



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**Análisis de la evolución de la interacción de la  
materia de quarks**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO  
DE:**

**FÍSICA**

**P R E S E N T A:**

**MIRIAM PATRICIA ORTEGA RAMÍREZ**



**DIRECTOR DE TESIS:  
Dr. GENARO TOLEDO SÁNCHEZ  
(2009)**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de Datos del Jurado

### 1. Datos del alumno

Ortega  
Ramírez  
Miriam Patricia  
56641581  
Universidad Autónoma de México  
Facultad de ciencias  
Física  
301697402

### 2. Datos del tutor

Dr  
Genaro  
Toledo  
Sánchez

### Datos del sinodal 1

Dr.  
Dany Pierre  
Page  
Rollinet

### Datos del sinodal 2

Dr.  
Eric Leonardo  
Patiño  
Jaidar

### Datos del sinodal 3

Dr.  
Axel Ricardo  
de la Macorra  
Pettersson

### Datos del sinodal 4

Dra.  
Rosario  
Paredes Gutierrez

### Datos del trabajo escrito

Análisis de la evolución de la materia de quarks  
52 p  
2009

Dedico este trabajo a mi madre, María de la Luz Ramírez Juárez, por su amor, apoyo incondicional y leal compañía desde el inicio de mi vida. A todas las personas que a lo largo del camino me han mostrado que hay otra manera de ver el mundo, a mi familia, amigos y profesores.

Agradezco a mi asesor de tesis Dr Genaro Toledo por su paciente guía en la realización de este trabajo. El apoyo de los proyectos PAPIIT 1N119306-3 y CONACYT 82290. Y a Mario por su ayuda en dudas computacionales.

Miriam Patricia Ortega Ramírez

Dedico este trabajo a mi madre, María de la Luz Ramírez Juárez, por su amor, apoyo incondicional y leal compañía desde el inicio de mi vida. A todas las personas que a lo largo del camino me han mostrado que hay otra manera de ver el mundo, a mi familia, amigos y profesores.

Agradezco a mi asesor de tesis Dr Genaro Toledo por su paciente guía en la realización de este trabajo. El apoyo de los proyectos PAPIIT 1N119306-3 y CONACYT 82290. Y a Mario por su ayuda en dudas computacionales.

## Resumen

El estudio de las interacciones entre quarks es un tema de importancia tanto para el entendimiento de las propiedades de las estrellas compactas como en las colisiones ultrarrelativistas de iones pesados. Un estudio que incorpore la dinámica de la interacción nos permitirá entender cómo se produce la evolución a nuevos estados de la materia. En este trabajo, analizamos los efectos de interacción en dos aproximaciones: a temperatura  $T = 0$  mediante el modelo de string-flip y a temperatura  $T \neq 0$  mediante los resultados obtenidos a partir de Lattice QCD. Estudiamos e ilustramos sus implicaciones en el radio y masa de las estrellas de quarks y en la evolución de la expansión de la materia de quarks producida en las colisiones ultrarrelativistas.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos y presentación del trabajo . . . . .	1
1.2. Partículas elementales y sus interacciones . . . . .	2
1.2.1. Partículas elementales . . . . .	2
1.2.2. Interacción electromagnética . . . . .	3
1.2.3. Interacción débil . . . . .	7
1.2.4. Interacción fuerte . . . . .	7
1.3. Modelo de la bolsa . . . . .	10
1.4. Plasma de quarks y gluones . . . . .	11
1.4.1. Estrellas de neutrones . . . . .	12
1.4.2. Colisiones . . . . .	12
1.5. Motivación . . . . .	13
<b>2. La materia como fermiones y bosones sin interacción</b>	<b>15</b>
2.1. Estadística de partículas cuánticas . . . . .	15
2.2. Sistemas Bosónicos . . . . .	15
2.3. Sistemas Fermiónicos . . . . .	16
2.4. Propiedades termodinámicas a $T = 0$ y las estrellas de quarks . . . . .	16
2.4.1. Ecuación Tolman-Oppenheimer-Volkoff (T-O-V) . . . . .	19
2.5. Termodinámica a $T \neq 0$ y colisiones ultrarrelativistas . . . . .	19
2.5.1. Evolución del proceso de expansión de los quarks . . . . .	22
<b>3. Modelos de quarks con interacción</b>	<b>25</b>
3.1. String-flip . . . . .	25
3.1.1. Potencial de muchos cuerpos y función de onda variacional . . . . .	25
3.1.2. Simulación Monte Carlo . . . . .	28
3.2. Lattice QCD . . . . .	29
<b>4. Resultados y conclusiones</b>	<b>33</b>
4.1. $T = 0$ y estrellas de quarks . . . . .	33
4.2. $T \neq 0$ y colisiones ultrarrelativistas . . . . .	39
4.3. Conclusiones . . . . .	46





# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Objetivos y presentación del trabajo

En esta tesis se propone estudiar la evolución de la interacción en la materia de quarks como función de la densidad de energía ( $\epsilon$ ) y la temperatura ( $T$ ). Cuantificar sus modificaciones y comparar sus implicaciones en posibles observables astrofísicas y terrestres.

Los efectos de interacción debidas a  $\epsilon$ , se estimarán basándonos en el modelo de string-flip, el cual incorpora los grados de libertad de quarks y color además de las interacciones. Los efectos debidos a la temperatura, se extraerán de cálculos realizados en la red (Lattice QCD).

El trabajo se dividirá en cuatro capítulos, los cuales se desarrollarán de la siguiente manera:

Capítulo 1. Se realizará una introducción del modelo estándar así como de las interacciones entre partículas fundamentales. Se revisará con más atención la interacción fuerte, describiremos el plasma quark-gluón, así como los escenarios donde esperamos encontrarlo.

Capítulo 2. Se estudiarán las propiedades generales de los sistemas fermiónicos y bosónicos sin interacción. Así como sus implicaciones en el radio y masa de objetos astrofísicos, así como el radio de expansión de las colisiones ultrarrelativistas de iones pesados.

Capítulo 3. Estará enfocado a explicar los modelos utilizados para incorporar la interacción de los diferentes escenarios: El modelo string-flip y Lattice QCD.

Capítulo 4. Se expondrán los resultados obtenidos de la estimación de las interacciones y se utilizarán los mismos para ver sus implicaciones en observables astrofísicas y terrestres. Se hará una discusión de los resultados y sus implicaciones además de los alcances de la tesis.

## 1.2. Partículas elementales y sus interacciones

### 1.2.1. Partículas elementales

El modelo estándar describe la interacción electromagnética, débil y fuerte, así como las partículas que participan en ellas, basado en el principio de norma local. Las partículas se dividen en tres grupos: los leptones, los quarks y las partículas mediadoras. Los dos primeros son fermiones con espín  $1/2$ , es decir, satisfacen el principio de exclusión de Pauli, estas constituyen la materia que conocemos. Mientras que los últimos son bosones de espín  $1$ , es decir, no satisfacen el principio de exclusión de Pauli.

Hay seis sabores de leptones: el electrón ( $e$ ), el neutrino del electrón ( $\nu_e$ ), el muon ( $\mu$ ), el neutrino del muon ( $\nu_\mu$ ), el tau ( $\tau$ ) y el neutrino del tau ( $\nu_\tau$ ), se agrupan en tres generaciones como se muestra en la tabla 1.1, cada generación tiene asignado un número leptónico de familia ( $L_e$ ,  $L_\mu$ ,  $L_\tau$ ). Los leptones son partículas a las cuales se les asigna número leptónico  $L = 1$ . Tres de los leptones tienen carga eléctrica  $q_e = -1$ :

Generación	l	Q	$L_e$	$L_\mu$	$L_\tau$
Primera generación	e	-1	1	0	0
	$\nu_e$	0	1	0	0
Segunda generación	$\mu$	-1	0	1	0
	$\nu_\mu$	0	0	1	0
Tercera generación	$\tau$	-1	0	0	1
	$\nu_\tau$	0	0	0	1

Cuadro 1.1: Leptones y algunas de sus propiedades

A cada uno de estos leptones le corresponde un antileptón con misma masa y espín; pero, carga y momento magnético relativo a la dirección del espín, opuestos.

Hay seis sabores de quarks: up (u), down (d), strange (s), charm (c), top (t) y bottom (b), a cada uno de ellos se le asocia tres cargas de color (red, blue, y green), también tienen carga eléctrica, espín y masa diferente de cero, ellos también se acomodan en tres generaciones como se muestra en la tabla 1.2. Los quarks tienen número bariónico  $B = 1/3$ . Análogo a los leptones, a cada quark le corresponde un antiquark.

Las interacciones que describe el modelo estándar están asociadas a sus respectivas partículas mediadoras. Para el electromagnetismo está el fotón; para la débil los bosones  $Z$ ,  $W^+$  y  $W^-$ ; para la fuerte le corresponden 8 gluones. En total son 12 las partículas mediadoras. La teoría que describe y unifica a la interacción débil y electromagnética es la teoría de Glashow-Weinberg-Salam, esta requiere de la existencia de al menos una partícula de Higgs, partícula que aunque aún no se ha observado, es el mecanismo mediante el cual se asigna masa a las partículas elementales.

Una vez presentadas las partículas elementales ([1] y [2]), en la siguiente sección, describiremos brevemente: las interacciones electromagnética, débil y fuerte; las teorías que las estudian; así como la evolución de la constante de acoplamiento de la interacción electromagnética y fuerte.

Generación	Sabor	Carga eléctrica
Primera generación	d	-1/3
	u	2/3
Segunda generación	s	-1/3
	c	2/3
Tercera generación	b	-1/3
	t	2/3

Cuadro 1.2: Quarks y algunas de sus propiedades

### 1.2.2. Interacción electromagnética

Esta interacción ocurre entre las partículas cargadas eléctricamente. Su alcance es ilimitado ya que, la intensidad de la interacción decrece proporcional al cuadrado de la distancia. Sus propiedades las describe la electrodinámica cuántica (QED), una teoría de norma abeliana con U(1) como grupo de simetría. En esta teoría el fotón, asociado a un campo vectorial, es la partícula mediadora que se acopla a las partículas con carga eléctrica.

El proceso más simple de esta interacción es la emisión o absorción de un fotón, en el siguiente diagrama de Feynman, se representa la emisión y absorción de un fotón:

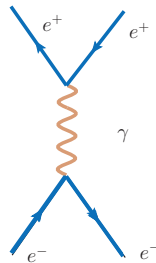


Figura 1.1: interacción entre un electrón y un positrón, vía el intercambio de un fotón

La intensidad de la interacción viene dada por la constante de acoplamiento:

$$\alpha_e = \frac{e^2}{4\pi} \quad (1.1)$$

donde  $e$  es la carga del positrón. Con el fin de mostrar que la constante evoluciona en función de la región energética donde se explore la carga eléctrica de la partícula estudiada, observemos que podemos visualizarla como una partícula rodeada de una nube de partículas virtuales, las cuales generarán lo que se llama una polarización del vacío, es decir, la carga (y masa) de la partícula dependerá de la distancia física (energía) a la que sea medida (ver figura 1.2).

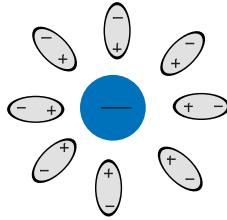


Figura 1.2: polarización del vacío

Analicemos la interacción entre dos partículas cargadas, la polarización del vacío se puede representar en términos de una serie de diagramas de Feynman, en donde existen infinitas contribuciones asociadas a las partículas que pueden ser creadas y aniquiladas en el proceso intermedio de la interacción entre partículas externas, como se muestra en la figura 1.3.

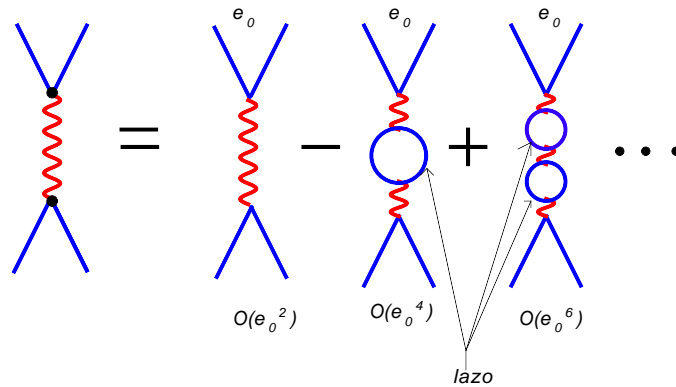


Figura 1.3: Representación gráfica de la polarización del vacío

La amplitud de probabilidad para que cada vértice ocurra (ver figura 1.3) es proporcional a la carga eléctrica de la partícula  $e$ , es decir, el primer proceso es proporcional a  $e^2$ , el siguiente a  $e^4$ , el siguiente a  $e^6$ , y así sucesivamente. Genéricamente la suma total de amplitudes de probabilidad de todos los procesos posibles da la dependencia de la constante de acoplamiento, esto es, se debe de hacer una suma sobre una cantidad infinita de procesos, los cuales cada vez tienen más combinaciones del término  $e^2$ .

Antes de proceder a realizar la suma cabe mencionar, que se le llama lazo (ver figura 1.3) a la representación gráfica de la probabilidad de que se cree un par de partículas en un punto del espacio y se aniquilen en otro punto. Notemos que estas probabilidades no son detectables individualmente, sino que corresponden a lo que hemos denominado como polarización del vacío. Ahora bien si consideramos que cada lazo es un elemento a sumar en cada proceso posible (ver figura 1.4),

tenemos la siguiente suma de propagadores (el inverso del operador momento espacial multiplicado por -i):

$$-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \rightarrow -i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} + (-i\frac{g_{\mu\alpha}}{q^2})\pi^{\alpha\beta}(-i\frac{g_{\beta\nu}}{q^2}) + \dots \quad (1.2)$$

donde los elementos de la forma  $-i\frac{g_{ij}}{q^2}$  corresponden al propagador del fotón y el término  $\Pi^{\alpha\beta}$  contiene la información de las partículas en el lazo.

