



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

Facultad de Ingeniería

**CALCULO DE SISMOGRAMAS SINTÉTICOS  
MEDIANTE EL MÉTODO DE NÚMERO DE ONDA DISCRETO  
EN UN MEDIO ESTRATIFICADO (CASO SH)**

TESIS  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
**INGENIERO GEOFÍSICO**

PRESENTA:  
MANUEL ARTURO GARCÍA MARTINEZ

DIRECTOR:  
Dr. ANTONIO URIBE CARVAJAL



2009



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **AGRADECIMIENTOS.**

*Quiero agradecer a DIOS, tal y como yo lo entiendo, por todas y cada una de las experiencias que me ha dado.*

*A mis padres, a mis abuelos y a mi hermano por todo su amor, paciencia, apoyo y consejos.*

*A Eva por sus consejos, ánimos, bendiciones y sobre todo por su AMOR.*

*Al Ing. Edgar Sánchez Álvaro y al Dr. Antonio Uribe Carvajal por la oportunidad y apoyo que he recibido en mi desarrollo como estudiante y profesional.*

*Al Dr. Francisco José Sánchez Sesma por su asesoramiento.*

*A cada uno de mis sinodales por sus valiosos y atinados comentarios, permitiéndome ampliar el panorama de este trabajo.*

*A la Sra. Cecilia, al Sr. Ramiro Tena Garduño y a su apreciable equipo de trabajo por darme más que un Sentido de Vida.*

*A mis profesores de la carrera por brindarme su enseñanza, conocimiento y experiencia.*

# CONTENIDO

INTRODUCCION	1
1 FUNDAMENTOS TEORICOS	6
1.1 Ondas de cuerpo	6
1.2 Ondas de superficie	8
1.3 Ley de Hooke	10
1.3.1 Deformaciones	10
1.3.2 Esfuerzos	12
1.3.3 Ecuaciones de campo	15
1.3.3.1 Ecuación de continuidad	15
1.3.3.2 Ecuación de movimiento	16
1.3.3.3 Ecuación de Navier	17
1.3.4 Ecuación de onda	18
1.4 Solución de la ecuación de onda para el caso SH	20
1.4.1 Solución de una ecuación de onda con una fuente de cizalla isótropa	22
1.5 Ley de Snell	23
1.6 Modelo Kelvin-Voigt	25
2 METODOLOGIA	28
2.1 Planteamiento del problema	28
2.2 Objetivos	28
2.3 Alcance	28
2.4 Hipótesis	29
2.4.1 Calculo de sismogramas sintéticos	29
3 FUNDAMENTOS DEL NUMERO DE ONDA DISCRETO	38
3.1 Numero de onda discreto	38
3.2 Generalidades de la matriz global	41
4 EJEMPLOS TEORICOS	45
4.1 Comparación entre la solución exacta y la solución con el Número de Onda Discreto	45
4.2 Prueba de transparencia	56
4.3 Medio elástico estratificado	57
4.4 Medio viscoelástico estratificado.	59
4.5 Comparación entre el medio elástico y el viscoelástico.	61
4.6 Animaciones.	63
4.6.1 Prueba de transparencia para un medio elástico.	63
4.6.2 Medio elástico estratificado.	65
4.6.3 Medio viscoelástico estratificado.	69
5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	73
REFERENCIAS.	75

APENDICE A.	Desarrollo matemático de la ecuación de continuidad, de movimiento, de Navier y de onda	78
APENDICE B.	Desarrollo matemático para obtener la solución de la ecuación de onda considerando una fuente de cizalla isótropa.	86
APENDICE C.	Programa para el cálculo del campo de desplazamientos en superficie libre para una onda SH en un medio elástico y estratificado.	88
APENDICE D	Programa para el cálculo del campo de desplazamientos en superficie libre para una onda SH en un medio elástico y estratificado.	93
APENDICE E	Programa para generar imágenes de la propagación de una Onda.	98

# INTRODUCCION.

Dentro de los objetivos de la sismología se encuentra el estudio de los sismos y las causas que los producen, por tanto se requiere del conocimiento del mecanismo que los genera, la trayectoria de las ondas sísmicas y la relación que existe con el interior del planeta, sin embargo en la gran mayoría de los casos no es posible observar directamente el lugar donde se produce la ruptura y mucho menos el material que lo rodea.

A través del análisis de la señal registrada ante la ocurrencia de un terremoto, es posible inferir la trayectoria que ha seguido la onda desde la fuente hasta el sensor. Resultados de estos estudios han permitido determinar aproximadamente cual es la estructura de la Tierra y del material del cual esta formada.

Una de las aplicaciones en la sismología es la respuesta sísmica en una determinada área con el objeto de cuantificar los niveles de aceleración y amplificación con fines de diseño sísmico, para ello nos apoyamos en conceptos físico-matemáticos para simular una fuente sísmica en un medio de propagación y generar sismogramas sintéticos, de tal manera que vamos a obtener la respuesta en sitio debido a la propagación de ondas sísmicas generadas por una fuente modelada. El pionero en esta rama es Lamb (1904) al obtener el primero de ellos. Actualmente gracias al avance computacional ha sido posible llevar a cabo mayor número de cálculos debido al desarrollo de diversas técnicas numéricas, todas ellas con ventajas y limitaciones cuyos resultados son reflejados en la precisión y el tiempo en que se obtienen.

Hoy la sismología cuenta con diversos métodos para evaluar la respuesta sísmica en un sitio determinado, estos son clasificados en métodos empíricos, semi-empíricos y numéricos, una descripción muy general de algunos de ellos se da a continuación:

Dentro de los primeros métodos antes mencionados se utilizan datos obtenidos en estaciones sísmicas, ejemplo de este método son los cocientes espectrales. En los métodos semi-empíricos el análisis del efecto de sitio se obtiene a partir de registros de pequeños terremotos como funciones empíricas de Green con objeto de generar acelerogramas (Luzon et. al. 2002).

Dentro de los métodos numéricos podemos encontrar los métodos de dominio, teoría de rayos así como de los métodos de elemento de frontera en donde básicamente se toma en cuenta la solución de la ecuación de onda para un medio elástico, homogéneo e isotrópico para obtener la propagación de ondas elásticas. Además se consideran capas con diferentes propiedades elásticas en una determinada área de interés, estas se localizan sobreyaciendo al semi-espacio.

Se debe considerar el fenómeno de difracción en la propagación de las ondas cuando estas pasan de un medio a otro, ya que de acuerdo con el principio de Huygens en donde al incidir una onda en un medio con diferentes propiedades mecánicas este actúa como un nuevo centro generador de ondas (Stein, 2003).

En los métodos de dominio encontramos técnicas tales como: Diferencias finitas, método espectral y métodos de elemento finito, que de acuerdo con (Luzon, 2002) estas son demandantes en lo referente a memoria y tiempo computacional.

En las diferencias finitas las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento son reemplazadas por ecuaciones recursivas, las cuales forman una malla, así la solución en cada nodo en sucesivos intervalos de tiempo es calculada. Esta técnica ha sido confiable sin embargo se debe considerar el tiempo computacional, limitando en algunas ocasiones su uso a supercomputadoras. En el método pseudoespectral las derivadas espaciales de las ecuaciones diferenciales se evalúan a lo largo de un renglón o columna en una malla espacial en un tiempo dado mediante la Transformada Rápida de Fourier, las derivadas de tiempo se calculan con diferencias finitas. El método de elemento finito consiste en dividir el medio de tal manera que el desplazamiento es calculado en los nodos de los mismo elementos donde las fuerzas son aplicadas, los elementos no necesariamente tienen que ser del mismo tamaño o forma, una vez que el medio ha sido dividido el desplazamiento en cada nodo esta relacionado a las fuerzas aplicadas por el sistema de ecuaciones diferenciales, por otro lado el método esta limitado a altas frecuencias ya que el medio debe ser dividido en mas elementos aumentando los requerimientos computacionales. (Luzon et. al, 2002). De acuerdo con (Joiner y Chen, 1975) es posible calcular la respuesta con configuraciones con comportamientos no lineales. Mientras que en (Avila et al, 2002) “los elementos finitos y diferencias finitas permiten tratar materiales heterogéneos”.

En la teoría de Rayos se hace uso de técnicas geométricas, el análisis es hecho en dos pasos, primero se encuentran las rutas para la propagación (rayos) y posteriormente se encuentra la intensidad de la propagación a lo largo de cada rayo, (Cerveny, 1985) hace uso de esta técnica en un medio estratificado con variaciones laterales. Esta técnica presenta bajo costo computacional en comparación con otros métodos, sin embargo algunas de sus limitantes son que no toma en cuenta el fenómeno de difracción y en estructuras de varias capas hay dificultad debido al problema de escoger adecuadamente los rayos que deben ser incluidos en el cálculo (Yamamoto,1985).

Los métodos de frontera incluyen técnicas que están basadas en: uso de sistemas de completos de soluciones como lo cita Luzon en 2002 mediante un trabajo de Herrera (1982), uso de ecuaciones integrales (Brebbia, 1978) y en la discretización del número de onda (Bouchon 1979). En la primera, la solución es obtenida por la combinación lineal de fuentes independientes, las cuales satisfacen la ecuación diferencial propuesta para un problema dado, los coeficientes son obtenidos al imponer condiciones de frontera en las interfases cuyas propiedades físicas son diferentes (Luzon, et. al, 2002). Sanchez Sesma en 1988 obtuvo mediante esta técnica la respuesta sísmica en cuencas sedimentarias.

Solución con ecuaciones integrales: La representación integral del campo de ondas es posible en términos de elementos de frontera, así la discretización de las superficies y las condiciones de frontera generan un sistema de ecuaciones integrales (Luzon, et. al, 2002).

El método de elemento de frontera ofrece las siguientes ventajas: Descripción precisa de interfases irregulares, el uso de continuidad de deformaciones y tracciones que cruzan las interfases y la posibilidad de separar los campos de ondas generados por diferentes partes del medio, sin embargo están limitado si se toman en cuenta la heterogeneidad del medio (Fu y Bouchon, 2004).

La técnica expuesta en este trabajo de tesis pertenece al método de Número de Onda Discreto, en donde el campo de ondas es presentado como la superposición de ondas planas homogéneas e inhomogéneas dispersas en todas direcciones a partir de las fronteras del medio (Bouchon, 2006), en donde las incógnitas del problema son las amplitudes de las ondas ascendentes y descendentes. Esta técnica puede ser combinada con otras técnicas, ejemplo de esto es con la solución a ecuaciones integrales, realizada por Hisada en 1992 y 1994 para el estudio de difracción de ondas elásticas, en donde se integran funciones de Green a lo largo de fronteras evitando singularidades que se presentan cuando la posición de la fuente y el punto de observación coinciden (Luzon, et. al, 2002).

Para el cálculo de sísmogramas sintéticos presentados mas adelante se hace uso de las técnicas de Número de Onda discreto y de la Matriz Global, sirviendo como una herramienta para la propagación de ondas elásticas así como para el cálculo del campo de desplazamientos en superficie libre o a profundidad.

Una técnica ampliamente usada y conocida para el estudio de la propagación de ondas elásticas es la matriz de Thompson-Haskell cuyos elementos corresponden a las propiedades dadas al en el medio, generando un vector desplazamiento-esfuerzo en una profundidad  $z$  mediante la operación de un vector en una profundidad de referencia  $z_0$  (Keiiti, Richards, 2002) para la propagación no requiere del uso de coeficientes de transmisión y reflexión en cada interfase, el esfuerzo y el desplazamiento es propagado no la amplitud de las ondas (Shearer, 1999). Para la propagación se hace uso de la matriz propagadora dada por Gilbert y Backus en 1966, de esta manera cada matriz representa una capa y la multiplicación de matrices resulta ser una función de los parámetros del modelo (Yamamoto, 1985) del medio, por otro lado la técnica es reformulada en términos de coeficientes de transmisión y reflexión por Kennett en 1983 (Luzon, et.al, 2002). Otra matriz que hace el uso de la matriz propagadora es la de Kennett en donde se considera la inhomogeneidad lateral en un medio estratificado (Keiiti, Richards, 2002).

Básicamente el método de Número de Onda Discreto (NOD) introducido por (Bouchon y Keiiti, 1977) tiene la particularidad de sumar ondas planas homogéneas e inhomogéneas para diferentes frecuencias y números de onda mientras que la Matriz Global consiste en utilizar condiciones de frontera, en este caso en particular en un medio elástico y estratificado en donde las tracciones en superficie libre son nulas y hay continuidad de esfuerzos y de desplazamientos en cada interfase de tipo solido-solido generando un sistema de ecuaciones, el número de ecuaciones depende del numero de estratos que se considere para el análisis, de tal manera que una sola matriz contiene toda la información de los estratos a diferencia de la matriz propagadora en donde se genera una matriz para cada estrato y hay multiplicación de estas, por lo que se disminuye la cantidad de operaciones realizadas, la resolución del sistema de ecuaciones permite obtener las amplitudes del desplazamiento en cada uno de los estrato.

El NOD permite la obtención del campo de desplazamientos en superficie y a cualquier profundidad producto de una fuente de ondas sísmicas que se encuentra alojada en un punto de interés, la fuente es representada mediante fuerzas de cuerpo equivalentes y se asume una periodicidad de la misma, es decir es discretizada a lo largo de un eje en particular.

Este método tiene la particularidad de simplificar los cálculos y toma ventaja de los avances en el campo computacional para la obtención de los resultados.



El objetivo de esta tesis es emplear el método de Numero de Onda Discreto y la matriz global como un método practico para la simulación de la propagación de ondas sísmicas para: Calcular el campo de desplazamiento en superficie libre debido a la propagación de una onda tipo SH empleando dos medios por los cuales se va a propagar, siendo uno de ellos elástico y otro viscoelástico, el método estará validado al realizar una comparación entre una solución analítica y la solución mediante el Número de Onda Discreto para un medio en particular, calculando el error absoluto entre ambas soluciones y finalmente se compararan los resultados obtenidos en cada uno de los medios de propagación mediante sismogramas sintéticos y se obtendrán imágenes de una animación en diferentes intervalos de tiempo en cada caso.

Inicialmente se programaron las técnicas en Matlab buscando aprovechar las librerías incluidas en dicho software, sin embargo tomaba demasiado tiempo realizar los cálculos sobre todo en los ciclos, por lo que finalmente no se tomo en cuenta con dicha opción y se programó utilizando Visual Fortran, únicamente los sismogramas y las animaciones se obtuvieron mediante Matlab.

El medio propuesto esta formado por tres estratos paralelos entre si con propiedades mecánicas bien definidas en cada una (densidad, rigidez y espesor) sobre un semi-espacio, la onda que se propaga es de tipo SH y se considera el caso bidimensional  $(x,z)$  en donde  $x$  corresponde a la superficie libre (eje horizontal) y  $z$  es la profundidad, se considera una fuente puntual alojada en el eje  $y$ , es decir es perpendicular al plano de propagación y en el tercer estrato.

Este trabajo ha sido llevado a cabo bajo la dirección del Dr. Francisco José Sánchez Sesma, Dr. Antonio Uribe Carvajal y del Ing. Edgar Sánchez Álvaro.

La teoría, fundamentos matemáticos y los antecedentes de la técnica se describen en los tres primeros capítulos, los resultados y discusiones de los mismos se presentan en el cuarto capítulo mientras que las conclusiones son expuestas en el capítulo 5. A continuación se describe brevemente cada capítulo.

Capitulo 1: FUNDAMENTOS TEORICOS. En este capítulo se muestran las bases físicas y matemáticas en que se fundamenta el método. Se describe brevemente el tipo de ondas sísmicas generadas durante un sismo y por otro lado mediante la mecánica del medio continuo se considera a la Ley de Hooke (en donde se relacionan los esfuerzos y las deformaciones) para la obtención de la ecuación de continuidad para posteriormente deducir la ecuación de Navier y la ecuación de onda siendo esta última resuelta obteniendo el desplazamiento de una onda elástica en un medio homogéneo, elástico e isótropo para dos casos uno sin considerar una fuente de ondas y otro con una fuente de cizalla isótropa. Además se presenta el modelo reológico Kelvin-Voigt el cual permite modelar un medio de propagación como viscoelástico.

Capitulo 2: METODOLOGIA: En esta sección se presentan los alcances de este trabajo así como los objetivos e hipótesis con lo cual podremos validar o invalidar el método de acuerdo a los resultados, son presentadas las características de los medios de propagación propuestos para el estudio así como los parámetros de entrada con que opera el programa para el cálculo de los sismogramas y de las animaciones el cual es también descrito.

Capítulo 3: FUNDAMENTOS DE LA MATRIZ GLOBAL Y DEL MÉTODO DE NUMERO DE ONDA DISCRETO: Este capítulo se dan a conocer las bases de la matriz global considerando su formación y la utilidad en el método y sus limitantes, y por otro lado se dan los fundamentos de la técnica del Número de Onda Discreto, presentando la teoría y las ecuaciones que lo sustentan.

Capítulo 4: EJEMPLOS TEÓRICOS: Son presentados los resultados obtenidos de la programación del método, se hace una comparación entre una solución exacta y la solución con el NOD, con sismogramas sintéticos e imágenes en diferentes intervalos de tiempo de animaciones se hace una evaluación de la matriz global mediante una “prueba de transparencia” así como una comparación de los resultados obtenidos en cada uno de los medios propuestos.

Capítulo 5: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES: Con base en los resultados presentados y de acuerdo con las hipótesis planteadas y los objetivos es posible evaluar el método presentado considerando sus ventajas y limitaciones.

Finalmente en los Anexos se dan a conocer los desarrollos matemáticos de las ecuaciones empleadas en la técnica así como los programas desarrollados para obtener los resultados.

De esta manera se dan las bases de un método para el cálculo de la propagación de ondas elásticas el cual puede ser extendido al considerar modelos más reales y complejos como es el caso de la fuente y la geología, para el cálculo del efecto de sitio o funciones de transferencia e incluso como un trabajo descriptivo aplicado a estudiantes de física de las ondas.

# 1. FUNDAMENTOS TEORICOS

Desde siglos pasados el hombre a manifestado su interés en fenómenos naturales que lo afectan como los terremotos, algunas veces atribuyéndolos al estado de ánimo de sus dioses, sin embargo conforme el conocimiento fue desarrollándose en diferentes ramas de la ciencia así surgió la sismología, la cual permite explicar estos sucesos que no son raros en el planeta. Esta disciplina se encarga del estudio de la causas que producen los sismos, desde el mecanismo de la fuente que lo provoca y la forma en que se transmite y viaja la energía a través del material que rodea a la fuente, además de la relación existente con el interior del planeta, teniendo a las matemáticas y a la física como herramientas indispensables para su estudio.

Inicialmente se debe conocer que tipo de ondas sísmicas son generadas al ocurrir un evento así como sus principales características.

Para entender el mecanismo que describe la generación y propagación de las ondas sísmicas a través de un medio se requiere del conocimiento de la teoría que lo describe y fundamenta. La propagación de las ondas en un medio elástico puede describirse matemáticamente considerando un medio continuo y mediante la Ley de Hooke, las leyes de Newton y las leyes de la conservación de la materia y energía es posible determinar la ecuación de continuidad y deducir posteriormente la ecuación de onda cuya solución permite obtener el desplazamiento de una onda, de tal manera que vamos a encontrarla considerando dos casos, uno sin fuente y otro con una fuente. La descripción de la trayectoria esta basada en la Ley de Snell, finalmente se describe el modelo reológico Kelvin-Voigt el cual permite modelar un medio de propagación con propiedades viscoelásticas.

## 1.1 Ondas de Cuerpo.

Los terremotos son producto de la liberación súbita y repentina de energía que se ha acumulado por un periodo de tiempo, generándose a diferentes profundidades ya sea en la corteza o en el manto, se producen al haber un rompimiento en la roca y son percibidos en la superficie por aparatos sensitivos que registran la deformación de las partículas producida por la energía liberada y algunos eventos llegan a ser sentidos por el hombre.

Al ocurrir la liberación de energía, esta se propaga en todas direcciones desde la fuente o ruptura a través del interior de la Tierra. Esta radiación se transmite a cada una de las partículas que constituyen al material empujando, deformando y regresando a la partícula a su posición, o sea tienen propiedades elásticas.

La trayectoria que siguen las ondas hasta llegar a un receptor o sensor forman una señal que al ser graficada contra el tiempo se denomina sismograma, en el cual está contenida la información de la fuente sísmica, la trayectoria de la onda, condiciones del suelo en el sitio donde se hizo el registro y los parámetros del equipo de grabación.

Las ondas se clasifican en tres tipos, las que viajan en el interior de la Tierra son conocidas como ondas de cuerpo o internas, las ondas de superficie y las ondas guiadas. Las primeras se

clasifican en dos tipos dependiendo de sus propiedades físicas, ondas P o primarias y ondas S o secundarias.

Las ondas P son aquellas que se transmiten por la compresión y dilatación de las partículas. Ejemplo de estas ondas de compresión es el sonido (ondas acústicas), las partículas se mueven en el mismo sentido en que la onda se propaga (figura 1.1-1) y son las que tienen mayor velocidad al desplazarse. Para un material elástico e isotrópico el modelo matemático para la velocidad es (Stein, 2003):

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Donde  $\alpha$  es la velocidad de ondas P,  $\lambda$  es la constante de Lamé,  $\mu$  es el módulo de rigidez y  $\rho$  es la densidad, este tipo de onda puede propagarse tanto en líquidos como en sólidos ya que no involucra un cambio en el volumen.

Por otro lado, las ondas S se transmiten perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda, por lo que tienen una componente vertical (SV) y una horizontal (SH). Cuando solo se desplazan en una dirección se dice que es una onda polarizada. Se les conocen como ondas de cizalla o de corte. La velocidad de propagación es menor a la de las ondas P (figura 1.1-2) siendo su modelo matemático el siguiente (Stein,2003):

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Donde  $\beta$  es la velocidad de las ondas S. Una característica de estas ondas es que no se transmiten a través de los líquidos ( $\mu = 0$ ) y tienen una mayor amplitud que las ondas P.

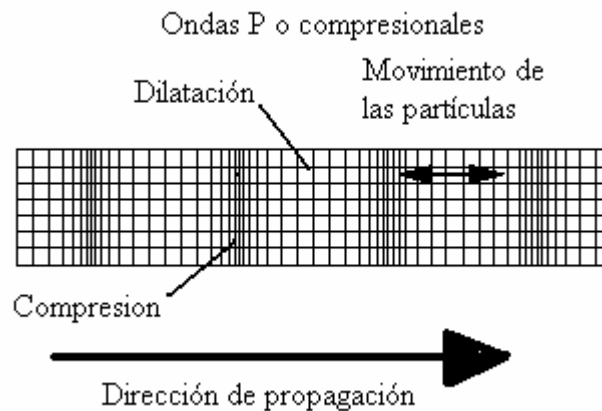


Figura 1.1-1 Esquema del desplazamiento de una onda primaria u onda P. (Imagen tomada de la página de Internet del Servicio Sismológico Nacional)

Si se considera a la corteza como un sólido de Poisson, se tiene que las componentes elásticas  $\lambda = \mu$ , por lo que la relación de Poisson es  $\sigma = 0.25$  (Stein, 2003) y el cociente de la velocidad de onda P entre la onda S,  $V_p / V_S = \sqrt{3}$  (Nava, 1987), siendo este último resultado el valor teórico para una Tierra elástica, homogénea e isotrópica.

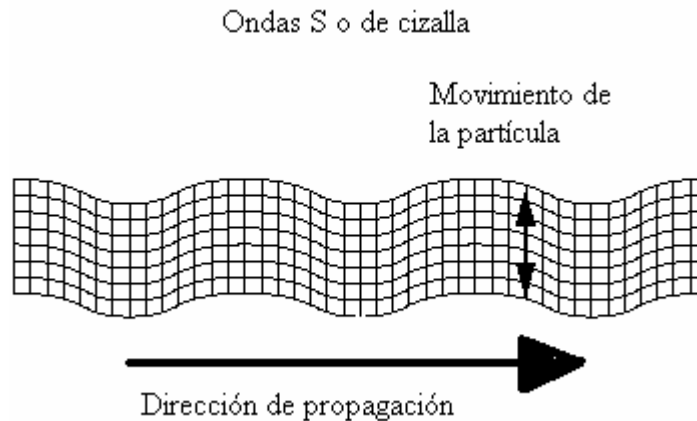


Figura 1.1-2 Esquema del desplazamiento de una onda S o secundaria (Imagen tomada y editada de la pagina de Internet del Servicio Sismológico Nacional)

## 1.2 Ondas de Superficie.

Las ondas que son percibidas por las personas ante la ocurrencia de un sismo cuya energía liberada es lo suficientemente grande y son causantes de los daños en la superficie de la corteza son las que viajan precisamente en ella y son llamadas ondas superficiales, estas tienen mayor amplitud que las de cuerpo y por tanto mayor contenido de energía que se concentra cerca de la superficie y a diferencia de las ondas de cuerpo pueden circular por el planeta varias veces después de un gran terremoto.

Hay dos tipos principales de ondas de superficie.

**Ondas Rayleigh:** Son ondas en las cuales interactúan las ondas P y SV, son de periodo muy largo y su movimiento es elíptico-retrogrado, son las ondas superficiales más lentas (Figura 1.2-1). Para un sólido de Poisson homogéneo la velocidad aparente horizontal de las ondas de Rayleigh es  $0.92\beta$ , donde  $\beta$  es la velocidad de propagación de las ondas S (Stein, 2003).

**Ondas Love:** Este tipo de ondas es el producto de la interacción de las ondas SH. El periodo es muy largo y son ondas polarizadas horizontalmente. Tienen mayor velocidad que las de Rayleigh (Figura. 1.2-2).

Las ondas de Rayleigh pueden existir en un semi-espacio homogéneo debido a la interacción de ondas P y SV; en contraste las ondas de Love sólo pueden existir si al menos hay una capa sobre un semi-espacio porque debe existir variación entre las propiedades del medio con la profundidad

Otro tipo de ondas que pueden ser vistas en los sismogramas son las ondas guiadas, estas son aquellas que se forman en un medio el cual está rodeado por otro medio compuesto por rocas con una mayor velocidad de propagación y solo algunas podrán transmitirse al otro medio más rápido, las que queden atrapadas van a estar transmitiéndose en el medio más lento.

Además existen otras ondas guiadas conocidas como ondas T (o terceras), estas son generadas cuando ondas sonoras viajan en el agua y son transmitidas a un cuerpo rocoso, llegan a viajar grandes distancias y su atenuación es muy poca, son de alta frecuencia.

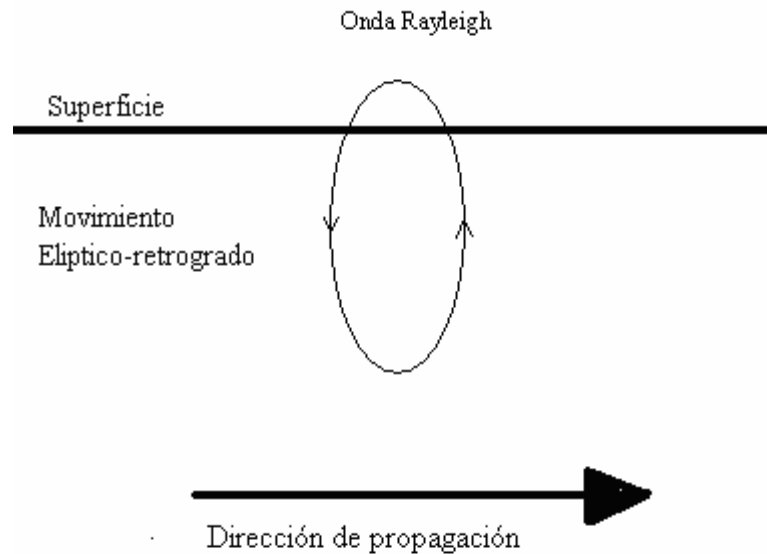


Figura 1.2-1. Esquema del desplazamiento de una onda tipo Rayleigh

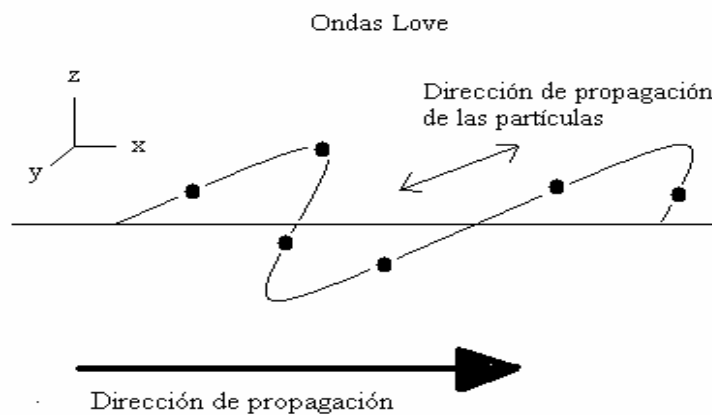


Figura 1.2-2. Esquema del desplazamiento de las partículas ante el paso de una onda de tipo Love.

### 1.3 Ley de Hooke.

La energía que es liberada al ocurrir un sismo provoca deformaciones en las partículas de los cuerpos rocosos que rodean a la falla. El estudio de la deformación ha permitido obtener una descripción del comportamiento del material basado en la relación que hay entre los esfuerzos, deformaciones y propiedades del mismo.

Para el análisis de los cuerpos se consideran en un medio continuo, es decir, los materiales son tratados como si estuvieran conformados como un conjunto de volúmenes discretos repetidos en el espacio, por lo que su estudio es tomado en cuenta de forma macroscópica y sin presentar discontinuidades, se ignoran los detalles atómicos.

Cuando se aplica un esfuerzo a un cuerpo este se deforma y dicha deformación es proporcional al esfuerzo, a esta relación se le conoce como Ley de Hooke, cuando se deja de aplicar el esfuerzo, el cuerpo deformado tiende a regresar a su forma inicial, sin embargo está limitada ya que si el esfuerzo es mayor que la resistencia del material se ocasiona una ruptura en este.

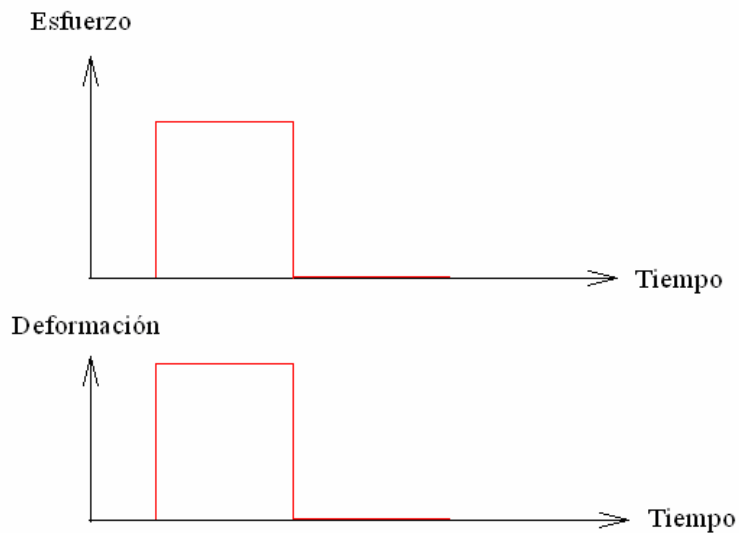


Figura 1.3-1. Gráfica de Esfuerzo contra Tiempo y de Deformación contra Tiempo, al aplicarse un esfuerzo se produce una deformación proporcional a dicho esfuerzo.

#### 1.3.1 Deformaciones.

Se entiende por deformación al desplazamiento de una partícula con respecto a otra en un mismo material. El movimiento de una partícula está dado como una función del tiempo y del espacio, por lo que el campo vectorial  $u(x,t)$  describe el movimiento de cada punto en un medio (Aki-Richards, 2003).

Un cuerpo puede sufrir dos tipos fundamentales de movimiento: rotación del cuerpo y deformación interna. Las deformaciones internas están compuestas por cambios de longitud y distorsión angular.

Considerando un eje cartesiano cuyas componentes son  $(x_1, x_2, x_3)$ , si la distancia entre dos puntos internos MN en un cuerpo (figura 1.3.1-1), solo cambia de longitud a lo largo de una dirección  $(x_1)$  por la acción de fuerzas aplicadas a una posición M'N', la deformación normal esta dada por:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad 2.3.1a$$



Figura 1.3.1-1. Cambio de longitud entre dos puntos internos debido a fuerzas externas

El primer subíndice indica hacia donde está orientado el segmento de línea, el segundo la dirección del cambio de longitud.

Para dar una descripción completa de la deformación se involucran nueve términos: tres deformaciones normales  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$  asociadas a cambios de volumen, que por convención es negativo al ser compresión y positivo al haber dilatación; y seis elementos correspondientes a cambios angulares de cada dirección con respecto a las otras dos direcciones  $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}$ .

Por lo que las ecuaciones para las otras dos deformaciones normales son:

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad 1.3.1b$$

Por otro lado las deformaciones por cizalla son debidas a cambios angulares dentro del medio por acción de fuerzas externas aplicadas, la ecuación 1.3.2 representa al tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy (Fung, 1994).



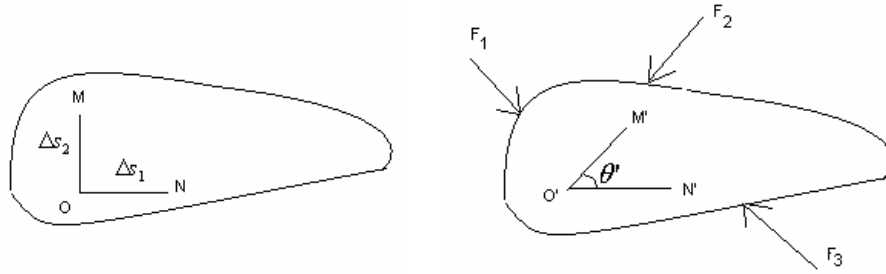


Figura 1.3.1-2. Cambio angular entre dos puntos contenidos en un cuerpo debido fuerzas externas aplicadas.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad 1.3.2$$

Cabe destacar la simetría existente, de esta manera  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$

Los nueve elementos anteriores forman el tensor infinitesimal de deformaciones, cuya representación esta dada en forma matricial por la ecuación 1.3.3

La traza del tensor es conocida como dilatación y representa un cambio fraccional en el volumen (Kennett, 2001).

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_{22}}{\partial x_{22}} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_{33}}{\partial x_{33}} \end{pmatrix} \quad 1.3.3$$

$$\theta = \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad 1.3.4$$

### 1.3.2 Esfuerzos.

Un esfuerzo es la razón de una fuerza actuando en un área por lo tanto las unidades en que se mide es de fuerza entre unidad de área. Por tanto al ser aplicado un esfuerzo (ya sea interno o externo en un medio continuo), este se distribuye e influye a través del cuerpo.

Hay dos tipos de fuerza que se manifiestan en un objeto. Una de ellas es la fuerza de cuerpo, que actúa en el interior del objeto. Por ejemplo la gravedad es una fuerza de cuerpo, las unidades en que se mide es de fuerza por unidad de volumen.

El segundo tipo es la fuerza de superficie, esta actúa en la superficie de un cuerpo y puede ser descompuesta en dos componentes perpendiculares, una normal y otra tangente al área. La unidad en que se mide es de fuerza por unidad de área.

Ahora consideraremos fuerzas actuando en un pequeño volumen  $V$  con superficie  $S$  en un amplio medio continuo, si la fuerza de superficie  $F$  actúa sobre cada elemento de superficie  $ds$ , cuyo vector normal a dicha superficie es  $\bar{n}$ , es posible definir el vector tracción  $\mathbf{T}$ , como el límite de la fuerza de superficie por unidad de área en cualquier punto mientras el área sea infinitesimal:

$$T(\bar{n}) = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{F}{ds} \quad 1.3.5$$

Por lo que el vector tracción tiene la misma orientación que la fuerza, además de ser una función del vector unitario  $\bar{n}$  porque depende de la orientación de la superficie.

