



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

**ESTUDIO COMPARATIVO DE METODOLOGÍAS PARA EL
ANÁLISIS Y DISEÑO DE PLACAS PLEGADAS**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA CIVIL –ESTRUCTURAS

P R E S E N T A :

CARLOS AURELIO PÉREZ ESCOBEDO

TUTOR:

ING. NEFTALÍ RODRÍGUEZ CUEVAS



MÉXICO D.F., NOVIEMBRE DE 2009.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

SIMBOLOGÍA EMPLEADA.

- a: carga adicional
- a_n : Proyección de b sobre la horizontal.
- A_n : Área de la sección transversal de la placa.
- b: Ancho de placa.
- c: Distancia a la fibra superior del eje neutro de la sección transformada agrietada del sistema de placas plegadas.
- C: Constante igual a $\frac{C_y E}{L^2}$ donde C_y depende de la curva de carga.
- C_n : Coeficiente que indica la proporción del momento y del esfuerzo al resolver el sistema de compatibilidad de deformaciones.
- E: Módulo de elasticidad del material.
- f_{cr} : Módulo de ruptura del material.
- f_c : Resistencia a la compresión del concreto.
- G: Módulo de cortante.
- I: Momento de inercia no agrietado de la sección transversal del sistema de placas.
- I'_{ag} : Momento de inercia agrietado de la cuarta parte de la sección transversal del sistema de 9 placas plegadas.
- I_{ag} : Momento de inercia agrietado de la sección transversal del sistema de placas plegadas.
- J_n : Momento de inercia en la placa n.
- k: Factor de distribución de momentos.
- k_{rig} : Rigidez angular dependiente de las condiciones de apoyo.
- L: Claro libre del sistema de placas.
- m_n : Momento en la arista n, debido a la rotación de placa.
- m_{n0} : Momento en la arista n sin considerar la rotación de placa.
- m : Momento de empotramiento debido a la carga vertical.
- m^* : Momento distribuido final debido a la carga vertical.
- M: Momento debido a flexión.
- M_{ag} : Momento para provocar el agrietamiento.
- M_{0n} : Momento en la arista n, debido a la condición de peso propio.
- M_{Tn} : Momento adicional debido a la fuerza cortante T_n .
- $N_{n,n-1}$: Fuerza de placa debido a R_n sobre la placa n.
- $N_{n,n+1}$: Fuerza de placa debido a R_n sobre la placa n+1.
- P_n : Fuerza de placa.
- r: Factor de distribución de esfuerzos.
- R: Fuerza ficticia debido al giro en las aristas.
- R^* : Reacción debida al momento m, al suponer que las aristas se desplazan.
- R_n : Reacciones en la arista n debido a la rotación ocasionada por el momento unitario supuesto.
- S_n : Fuerza en la dirección del eje de la placa n.
- t: Espesor de placa.
- T_n : Fuerza cortante en la arista n, en la dirección longitudinal del sistema.
- V_n : Fuerza cortante en la arista n, en la dirección vertical.
- w: Carga distribuida en kilogramos por metro cuadrado.
- W: Carga distribuida en kilogramos por metro.
- x: Dirección longitudinal de la placa.

- y : Dirección del ancho de la placa.
 z : Dirección perpendicular al ancho de la placa.
 X_n : Momento correctivo en la arista n .
 \bar{y} : Distancia entre la fibra superior más alejada del eje neutro de la sección transversal del sistema de placas plegadas de la sección no agrietada al considerar el acero de refuerzo superior e inferior.
 y_{sup} : Distancia superior a la fibra más alejada del eje neutro de la sección transversal del sistema de placas plegadas.
 y_{inf} : Distancia inferior a la fibra más alejada del eje neutro de la sección transversal del sistema de placas plegadas.
 α_n : Coeficiente para calcular las fuerzas de placa.
 β_n : Coeficiente para calcular las fuerzas de placa.
 γ_n : Ángulo entre las placas adyacentes n y $n+1$ a partir de la placa $n+1$. (Positivo en sentido antihorario).
 δ_n : Desplazamiento vertical de la arista n .
 δ_n^P : Giro en la arista n , debido al comportamiento de placa (flexión). Positivo en el sentido de las manecillas del reloj.
 δ_{n0} : Diferencia de la rotación en la arista n y la $n+1$ (error).
 $\delta_{n,n}^L$: Rotación debido al comportamiento de losa, donde el primer subíndice indica el número de arista que está a la izquierda ó a la derecha, de la arista indicada con el segundo subíndice.
 δ_{nn}^P : Diferencia de rotación de la arista n (δ_n^P) y la arista $n+1$ (δ_{n+1}^P) debido al comportamiento de placa.
 $\delta_{n\text{total}}$: Rotación total debido a comportamiento de placa y losa en la arista n .
 θ_n : Ángulo que forma la placa con la horizontal, positivo en sentido antihorario.
 π : Contante igual a 3.1416.
 v_n : Desplazamiento en la dirección del plano de la placa n .
 ν_p : Módulo de Poisson.
 σ_n : Esfuerzo distribuido debido a la condición de carga viva más carga muerta, al suponer las aristas continuas (sin rotación).
 σ_0 : Esfuerzo longitudinal en las placas suponiendo que sus extremos están simplemente apoyados.
 σ_{sup} : Esfuerzo longitudinal a compresión en el centro del claro, debido a flexión del sistema de placas al suponer la hipótesis que se comporta como una viga libremente apoyada en sus extremos con carga distribuida.
 σ_{inf} : Esfuerzo longitudinal a tensión en el centro del claro, debido a flexión del sistema de placas al suponer la hipótesis que se comporta como una viga libremente apoyada en sus extremos con carga distribuida.
 $\Delta\sigma_n$: Diferencia de esfuerzo entre la arista $n-1$ y la n .
 σ_{0n} : Esfuerzo en la arista n , debido a la condición de peso propio.
 σ_{Tn} : Esfuerzo en la arista n debidos al momento M_{Tn} .
 σ_{TTn} : Esfuerzo debido al momento M_{Tn} .
 σ_{1A} : Esfuerzo en la arista A de la placa 1.
 τ_n : Esfuerzo cortante en la arista n .

INTRODUCCIÓN

A través de la historia de las estructuras hechas por el hombre, éste se ha vuelto un maestro en disminuir el peso por metro cuadrado cubierto. Porque intuitivamente, ha sabido que en general, el peso implica mayor cantidad de materiales, tanto para la estructura que cubre, como la que soporta.

Desde la antigüedad se ha tenido la necesidad de cubrir superficies para protegerse del exterior, por lo que en la época de los asirios pasando por lo gótico, hasta nuestros días, al graficar el peso por metro cuadrado cubierto contra el tiempo transcurrido durante este lapso, se tiene una curva hiperbólica, que tiende a lograr cubrir grandes claros con estructuras cuyo peso es tan reducido como no era imaginado, como los techos colgantes.

La motivación del presente trabajo es el seguir reduciendo la cantidad de materia prima para cubrir una misma superficie, además de que entre menor sea la cantidad de material utilizada, el beneficio no sólo es para el que solicita el trabajo y el que lo realiza, sino también repercute en un mejor aprovechamiento de los recursos del país y se ha dicho que las concreteras son una fuente de contaminación importante, aún más que la provocada por los vehículos. Así, se ha visto que el espesor de un techo puede reducirse al realizar pliegues que dan la estabilidad y rigidez necesarias para que esté en condiciones de servicio, con espesores menores que si fuera una losa.

Las llamadas estructuras a base de placas plegadas no son techos colgantes, sino un subgrupo de los cascarones prismáticos, que aparte de soportar su peso propio a través de las fuerzas de membrana, lo hacen a través de las fuerzas debidas a flexión de cada una de las placas que constituyen un sistema de placas plegadas.

Una recopilación de estructuras realizadas con placas plegadas se presenta en el capítulo 1. En el capítulo 2, los aspectos generales de las placas plegadas.

Las metodologías mejoradas por considerar la rotación de las placas, es decir los métodos de Yitzhaki, Billington, Eliahu Traum y Howard Simpson, se presentan en el capítulo 3, y se desarrolla un ejemplo de aplicación en cada metodología que se presenta en el anexo de este trabajo, para dos condiciones, peso propio y carga de servicio, para un sistema de 6, 8 y 9 placas plegadas, cuyos resultados se compararan con los obtenidos al aplicar la teoría de vigas y con un modelo en SAP2000. Los métodos desarrollados en el capítulo anterior, se comparan entre si, y con base en ello, se obtienen parámetros que permitan decidir de acuerdo a la configuración, el método mas eficiente.

La configuración deformada que se presentan en los sistemas de placas plegadas prismáticas, de acuerdo a su geometría, se presentan en el capítulo 4.

Los diafragmas extremos o tímpanos sirven para rigidizar y conservar la configuración inicial de las placas plegadas prismáticas; se colocan transversalmente al claro de la cubierta, cuyo diseño se presenta en el capítulo 5.

Por último, se dan algunas recomendaciones para la aplicación de las metodologías; también se presentan las diferencias entre los resultados experimentales y los del modelo en elemento finito, realizado con el programa SAP2000.

I. RESUMEN.

Se calculan los esfuerzos en las aristas de nueve placas plegadas de concreto reforzado de un modelo ensayado en el laboratorio para la condición de peso propio y la condición de carga de servicio a través de dos aproximaciones (6 y 8 placas), hasta tener la sección de nueve placas del modelo ensayado.

Se hace un análisis comparativo de cuatro metodologías de análisis y diseño de placas plegadas, a partir de un modelo de 9 placas plegadas de concreto reforzado, ensayado en el laboratorio.

Se comparan los desplazamientos calculados con las metodologías contra los obtenidos a través del programa SAP2000.

Se describe la aplicación de las metodologías propuestas por Yitzhaki, H. Simpson, D. Billington y E. Traum.

Se propone un método para el diseño de los diafragmas transversales.

Al final se propone el uso de las metodologías de acuerdo a la ubicación del eje de simetría de la sección transversal.

ABSTRACT

Stress and displacement computation at the intersection of the plates of a nine folded plates system of reinforced concrete tested was made under the condition of self weight and service, through two approximations with 6 and 8 plates, to get the nine plates system.

The results of applying methodologies of analysis and design for folded plates are compared to result of nine plates of reinforced concrete, with a trapezoidal transverse section, tested in a laboratory.

The vertical displacement were computed and compared with a program analysis, obtained from a finite element model.

A methodology for transverse diaphragm design is presented.

The application of the methodologies is suggested in agreement with the position of transversal symmetrical axis of the transverse section.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: **M.I. CARLOS JAVIER MENDOZA ESCOBEDO**

Secretario: **DR. OSCAR LÓPEZ BATIZ**

Vocal: **ING. NEFTALÍ RODRÍGUEZ CUEVAS**

1^{er}. Suplente: **ING. SANTIAGO LOERA PIZARRO**

2^{do}. Suplente: **M.I. OCTAVIO GARCÍA DOMÍNGUEZ**

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

TUTOR DE TESIS:

ING. NEFTALÍ RODRÍGUEZ CUEVAS

FIRMA

DEDICATORIAS

Al lector que está interesado en aprender el tema de este trabajo.

A MIS PADRES:

Aurelio Pérez Salas[†]
Raquel Escobedo Haro

A MIS HERMANAS:

Yareli Rakel Pérez Escobedo
Norma Verónica Pérez Escobedo



AGRADECIMIENTOS

A Dios

A mis padres

A mis Hermanos

A mi tutor: Ing. Neftalí Rodríguez Cuevas



RECONOCIMIENTO:

Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)
Instituto de Ingeniería de la UNAM
Universidad Autónoma del Estado de México (UAEM)



ÍNDICE

LISTA DE VARIABLES.....	I
INTRODUCCION.....	III
RESUMEN.....	IV
1. ANTECEDENTES.....	1
2. ASPECTOS GENERALES SOBRE PLACAS PLEGADAS.....	10
2.1 Comportamiento estructural de placas plegadas.....	10
2.2 Partes componentes de placas plegadas para lograr la estabilidad. Función estructural de los diafragmas extremos.....	10
2.3 Estructuras formadas por placas plegadas.....	11
2.4 Teoría de flexión en placas. Ecuaciones que controlan la obtención de fuerzas y momentos internos en placas.....	12
2.6 El efecto de los diafragmas extremos.....	14
2.7 Los desplazamientos en placas individuales y en conjunto de placas plegadas.....	14
3. CÁLCULO DE ESFUERZOS DE PLACAS PLEGADAS ENSAYADAS EN LABORATORIO.....	17
3.1 Desarrollo de las metodologías para análisis y diseño de un sistema de 6 placas plegadas.....	19
3.1.1. Método de David Yitzhaki.....	19
3.1.2. Método de Billington.....	29
3.1.3 Método de Eliahu Traum.....	43
3.1.4 Método de Howard Simpson.....	50
3.1.5. Comentarios.....	69
3.1.2 Condición de carga de servicio.....	71
3.2. Cálculo de esfuerzos a un sistema de 8 placas plegadas.....	72
3.2.1. Condición de peso propio.....	72
3.2.2 Condición de servicio.....	73
3.2.3. Comentarios.....	74
3.3 Desarrollo de las metodologías para análisis y diseño de un sistema de 9 placas plegadas revisadas.....	75
3.3.1. Método de David Yitzhaki.....	75
3.3.2. Método de Billington.....	84
3.3.3 Método de H. Simpson.....	97
3.3.4 Condición de peso propio.....	118
3.3.5 Condición de carga de servicio.....	121
4. CAMBIO DE CONFIGURACIÓN DE PLACAS PLEGADAS.....	128
4.1 Desplazamiento de las aristas en un sistema de 6 placas plegadas.....	128
4.1.1 Condición de peso propio.....	128
4.1.2 Condición de carga de servicio.....	129
4.1.3. Comentarios.....	130
4.2 Desplazamiento de las aristas en un sistema de 8 placas plegadas.....	130
4.2.1 Condición de peso propio.....	130
4.2.2 Condición de carga de servicio.....	130
4.2.3. Comentarios.....	132
4.3 Desplazamiento de las aristas en un sistema de 9 placas plegadas.....	132
4.3.1 Método de Yitzhaki.....	132
4.3.2. Método de Billington.....	134
4.3.3. Comentarios.....	135
5. DISEÑO DE DIAFRAGMA O TIMPANO.....	140
6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES SOBRE EL DISEÑO Y ANÁLISIS DE PLACAS PLEGADAS.....	142
ANEXOS.....	143
A. MÉTODO DE LA FÓRMULA DE LOS TRES CORTANTES.....	143
A.1. Condición de carga de servicio.....	143
A.2. Condición de peso propio.....	148
A.3. Comentarios.....	148
B. DESCRIPCIÓN DEL MODELO ENSAYADO EN EL LABORATORIO DE MATERIALES DE LA UAEM.....	149
C. RESULTADOS EXPERIMENTALES, DEL ENSAYE REALIZADO EN LA UAEM.....	152
D. MODELO DE ELEMENTO FINITO PARA EL SISTEMA DE 9 PLACAS PLEGADAS.....	153
D.1. Condición de peso propio.....	153
D.2. Condición de servicio.....	155
REFERENCIAS.....	157

1. ANTECEDENTES.

El objetivo del presente trabajo es realizar un estudio comparativo de metodologías para el análisis y diseño a partir de un modelo ensayado, el cual es descrito en el anexo de este trabajo.

Los primeros antecedentes del diseño de placas plegadas, se desarrollaron en Alemania, con las contribuciones realizadas por Ehler en 1924, donde aplicaron conceptos matemáticos y de estructuras, para dar forma a métodos para calcular fuerzas y momentos internos en tanques de almacenamiento. Con los métodos propuestos, posteriormente se aplicaron a estructuras con formas diferentes de las acostumbradas en la práctica de esos años. En los años sesenta, en los Países Bajos, más de 120 estructuras con placas plegadas fueron realizadas, que a la fecha han tenido un comportamiento adecuado ante las inclemencias de la naturaleza.

Vasili Zacarovich Vlasov, ingeniero ruso, desarrolló una metodología de cálculo de las fuerzas y momentos internos de estructuras a base de placas plegadas; por primera vez, considera las rotaciones de las aristas. Con base en los avances logrados por los alemanes y el ruso, en años posteriores a 1945, en Estados Unidos surgieron posteriormente métodos más fáciles de entender como los métodos que se presentan en el capítulo 3, a un modelo a escala 1:4 de un sistema de placas plegadas de concreto reforzado, ensayado.