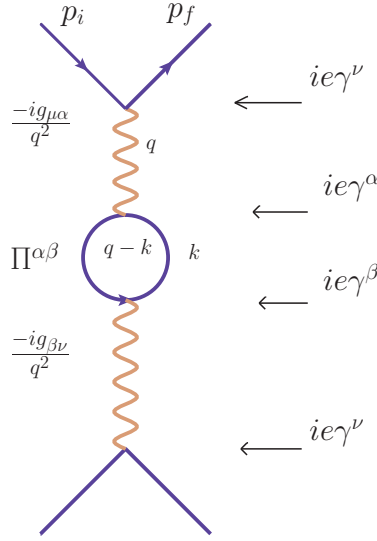


Figura 1.4: Propagador del primer proceso con lazo, donde  $q$  es el momento transferido,  $q^2 = (P_i - P_f)^2$

Dado que el lazo esta formado por partículas de espín 1/2, con propagadores dados por  $\frac{i(k+m)}{k^2-m^2}$  y  $\frac{i(q-k+m)}{(q-k)^2-m^2}$ , encontramos que  $\pi^{\alpha\beta}$ :

$$\pi^{\alpha\beta} = (-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[ (ie\gamma^\alpha) \frac{i(k+m)}{k^2-m^2} ie\gamma^\beta \frac{i(q-k+m)}{(q-k)^2-m^2} \right] \quad (1.3)$$

se puede escribir como:

$$\pi^{\alpha\beta} = -ig^{\alpha\beta} q^2 \pi(q^2) \quad (1.4)$$

sustituyendo el valor anterior el propagador del fotón en la ecuación 1.2 obtenemos:

$$-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \rightarrow -i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} [1 - \pi(q^2) + \dots]. \quad (1.5)$$

Dado que la integral diverge logarítmicamente, se debe controlar por un término de corte  $\Lambda^2$ . Sea  $Q^2$  la energía,  $Q = (P_i + P_f)^2$ , dado que  $Q^2 = -q^2$ . Para  $Q^2$  grande, podemos escribir la integral como:

$$\pi(Q^2) \approx \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{Q^2} = \alpha_0 \bar{\pi}(Q^2) \quad (1.6)$$

de forma tal que la amplitud de dispersión está dada por:

$$m(Q^2) = \alpha_0 m_0(Q^2) [1 - \alpha_0 \bar{\pi}(Q^2) + \alpha_0^2 \bar{\pi}^2(Q^2) + \dots] \quad (1.7)$$

Una expresión correspondiente a una serie geométrica, cuya convergencia nos permite escribirla de la forma:

$$m(Q^2) = \frac{\alpha_0 m_0(Q^2)}{1 + \alpha_0 \bar{\pi}(Q^2)} \quad (1.8)$$

por lo que:

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0 \bar{\pi}(Q^2)} \quad (1.9)$$

ahora bien, sustituyendo la ecuación 1.6 en la anterior se obtiene:

$$\frac{1}{\alpha(Q^2)} = \frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{Q^2}. \quad (1.10)$$

Si suponemos que  $\alpha_0$  es finito conforme  $\Lambda \rightarrow \infty$ , dado que  $\Lambda^2$  es arbitrario y  $\alpha_0$  no es observable, se procede a remover sus dependencias definiendo el acoplamiento renormalizado a una escala  $\eta^2$ . De esta forma, vía el experimento, la constante de acoplamiento sólo dependerá de  $Q^2$ , es decir:

$$\frac{1}{\alpha(Q^2)} - \frac{1}{\alpha(\eta^2)} = \frac{1 + \alpha_0 \bar{\pi}(Q^2)}{\alpha_0} - \frac{1 + \alpha_0 \bar{\pi}(\eta^2)}{\alpha_0} = \bar{\pi}(Q^2) - \bar{\pi}(\eta^2) \quad (1.11)$$

$$= -\frac{1}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\eta^2} \quad (1.12)$$

de

$$\frac{1}{\alpha(Q^2)} = \frac{1}{\alpha(\eta^2)} - \frac{1}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\eta^2} \quad (1.13)$$

se obtiene finalmente que la evolución de la constante de acoplamiento, está dada por:

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\eta)^2}{1 - \frac{\alpha(\eta^2)}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\eta^2}}. \quad (1.14)$$

Para un valor, medido experimentalmente, de la escala de la masa del bosón  $Z$  ( $\eta^2 = m_Z^2$ ) obtenemos un valor:  $\alpha(m_Z^2) = 1/125$ .

Analizando el comportamiento de la constante de acoplamiento, notamos que crece con la energía. Se encuentra que para valores pequeños de  $Q^2$ ,  $\alpha(Q^2) \rightarrow 1/137$ , por lo que se dice que la teoría está débilmente acoplada y nos permite hacer cálculos vía la teoría perturbativa.

### 1.2.3. Interacción débil

La primera manifestación observada de esta interacción fue la desintegración beta de los núcleos, quien ahora se explica, como el cambio del quark  $d$  al  $u$  ( $d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$ ) esta afecta a los leptones y a los quarks, pues es la responsable de cambiar el sabor de las partículas. De las interacciones estudiadas por el modelo estándar es la única que afecta a los neutrinos, tiene tres partículas mediadoras asociadas a un campo vectorial, estas son los bosones:  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z^0$  que presentan carga electromagnética  $q = +, -, 0$  y masa  $80.398 \pm 0.025 GeV$ ,  $80.398 \pm 0.025 GeV$  y  $91.1876 \pm 0.0021 GeV$  respectivamente Kun2.

La teoría que describe esta interacción, de manera unificada con la interacción electromagnética, es la teoría electrodébil de Glashow, Weinberg y Salam (GWS), ella explica las desintegraciones de los quarks y los leptones pesados, las interacciones de los neutrinos y las de los leptones cargados, deduce las partículas de intercambio para ambas interacciones así como la relación entre las respectivas constantes de acoplamiento, siendo el valor asintótico de la constante de acoplamiento débil  $\alpha_w \approx 4\alpha_e$ . El alcance de esta interacción es del orden de  $10^{-3} fm$ .

### 1.2.4. Interacción fuerte

Inferimos la existencia de una interacción más fuerte que la electromagnética, al observar que el núcleo atómico permanece unido, aun cuando está compuesto por partículas que eléctricamente se repelen, esta interacción es la llamada interacción fuerte, análogo a la carga eléctrica del electromagnetismo se tiene la carga de color, quien consiste en tres tipos: red, blue y green. Las partículas elementales que la poseen son: los quarks y los gluones. Esta interacción permite la formación de hadrones a través grupos de tres y/o dos quarks llamados bariones y mesones respectivamente, como el protón o el neutrón. Contrario al electromagnetismo, no disminuye su intensidad al aumentar su distancia, sino que al ir separando partículas con carga de color, la intensidad de la interacción crece, hasta alcanzar una distancia límite del orden del tamaño de un hadrón, donde el trabajo realizado para mantener esta separación es equivalente a la energía necesaria para la creación de pares de partículas-antipartículas, es decir, no es posible ver directamente quarks aislados, a este fenómeno se le llama confinamiento.

La teoría que describe a la interacción fuerte es la cromodinámica cuántica (QCD), una teoría de norma local con grupo de simetría no abeliano  $SU(3)$ . Este grupo es el de las transformaciones de fase de los campos de color de los quarks (matrices unitarias de  $3 \times 3$ ), tiene ocho generadores que se denotan por  $T_a$  donde  $a = 1, 2, \dots, 8$ . Dado que el grupo no es abeliano, estos generadores se relacionan entre sí mediante las constantes de estructura del grupo  $f_{abc}$  de la forma:

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c \quad (1.15)$$

denotando por  $q(x)$  un campo de color, aplicar una transformación del grupo  $SU(3)$  es

$$q(x) \rightarrow Uq(x) \equiv e^{i\alpha_a(x)T_a}q(x) \quad (1.16)$$

donde  $\alpha_a$  son los parámetros del grupo. El lagrangiano más sencillo que es invariante ante esta transformación y esta dado por:

$$\zeta = \bar{q}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)q - \alpha_s(\bar{q}\gamma^\mu T_a q)G_\mu^a - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad (1.17)$$



donde el término  $G_\mu^a$  es un campo de gluones que se transforma de la forma:

$$G_\mu^a \rightarrow G_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_a - f_{abc} \alpha_b G_\mu^c \quad (1.18)$$

y

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - \alpha_s f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c. \quad (1.19)$$

Este lagrangiano, ver ecuación 1.17, es para quarks  $q$  que interactúan y gluones  $G_\mu$  con constante de acoplamiento  $\alpha_s$ ;  $\bar{q}\gamma^\mu\partial_\mu q$  es el término cinético del quark,  $m\bar{q}q$  es el término de masa del quark,  $-\alpha_s\bar{q}\gamma^\mu(T_a G_\nu^a q)$  es el término de interacción quark-gluón,  $G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$  es el término cinético de los gluones. [4]

En esta teoría los gluones son las partículas mediadoras de la interacción. Nuevamente podemos expresar los procesos que involucrados mediante los diagramas de Feynman, en este caso el lagrangiano de QCD nos indica la existencia de tres tipos de procesos básicos: dos vértices entre tres campos como puede se muestra en la figura 1.5:

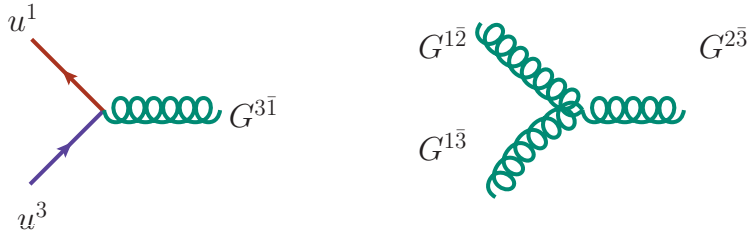


Figura 1.5: Procesos de la interacción fuerte (entre tres campos)

y un vértice de cuatro campos como se muestra ne la figura 1.6:

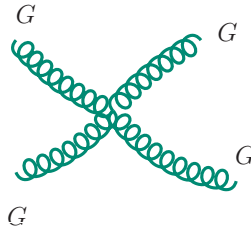


Figura 1.6: Proceso básico de la interacción fuerte (cuatro campos)

Usando estos procesos básicos podemos representar cualquier interacción entre partículas con carga de color, así como observar que cada una de estas partículas también puede estar rodeada de

quarks y gluones virtuales, es decir, la magnitud de la carga de color (y masa) de un quark, depende de la región energética a la que sea analizado. Análogo al caso de la interacción electromagnética, esta observación muestra una evolución en la constante de acoplamiento, que a continuación mostraremos.

Efectivamente la presencia de partículas virtuales genera un apantallamiento de la carga de color; sin embargo, en este caso debido a la contribución de las interacciones entre gluones, la constante de acoplamiento para la interacción fuerte, ver ecuación (1.20), tiene una evolución diferente al electromagnetismo.

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}. \tag{1.20}$$

Haciendo un proceso análogo hecho para la emisión y absorción de un fotón, ahora obtenemos el siguiente tipo de diagrama con su correspondiente ecuación para  $\alpha_s(Q^2)$

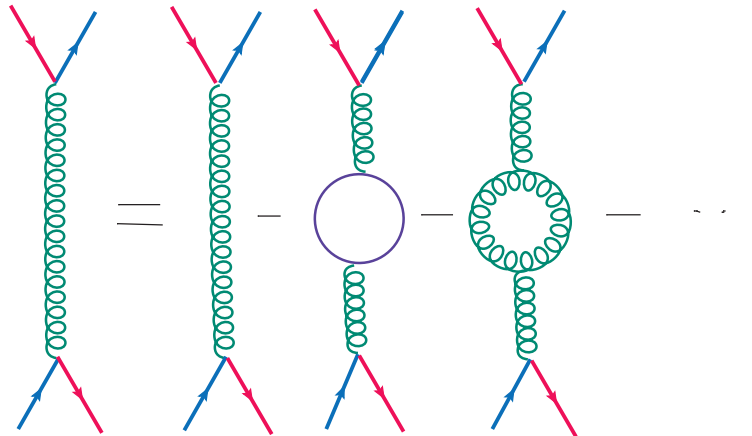


Figura 1.7: interacción entre dos quarks mediante un gluón, equivalente a la interacción entre dos quarks, menos una cantidad infinita de procesos

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\eta)^2}{1 + \frac{\alpha_s(\eta^2)}{12\pi} (33 - 2n_f) \ln \frac{Q^2}{\eta^2}} \tag{1.21}$$

donde  $n_f$  es el número de sabores,  $\eta$  es un parámetro que se utiliza en la renormalización y se determina experimentalmente, dejando la evolución de la constante de acoplamiento sólo en términos de  $Q^2$ . Analicemos lo que implica esta ecuación: es fácil ver que la constante de acoplamiento de la interacción fuerte evoluciona justo al revés que la constante de acoplamiento electromagnética, es decir, a distancias pequeñas, o lo que es lo mismo a energías grandes (o bien  $Q^2$  grandes), la constante de acoplamiento decrece. A partir de  $\alpha_s(Q^2) \ll 1$  se dice que tenemos un acoplamiento débil permitiéndonos describir las interacciones entre quarks y gluones en términos de expansiones

perturbativas. Cuando  $\alpha_s \rightarrow 0$  nos encontramos en la región de libertad asintótica, en esta región se espera los quarks y gluones se comporten como partículas libres.

Por otro lado, si la energía (o bien  $Q^2$ ) es suficientemente pequeña, la constante será muy grande, a la escala a la que esto pasa se denota por  $\Lambda^2$ , de la ecuación 1.21 obtenemos:

$$1 + \alpha(\eta^2)3\pi \ln \frac{\Lambda^2}{\eta^2} = \frac{\alpha_s}{\alpha(Q^2)_s} \longrightarrow 0 \quad (1.22)$$

$\Lambda$  no es predicha por la teoría, es un parámetro libre a ser determinado por el experimento, se espera que sea del orden de una masa hadrónica típica, esto es,  $\Lambda \simeq 0.1 \sim 0.5 GeV$ , para la cual  $\alpha_s \sim 0.1$ . Para  $Q^2 \ll \Lambda$  tenemos que  $\alpha(Q^2) > 1$ , es decir, los quarks y gluones están fuertemente acoplados. La intensidad de la interacción fuerte a distancias grandes tiene como consecuencia lo que ya hemos presentado como confinamiento: los objetos con color no son vistos aisladamente, sino en combinaciones neutras de color, esto es, podemos encontrar combinaciones donde el color se anula con su respectivo anticolor (mesones), o combinaciones de los tres colores red-blue-green (bariones), a estas combinaciones se les denomina hadrones.

Una vez descritas las partículas elementales y sus interacciones, veamos los intentos por describir las propiedades de sistemas formados por quarks y gluones.

### 1.3. Modelo de la bolsa

Como hemos ya mencionado, la materia que conocemos está formada por las partículas que hemos presentado como elementales, principalmente los tenemos en forma de hadrones; sin embargo, aun cuando se sabe de qué están hechos, resolver su ecuación de movimiento a partir de los principios de QCD no ha sido posible. Como alternativa se puede resolver esta ecuación de manera numérica usando Lattice QCD a temperatura finita, o bien, mediante modelos analíticos simplificados que se espera contengan la esencia de los efectos no perturbativos de QCD. Uno de ellos es el llamado modelo de la bolsa de MIT. Éste describe a los quarks confinados dentro de hadrones en una bolsa de dimensiones finitas. Aquí el confinamiento resulta del balance entre la presión exterior de las paredes de la bolsa y la presión debida a la energía cinética de los quarks dentro de la bolsa. La presión de la bolsa se asume constante y se denota por  $B$ . Asumiendo que los quarks se mueven de manera independiente dentro de la cavidad, la masa del hadrón  $M_h$  en el estado base en ausencia de constantes dimensionales, salvo la constante  $a_h$  que contiene las interacciones del quark (específicas para cada estado del hadrón) está dada por:

$$M_h(R_h) = \frac{4\pi}{3} R_h^3 B + \frac{a_h}{R_h} \quad (1.23)$$

donde  $R_h$  es el radio del hadrón. Esta expresión tiene un mínimo en el cual hay un balance entre las fuerzas de vacío y las generadas por los quarks. A este estado físico se le asocia una masa  $M$ . El mínimo lo encontramos de la forma:

$$\frac{\partial M_h}{\partial R_h} = 0 \quad (1.24)$$

Sustituyendo este valor de la masa en la ecuación, para  $M_h$  encontramos que el volumen y la masa en el estado base de los quarks están relacionados como:

$$M_h = 4BV_h \quad (1.25)$$

$$R_h M_h = \frac{4}{3} a_h \quad (1.26)$$

$$M_h = \frac{4}{3} a_h^{3/4} (4\pi B)^{1/4}. \quad (1.27)$$

Aparte del parámetro  $B$ , la masa del hadrón depende de  $a_h$ . Un ajuste global para las propiedades de distintos hadrones establece que el parámetro  $B$  toma valores alrededor de  $B = (171 \text{ MeV})^4$  (de acuerdo con [5]).

Esta descripción es aceptable en condiciones en las que los hadrones están aislados; sin embargo, puede haber estados de muchos hadrones en condiciones de alta densidad o alta temperatura en donde esta visión simple no sea correcta debido a la propiedad de la libertad asintótica y/o la presencia de muchas partículas. Damos a continuación dos escenarios posibles para estas condiciones, antes presentando una forma de la materia llamada plasma de quarks y gluones.

