



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**NÚCLEO POR TRAYECTORIAS DIRIGIDAS
MONOCROMÁTICAS EN TORNEOS
BIPARTITOS.**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**M A T E M Á T I C A
P R E S E N T A:**

CAROLINA HERNÁNDEZ VÁZQUEZ



DIRECTOR DE TESIS:
MAT. LAURA PASTRANA RAMÍREZ
(2009)



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado.

1. Datos del alumno.

Hernández Vázquez Carolina
56089047
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
097242152

2. Datos del asesor.

Mat. Laura Pastrana Ramírez

3. Datos sinodal 1.

Dra. Hortensia Galeana Sánchez

4. Datos sinodal 2.

Mat. María del Rocío Sánchez López

5. Datos sinodal 3.

Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía

6. Datos sinodal 4.

Mat. Ada Cintia Rosas Tavera

7. Datos de la tesis.

Núcleo por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas en Torneos Bipartitos.
144p.
2009.

Índice general

Introducción.	2
1. Conceptos Básicos.	
1.1. Digráficas.	6
2. Núcleos y Núcleos por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas.	
2.1. Núcleos.	22
2.2. Seminúcleos.	38
2.3. Cuasinúcleos.	46
2.4. Núcleos por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas.	50
3. Torneos Bipartitos y Torneos Bipartitos m-coloreados.	
3.1. Torneos Bipartitos.	60
3.2. Torneos Bipartitos m -coloreados con Ciclos de Longitud 4 Monocromáticos.	70
3.3. Otras Condiciones para la Existencia de Núcleos por Trayectorias Dirigidas en Torneos Bipartitos.....	82
4. Seminúcleo Módulo i por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas.	
4.1. Seminúcleo Módulo i por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas.	112
4.2. Núcleos por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas para Torneos Bipartitos	121
Conclusiones	141
Referencias	143

Introducción

En las Matemáticas existen una gran variedad de áreas, entre ellas encontramos la Teoría de las Digráficas, de la cual se desprende el tema de Núcleos por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas. En este trabajo presentamos algunos resultados acerca de este tema.

Comenzamos con algunas definiciones y algunos teoremas básicos de la Teoría de las Digráficas, definimos lo que es una digráfica y veremos ejemplos de trayectorias, ciclos, subdigráficas por mencionar algunos; que ayuden al lector a comprender de una manera fácil el tema. Posteriormente introduciremos los conceptos de núcleos, seminúcleos, cuasinúcleos y núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas.

El concepto de Núcleo introducido por V. Neumann y Morgenstern [9], juega un papel importante en la Teoría de las Digráficas ya que tiene muchas aplicaciones en la Teoría de Juegos, Teoría de Códigos, Lógica, Inteligencia Artificial, Teoría de Decisiones, etc. [2], [3], [6], [7], [8]. Un núcleo N en una digráfica D es un conjunto independiente (entre cualquier par de vértices $\{u, v\} \subseteq N$ no existen flechas) y un conjunto absorbente (para todo $v \in V(D) - N$ existe en D una flecha desde v hacia algún vértice de N).

En el capítulo 2 demostraremos que todas las digráficas simétricas, las digráficas transitivas y las digráficas sin ciclos dirigidos tienen núcleo. Trabajaremos con digráficas m -coloreadas, una digráfica D se dice que es m -coloreada si las flechas de D están coloreadas con m colores. Un conjunto N en una digráfica D m -coloreada es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas si para todo par de vértices $\{u, v\} \subseteq N$ no existen trayectorias dirigidas monocromáticas entre ellos y para todo $v \in V(D) - N$ existe una trayectoria dirigida monocromática que va de v hacia algún vértice de N .

El concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas es una generalización del concepto de núcleo, y fue introducido por H. Galeana Sánchez [4].

Existe una relación muy estrecha entre los conceptos de núcleos y núcleos por trayectorias monocromáticas y está dada por la cerradura transitiva de una digráfica m -coloreada, denotada por $C(D)$, y se define como sigue:

$$V(D) = V(C(D)) \text{ y}$$

$$F(D) = F(C(D)) \cup \{ \cup_{i=1}^m (u, v) \text{ de color } i / \text{ existe una } uv\text{-trayectoria dirigida monocromática de longitud mayor ó igual que 2 de color } i \text{ contenida en } D \}.$$

Demostraremos que D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas si y sólo si $C(D)$ tiene núcleo.

La existencia de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en digráficas m -coloreadas ha sido estudiada por Sauer, Sands y Woodrow [12], ellos probaron que cualquier digráfica 2-coloreada tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. En este trabajo estudiaremos a las digráficas m -coloreadas, con $m \geq 3$.

También, definiremos otro tipo de digráfica que tiene la propiedad de heredarle la existencia de núcleo a todas sus subdigráficas inducidas cuando ella misma posee núcleo. Una digráfica D es núcleo perfecta si toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo y ella misma tiene núcleo y las digráficas núcleo imperfectas críticas. Una digráfica D es núcleo imperfecta crítica si D no tiene núcleo, pero cualquier subdigráfica inducida propia de D tiene núcleo. Mostramos que toda digráfica no núcleo perfecta contiene una subdigráfica núcleo imperfecta crítica.

Podemos encontrar algunos resultados interesantes sobre núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en trabajos realizados por H. Galeana Sánchez-Rojas Monroy [5] y Berta Zavala [15].

Ya teniendo claro el concepto de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas pasamos a la parte medular de este trabajo: Núcleos por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas en Torneos Bipartitos. Un torneo bipartito es una digráfica D tal que:

- a) existe una bipartición $\{V_1, V_2\}$ de $V(D)$ tal que toda flecha de D tiene un extremo en V_1 y el otro en V_2 y;
- b) entre cualquier vértice de V_1 y cualquier vértice de V_2 existe una y sólo una flecha.

Más adelante en los capítulos 3 y 4, daremos condiciones suficientes para que los torneos bipartitos tengan núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas y presentamos algunas propiedades de éstos.

Capítulo 1

Conceptos Básicos.

Núcleos por Trayectorias Monocromáticas y Torneos Bipartitos en Digráficas es el objeto de estudio principal del presente trabajo. Para poder comprender estos temas es necesario introducir primero algunas definiciones y teoremas básicos de la Teoría de Digráficas que nos serán de gran utilidad para los siguientes capítulos.

Comenzaremos con la definición de digráfica, así mismo; veremos ejemplos de trayectorias, ciclos, subdigráficas, por mencionar algunos, y presentaremos cinco teoremas básicos que nos facilitarán la demostración de teoremas posteriores.

1.1. Digráficas.

Definición 1.1.1. Una Digráfica D es una pareja $(V(D), F(D))$, tal que $V(D)$ es un conjunto finito no vacío de elementos, llamados vértices, y $F(D)$ es un conjunto de parejas ordenadas de vértices distintos, llamadas flechas.

Decimos que el orden de una digráfica D es la cardinalidad del conjunto de los vértices de D y el tamaño de D es la cardinalidad del conjunto de las flechas de D .

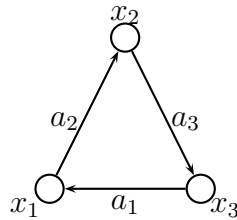


Figura 1.1

En la figura 1.1 se exhibe la representación geométrica de una digráfica $D = (V(D), F(D))$, donde $V(D) = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $F(D) = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Definición 1.1.2. Si $f = (u, v)$ es una flecha de D , con u y v vértices de D , decimos que u y v son los extremos de f ; u el extremo inicial de f y v el extremo final.

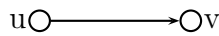


Figura 1.2

Definición 1.1.3. Si $(u, v) \in F(D)$, entonces la flecha es dirigida de u a v y es denotada por $u \rightarrow v$. El vértice v es llamado sucesor de u y u es llamado predecesor de v .

Si el inverso (v, u) de la flecha (u, v) de D también está presente en D , entonces diremos que (u, v) es una flecha simétrica.

Definición 1.1.4. Una digráfica D es simétrica si todas sus flechas son simétricas.

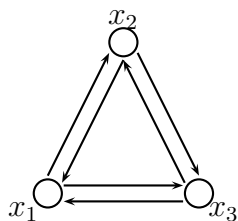


Figura 1.3

En la figura 1.3 observamos una digráfica simétrica.

Definición 1.1.5. Si D es una digráfica y $f = (u, v)$ es una flecha de D , decimos que f es una flecha asimétrica si (v, u) no es una flecha de D .

Definición 1.1.6. Decimos que una digráfica D es una digráfica completa si entre cualquier par de vértices distintos de D existe alguna flecha.

Definición 1.1.7. Un torneo es una digráfica completa asimétrica.

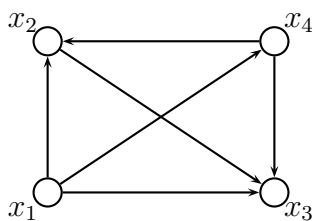


Figura 1.4

En la figura 1.4 tenemos el ejemplo de un torneo.

Definición 1.1.8. El conjunto $\Gamma^+(x) = \{y \in V(D) \mid (x, y) \in F(D)\}$ es llamado la Vecindad Exterior de x .

El grado exterior o exgrado de x , denotado por $\delta_D^+(x)$, es el número de flechas que salen de x , es decir, $\delta_D^+(x) = |\Gamma^+(x)|$.

Definición 1.1.9. El conjunto $\Gamma^-(x) = \{y \in V(D) \mid (y, x) \in F(D)\}$ es llamado la Vecindad Interior de x .

El grado interior o ingrado de x , denotado por $\delta_D^-(x)$, es el número de flechas que entran a x , es decir, $\delta_D^-(x) = |\Gamma^-(x)|$.

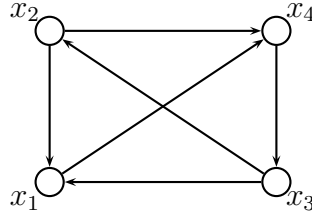


Figura 1.5

En la figura 1.5 tenemos que $\Gamma^+(x_1) = \{x_4\}$ es el conjunto de la vecindad exterior de x_1 , $\delta_D^+(x_1) = 1$ y $\Gamma^-(x_1) = \{x_2, x_3\}$ es el conjunto de la vecindad interior de x_1 , $\delta_D^-(x_1) = 2$.

Definición 1.1.10. Una subdigráfica H de una digráfica D es una digráfica tal que $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$. Decimos que H es una subdigráfica propia de D si $V(H) \subsetneq V(D)$ ó $F(H) \subsetneq F(D)$.

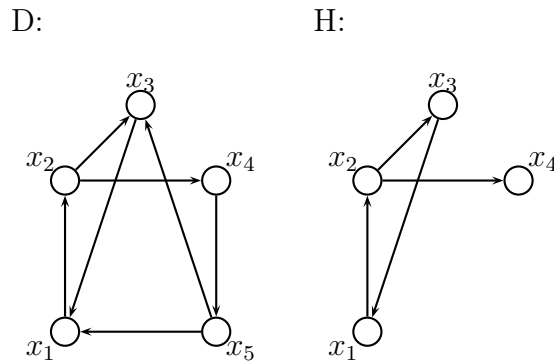


Figura 1.6

En la figura 1.6 damos el ejemplo de una subdigráfica propia H de D .

Definición 1.1.11. Una subdigráfica H de una digráfica D es una subdigráfica generadora de D si $V(H) = V(D)$.

Definición 1.1.12. Definimos la parte simétrica de D denotada por $\text{Sim}(D)$, como la subdigráfica generadora de D cuyo conjunto de flechas es el conjunto de flechas simétricas de D y su parte asimétrica denotada por $\text{Asim}(D)$, como la subdigráfica generadora de D cuyo conjunto de flechas es el conjunto de flechas asimétricas de D .

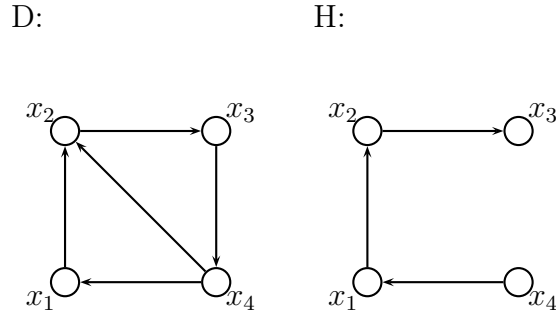


Figura 1.7

En la figura 1.7 tenemos un ejemplo de una subdigráfica generadora H de D .

Definición 1.1.13. Sea D una digráfica, si $U \subseteq V(D)$ definimos la subdigráfica de D inducida por U como la digráfica que tiene a U como conjunto de vértices y como conjunto de flechas a todas las flechas de D que tienen ambos extremos en U . Si $U \subseteq V(D)$ denotamos por $D[U]$ a la subdigráfica de D inducida por U .

Definición 1.1.14. Un camino en una digráfica D es una sucesión de vértices (u_1, u_2, \dots, u_n) tal que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ se tiene $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ ó $(u_{i+1}, u_i) \in F(D)$. Decimos que u_1 y u_n son los extremos del camino y que el camino es un $u_1 u_n$ -camino de la digráfica.

Definición 1.1.15. Una trayectoria en una digráfica D es un camino (u_1, u_2, \dots, u_n) tal que $u_i \neq u_j$ si $i \neq j$.

Definición 1.1.16. Un camino cerrado en una digráfica D es un camino (u_1, u_2, \dots, u_n) tal que $u_1 = u_n$.

Definición 1.1.17. Un ciclo en una digráfica D es un camino cerrado $(u_1, u_2, \dots, u_n, u_1)$ tal que $u_i \neq u_j$ si $i \neq j$ con $\ell(\mathcal{C}) \geq 2$.

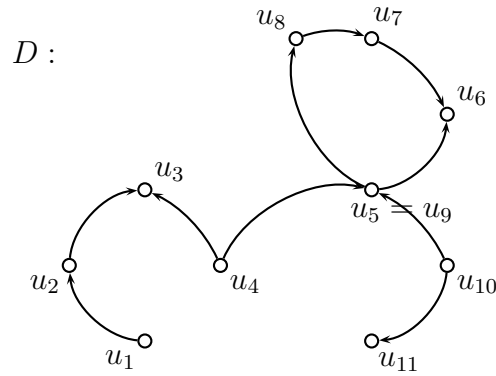


Figura 1.8

En la figura 1.8 podemos observar que la digráfica D es un camino con u_1 y u_{11} extremos del camino, $T = (u_4, u_5, u_8, u_7, u_6)$ es un camino y una trayectoria.

Definición 1.1.18. Un camino dirigido en una digráfica D , es un camino (u_1, u_2, \dots, u_n) tal que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ se tiene que $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$.

Definición 1.1.19. Sean D una digráfica y $C = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ un camino dirigido en D . Decimos que la longitud de C denotada por $\ell(C)$, es el número de flechas que recorre.

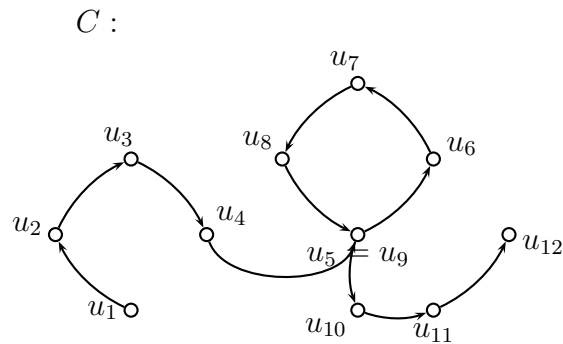


Figura 1.9

En la figura 1.9 la digráfica C es un camino dirigido y su longitud es $\ell(C) = 11$ ya que es el número de flechas que recorre.

Definición 1.1.20. Una trayectoria dirigida, en una digráfica D , es un camino dirigido que además es una trayectoria.

Definición 1.1.21. Un camino dirigido cerrado C_c en una digráfica D , es un camino dirigido que además es un camino cerrado.

Definición 1.1.22. Un ciclo dirigido en una digráfica D , es un camino cerrado dirigido que además es un ciclo. Denotemos por C_n al ciclo dirigido que consta de n vértices.

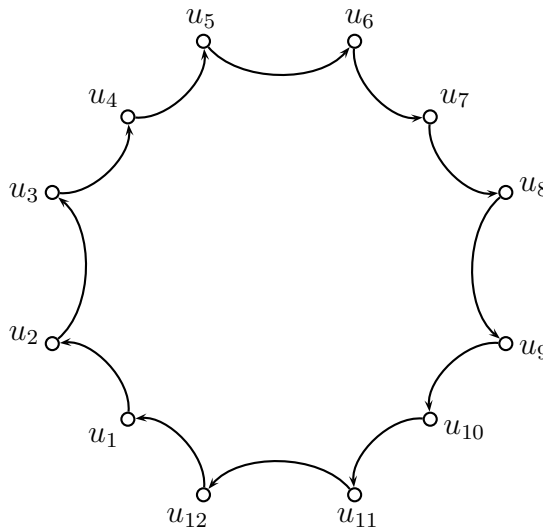


Figura 1.10

En la figura 1.10 podemos observar que $T = (u_1, u_2, \dots, u_{12})$ es un camino dirigido y una trayectoria dirigida y $C = (u_1, u_2, \dots, u_{12}, u_1)$ un ciclo dirigido.

Definición 1.1.23. Sea $C = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ un camino en una digráfica D , si $1 \leq i < j \leq n$ denotamos por (u_i, C, u_j) al $u_i u_j$ -camino contenido en C , es decir, $(u_i, C, u_j) = (u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j)$.

Definición 1.1.24. Una digráfica D es fuertemente conexa si para cada par de vértices x_i y x_j , existe una trayectoria dirigida de x_i a x_j .

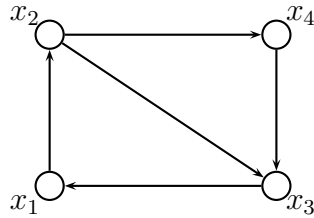


Figura 1.11

En la figura 1.11 tenemos una digráfica fuertemente conexa, si nos tomamos los vértices x_1 y x_2 tenemos que existe $T_1 = (x_1, x_2)$ una x_1x_2 -trayectoria dirigida y $T_2 = (x_2, x_4, x_3, x_1)$ una x_2x_1 -trayectoria dirigida esto sucede para cualquier par de vértices arbitrarios que nos tomemos.

Definición 1.1.25. Una digráfica D es transitiva si para cualquier terna $\{x, y, z\} \subseteq V(D)$, tal que $(x, y) \in F(D)$, $(y, z) \in F(D)$, entonces $(x, z) \in F(D)$.

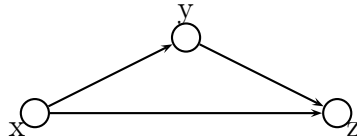


Figura 1.12. Digráfica transitiva

Definición 1.1.26. Una digráfica D es una digráfica bipartita si existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de los vértices de D tal que cualquier flecha de D tiene un extremo en V_1 y otro en V_2 .

$D :$

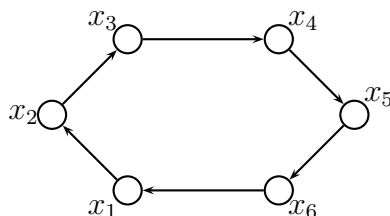


Figura 1.13 Digráfica Bipartita.

En la figura 1.13 tenemos una digráfica bipartita D con particiones $V_1 = \{x_1, x_3, x_5\}$ y $V_2 = \{x_2, x_4, x_6\}$.

Definición 1.1.27. Un conjunto $S \subseteq V(D)$ es independiente si para todo $\{x, y\} \subseteq S$, $(x, y) \notin F(D)$ y $(y, x) \notin F(D)$.

Definición 1.1.28. Un conjunto $S \subseteq V(D)$ es absorbente si para todo $x \in V(D) - S$ existe un $y \in S$ tal que $(x, y) \in F(D)$.

$D :$

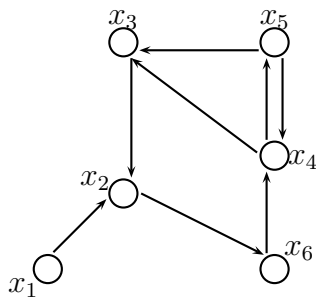


Figura 1.14

En la figura 1.14 el conjunto $S_1 = \{x_1, x_3, x_6\}$ es un conjunto independiente dado que no existen flechas entre sus elementos y $S_2 = \{x_2, x_4\}$ es un conjunto absorbente, puesto que, x_2 absorbe a los vértices x_1, x_3 y x_4 absorbe a x_5, x_6 .

Los siguientes teoremas son resultados básicos de la teoría de las digráficas que emplearemos a lo largo del trabajo.

Teorema 1.1.29. Todo uv -camino dirigido en una digráfica D contiene una uv -trayectoria dirigida, con $u \neq v$.

Demostración.

La demostración se hará por inducción sobre la longitud del camino dirigido ($\ell(C)$).

1. Si $\ell(C) = 1$, entonces $C = (u, v)$, con $u \neq v$, donde C claramente es una uv -trayectoria dirigida.

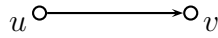


Figura 1.15

2. Hipótesis Inductiva. Supongamos que todo uv -camino dirigido tal que $\ell(C) < n$ contiene una uv -trayectoria dirigida.

Sea $C = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$ un uv -camino dirigido tal que $\ell(C) = n$.

3. Por demostrar que C contiene una uv -trayectoria dirigida.

Caso 1. Si $x_i \neq x_j$, con $i \neq j$, entonces C es una uv -trayectoria dirigida.

Caso 2. Si se repiten vértices, es decir, $x_i = x_j$ para algún $i \neq j$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $i < j$, entonces $C = (u = x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n = v)$. Consideremos $C' = (u = x_0, x_1, \dots, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n = v)$ el cual es un uv -camino dirigido, con $\ell(C') < n$, y por hipótesis de inducción C' contiene una uv -trayectoria dirigida. Por lo tanto C contiene una uv -trayectoria dirigida, ver figura 1.16.■

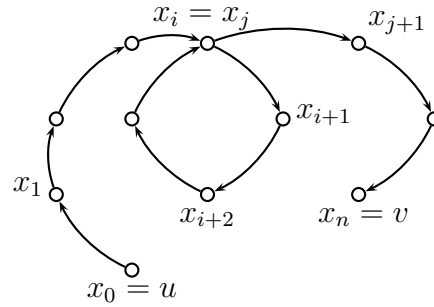


Figura 1.16

Teorema 1.1.30. Todo camino dirigido cerrado de longitud impar contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Demostración.

Sea C_c un camino dirigido cerrado de longitud impar.

Demostraremos que C_c contiene un ciclo dirigido de longitud impar por inducción sobre $\ell(C_c)$.

1. Si $\ell(C_c) = 3$, entonces $C_c = (u_0, u_1, u_2, u_0)$ es un ciclo dirigido de longitud impar.

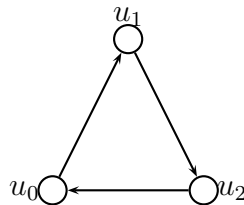


Figura 1.17

2. Hipótesis Inductiva. Supongamos que todo camino dirigido cerrado de longitud impar menor que $2n + 1$ contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

3. Por demostrar para $\ell(C_c) = 2n + 1$.

Sea $C_c = (u_1, u_2, \dots, u_{2n+1}, u_1)$ un camino dirigido cerrado de longitud impar.

Caso 1. Si $u_i \neq u_j$ para todo $i \neq j$, entonces C_c es un ciclo dirigido de longitud impar.

Caso 2. Si $u_i = u_j$ para algún i, j con $i \neq j$.

Si suponemos sin pérdida de generalidad que $i < j$, entonces $C_c = (u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j = u_i, u_{j+1}, \dots, u_{2n+1}, u_1)$

Sean $C'_c = (u_1, u_2, \dots, u_i = u_j, u_{j+1}, \dots, u_{2n+1}, u_1)$ y $C''_c = (u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, \dots, u_{j-1}, u_j = u_i)$ dos caminos dirigidos cerrados contenidos en C_c .

Como $C_c = C'_c \cup C''_c$, entonces $\ell(C_c) = \ell(C'_c) + \ell(C''_c)$, pero $\ell(C_c)$ es impar lo que implica que $\ell(C'_c)$ ó $\ell(C''_c)$ es impar y sólo uno. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\ell(C'_c)$ es impar, dado que $\ell(C'_c) < 2n + 1$, por hipótesis de inducción C'_c contiene un ciclo dirigido de longitud impar γ , y $\gamma \subset C'_c \subset C_c$, por lo que $\gamma \subset C_c$.

Por lo tanto C_c contiene un ciclo dirigido de longitud impar. ■

Teorema 1.1.31. Toda digráfica sin ciclos dirigidos contiene al menos un vértice v de grado exterior cero, es decir, $\delta_D^+(v) = 0$.

Demostración.

Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos.

Sea $T = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$ una uv -trayectoria dirigida de longitud máxima en D .



Figura 1.18

Supongamos que $\delta_D^+(v) > 0$.

Por lo tanto existe $w \in V(D)$ tal que $(v, w) \in F(D)$.

Caso 1. Si $w \in V(T)$.

Supongamos que $w = x_i$ con $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Entonces tenemos que $(w = x_i, x_{i+1}, \dots, x_n = v, w)$ es un ciclo dirigido en D , contradicción con la hipótesis.

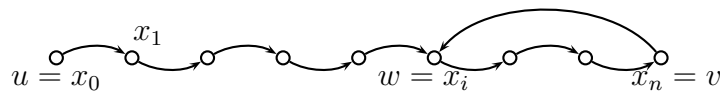


Figura 1.19

Caso 2. Si $w \notin V(T)$.

Entonces existe T' una uw -trayectoria dirigida más grande que T , contradicción con la elección de T .

Por lo tanto v no es adyacente hacia algún vértice, es decir, el exgrado de v es cero $\delta_D^+(v) = 0$. ■

Teorema 1.1.32. Si D es una digráfica bipartita, entonces D no tiene ciclos dirigidos de longitud impar.

Demostración.

Sea $\gamma = (u_1, u_2, \dots, u_n, u_1)$ un ciclo dirigido de D .

Sea $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(D)$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $u_1 \in V_1$.

Como D es bipartita:

$u_1 \in V_1$ implica que $u_2 \in V_2$.

$u_2 \in V_2$ implica que $u_3 \in V_1$.

$u_3 \in V_1$ implica que $u_4 \in V_2$.

$u_4 \in V_2$ implica que $u_5 \in V_1$.

·
·
·

Observemos que los vértices con índice impar están en V_1 y los vértices con índice par están en V_2 , es decir, $u_{2i+1} \in V_1$, entonces $u_{2i+2} \in V_2$.

Como $(u_n, u_1) \in F(D)$ y $u_1 \in V_1$, entonces $u_n \in V_2$. Por lo tanto $n = l(\gamma)$ es par. ■

Teorema 1.1.33. D es fuertemente conexa si y sólo si para toda partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(D)$ existe una V_1V_2 -flecha y una V_2V_1 -flecha.

Demostración. (\Rightarrow)

Sea $\{V_1, V_2\}$ una partición arbitraria de $V(D)$.

Sean $u_1 \in V_1$ y $u_2 \in V_2$.

Como D es fuertemente conexa existe $T_1 = (u_1 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = u_2)$ una u_1u_2 -trayectoria dirigida y existe $T_2 = (u_2 = y_0, y_1, y_2, \dots, y_m = u_1)$ una u_2u_1 -trayectoria dirigida.

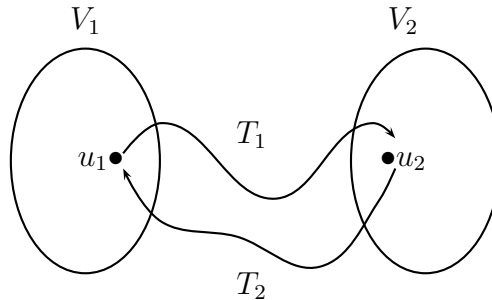


Figura 1.20

Como $u_1 = x_0 \in V_1$ y $u_2 = x_n \in V_2$, entonces $V_1 \cap T_1 \neq \emptyset$ y $V_2 \cap T_1 \neq \emptyset$.

Sea $m = \min\{j \in \{0, 1, \dots, m\} \mid x_j \in V_2\}$, con $m \geq 1$, entonces (x_{m-1}, x_m) es una V_1V_2 -flecha.

El procedimiento es análogo para demostrar que existe la V_2V_1 -flecha.

(\Leftarrow)

Por hipótesis tenemos que para toda partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(D)$ existe la V_1V_2 -flecha y la V_2V_1 -flecha.

Por demostrar que D es fuertemente conexa, es decir, para todo $\{v_1, v_2\} \subseteq V(D)$ arbitrarios existe una v_1v_2 -trayectoria dirigida y una v_2v_1 -trayectoria dirigida.

Sean $v_1, v_2 \in V(D)$.

Definimos:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{x \in V(D) \mid \text{existe una } v_1x\text{-trayectoria dirigida en } D\}. \\ V_2 &= V(D) - V_1. \end{aligned}$$

Si $v_2 \in V_1$, entonces por la definición de V_1 existe una v_1v_2 -trayectoria dirigida en D .

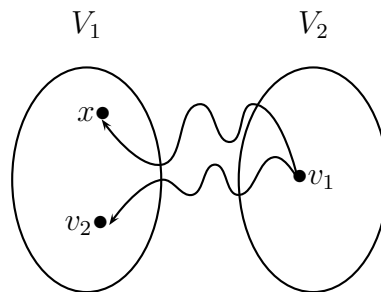


Figura 1.21

Si $v_2 \notin V_1$, entonces $v_2 \in V_2$ y por lo tanto $V_2 \neq \emptyset$. Sabemos por definición de V_1 y V_2 que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $V_1 \cup V_2 = V(D)$, de manera que $\{V_1, V_2\}$ es una partición de $V(D)$.

Ahora por hipótesis existe una V_1V_2 -flecha en D .

Sea $(a, b) \in F(D)$ con $a \in V_1$ y $b \in V_2$.

Como $a \in V_1$, entonces por la definición de V_1 existe T una v_1a -trayectoria dirigida en D .

Por lo tanto $T \cup (a, b)$ es una v_1b -trayectoria dirigida en D , de donde se sigue que $b \in V_1$, contradicción pues supusimos que $b \in V_2$.

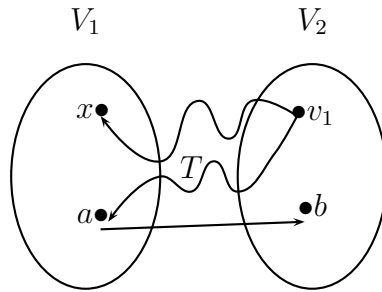


Figura 1.22

Por lo tanto $v_2 \in V_1$, de manera que existe una v_1v_2 -trayectoria dirigida en D .

De manera análoga existe una v_2v_1 -trayectoria dirigida en D .

Por lo tanto D es fuertemente conexa. ■

Capítulo 2

Núcleos y Núcleos por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas.

Los temas que trataremos en este capítulo son Núcleos, seminúcleos, cuasinúcleos y núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en digráficas. Ayudándonos de los resultados anteriores facilitaremos las demostraciones de los teoremas que presentamos.

Las digráficas Núcleo Perfectas y las digráficas Núcleo Imperfectas Críticas son otros tipos de digráficas que definiremos y que tienen ciertas características especiales, también daremos algunas condiciones para que una digráfica m -coloreada tenga núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

2.1. Núcleos.

Para motivar el estudio de núcleos en digráficas mostraremos un ejemplo donde se utiliza este concepto.

TOMA DE DECISIONES.

Consideremos un grupo de n personas $1, 2, 3, \dots, n$ que se reunirán para tomar una decisión sobre algún asunto (es decir, elegir una situación de un conjunto X de posibles situaciones). Para resolver el problema de cómo elegir una situación, lo primero que se ocurre es considerar las preferencias individuales, pero cuando $n \geq 2$ encontramos que las preferencias individuales podrían no ser compatibles digamos que la persona 1 prefiere la situación a a la b , pero la persona 2 opina que b es mejor que a . ¿Cómo resolver este problema?

Este problema fue primeramente planteado por John Von Neumann; y veremos como solucionó el problema de las incompatibilidades en las preferencias individuales. Para esto Von Neumann introdujo la noción de preferencia efectiva y la definió como sigue: diremos que a es **efectivamente preferible** a b , si existe un grupo de personas (dentro de las n personas), capaces, si quieren, de imponer la preferencia de a sobre b .

Denotaremos $a > b$ si a es efectivamente preferible a b y notemos que esta relación no es necesariamente transitiva.

Podemos ahora dar un planteamiento del problema usando digráficas como modelo.

Tomemos un vértice por cada una de las posibles situaciones a considerar, y ponemos una flecha de a a b , si b es efectivamente preferible que a .

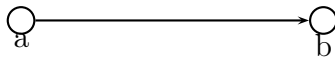


Figura 2.1

Obtenemos así cierta digráfica D , si podemos encontrar un conjunto $S \subseteq V(D)$, tal que S sea un conjunto independiente y absorbente de

D , habremos reducido el problema a elegir una situación en S , ya que por ser S independiente, tenemos que para cualesquiera dos elementos de S , no hay uno que sea efectivamente preferible que otro, y por ser S absorbente, tenemos que para cualquier situación fuera de S siempre hay al menos una en S que es efectivamente preferible.