En los años sesenta estaba de moda la construcción y el estudio de cascarones de concreto reforzado. En México se tienen antecedentes del diseño de sistemas de placas plegadas utilizadas como cimentación de edificios. Se puede citar el edificio ubicado en la calle de Héroes y Mina en la Cd. de México, construido con estructura de acero y con cimentación a base de placas plegadas de 1m de peralte en forma trapecial, con placas de concreto reforzado de 15cm de espesor. En esta aplicación, el empuje de las fuerzas del terreno se presentan de abajo hacia arriba, motivo por la cual la mayor cantidad de acero de refuerzo se coloca en las placas superiores de la sección transversal.

También hay ejemplos de placas plegadas utilizadas para cubrir grandes áreas de terreno, en Ciudad Universitaria por ejemplo, en el estacionamiento sobre Insurgentes Sur a un costado del Edificio de Rectoría, donde se tienen sistemas de placas plegadas en forma de diente de sierra con un claro de 12.5 metros para cubrir un área de 727m² con columnas y trabes de apoyo en el sentido transversal; y también el auditorio en la Facultad de Medicina, donde las placas plegadas forman un abanico. Otro ejemplo se tiene en el auditorio Javier Barros Sierra de la Facultad de Ingeniería, donde se cubre una superficie de 20x15m aproximadamente, con sección transversal trapezoidal con un peralte de 2m aproximadamente. La obra de mayor dimensión mencionadas en esta sección es el centro comercial puerta del sol en Guadalajara, con claros libres de hasta 22.5m con placas plegadas de sección trapezoidal con diafragmas extremos. Algunas de las piezas fueron fabricadas in situ, pero la gran mayoría en un taller, por lo que tuvieron que ser transportadas por vía terrestre, por medio de tráiler acondicionados para ello.

Los cascarones cilíndricos pueden analizarse como una serie de placas plegadas, pero para ello primero hay que saber cómo se analiza un sistema de un reducido número de placas, ya que los cálculos numéricos se simplifican notablemente, para el cálculo de esfuerzos, momentos y deformaciones; también para cualquier estructura de forma curva, en donde se definan las condiciones de apoyo, la geometría y las propiedades de los materiales, se puede diseñar como un sistema de placas plegadas, con alguno de los métodos presentados en el presente escrito, por lo menos para la condición de peso propio, por razones explicadas en el capítulo 3. Con la idea de simplificar los cálculos en los cascarones de pared delgada, surgieron las placas plegadas, con la filosofía de que toda superficie curva puede generarse por una serie infinita de placas, cuyo ángulo entre ellas depende de la geometría de la sección transversal que quiere analizarse.

Al tenerse una superficie plana, aparecen efectos de flexión irremediablemente, lo que provoca que el espesor de las placas tenga que ser mayor, a diferencia de las superficies curvas, donde es posible generar una configuración donde sólo actúen fuerzas de membrana (cascarón con la sección circular).

F. Candela (1970) distinguía las losas plegadas de las estructuras prismáticas de los cascarones delgados, en que los primeros están sujetos a una combinación de esfuerzos de membrana y fuerzas flexionantes.

Milo Ketchum (1990), especialista en el diseño y construcción de dichas estructuras, escribió al respecto acerca de sus ventajas:

“Su análisis es más directo, usando métodos con los que estaba familiarizado, y los elementos estructurales fueron aquellos que se usan en otras estructuras de concreto. [...] es posible analizar las placas plegadas con más precisión que los cascarones cilíndricos. Ketchum también contribuyó a bautizar este tipo de estructuras:

No estuvo de acuerdo en el nombre “placas dobladas” y mientras fue miembro del comité de la ASCE, fue al menos parcialmente responsable de cambiar el nombre a placas plegadas” (1990).

La enorme variedad de formas imaginables de dichas estructuras se encuentra en una gran cantidad de textos. Las actualmente construidas, sin embargo, generalmente adoptan la forma más simple, aunque se han construido algunas combinaciones de placas muy complejas, como en la iglesia de San José en Alemania, 1966-67. Formas poliédricas pueden ser consideradas como placas plegadas. Otra ventaja es, que a comparación de los cascarones, “el cimbrado es a base de superficies planas, lo que implica menores dificultades”¹. Debe tenerse en cuenta al respecto que tales “cimbrados simplificados [...] disminuyen el riesgo de pandeo, ya que la curvatura hace más sensibles a este efecto a los cascarones”. Por esta razón están más limitados en términos de amplitud y cargas”² que las formas curvas.

¹ Angerer, 1972, p. 51

² Cassinello, 1960, p. 542

Un trabajo realizado por Rafael García (1996), presenta las estructuras realizadas desde 1914 hasta los años 60's con placas plegadas, de estructuras de pequeña, media y gran escala. Del primer tipo, la torre de agua de Dubbeldam, de forma hexagonal con 9m de un extremo a otro, construida en 1914, a cargo del constructor Stulemeyer, pionero en la construcción en concreto en dicho país, es un notable ejemplo. A partir de esta obra, surgió un interés por continuar con esta idea, de techar áreas de forma segura, eficiente y con el mínimo de materiales (económicas) y construirlas en el menor tiempo posible.

A consecuencia de lo anterior y de un desarrollo en la diversidad de formas constructivas y de diseño, se organizó el tercer simposium de estructuras de cascarones del 30 de agosto al 2 de septiembre de 1961 en la Escuela Politécnica Delft (Países Bajos), bajo el auspicio de RILEM (Reunion Internacionale de Laboratoires et expert de Materiaux, Systeme de Contruction et Ovrages) y IAAS (International Asociation for Shell and Spatial Structures) y el liderazgo del ingeniero alemán A. M. Haas, un experto renombrado en dicho campo en esos años, donde fueron temas de discusión y análisis las placas plegadas.

Techos largos de este tipo, todos con forma plegada V y contruidos en los cincuentas, son ejemplificados por la estructura que cubre el edificio tipo en Glanerburg (1959), Países Bajos (Figura 1.1). Este techo consiste de una placa continua plegada en cantiliver de 4.5m en cada extremo, soportada por 2 marcos con 10 crujías paralelas, separadas 9m cada una. Las vigas inclinadas sobre estas crujías se encuentran al centro del claro, donde forman un vértice de 0.72m arriba unión viga-columna; en otras palabras, con 29.7 % de pendiente. El cascarón se pliega hacia arriba en los extremos del marco, lo que contribuye a rigidizar la estructura horizontalmente. El espesor estándar de este techo fue de 8cm. Los diseñadores de este sistema de placas plegadas (Beltman y Spit) sabían que el cantiliver era decisivo en los cálculos, ya que el mayor esfuerzo y deformación se concentran en los pliegues, por lo que es necesario incrementar la cantidad de refuerzo y espesor en dichos lugares (1962). El refuerzo fue colocado en 5 capas, la primera y quinta para absorber el esfuerzo cortante, y el segundo y cuarto para actuar como refuerzo principal. Las recomendaciones del servicio nacional de construcción pedían solo tres capas.

En la figura 1.1 se tiene un sistema de placas plegadas de 8cm de espesor, con un ángulo de inclinación de 16.7°, con placas en cantiliver con un claro de 4.5m y placas simplemente apoyadas a cada 9m de claro en el sentido longitudinal y pliegues en el extremo derecho e izquierdo de la sección transversal de 0.838m, con un espesor mayor en la arista que une con la placa vecina, le dan rigidez a la estructura horizontalmente.

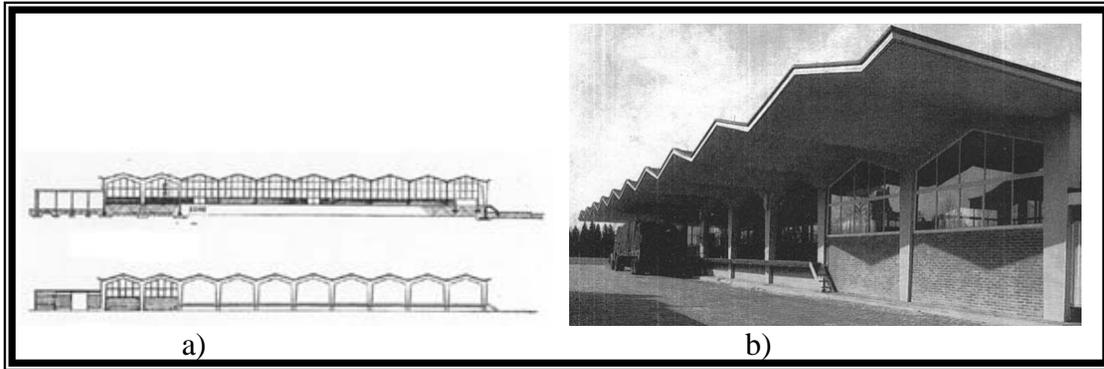


Figura 1.1a) Corte transversal de la construcción tipo en Glanerburg (1959), **b)** cantiliver del sistema de placas.

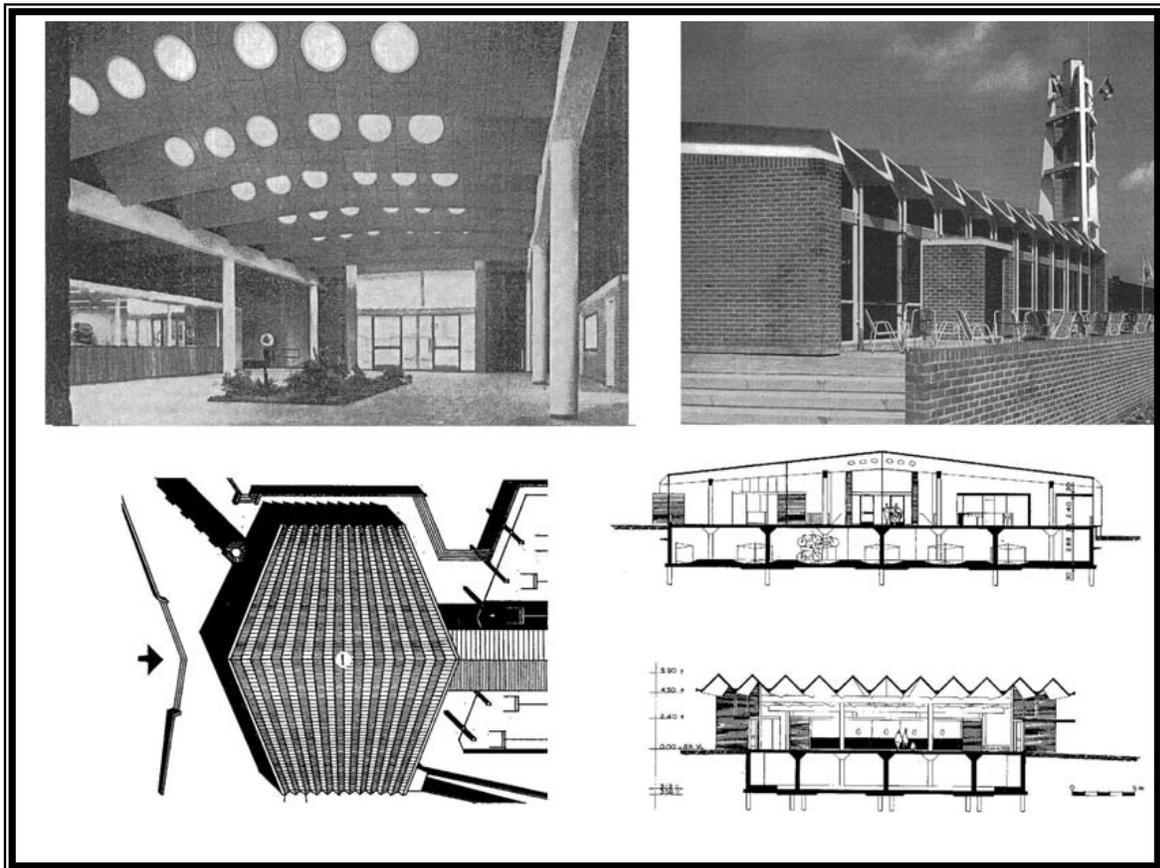


Figura 1.2. Techo de la estación nueva en Den Helder. (G. J. Van del Grinten), cubre un área de 35x30m. (Cement 1961, p. 441; Shelling 1959, pp. 16, 18).

Estructuras de claros de mediana escala.

El techo plegado sobre la fábrica de plásticos de Zeit (1960) marcó otro paso significativo en la construcción de placas plegadas (Figura 1.2). Erigida bajo la supervisión del arquitecto D. Masselink junto con G. Beenker y AKU servicios de ingeniería (Caspers, 1962), salvó un claro de 20m. Éste no tuvo cantiliver soportado sobre apoyos. La V tiene 1m de peralte, incrementándose 20cm hacia el centro del claro. Se reforzó con 2 series de cables Freyssinet, una consistente en dos cables colocados horizontalmente a lo largo de los valles y la otra, también conteniendo los dos cables, anclados a los vértices y arqueados a través de los lados de las placas. Este cascarón tiene 9cm de espesor, aunque en los valles y vértices tuvo que ser aumentado de 25 a 37.5cm para cubrir los cables.

Otro ejemplo de estructuras de dimensión intermedia es la iglesia en Hoensbroek (1964), con un claro libre de 21.40m (figura 1.4). Este edificio es de particular interés porque, por razones de tiempo de construcción, las placas plegadas no fueron coladas en sitio, además, fueron colocados trece miembros precolados en forma de V. Todos los componentes fueron fabricados en un sitio distinto al de su colocación por lo que fue necesario hacer uso de transporte especializado para trasladar las piezas al sitio de la obra. Este procedimiento fue basado en la experiencia adquirida durante la construcción de una iglesia cuyo 20 de pares de placas fueron manufacturadas en la misma planta y embarcado por tierra (1960).

“Debido a que las piezas de techo son elementos separados, se presentan problemas de pandeo en las alas, que deben estudiarse aparte”, (Beckelmans 1964). Esto último es importante si las piezas se prefabrican, ya que puede regir el diseño los esfuerzos que se generan en las estructuras, desde su fabricación hasta su colocación.

Las piezas utilizadas, tienen un metro de altura y 8cm de espesor. Los paneles de la fachada tienen 20cm de espesor, que incluyen 2cm de impermeabilización, y tiene un ángulo de plegado un poco menor que el techo, así como ventanas verticales en los lados.

Otro ejemplo lo constituye los laboratorios Verenigd Plastic-Verkoopkantoor en Zeist, con 20m de claro, sin placas en cantiliver, con placas de 9cm de espesor y aumentado a 25 y 37.5cm en las aristas para cubrir los cables de preesfuerzo (Caspers 1962, pp. 17-19).