## 1.4. Plasma de quarks y gluones

Hay una fase de la materia llamada plasma, ésta se puede alcanzar elevando la temperatura del sistema, la materia obtenida se constituye de iones y electrones, en este caso la transición es gradual, las partículas cargadas en movimiento presentarán distintas propiedades colectivas de tipo electromagnético, al colisionar crean fotones que al ser emitidos hacen que este plasma brille. La otra forma en que se puede obtener un plasma es comprimiendo la materia, al darse una transición abrupta, se dice que el cambio de estado se da en una transición de fase, teniendo así un plasma frío el cual no brilla por si mismo.

Ahora bien, si seguimos elevando la temperatura del plasma formado de iones y electrones, se crearán mesones ligeros; pero, no habrá quarks ionizados o liberación de gluones (esto debido al confinamiento de color característico de la interacción fuerte), sino que al ir aumentando la temperatura, la densidad de mesones aumentará, a tal grado que se llena el espacio de hadrones superpuestos permitiendo describirlo en términos de quarks, antiquarks y gluones. De esta forma la materia nuclear se ha transformado en un plasma de quarks y gluones (QGP). La naturaleza de esta transición no es conocida aun debido a la dificultad de resolver QCD en el régimen no perturbativo, régimen en el cual se espera se de esta transición. Lo que si se sabe es que la escala de energía necesaria para crear este plasma de quarks y gluones, alcanzada mediante las colisiones ultrarrelativistas producidas en aceleradores de partículas como en el LHC (llamado así por sus siglas en inglés: Large Hadron Collider). Por otro lado, al ir aumentando la presión en el plasma frío, obtendremos un plasma de quarks y gluones, quien se cree que debe de existir en el interior de estrellas compactas conocidas como estrellas de neutrones. La figura 1.8 nos muestra el comportamiento de la temperatura en función del potencial químico, el cual nos ilustra cualitativamente las propiedades termodinámicas del plasma de quarks y gluones, así como los posibles escenarios donde lo podemos hallar. [6]

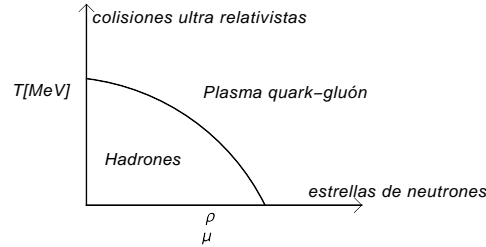


Figura 1.8: Región de transición de la materia hadrónica a plasma de quarks y gluones en el plano Temperatura ( $T$ ) y densidad de partículas ( $\rho$ )

### 1.4.1. Estrellas de neutrones

Se les llama estrellas compactas a las estrellas que por la alta densidad, la materia que las forma se encuentra en un estado degenerado. Este es producido al comprimir fermiones que al obedecer el principio de exclusión de Fermi, van llenando desde los estados energéticamente más bajos hasta el más energético, esto produce una presión adicional de origen cuántico llamada presión de Fermi, quien es responsable de que la estrella no colapse gravitacionalmente. Esta presión depende únicamente de la densidad. Pueden ser enanas blancas, estrellas de neutrones y estrellas de quarks, siendo las estrellas de neutrones y estrellas de quarks las que nos interesan estudiar.

Una estrella de neutrones es un remanente estelar dejado por estrellas que, después de agotar su combustible nuclear, su núcleo sufre un colapso gravitacional acompañado de una explosión abrupta llamada explosión de supernova. La temperatura típica al inicio de la explosión es del orden de  $10^{11}K$  a  $10^{12}K$ . El colapso continua hasta una densidad en la cual éste es frenado por la degeneración de neutrones, momento en el cual casi toda la masa de la estrella se habrá transformado en neutrones, la temperatura desciende rápidamente alcanzando en un día una temperatura de  $10^9K$  y en cien años una temperatura de  $10^8K$ , con un radio típico de  $12km$  y una masa de  $1.4M_{\odot}$  [7]. Si la masa de la estrella para estos momentos es superior a tres masas solares, ésta colapsará a un agujero negro, de lo contrario se generará una estrella de neutrones. Actualmente se piensa que el interior de las estrellas de neutrones podría estar formado por un plasma de quark-gluones. Otros candidatos a poseerlo son las estrellas de quarks, las cuales es posible que provengan de estrellas de neutrones mediante un proceso de deconfinamiento, quizá producido por una explosión análoga a la supernova, las estrellas de quarks, de existir, serían objetos en los cuales dadas las condiciones de extrema alta densidad, la materia existe en forma de quarks desconfiados; sin embargo, no hay observaciones que cumplan del todo con esta descripción.

### 1.4.2. Colisiones

El único método que tenemos para crear y estudiar el plasma a altas temperaturas es en un experimento de laboratorio, el cual consiste en colisionar núcleos entre sí a energías relativistas. El proceso se entiende como el choque de dos haces de partones, los constituyentes de los nucleones, después de la colisión los partones continuaran su movimiento; pero, la región de espacio tiempo "ensanwichada" por los que si participan, será excitada y llenará el espacio con quarks y gluones. El número neto bariónico, vendrá del número primario de partones y aquí es donde hemos de esperar encontrar el plasma quark-gluón con un potencial químico despreciable. La materia formada

entre los núcleos se expandirá y enfriará, eventualmente se transformará en materia ordinaria de hadrones, y unos cuantos leptones.

## 1.5. Motivación

En la descripción de los sistemas de quarks, es importante considerar los efectos de la interacción fuerte. Asociada a ella, existe la simetría de norma local  $SU(3)$ . Todo ello está englobado en la cromodinámica cuántica. En condiciones extremas de densidad de energía y temperatura, la intensidad de la interacción se espera que disminuya, resultado de la libertad asintótica. La forma precisa de cómo ocurre este proceso en un medio no está bien establecido. Una aproximación para tomar en cuenta los efectos de la interacción consiste en introducir un parámetro de presión constante, el parámetro ( $B$ ) de la bolsa de MIT; sin embargo, el concepto de libertad asintótica como ya hemos visto, está en conflicto con esta consideración. Por lo tanto una estimación de la evolución de la interacción como función de la densidad de energía  $\epsilon$  y/o la temperatura  $T$ , es necesaria.



## Capítulo 2

# La materia como fermiones y bosones sin interacción

En este capítulo estudiaremos las propiedades generales de los sistemas fermiónicos y bosónicos libres en dos límites de  $T = 0$ , asociándolos a la descripción de estrellas de quarks y  $T \neq 0$ , asociado a colisiones de iones ultrarrelativistas. Las propiedades termodinámicas encontradas nos permitirán determinar los valores de radio y masa de las estrellas y la evolución del proceso de expansión de una colisión. Esto nos servirá como referencia para el caso cuando incluyamos los procesos con interacción. Se espera que estos modelos no sean capaces de describir a la transición de materia hadrónica (la cual consideraremos como si fuera un sistema de piones) a plasma quark (fermiones) gluón (bosones); sin embargo, al hacer la comparación con las observables, mostraremos que esta aproximación es capaz de dar las propiedades dominantes.

### 2.1. Estadística de partículas cuánticas

Como se vio en el capítulo anterior, hay dos escenarios donde se espera exista el plasma quark gluón, ya sea como un plasma frío en las estrellas de neutrones, o un plasma caliente en las colisiones ultrarrelativistas de iones pesados. A continuación desarrollaremos la teoría necesaria para derivar expresiones analíticas para la presión, la densidad de energía y otras propiedades de la materia de quarks sin interacción, usando sus propiedades cuánticas. Para ello, comenzaremos presentando la Distribución de Fermi-Dirac y la distribución de Bose-Einstein.

### 2.2. Sistemas Bosónicos

Los bosones no satisfacen el principio de exclusión de Pauli. Esto es más de un bosón puede ocupar el mismo estado cuántico, por ello a temperatura cero el potencial químico de un bosón es cero. La estadística Bose-Einstein describe la distribución de bosones idénticos sobre estados de energía en equilibrio térmico, dada por:



$$n(k, \mu) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} - 1}, \quad (2.1)$$

donde  $E$  es la energía,  $\mu$  es el potencial químico y  $T$  es la temperatura

### 2.3. Sistemas Fermiónicos

Los fermiones satisfacen el principio de exclusión de Pauli, esto es, sólo un fermión puede ocupar un nivel cuántico, por ello a temperatura cero el potencial químico es igual a la energía de Fermi. La estadística de Fermi-Dirac describe la distribución de fermiones idénticos sobre estados de energía en equilibrio térmico, dada por:

$$n(k, \mu_f) = \frac{1}{e^{(E_f - \mu_f)/T} + 1}. \quad (2.2)$$

Si las partículas (fermiónicas) se van colocando desde el nivel más bajo de energía hacia niveles de mayor energía (sin dejar niveles vacíos), hasta agotar las partículas del sistema, la energía del último nivel ocupado se llama energía de Fermi  $E_f$ . Dada la relación:

$$E_f = k_B T_f, \quad (2.3)$$

donde  $k_B = 8.617343 \times 10^{-5} eV/K$  ( $k_B = 1$  en el sistema de unidades naturales) es la constante de Boltzmann, a  $T_f$  se le llama temperatura de Fermi, si la temperatura de un sistema es menor que  $T_f$  entonces se dice que su temperatura es despreciable.

Para ejemplificar esto en los sistemas que estamos trabajando, consideremos un neutrón en el estado base, su energía de Fermi está dada por su masa que es  $939.56536 \pm 0.00008 MeV$  [3] en base a la relación (2.3), encontramos que la temperatura de Fermi del sistema de un neutrón es  $1.09 \times 10^{13} K$ . Mientras que como se dijo en el capítulo 1, la temperatura típica de las estrellas de neutrones es tan sólo de  $10^8 K$ , dado que este tipo de estrella compacta consiste en mucho más de un neutrón, considerarlos proporcionaría una  $T_f$  del sistema de muchos neutrones mucho mayor a  $1.09 \times 10^{13} K$ , por ello es apropiado que consideremos la descripción de las estrellas de quarks en el límite de temperatura  $T = 0$  y masa  $m \neq 0$ . Por otro lado, haciendo un análisis de las energías de las colisiones ( $T \simeq 150 MeV$ ) [5] la cual es mucho más grande que la masa de los quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$ . Por lo que estudiaremos las colisiones en el límite donde  $T \neq 0$  y  $m = 0$ .

### 2.4. Propiedades termodinámicas a $T = 0$ y las estrellas de quarks

Las altas densidades encontradas en las estrellas de neutrones, las hacen candidatas para haber convertido la materia hadrónica de su interior en materia de quarks, esto gracias a que la intensidad de la interacción fuerte disminuye (en base a la libertad asintótica ver capítulo 1). En este proceso, los nucleones que antes formaban el interior de las estrellas, pierden su individualidad y los quarks

que los formaban se encuentran libres. Dado que sólo los fermiones intervienen para evitar el colapso gravitacional, el sistema que a continuación describiremos sólo incluye a los quarks y no a los gluones. A continuación estableceremos las propiedades para este caso.

En general, para partículas cuánticas libres de masa  $m$  y potencial químico  $\mu$ , encontramos las siguientes expresiones para la presión  $p$ , la densidad de energía  $\epsilon$ , la densidad  $\rho$  y la energía de Fermi por partícula  $E/N$ :

$$p = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty k \frac{\partial E(k)}{\partial(k)} [n(k, \mu) + n(k, -\mu)] k^2 dk \quad (2.4)$$

$$\epsilon = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty E(k) [n(k, \mu) + n(k, -\mu)] k^2 dk \quad (2.5)$$

$$\rho = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty [n(k, \mu) + n(k, -\mu)] k^2 dk \quad (2.6)$$

$$T_{FG}/N = E/N = \frac{\epsilon}{\rho} \quad (2.7)$$

donde

$$E(k) = (m^2 + k^2)^{1/2} \quad (2.8)$$

es la energía cinética y  $n(k, \mu)$  es la función de distribución de Fermi-Dirac (ver ecuación 2.2) en el caso de estudiar fermiones, o es la distribución de Bose-Einstein (ecuación (2.1)) en el caso de estudiar bosones,  $\gamma$  es la degeneración de las partículas.

Para el límite en el que la temperatura tiende a cero y la masa de las partículas es diferente de cero, la distribución para un sabor de quark ( $\gamma = 2_{espín} \times 3_{color}$ ), se convierte en una función escalón a una energía  $\mu_f$  en este caso podemos usar integrales estándar para expresar los resultados de la forma:

$$p = \frac{1}{4\pi^2} \left[ \mu k_f (\mu^2 - \frac{5}{2} m^2) + \frac{3}{2} m^4 \ln \frac{\mu + k_f}{m} \right] \quad (2.9)$$

$$\epsilon = \frac{3}{4\pi^2} \left[ \mu k_f (\mu^2 - \frac{1}{2} m^2) - \frac{1}{2} m^4 \ln \frac{\mu + k_f}{m} \right] \quad (2.10)$$

$$\rho = \frac{k_f^3}{3\pi^2} \quad (2.11)$$

donde  $k_f$  es el momento de Fermi del sabor  $f$  definido en términos del potencial químico:  $\mu_f = (m_f^2 + k_f^2)^{1/2}$

A partir de las ecuaciones anteriores podemos conocer la aportación en presión y densidad de energía de cada tipo de quark constituyente de las estrellas de quarks. Para construir una ecuación de estado para estas estrellas, requerimos conocer la fracción que representa cada tipo de quark del total de quarks de la estrella. Si consideramos una estrella compuesta de electrones y

quarks  $u$ ,  $d$ ,  $s$  en equilibrio químico, electromagnéticamente neutro, y con conservación de número bariónico, podemos obtener un sistema de ecuaciones que nos determine las correspondientes fracciones para diferentes condiciones de presión y/o densidad de energía, de la manera más simple.

Para el equilibrio químico débil las transiciones entre quarks deben de estar en equilibrio:

$$d \leftrightarrow u + e^- + \nu \quad (2.12)$$

$$s \leftrightarrow u + e^- + \nu \quad (2.13)$$

que en términos del potencial químico se escribe como:

$$\mu_s = \mu_u + \mu_e \quad (2.14)$$

$$\mu_d = \mu_u + \mu_e \quad (2.15)$$

$$\mu_s = \mu_d \quad (2.16)$$

donde  $\mu_q$  corresponde al valor del potencial químico del quark  $q$  dado por:

$$\mu_q = \sqrt{(k_f^q)^2 + (m_q)^2} \quad (2.17)$$

donde  $(m_q)$  es la masa del quark  $q$  y

$$(k_f^q)^2 = k_f^2 (n_q/N)^{2/3} \quad (2.18)$$

es el momento de Fermi del quark  $q$ , en términos del momento de Fermi  $K_f$  total y  $N_q$  es el número de quarks  $q$

Para el equilibrio electromagnéticamente neutro, la suma de las cargas netas de todas las partículas cargadas debe de anularse:

$$\frac{2}{3}n_u - \frac{1}{3}n_d - \frac{1}{3}n_s - 1n_e = 0 \quad (2.19)$$

donde  $n_u$ ,  $n_d$ ,  $n_s$  es la cantidad que tiene el sistema de quarks,  $u$ ,  $d$ , y  $s$ .

Para la conservación de número bariónico, el número de quarks totales debe ser constante.

$$n_u + n_d + n_s = N \quad (2.20)$$

con  $N$  es el número total de quarks del sistema.