Los esfuerzos tienen unidades de fuerza por unidad de área. Debido a una geometría similar en los ejes cartesianos, se observa que  $\sigma_{ij} = T_i^j$ . El primer índice indica la dirección de la normal al plano sobre el cual esta actuando la fuerza, el segundo índice indica la dirección de la fuerza. Por lo que, un esfuerzo que actúa normal al plano corresponde a  $\sigma_{11}$ , mientras los esfuerzos que actúan en el plano son  $\sigma_{12}$  y  $\sigma_{13}$  son funciones del espacio y tiempo.

Para poder representar completamente la distribución de fuerzas internas en un punto se tiene el tensor de esfuerzos que esta dado por Stein, 2003):

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad 1.3.6$$

La diagonal principal corresponde a los esfuerzos normales siendo para la compresión positivos y para la tensión negativos, los otros seis elementos son los esfuerzos de cizalla. El tensor es una matriz simétrica.

Deformaciones pequeñas están relacionadas a materiales más rígidos debido a las propiedades físicas de los materiales.

Así se tiene que la relación entre esfuerzos y deformaciones esta dada por las ecuaciones constitutivas y es aplicada a la linealidad que existe entre los tensores de esfuerzos y deformaciones. Una de esas ecuaciones es la Ley de Hooke.

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} \quad 1.3.7$$

En donde las constantes  $C_{ijkl}$  describen las propiedades del material y son conocidas como módulos elásticos, están relacionados a los desplazamientos en respuesta a una fuerza aplicada.

En total se tienen 81 componentes, sin embargo debido a la simetría entre los tensores de esfuerzos y deformaciones se reducen a 36. Tomando en cuenta la energía de deformación, la cual establece lo siguiente: “Al aplicar una fuerza a un material elástico esta causa deformación por lo que energía potencial es almacenada dentro del material; entonces la energía de deformación, almacenada en un volumen es la integral de la suma de los productos de las componentes de esfuerzo y deformación” (Stein, 2003).

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma_{ij} e_{ij} dV = \frac{1}{2} \int c_{ijkl} e_{ij} e_{kl} dV \quad 1.3.8$$

“La energía de deformación es simétrica en  $ij$  y  $kl$ .”

Las constantes se reducen a 21. Por otro lado si se toma en cuenta la isotropía ya que el material que forma a la Tierra tiene aproximadamente las mismas propiedades físicas sin tomar en cuenta la orientación, es decir, hay homogeneidad lateral por lo tanto hay una reducción a solo dos módulos elásticos.

Estos dos módulos elásticos son: la constante de Lamé  $\lambda$  y el módulo de rigidez  $\mu$ , que es una medida de la resistencia del material al corte, dependiendo de la rigidez del material es que este se va a deformar “en cizalla”, por lo tanto al haber mayor rigidez habrá menor deformación y viceversa. Así cuando  $\mu = 0$ , el material corresponde a un fluido perfecto

La ecuación constitutiva (Ley de Hooke) para un material isotrópico es:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad 1.3.9$$

Siendo  $\theta$  la dilatación.

La velocidad de las ondas sísmicas está en función de los módulos elásticos, por lo que para un sólido de Poisson,  $\nu = 0.25$  (razón de Poisson) y  $\lambda = \mu$ , la velocidad no depende de la dirección en la que se propagan en material homogéneo e isotrópico..

El cociente de Poisson establece la razón de contracción a lo largo de dos direcciones perpendiculares al eje donde se esta aplicando una tensión.

El módulo de incompresibilidad esta definido por un cuerpo sujeto a una presión litostática. Por lo que es la razón entre la presión que es aplicada a un cambio fraccional del volumen y se representa por la letra K:

$$K = \frac{-dP}{d\theta} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad 1.3.10$$

Esto quiere decir que cuando un cuerpo es sometido a una presión provoca un pequeño cambio (fraccional) en su volumen, mientras que para un fluido ideal  $K = \lambda$ .

Sustituyendo  $\lambda$  y  $\mu$  en 1.3.9 se obtiene de acuerdo con Stein (2003):

$$\sigma_{ij} = K\theta\delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} - \theta\delta_{ij}/3) \quad 1.3.11$$

De esta manera, se observa como un esfuerzo aplicado resulta en un cambio de volumen (primer término) y una deformación tangencial o de cizalla (cambio de forma, segundo término)

El modulo de Young (E) es la razón que existe entre un esfuerzo de tensión y la deformación que resulta, es decir indica que tanto se deforma el material ante un esfuerzo aplicado

$$E = \frac{\sigma_{11}}{e_{11}} \quad 1.3.12$$

Generalmente para un sólido de Poisson  $E = (5/2)\mu$  y  $K = (5/3)\mu$ , (Stein, 2003).

Las constantes  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $K$  y  $E$  tienen las mismas unidades que el esfuerzo.

Durante la propagación de las ondas sísmicas, estas van pasando a través de estratos o condiciones geológicas diferentes, por lo que la onda se ve influenciada por ellas. Las Condiciones de Frontera permiten relacionar los desplazamientos y tracciones en dichas interfases, siendo del tipo solido-solido, solido-superficie libre, liquido-solido o liquido-superficie libre.

### 1.3.3 Ecuaciones de campo.

Son ecuaciones diferenciales que permiten la descripción del movimiento de un medio continuo bajo condiciones de frontera específicas las cuales deben cumplir con:

- a) Leyes de Newton.
- b) Leyes de la termodinámica.
- c) Conservación de la masa y la energía.

#### 1.3.3.1 Ecuación de continuidad.

La masa contenida en un dominio de volumen  $V$  para un tiempo  $t$  esta dada por:

$$m = \int_V \rho dv \quad 1.3.13$$

Donde  $\rho = \rho(x_i, t)$  es la densidad localizada en una espacio ( $x_i$ ) para un tiempo  $t$ .

La conservación de la masa requiere que  $Dm/Dt = 0$  (Fung, 1994) por lo que la ecuación debe cumplir con dicha propiedad.

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho(x_i, t) dV = 0 \quad 1.3.14$$

Por lo tanto la ecuación de continuidad permite asegurar continuidad de la masa en tiempo y espacio.

En la siguiente expresión matemática se presenta la ecuación de continuidad simplificada de acuerdo con el teorema de Gauss (Fung, 1994), los detalles se muestran en el Anexo A.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad 1.3.15$$

Donde  $v_i$  es la velocidad de la partícula en sus tres componentes ortogonales.

### 1.3.3.2. Ecuación de movimiento.

La ecuación de movimiento se obtiene de la siguiente manera de forma simplificada. El desarrollo matemático se encuentra en el anexo A.

De acuerdo con Fung, (2003) En un instante de tiempo  $t$ , el momento lineal de todas las partículas contenidas en un dominio de volumen  $V$  es:

$$\rho_i = \int_V \rho v_i dV \quad 1.3.16$$

Donde  $v_i$  es la velocidad de la partícula y  $\rho$  la densidad de la misma.

Cuando el cuerpo es sometido a tracciones  $T_i$  y fuerzas por unidad de volumen  $X_i$  la fuerza esta dada por:

$$F = \int_S T_i dS + \int_V X_i dV \quad 1.3.17$$

Aplicando la ecuación de Cauchy en donde la tracción se relaciona en términos de esfuerzos y empleando el teorema de Gauss obtenemos:

$$F_i = \int_V \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) dV$$

Y de acuerdo con la segunda ley de Newton  $ma = F$  :

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = F_i$$

$$\int_V \left( \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} \right) dV = \int_V \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) dV \quad 1.3.18$$

Agrupando y sustituyendo los términos se llega a la siguiente ecuación:

$$\rho \left( \frac{Dv_i}{Dt} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \quad 1.3.19$$

Esta última es la ecuación de equilibrio o de movimiento y relaciona fuerzas en el medio para medir desplazamientos (Fung, 2003).

### 1.3.3.3 Ecuación de Navier.

Fung en 1994 establece lo siguiente: la velocidad de una partícula  $v_i$  en tres direcciones esta dada por la derivada material del desplazamiento:

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad 1.3.20$$

Donde  $u_i$  es el desplazamiento en sus tres componentes ortogonales.

La aceleración de la partícula en sus tres direcciones esta dada por la derivada material de la velocidad:

$$\alpha_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad 1.3.21$$

Donde  $\alpha$  es la aceleración.

Mientras que la ecuación Euleriana de movimiento es calculada por:

$$\rho \alpha_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \quad 1.3.22$$

De acuerdo con la Ley de Hooke (ecuación 1.3.9), sustituyendo y agrupando términos en la ecuación Euleriana se llega a la siguiente ecuación.

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_i} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad 1.3.23$$

Siendo esta última es la ecuación de Navier (Fung, 1994).

Donde:

$$e = \nabla \cdot \bar{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Otra forma en que se representa la ecuación de Navier es en forma vectorial:

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) + X_i = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad 1.3.24$$

### 1.3.4 Ecuación de Onda

Partiendo de la ecuación de Navier en el caso que no haya fuerzas de cuerpo la ecuación vectorial tiene la siguiente expresión:

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) + \mu \nabla^2 \bar{u} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad 1.3.25$$

Esta es la ecuación de movimiento para un medio elástico e isótropo en términos de los desplazamientos y hay una dependencia de la posición y tiempo.

Aplicando la identidad vectorial  $\nabla^2 \bar{u} = \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{u})$  y dividiendo entre la densidad  $\rho$ , se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) - \frac{\mu}{\rho} \nabla \times (\nabla \times \bar{u}) = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad 1.3.26$$

Aplicando la divergencia a ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \nabla^2 (\nabla \cdot \bar{u}) = \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \bar{u})}{\partial t^2} \quad 1.3.27$$

$$\alpha^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \bar{u}) = \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \bar{u})}{\partial t^2} \quad 1.3.28$$

Por lo que:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

La ecuación 1.3.28 es escalar debido a que la divergencia es una operación escalar y representa a ondas propagándose con una velocidad  $\alpha$  por un cambio fraccional de volumen.

Si a la ecuación 1.3.26 se le aplica el rotacional se obtiene:

$$\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 (\nabla \times \bar{u}) = \frac{\partial^2 (\nabla \times \bar{u})}{\partial t^2} \quad 1.3.29$$

$$\beta^2 \nabla^2 (\nabla \times \bar{u}) = \frac{\partial^2 (\nabla \times \bar{u})}{\partial t^2} \quad 1.3.30$$

Con:

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Tenemos que las ecuaciones 1.3.29 y 1.3.30 son ecuaciones vectoriales y representan ondas propagándose con una velocidad  $\beta$  por un cambio de forma.

Retomando la ecuación 1.3.26 y para un campo de desplazamientos  $u(x,t)$  donde  $x = (x, y, z)$  en su forma vectorial para un medio elástico y aplicando el Teorema de Helmholtz, con objeto de tener una representación del campo de desplazamientos como  $u(x,t) = \nabla \phi(x,t) + \nabla \times \gamma(x,t)$  en el cual el desplazamiento es la suma del gradiente de un potencial escalar y el rotacional de un vector potencial, siendo ambas funciones de espacio y tiempo y empleando las identidades  $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$  y  $\nabla \cdot (\nabla \times \gamma) = \mathbf{0}$  se llega a la siguiente ecuación.

$$\nabla \left[ (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi - \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right] = -\nabla \times \left[ \mu \nabla^2 \gamma - \rho \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right] \quad 1.3.31$$

Ya que los términos semejantes están agrupados, una solución es hallada al hacer cero uno de los términos. Por lo que existen dos ecuaciones, una para cada potencial (Stein, 2003).

El potencial escalar satisface:

$$\nabla^2 \phi(x,t) = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} \quad 1.3.32$$



Y corresponde a las ondas P o compresionales.

Para el potencial vectorial se satisface:

$$\nabla^2 \gamma(x, t) = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \gamma(x, t)}{\partial t^2} \quad 1.3.33$$

La cual corresponde a ondas S o de corte.

## 1.4 Solución de la ecuación de onda para el caso de ondas de tipo SH.

La solución a la ecuación de onda permitirá la obtención del desplazamiento de una onda tanto ascendente como descendente en cada uno de los estratos por donde viaja.

La ecuación de onda para el caso bidimensional de las ondas SH es:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \psi(x, z, t)}{\partial t^2} \quad 1.4.1$$

Donde  $\beta$  es la velocidad de propagación de ondas y se asume como una constante.

Para resolver esta ecuación diferencial se usara el método de separación de variables, el cual permite la descomposición de  $\psi(x, z, t)$  como el producto de funciones de  $x$ ,  $z$  y  $t$ .

$$\psi(x, z, t) = X(x)Z(z)T(t) \quad 1.4.2$$

Reordenando la ecuación con las cantidades dependientes de  $x$ ,  $z$  y  $t$  las cuales son separadas por una constante.

$$\beta^2 \frac{X''(x)}{X(x)} + \beta^2 \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{T''(t)}{T(t)} \quad 1.4.3$$

La ecuación diferencial original se ha transformado en tres ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\begin{aligned} T'' + \omega^2 T &= 0 \\ X'' + k_1^2 X &= 0 \\ Z'' + k_3^2 Z &= 0 \end{aligned} \quad 1.4.4$$

Donde se debe cumplir con la condición:  $k_1^2 + k_3^2 = \frac{\omega^2}{\beta^2}$

Cuya solución esta dada por funciones armónicas simples.

$$\psi = B_1 \exp[i(\omega t - k_1 x - k_3 z)] + B_2 \exp[-i(\omega t - k_1 x - k_3 z)] \quad 1.4.5$$

La relación  $k = \omega / \beta$  es el número de onda cuya forma vectorial es la siguiente:

$$k_\beta = |k_\beta| \hat{k} = \left( \frac{\omega}{\beta} \right) \hat{k} \quad 1.4.6$$

El vector número de onda indica la dirección en la cual se propaga la onda en este caso asociada a las ondas de cizalla o de corte de tipo SH.

Tomando en cuenta el argumento del exponencial que es igual a una constante  $C$  obtenemos:

$$\omega t - k_1 x - k_3 z = C \quad 1.4.7$$

Si hacemos  $C = 0$  obtenemos:

$$z = -\frac{k_1}{k_3} x + \frac{\omega t}{k_3} \quad 1.4.8$$

La figura 1.4-1 muestra grafica de la ecuación 1.4.8 que describe la trayectoria que sigue un frente de onda plano a lo largo del plano XZ variando el tiempo  $t$  de cero a cinco. El vector número de onda  $k_\beta$  es perpendicular a la trayectoria de viaje,  $k_1$  y  $k_3$  tienen el valor de uno y la frecuencia angular de  $\pi/2$ .

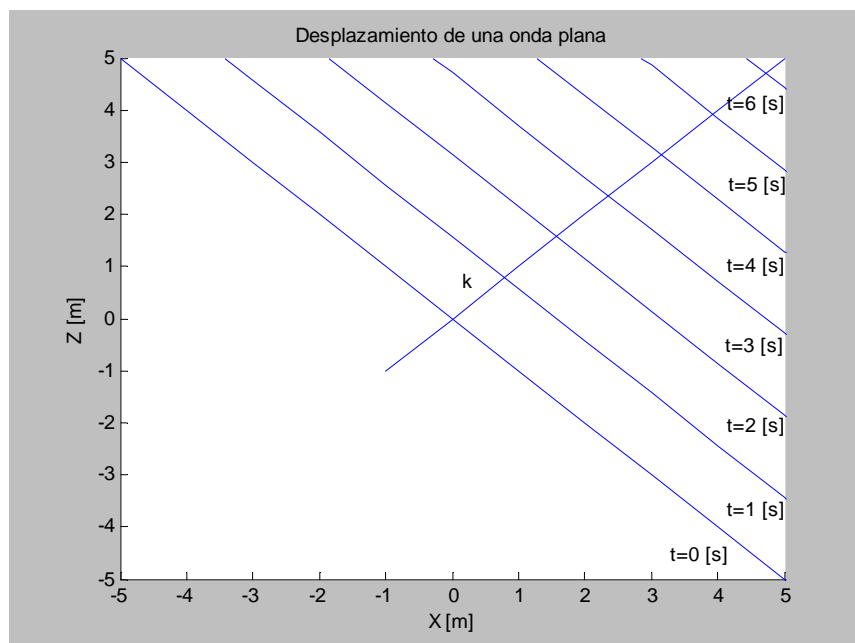


Figura 1.4-1 Desplazamiento de un frente de onda plano de una onda de tipo SH visto en el plano XZ con respecto al tiempo (caso bidimensional).

### 1.4.1 Solución de la ecuación de onda con una fuente de cizalla isótropa.

Anteriormente se encontró la solución de la ecuación de onda sin considerar fuerzas de cuerpo, dicha solución es la base para resolver la ecuación de onda considerando una fuente caracterizada por ser de cizalla e isótropa alojada en el eje "y" y definida por las funciones delta de Dirac en  $x$  y  $z$ , en donde destaca que cuando  $x=0$  y  $z=0$  su valor es uno, con lo que se asegura su localización en el eje de las ordenadas, las unidades de las funciones delta son del inverso de la longitud y las unidades de la fuerza es de fuerza por unidad de longitud, de esta manera la fuente es una fuerza de cuerpo representada como una función armónica  $F\delta(x)\delta(z)\exp(-i\omega t)$ . La ecuación se describe a continuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + q^2 u = -F\delta(x)\delta(z)\exp(-i\omega t) \quad 1.4.1.1$$

Este modelo matemático esta en el dominio de las frecuencias, por lo que la derivada con respecto al tiempo esta dada por  $q^2$ , para encontrar el desplazamiento se propone la siguiente ecuación:

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp(-ikx - i\eta|z|) dk \quad 1.4.1.2$$

En donde el termino  $A(k)$  esta en términos de los elementos de la fuente.

Para ondas de tipo SH el desplazamiento  $u_x$  y  $u_z$  es cero por lo tanto  $\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = 0$  y  $\sigma_{zy}$  es continuo. Esquemáticamente se muestra en la siguiente figura. La fuente es representada como un punto en el eje y.

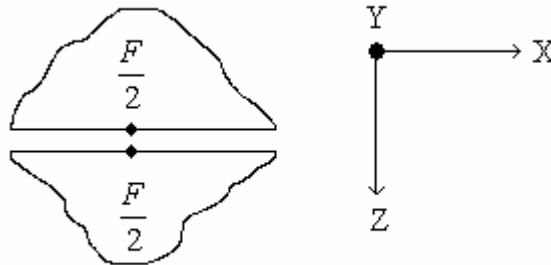


Figura 1.4.1-1 Esquema de a fuente de cizalla isótropa esta alojada en el eje "y" dividida en dos partes iguales.

El esfuerzo esta definido como:

$$\sigma_{zy} \Big|_{z=0} = \frac{F}{2} \delta(x) \quad 1.4.1.3$$

Considerando que  $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) dk$

Y como:

$$\sigma_{zy} \Big|_{z=0} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad 1.4.1.4$$

Al igualar las ecuaciones 1.4.1.3 y 1.4.1.4 obtenemos el valor del desplazamiento  $A(k)$ . El desarrollo matemático se encuentra en el anexo B.

$$A(k) = \frac{iF}{4\pi\mu\eta} \quad 1.4.1.5$$

Por lo tanto

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iF}{4\pi\mu} \exp(-ikx) \frac{dk}{\eta} \quad 1.4.1.6$$

Donde  $u$  es una solución exacta generalizada y  $\eta$  es el número de onda vertical.

## 1.5 Ley de Snell.

La ley de Snell permite conocer la relación que existe entre el ángulo con que un rayo incide en un medio y el ángulo del rayo de la onda que se transmite al otro medio y el que se refleja, se considera como rayo a la línea imaginaria perpendicular al frente de onda y permite visualizar la trayectoria de viaje de una onda.

El ángulo varía de acuerdo con la velocidad del medio, la ecuación 1.5.1 presenta la relación existente entre las velocidades y el ángulo de incidencia, el de reflexión y el transmitido o refractado. Parte de la energía contenida en una onda al incidir en un medio con un contraste de impedancias se va a reflejar y otra parte se va a transmitir.

$$\frac{\text{sen}(i_1)}{v_1} = \frac{\text{sen}(i_2)}{v_2} \quad 1.5.1$$

Donde  $v_1$  es la velocidad del rayo en el medio 1,  $v_2$  es la velocidad del rayo en el medio 2,  $i_1$  es el ángulo de incidencia del rayo en el medio 1 e  $i_2$  es el ángulo con que el rayo se transmitió al medio 2.

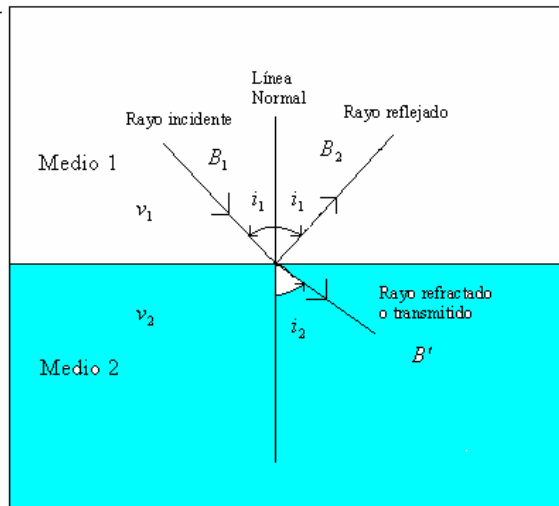


Figura 1.5-1 Esquema representando la Ley de Snell, al incidir un rayo en un medio con propiedades físicas distintas.

Cuando el rayo proviene de un medio con mayor velocidad, el ángulo del rayo refractado se acerca a una línea imaginaria normal a la interfase, alejándose de la horizontal, mientras que si el rayo pasa de un medio más lento a uno más rápido el ángulo de refracción se aleja de la normal, acercándose a la horizontal.

Si el segundo medio es más veloz, se va a ir incrementando el ángulo de incidencia por lo que el rayo de la onda transmitida se aproxima a la frontera hasta alcanzar el ángulo crítico, esto se presenta cuando  $i_2 = 90^\circ$  por lo tanto esta dado por la ecuación:

$$\text{sen}(i_c) = \frac{\beta_1}{\beta_2} \tag{1.5.2}$$

Cuando el ángulo de incidencia excede el ángulo crítico no existe una onda plana transmitida en el segundo medio pero hay una onda que viaja a lo largo de la interfase y decae fuera de ella, esta es una onda evanescente o inhomogénea.

La rayo incidente tiene el mismo ángulo que reflejado, de tal manera que si  $\beta_2 > \beta_1 \rightarrow i_2 > i_1$

Cuando el rayo viaja por el medio inferior con dirección paralela a la superficie se dice que esta “críticamente refractado” o hay incidencia crítica, esto se cumple cuando  $\text{sen}(i_2) = 1$ .

En la figura 1.5-1 se muestra un esquema de la relación que existe entre el ángulo de incidencia, el ángulo reflejado y el refractado, así también los coeficientes  $B_1, B_2$  y  $B'$  los cuales indican la amplitud de la onda incidente, de la onda reflejada y de la onda refractada y están relacionados con la energía contenida en la onda.

Por lo tanto ante la incidencia de una onda SH se generara una onda de tipo SH reflejada y una refractada.

## 1.6 Modelo de Kelvin-Voigt.

El modelo Kelvin-Voigt es un modelo mecánico que describe un efecto inelástico del material.

Para construir un modelo mecánico se requiere de dos elementos, un resorte y un amortiguador, el primero con objeto de tener una representación de un medio sólido elástico y el segundo para un efecto viscoso del material (fluido), es decir, se aproxima el medio a un viscoelástico. En el modelo están conectados en paralelo un resorte y un amortiguador como lo muestra la figura 1.6-1.

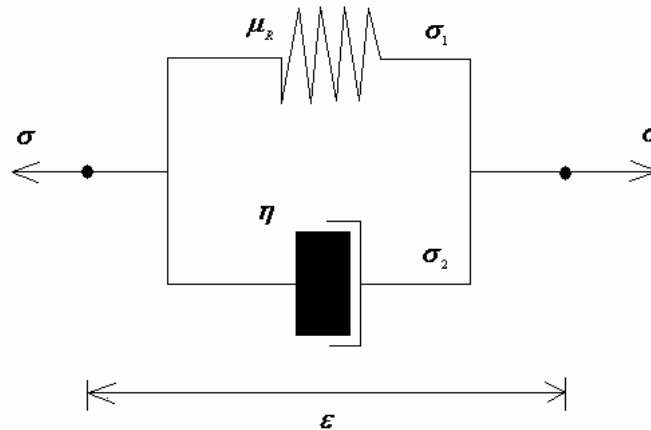


Figura 1.6-1 Esquema de la representación física del modelo mecánico Kelvin-Voigt compuesto por un resorte y un amortiguador conectados en paralelo.

Se considera que el resorte producirá una deformación instantánea proporcional a la carga, mientras que el amortiguador produce una velocidad proporcional a la carga en cualquier instante de tiempo.

Inicialmente el amortiguador aplica un esfuerzo al resorte, así al final el resorte tendrá el esfuerzo total de tal manera que el esfuerzo total esta compuesto por un esfuerzo elástico (ecuación 1.6.1) y uno viscoso (ecuación 1.6.2).

$$\sigma_1 = \mu_R \epsilon \quad 1.6.1$$

Donde:  $\mu_R$ : Constante del resorte  
 $\epsilon$ : Deformación

$$\sigma_2 = \eta \partial_t \epsilon \quad 1.6.2$$

Donde:  $\eta$ : Viscosidad

La ecuación para el esfuerzo total es:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \tag{1.6.3}$$

$$\sigma = \mu_R \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}$$

Al aplicar la Transformada de Fourier a 1.6.3 obtenemos:

$$\sigma = (\mu_R + i\omega\eta)\varepsilon \tag{1.6.4}$$

De esta manera el modulo complejo esta definido como:

$$M(\omega) = \mu_R + i\omega\eta \tag{1.6.5}$$

El primer termino es un modulo elástico o de almacenamiento donde posteriormente es liberado el esfuerzo, es decir es una parte elástica y el segundo elemento es la parte viscosa, y no dependen del tiempo.

De esta manera la velocidad de fase de las ondas SH se verá influenciada por este modulo complejo y su ecuación se expresa a continuación:

$$\beta = \sqrt{\frac{M(\omega)}{\rho}} \tag{1.6.6}$$

Es importante destacar que cuando  $\omega$  tiende a cero la velocidad de fase se expresa como en 1.6.6, mientras que si la frecuencia angular tiende a infinito la velocidad de fase también, por lo tanto la onda viaja más rápido que en un medio elástico. (Carsione, 2007).

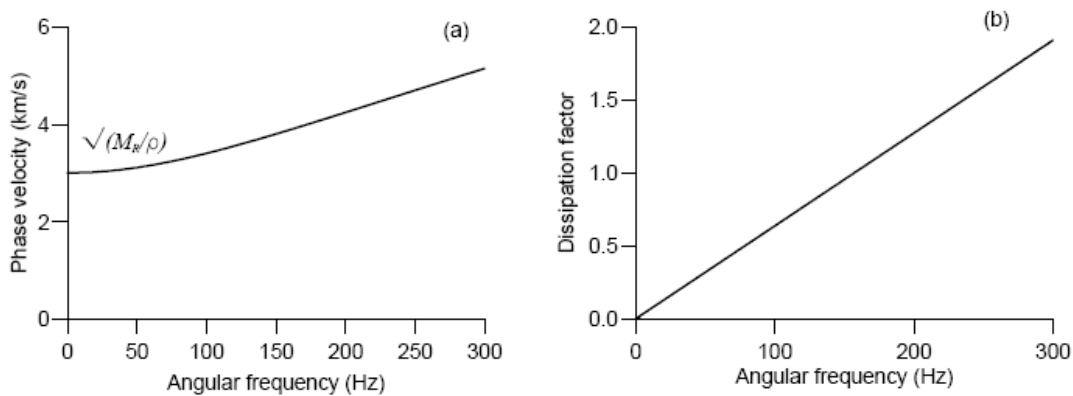


Figura 1.6-2. Graficas de Velocidad de Fase contra frecuencia angular y de factor de disipacion contra frecuencia angular para el modelo viscoelastico Kelvin-Voigt (Carcione,2007).

En la figura 1.6-2 (imagen tomada de Carcione, 2007) se observa que la velocidad depende de la frecuencia angular de tal manera que la primera aumenta al crecer las

frecuencias angulares, esto mismo se presenta en cuanto al factor de disipación creciendo con forme aumentan las frecuencias, por lo que se espera mayor disipación en los sismogramas generados.

En una representación de esfuerzo contra tiempo y deformación contra tiempo de un modelo Kelvin-Voigt, se puede observar como comienza a haber una deformación del material al aplicarse un esfuerzo que no es instantánea debido al efecto del amortiguador, al dejar de ser aplicada la carga la deformación disminuye progresivamente, no instantáneamente hasta su estado inicial, la figura 1.6-3 lo muestra esquemáticamente (Fung, 1994). La propiedad de viscosidad tiende a retardar la deformación elástica.

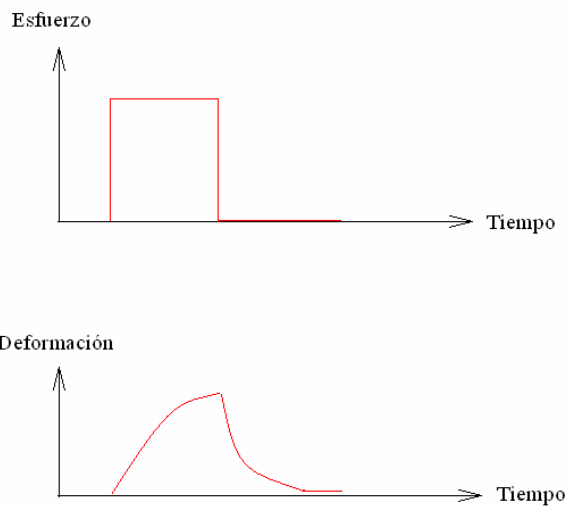


Figura 1.6-3 Graficas de esfuerzo contra tiempo y de deformación contra tiempo, para un medio viscoelástico de acuerdo con el modelo Kelvin-Voigt.



## **2. Metodología.**

La sismología teórica ha proveído soluciones analíticas relacionadas con la propagación de ondas sísmicas debido a la aplicación de fuerzas puntuales. Uno de los trabajos pioneros de este quehacer fue realizado por Lamb en 1904 para obtener el primer sismograma sintético aplicando una fuerza puntual en un semi-espacio.

De tal manera que en el presente capítulo se dan a conocer las consideraciones que se emplearon para el cálculo de los sismogramas sintéticos y las animaciones, tomando en cuenta el medio de propagación y las características que se propusieron al mismo y a la fuente. Además se muestra un esquema de la forma en que trabaja el programa de cómputo para el cálculo de las trazas sísmicas.

### **2.1 Planteamiento del Problema.**

En la presente tesis se pretende describir el campo de desplazamiento en la superficie libre de un medio estratificado cuando se aplica una fuerza puntual sobre un estrato en particular con base en la solución de la ecuación de onda en función de ondas planas y considerando dos medios de propagación. La descripción se hará utilizando el cálculo de sismogramas sintéticos e imágenes que representan la propagación en diferentes instantes de tiempo.

### **2.2 Objetivos.**

1. Calcular el campo de desplazamiento en superficie libre debido a la propagación de una onda tipo SH empleando dos medios por los cuales se va a propagar, siendo estratificados con diferentes propiedades físicas, de tal manera que uno de ellos va a ser elástico y otro viscoelástico empleando una fuente puntual ubicada en un estrato de interés.
2. Realizar una comparación entre una solución exacta y la solución aproximada para el modelo anterior mediante la técnica del Número de Onda Discreto, obteniendo el error absoluto entre ambas soluciones.
3. Comparar los resultados obtenidos en cada uno de los medios de propagación mediante sismogramas sintéticos e imágenes de una animación en diferentes intervalos de tiempo.

### **2.3 Alcance.**

En este trabajo se describe y se emplea la técnica del Número de Onda Discreto para la obtención del campo de desplazamiento en superficie libre y a diferentes profundidades en un medio estratificado, tomando en cuenta una fuente puntual alojada en un estrato y en un eje de interés para la propagación de una onda de tipo SH, la propagación será a través de dos medios distintos uno elástico y otro viscoelástico. El campo de desplazamientos será presentado mediante sismogramas sintéticos e imágenes en distintos intervalos de tiempo generados por una animación en cada medio propuesto, cabe mencionar que las características de estos medios son hipotéticas.

## 2.4 Hipótesis.

Para poder obtener la respuesta sísmica en un medio estratificado se consideran los siguientes supuestos:

- 1) La respuesta sísmica la podemos construir formando una matriz global que contenga las condiciones de frontera de un medio en particular y un vector conocido que contiene los términos de la fuente sísmica, con este sistema de ecuaciones se obtienen las amplitudes del campo de desplazamiento.
- 2) El medio se caracteriza por ser estratificado con capas paralelas, homogéneo e isotrópico con una extensión lateral indefinida, el número de capas que se emplea es de tres sobre un semi-espacio, además de tener una velocidad de onda, espesor y densidad constantes en cada una.
- 3) El campo de desplazamientos se puede obtener en un punto de interés del medio, en este caso en superficie libre, a partir de la superposición de ondas planas elásticas homogéneas e inhomogéneas de tipo SH. Esta superposición es posible debido a un arreglo a partir de una fuente distribuida periódicamente a lo largo de un eje paralelo a la superficie en intervalos iguales debido a la discretización del número de onda horizontal. Las operaciones son realizadas en el dominio de la frecuencia.
- 4) De esta manera la ubicación espacial del sistema está referido con respecto a los tres ejes cartesianos siendo el eje  $x$  el horizontal y representa a la superficie libre, el eje  $z$  representa la profundidad y la fuente está alojada en el eje  $y$ . La respuesta sísmica esta dada por lo tanto para el caso bidimensional  $(x,z)$ . Un pulso de Ricker sirve como operador para describir la forma de la onda de la fuente sísmica. La fuente es representada por la superposición de ondas homogéneas e inhomogéneas propagándose en ángulos discretos.
- 5) Se toman en cuenta dos medios de propagación uno elástico en el cual no se presenta atenuación y un medio viscoelástico basado en el modelo reológico Kelvin-Voigt, en este último la velocidad esta en función de la frecuencia y hay atenuación.

### 2.4.1 Calculo de sismogramas sintéticos.

La construcción de sismogramas sintéticos desde el punto de vista de sistemas requiere que exista una señal de entrada y una función de transferencia, por lo tanto existirá una señal de salida. Esquemáticamente se presenta en la figura 2.4.1-1.

En el cálculo de las trazas sísmicas sintéticas y de las animaciones se emplean datos de entrada, estos contienen las propiedades físicas del medio, la posición de la fuente, el número de los receptores y su posición así como los parámetros del pulso de Ricker.

Las propiedades físicas de los estratos son:

- Velocidad de propagación de la onda SH
- Espesor del estrato
- Densidad
- Factor de calidad (Solo en el caso del medio viscoelástico).

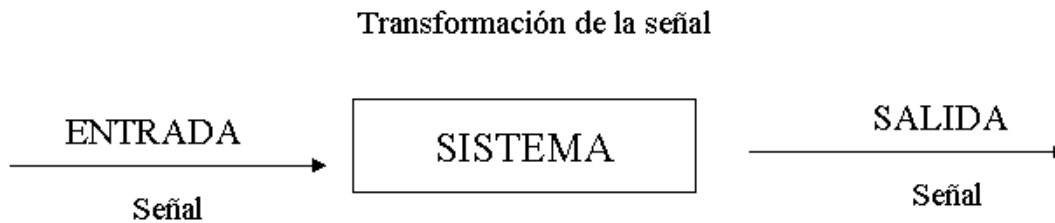


Figura 2.4.1-1. Esquema de un sistema donde la señal de entrada se va a transformar mediante una serie de cálculos en otra señal de salida.

El semi-espacio se considera como un cuarto estrato y de espesor muy grande en comparación con el de los estratos superiores, además en este medio solo habrá ondas transmitidas por el estrato superior.

La velocidad de propagación de las ondas se incrementará con la profundidad al igual que la densidad.

La profundidad máxima es de 10000 metros y una extensión en el eje horizontal de igual longitud.