A continuación tenemos una digráfica que nos muestra la relación de preferencia efectiva de un grupo de personas:

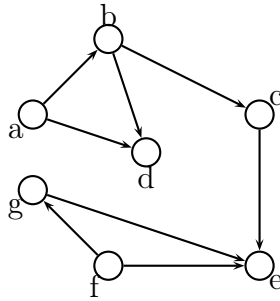


Figura 2.2

Un conjunto independiente y absorbente de esta digráfica es $N = \{e, d\}$, así que el grupo de personas, puede escoger la situación e o la situación d , pues e o d es mejor que cualquier otra situación, y entre d y e , no hay relación de preferencia efectiva, es decir, no existe un grupo de personas capaces de imponer una que la otra. El conjunto N se llama núcleo de D .

Ahora podemos definir el concepto de núcleo en una digráfica.

Definición 2.1.1. Si $N \subseteq V(D)$ es tal que N es un conjunto independiente y absorbente en D , entonces diremos que N es núcleo de D .

Existen algunas digráficas que no tienen núcleo, algunas tienen más de uno y otras tienen un único núcleo, observemos los ejemplos de la figura 2.3.

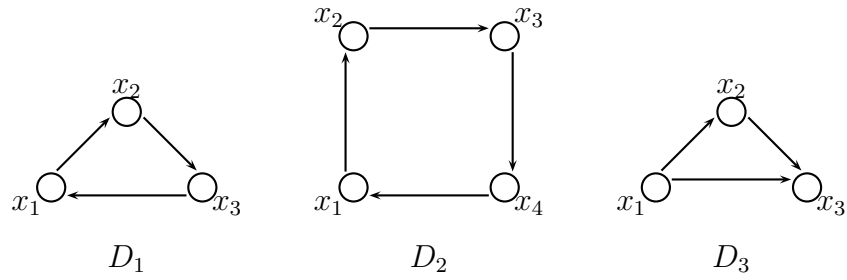


Figura 2.3

D_1 no tiene núcleo, D_2 tiene 2 núcleos, a saber, $\{x_1, x_3\}$ y $\{x_2, x_4\}$, y por último D_3 que tiene un único núcleo $\{x_3\}$.

A continuación presentamos algunos resultados importantes sobre núcleos.

Lema 2.1.2. Sea $N \subseteq V(D)$, si N es núcleo, entonces N es un conjunto independiente máximo y un conjunto absorbente mínimo.

Demostración.

Sea N núcleo. Por demostrar que N es un conjunto independiente máximo y un conjunto absorbente mínimo.

Supongamos que existe $S \subseteq V(D)$ tal que $N \subsetneq S$ y S es independiente.

Como $N \subset S$ existe $x \in S$ tal que $x \notin N$, y al ser N núcleo N es absorbente, es decir, existe $y \in N$ tal que $(x, y) \in F(D)$, contradicción, ya que $\{x, y\} \subseteq S$ y S es independiente en D .

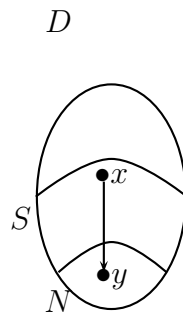


Figura 2.4

Por lo tanto, N es independiente máximo.

Supongamos que existe un conjunto $A \subseteq V(D)$ tal que $A \subsetneq N$ y A es absorbente en D , sea $u \in N$ tal que $u \notin A$, como A es absorbente existe $v \in A$ tal que $(u, v) \in F(D)$ pero N es núcleo, es decir, N es independiente en D , contradicción pues $\{u, v\} \subseteq N$.

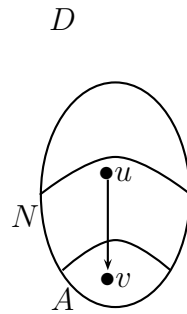


Figura 2.5

Por lo tanto, N es absorbente mínimo.■

Teorema 2.1.3. $S \subseteq V(D)$, S es núcleo de D si y sólo si para todo $x \in V(D)$ se cumple $\phi_s(x) = 1 - \max\{\phi_s(y) \mid y \in \Gamma^+(x)\}$, donde ϕ_s es la Función Característica de S .

Demostración.(\Rightarrow)

La Función Característica de S .

$$\phi_s : V(D) \rightarrow \{0, 1\}$$

Se define como:

$$\phi_s = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin S; \\ 1, & \text{si } x \in S. \end{cases}$$

Sea $S \subseteq V(D)$, un núcleo de D .
Sea $x \in V(D)$ arbitrario.

Caso 1. Si $x \in S$, entonces $\phi_s(x) = 1$. Como S es independiente, entonces $\Gamma^+(x) \subseteq V(D) - S$, entonces $\forall y \in \Gamma^+(x)$, $\phi_s(y) = 0$, por lo que $\max\{\phi_s(y) \mid y \in \Gamma^+(x)\} = 0$.

Por lo tanto, $\phi_s(x) = 1 = 1 - \max\{\phi_s(y) \mid y \in \Gamma^+(x)\} = 1 - 0 = 1$.

Caso 2. Si $x \notin S$, entonces $\phi_s(x) = 0$. Como S es absorbente en D , existe $y \in S$ tal que $(x, y) \in F(D)$ por lo tanto, $y \in \Gamma^+(x)$ y $\phi_s(y) = 1$, entonces $\max\{\phi_s(y) \mid y \in \Gamma^+(x)\} = 1$.

Por lo tanto $\phi_s(x) = 0 = 1 - \max\{\phi_s(y) \mid y \in \Gamma^+(x)\} = 1 - 1 = 0$.

(\Leftarrow)

Sea $S \subseteq V(D)$ que satisface $\phi_s(x) = 1 - \max\{\phi_s(y) \mid y \in \Gamma^+(x)\}$
 $\forall x \in S$.

Por demostrar que S es núcleo en D .

1. Veamos que S es independiente en D .

Sea $x \in S$, entonces $\phi_s(x) = 1$.

Por lo tanto $\phi_s(x) = 1 = 1 - \max\{\phi_s(y) \mid y \in \Gamma^+(x)\}$, y así $\max\{\phi_s(y) \mid y \in \Gamma^+(x)\} = 0$, entonces $\forall y \in \Gamma^+(x)$, $\phi_s(y) = 0$ y por definición de función característica $y \notin S$, de lo que se sigue que $\Gamma^+(x) \subseteq V(D) - S$. Por lo tanto S es independiente en D .

2. Veamos que S es absorbente en D .

Sea $z \in V(D) - S$, entonces $\phi_s(z) = 0 = 1 - \max\{\phi_s(y) \mid y \in \Gamma^+(z)\}$, lo que implica $\max\{\phi_s(y) \mid y \in \Gamma^+(z)\} = 1$, por lo tanto existe $u \in \Gamma^+(z)$ tal que $\phi_s(u) = 1$, si y sólo si $u \in S$.

Por lo tanto, $(z, u) \in F(D)$ con $u \in S$.

Por lo tanto S es absorbente en D .

Por lo tanto de 1) y 2) tenemos que S es núcleo de D . ■

A continuación presentamos dos resultados concernientes a digráficas simétricas y transitivas, definidas en el capítulo 1; demostraremos que ambas tienen núcleo.

Teorema 2.1.4. Sea D una digráfica transitiva, un conjunto $S \subseteq V(D)$ es núcleo de D si y sólo si S es un conjunto absorbente mínimo.

Demostración.(\Rightarrow)

Sea S núcleo de D .

Por demostrar que S es un conjunto absorbente mínimo.

Por el Lema 2.1.2, tenemos que S es un conjunto absorbente mínimo.

(\Leftarrow)

Sea S un conjunto absorbente mínimo.

Por demostrar que S es núcleo en D .

1. Veamos que S es un conjunto independiente en D .

Sea $\{u, v\} \subseteq S$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $(u, v) \in F(D)$.

Como D es transitiva, entonces $(\Gamma^-(u), v) \subseteq F(D)$ dado que $(u, v) \in F(D)$.

Entonces $S - u$ es un subconjunto absorbente de D más pequeño que S , contradicción ya que S es mínimo.

Por lo tanto S es independiente.

2. Veamos que S es un conjunto absorbente en D .

Por hipótesis se tiene que S es absorbente en D .

Por lo tanto, por 1) y 2) S es núcleo de D .■

Lema 2.1.5. Sea D una digráfica simétrica, un conjunto $S \subseteq V(D)$ es núcleo de D si y sólo si S es un conjunto independiente máximo.

Demostración.(\Rightarrow)

Si S es núcleo en D , entonces por Lema 2.1.2 tenemos que S es un conjunto independiente máximo.

(\Leftarrow)

Sea S un conjunto independiente máximo.

Por demostrar que S es núcleo en D .

1. Por hipótesis tenemos que S es un conjunto independiente en D .

2. Veamos que S es un conjunto absorbente en D .

Sea $x \in V(D) - S$, como S es independiente máximo, entonces existe una Sx -flecha o una xS -flecha en D , pero como D es simétrica existen ambas flechas.

Por lo tanto S es absorbente.

Por lo tanto S es núcleo en D .■

Cuando una digráfica no tiene ciclos dirigidos es llamada una digráfica acíclica y a los ciclos dirigidos de longitud n se les llama n -ciclos, mostraremos un resultado concerniente a núcleos y ciclos dirigidos, para esto utilizaremos el Teorema 1.1.31 que nos facilitará su demostración.

Teorema 2.1.6. Toda digráfica D sin ciclos dirigidos tiene núcleo y éste es único.

Demostración.

Como D no tiene ciclos dirigidos, existe un $v \in V(D)$ tal que:

por el Teorema 1.1.31, $\delta_D^+(v) = 0$, es decir, a v no le salen flechas.

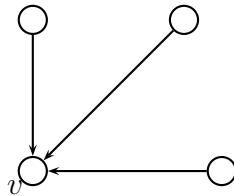


Figura 2.6

Por demostrar que D tiene núcleo.

Consideremos a los siguientes conjuntos:

$$X_0 = \{v \in V(D) \mid \delta_D^+(v) = 0\} \text{ y}$$

$$Y_0 = \{u \in V(D) - X_0 \mid \text{existe } uX_0\text{-flecha en } D\}.$$

Definimos $D_1 = D - (X_0 \cup Y_0)$.

Caso 1. $D_1 = \emptyset$.

En este caso se afirma que X_0 es núcleo de D .

Veamos que X_0 es independiente y absorbente en D .

Por construcción de X_0 tenemos que para todo $\{v, w\} \subseteq X_0$, $v \neq w$ no existen (v, w) -flecha y (w, v) -flecha en D dado que $\delta_D^+(v) = 0$ y $\delta_D^+(w) = 0$. Por lo tanto X_0 es independiente en D .

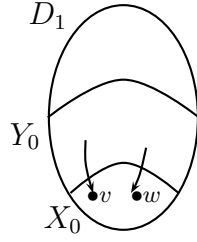


Figura 2.7

Por construcción $Y_0 = V(D) - X_0$, es decir, $Y_0 = \Gamma^-(X_0)$. Por lo tanto X_0 es absorbente en D .

Caso 2. $D_1 \neq \emptyset$.

Definimos a los conjuntos:

$$X_1 = \{v \in V(D_1) \mid \delta_{D_1}^+(v) = 0\} \text{ y}$$

$$Y_1 = \{u \in V(D_1) - X_1 \mid \text{existe } uX_1\text{-flecha en } D_1\}.$$

Tenemos que X_1 es distinto del vacío, pues D_1 es una subdigráfica inducida de D , entonces D_1 no tiene ciclos dirigidos.

$$\text{Definimos } D_2 = D_1 - (X_1 \cup Y_1).$$

Subcaso 2.1. $D_2 = \emptyset$.

Afirmamos que $(X_0 \cup X_1)$ es núcleo de D .

Veamos que $(X_0 \cup X_1)$ es independiente en D .

- X_0 y X_1 son independientes por construcción.
- La X_0X_1 - flecha no existe pues $\Gamma^+(X_0) = \emptyset$.

- La X_1X_0 -flecha no existe, si existiera la (v, u) -flecha en D con $u \in X_0$ y $v \in X_1$, entonces $v \in Y_0 = \Gamma^-(X_0)$ por lo que $Y_0 \cap D_1$ es distinta del vacío, contradicción con la construcción de D_1 .

Por lo tanto $(X_0 \cup X_1)$ es independiente en D .

Por otro lado $(Y_0 \cup Y_1) = (X_0 \cup X_1)^c$, o bien $V(D) = (Y_0 \cup Y_1) \cup (X_0 \cup X_1)$ sabemos por construcción que X_0 absorbe a Y_0 ya que $Y_0 = \Gamma^-(X_0)$ y X_1 absorbe a Y_1 ya que $Y_1 = \Gamma^-(X_1)$.

Como X_i absorbe a Y_i por definición de Y_i ($i = 0, 1$), entonces $(X_0 \cup X_1)$ es absorbente en D .

Por lo tanto $(X_0 \cup X_1)$ es núcleo en D .

Subcaso 2.2. $D_2 \neq \emptyset$.

Como D es finita y continuando con este procedimiento, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $m = \min\{n \in \mathbb{N} / X_n = \emptyset\}$.

$\cup_{i=0}^{m-1} (X_i) = N$ es núcleo de D .

Veamos que N es independiente en D .

Consideremos $X_i, X_j \subset N$, con $i \neq j$ sin pérdida de generalidad $i < j$.

Cada X_i es independiente.

- X_i y X_j son independientes por construcción.
- La X_iX_j -flecha no existe pues $\Gamma^+(X_i) = \emptyset$ y $X_j \in D_i$.
- La X_jX_i -flecha no existe, si existiera la (u, w) -flecha en D con $u \in X_j$ y $w \in X_i$, entonces $u \in Y_i = \Gamma^-(X_i)$ por lo que $Y_i \cap D_{i+1}$ es distinta del vacío, contradicción con la construcción de D_{i+1} .

Por lo tanto N es independiente en D .

N es absorbente en D por definición de los Y_i , pues $N^c = \cup_{i=0}^{m-1} (Y_i)$.

Por lo tanto N es núcleo de D .

Para finalizar demostraremos que N es único.

Supongamos que existe $N' \subseteq V(D)$ tal que $N \subsetneq N'$ y N' es núcleo de D .

Entonces existe $x \in N'$ tal que $x \notin N$, como N es núcleo, N es absorbente, es decir, existe $y \in N$ tal que $(x, y) \in F(D)$, contradicción, ya que $\{x, y\} \subseteq N'$ y N' es independiente dado que N' es núcleo de D .

Por lo tanto N es único. ■

Existen otros tipos de digráficas con ciertas características que nos serán de gran utilidad para el estudio de núcleos en digráficas que definimos a continuación.

Definición 2.1.7. Una digráfica D es Núcleo Perfecta si toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo, y ella misma tiene núcleo.

Definición 2.1.8. Una digráfica D es llamada Núcleo Imperfecta Crítica cuando D no tiene núcleo, pero cualquier subdigráfica inducida propia de D tiene núcleo.

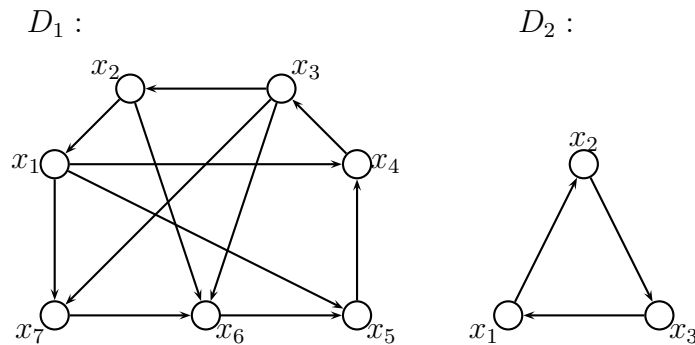


Figura 2.8

En la figura 2.8 tenemos una digráfica núcleo perfecta D_1 y una digráfica núcleo imperfecta crítica D_2 , el lector puede verificar que cualquier subdigráfica inducida en D_1 siempre tendrá núcleo y que D_2 no tiene núcleo pero cualquier subdigráfica inducida de ella si.

Presentamos el primer resultado para digráficas núcleo perfectas haciendo uso del Teorema 2.1.6.

Teorema 2.1.9. Toda digráfica D sin ciclos dirigidos es núcleo perfecta y tiene un único núcleo.

Demostración.

Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos, por el Teorema 2.1.6 D tiene núcleo y es único.

Por demostrar que D es núcleo perfecta.

Sea D_1 una subdigráfica inducida arbitraria de D , D_1 no tiene ciclos dirigidos, entonces D_1 tiene núcleo.

Por lo tanto, toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo.

Por lo tanto D es núcleo perfecta. ■

Continuamos con resultados sobre digráficas núcleo imperfectas críticas.

Teorema 2.1.10. Toda digráfica no núcleo perfecta contiene una subdigráfica núcleo imperfecta crítica.

Demostración.

Sea D una digráfica no núcleo perfecta, es decir, D no tiene núcleo o existe H una subdigráfica inducida de D , $H \neq D$ tal que H no tiene núcleo.

Si D no tiene núcleo y todas las subdigráficas inducidas de D tienen núcleo, entonces D es núcleo imperfecta crítica. Si no, existe H subdigráfica inducida propia de D que no tiene núcleo, si todas las subdigráficas inducidas propias de H tienen núcleo, entonces H es núcleo imperfecta crítica. Si no, existe H_1 subdigráfica inducida propia de $H \subset D$ tal que H_1 no tiene núcleo, si todas las inducidas propias de H_1 tienen núcleo, entonces H_1 es núcleo imperfecta crítica. Como D es finita y toda subdigráfica con 1 ó 2 vértices tiene núcleo, existe

$H_i \subset H_{i-1} \subset H_{i-2} \subset \dots \subset H \subset D$ una subdigráfica inducida sin núcleo tal que todas sus inducidas tienen núcleo, es decir, es núcleo imperfecta crítica. ■

Teorema 2.1.11. Si D es una digráfica núcleo imperfecta crítica entonces:

No existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(D)$ tal que $D[V_1, V_2] \subseteq \text{Sim}(D)$.

Donde $D[V_1, V_2] = \{(u, v) \in F(D) \mid u \in V_1 \text{ y } v \in V_2\}$.

Es decir, $\text{Asim}(D)$ es fuertemente conexa.

Demostración.

Supongamos lo contrario, es decir, que existe una partición $\{V_1, V_2\}$ tal que $D[V_1, V_2] \subseteq \text{Sim}(D)$ donde $D[V_1, V_2] = \{(u, v) \in F(D) \mid u \in V_1 \text{ y } v \in V_2\}$.

Ahora, como $\{V_1, V_2\}$ son una partición, entonces las V_1 y V_2 son no vacías. Por lo tanto $D[V_1]$ y $D[V_2]$ tienen núcleo (pues por hipótesis D es una digráfica núcleo imperfecta crítica) denotemos por N_1 al núcleo de $D[V_1]$.

Definimos a los siguientes conjuntos:

$$S = \{x \in V_2 \mid \text{existe } xN_1\text{-flecha}\}.$$

$$S' = \{x \in V_2 \mid \text{no existe } xN_1\text{-flecha}\}.$$

Tomamos $D[S']$ la cual tiene núcleo o es vacía (por hipótesis) que denotaremos por N_2 .

Caso 1. Si $S' = \emptyset$. Entonces N_1 absorbe a $V(D[V_2])$.

Por lo tanto N_1 es núcleo de D , contradiciendo que D es núcleo imperfecta crítica.

Caso 2. Si $S' \neq \emptyset$. Entonces N_2 absorbe a $V(D[S'] - N_2)$ (pues N_2 es núcleo de $D[S']$).

Veamos que $(N_1 \cup N_2)$ es núcleo de D .

1. N_1 y N_2 son independientes en D ya que son independientes en $D[V_1]$ y $D[V_2]$ respectivamente.
2. No existe una N_2N_1 -flecha en D ya que $N_2 \subseteq S'$.
3. No existe N_1N_2 -flecha, en D dado que ya descartamos la existencia de una N_2N_1 -flecha en D y $D[V_1, V_2] \subseteq \text{Sim}(D)$.

Por lo tanto $(N_1 \cup N_2)$ es independiente.

Ahora veamos que $(N_1 \cup N_2)$ es absorbente.

Sea $x \in V(D) - (N_1 \cup N_2)$.

Caso 1. Si $x \in D[V_1] - N_1$, entonces N_1 absorbe a x .

Caso 2. Si $x \in S$, entonces N_1 absorbe a x .

Caso 3. Si $x \in S' - N_2$, entonces N_2 absorbe a x .

Por lo tanto $(N_1 \cup N_2)$ es absorbente.

Por lo tanto $(N_1 \cup N_2)$ es núcleo de D , contradiciendo que D es núcleo imperfecta crítica.

Por lo tanto no existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(D)$ tal que $D[V_1, V_2] \subseteq \text{Sim}(D)$, donde $D[V_1, V_2] = \{(u, v) \in F(D) \mid u \in V_1 \text{ y } v \in V_2\}$.

Ahora se probará que $\text{Asim}(D)$ es fuertemente conexa.

Por hipótesis no existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(D)$ tal que $D[V_1, V_2] \subseteq \text{Sim}(D)$, es decir, para toda partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(D)$, $D[V_1, V_2] \not\subseteq \text{Sim}(D)$. Por lo tanto existe una V_1V_2 -flecha en $\text{Asim}(D)$, como la propiedad de que $D[V_1, V_2] \not\subseteq \text{Sim}(D)$ se cumple para toda partición de

$V(D)$, en particular para $\{V_2, V_1\}$, entonces también existe una V_2V_1 -flecha en $\text{Asim}(D)$. Por lo tanto por el Teorema 1.1.33 $\text{Asim}(D)$ es fuertemente conexa. ■

Corolario 2.1.12. Si D es una digráfica núcleo imperfecta crítica, entonces $\text{Asim}(D)$ tiene ciclos dirigidos.

Demostración.

El Teorema 2.1.11 nos asegura que $\text{Asim}(D)$ es fuertemente conexa. Por demostrar que $\text{Asim}(D)$ tiene ciclos dirigidos.

Sea $u, v \in V(\text{Asim}(D))$ arbitrarios.

Como la $\text{Asim}(D)$ es fuertemente conexa, entonces existe:

$T_1 = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$ una uv -trayectoria asimétrica dirigida en D
 $T_2 = (v = y_0, y_1, \dots, y_m = u)$ una vu -trayectoria asimétrica dirigida en D .

Existe un y_j tal que $y_j = x_k$ para algún $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ con $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ya que $y_m = u = x_0$.

Sea $m = \min\{j \geq 1 \mid y_j = x_k\}$ para algún $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ con $j \in \{1, \dots, m\}$.

Entonces $(x_k, T_1, v) \cup (v, T_2, y_m = x_k)$ es un ciclo dirigido en D .

Por lo tanto $\text{Asim}(D)$ tiene ciclos dirigidos. ■

Teorema 2.1.13. Si en una digráfica D cada ciclo dirigido contiene una flecha simétrica, entonces D es núcleo perfecta.

Demostración.

Supongamos lo contrario, es decir, D no es núcleo perfecta, por lo tanto existe $H \subseteq D$ subdigráfica inducida de D , tal que no contiene núcleo, por lo que H contiene una subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica, H' ; por corolario 2.1.12 existe un ciclo $\gamma \subseteq \text{Asim}(H')$ y

dado que $H' \subseteq D$, entonces $\gamma \subseteq \text{Asim}(D)$, contradiciendo la hipótesis de que en D cada ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica. Por lo tanto D es una digráfica núcleo perfecta. ■

Corolario 2.1.14. Si D no es una digráfica núcleo perfecta (es decir, D es núcleo imperfecta crítica o contiene alguna subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica), entonces existe un ciclo dirigido contenido en $\text{Asim}(D)$.

Demostración.

Suponemos lo contrario, es decir, para todo ciclo dirigido γ en D no existe $\gamma \subseteq \text{Asim}(D)$, por lo tanto existe al menos una flecha simétrica contenida en γ , entonces por el Teorema 2.1.13 D es núcleo perfecta, contradiciendo que D no es núcleo perfecta. Por lo tanto existe un ciclo dirigido $\gamma \subseteq \text{Asim}(D)$. ■

Teorema 2.1.15. Una digráfica completa D es núcleo perfecta si y sólo si todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica.

Demostración.(\Rightarrow)

Supongamos que D es núcleo perfecta, es decir, toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo.

Si D no tiene ciclos dirigidos entonces el Teorema se cumple por vacuidad.

Si D tiene un ciclo dirigido γ , por demostrar que γ tiene al menos una flecha simétrica:

Sea $\gamma = (x_0, x_1, \dots, x_n, x_0)$ dicho ciclo, consideremos $H = D[V(\gamma)]$ una subdigráfica inducida en D por los vértices de tal ciclo. Por hipótesis H tiene núcleo, que consiste de un sólo punto $\{x_i\}$ pues H es una subdigráfica inducida de una digráfica completa D .

Como x_i es núcleo en H , entonces x_i absorbe a todos los vértices de H en particular al vértice x_{i+1} , observemos que $x_i \in \gamma$ pues $V(\gamma) = V(H)$. Por lo tanto existen $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$ y $(x_{i+1}, x_i) \in F(D)$.

Por lo tanto γ tiene al menos una flecha simétrica.

(\Leftarrow)

Supongamos lo contrario, D no es núcleo perfecta. Entonces D contiene una subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica (por el Teorema 2.1.10), por lo que existe un ciclo dirigido contenido en $\text{Asim}(D)$ (por el Corolario 2.1.14), contradiciendo que todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica. ■

2.2. Seminúcleos

A partir de la definición 1.1.27 podemos definir un seminúcleo de una digráfica D , concepto introducido por Von Neumann-Lara [10].

Definición 2.2.1. Sea D una digráfica.

$S \subseteq V(D)$ es seminúcleo de D si cumple lo siguiente:

1. S es independiente.
2. Si $(u, w) \in F(D)$ con $u \in S$ y $w \in V(D) - S$, entonces existe un $v \in S$ tal que $(w, v) \in F(D)$ (v no necesariamente es distinto de u).

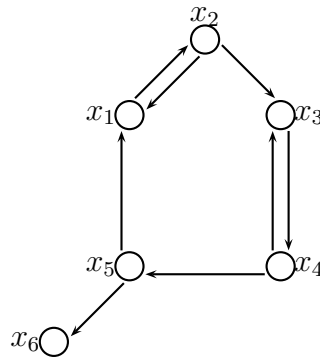


Figura 2.9

En la figura 2.9 tenemos que el conjunto $N = \{x_1, x_3, x_6\}$ es núcleo de D el cual también es seminúcleo de D , ya que el conjunto es independiente por definición de núcleo y para las flechas (x_1, x_2) y (x_3, x_4) que salen del conjunto existen las flechas (x_2, x_1) y (x_4, x_3) en D que satisfacen la segunda condición de ser seminúcleo en D .

El conjunto $S = \{x_1, x_3\}$ es seminúcleo de D , pero S no es núcleo de D ya que al vértice x_6 nadie lo absorbe.

Con estas observaciones podemos afirmar que Núcleo implica Seminúcleo, pero Seminúcleo no implica Núcleo y el seminúcleo de una digráfica puede no ser único.

Ahora presentamos resultados importantes acerca de seminúcleos en una digráfica.

Lema 2.2.2. Si cada subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío, entonces D tiene núcleo.

Demostración.

Sea S un seminúcleo máximo de D .

Por demostrar que D tiene núcleo.

Sea $\Gamma^-(S)$ los vecinos interiores de D .

Definimos $D_1 = D - (S \cup \Gamma^-(S))$.

Caso 1. Si $D_1 = \emptyset$.

Entonces S es núcleo de D .

S es independiente dado que S es seminúcleo y es absorbente pues $S \cup \Gamma^-(S) = V(D)$

Caso 2. Si $D_1 \neq \emptyset$

Consideremos a T como seminúcleo distinto del vacío de D_1 (T existe por hipótesis del teorema), afirmamos que $S \cup T$ es seminúcleo distinto del vacío de D .

Como S y T son seminúcleos en D y D_1 respectivamente, S y T son independientes. Por otro lado la TS -flecha en D no existe, por definición de D_1 y $T \subseteq D_1$. La ST -flecha tampoco existe pues tendría que existir alguna TS -flecha, dado que S es seminúcleo en D , cuya existencia ya descartamos.

Por lo tanto $(S \cup T)$ es independiente en D .

Veamos que si existe $(S \cup T)x$ -flecha en D con $x \in V(D) - (S \cup T)$, entonces existe $x(S \cup T)$ -flecha en D .

Subcaso 2.1. Si existe la Sx -flecha, entonces $x \in \Gamma^-(S)$. Por lo tanto existe la $(S \cup T)x$ -flecha y la $x(S \cup T)$ -flecha por ser S seminúcleo de D .

Subcaso 2.2. Si existe la Tx -flecha, entonces existe la xT -flecha pues T es seminúcleo de D_1 . Por lo tanto existe la $(S \cup T)x$ -flecha y la $x(S \cup T)$ -flecha.

Por lo tanto $(S \cup T)$ es seminúcleo de D , pero $|S \cup T| > |S|$, contradicción pues S es seminúcleo máximo.

Por lo tanto el caso 2 no es posible.

Por lo tanto S es núcleo de D .

Por lo tanto D tiene núcleo. ■

Teorema 2.2.3. Una digráfica D es Núcleo Perfecta si y sólo si cada subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío.

Demostración.(\Rightarrow)

Sea D una digráfica núcleo perfecta.

Por demostrar que cualquier subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío.

Por definición de digráfica núcleo perfecta, toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo, por lo tanto toda subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío.

(\Leftarrow)

Por demostrar que D tiene núcleo.

Por hipótesis tenemos que cada subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío y por el Lema 2.2.2, D tiene núcleo y cada subdigráfica inducida de D también tiene núcleo.

Por lo tanto D es Núcleo Perfecta. ■

Teorema 2.2.4. Sea D una digráfica. Si D no tiene ciclos dirigidos de longitud impar, entonces D es Núcleo Perfecta.

Demostración.

Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar.

Por demostrar que D tiene un seminúcleo no vacío.

Sea D' una componente fuertemente conexa terminal de D , es decir, $\Gamma^+(D') \subseteq V(D')$ y D' es fuertemente conexa en D .

Caso 1. $|V(D')| = 1$, $x \in V(D')$.

Como ya sabemos, las digráficas con este número de vértices tienen núcleo, por lo que D' tiene núcleo el cual es $\{x\}$ y es un seminúcleo no vacío de D ya que $\Gamma^+(x) = \emptyset$.

Caso 2. $|V(D')| \geq 2$.

Como $|V(D')| \geq 2$, sean $x_0 \in V(D')$ fijo y $x_1 \in V(D')$ arbitrario con $x_0 \neq x_1$.

Observación 1. Por la elección de D' , componente fuertemente conexa terminal, tenemos que todas las x_0x_1 -trayectorias dirigidas y x_1x_0 -trayectorias dirigidas están contenidas en D' , además las x_0x_1 -trayectorias dirigidas tienen la misma paridad que las x_1x_0 -trayectorias dirigidas, de lo contrario, si existieran T_1 una x_0x_1 -trayectoria dirigida y T_2 una x_1x_0 -trayectoria dirigida de distinta paridad, entonces $T_1 \cup T_2$ es un camino cerrado dirigido de longitud impar y por el Teorema 1.1.29 contiene un ciclo dirigido de longitud impar, el cual estaría contenido en D , lo cual es imposible por hipótesis.

Por lo tanto para todo $v \in V(D')$ las x_0v -trayectorias dirigidas y las vx_0 -trayectorias dirigidas están contenidas en D' , además las x_0v -trayectorias dirigidas tienen la misma paridad que las vx_0 -trayectorias dirigidas.

Sea $S = \{x \in V(D') \mid \text{existe } x_0x\text{-trayectoria dirigida de longitud par contenida en } D'\}$.

$S \neq \emptyset$ ya que la x_0x_0 -trayectoria dirigida es de longitud cero, es par. Por lo tanto $x_0 \in S$.

Afirmamos que S es seminúcleo no vacío de D .

1. Veamos que S es un conjunto independiente.

Supongamos que S no es un conjunto independiente.

Sea $\{y_1, y_2\} \subseteq S$ tal que existe $(y_1, y_2) \in F(D)$ o existe $(y_2, y_1) \in F(D)$.

Observemos que como $\{y_1, y_2\} \subseteq S$, entonces existen T_1 una x_0y_1 -trayectoria dirigida de longitud par y T_2 una x_0y_2 -trayectoria dirigida de longitud par, ambas contenidas en D' .

Si existe $(y_1, y_2) \in F(D)$.

Como D' es fuertemente conexa existe T_3 una y_2x_0 -trayectoria dirigida en D' .

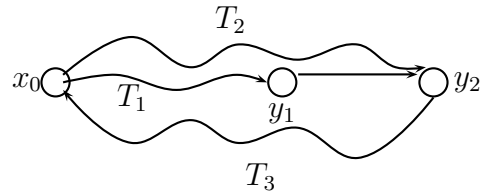


Figura 2.10

Como T_2 es de longitud par, entonces T_3 es de longitud par, por observación 1. Por lo tanto $T_3 \cup T_1 \cup (y_1, y_2)$ es un camino cerrado dirigido de longitud impar, el cual contiene un ciclo dirigido de longitud impar, lo cual no puede suceder por hipótesis.