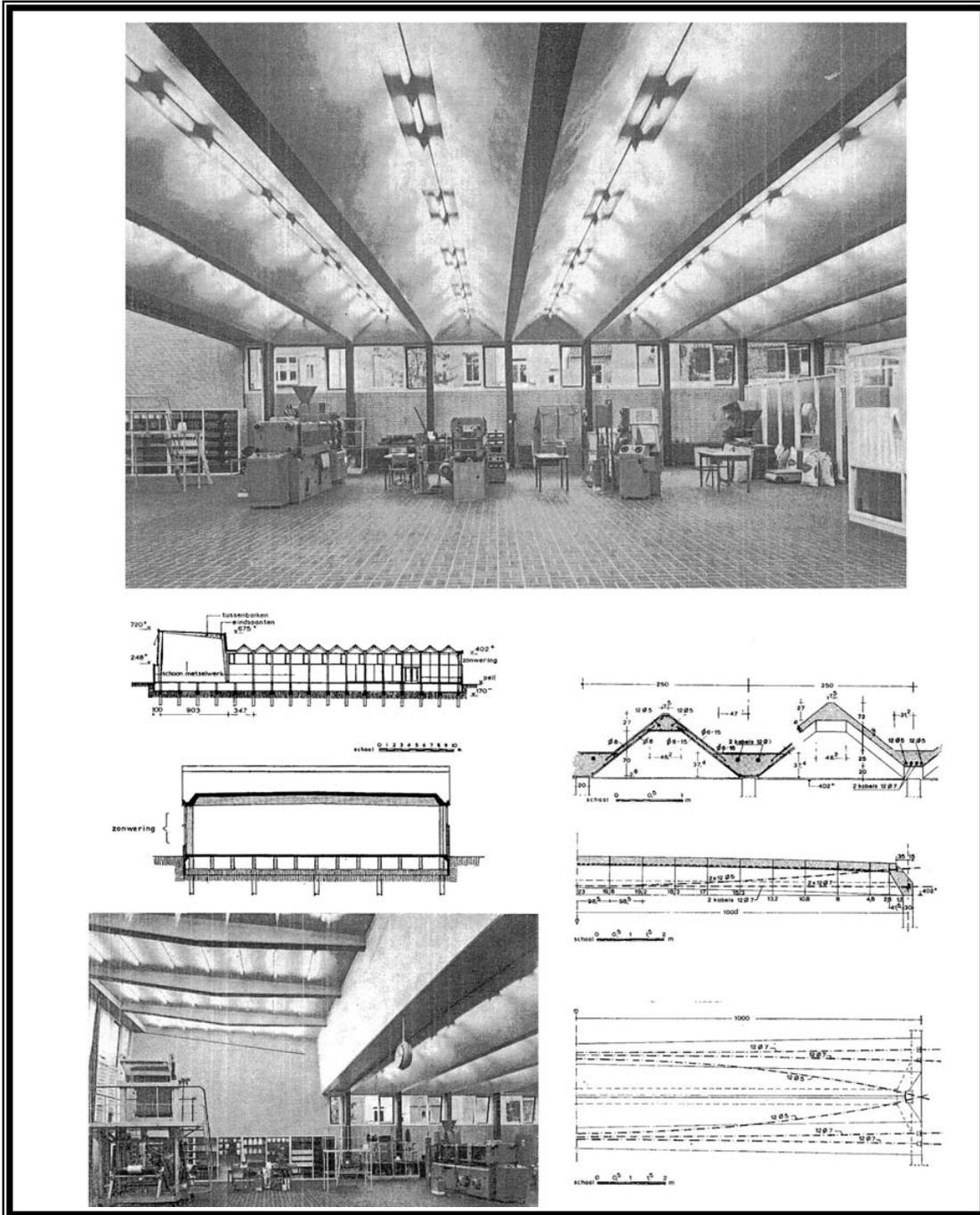


Figura 1.3. Construcción para los laboratorios Verenigd Plastic-Verkoopkantoor en Zeist.

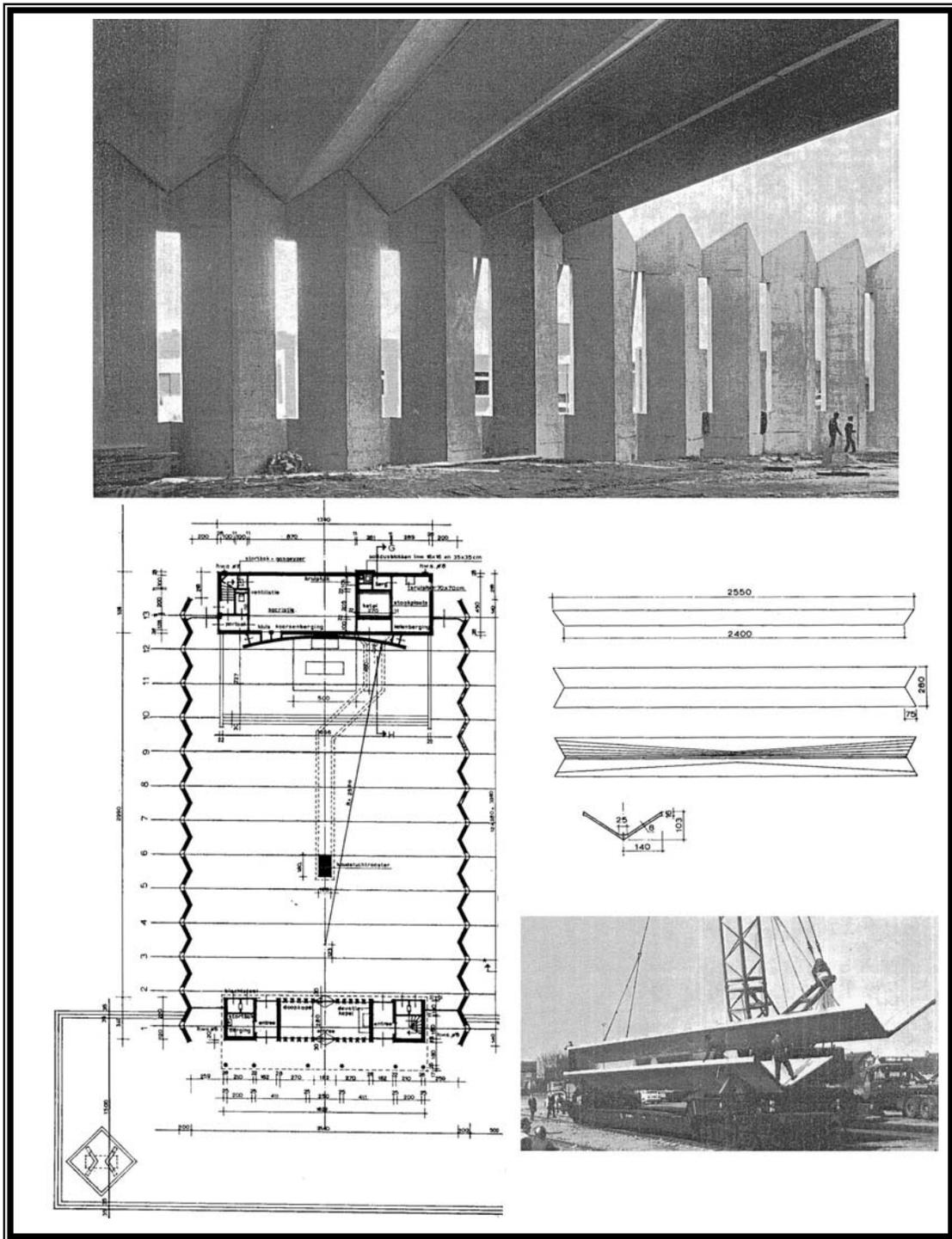


Figura 1.4. Iglesia en Hoensbroek, Heerlen, con claros de 21.4m, (Brekelmans 1964, p. 468; Meischke, pp. 352-354). Las piezas prefabricadas, tienen 1m de peralte y 8cm de espesor, (Brekelmans 1964, p. 468; Meischke, pp. 352-354).

Estructuras de gran claro.

La primera de dos techos plegados de gran escala identificados en Holanda cubre una base de ventas de un mercado de pescado en Scheveningen (figura 1.5). El diseño del techo es más complejo que la estructura descrita antes, tiene un cantiliver de 0.8m a lo largo del soporte y salva un claro de 27.3m. Pero adicionalmente, cae verticalmente en un extremo, para formar el muro que encierra uno de los lados.



Figura 1.5. Mercado de pescado, Sheveningen (Seyna y Hofman 1964, pp. 461, 466; TU Delft).

El techo de Scheveningen fue erigido sin preesfuerzo ni barras arqueadas ni estribos, las barras se colocaron inclinadas a un ángulo de 45° en ambos lados del muro de las V, para absorber el esfuerzo principal de tensión. Los pliegues son de 2.51m de altura en el punto más alto y de 15cm de espesor.

“El segundo ejemplo de techos plegados de gran claro, el más prominente que fue construido en los Países Bajos, cubre el Auditorio de la escuela politécnica de Delft (figura 1.6). La composición de este edificio es más compleja que cualquier otro descrito anteriormente, ya que el techo no cubre simplemente un área abierta grande, sino una gran variedad de espacios, requiriendo muy diferentes sistemas de soporte. Las placas del cantiliver del techo quedan hasta 14 m hacia fuera del soporte (columna).”³ “La estructura puede ser vista como una malla compuesta de una serie de costillas o un sistema de placas plegadas, por lo menos en lo que concierne al primer tramo de losa inclinada.” Algunas de las razones principales por las que se utilizó el preesfuerzo figura son las siguientes: a) espesores menores y por lo tanto menor peso, b) la necesidad de la forma irregular y c) la necesidad de crear esfuerzos de compresión en las placas comparable con los esfuerzos cortantes. Todo esto lleva a un complejo sistema de cables en las vigas, costillas y placas reforzadas”⁴.

³ (Dusschoten 1964b, p. 270)

⁴ (Dusschoten, 1964, p. 273).

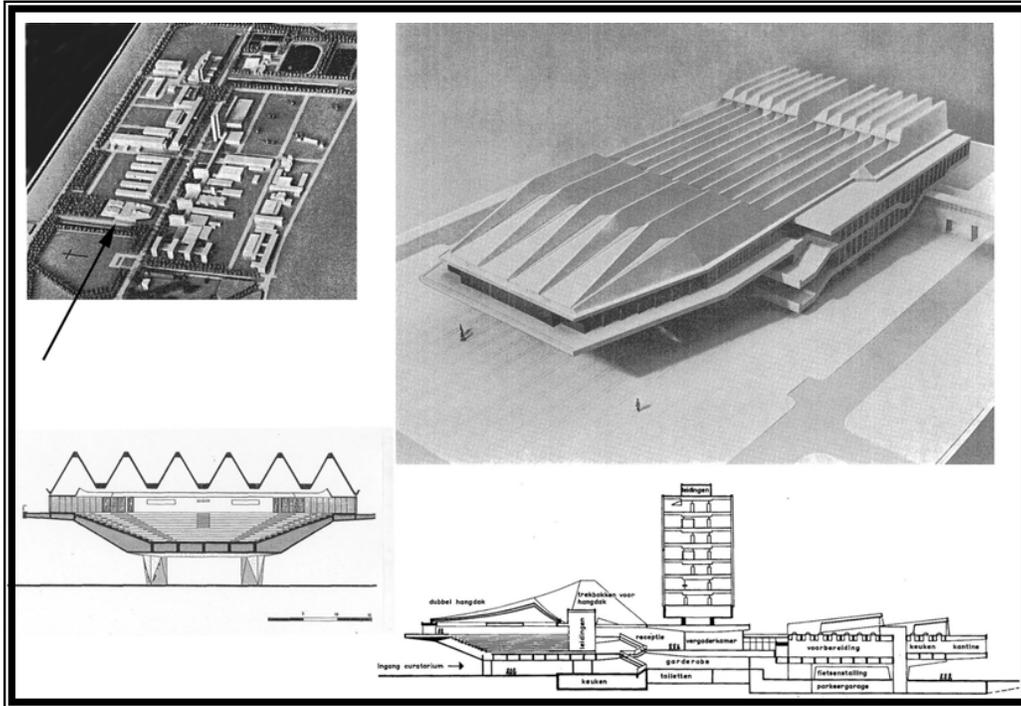


Figura 1.6 Modelo a escala del campus, sección transversal y primer diseño preliminar para el auditorio Delft PS. (Broek 1963 pp. 730-1). Modelo a escala de la versión final (Dusschoten 1964, p.270).

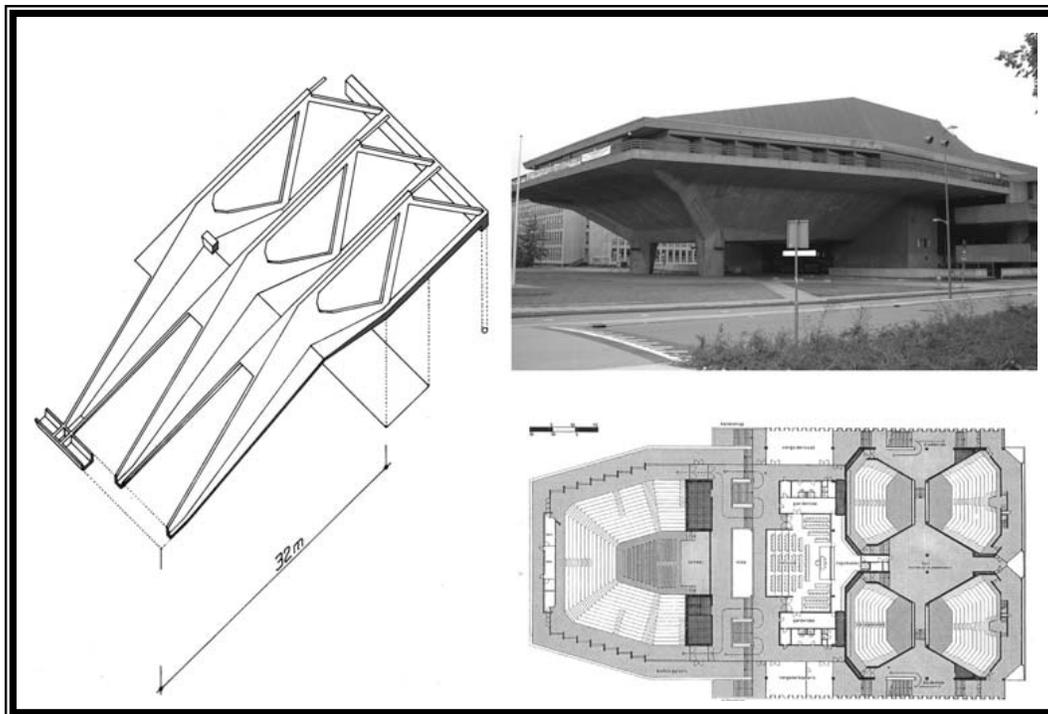


Figura 1.7. Diagrama axonométrico del techo del auditorio, el auditorio terminado, y planta de piso general (Broek 1963, p. 731). Con espesor de placa no mayor que 16 cm y placas en cantiliver de hasta 32 m de claro.

2. ASPECTOS GENERALES SOBRE PLACAS PLEGADAS.

2.1 Comportamiento estructural de placas plegadas.

El comportamiento de las placas plegadas se favorece al tener fuerzas de membrana debido a su geometría que hace que, además de las fuerzas debidas a flexión, aparezcan fuerzas horizontales que dan resistencia al sistema. Para lograr que la estructura tenga estabilidad es necesario restringir su desplazamiento, colocando diafragmas extremos o intermedios. Adicionalmente, para resistir torsión y/o flexión, se requieren traveses en las aristas que mejoran el comportamiento estructural en general.

La única forma de saber el comportamiento real de una estructura, al efectuar ensayos. Sin lo anterior, la teoría no puede ser verificada y por lo tanto, se tiene la incertidumbre para construir dichas estructuras. Sin embargo, dado lo costoso que es realizar dichas pruebas a escala real, los modelos a escala quedan como una alternativa. Aunque sigue presente la incertidumbre de si el modelo a escala se comportará de la misma forma que la estructura real. Es por ello que a partir de un sistema de nueve placas plegadas con la configuración de 9 placas plegadas mostrada en la figura 3.1.1.3, se aplican las metodologías propuestas en años anteriores por investigadores que han dedicado su vida a encontrar métodos prácticos para diseñar las estructuras de manera segura y eficiente.

2.2 Partes componentes de placas plegadas para lograr la estabilidad. Función estructural de los diafragmas extremos.

Para mejorar la estabilidad de un sistema de placas plegadas, se colocan en sus extremos, los diafragmas transversales, que pueden ser de dos tipos:

- 1) Diafragmas completamente rígidos (porciones sólidas).
- 2) Diafragmas elásticos.

Adicionalmente, para el caso de la configuración analizada en el presente trabajo, se tiene que los pliegues aportan la estabilidad necesaria a la estructura y no es necesario realizar un análisis por este concepto.

La estabilidad es dependiente del tipo de apoyo que tenga cada una de las placas componentes del sistema. En general, las placas que componen el sistema de placas plegadas, de acuerdo al tipo de apoyo que tengan en sus bordes, éstas pueden considerarse como alguno de los siguientes tipos:

- a) En cantiliver (en la dirección transversal de la estructura).
- b) Como miembro sometido a torsión (viga de arista con rigidez torsional)
- c) Placa soportada en tres lados
- d) Placa soportada en cuatro lados, con viga de arista
- e) Placa soportada en cuatro lados, con soporte de muro de tabique
- f) Placa soportada en cuatro lados, con soportes tipo puntal

En el sistema ensayado, se tiene que las placas de los extremos, es decir, la 1 y 9, están soportadas en tres lados, dos de sus lados por los diafragmas extremos y el tercero por una placa adyacente. Las demás placas, de la 2 a la 8, están soportadas en sus cuatro extremos, dos por los diafragmas extremos y dos por las placas adyacentes.