El amortiguamiento para un oscilador armónico, esta dado por el factor de calidad  $Q$ , el cual describe como decae o se atenúa la energía en un oscilador con el tiempo. La atenuación del movimiento de una onda puede ser considerada en tiempo o espacio, así en un tiempo dado el movimiento es atenuado con la distancia, el factor de calidad se define como  $(Q(\omega))^{-1} = (2\pi)^{-1}(\Delta E / E)$ , la cual representa la razón de la energía disipada durante un ciclo de movimiento armónico de frecuencia  $\omega$  y la máxima energía  $E$  acumulada durante el mismo ciclo (Udias, 1999). Así la energía disipada durante un ciclo es considerado como la disipación durante un periodo o en una longitud de onda. para el caso del medio elástico no se tomó en cuenta, es decir no existe atenuación mientras que para el viscoelástico si y depende de la viscosidad y de la elasticidad involucrados en el medio.

En los cálculos para la animación el número de receptores tanto en la superficie como a profundidad va a ser el mismo sirviendo para obtener el desplazamiento a diferentes profundidades. Los sismogramas sintéticos van a obtener el desplazamiento solo para los receptores en la superficie libre.

El número de receptores para la animación es de 101 cubriendo la longitud de 10000 metros, mientras que para las trazas es de once con lo cual se tendrá una resolución adecuada para las visualizaciones generadas y el tiempo de cómputo es favorable para su obtención.

El espaciamento entre los receptores va a ser constante y dependerá de las coordenadas dadas al primer y último receptor.

Entre los parámetros para la fuente de cizalla isótropa está la coordenada de la profundidad y de superficie, de forma tal que se va a ubicar en el punto medio del número total de los receptores en superficie y del tercer estrato, por lo que su coordenada a profundidad debe ser coherente con la profundidad del estrato.

Para la obtención del pulso de Ricker se introducen los siguientes parámetros: número de muestras que se desea ( $N$ ), el espaciamento entre estas en un periodo de tiempo ( $dt$ ), la amplitud del pulso, el tiempo en el cual estará centrada la máxima amplitud ( $t_s$ ) y el periodo del pulso dominante ( $t_p$ ) dicho pulso muestra en la figura 3.4.1-2 en el dominio del tiempo.

De esta manera la señal que se va a obtener en los sismogramas sintéticos es de tipo discreto.

El pulso de Ricker tiene un periodo ( $t_p$ ) de 0.5 [s] y el tiempo de máxima amplitud ( $t_s$ ) es de 1.5 [s], con una amplitud ( $A$ ) de 100000 unidades, con objeto de poder ser visualizado, y su modelo matemático es el siguiente:

$$P = A(1 - 2at^2) \exp(-at^2)$$

$$a = \frac{t - t_s}{t_p}$$

2.4.1.1

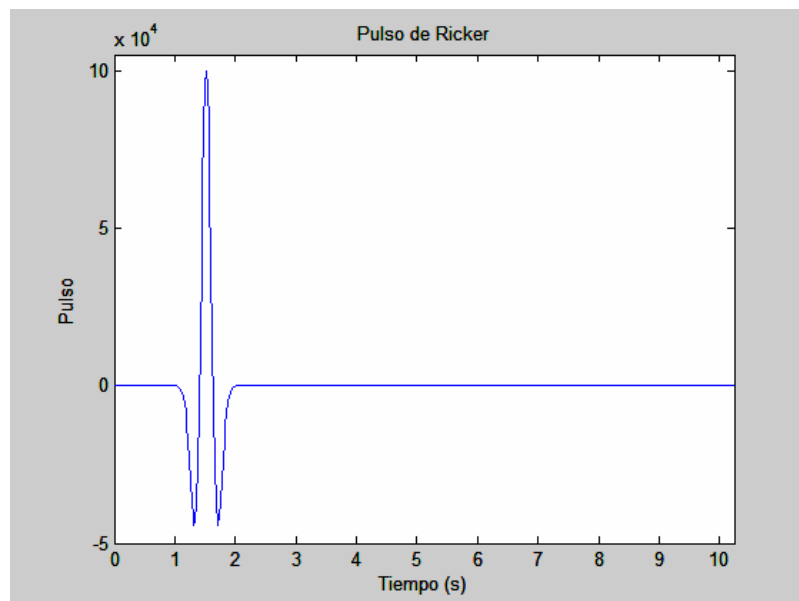


Figura 2.4.1-2. Pulso de Ricker empleado como excitación temporal de la fuente en el dominio del tiempo,  $t_p=0.5$  [s] y  $t_s=1.5$  [s].

El número de muestras es el número de puntos que tendrá la señal, este va a ser de 512 con un intervalo de tiempo 0.02, el producto de  $N$  con  $DT$  va a permitir obtener la duración del pulso, es decir, se va a truncar la función a un número finito de puntos, de tal manera que se permite visualizar el intervalo de interés para el análisis de los sismogramas. El intervalo en el dominio de las frecuencias ( $df$ ) es el inverso de dicha duración, este último valor permite entonces calcular la frecuencia angular ( $d\omega$ ) de la cual será función la función de transferencia. Los cálculos para la obtención del desplazamiento son en el dominio de la frecuencia.

Al aplicar la Transformada de Fourier a una función discreta se van a obtener  $N$  valores distintos, (en este caso 512 muestras), debido a que la transformada es periódica con periodo igual a  $N$  los valores distintos que pueden calcularse en la transformada de Fourier es ese número de términos y habrá una repetición de los datos con valores mayores a 512.

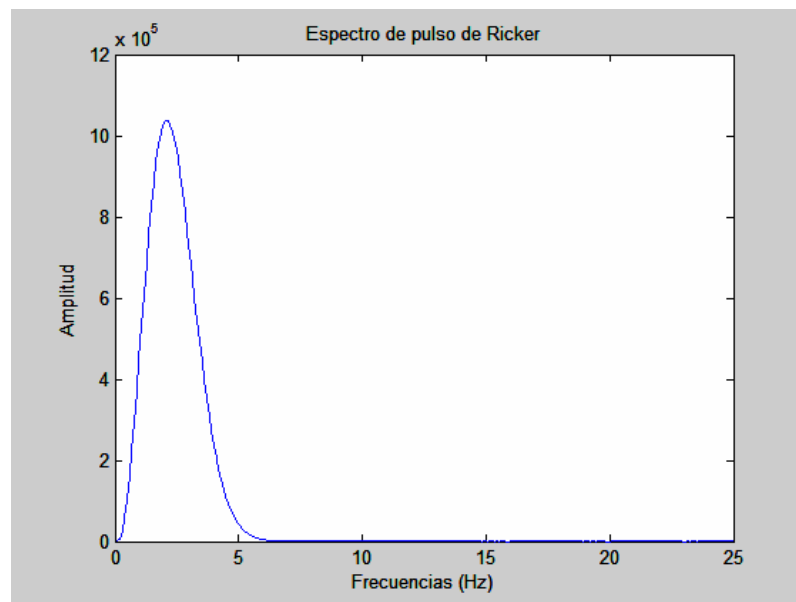


Figura 2.4.1-3. Pulso de Ricker empleado como excitación temporal representado en el dominio de las frecuencias.

La gráfica muestra únicamente un rango de frecuencias de 0 a 25 [Hz] debido a la repetición de datos por la transformada de Fourier, el rango completo es de 0 a 50 [Hz] ya que el intervalo de muestreo es de 0.02 [s].

El pulso está centrado en la frecuencia de 2 [Hz] de acuerdo con el valor dado al periodo dominante que es 0.5 [s].

Para cada uno de los receptores tanto en superficie como en profundidad (sismogramas o animación según sea el caso) se va a realizar un proceso de cálculos en el dominio del Número de Onda y en el de las frecuencias con lo cual se va a obtener una señal de salida o desplazamiento en cada uno de los sensores propuestos.

La señal resultante va a estar en función de las propiedades de la fuente, de las propiedades físicas y geométricas del medio, de las propiedades del pulso de Ricker, del método para la

solución del sistema de ecuaciones, la posición de cada uno de los receptores en superficie y a profundidad y de la función de transferencia, esta a su vez esta en función de las frecuencias.

Se realizó un programa de cómputo en el cual se calcula el campo de desplazamientos en donde se considera el método de Número de Onda Discreto y la Matriz Global, bajo el asesoramiento del Ing. Edgar Sánchez Álvaro y del Dr. Francisco José Sánchez Sesma.

La forma en que el programa realiza los cálculos para obtener el campo de desplazamiento es el siguiente:

Se denota con “\*\*” los cálculos que son exclusivos para el caso del medio viscoelástico.

- a) Se le dan los parámetros de entrada para el medio (velocidad de la onda en cada estrato, así como su espesor, densidad y factor de calidad en el caso viscoelástico).
- b) Se le introduce el número de receptores tanto a profundidad como en superficie, se calcula la separación entre ellos, siendo esta constante y se dan las coordenadas de la fuente.
- c) El programa calcula la rigidez.
- d) \*\*El programa realiza el cálculo de la parte real e imaginaria del modulo complejo para cada estrato\*\*
- e) Así mismo calcula un pulso de Ricker (ecuación 2.4.1.1) en el dominio del tiempo y se obtiene su Transformada Discreta de Fourier.

A continuación se procede al cálculo del desplazamiento mediante cuatro ciclos, el de las frecuencias, el del número de elementos de la suma para el Número de Onda Discreto, el de los receptores en el eje  $x$  y el de los receptores en el eje  $z$ .

- f) Al iniciar el ciclo de las frecuencias se calcula la primera frecuencia angular y se entra al ciclo del numero de onda, así para la primera frecuencia y para el primer valor de la suma se calculan los números de onda vertical y horizontal, los cuales dan la dirección en que se propaga una onda sísmica, el numero de onda vertical es función de las ecuaciones dadas en las condiciones de frontera impuestas en cada interfase, formando un sistema de ecuaciones de  $7 \times 7$ , el cual es resuelto al obtener su matriz inversa.
- g) \*\*Se calculan los módulos complejos y las velocidades complejas en cada estrato\*\*.
- h) La solución del sistema de ecuaciones permite obtener las amplitudes de las ondas ascendentes y descendentes en el medio obteniendo el desplazamiento, de tal manera que para la primera profundidad se calcula el desplazamiento para todos y cada uno de los receptores en el eje  $x$  (11 para los sismogramas y 101 para la animación), después se cambia a la siguiente profundidad (según sea el caso que se esta tratando) y se calcula el desplazamiento para todos los receptores nuevamente del eje  $x$ . Es decir, se hace un “barrido” hasta completar todas las profundidades.
- i) Al terminar todas las profundidades (una o 101 según sea el caso) se pasa al siguiente valor de la suma, nótese que en cada valor de la suma se va a ir variando el valor del número de onda tanto vertical como horizontal y se repite el cálculo del desplazamiento para todos los receptores tanto en el eje  $x$  como en el eje  $z$ , de esta manera en cada valor de la suma se obtendrá un valor para el desplazamiento en cada uno de los receptores y

cada de uno esos se va a ir sumando con el valor de la suma anterior para el mismo detector, hasta completar el total de valores de la suma que es de 500.

- j) Una vez concluidos todos los valores de la suma se tiene el campo de desplazamientos para una sola frecuencia, por lo que se realizaran los cálculos descritos anteriormente para las siguientes hasta la frecuencia de Nyquist, con lo que se construye la señal.

En el tercer estrato que es donde se ubica la fuente, al desplazamiento que se obtiene de la solución de la ecuación de onda se le va a sumar el término de desplazamiento que produce la fuente, este será el desplazamiento total.

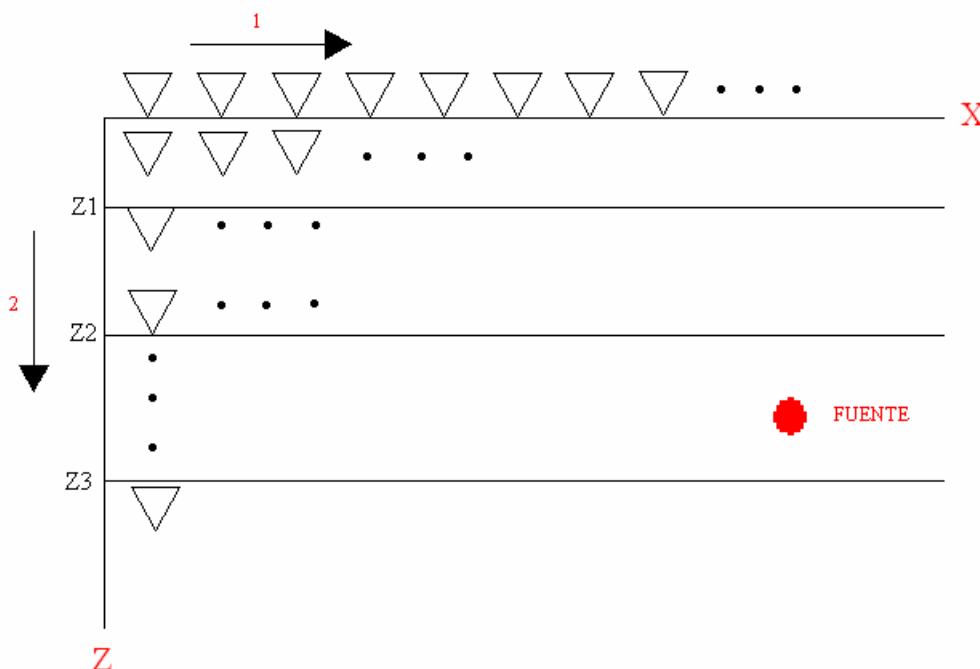


Figura 2.4.1-4. Esquema del “barrido” que se hace para el calculo del desplazamiento a diferentes profundidades.

La figura 2.4.1-4 muestra esquemáticamente el “barrido” para el calculo de los desplazamientos, el numero sobre cada flecha indica la secuencia que sigue el programa, siendo el uno para los receptores en el eje  $x$ , donde al concluir con estos pasa a otra profundidad (numero dos), hasta completar la secuencia en el semi-espacio, la fuente es representada como un punto y esta se ubicara en medio del número total de receptores en superficie y a la mitad del tercer estrato, los receptores son representados como triángulos y es ejemplificado el caso de la animación.

- k) Una vez que ya se tienen los desplazamientos se va a volver a hacer un “barrido” para todas las profundidades y para los receptores en el eje  $x$ , con objeto de realizar la convolución entre el pulso de Ricker y el campo de desplazamientos, es decir, se tiene una curva modelada y se va a convolucionar con un operador (Pulso de Ricker) que va a representar la forma de onda de la fuente sísmica, el resultado es una traza sísmica. En el dominio de la frecuencia la convolución esta dada por el producto de la función de transferencia (desplazamiento) con el pulso de Ricker

- l) Al resultado de la convolución se le aplica la Transformada Inversa Discreta de Fourier para obtener la representación de la traza en el dominio del tiempo.

Ya que la Transformada de Fourier Discreta es simétrica con respecto al origen, los valores en la salida van a ser simétricos en  $N/2$ , por lo que los valores mayores se consideran como frecuencias negativas (Anguiano, 2001).

Dada la simetría de la transformada de Fourier sus valores guardan una simetría en la mitad de las muestras empleadas totales ( $N/2$ ), por lo tanto al aplicar la Transformada Inversa de Fourier se debe considerar esto, para poder llevarla a cabo se deben de dar primero los valores correspondientes a las frecuencias positivas y a continuación las correspondientes a las frecuencias negativas, cambiando el signo en su parte imaginaria.

- m) Cada una de las respuestas de los receptores se almacena en un archivo de datos de salida, mismo que va a permitir obtener la respuesta gráficamente donde se muestra el desplazamiento contra el tiempo y la animación del campo de desplazamientos.

Para el caso de las trazas sísmicas el ciclo de las profundidades se restringe una sola profundidad (un solo valor de  $z$ ) que es la de superficie libre mientras que para la animación se completa todo el ciclo (valores de  $z$  hasta 101).

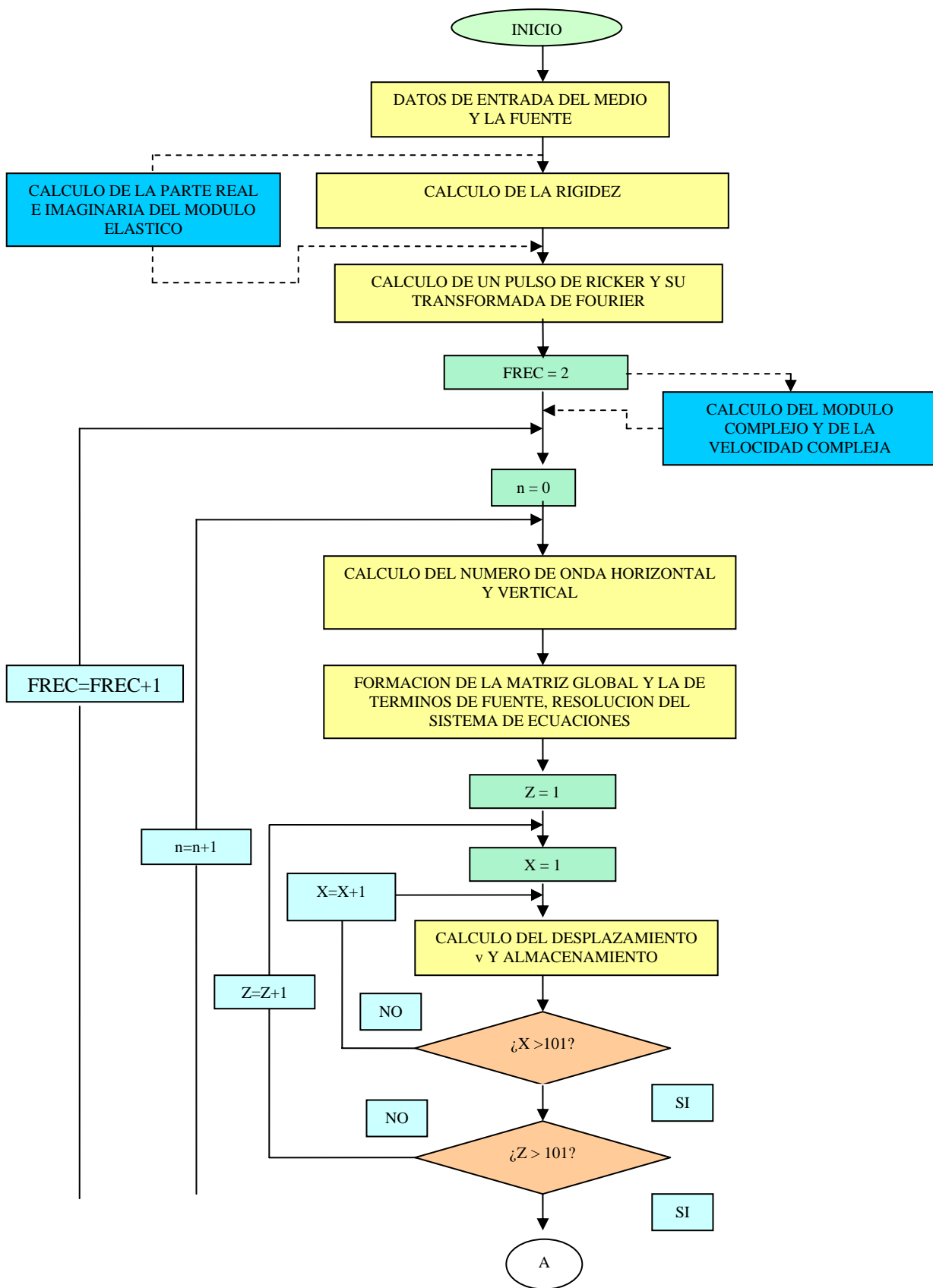
En resumen para obtener los sismogramas sintéticos se emplean cuatro ciclos, el de las frecuencias, el del número de onda discreto, el de los receptores en profundidad y el de los receptores en dirección del eje  $x$ .

El programa hace un cálculo numérico de dos integrales mediante sumas truncadas en un valor determinado, una es el ciclo de la frecuencia y otra es el del número de onda horizontal.

Esta es la forma teórica en que se calcula el campo de desplazamientos en la superficie libre y en profundidad utilizando la técnica del Número de Onda Discreto y de la Matriz Global y se ha programado en Visual Fortran 6.0, los valores numéricos se grafican y animan empleando un programa escrito en Matlab.

El diagrama de flujo siguiente muestra de manera simplificada la forma en que se llevan a cabo los cálculos para obtener la animación, los cuadros en azul cielo denotan los cálculos para el medio viscoelástico.





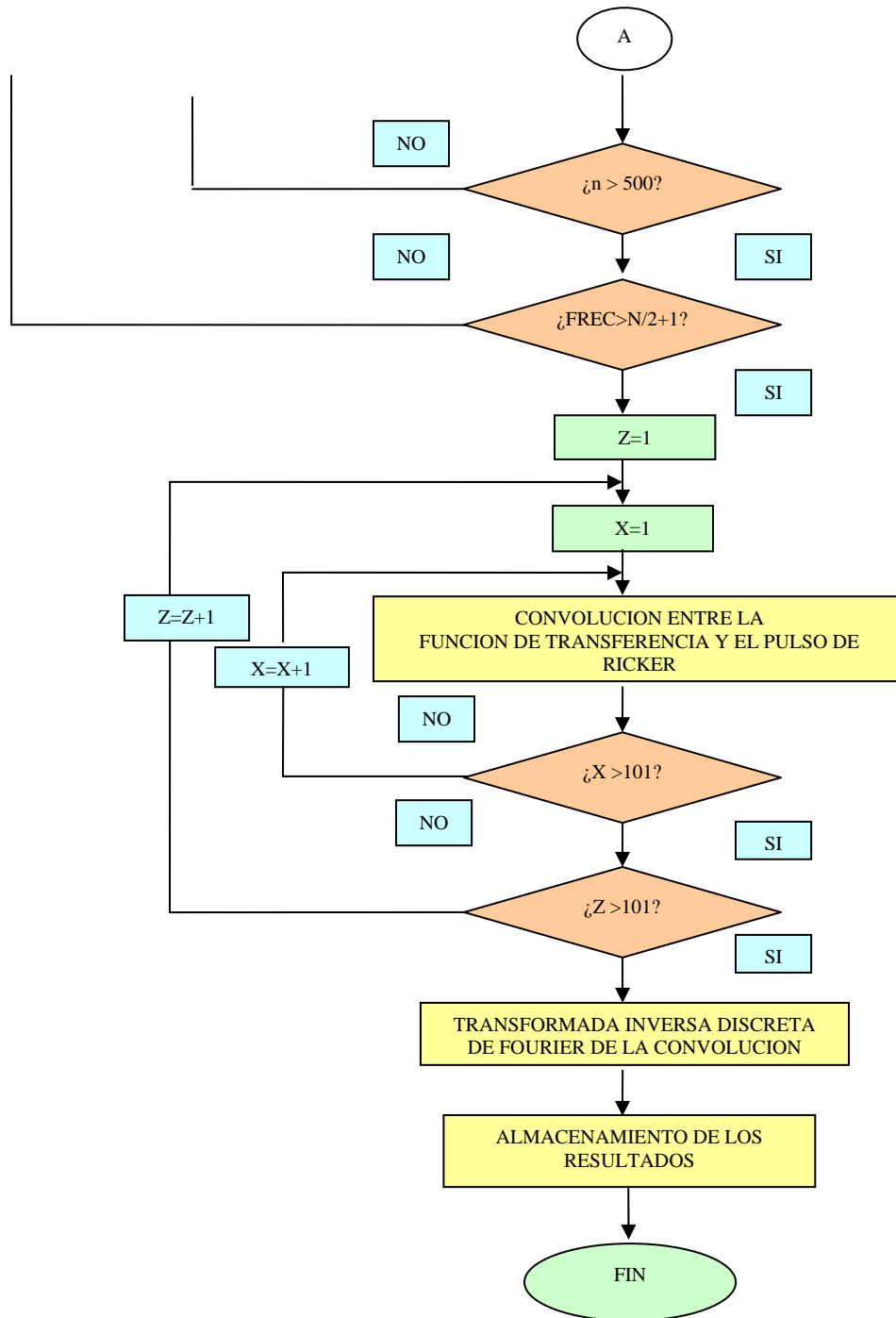


Figura 2.4.1-5. Diagrama de flujo mostrando las operaciones que se realizan para elaborar la animación de la propagación de una onda SH

### **3. FUNDAMENTOS DEL NÚMERO DE ONDA DISCRETO.**

El método del Número de Onda Discreto es una técnica que permite obtener numéricamente el campo de desplazamientos con buena precisión (Bouchon, 2003). Aprovechando los avances computacionales es posible realizar dichos cálculos en tiempos relativamente cortos, dependiendo de la capacidad del ordenador.

La realización numérica del método requiere del conocimiento de las ecuaciones en que se basa el cálculo por lo que a continuación se dan las bases teóricas para la programación.

Este método fue introducido en 1977 por Bouchon y Aki.

#### **3.1 Número de Onda Discreto**

La respuesta de un medio sólido ante una fuente excitadora puntual y transitoria fue estudiada por Lamb en 1904, siendo uno de los primeros en realizar dichos estudios.

El método es también formulado en términos de las funciones de Green, las cuales representan la respuesta del medio ante una excitación impulsiva (Udias, 1999).

Ya que el método está formulado en dichos términos, la evaluación de estos requiere de cálculos que en varias ocasiones solo proveen soluciones aproximadas. El Número de Onda Discreto permite el cálculo, con poca cantidad de matemáticas, de las funciones de Green completas con una buena precisión para varios problemas (Bouchon, 2003).

El método está fundamentado en la discretización del campo de ondas sísmicas producto de fuentes periódicas horizontales, es decir, existe una periodicidad espacial entre fuentes y con esto se logra discretizar el campo radiado por ondas sísmicas, para esto se hace uso de la Transformada de Fourier en el dominio de la frecuencia compleja. La fuente puede ser representada por fuerzas de cuerpo equivalentes.

La representación de la superposición de ondas planas en un medio homogéneo e infinito es posible debido a la radiación constante de una fuente, esta superposición está formada por ondas planas homogéneas e inhomogéneas que se propagan en ángulos discretos, es decir, el campo de ondas está disperso y se expresa mediante la combinación lineal de ondas planas, cuyo número de onda horizontal es discreto (Bard y Bouchon, 1980.a).

Por lo tanto el desplazamiento total es obtenido por la integración del número de onda horizontal. Esta integral es reemplazada por una suma infinita bajo la hipótesis de periodicidad horizontal de la fuente, la solución se obtiene al truncarla mediante una suma finita. La aplicación de condiciones de frontera (en el dominio del número de onda), crea un sistema de ecuaciones lineales, el cual al resolverlo permitirá obtener las amplitudes, incógnitas del problema.

Las condiciones de frontera implican que las tracciones en la superficie libre son iguales a cero y existe una continuidad de desplazamientos y de tracciones en cada interfase de tipo sólido-sólido que separa a dos medios diferentes.

Matemáticamente se tiene una combinación lineal de funciones independientes y la obtención de los coeficientes o amplitudes se hace al resolver el sistema de ecuaciones.

El cálculo del desplazamiento para un medio elástico estratificado puede ser expresado como una doble integral, sobre la frecuencia y en el dominio del tiempo. La integral sobre el número de onda es representada, como se mencionó anteriormente, por una suma discreta truncada, esto mismo sucede para el dominio de la frecuencia, lo cual permite evitar contaminación debido a la periodicidad entre las fuentes vecinas ficticias en la discretización (Bouchon, 1981).

El desplazamiento o esfuerzo se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$F(x, z; \omega) = \exp(i\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} f(k, z) \exp(-ikx) dk \quad 3.1.1$$

En donde los ejes  $x$  y  $z$  son los ejes horizontal y vertical respectivamente en un plano normal a la línea de fuente,  $\omega$  es la frecuencia angular y  $k$  es el número de onda horizontal. Es aplicable para una fuente localizada en un medio homogéneo e isotrópico en cualquier plano horizontal.

Al considerarse un número infinito de fuentes que se encuentran a lo largo del eje  $x$  en intervalos de longitud  $L$  la ecuación anterior toma la siguiente expresión:

$$G(x, z; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k, z) \exp(-ikx) \sum_{-\infty}^{\infty} \exp(ikmL) dk \quad 3.1.2$$

De acuerdo con el trabajo publicado por Schwartz en 1966 se sabe que el factor de suma puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[ikmL] = \frac{2\pi}{L} (\delta(kL)) \quad 3.1.3$$

La  $\delta$  representa a la función delta de Dirac, por lo que la ecuación 3.1.2 se convierte en:

$$G(x, z; \omega) = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_n, z) \exp[-ik_n x] \quad 3.1.4$$

Donde  $k_n = \frac{2\pi}{L} n$

Finalmente al hacer converger la función se obtiene:

$$G(x, z; \omega) = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=-N}^N f(k_n, z) \exp[-ik_n x] \quad 3.1.5$$

Esta última ecuación representa a la superposición de las ondas radiadas por la fuente propagándose con número de onda horizontal discreto, (Bouchon, 2003).

La precisión del resultado dependerá del valor dado a  $N$ , por lo que debe ser lo suficientemente grande para asegurar la convergencia de la serie y la precisión requerida (Fu y Bouchon, 2004) sin embargo al haber mayor número de elementos de la suma se requiere de mayor tiempo y cálculos computacionales.

El planteamiento del problema expresa ahora un número indefinido de fuentes periódicas, que una vez que se ha resuelto en el dominio de las frecuencias, es necesario volver al caso de una sola fuente.

Para calcular  $G$  se hace uso de la Transformada de Fourier discreta y así se obtiene la respuesta en el dominio del tiempo, dicha transformada al llevarse a cabo tiene el efecto de atenuar o minimizar la influencia de las fuentes ficticias vecinas (Bouchon, 1977)

Por lo que la ecuación correspondiente estará dada por:

$$g(x, z; t) = \int_{-\infty+i\omega_i}^{\infty+i\omega_i} G(x, z, \omega) \exp(i\omega_R t) d\omega_R \quad 3.1.6$$

Donde:  $\omega = \omega_R + \omega_I$

La respuesta final para una sola fuente en el dominio del tiempo es entonces obtenida a partir de la solución del cálculo en el dominio de la frecuencia para múltiples fuentes  $G$  mediante la relación:

$$f(x, z, t) = \exp[\omega_I t] \int_{-\infty}^{\infty} G(x, z, \omega) \exp[i\omega_R t] d\omega_R \quad 3.1.7$$

La integral es resuelta mediante la Transformada Rápida de Fourier.

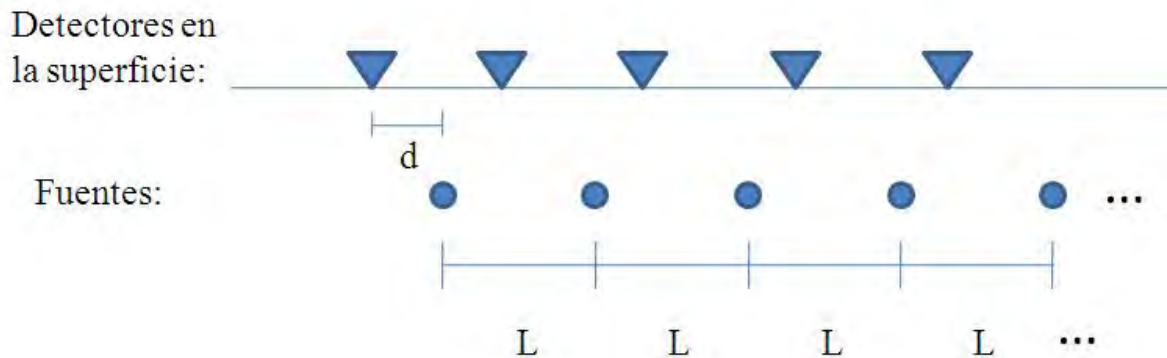


Figura 3.1-1. Representación gráfica de método del Número de Onda Discreto. L es la distancia entre las fuentes ficticias y d es la distancia entre el receptor y la fuente.

### 3.2 Generalidades de la Matriz Global.

Mediante la técnica de la Matriz Global es posible simplificar los cálculos para la propagación de una onda en un medio horizontalmente estratificado, ya que contiene las propiedades del medio (espesor de los estratos, densidad, rigidez), mediante las condiciones de frontera que son impuestas en cada una de las interfases de las capas

La matriz global es la representación matricial del sistema de ecuaciones que se forma por la imposición de condiciones de frontera en las interfases de los estratos, es una matriz cuadrada y permite al resolver dicho sistema obtener las amplitudes de las ondas ascendentes y descendentes que se propagan en cada una de las capas. Esta en función de las frecuencias y del valor de la suma del número de onda discreto.

El tamaño de la matriz depende del número de estratos que se toman en cuenta en el planteamiento del problema.

Para la superficie libre se tendrá una sola condición de frontera y para cada interfase entre los estratos serán dos las condiciones, la relación de  $NM=2n+1$  describe el tamaño de la matriz, donde  $NM$  es el número de renglones y de columnas y  $n$  el número de estratos.

La condición de frontera para la superficie libre es:

- Continuidad de esfuerzos igual a cero:

$$\mu_1 \left. \frac{\partial u_1}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad 3.2.1$$

Donde el subíndice indica el estrato donde se está calculando el desplazamiento (en este caso el superior) y  $\mu$  la rigidez del mismo,  $z$  denota la profundidad en la cual se está haciendo el cálculo, es decir, está en la superficie libre del estrato.

Para cada interfase de tipo sólido-sólido las condiciones de frontera son: Continuidad de desplazamientos y continuidad de esfuerzos:

- Continuidad de desplazamientos

$$u_i \Big|_{z=z_i} = u_{i+1} \Big|_{z=z_i} \quad 3.2.2$$

- Continuidad de esfuerzos

$$\mu_i \left. \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|_{z=z_i} = \mu_{i+1} \left. \frac{\partial u_{i+1}}{\partial z} \right|_{z=z_i} \quad 3.2.3$$

El subíndice  $i$  denota el estrato en el cual se están imponiendo las condiciones de frontera. En cada estrato el desplazamiento estará dado por la ecuación:

$$u_i = A_i \exp[i\eta_1(z - z_i)] + B_i \exp[-i\eta_1(z - z_{i-1})] \quad 3.2.4$$

Donde  $A$  y  $B$  indican la amplitud para una onda que se propaga ascendentemente y una onda que desciende respectivamente, siendo el subíndice el número de estrato en donde está el desplazamiento y  $\eta$  es el número de onda vertical.

El esquema de la figura 3.2-1 muestra un medio estratificado sobre un semi-espacio, se representan ondas planas que describen el desplazamiento para cada uno de los estratos, el semi-espacio únicamente tiene propagación descendente.

La matriz global para el caso de tres estratos sobre un semi-espacio se muestra a continuación. El tamaño es de  $7 \times 7$  donde el primer renglón corresponde a la continuidad de esfuerzos en la superficie libre, el segundo y tercer renglón corresponden a la continuidad de esfuerzos y de desplazamientos en la interfase del primero y segundo estrato, el cuarto y quinto renglón corresponden a las condiciones de frontera entre el segundo y tercer estrato, el sexto y séptimo renglón corresponden a las condiciones aplicadas a la interfase entre la tercer capa y el semi-espacio.

$$\begin{pmatrix} \mu_1\eta \exp[i\eta H_1] & -\mu_1\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1\eta & -\mu_1\eta \exp[i\eta H_1] & -\mu_2\eta_2 \exp[i\eta_2 H_2] & \mu_2\eta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \exp[i\eta H_1] & -\exp[i\eta_2 H_2] & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2\eta_2 & -\mu_2\eta_2 \exp[i\eta_2 H_2] & -\mu_3\eta_3 \exp[i\eta_3 H_3] & \mu_3\eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \exp[i\eta_2 H_2] & -\exp[i\eta_3 H_3] & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_3\eta_3 & -\mu_3\eta_3 \exp[i\eta_3 H_3] & \mu_4\eta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \exp[i\eta_3 H_3] & -1 \end{pmatrix}$$

Se puede observar como existen términos parecidos entre si, donde únicamente varía matemáticamente el subíndice.