Definiendo:  $X = n_d/N$ ,  $Y = n_u/N$ ,  $\sigma = n_s/N$ ,  $Ye = n_e/N$ ,  $\bar{m}_s = m_s/k_f$  y  $\bar{m} = m_u/k_f$  sustituyendo las ecuaciones (2.17) y (2.18) en las ecuaciones (2.14), (2.15), (2.16), (2.19), (2.20) se obtiene el siguiente sistema de 4 ecuaciones:

$$\begin{aligned}
2Y - (X + \sigma) - 3Ye &= 0 \\
Y + X + \sigma &= 1 \\
\sqrt{X^{2/3} + \bar{m}^2} &= \sqrt{Y^{2/3} + \bar{m}^2} \\
\sqrt{\sigma^{2/3} + \bar{m}_s^2} &= \sqrt{X^{2/3} + \bar{m}^2}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones a una densidad dada, podemos obtener las fracciones  $X$ ,  $Y$ ,  $\sigma$  y  $Ye$  requeridas para describir, mediante el uso de las ecuaciones 2.9 y 2.10, la ecuación de estado de la forma  $p = p(\rho)$ , de una estrella de quarks en equilibrio químico, electromagnético neutro y con conservación de número bariónico,

### 2.4.1. Ecuación Tolman-Oppenheimer-Volkoff (T-O-V)

Una forma de aterrizar la teoría desarrollada es relacionar la ecuación de estado con observables. Para ello, una vez encontrada la ecuación de estado, asumiremos que en nuestra estrella hay equilibrio entre la fuerza gravitacional y la fuerza debida al principio de exclusión de Pauli. Asumiendo una estrella con simetría esférica y efectos relativistas, Tolman, Oppenheimer y Volkoff, encontraron un sistema de dos ecuaciones diferenciales acopladas, las cuales al integrarse dada la ecuación de estado, nos proporciona el radio y la masa de la estrella. Este sistema es a continuación presentado:

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{[P(r) + \rho(r)][M(r) + 4\pi r^3 p(r)]}{r[r - 2M(r)G]} \tag{2.22}$$

y

$$\frac{dM(r)}{d(r)} = 4\pi\rho(r)r^2. \tag{2.23}$$

Definiendo el parámetro  $\alpha = \epsilon/p$  y sustituyendolo en la ecuación 2.22 y 2.23 obtenemos:

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{p(r)[1 + \alpha][1 + 4\pi r^3 p(r)/M(r)]M(r)}{r^2[1 - G2M(r)/r]} \tag{2.24}$$

y

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi p(r)\alpha r^2. \tag{2.25}$$

Este sistema de ecuaciones acopladas está condicionado a que en el centro la masa es nula y la presión es la presión central  $p_c$ , y en la orilla la presión es nula y la masa es la masa total de la estrella. Podemos resolver este sistema usando el método de Runge-Kutta como se mostrará en el capítulo 4.

## 2.5. Termodinámica a $T \neq 0$ y colisiones ultrarrelativistas

En esta sección estudiaremos, mediante un modelo que considera las partículas libres, la transición de la materia de hadrones, al plasma quark-gluón en el régimen de temperatura diferente de

cero, considerando los grados de libertad más representativos de ambas fases.

A partir de las ecuaciones 2.4 y 2.5 considerando el modelo de la bolsa de MIT, encontraremos para un sistema con potencial químico cero, la temperatura a la cual se da la transición ( $T_c$ ), para luego generalizar esta misma temperatura en función del potencial químico. Encontraremos, una relación que describe el comportamiento de la temperatura en la expansión como función de la temperatura y la velocidad del sonido la cual está dada por la ecuación de estado de la materia que se expande

Consideremos que la materia hadrónica está dominada por piones (los bosones más ligeros y sus grados de libertad) para temperaturas menores a  $T_c$ , Mientras que para temperaturas mayores a  $T_c$ , la materia se considerará que está formando quarks y gluones, siendo estos sus grados de libertad más importantes.

Sustituyendo la función de distribución de fermiones o bosones, cuando el potencial químico  $\mu_f = 0$ , la ecuación 2.4 se simplifica a:

$$\epsilon_{f,b} = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k}{e^{\beta k} \pm 1} k^2 dk = \frac{\gamma}{2\pi^2} \beta^{-4} 3! \sum_1^\infty \frac{(\pm 1)^{n-1}}{n^4} \quad (2.26)$$

donde  $m_f \sim 0$  y por ende  $\beta m = m/T \ll 1$  donde  $\beta = k_B/T = 1/T$ .

• Consideremos el caso en el cual las partículas son bosones y por ende sólo consideramos el signo positivo (+) en la suma y encontramos que:

$$\sum_1^\infty \frac{(+1)^{n-1}}{n^4} = \xi(4) \quad (2.27)$$

donde  $\xi(A)$  es la función zeta de Riemann, y  $\xi(4) = \pi^4/90$ . Sustituyendo en la ecuación (2.26) obtenemos que la densidad de energía para un gas de bosones sin masa es:

$$\epsilon_b = 3! \frac{\gamma_b T^4}{2\pi^2} \xi(4) \quad (2.28)$$

$$\epsilon_b = 3 \frac{\gamma_b T^4 \pi^2}{90} \quad (2.29)$$

Se sabe y puede calcular de las ecuaciones 2.4 y 2.5 para partículas ultrarrelativistas que

$$\epsilon = 3p. \quad (2.30)$$

Por lo tanto, la presión correspondiente está dada por:

$$p_b = \frac{\gamma_b T^4 \pi^2}{90} \quad (2.31)$$

• Consideremos ahora el caso en el que las partículas son fermiones, en particular quarks, y por ende sólo consideramos el signo negativo de la suma en ecuación (2.26):

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^A} = (1 - 2^{1-k})\xi(A) \quad (2.32)$$

La suma alternante introduce un factor 7/8:

$$\epsilon_f = 3! \frac{\gamma_f T^4}{2\pi^2} \eta(4) = 3 \cdot \frac{7}{8} \frac{\gamma_f T^4 \pi^2}{90} \quad (2.33)$$

Si permitimos la presencia de antipartículas tenemos que introducir un factor 2. Usando (2.30), obtenemos que la densidad de energía y la presión a una temperatura  $T$  para los fermiones esta dada por:

$$\epsilon_f = \gamma \cdot \frac{7}{4} \frac{T^4 \pi^2}{30} \quad (2.34)$$

y

$$p_f = \gamma \cdot \frac{7}{4} \frac{T^4 \pi^2}{90}. \quad (2.35)$$

Los resultados anteriores proporcionan la presión de sistemas con partículas libres a potencial químico cero. Sabemos que al menos durante la transición la interacción fuerte es considerable, de acuerdo con el modelo de la bolsa de MIT, consideraremos la presión total en la parte del plasma quark gluón  $P_{Tqqg}$  dada por la presión total del plasma quark gluón libre  $p_{qqg.libre}$  menos el parámetro  $B$ :

$$P_{Tqqg} = p_{qqg.libre} - B. \quad (2.36)$$

Mientras que la parte hadrónica esta ya considerada al utilizar a los piones como grados de libertad.

En base a lo anterior podemos calcular la ecuación de estado en las dos fases (materia hadrónica y plasma quark-gluón). Comparando ambas presiones en función de la temperatura, podemos deducir el estado en el cual ambas fases coexisten, igualando la presión ejercida por los piones a  $P_{Tqqg}$ , con las siguientes degeneraciones para cada tipo de partícula:

- Degeneración de piones:  $\gamma = 3$  hay tres tipos de piones
- Degeneración de quarks:  $\gamma = 9$  son 3 sabores x 3 colores
- Degeneración de gluones:  $\gamma = 16$  son 8 colores x 2 espines.

Hemos considerado sólo 3 sabores de quarks, para posteriormente hacer comparación entre nuestros resultados y los de lattice.

Sustituyendo dichas degeneraciones en (2.35) y (2.31) e igualando las presiones, obtenemos:

$$3 \frac{\pi^2 T^4}{90} = 9 \cdot \frac{7}{4} \frac{T^4 \pi^2}{90} - B + 16 \frac{\pi^2 T^4}{90}. \quad (2.37)$$

Para un valor típico de la bolsa  $B^{1/4} = (200)^{1/4} MeV$  [8], obtenemos que la temperatura de transición toma el valor:  $T_c = 150.09 MeV$ , un resultado que más tarde veremos es cercano a los resultados proporcionados por LQCD.

Ahora bien, con el fin de encontrar esta temperatura en función del potencial químico, hagamos un procedimiento análogo al hecho para potencial químico nulo.

Para fermiones en el límite de masa cero, las integrales de las ecuaciones 2.5 y 2.4 del gas degenerado, en el modelo de MIT pueden obtenerse exactamente como:

$$p_f|_{m=0} = \gamma_f \frac{(\pi T)^4}{90\pi^2} \left( \frac{7}{4} + \frac{15\mu^2}{2(\pi T)^2} + \frac{15\mu^4}{4(\pi T)^4} \right) - B. \quad (2.38)$$

Por lo que combinando las contribuciones de quarks, gluones y vacío, obtenemos que la presión total del plasma de quarks y gluones es:

$$p_{QGP} = -B + \frac{\gamma}{90\pi^2} \left( \frac{7}{4}(\pi T)^4 + \frac{15}{2}(\mu^2(\pi T)^2 + \frac{1}{2}\mu^4) \right) + \frac{8 \cdot 2}{90\pi^2}(\pi T)^4. \quad (2.39)$$

Igualado a la presión de los piones ecuación (2.31) y (usando las mismas degeneraciones antes dadas), para un valor de  $B^{1/4} = 200^{1/4} MeV$  [8] encontramos que la temperatura de transición es una función del potencial químico  $\mu$  de la forma:

$$T = \sqrt{\frac{6\sqrt{(3\pi^4\mu^4 + 7.36 \times 10^8\pi^6)}}{23\pi^4} - \frac{27\mu^2}{23\pi^2}} \quad (2.40)$$

### 2.5.1. Evolución del proceso de expansión de los quarks

Finalmente, para un plasma de quarks y gluones producido en la colisión de hadrones, podemos estudiar la evolución de la esfera como función de la temperatura de la materia después del choque. Para ello consideremos una expansión isentrópica, es decir, a entropía constante.

Si la entropía es constante tenemos que:

$$dE + pdv = Tds = 0. \quad (2.41)$$

Con  $E = \epsilon v$ , donde  $v$  es el volumen que ocupa el plasma quark gluón o la materia hadrónica, el cual se considera es la esfera del radio  $R$  y por ende  $dv/v = 3dR/R$ , podemos escribir la ecuación (2.41) como:

$$d\epsilon + (\epsilon + p) \frac{3dR}{R} = 0 \longrightarrow \frac{3dR}{R} = -\frac{d\epsilon}{\epsilon + p} \quad (2.42)$$

La ecuación anterior describe la dinámica de la expansión que podemos escribir en términos de la velocidad del sonido ( $v_s^2 = \partial p / \partial \epsilon$ ) como:

$$3 \frac{dR}{R} = -\frac{dT}{v_s^2 T} \quad (2.43)$$

integrando y simplificando, obtenemos:

$$R = R_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{-1/3v_s^2}. \quad (2.44)$$

Esta ecuación describe la evolución de la esfera como función de la temperatura a partir de las condiciones iniciales de radio ( $R_0$ ) y temperatura  $T_0$ . Dictada por la ecuación de estado vía la velocidad del sonido  $v_s$ .

Analizando esta ecuación, encontramos que la temperatura del sistema decrece después de la colisión cuando la materia comienza a expandirse. En el caso ultrarrelativista donde  $v_s^2 = 1/3$  la ecuación anterior cumple con:  $R = R_0(T_0/T)$ . Este resultado nos será de utilidad en nuestro análisis posterior cuando incluyamos los efectos de la interacción.

Con esto concluimos la descripción de los sistemas fermiónicos y bosónicos en el caso libre, en donde también hemos establecido el procedimiento para estudiar las propiedades de radio y masa de las estrellas de quarks as' como la evolución de un proceso de expansión en una colisión.





## Capítulo 3

# Modelos de quarks con interacción

En el capítulo anterior se describió la materia de quarks sin interacción a temperatura cero ( $T = 0$ ) y a temperatura finita ( $T \neq 0$ ); sin embargo, la interacción fuerte es importante, aún en regiones cercanas a la transición de materia hadrónica a plasma quark-gluón, y no existe una solución exacta para el lagrangiano de QCD en el régimen no perturbativo. Por ello se han desarrollado modelos fenomenológicos que si consideran la presencia de interacción fuerte entre quarks y los gluones, estos han sido empleados para reproducir algunas características de QCD. En este capítulo estudiaremos dos de estos modelos: Para  $T = 0$  tenemos el modelo de string-flip [9] mientras que para  $T \neq 0$  tenemos los cálculos de Lattice [5]. Describimos aquí el procedimiento para obtener las correspondientes ecuaciones de estado.

### 3.1. String-flip

El modelo String Flip tiene como objetivo describir un sistema en el cual a bajas densidades los quarks estén confinados en hadrones con carga de color neutra y en altas densidades se encuentren libres, esto en el régimen de  $T = 0$ . Para lograr este objetivo, el modelo propone una función de onda variacional y un potencial de varios cuerpos que es capaz de confinar quarks en grupos de color neutro sin generar fuerzas de tipo Van der Waals; aunque, este modelo viola la simetría quiral y la invarianza de Lorentz, funciona para regiones donde muchos modelos fallan, tal es la transición de materia nuclear a materia de quarks. Por lo que nos permitirá estudiar la dinámica de los quarks. A continuación estudiaremos dicho potencial.

#### 3.1.1. Potencial de muchos cuerpos y función de onda variacional

En este modelo se considerarán quarks con sabor (u, d, s) y color (R, B, G). El potencial para varios quarks se va a definir como el potencial óptimo para agrupaciones de quarks con suma de color blanco. Consideremos todos los quarks red (R) y todos los quarks blue (B), e independientemente del sabor definimos el óptimo agrupamiento por pares B-R como:

$$V_{RB} = \min_P \sum_{i=1}^A v[\mathbf{r}_{iR}, \mathbf{P}(\mathbf{r}_{iB})] \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{r}_{iR}$  denota la coordenada espacial del  $i$ -ésimo quark rojo y  $\mathbf{P}(\mathbf{r}_{iR})$  es la coordenada del quark azul ligado al  $i$ -ésimo quark rojo que produce un valor mínimo del potencial, de todas las posibles permutaciones ( $p$ ). El potencial  $v$  lo asumimos armónico con constante  $k$ , es decir:

$$v(\mathbf{r}_{iR}, \mathbf{r}_{jB}) = \frac{1}{2}k(\mathbf{r}_{iR} - \mathbf{r}_{jB})^2. \quad (3.2)$$

Análogamente, construimos el potencial óptimo para las parejas B-G y G-R, obteniendo

$$V_{BG} = \min_P \sum_{i=1}^A v[\mathbf{r}_{iB}, \mathbf{P}(\mathbf{r}_{iG})] \quad (3.3)$$

$$V_{GR} = \min_P \sum_{i=1}^A v[\mathbf{r}_{iG}, \mathbf{P}(\mathbf{r}_{iR})]. \quad (3.4)$$

De esta forma el potencial para varios quarks que satisface la condición de neutralidad es:

$$V = V_{RB} + V_{BG} + V_{GR}. \quad (3.5)$$

Por ende el Hamiltoniano que describe nuestro sistema de  $N$  partículas, cada una con masa  $m_i$  y momento  $\mathbf{P}_i$ , está dado por:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{P}_i^2}{2m_i} + V. \quad (3.6)$$

Analizando este potencial, encontramos que este es capaz de confinar quarks en grupos de color blanco o singuletes de color. Dada la saturación debida a la interacción fuerte, se permite la separación de estos grupos, sin generar fuerzas tipo Van der Waals. Así mismo este potencial es simétrico ante el cambio entre quarks idénticos. Dado que mover un solo quark afecta a todo el sistema, podemos decir que el potencial efectivamente es de varios cuerpos. A altas densidades este potencial también permite la existencia de grupos de singuletes de color de más de tres quarks.