2.3 Estructuras formadas por placas plegadas.

Las placas plegadas siguen al desarrollo de barras en cascarón por algunos años. En 1929 Craemer describió un techo de 24m de claro de una sección transversal como la que se muestra en la figura 2.3.1.

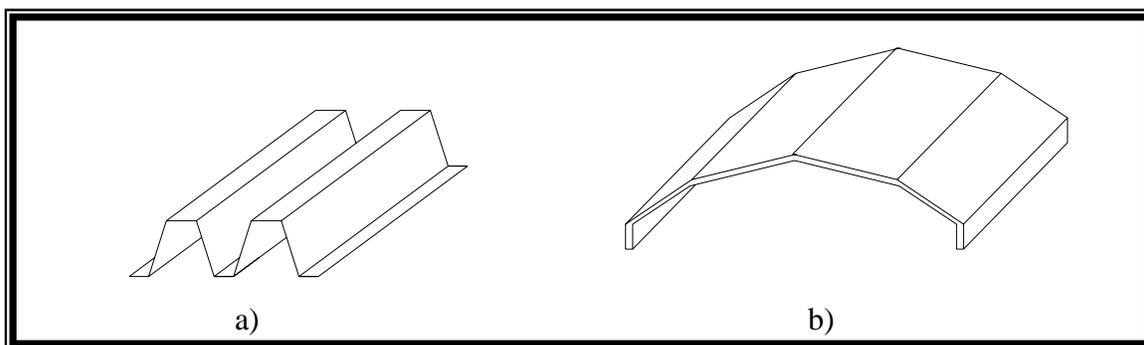


Figura 2.3.1 Placas plegadas.



Figura 2.3.1. Sistema de 8 placas plegadas para techar un gimnasio de una escuela secundaria. (Milo Ketchum).

2.4 Teoría de flexión en placas. Ecuaciones que controlan la obtención de fuerzas y momentos internos en placas.

Para diferenciar el trabajo de flexión del de membrana, es decir, el trabajo de losa y el de placa, respectivamente, se tiene que el primero actúa fuera del plano principal de la placa de acuerdo a la figura 2.1.4 b), y el segundo sobre el plano principal de la misma como se puede ver en la figura 2.4.1 c).

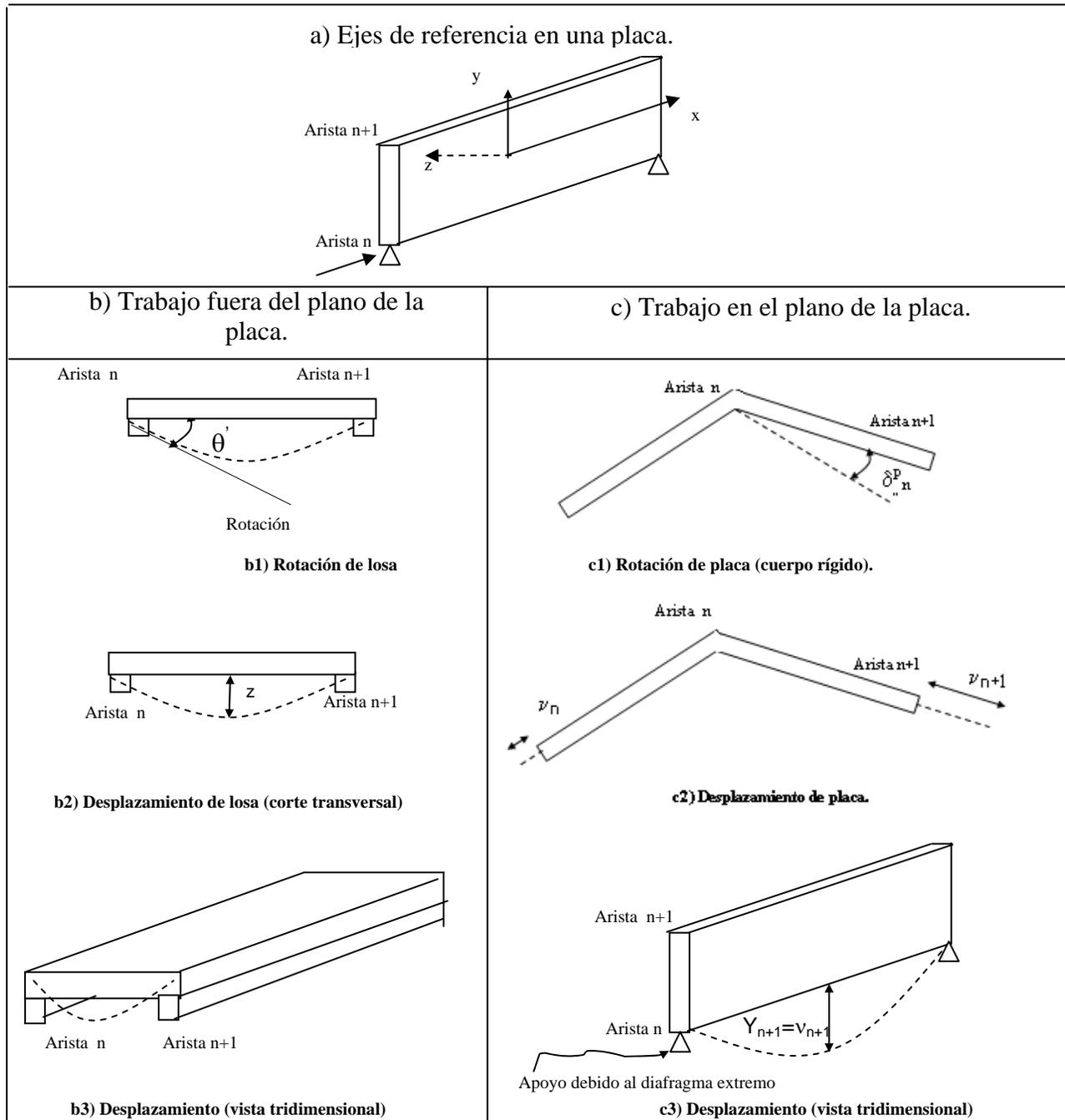


Figura 2.4.1 Comportamiento de losa y placa.

De lo anterior, se tiene que la teoría de placas como tal no es aplicada en ninguno de los cuatro métodos (Yitzhaki, E. Traum, Billington y H. Simpson) como se verá más adelante, es decir, que la ecuación diferencial general de placas de cuarto orden no se usa en los cálculos. Esto último simplifica el desarrollo matemático, al analizar por separado el trabajo fuera del plano de la placa y en el plano de la placa, a diferencia de las ecuaciones de placa, que integran los dos conceptos en su desarrollo, además de que es posible plantear la ecuación que describa la deformada de la placa en función de la posición en el plano de la placa, al suponer una variación senoidal o parabólica.

En las fuerzas dentro del plano de la placa, se tienen las fuerzas de membrana y en el trabajo fuera del plano de placa las fuerzas debido a flexión.

Además, al tenerse deformaciones pequeñas en cada placa individual, se considera que $\nu_p = 0$ donde ν_p es el módulo de Poisson. Esto no significa que las deformaciones en una y otra dirección sean cero, sino que se calculan al analizar el trabajo dentro y fuera del plano de placa.

2.5 Fuerzas dentro del plano de las placas.

En el párrafo anterior, se describe el motivo por el cual la teoría de placas en sí, no es totalmente aplicada en el presente escrito. Las fuerzas de placa P , se calculan al proyectar las reacciones en las aristas sobre el plano neutro de cada placa, de acuerdo a la figura 2.5.1.

$$P_n = R_n \frac{\cos \theta_{n+1}}{\text{sen} \gamma_n} - R_{n-1} \frac{\cos \theta_{n-1}}{\text{sen} \gamma_{n-1}} \quad (2.5.1)$$

$$P_n = R_n \alpha_{n+1} - R_{n-1} \beta_{n-1} \quad (2.5.2)$$

Donde θ es el ángulo que forma la placa respecto a la horizontal, γ el ángulo entre las placas, y R_n la reacción en la arista.

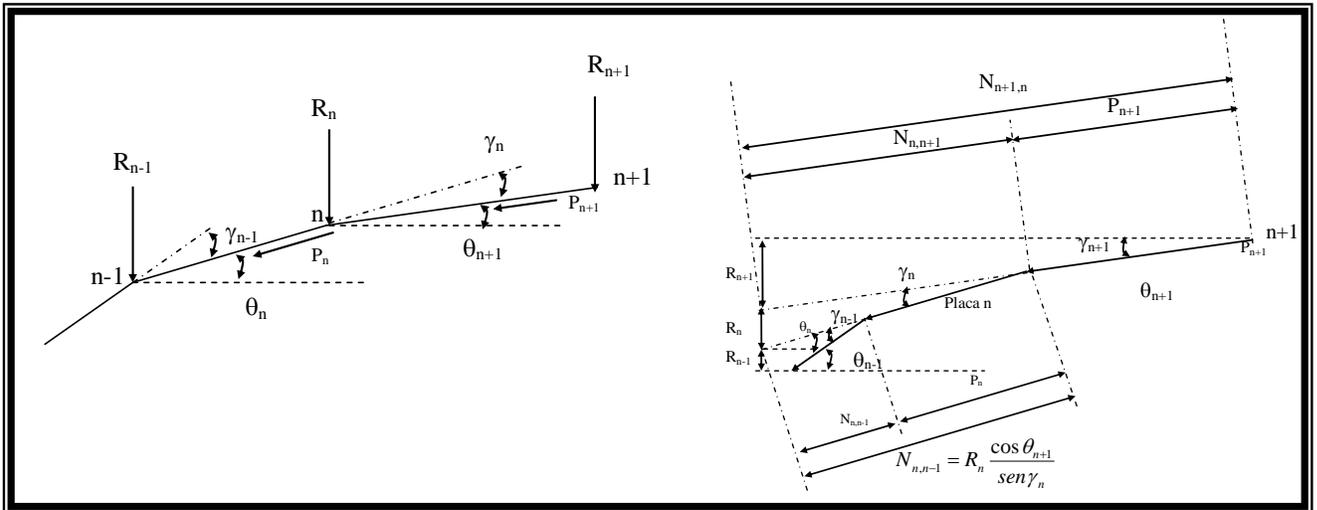


Figura 2.5.1. Fuerzas de placa en función de θ , γ y R_n .

2.6 El efecto de los diafragmas extremos.

El diafragma es indispensable para lograr mantener la configuración del sistema* y que las placas puedan trabajar en flexión en el sentido longitudinal. Como regla general, el ancho de una placa individual de una estructura plegada es muy pequeño en relación a su longitud. Es casi imposible dar un análisis preciso del comportamiento elástico de la estructura en los extremos del diafragma. En la mayoría de los casos, las placas se diseñan para soportar las condiciones más desfavorables a la que estará expuesta, para estar del lado de la seguridad.

Para fines de diseño del diafragma, se proyectan las fuerzas de placa sobre la horizontal y sobre la vertical, por lo anterior se requiere armado de acero en ambos sentidos. El diseño del diafragma del modelo ensayado, se presenta en el capítulo 5.

2.7 Los desplazamientos en placas individuales y en conjunto de placas plegadas.

Para determinar los desplazamientos en conjunto de placas plegadas, es necesario calcular los desplazamientos individuales en el sentido del plano neutro de cada placa con el teorema de Mohr, esto es cargando la placa con el diagrama de momento curvatura y el momento que producen dichas reacciones en las aristas, será el giro que se tiene en dicha placa. El procedimiento anterior, se aplica también al comportamiento de losa (giro de placa como un cuerpo rígido), posteriormente se suman dichos giros. Este concepto se utiliza en el método de Yitzhaki, y al aplicar las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones se tienen los desplazamientos del conjunto de placas. Sin embargo, para el método de Billington, el desarrollo es diferente, porque utiliza los desplazamientos en el sentido del eje neutro de las placas para determinar los desplazamientos en las aristas. A continuación se describen dichas expresiones.

Desplazamientos en el sentido del eje neutro de las placas.

Para determinar dichos desplazamientos, se analiza primero el debido al peso propio de la estructura y luego se suponen giros unitarios en las aristas. A continuación se describe la expresión para determinar los desplazamientos en el sentido del plano de las placas debido al peso propio:

$$v_n = \frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{5L^2}{48b_n} \quad (2.7.1)$$

Donde v_n es el desplazamiento en el sentido del eje neutro de la placa y σ_B y σ_T , son los esfuerzos en la arista inferior y superior, respectivamente, b_n el ancho de placa, E el módulo de elasticidad del material y L el claro del sistema de placas.

* La palabra "sistema", se refiere al conjunto de n placas que forman la cubierta a la cual se denomina "sistema de placas".

Cuando se supone un giro unitario en cualquiera de las aristas del sistema de placas plegadas, estos giros provocan esfuerzos y estos esfuerzos tienen una fuerza que esta contenida en el plano de la placa, por consecuencia se genera un desplazamiento de las mismas en el sentido del plano neutro de cada una de ellas. Dicho desplazamiento se calcula con la siguiente expresión:

$$v_n = \frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} \quad (2.7.2)$$

Al tenerse el desplazamiento de las placas en el sentido de su eje neutro, se está en la posibilidad de calcular los desplazamientos verticales, ya sea empleando en método gráfico propuesto por Williot-Mohr o con una expresión deducida del método gráfico (expresiones 2.7.3 y 2.7.4), si se tiene el ángulo que forma la placa con la horizontal y el ángulo entre placas. Se ha multiplicado por una constante C que depende de la variación de la carga (9.6 para el caso de una distribución uniforme, que es el caso del peso propio, y 9.87 si la variación es senoidal, caso supuesto para el momento que es cero en los apoyos y máximo al centro del claro, esto es, para cada uno de los casos cuando se supone un giro unitario de la arista.)

Diagrama de Williot-Mohr

El diagrama de Williot-Mohr, consiste en trazar una línea perpendicular al eje transversal de la placa que cruce la línea de acción de la deformación de la placa “n” (figura 2.7.1). Se hace lo mismo con la placa “n+1” y la distancia que existe entre la arista y la intersección de las dos líneas será el desplazamiento de la arista n. Esta distancia al proyectarse sobre la vertical en función de los ángulos de cada placa y el ángulo entre ellas, se obtiene la expresión (2.7.3), que al simplificar se tiene la expresión (2.7.4) que es la expresión para calcular el desplazamiento vertical de la arista n, multiplicada por el factor C.

A partir de las figuras 2.7.1 y 2.7.2, se obtiene la expresión 2.7.3, al proyectar los desplazamientos v_n en la dirección vertical, para obtener δ_n .

$$\delta_n = v_n \frac{\cos \theta_{n+1}}{\text{sen} \gamma_n} - v_{n+1} \frac{\cos \theta_n}{\text{sen} \gamma_n} \quad (2.7.3)$$

Donde δ_n es el desplazamiento vertical de la arista “n”, θ_n es el ángulo que la placa “n” forma respecto a la horizontal, γ_n el ángulo entre placas, positivo en el sentido antihorario, a partir de la placa de la derecha.

$$C \delta_n = C v_n \alpha_{n+1} - C v_{n+1} \beta_n \quad (2.7.4)$$

Donde $C = 9.6 E / L^2$, para la condición de peso propio, y $C=9.87 E / L^2$, al suponer una variación senoidal en las demás condiciones, $\alpha_{n+1} = \frac{\cos \theta_{n+1}}{\text{sen} \gamma_n}$ y $\beta_n = \frac{\cos \theta_n}{\text{sen} \gamma_n}$.