Si existe $(y_2, y_1) \in F(D)$.

Como D' es fuertemente conexa existe T'_3 una $y_1 x_0$ -trayectoria dirigida en D' .

Como T_1 es de longitud par, entonces T'_3 es de longitud par, por observación 1. Por lo tanto $T'_3 \cup T_2 \cup (y_2, y_1)$ es un camino cerrado dirigido de longitud impar, el cual contiene un ciclo dirigido de longitud impar, lo cual no puede suceder por hipótesis.

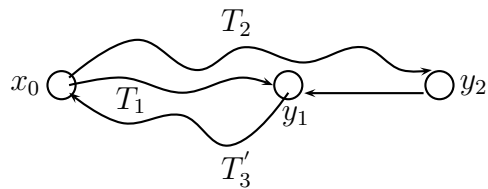


Figura 2.11

Por lo tanto S es un conjunto independiente.

2. Sea $v \in V(D) - S$ arbitrario.

Por demostrar que si existe la Sv -flecha, entonces existe la vS -flecha.

Como $S \subseteq V(D')$, entonces por elección de D' donde $\Gamma^+(D') \subseteq V(D')$ y D' es fuertemente conexa, $v \in V(D')$.

Supongamos que existe la Sv -flecha.

Como existe la Sv -flecha, entonces existe $w \in S$ tal que $(w, v) \in F(D)$, además existe T una x_0w -trayectoria dirigida de longitud par contenida en D' .

Observación 2. Como $v \notin S$, entonces todas las x_0v -trayectorias dirigidas son de longitud impar en D' .

Caso 1. $v \in T$.

Sea $T = (x_0 = u_0, u_1, \dots, u_{2n} = w)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ la x_0w -trayectoria dirigida de longitud par. Como $v \in T$, entonces $v = u_i$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$ y por la observación 2 tenemos que $T' = (x_0 = u_0, u_1, \dots, u_i = v, u_{i+1}) \subseteq T$ es una x_0u_{i+1} -trayectoria dirigida de longitud par, por lo que $u_{i+1} \in S$.

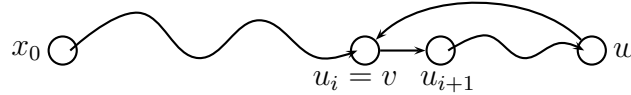


Figura 2.12

Por lo tanto, existe la vS -flecha.

Caso 2. $v \notin T$.

Como $v \in V(D')$ y D' es fuertemente conexa, entonces $\delta_D^+(v) \neq 0$, por lo que existe $z \in V(D')$ tal que $(v, z) \in F(D)$.

Subcaso 2.a. $z \notin T$.

Como $z \notin T$, entonces $T \cup (w, v) \cup (v, z)$ es una x_0z -trayectoria dirigida de longitud par contenida en D' , por lo que $z \in S$.

Por lo tanto, existe la vS -flecha.



Figura 2.13

subcaso 2.b. $z \in T$.

Como $z \in T$, entonces $z = u_j$ para algún $j \in \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$.

Afirmamos que $T' = (x_0 = u_0, u_1, \dots, u_j = z) \subseteq T$ es una trayectoria dirigida de longitud par.

Si T' fuera de longitud impar, entonces tendríamos que $T'' = (z = u_j, u_{j+1}, u_{j+2}, \dots, w)$ es una trayectoria de longitud impar, esto porque T es de longitud par, por lo tanto $T'' \cup (w, v) \cup (v, z)$ es un ciclo dirigido de longitud impar, lo cual no puede suceder por hipótesis, entonces la longitud de T' es par, por lo que $z \in S$.

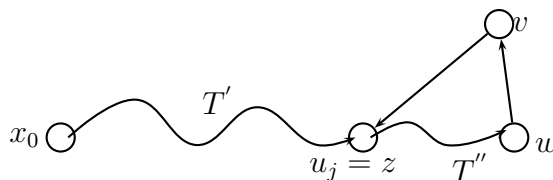


Figura 2.14

Por lo tanto, existe la vS -flecha.

Con lo anterior hemos demostrado que si existe la Sv -flecha, entonces existe la vS -flecha.

Por lo tanto, de 1) y 2) tenemos que S es un seminúcleo no vacío de D .

Por lo tanto, hemos demostrado que en general toda digráfica D que cumpla con no tener ciclos dirigidos de longitud impar tiene un seminúcleo no vacío.

Como D no tiene ciclos dirigidos de longitud impar, entonces toda subdigráfica inducida de D no tiene ciclos dirigidos de longitud impar.

Por lo tanto toda subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío, y por el Lema 2.2.2, toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo.

Por lo tanto D es Núcleo Perfecta. ■

2.3. Cuasinúcleos.

Definición 2.3.1. Sea $Q \subseteq V(D)$, Q es cuasinúcleo de D si cumple lo siguiente:

1. Q es independiente.
2. Para todo $v \in V(D) - Q$, existe $u \in Q$, tal que $(v, u) \in F(D)$ o existe $w \in V(D) - Q$ y existe un $z \in Q$, tal que $(v, w) \in F(D)$, $(w, z) \in F(D)$.

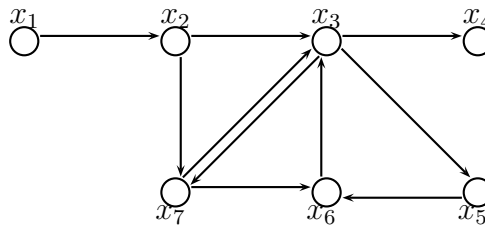


Figura 2.15

En la figura 2.15 el lector puede comprobar que el conjunto $N = \{x_2, x_4, x_6\}$ es núcleo de D y a la vez es cuasinúcleo, también podemos observar que el conjunto $Q = \{x_4, x_5, x_7\}$ es cuasinúcleo de D , pero Q no es núcleo de D ya que a los vértice x_1 y x_6 nadie los absorbe.

Con estas observaciones podemos afirmar que Núcleo implica Cuasinúcleo, pero Cuasinúcleo no implica Núcleo.

Ahora definiremos la distancia entre dos vértices, la cual utilizaremos más adelante.

Definición 2.3.2. La distancia de u a v en una digráfica D es la longitud de la trayectoria dirigida más corta de u a v , denotada por $d(u, v)$.

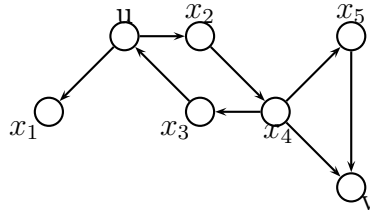


Figura 2.16

En la figura 2.16 observamos que únicamente hay dos trayectorias que van de u a v , $T_1 = (x_2, x_4, v)$ y $T_2 = (x_2, x_4, x_5, v)$, T_1 es la trayectoria de longitud mínima entre ambos vértices por lo que $d(u, v) = 3$.

En el siguiente teorema demostraremos que toda digráfica D tiene cuasinúcleo.

Teorema 2.3.3. Toda digráfica D tiene cuasinúcleo.

Demostración.

Por inducción sobre el número de vértices con $|V(D)| = n$.

1. Si $n = 1$.

Entonces tenemos una digráfica con un sólo vértice el cual cumple con ser un cuasinúcleo.

2. Hipótesis Inductiva. Supongamos que toda digráfica D' , tal que $|V(D')| < n$, tiene cuasinúcleo.

3. Por demostrar para toda digráfica D con $|V(D)| = n$.

Sea D una digráfica de orden n .

Sea $w \in V(D)$ arbitrario, consideremos $\Gamma^-(w)$.

Sea $D_1 = D - (\Gamma^-(w) \cup \{w\})$.

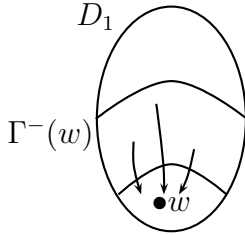


Figura 2.17

Caso 1. $D_1 = \emptyset$.

Entonces w es cuasinúcleo de D , ya que w es independiente y absorbe a $\Gamma^-(w) = D - w$.

Caso 2. $D_1 \neq \emptyset$.

Como D_1 tiene orden menor que n , por hipótesis de inducción D_1 tiene cuasinúcleo.

Sea T cuasinúcleo de D_1 .

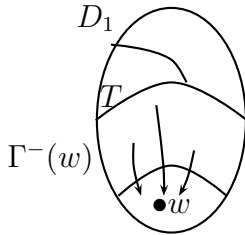


Figura 2.18

I) Observemos que no existe $u \in T$, tal que $(u, w) \in F(D)$ de lo contrario $u \in \Gamma^-(w)$ lo cual es imposible por construcción de D_1 .

a) Si existe la wT -flecha en D .

Entonces T es cuasinúcleo en D , por ser independiente en D_1 , y además como existe wT -flecha en D absorbe a w y $\forall x \in \Gamma^-(w)$ existe una trayectoria dirigida de longitud 2 a T .

Por lo tanto $\forall x \in V(D) - T$ $d(x, T) \leq 2$.

b) Si no existe la wT -flecha en D .

$T \cup \{w\}$ es cuasinúcleo de D pues es independiente en D por (I), además T es cuasinúcleo de D_1 y w absorbe a $\Gamma^-(w)$.

Por lo tanto D tiene cuasinúcleo. ■

En el Teorema 2.1.4 demostramos que toda digráfica transitiva tiene núcleo haciendo uso de un conjunto absorbente minimal arbitrario, en el siguiente teorema utilizaremos la definición de cuasinúcleo para llegar al mismo resultado.

Teorema 2.3.4. Toda digráfica D transitiva tiene núcleo.

Demostración.

Por el Teorema 2.3.3, D tiene cuasinúcleo.

Sea Q cuasinúcleo de D .

Demostraremos que Q es núcleo de D .

1. Veamos que Q es absorbente.

Tomamos un $z \in V(D) - Q$, tal que no existe la zQ -flecha en D , entonces existe $x \in V(D) - Q$ y existe un $y \in Q$, tal que $(z, x) \in F(D)$ y $(x, y) \in F(D)$ como D es transitiva se tiene que $(z, y) \in F(D)$ lo cual contradice que $(z, Q) \notin F(D)$.

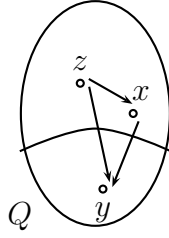


Figura 2.19

Por lo tanto Q es absorbente y como es cuasinúcleo también es independiente.

Por lo tanto Q es núcleo de D .

Por lo tanto D tiene núcleo. ■

2.4. Núcleos por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas

Para definir lo que es *Núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas*, primero consideraremos las siguientes definiciones.

Definición 2.4.1. Una digráfica D es m -coloreada, si las flechas de D son coloreadas con m -colores.

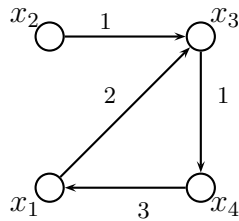


Figura 2.20

La digráfica D de la figura 2.20 es 3-coloreada, porque sus flechas están coloreadas con 3 colores.

Definición 2.4.2. Una trayectoria dirigida o ciclo dirigido es llamado monocromático(a), si todas sus flechas están coloreadas con el mismo color.

Notemos que toda flecha de una digráfica D m -coloreada es una trayectoria dirigida monocromática de color i para algún $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Definición 2.4.3. Sea D una digráfica m -coloreada.

Un conjunto $N \subseteq V(D)$ es Núcleo por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas si cumple con lo siguiente:

1. Para todo $\{u, v\} \subseteq N$ no existen trayectorias dirigidas monocromáticas entre u y v . (Es decir, N es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas.)
2. Para todo $x \in V(D) - N$, existe un $y \in N$ tal que hay una trayectoria dirigida monocromática de x a y . (Es decir, N es absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas.)

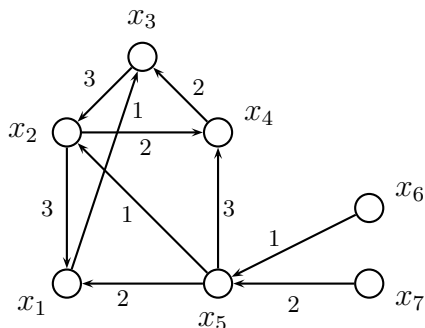


Figura 2.21

En la figura 2.21 se muestra otro ejemplo de una digráfica 3-coloreada que tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Afirmamos que $N = \{x_3, x_5\}$ es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D , ya que podemos observar que entre x_3 y x_5 no existen trayectorias dirigidas monocromáticas, por lo que N es un conjunto independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas, y para $\{x_1, x_2, x_4, x_6, x_7\}$ que no pertenecen a N tenemos que existen:

- T_1 una x_1x_3 -trayectoria dirigida monocromática de color 1.
- T_2 una x_2x_3 -trayectoria dirigida monocromática de color 2.
- T_3 una x_4x_3 -trayectoria dirigida monocromática de color 2.
- T_3 una x_6x_5 -trayectoria dirigida monocromática de color 1.
- T_4 una x_7x_5 -trayectoria dirigida monocromática de color 2.

Por lo que N es absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Por lo tanto, N es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D .

Notemos que si D es una digráfica m -coloreada completa y ésta tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, entonces el núcleo de D constará de un sólo vértice, el lector puede comprobarlo en la figura 2.22.

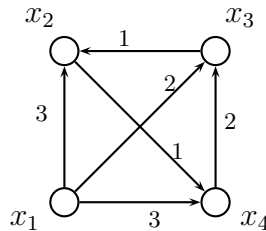


Figura 2.22

Podemos observar que al igual que en núcleos, existen digráficas m -coloreadas que tienen y no tienen núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas; y si tienen, no necesariamente es único.

Definición 2.4.4. Denotemos como T_3 al torneo transitivo de orden 3 y como C_3 al ciclo dirigido de longitud 3, cuyas flechas están coloreadas con 3 colores distintos.

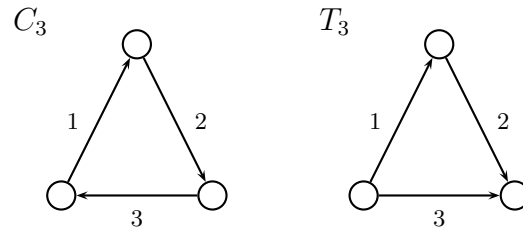


Figura 2.23. Ejemplos de digráficas C_3 y T_3 .

Definición 2.4.5. Sea D una digráfica m -coloreada.

La cerradura de D , denotada por $C(D)$, es una multidigráfica m -coloreada definida como sigue:

1. $V(C(D)) = V(D)$.
2. $F(C(D)) = F(D) \cup \{\bigcup_{i=1}^m (u, v) \text{ de color } i / \exists \text{ una } uv\text{-trayectoria dirigida monocromática de longitud } \geq 2 \text{ de color } i\}$.

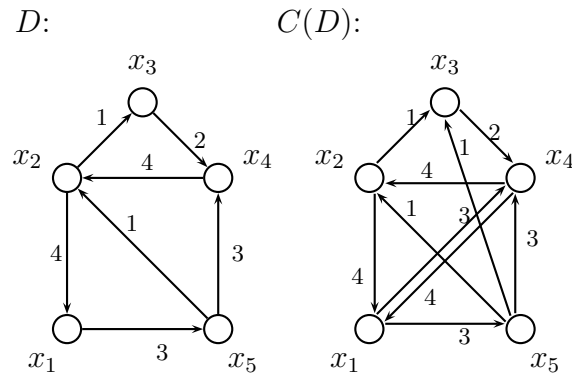


Figura 2.24

Podemos observar que en la digráfica D 4-coloreada de la figura 2.24, todas las trayectorias dirigidas monocromáticas contenidas en D de longitud mayor o igual que 2 son las siguientes:

$$T_1 = (x_5, x_2, x_3) \text{ de color } 1.$$

$T_2 = (x_1, x_5, x_4)$ de color 3.

$T_3 = (x_4, x_2, x_1)$ de color 4.

por lo que en $C(D)$ se tienen las flechas:

(x_5, x_3) de color 1.

(x_1, x_4) de color 3.

(x_4, x_1) de color 4.

y todas las flechas que estaban en D con sus respectivos colores.

Observemos que si $\gamma = (x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, x_1)$ es un ciclo dirigido monocromático de color a , entonces se tiene que para todo par de vértices consecutivos x_i y x_{i+1} de γ , $(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i)$ es una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria dirigida monocromática de color a , por lo que en la cerradura de γ tenemos a la flecha (x_{i+1}, x_i) con color a . Como γ también está contenido en $C(D)$, por definición de cerradura, entonces (x_i, x_{i+1}) es una flecha simétrica de γ en $C(D)$ y como esto pasa para todo par de vértices consecutivos de γ , entonces se concluye que γ es un ciclo dirigido simétrico en su cerradura, ver figura 2.25.

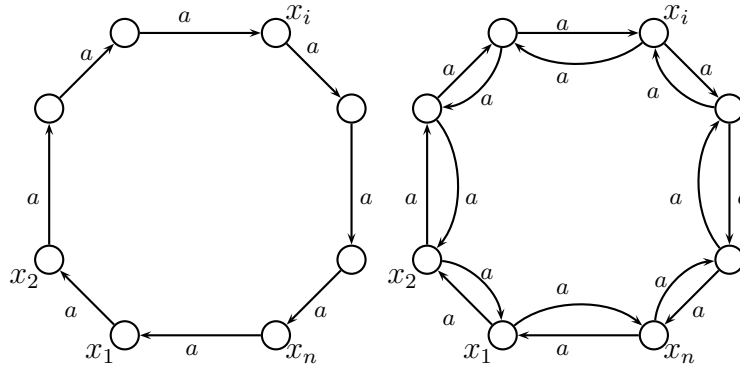


Figura 2.25

A partir de este momento, escribiremos **t.d.m** para referirnos a trayectorias dirigidas monocromáticas y **núcleo por t.d.m** para referirnos a núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Lema 2.4.6. Sea D una digráfica m -coloreada y $C(D)$ su cerradura, entonces $C(D) \cong C(C(D))$.

Demostración.

Sea D una digráfica m -coloreada.

Por definición de cerradura tenemos que:

$$V(C(D)) = V(C(C(D))) \text{ y } F(C(D)) \subseteq F(C(C(D))).$$

Por demostrar que $F(C(D)) = F(C(C(D)))$.

Sólo basta probar que $F(C(C(D))) \subseteq F(C(D))$.

Supongamos que existe $a = (u, v)$ con $a \in F(C(C(D)))$ tal que $a \notin F(C(D))$, como $a \in F(C(C(D)))$, entonces por definición de cerradura tenemos que en $C(D)$ existe T una uv -trayectoria dirigida monocromática de color i , donde $\ell(T) \geq 2$ ya que $a \notin F(C(D))$.

Supongamos que $T = (u = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = v)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$. Como $\{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), \dots, (x_{n-1}, x_n)\} \subseteq F(C(D))$, entonces por definición de cerradura tenemos que existen en D T_1 una x_1x_2 -trayectoria dirigida monocromática de color i , T_2 una x_2x_3 -trayectoria dirigida monocromática de color i , ... , T_{n-1} una $x_{n-1}x_n$ -trayectoria dirigida monocromática de color i , por lo que la $\bigcup_{i=1}^{n-1} T_i$ es un uv -camino dirigido monocromático de color i contenido en D , el cual contiene una uv -trayectoria dirigida y como todas sus flechas tienen el mismo color, entonces esta trayectoria dirigida es monocromática.

Por lo tanto $a \in F(C(D))$, lo cual es una contradicción, ya que supusimos que $a \notin F(C(D))$.

Por lo tanto $F(C(C(D))) = F(C(D))$.

Como $V(C(D)) = V(C(C(D)))$, entonces se concluye que $C(D) \cong C(C(D))$. ■

Teorema 2.4.7. Sea D una digráfica m -coloreada. N es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D si y sólo si N es núcleo de $C(D)$.

Demostración.(\Rightarrow)

Sea D una digráfica m -coloreada.

N es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D .

Por demostrar que N es núcleo de $C(D)$.

1. Veamos que N es un conjunto independiente en $C(D)$.

Sea $\{u, v\} \subseteq N$.

Como N es núcleo por t.d.m en D , entonces no existen uv -t.d.m y vu -t.d.m en D .

Por lo tanto, por definición de cerradura, $(u, v) \notin F(C(D))$ y $(v, u) \notin F(C(D))$.

Por lo tanto N es independiente en $C(D)$.

2. Veamos que N es un conjunto absorbente en $C(D)$.

Sea $x \in V(C(D)) - N$, sabemos que $V(D) = V(C(D))$ y N es núcleo por t.d.m de D , entonces existe xN -t.d.m en D y por definición de cerradura existe la xN -flecha en $C(D)$.

Por lo tanto, $\forall x \in V(C(D)) - N$ existe la xN -flecha en $C(D)$.

Por lo tanto de 1) y 2) se concluye que N es núcleo de $C(D)$.

(\Leftarrow)

Sea N un núcleo de $C(D)$.

Por demostrar que N es núcleo por t.d.m en D .

1. Veamos que N es un conjunto independiente por t.d.m en D .

Sea $\{u, v\} \subseteq N$.

Como N es núcleo en $C(D)$, N es un conjunto independiente en $C(D)$, entonces no existe $(u, v) \in F(C(D))$, no existe $(v, u) \in F(C(D))$ y por definición de cerradura no existe una uv -t.d.m en D y no existe una vu -t.d.m en D .

Por lo tanto N es un conjunto independiente por t.d.m en D .

2. Veamos que N es absorbente por t.d.m en D .

Sea $x \in V(D) - N$.

Como $V(D) = V(C(D))$ y N es absorbente en $C(D)$, entonces existe la xN -flecha en $C(D)$ y por definición de cerradura tenemos que existe una xN -t.d.m en D .

Por lo tanto, $\forall x \in V(D) - N$ existe una xN -t.d.m en D .

Por lo tanto, de 1) y 2) concluimos que N es núcleo por t.d.m en D . ■

Corolario 2.4.8. Sea D una digráfica m -coloreada, si para todo par de flechas a y b de D el color de a es distinto al de b , entonces N es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D si y sólo si N es núcleo de D .

Demostración.

Sea D una digráfica m -coloreada tal que para todo par de flechas a y b de D , el color de a es distinto al color de b .

Por hipótesis tenemos que en D para todo $\{u, v\} \subseteq V(D)$ no existen T_1 una uv -t.d.m y T_2 una vu -t.d.m con $l(T_1) \geq 2$, $l(T_2) \geq 2$, por lo que $C(D) = D$.

Por lo tanto por el Teorema 2.4.8 tenemos que N es núcleo por t.d.m. de D si y sólo si N es núcleo de $C(D) = D$. ■

Capítulo 3.

Torneos Bipartitos y Torneos Bipartitos m -coloreados.

Basándonos en las definiciones y resultados vistos en el capítulo 1 y 2 comenzaremos con la parte medular de este trabajo: Núcleos por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas en Torneos Bipartitos.

Iniciamos definiendo lo que es un torneo bipartito, los torneos bipartitos tienen cierta similitud con los torneos debido a la gran cantidad de flechas que poseen. Veremos una clase especial de vértices en torneos bipartitos llamados reyes y trabajaremos con torneos bipartitos m -coloreados, es decir, todas las flechas del torneo tienen asignado un color. Daremos algunas condiciones para la existencia de núcleos por trayectorias dirigidas en torneos bipartitos.

3.1. Torneos Bipartitos

Definición 3.1.1. Una digráfica D es un torneo bipartito si existe una bipartición $\{V_1, V_2\}$ de $V(D)$ tal que toda flecha de D tiene un extremo en V_1 y otro en V_2 , y entre cualquier vértice de V_1 y cualquier vértice de V_2 existe una y sólo una flecha.

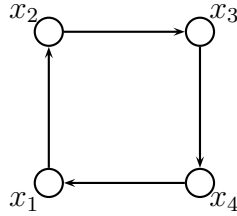


Figura 3.1.

En la figura 3.1 mostramos un ejemplo de un torneo bipartito con particiones $V_1 = \{x_2, x_4\}$ y $V_2 = \{x_1, x_3\}$.

Definición 3.1.2. Si $d(u, v) \leq r$ para cada $u \in V(D)$, donde r es un entero positivo, entonces v es un r -rey de D . El conjunto de todos los r -reyes de D es denotado por $K_r(D)$.

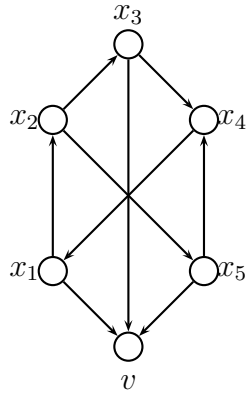


Figura 3.2

El lector puede comprobar en la figura 3.2 que $\forall x \in V(D) - v$, $d(x, v) \leq 2$ por lo que v es un 2-rey de D .

Observemos que la definición de ser 2-rey equivale a la de Cuasinúcleo que consta de un sólo elemento, visto en el capítulo 2 [2.3.1].

Ahora comenzamos demostrando algunos resultados acerca de los vértices llamados reyes.

Lema 3.1.3. Un vértice v de un torneo bipartito D es un 2-rey si y sólo si v es el único vértice tal que $\delta_D^+(v) = 0$.

Demostración.(\Rightarrow)

Supongamos que v es un 2-rey en D , y que $\{V_1, V_2\}$ es una partición de $V(D)$.

Por demostrar que $\delta_D^+(v) = 0$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $v \in V_1$. Como D es un torneo bipartito, la longitud de las V_2v -trayectorias dirigidas es impar y las $(V_1 - v)v$ -trayectorias dirigidas son de longitud par, pero como $v \in K_2(D)$ tenemos que las uv -trayectorias dirigidas $\forall u \in V(D) - v$ son de longitud 1 ó 2 por lo que $d(u, v) = 1 \forall u \in V_2$ y $d(u, v) = 2 \forall u \in V_1 - v$.

Por lo tanto $\forall u \in V(D) - v$, $\delta_D^+(u) > 0 \dots (1)$

Como $d(u, v) = 1$, $(u, v) \in F(D) \forall u \in V_2$, por lo tanto $\delta_D^+(v) = 0$ y por (1) es el único vértice con esa propiedad.

(\Leftarrow)

Supongamos que v es el único vértice tal que $\delta_D^+(v) = 0$.

Por demostrar que v es un 2-rey en D .

Supongamos que $v \in V_1$, como por hipótesis $\delta_D^+(v) = 0$ y D es un torneo bipartito, entoces $(u, v) \in F(D) \forall u \in V_2$, por lo tanto $d(V_2, v) = 1$. Además como $\delta_D^+(u) > 0 \forall u \in V_1 - v$ existe uV_2 -flecha. Ahora como existe V_2v -flecha $\forall u \in V_2$, entonces $d(V_1 - v, v) = 2$.

Por lo tanto v es un 2-rey en D . ■

Lema 3.1.4. Un torneo bipartito D tiene a lo más un 2-rey.

Demostración.

Si D tiene un 2-rey éste consiste en el único vértice v con $\delta_D^+(v) = 0$, por el Lema 3.1.3. ■

Lema 3.1.5. Un vértice $v \in V_1$ de un torneo bipartito D con particiones $\{V_1, V_2\}$ es un 3-rey si y sólo si las dos siguientes condiciones se satisfacen:

- a) $\Gamma^-(v) \not\subseteq \Gamma^-(x)$, para todo $x \in V_1 - v$;
- b) para todo $y \in V_2$, $\delta_D^+(y) > 0$.

Demostración.(\Rightarrow)

$v \in K_3(D)$. Por demostrar a) y b).

Sea $v \in V_1$ y $x \in V_1 - v$.

Como v es un 3-rey de D , entonces $d(x, v) \leq 3$, por lo tanto $d(x, v) = 2$, (la longitud de la trayectoria que va de x a v es par) entonces $\exists t \in V_2$ tal que $t \in \Gamma^+(x)$ y $t \in \Gamma^-(v)$.

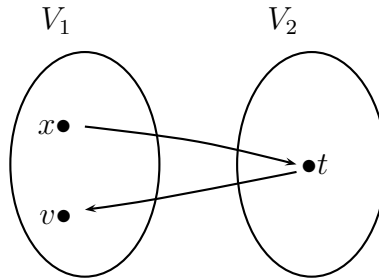


Figura 3.3

Por lo tanto $\Gamma^-(v) \not\subseteq \Gamma^-(x)$, para todo $x \in V_1 - v$.

Por otro lado tenemos: para todo $y \in V_2$, \exists al menos una yv -trayectoria dirigida por ser v 3-rey, por lo tanto $\delta_D^+(y) > 0$.

(\Leftarrow)

Sea $v \in V_1$ tal que v satisface (a) y (b). Por demostrar que $v \in K_3(D)$.

Sea $v \in V_1$ y $\Gamma^-(v) \not\subseteq \Gamma^-(x)$ para todo $x \in V_1 - v$, existe un $y \subseteq \Gamma^-(v)$ tal que $y \not\subseteq \Gamma^-(x)$, entonces $y \in \Gamma^+(x)$, por lo tanto $d(V_1 - v, v) = 2$.

Sea $y \in V_2$.

Si $y \in \Gamma^-(v)$, entonces $d(y, v) = 1$.

Si $y \in \Gamma^+(v)$, por b) existe un $w \in V_1 - v$ tal que $(y, w) \in F(D)$, como $w \in V_1 - v$ tenemos que $d(w, v) = 2$.

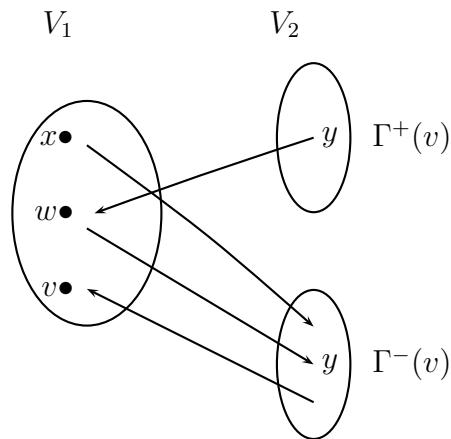


Figura 3.4

Por lo tanto $d(y, v) = 3$.

Por lo tanto $d(V(D), v) \leq 3$.

Por lo tanto $v \in K_3(D)$. ■

Lema 3.1.6. Si D es un torneo bipartito tal que para todo $y \in V_2$, $\delta_D^+(y) > 0$, entonces existe $u \in V_1$ tal que $d(V_2, u) \leq 3$.

Demostración.

Para todo $y \in V_2$, $\delta_D^+(y) > 0$. Por demostrar que existe $u \in V_1$ tal que $d(V_2, u) \leq 3$.

Definimos $M(V_1) = \{u \in V_1 \mid \delta_D^-(u) \geq \delta_D^-(x) \text{ para todo } x \in V_1\}$. El conjunto de vértices de ingrado máximo en V_1 .

Sea $u \in M(V_1)$.

Tomamos $\Gamma^-(u) \subset V_2$ los vecinos interiores de u en D , por lo tanto la $d(x, u) = 1$ para todo $x \in \Gamma^-(u)$.

Ahora tomamos $\Gamma^+(u) \subset V_2$ los vecinos exteriores de u en D , por hipótesis $\delta_D^+(x) > 0 \forall x \in V(D)$, por lo tanto existe $z \in V_1 - u$ tal que $(y, z) \in F(D)$ para todo $y \in \Gamma^+(u)$.

Caso 1. $(z, x) \in F(D)$ para todo $x \in \Gamma^-(u)$, entonces $d(z, u) = 2$, por lo tanto $d(y, u) = 3$ para todo $y \in \Gamma^+(u)$. Por lo tanto $d(V_2, u) \leq 3$.

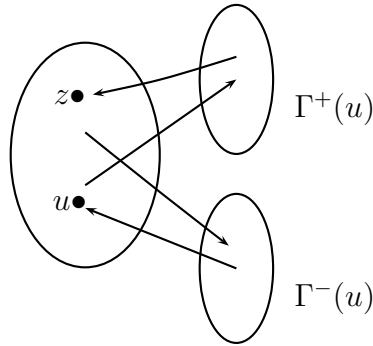


Figura 3.5

Caso 2. $(z, x) \notin F(D)$ para todo $x \in \Gamma^-(u)$, entonces $(x, z) \in F(D)$ por ser D un torneo bipartito, como $(\Gamma^+(u), z) \in F(D)$, entonces $\delta_D^-(u) + 1 \leq \delta_D^-(z)$, contradicción ya que $\delta_D^-(u)$ es máximo.

Por lo tanto este caso no es posible.

Por lo tanto existe $u \in V_1$ tal que $d(V_2, u) \leq 3$. ■

Lema 3.1.7. Si D es un torneo bipartito tal que para todo $v \in V(D)$, $\delta_D^+(v) > 0$ y $|V_1| \leq 3$, entonces V_1 tiene un 3-rey en D .

Demostración.

Por demostrar que V_1 tiene un 3-rey.

Si $|V_1| = 1$, entonces D tendría un vértice de exgrado cero.