Una vez obtenido el Hamiltoniano, proponemos la función de onda variacional, de la forma:

$$\psi_\lambda(x) = e^{-\lambda V(x)} \Psi_{FG}(x) \quad (3.7)$$

donde  $\lambda$  es el parámetro varacional,  $V$  es nuestro potencial ya definido,  $e^{-\lambda V(x)}$  es la función de Jastrow y  $\Psi_{FG}(x)$  es la función de onda de un gas de Fermi. La elección de esta función de onda es motivada por QCD que nos dice que a bajas densidades, cuando la separación promedio entre quarks es mayor que la escala de confinamiento, los quarks han de juntarse en singuletes de color para formar hadrones. Por lo que en el régimen de bajas densidades, el potencial entre quarks del mismo hadrón será grande; pero, como la interacción satura en cada grupo de quarks, la interacción entre hadrones será poca, entonces el sistema se puede describir como un gas de hadrones con poca interacción. Es el término exponencial en la función de onda variacional el que se hace responsable de inducir correlaciones entre los grupos de quarks. En contraste, a altas densidades, la distancia entre quarks es pequeña anulando los efectos del potencial y el término dominante es la función de un gas de Fermi, en acuerdo con la libertad asintótica. Como veremos mas adelante, el parámetro

$\lambda$  evoluciona de un valor grande en bajas densidades a un valor cero en altas densidades, cuando sólo queda la correlación entre quarks inducidos por el principio de exclusión de Pauli.

• A continuación calcularemos el valor del parámetro  $\lambda$  en el límite de bajas densidades, donde podemos considerar un nucleón como un sistema no relativista de tres quarks de masa  $m$  (por ejemplo un protón formado por quarks  $u, u, d$ ) interaccionando vía un potencial armónico con constante  $k$  con Hamiltoniano:

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{P}_i^2}{2m} + \sum_{i<j=1}^3 \frac{1}{2} k (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 \quad (3.8)$$

Introduciendo una coordenada asociada al centro de masas ( $R_{cm}$ ) y dos coordenadas relativas ( $\xi_1, \xi_2$ ) podemos escribir el Hamiltoniano como dos osciladores no acoplados a partir del cual, al calcular la función de onda para dicho Hamiltoniano, podemos encontrar el valor de parámetro variacional de la función de onda. A continuación se llevará acabo el cálculo para llegar a dicho valor. Primero presentemos el Hamiltoniano con nuevas variables:

$$H = \frac{P_{cm}^2}{6m} + \left( \frac{P_1^2}{2m} + \frac{3}{2} k \xi_1^2 \right) + \left( \frac{P_2^2}{2m} + \frac{3}{2} k \xi_2^2 \right) \quad (3.9)$$

donde:

$$R_{cm} = \frac{1}{3} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) \quad (3.10)$$

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (3.11)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_3) \quad (3.12)$$

y

$$k = \frac{\omega^2 m}{3}. \quad (3.13)$$

Sabemos que un oscilador de la forma:  $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$  tiene como solución:

$$\Psi_x(n) = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \right) \quad (3.14)$$

donde  $H_n$  son los polinomios de Hermite. Dado que la solución de una suma de osciladores es el producto de las soluciones independientes, en el estado base donde  $H_0 = 1$  la función de onda del Hamiltoniano (3.9) es:

$$\Psi_0(\xi_1, \xi_2) = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} e^{-\frac{3}{2} \frac{k}{\hbar\omega} (\xi_1 + \xi_2)}. \quad (3.15)$$

Con  $b = (3km)^{-1/4}$  y el potencial  $v(\xi_1, \xi_2)$  podemos escribir la función de onda anterior de la forma:

$$\Psi_0(\xi_1, \xi_2) = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} e^{-\frac{v(\xi_1, \xi_2)}{3kb^2}}. \quad (3.16)$$

Esta expresión sugiere que en el límite de bajas densidades, la función de onda (3.7) es exacta con el parámetro  $\lambda$  dado por:

$$\lambda = \frac{1}{3kb^2} \quad (3.17)$$

En el sistema de unidades donde  $k = m = 1$ , tenemos que  $\lambda \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$

• Para el límite de altas densidades el sistema es descrito mediante una función de onda de un gas de Fermi lo que se representa con  $\lambda \rightarrow 0$ , los resultados anteriores de  $\lambda$  muestran que evoluciona de un valor grande en bajas densidades a un valor cero a altas densidades.

Cabe aquí calcular la densidad de transición de sólo tener quarks  $u$  y  $d$  a tener también quarks  $s$ . Para que se de esta transición, requerimos que el potencial químico para los quarks ligeros ( $u$  y  $d$ ) con masa  $m$  sea igual a la masa del quark  $s$ ,  $M$ , es decir:

$$m + \frac{k_{Fc}^2}{2m} = M \quad (3.18)$$

lo que nos da:

$$k_{Fc} = \sqrt{2m(M - m)} = 30.82MeV \quad (3.19)$$

Considerando masas constituyentes  $m = 300MeV$  y  $M = 480MeV$ , la densidad de transición corresponde a:

$$\rho_c = \frac{k_{Fc}^3}{\pi^2} = 0.468fm^{-3} \quad (3.20)$$

### 3.1.2. Simulación Monte Carlo

La naturaleza variacional de la simulación sugiere que el valor esperado del Hamiltoniano debe de ser minimizado con respecto del parámetro variacional  $\lambda$  esto es:

$$\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{donde} \quad E(\lambda) = \langle \Psi_\lambda | H | \Psi_\lambda \rangle. \quad (3.21)$$

Dada la estructura de la función de onda, el valor esperado de la energía cinética puede simplificarse mediante una integración por partes de la siguiente forma:

$$\langle \Psi_\lambda | T | \Psi_\lambda \rangle = T_{FG} + 2\lambda^2 \langle W \rangle_\lambda \quad (3.22)$$

donde  $T_{FG}$  es la energía cinética de un gas de Fermi ( $\lambda = 0$ ) y  $\langle W \rangle_\lambda$  refleja el aumento de la energía cinética del sistema relativo al gas de Fermi debido a las correlaciones debidas al agrupamiento. En base a la ecuación anterior podemos escribir el valor esperado de  $H$  como:

$$E(\lambda) = T_{FG} + 2\lambda^2 \langle W \rangle_\lambda + \langle V \rangle_\lambda \quad (3.23)$$

Los valores esperados de las funciones  $V$  y  $W$  serán calculados vía un método Monte Carlo llamado metrópolis. Este es un algoritmo basado en procesos de Markov que genera eventos de manera estocástica. En nuestro caso, estocásticamente se asigna una posición a cada partícula para obtener una función de onda de la forma:

$$\psi_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N). \quad (3.24)$$

Posteriormente, la  $i$ -ésima partícula se mueve un paso  $\delta$  y se pesa la probabilidad de esta nueva función de onda,  $\psi_t(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i + \delta, \dots, \mathbf{x}_N)$ . Para decidir si tomar o rechazar este paso se compara la probabilidad de  $\psi_i$  con la de  $\psi_t$  de la forma:

$$R = \frac{|\psi_t|^2}{|\psi_i|^2} \quad (3.25)$$

donde si  $R > 1$  se acepta el paso, si  $R < 1$  se genera un nuevo número aleatorio,  $A$ , tal que  $A \in [0, 1]$  si  $R > A$  se acepta el paso de lo contrario se rechaza. Este aumento de pasos se hace para las  $N$  posiciones  $M$  veces. A mayor  $M$ , se genera de mejor forma la curva de probabilidad de la función de onda. Así mismo podremos a partir de ello calcular un valor esperado de una función, digamos  $\langle V \rangle$ , que rigurosamente se define como una integral de  $3N$  dimensiones, como el promedio de evaluar la función (en este caso  $V$ ) en las posiciones aceptadas en el proceso de aumento de pasos, es decir:

$$\langle V_\lambda \rangle = \langle \psi_\lambda | V | \psi_\lambda \rangle = \int |\psi_\lambda|^2 V d^{3N} \mathbf{x} \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M V_m(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \quad (3.26)$$

De esta forma mediante el método de metrópolis podemos completar la ecuación (3.23), para diferentes valores de densidad  $\rho$ .

En el programa empleado para este fin se usaron un total de 64 partículas, a partir de las fracciones  $X$ ,  $Y$ ,  $\sigma$  y  $Ye$  calculadas en base al capítulo 2. Ante distintos valores de la densidad total de partículas  $\rho$ , el programa nos proporcionó, por cada  $\rho$ , varios valores de la energía por partícula  $E/N$  en función de  $\lambda$ . Mediante un ajuste a tercer orden de la energía en función de  $\lambda$  se obtuvo el valor óptimo de la energía por partícula, de la cual mediante las siguientes identidades, se obtuvo la densidad de energía y presión del sistema.

$$\epsilon = \frac{\text{Energía}}{\text{volumen}} = \frac{E}{N\rho} \quad (3.27)$$

$$p = -\frac{\partial E}{\partial \text{volumen}} = \rho^2 \frac{\partial E/N}{\partial \rho}. \quad (3.28)$$

De estos resultados obtendremos el parámetro  $\alpha$  (ver sección 2.4.1.) para determinar el radio y masa de las estrellas de quarks con efectos de interacción. Además, sustrayendo la contribución libre a la presión podemos obtener la evolución de la interacción en función de  $\epsilon$ .

## 3.2. Lattice QCD

Lattice QCD (LQCD) es un método de aproximación no perturbativo que estudia numéricamente la teoría de QCD. En este se reemplaza el espacio continuo  $x_\mu$ , por una discretización denominada lattice como lo muestra la figura 3.1, en ella cada "site", está separado por un espacio  $a$ , la longitud de la red es  $L$ , las líneas que los unen de manera adyacente son llamadas "links" por lo que el espacio en esta aproximación corresponde a:  $x_\mu = an_\mu$ . Así entre más pequeña sea  $a$ , más se acercará la descripción al caso continuo. Este parámetro es por lo tanto indicativo de la precisión de la simulación, típicamente estos tomarán valores de  $a \simeq 0.1 - 0.2 fm$  [5].

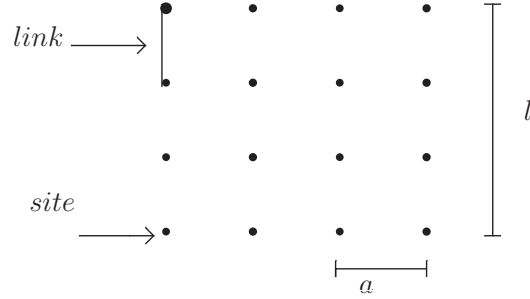


Figura 3.1: Lattice

El gran éxito de lattice es que es capaz de calcular integrales de trayectoria de Feynman incorporando el lagrangiano de QCD, siendo los sites y links, las regiones donde se evaluarán estas trayectorias.

Con métodos de física estadística, podemos relacionar las propiedades macroscópicas de un sistema con sus propiedades microscópicas, mediante la función de partición  $Z$ , que es función de la acción de QCD, y a partir de ella podemos obtener resultados de observables físicas ( $\hat{O}$ ) calculando el valor esperado del operador  $\hat{O}$ :

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{\int [dA_\mu d\bar{\psi} d\psi] O e^{i \int \zeta(A, \bar{\psi}, \psi) d^4x}}{\int [dA_\mu d\bar{\psi} d\psi] e^{i \int \zeta(A, \bar{\psi}, \psi) d^4x}} \quad (3.29)$$

donde:  $Z \equiv \int [dA_\mu d\bar{\psi} d\psi] e^{i \int \zeta(A, \bar{\psi}, \psi) d^4x}$ .

Las integrales de la ecuación (3.29), expresadas en la red, integran los campos en cada site y cada link del lattice. El método usado para hacer esta clase de integrales es el método de Monte Carlo; sin embargo, una complicación radica en el término  $e^{i \int \zeta(A, \bar{\psi}, \psi) d^4x}$ , que en general no es un número positivo real. Dejando a un lado a  $i$ , se trata de un término funcional correspondiente al campo de los quarks, esta parte puede ser resuelta analíticamente llevándonos a obtener un determinante de Fermi (FD) que se mantiene real sólo para potenciales químicos nulos. Ahora bien, para permitir la integración vía el método Monte Carlo, para el campo gluónico, la  $i$  en el exponente, es combinado con  $dt$ , para que la integral sea considerada imaginaria en el tiempo o bien, nos encontremos en un espacio Euclideo.

Para hacer el reemplazo del espacio Euclideo, al espacio discretizado por lattice, se debe de hacer manteniendo la invarianza de norma, para una vez obtenidos algún resultado, poder regresar al espacio continuo haciendo  $a \rightarrow 0$ . Para ellos se reemplaza la integral sobre el lagrangiano por una suma de sites [5].

Existen estudios de lattice en diferentes aproximaciones considerando 2 sabores, 2 sabores + tiempo (2+1) y 3 sabores de quarks a altas temperaturas de QCD. Como ejemplo de ello presentamos la figura 3.2

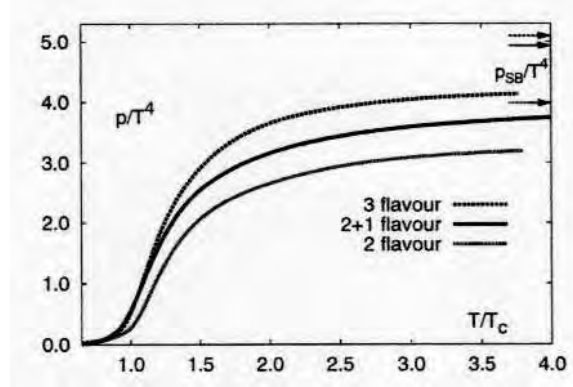


Figura 3.2:  $p/T^4$  en función de  $T$

En la figura 3.2 observamos los resultados obtenidos por LQCD, para 3, 2 y 2+1 sabores, de  $P/T^4$  en función de  $T_c$ . En los tres casos, observamos un comportamiento parecido, en  $T/T_c = 1$  observamos un gran aumento en la presión, el cual disminuye a medida que disminuye la cantidad de sabores. En el mismo gráfico arriba a la derecha se encuentran los valores esperados para un gas de quarks y gluones libres en la aproximación de Boltzmann. La conclusión de esta gráfica es que los resultados proporcionados por LQCD, ha madurado a un nivel en el cual nos permite ofrecer información directa y relevante de las propiedades físicas de la materia a altas temperaturas. Estos resultados muestran una fase de transición y que esta temperatura decrece significativamente de acuerdo al aumento de número de sabores.

Utilizando la analogía con el modelo de la bolsa de MIT, podemos separar la contribución de quarks libres e identificar el equivalente al parámetro de la bolsa  $B$  como función de la temperatura. Existe también el cálculo de  $\epsilon/T^4$  en función de  $T$ . (ver [5] capítulo 15)

Otro resultado que más adelante nos será de utilidad es la medida de la interacción definida como:  $\Delta(T) = (\epsilon - 3p)/T^4$ , la cual es nula en el caso de partículas ultrarrelativistas libres. Esta diferencia, es consecuencia de la incorporación de todos los efectos de interacción provenientes del lagrangiano de QCD utilizado (ver figura 3.3).

El comportamiento no ideal puede ser interpretado como un resultado de la infracción perturbativa quark gluón y la presencia de efectos de interacción.

Utilizaremos estos resultados para obtener la velocidad del sonido a lo largo del proceso de transición y estableceremos la evolución correspondiente a la esfera de expansión de los quarks.