$z = z_0$	$\mu_1, \rho_1, \beta_1$	$A_1 e^{-ikx+i\eta_1(z-z_1)} + B_1 e^{-ikx-i\eta_1 z}$
$z = z_1$	$\mu_2, \rho_2, \beta_2$	$A_2 e^{-ikx+i\eta_2(z-z_2)} + B_2 e^{-ikx-i\eta_2(z-z_1)}$
$z = z_2$	$\mu_3, \rho_3, \beta_3$	$A_3 e^{-ikx+i\eta_3(z-z_3)} + B_3 e^{-ikx-i\eta_3(z-z_2)}$
$z = z_3$	$\mu_4, \rho_4, \beta_4$	$A_4 e^{-ikx+i\eta_4(z-z_4)} + B_4 e^{-ikx-i\eta_4(z-z_3)}$
$z = z_4$	$\mu_5, \rho_5, \beta_5$	$A_5 e^{-ikx+i\eta_5(z-z_5)} + B_5 e^{-ikx-i\eta_5(z-z_4)}$
$z = z_5$		
		.
	$\mu_N, \rho_N, \beta_N$	.
		.
		$B_N e^{-ikx-i\eta_N(z-z_{N-1})}$

Figura 3.2-1. Esquema general de la distribución de desplazamientos para las ondas planas de tipo SH en cada estrato hasta el semi-espacio.

La construcción de la matriz global para más de dos capas se puede hacer de manera recursiva a partir de la interface entre el primero y segundo estrato debido a la imposición de condiciones de frontera, ya que los parámetros que cambian son las propiedades del estrato (rigidez, número de onda horizontal y espesor) cambiando algebraicamente el subíndice, finalizando en la interface entre el semi-espacio y el estrato superior a el.

La matriz global premultiplica a la matriz de incógnitas o términos independientes que son las amplitudes de las ondas, esta matriz es de  $7 \times 1$ .

Este sistema de ecuaciones va a estar igualado a la matriz que representa a los términos de fuente, el modelo matemático correspondiente esta dado por:

$$AX = F \tag{3.2.5}$$

Donde:

$A$  Es la matriz global

$X$  Es la matriz de términos independientes o incógnitas (amplitudes).

$F$  Es la matriz de términos de la fuente.



La posición de los elementos de la matriz de términos de la fuente dependerá del estrato donde este esta colocada, y será de tamaño  $NM$  por 1, en nuestro caso  $7 \times 1$ .

Con la fuente colocada en medio del tercer estrato la matriz de términos de fuente tendrá las condiciones de frontera entre las interfases superior e inferior a la capa, estas son las correspondientes al segundo y tercer estrato y al tercer estrato y el semi-espacio respectivamente.

El término de valor absoluto involucra a ondas ascendentes y descendentes y el subíndice indica en que estrato se esta aplicando,  $z_f$  es la profundidad de la fuente y la  $H$  el espesor del estrato que indica el subíndice. Por lo que tendrá la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \exp[-i\eta_3|H_1 + H_2 - Zf|] \\ \frac{1}{\eta_3\mu_3} \exp[-i\eta_3|H_1 + H_2 - Zf|] \\ \exp[-i\eta_3|H_1 + H_2 + H_3 - Zf|] \\ -\frac{1}{\eta_3\mu_3} \exp[-i\eta_3|H_1 + H_2 + H_3 - Zf|] \end{pmatrix}$$

Para obtener un resultado la matriz debe ser no singular, es decir, debe tener matriz inversa, de esta manera para resolver el sistema de ecuaciones se presenta la siguiente ecuación:

$$X = A^{-1}F \tag{3.2.6}$$

Donde  $A^{-1}$  es la matriz inversa de A. Si el determinante de A es cero implica que esa matriz es singular y por lo tanto no es invertible, esto es posible cuando los elementos de una línea de la matriz A (renglón o columna) son todos nulos y cuando dos líneas paralelas de A son proporcionales. Dependiendo del método para resolver el sistema de ecuaciones es la calidad del resultado, ya que hay métodos numéricos que son limitados y no llegan a resolver el sistema y también hay otros que por los cálculos realizados requieren mayor espacio y tiempo computacional.

En algunos casos puede presentarse que los valores numéricos de los elementos de la matriz son muy pequeños pero mayores a cero, sin embargo no es posible obtener la matriz inversa, limitando la obtención de un resultado. Principalmente la técnica para realizar la inversión de la matriz global es lo que hace que el método de solución del sistema de ecuaciones sea afectivo o no. Entre las limitantes del método se encuentran problemas en cuanto al estudio de irregularidades en la topografía cuya pendiente es suave (Luzón, et al, 2002) y a altas frecuencias, debido al gran tamaño de la matriz resultante que tiene que ser invertida (Li-Yun y Bouchon, 2004).

## 4. EJEMPLOS TEÓRICOS.

A continuación se presentan los resultados obtenidos al programar la técnica del Número de Onda Discreto y la Matriz Global obteniendo sismogramas sintéticos e imágenes de la propagación de una onda. De tal manera que es presentada una comparación entre la solución obtenida con la técnica del NOD contra una Solución Exacta, además se muestran los resultados de una prueba de transparencia y la comparación entre la propagación de la onda de tipo SH en un medio elástico y uno viscoelástico.

### 4.1 Comparación entre la solución exacta y la solución con el Número de Onda Discreto.

Para poder evaluar la precisión de la solución del método de Número de Onda Discreto, es necesario hacer la comparación entre esta y una solución exacta.

La solución exacta esta dada por la función de Green G22, esta representa el desplazamiento elástico del medio debido a una fuerza impulsiva unitaria en el eje y (de acuerdo con la convención establecida en este trabajo) que esta dada en un tiempo y espacio, es decir, define como el medio reacciona mecánicamente ante una excitación impulsiva (Udias, 1999). El operador que representa la forma de la onda de la fuente es un Pulso de Ricker.

Las propiedades dadas al medio de propagación son las mismas en cada caso y consta de un semi-espacio con una velocidad de onda SH de 1500 [m/s] y una densidad de 2000 [Kg / m<sup>3</sup>], el numero de receptores es de once y están a una profundidad de un metro, esto debido a que es singular el sistema en la solución exacta si los receptores se encuentran en la superficie libre ( $z = 0$ ), la extensión lateral es de 12 kilómetros y separados en iguales intervalos, la fuente esta centrada a la mitad del arreglo es decir es simétrica con respecto al receptor del centro y a una profundidad de seis kilómetros, el numero de muestras es de 1024 con un intervalo de muestreo de 0.02 [s].

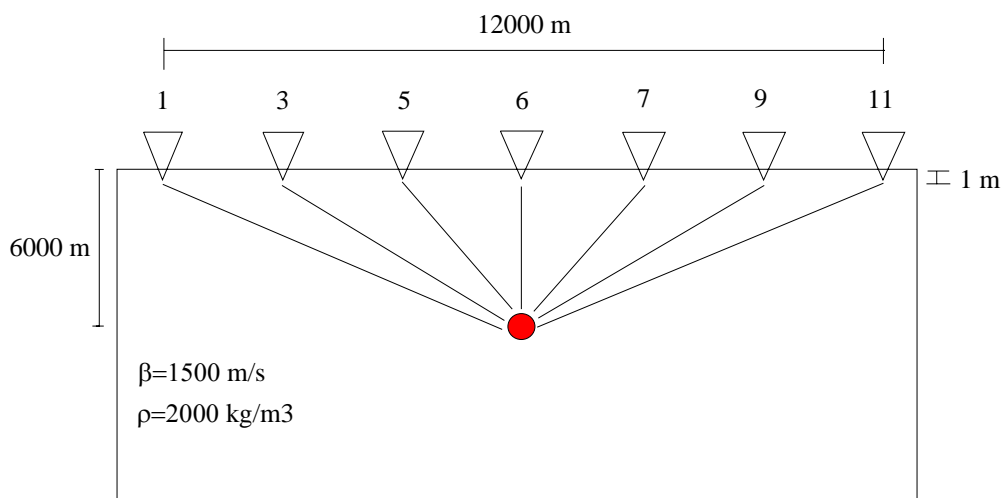


Figura 4.1-1. Esquema del medio de propagación y del arreglo de los receptores y de la fuente en un semi-espacio para la comparación entre la solución exacta y con el NOD.

En el esquema anterior se presenta el arreglo de los receptores en el semi-espacio, son simétricos con respecto al numero 6, también se muestran los rayos de la onda generada por la fuente hasta los receptores. A continuación se presentan las graficas de la comparación entre las soluciones, en línea solida se presenta la solución exacta y en líneas punteadas la solución con el NOD, así como el error absoluto entre las dos trazas. Para poder cuantificar el error se normalizaron los valores en ambas soluciones.

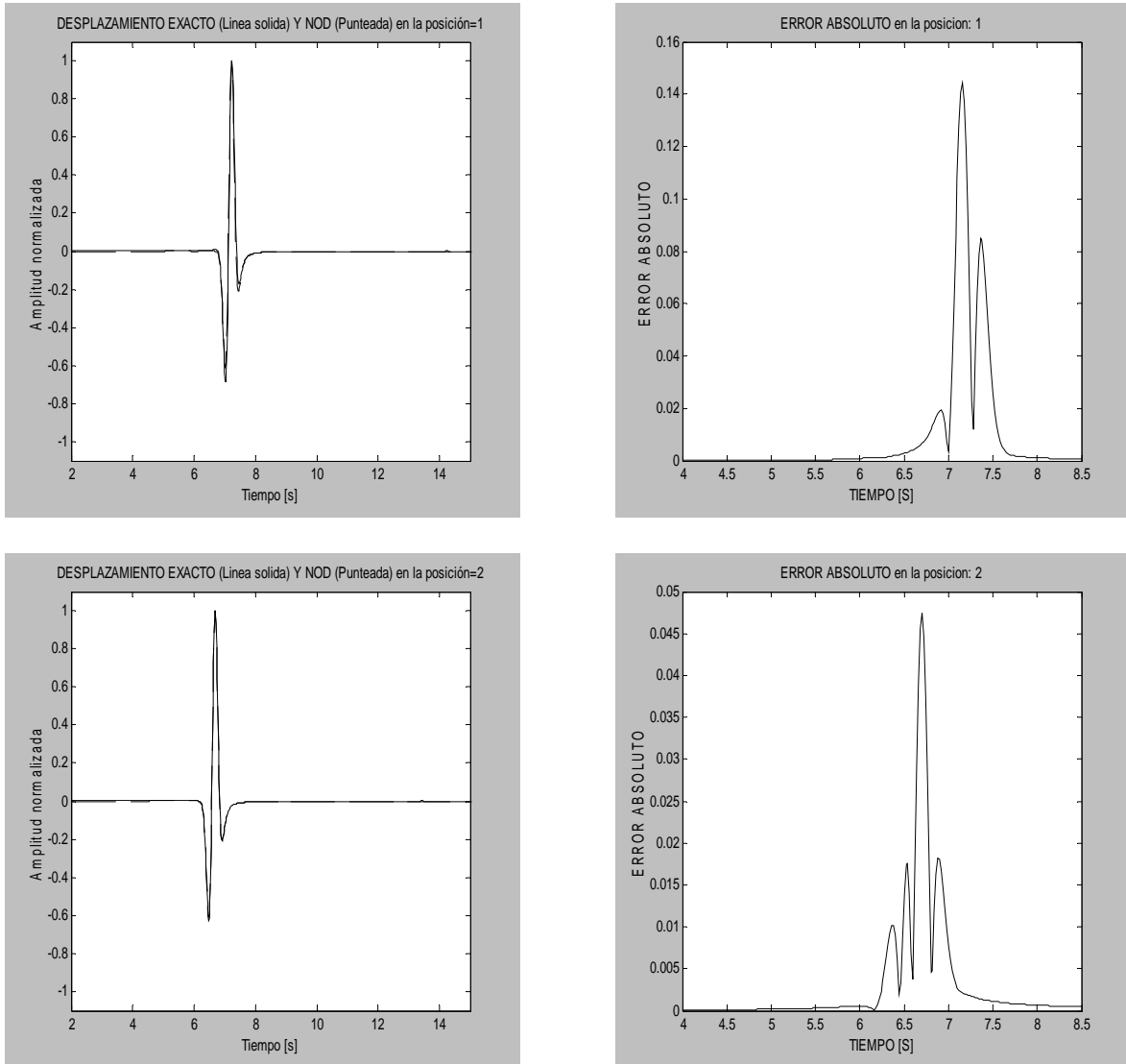


Figura 4.1-2a Comparación (izq.) de la solución exacta y con NOD y el error relativo (der.).

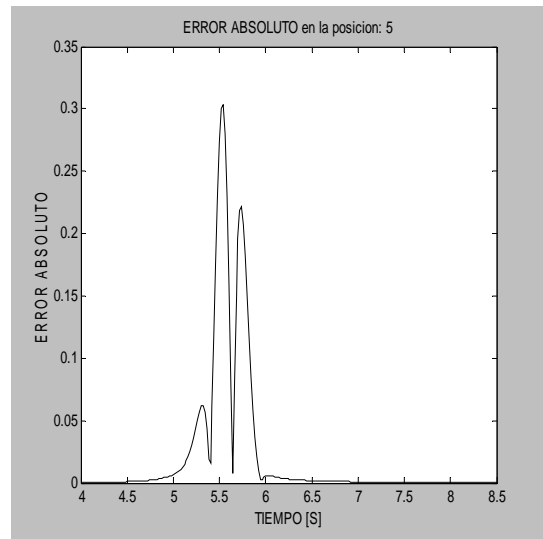
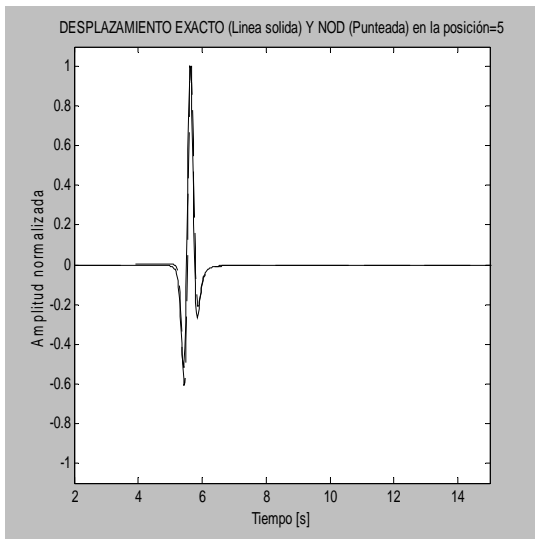
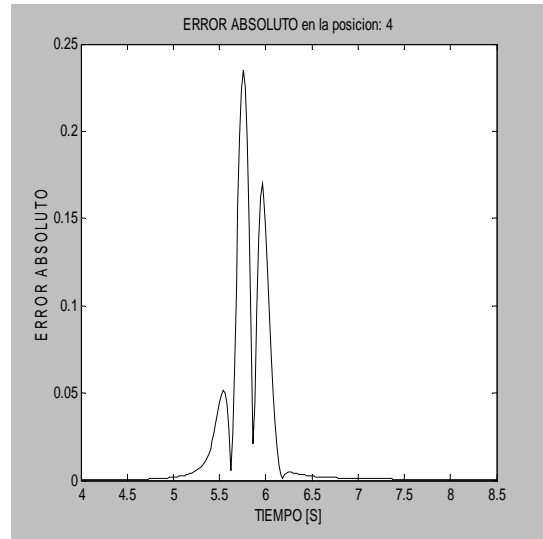
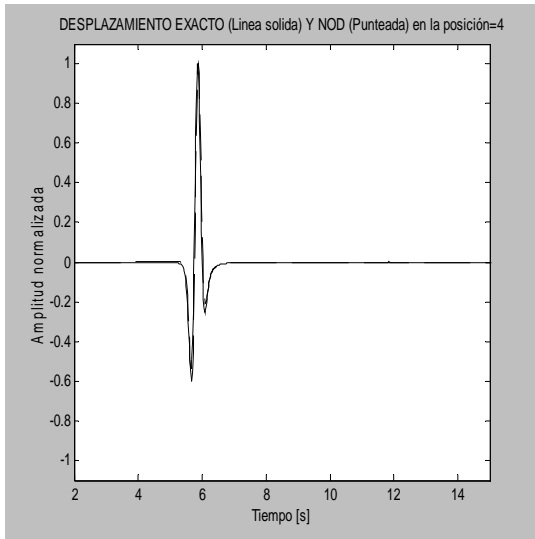
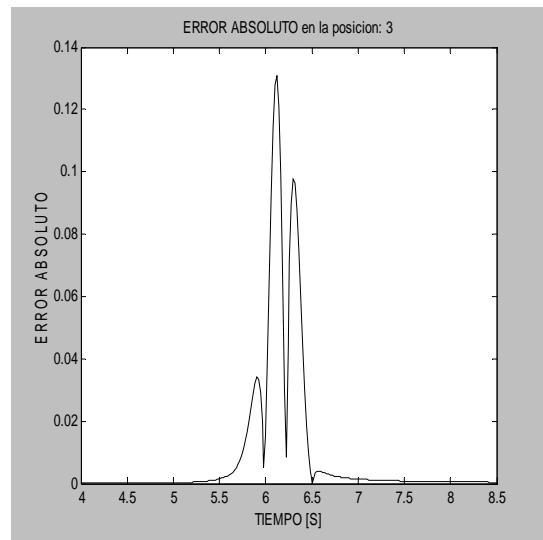
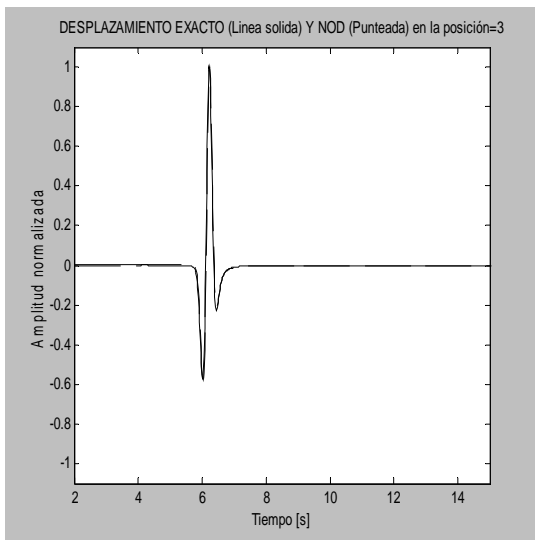


Figura 4.1-2b (continuación) Comparación (izq.) de la solución exacta y con NOD y el error absoluto (der.).

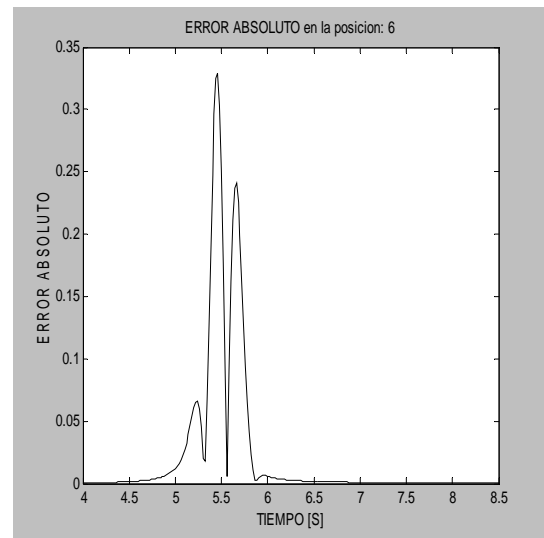
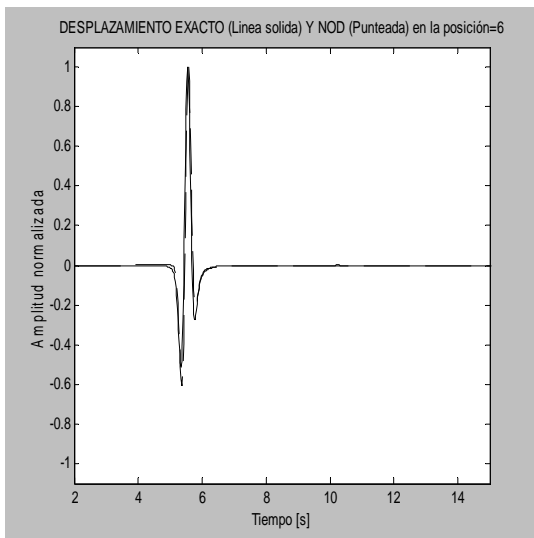


Figura 4.1-2c (continuación) Comparación (izq.) de la solución exacta y con NOD y el error absoluto (der.).

La ecuación empleada para obtener el error es:

$$Error = |Sol.Exacta - Sol.NOD| \tag{4.1}$$

Se consideró esta ecuación para el cálculo del error con la intención de observar la diferencia máxima en el desplazamiento punto a punto entre las dos trazas y en qué tiempo se da, lo cual sirve de referencia al considerar resultados posteriores. De las once trazas calculadas se muestran únicamente seis debido a la simetría entre estas con respecto al receptor del centro (posición seis), están acotadas a una ventana de tiempo de 4 a 8.5 segundos para observar solo el valor donde se presenta el error representativo en la traza. Los valores de error máximo para cada traza se muestran en la siguiente tabla:

Posición del receptor	Error (m)	Simétrico con
1	0.14	11
2	0.04	10
3	0.13	9
4	0.23	8
5	0.30	7
6	0.32	

Tabla 4.1 Valor máximo del error calculado en cada una de las trazas en la comparación entre la solución exacta y la solución con el NOD.

De acuerdo con los valores en la tabla se observa que la posición seis es la que presenta el error máximo con 0.32 [m], este receptor es el más cercano a la fuente localizado arriba de ella, en los receptores adyacentes se presenta una aproximación más precisa, así la precisión de la aproximación disminuye en los receptores cercanos a la fuente.

A continuación en la siguiente prueba se ha cambiado la posición de los receptores acercándolos a la fuente, ahora a 3000 metros de profundidad.

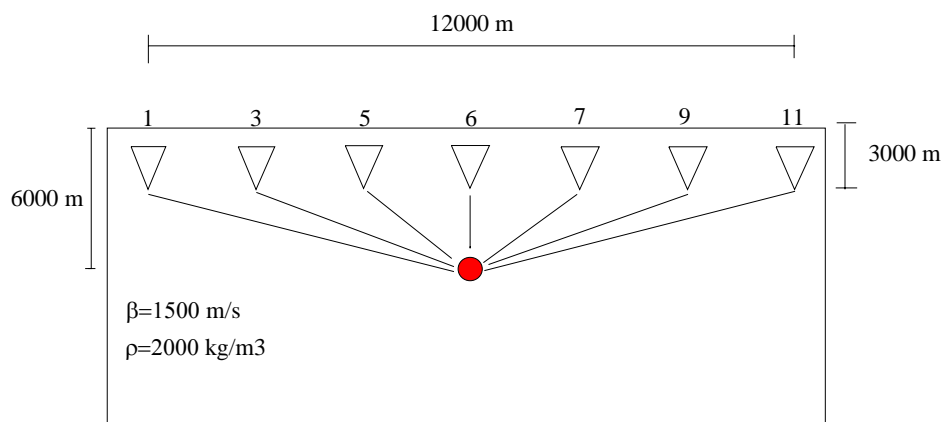


Figura 4.1-3 Esquema del arreglo de los receptores a 3000 metros de profundidad y de la fuente para la comparación entre la solución exacta y la del NOD.

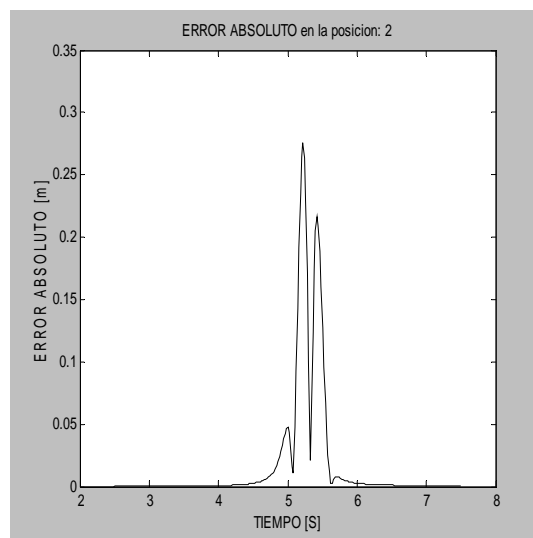
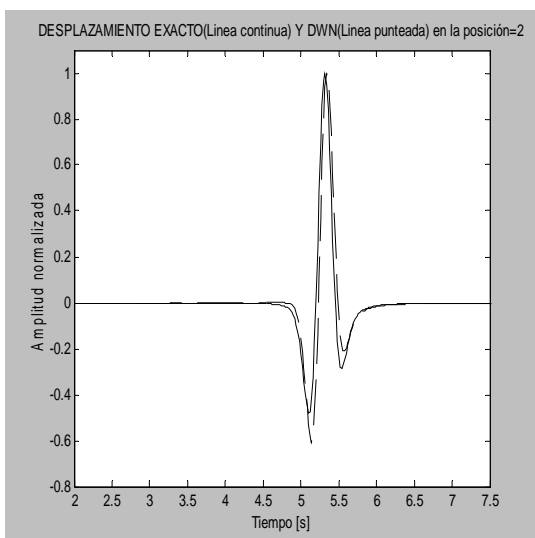
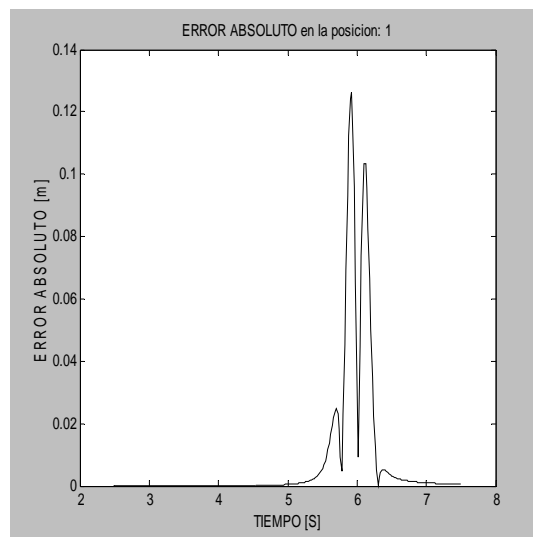
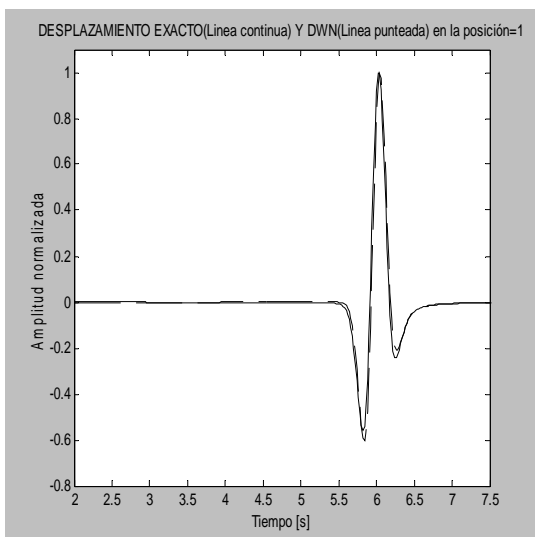


Figura 4.1-4 a. Graficas donde se muestra la comparación entre la solución exacta y la solución con el NOD (izq.) y el error absoluto entre ambas soluciones (der.). Para receptores a 3000 metros de profundidad.

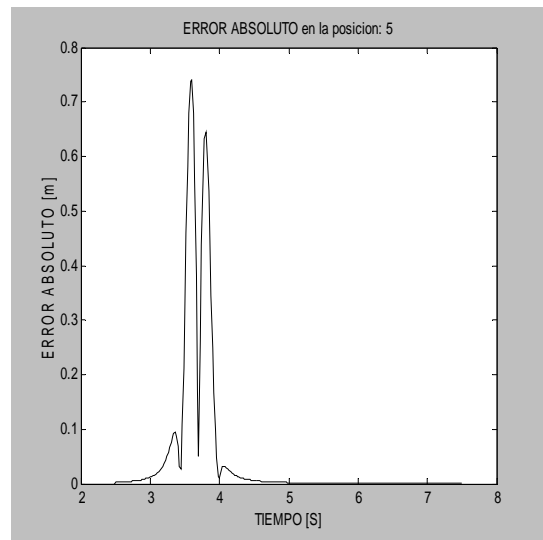
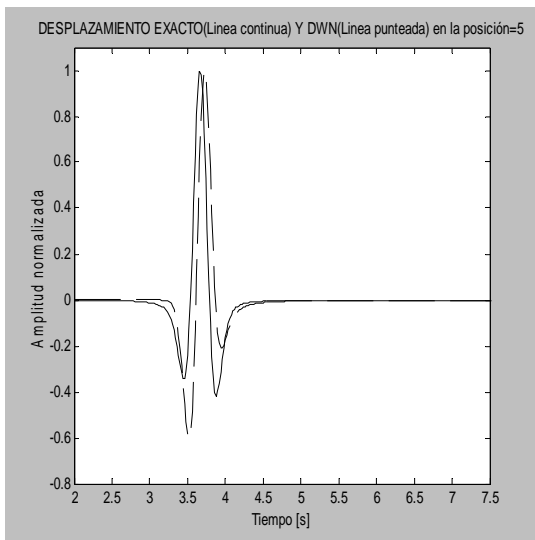
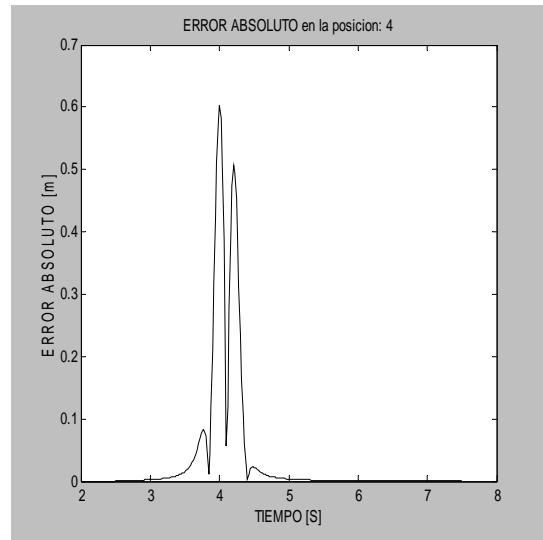
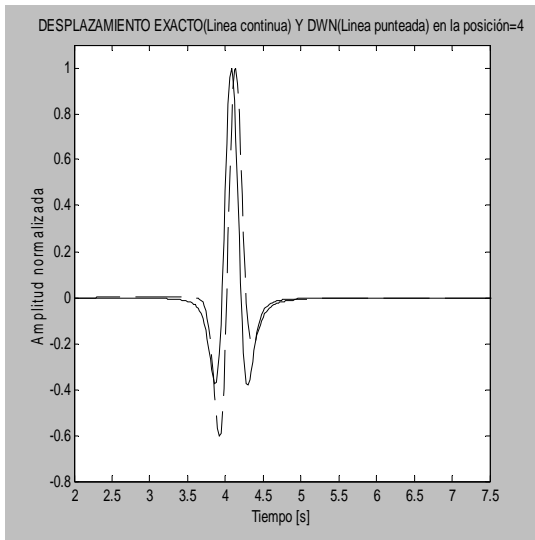
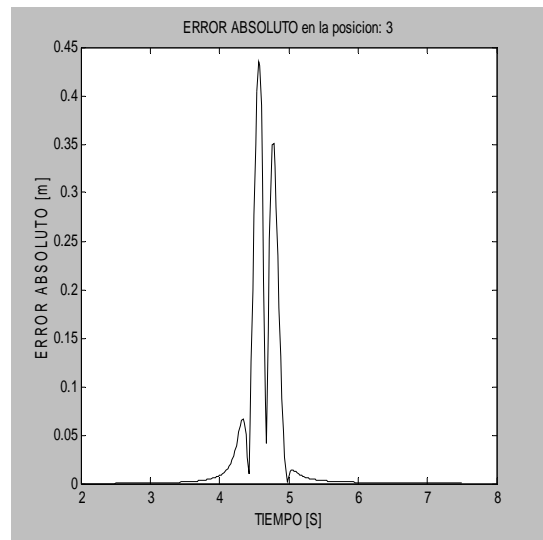
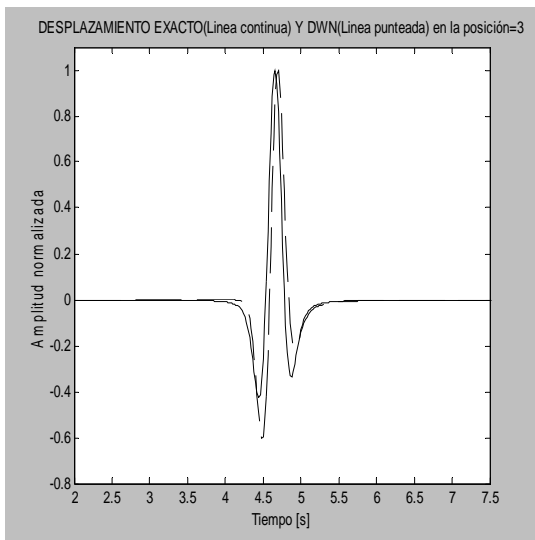


Figura 4.1-4 b (continuación). Graficas donde se muestra la comparación entre la solución exacta y la solución con el NOD (izq.) y el error absoluto entre ambas soluciones (der.). Para receptores a 3000 metros de profundidad.

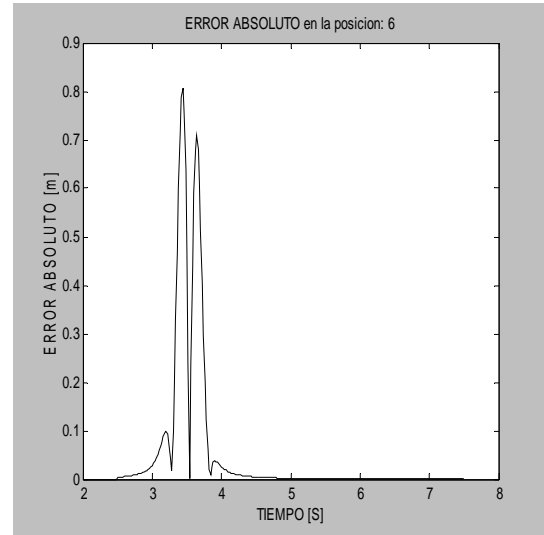
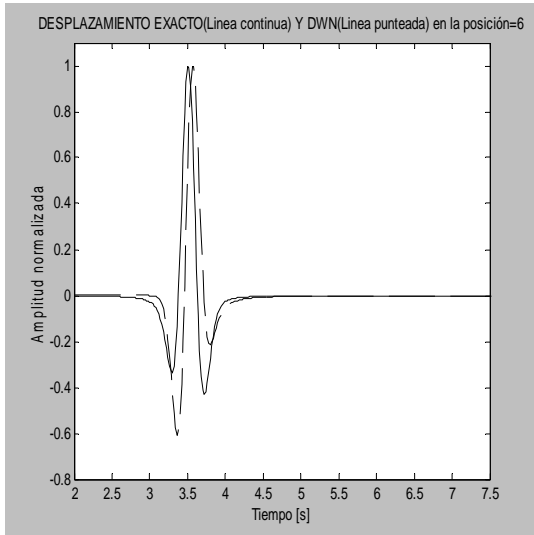


Figura 4.1-4 c (continuación). Graficas donde se muestra la comparación entre la solución exacta y la solución con el NOD (izq.) y el error absoluto entre ambas soluciones (der.). Para receptores a 3000 metros de profundidad.

La ventana de tiempo presentada solo muestra el intervalo de interés, en esta ocasión es de 2 a 7.5 segundos, debido a la cercanía de los receptores con la fuente el tiempo de arribo de la onda es menor.

En la siguiente tabla se presenta el valor máximo de error obtenido en cada uno de los receptores.

Posición del receptor	Error [m]	Simétrico con
1	0.12	11
2	0.27	10
3	0.43	9
4	0.60	8
5	0.73	7
6	0.80	

Tabla 4.2 Valor máximo del error calculado en cada una de las trazas en la comparación entre la solución exacta y la solución con el NOD para receptores ubicados a 3000 metros de profundidad.

De acuerdo con la tabla 4.2, se puede observar que nuevamente en la traza más próxima a la fuente es la que tiene un mayor error en comparación con la traza calculada para los demás receptores.

Sin embargo el error en general aumento en comparación con el caso anterior en que los receptores se encuentran cerca de la superficie.