Por lo tanto $2 \leq |V_1| \leq 3$.

Definimos $M(V_1) = \{u \in V_1 \mid \delta_D^-(u) \geq \delta_D^-(x) \text{ para todo } x \in V_1\}$. El conjunto de vértices de ingrado máximo en V_1 .

Caso 1. Si $|M(V_1)| = 1$.

Sea $M(V_1) = \{u\}$.

Tomamos $\Gamma^-(u) \subset V_2$ los vecinos interiores de u en D , por lo tanto $d(z, u) = 1$ para todo $z \in \Gamma^-(u)$.

Ahora tomamos $\Gamma^+(u) \subset V_2$ los vecinos exteriores de u en D , por hipótesis $\delta_D^+(x) > 0 \forall x \in V(D)$, por lo tanto existe $v \in V_1 - u$ tal que $(y, v) \in F(D)$, por lo que $d(y, v) = 1$ para todo $y \in \Gamma^+(u)$.

Subcaso 1.1. Si $(x, y) \in F(D)$ para todo $x \in \Gamma^-(u)$.

En este caso $\delta_D^-(u) + 1 \leq \delta_D^-(v)$, lo cual contradice que $\delta_D^+(u)$ es máximo.

Por lo tanto este caso no es posible.

Subcaso 1.2. Si $(y, x) \in F(D)$ para todo $x \in \Gamma^-(u)$.

Entonces $d(v, x) = 1$ y $d(v, u) = 2$, por lo tanto $d(y, u) = 3 \forall y \in \Gamma^+(u)$, ver figura 3.6.

Por lo tanto $d(V(D) - u, u) \leq 3$.

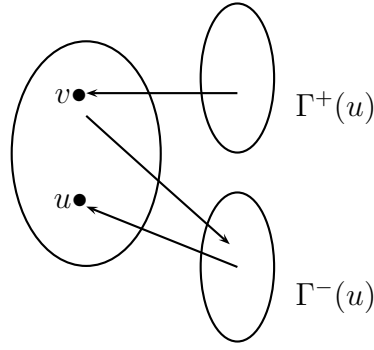


Figura 3.6

Caso 2. Si $|M(V_1)| = 2$, sea $M(V_1) = \{u, v\}$.

Subcaso 2.1. Si $\Gamma^-(u) \neq \Gamma^-(v)$.

Por hipótesis existe $z \in \Gamma^-(u)$ tal que $(v, z) \in F(D)$ y existe $y \in \Gamma^-(v)$ tal que $(u, y) \in F(D)$, por lo que $d(v, z) = 1$ y $d(u, y) = 1$, por lo tanto $d(v, u) = 2$, $d(u, v) = 2$ y $d(y, u) = 3$, $d(z, v) = 3$.

Por lo tanto $d(V(D) - u, u) \leq 3$ y $d(V(D) - v, v) \leq 3$.

Subcaso 2.2. Si $\Gamma^-(u) = \Gamma^-(v)$.

Entonces $\Gamma^+(u) = \Gamma^+(v)$, por hipótesis existe $w \in V_1$ con $w \neq u$, $w \neq v$ tal que $(z, w) \in F(D)$ para todo $z \in \Gamma^+(u) = \Gamma^+(v)$ y existe $y \in \Gamma^-(u) = \Gamma^-(v)$ tal que $(w, y) \in F(D) \forall y \in \Gamma^-(u) = \Gamma^-(v)$.

Por lo tanto $(z, w) = 1$ para todo $z \in \Gamma^+(u) = \Gamma^+(v)$ y $d(u, w) = d(v, w) = 2$ por último $(y, w) = 3$ para todo $y \in \Gamma^-(u) = \Gamma^-(v)$, por lo tanto $d(V(D) - w, w) \leq 3$.

Por lo tanto $w \in K_3(D)$.

Caso 3. Si $|M(V_1)| = 3$, sea $M(V_1) = V_1 = \{u, v, w\}$.

Si $\Gamma^-(u) = \Gamma^-(v) = \Gamma^-(w)$, entonces en D existen vértices de exgrado cero, contradicción con la hipótesis.

Por lo que este caso se reduce a $\Gamma^-(u) \neq \Gamma^-(v)$ y $\Gamma^-(u) \neq \Gamma^-(w)$ con $\Gamma^-(v) = \Gamma^-(w)$.

Entonces $\Gamma^+(u) = \Gamma^-(v) = \Gamma^-(w)$, por lo tanto $d(u, v) = d(u, w) = 2$; por otro lado tenemos $\Gamma^-(u) = \Gamma^+(v) = \Gamma^+(w)$, por lo que $d(v, u) = d(w, u) = 2$, para terminar tenemos que $d(z, u) = 3$ para todo $z \in \Gamma^-(v) = \Gamma^-(w)$ y $d(y, v) = d(y, w) = 3$ para todo $y \in \Gamma^-(u)$.

Por lo tanto $\{u, v, w\} \subseteq K_3(D)$. ■

Aquí terminamos con los resultados de los vértices llamados Reyes y continuamos con un Lema interesante; donde demostraremos que la $(u_i, u_j) \in F(D)$ ó $(u_j, u_i) \in F(D)$ con $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, si i y j tienen distinta paridad.

Lema 3.1.8. Sea D un torneo bipartito, si $C = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ es un camino en D , entonces para $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ y $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $(u_i, u_j) \in F(D)$ ó $(u_j, u_i) \in F(D)$ si y sólo si $j - i \equiv 1 \pmod{2}$.

Demostración.(\Rightarrow)

Por hipótesis tenemos $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(D)$ tal que:

- a) Toda flecha de D tiene un extremo en V_1 y el otro en V_2 , y
- b) Entre cualquier vértice de V_1 y cualquier vértice de V_2 existe una y sólo una flecha en D .

Supongamos sin pérdida de generalidad que $u_0 \in V_1$.

Sea $C = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ un camino en D .

Primero demostraremos la siguiente afirmación.

- c) Para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $u_i \in V_1$ si $i \equiv 0 \pmod{2}$ ó $u_i \in V_2$ si $i \equiv 1 \pmod{2}$.

La demostración la haremos por inducción sobre i .

1. Para $i = 0$, por hipótesis $u_0 \in V_1$.

2. Hipótesis Inductiva. Suponemos válido para $i < n$, $u_i \in V_1$ si $i \equiv 0(\text{mod}2)$ ó $u_i \in V_2$ si $i \equiv 1(\text{mod}2)$.

3. Por demostrar para $i + 1$.

Como $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ ó $(u_{i+1}, u_i) \in F(D)$, por hipótesis de inducción $u_i \in V_1$ y por (a) $u_{i+1} \in V_2$ si $i \equiv 0(\text{mod}2)$ ó $u_{i+1} \in V_1$ si $i \equiv 1(\text{mod}2)$, es decir, $u_{i+1} \in V_2$ si $i + 1 \equiv 1(\text{mod}2)$ ó $u_i \in V_1$ si $i \equiv 0(\text{mod}2)$.

Por lo tanto para cualquier $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $u_i \in V_1$ si $i \equiv 0(\text{mod}2)$ ó $u_i \in V_2$ si $i \equiv 1(\text{mod}2)$.

Ahora demostremos el Lema.

Sean $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ y $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, supongamos $(u_i, u_j) \in F(D)$, por (a) y (c) $u_i \in V_1$ si $i \equiv 0(\text{mod}2)$ y $u_j \in V_2$ si $j \equiv 1(\text{mod}2)$ ó $(u_j, u_i) \in F(D)$, por (a) y (c) $u_j \in V_1$ si $j \equiv 0(\text{mod}2)$ y $u_i \in V_2$ si $i \equiv 1(\text{mod}2)$, es decir, $j - i \equiv 1(\text{mod}2)$.

(\Leftarrow)

Supongamos que $j - i \equiv 1(\text{mod}2)$ esto implica que $i \equiv 0(\text{mod}2)$ y $j \equiv 1(\text{mod}2)$ ó $i \equiv 1(\text{mod}2)$ y $j \equiv 0(\text{mod}2)$, por (c) y (b) $u_i \in V_1$ y $u_j \in V_2$, entonces $(u_i, u_j) \in F(D)$ ó $u_j \in V_1$ y $u_i \in V_2$, entonces $(u_j, u_i) \in F(D)$ si y sólo si $j - i \equiv 1(\text{mod}2)$. ■

El Lema (3.1.8) que acabamos de demostrar nos será de gran utilidad pues nos facilitará la demostración de algunos teoremas y lemas que veremos a continuación.

Lema 3.1.9. Si D es un torneo bipartito, entonces todo camino dirigido cerrado de longitud a lo más 6, contenido en D , es un ciclo dirigido.

Demostración.

Sea \mathcal{C} un camino dirigido cerrado en D de longitud a lo más 6, como D es un torneo bipartito por el Teorema 1.1.32 D no contiene ciclos dirigidos de longitud impar y por el Teorema 1.1.30 la longitud de \mathcal{C} es par.

Si $\ell(\mathcal{C}) = 2$, entonces D tiene una flecha simétrica lo cual no es posible por definición de torneo bipartito.

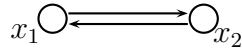


Figura 3.7.

Si $\ell(\mathcal{C}) = 4$.

Sea $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_1)$ como D es un torneo bipartito podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\{u_1, u_3\} \subseteq V_1$ y $\{u_2, u_4\} \subseteq V_2$, esto implica que $u_i \neq u_j$ para $i \in \{1, 3\}$ y $j \in \{2, 4\}$.

Si $u_1 = u_3$, como $(u_1, u_2) \in F(D)$ y $(u_2, u_3) \in F(D)$, entonces se tiene que (u_1, u_2) es una flecha simétrica en D . Contradicción con la definición de torneo bipartito. Por lo tanto $u_1 \neq u_3$. Análogamente $u_2 \neq u_4$. Por lo tanto \mathcal{C} es un ciclo dirigido de D .

Si $\ell(\mathcal{C}) = 6$.

Sea $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_1)$, como D es un torneo bipartito podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\{u_1, u_3, u_5\} \subseteq V_1$ y $\{u_2, u_4, u_6\} \subseteq V_2$, esto implica que $u_i \neq u_j$ para $i \in \{1, 3, 5\}$ y $j \in \{2, 4, 6\}$. Análogamente al caso anterior se tiene que:

$(u_1, u_2) \in F(D)$ y $(u_2, u_3) \in F(D)$, entonces $u_1 \neq u_3$.

$(u_3, u_4) \in F(D)$ y $(u_4, u_5) \in F(D)$, entonces $u_3 \neq u_5$.

$(u_5, u_6) \in F(D)$ y $(u_6, u_1) \in F(D)$, entonces $u_1 \neq u_5$.

$(u_2, u_3) \in F(D)$ y $(u_3, u_4) \in F(D)$, entonces $u_2 \neq u_4$.

$(u_4, u_5) \in F(D)$ y $(u_5, u_6) \in F(D)$, entonces $u_4 \neq u_6$.

$(u_6, u_1) \in F(D)$ y $(u_1, u_2) \in F(D)$, entonces $u_6 \neq u_2$.

Por lo tanto \mathcal{C} es un ciclo dirigido de D . ■

3.2. Torneos Bipartitos m -Coloreados con Ciclos de Longitud 4 Monocromáticos.

Lema 3.2.1. Sea D un torneo bipartito m -coloreado tal que todo \mathcal{C}_4 es monocromático. Si $\{u, v\} \subseteq V(D)$ son tales que existe T en D una uv -trayectoria dirigida monocromática y no existe ninguna vu -trayectoria dirigida monocromática, entonces $(u, v) \in F(D)$ o existe en D una uv -trayectoria dirigida de longitud 2.

Demostración.

Supongamos sin pérdida de generalidad que T es de color 1.

La demostración la haremos por inducción sobre la longitud de T .

1. Si $\ell(T) \leq 2$, entonces $(u, v) \in F(D)$ ó T es una uv -trayectoria dirigida de longitud 2.

2. Hipótesis Inductiva. Suponemos válido para $3 \leq \ell(T) \leq n$.

3. Por demostrar para $\ell(T) = n + 1$.

Consideremos $T = (u = u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1} = v)$.

a) Por el Lema 3.1.8, si $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n + 1\}$, entonces $(u_i, u_j) \in F(D)$ ó $(u_j, u_i) \in F(D)$ si y sólo si i y j tienen distinta paridad.

b) Observemos que el resultado se cumple si $(u_i, v) \in F(D)$ para algún $i \in \{0, 1, \dots, n - 2\}$.

Sea $i_0 = \min\{i \in \{0, 1, \dots, n - 2\} / (u_i, v) \in F(D)\}$ por (a) i_0 y $n + 1$ tienen distinta paridad.

Si $i_0 = 0$, entonces $(u_0 = u, v) \in F(D)$.

Si $i_0 = 1$, entonces $(u_0 = u, u_1, v)$ es una uv -trayectoria dirigida de longitud 2.

Supongamos entonces que $i_0 \in \{2, \dots, n-2\}$, en particular $(u, v) \notin F(D)$.

Por demostrar que existe una uv -trayectoria dirigida de longitud 2.

Como i_0 e $i_0 - 2$ tienen la misma paridad, entonces $i_0 - 2$ y $n + 1$ tienen distinta paridad, por (a) $(u_{i_0-2}, v) \in F(D)$ ó $(v, u_{i_0-2}) \in F(D)$, pero por la elección de i_0 tenemos que $(v, u_{i_0-2}) \in F(D)$, por hipótesis $i_0 - 2$ no puede ser 0 de lo contrario existiría una vu -trayectoria dirigida monocromática lo cual contradice la hipótesis del teorema, así que $i_0 \geq 3$, figura 3.8.

Entonces $(u_{i_0-2}, u_{i_0-1}, u_{i_0}, v, u_{i_0-2})$ es un \mathcal{C}_4 que por hipótesis es monocromático, como (u_{i_0-1}, u_{i_0}) es una flecha de T es de color 1, así que \mathcal{C}_4 es de color 1.

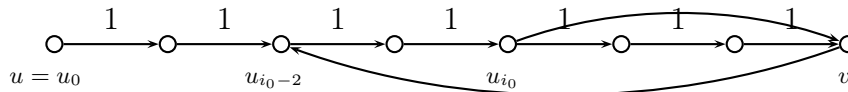


Figura 3.8

Sea $T' = (u, T, u_{i_0}) \cup (u_{i_0}, v)$, una uv -trayectoria dirigida monocromática de longitud menor que T , por hipótesis de inducción y como $(u, v) \notin F(D)$, entonces existe una uv -trayectoria dirigida monocromática de longitud 2 en D .

Por lo que si $(u_i, v) \in F(D)$ para algún $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ el teorema es cierto.

Como i e $i + 3$ tienen distinta paridad, por (a) $(u_i, u_{i+3}) \in F(D)$ ó $(u_{i+3}, u_i) \in F(D)$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$.

Caso 1. Supongamos que para algún $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, $(u_i, u_{i+3}) \in F(D)$. Sea $j_0 = \max\{j \in \{i+3, \dots, n+1\} / (u_i, u_j) \in F(D)\}$, en particular por (a) i y j_0 tienen distinta paridad.

Subcaso 1.1. $j_0 = n + 1$ el resultado se sigue de (b).

Subcaso 1.2. $j_0 = n$ e $i = 0$. Entonces $(u_0 = u_i, u_{j_0} = u_n, u_{n+1} = v)$ es una uv -trayectoria dirigida de longitud 2 en D .

Subcaso 1.3 $j_0 = n$ e $i \geq 1$. Como i y j_0 tienen distinta paridad, entonces $i - 1$ y $j_0 + 1 = n + 1$ tienen distinta paridad, por (a) $(u_{i-1}, u_{n+1} = v) \in F(D)$ ó $(u_{n+1} = v, u_{i-1}) \in F(D)$.

Si $(u_{i-1}, u_{n+1} = v) \in F(D)$ el resultado se sigue de (b).

Si $(u_{n+1} = v, u_{i-1}) \in F(D)$, entonces $(u_{i-1}, u_i, u_{j_0} = u_n, u_{n+1} = v, u_{i-1})$ es un \mathcal{C}_4 en D que por hipótesis es monocromático, figura 3.9, como (u_{i-1}, u_i) es una flecha de T es de color 1, por lo que \mathcal{C}_4 es de color 1.

Sea $T' = (u, T, u_i) \cup (u_i, u_{j_0} = u_n) \cup (u_n, u_{n+1} = v)$, una uv -trayectoria dirigida monocromática de longitud menor que T , por hipótesis de inducción $(u, v) \in F(D)$ o existe una uv -trayectoria dirigida de longitud 2 en D .

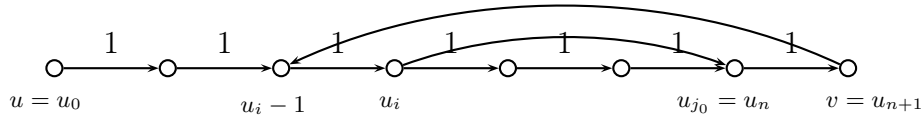


Figura 3.9

Subcaso 1.4. $j_0 \leq n - 1$. Como i y j_0 tienen distinta paridad, entonces i y $j_0 + 2$ tienen distinta paridad, por (a) $(u_i, u_{j_0+2}) \in F(D)$ ó $(u_{j_0+2}, u_i) \in F(D)$, por la elección de j_0 tenemos que $(u_{j_0+2}, u_i) \in F(D)$. Entonces $(u_i, u_{j_0}, u_{j_0+1}, u_{j_0+2}, u_i)$ es un \mathcal{C}_4 en D que por hipótesis es monocromático, como (u_{j_0}, u_{j_0+1}) es una flecha de T es de color 1, por lo que \mathcal{C}_4 es de color 1, figura 3.10.

Sea $T' = (u, T, u_i) \cup (u_i, u_{j_0}) \cup (u_{j_0}, T, v)$, una uv -trayectoria dirigida monocromática de longitud menor que T , por hipótesis de inducción $(u, v) \in F(D)$ o existe una uv -trayectoria dirigida de longitud 2 en D .

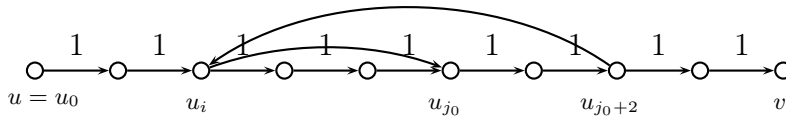


Figura 3.10

Caso 2. Supongamos que para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$, $(u_{i+3}, u_i) \in F(D)$. Entonces $(u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, u_i)$ es un \mathcal{C}_4 en D que por hipótesis es monocromático, como (u_i, u_{i+1}) es una flecha de T es de color 1, por

lo que \mathcal{C}_4 es de color 1. Por lo tanto, para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$, (u_{i+3}, u_i) es de color 1.

Sea $k \in \{1, 2, 3\}$ tal que $k \equiv n+1 \pmod{3}$.

Si $k = 1$, entonces $(v = n+1, u_{n-2}, u_{n-5}, \dots, u_1) \cup (u_1, u_2, u_3) \cup (u_3, u_0 = u)$ es una vu -trayectoria dirigida monocromática en D , lo cual contradice la hipótesis inicial, figura 3.11.

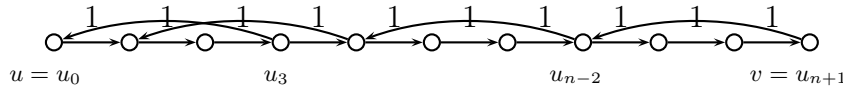


Figura 3.11

Si $k = 2$, entonces $(v = n+1, u_{n-2}, u_{n-5}, \dots, u_2) \cup (u_2, u_3) \cup (u_3, u_0 = u)$ es una vu -trayectoria dirigida monocromática en D , lo cual contradice la hipótesis inicial, figura 3.12.

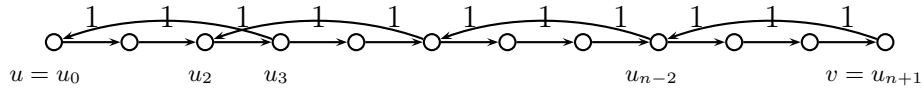


Figura 3.12

Si $k = 3$, entonces $(v = n+1, u_{n-2}, u_{n-5}, \dots, u_3, u_0)$ es una vu -trayectoria dirigida monocromática en D , lo cual contradice la hipótesis inicial, figura 3.13.

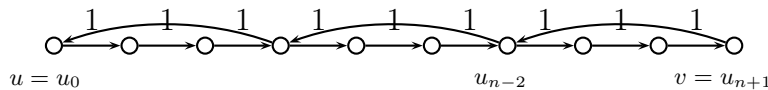


Figura 3.13

Por lo tanto este caso no existe.

Por lo tanto en D existe la (u, v) flecha o una uv -trayectoria dirigida de longitud 2. ■

Que todo \mathcal{C}_4 sea monocromático en un torneo bipartito es la primera condición para que estos tengan núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas y lo demostraremos en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.2. Sea D un torneo bipartito m -coloreado tal que todo \mathcal{C}_4 es monocromático. Entonces $C(D)$ es núcleo perfecta y por lo tanto D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Demostración.

Demostraremos que todo ciclo dirigido de $C(D)$ tiene al menos una flecha simétrica para luego aplicar el Teorema 2.1.13 y concluir que $C(D)$ es núcleo perfecta.

Demostración por contradicción.

Supongamos que $\mathcal{C} = (u_0, u_1, \dots, u_n, u_0)$ es un ciclo dirigido de $C(D)$ que no tiene flechas simétricas.

a) Por definición de cerradura como $(u_i, u_{i+1}) \in F(C(D))$ para algún $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, entonces existe en D alguna $u_i u_{i+1}$ -trayectoria dirigida monocromática, como \mathcal{C} no tiene flechas simétricas tenemos que en D no existen $u_{i+1} u_i$ -trayectoria dirigida monocromáticas, entonces por el Lema 3.2.1 podemos concluir que $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ o existe una $u_i u_{i+1}$ -trayectoria dirigida de longitud 2 en D .

Caso 1. Para $n = 2$. Como D es un torneo bipartito por el Teorema 1.1.31 no tiene ciclos de longitud impar, esto implica que para alguna $i \in \{0, 1, 2\}$, $(u_i, u_{i+1}) \notin F(D)$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $(u_0, u_1) \notin F(D)$, entonces por (a) existe $v_0 \in V(D)$ tal que (u_0, v_0, u_1) es una $u_0 u_1$ -trayectoria dirigida de longitud 2, ver figura 3.14.

Si $(u_1, u_2), (u_2, u_0) \in F(D)$, entonces $(u_0, v_0, u_1, u_2, u_0)$ es un \mathcal{C}_4 que por hipótesis es monocromático, así (u_1, u_2, u_0) es una $u_1 u_0$ -trayectoria dirigida monocromática en D , lo que implica que (u_0, u_1) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con la hipótesis, ya que en \mathcal{C} no existen flechas simétricas.

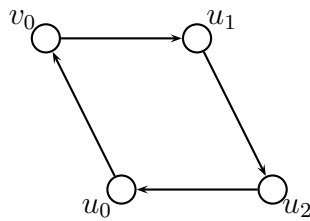


Figura 3.14

Ahora si $(u_1, u_2) \notin F(D)$, por (a) existe $v_1 \in V(D)$ tal que (u_1, v_1, u_2) es una u_1u_2 -trayectoria dirigida de longitud 2, entonces $(u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, u_0)$ es un C_5 , por el Teorema 1.1.32 esto no es posible. Por lo tanto $(u_2, u_0) \notin F(D)$, por (a) existe $v_2 \in V(D)$ tal que (u_2, v_2, u_0) es una u_2u_0 -trayectoria dirigida de longitud 2, entonces $(u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_0)$ es un C_6 , por el Lema 3.1.8 $(u_0, v_1) \in F(D)$ ó $(v_1, u_0) \in F(D)$, ya que 0 y 1 son de distinta paridad.

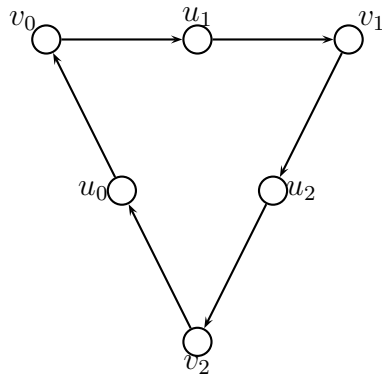


Figura 3.15

Si $(u_0, v_1) \in F(D)$, entonces $(u_0, v_1, u_2, v_2, u_0)$ es un C_4 que por hipótesis es monocromático, así (u_0, v_1, u_2) es una u_0u_2 -trayectoria dirigida monocromática y (u_2, v_2, u_0) es una u_2u_0 -trayectoria dirigida monocromática, lo que implica que (u_0, u_2) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con la hipótesis, ya que en \mathcal{C} no existen flechas simétricas.

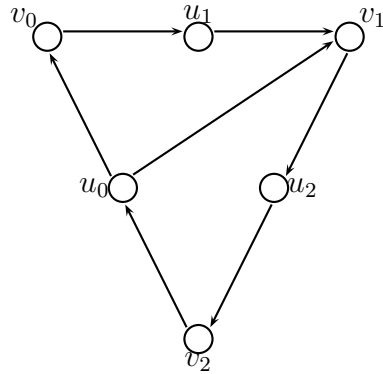


Figura 3.16

Si $(v_1, u_0) \in F(D)$, entonces análogo al caso anterior $(u_0, v_0, u_1, v_1, u_0)$ es un C_4 que por hipótesis es monocromático, así (u_1, v_1, u_0) es una u_1u_0 -trayectoria dirigida monocromática, lo que implica que (u_0, u_1) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con la hipótesis, ya que en \mathcal{C} no existen flechas simétricas.

Por lo tanto este caso no es posible.

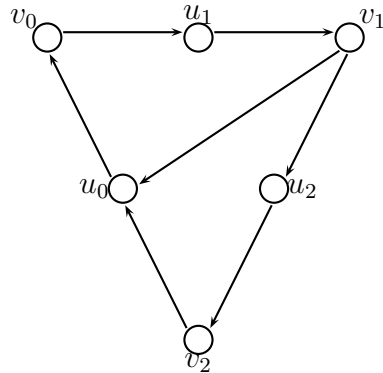


Figura 3.17

Caso 2. Para $n \geq 3$.

Por (a), tenemos que para cada $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ definimos.

$$T_i = \begin{cases} (u_i, u_{i+1}), & \text{si } (u_i, u_{i+1}) \in F(D); \\ (u_i u_{i+1})- & \text{trayectoria dirigida de longitud 2;} \\ & \text{si } (u_i, u_{i+1}) \notin F(D). \end{cases}$$

Por lo que $\mathcal{C}^1 = \cup_{i=0}^n T_i$, \mathcal{C}^1 es un camino dirigido cerrado en D .

Denotemos $\mathcal{C}^1 = (z_0, z_1, \dots, z_k, z_0)$ y definimos la función:

$\varphi : \{0, 1, \dots, k\} \longrightarrow V(\mathcal{C})$ tal que:

si $u_i = z_{i_0}$, entonces $\varphi(i_0) = z_{i_0}$ y $\varphi(i_0 + 1) = z_{i_0}$ si la longitud de T_i es 2.

Decimos que el índice i del vértice z_i de \mathcal{C}^1 es **principal** si $z_i = \varphi(i)$ y denotaremos a $I_P = \{i/i \text{ es principal}\}$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $0 \in I_P$ y $u_0 = z_0$. Como D es un torneo bipartito por el Teorema 1.1.32 no tiene ciclos dirigidos de longitud impar y por el Teorema 1.1.30 todo camino dirigido cerrado es de longitud par, es decir, $k \equiv 1(\text{mod}2)$. Por el Lema 3.1.8 para $i \in \{1, \dots, \frac{k-3}{2}\}$, $(z_0, z_{2i+1}) \in F(D)$ ó $(z_{2i+1}, z_0) \in F(D)$.

Subcaso 2.1. Supongamos que $(z_3, z_0) \in F(D)$.

Entonces $(z_0, z_1, z_2, z_3, z_0)$ es un C_4 de D que por hipótesis es monocromático, por la construcción de \mathcal{C}^1 tenemos que: $u_1 = z_1$ si $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ ó $u_1 = z_2$ si existe la $u_i u_{i+1}$ -trayectoria de longitud 2.

Si $u_1 = z_1$, entonces $(u_1 = z_1, z_2, z_3, z_0 = u_0)$ es una $u_1 u_0$ -trayectoria dirigida monocromática, lo que implica que (u_0, u_1) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con la hipótesis de \mathcal{C} . Por lo tanto $u_1 \neq z_1$.

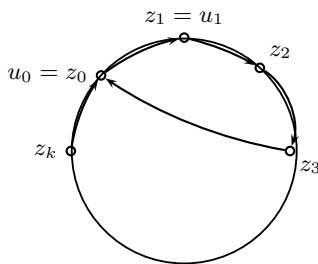


Figura 3.18

En consecuencia $u_1 = z_2$, así $(u_1 = z_2, z_3, z_0 = u_0)$ es una u_1u_0 -trayectoria dirigida monocromática en D , lo cual implica que (u_0, u_1) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con la hipótesis de \mathcal{C} .

Por lo tanto este subcaso no es posible.

Subcaso 2.2. Supongamos que $(z_0, z_{k-2}) \in F(D)$.

Entonces $(z_0, z_{k-2}, z_{k-1}, z_k, z_0)$ es un C_4 de D que por hipótesis es monocromático, por la construcción de C^1 tenemos que: $z_k = u_n$ ó $z_{k-1} = u_n$.

Si $z_k = u_n$, entonces $(u_0 = z_0, z_{k-2}, z_{k-1}, z_k = u_n)$ es una u_0u_n -trayectoria dirigida monocromática en D , lo cual implica que (u_0, u_n) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con la hipótesis de \mathcal{C} . Por lo tanto $z_k \neq u_n$.

Por lo tanto $z_{k-1} = u_n$, así $(u_0 = z_0, z_{k-2}, z_{k-1} = u_n)$ es una u_0u_n -trayectoria dirigida monocromática en D , lo cual implica que (u_0, u_n) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con la hipótesis de \mathcal{C} .

Por lo tanto este subcaso no es posible.

Subcaso 2.3. Supongamos que $(z_0, z_3) \in F(D)$ y $(z_{k-2}, z_0) \in F(D)$.

Entonces $k - 2 \geq 5$, por lo tanto $k \geq 7$.

Sea $i_0 = \min\{i \in \{1, 2, \dots, \frac{k-5}{2}\} / (z_0, z_{2i+1}) \in F(D) \text{ y } (z_{2i+3}, z_0) \in F(D)\}$, entonces $C^1 = (z_0, z_{2i+1}, z_{2i+2}, z_{2i+3}, z_0)$ es un C_4 que por hipótesis es monocromático, supongamos que es de color 1.

Si $2i + 1 \in I_p$, entonces $z_{2i_0+1} = u_j$ para algún $j \in \{2, 3, \dots, n - 2\}$, por construcción de C^1 tenemos que $z_{2i_0+2} = u_{j+1}$ ó $z_{2i_0+3} = u_{j+1}$.

Si $z_{2i_0+2} = u_{j+1}$, entonces $(u_{j+1} = z_{2i_0+2}, z_{2i_0+3}, z_0, z_{2i_0+1} = u_j)$ es una $u_{j+1}u_j$ -trayectoria dirigida monocromática en D , lo cual implica que (u_j, u_{j+1}) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con la hipótesis de \mathcal{C} . Por lo tanto $z_{2i_0+2} \neq u_{j+1}$, en consecuencia $z_{2i_0+3} = u_{j+1}$, así (u_{j+1}, z_0, u_j) es una $u_{j+1}u_j$ -trayectoria dirigida

monocromática, lo cual implica que (u_j, u_{j+1}) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con la hipótesis de \mathcal{C} .

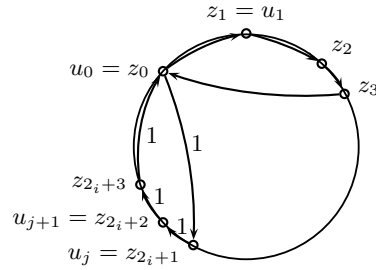


Figura 3.19

Supongamos que $2i + 1 \notin I_p$, entonces por la construcción de C^1 , $\{2i_0, 2i_0 + 2\} \subset I_p$, es decir, $z_{2i_0} = u_{j-1}$ y $z_{2i_0+2} = u_j$ para algún $j \in \{2, 3, \dots, n-2\}$, por el Lema 3.1.8 $(z_{2i_0}, z_{2i_0+3}) \in F(D)$ ó $(z_{2i_0+3}, z_{2i_0}) \in F(D)$.

Si $(z_{2i_0+3}, z_{2i_0}) \in F(D)$, entonces $(z_{2i_0}, z_{2i_0+1}, z_{2i_0+2}, z_{2i_0+3}, z_{2i_0})$ es un C_4 de D que por hipótesis es monocromático, entonces $(u_j, z_{2i_0+3}, u_{j-1})$ es una $u_j u_{j-1}$ -trayectoria dirigida monocromática, lo cual implica que (u_j, u_{j-1}) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con la hipótesis de \mathcal{C} .