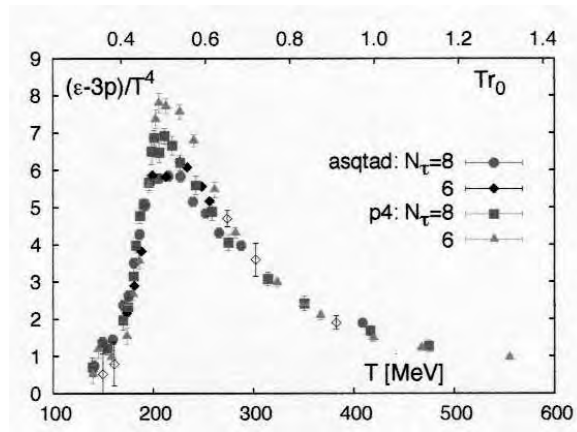


Figura 3.3:  $(\epsilon - 3p)/T^4$  en función de  $T$

## Capítulo 4

# Resultados y conclusiones

En los capítulos anteriores establecimos las propiedades termodinámicas de la materia fermiónica (quarks) o bosónica (piones y gluones) sin interacción. Los efectos de interacción fueron incorporados a través del modelo de string-flip para sistemas a  $T = 0$  y datos de LQCD para sistemas a  $T \neq 0$ . En este capítulo presentamos los resultados obtenidos por dichos métodos, se les comparará con el caso sin interacción y analizará, estableceremos sus implicaciones en las observables que hemos considerado y la evolución de la interacción fuerte.

### 4.1. $T = 0$ y estrellas de quarks

En el capítulo 2 se establecieron las condiciones de equilibrio para estrellas de quarks formadas por electrones y quarks  $u$ ,  $d$ ,  $s$ , obteniendo el sistema de ecuaciones (2.21), del cual encontramos la fracción presente de estas partículas en función de la densidad de energía, como se muestra en el gráfico 4.1.

En él se observa un comportamiento convergente de los cuatro tipos de partículas a altas densidades de energía. La presencia de electrones,  $e$ , desde bajas densidades de energía es despreciable. En cuanto a la presencia del quark  $u$  parece mantenerse constante mientras que, la presencia del quark  $d$  a baja  $\epsilon$  es dominante y la presencia del quark  $s$  es despreciable, ello debido a la condición de neutralidad y a que la masa del quark  $s$  es muy grande, inhibiendo así su presencia a bajas  $\epsilon$ . Con forme este último comienza a aumentar su presencia, el quark  $d$  comienza a disminuir, mostrando un comportamiento a altas densidades de energía, en donde las cantidades de quarks están en la misma proporción.

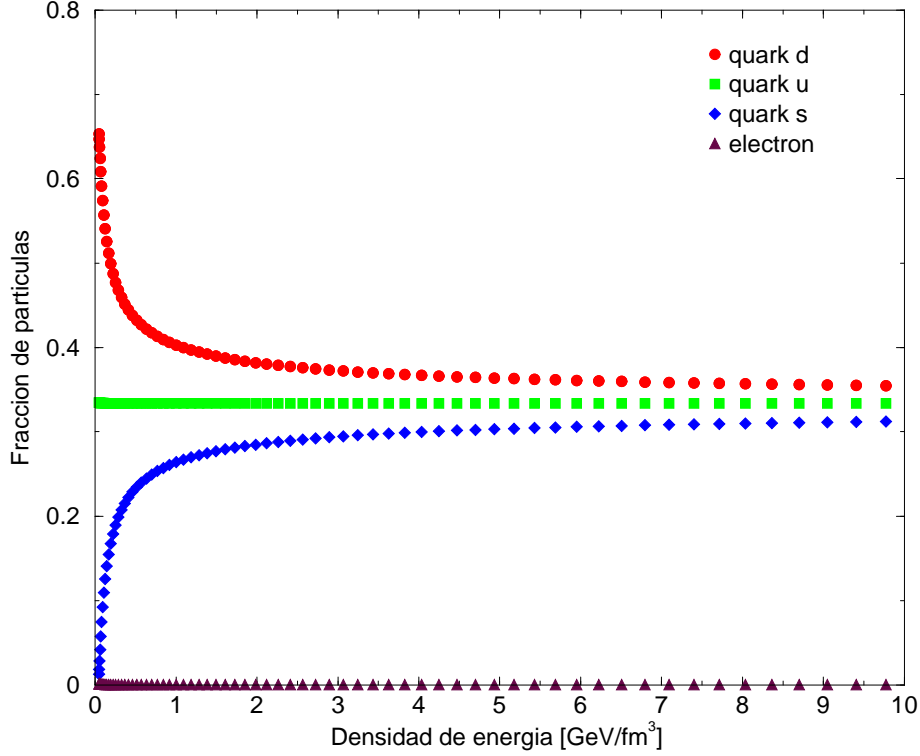


Figura 4.1: Comportamiento de las fracciones:  $X = n_d/N$ ,  $Y = n_u/N$ ,  $\sigma = n_s/N$  y  $Ye = n_e/N$  en función de la densidad de energía.

En base a esta relación de la fracción de cada partícula, podemos conocer la contribución de cada partícula a una densidad de energía total y presión de la estrella dada. Utilizadas estas cantidades en el modelo libre y en string-flip, podremos conocer la ecuación de estado de la estrella.

Usando la información de la fracciones de electrones y quarks  $u$ ,  $d$ ,  $s$ , en la simulación de string Flip, obtenemos que la densidad de energía, mínima para incluir quarks  $s$  es muy grande (ver ecuación (3.20)) correspondiendo con una región en donde los efectos de interacción son completamente despreciables. Es decir, de acuerdo al modelo de string-flip, una estrella constituida de electrones, quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$ , existe a muy altas densidades de energía, constituida por partículas **sin interacción**. La explicación de ello radica en que la densidad de energía necesaria para la aparición del quark  $s$ , es muy alta. Como el objetivo de esta tesis es analizar la interacción fuerte, vamos a considerar sólo estrellas con electrones quarks  $u$  y  $d$ . Ello implica volver a calcular las ecuaciones de estado considerando  $\sigma = 0$  en (2.21). Del cual podemos obtener el nuevo sistema de ecuaciones (4.1):

$$\begin{aligned}
 2Y - X - 3Ye &= 0 \\
 Y + X &= 1 \\
 \sqrt{X^{2/3} + \bar{m}^2} &= \sqrt{Y^{2/3} + \bar{m}^2} + \sqrt{3ye^{2/3}}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

De este sistema de ecuaciones podemos obtener un gráfico análogo a la figura 4.1, donde nuevamente el comportamiento de electrones es despreciable y en cuanto a los quarks, encontramos una proporción 1:2 entre  $u$  y  $d$  respectivamente. En base a los resultados anteriores, obtenemos el comportamiento para un sistema con quarks  $u d$  libres y con interacción, permitiéndonos presentar el siguiente gráfico:

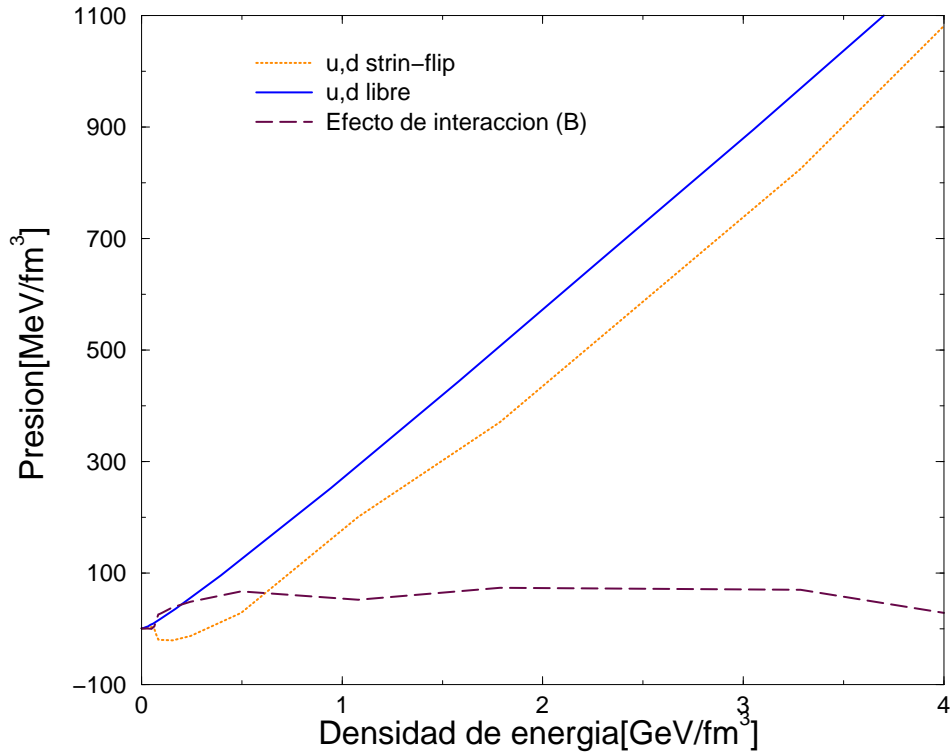


Figura 4.2: Presión vs densidad de energía dados para un modelo libre con quarks  $u d$  con valores de masa constituyente. Modelo string-flip con quarks  $u, d$  y efecto de interacción (parámetro  $B$ )

En la gráfica 4.2, se muestra la presión en función de la densidad de energía, en línea punteada para el modelo que incluye la interacción (string-flip), en línea continua para el modelo libre y la diferencia obtenida entre el modelo string flip y el modelo libre correspondiente a la línea segmentada nombrada  $B$ . En este gráfico se observa que, el modelo libre tiene un comportamiento monótono, mientras que el del modelo string-flip no lo es. Los modelos que incluyen al quark  $s$ , no aparecen en este gráfico debido a que requieren mayores densidades de energía. Los resultados obtenidos en éste, fueron obtenidos mediante la masa constituyente de los quarks, esto es, una masa que ya incluye algunos efectos de interacción.

Se observa que para una densidad de energía alrededor de 0 y 1  $GeV/fm^3$  se encuentra la mayor diferencia entre modelos, indicando así la región de transición de materia hadrónica a plas-

ma quark-gluón. Después de esta región, el modelo de string flip, muestra un comportamiento convergente con el modelo libre, por otro lado, para densidades de energía menores a la región de transición, se encuentra un comportamiento nuevamente convergente al caso libre; sin embargo, es nula la diferencia entre modelos en regiones cercanas a densidad cero, la diferencia de presión entre el modelo con interacción y modelo libre, de acuerdo con 2.36, es el análogo al parámetro  $B$  del modelo de la bolsa de MIT, el cual en nuestro caso como podemos observar no es constante.

Es decir, tenemos como principal resultado que el parámetro de la bolsa  $B$  es **función de la densidad de energía**. De acuerdo al modelo de string-flip, de la ecuación (3.7), a altas densidades el sistema está dominado por la función de onda de un gas de Fermi; sin embargo, observamos que la diferencia existe aun a altas densidades de energía alrededor de los  $4 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ , esto implica, que aun a estas densidades de energía existe la presencia de interacción fuerte. Para densidades de energía cercanas a cero, según el gráfico el parámetro  $B = 0$ , lo que parecía indicar que en una región totalmente hadrónica la interacción fuerte es cero, algo que se contradice con la introducción de la tesis donde se dice que los quarks se mantienen unidos para formar hadrones gracias a la existencia de la interacción fuerte. Por lo que la interpretación correcta de este resultado requiere recordar que a bajas densidades de energía la función de onda del modelo string-flip (3.7), está dominada por el término de exponencial y no la función de onda de un gas de Fermi, es decir, en esta región debemos comparar el modelo string flip, con la parte variacional de (3.7). Físicamente la presión corresponde a la presión de los quarks en el sistema, a altas densidades de energías es correcto asociarlo con un gas de Fermi; sin embargo, a bajas densidades de energía la presión debe de asociarse a los hadrones, es decir, al observar en el gráfico  $P = 0$ , para el modelo string-flip, a densidad de energía cero, implica que la presión considerada es de un sistema en donde los hadrones están muy separados y por ende la presión entre quarks de todo el sistema tiende a cero.

Una vez analizado el gráfico anterior y decidido continuar nuestro estudio con sistemas formados únicamente por quarks  $u$ ,  $d$ ; obtenida la densidad de energía y presión podemos presentar el parámetro  $\alpha = \epsilon/p$  en función de la densidad de energía:

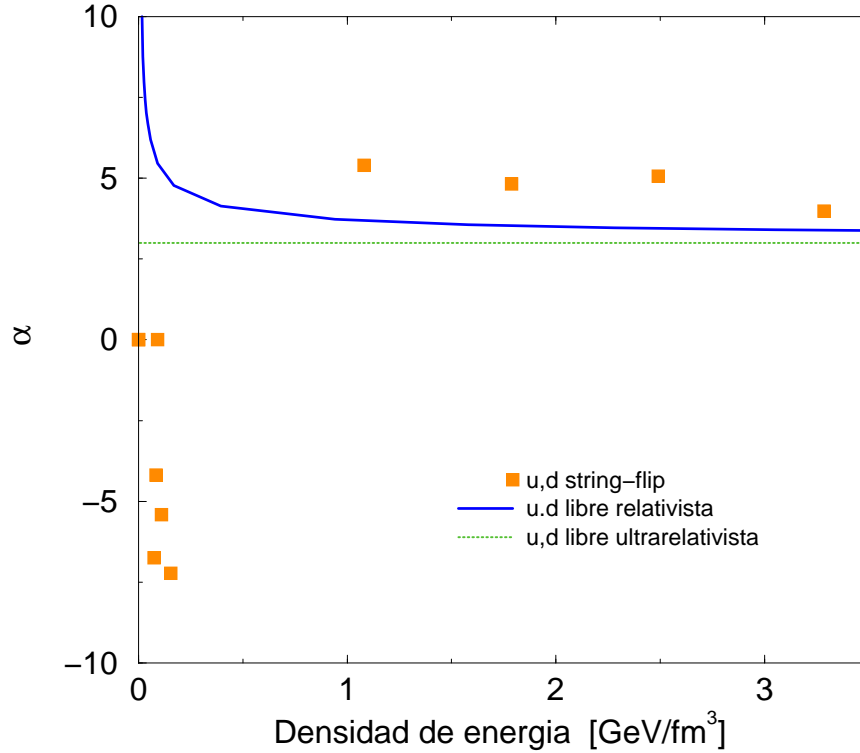


Figura 4.3:  $\alpha$  vs densidad de energía para un modelo: string flip, libre con quarks relativistas y ultrarrelativistas, con quarks  $u$   $d$ .

En la figura 4.3 se gráfica el parámetro  $\alpha = \epsilon/p$  en función de la densidad de energía para el modelo string-flip (cuadrados), el libre relativista (línea continua) y el libre ultrarrelativista (línea punteada) todos con quarks  $u$  y  $d$ . El modelo ultrarrelativista la ecuación de estado cumple con (2.30), donde se asume que la masa de las partículas es cero, en éste el comportamiento de  $\alpha = 3$  es constante; el modelo relativista muestra un comportamiento que converge asintóticamente al modelo ultrarrelativista; el modelo string flip muestra un comportamiento completamente diferente al modelo relativista a densidades cercanas al cero, la transición, mientras que a altas densidades de energía también muestra convergencia al modelo ultrarrelativista.

El comportamiento mostrado por el modelo string flip muestra que la descripción vía el modelo libre, falla para densidades de energía cercanas a cero, esto corresponde a la región hadrónica. Por otro lado, a partir de  $1 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ , después de la transición, el modelo con interacción comienza a parecerse al modelo libre ultrarrelativista, al igual que el modelo relativista libre a densidades altas.