Finalmente se calcularon los sismogramas sintéticos para el caso en que los receptores se encuentran muy cerca de la fuente, estos se ubican a 5900 metros de profundidad. Un esquema del arreglo se presenta a continuación. Las imágenes comparativas y de error absoluto se muestran después del esquema.



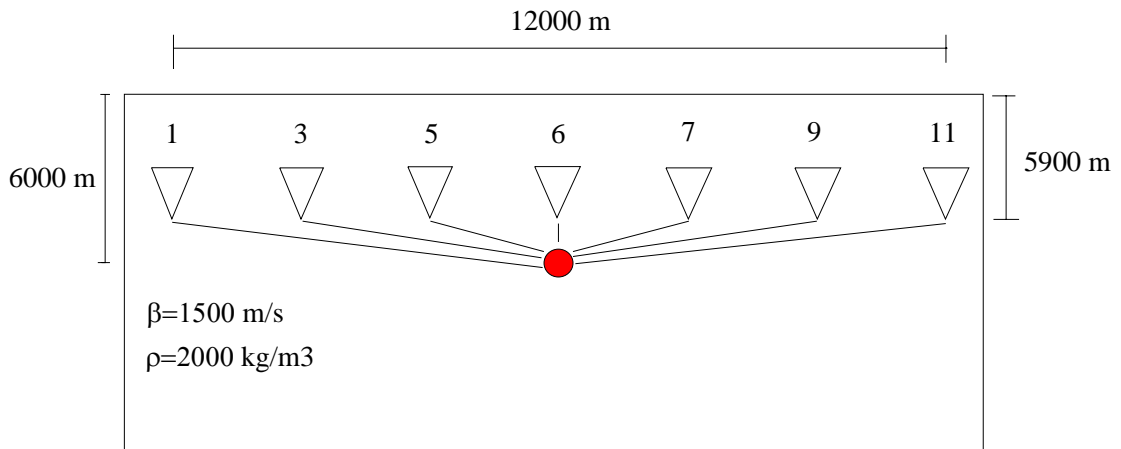


Figura 4.1-5 Esquema del arreglo de los receptores a una profundidad de 5900 metros de la fuente para la comparación entre la solución del NOD y la exacta.

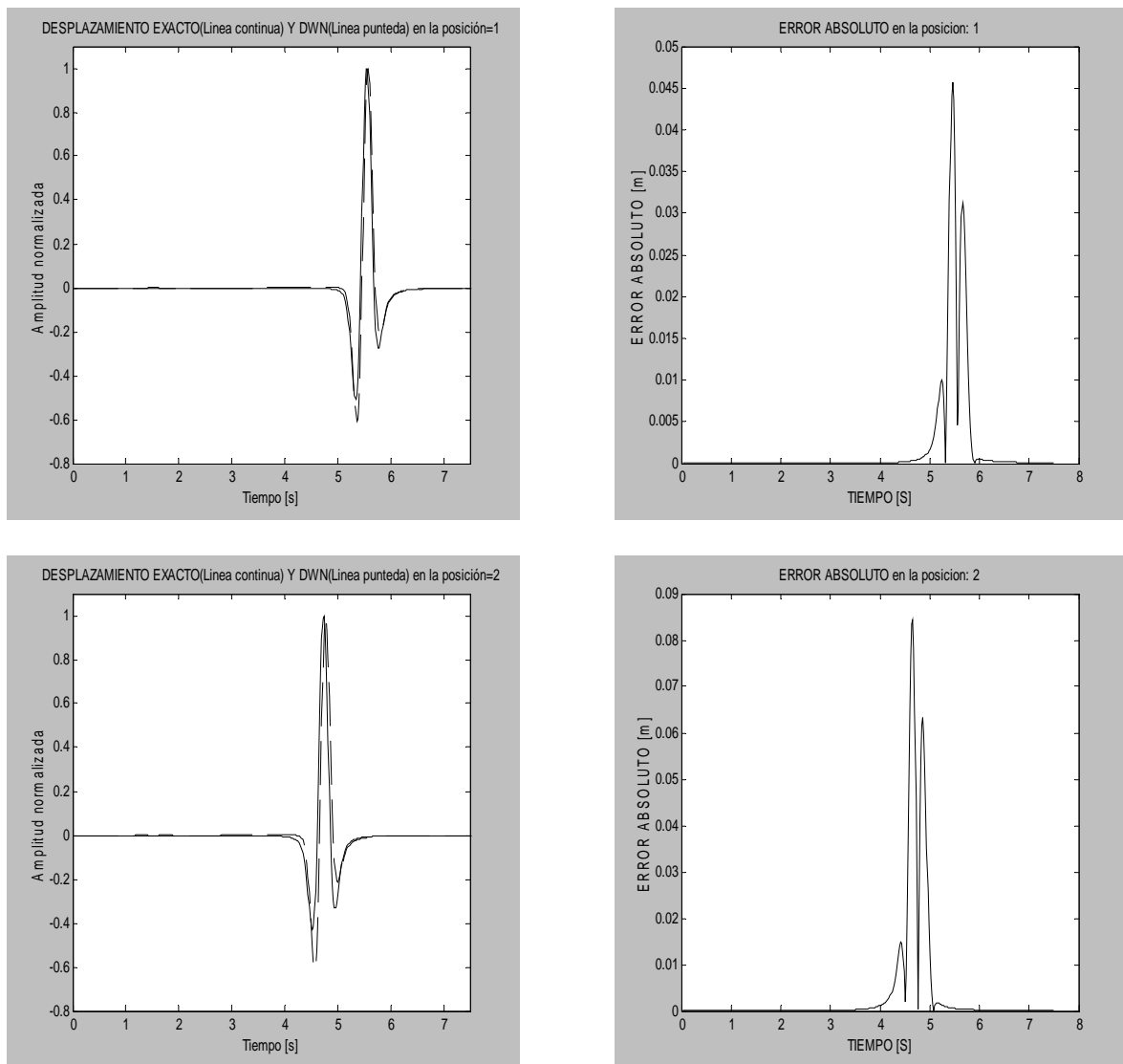


Figura 4.16 a. Graficas de comparación entre la solución exacta y con el NOD, los receptores se encuentra a 5900 metros de profundidad (izq.) y grafica del error absoluto (der.).

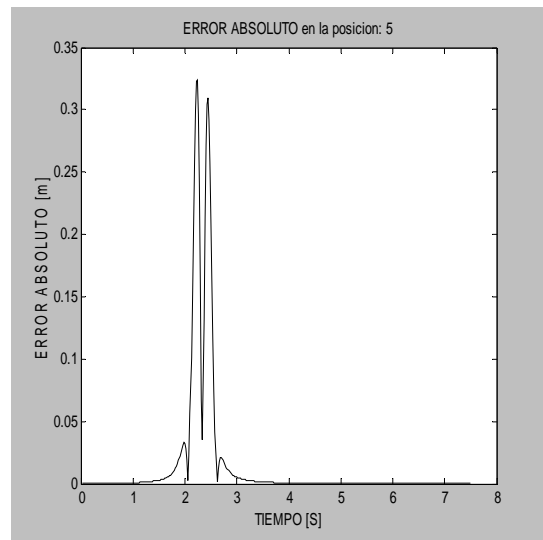
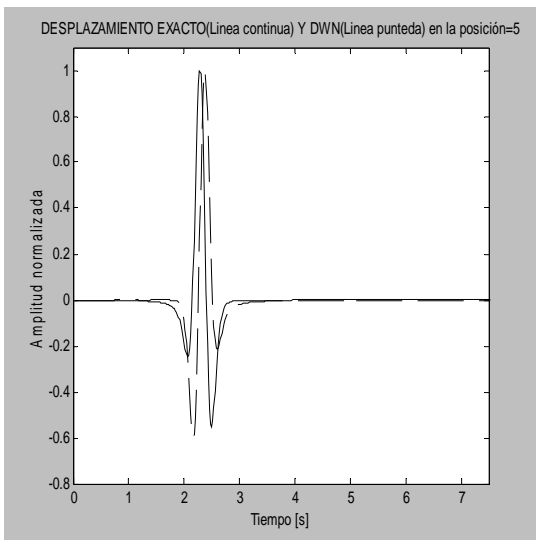
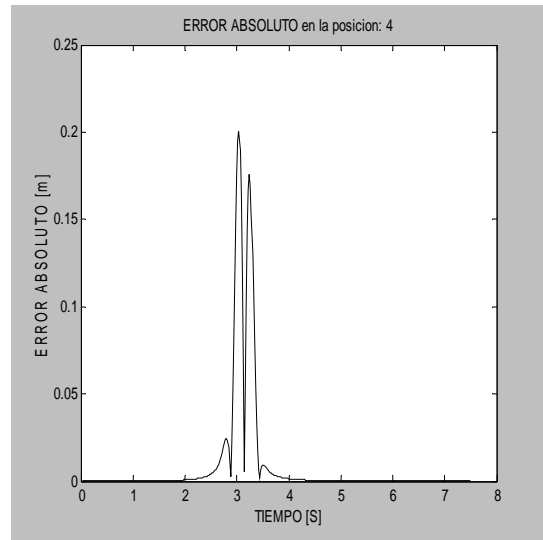
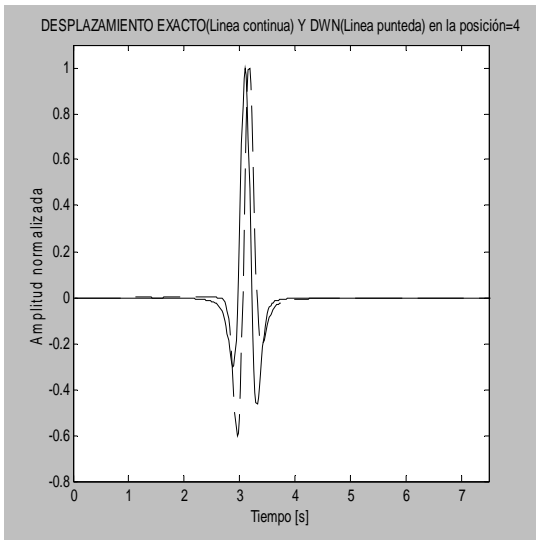
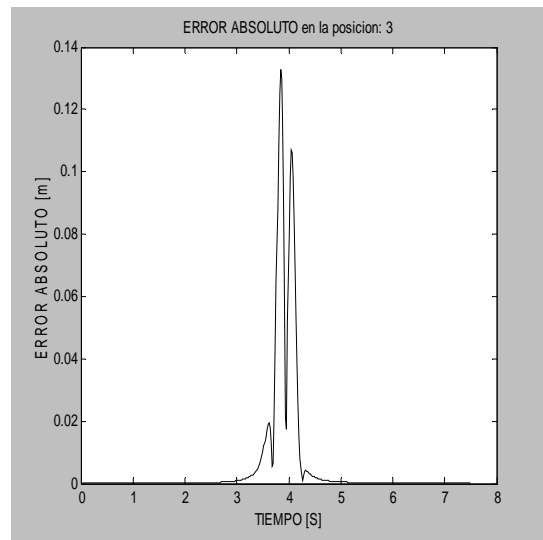
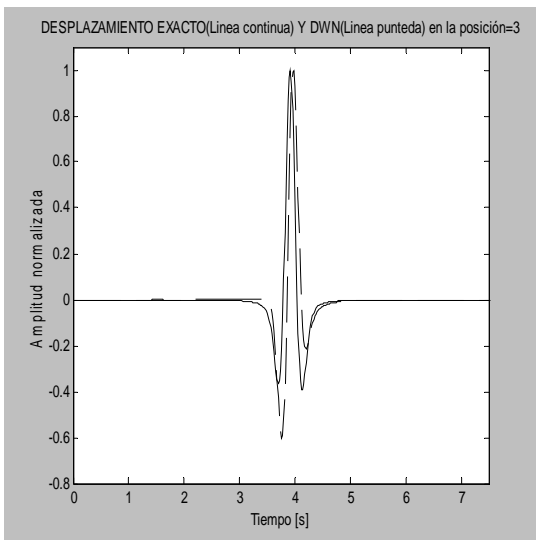


Figura 4.1-6 b (continuación). Graficas de comparación entre la solución exacta y con el NOD, los receptores se encuentra a 5900 metros de profundidad (izq.) y grafica del error absoluto (der.).

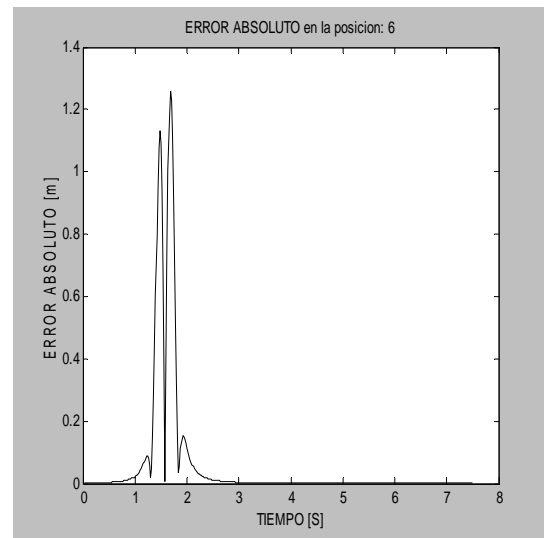
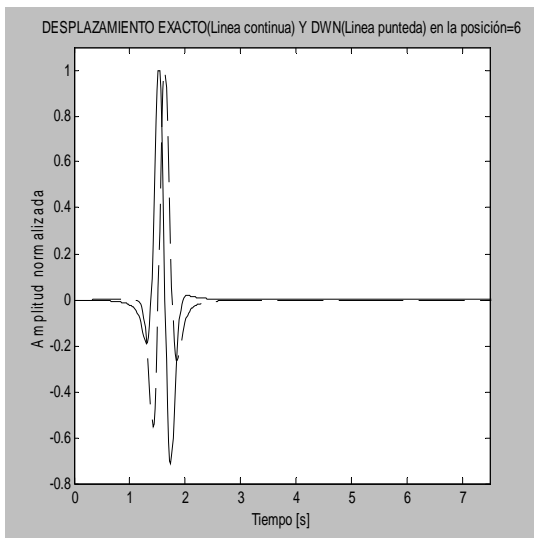


Figura 4.1-6 c (continuación). Graficas de comparación entre la solución exacta y con el NOD, los receptores se encuentra a 5900 metros de profundidad (izq.) y grafica del error absoluto (der.)

El error máximo en cada uno de los receptores resultado de la comparación se muestra a continuación:

Posición del receptor	Error [m]	Simétrico con
1	0.04	11
2	0.08	10
3	0.13	9
4	0.20	8
5	0.32	7
6	1.25	

Tabla 4.3 Valor máximo del error calculado en cada una de las trazas para la comparación entre la solución exacta y con el NOD para el caso en que los receptores se encuentran a una profundidad de 5900 metros.

La traza calculada para el receptor seis es la que mayor error presenta al igual que en los casos anteriores, disminuyendo considerablemente en las trazas adyacentes a el.

En este caso el valor del error en el receptor central fue mayor que en los dos casos anteriores. Es común en los tres casos presentados que el error máximo en la aproximación con el NOD es en los receptores mas próximos a la fuente, de esta manera es claro que mientras es mas cercano esta el receptor a la fuente mayor es el error,

Se puede atribuir este error al número de términos empleados en la discretización del número de onda aunado a que se hace una aproximación mediante ondas planas. Por tanto al considerar una mayor número de términos para la suma se va a obtener una solución más exacta.

Las diferencias en ambas soluciones que se pueden observar son: distinto tiempo de arribo, principalmente en el caso en que los receptores se ubican a 5900 metros, por lo tanto hay una diferencia entre las fases y frecuencia de la onda, además del valor de las amplitudes.

Cabe destacar que la solución exacta solo es aplicable para un semi-espacio y no para un medio estratificado.

De esta manera la técnica permite obtener una buena aproximación a la solución exacta, por lo tanto es posible continuar con los objetivos planteados en este trabajo considerando la magnitud y ubicación del error que se va a presentar en los futuros cálculos.

A continuación se presentan los sismogramas sintéticos y las imágenes en diferentes intervalos de tiempo de una animación, producto de la programación del método de Número de Onda Discreto y la Matriz Global para un medio elástico y para un medio viscoelástico.

## 4.2 Prueba de Transparencia.

La prueba de transparencia permite evaluar el funcionamiento de la Matriz Global y se realiza dando como parámetros de entrada valores iguales en las propiedades físicas de todos los estratos, estos se muestran en la tabla 4.4. El semi-espacio es presentado como el cuarto estrato, la fuente se ubica a 5000 metros de profundidad.

Estrato	Velocidad de la onda SH (m/s)	Densidad (Kg/m <sup>3</sup> )	Espesor (m)
1	2500	2500	2000
2	2500	2500	2000
3	2500	2500	2000
4	2500	2500	

Tabla 4.4. Propiedades de los estratos para la prueba de transparencia

Las trazas resultantes se muestran en la figura 4.2-1.

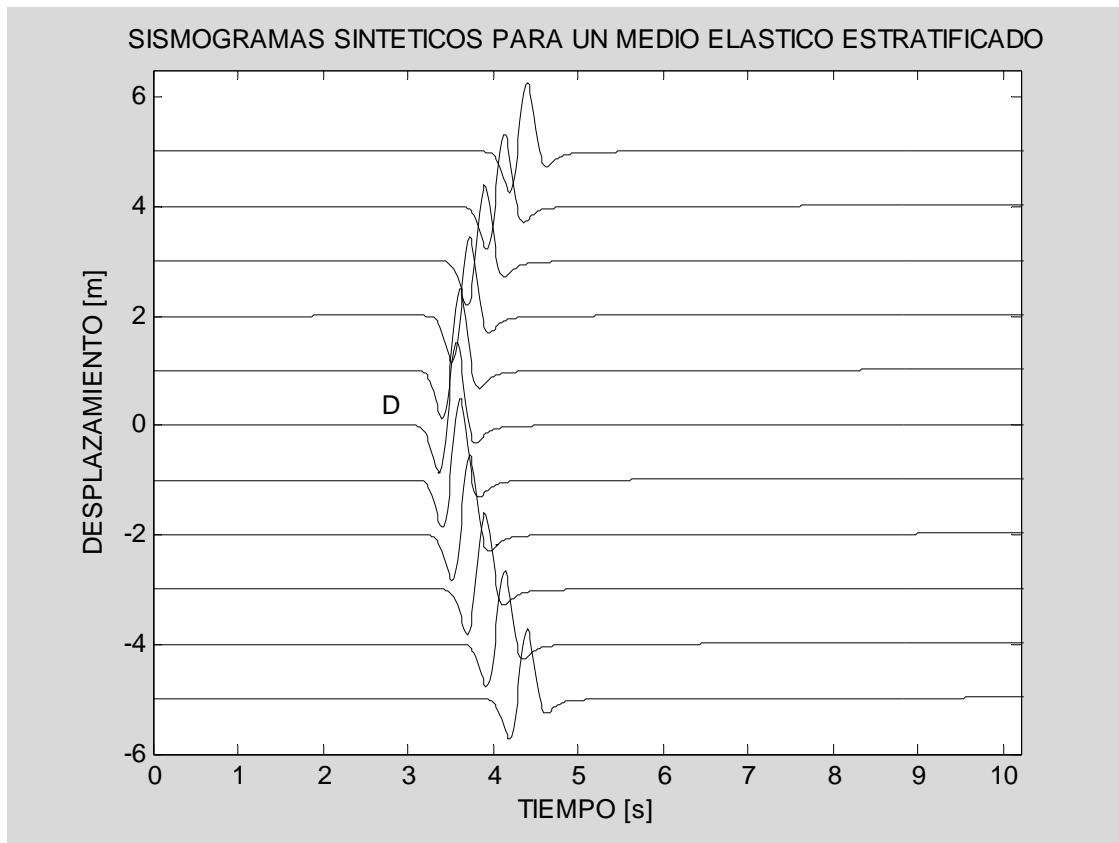


Figura 4.2-1 Sismograma sintético de la prueba de transparencia

La grafica muestra unicamente un arribo en cada detector, el cual corresponde a la onda directa, la forma que describe se debe a los distintos tiempos de arribo de la onda en cada uno de los receptores, siendo el detector del centro el primero en recibir la señal, debido a la distancia cada vez mayor entre cada uno de los receptores adyacentes al del centro es que la onda tarda mas en llegar a estos.

La forma del pulso en las trazas es coherente con la forma del pulso de Ricker. La dirección de propagación de la onda no cambia en todo el medio ya que se al poseer las mismas propiedades se le considera como un solo estrato, es decir la dirección del vector número de onda es constante, esto de acuerdo con las propiedades no hay un contraste de impedancias de esta manera no hay reflexión ni transmisión de la onda. Por lo tanto la matriz global funciona de manera adecuada al ser formada por las condiciones de frontera y en la resolución del sistema de ecuaciones.

### 4.3 Medio Elástico Estratificado.

La siguiente tabla muestra las propiedades del medio de propagación con un contraste de impedancias entre los estratos, las trazas se presentan en la figura 4.3-1. Este es el caso de un medio elástico, no hay atenuación, el semi-espacio es denotado como el cuarto estrato.

Estrato	Velocidad de la onda SH (m/s)	Densidad (Kg/m <sup>3</sup> )	Espesor (m)
1	2000	2000	2000
2	2300	2250	2000
3	2700	2600	2000
4	3000	2800	

Tabla 4.5. Propiedades físicas de los estratos para un medio elástico y viscoelástico.

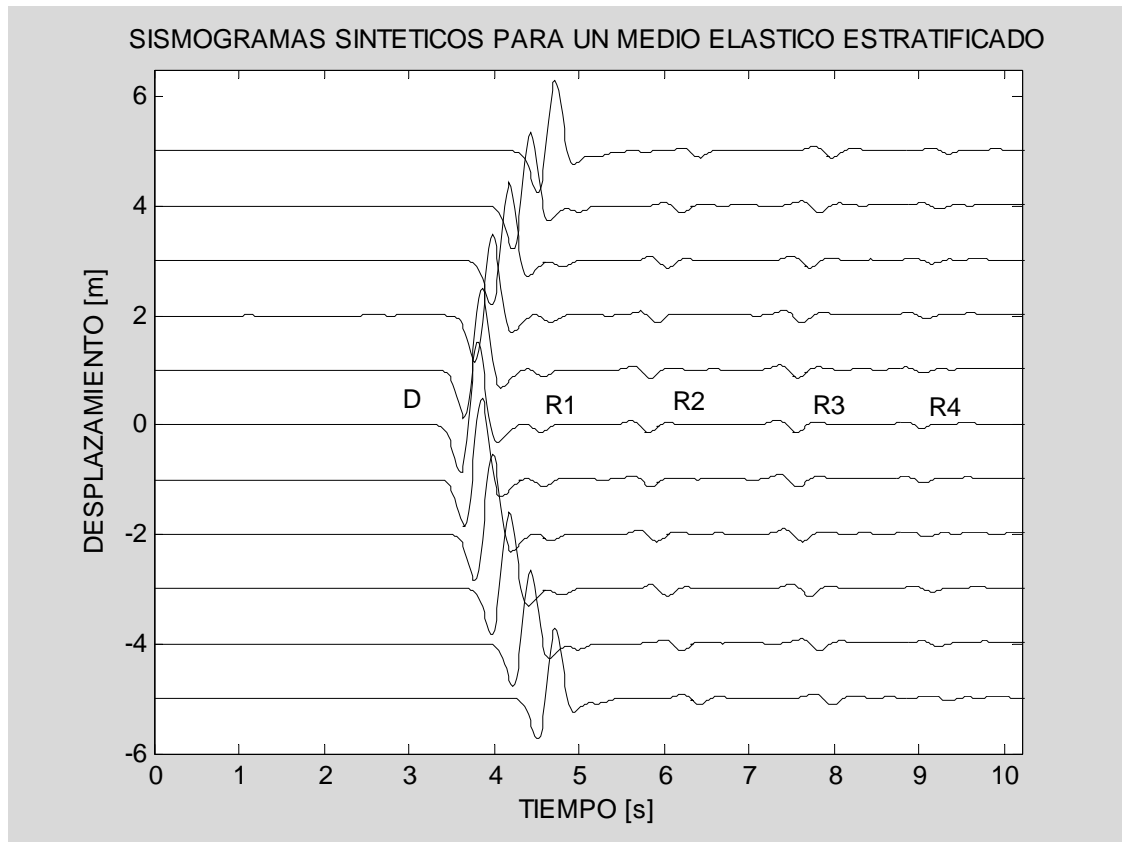


Figura 4.3-1 Sismograma sintético para un medio estratificado y elástico con contraste de impedancias en cada uno de los estratos.

Se puede apreciar la llegada de la onda directa (D) y de cuatro reflexiones (R1,R2,R3,R4), estas se observan en la inflexion de la traza, teniendo la cuarta menor amplitud con respecto a las tres que llegaron antes y la primera de ellas muy cercana al pulso del primer arribo, de igual forma que el ejemplo anterior debido a la distancia entre los receptores en la superficie libre la onda arriba en distintos tiempos, teniendo una simetria con respecto al detector central.

Se observa la forma del pulso semejante al del Pulso de Ricker en las trazas. Debido al contraste de impedancias hay ondas reflejadas y transmitidas, por lo que la direccion del vector numero de onda cambia en cada interfase, cambiando tambien la direccion de propagacion.

El contenido de energía en la onda en este caso esta relacionada con su amplitud (mayor energia, mayor amplitud), por lo que se ve que la onda directa contiene mayor cantidad de energia que los arribos posteriores, también se observa que la amplitud en el detector del centro es mayor que la de los adyacentes a él debido la distancia menor que hay a la fuente, conservando mayor cantidad de energía.

La figura 4.3-2. Muestra las trazas del detector del centro (primer arribo) y del extremo superior del arreglo (11), de acuerdo con los sismogramas presentados en la figura anterior. La nomenclatura ubicada arriba de la traza corresponde a la obtenida en el detector del centro.

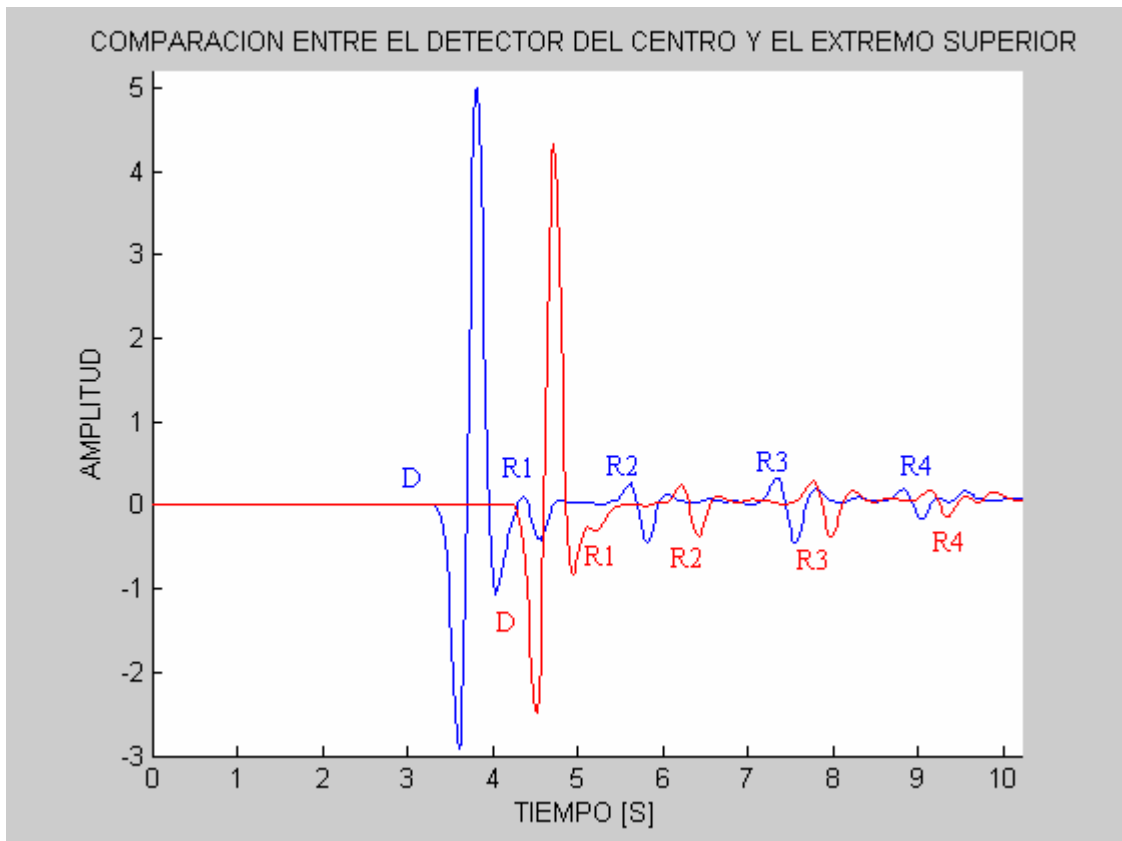


Figura 4.3-2 Comparacion entre las trazas del detector del centro del arreglo y del detector ubicado al extremo del arreglo.

La imagen muestra una vista en perfil que permite notar mas claramente los arribos de la onda directa asi como de los reflectores, por tanto se logra apreciar mejor su amplitud, la onda directa es denotada con D mientras que los reflectores con R1, R2, R3, R4, de acuerdo al tiempo de llegada.

La amplitud disminuye considerablemente entre la D y cada uno de los reflectores porque la energia se dispersa al interactuar D con cada una de las fronteras generando reflexiones y transmisiones. Los distintos tiempos de arribo tambien son apreciables por la distancia entre los detectores con la fuente.

#### 4.4 Medio Viscoelástico Estratificado.

Las propiedades dadas a cada uno de los estratos es la misma que en el caso anterior para poder hacer una comparacion del efecto del medio en la propagación de la onda. Las trazas sintéticas son mostradas a continuacion en las figuras 4.4-1 y 4.4-2

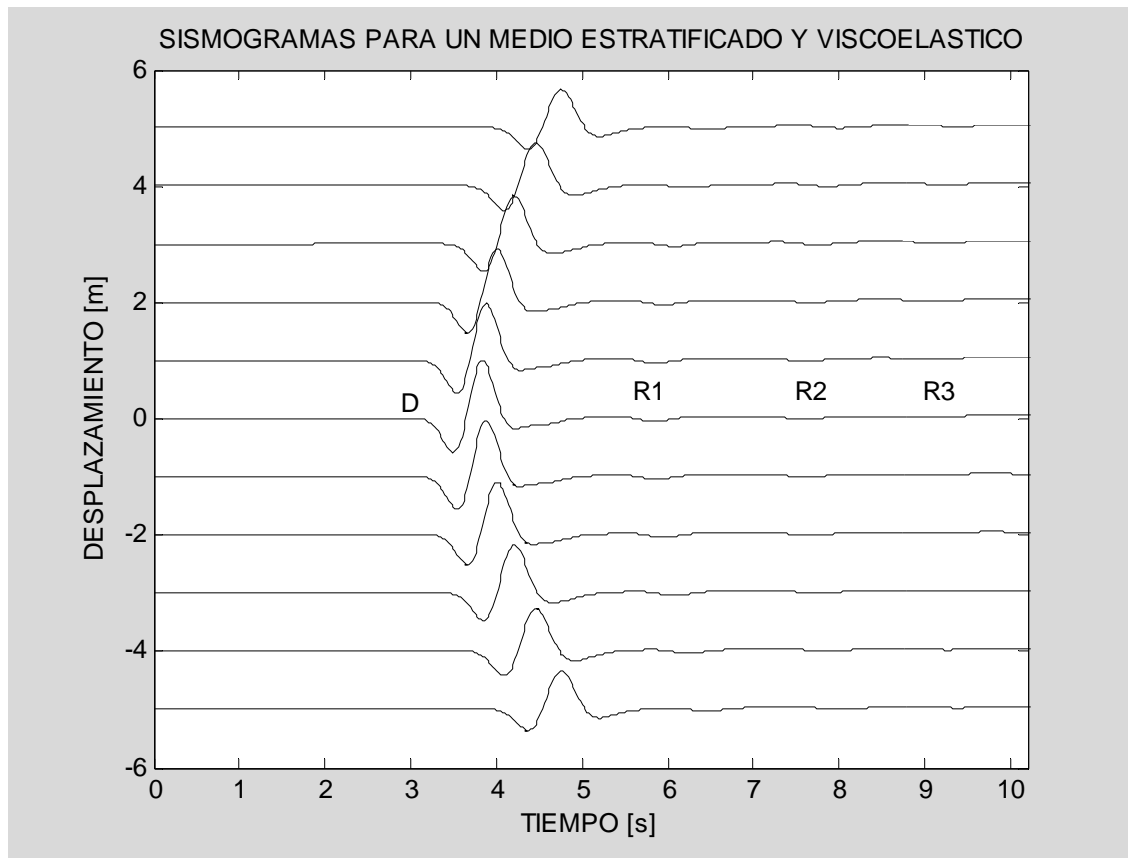


Figura 4.4-1. Sismograma sintético generado para in medio estratificado viscoelástico.

En la imagen se observa el arribo de la onda directa (D) siendo detectada primero por el sensor ubicado al centro del arreglo el cual es el mas proximo a la fuente, las reflexiones R1 ,R2 y R3 no son muy perceptibles dadas las características del medio ya que presenta atenuación, se logran apreciar por una pequeña inflexión en la traza, sin embargo se esperaria que se aprecien cuatro reflexiones como en el caso anterior.



La energía con que llega la onda a los receptores ubicados a los extremos es menor que la que llega a los del centro. La onda es de periodo mas largo que en el caso de un medio elástico. Hay que recordar que en un medio viscoelastico existe una deformacion al ser aplicado un esfuerzo, cuando se deja de aplicar este, la deformacion de la particula regresa progresivamente a un estado sin deformacion la cual no es instantanea como en un medio elástico debido al modulo complejo donde interviene el efecto de almacenamiento de energia. Otra característica notable es la diferencia entre el tamaño de las amplitudes entre la onda directa y las reflejadas siendo estas casi imperceptibles indicando mayor dispersion de la energía..

La figura 4.4-2 muestra la grafica donde se hace la comparacion entre las señales registradas en dos detectores, en la traza con menor tiempo de arribo se presenta el sismograma obtenido en el detector mas cercano arreglo (6), mientras que el arribo posterior muestra la traza para el detector extremo superior (11), el cual es el mas alejado a la fuente. En la figura se observan de manera mas clara las reflexiones y la atenuacion, siendo mayor en la traza mas alejada de la fuente. Al igual que en el caso anterior la moneclatura que esta arriba de la traza es para la del detector número seis.

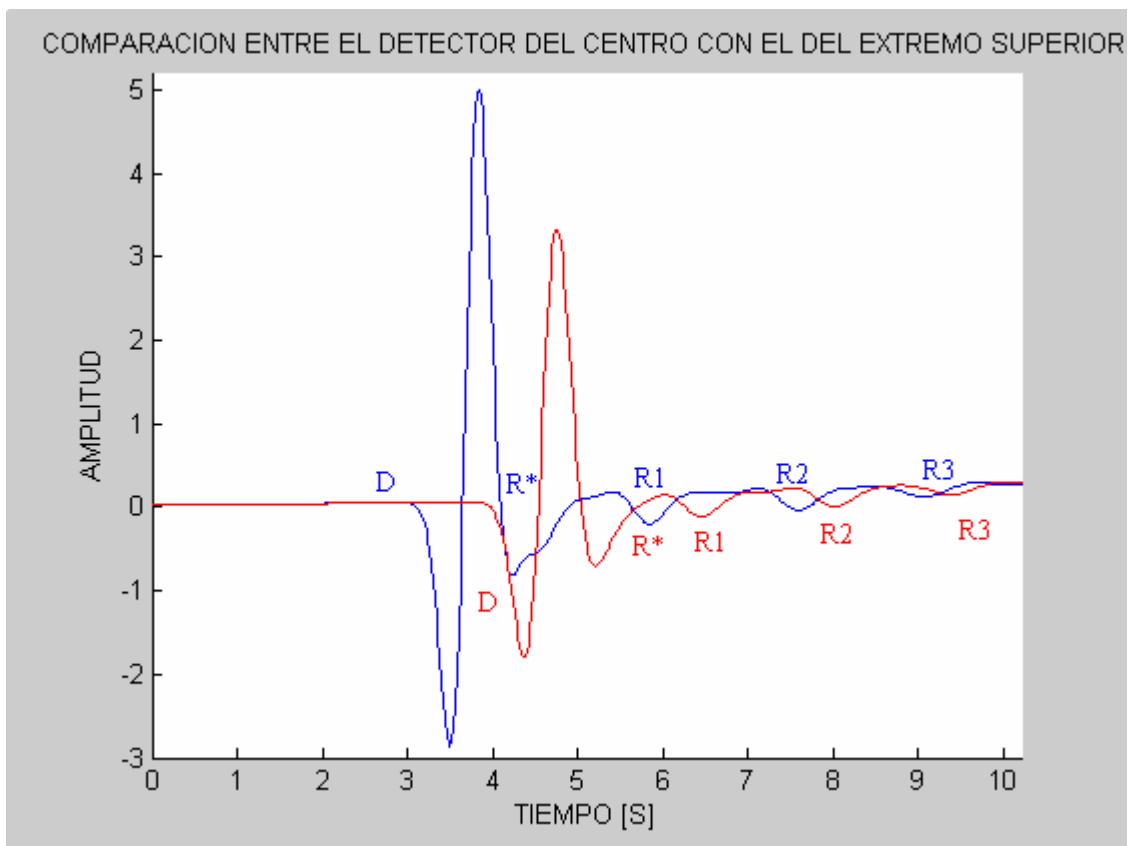


Figura 4.4-2 Comparacion entre los registros de los detectores del centro y el mas extremo para el caso de un medio viscoelástico.