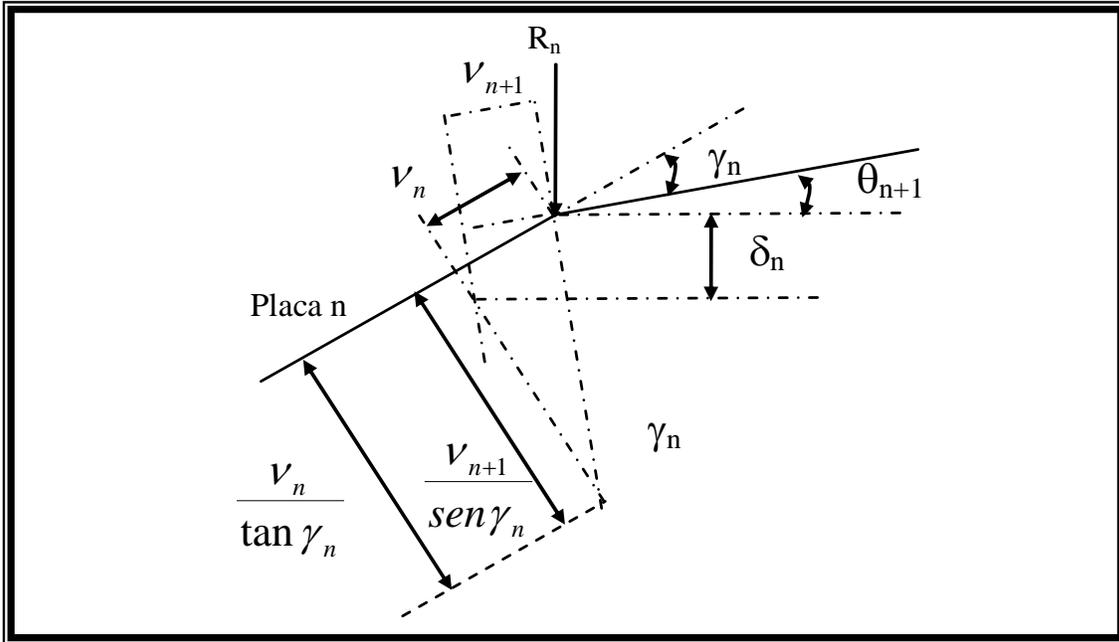


Figura 2.7.1. Desplazamientos verticales en función de los desplazamientos en el sentido del eje neutro de las placas (v_n).

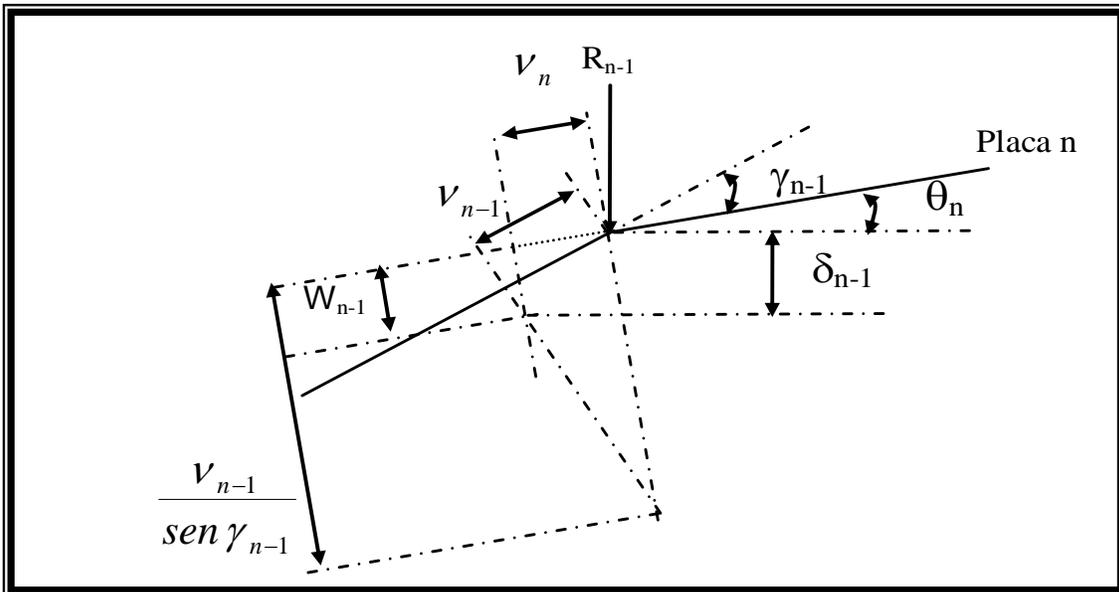


Figura 2.7.2. Desplazamientos verticales en función de los desplazamientos en el sentido del eje neutro de las placas (v_n).

3. CÁLCULO DE ESFUERZOS DE PLACAS PLEGADAS ENSAYADAS EN LABORATORIO.

Con el objetivo de ir de lo particular a lo general, se propone la aplicación de las cuatro metodologías a tres aproximaciones al modelo ensayado descritas a continuación.

La primera aproximación al modelo ensayado en el laboratorio, es un sistema de 6 placas de 2cm de espesor, apoyadas en diafragmas extremos con dos ángulo de inclinación, 0° para las placas de menor longitud y de 42.16° para las de mayor longitud (0.34m). El sistema de placas se supone que es continuo a todo lo largo de su sección transversal, así como longitudinal de acuerdo a la figura 3.1.

La segunda aproximación a la sección en estudio, consiste en un sistema de 8 placas con 2cm de espesor y placas de 0.34, 0.0375 y 0.075m de longitud, apoyadas en diafragmas extremos (Figura 3.2).

Finalmente se tiene el sistema de 9 placas plegadas de 2cm de espesor y placas de 0.34, 0.0375 y 0.075m de longitud, cuyo ángulos de inclinación son de 42.16° para las inclinadas que corresponden a las de mayor longitud (0.34m) y 0° para las de menor longitud (0.075 y 0.0375m) (figura 3.3), cuyos elementos mecánicos se calculan con los métodos antes citados y se muestran en la tablas, de acuerdo a la ubicación de las aristas.

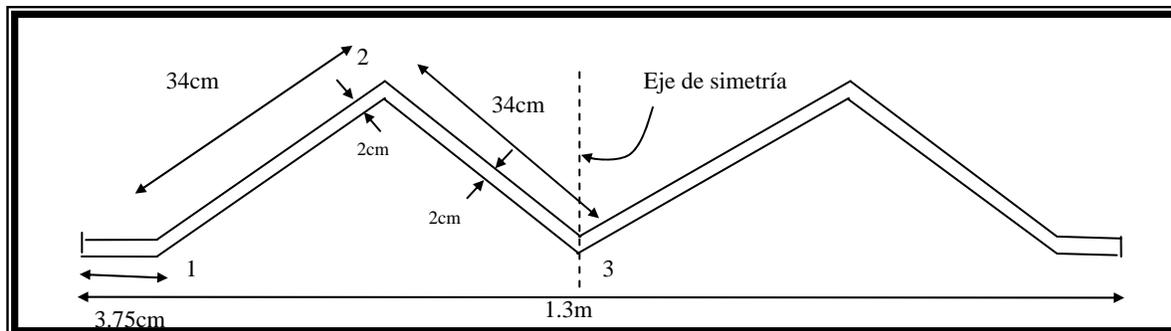


Figura 3.1 Primera aproximación. Sección transversal del sistema de placas plegadas de concreto reforzado con $L=3.85\text{m}$ (simétrica) y diafragmas extremos.

Se realizará un análisis suponiendo que el sistema de placas anterior, tiene dos placas más en la zona de compresión, lo que permite tener mayor espacio para albergar el acero de refuerzo requerido, economizando en materiales, ya que aumenta el momento de inercia sin necesidad de tener concreto donde no se requiere, es decir, en la zona de tensión, salvo en las partes donde se tiene acero de refuerzo y requiere de protección contra los agentes ambientales nocivos para el acero.

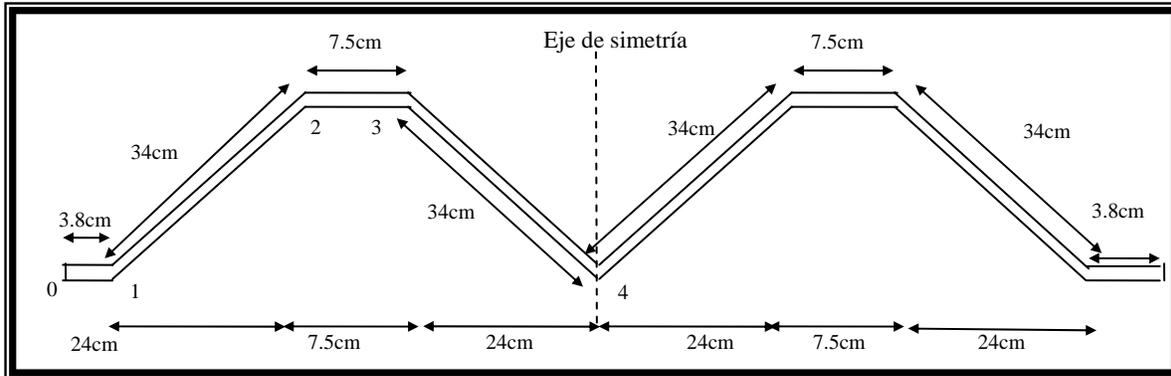


Figura 3.2. Segunda aproximación. Sección transversal del sistema de 8 placas plegadas de concreto reforzado con $L=3.85m$ (simétrica) y diafragmas extremos.

En la figura 3.3, se coloca una placa más respecto a la configuración de la figura 3.2, colocando ésta en donde está el eje de simetría de la sección transversal.

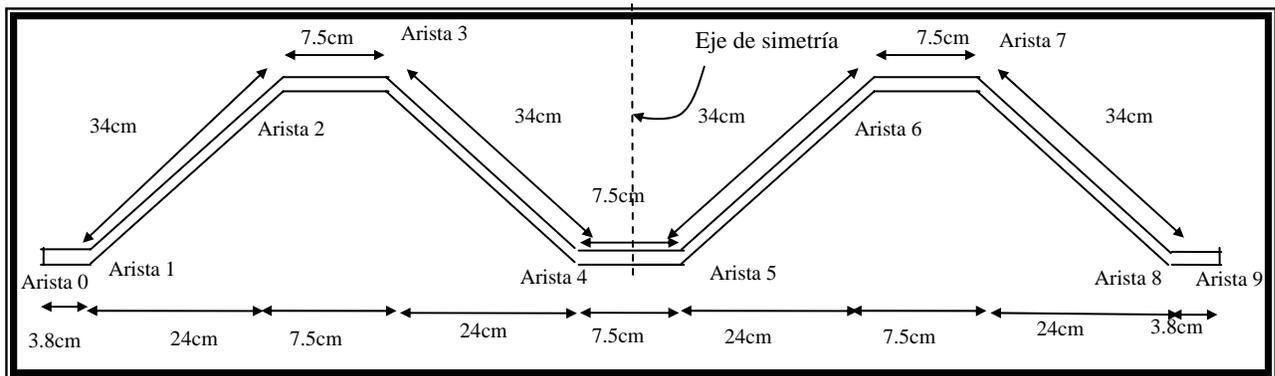


Figura 3.3 Tercera aproximación. Sección transversal del sistema de 9 placas plegadas de concreto reforzado con $L=3.85m$ (simétrica) y diafragmas extremos.

Las hipótesis para el análisis de placas plegadas son las siguientes:

- -Las placas que forman el cascarón prismático son relativamente largas, es decir $\frac{L}{b} > 3$.
- Variación lineal de esfuerzos a lo largo de la sección transversal de cada placa.
- Deformación por cortante igual a cero, es decir $v_p = 0$, donde v_p , es el módulo de Poisson. Esto debido a que se realizan dos análisis, por separado, el trabajo de fuera del plano de placa y el trabajo realizado en el plano de la placa, para que al plantear las ecuaciones de compatibilidad y resolver, se tienen los esfuerzos y deformaciones.
- En la flexión perpendicular a su plano, las placas largas se tratan como losas en una dirección, soportadas en sus bordes.
- Los momentos torsionantes y longitudinales son igual a cero.

- Los diafragmas son rígidos en su plano, pero flexibles y sin resistencia en la dirección perpendicular a su plano neutro, de tal manera que el esfuerzo longitudinal en los extremos de las placas es cero ($\sigma_x = 0$). Las reacciones de la estructura son transmitidas por los diafragmas a través de fuerza cortante.

3.1 Desarrollo de las metodologías para análisis y diseño de un sistema de 6 placas plegadas.

3.1.1. Método de David Yitzhaki.

A partir de las hipótesis planteadas en el capítulo anterior, se pueden calcular los esfuerzos transversales considerando la rotación de las placas, como si la variación de las solicitaciones tuvieran una forma senoidal, es decir, esfuerzo nulo en los extremos, donde se encuentran los diafragmas. La mecánica de materiales no menciona el cálculo de los momentos transversales a diferencia de éste método, lo que nos permite conocer los elementos mecánicos para diseñar de acuerdo al diagrama de momentos transversales, las cantidades de acero de refuerzo necesarias. El método que se desarrolla a continuación es llamado de giros y desplazamientos (slope-deflection), ya que se analiza la condición de peso propio suponiendo que las aristas están simplemente apoyadas, cuyas reacciones se proyectan en la dirección del eje neutro de cada placa.

A continuación se desarrolla el procedimiento propuesto por David Yitzhaki (Método de giros y desplazamientos), para un sistema de 6 placas, con diafragmas extremos para la condición de peso propio según la figura 3.1.1.1.

Para determinar el peso propio se procedió de la siguiente forma:
Se calculó el área de la placa:

Para las placas horizontales :

$$w = (2400\text{kg} / \text{m}^3)0.02\text{m}$$

$$w = 48\text{kg} / \text{m}^2$$

$$48\text{kg} / \text{m}^2 (1\text{m}) = 48\text{kg} / \text{m}$$

Para las placas inclinadas :

$$w = (2400\text{kg} / \text{m}^3)0.02\text{m} / \cos 42.61$$

$$w = 65.21\text{kg} / \text{m}^2$$

$$(65.21\text{kg} / \text{m}^2)(1\text{m}) = 65.21\text{kg} / \text{m}$$

Las cargas distribuidas que se aplican en las tres aproximaciones al sistema de 6 placas plegadas son $w_1 = 48\text{kg}/\text{m}$ y $w_2 = 65.2\text{kg}/\text{m}$, de acuerdo a la figura 3.1.1.1.

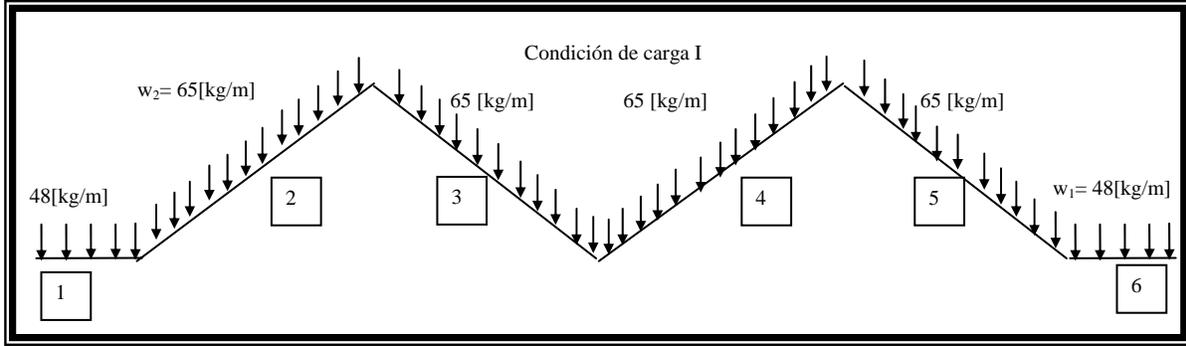


Figura 3.1.1.1. Sección transversal del sistema de 6 placas, con carga distribuida para la condición de peso propio.

Planteamiento de solución.

1. Se calculan las propiedades geométricas de acuerdo a la siguiente tabla:

Arista	Placa	b [m]	t [m]	A [m ²]	$S = \frac{bt^2}{6}$ [m ³]	θ
--------	-------	-------	-------	---------------------	---	----------

sen θ	cos θ	γ	sen γ	b cos θ	$\alpha_n = \frac{\cos \theta_n}{\text{sen } \gamma_{n-1}}$	$\beta_n = \frac{\cos \theta_n}{\text{sen } \gamma_n}$	J [m ⁴ /m]
--------------	--------------	----------	--------------	----------------	---	--	-----------------------

2. Obtener las reacciones del sistema primario (continuidad en las aristas), a partir de los momentos distribuidos R.
3. Proyectar las fuerzas anteriores sobre el eje neutro de placa correspondiente (Fuerzas de placa (P)). Ver expresión (2.7.1) y (2.7.2)
4. Calcular los momentos al aceptar que las aristas están articuladas, obtener los esfuerzos debido a flexión pura (fuerzas fuera del plano de la placa).
5. Distribuir con un método de relajación los esfuerzos del punto 4.
6. Calcular los desplazamientos verticales de las aristas con la expresión (2.7.4).