Para estimar qué tan importantes son las modificaciones del modelo con interacción respecto al caso libre, utilizamos la ecuación de T.O.V. (capítulo 2) con el fin de determinar el radio y masa de la estrella en el modelo libre así como para el modelo string-flip ambos con quarks  $u$   $d$ :

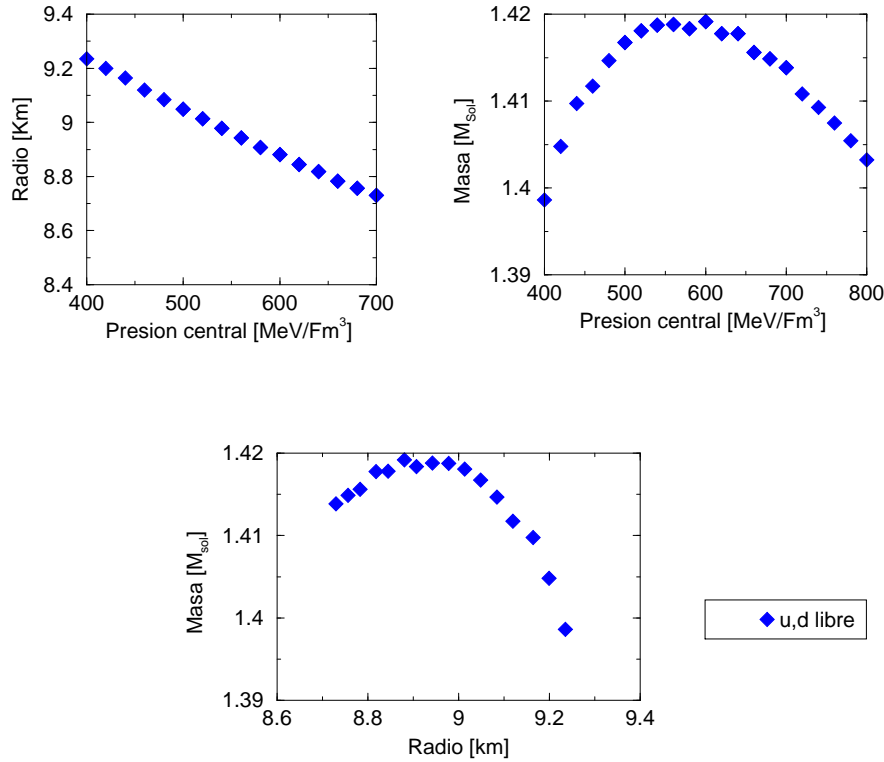


Figura 4.4: Radio en función de la presión central, masa en función de la presión central masa en función del radio. Para el modelo libre con quarks  $u$ ,  $d$

En las figuras 4.4 y 4.5, presentamos los resultados para las observables de las estrellas de quarks en el modelo libre y string-flip. En cada una de ellas incluimos, arriba a la izquierda, el radio en función de la presión central, arriba a la derecha la masa en función de la presión central y abajo en el centro la masa en función del radio. En ambas figuras se observa un comportamiento similar, es decir, la forma del comportamiento en el caso libre es el mismo que el del caso string flip; sin embargo, fijándonos en los valores. El radio de las estrellas según string flip, es menor que el radio del modelo libre, la presión central de string flip, es mayor a la del modelo libre, y finalmente la masa de string flip es menor a la del modelo libre, las diferencias, radican en que la inclusión de la interacción en el modelo string flip, causa un efecto confinante, induciendo a observar estrellas mas chicas y con mayor presión central que las estrellas descritas por el modelo libre.

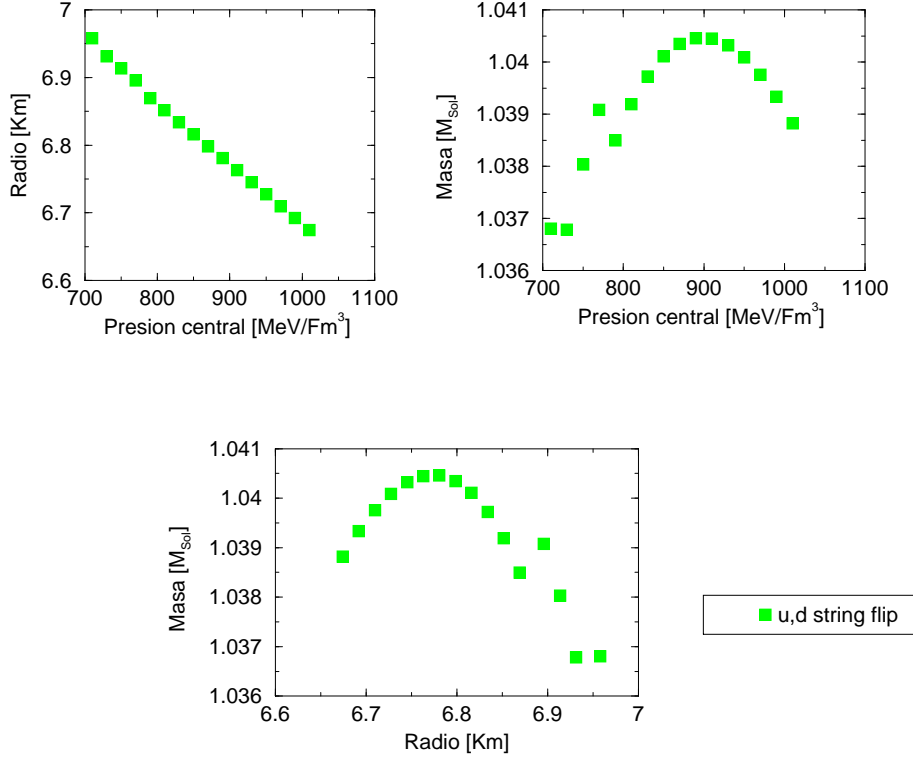


Figura 4.5: Radio en función de la presión central, masa en función de la presión central masa en función del radio. Para el modelo string-flip con quarks  $u$ ,  $d$

## 4.2. $T \neq 0$ y colisiones ultrarrelativistas

En el capítulo 2 calculamos la presión en función de la temperatura para un sistema de hadrones y para un plasma quark-gluón, en base al modelo de MIT con tres sabores, unimos estas gráficas, correspondiendo la región de menor temperatura a la presión de hadrones y la de mayor temperatura a la presión del plasma quark-gluón. Llamamos temperatura crítica ( $T_c$ ) a la temperatura donde ambas presiones se igualan. Por otro lado, en el capítulo 3 calculamos la presión en función de la temperatura mediante los resultados proporcionados por lattice [4], [10] a partir de  $(\epsilon - 3p)/T^4$  y de  $p/T^4$ , respectivamente. Dado que vía el modelo de MIT  $T_c=150.09$  MeV [8] y mediante los calculos de Lattice  $T_c=202$  MeV [10], con el fin de hacer una comparación correcta entre estos modelos utilizaremos estos resultados normalizados a su correspondiente  $T_c$ . De esta forma obtenemos el gráfico 4.6

Para ambos modelos, la región de transición está en  $T/T_c = 1$ , región en la cual se muestra una mayor diferencia entre modelos y a partir de la cual el modelo de MIT comienza a acercarse a los resultados proporcionados por Lattice. De acuerdo con 2.36:

$$p_T = p_{libre} - B$$



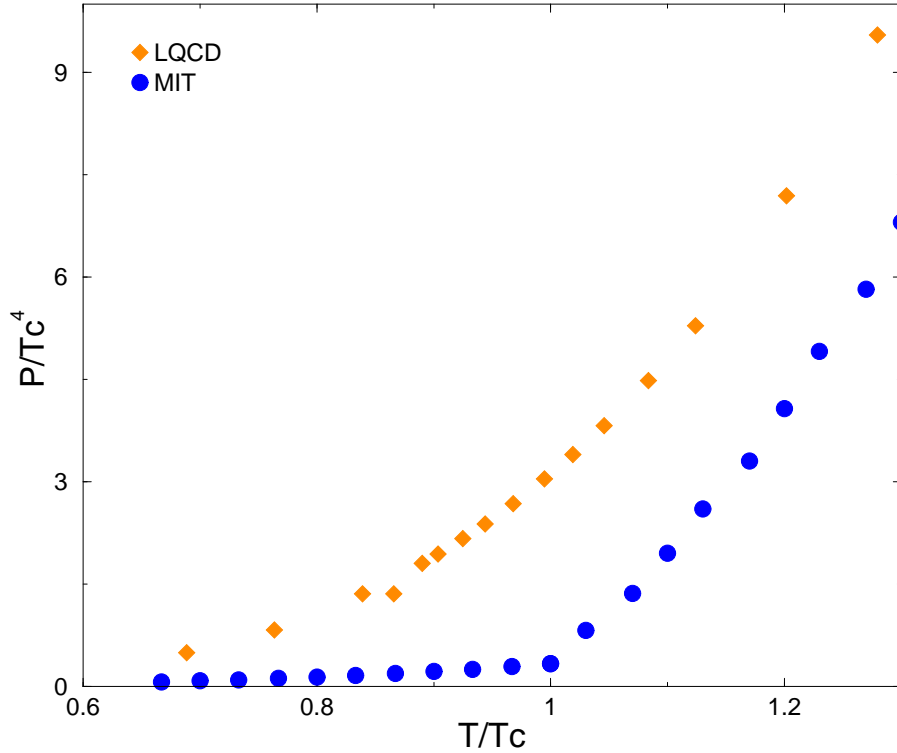


Figura 4.6:  $P/T_c^4$  en función de la temperatura, para datos obtenidos de LQCD y datos obtenidos del modelo de MIT

De la figura 4.6, se observa que en la región cercana a la temperatura de transición, el parámetro  $B$  debe de haber asumido una mayor interacción que la calculada por lattice. Mientras que a temperaturas mayores que  $T_c$ , observamos que ambos modelos parecen converger implicando que el parámetro  $B$  ajusta en esta región a los resultados de lattice, es decir, el parámetro  $B$  es función de la temperatura y no es un valor constante como el modelo de MIT propone (para sistemas donde  $T \neq 0$ ). Incluso, esta crece con la temperatura.

Sin embargo, dado que la función  $p/T^4$  diverge para  $T/T_c \rightarrow \infty$ , donde creemos que los modelos son equivalentes, con el fin de estudiar en más detalle el comportamiento de  $B$ , es de utilidad estudiar el comportamiento de la presión dividida por  $T^4$ , como se muestra en la figura 4.7.

En la figura 4.7, se muestra  $p/T^4$  en función de  $T/T_c$  obtenida vía el modelo de MIT y el de LQCD. En el caso del modelo de MIT, nuevamente observamos en la región de transición un cambio abrupto de  $p/T^4$ , debido a la simple igualación de presión existente en un sistema de hadrones y un sistema de plasma quark-gluón. Mientras que el cambio en el modelo de LQCD, es más suave. La mayor diferencia en ambos modelos reincide en la región de transición, se observa

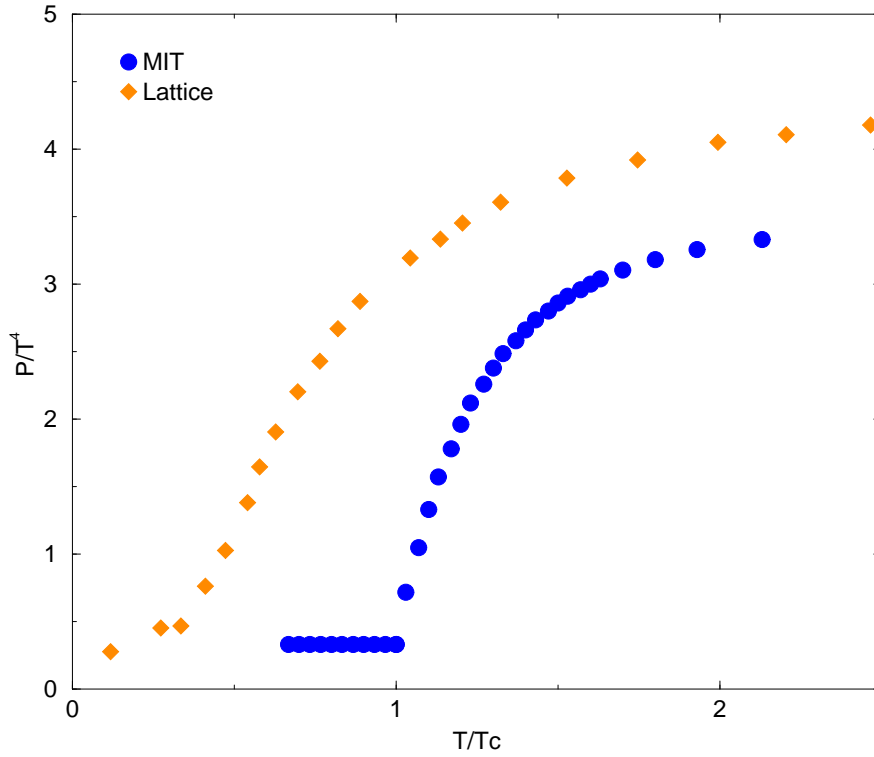


Figura 4.7:  $P/T^4$  en función de  $T/T_c$ , para datos obtenidos de Lattice y datos obtenidos del modelo de MIT

que sigue habiendo una diferencia de  $p/T^4$  entre ambos modelos, que aunque a altas temperaturas parece converger a un valor constante, la interacción excedente en el **parámetro  $B$  depende de la temperatura** y por ende el valor de  $B$  no es absoluto, en otras palabras el parámetro  $B$ , no es constante, para sistemas donde  $T \neq 0$  es función de la temperatura.

Continuando con el análisis de los efectos incluidos por la interacción en las propiedades termodinámicas, a continuación se presenta la velocidad del sonido en comparación con un modelo de quarks libres ultrarrelativistas:

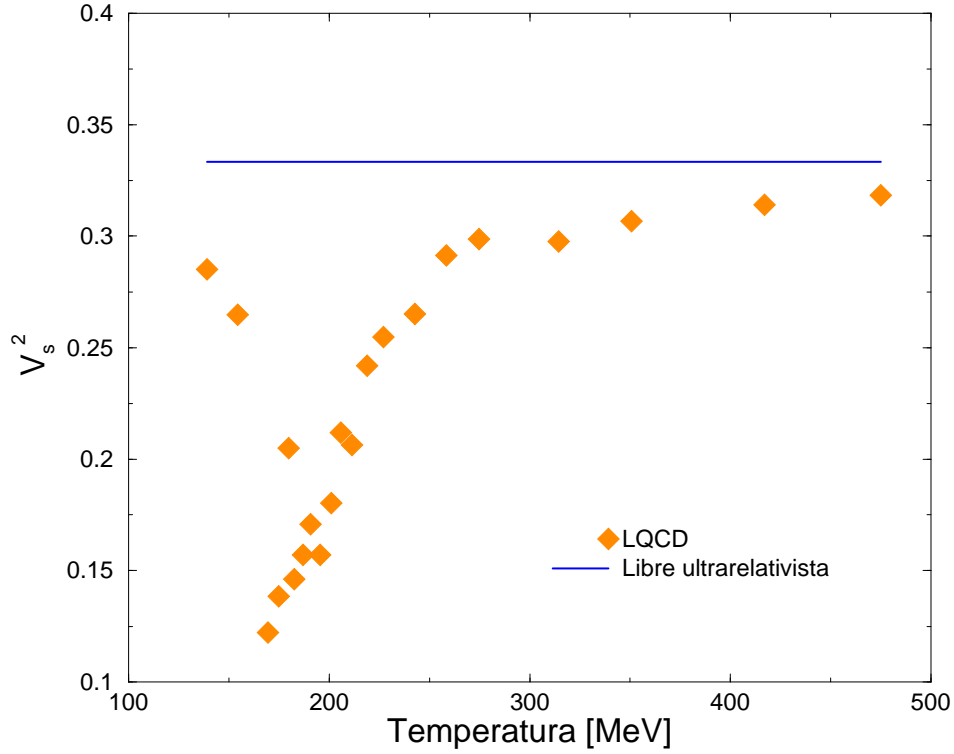


Figura 4.8:  $v_s^2$  en función de la Temperatura, para datos obtenidos de Lattice y datos obtenidos de un modelo libre ultrarrelativista

En la gráfica 4.8 se muestra  $v_s^2$  en función de la temperatura para un modelo libre ultrarrelativista y para datos obtenidos para tres sabores. El modelo libre al ser ultrarrelativista cumple con  $v_s^2 = 1/3$ , ver (2.30), por ende, presenta un comportamiento monótono. Mientras que los datos obtenidos mediante lattice presentan tres regiones: la región hadrónica a bajas temperaturas, la región de transición alrededor de  $T_c=202$  MeV y la región del plasma quark gluón a altas temperaturas. Tanto en la región hadrónica como en la de plasma quark gluón se observa un comportamiento que tiende a parecerse al del modelo libre, es decir, comenzamos a tener un gas de hadrones libres y un gas de quarks y gluones libres. Ahora bien, en la región de transición, coexisten ambas fases, afectando drásticamente el comportamiento de la velocidad del sonido.