En esta figura se pueden apreciar cuatro reflectores en las trazas, se denota con R\* la reflexion que se detecto instantes despues de la D, por lo tanto se observa un número igual de reflexiones

como en el medio elástico observándose por la inflexión en la traza, sin embargo es casi imperceptible en la mas alejada de la fuente.

#### 4.5 Comparacion entre el medio elástico y el viscoelástico.

Con base en los sismogramas anteriores para los dos medios propuestos y las descripciones dadas es posible notar diferencias en la propagacion de la onda.

- En ambos casos se aprecia el mismo numero de refracciones, sin embargo son mas “marcadas” en el caso del medio elástico, indicando una mayor atenuacion en el caso del medio viscoelastico.

Dadas las propiedades de viscoelásticidad, la atenuacion de la energia es mayor comparada con un medio completamente elástico además hay que tomar en cuenta que la energia se dispersa en cada interface por donde pasa la onda generando una onda reflejada y otra transmitida contribuyendo a una disminucion de la energia contenida en la onda.

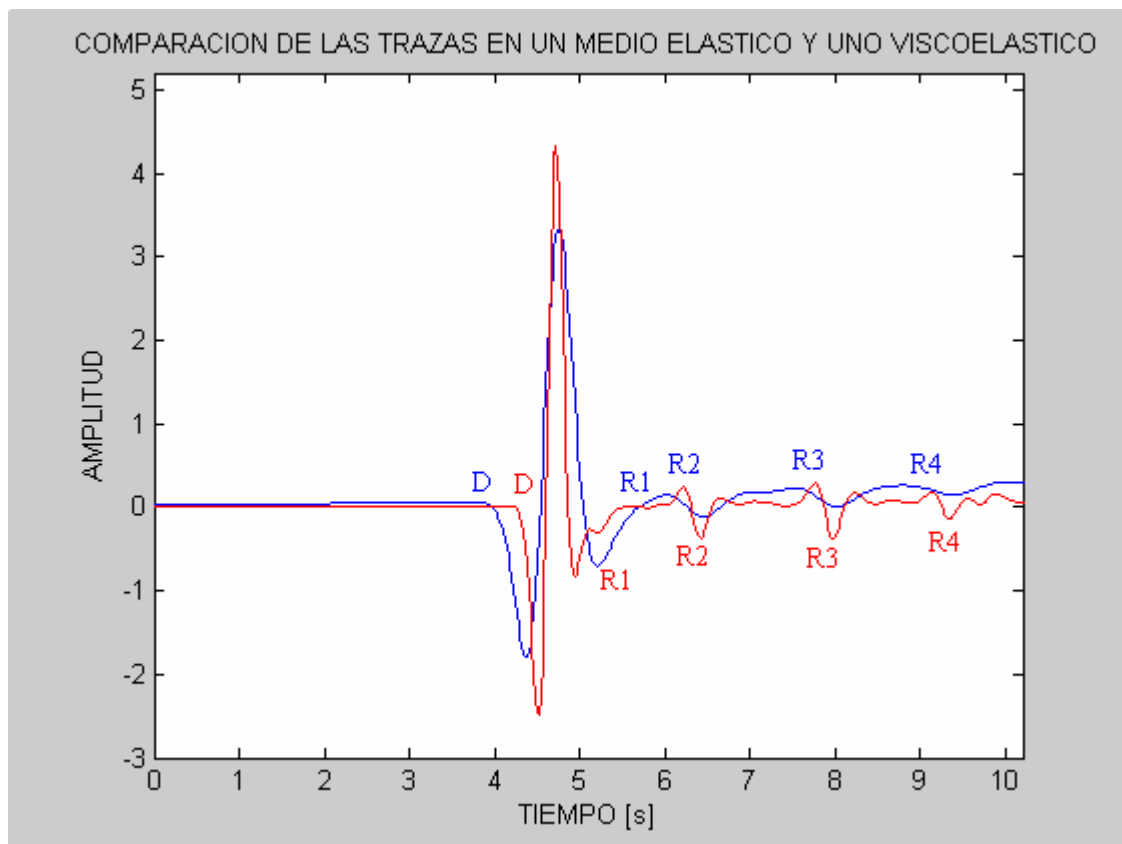


Figura 4.5-1 Comparación entre las trazas obtenidas en el detector central para los casos de un medio elástico (traza en color rojo) y uno viscoelástico (traza en color azul).

- Deformación de las partículas.

De acuerdo con la física que describe la deformación ante un esfuerzo aplicado, para un cuerpo elástico la deformación que sufre es casi instantánea al aplicarse un esfuerzo al igual que deja de deformarse al dejar de ser aplicado el esfuerzo, mientras que para el medio viscoelástico hay una deformación casi instantánea y el material tiende a dejar de deformarse paulatinamente al dejar de ser aplicado el esfuerzo debido al efecto del resorte más el amortiguador en el modelo reológico, lo cual también es visible en el periodo de la onda.

La figura 4.5-1 muestra una comparación entre las trazas que llegan al receptor del centro del arreglo propuesto con las mismas propiedades en los estratos, la traza del medio elástico se muestra en color rojo y la traza del medio viscoelástico en color azul. Se denota con una D al arribo de la onda directa y con R1, R2, R3, y R4 a cada uno de los reflectores de acuerdo al tiempo de arribo. De esta figura aprecia lo siguiente

- La velocidad de la onda en un medio viscoelástico es mayor que en el elástico, esto de acuerdo con lo mencionado en la teoría de la propagación de una onda en un medio viscoelástico, por lo que al aumentar la frecuencia la cual es función de la velocidad esta también aumenta. (Sección 1.6).
- La amplitud de la onda directa para los dos medios es diferente, lo que muestra que las dos ondas contienen una cantidad diferente de energía al arribar al detector, siendo menor el contenido en el medio viscoelástico lo que es coherente con la atenuación del medio, esto también es visible en los reflectores, siendo más perceptibles los del medio elástico.
- Las ondas son de periodo diferente, siendo menor en el medio elástico, por lo tanto el periodo de la onda en el medio viscoelástico muestra el efecto del modelo Kelvin-Voigt con la influencia del resorte y del amortiguador, de acuerdo con el módulo complejo el cual está conformado por una parte de “almacenamiento de la energía” y por otra dando un efecto viscoso .
- Se aprecia más claramente la atenuación de la onda en el medio viscoelástico. Es muy notorio el primer reflector en el caso elástico y su poca apreciación en el viscoelástico, es decir transformó energía más rápidamente durante su trayecto al receptor.
- Los reflectores dos y tres en ambos casos tienen mayor contenido energético que el del tercero.
- Es claro el efecto impuesto al medio viscoelástico por el módulo complejo formado por una parte elástica o de almacenamiento y un elemento que representa la viscosidad y por el factor de calidad.
- La forma de las trazas es semejante al operador empleado para darle forma a la onda generada por la fuente, que en este caso es el pulso de Ricker, por lo tanto el sismograma contiene información de la naturaleza de la fuente.

Hasta el momento no es clara la trayectoria de la onda desde que fue generada por la fuente hasta arribar a los detectores, por lo que aun no se conoce como se han producido los reflectores, en este caso el estudio se complementa con las imágenes del desplazamiento de la onda en diferentes intervalos de tiempo.

## 4.6 Animaciones.

A continuación se presentan imágenes en diferentes intervalos de tiempo producto de la realización de animaciones donde se muestra el desplazamiento de una onda, se consideran los mismos datos empleados para el cálculo de los sismogramas con el objeto de comparar y definir mejor la propagación a través de los medios presentados. El programa con que se realizaron los cálculos para los sismogramas sintéticos es semejante al de las animaciones, tomando en este caso el campo de desplazamientos en diferentes intervalos de profundidad. El graficador se realizó en Matlab 6.5 y se muestra en el anexo E

### 4.6.1 Prueba de transparencia para un medio elástico.

Se muestran las imágenes obtenidas de una animación en un medio elástico, los datos de entrada corresponden a la prueba de transparencia que fueron presentados en la tabla 4.4. Se denota con la letra D a la onda directa.

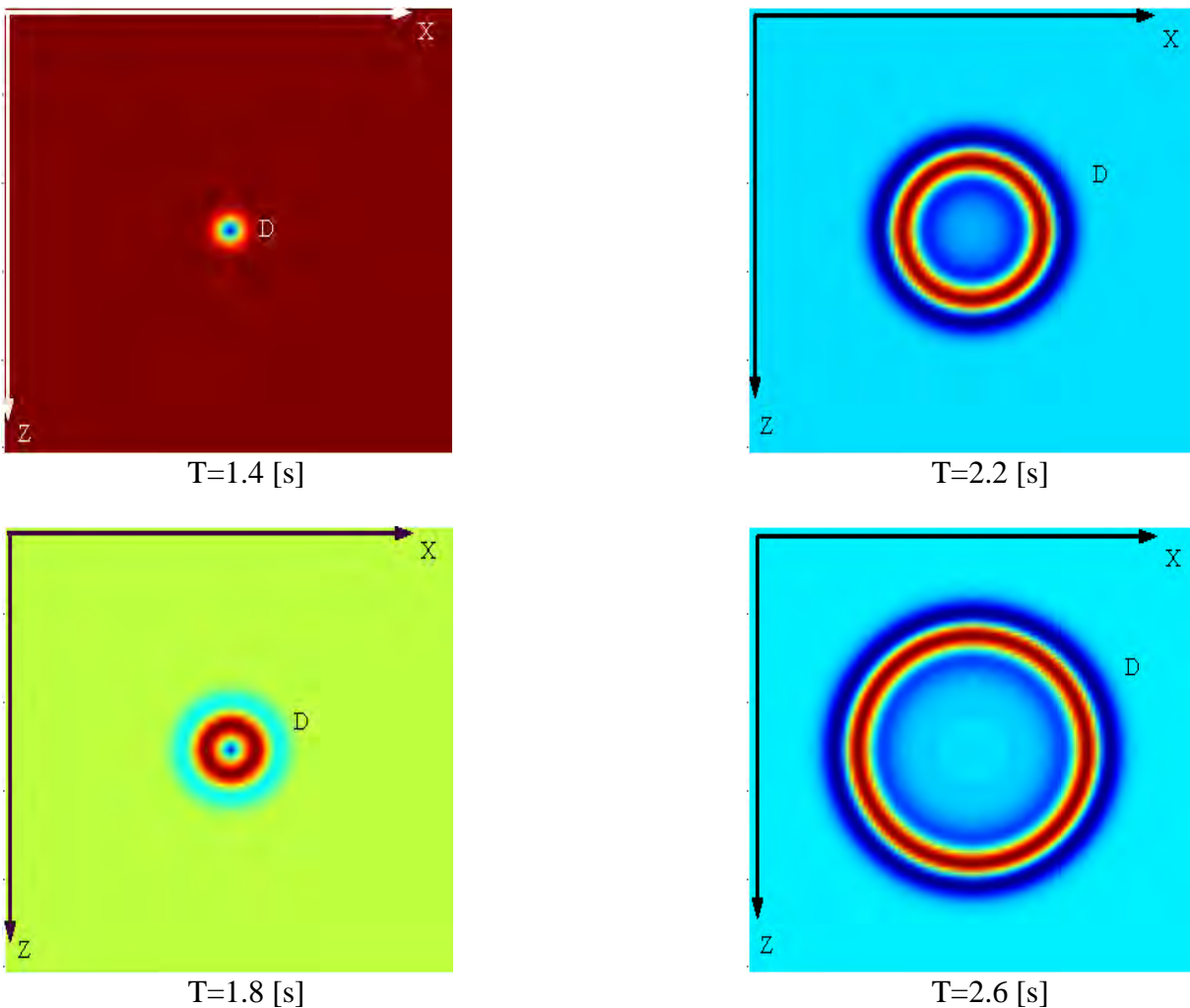
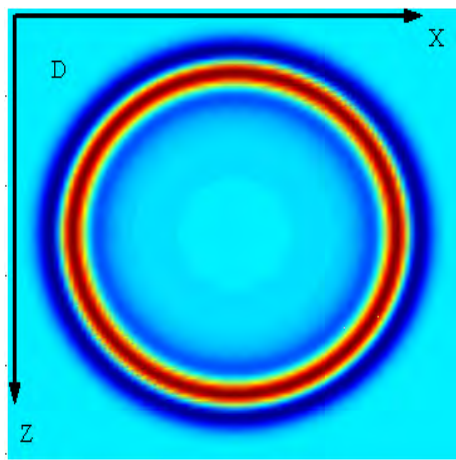
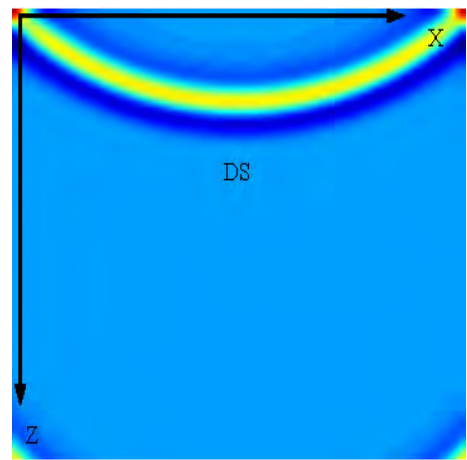


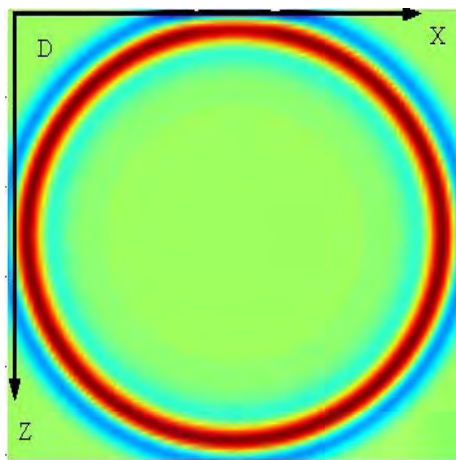
Figura 4.6.1-1a Imágenes en diferentes intervalos de tiempo de la animación con los datos de la prueba de transparencia para un medio elástico.



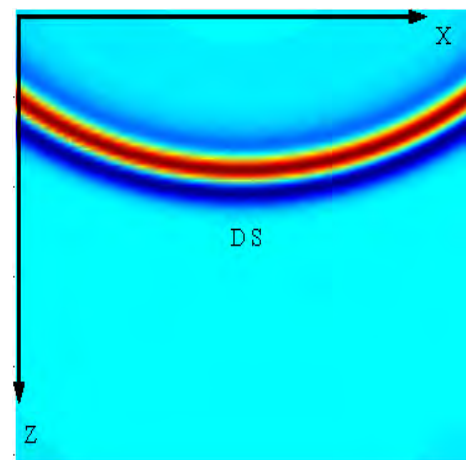
T=3.0 [s]



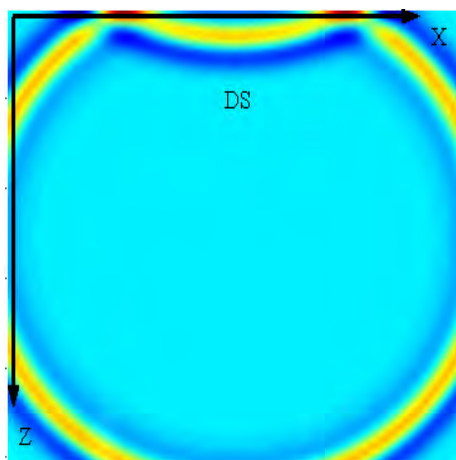
T=4.4 [s]



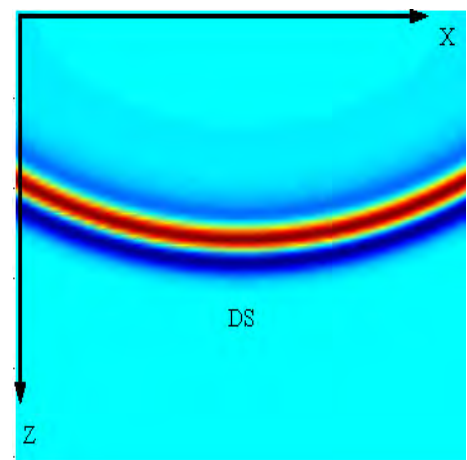
T=3.4 [s]



T=5.0 [s]



T=3.8 [s]



T=5.6 [s]

Figura 4.6.1-1b (Continuación). Imágenes en diferentes intervalos de tiempo de la animación con los datos de la prueba de transparencia para un medio elástico.

Las imágenes son presentadas de acuerdo al tiempo calculado durante la propagación presentando diez cuadros representativos referenciados en un plano XZ, considérese al eje y como ortogonal al plano.

Las tonalidades en rojo presentan los valores máximos mientras que en azul los valores mínimos, estos están referenciados en el eje y. Por lo tanto el carácter impulsivo de la fuente perpendicular a la superficie y a la profundidad es notorio en el primer cuadro ( $T = 1.4$  [s]) donde se produce la onda directa (D).

La fuente se localiza a la mitad tanto del arreglo de los detectores como a profundidad, iniciando su propagación en todas las direcciones perpendiculares a la fuente. Dadas las propiedades iguales del medio en cada uno de los estratos se considera como si la propagación fuera por uno solo, no hay discontinuidades laterales ni cambios en la dirección de propagación de la onda, es decir, la onda se propaga hasta la superficie sin presentar reflexiones ni refracciones por lo que los detectores solo muestran el campo de desplazamientos producto de la onda directa, lo cual se observa en el sismograma sintético de la figura 4.2-1, siendo claramente visible que el arribo de la onda es en diferentes valores de tiempo.

Al llegar la onda directa a la superficie se refleja en esta, iniciando un descenso, esta onda se denota como DS (onda directa reflejada en la superficie libre).

#### 4.6.2 Medio elástico estratificado.

A continuación se presentan las imágenes en diferentes intervalos de tiempo generados por una animación donde se muestra la propagación de una onda en un medio estratificado elástico, tomando en cuenta un contraste de impedancias en cada estrato, las propiedades son las mismas con que se elaboraron los sismogramas sintéticos y se consignan en la tabla 4.5. La nomenclatura se presenta al final de las imágenes en la tabla 4.6.

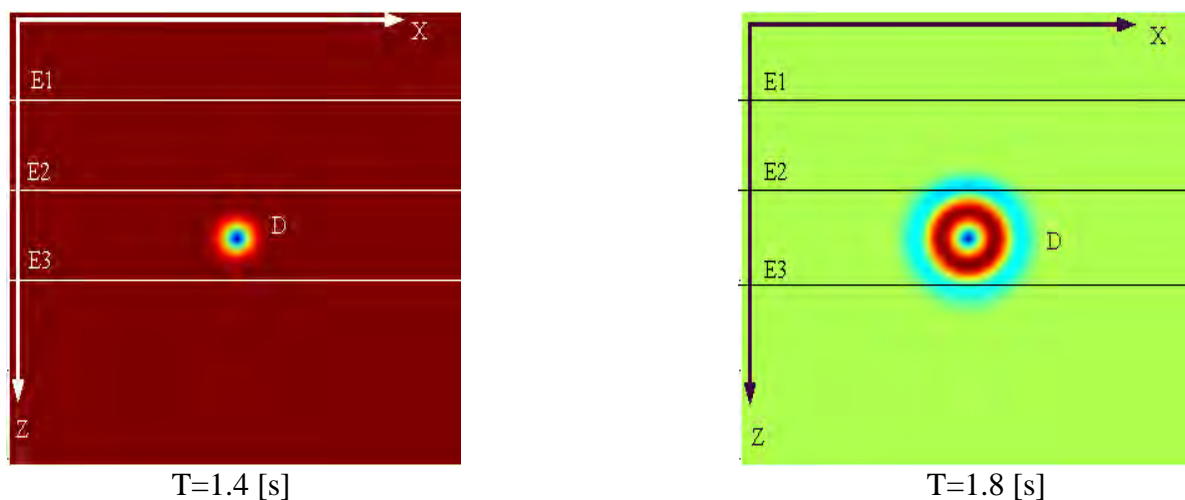
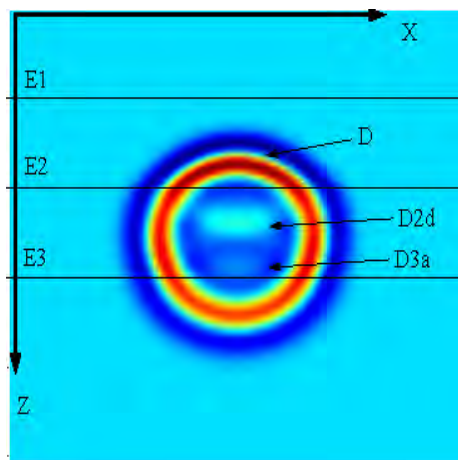
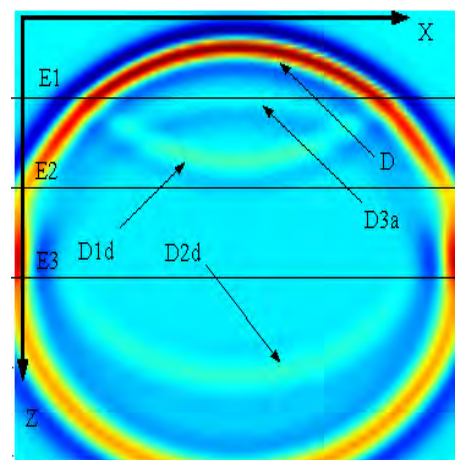


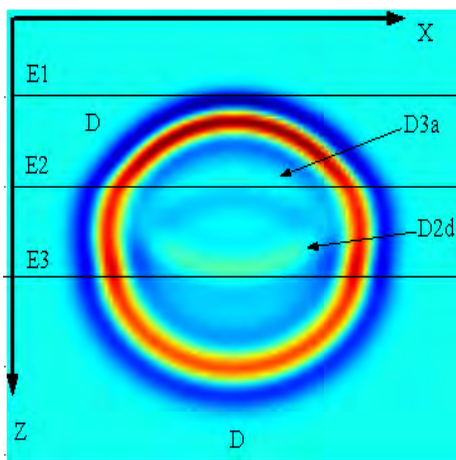
Figura 4.6.2-1a. Imágenes en diferentes instantes de tiempo de la animación realizada para el caso estratificado elástico.



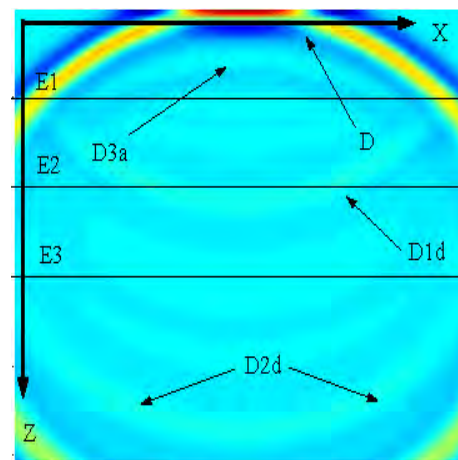
T=2.2 [s]



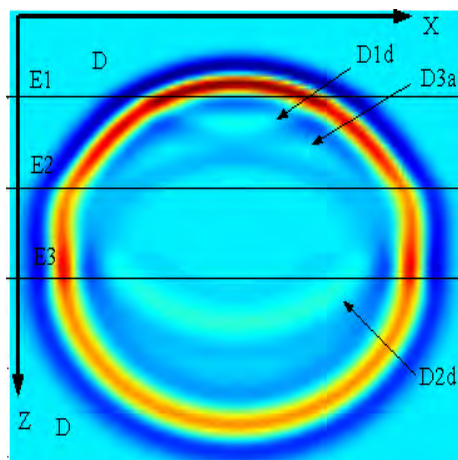
T=3.4 [s]



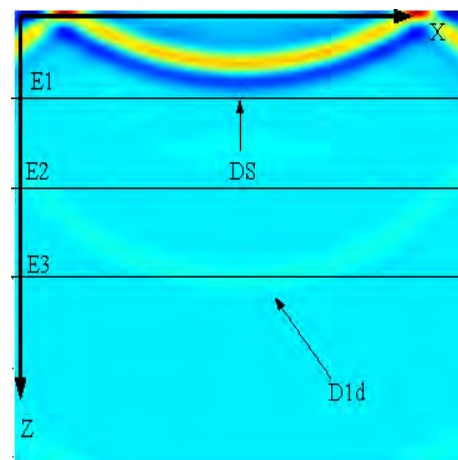
T= 2.6 [s]



T=3.8 [s]



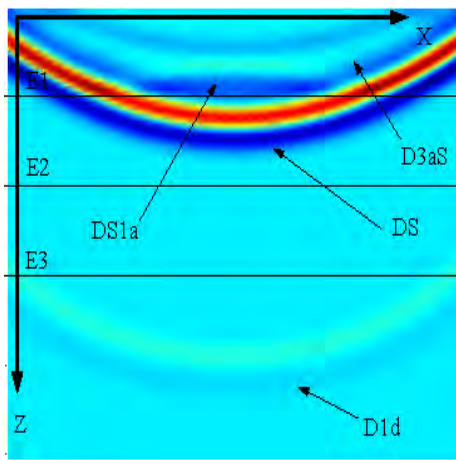
T=3.0 [s]



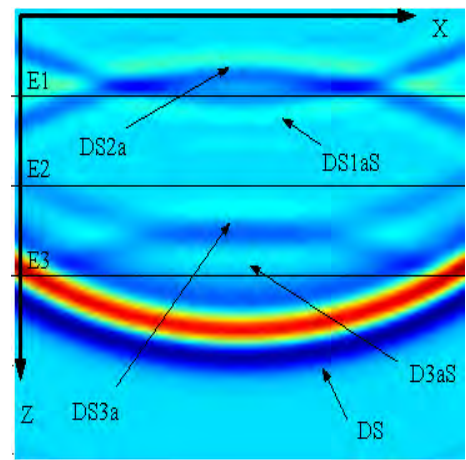
T=4.4 [s]

Figura 4.6.2-1b. (Continuación). Imágenes diferentes instantes de tiempo de la animación realizada para el caso estatificado elástico

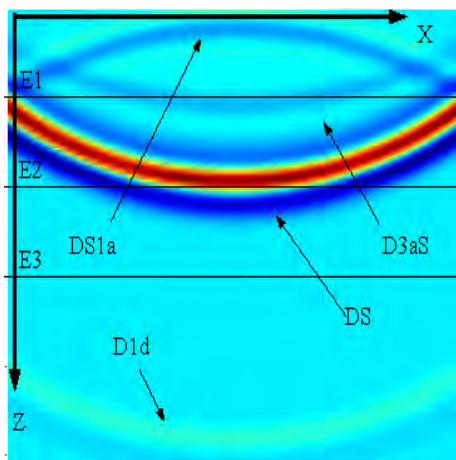




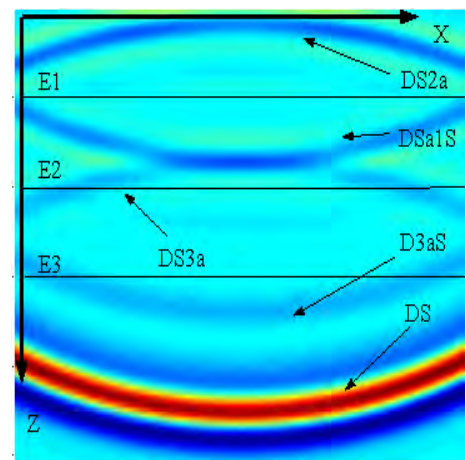
T= 5.0 [s]



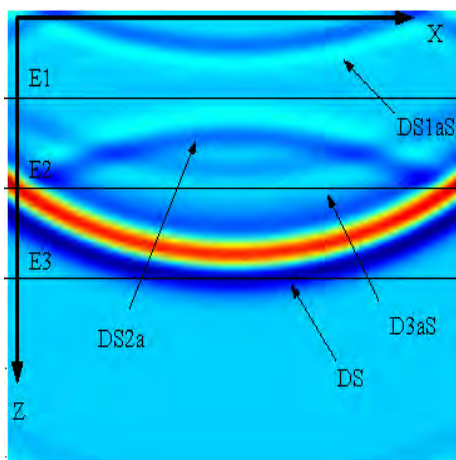
T=6.8 [s]



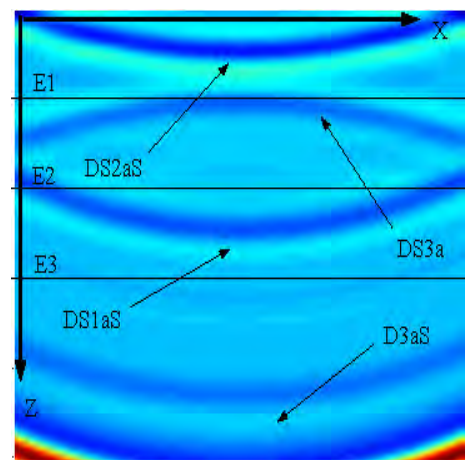
T=5.6 [s]



T= 7.4 [s]



T=6.2 [s]



T=8.0 [s]

Figura 4.6.2-1c. (Continuación). Imágenes diferentes instantes de tiempo de la animación realizada para el caso estratificado elástico.



<b>Notación</b>	<b>Representación</b>
D	Onda Directa
D3a	Onda directa reflejada en la base del tercer estrato y asciende.
D2d	Onda directa reflejada en la base del segundo estrato y desciende.
D1d	Onda directa reflejada en la base del primer estrato y desciende.
DS	Onda directa reflejada en la superficie libre.
D3aS	D3a reflejada en la superficie libre.
DS1a	DS reflejada en la base del primer estrato y asciende.
DS2a	DS reflejada en la base del segundo estrato y asciende.
DS1aS	DS1a que se refleja en la superficie libre.
DS3a	DS reflejada en la base del tercer estrato y asciende.
DS2aS	DS2a reflejada en la superficie libre.
E1, E2, E3	Base del estrato 1,2, y 3 respectivamente

Tabla 4.6 Notación empleada para clasificar los diferentes tipos de ondas generadas durante la propagación de una onda SH a través de un medio estratificado de tres capas sobre un semi-espacio.

Este es el caso de un medio elástico, estratificado y no hay atenuación por lo tanto se puede describir la trayectoria de la onda registrada en las trazas sintéticas presentadas en la figura 4.3-1.

La onda es generada por la fuente localizada al centro del arreglo ( $T = 1.4$  [s]) propagándose desde el tercer estrato describiendo una circunferencia (D), a su paso por cada una de las interfases (E3 y E2) se producen D3a y D2d respectivamente.

La onda directa (D) se transmite y pasa al segundo y primer estratos generando una onda reflejada en cada interfase denotadas como D2d y D1d respectivamente, es decir hay transmisión y reflexión de la onda incidente, estas se propagaran hasta el semi-espacio, cuando D llega a la superficie y se refleja genera una DS e iniciara una trayectoria descendente, ( $T = 2.6, 3.0, 3.4, 3.8$  y  $4.4$  [s]), la onda D3a también llega a la superficie reflejándose en dicha interfase.

En su descenso al pasar al primer estrato genera una onda DS1a debido a una reflexión, esto mismo sucederá en la interfase del segundo y tercer estrato produciéndose DS2a y DS3a respectivamente, las cuales al llegar a la superficie se reflejaran e iniciaran un descenso hasta el semi-espacio.

Con las imágenes de la animación es posible describir la trayectoria de los reflectores R1, R2, R3 y R4 del sismograma sintético de la figura 4.3-1. Por lo tanto el primer arribo corresponde a D, siguiéndole D3a, posteriormente arriban DS1a, DS2a y Ds3a.

Por lo tanto las ondas sísmicas al ser detectadas en la superficie describen el medio por el cual se propagaron desde que fueron generadas por la fuente, en este caso es un medio de tres capas paralelas.

Al pasar la onda en cada una de las fronteras es evidente como cambia la trayectoria de la onda por el contraste de impedancias, de acuerdo con la Ley de Snell, sin que se presente la forma de una circunferencia como en el caso de la prueba de transparencia, de tal manera que cambia el

ángulo de la onda incidente y por lo tanto cambia el número de onda, esto prueba una vez más la eficiencia de la matriz global.

### 4.6.3 Medio viscoelástico estratificado.

A continuación se presentan las imágenes en diferentes intervalos de tiempo en que se propaga una onda generada de acuerdo con el arreglo antes descrito, este caso corresponde a la animación realizada para un medio estratificado y viscoelástico, las propiedades del medio están dadas en la tabla 4.5.

Cada una de las imágenes tiene como referencia un plano XZ y la notación empleada para cada una de las ondas observadas es descrita en la tabla 4.6.