Donde:

$$cv_n = \frac{\Delta\sigma_n}{h_n \cos \theta_n} \quad (3.1.1.1)$$

$$\Delta C\delta_n^p = C\delta_n^p - C\delta_{n-1}^p \quad (3.1.1.2)$$

$$C\delta_n^P = \frac{\Delta C v_n}{b_n \cos \theta_n} \quad (3.1.1.3)$$

En la arista donde se aplica el momento: $C\delta_{n,n}^L = -\frac{9.87}{L^2} \left(\frac{b_n}{3J_n} + \frac{b_{n+1}}{3J_{n+1}} \right) \quad (3.1.1.4)$

En la arista más próxima a la derecha e izquierda del borde donde se aplica el momento.

$$C\delta_{n,n}^L = -\frac{9.87}{L^2} \left(\frac{b_n}{6J_n} \right) \quad (3.1.1.5)$$

7. Sumar el giro δ^L y δ^P del punto anterior.

$$C\delta_{n\ total} = C\delta_n^P + C\delta_{n,n}^L \quad (3.1.1.6)$$

8. Escribir los datos en la tabla siguiente:

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]	σ_o [ton/m ²]	σ_n [ton/m ²]	$\Delta\sigma$ [ton / m ²]
--------------------	--------	-------	----------	----------	----------------------------------	----------------------------------	--

Continuación de tabla anterior.

$\frac{\Delta\sigma}{b}$ [ton / m ³]	Cv [ton / m ³]	$C\Delta v / a$ [ton / m ³]	$C\delta_{nn}^P$ [ton / m ⁴]	$C\delta_{n,n}^L$ [ton / m ⁴]	$C\delta_{n\ total}$ [ton / m ⁴]
--	------------------------------	---	--	---	--

9. Repetir el paso 7 para cada condición de carga adicional. Para este problema, son en total 3 condiciones, condición 1 (solo carga viva y muerta), condición 2 (momento en el arista 2 de 453.6kg-m/m), condición 3 (momento en el arista 3 de 453.6kg/m!m).

10. Superponer las condiciones de carga. Resolver el sistema de ecuaciones de dos ecuaciones con tres incógnitas para este tipo de carga.

Los momentos finales, será la suma de los esfuerzos de la condición 1 más la parte proporcional de los momentos debidos a las otras condiciones de carga.

11. Dibujar el diagrama de momentos que se genera en el centro del claro, así como el diagrama de esfuerzos.

Desarrollo.

1. En la tabla 3.1.1.1 y 3.1.1.2, se tienen las propiedades geométricas del de la sección transversal completa.

Arista	Placa	b [m]	t [m]	A [m ²]	$S = \frac{bt^2}{6}$ [m ³]
0					
	1	0.0375	0.02	7.50E-04	4.69E-06
1					
	2	0.34	0.02	6.80E-03	3.85E-04
2					
	3	0.34	0.02	6.80E-03	3.85E-04
3					
	4	0.34	0.02	6.80E-03	3.85E-04
2'					
	5	0.34	0.02	6.80E-03	3.85E-04
1'					
	6	0.0375	0.02	7.50E-04	3.85E-04
0'					

Tabla 3.1.1.1. Propiedades geométricas de la sección (sistema de 6 placas).

Continuación de la tabla anterior:

Arista	Placa	θ	$\text{sen } \theta$	$\text{cos } \theta$	γ	$\text{sen } \gamma$	b cos θ	$\alpha_n = \frac{\text{cos } \theta_n}{\text{sen } \gamma_{n-1}}$	$\beta_n = \frac{\text{cos } \theta_n}{\text{sen } \gamma_n}$
0									
	1	0	0.000	1.000			3.750	0.000	-1.477
1					-42.61	-0.677			
	2	42.61	0.677	0.736			25.023	-1.087	0.739
2					85.22	0.997			
	3	-42.61	-0.677	0.736			25.023	0.739	-0.739
3					-85.22	-0.997			
	4	42.61	0.677	0.736			25.023	-0.739	0.739
2'					85.22	0.997			
	5	-42.61	-0.677	0.736			25.023	0.739	-1.087
1'					-42.61	-0.677			
	6	0	0.000	1.000			3.750	-1.477	
0'									

Tabla 3.1.1.2. Propiedades geométricas de la sección para el sistema de seis placas.

2. Reacciones a partir de los momentos distribuidos.

Cálculo del momento de empotramiento:

El cálculo del momento de empotramiento (m) se calcula con $wL^2/2$ para las placas en cantiliver (placa 1) y $wL^2/12$ para los dos extremos empotrados (placa 2 y 3) de acuerdo a la figura 3.1.1.2.

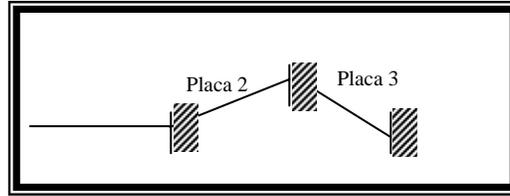


Figura 3.1.1.2. Condiciones de apoyo en la placa 2

La distribución de los momentos de empotramiento se presenta en la tabla 3.1.1.3.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
k		0.000	1.000	0.500	0.500	0.000
k/2		0.000	0.500	0.250	0.250	0.000
m [kg-m/m]		-0.034	-0.461	-0.461	-0.461	-0.461
	0.0		0.427	-0.2		0.05
	0.0			0.0		0.00
Total	0.00	-0.03	-0.03	-0.67	-0.46	-0.41
Balance		0.0		0.11		
Final [kg-m/m]	0.000	-0.034		-0.568		-0.407
V [kg/m]		1.8	8.9	13.2	11.7	10.4
R [kg/m]	0	10.7		24.9		20.8

Tabla 3.1.1.3. Distribución de momentos para la condición de pesos propio en el sistema de 6 placas plegadas (segunda aproximación).

La distribución de esfuerzos condición para la condición de peso propio (condición 1), se presenta en la tabla 3.1.1.4.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
Área de la placa	7.5		68.0		68.0	
r		0.901	0.099	0.500	0.500	0.000
r/2		0.450	0.050	0.250	0.250	0.000
σ_0 [kg/cm ²]	-460.5	460.5	16.4	-16.4	-16.2	16.2
	200.0			-22.1		
	2.5		-5.57			5.6
			-0.07	-0.3		0.1
Total	-258.01	460.49	10.81	-38.78	-16.23	21.86
Balance		-405.0		11.27		
Final [kg/cm ²]	-258.0	55.5		-27.50		21.9

Tabla 3.1.1.4. Distribución de esfuerzos para la condición de peso propio (sistema de 6 placas plegadas)

En resumen para la condición 1, se tienen los esfuerzos σ_n de la tabla 3.1.1.5.

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]	σ_o [kg/cm ²]	σ_n [kg/cm ²]
Cargas básicas	0		0			-258.01
		1		-11.65	-460.49	
	1		10.7			55.5
		2		34.20	16.44	
	2		24.9			-27.5
		3		-33.75	-16.23	
	3		20.8			21.9
	3'				16.23	

Tabla 3.1.1.5. Resumen de esfuerzos para la condición de peso propio (6 placas).

Una vez obtenidos los esfuerzos en las aristas del sistema para la condición de peso propio (condición I), se calculan los esfuerzo al suponer un giro unitario en la arista 2, (tabla 3.1.1.6) que al sustituir en la expresión $M = k \theta$ es necesario un momento que se obtiene del producto 1360.8kg-m/m (3000lb-ft/ft*0.4536kg/(1lb)) para obtener dicho giro, valor que se eligió para verificar el resultado del artículo ref. [5].

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
k		0.000	0.000	0.429	0.571	0.000
k/2		0.000	0.000	0.214	0.286	0.000
m [kg-m/m]				1360.8	0.0	0.0
Total	0.00	0.00	0.00	1360.80	0.00	-388.80
Balance		0.0		-583.20		0.00
Final [kg-m/m]	0	0		777.60		-388.80
V [kg/m]		0.00	3107.51	-3107.51	-4661.26	4661.26
R [kg/m]	0.00		3107.51		-7768.76	9322.52

Tabla 3.1.1.6. Distribución de momentos al suponer un giro unitario en la arista 2, es decir un $m_2=1360.8\text{kg-m/m}$, en la arista 2. (Condición 2).

A partir de la tabla 3.1.1.6 y la expresión $\sigma_o = \frac{m_{distribuido}}{S}$ donde S es el módulo de sección de la placa se tienen los esfuerzos de la tabla 3.1.1.7.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
Área de la placa	7.5		68.0		68.0	
r		0.901	0.099	0.500	0.500	0.000
r/2		0.450	0.050	0.250	0.250	0.000
σ_0 [kg/cm ²]	-108234.6	108234.6	-447.2	447.2	-447.2	447.2
	48942.8			-5398.1		
	507.0		-1125.90			1125.9
	6.3		-13.98	-55.9		14.0
			-0.17	-0.7		0.2
Total	-58778.48	108234.63	-1587.30	-5007.48	-447.25	1587.30
Balance		-98912.5		2280.12		
Final [kg/cm ²]	-58778	9322		-2727.36		1587.30

Tabla 3.1.1.7. Distribución de esfuerzos al suponer un giro unitario en la arista 2, es decir un $m_2=1360.8\text{kg-m/m}$, en la arista 2. (Condición 2).

Los esfuerzos en las aristas para la condición 2, se resumen en la tabla 3.1.1.8:

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]	σ_0 [kg/cm ²]	σ_n [kg/cm ²]
Momento de 1360.8kg en la arista 2.	0.00		0.00			-58,778.48
		1.00		-3378.20	-108,234.63	
	1.00		3,107.51			9,322.16
		2.00		-1147.52	-447.25	
	2.00		-7,768.76			-2,727.36
		3.00		-1147.52	-447.25	
	3.00		9,322.52			1,587.30
	3'		1,147.52	447.25		

Tabla 3.1.1.8. Resumen de esfuerzos al suponer un giro unitario en la arista 2, es decir un $m_2=1360.8\text{kg kg-m/m}$, en la arista 2. (Condición 2).

Al aplicar un momento en la arista 3 ($m_3=2721.6\text{ kg-m/m}$) se calculan los esfuerzos al suponer un giro unitario en la arista 3, que al sustituir en la expresión $M=k \delta_n$ es necesario un momento de $6000\text{lb-ft/ft} \cdot 0.4536\text{kg-m/m}/(1\text{lb})$, es decir 2721.6kg-m/m , para obtener dicho giro unitario, en esta sección la placa se supone empotrada en ambos extremos, valor que se elige por verificar los resultados del ejemplo del artículo ref.[5].

La tabla 3.1.1.9, presenta la distribución de momentos al aplicar un giro unitario en la arista 3, ($m_3=2721.6\text{kg-m/m}$), así como las reacciones (R_n) en cada arista.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
k		0.000	0.000	0.429	0.571	0.000
k/2		0.000	0.000	0.214	0.286	0.000
m [kg-m/m]	0.0	0.0	0.0	0.0	-2721.6	2721.6
Total	0.00	0.00	0.00	0.00	-2721.60	1944.00
Balance		0.0		-1166.40		
Final [kg-m/m]	0.00	0.00		-1166.40		1944.00
V [kg/m]		0.00	-4661.26	4661.26	12430.02	-12430.02
R [kg/m]	0.00	-4661.26		17091.28		-24860.05

Tabla 3.1.1.9. Distribución de momentos al suponer un giro unitario en la arista 3, es decir un $m_3=2721.6\text{kg-m/m}$. (Condición 3).

A partir de las reacciones calculadas en la tabla anterior, se procede a calcular los esfuerzos en las aristas de las placas y distribuir posteriormente.

Distribución de esfuerzos para la condición 3. ($m_3=2721.6\text{kg}$)

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
Área de la placa	7.5		68.0		68.0	
r		0.901	0.099	0.500	0.500	0.000
r/2		0.450	0.050	0.250	0.250	0.000
$\sigma_{n-1,n}$ [kg/cm ²]	162352.0	-162352.0	2236.2	-2236.2	2236.2	-2236.2
	-74119.2			8174.9		
	-416.8		925.61			-925.6
			11.49	46.0		-11.5
Total	87815.94	-162351.95	3173.33	5984.66	2236.23	-3173.33
Balance		149082.4		-1874.22		
Final [kg/cm ²]	87815.94	-13269.58		4110.44		-3173.33

Tabla 3.1.1.10. Distribución de esfuerzos al suponer un giro unitario en la arista 3, es decir un $m_3 = 2721.6\text{kg-m/m}$, en la arista 3. (Condición 3).

Al proceder de manera análoga a la condición 2, se tiene es resumen de la tabla 3.1.1.11 para la condición 3.

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]	σ_0 [kg/cm ²]	σ_n [kg/cm ²]
Condición 3	0		0.00			87,815.94
		1		5067.31	162,351.95	
	1		-4,661.26			-13,269.58
		2		5737.60	2,236.23	
	2		17,091.28			4,110.44
		3		5737.60	2,236.23	
	3		-24,860.05			-3,173.33
	3'					

Tabla 3.1.1.11. Distribución de momentos al suponer un giro unitario en la arista 3, es decir un $m_3 = 2721.6\text{kg}\cdot\text{m}/\text{m}$, en la arista 3. (Condición 3).

A continuación se procede a calcular los giros en las aristas, para las tres condiciones anteriores.

A partir de los esfuerzos de la tabla 3.1.1.11 se calculan los giros en las aristas al sustituir en las expresiones 3.1.1.1. a 3.1.1.6 y se tienen los resultados de la tabla 3.1.1.12.

Condición de carga	Arista	Placa	$C\delta_{m}^P$ [ton / m ⁴]	$C\delta_{n,n}^L$ [ton / m ⁴]	$C\delta_{total}$ [ton / m ⁴]
Condición 1 (peso propio)	0				
		1			
	1		2885688.18	0	2885688.18
		2			
	2		-363180.55	0	-363180.55
		3			
	3		-5835.74	0	-5835.74

Tabla 3.1.1.12. Giros en las aristas al suponer un giro unitario en la arista 1, es decir un $m_3=1360.8\text{kg}\cdot\text{m}/\text{m}$, en la arista 1. (Condición 1).

Al proceder de forma análoga a la condición 1, se tiene la tabla 3.1.1.13.

Condición de carga	Arista	Placa	$C\delta_{m}^P$ [ton / m ⁴]	$C\delta_{n,n}^L$ [ton / m ⁴]	$C\delta_{total}$ [ton / m ⁴]
Condición 2	0				
		1			
	1		619982405.34	-77020.9587	619905384.38
		2			
	2		-78894998.84	-308083.835	-79203082.67
		3			
	3		-1342881.13	-77020.9587	-1419902.09

Tabla 3.1.1.13. Giros en las aristas al suponer un giro unitario en la arista 2, es decir un $m_2=2721.6\text{kg}\cdot\text{m}/\text{m}$, en la arista 2. (Condición 2).

De la misma manera que la condición 2, al suponer un momento en la arista 3 se tiene el resumen de la tabla 3.1.1.14.

Condición de carga	Arista	Placa	$C\delta_m^p$ [ton / m ⁴]	$C\delta_{n,n}^L$ [ton / m ⁴]	$C\delta_{n\ total}$ [ton / m ⁴]
Condición 3	0				
		1			
	1		-919567791.44	0	-919567791.44
		2			
	2		117108180.11	-154041.917	116954138.19
		3			
	3		1752851.05	-616167.669	1136683.38

Tabla 3.1.1.14. Giros en las aristas al suponer un giro unitario en la arista 3, es decir un $m_3=2721.6\text{kg}\cdot\text{m}$ en la arista 3. (Condición 3).