Supongamos que $(z_{2i_0}, z_{2i_0+3}) \in F(D)$, por la elección de i_0 tenemos que $(z_0, z_{2i_0-1}) \in F(D)$, entonces $C^2 = (z_0, z_{2i_0-1}, z_{2i_0}, z_{2i_0+3}, z_0)$ es un C_4 que por hipótesis es monocromático, entonces (z_{2i_0+3}, z_0) es una flecha en común de C^1 y C^2 , entonces C^1 y C^2 son del mismo color, así $(u_j = z_{2i_0+2}, z_{2i_0+3}, z_0, z_{2i_0-1}, z_{2i_0} = u_{j-1})$ es una $u_j u_{j-1}$ -trayectoria dirigida monocromática, lo cual implica que (u_j, u_{j-1}) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con la hipótesis de \mathcal{C} .

Por lo tanto este subcaso tampoco es posible.

Por lo tanto todo ciclo de $C(D)$ tiene una flecha simétrica, lo que implica que por el Teorema 2.1.13 $C(D)$ es núcleo perfecta y de aquí se sigue por el Teorema 2.4.7 que D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. ■

Ahora veamos la importancia de la hipótesis del Teorema 3.2.2, si le cambiamos la hipótesis de que todo C_4 es monocromático por que todo C_4 sea casimonocromático, entonces la cerradura transitiva de D no necesariamente es núcleo perfecta.

Observemos el ejemplo.

Sea D^* un torneo bipartito 3-coloreado tal que:

$$V(D^*) = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$F(D^*) = \{(a, d), (d, b), (b, e), (e, c), (c, f), (f, a), (d, c), (e, a), (f, b)\}$$

Las flechas de D están coloreadas como sigue:

$(d, c), (c, f), (f, a)$ tienen el color 1,

$(e, a), (a, d), (d, b)$ tienen el color 2 y

$(f, b), (b, e), (e, c)$ tienen el color 3.

Los únicos C_4 que posee D^* son:

(a, d, c, f, a) , (b, e, a, d, b) y (c, f, b, e, c) y son casimonocromáticos.

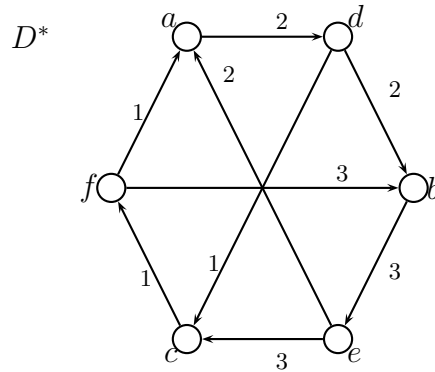


Figura 3.20

En $C(D^*)$ se tiene el triángulo dirigido (a, b, c, a) el cual es una subgráfica inducida de $C(D^*)$ que no tiene núcleo. Por lo tanto la cerradura no es núcleo perfecta.

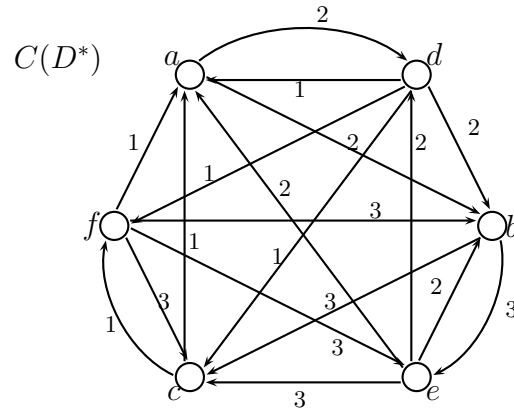


Figura 3.21

A partir de esta digráfica construimos la siguiente familia de torneos bipartitos D_n tal que en todos ellos C_4 es casimonocromático y cuya cerradura transitiva no es núcleo perfecta.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea D_n la digráfica que se obtiene a partir de agregarle a D^* n -vértices nuevos $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ y las flechas de color 3 desde estos vértices hacia a, b y c . D_n es un torneo bipartito con bipartición $\{V_1, V_2\}$, $V_1 = \{a, b, c\}$ y $V_2 = \{d, e, f, z_1, z_2, \dots, z_n\}$ igual que en D^* , los únicos C_4 que existen en D_n son $(a, d, c, f, a), (b, e, a, d, b), (c, f, b, e, c)$ y son casimonocromáticos. Así como $C(D^*)$, $C(D_n)$ contiene como subdigráfica inducida al triángulo dirigido (a, b, c, a) que no tiene núcleo. Por lo tanto $C(D_n)$ no es núcleo perfecta.

$D :$

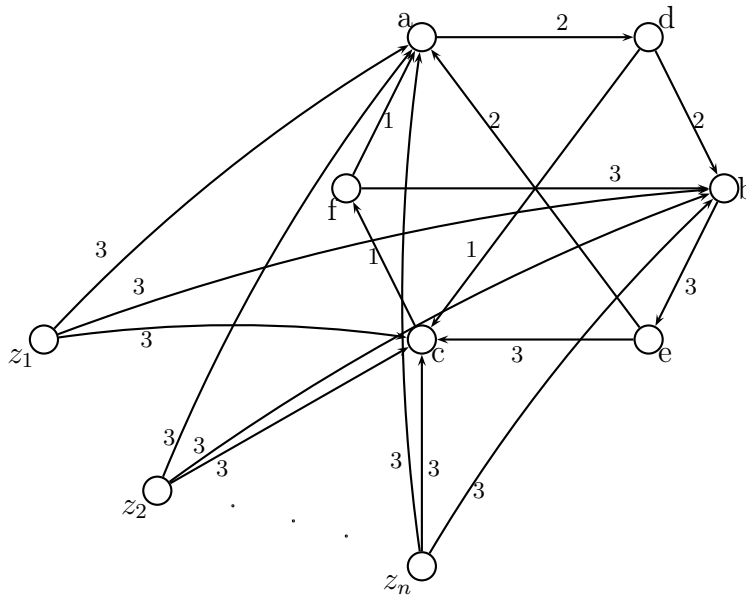


Figura 3.22

3.3. Otra Condición para la Existencia de Núcleos por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas en Torneos Bipartitos.

Definición 3.3.1. Una digráfica D es un Torneo Cíclicamente 4-partito si existe una partición $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ de los $V(D)$ tal que para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ cualquier vértice de V_i es adyacente a cualquier vértice de V_{i+1} (la suma es tomada módulo 4).

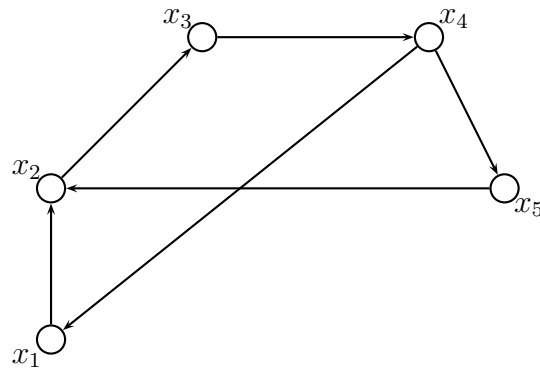


Figura 3.23

En la figura 3.23 mostramos un ejemplo de una digráfica cíclicamente 4-partita con particiones $V_1 = \{x_1, x_5\}$, $V_2 = \{x_2\}$, $V_3 = \{x_3\}$ y $V_4 = \{x_4\}$.

Definición 3.3.2. Una digráfica D m -coloreada decimos que es k -casimonocromática si todas sus flechas son del mismo color salvo a lo más k de ellas.

Lema 3.3.3. Sea D un torneo bipartito m -coloreado tal que todo C_4 es 1-casimonocromático y todo C_6 es monocromático. Si $u, v \in V(D)$ son tales que existe T en D una uv -trayectoria dirigida monocromática y no existe ninguna vu -trayectoria dirigida monocromática, entonces se tiene alguna de las siguientes posibilidades:

1. $(u, v) \in F(D)$.

2. Existe una uv -trayectoria dirigida de longitud 2.
3. Existe una uv -trayectoria dirigida monocromática de longitud 4.

Demostración.

Supongamos sin pérdida de generalidad que T es de color 1. $T = (u_0, u_1), \dots, u_n$.

Si T es de longitud impar, por el Lema 3.1.8 tenemos que $(u, v) \in F(D)$ ó $(v, u) \in F(D)$, pero por hipótesis no existe la vu -trayectoria dirigida monocromática en D , por lo tanto $(u, v) \in F(D)$.

Ahora si T es de longitud par.

En este caso procederemos por inducción sobre la longitud de T , sea ℓ la longitud de T .

1. Para $\ell(T) = 4$, el resultado es inmediato.
2. Hipótesis Inductiva. Supongamos valido para $6 \leq \ell(T) \leq 2n$.
3. Por demostrar para $\ell(T) = 2(n + 1)$.

$T = (u = u_0, u_1, \dots, u_{2(n+1)} = v)$, por el Lema 3.1.8 para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2(n + 1) - 5\}$ tenemos que $(u_{i+5}, u_i) \in F(D)$ ó $(u_i, u_{i+5}) \in F(D)$.

Analizaremos 2 casos.

Caso 1. Supongamos que para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2(n + 1) - 5\}$, $(u_{i+5}, u_i) \in F(D)$. Entonces $(u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, u_{i+4}, u_{i+5}, u_i)$ es un C_6 en D que por hipótesis es monocromático, como (u_i, u_{i+1}) es una flecha de T , es de color 1, entonces C_6 es de color 1, por lo tanto para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2(n + 1) - 5\}$, (u_{i+5}, u_i) es de color 1.

Sea $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que $k \equiv 2(n + 1)(\text{mod}5)$.

Si $k = 1$.

Tenemos $(v = u_{2(n+1)}, u_{2(n+1)-5}, u_{2(n+1)-10}, \dots, u_1) \cup (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \cup (u_5, u_0)$ es una vu -trayectoria dirigida monocromática en D , lo cual es una contradicción. Por lo tanto este caso no existe.

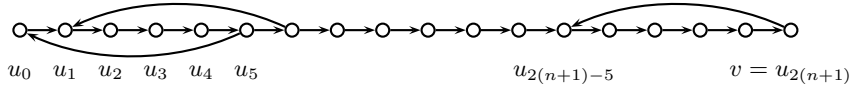


Figura 3.24

Si $k = 2$.

Tenemos $(v = u_{2(n+1)}, u_{2(n+1)-5}, u_{2(n+1)-10}, \dots, u_2) \cup (u_2, u_3, u_4, u_5) \cup (u_5, u_0)$ es una vu -trayectoria dirigida monocromática en D , lo cual es una contradicción. Por lo tanto este caso no existe.

Si $k = 3$.

Tenemos $(v = u_{2(n+1)}, u_{2(n+1)-5}, u_{2(n+1)-10}, \dots, u_3) \cup (u_3, u_4, u_5) \cup (u_5, u_0)$ es una vu -trayectoria dirigida monocromática en D , lo cual es una contradicción. Por lo tanto este caso no existe.

Si $k = 4$.

Tenemos $(v = u_{2(n+1)}, u_{2(n+1)-5}, u_{2(n+1)-10}, \dots, u_4) \cup (u_4, u_5) \cup (u_5, u_0)$ es una vu -trayectoria dirigida monocromática en D , lo cual es una contradicción. Por lo tanto este caso no existe.

Si $k = 5$.

Tenemos $(v = u_{2(n+1)}, u_{2(n+1)-5}, u_{2(n+1)-10}, \dots, u_5) \cup (u_5, u_0)$ es una vu -trayectoria dirigida monocromática en D , lo cual es una contradicción. Por lo tanto este caso no existe.

Por lo tanto estos casos no son posibles.

Caso 2. Supongamos que para algún $i \in \{0, 1, \dots, 2(n+1) - 5\}$, $(u_i, u_{i+5}) \in F(D)$. Por el Lema 3.1.8 existen flechas entre u_1 y $u_{2(n+1)}$ así como entre u_0 y u_{2n+1} .

Si $(u_1, u_{2(n+1)}) \in F(D)$ ó $(u_0, u_{2n+1}) \in F(D)$, entonces tenemos en D una uv -trayectoria de longitud 2.

Supongamos entonces que $(u_{2(n+1)}, u_1) \in F(D)$ y $(u_{2n+1}, u_0) \in F(D)$.

Observemos que si para algún $i \in \{1, 2, \dots, 2(n+1) - 5\}$, $(u_{2(n+1)}, u_i) \in F(D)$ y las flechas $(u_{2(n+1)}, u_i)$ y (u_{2n+1}, u_0) son de color 1, entonces $(v = u_{2(n+1)}, u_i) \cup (u_i, T, u_{2n+1},) \cup (u_{2n+1}, u_0)$ es una vu -trayectoria dirigida de color 1, contradicción con la hipótesis. Por lo tanto tenemos:

1. Si $i \in \{1, 2, \dots, 2(n+1) - 5\}$ y $(u_{2(n+1)}, u_i) \in F(D)$, entonces $(u_{2(n+1)}, u_i)$ no es de color 1.

Analizaremos los siguientes subcasos.

Subcaso 2.1. Supongamos que $i \in \{1, 2, \dots, 2(n+1) - 5\}$ y $(u_{2(n+1)}, u_i) \in F(D)$ esto implica que $(u_{2(n+1)}, u_i)$ no es de color 1. Por el Lema 3.1.8 $(u_{2(n+1)}, u_{2(n+1)-5}) \in F(D)$ ó $(u_{2(n+1)-5}, u_{2(n+1)}) \in F(D)$.

Si $(u_{2(n+1)}, u_{2(n+1)-5}) \in F(D)$, entonces $(u_{2(n+1)-5}, u_{2(n+1)-4}, u_{2(n+1)-3}, u_{2(n+1)-2}, u_{2(n+1)-1}, u_{2(n+1)}, u_{2(n+1)-5})$ es un C_6 de D que por hipótesis es monocromático, como $(u_{2(n+1)-5}, u_{2(n+1)-4}) \in V(T)$, entonces el ciclo es de color 1 y por lo tanto $(u_{2(n+1)}, u_{2(n+1)-5})$ es de color 1 esto contradice nuestra suposición.

Por lo tanto $(u_{2(n+1)}, u_{2(n+1)-5}) \notin F(D)$, es decir, $(u_{2(n+1)-5}, u_{2(n+1)}) \in F(D)$.

Como $(u_{2(n+1)}, u_1) \in F(D)$, entonces elegimos $i_0 = \max\{i \in \{0, 1, 2, \dots, 2(n+1) - 7\} / (u_{2(n+1)}, u_i) \in F(D)\}$, entonces $(u_{2(n+1)}, u_{i_0}) \in F(D)$ y $(u_{i_0+2}, u_{2(n+1)}) \in F(D)$, además $(u_{2(n+1)}, u_{i_0})$ no es de color 1, lo cual implica que $(u_{2(n+1)}, u_{i_0}, u_{i_0+1}, u_{i_0+2}, u_{2(n+1)})$ es un C_4 de D que por hipótesis es 1-casimonocromático, como $\{(u_{i_0}, u_{i_0+1}), (u_{i_0+1}, u_{i_0+2})\} \subset F(T)$, entonces son flechas de color 1 y como $(u_{2(n+1)}, u_i)$ no es de color 1, entonces $(u_{i_0+2}, u_{2(n+1)})$ es de color 1.

Por lo tanto tenemos $(u = u_0, T, u_{i_0+2}) \cup (u_{i_0+2}, u_{2(n+1)} = v)$ es una uv -trayectoria dirigida de color 1 de longitud menor que T y por hipótesis de inducción se sigue el resultado.

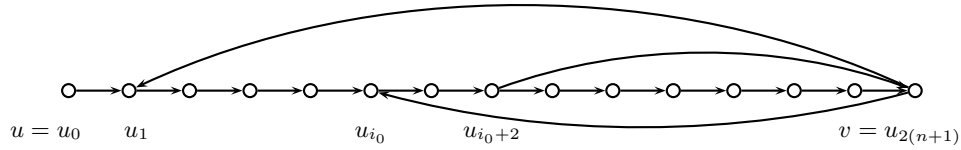


Figura 3.25

Subcaso 2.2 Supongamos que (u_{2n+1}, u_0) no es de color 1.

Sabemos que para algún $i \in \{0, 1, \dots, 2(n+1) - 5\}$, $(u_i, u_{i+5}) \in F(D)$.

Sea $\{i_0, j_0\} \subset \{0, 1, \dots, 2(n+1)\}$ tal que $j_0 - i_0 = \max\{j - i / \{i, j\} \subset \{0, 1, \dots, 2(n+1)\} \text{ y } (u_i, u_j) \in F(D)\}$, por lo anterior $j_0 - i_0 \geq 5$.

Supongamos que $i_0 \geq 2$ y $j_0 \leq 2n$, como $(u_{i_0}, u_{j_0}) \in F(D)$, entonces por el Lema 3.1.8 $j_0 - i_0 \equiv 1 \pmod{2}$, así $(j_0 + 2) - (i_0 - 2) \equiv 1 \pmod{2}$, aplicando nuevamente el Lema 3.1.8 tenemos $(u_{i_0-2}, u_{j_0+2}) \in F(D)$ ó $(u_{j_0+2}, u_{i_0-2}) \in F(D)$, por la elección de $\{i_0, j_0\}$, $(u_{j_0+2}, u_{i_0-2}) \in F(D)$.

Entonces $(u_{i_0-2}, u_{i_0-1}, u_{i_0}, u_{j_0}, u_{j_0+1}, u_{j_0+2}, u_{i_0-2})$ es un C_6 de D que por hipótesis es monocromático, lo que implica que (u_{i_0}, u_{j_0}) es de color 1.

Así $(u = u_0, T, u_{i_0}) \cup (u_{i_0}, u_{j_0}) \cup (u_{j_0}, T, u_{2(n+1)} = v)$ es una uv -trayectoria dirigida de color 1 de longitud menor que T y por hipótesis de inducción se sigue el resultado.

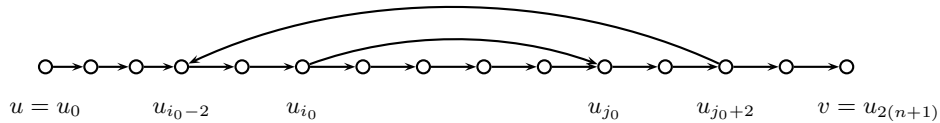


Figura 3.26

Supongamos que $i_0 \leq 1$ ó $j_0 \geq 2n + 1$, es decir, $i_0 \in \{0, 1\}$ ó $j_0 \in \{2n + 1, 2n + 2\}$. Analizaremos los 4 casos posibles.

2.2.1 $i_0 = 0$. Supongamos que $j_0 \leq 2n + 3$.

Sabemos que $j_0 - i_0 \equiv 1 \pmod{2}$, entonces $(j_0 + 4) - i_0 \equiv 1 \pmod{2}$ por el Lema 3.1.8 tenemos que $(u_{i_0}, u_{j_0+4}) \in F(D)$ ó $(u_{j_0+4}, u_{i_0}) \in F(D)$, pero por la elección de $\{i_0, j_0\}$ tenemos que $(u_{j_0+4}, u_{i_0}) \in F(D)$.

Entonces $(u_0 = u_{i_0}, u_{j_0}, u_{j_0+1}, u_{j_0+2}, u_{j_0+3}, u_{j_0+4}, u_{i_0})$ es un C_6 de D que por hipótesis es monocromático, entonces (u_{i_0}, u_{j_0}) es de color 1.

Así $(u_0, T, u_{i_0}) \cup (u_{i_0}, u_{j_0}) \cup (u_{j_0}, T, u_{2(n+1)} = v)$ es una uv -trayectoria dirigida de color 1 de longitud menor que T y por hipótesis de inducción se sigue el resultado.

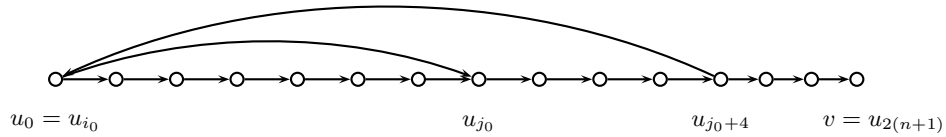


Figura 3.27

Supongamos que $j_0 \geq 2n - 1$, como $j_0 - i_0 \equiv 1 \pmod{2}$ e $i_0 = 0$, entonces $j_0 \in \{2n - 1, 2n + 1\}$, como $(u_{2n+1}, u_0) \in F(D)$, entonces $j_0 = 2n - 1$. Así $(u_0 = u_{i_0}, u_{j_0} = u_{2n-1}, u_{2n}, u_{2n+1}, u_0)$ es un C_4 en D que por hipótesis es 1-casimonocromático, como (u_{2n+1}, u_0) no es de color 1, entonces (u_{i_0}, u_{j_0}) es de color 1.

Por lo tanto $(u = u_0, u_{j_0} = u_{2n-1}, u_{2n}, u_{2n+1}, u_{2(n+1)} = v)$ es una uv -trayectoria dirigida de color 1 de longitud 4.

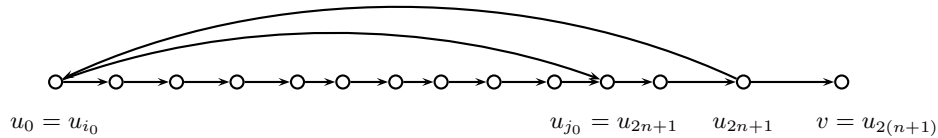


Figura 3.28

2.2.2 $i_0 = 1$. Supongamos que $j_0 \leq 2n - 2$, por los mismos argumentos usados en el subcaso 2.2.1 tenemos que $(u_{j_0+4}, u_{i_0} = u_1) \in F(D)$, entonces $(u_1 = u_{i_0}, u_{j_0}, u_{j_0+1}, u_{j_0+2}, u_{j_0+3}, u_{j_0+4}, u_{i_0})$ es un C_6 de D que por hipótesis es monocromático, entonces tenemos que (u_{i_0}, u_{j_0}) es de color 1. Así $(u = u_0, T, u_{i_0}) \cup (u_{i_0}, u_{j_0}) \cup (u_{j_0}, T, u_{2(n+1)} = v)$ es una uv -trayectoria dirigida de color 1 de longitud menor que T y por hipótesis de inducción se sigue el resultado.

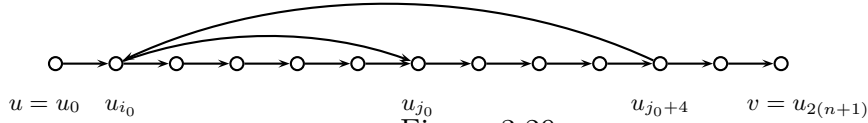


Figura 3.29

Supongamos que $j_0 \geq 2n$, como $j_0 - i_0 \equiv 1(\text{mod}2)$ e $i_0 = 1$, entonces $j_0 \in \{2n, 2n + 2\}$, como $(u_{2n+2}, u_1) \in F(D)$, entonces $j_0 = 2n$. Así $(u_1 = u_{i_0}, u_{j_0} = u_{2n}, u_{2n+1}, u_0, u_1)$ es un C_4 de D que por hipótesis es 1-casimonocromático, como (u_{2n+1}, u_0) no es de color 1, entonces (u_{i_0}, u_{j_0}) es de color 1. Por lo tanto $(u_0, u_1 = u_{i_0}, u_{j_0} = u_{2n}, u_{2n+1}, u_{2n+2} = v)$ es una uv -trayectoria dirigida de color 1 de longitud 4.

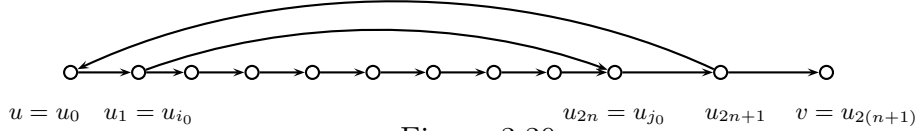


Figura 3.30

2.2.3 $j_0 = 2n + 1$. Supongamos que $i_0 \geq 4$, como $j_0 - i_0 \equiv 1(\text{mod}2)$, entonces $j_0 - (i_0 - 4) \equiv 1(\text{mod}2)$, por el Lema 3.1.8 tenemos que $(u_{i_0-4}, u_{j_0}) \in F(D)$ ó $(u_{j_0}, u_{i_0-4}) \in F(D)$, pero por la elección de $\{i_0, j_0\}$ tenemos que $(u_{j_0} = u_{2n+1}, u_{i_0-4}) \in F(D)$, entonces $(u_{i_0}, u_{j_0} = u_{2n+1}, u_{i_0-4}, u_{i_0-3}, u_{j_0-2}, u_{j_0-1}, u_{i_0})$ es un C_6 de D que por hipótesis es monocromático, entonces tenemos que (u_{i_0}, u_{j_0}) es de color 1. Así $(u = u_0, T, u_{i_0}) \cup (u_{i_0}, u_{j_0}) \cup (u_{j_0}, T, u_{2(n+1)} = v)$ es una uv -trayectoria dirigida de color 1 de longitud menor que T y por hipótesis de inducción se sigue el resultado.

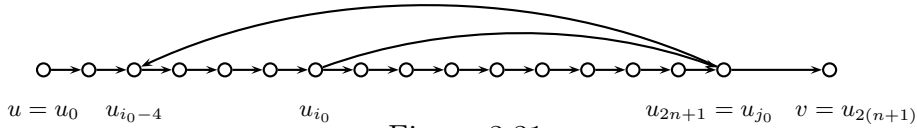


Figura 3.31

Supongamos que $i_0 \leq 2$, como $j_0 - i_0 \equiv 1(\text{mod}2)$ y $j_0 = 2n + 1$, entonces $i_0 \in \{0, 2\}$, como $(u_{2n+1}, u_0) \in F(D)$, entonces $i_0 = 2$. Así $(u_2 = u_{i_0}, u_{j_0} = u_{2n+1}, u_0, u_1, u_2)$ es un C_4 de D que por hipótesis es 1-casimonocromático, como (u_{2n+1}, u_0) no es de color 1, entonces (u_{i_0}, u_{j_0})

es de color 1. Por lo tanto $(u_0, u_1, u_2 = u_{i_0}, u_{j_0} = u_{2n+1}, u_{2(n+1)} = v)$ es una uv -trayectoria dirigida de color 1 de longitud 4.

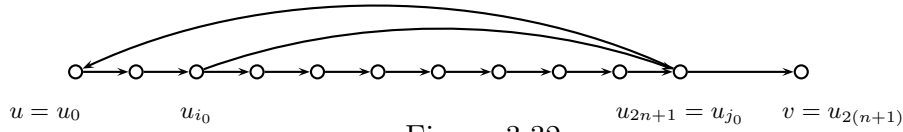


Figura 3.32

2.2.4 $j_0 = 2(n + 1)$. Supongamos que $i_0 \geq 5$, por los mismos argumentos de los subcasos anteriores tenemos que $(u_{2(n+1)} = u_{j_0}, u_{i_0-4}) \in F(D)$, entonces $(u_{i_0}, u_{j_0} = u_{2(n+1)}, u_{i_0-4}, u_{i_0-3}, u_{i_0-2}, u_{i_0-1}, u_{i_0})$ es un C_6 de D que por hipótesis es monocromático, lo que implica que (u_{i_0}, u_{j_0}) es de color 1. Así $(u = u_0, T, u_{i_0}) \cup (u_{i_0}, u_{j_0} = u_{2(n+1)} = v)$ es una uv -trayectoria dirigida de color 1 de longitud menor que T y por hipótesis de inducción se sigue el resultado.

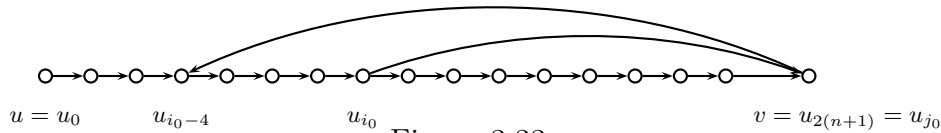


Figura 3.33

Supongamos que $i_0 \leq 3$, como $j_0 - i_0 \equiv 1 \pmod{2}$ y $j_0 = 2(n + 1)$, entonces $i_0 \in \{1, 3\}$, como $(u_{2(n+1)}, u_1) \in F(D)$, entonces $i_0 = 3$. Por lo tanto $(u_3 = u_{i_0}, u_{j_0} = u_{2(n+1)}, u_1, u_2, u_3)$ es un C_4 de D que por hipótesis es 1-casimonocromático.

Si $(u_{i_0}, u_{2(n+1)})$ es de color 1, entonces $(u_0, u_1, u_2, u_3 = u_{i_0}, u_{2(n+1)} = v)$ es una uv -trayectoria dirigida de color 1 de longitud 4.

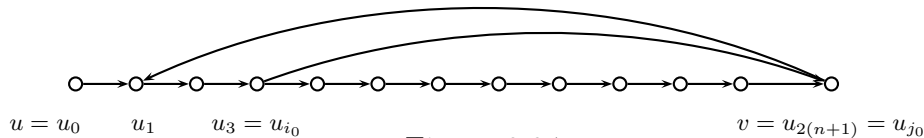


Figura 3.34

Supongamos que $(u_{i_0}, u_{2(n+1)})$ no es de color 1, entonces las otras flechas de C_4 son de color 1, en particular $(u_{2(n+1)}, u_1)$ es de color 1.

Si para algún $i \in \{3, \dots, 2n+1\}$, $(u_i, u_0) \in F(D)$ y es de color 1, entonces $(v = u_{2(n-1)}, u_1) \cup (u_1, T, u_i) \cup (u_i, u_0 = u)$ es una vu -trayectoria dirigida de color 1, contradicción con la hipótesis.

Por lo tanto si $i \in \{3, \dots, 2n+1\}$ y $(u_i, u_0) \in F(D)$, entonces (u_i, u_0) no es de color 1.

Si $(u_5, u_0) \in F(D)$, entonces $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_0)$ es un C_6 de D que por hipótesis es monocromático, entonces (u_5, u_0) es de color 1 lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $(u_5, u_0) \notin F(D)$, es decir, $(u_0, u_5) \in F(D)$.

Sea $k_0 = \max\{i \in \{5, \dots, 2n+1\} / (u_0, u_i) \in F(D)\}$, entonces $(u_0, u_{k_0}) \in F(D)$ y $(u_{k_0+2}, u_0) \in F(D)$ además (u_{k_0+2}, u_0) no es de color 1, lo que implica que $(u_0, u_{k_0}, u_{k_0+1}, u_{k_0+2}, u_0)$ es un C_4 de D que por hipótesis es 1-casimonocromático, como $\{(u_{k_0}, u_{k_0+1}), (u_{k_0+1}, u_{k_0+2})\} \subset F(T)$, entonces son flechas de color 1 y como (u_{k_0+2}, u_0) no es de color 1, entonces (u_0, u_{k_0}) es de color 1. Así $(u = u_0, u_{k_0}) \cup (u_{k_0}, T, u_{2(n+1)} = v)$ es una uv -trayectoria dirigida de color 1 de longitud menor que T y por hipótesis de inducción se sigue el resultado. ■

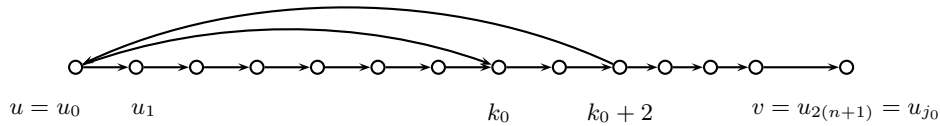


Figura 3.35

En el siguiente teorema damos otras condiciones para la existencia de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en torneos bipartitos.

Teorema 3.3.4. Sea D un torneo bipartito m -coloreado tal que todo C_4 es 1-casimonocromático, todo subtorneo cíclicamente 4-partito de orden 5 es 2-casimonocromático y todo C_6 es monocromático. Entonces $C(D)$ es núcleo perfecta y por lo tanto D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Demostración.

Demostraremos que todo ciclo dirigido de $C(D)$ tiene al menos una flecha simétrica.

Demostración por contradicción.

Supongamos que existe $\mathcal{C} = (u_0, u_1, \dots, u_n, u_0)$ un ciclo de $C(D)$ con $n \geq 2$ que no tiene flecha simétrica.

Sea $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, como $(u_i, u_{i+1}) \in F(C(D))$, entonces tenemos una $u_i u_{i+1}$ -trayectoria dirigida monocromática en D , como \mathcal{C} no tiene flecha simétrica, entonces no existe la $u_{i+1} u_i$ -trayectoria dirigida monocromática en D , por el Lema 3.3.3 $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ o existe una $u_i u_{i+1}$ -trayectoria dirigida de longitud 2 o existe una $u_i u_{i+1}$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud 4.

Para cada $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, definimos.

$$T_i = \begin{cases} (u_i, u_{i+1}), & \text{si } (u_i, u_{i+1}) \in F(D); \\ u_i u_{i+1}^- & \text{trayectoria dirigida de longitud 2,} \\ & \text{si } (u_i, u_{i+1}) \notin F(D) \text{ y } \exists \text{ tal trayectoria;} \\ u_i u_{i+1}^- & \text{trayectoria dirigida monocromática de longitud 4,} \\ & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $\mathcal{C}^1 = \cup_{i=0}^n T_i$, \mathcal{C}^1 es un camino dirigido cerrado en D .

