciones suficientes para garantizar la existencia de las integrales y, por lo tanto, de la medida de convexidad.

10.4 Continuidad del panorama

Una posible manera de probar que la medida de convexidad existe sería probar que el panorama existe para cada punto del conjunto y que es una función integrable del punto.

Los siguientes ejemplos muestran que el panorama puede tener discontinuidades en la frontera del conjunto.

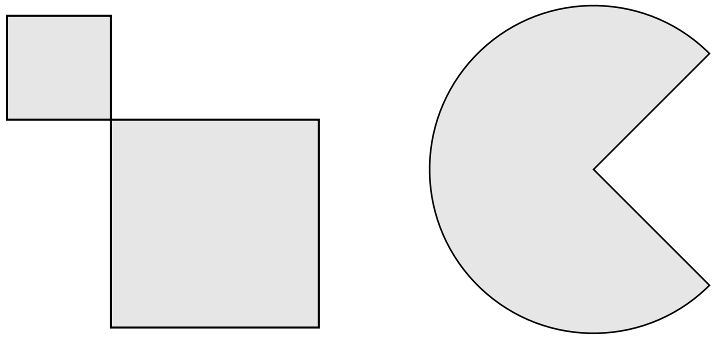

Figura 11.

El primer conjunto está formado por dos cuadrados, uno de lado 1 y el otro de lado 2, que se intersectan en un punto p. Los puntos del cuadrado de lado 1 distintos de p tienen panorama $\frac{1}{5}$, los puntos del cuadrado de lado 2 distintos de p tienen panorama $\frac{4}{5}$ y p tiene panorama 1. Así pues, el panorama no es continuo en p.

En el segundo ejemplo, el panorama de los puntos que están en los segmentos es $\frac{2}{3}$, con excepción del centro del círculo, que tiene panorama 1, por lo que el panorama no es continuo en ese punto.

Sin embargo, después de ver estos y otros ejemplos, no es difícil llegar a la siguiente conjetura:

El panorama es una función continua en los puntos del interior del conjunto.

10.5 Medida de convexidad de la suma

Uno de los conceptos más útiles en teoría de convexos es la suma de Minkowski. Sería entonces deseable poder calcular la medida de convexidad de la suma de dos conjuntos en términos de sus medidas de convexidad. Pero esto parece poco factible, y probablemente la medida de convexidad de la suma dependa no sólo de las medidas de convexidad de los conjuntos y de sus medidas, sino también de la forma de los conjuntos.

Sin embargo, es intuitivamente claro que, cuando engordamos suficiente un conjunto, esto es, le sumamos una bola de cierto radio, la medida de convexidad parece aumentar e incluso parece tender a 1 cuando el radio de la bola aumenta sin límites.

Para radios pequeños esto puede no pasar. El conjunto formado por dos discos ajenos de tamaños diferentes *disminuye* su medida de convexidad cuando se le suma una bola de radio menor que la mitad de la distancia entre los discos. Para radios más grandes, sin embargo, la convexidad vuelve a aumentar y se acerca a 1.

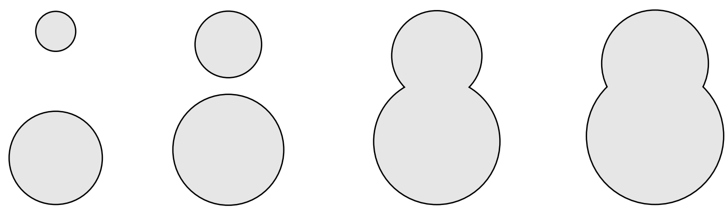

Figura 12.

Esto nos lleva entonces a una segunda conjetura:

A partir de cierto radio, sumarle al conjunto una bola aumenta su medida de convexidad.