De los giros anteriores por las 3 condiciones, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{9.87}{9.6}(-363180.5) - \frac{79203082.7}{1.3608}(m_2) + \frac{116954138.19}{2.7216}(m_3) = 0$$

$$\frac{9.87}{9.6}(-5835.7) - \frac{1419902.1}{1.3608}(m_2) + \frac{1136683.4}{2.7216}(m_3) = 0$$

Al resolver para m_2 y m_3 :

$$m_2 = -0.0050$$

$$m_3 = 0.0020$$

Al aplicar las ecuaciones de compatibilidad en el sistema y los valores m_1 y m_2 , se tienen los esfuerzos y momentos de la tabla 3.1.1.15.

Arista	Placa	Esfuerzos	M_{om} [kg-m/m]
0		19.83	0.00
	1		
1		11.89 (8.46)	-0.03
	2		
2		-14.58	-4.25
	3		
3		13.78 (10.77)	2.42

Tabla 3.1.1.15. Resumen de esfuerzos longitudinales y momentos transversales para el sistema de 6 placas plegadas para la condición de peso propio. El valor experimental está entre paréntesis.

Al graficar los momentos calculados en las aristas y suponer una variación parabólica como en una viga continua simplemente apoyada se obtiene la figura 3.1.1.3.

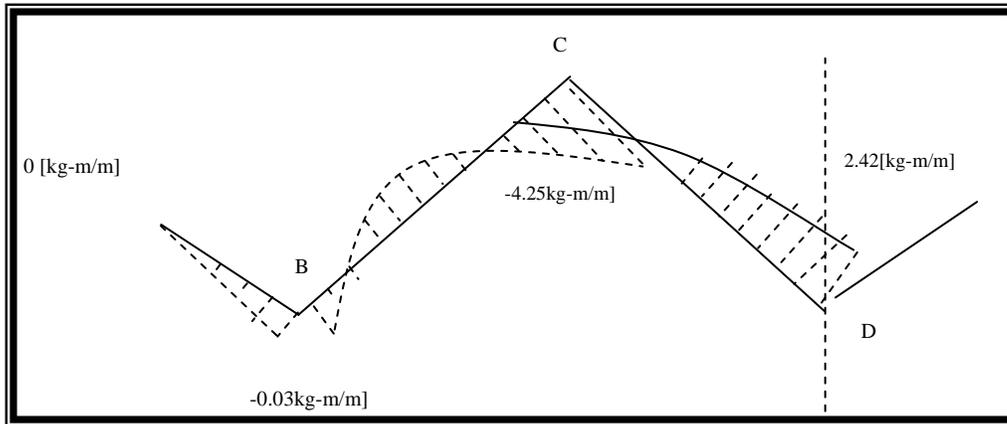


Figura 3.1.1.3. Diagrama de momentos para condición de peso propio para el sistema de 6 placas plegadas (primera aproximación).

En cuanto a los esfuerzos calculados en las aristas, se grafican en la figura 3.1.1.4 suponiendo una variación lineal, bajo la hipótesis de que la sección permanece plana después de aplicado en esfuerzo.

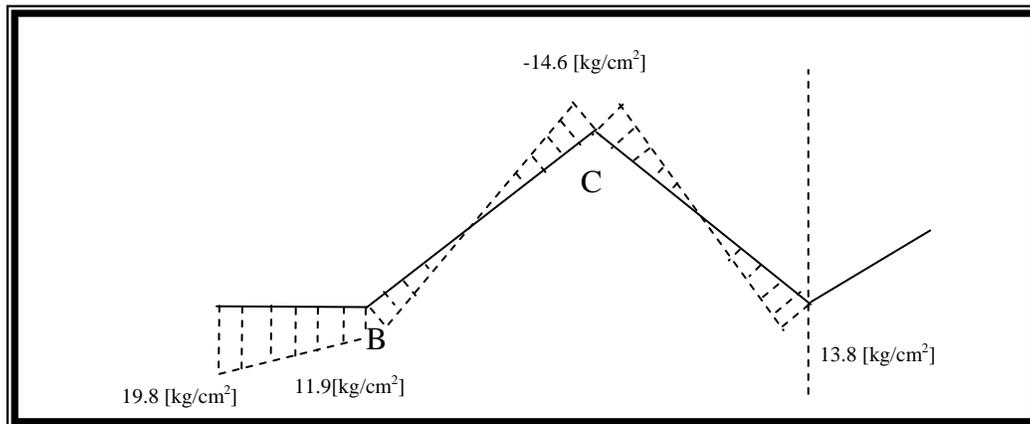


Figura 3.1.1.4. Diagrama de esfuerzos para condición de peso propio para el sistema de 6 placas plegadas (primera aproximación).

3.1.2. Método de Billington.

El método de Billington nos permite diseñar un sistema considerando el trabajo dentro del plano de placa y el trabajo fuera del plano de la placa (figura 1.1), que al aplicar el principio de superposición de causas y efectos, la compatibilidad de deformaciones y las propiedades de los materiales se obtienen los esfuerzos y momentos transversales. También se parte de las hipótesis enunciadas en la página 18.

Planteamiento del problema.

Calcular los esfuerzos en las aristas del sistema de 6 placas que se muestra en la figura 3.1, mediante el método propuesto en el artículo de Billington para la condición de peso propio.

Planteamiento de solución.

1. Calcular las propiedades geométricas de acuerdo a la siguiente tabla:

Arista	Placa	$b \cos \theta$ [m]	b [m]	t [m]	A [m ²]	S [m ³]
--------	-------	---------------------	-------	-------	---------------------	---------------------

θ	$\text{sen } \theta$	$\text{cos } \theta$	γ	$\text{sen } \gamma$	$\alpha_n = \frac{\text{cos } \theta_n}{\text{sen } \gamma_{n-1}}$	$\beta_n = \frac{\text{cos } \theta_n}{\text{sen } \gamma_n}$	J [m ⁴ /m]
----------	----------------------	----------------------	----------	----------------------	--	---	-----------------------

Calcular las reacciones del sistema primario (aristas articuladas) con las ecuaciones de la estática y obtener las fuerzas en la dirección del eje neutro de cada placa con la siguiente expresión (2.7.1) y (2.7.2).

2. Calcular los momentos (condición I) y distribuirlos para obtener el esfuerzo debido a la fuerza P_n como si fuera viga con la siguiente expresión:

$$\sigma = \pm \frac{M_n}{S_n} = \pm \frac{3P_n L^2}{4t_n b_n^2} \dots (3.1.2.1)$$

3. Distribuir los esfuerzos anteriores de acuerdo a un método de relajación, con un factor de distribución de rigidez de esfuerzos $4/A_n = 4/(b_n t_n)$ con factor de transporte iguala $1/2$.
4. Calcular los momentos debido a la condición 2,3,...,n.
5. Calcular la deformación en el sentido del eje neutro de la placa, de acuerdo con los esfuerzos distribuidos con la expresión (2.7.1). La rotación debido al desplazamiento en la dirección del plano de la placa.

$$\delta_n^p = \frac{1}{b_n} \left[-\frac{v_{n-1}}{\text{sen } \gamma_{n-1}} + v_n (\cot \gamma_{n-1} + \cot \gamma_n) - \frac{v_{n+1}}{\text{sen } \gamma_n} \right] \dots (3.1.2.2)$$

donde v_n se calcula con las expresiones 2.7.1 y 2.7.2 de acuerdo a las condiciones de análisis.

El giro es positivo en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

El error en cada arista es :

$$\delta_{n0} = \delta_n^p - \delta_{n+1}^p \dots (3.1.2.3)$$

Los giros debido a las fuerzas dentro del plano de la placa son los siguientes:

$$\delta_{n,n}^L = \frac{4b_n}{Et_n^3} + \frac{4b_{n+1}}{Et_{n+1}^3} \dots (3.1.2.4)$$

$$\delta_{n-1,n}^L = \frac{2b_n}{Et_n^3} \dots (3.1.2.5)$$

$$\delta_{n+1,n}^L = \frac{2b_{n+1}}{Et_{n+1}^3} \dots (3.1.2.6)$$

y las fuerzas debido a la rotación fuera del plano de la placa $\delta_{n,n}^P$ se calcula con los valores de R siguientes :

$$R_n = \frac{1}{b_n \cos \gamma_n} + \frac{1}{b_{n+1} \cos \gamma_{n+1}} \dots (3.1.2.7)$$

$$R_{n-1} = -\frac{1}{b_n \cos \gamma_n} \dots (3.1.2.8)$$

$$R_{n+1} = -\frac{1}{b_{n+1} \cos \gamma_{n+1}} \dots (3.1.2.9)$$

6. Corregir los momentos en las aristas, mediante momentos, que tengan la misma variación longitudinal que el error. Tal variación es una onda senoidal. Un momento de corrección $m_n = 453.6 \text{ kg} - m/m$ en la arista n, produce una rotación de placa que consiste en la suma de la rotación δ^P debido a la acción de placa y la rotación debido a la acción de losa δ^L , debida a flexión de viga en su propio plano. Calcular las reacciones debidas a los momentos anteriores (R_n) a partir de la distribución de los momentos propuestos, para posteriormente, calcular las fuerzas de placa (P_n) sustituyendo en la expresión (2.1) y (2.2).
7. Sustituir en la expresión 3.1.2.10 para el cálculo de esfuerzos, al suponer un momento, considerando el primer término de la serie de Fourier.

$$f = \frac{6P_n L^2}{\pi^2 t_n b_n^2} \dots (3.1.2.10)$$

8. Corregir los esfuerzos del paso 6 con un método de relajación.
9. Calcular las deformaciones en el sentido del eje neutro de la placa debido a los esfuerzos del paso 7 con la expresión (2.7.2).
10. Calcular nuevamente la rotación δ_n^P , con la expresión (3.1.2.10).

$$\delta_{nn} = \delta_{nn}^L + \delta_{nn}^P \dots (3.1.2.11)$$

$$\delta_{nn}^P = \delta_n^P - \delta_{n+1}^P \dots (3.1.2.12)$$

Corregir las rotaciones y las reacciones, calculadas en el punto anterior de acuerdo a la expresión (3.1.2.3).

Suponer que los esfuerzos varían en forma senoidal (primer término de la serie de Fourier) y sustituir en la expresión (3.1.2.10).

Distribuir los esfuerzos obtenidos en la expresión anterior, mediante un método de relajación.

Calcular los desplazamientos de las aristas y corregir.

11. Aplicar la compatibilidad de deformaciones para estructuras estáticamente indeterminadas, al suponer que la arista 1 es simplemente apoyada; para el sistema de 6 placas son simetría en carga y geometría se tiene:

$$\delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{20} = 0 \dots (2.1.2.13)$$

$$\delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{30} = 0 \dots (2.1.2.14)$$

Donde X_2 , y X_3 son los momentos correctores estáticamente indeterminados, en las aristas 2 y 3, respectivamente.

12. Sumar los momentos correctores a los momentos obtenidos del análisis de losa continua.
13. Calcular los esfuerzos finales longitudinales al sumar los esfuerzos (σ) resultado de los momentos (X_n) y los del sistema primario..
14. Dibujar los diagramas de momento y esfuerzos en el centro del claro de la estructura.

Desarrollo.

1. Las propiedades geométricas de la sección transversal del sistema de 6 placas, se presenta en la tabla 3.1.2.2. y 3.1.2.2.

Arista	Placa	b [cm]	t [cm]	A [cm ²]	$S = \frac{bt^2}{6}$ [cm ³]
0					
	1	3.75	2.00	7.50	4.69
1					
	2	34.00	2.00	68.00	385.33
2					
	3	34.00	2.00	68.00	385.33
3					
	3'	34.00	2.00	68.00	385.33

Tabla 3.1.2.1. Propiedades geométricas de la sección para el sistema d 6 placas plegadas.

Arista	Placa	θ	$\text{sen } \theta$	$\text{cos } \theta$	γ	$\text{sen } \gamma$	$b \text{ cos } \theta$	$\alpha_n = \frac{\text{cos } \theta_n}{\text{sen } \gamma_{n-1}}$	$\beta_n = \frac{\text{cos } \theta_n}{\text{sen } \gamma_n}$
0	1	0	0.000	1.000			0.0		-1.477
1	2	42.61	0.677	0.736	-42.61	-0.677	0.3	-1.087	0.739
2	3	-42.61	-0.677	0.736	85.22	0.997	0.3	0.739	-0.739
3	3'	42.61	0.677	0.736	-85.22	-0.997		-0.739	0.739
					85.22	0.997			

Tabla 3.1.2.2. Propiedades geométricas para el sistema de 6 placas plegadas⁵.

- Para calcular las reacciones se distribuyen los momentos de acuerdo a la tabla 3.1.2.3 para la condición 1 (peso propio), cuyos momentos distribuidos facilitan el cálculo de las reacciones (R) en las aristas.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
k		0.000	1.000	0.500	0.500	0.000
k/2		0.000	0.500	0.250	0.250	0.000
m [kg-m/m]		-0.034	-0.461	-0.461	-0.461	-0.461
	0.0			-0.2		
	0.0		-0.05			0.05
				0.0		
			-0.01			0.01
Total	0.00	-0.03	-0.52	-0.70	-0.46	-0.40
Balance		0.0		0.12		
Final [kg-m/m]	0.000	-0.034		-0.581		-0.401
V [kg/m]		1.8	8.9	13.2	11.8	10.3
R [kg/m]	0	10.7		25.0		20.7

Tabla 3.1.2.3. Distribución de momentos y cálculo de reacciones en las aristas, para la condición 1 (peso propio), al suponer que es una viga continua simétrica respecto a la arista 3.

Con las reacciones, de la tabla 3.1.2.3 se obtienen los esfuerzos iniciales y al dividir el momento distribuido entre el módulo de sección se tienen los esfuerzos se obtienen los esfuerzos de la tabla 3.1.2.4.

⁵ Nota. Cabe aclarar que el momento de inercia es el mismo para todas placas e igual 0.67cm^3 .

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
Área de la placa	7.5		68.0		68.0	
r		0.901	0.099	0.500	0.500	0.000
r/2		0.450	0.050	0.250	0.250	0.000
σ_0 [kg/cm ²]	-458.2	458.2	16.5	-16.5	-16.2	16.2
	198.9			-21.9		
	2.5		-5.54			5.5
			-0.07	-0.3		0.1
Total	-256.77	458.20	10.84	-38.67	-16.22	21.83
Balance		-402.9		11.23		
Final [kg/cm ²]	-256.8	55.3		-27.44		21.8

Tabla 3.1.2.4. Distribución de esfuerzos en el centro del claro del sistema de piso, para la condición 1 (peso propio) al suponer que es una viga continua en su sección transversal.

Los esfuerzos distribuidos en las aristas del sistema para la condición 1, se presentan en la tabla 3.1.2.5.

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]	σ_0 [kg/cm ²]	σ_n [kg/cm ²]
Cargas básicas	0		0.0			-256.77
		1		-11.59	-458.20	
	1		10.7			55.3
		2		34.22	16.45	
	2		25.0			-27.4
		3		-33.73	-16.22	
	3		20.7			21.8
	3'					

Tabla 3.1.2.5. Resumen de esfuerzos para la condición 1 (peso propio).

- El cálculo de momentos de empotramiento para la condición 2, se puede ver en la tabla 3.1.2.6 en la línea que se denomina “m”.

Las fuerzas cortantes (V) o reacciones en el sistema de placas, se calculan al aplicar las ecuaciones de equilibrio estático en cada placa a partir de los momentos distribuidos.

En cuanto a la fuerza R, es la suma de las fuerzas cortantes a la derecha y a la izquierda de la arista en estudio, en la dirección vertical. Con los valores de R, al sustituir en la expresión (2.2) se tiene P.

Al sustituir en la expresión (3.1.2.10) se tienen los esfuerzos iniciales en cada placa, y al suponer una variación lineal del esfuerzo, se tienen los valores en las aristas, cuyos valores están contenidos en la tabla 3.1.2.7 en la fila denominada σ_0 .

- Al distribuir los esfuerzos anteriores se tienen los resultados de la tabla 3.1.2.7.