Sea $\mathcal{C}^1 = (z_0, z_1, \dots, z_k, z_0)$ y definimos la función:

$\varphi : \{0, 1, \dots, k\} \longrightarrow V(\mathcal{C})$ de la siguiente manera:

si $T_i = (u_i = z_{i_0}, z_{i_0+1}, \dots, z_{i_0+r} = u_{i+1})$ con $r \in \{1, 2, 4\}$, entonces $\varphi(j) = z_{i_0}$ para todo $j \in \{i, i_0 + 1, i_0 + 2, \dots, i_0 + r - 1\}$.

Decimos que el índice i del vértice z_i de \mathcal{C}^1 es **principal** si $z_i = \varphi(i)$ y denotaremos a $I_P = \{i/i \text{ es principal}\}$.

De acuerdo con la definición de C^1 y de índice principal podemos afirmar:

1. Para cualquier $i \in \{0, \dots, k\}$ se tiene $\{i, i+1, i+2, i+3\} \cap I_p \neq \emptyset$, es decir, en C^1 no pueden haber 4 vértices consecutivos sin que el índice de ninguno de ellos sea principal.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $0 \in I_p$ y que $z_0 = u_0$.

Como D es un torneo bipartito por el Teorema 1.1.30 y el Teorema 1.1.32 tenemos que $k \geq 4$ y $k \equiv 1 \pmod{2}$ ya que no pueden haber ciclos de longitud impar en D y para cualesquier $i, j \in \{0, 1, \dots, k\}$ tal que $j - i \equiv 1 \pmod{2}$, por el Lema 3.1.8 $(z_i, z_j) \in F(D)$ ó $(z_j, z_i) \in F(D)$.

Analizaremos los siguientes casos.

Caso a. Supongamos que $k = 3$.

Entonces $C^1 = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_0)$ es un C_4 de D que por hipótesis es 1-casimonocromático y como $n \geq 2$, entonces $u_1 \in \{z_1, z_2\}$ y $u_n \in \{z_2, z_3\}$.

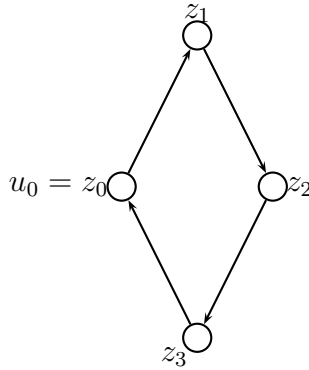


Figura 3.36

Subcaso a.1. Si C^1 es monocromático, entonces existe $u_1 u_0$ -trayectoria dirigida monocromática en D , lo que implica que (u_0, u_i) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición.

Si la flecha (z_0, z_1) tiene diferente color, entonces existe u_1u_0 -trayectoria dirigida monocromática en D , lo que implica que (u_0, u_i) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición.

Subcaso a.2. Supongamos que la flecha (z_1, z_2) tiene diferente color, entonces existe (z_2, z_3, z_0, z_1) una trayectoria dirigida monocromática en D .

Si $u_1 = z_1$, entonces $u_2 \in \{z_2, z_3\}$ en cualquiera de los 2 casos tenemos que existe u_2u_1 -trayectoria dirigida monocromática en D , lo que implica que (u_1, u_2) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con la hipótesis.

Subcaso a.3. Supongamos que la flecha (z_2, z_3) tiene diferente color, entonces existe (z_3, z_0, z_1, z_2) trayectoria dirigida monocromática en D .

Si $u_n = z_3$, entonces existe u_nu_{n-1} -trayectoria dirigida monocromática en D , lo que implica que (u_{n-1}, u_n) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición.

Si $u_n = z_2$, entonces $n = 2$ y existe u_0u_n -trayectoria dirigida monocromática en D , lo que implica que (u_2, u_0) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición.

Subcaso a.4. Supongamos que la flecha (z_3, z_0) tiene diferente color, entonces existe (z_0, z_1, z_2, z_3) una trayectoria dirigida monocromática en D , como $u_n \in \{u_2, u_3\}$, entonces existe u_0u_n -trayectoria dirigida monocromática en D , lo que implica que (u_n, u_0) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición.

Por lo tanto para $k = 3$ no es posible.

Caso b. Supongamos que $k = 5$.

Entonces $C^1 = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_0)$ es un C_6 de D que por hipótesis es monocromático, lo cual implica que \mathcal{C} es simétrico en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición.

Por lo tanto este caso tampoco es posible.

Caso c. Supongamos que $k \geq 7$.

Entonces tenemos los siguientes casos:

1.c. Sea $i \in \{0, 1, \dots, k\} \cap I_p$, entonces $(z_i, z_{i+5}) \in F(D)$.

Como $(i+5) - i \equiv 1 \pmod{2}$, entonces $(z_i, z_{i+5}) \in F(D)$ ó $(z_{i+5}, z_i) \in F(D)$, por contradicción, supongamos que $(z_{i+5}, z_i) \in F(D)$, entonces $(z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+3}, z_{i+4}, z_{i+5}, z_i)$ es un C_6 en D que por hipótesis es monocromático, sea $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ tal que $u_j = z_i$, entonces por la definición de principal $u_{j+1} \in \{z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+4}\}$, lo cual implica que existe $u_{j+1}u_j$ -trayectoria dirigida monocromática en D , por lo tanto (u_j, u_{j+1}) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición. Por lo tanto $(z_i, z_{i+5}) \in F(D)$.

2.c. Sea $i \in \{0, 1, \dots, k\}$, tal que $i+5 \in I_p$, entonces $(z_i, z_{i+5}) \in F(D)$.

Supongamos por contradicción que $(z_{i+5}, z_i) \in F(D)$, entonces $(z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+3}, z_{i+4}, z_{i+5}, z_i)$ es un C_6 de D que por hipótesis es monocromático, sea $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ tal que $u_j = z_{i+5}$, entonces por la definición de principal $u_{j-1} \in \{z_{i+1}, z_{i+3}, z_{i+4}\}$, lo cual implica que existe una $u_j u_{j-1}$ -trayectoria dirigida monocromática en D , por lo tanto (u_{j-1}, u_j) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición. Por lo tanto $(z_i, z_{i+5}) \in F(D)$.

3.c. Por demostrar que $(z_0, z_i) \in F(D)$ para cualquier $i \in \{5, 6, \dots, k-2\}$ tal que $i \equiv 1 \pmod{4}$.

Supongamos por contradicción que $(z_0, z_i) \in F(D)$ para algún $i \in \{5, 6, \dots, k-2\}$ tal que $i \equiv 1 \pmod{4}$.

Como $0 \in I_p$ por (1.c) $(z_0, z_5) \in F(D)$, entonces $i \geq 9$.

Sea $i_0 = \min\{i \in \{5, 6, \dots, k-6\} / i \equiv 1 \pmod{4} \text{ y } (z_{i+4}, z_0) \in F(D)\}$, entonces $(z_0, z_{i_0-4}) \in F(D)$, $(z_0, z_{i_0}) \in F(D)$ y $(z_{i_0+4}, z_0) \in F(D)$.

Sea $C^2 = (z_0, z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3}, z_{i_0+4}, z_0)$ es un C_6 de D que por hipótesis es monocromático. Supongamos que es de color 1.

Si $i_0 \in I_p$.

Entonces $z_{i_0} = u_j$ para algún $j \in \{5, 6, \dots, n-6\}$, por construcción de C^1 , $u_{j+1} \in \{z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+4}\}$ en cualquiera de los caso C^2 contiene una $u_{j+1}u_j$ -trayectoria dirigida monocromática dirigida en D , entonces (u_j, u_{j+1}) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición.

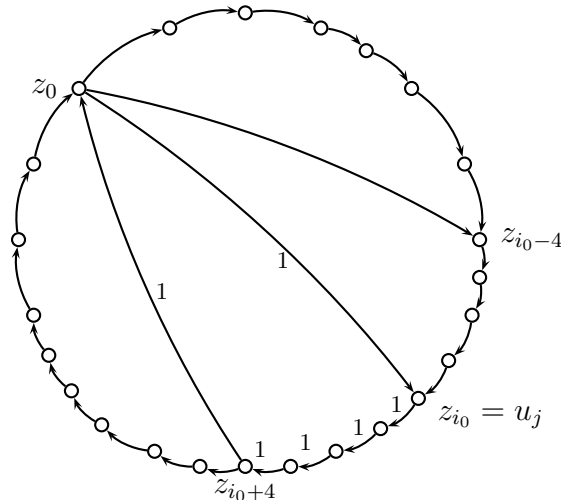


Figura 3.37

Supongamos que $i_0 \notin I_p$.

Por (1) $\{i_0-3, i_0-2, i_0-1, i_0\} \cap I_p \neq \emptyset$, entonces $\{i_0-3, i_0-2, i_0-1\} \cap I_p \neq \emptyset$, sea $\ell \in \{i_0-3, i_0-2, i_0-1\} \cap I_p$ y sea $u_j \in V(\mathcal{C})$ tal que $u_j = z_\ell$, entonces por (1.c) $(z_\ell, z_{\ell+5}) \in F(D)$ y $\ell+5 \in \{i_0+2, i_0+3, i_0+4\}$, esto implica que $C^3 = (z_{i_0-4}, C^1, z_\ell) \cup (z_\ell, z_{\ell+5}) \cup (z_{\ell+5}, C^1, z_{i_0+4}) \cup (z_{i_0+4}, z_0, z_{i_0-4})$ es un C_6 en D , pues si $z_\ell = z_{i_0-1}$, entonces $z_{\ell+5} = z_{i_0+4}$ lo cual implica que $(z_0, z_{i_0-4}, z_{i_0-3}, z_{i_0-2}, z_{i_0-1} = z_\ell, z_{i_0+4} = z_{\ell+5}, z_0)$ es un C_6 que por hipótesis es monocromático y como $(z_{i_0+4} = z_{\ell+5}, z_0) \in F(C^2) \cap F(C^3)$, entonces C^3 es de color 1.

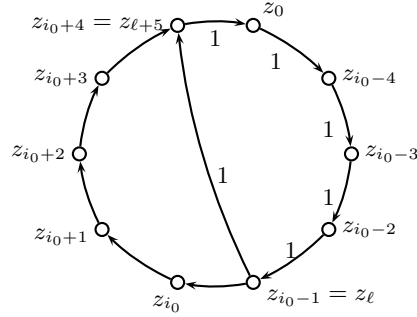


Figura 3.38

Ahora por construcción de C^1 $u_{j+1} \in \{z_{\ell+1}, z_{\ell+2}, z_{\ell+4}\} \subset \{z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3}\}$.

Si $u_{j+1} \in \{z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3}\}$, entonces $(z_{i_0}, C^2, z_0) \cup (z_0, C^3, z_{\ell} = u_j)$ contiene una $u_{j+1}u_j$ -trayectoria dirigida monocromática en D , lo que implica que (u_j, u_{j+1}) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición.

Supongamos entonces que $u_{j+1} \in \{z_{i_0-2}, z_{i_0-1}\}$, sea $i_1 \in \{z_{i_0-2}, z_{i_0-1}\}$ tal que $u_{j+1} = z_{i_1}$, entonces por (c.1) $(z_{i_1}, z_{i_1+5}) \in F(D)$ con $z_{i_1+5} \in \{z_{i_0+3}, z_{i_0+4}\}$, así $C^4 = (z_{i_0-4}, C^1, z_{i_1}) \cup (z_{i_1}, z_{i_1+5}) \cup (z_{i_1+5}, C^1, z_{i_0+4}) \cup (z_{i_0+4}, z_0, z_{i_0-4})$ es un C_6 de D , pues si $z_{i_1} = z_{i_0-2}$, entonces $z_{i_1+5} = z_{i_0+3}$ lo cual implica que $(z_0, z_{i_0-4}, z_{i_0-3}, z_{i_0-2} = z_{i_1}, z_{i_0+3} = z_{i_1+5}, z_{i_0+4}, z_0)$ es un C_6 que por hipótesis es monocromático y como (z_{i_0+4}, z_0) esta en C^2 es de color 1, entonces C^4 es de color 1. Como $u_j \in V(C^4)$, por lo tanto existe una $u_j u_{j+1}$ -trayectoria dirigida monocromática en D lo que implica que (u_j, u_{j+1}) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición.

4.c. Por demostrar que $(z_i, z_0) \in F(D)$ para cualquier $i \in \{3, \dots, k-4\}$ tal que $i \equiv k \pmod{4}$.

Si $i \equiv k \pmod{4}$, como $k \equiv 1 \pmod{2}$, entonces $i - 0 \equiv 1 \pmod{2}$, por el Lema 3.1.8 $(z_0, z_i) \in F(D)$ ó $(z_i, z_0) \in F(D)$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $(z_0, z_i) \in F(D)$ para cualquier $i \in \{3, \dots, k-4\}$ tal que $i \equiv k \pmod{4}$. Como $(z_{k-4}, z_0) \in F(D)$, entonces $i \leq k-8$.

Sea $i_0 = \max\{i \in \{7, \dots, k-4\} / i \equiv k \pmod{4}\}$ y $(z_0, z_{i-4}) \in F(D)$, entonces $(z_0, z_{i_0-4}) \in F(D)$, $(z_{i_0}, z_0) \in F(D)$ y $(z_{i_0+4}, z_0) \in F(D)$.

Sea $C^2 = (z_0, z_{i_0-4}, z_{i_0-3}, z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_0)$ es un C_6 de D que por hipótesis es monocromático, supongamos que es de color 1.

Si $i_0 \in I_p$

Entonces $z_{i_0} = u_j$ para algún $j \in \{5, 6, \dots, n-6\}$, por construcción de C^1 , $u_{j+1} \in \{z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+4}\}$ en cualquiera de los caso C^2 contiene una $u_{j+1}u_j$ -trayectoria dirigida monocromática dirigida en D , entonces (u_j, u_{j+1}) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición.

Supongamos que $i_0 \notin I_p$.

Por (1), $\{i_0-3, i_0-2, i_0-1, i_0\} \cap I_p \neq \emptyset$, entonces $\{i_0-3, i_0-2, i_0-1\} \cap I_p \neq \emptyset$, sea $\ell \in \{i_0-3, i_0-2, i_0-1\} \cap I_p$ y sea $u_j \in V(\mathcal{C})$ tal que $u_j = z_\ell$, entonces por (c.1) $(z_\ell, z_{\ell+5}) \in F(D)$ y $\ell+5 \in \{i_0+2, i_0+3, i_0+4\}$, esto implica que $C^3 = (z_{i_0-4}, C^1, z_\ell) \cup (z_\ell, z_{\ell+5}) \cup (z_{\ell+5}, C^1, z_{i_0+4}) \cup (z_{i_0+4}, z_0, z_{i_0-4})$ es un C_6 en D , pues si $z_\ell = z_{i_0-1}$, entonces $z_{\ell+5} = z_{i_0+4}$ lo cual implica que $(z_0, z_{i_0-4}, z_{i_0-3}, z_{i_0-2}, z_{i_0-1} = z_\ell, z_{i_0+4} = z_{\ell+5}, z_0)$ es un C_6 que por hipótesis es monocromático y como $(z_{i_0+4} = z_{\ell+5}, z_0) \in F(C^2) \cap F(C^3)$, entonces C^3 es de color 1.

Ahora por construcción de C^1 $u_{j+1} \in \{z_{\ell+1}, z_{\ell+2}, z_{\ell+4}\} \subset \{z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3}\}$.

Si $u_{j+1} \in \{z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3}\}$, entonces $(z_{i_0}, C^2, z_0) \cup (z_0, C^3, z_\ell = u_j)$ contiene una $u_{j+1}u_j$ -trayectoria dirigida monocromática en D , lo que implica que (u_j, u_{j+1}) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición.

Supongamos entonces que $u_{j+1} \in \{z_{i_0-2}, z_{i_0-1}\}$, sea $i_1 \in \{z_{i_0-2}, z_{i_0-1}\}$ tal que $u_{j+1} = z_{i_1}$, entonces por (c.1) $(z_{i_1}, z_{i_1+5}) \in F(D)$ con $z_{i_1+5} \in \{z_{i_0+3}, z_{i_0+4}\}$, así $C^4 = (z_{i_0-4}, C^1, z_{i_1}) \cup (z_{i_1}, z_{i_1+5}) \cup (z_{i_1+5}, C^1, z_{i_0+4}) \cup (z_{i_0+4}, z_0, z_{i_0-4})$ es un C_6 de D , pues si $z_{i_1} = z_{i_0-2}$, entonces $z_{i_1+5} = z_{i_0+3}$ lo cual implica que $(z_0, z_{i_0-4}, z_{i_0-3}, z_{i_0-2} = z_{i_1}, z_{i_0+3} = z_{i_1+5}, z_{i_0+4}, z_0)$ es un C_6 que por hipótesis es monocromático, y como $(z_{i_0+4}, z_0) \in F(C^2) \cap F(C^4)$, entonces C^4 es de color 1. Como $u_j \in V(C^4)$, por lo tanto existe una u_ju_{j+1} -trayectoria dirigida monocromática en D

lo que implica que (u_j, u_{j+1}) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición.

5.c. Por demostrar que $(z_i, z_0) \in F(D)$ para cualquier $i \in \{3, \dots, k-4\}$ tal que $i \equiv k \pmod{4}$.

Si $i \equiv k \pmod{4}$, como $k \equiv 1 \pmod{2}$, entonces $i - 0 \equiv 1 \pmod{2}$, por el Lema 3.1.8 $(z_0, z_i) \in F(D)$ ó $(z_i, z_0) \in F(D)$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $(z_0, z_i) \in F(D)$ para cualquier $i \in \{3, \dots, k-4\}$ tal que $i \equiv k \pmod{4}$. Como $(z_{k-4}, z_0) \in F(D)$, entonces $i \leq k-8$.

Sea $i_0 = \max\{i \in \{7, \dots, k-4\} / i \equiv k \pmod{4}\}$ y $(z_0, z_{i_0-4}) \in F(D)$, entonces $(z_0, z_{i_0-4}) \in F(D)$, $(z_{i_0}, z_0) \in F(D)$ y $(z_{i_0+4}, z_0) \in F(D)$.

Sea $C^2 = (z_0, z_{i_0-4}, z_{i_0-3}, z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_0)$ es un C_6 de D que por hipótesis es monocromático, supongamos que es de color 1.

Si $i_0 \in I_p$, entonces $z_{i_0} = u_j$ para algún $j \in \{3, \dots, n-4\}$ y por construcción de C^1 $u_{j-1} \in \{z_{i_0-1}, z_{i_0-2}, z_{i_0-4}\}$, en cualquier caso C^2 contiene una $u_j u_{j-1}$ -trayectoria dirigida monocromática en D , lo que implica que (u_{j-1}, u_j) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición.

Supongamos que $i_0 \notin I_p$, entonces por (1) $\{i_0-3, i_0-2, i_0-1\} \cap I_p \neq \emptyset$, sea $\ell \in \{i_0-3, i_0-2, i_0-1\}$, es decir, $u_j = z_\ell$ para algún $u_j \in V(\mathcal{C})$, entonces por (1.c) $(z_\ell, z_{\ell+5}) \in F(D)$ y $\ell+5 \in \{i_0+2, i_0+3, i_0+4\}$, esto implica que $C^3 = (z_{i_0-4}, C^1, z_\ell) \cup (z_\ell, z_{\ell+5}) \cup (z_{\ell+5}, C^1, z_{i_0+4}) \cup (z_{i_0+4}, z_0, z_{i_0-4})$ es un C_6 de D , puesto que si $z_\ell = z_{i_0-3}$, entonces $z_{\ell+5} = z_{i_0+2}$ y tenemos que $(z_{i_0-4}, z_{i_0-3} = z_\ell, z_{i_0+2} = z_{\ell+5}, z_{i_0+3}, z_{i_0+4}, z_0, z_{i_0-4})$ es un C_6 de D que por hipótesis es monocromático y como $(z_0, z_{i_0-4}) \in F(C^2) \cap F(C^3)$, entonces C^3 es de color 1.

Ahora $u_{j+1} \in \{z_{\ell+1}, z_{\ell+2}, z_{\ell+4}\} \subset \{z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_{i_0}, z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3}\}$.

Si $u_{j+1} \in \{z_{i_0-2}, z_{i_0-1}, z_{i_0}\}$, entonces C^2 contiene una $u_{j+1} u_j$ -trayectoria dirigida monocromática en D , lo que implica que (u_j, u_{j+1}) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición.

Supongamos entonces que $u_{j+1} \in (z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3})$, sea $i_1 \in (z_{i_0+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3})$ tal que $u_{j+1} = z_{i_1}$, entonces por (2.c) $(z_{i_1-5}, z_{i_1}) \in F(D)$ con $z_{i_1-5} \in \{z_{i_0-4}, z_{i_0-3}, z_{i_0-2}\}$, así $C^4 = (z_{i_0-4}, C^1, z_{i_1-5}) \cup (z_{i_1-5}, z_{i_1}) \cup (z_{i_1}, C^1, z_{i_0+4}) \cup (z_{i_0+4}, z_0, z_{i_0-4})$ es un C_6 de D , puesto que si $i_1 = i_{0+1}$ con $\ell = i_0 - 3$, entonces $i_{1-5} = z_{i_0-4}$ y tenemos que $(z_{i_0-4} = z_{i_1-5}, z_{i_0+1} = z_{i_1} = u_{j+1}, z_{i_0+2}, z_{i_0+3}, z_{i_0+4}, z_0, z_{i_1-5} = z_{i_0-4})$ es un C_6 de D que por hipótesis es monocromático y como $(z_0, z_{i_0-4}) \in F(C^2) \cap F(C^4)$, entonces C^4 es de color 1.

Entonces $(u_{j+1} = z_{i_1}, C^4, z_{i_0-4}) \cup (z_{i_0-4}, C^2, z_\ell = u_j)$ contiene una $u_{j+1}u_j$ -trayectoria dirigida monocromática en D , lo que implica que (u_j, u_{j+1}) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición.

Ahora analizaremos los siguientes casos:

Subcaso 1c. Supongamos que $k \equiv 1(\text{mod}4)$.

Como $0 \in I_p$ por (2.c) $(z_{k-4}, z_0) \in F(D)$, por otro lado $k - 4 \equiv 1(\text{mod}4)$, entonces por (3.c) $(z_0, z_{k-4}) \in F(D)$ pero esto es una contradicción pues D es un torneo bipartito y por lo tanto no tiene flechas simétricas.

Subcaso 2c. Supongamos que $k \equiv 3(\text{mod}4)$.

6.c. Entonces por demostrar que $(z_i, z_0) \in F(D)$ para cualquier $i \in \{3, \dots, k-4\}$ tal que $i \equiv 3(\text{mod}4)$.

Si $i \equiv 3(\text{mod}4)$ y como $k \equiv 3(\text{mod}4)$, entonces $i \equiv k(\text{mod}4)$, aplicando el (4.c) tenemos que $(z_i, z_0) \in F(D)$.

7.c. Por demostrar que $(z_i, z_j) \in F(D)$ para cualquier $i, j \in \{0, 1, \dots, k\}$ tales que $i \in I_p$ y $j - i \equiv 1(\text{mod}4)$.

Sea $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ tal que $u_r = z_i$, renombramos los vértices de \mathcal{C} de tal forma que el ciclo inicie en u_r , uniendo las correspondientes trayectorias entre los vértices de \mathcal{C} obteniendo un camino dirigido cerrado $\overline{C^1} = (\overline{z_0}, \dots, \overline{z_k}, \overline{z_0})$ que es igual a C^1 con los vértices renombrados de la siguiente manera:

Para cada $t \in \{0, \dots, k\}$ tenemos que $\bar{z}_t = z_{t+i}$, así $\bar{z}_0 = z_i$, por (3.c) tenemos que $(\bar{z}_0, \bar{z}_t) \in F(D)$ si $t \equiv 1(\text{mod}4)$.

Sea $j \in \{0, \dots, k\}$ tal que $j - i \equiv 1(\text{mod}4)$, entonces $(\bar{z}_0, \bar{z}_{j-i}) \in F(D)$, como $\bar{z}_0 = z_i$ y $\bar{z}_{j-i} = z_j$ entonces $(z_i, z_j) \in F(D)$.

8.c. Por demostrar que $(z_j, z_i) \in F(D)$ para cualquier $i, j \in \{0, 1, \dots, k\}$ tales que $i \in I_p$ y $j - i \equiv 3(\text{mod}4)$.

Procediendo de la misma manera que en el inciso (7.c) obtenemos $\overline{C^1}$ y aplicando (6.c) obtenemos $(\bar{z}_t, \bar{z}_0) \in F(D)$ si $t \equiv 3(\text{mod}4)$.

Sea $j \in \{0, \dots, k\}$ tal que $j - i \equiv 3(\text{mod}4)$, entonces $(\bar{z}_{j-i}, \bar{z}_0) \in F(D)$, como $\bar{z}_0 = z_i$ y $\bar{z}_{j-i} = z_j$ entonces $(z_j, z_i) \in F(D)$.

9.c. Por demostrar que $\{z_i, z_{i-3}\} \in F(D)$ para cualquier $i \in \{0, 1, \dots, k\}$.

Procederemos por contradicción, supongamos que $(z_{i-3}, z_i) \in F(D)$ para cualquier $i \in 0, 1, \dots, k$.

Como $i - (i - 3) \equiv 3(\text{mod}4)$ por (8.c) $i - 3 \notin I_p$, y como $(i - 3) - i \equiv 1(\text{mod}4)$ por (7.c) $i \notin I_p$. Ahora por 1 $\{i - 3, i - 2, i - 1, i\} \cap I_p \neq \emptyset$, pero por lo anterior $\{i - 2, i - 1\} \cap I_p \neq \emptyset$, analizaremos estos 2 casos.

9.c.a. Supongamos que $i - 2 \in I_p$.

Sea $j \in \{0, \dots, n\}$ tal que $z_{i-2} = u_j$. Como $i + 1 - (i - 2) \equiv 3(\text{mod}4)$, entonces por (8.c) $(z_{i+1}, z_{i-2} = u_j) \in F(D)$, por otro lado $(i - 5) - (i - 2) \equiv 1(\text{mod}4)$, entonces por (7.c) $(z_{i-2}, z_{i-5}) \in F(D)$.

Sea $C^2 = (u_j = z_{i-2}, z_{i-5}, z_{i-4}, z_{i-3}, z_i, z_{i+1}, z_{i-2} = u_j)$, es un C_6 de D que por hipótesis es monocromático supongamos que es de color 1. Por construcción de C^1 $u_{j-1} \in \{z_{i-6}, z_{i-4}, z_{i-3}\}$.

Como $i - 3 \notin I_p$, entonces $u_{j-1} \neq z_{i-3}$.

Si $u_{j-1} = z_{i-4}$, entonces $\{u_{j-1}, u_j\} \subset V(C^2)$ y por lo tanto existe una u_j, u_{j-1} -trayectoria dirigida monocromática en D , lo cual implica que (u_{j-1}, u_j) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición.

Entonces $u_{j-1} = z_{i-6}$, como $(i+1) - (i-6) \equiv 3(\text{mod}4)$, entonces por (8.c) $(z_{i+1}, z_{i-6} = u_{j-1}) \in F(D)$.

Sea $C^3 = (u_{j-1} = z_{i-6}, z_{i-5}, z_{i-4}, z_{i-3}, z_i, z_{i+1}, z_{i-6} = u_{j-1})$, es un C_6 de D que por hipótesis es monocromático y como $(z_{i-3}, z_i) \in F(C^2) \cap F(C^3)$, entonces C^3 es de color 1. Por lo tanto $(u_j = z_{i-2}, C^2, z_{i+1}) \cup (z_{i+1}, z_{i-6} = u_{j-1})$ es una $u_j u_{j-1}$ -trayectoria dirigida monocromática en D y por lo tanto (u_{j-1}, u_j) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición. Por lo tanto este casos no es posible.

9.c.b. Supongamos que $i - 1 \in I_p$.

Sea $j \in \{0, \dots, n\}$ tal que $z_{i-1} = u_j$. Como $(i+2) - (i-1) \equiv 3(\text{mod}4)$, entonces por (8.c) $(z_{i+2}, z_{i-1} = u_j) \in F(D)$, por otro lado $(i-4) - (i-1) \equiv 1(\text{mod}4)$, entonces por (7.c) $(z_{i-1}, z_{i-4}) \in F(D)$.

Sea $C^2 = (u_j = z_{i-1}, z_{i-4}, z_{i-3}, z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i-1} = u_j)$, es un C_6 de D que por hipótesis es monocromático supongamos que es de color 1. Por construcción de C^1 $u_{j+1} \in \{z_i, z_{i+1}, z_{i+3}\}$.

Como $i \notin I_p$, entonces $u_{j+1} \neq z_i$.

Si $u_{j+1} = z_{i+1}$, entonces $\{u_j, u_{j+1}\} \subset V(C^2)$ y por lo tanto existe una $u_{j+1} u_j$ -trayectoria dirigida monocromática en D , lo cual implica que (u_j, u_{j+1}) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición.

Entonces $u_{j+1} = z_{i+3}$, como $(i-4) - (i+3) \equiv 1(\text{mod}4)$, entonces por (7.c) $(u_{j+1} = z_{i+3}, z_{i-4}) \in F(D)$.

Sea $C^3 = (u_{j+1} = z_{i+3}, z_{i-4}, z_{i-3}, z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+3} = u_{j+1})$, es un C_6 de D que por hipótesis es monocromático y como $(z_{i-3}, z_i) \in F(C^2) \cap F(C^3)$, entonces C^3 es de color 1. Por lo tanto $(u_{j+1} = z_{i+3}, z_{i-4}) \cup (z_{i-4}, C^2, z_{i-1} = u_j)$ es una $u_{j+1} u_j$ -trayectoria dirigida monocromática en D y por lo tanto (u_j, u_{j+1}) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición. Por lo tanto este caso tampoco es posible.

Por lo tanto $(z_i, z_{i-3}) \in F(D)$ para cualquier $i \in \{0, 1, \dots, k\}$.

Terminamos la prueba con los siguientes incisos.

10.c. En C^1 debe existir al menos dos flechas con colores distintos, es decir, para algún $i \in \{0, \dots, k\}$, (z_{i-1}, z_i) y (z_i, z_{i+1}) son de colores distintos, de lo contrario C^1 es monocromático y por lo tanto todas las flechas de \mathcal{C} serían simétricas en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición.

11.c. Si $i \in \{0, \dots, k\}$, y (z_{i-1}, z_i) y (z_i, z_{i+1}) son de color distinto, entonces $i \in I_p$. Por (1) $\{i-3, i-2, i-1, i\} \cap I_p \neq \emptyset$.

Sea $r_0 = \min\{r \in \{0, 1, 2, 3\} \mid i-r \in I_p\}$.

Sea $j \in \{0, \dots, n\}$ tal que $z_{i-r_0} = u_j$, entonces $u_j \in \{z_{i-3}, z_{i-2}, z_{i-1}, z_i\}$, por construcción de C^1 tenemos que $u_{j+1} \in \{z_{i-r_0+1}, z_{i-r_0+2}, z_{i-r_0+4}\} \subset \{z_{i-2}, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+3}, z_{i+4}\}$.

Consideremos $\ell \in \{i-r_0+1, i-r_0+2, i-r_0+4\}$ tal que $u_{j+1} = z_\ell$ por la elección de r_0 y como $\ell \in I_p$ y $\ell \notin \{i-2, i-1, i\}$, es decir, $u_{j+1} \in \{z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+3}, z_{i+4}\}$.

Si la trayectoria T_j es de longitud 4, entonces es monocromática y no puede contener a la vez a las flechas (z_{i-1}, z_i) y (z_i, z_{i+1}) , entonces $z_i = u_j$ y $z_{i+4} = u_{j+1}$. Por lo tanto $i \in I_p$.

Si la trayectoria T_j es de longitud 1, entonces $z_i = u_j$, es decir, $i \in I_p$.

Supongamos que T_j es de longitud 2, entonces $u_j \in \{z_{i-1}, z_i\}$.

Si $u_j = z_{i-1}$, entonces $u_{j+1} = z_{i+1}$ por (9.c) $(z_{i+2}, z_{i-1}) \in F(D)$.

Sea $C^2 = (u_j = z_{i-1}, z_i, z_{i+1} = u_{j+1}, z_{i+2}, z_{i-1} = u_j)$ es un C_4 que por hipótesis es 1-casimonocromático, como las flechas (z_{i-1}, z_i) y (z_i, z_{i+1}) son de color distinto, entonces $(u_{j+1} = z_{i+1}, z_{i+2})$ y $(z_{i+2}, z_{i-1} = u_j)$ son del mismo color, entonces existe $u_{j+1}u_j$ -trayectoria dirigida monocromática en D , por lo tanto (u_j, u_{j+1}) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición, por lo tanto $u_j = z_i$ y en consecuencia $i \in I_p$.

Supongamos que (z_{i-1}, z_i) es de color 1 y (z_i, z_{i+1}) es de color 2, entonces:

12.c. $\{i-1, i+1\} \cap I_p = \emptyset$. Por (11.c) $i \in I_p$, supongamos que $z_i = u_j$ para algún $j \in \{0, \dots, n\}$.