La obtención del gráfico anterior para la parte de LQCD, requirió que una vez obtenidas la presión y densidad de energía para diferentes valores de la temperatura (a partir de [4]), fueran asociados los valores correspondientes de presión y densidad de energía, para graficarlos, intercalarlos y obtener una función mediante la cual pudiésemos calcular la derivada parcial:  $v_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \epsilon}$ ,

las fluctuaciones observadas en la región de transición, están dominados por las variaciones en los cálculos de LQCD amplificados por el proceso de derivación numérica.

Ahora bien, análogo a la sección anterior, podemos comparar el modelo con interacción y sin interacción, asociando la diferencia entre modelos al parámetro  $B$ ; sin embargo, en este caso podemos hacer otra estimación de la interacción correspondiente a  $B$ , considerando la figura: 3.3, encontramos que:

$$\epsilon_T - 3p_T = (\epsilon_{libre} + B) - 3(p_{libre}) = 4B \quad (4.2)$$

Por lo que en la gráfica 4.9 mostramos ambas estimaciones de la interacción.

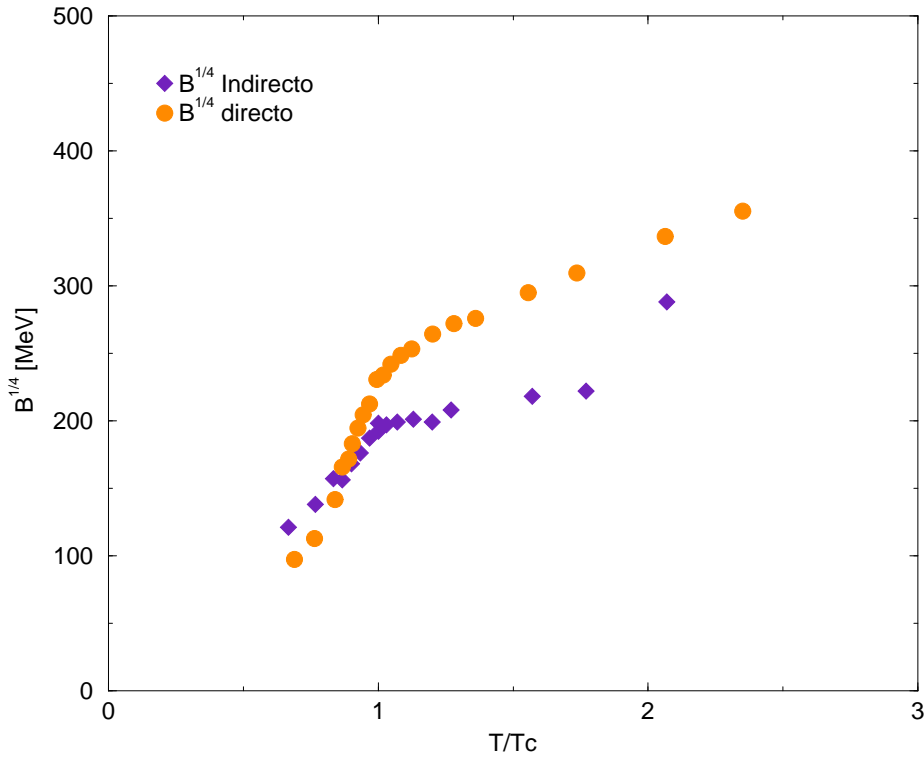


Figura 4.9:  $B^{1/4}$  en función de  $T/T_c$ , para datos obtenidos a partir de  $\epsilon - 3P$  de Lattice y datos obtenidos de la diferencia entre el modelo de MIT y Lattice.

En la figura 4.9 mostramos el parámetro  $B^{1/4}$  en función de  $T/T_c$  obtenido mediante los resultados de lattice  $(\epsilon - 3p)/4 = B$  (lattice directo) y mediante la ecuación (2.36) donde  $p_T$  corresponde a la presión calculada por lattice (lattice indirecto). En la región menor a  $T/T_c = 1$ ,  $B$  corresponde a la presión del gas de hadrones, mientras que en la región mayor a  $T/T_c = 1$ ,  $B$  está asociada a la presión de la bolsa.

Se observa en ambas funciones aumentan conforme lo hace  $T$ ; sin embargo, este aumento es

mayor en la región de transición, como hemos visto en los gráficos de presión, ésta depende de  $T^4$  debido a que la presión no es un reflejo exclusivo de la interacción fuerte; sin embargo, si dividimos las expresiones para  $B$ , podemos observar que en la región de transición el aumento sigue siendo abrupto, y con forma aumenta  $T$  éste tiende a disminuir. Aun cuando ambos métodos buscan cuantificar la interacción, y ambas funciones tienen un comportamiento parecido, observamos que el parámetro  $B^{1/4}$  depende del tratamiento de los datos, por ejemplo: para la parte de lattice inducido, el tratamiento numérico es sensible a la cantidad de datos. Independientemente del desfase entre funciones, ambas muestran un rango de valores consistentes con los encontrados en la bibliografía, por ejemplo [8], excepto que ahora sabemos que el valor de  $B$  depende de  $T$ .

Finalmente, mediante la ecuación (2.44) podemos utilizar los resultados antes obtenidos para calcular la evolución del proceso de una colisión ultrarrelativista, donde llamaremos  $R_0$  al tamaño del radio del plasma quark-gluón a partir del cual inicia la expansión y  $T_0$  a la temperatura a la cual inicia la expansión. Dado que  $T_c$  es la temperatura a la cual se forma el plasma quark-gluón,  $T_c < T_0$ .

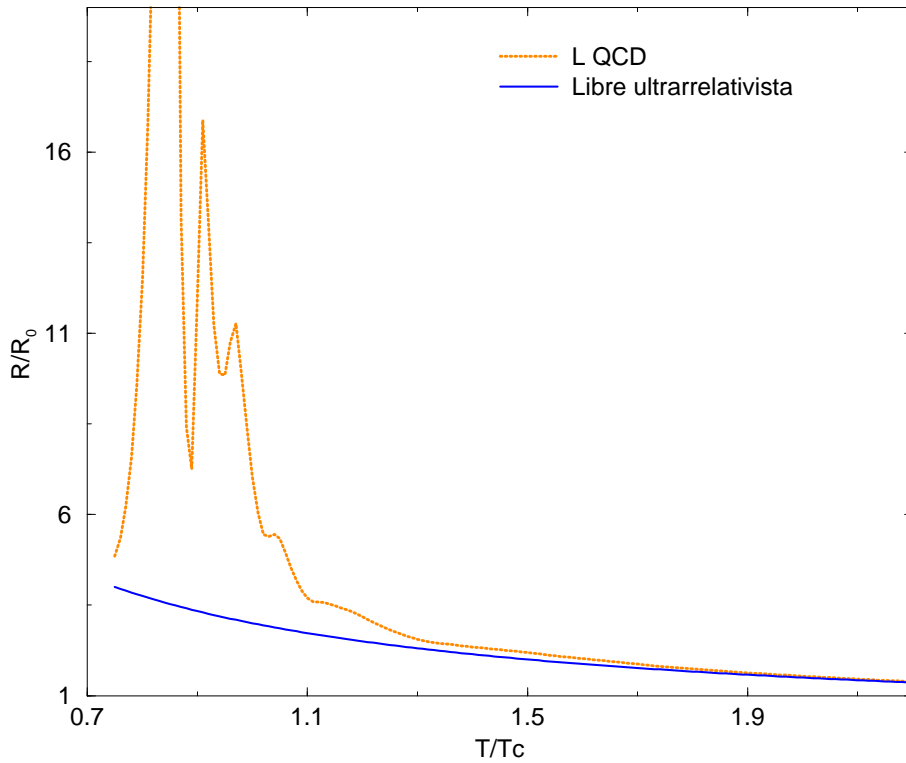


Figura 4.10: Dinámica de la expansión  $R/R_0$  en función de la temperatura, para una velocidad del sonido obtenida a partir de datos de Lattice comparada con la dinámica obtenida para un sistema ultrarrelativista

La gráfica 4.10 muestra  $R/R_0$  en función de la Temperatura, ver (2.44), para un modelo ultra-

rrelativista (línea continua) y para datos obtenidos mediante LQCD (línea segmentada), en ambos casos se incluyeron tres sabores. Con  $T_0 = 3T_c$ .

El modelo ultrarrelativista, muestra una expansión monótona creciente, a medida que la temperatura disminuye, el modelo de LQCD muestra en la región de alta temperatura, un comportamiento casi idéntico al modelo ultrarrelativista; sin embargo, alrededor de  $T_c$  el comportamiento esta compuesto por expansiones y contracciones que se alejan del comportamiento ultrarrelativista, debido a las fluctuaciones que presenta en esta misma región la velocidad del sonido.

### 4.3. Conclusiones

En este trabajo estudiamos los efectos de interacción fuerte en dos aproximaciones, a  $T = 0$  y  $T \neq 0$ . En ambos límites se compararon las variables termodinámicas de un modelo libre con un modelo que sí considera la interacción. Esta comparación, nos permitió obtener de manera sistemática la evolución de la interacción (parámetro  $B$ ) como función de  $\epsilon$  para el límite  $T = 0$  y como función de  $T$  para el límite  $T \neq 0$ .

En el límite  $T = 0$ , el modelo con interacción empleado fue el de string-flip, un modelo basado en un potencial de muchos cuerpos. En ambos casos (libre y con interacción) se consideró un sistema de fermiones con condiciones de equilibrio. Para estudiar sus implicaciones con observables astrofísicas, se consideraron estrellas de quarks y mediante la ecuación T. O. V. calculamos el radio y masa de estas estrellas, para ambos modelos. Encontramos que las observables de las estrellas calculadas mediante el modelo libre, son mayores que las del modelo de string-flip, debido al efecto confinante considerado por este último.

En el límite  $T \neq 0$ , el modelo con interacción empleado fue LQCD, mientras que el modelo libre, consistió a  $T < T_c$  de un sistema de piones libres y a  $T > T_c$  un sistema de quarks y gluones libres, en este modelo calculamos la región de transición dada por  $Tc(\mu = 0)$  y  $Tc(\mu)$ . Ambos modelos consideraron 3 sabores de quarks. Se estudió la evolución de la expansión de una colisión de iones ultrarrelativistas y se observó que los efectos de la interacción fuerte generan para  $T$  alrededor de  $T_c$ , contracciones y expansiones.

Mostramos que nuestros cálculos de la evolución de la interacción, parametrizada por el parámetro  $B(\epsilon)$  pueden ser de utilidad en el ámbito astrofísico; sin embargo, la forma de incluir las interacciones en el modelo de string-flip es muy simple, por lo que la región de hadrones no está bien descrita. Esto nos impidió estimar las propiedades de una estrella con contenido hadrónico. No tenemos confirmada la existencia de estrellas de quarks, por lo que valdría la pena hacer en el futuro un estudio análogo para estrellas con ambas fases.

En el caso de la determinación de  $B(T)$ , la cual es relevante en las colisiones ultrarrelativistas. Es importante notar que la estimación directa de las interacciones, proporcionadas por LQCD ( $(\epsilon - 3p/T^4)$  y las obtenidas directamente de la definición, a través de la presión, muestran comportamientos similares; pero, de ninguna manera son iguales. Esto lo podemos atribuir a la forma en que fueron obtenidos los últimos, las cuales dependen fuertemente de las condiciones numéricas (derivadas). Estas pueden amplificar pequeños errores producidos en la obtención de los datos de LQCD a partir de los gráficos publicados en la literatura. Efectos adicionales producidos por las masas de los quarks tampoco fueron considerados.

Independientemente de los resultados proporcionados por distintos grupos, las características de la transición obtenidas en LQCD son consistentes, y con ello podemos entender la forma en que ocurre la transición; sin embargo, es de notar que a altas temperaturas estos no convergen al valor esperado en el límite descrito por la estadística de Maxwell-Boltzmann.

En este trabajo pretendimos sólo dar una visión superficial de la forma en que LQCD funciona y utilizar los resultados publicados en la literatura para entender algunos aspectos relevantes. Un cálculo explícito de LQCD está fuera de los alcances de esta tesis.

# Bibliografía

- [1] Francis Halzen, Alan D. Martin Colaborador Alan D. Martin, Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics 396 Wiley, 1984 (libro empleado en la elaboración del capítulo 1)
- [2] David Griffiths, Introduction to Elementary Particles, John Wiley Sons 470, 2008(libro empleado en la elaboración del capítulo 1)
- [3] C. Amsler, et al., Physics Letters B 667, 1(2008)
- [4] Christian Schmidt, QCD thermodynamics at zero and non-zero density, arXiv:0810.4024v1 [hep-lat] 22 oct 2008
- [5] Jean Letessier, Johann Rafelski, Hadrons and quark-gluon plasma, Cambridge University Press, 2002
- [6] T. Matsui, Quest for the Quark-Gluon Plasma, arXiv:nucl-th/030509v1 30May2003
- [7] Norman K. Glendenning, Compact stars: nuclear physics, particle physics, and general relativity, Springer 2000
- [8] John B. Kogut, Mikhail A. Stephanov, The phases of quantum chromodynamics from confinement to extreme Environments, Cambridge University Press, 2004
- [9] G. Toledo and J. Piekarewicz, Modeling the strangeness content of hadronic matter, Physical Review C, volume 65,045208 (2002)
- [10] F. Karsh, E Laermann, A Peikert, The pressure in 2, 2+1 and 3 flavour QCD, Physics Letters B 478 (13 april 2000) 447-455
- [11] Alexander L. Fetter, John Dirk Walecka, Quantum Theory of Many-Particle Systems, Courier Dover Publications, 2003 (libro empleado en el la elaboración del capítulo 2)
- [12] David E. Miller, Lattice QCD calculations for the physical equation of state, Physics Reports 443 (2007) 55-96 (artículo empleado en la elaboración del capítulo 3)
- [13] Frithjof Karsch, Properties of the quark gluon plasma: a lattice perspective, Nuclear Physics A 783 (2007) 13c-22c (artículo en empleado la elaboración del capítulo 3)
- [14] A. Peshier, B kämpfer, and G. Soff, Equation of state of deconfined matter at finite chemical potential in a quasiparticle description, Physical Review C, Volume 61, 045203, (2000) (artículo empleado en la elaboración del capítulo 3)