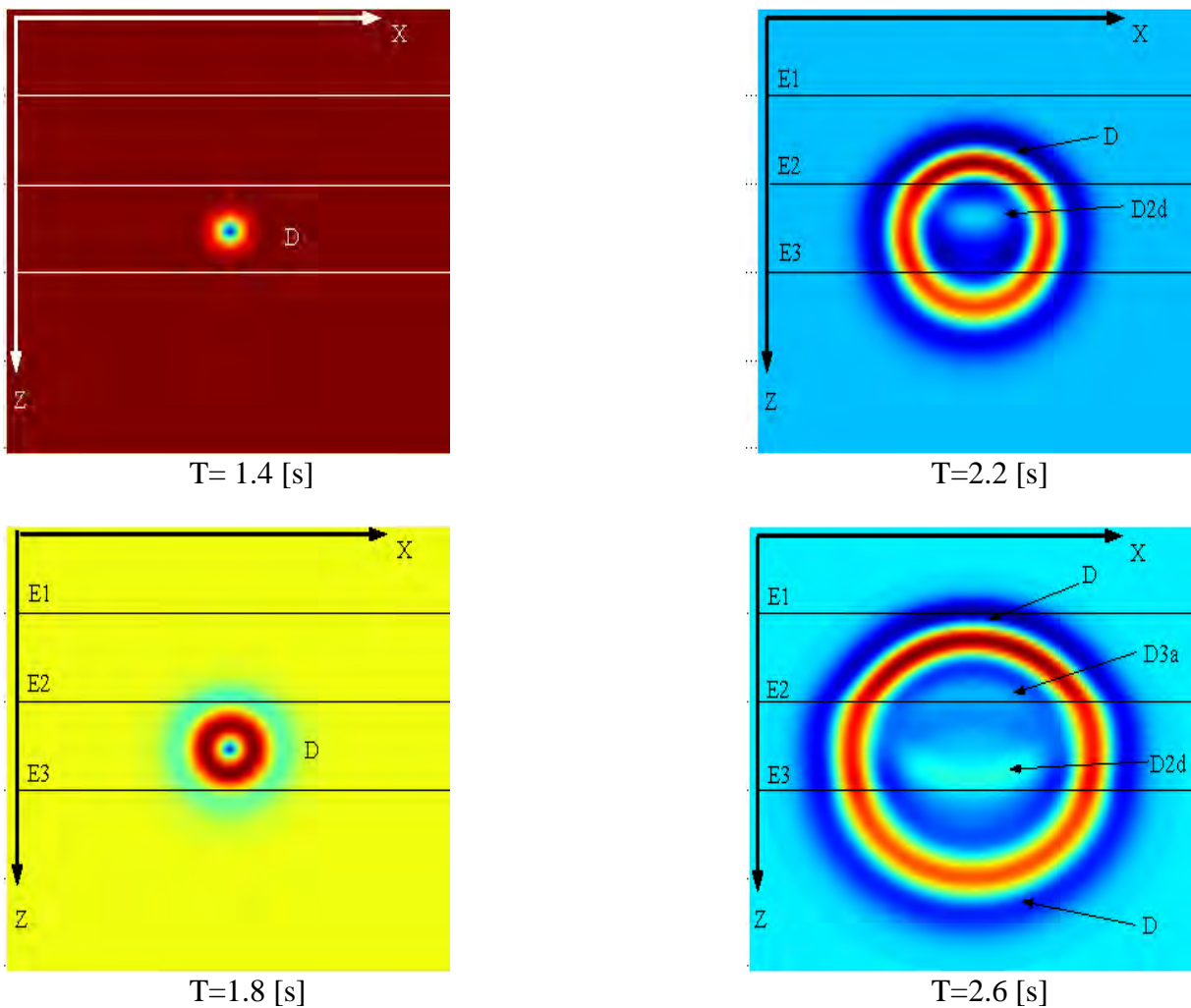
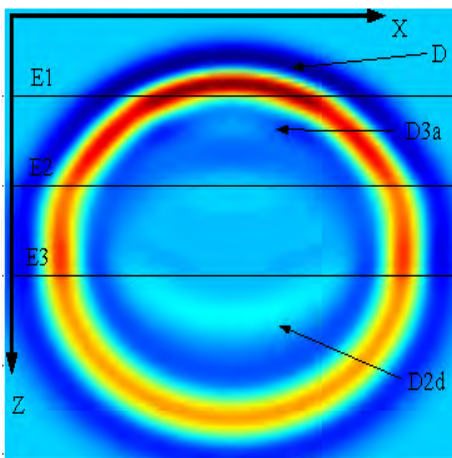
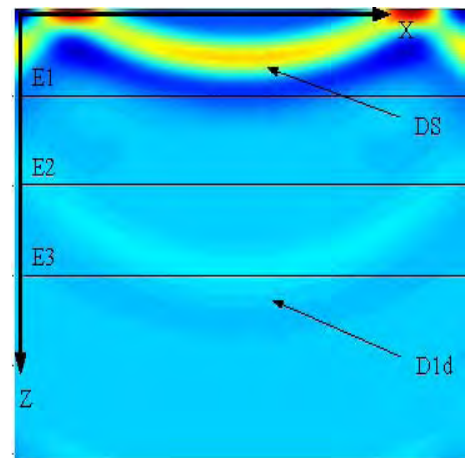


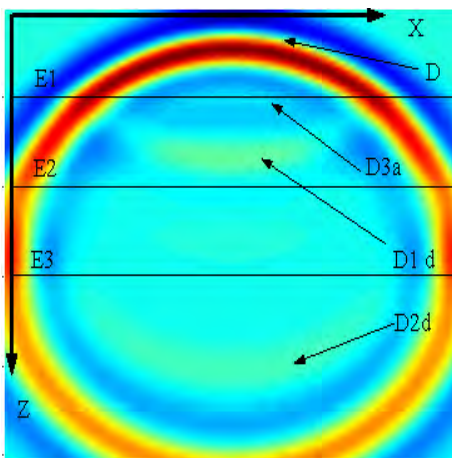
Figura 4.6.3-1a. Imágenes en diferentes intervalos de tiempo de la animación realizada para un medio estratificado y viscoelástico.



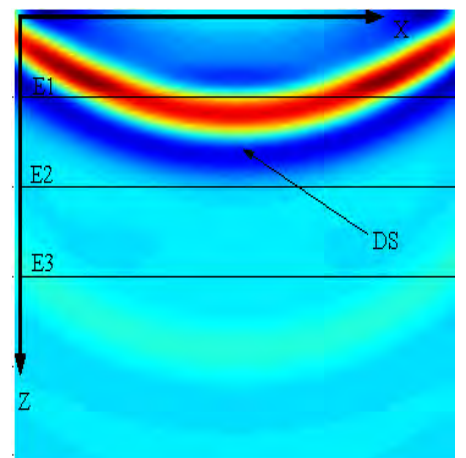
T=3.0 [s]



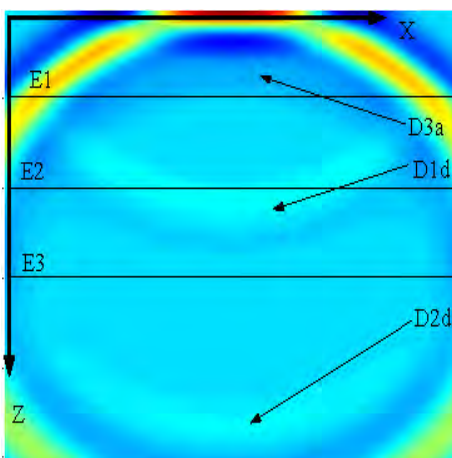
T=4.4 [s]



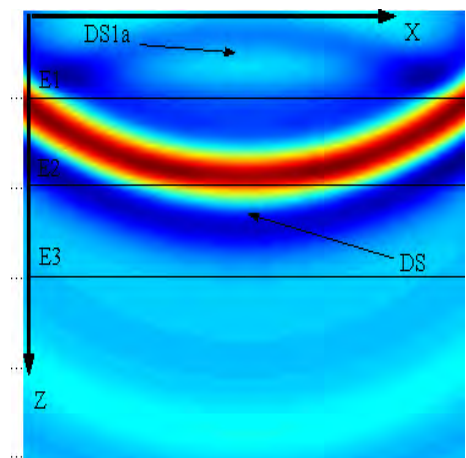
T=3.4 [s]



T=5.0 [s]



T=3.8[s]



T=5.6 [s]

Figura 4.6.3-2b (Continuación). Imágenes en diferentes intervalos de tiempo de la animación realizada para un medio estratificado y viscoelástico.

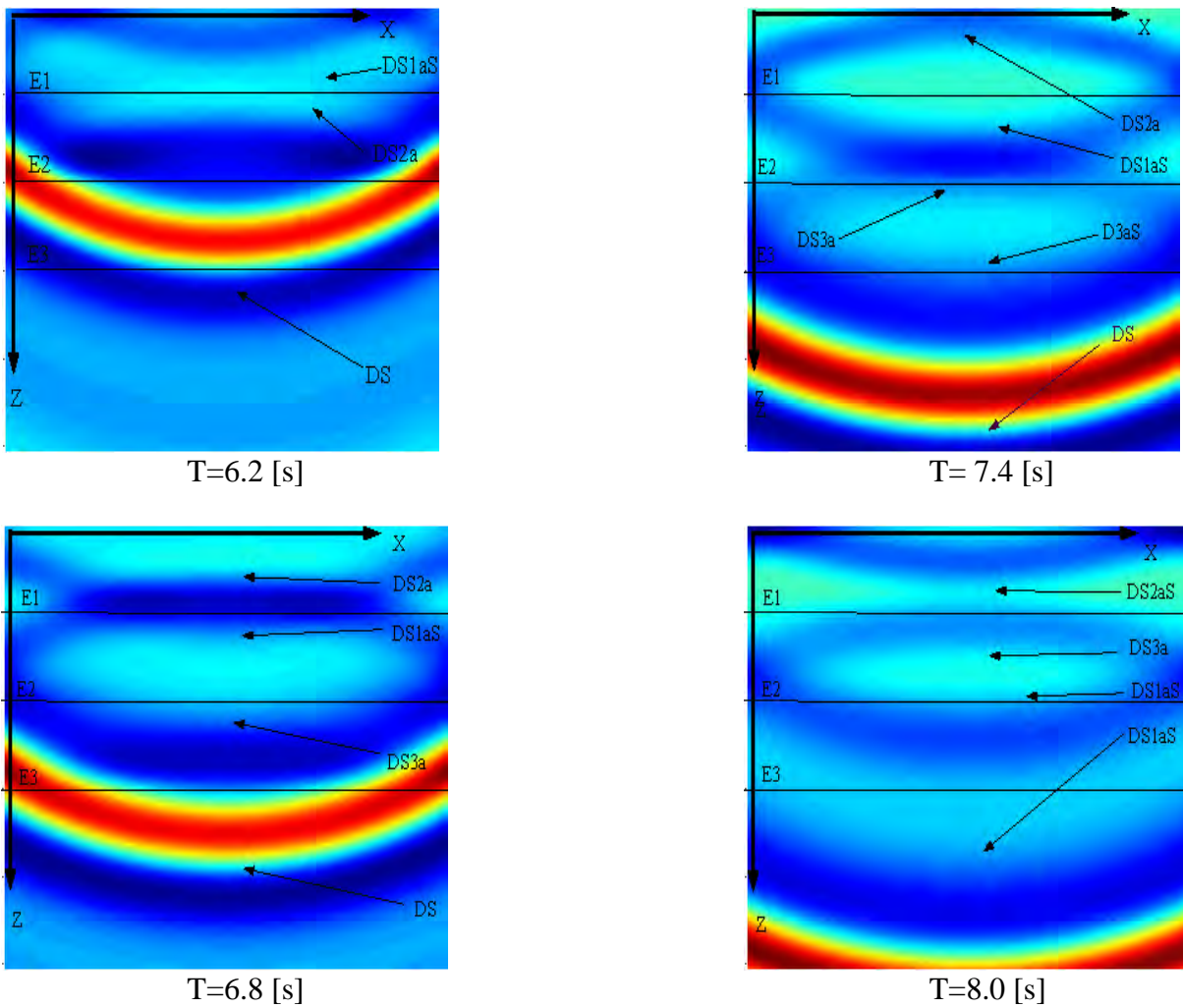


Figura 4.6.3-1c (Continuación). Imágenes en diferentes intervalos de tiempo de la animación para el caso estratificado viscoelástico.

Las imágenes presentadas están en el mismo instante de tiempo que en el caso anterior.

Este medio presenta atenuación por lo que la energía contenida en la onda va disminuyendo en su trayecto en cada estrato así como entre sus interfases, por lo tanto la energía contenida en una onda reflejada y en la onda transmitida es menor que en el caso del medio elástico.

Con la ayuda de las imágenes anteriores es posible llevar a cabo una descripción de la trayectoria de la onda presentada en los sismogramas correspondientes.

Tomando como referencia la figura 4.4-2, el primer arribo corresponde a la onda directa (D), mientras que R\*, R1, R2, R3 son producidos en ese orden por D3aS, DS1a, DS2a y DS3a.

Por lo tanto al igual que en el caso elástico la trayectoria es la misma y se obtuvo una descripción de un medio estratificado de capas paralelas.

El contraste de impedancias en cada uno de los estratos hace que al incidir la onda cambie el ángulo de la trayectoria como lo indica la Ley de Snell.

Mediante estas imágenes no es posible llevar a cabo una comparación entre la velocidad a la que se desplaza la onda en los medio presentados, teniendo mayor utilidad en este caso el sismograma sintético.

Por otro lado como se observo en la figura 4.5-1 la onda en el medio viscoelástico es de mayor periodo, por lo tanto tiene mayor longitud de onda, esto se es apreciable en las imágenes en donde al incidir una onda descendente con una ascendente no se logran apreciar tan claramente las fases, por ejemplo en las imágenes obtenidas en los instantes de tiempo  $T=6.2, 6.8, 7.4, 8.0$  [s], es decir hay un efecto viscoso.

## 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

La conjunción de las técnicas de Número de Onda Discreto y de la Matriz Global nos ofrecen un método alternativo para la propagación de ondas en un medio estratificado, en este caso para ondas de tipo SH, en donde la base para obtener el desplazamiento es la solución a la ecuación de onda.

Con base en los objetivos planteados y los resultados obtenidos se puede concluir lo siguiente:

- a) En este trabajo se calculó la propagación de ondas tipo SH generadas por una fuente puntual ubicada en el tercer estrato. Estos cálculos son presentados mediante sismogramas sintéticos e imágenes en diferentes intervalos de tiempo obtenidas de una animación.
- b) Con las técnicas de Número de Onda Discreto y de la Matriz Global se obtuvieron sismogramas sintéticos en un medio estratificado formado por capas elásticas, homogéneas e isótropas en un espacio 2D.
- c) Se reconoce que en superficie libre de esfuerzos los sismogramas tienen un error aceptable y a medida que nos acercamos a la vecindad de la fuente este aumenta, debido a la naturaleza del desarrollo de la fuente mediante ondas planas y al número de términos empleados para la suma.
- d) Se identificaron los elementos de la matriz global para el caso de ondas SH y se dieron las bases para construir una matriz de N capas.
- e) Tanto para el medio elástico como para el medio viscoelástico, los sismogramas sintéticos y las imágenes de las animaciones permitieron hacer una descripción de la trayectoria de la onda desde que es generada y del medio de propagación y de la base de la naturaleza de la fuente.
- f) Dado que una limitante es el método para invertir la matriz global, es necesario contar con un programa ó método adecuado para evitar que la matriz se vuelva singular, ya que al ser los elementos que la conforman muy pequeños pero mayores a cero ocasionalmente impiden obtener la matriz inversa.
- g) El programa se realizo para calcular el campo de desplazamientos en un medio de tres capas sobre un semi-espacio en superficie libre y a diferentes profundidades, sin embargo se abre a la posibilidad de que pueda ser extendido su uso con diferentes parámetros como lo son el numero de estratos, variación en cuanto a las propiedades del medio, topografía, tipo y ubicación de la fuente así como del tipo de ondas sísmicas.
- h) El método puede ser empleado para realizar comparaciones con otras soluciones exactas.

- i) De acuerdo con los objetivos y alcances planteados se cumplió con lo establecido, y se dieron las bases para trabajos posteriores a favor de la mejora y extensión de lo aquí expuesto.

El programa se formuló para calcular el desplazamiento para una fuente puntual y un medio de propagación no tan complejo como lo es la estructura real de la Tierra o de un determinado sitio, por lo que su uso en un futuro puede ser extendido al modelado de una fuente mas real utilizando un doble par equivalente por ejemplo ó con estructuras geológicas más complejas ó considerando heterogeneidades o el amortiguamiento del suelo, además de considerar periodos de onda más grandes de los aquí presentados.

El método aquí expuesto puede ser combinado con otras técnicas numéricas.

Algunas aplicaciones en que puede ser empleado el programa presentado son:

En el análisis del movimiento del terreno, la función de transferencia permite la obtención de parámetros tales como desplazamiento, velocidad, aceleración o tracciones.

Dado que se obtiene la función de transferencia en un medio entre la superficie libre y el semi-espacio, es posible realizar la multiplicación de esta con el dato de un sismo real en el dominio de las frecuencias, con lo cual es posible obtener una solución aproximada del un espectro de diseño para un sitio determinado.

Además puede ser usado para obtener una aproximación del efecto de sitio y determinar zonas de riesgo ante la ocurrencia de un terremoto y plasmar la información en un mapa de riesgo sísmico o para llevar a cabo una microzonación sísmica.

Por otro lado el programa es factible para ejemplificar la propagación de ondas sísmicas o en refracción sísmica con fines didácticos en asignaturas de la carrera de ingeniero geofísico.

## REFERENCIAS.

### ARTICULOS.

Ávila, Rafael. Palencia, Víctor. Sánchez Sesma, Francisco J. (2002), “El VPM: Una técnica variacional para simular la respuesta sísmica de valles aluviales someros”, *Revista de Ingeniería Sísmica*, No. 67, pp. 79-100.

Bouchon Michel and Aki Keiiti (1977), “Discrete Wave Number representation of seismic –source wave fields”. *Bull. Of Seismological Soc. Am.* Vol. 67, No. 2, pp 259-277.

Bouchon Michel (1979), “Discrete Wave Number representation of elastic wave fields in three-space dimensions”, *Journal of geophysical research*, Vol. 84, pp. 3609-3614.

Bouchon Michel (2003), “A review of the Discrete Wave Number method”. *Pure appl. Geophys.* 160. pp 445-465.

Gaffet y Bouchon (1989), “Effects of two dimensional topographies using the Discrete Wavenumber-boundary integral equation method in P-SV cases”, *J Acoust. Soc. Am.* 85 (6), pp. 2277-2283.

Luzon, F. Palencia V, J. Morales, J, Sánchez Sesma, F, J. García, J, M. (2002), “ Evaluation of site effects in sedimentary basins”, *Física de la Tierra*, 14, pp 183-214.

Ota Kulhánek, “Anatomy of seismograms”, *Developments in Solid Earth Geophysics* 18, Elsevier, Amsterdam, 1990, 188 pp.

Schimidt, Henrik y Tango, Gerard, (1986), “Efficient global matrix approach to the computation of synthetic seismograms” *Geophys. J. R. astr. Soc.* Vol. 84, pp. 331-359.

Valenzuela Raúl. Pacheco, Javier. Pereira, José. Estrada. Jorge. Pérez, Jesús. Cruz, José. Baturan, Darío. Cárdenas, Arturo. Santiago, José, (2007), “ The seismic and hydroacoustic stations on Socorro Island: Early Results”, *Geofísica Internacional*, Vol. 46, No. 1, pp. 3-18.

Yun-fu, Lin and Bouchon Michel (2004), “Discrete Wavenumber solutions to numerical propagation in piecewise heterogeneous media – I. Theory of two dimensional SH Case” *Geophys J. Int.* 157, pp 481-498.

Yves-Pierce. Bard, Bouchon Michel, (1980), “The seismic response of sediment-filled valleys Part 1. The case of incident SH waves”. *Bull. Of Seismology Soc. Am.* Vol 70. No. 4. pp 1263-1286.

Yves-Pierce. Bard, Bouchon Michel, (1980), “The seismic response of sediment-filled valleys Part 2. The case of incident P and SV waves”. *Bull. Of Seismology Soc. Am.* Vol 70. No. 5. pp 1921-1941.

### LIBROS.

Carcione, Jose, “Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic , Anelastic porous and Electromagnetic media”, *HandBook of Geophysical Exploration, Section I Seismic Exploration*, 2007.

Ewing, W.M. Jardetzky, W.S. Pres, F. “Elastic Waves in Layered Media”, *Mc. Graw Hill*, New York, 1957.

Keiiti, Aki. Paul, Richards. “Quantitative Seismology”, *University Science Books*, Tomo 1 y 2, 2002.

Kennett, Brian, “The Seismic Wavefield, Vol 1: Introduction and Theoretical Development”, *Cambridge University Press*, EUA, 2001



L. Enzo, "Mecánica del Medio Continuo", Limusa, México, 1977.

Nava, Alejandro, "Terremotos", Fondo de Cultura Económica, 1987

P. Jose, "Elastic Wave Propagation and Generation in Seismology", Cambridge University, 2003

Seth, S, W, Michel, "An Introduction to Sesimology Earthquakes and Earth Structure", Blackwell Publishing, 2003.

Udias, Agustin, "Principles of Seismology", Cambridge, 1999

Yuang-Cheng, Fung, "A First Course in Continuum Mechanics", 1994.

## INDICE DE FIGURAS.

1.1-1 Esquema del desplazamiento de una onda primaria u onda P.

1.1-2 Esquema del desplazamiento de una onda S o secundaria.

1.2-1 Esquema del desplazamiento de una onda tipo Rayleigh.

1.2-2 Esquema del desplazamiento de la partículas ante el paso de una onda tipo Love.

1.3-1 Grafica de esfuerzo contra tiempo y de deformación contra tiempo, al aplicarse un esfuerzo se produce una deformación proporcional a dicho esfuerzo.

1.3.1-1 Cambio de longitud entre dos puntos internos debido a fuerzas externas.

1.3.1-2 Cambio angular entre dos puntos contenidos en un cuerpo debido a fuerzas externas aplicadas.

1.4-1 Desplazamiento de un frente de onda plano de tipo SH, visto en un plano XZ con respecto al tiempo (caso bi-dimensional).

4.1.1-1 Esquema de la fuente de cizalla isótropa alojada en el eje y y dividida en dos partes iguales.

1.5-1 Esquema representando a la Ley de Snell para una onda de tipo SH.

1.6-1 Esquema de la representación física del modelo mecánico Kelvin-Voigt compuesto por un resorte y un amortiguador conectados en paralelo.

Figura 1.6.2. Graficas de Velocidad de Fase contra frecuencia angular y de factor de disipacion contra frecuencia angular para el modelo viscoelastico Kelvin-Voigt (Carcione, ).

1.6-3 Graficas de esfuerzo contra tiempo y de deformación contra tiempo para un medio viscoelástico de acuerdo con el modelo Kelvin-Voigt.

2.4.1-1 Esquema de un sistema donde la señal de entrada se va a transformar mediante una serie de cálculos en otra señal de salida.

2.4.1-2 Pulso de Ricker empleado como excitación temporal de la fuente en el dominio del tiempo,  $t_p=0.5$  [s] y  $t_s=1.5$  [s].

2.4.1-3 Pulso de Ricker empleado como excitación temporal representado en el dominio de las frecuencias.

2.4.1-4 Esquema del barrido que se hace para el cálculo del desplazamiento a diferentes profundidades.

2.4.1-5 Diagrama de flujo mostrando las operaciones que se realizan para elaborar la animación de la propagación de una onda de tipo SH.

3.1-1 Representación grafica del método del Número de Onda Discreto. L es la distancia entre las fuentes ficticias y d es la distancia entre el receptor y la fuente.

3.2-1 Esquema general de la distribución de desplazamientos para las ondas planas de tipo SH en cada estrato hasta el semi-espacio.

4.1-1 Esquema del medio de propagación y del arreglo de los receptores y de la fuente en un semi-espacio para la comparación entre la solución exacta y con el NOD.

4.1-2a. Comparación de la solución exacta con el NOD (izq.) y de error absoluto (der.) entre la solución exacta y la solución con el NOD.

4.1-2b (Continuación). Comparación de la solución exacta con el NOD (izq.) y de error absoluto (der.) entre la solución exacta y la solución con el NOD.

4.1-2c (Continuación). Comparación de la solución exacta con el NOD (izq.) y de error absoluto (der.) entre la solución exacta y la solución con el NOD.

4.1-3 Esquema del arreglo de los receptores a 3000 metros de profundidad y de la fuente para la comparación entre la solución exacta y la del NOD.

- 4.1-4a. Graficas donde se muestra la comparación entre la solución exacta y la solución con el NOD (izq.) y el error absoluto entre ambas soluciones (der.). Para receptores a 3000 metros de profundidad.
- 4.1-4b (Continuación). Graficas donde se muestra la comparación entre la solución exacta y la solución con el NOD (izq.) y el error absoluto entre ambas soluciones (der.). Para receptores a 3000 metros de profundidad.
- 4.1-4c (Continuación). Graficas donde se muestra la comparación entre la solución exacta y la solución con el NOD (izq.) y el error absoluto entre ambas soluciones (der.). Para receptores a 3000 metros de profundidad.
- 4.1-5 Esquema del arreglo de los receptores a una profundidad de 5900 metros y de la fuente para la comparación entre la solución del NOD y la exacta.
- 4.1-6a. Graficas de comparación entre la solución exacta y con el NOD para cuando los receptores se encuentran a 5900 metros de profundidad (izq.) y grafica del error absoluto (der.).
- 4.1-6b (Continuación). Graficas de comparación entre la solución exacta y con el NOD para cuando los receptores se encuentran a 5900 metros de profundidad (izq.) y grafica del error absoluto (der.).
- 4.1-6c (Continuación). Graficas de comparación entre la solución exacta y con el NOD para cuando los receptores se encuentran a 5900 metros de profundidad (izq.) y grafica del error absoluto (der.).
- 4.2-1 Sismograma sintético de la prueba de transparencia.
- 4.3-1 Sismograma sintético para un medio estratificado y elástico con contraste de impedancias en cada uno de los estratos.
- 4.3-2 Comparación entre la trazas del detector del centro del arreglo y del detector ubicado al extremo del arreglo
- 4.4-1 Sismograma sintético generado para un medio estratificado viscoelástico.
- 4.5-1 Comparación entre las trazas obtenidas en el detector central para los casos de un medio elástico (traza en color rojo) y uno viscoelástico (traza en color azul).
- 4.6.1-1a Imágenes en diferentes intervalos de tiempo de la animación con los datos de la prueba de transparencia para un medio elástico.
- 4.6.1-1b (Continuación). Imágenes en diferentes intervalos de tiempo de la animación con los datos de la prueba de transparencia para un medio elástico.
- 4.6.2-1a. Imágenes diferentes instantes de tiempo de la animación realizada para el caso estatificado elástico.
- 4.6.2-1b (Continuación). Imágenes diferentes instantes de tiempo de la animación realizada para el caso estatificado elástico.
- 4.6.2-1c (Continuación). Imágenes diferentes instantes de tiempo de la animación realizada para el caso estatificado elástico.
- 4.6.3-1a. Imágenes en diferentes intervalos de tiempo de la animación realizada para un medio estratificado y viscoelástico.
- 4.6.3-1b (Continuación). Imágenes en diferentes intervalos de tiempo de la animación realizada para un medio estratificado y viscoelástico.
- 4.6.3-1c (Continuación). Imágenes en diferentes intervalos de tiempo de la animación realizada para un medio estratificado y viscoelástico.

## **INDICE DE TABLAS**

- 4.1 Valor máximo del error calculado en cada una de las trazas en la comparación entre la solución exacta y la solución con el NOD.
- 4.2 Valor máximo del error calculado en cada una de las trazas en la comparación entre la solución exacta y la solución con el NOD para receptores ubicados a 3000 metros de profundidad.
- 4.3 Valor máximo del error calculado en cada una de las trazas en la comparación entre la solución exacta y la solución con el NOD para receptores ubicados a 5900 metros de profundidad.
- 4.4 Propiedades de los estratos para la prueba de transparencia.
- 4.5 Propiedades físicas de los estratos para un medio elástico y uno viscoelástico.
- 4.6 Notación empleada para distinguir los diferentes tipos de ondas generadas durante la propagación de una onda SH a través de un medio estratificado de tres capas sobre un semi-espacio.

## ANEXO A

### Desarrollo matemático de las ecuaciones de continuidad, de movimiento, de Navier y de onda.

#### A.1 Ecuación de continuidad.

La masa contenida en un dominio de volumen  $V$  en un tiempo  $t$  esta dada por:

$$m = \int_V \rho dv \quad \text{A.1.1}$$

Donde  $\rho = \rho(x_i, t)$  es la densidad localizada en la posición  $\mathbf{x}$  en sus tres componentes ortogonales en un tiempo  $t$ .

La conservación de la masa requiere que  $Dm/Dt = 0$ , esta última es la llamada derivada material, la cual es una razón de cambio de una función que depende del tiempo y del espacio, a continuación se presenta su desarrollo matemático.

#### A.1.2 Derivada material.

Sea  $I(t)$  una integral de volumen de una función continua y diferenciable  $A(x_i, t)$  definida sobre un dominio espacial  $V(x_1, x_2, x_3, t)$

$$I(t) = \int_V A(x_i, t) dV \quad \text{A.1.2.1}$$

$\frac{DI}{Dt}$  es la razón de cambio de I.

De acuerdo con la definición de límite.

$$\frac{DI}{Dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left[ \int_{V'} A(x_i, t + dt) dV' - \int_V A(x_i, t) dt \right] \quad \text{A.1.2.2}$$

Donde:  $\Delta V = V' - V \Rightarrow V' = \Delta V + V$

Sustituyendo:

$$\frac{DI}{Dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left[ \int_V A(x_i, t + dt) dV + \int_{\Delta V} A(x_i, t + dt) dV - \int_V A(x_i, t) dV \right] \quad \text{A.1.2.3}$$

$$\frac{DI}{Dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{dt} \int_V [A(x_i, t + \Delta t) - A(x_i, t)] dV + \frac{1}{dt} \int_{\Delta V} A(x_i, t + dt) dV \right\} \quad \text{A.1.2.3}$$

Analizando el segundo termino aplicando el teorema de Gauss:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta V} A(x_i, t + \Delta t) dV = \int_S A(x_i, t) v_i \cdot n_i dS \quad \text{A.1.2.4}$$

Donde  $v_i$  es la velocidad de la partícula en función de su posición en un material y  $n_i$  su vector unitario.

Entonces:

$$\frac{DI}{Dt} = \int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_S A v_i \cdot n_i dS \quad \text{A.1.2.5}$$

Usando el Teorema de Gauss el cual establece de manera general que  $\int_S v_i n_i dS = \int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV$

Por lo tanto:

$$\frac{DI}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V A(x_i, t) dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (A v_i) dV \quad \text{A.1.2.6}$$

$$= \int_V \left( \frac{\partial A}{\partial t} + v_i \frac{\partial A}{\partial x_i} + A \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV \quad \text{A.1.2.7}$$

Por lo tanto:

$$\frac{DI(t)}{Dt} = \int_V \left( \frac{DA}{Dt} + A \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV \quad \text{A.1.2.8}$$

En donde el primer término del integrando es la derivada material.

Por lo que regresando a la ecuación de continuidad se debe cumplir que exista la conservación de la masa, entonces:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho(x_i, t) dV = 0 \quad \text{A.1.2}$$

De acuerdo con A.1.2.5

$$\frac{D\rho}{Dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho v_j \cdot n_j dS = 0$$

Aplicando el Teorema de Gauss:

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} \right] dV = 0 \quad \text{A.1.3}$$

La integral se extiende a todo el volumen y este se escoge de manera arbitraria por lo que el integrando es el único que debe valer cero.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{A.1.4}$$

Siendo esta última la ecuación de continuidad y permite asegurar continuidad de la masa.

### A.2. Ecuación de movimiento.

En un instante de tiempo  $t$ , el momento lineal de todas las partículas contenidas en un dominio de volumen  $V$  es:

$$\rho_i = \int_V \rho v_i dV \quad \text{A.2.1}$$

Donde  $v_i$  es la velocidad de la partícula en tres componentes ortogonales y  $\rho$  la densidad.

Si el cuerpo está sometido a tracciones  $T_i$  y fuerzas por unidad de volumen  $X_i$ , la fuerza resultante es:

$$F = \int_S T_i dS + \int_V X_i dV \quad \text{A.2.2}$$

De acuerdo con la ecuación de Cauchy donde la tracción se expresa en términos de los esfuerzos  $T_i = \sigma_{ij} n_j$  donde  $n_j$  es el vector unitario; aplicando el teorema de Gauss transformando la integral de superficie en una de volumen y sustituyendo se tiene:

$$F = \int_S \sigma_{ij} n_j dS + \int_V X_i dV \quad \text{A.2.3a}$$

$$F_i = \int_V \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) dV \quad \text{A.2.3b}$$

La segunda ley de Newton establece que  $ma = F$  :

Y sustituyendo A.2.1 en la derivada material y de acuerdo con la segunda ley de Newton

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = F_i \quad \text{A.2.4}$$

$$\int_V \left( \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} \right) dV = \int_V \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) dV \quad \text{A.2.5}$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \quad \text{A.2.6}$$

Donde  $v_i$  y  $v_j$  son términos que representan la velocidad de la partícula.

Analizando el lado izquierdo de la ecuación.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \rho v_i \frac{\partial(v_j)}{\partial x_j} &= v_i \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} + \rho v_j \frac{\partial(v_i)}{\partial x_j} \end{aligned} \quad \text{A.2.7}$$

Agrupando los términos y sustituyendo:

$$v_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_j} v_j \right) + \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i$$

El primer término del lado izquierdo como se vio en la ecuación A.1.4 es igual a cero. Entonces se reduce a:

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \quad \text{A.2.8}$$

$$\rho \left( \frac{Dv_i}{Dt} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \quad \text{A.2.9}$$

Esta última es la ecuación de equilibrio o de movimiento y relaciona fuerzas con desplazamientos ya que la velocidad es la derivada del desplazamiento con respecto al tiempo.

### A.3 Ecuación de Navier.

La velocidad de una partícula  $v_i$  esta dada por la derivada material del desplazamiento.

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \text{A.3.1}$$

Donde  $u_i$  es el desplazamiento.

La aceleración de la partícula esta dada por la derivada material de la velocidad:

$$\alpha_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \text{A.3.2}$$

Mientras que la conservación de la masa esta dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{A.3.3}$$

La ecuación Euleriana de movimiento es:

$$\rho \alpha_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \quad \text{A.3.4}$$

Así la ley de Hooke para un medio isótropo y homogéneo es:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad \text{A.3.5}$$

Donde para desplazamientos diferenciales:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \quad \text{A.3.6}$$

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}; \quad \alpha_i = \frac{\partial v_i}{\partial t}; \quad \text{A.3.7}$$

Sustituyendo A.3.7 en A.3.6 y A.3.6 en A.3.5 y simplificando se obtiene:

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_i} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \text{A.3.8}$$

Esta última es la ecuación de Navier.

Donde la divergencia esta dada por:

$$e = \nabla \cdot \bar{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad \text{A.3.9}$$

Cuya forma vectorial es:

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) + X_i = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad \text{A.3.10}$$

#### A.4. Ondas sísmicas.

La teoría de la elasticidad ha permitido obtener la ecuación de Navier, la cual describe básicamente dos tipos de ondas propagándose (ondas elásticas) las cuales son ondas de compresión y ondas de corte. Este tipo de ondas se propagan con diferentes velocidades y también dependen de las propiedades elásticas del material.

En el caso que no haya fuerzas de cuerpo la ecuación vectorial tiene la siguiente expresión:

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) + \mu \nabla^2 \bar{u} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad \text{A.4.1}$$

Esta es la ecuación de movimiento para un medio elástico e isótropo en términos de los desplazamientos y hay una dependencia de la posición y tiempo.

Usando la identidad:

$$\nabla^2 \bar{u} = \nabla(\nabla \cdot \bar{u}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{u}) \quad \text{A.4.2}$$

Obtenemos:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \bar{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \bar{u}) = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad \text{A.4.3}$$

Dividiendo entre la densidad:

$$\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}\nabla(\nabla \cdot \bar{u}) - \frac{\mu}{\rho}\nabla \times (\nabla \times \bar{u}) = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad \text{A.4.4}$$

Si se le aplica la divergencia a ambos lados de la ecuación A.4.4 se tiene:

$$\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}\nabla \cdot [\nabla(\nabla \cdot \bar{u})] - \frac{\mu}{\rho}\nabla \cdot [\nabla \times (\nabla \times \bar{u})] = \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \bar{u})}{\partial t^2} \quad \text{A.4.6}$$

Además de acuerdo con las identidades:  $\nabla \cdot [\nabla \times (\nabla \times \bar{u})] = 0$  y  $\nabla^2 \bar{u} = \nabla \cdot \nabla \bar{u}$

Se obtiene:

$$\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}\nabla^2 (\nabla \cdot \bar{u}) = \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \bar{u})}{\partial t^2} \quad \text{A.4.7}$$

$$\alpha^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \bar{u}) = \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \bar{u})}{\partial t^2} \quad \text{A.4.8}$$

Donde:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Esta es una ecuación escalar debido a que la divergencia da como resultado una cantidad escalar, por lo que representa a ondas propagándose con una velocidad  $\alpha$  por un cambio fraccional de volumen (por la divergencia).

Si a la ecuación A.4.4 se le aplica el rotacional en ambos lados se tiene:

$$\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}\nabla \times [\nabla(\nabla \cdot \bar{u})] - \frac{\mu}{\rho}\nabla \times [\nabla \times (\nabla \times \bar{u})] = \frac{\partial^2 (\nabla \times \bar{u})}{\partial t^2} \quad \text{A.4.9}$$

Aplicando las identidades  $\nabla \times [\nabla(\nabla \cdot \bar{u})] = 0$  y  $\nabla \times [\nabla \times (\nabla \times \bar{u})] = -\nabla^2 (\nabla \times \bar{u})$

Se obtiene:



$$\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 (\nabla \times \bar{u}) = \frac{\partial^2 (\nabla \times \bar{u})}{\partial t^2} \quad \text{A.4.10}$$

$$\beta^2 \nabla^2 (\nabla \times u)^- = \frac{\partial^2 (\nabla \times \bar{u})}{\partial t^2} \quad \text{A.4.11}$$

Donde:

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Es una ecuación vectorial debido a que el rotacional da como resultado una cantidad vectorial, además representa a ondas propagándose con una velocidad  $\beta$  por una pequeña rotación de una partícula.