Supongamos que $i-1 \in I_p$, entonces por construcción de C^1 $z_{i-1} = u_{j-1}$. Por (9.c) $(z_{i+2}, z_{i-1}) \in F(D)$, sea $C^2 = (u_{j-1} = z_{i-1}, z_i = u_j, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i-1})$ es un C_4 que por hipótesis es 1-casimonocromático, como las flechas (z_{i-1}, z_i) y (z_i, z_{i+1}) son de color 1 y 2 respectivamente, entonces (z_{i+1}, z_{i+2}) y (z_{i+2}, z_{i-1}) son del mismo color digamos a , con $a \in \{1, 2\}$.

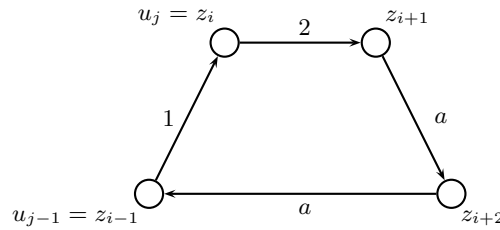


Figura 3.37

Si $a = 2$, entonces tenemos que $(z_i = u_j, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i-1} = u_{j-1})$ es una $u_j u_{j-1}$ -trayectoria dirigida monocromática en D , por lo tanto (u_{j-1}, u_j) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición.

Por lo tanto $a = 1$, por (11.c) $i+1 \in I_p$ y por construcción de C^1 $z_{i+1} = u_{j+1}$, entonces $(u_{j+1} = z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i-1} = u_{j-1}, z_i = u_j)$ es una $u_{j+1} u_j$ -trayectoria dirigida monocromática en D , por lo tanto (u_j, u_{j+1}) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición. Por lo tanto $i-1 \notin I_p$.

Supongamos ahora que $i+1 \in I_p$, entonces por construcción de C^1 $z_{i+1} = u_{j+1}$ y por (9.c) $(z_{i+1}, z_{i-2}) \in F(D)$, sea $C^3 = (z_{i-2}, z_{i-1}, z_i = u_j, z_{i+1} = u_{j+1}, z_{i-2})$ es un C_4 que por hipótesis es monocromática, como las flechas (z_{i-1}, z_i) y (z_i, z_{i+1}) son de color 1 y 2 respectivamente, entonces (z_{i+1}, z_{i-2}) y (z_{i-2}, z_{i-1}) ambas son de color b , con $b \in \{1, 2\}$.

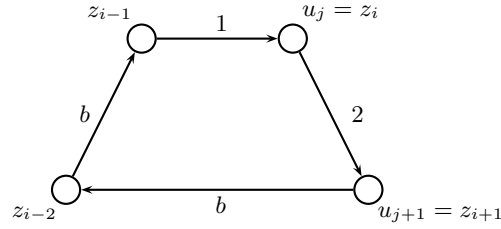


Figura 3.38

Si $b = 1$, entonces $(u_{j+1} = z_{i+1}, z_{i-2}, z_{i-1}, z_i = u_j)$ es una $u_{j+1}u_j$ -trayectoria dirigida monocromática en D , por lo tanto (u_j, u_{j+1}) es una flecha simétrica de \mathcal{C} en $C(D)$, contradicción con nuestra suposición.

Por lo tanto $b = 2$, por (11.c) $i - 1 \in I_p$ pero esto no es posible ya que acabamos de mostrar que $i - 1 \notin I_p$.

Por lo tanto $\{i - 1, i + 1\} \cap I_p = \emptyset$.

13.c. (z_{i+1}, z_{i+2}) tiene que ser de color 2. En caso contrario (z_i, z_{i+1}) , (z_{i+1}, z_{i+2}) serían de color distinto y por (11.c) $i + 1 \in I_p$, contradicción con el inciso (12.c).

14.c. (z_{i-2}, z_{i-1}) tiene que ser de color 1. En caso contrario (z_{i-2}, z_{i-1}) , (z_{i-1}, z_i) serían de color distinto y por (11.c) $i - 1 \in I_p$, contradicción con el inciso (12.c).

15.c. Por demostrar que el subtorneo H generado por el conjunto de vértices $\{z_{i-2}, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, z_{i+2}\}$ es un torneo cíclicamente 4-partito.

Sea $V_1 = \{z_{i-2}, z_{i+2}\}$, $V_2 = \{z_{i-1}\}$, $V_3 = \{z_i\}$, $V_4 = \{z_{i+1}\}$. Por definición de C^1 existen en D las flechas (z_{i-2}, z_{i-1}) , (z_{i-1}, z_i) , (z_i, z_{i+1}) , (z_{i+1}, z_{i+2}) y por (9.c) existen en D las flechas (z_{i+1}, z_{i-2}) y (z_{i+2}, z_{i-1}) , entonces tenemos que todo vértice de V_i es adyacente a todo vértice de V_{i+1} , la suma es tomada módulo 4. Por lo tanto H es un torneo cíclicamente 4-partito.

Finalmente observemos que H es la unión de los ciclos C^2 y C^3 mencionados en el inciso (12.c).

En C^2 la flecha (z_{i-1}, z_i) es de color 1, (z_i, z_{i+1}) , (z_{i+1}, z_{i+2}) son de color 2 y como C^2 es 1-casimonocromático, entonces (z_{i+2}, z_{i-1}) es de color 2.

Por otro lado en C^3 tenemos que (z_i, z_{i+1}) es de color 2 y (z_{i-2}, z_{i-1}) , (z_{i-1}, z_i) son de color 1 y como C^3 es 1-casimonocromático, entonces (z_{i+1}, z_{i-2}) es de color 1.

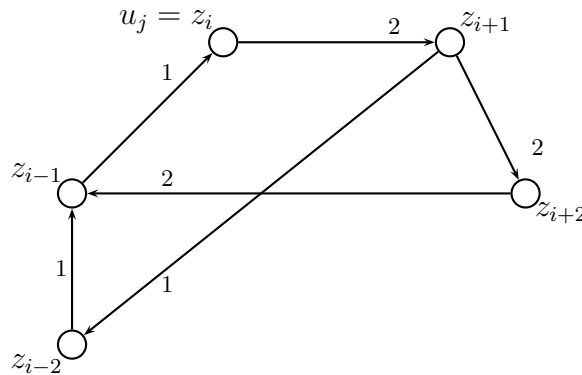


Figura 3.39

Como H tiene 3 flechas de color 1 y 3 de color 2, esto contradice la hipótesis de que todo subtorneo cíclicamente 4-partito de orden 5 en D es 2-casimonocromático.

Con esto finalizamos la prueba.

Por lo tanto todo ciclo de $C(D)$ tiene al menos una flecha simétrica, lo cual implica que $C(D)$ es núcleo perfecta y por el Teorema 2.4.7 D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. ■

Ahora si tenemos dos digráficas 3-coloreadas con núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, ¿la unión de estas tendrá núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas?

Veamos un ejemplo:

Sea D_1 y D_2 dos digráficas 3-coloreadas.

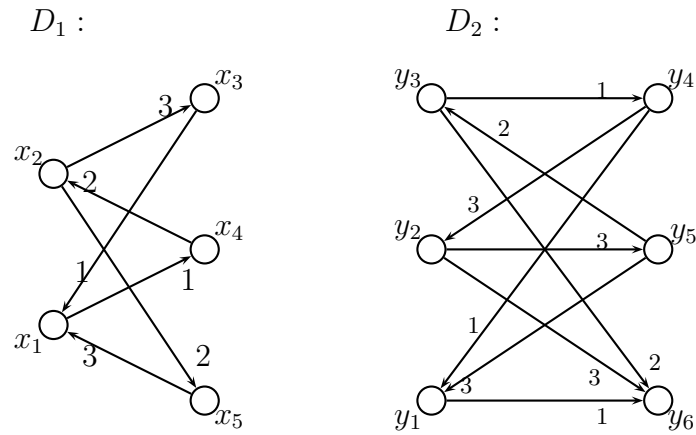


Figura 3.40

$N_1 = \{x_1, x_2\}$ y $N_2 = \{y_6\}$ son núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas de D_1 y D_2 respectivamente, en este caso podemos observar que si unimos las dos digráficas tomando cualquier vértice arbitrario, no cualquier vértice nos sirve para que la digráfica resultante tenga núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, por ejemplo en D_1 tomamos el vértice x_3 y en D_2 el vértice y_2 y las unimos la digráfica resultante no tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, el lector puede comprobarlo en la figura 3.41.

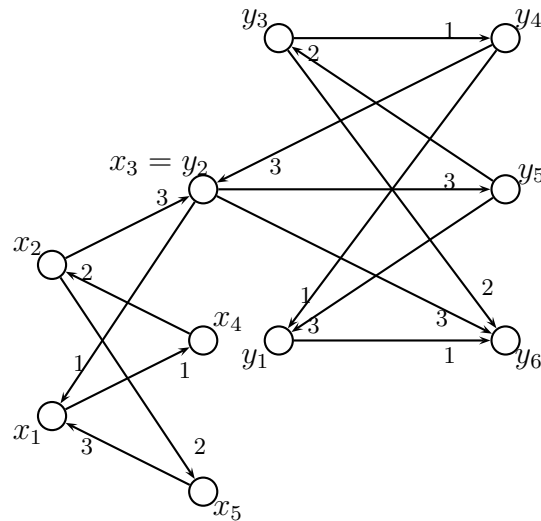


Figura 3.41

Nuestra siguiente pregunta es ¿qué pasa si tomamos dos digráficas m -coloreadas con núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas y aplicamos la operación de suma la resultante tendrá núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas?. La respuesta es sí, y se demuestra a continuación.

Definimos la operación suma:

1. $V(D^*) = V(D_1) \cup V(D_2)$ y
2. $F(D^*) = F(D_1) \cup F(D_2) \cup \{(u, v) / u \in V(D_1) \text{ y } v \in V(D_2)\}$.

Sea D_1 y D_2 dos digráficas m -coloreadas con núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Demostraremos que $D_1 + D_2 = D^*$ tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Sabemos por hipótesis que D_1 y D_2 tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, sean N_1 y N_2 respectivamente.

Por definición de la operación suma tenemos que $(u, v) \in F(D^*)$ tal que $u \in V(D_1)$ y $v \in V(D_2)$, es decir, todos los vértices de D_1 van a todos los vértices de D_2 , por lo tanto N_2 es núcleo por t.d.m en D^* ya que N_2 es núcleo por t.d.m en D_2 y $D_2 \subset D^*$.

Por lo tanto $D_1 + D_2 = D^*$ tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. ■

¿Qué pasa si una de las dos digráficas no tiene núcleo por t.d.m, D^* tendrá núcleo por t.d.m?; veamos un ejemplo.

Consideremos dos digráficas, D_1 la cual no tiene núcleo y D_2 con $N = \{x_4\}$ como núcleo, ver figura 3.42.

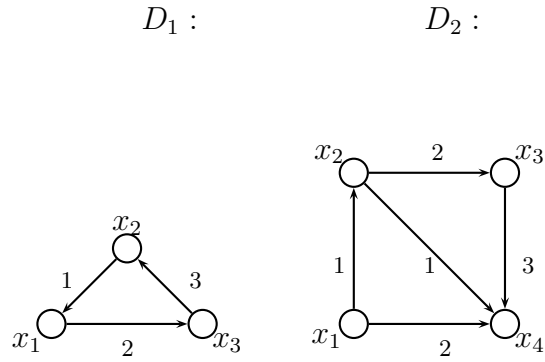


Figura 3.42

Primero sumamos $D_1 + D_2$. Veamos que pasa con la resultante.

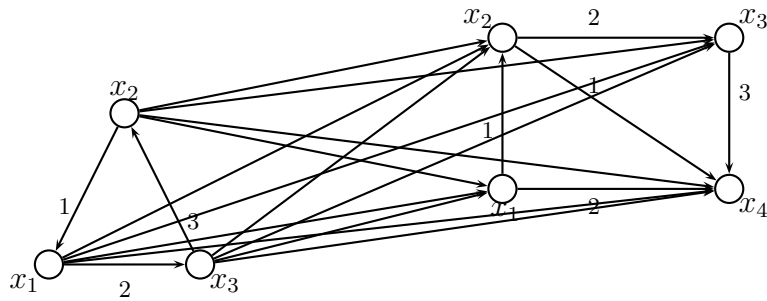


Figura 3.43

Como podemos observar la resultante de $D_1 + D_2$ si tiene núcleo y no importa la coloración de las flechas, esto es porque las flechas van de D_1 a D_2 y el núcleo de D_2 absorbe a todos los vértices de D_1 .

Ahora sumamos $D_2 + D_1$. Veamos que pasa con la resultante.

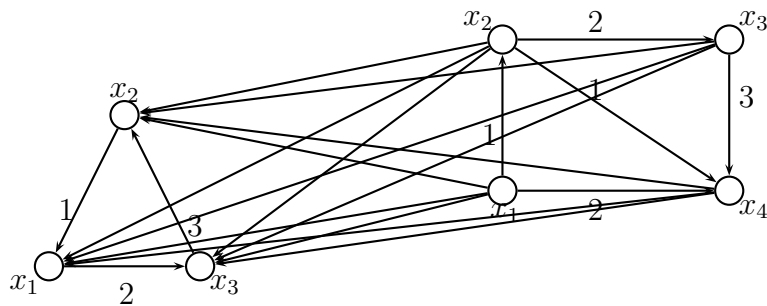


Figura 3.44

Aquí podemos observar que $D_2 + D_1$ no tiene núcleo, pues todas las flechas van a D_1 el cual no tiene núcleo.

Capítulo 4

Seminúcleo módulo i por Trayectorias Monocromáticas.

Continuamos con los torneos bipartitos m -coloreados, definiremos lo que es un seminúcleo módulo i por trayectorias dirigidas monocromáticas, que nos será de gran utilidad para demostrar que todo torneo bipartito bajo cierta condición que en este capítulo daremos, tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Trabajaremos con $m \geq 3$.

4.1. Seminúcleos Módulo i por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas.

Comenzaremos demostrando el Lema 4.1.1 el cual nos ayudara a dar solución al teorema 4.1.2 para posteriormente definir lo que es un seminúcleo módulo i .

Lema 4.1.1. Si D es una digráfica y no es fuertemente conexa, entonces tiene al menos una componente fuertemente conexa terminal final.

Demostración.

Supongamos por contradicción que no tiene componentes fuertemente conexas terminales, es decir, a cada componente fuertemente conexa en D le sale al menos una flecha.

Como D es finita, entonces cada componente fuertemente conexa es finita.

Supongamos que D tiene n componentes fuertemente conexas.

Sea B_1 una componente fuertemente conexa, llamemos B_2 a la componente fuertemente conexa tal que existe la B_1B_2 -flecha, B_3 a la componente fuertemente conexa tal que existe la B_2B_3 -flecha y así sucesivamente hasta obtener una sucesión $\{B_1, B_2, B_3, \dots, B_n\}$ de componentes fuertemente conexas en D tal que existe la B_iB_{i+1} -flecha en D y $B_i \neq B_j$ para $i \neq j$ con $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Como a cada componente fuertemente conexa le sale al menos una flecha y D es finita tenemos la B_nB_j -flecha en D con $B_j \in \{B_1, B_2, \dots, B_{n-1}\}$, pero por la construcción de la sucesión de las componentes fuertemente conexas se tiene que existe la B_jB_{j+1} -flecha, $B_{j+1}B_{j+2}$ -flecha, $\dots, B_{n-1}B_n$ -flecha en D . Por lo tanto para todo $\{u, v\} \subseteq \cup_{i=j}^n V(B_i)$ existe un uv -camino dirigido, entonces $B_j, B_{j+1}, \dots, B_{n-1}, B_n$ forman una sola componente fuertemente conexa, contradicción pues supusimos que todas las B_i son componentes fuertemente conexas de D , con $(i = j, j + 1, \dots, n)$.

Por lo tanto D tiene al menos una componente fuertemente conexa terminal. ■

Ahora ya tenemos la herramienta para demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.1.2. Si D es una digráfica, entonces existe $B \subseteq V(D)$ tal que:

1. No existen uv -trayectorias para $\{u, v\} \subseteq B$.
2. Para cada $x \notin B$ existe una xB -trayectoria.

Caso 1. D es fuertemente conexa.

Entonces para todo $\{x, y\} \subseteq V(D)$ existe una xy -trayectoria dirigida y existe una yx -trayectoria dirigida por lo que el conjunto B que buscamos consta de un sólo vértice y es cualquier vértice arbitrario de D , dado que es independiente y existe la yB -trayectoria dirigida $\forall y \in V(D) - B$.

Caso 2. D no es fuertemente conexa.

Entonces nos tomamos todas sus componentes fuertemente conexas y por el Lema 4.1.1 D tiene al menos una componente fuertemente conexa terminal.

Como D es finita sus componentes son finitas.

Supongamos que D tiene n componentes fuertemente conexas y m componentes fuertemente conexas terminales.

Sean $\{B_1, B_2, B_3, \dots, B_m\}$ el conjunto de las componentes fuertemente conexas terminales en D , a estas componentes no le salen flechas.

Nos tomamos un vértice arbitrario de cada B_i con $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Sea $B = \{x_i \in B_i \mid B_i \text{ es una componente fuertemente conexa terminal en } D\}$.

B es un conjunto independiente, ya que para cualquier $x_i, x_j \in B$ con $i \neq j$ $\Gamma^+(x_i) \subseteq B_i$ y $\Gamma^+(x_j) \subseteq B_j$ con $B_i \neq B_j$, por lo tanto $(x_i, x_j) \notin F(D)$ y $(x_j, x_i) \notin F(D)$.

Ahora vamos a demostrar que para todo $y \in V(D) - B$ existe una yB -trayectoria dirigida.

Caso a. $y \in B_i$.

Como B_i es una componente fuertemente conexa terminal $\forall y \in V(B_i) - x_i$ existe la yx_i -trayectoria dirigida.

Caso b. $y \in V(D) - \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$.

Supongamos que $y \in H_j$ con $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, H_j componente fuertemente conexa.

Como H_j no es una componente fuertemente conexa terminal, entonces $\Gamma^+(H_j) \not\subseteq H_j$, por lo que existe un H_{j+1} tal que existe la $H_j H_{j+1}$ -flecha, si H_{j+1} es una componente fuertemente conexa terminal terminamos si no existe un H_{j+2} tal que existe la $H_{j+1} H_{j+2}$ -flecha si H_{j+2} es una componente fuertemente conexa terminal terminamos si no existe un H_{j+3} y así continuando con este método como D es finita en algún momento llegaremos a una componente fuertemente conexa terminal.

Por lo tanto para todo $y \in V(D) - B$ existe una yB -trayectoria dirigida.

Por lo tanto B es el conjunto buscado. ■

Teorema 4.1.3.[12] (Sands, Sauer y Woodrow). Si D es una digráfica posiblemente infinita 2-coloreada, sin trayectorias infinitas exteriores, entonces D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

En la observación 4.1.4 veremos que pasa cuando $m = 1$ y $m = 2$, apartir de aquí se aclarara el porque trabajaremos con $m \geq 3$.

Observación 4.1.4. Si T es un torneo bipartito m -coloreado con $m \leq 2$, entonces T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Demostración.

a) $m = 1$. Entonces por el Teorema 4.1.2, T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas $N = B$.

b) $m = 2$. En este caso T satisface las hipótesis del Teorema 4.1.3, por lo tanto T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

■

La siguiente definición nos será de gran utilidad para demostrar que los torneos bipartitos tienen núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Definición 4.1.5. Sea D una digráfica m -coloreada, sean $1, 2, \dots, m$ colores distintos, $i \in \{1, \dots, m\}$ cualquiera pero fijo. Un subconjunto $S \subseteq V(D)$ es un seminúcleo de D módulo i por trayectorias dirigidas monocromáticas si se cumplen las siguientes condiciones:

1. S es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas, es decir, para $\{u, v\} \subseteq S$, no existe uv -trayectoria dirigida monocromática y no existe vu -trayectoria dirigida monocromática.

2. Para cada $z \in V(D) - S$ tal que existe Sz -trayectoria dirigida monocromática de color distinto de i , existe una zS -trayectoria dirigida monocromática en D .

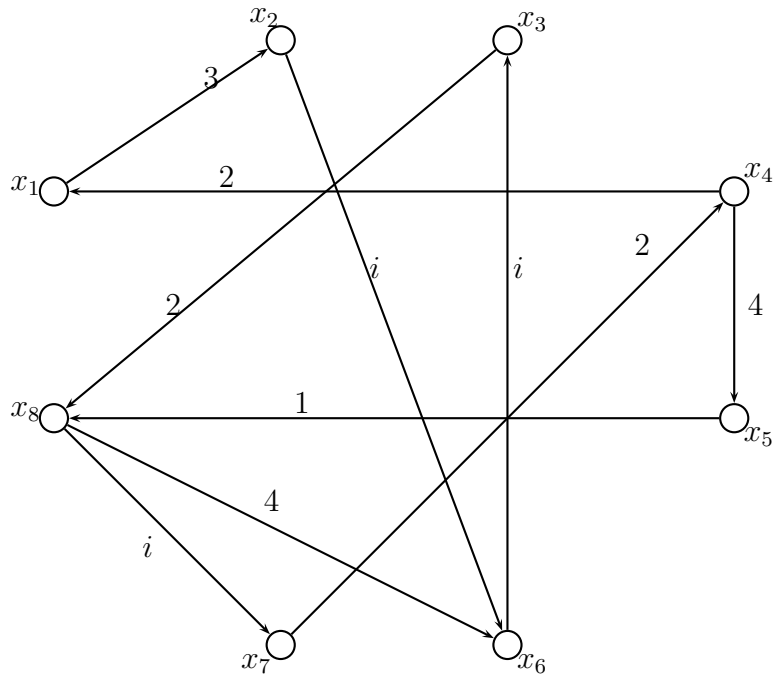


Figura 4.1

En la figura 4.1 podemos observar que el conjunto $S = \{x_2, x_5, x_7\}$ de la digráfica D 5-coloreada es un seminúcleo módulo i , ya que el conjunto es independiente pues no existen trayectorias dirigidas monocromáticas entre sus elementos.

Para las trayectorias dirigidas que le salen al conjunto S y son de color distinto de i existe una trayectoria dirigida que regresa al conjunto S por ejemplo:

Existe x_5x_8 —trayectoria dirigida monocromática de color 1 y
 x_8x_7 —trayectoria dirigida monocromática de color i .

x_7x_1 —trayectoria dirigida monocromática de color 2 y
 x_1x_2 —trayectoria dirigida monocromática de color 3.

x_7x_4 —trayectoria dirigida monocromática de color 2 y
 x_4x_5 —trayectoria dirigida monocromática de color 4.

Lo cual satisface la segunda condición.

La definición anterior generaliza la definición 2.2.1 de seminúcleos del capítulo 2 dada por V. Neumann-Lara [9].

Para los teoremas posteriores utilizaremos la siguiente hipótesis: $\Gamma^+(u)$ es monocromático para cada $u \in V(D)$.

Teorema 4.1.6. Sea D una digráfica m -coloreada tal que $\Gamma^+(u)$ es monocromático para cada $u \in V(D)$. Entonces D tiene seminúcleo módulo i distinto del vacío por trayectorias dirigidas monocromáticas para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

Demostración.

Como D es una digráfica m -coloreada podemos suponer que en D existen flechas de color i para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

Sea $z_0 \in V(D)$ tal que $\Gamma^+(z_0)$ es de color i .

Es claro de la definición que z_0 es un seminúcleo módulo i distinto del vacío por trayectorias dirigidas monocromáticas. ■

Sean $i \in \{1, \dots, m\}$ y $\Gamma_i = \{S \mid S \text{ es un seminúcleo módulo } i \text{ distinto del vacío por trayectorias dirigidas monocromáticas de } D\}$.

Observemos que en las digráficas con $\Gamma^+(u)$ monocromático para cada $u \in V(D)$, $\Gamma_i \neq \emptyset$ por el Teorema 4.1.6.

Definición 4.1.7. Sea $\{S_1, S_2\} \subseteq \Gamma_i$. Decimos que $S_1 \leq S_2$ si para cada $x_1 \in S_1$ existe $x_2 \in S_2$ tal que satisface una de las siguientes condiciones:

1. $x_1 = x_2$
2. Existe x_1x_2 -trayectoria dirigida monocromática de color i y no existe x_2x_1 -trayectoria dirigida monocromática de color i .

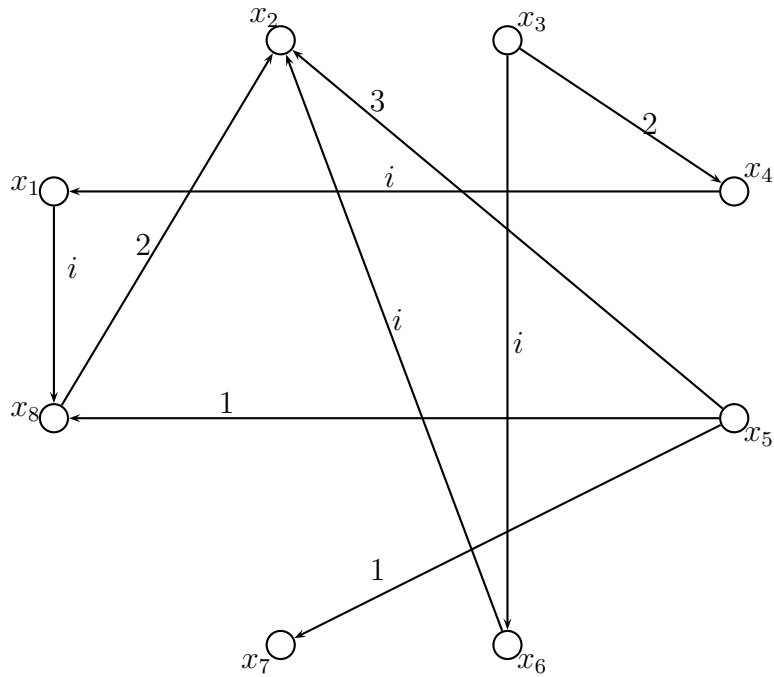


Figura 4.2

En la figura 4.2 podemos observar dos conjunto $S_1 = \{x_6\}$ y $S_2 = \{x_2, x_4, x_7\}$ los cuales son seminúcleos módulo i , por la definición anterior tenemos que $S_1 < S_2$ dado que para $x_6 \in S_1$ existe $x_2 \in S_2$ tal que existe la x_6x_2 -trayectoria dirigida monocromática de color i y no existe la x_2x_6 -trayectoria dirigida monocromática de color i .

Notación 4.1.8. Denotaremos por:

1. $x_1 \xrightarrow{i} x_2$ si existe x_1x_2 - trayectoria dirigida monocromática de color i .
2. $x_1 \not\xrightarrow{i} x_2$ si no existe x_1x_2 - trayectoria dirigida monocromática de color i .

Teorema 4.1.9 (Γ_i, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado.

Demostración.

- a) $S \leq S$ para cada $S \in \Gamma_i$.

Sea $x \in S$.

Es claro que $x = x$ para cada $x \in S$.

Por lo tanto $S \leq S$.

b) Si $\{S_1, S_2\} \subseteq \Gamma_i$ y son tales que $S_1 \leq S_2$ y $S_2 \leq S_1$, entonces $S_1 = S_2$.

Por demostrar que $S_1 \subseteq S_2$.

Sea $x_1 \in S_1$, probaremos que $x_1 \in S_2$.

Como $S_1 \leq S_2$, tenemos que existe $x_2 \in S_2$ tal que $x_1 = x_2$ ó $x_1 \xrightarrow{i} x_2$ y $x_2 \rightarrow^i x_1$.

Analizamos los dos casos:

Caso b.1. Si $x_1 = x_2$, entonces $x_1 \in S_2$.

Caso b.2. Si $x_1 \xrightarrow{i} x_2$ y $x_2 \rightarrow^i x_1$.

Como $x_2 \in S_2$ y $S_2 \leq S_1$ existe $u_1 \in S_1$ tal que $x_2 = u_1$ ó $x_2 \xrightarrow{i} u_1$ y $u_1 \rightarrow^i x_2$.

Analizamos estos dos subcasos:

b.2.1. Si $x_2 = u_1$, entonces $x_1 \xrightarrow{i} x_2 = u_1$ con $\{x_1, u_1\} \subseteq S_1$, lo que contradice que S_1 es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas.

b.2.2. Si $x_2 \xrightarrow{i} u_1$ y $u_1 \rightarrow^i x_2$, entonces $x_1 \xrightarrow{i} x_2 \xrightarrow{i} u_1$ es un camino dirigido monocromático el cual contiene una trayectoria dirigida monocromática por el Teorema 1.1.29, por lo tanto $x_1 \xrightarrow{i} u_1$ lo que contradice que S_1 es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Por lo tanto el caso b.2 no es posible.

Por lo tanto $S_1 \subseteq S_2$.

La demostración para el caso en que $S_2 \subseteq S_1$ es análoga.

Así $S_1 = S_2$.

c) Si $S_1 \leq S_2$ y $S_2 \leq S_3$, entonces $S_1 \leq S_3$, para $S_1, S_2, S_3 \subseteq \Gamma_i$.

Sea $x_1 \in S_1$. Por demostrar que existe $x_3 \in S_3$ tal que $x_1 = x_3$ ó $x_1 \xrightarrow{i} x_3$ y $x_3 \not\rightarrow^i x_1$.

Como $S_1 \leq S_2$, entonces existe $x_2 \in S_2$ tal que $x_1 = x_2$ ó $x_1 \xrightarrow{i} x_2$ y $x_2 \not\rightarrow^i x_1$.

Analicemos los dos casos:

Caso c.1. Si $x_1 = x_2$.

Como $S_2 \leq S_3$, entonces existe $x_3 \in S_3$ tal que $x_2 = x_3$ ó $x_2 \xrightarrow{i} x_3$ y $x_3 \not\rightarrow^i x_2$.

Analicemos estos dos subcasos:

c.1.1. Si $x_2 = x_3$, entonces $x_1 = x_2 = x_3$ con $x_3 \in S_3$.

c.1.2. Si $x_2 \xrightarrow{i} x_3$ y $x_3 \not\rightarrow^i x_2$.

Como $x_1 = x_2$, entonces tenemos que $x_1 = x_2 \xrightarrow{i} x_3$ y $x_3 \not\rightarrow^i x_2 = x_1$.

Caso c.2. Si $x_1 \xrightarrow{i} x_2$ y $x_2 \not\rightarrow^i x_1$.

Tenemos los siguientes dos subcasos:

c.2.1. Si $x_2 = x_3$, entonces $x_1 \xrightarrow{i} x_3$ y $x_3 \not\rightarrow^i x_1$.

c.2.2. Si $x_2 \xrightarrow{i} x_3$ y $x_3 \not\rightarrow^i x_2$, entonces $x_1 \xrightarrow{i} x_2$ y $x_2 \xrightarrow{i} x_3$ y por el Teorema 1.1.29 $x_1 \xrightarrow{i} x_3$.

Por demostrar que $x_3 \not\rightarrow^i x_1$.

Supongamos por contradicción que existe $x_3 \xrightarrow{i} x_1$. Como existe $x_1 \xrightarrow{i} x_2$, entonces por el Teorema 1.1.29 $x_3 \xrightarrow{i} x_2$ lo cual contradice que $x_3 \not\xrightarrow{i} x_2$.

Por lo tanto $S_1 \leq S_3$. ■

4.2. Núcleo por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas para Torneos Bipartitos.

Notemos que como D es finita y (Γ_i, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado, entonces tiene elementos máximos.

Denotemos con T_4 al torneo tal que:

$$\begin{aligned} V(T) &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \text{ son los vértices.} \\ F(T) &= \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_1, x_4)\} \text{ son las flechas.} \end{aligned}$$

Denotemos con $(1, 1, 2)$ a la digráfica 3-coloreada la cual es una subdivisión de C_3 tricolor, es decir, a C_3 le agregamos un vértice sobre cualquiera de sus flechas para obtener un nuevo vértice y una nueva flecha la cual tendrá el color y la dirección de la flecha original.

$$\begin{aligned} V(1, 1, 2) &= \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \\ F(1, 1, 2) &= \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1)\} \text{ tal que } (v_1, v_2) \text{ es} \\ &\text{de color } a, (v_2, v_3) \text{ es de color } b, (v_3, v_4) \text{ y } (v_4, v_1) \text{ es de color } c. \end{aligned}$$

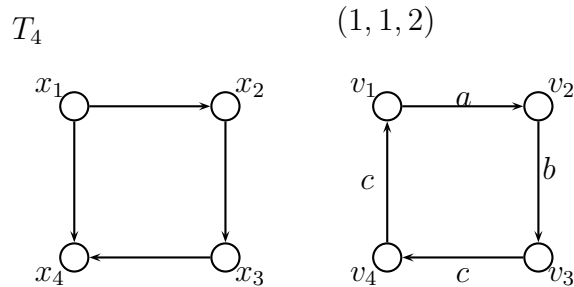


Figura 4.3

En adelante, sin perder generalidad supondremos que $m \geq 3$, por la observación 4.1.4.