Otra forma de obtener la ecuación de onda es la siguiente:

Retomando la ecuación A.4.3, se le puede aplicar el Teorema de Helmholtz, el cual permite tener una representación del campo de desplazamientos como  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \phi(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \gamma(\mathbf{x}, t)$ , en el cual el desplazamiento es la suma del gradiente de un potencial escalar y el rotacional de un vector potencial, ambas son funciones de espacio y tiempo.

Y empleando las identidades:  $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$  y  $\nabla \cdot (\nabla \times \gamma) = \mathbf{0}$

Al desarrollar y agrupar los términos semejantes obtenemos:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla^2 \phi) - \mu \nabla \times \nabla \times (\nabla \times \gamma) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \phi + \nabla \times \gamma) \quad \text{A.4.12}$$

Por otro lado empleando esta nueva identidad

$$\nabla \times \nabla \times (\nabla \times \gamma) = -\nabla^2 (\nabla \times \gamma) + \nabla (\nabla \cdot (\nabla \times \gamma)) = -\nabla^2 (\nabla \times \gamma) \quad \text{A.4.13}$$

Y sustituyendo en la ecuación 2.12 y reagrupando los términos se tiene:

$$\nabla \left[ (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi - \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right] = -\nabla \times \left[ \mu \nabla^2 \gamma - \rho \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right] \quad \text{A.4.14}$$

Esta reagrupación puede efectuarse debido a que las constantes elásticas no varían con la posición y el orden de la diferenciación no se afecta.

Una solución puede ser hallada si en un lado de la ecuación el término entre corchetes es igualado a cero. Por lo que se tienen dos ecuaciones una para cada potencial.

El potencial escalar satisface:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad \text{A.4.15}$$

Esta solución corresponde a la ecuación de onda para las ondas P o compresionales.

Para el vector potencial satisface:

$$\nabla^2 \gamma(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \gamma(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad \text{A.4.16}$$

La cual corresponde a la ecuación de onda para las ondas S o de corte.

## ANEXO B

### Desarrollo matemático para obtener la solución de la ecuación de onda considerando una fuente de cizalla isótropa.

La ecuación de onda con una fuerza de cuerpo que en este caso representa a una fuente puntual de cizalla isótropa alojada en el eje “y” en el dominio de las frecuencias es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + q^2 u = -F \delta(x) \delta(z) \exp(-i\omega t) \quad \text{B.1}$$

Donde  $q^2$  es el término de la derivada con respecto al tiempo y  $u$  el desplazamiento.

Para asegurar que la fuente tenga las características antes mencionadas se toma en cuenta que esta dada por las funciones delta de Dirac de tal manera que cuando  $\delta(x) = 0$  y  $\delta(z) = 0$  la función va a valer uno, las unidades de estas funciones son del inverso de la longitud, mientras que la fuerza tiene unidades de fuerza por unidad de longitud.

La ecuación propuesta para el desplazamiento esta dada por:

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp(-ikx - i\eta|z|) dk \quad \text{B.2}$$

$\eta$  es el número de onda vertical y  $k$  el número de onda horizontal

De la cual se va a encontrar el coeficiente  $A(k)$ . Para esto podemos dividir a la fuerza en dos partes, esta se representa como un punto en el eje de la “y”, por lo tanto el esfuerzo queda definido por:

$$\sigma_{zy} \Big|_{z=0} = \frac{F}{2} \delta(x) \quad \text{B.3}$$

$$\text{Donde: } \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) dk$$

Por lo tanto:

$$\sigma_{zy} \Big|_{z=0} = \frac{F}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) dk \quad \text{B.4}$$

Por otra parte el esfuerzo también esta definido por:

$$\sigma_{zy} \Big|_{z=0} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{B.5}$$

$$\sigma_{zy} \Big|_{z=0} = \mu \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\infty} (A(k) \exp(-ikx - i\eta|z|) dk) \Big|_{z=0} \quad \text{B.6}$$

$$\sigma_{zy}\Big|_{z=0} = -i\mu\eta \operatorname{sgn}(z) \int_{-\infty}^{\infty} \left( A(k) \exp(-ikx - i\eta|z|) dk \right) \Big|_{z=0} \quad \text{B.7}$$

$$\sigma_{zy}\Big|_{z=0} = -i\mu\eta \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp(-ikx) dk \quad \text{B.8}$$

Igualando las ecuaciones B.4 y B.8

$$\frac{F}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) dk = -i\mu\eta \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp(-ikx) dk \quad \text{B.9}$$

Se pueden eliminar las integrales y despejar  $A(k)$ . Obteniendo:

$$A(k) = \frac{iF}{4\pi\mu\eta} \quad \text{B.10}$$

Sustituyendo B.10 en B.2

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iF}{4\pi\mu} \exp(-ikx) \frac{dk}{\eta} \quad \text{B.11}$$

Esta es la ecuación que permite obtener el desplazamiento producto de una fuente con propiedades definidas anteriormente, esta generalizada y es una solución exacta.

## ANEXO C.

### Programa para el cálculo de desplazamientos en superficie libre para una onda tipo SH en un medio elástico y estratificado.

```
C+++++ PROGRAMA PARA EL CÁLCULO DEL DESPLAZAMIENTO DE UNA ONDA SH EN SUPERFICIE
C+++++ USANDO EN METODO DEL NUMERO DE ONDA DISCRETO PARA UN MEDIO ESTRATIFICADO
C+++++ Y ELASTICO.
C+++++ DECLARACION DE VARIABLES+++++
      USE NUMERICAL_LIBRARIES
      COMPLEX UIM,URE,OME,DAMP,WI
      COMPLEX PULSO(2048),CT(7,1)
      COMPLEX BETTAC(5),MUC(5),VGN22(2048,101,101)
      COMPLEX ETAC(100),BB(7,1),A(7,7),SUM,V
      COMPLEX SISXGN22(2048),VG22,RES
      COMPLEX ARG1,ARG2,ARG3,ARG4,ARG5,ARG6,ARG7,COEF,ARGF
      REAL XTGN22(2048,101,101),RIC,A1
      REAL H(5),RHO(5),BETTA(5),QS(100),LX,SKM

C+++++ LECTURA DE DATOS ++++

C+++++ VELOCIDAD DE LAS CAPAS Y EL SEMI-ESPACIO
      BETTA(1)=2000.
      BETTA(2)=2300.
      BETTA(3)=2700.
      BETTA(4)=3000.

C+++++ ESPESOR DE LOS ESTRATOS

      H(1)=2000.
      H(2)=2000.
      H(3)=2000.

C+++++ DENSIDAD DE LAS CAPAS Y EL SEMI-ESPACIO

      RHO(1)=2000.
      RHO(2)=2250.
      RHO(3)=2600.
      RHO(4)=2800.

C+++++CONSTANTES EMPLEADAS EN EL PROGRAMA

      PI=4.0*ATAN(1.0)
      UIM=CMPLX(0.0,1.0)
      URE=CMPLX(1.0,0.0)
      ZER=CMPLX(0.0,0.0)
C+++++PARÁMETROS+++++
      NX=11  !No. DE RECEPTORES EN SUPERFICIE
      NZ=1   !No. DE RECEPTORES A PROFUNDIDAD
      TW=20.0 ! VENTANEO EN TIEMPO
      DT=0.02 ! INTERVALO DE MUESTREO
      XF=0; ZF=5000.0 !COORDENADAS DE LA FUENTE
      XMIN=-5000.0 !COORDENADA MINIMA DEL RECEPTOR EN SUPERFICIE
      XMAX=5000.0 !COORDENADA MAXIMA DEL RECEPTOR EN SUPERFICIE
      ZMIN=0.0   !COORDENADA MINIMA DEL RECEPTOR A PROFUNDIDAD
      ZMAX=10000.0 !COORDENADA MAXIMA DEL RECEPTOR A PROFUNDIDAD

C+++++ CICLO PARA CALCULAR CADA UNA DE LAS POSICIONES DE LOS RECEPTORES
C`+++++ EN SUPERFICIE
      IF(NX.NE.1)THEN
      DX=(XMAX-XMIN)/(NX-1)
      ELSE
      DX=0.0
      ENDIF

C+++++ CICLO PARA CALCULAR CADA UNA DE LAS POSICIONES DEL RECEPTOR
```

```

C+++++ A PROFUNDIDAD
      IF(NZ.NE.1)THEN
      DZ=(ZMAX-ZMIN)/(NZ-1)
      ELSE
      DZ=0.0
      ENDIF

      N=512 !No. DE MUESTRAS
      LX=2*BETTA(4)*TW !DISTANCIA ENTRE LAS FUENTES FICTICIAS
      DF=1/(N*DT) !INTERVALO ENTRE FRECUENCIAS
      XDK=2*PI/LX
      AN=N
      DUR=DT*AN !DURACION DE LA SEÑAL
      DAMP=-UIM*0.7*2.*PI/TW !PARTE IMAGINARIA DE LA FRECUENCIA COMPLEJA
      NLIM=500 !NÚMERO DE ELEMENTOS DE LA SUMA PARA EL NUMERO DE ONDA DISCRETO
      TS=1.5 !TIEMPO DONDE ESTA LA MAXIMA AMPLITUD DEL PULSO DE RICKER
      TP=0.5 !PERIODO DEL PULSO DE RICKER
      AMPL=100000. !AMPLITUD DEL PULSO DE RICKER

C+++++ CICLO PARA CALCULAR LA VELOCIDAD Y RIGIDEZ EN CADA UNA DE
C+++++ DE LAS CAPAS Y EL SEMI.ESPACIO
      DO 7 I=1,4
      BETTAC(I)=BETTA(I)*1.0 !*CSQRT(URE-UIM/QS(I))
      MUC(I)=RHO(I)*(BETTAC(I)**2)
      7 CONTINUE

C+++++ CÁLCULO DEL PULSO DE RICKER

      DO JJ=1,N
      TJ=DT*(JJ-1)-TS
      A1=PI**2/TP**2
      FUN=((1-2*A1*TJ**2)*EXP(-A1*TJ**2))*AMPL
      PULSO(JJ)=CMPLX(FUN,0.0)
      ENDDO

C+++++ TRANSFORMADA DE FOURIER DEL RICKER +++++
      CALL FORK(N,PULSO,-1.0)

      DO J=2,N/2+1 !CICLO DE FRECUENCIA
      FREC=DF*(J-1) !FRECUENCIA
      WRITE(*,*)FREC
      OME=URE*FREC*2.0*PI !CALCULO DE LA PARTE REAL DE LA FRECUENCIA COMPLEJA
      WI=OME + DAMP !CALCULO DE LA FRECUENCIA COMPLEJA

      EPS=1.0
      DO 10 NK=0,NLIM !INICIA EL CICLO DE LA SUMA
      SKM=NK*XDK
      DO I=1,4 !CICLO PARA CALCULAR EL NUMERO DE ONDA VERTICAL
      ETAC(I)=CSQRT(((WI/BETTAC(I))**2)-(SKM**2))
      IF(AIMAG(ETAC(I)).GT.0.0)ETAC(I)=-ETAC(I)
      ENDDO
      10 CONTINUE

C+++++ INICIALIZACION DE LAS MATRICES A Y B

      A(1:7,1:7) = CMPLX(0.0,0.0)
      BB(1:7,1) = CMPLX(0.0,0.0)

C+++++ FORMACION DE LOS ELEMENTOS DE LAS MATRICES A y B

      A(1,1)=MUC(1)*ETAC(1)*CEXP(-UIM*ETAC(1)*H(1))
      A(1,2)=-MUC(1)*ETAC(1)
      A(2,1)=MUC(1)*ETAC(1)
      A(2,2)=-MUC(1)*ETAC(1)*CEXP(-UIM*ETAC(1)*H(1))
      A(2,3)=-MUC(2)*ETAC(2)*CEXP(-UIM*ETAC(2)*H(2))
      A(2,4)=MUC(2)*ETAC(2)
      A(3,1)=1.0
      A(3,2)=CEXP(-UIM*ETAC(1)*H(1))

```

```

A(3,3)=-CEXP(-UIM*ETAC(2)*H(2))
A(3,4)=-1.0
A(4,3)=MUC(2)*ETAC(2)
A(4,4)=-MUC(2)*ETAC(2)*CEXP(-UIM*ETAC(2)*H(2))
A(4,5)=-MUC(3)*ETAC(3)*CEXP(-UIM*ETAC(3)*H(3))
A(4,6)=MUC(3)*ETAC(3)
A(5,3)=1.0
A(5,4)=-CEXP(-UIM*ETAC(2)*H(2))
A(5,5)=-CEXP(-UIM*ETAC(3)*H(3))
A(5,6)=-1
A(6,5)=MUC(3)*ETAC(3)
A(6,6)=-MUC(3)*ETAC(3)*CEXP(-UIM*ETAC(3)*H(3))
A(6,7)=MUC(4)*ETAC(4)
A(7,5)=1
A(7,6)=-CEXP(-UIM*ETAC(3)*H(3))
A(7,7)=-1

C+++++ ELEMENTOS DE LOS TERMINOS DE LA FUENTE
  BB(1,1)=CMPLX(0.0,0.0)
  BB(2,1)=CMPLX(0.0,0.0)
  BB(3,1)=CMPLX(0.0,0.0)
  BB(4,1)=CEXP(-UIM*ETAC(3)*ABS(H(1)+H(2)-ZF))
  BB(5,1)=(CEXP(-UIM*ETAC(3)*ABS(H(1)+H(2)-ZF)))/(ETAC(3)*MUC(3))
  BB(6,1)=CEXP(-UIM*ETAC(3)*ABS(H(1)+H(2)+H(3)-ZF))
  BB(7,1)=-CEXP(-UIM*ETAC(3)*ABS(H(1)+H(2)+H(3)-ZF))
$  /(ETAC(3)*MUC(3))

      CALL LSACG(7,A,7,BB,1,CT) !RESOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

C+++++ INICIA EL CICLO PARA CALCULAR EL DESPLAZAMIENTO DE ACUERDO A LA POSICION
C+++++ DEL RECEPTOR
  DO IZ=1,NZ !CICLO DE Z
  ZZ=ZMIN+DZ*(IZ-1)
  DO IX=1,NX !CICLO DE X
  X=XMIN+DX*(IX-1)
  SUM = CMPLX(0.0,0.0)

C+++++ ZZ EN EL PRIMER ESTRATO
  IF((ZZ.LT.H(1)).AND.(ZZ.GE.0.0)) THEN

      ARG1=UIM*ETAC(1)*(ZZ-H(1))
      ARG2=-UIM*ETAC(1)*ZZ
C+++++ DESPLAZAMIENTO EN EL PRIMER ESTRATO
  V=EPS*(CT(1,1)*CEXP(ARG1)+CT(2,1)*CEXP(ARG2))
  $  *CCOS(URE*SKM*(X-XF))

C+++++ ZZ EN EL SEGUNDO ESTRATO
  ELSE IF((ZZ.LT.(H(1)+H(2))).AND.(ZZ.GE.H(1))) THEN

      ARG3=UIM*ETAC(2)*(ZZ-(H(1)+H(2)))
      ARG4=-UIM*ETAC(2)*(ZZ-H(1))
C+++++ DESPLAZAMIENTO EN EL SEGUNDO ESTRATO
  V=EPS*(CT(3,1)*CEXP(ARG3)+CT(4,1)*CEXP(ARG4))
  $  *CCOS(URE*SKM*(X-XF))

C+++++ ZZ EN EL TERCER ESTRATO
  ELSE IF((ZZ.LT.(H(1)+H(2)+H(3))).AND.(ZZ.GE.H(1)+H(2))) THEN

      ARG5=UIM*ETAC(3)*(ZZ-(H(1)+H(2)+H(3)))
      ARG6=-UIM*ETAC(3)*(ZZ-(H(1)+H(2)))
C+++++ ELEMENTOS DE LA FUENTE
  ARGF=-UIM*ETAC(3)*ABS(ZZ-ZF)
  COEF=1/(MUC(3)*ETAC(3))
C+++++ DESPLAZAMIENTO EN EL TERCER ESTRATO
  V=EPS*(CT(5,1)*CEXP(ARG5)+CT(6,1)*CEXP(ARG6)+COEF*CEXP(ARGF))
  $  *CCOS(URE*SKM*(X-XF))

  ELSE
C+++++ DESPLAZAMIENTO EN EL SEMI-ESPACIO
  ARG7=-UIM*ETAC(4)*(ZZ-(H(1)+H(2)+H(3)))

```

```

V=EPS*(CT(7,1)*CEXP(ARG7))*CCOS(URE*SKM*(X-XF))

ENDIF

C+++++ ALMACENAMIENTO DE LOS RESULTADOS EN UNA MATRIZ 3D

VG22=-UIM/4./PI*V
VGN22(J,IX,IZ)=VGN22(J,IX,IZ)+VG22
ENDDO !LOOP DE LAS X
ENDDO !LOOP DE LAS Z
EPS=2.0
10 CONTINUE !LOOP DE LA INTEGRAL

ENDDO !LOOP DE LA FRECUENCIA

C+++++ CICLO PARA REALIZAR LA CONVOLUCION
DO IZ=1,NZ
DO IX=1,NX
SISXGN22(1)=PULSO(1)
DO K=2,N/2+1 !SON EL NUMERO DE PUNTOS HASTA LA FRECUENCIA DE NYQUIST
SISXGN22(K)=PULSO(K)*VGN22(K,IX,IZ)
JN = N-K+2
SISXGN22(JN)=CONJG(SISXGN22(K))
ENDDO
C+++++ TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER DE LA CONVOLUCION
CALL FORK(N,SISXGN22,+1.0)
C+++++ DESPLAZAMIENTO EN EL DOMINIO DEL TIEMPO
DO K=1,N
XTGN22(K,IX,IZ)=REAL(SISXGN22(K))*EXP(2.0*PI*DT*(K-1)/TW*0.7)!ESCALAR
ENDDO
ENDDO
ENDDO
C+++++ ALMACENAMIENTO DE LOS RESULTADOS EN UN ARCHIVO DE DATOS
OPEN(1,FORM="FORMATTED",FILE="VSH2.RES")

DO K=1,N
DO IZ=1,NZ
WRITE(1,100)(XTGN22(K,IX,IZ), IX=1,NX)
ENDDO
END DO

CLOSE(1)

100 FORMAT (101e25.8)

STOP
END

C

C*****
C***** PAR DE TRANSFORMADAS DE FOURIER (1.0)fft(-1.0)ift *****
C*****
SUBROUTINE FORK(LX,CX,SIGNI)
COMPLEX CX(LX),CARG,CW,CTEMP
PI=4.0*ATAN(1.0)
J=1
SC=SQRT(1.0/LX)
DO 30 I=1,LX
IF(1.GT.J)GO TO 10
CTEMP=CX(J)*SC
CX(J)=CX(I)*SC
CX(I)=CTEMP
10 M=LX/2
20 IF(J.LE.M)GO TO 30
J=J-M
M=M/2

```



```
IF(M.GE.1)GO TO 20
30 J=J+M
L=1
40 ISTEP=2*L
DO 50 M=1,L
CARG=(0.0,1.0)*(PI*SIGNI*(M-1))/L
CW=CEXP(CARG)
DO 50 I=M,LX,ISTEP
CTEMP=CW*CX(I+L)
CX(I+L)=CX(I)-CTEMP
50 CX(I)=CX(I)+CTEMP
L=ISTEP
IF(L.LT.LX)GO TO 40
RETURN
END
```

## APENDICE D.

### Programa para el cálculo del campo de desplazamientos en superficie libre para una onda tipo SH en un medio viscoelastico estratificado.

```
C+++++ PROGRAMA PARA EL CÁLCULO DEL DESPLAZAMIENTO DE UNA ONDA SH EN SUPERFICIE
C+++++ USANDO EN METODO DEL NUMERO DE ONDA DISCRETO PARA UN MEDIO ESTRATIFICADO
C+++++ Y VISCOELASTICO.
C+++++ DECLARACION DE VARIABLES
      USE NUMERICAL_LIBRARIES
      PARAMETER(NT=512,NRX=101,NRZ=101)
      COMPLEX UIM,URE,OME,DAMP,WI
      COMPLEX PULSO(NT),CT(7,1),MUC(7)
      COMPLEX VGN22(NT,NRX,NRZ)
      COMPLEX ETAC(100),BB(7,1),A(7,7),SUM,V
      COMPLEX BETTAC(5),SISXGN22(NT),VG22,RES
      COMPLEX ARG1,ARG2,ARG3,ARG4,ARG5,ARG6,ARG7,COEF,ARGF
      REAL XTGN22(NT,NRX,NRZ),RIC,A1
      REAL H(5),RHO(5),LX,SKM
      REAL VS1,VS2,VS3,VS4,MUES1,MUES2,MUES3,MUES4,MU1,MU2,MU3,MU4

C+++++ LECTURA DE DATOS ++++

C+++++ VELOCIDAD DE CADA DE LOS ESTRATOS Y EL SEMI-ESPACIO
      VS1=2000.
      VS2=2300.
      VS3=2700.
      VS4=3000

C+++++ ESPEROS DE CADA UNO DE LOS ESTRATOS
      H(1)=2000.
      H(2)=2000.
      H(3)=2000

C+++++ DENSIDAD DE CADA UNO DE LOS ESTRATOS
      RHO(1)=2000.
      RHO(2)=2250.
      RHO(3)=2600.
      RHO(4)=2800.

C+++++ FACTOR DE CALIDAD
      QS1=100.0
      QS2=100.0
      QS3=100.0
      QS4=100.0

C+++++CONSTANTES
      PI=4.0*ATAN(1.0)
      UIM=CMPLX(0.0,1.0)
      URE=CMPLX(1.0,0.0)
      ZER=CMPLX(0.0,0.0)
C+++++PARÁMETROS+++++
      NX=11 !No. DE RECEPTORES EN SUPERFICIE
      NZ=1 !No. RECEPTORES A PROFUNDIDAD
      TW=20.0 !VENTANEO
      DT=0.02 !INTERVALO ENTRE LAS MUESTRAS
      XF=0; ZF=5000.0 !COORDENADAS DE LA FUENTE
      XMIN=-5000.0 !COORDENADA MINIMA DEL RECPETOR EN SUPERFICIE
      XMAX=5000.0 !COORDENADA MAXIMA DEL RECEPTOR EN SUPERFICIE
      ZMIN=0.0 !COORDENADA MINIMA DEL RECPETOR A PROFUNDIDAD
      ZMAX=10000.0 !COORDENADA MAXIMA DEL RECPETOR A PROFUNDIDAD

C+++++ CICLO PARA CALCULAR CADA UNA DE LAS POSICIONES DEL RECEPTOR
C+++++ EN SUPERFICIE
```

```

        IF(NX.NE.1)THEN
          DX=(XMAX-XMIN)/(NX-1)
        ELSE
          DX=0.0
        ENDIF
C+++++ CICLO PARA CALCULAR CADA UNA DE LAS POSICIONES DEL RECEPTOR
C+++++ A PROFUNDIDAD
        IF(NZ.NE.1)THEN
          DZ=(ZMAX-ZMIN)/(NZ-1)
        ELSE
          DZ=0.0
        ENDIF

        N=512 !NUMERO DE NUESTRAS
        LX=2*VS4*TW !DISTANCIA ENTRE LAS FUENTES FICTICIAS
        DF=1/(N*DT) !INTERVALO ENTRE LAS FRECUENCIAS
        XDK=2*PI/LX
        AN=N
        DUR=DT*AN !DURACION DE LA SEÑAL
        DAMP=-UIM*0.7*2.*PI/TW !PARTE IMAGINARIA DE LA FRECUENCIA COMPLEJA
        NLIM=500 !NÚMERO DE ELEMENTOS DE LA SUMA PARA EL NUMERO DE ONDA DISCRETO
        TS=1.5 !TIEMPO DE MAXIMA AMPLITUD DEL PULSO DE RICKER
        TP=0.5 !PERIDO DEL PULSO DE RICKER
        AMPL=100000. !AMPLITUD DEL PULSO DE RICKER

C+++++ CÁLCULO DE LA RIGIDEZ
        MU1=RHO(1)*(VS1**2)
        MU2=RHO(2)*(VS2**2)
        MU3=RHO(3)*(VS3**2)
        MU4=RHO(4)*(VS4**2)

C+++++ CALCULO DE LA PARTE REAL DEL MODULO COMPLEJO
        MUES1=MU1/QS1
        MUES2=MU2/QS1
        MUES3=MU3/QS1
        MUES4=MU4/QS1

C+++++ CÁLCULO DEL PULSO DE RICKER

        DO JJ=1,N
          TJ=DT*(JJ-1)-TS
          A1=PI**2/TP**2
          FUN=((1-2*A1*TJ**2)*EXP(-A1*TJ**2))*AMPL
          !WRITE(14,*)FUN
          PULSO(JJ)=CMPLX(FUN,0.0)
        ENDDO

C+++++ TRANSFORMADA DE FOURIER DEL RICKER +++++
        CALL FORK(N,PULSO,-1.0)
C+++++ INICIA EL CICLO DE LA FRECUENCIA
        DO J=2,N/2+1
          FREC=DF*(J-1) !FRECUENCIA
          WRITE(*,*)FREC
          OME=URE*FREC*2.0*PI !PARTE REAL DE LA FRECUENCIA COMPLEJA
          WI=OME + DAMP !CALCULO DE LA FRECUENCIA COMPLEJA
C+++++ CALCULO DEL MODULO COMPLEJO PARA CADA UNO DE LOS ESTRATOS
          MUC(1)=MU1 +UIM*WI*MUES1
          MUC(2)=MU2 +UIM*WI*MUES2
          MUC(3)=MU3 +UIM*WI*MUES3
          MUC(4)=MU4 +UIM*WI*MUES4

C ++++++
C+++++ SE CALCULAN LAS VELOCIDADES PARA EL CASO K-V
C+++++ EN CADA UNO DE LOS ESTRATOS Y EL SEMI-ESPACIO

        BETTAC(1)=CSQRT(MUC(1)/RHO(1))
        BETTAC(2)=CSQRT(MUC(2)/RHO(2))

```

```

      BETTAC(3)=CSQRT(MUC(3)/RHO(3))
      BETTAC(4)=CSQRT(MUC(4)/RHO(4))

      EPS=1.0
      DO 10 NK=0,NLIM !INICIA EL CICLO DE LA SUMA
      SKM=NK*XDK
      DO I=1,4
C+++++ CALCULO DEL NUMERO DE ONDA VERTICAL
      ETAC(I)=CSQRT(((WI/BETTAC(I)**2)-(SKM**2))
      IF(AIMAG(ETAC(I)).GT.0.0)ETAC(I)=-ETAC(I)
      ENDDO

C+++++ INICIALIZACION DE LAS MATRICES A Y B

      A(1:7,1:7) = CMPLX(0.0,0.0)
      BB(1:7,1) = CMPLX(0.0,0.0)

C+++++ FORMACION DE LOS ELEMENTOS DE LAS MATRICES A y B

      A(1,1)=MUC(1)*ETAC(1)*CEXP(-UIM*ETAC(1)*H(1))
      A(1,2)=-MUC(1)*ETAC(1)
      A(2,1)=MUC(1)*ETAC(1)
      A(2,2)=-MUC(1)*ETAC(1)*CEXP(-UIM*ETAC(1)*H(1))
      A(2,3)=-MUC(2)*ETAC(2)*CEXP(-UIM*ETAC(2)*H(2))
      A(2,4)=MUC(2)*ETAC(2)
      A(3,1)=1.0
      A(3,2)=-CEXP(-UIM*ETAC(1)*H(1))
      A(3,3)=-CEXP(-UIM*ETAC(2)*H(2))
      A(3,4)=-1.0
      A(4,3)=MUC(2)*ETAC(2)
      A(4,4)=-MUC(2)*ETAC(2)*CEXP(-UIM*ETAC(2)*H(2))
      A(4,5)=-MUC(3)*ETAC(3)*CEXP(-UIM*ETAC(3)*H(3))
      A(4,6)=MUC(3)*ETAC(3)
      A(5,3)=1.0
      A(5,4)=-CEXP(-UIM*ETAC(2)*H(2))
      A(5,5)=-CEXP(-UIM*ETAC(3)*H(3))
      A(5,6)=-1
      A(6,5)=MUC(3)*ETAC(3)
      A(6,6)=-MUC(3)*ETAC(3)*CEXP(-UIM*ETAC(3)*H(3))
      A(6,7)=MUC(4)*ETAC(4)
      A(7,5)=1
      A(7,6)=-CEXP(-UIM*ETAC(3)*H(3))
      A(7,7)=-1

C+++++ ELEMENTOS DEL TÉRMINO DE LA FUENTE
      BB(1,1)=CMPLX(0.0,0.0)
      BB(2,1)=CMPLX(0.0,0.0)
      BB(3,1)=CMPLX(0.0,0.0)
      BB(4,1)=CEXP(-UIM*ETAC(3)*ABS(H(1)+H(2)-ZF))
      BB(5,1)=-CEXP(-UIM*ETAC(3)*ABS(H(1)+H(2)-ZF))/(ETAC(3)*MUC(3))
      BB(6,1)=CEXP(-UIM*ETAC(3)*ABS(H(1)+H(2)+H(3)-ZF))
      BB(7,1)=-CEXP(-UIM*ETAC(3)*ABS(H(1)+H(2)+H(3)-ZF))
      $ /(ETAC(3)*MUC(3))

      CALL LSACG(7,A,7,BB,1,CT) !RESOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

C+++++ INICIA EL CICLO PARA CALCULAR EL DESPLAZAMIENTO DE ACUERDO AL
C+++++ DESPLAZAMIENTO DEL RECEPTOR
      DO IZ=1,NZ !CICLO DE Z
      ZZ=ZMIN+DZ*(IZ-1)
      DO IX=1,NX !CICLO DE X
      X=XMIN+DX*(IX-1)
      SUM = CMPLX(0.0,0.0)

C+++++ ZZ EN EL PRIMER ESTRATO
      IF((ZZ.LT.H(1)).AND.(ZZ.GE.0.0)) THEN

      ARG1=UIM*ETAC(1)*(ZZ-H(1))
      ARG2=-UIM*ETAC(1)*ZZ
C+++++ DESPLAZAMIENTO EN EL PRIMER ESTRATO

```

```

V=EPS*(CT(1,1)*CEXP(ARG1)+CT(2,1)*CEXP(ARG2))
$      *CCOS(URE*SKM*(X-XF))

C+++++ ZZ EN EL SEGUNDO ESTRATO
      ELSE IF((ZZ.LT.(H(1)+H(2))).AND.(ZZ.GE.H(1))) THEN

          ARG3=UIM*ETAC(2)*(ZZ-(H(1)+H(2)))
          ARG4=-UIM*ETAC(2)*(ZZ-H(1))

C+++++ DESPLAZAMIENTO EN EL SEGUNDO ESTRATO
      V=EPS*(CT(3,1)*CEXP(ARG3)+CT(4,1)*CEXP(ARG4))
      $      *CCOS(URE*SKM*(X-XF))

C+++++ ZZ EN EL TERCER ESTRATO
      ELSE IF((ZZ.LT.(H(1)+H(2)+H(3))).AND.(ZZ.GE.H(1)+H(2))) THEN

          ARG5=UIM*ETAC(3)*(ZZ-(H(1)+H(2)+H(3)))
          ARG6=-UIM*ETAC(3)*(ZZ-(H(1)+H(2)))
C+++++ ELEMENTOS DE LA FUENTE
          ARGF=-UIM*ETAC(3)*ABS(ZZ-ZF)
          COEF=1/(MUC(3)*ETAC(3))
C+++++ DESPLAZAMIENTO EN EL TERCER ESTRATO
      V=EPS*(CT(5,1)*CEXP(ARG5)+CT(6,1)*CEXP(ARG6)+COEF*CEXP(ARGF))
      $      *CCOS(URE*SKM*(X-XF))

      ELSE
C+++++ DESPLAZAMIENTO EN EL SEMI-ESPACIO
          ARG7=-UIM*ETAC(4)*(ZZ-(H(1)+H(2)+H(3)))
          V=EPS*(CT(7,1)*CEXP(ARG7))*CCOS(URE*SKM*(X-XF))

      ENDIF

C+++++ ALMACENAMIENTO DE LOS RESULTADOS EN UNA MATRIZ 3D
      VG22=-UIM/4./PI*V
      VGN22(J,IX,IZ)=VGN22(J,IX,IZ)+VG22
      ENDDO !LOOP DE LAS X
          ENDDO !LOOP DE LAS Z
      EPS=2.0
      10      CONTINUE !LOOP DE LA INTEGRAL
          ENDDO !LOOP DE LA FRECUENCIA

C+++++ CICLO PARA EL LA CONVOLUCION
      DO IZ=1,NZ
      DO IX=1,NX
          SISXGN22(1)=PULSO(1)
          DO K=2,N/2+1 !SON EL NUMERO DE PUNTOS HASTA LA FRECUENCIA DE NYQUIST
              SISXGN22(K)=PULSO(K)*VGN22(K,IX,IZ)
              JN = N-K+2
              SISXGN22(JN)=CONJG(SISXGN22(K))
          ENDDO
C+++++ TRANSFORMADA INVERSA DE LA CONVOLUCION
          CALL FORK(N,SISXGN22,+1.0)
C+++++ DESPLAZAMIENTO EN EL DOMINO DEL TIEMPO
          DO K=1,N
              XTGN22(K,IX,IZ)=REAL(SISXGN22(K))*EXP(2.0*PI*DT*(K-1)/TW*0.7)!ESCALAR
          ENDDO
          ENDDO
      ENDDO
C+++++ ALMACENAMIENTO DE LOS RESULTADOS EN UN ARCHIVO DE DATOS
      OPEN(1,FORM="FORMATTED",FILE="VSHKV2.RES")

      DO K=1,N
          DO IZ=1,NZ
              WRITE(1,100)(XTGN22(K,IX,IZ), IX=1,NX)
          ENDDO
      END DO

      CLOSE(1)

```

100 FORMAT (500000e25.8)

STOP  
END

C

```
C*****  
C***** PAR DE TRANSFORMADAS DE FOURIER (1.0)fft(-1.0)ift *****  
C*****  
SUBROUTINE FORK(LX,CX,SIGNI)  
COMPLEX CX(LX),CARG,CW,CTEMP  
PI=4.0*ATAN(1.0)  
J=1  
SC=SQRT(1.0/LX)  
DO 30 I=1,LX  
IF(I.GT.J)GO TO 10  
CTEMP=CX(J)*SC  
CX(J)=CX(I)*SC  
CX(I)=CTEMP  
10 M=LX/2  
20 IF(J.LE.M)GO TO 30  
J=J-M  
M=M/2  
IF(M.GE.1)GO TO 20  
30 J=J+M  
L=1  
40 ISTEP=2*L  
DO 50 M=1,L  
CARG=(0.0,1.0)*(PI*SIGNI*(M-1))/L  
CW=CEXP(CARG)  
DO 50 I=M,LX,ISTEP  
CTEMP=CW*CX(I+L)  
CX(I+L)=CX(I)-CTEMP  
50 CX(I)=CX(I)+CTEMP  
L=ISTEP  
IF(L.LT.LX)GO TO 40  
RETURN  
END
```

# APENDICE E.

## Programa para animar una matriz

El archivo vsha.res es el archivo de datos generado por el programa para el calculo del campo de desplazamientos realizado en Fortran.

El programa para animar la matriz esta realizado en Matlab.

```
% RUTINA PARA ANIMAR UNA MATRIZ
clear all
close all
load vsha.res;
[nr nc]=size(vsha);
mux=max(max(vsha))
j=1
nm=101;
for i=1:nm:nr
    if j>=70
        colormap jet
        surf(vsha(i:nm*j,1:nc)/mux);
        view(180,90);
        shading interp;
        M(:,j)=getframe;
        grid on
        j=j+1
    else
        j=j+1
    end
end
end
```