Teorema 4.2.1. Sea T un torneo bipartito m -coloreado, con $m \geq 3$ tal que $\Gamma^+(u)$ es monocromática para cada $u \in V(T)$. Si todo T_4 contenido en T es a lo más 2-coloreado y T no contiene $(1, 1, 2)$ subdivisiones de C_3 tricolor, entonces T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Demostración.

La demostración se hará por inducción sobre $|V(T)|$.

Observemos que si $|V(T)| \leq 3$ a lo más tendremos 2 flechas y por lo tanto T no puede ser 3-coloreado.

1. Si $|V(T)| = 4$.

Tenemos los siguientes casos:

1.1. Si T es un torneo bipartito tal que $V(T) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y $F(T) = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4)\}$, entonces este caso no es posible, pues $\Gamma^+(u)$ es monocromática para cada $u \in V(T)$ y $m \geq 3$.

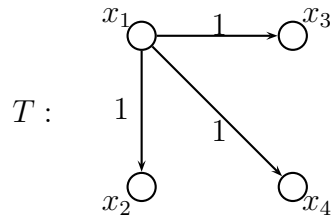


Figura 4.4

1.2. Si T es un torneo bipartito tal que $V(T) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y $F(T) = \{(x_1, x_2), (x_3, x_1), (x_4, x_1)\}$ con (x_1, x_2) es de color 1, (x_3, x_1) es de color 2 y (x_4, x_1) es de color 3. En este caso $N =$

$\{x_2, x_3, x_4\}$ es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de T .

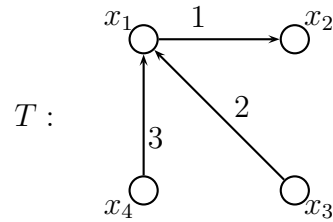


Figura 4.5

- 1.3.** Si T es un torneo bipartito tal que $V(T) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y $F(T) = \{(x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_4, x_1)\}$ con (x_2, x_1) de color 1, (x_3, x_1) de color 2 y (x_4, x_1) de color 3. En este caso $N = \{x_1\}$ es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de T .

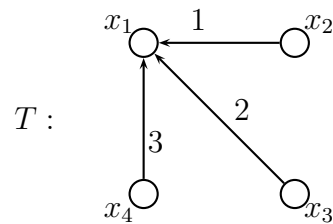


Figura 4.6

- 1.4.** Si T es un torneo bipartito tal que $V(T) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y $F(T) = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_4, x_1)\}$, este caso no es posible, pues $\Gamma^+(u)$ es monocromática para cada $u \in V(T)$ y $m \geq 3$.

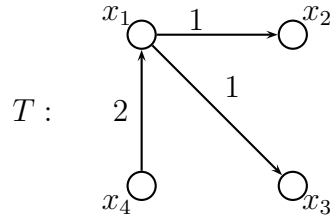


Figura 4.7

- 1.5.** Si T es un torneo bipartito tal que $V(T) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y $F(T) = \{(x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_2, x_4)\}$, este caso no es posible, pues $\Gamma^+(u)$ es monocromática para cada $u \in V(T)$ y $m \geq 3$.

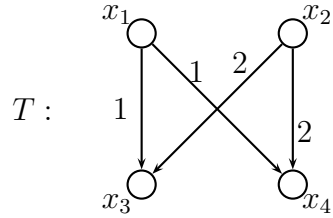


Figura 4.8

- 1.6.** Si T es un torneo bipartito tal que $V(T) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y $F(T) = \{(x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_1)\}$ con (x_1, x_3) de color 1, (x_4, x_1) de color 2, (x_2, x_3) y (x_2, x_4) de color 3. Este caso no es posible, pues T contiene un T_4 3-coloreado.

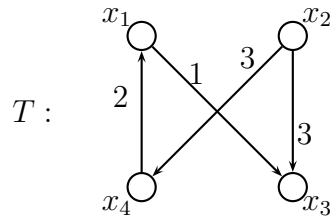


Figura 4.9

- 1.7.** Si T es un torneo bipartito tal que $V(T) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y $F(T) = \{(x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_3, x_2), (x_4, x_2)\}$ con (x_1, x_3) y (x_1, x_4) de color 1, (x_3, x_2) de color 2 y (x_4, x_2) de color 3. En este caso $N = \{x_1, x_2\}$ es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de T .

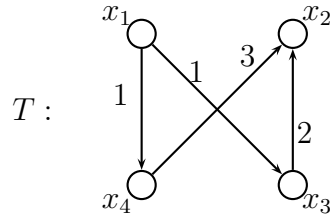


Figura 4.10

- 1.8.** Si T es un torneo bipartito tal que $V(T) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y $F(T) = \{(x_1, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_2), (x_4, x_1)\}$ con (x_1, x_3) de color 1, (x_3, x_2) de color 2, (x_4, x_1) de color 3 y (x_2, x_4) de color b .

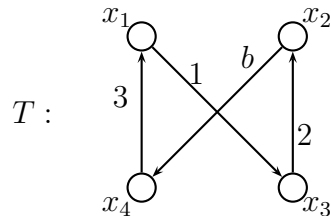


Figura 4.11

En este caso tenemos los siguientes subcasos:

- 1.8.1.** Si $b = 1$, entonces T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, $N = \{x_1, x_2\}$.

1.8.2. Si $b = 2$ ó $b = 3$, entonces T contiene $(1, 1, 2)$ subdivisión de C_3 tricolor, por lo que no es posible.

1.8.3. Si $b = 4$, entonces T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, $N = \{x_1, x_2\}$.

2. Hipótesis Inductiva. Supongamos que T' es un torneo bipartito m -coloreado que satisface las hipótesis del Teorema y $|V(T)| \leq n - 1$, entonces T' tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.
3. Sea T un torneo bipartito m -coloreado que satisface las hipótesis del Teorema y $|V(T)| \geq n$, $n \geq 5$. Probaremos que T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Supongamos lo contrario que T no tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Como $\Gamma^+(u)$ es monocromático por el Teorema 4.1.6 sabemos que T tiene seminúcleo módulo i distinto del vacío por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Sea S un elemento máximo (Γ_i, \leq) . Entonces S no es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de T .

Sea $X_0 = \{x \in V(T) - S \mid \text{no existe } xS\text{-trayectoria dirigida monocromática}\}$.

Como $S \neq \emptyset$ y S no es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas se tiene que $T[X_0]$ es una subdigráfica inducida propia de T .

Por lo tanto $T[X_0]$ tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, llamémosle N_0 .

Sea $B = \{x \in S \mid \text{no existe } xN_0\text{-trayectoria dirigida monocromática de color } i \text{ en } T\}$.

Entonces tenemos las siguientes afirmaciones:

a) $(B \cup N_0) \in \Gamma_i$.

a.1. Por demostrar que $B \cup N_0$ es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas.

a.1.1. B es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas, pues $B \subseteq S$.

a.1.2. Por demostrar que N_0 es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en T .

Observemos que N_0 es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en $T[X_0]$, pues N_0 es núcleo de $T[X_0]$.

Supongamos por contradicción que N_0 no es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en T , por lo que existe $\{x, y\} \subseteq N_0$ tal que existe una xy -trayectoria dirigida monocromática, $\alpha = (x, u_1, \dots, u_n, y)$.

Para α tenemos las siguientes afirmaciones:

a.1.2.1. $V(\alpha) \cap (V(T) - X_0) \neq \emptyset$.

Supongamos por contradicción que $V(\alpha) \cap (V(T) - X_0) = \emptyset$, entonces $V(\alpha) \subseteq X_0$ lo que contradice que N_0 es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en $T[X_0]$.

Por lo tanto $V(\alpha) \cap (V(T) - X_0) \neq \emptyset$.

a.1.2.2. $V(\alpha) \cap S = \emptyset$.

Supongamos por contradicción que $V(\alpha) \cap S \neq \emptyset$, de donde existe $w \in V(\alpha) \cap S$, entonces $w = u_i$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$ así que $(x, u_1, \dots, u_i = w)$ es una xw -trayectoria dirigida monocromática, contradiciendo la definición de X_0 , ya que $x \in X_0$ y $w \in S$.

Por lo tanto $V(\alpha) \cap S = \emptyset$.

Como $V(\alpha) \cap (V(T) - X_0) \neq \emptyset$, entonces existe $z \in V(\alpha) \cap (V(T) - X_0)$ y por lo anterior podemos suponer que $z \notin S$. Por

lo tanto existe una zS -trayectoria dirigida monocromática en T , llamémosle γ .

Como $z \in V(\alpha) \cap (V(T) - X_0)$ y $\Gamma^+(z)$ es monocromático se tiene que α y γ tienen el mismo color ya que $z \neq x$ y z no es el último punto de α pues $z \notin N_0$.

Ahora $(x, \alpha, z) \cup \gamma$ es un camino dirigido y por el Teorema 1.1.28 contiene una xS -trayectoria dirigida monocromática, lo cual contradice la definición de X_0 , pues $x \in N_0 \subseteq X_0$.

Por lo tanto N_0 es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en T .

a.1.3. Demostraremos que no existe BN_0 -trayectoria dirigida monocromática.

Supongamos por contradicción que existe $v \in B$ y existe $u \in N_0$ tal que existe vu -trayectoria dirigida monocromática, llamémosle α la cual es distinta del color i , ya que $v \in B$. Como $S \subseteq \Gamma_i$, S es seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas módulo i distinto del vacío, entonces por definición existe uS -trayectoria dirigida monocromática en T , lo cual contradice la definición de X_0 .

Ahora probaremos que no existe N_0B -trayectoria dirigida monocromática.

Como $B \subseteq S$, $N_0 \subseteq X_0$ y por la definición de X_0 no existe N_0B -trayectoria dirigida monocromática.

Por lo tanto $B \cup N_0$ es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas.

a.2. Por demostrar que para cualquier $z \in V(T) - (B \cup N_0)$ tal que existe $(B \cup N_0)z$ -trayectoria dirigida monocromática de color distinto de i , existe $z(B \cup N_0)$ -trayectoria dirigida monocromática.

Observemos que N_0 es distinto del vacío, pues es núcleo de $T[X_0]$, de donde $(B \cup N_0)$ es distinta del vacío.

Sea $z \in (V(T) - (B \cup N_0))$ tal que existe $(B \cup N_0)z$ -trayectoria dirigida monocromática en T de color distinto de i .

Supongamos por contradicción que no existe $z(B \cup N_0)$ -trayectoria dirigida monocromática en T .

Sea $w \in (B \cup N_0)$ y sea α una wz -trayectoria dirigida monocromática de color j , con $j \neq i$, supongamos que $j = 2$.

Tenemos los siguientes casos:

Caso 1. $w \in B$.

Como $w \in B \subseteq S$ y $S \in \Gamma_i$, entonces existe zS -trayectoria dirigida monocromática en T , por lo que existe $s \in S$ y existe zs -trayectoria dirigida monocromática en T , llamémosle α' .

Como estamos suponiendo que no existe zB -trayectoria dirigida monocromática, entonces $s \notin B$ y así $s \in S - B$.

Como $\{w, s\} \subseteq S$ el cual es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas, se sigue que α y α' tiene diferente color, supongamos que α' es de color $b \neq 2$.

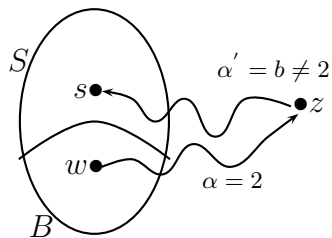


Figura 4.12

Como $s \in S - B$, entonces por la definición de B se tiene que existe $u \in N_0$ y existe una su -trayectoria dirigida monocromática de color i , llamémosle α'' .

Si $b = i$, entonces $\alpha' \cup \alpha''$ es un camino dirigido y por el Teorema 1.1.29 contiene una zu -trayectoria dirigida monocromática con $u \in N_0$.

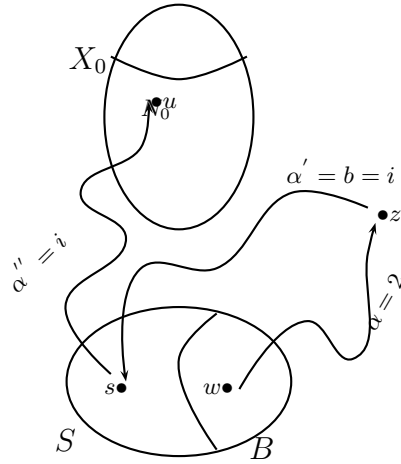


Figura 4.13

Por lo tanto existe $z(B \cup N_0)$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción pues supusimos que no existía la $z(B \cup N_0)$ -trayectoria dirigida monocromática.

Por lo que $b \neq i$ y $b \neq 2$, por lo tanto $b = 3$.

Si $\ell(\alpha') = 1$.

Entonces nos tomamos a z^- el vértice de α anterior inmediato a z en α tal que $(z^-, z) \in F(\alpha)$ y tomamos a s^+ el vértice de α'' posterior inmediato de s tal que $s^+ \in \alpha''$ y $(s, s^+) \in F(\alpha'')$. Entonces (z^-, z, s, s^+) es una trayectoria de longitud 3, sabemos que $(u_i, u_j) \in F(D)$ ó $(u_j, u_i) \in F(D)$ si y sólo si $j - i \equiv 1 \pmod{2}$ por el Lema 3.1.8 por lo que z^- y s^+ son adyacentes.

Si $(z^-, s^+) \in F(T)$, se tiene que es de color 2 pues α es de color 2 y $\Gamma^+(z^-)$ es monocromático, entonces $H[z^-, z, s, s^+]$ es un T_4 tricolor, contradicción con la hipótesis.

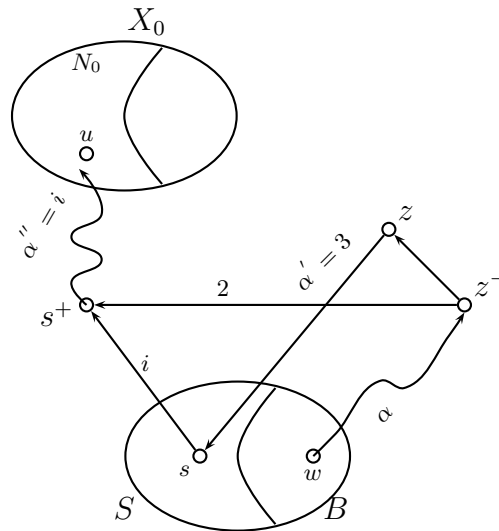


Figura 4.14

Si $(s^+, z^-) \in F(T)$, α'' es de color i , $\Gamma^+(s^+)$ es monocromático, entonces tenemos las siguientes posibilidades:

1.a. $\ell(\alpha'') \geq 2$.

Entonces (s^+, z^-) es de color i , en donde tenemos que $H[z^-, z, s, s^+, z^-]$ es una $(1, 1, 2)$ subdivisión de C_3 tricolor, contradicción con la hipótesis.

1.b. $\ell(\alpha'') = 1$.

En este caso tenemos que $s^+ = u$.

Como $(u, z^-) \in F(T)$, entonces tenemos los siguientes casos:

1.b.1. (u, z^-) es de color i , entonces $H[u, z^-, z, s, u]$ es una $(1, 1, 2)$ subdivisión de C_3 tricolor, contradicción con la hipótesis.

1.b.2. (u, z^-) es de color 2, entonces $H[u, z^-, z, s, u]$ es una $(1, 1, 2)$ subdivisión de C_3 tricolor, contradicción con la hipótesis.

1.b.3. (u, z^-) es de color j con $j \neq 2$, $i \neq 2$ y $j \neq i$.

Tenemos los siguientes casos:

1.b.3.1. $\ell(\alpha) \geq 2$.

Entonces sea z'' el vértice anterior inmediato a z^- en α de donde (z'', z^-, z, s) es una trayectoria dirigida de longitud 3 y por el Lema 3.1.8 se tiene que z'' y s son adyacentes.

Si $(z'', s) \in F(T)$ y es de color 2, pues α es de color 2 y $\Gamma^+(z'')$ es monocromático, por lo tanto se tiene que $H[z'', s, u, z^-]$ es un T_4 tricolor, contradicción con la hipótesis.

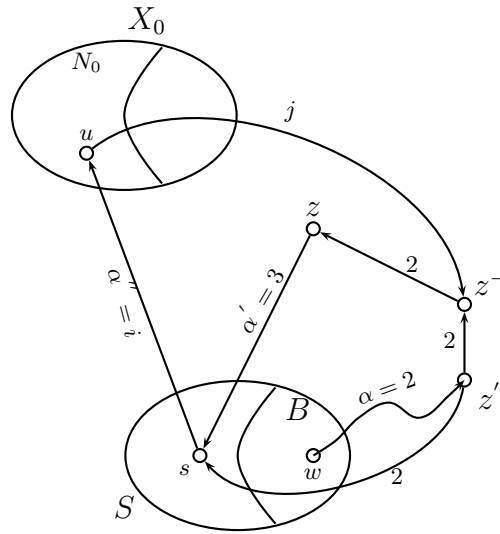


Figura 4.15

Si $(s, z'') \in F(T)$ y es de color i , pues α'' es de color i y $\Gamma^+(s)$ es monocromático, entonces se tiene que $H[s, z'', z^-, s]$ es una $(1, 1, 2)$ subdivisión de C_3 tricolor, contradicción con la hipótesis.

1.b.3.2. Si $\ell(\alpha) = 1$.

Entonces tenemos que (w, z, s, u) una wu -trayectoria dirigida de longitud 3 y por el Lema 3.1.8 se tiene que u y w son adyacentes.

Si $(w, u) \in F(T)$ y es de color 2, pues α es de color 2 y $\Gamma^+(w)$ es monocromático, entonces $H[(w, z, s, u)]$ es un T_4 tricolor, contradicción con la hipótesis.

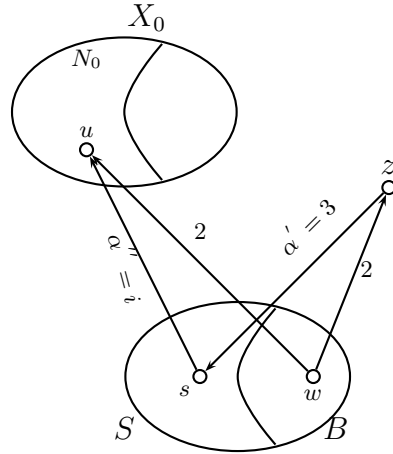


Figura 4.16

Si $(u, w) \in F(T)$, contradice la definición de X_0 , pues $u \in X_0$ y $w \in S$. Por lo tanto $\ell(\alpha) > 1$.

Si $\ell(\alpha') > 1$.

Sea $s^- \in V(\alpha')$ tal que $(s^-, s) \in F(\alpha')$, como w no es adyacente a s , ya que $\{w, s\} \subseteq S$ y S es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas y por ser T un torneo bipartito, tenemos que w y s^- son adyacentes.

Si $(s^-, w) \in F(T)$, entonces es de color 3, pues α' es de color $b = 3$ y $\Gamma^+(s^-)$ es monocromático, así $(z, \alpha', s^-) \cup (s^-, w)$ es una zw -trayectoria dirigida monocromática.

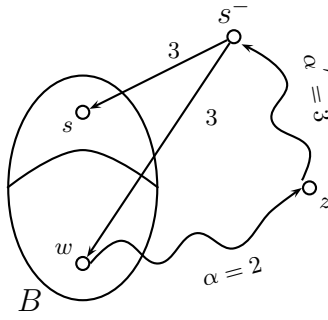


Figura 4.17

Por lo tanto existe $z(B \cup N_0)$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción con la hipótesis.

Si $(w, s^-) \in F(T)$, entonces es de color 2, pues α es de color 2 y $\Gamma^+(w)$ es monocromático, así (w, s^-, s, s^+) es una trayectoria dirigida de longitud 3 y por el Lema 3.1.8 s^+ y w son adyacentes.

Si $(w, s^+) \in F(T)$, entonces es de color 2, pues α es de color 2 y $\Gamma^+(w)$ es monocromático, así $H[w, s^-, s, s^+]$ es un T_4 tricolor, contradicción con la hipótesis.

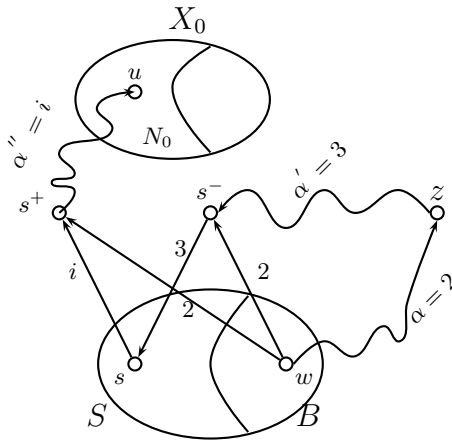


Figura 4.18

Si $(s^+, w) \in F(T)$ y $\ell(\alpha'') \geq 2$, se tiene que (s^+, w) es de color i , pues α'' es de color i y $\Gamma^+(s^+)$ es monocromático, así $H[w, s^-, s, s^+, w]$ es una $(1, 1, 2)$ subdivisión de C_3 tricolor, contradicción con la hipótesis.

Si $(s^+, w) \in F(T)$ y $\ell(\alpha'') = 1$, entonces $s^+ = u$, así $(u, w) \in F(T)$, contradicción con la definición de X_0 .

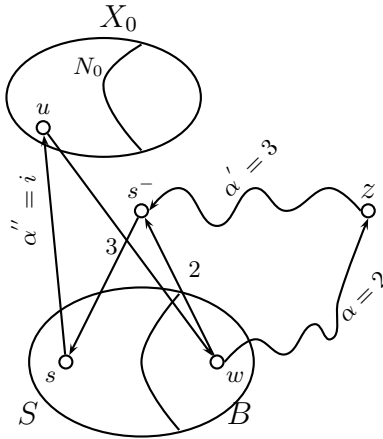


Figura 4.19

Por lo tanto este caso no es posible.

Caso 2. $w \in N_0$.

Sabemos que existe una wz -trayectoria dirigida monocromática de color 2.

Si $z \in X_0$, como N_0 es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de $T[X_0]$, entonces existe zN_0 -trayectoria dirigida monocromática.

Por lo tanto existe $z(B \cup N_0)$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción.

Si $z \notin X_0$, existe α' una zs -trayectoria dirigida monocromática para algún $s \in S$.

Si $s \in B$, entonces existe $z(B \cup N_0)$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción.

Por lo tanto $s \notin B$.

Por definición de B , existe $x \in N_0$ y α'' una sx -trayectoria dirigida monocromática de color i .

Si α' es de color 2, entonces $\alpha \cup \alpha'$ es un camino dirigido y por el Teorema 1.1.29 contiene una ws -trayectoria dirigida monocromática con $s \in S$, contradicción con la definición de X_0 ya que $w \in N_0 \subseteq X_0$. Por lo tanto α' no es de color 2.

Si α' es de color $i \neq 2$, entonces $\alpha' \cup \alpha''$ es un camino dirigido y por el Teorema 1.1.29 contiene una zx -trayectoria dirigida monocromática con $x \in N_0$. Entonces existe $z(B \cup N_0)$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción.

Por lo tanto α' es de algún color $k \neq i$ y $k \neq 2$, supongamos que $k = 3$, con $3 \neq i$ y $3 \neq 2$.

Tenemos los siguientes subcasos:

2.a. Si w y s son adyacentes, como $w \in N_0 \subseteq X_0$, entonces se sigue de la definición de X_0 que $(s, w) \in F(T)$ y es de color i ya que α'' es de color i y $\Gamma^+(s)$ es monocromático.

Sean s^- el vértice de α' anterior inmediato de s en α' tal que $(s^-, s) \in F(\alpha')$ y w^+ el vértice de α posterior inmediato de w tal que $w^+ \in V(\alpha)$ y $(w, w^+) \in F(\alpha)$, entonces (s^-, s, w, w^+) es una trayectoria de longitud 3 y por el Lema 3.1.8 w^+ y s^- son adyacentes.

2.a.1. Sea $\ell(\alpha) \geq 2$.

Si $(w^+, s^-) \in F(T)$, entonces es de color 2, pues α es de color 2 y $\Gamma^+(w^+)$ es monocromático, de donde $H[s^-, s, w, w^+, s^-]$ es una $(1, 1, 2)$ subdivisión de C_3 tricolor, contradicción con la hipótesis.

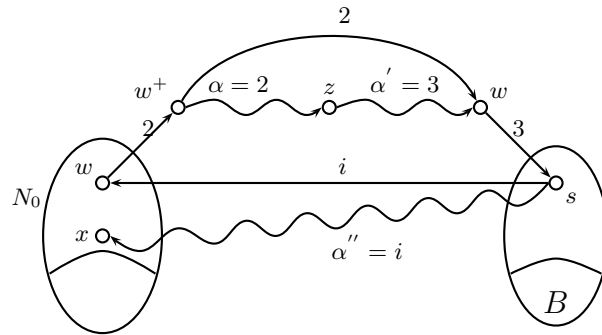


Figura 4.20

Si $(s^-, w^+) \in F(T)$, entonces es de color 3, pues α' es de color 3 y $\Gamma^+(s^-)$ es monocromático, de donde $H[s^-, s, w, w^+]$ es un T_4 tricolor, contradicción con la hipótesis.

2.a.2. Si $\ell(\alpha) = 1$, entonces $w^+ = z$, en este caso (w^+, s^-) es de color 3 y así (z, s^-, s, w, z) es una $(1, 1, 2)$ subdivisión de C_3 tricolor, contradicción con la hipótesis.

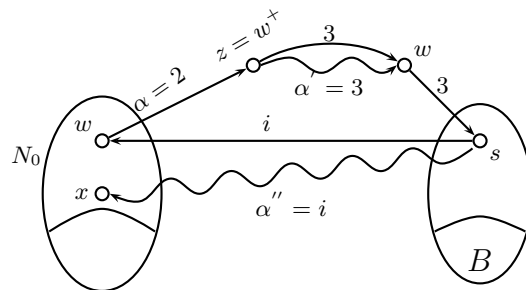


Figura 4.21

Si $(s^-, w^+) \in F(T)$, tenemos que es de color 3, pues α' es de color 3 y $\Gamma^+(s^-)$ es monocromático, entonces $H[s^-, s, w, z]$ es un T_4 tricolor, contradicción con la hipótesis.

Notemos que $s^- \neq w^+$ pues T no tiene ciclos dirigidos de longitud impar por ser un torneo bipartito.

2.b. Si $(s^-, w) \in F(T)$, entonces es de color 3 ya que (s^-, s) es de color 3 y $\Gamma^+(s^-)$ es monocromático, de donde $(z, \alpha', s^-) \cup (s^-, w)$ contiene una zw -trayectoria dirigida monocromática.

Así existe una $z(B \cup N_0)$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción.

2.c. Si $(w, s^-) \in F(T)$, entonces es de color 2 ya que (w, w^+) es de color 2 y $\Gamma^+(w)$ es monocromático, sea s^+ el vértice de α'' posterior inmediato de s en α'' tal que $(s, s^+) \in F(\alpha'')$, por lo que (w, s^-, s, s^+) es una trayectoria de longitud 3 y por el Lema 3.1.8 s^+ y w son adyacentes.

Si $(w, s^+) \in F(T)$, entonces es de color 2, pues (w, w^+) es de color 2 y $\Gamma^+(w)$ es monocromático, entonces $H[w, s^-, s, s^+]$ es un T_4 tricolor, contradicción con la hipótesis.

Observemos que $s^+ \neq x$ ya que $x, w \in N_0$ y N_0 es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de $T[X_0]$.

Si $(s^+, w) \in F(T)$ y es de color i , pues α'' es de color i y $\Gamma^+(s^+)$ es monocromático, entonces $H[w, s^-, s, s^+, w]$ es una $(1, 1, 2)$ subdivisión de C_3 tricolor, contradicción con la hipótesis.

Por lo tanto para cada $z \in V(T) - (B \cup N_0)$ tal que existe $(B \cup N_0)z$ -trayectoria dirigida monocromática de color distinto de i , existe $z(B \cup N_0)$ -trayectoria dirigida monocromática.

Por lo tanto $(B \cup N_0) \in \Gamma_i$.

Por último demostraremos que $S \leq B \cup N_0$.

Sea $u \in S$.

Por demostrar que existe $v \in (B \cup N_0)$ tal que $u = v$ ó $u \xrightarrow{i} v$ y $v \xrightarrow{i} u$.

Si $u \in B$ es claro que $u = v = u$.

Si $u \in S - B$, entonces existe uN_0 -trayectoria dirigida monocromática de color i , es decir, existe $v \in N_0$ tal que existe uv -trayectoria dirigida monocromática y $v \xrightarrow{i} u$ por definición de X_0 ($N_0 \subseteq X_0$).

Por lo tanto $S < B \cup N_0$, lo que contradice que S es un seminúcleo módulo i no vacío máximo por trayectorias dirigidas monocromáticas en (Γ_i, \leq) .

Por lo tanto T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

■

Conclusiones

En la Teoría de las digráficas existen muchos resultados que han sido demostrados y otros que faltan por demostrar o descubrirse. En esta tesis se presentan algunas condiciones para que los Torneos Bipartitos tengan Núcleos por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas.

Sauer, Sands y Woodrow probaron que toda digráfica 2-coloreada tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Demostramos que todo torneo bipartito m -coloreado con $m \geq 3$ tiene núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas a partir de ciertas condiciones tales como que C_4 es 1-casimonocromático, C_6 es monocromático, todo subtorneo cíclicamente 4-partito de orden 5 es 2-casimonocromático y $\Gamma^+(u)$ es monocromático para cada $u \in V(T)$. Un resultado que fue de gran importancia para ayudarnos a demostrar que todo torneo bipartito m -coloreado bajo ciertas condiciones tiene núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas fue el siguiente: Sea D un torneo bipartito, si $C = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$ es un camino en D , entonces para $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ y $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $(u_i, u_j) \in F(D)$ ó $(u_j, u_i) \in F(D)$ si y sólo si $j - i \equiv 1 \pmod{2}$.

En el Teorema 3.3.4 (ver Pag.89) demostramos que todo torneo bipartito m -coloreado con C_4 1-casimonocromático, C_6 monocromático y todo subtorneo cíclicamente 4-partito de orden 5 2-casimonocromático tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Se deja como problema abierto analizar la importancia de las hipótesis de este teorema, ¿qué pasaría si faltara alguna de las hipótesis?, ¿el resultado se seguiría cumpliendo?.

¿Qué otras digráficas coloreadas, además de los torneos bipartitos bajo las hipótesis del Teorema 3.3.4 satisfacen que su cerradura transitiva es núcleo perfecta?.

REFERENCIAS

- [1] C. Berge, *Graphs and Hipergraphs*. North Holland Publishing Co. North Holland, New York, (1973). Chapter 14.
- [2] A. S. Fraenkel, *Combinatorial Game theory foundation applied to digraph kernels*, Electron J. Combin. 4 (1997), 17.
- [3] A. S. Fraenkel, *Planar kernel and Grundy with $d \leq 3$, $d^+ \leq 2$, $d^- \leq 2$ are NP-Complete*, Discrete Appl.Math. 3 (1981), 257-262.
- [4] H. Galeana Sánchez, *On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments*, Discrete Math. 156 (1996), 103-112.
- [5] H. Galeana Sánchez^a, Rojas Monroy María del Rocío^b, *On monochromatic paths and monochromatic 4-cycles in edge coloured bipartite tournaments*, ^aInstituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Ciudad Universitaria. ^bFacultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México. 285 (2004), 313-318.
- [6] J. M. Le Bars, *Conterexamples of the 0-1 law for fragments of existential second-order: an overview*, Bull. Symbolic Logic 9 (2000), 67-82.
- [7] J. M. Le Bars, *The 0-1 law fails for frame satisfiability of propositional logic*, in: Proceedings of the 17th Symposium on Logic in Computes Science, (2002), pp. 225-234.
- [8] J. van Leeuwen, *Having a Grundy numbering is NP-Complete*, Report 207, Computer Science Department, Pennsylvania State University, University Park, PA, (1976).
- [9] Von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton University Press, Princeton, (1944).
- [10] V. Neumann-Lara, *Seminúcleos de una Digráfica*. Anales del Instituto de Matemáticas Vol.11, Universidad Nacional Autónoma de México (1971), 55-62.
- [11] Sánchez López María del Rocío, *Núcleos por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas en Torneos y Casi-torneos m-Coloredos*, Tesis de Licenciatura UNAM, (2006), 59-67.
- [12] B. Sands, N. Sauer and R. Woodrow, *On Monochromatic Paths in Edge Coloured Digraphs*, J. Combin. Theory, Series B33, (1982), 271-275.

- [13] Vojislav Petrovic, *Kings in bipartite tournaments*. Institute of Mathematics, University of Novi Sad, Trg D. Yugoslavia. 173 (1997) 187-189.
- [14] Vojislav Petrovic^a, Miroslava Trembl^b, *3-Kings in 3-partite tournaments*.
^aDepartment of Mathematics and Informatics, University of Novi Sad Trg D. ^bFaculty of Natural Sciences, University of Banja Luka. 308 (2008) 277-282.
- [15] Zavala Santana Berta, *Núcleos por Trayectorias Monocromáticas en Digráficas m-Coloredas con Conjuntos Monocromáticos de Flechas*, Tesis Doctorado UNAM, (2007), 43-67.