Al suponer un momento en la arista 2 de 453.6kg-m/m, esto equivale a aplicar (1000 lb-ft/ft) en la arista, que al transformar a unidades del sistema métrico decimal se

obtiene el valor citado al principio de este párrafo. Cabe aclarar que el signo negativo es por ser momentos de nudo sobre barra en todos los casos de las distribuciones, positivo en sentido de las manecillas del reloj.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
k		0.000	0.000	0.429	0.571	0.000
k/2		0.000	0.000	0.214	0.286	0.000
m [kg-m/m]				-453.6	-453.6	0.0
				0.0		
Total	0.00	0.00	0.00	-453.60	-453.60	0.00
Balance		0.0		0.00		
Final [kg-m/m]	0	0		-453.60		0.00
V [kg/m]		0.00	-1812.71	1812.71	1812.71	-1812.71
R [kg/m]	0.00	-1812.71		3625.42		-3625.42

Tabla 3.1.2.6. Distribución de momentos al suponer un giro unitario en la arista 2, es decir $m_2 = 453.6\text{kg-m/m}$.

Al calcular los esfuerzos dividiendo los momentos distribuidos de la tabla 3.1.2.6 entre el módulo de sección, se tiene la fila σ_0 , de la tabla 3.1.2.7.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
Área de la placa	7.5		68.0		68.0	
r		0.901	0.099	0.500	0.500	0.000
r/2		0.450	0.050	0.250	0.250	0.000
[kg/cm ²]	63136.9	-63136.9	-45.3	45.3	45.3	-45.3
	-28412.1		783.42	3133.7		-783.4
	-352.8		9.73	38.9		-9.7
	-4.4			0.5		
			0.12			-0.1
Total	34367.59	-63136.87	747.98	3218.38	45.30	-838.57
Balance		57538.7		-1586.54		
Final [kg/cm ²]	34368	-5598		1631.84		-838.57

Tabla 3.1.2.7. Distribución de esfuerzos al suponer un giro unitario en la arista 2, es decir $m_2=453.6\text{ kg-m/m}$.

En resumen, para la condición 2 se tienen los esfuerzos distribuidos del sistema en la tabla 3.1.2.8.

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]	σ_0 [kg/cm ²]	σ_n [kg/cm ²]
Condición 2	0		0.00			34,346.94
		1		1970.62	63,136.87	
	1		-1,812.71			-5,556.89
		2		0.00	0.00	
	2		3,625.42			1,587.68
		3		0.00	0.00	
	3		-3,625.42			-793.84

Tabla 3.1.2.8. Resumen de esfuerzos en las aristas al suponer un giro unitario en la arista 2, es decir $m_2=453.6$ kg-m/m.

Al suponer un momento m_3 de 453.6kg-m/m en la arista 3, y distribuir, se tienen las fuerzas cortantes (V) con las que se calculan las reacciones en las aristas (R).

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
k		0.000	0.000	0.429	0.571	0.000
k./2		0.000	0.000	0.214	0.286	0.000
m [kg-m/m]				0.0	0.0	-453.6
Total	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-453.60
Balance		0.0		0.00		
Final [kg-m/m]	0	0		0.00		-453.60
V [kg/m]		0.00	0.00	0.00	-1812.71	1812.71
R [kg/m]	0.00	0.00		-1812.71		3625.42

Tabla 2.1.2.9. Distribución de momentos, al suponer un giro unitario en la arista 3, es decir $m_3=453.6$ kg-m/m.

Al dividir los momentos distribuidos presentados en la tabla 2.1.2.9 entre el módulo de la sección (S) se tienen los esfuerzos iniciales de la tabla 3.1.2.10 para distribuirse mediante el método de relajación.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
Área de la placa	7.5		68.0		68.0	
r		0.901	0.099	0.500	0.500	0.000
r/2		0.450	0.050	0.250	0.250	0.000
σ_0 [kg/cm ²]	0.0	0.0	-521.8	521.8	-521.8	521.8
	235.0			-25.9		
	-114.6		254.41			-254.4
	-1.4		3.16	12.6		-3.2
			0.04	0.2		0.0
Total	118.98	0.00	-264.17	508.66	-521.79	264.17
Balance		-237.9		-515.22		
Final [kg/cm ²]	119	-238		-6.56		264.17

Tabla 3.1.2.10. Distribución de esfuerzos, al suponer un giro unitario en la arista 3, es decir $m_3=453.6$ kg-m/m.

El resumen de esfuerzos distribuidos para la condición 3, se presenta en la tabla 3.1.2.11.

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]	σ_0 [kg/cm ²]	σ_n [kg/cm ²]
Condición 3	0		0.00			118.98
		1		0.00	0.00	
	1		0.00			-237.93
		2		-1338.77	-521.79	
	2		-1,812.71			-6.56
		3		-1338.77	-521.79	
	3		3,625.42			264.17

Tabla 3.1.2.11. Resumen de esfuerzos en las aristas, al suponer un giro unitario en la arista 3, es decir $m_3 = 453.6$ kg-m/m.

5. El cálculo de rotaciones para la condición 1, se presenta en la tabla 3.1.2.12.

Ubicación		Propiedades de la placa		Por condiciones iniciales			
Arista	Placa	b [m]	t [cm]	corregidos para el caso I σ [kg/cm ²]	V_n [cm]	δ_n^P [rad]	δ_{n0} [rad]
0				-257			
	1	0.04	2		-6.424		
1				55			
	2	0.34	2		0.188	-2.813E-01	-2.791E-01
2				-27			
	3	0.34	2		-0.112	-2.242E-03	-2.242E-03
3				22			
	3'	0.34	2		0.112		

Tabla 3.1.2.12. Rotaciones en las aristas, debidas a la condición 1 (peso propio) al suponer que la sección transversal es una viga continua.

El cálculo de rotaciones para la condición 2, se presenta en la tabla 3.1.2.13.

Ubicación		Propiedades de la placa		Al suponer un momento de 453.6 kg-m/m en el arista 2					
Arista	Placa	b [m]	t [cm]	corregidos para el caso II σ [kg/cm ²]	V_n [cm]	$\delta_{n,n}^L$ [rad]	δ_n^P [rad]	$\delta_{n,n}^P$ [rad]	$\delta_{n,n}$ [rad]
0				34347					
	1	0.04	2		799.052				
1				-5557					
	2	0.34	2		-15.779	7.711E-02	3.502E+01	3.471E+01	3.479E+01
2				1588					
	3	0.34	2		5.260	1.928E-02	3.105E-01	3.105E-01	3.298E-01
3				-794					
	3'	0.34	2		-5.260				

Tabla 3.1.2.13. Rotaciones en las aristas debido al momento supuesto $m_2 = 453.6$ kg-m/m.

El cálculo de rotaciones para la condición 3, se presenta en la tabla 3.1.2.14.

Ubicación		Propiedades de la placa		Al suponer un momento de 453.6 kg-m/m en el arista 3					
Arista	Placa	b [m]	t [cm]	corregidos para el caso III σ [kg/cm ²]	V_n [cm]	$\delta_{n,n}^L$ [rad]	δ_n^P [rad]	$\delta_{n,n}^P$ [rad]	$\delta_{n,n}$ [rad]
0				119					
	1	0.04	2		7.147				
1				-238					
	2	0.34	2		-0.511	1.928E-02	3.432E-01	3.105E-01	3.298E-01
2				-7					
	3	0.34	2		-0.598	3.856E-02	3.273E-02	3.273E-02	7.129E-02
3				264					
	3'	0.34	2		0.598				

Tabla 3.1.2.14. Rotaciones en las aristas debido al momento supuesto $X_3 = 453.6$ kg-m/m.

Al aplicar las ecuaciones de compatibilidad 2.2.2.13 y 2.1.2.14, para el sistema de placas, se tiene:

$$\begin{aligned} 3479.11 X_2 + 32.98 X_3 + -27.909 &= 0 \\ 32.98 X_2 + 7.129 X_3 + -0.224 &= 0 \end{aligned}$$

Que al resolver $Ax = B$ para x, se tiene,

$$A = \begin{bmatrix} 3479.11 & 32.98 \\ 32.98 & 7.13 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.15 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 27.909 \\ 0.224 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0.0081 \\ -0.0059 \end{bmatrix}$$

Al aplicar los momentos anteriores (correctivos), a la arista 2 y 3 respectivamente, y proceder de la misma forma que cuando se aplica un momento de 453.6 kg-m/m en la arista 2 y 3, se tienen los resultados de la tabla 3.1.2.15, con sus respectivas reacciones en las arista debido a m_2 .

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
k		0.000	0.000	0.429	0.571	0.000
k/2		0.000	0.000	0.214	0.286	0.000
m [kg-m/m]				-3.7	-3.7	0.0
Total	0.00	0.00	0.00	-3.7	-3.7	0.00
Balance		0.0		0.00		
Final [kg-m/m]	0	0		-3.7		0.00
V [kg/m]		0.00	-14.64	14.64	14.64	-14.64
R [kg/m]	0.00		-14.64	29.29		-29.29

Tabla 3.1.2.15. Distribución de momento correctivo en la arista 2 ($X_2 = 3.7$ kg-m/m).

Al distribuir el momento distribuido de la tabla 3.1.2.15 entre el módulo de sección (S) se tiene la línea σ_0 , de la tabla 3.1.2.16 con lo que se pueden distribuir con un método de relajación.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
Área de la placa	7.5		68.0		68.0	
r		0.901	0.099	0.500	0.500	0.000
r/2		0.450	0.050	0.250	0.250	0.000
σ_0 [kg/cm ²]	510.0	-510.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	-229.7			25.3		
			6.33			-6.3
	-2.9			0.3		
			0.08			-0.1
	0.0			0.0		
			0.00			0.0
Total	277.45	-510.02	6.41	25.65	0.00	-6.41
Balance		465.1		-12.83		
Final [kg/cm ²]	277	-45		12.83		-6.41

Tabla 3.1.2.16. Distribución de esfuerzo correctivo en la arista 3 debidas al momento $X_2 = 3.7$ kg-m/m.

El resumen de los esfuerzos en las aristas debido a la condición 2, se presentan en la tabla 3.1.2.17:

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]	σ_0 [kg/cm ²]	σ_n [kg/cm ²]
Corrección 2e	0		0.00			277.45
		1		15.92	510.02	
	1		-14.64			-44.89
		2		0.00	0.00	
	2		29.29			12.83
		3		0.00	0.00	
	3		-29.29			-6.41
	3'					

Tabla 3.1.2.17. Resumen de esfuerzos en las aristas debidos al momento correctivo en la arista 2 ($X_2 = 3.7$ kg-m/m.).

Al repetir el mismo procedimiento anterior, ahora con el momento correctivo en la arista 3 ($X_3 = -2.7$ kg-m/m), se obtuvieron los de resultados de la tabla 3.1.2.18.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
k		0.000	0.000	0.429	0.571	0.000
k/2		0.000	0.000	0.214	0.286	0.000
m [kg-m/m]				0.0	0.0	2.7
Transporte				0.0		
Total	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.7
Balance		0.0		0.00		
Final [kg-m/m]	0	0		0.00		2.7
V [kg/m]		0.00	0.00	0.00	10.73	-10.73
R [kg/m]	0.00	0.00		10.73		-21.47

Tabla 3.1.2.18. Distribución del momento correctivo en la arista 3 ($X_3 = -2.7$ kg-m/m).

Al calcular los esfuerzos σ_0 al dividir el momento distribuido de la tabla 3.1.2.18 entre el módulo de sección (S), y distribuir mediante el método de relajación, se tiene la tabla 3.1.2.19.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
Área de la placa	7.5		68.0		68.0	
r		0.901	0.099	0.500	0.500	0.000
r/2		0.450	0.050	0.250	0.250	0.000
σ_0 [kg/cm ²]	0.0	0.0	3.1	-3.1	3.1	-3.1
	-1.4			0.2		
			-1.51			1.5
	0.7			-0.1		
			-0.02			0.0
	0.0			0.0		
			0.00			0.0
Total	-0.70	0.00	1.56	-3.01	3.09	-1.56
Balance		1.4		3.05		
Final [kg/cm ²]	-1	1		0.04		-1.56

Tabla 3.1.2.19. Distribución de esfuerzos debidos al momento correctivo en la arista 3 ($X_3 = -2.7\text{kg-m/m.}$).

En resumen, los esfuerzos distribuidos en las aristas del sistema para la condición 3, se presentan en la tabla 3.1.2.20.

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]	σ_0 [kg/cm ²]	σ_n [kg/cm ²]
Corrección 3	0		0.00			-0.70
		1		0.00	0.00	
	1		0.00			1.41
		2		7.93	3.09	
	2		10.73			0.04
		3		7.93	3.09	
	3		-21.47			-1.56
	3'					

Tabla 3.1.2.20. Resumen de esfuerzos en las aristas, debidos al momento correctivo en la arista 3 ($X_3 = -2.7\text{kg-m/m.}$).

Paso 11. Al sumar los momentos correctivos:

Tipo de análisis	Arista 0	Arista 1	Arista 2	Arista 3
Análisis elemental	0	-0.03	-0.58	-0.40
Corrección de momento	0	0.00	-3.66	2.69
Valor final	0	-0.03	-4.25	2.29

Tabla 3.1.2.21. Superposición de efectos, para obtener los momentos transversales por flexión corregidos en [kg-m/m].

Al superponer los efectos de las tres condiciones se tiene la tabla 3.1.2.22.

Acciones		Arista 0	Arista 1	Arista 2	Arista 3
Análisis elemental		0	0	0	0
Esfuerzo no corregido		-257	55	-27	22
Correcciones					
Debido a	$X_2 = 3.664$ [kg-m/m]	277	-45	13	-6
Debido a	$X_3 = -2.686$ [kg-m/m]	-1	1	0	-2
Esfuerzo final		20	12(8.46)	-15	14 (10.77)

Tabla 3.1.2.22. Superposición de efectos, para obtener los esfuerzos corregidos. Compresión en kg/m^2 negativo y tensión positivo, el valor entre paréntesis indica el resultado experimental.

Al aplicar el círculo de Mohr para esfuerzos en el plano, con una variación parabólica en el sentido longitudinal de la estructura, se tiene:

Esfuerzos principales, kg/cm^2 , Tensión +, compresión -.						
Placa	Localización	x=0	L/8	L/4	3L/8	L/2
3	Arista 3	0	8	13	16	17
		0	0	0	0	0
	h/2	12	9	6	3	0
		-12	-9	-6	-3	0
	Arista 2	1	0	0	0	0
		-1	-8	-14	-17	-18
2	Arista 2	1	0	0	0	0
		-1	-8	-14	-17	-18
	h/2	16	12	7	3	0
		-16	-12	-9	-5	-2
	Arista 1	6	9	12	14	15
		-6	-3	-1	0	0
1	Arista 1	6	9	12	14	15
		-6	-3	-1	0	0
	h/2	4	9	15	19	20
		-4	-1	0	0	0
	Arista 0	0	11	19	23	25
		0	0	0	0	0

Tabla 3.1.2.23. Esfuerzos principales en $[\text{kg/cm}^2]$ sistema de placas plegadas, en L/2, 3L/8, L/4 L/8 y en la zona del diafragma (x=0).

Paso 13. Los diagramas de esfuerzo longitudinal y momento transversal corresponden a la figura 3.1.1.3 y 3.1.1.4 dado que son prácticamente los mismos resultados.

3.1.3 Método de Eliahu Trau.

Este método es una simplificación del método propuesto por H. Simpson, pero con una tabla que simplifica los cálculos, al resolver un solo sistema de ecuaciones de esfuerzos simultáneamente.

Planteamiento del problema.

Calcular los esfuerzos en las aristas del sistema de 6 placas plegadas que se muestra en la figura 3.1.3.1, mediante el método propuesto en el artículo de Eliahu Trau para la condición de peso propio.

Planteamiento de solución.

1. Calcular las propiedades geométricas de cada una de las placas que constituyen el sistema de placas plegadas. Calcular los factores α y β .
2. Determinar los momentos de empotramiento perfecto y distribuirlos para calcular las reacciones en las placas considerando la estructura como placa que trabaja en solo sentido en soportes fijos.
3. Calcular las fuerzas de placa de acuerdo a la siguiente expresión (2.1) y (2.2).
4. Calcular el máximo esfuerzo en cada placa, considerándolas libremente apoyadas, con una distribución senoidal con la expresión (3.1.2.10).
5. Sustituir los datos anteriores tabla propuesta por Eliahu Trau.
6. Considerar las cargas primarias de la primera distribución (peso propio) Para transformarlas en cargas en serie de Fourier (primer termino).
7. Formar el sistema de ecuaciones y resolverlo.
8. Las fuerzas calculadas del sistema anterior, sustituirlas en los coeficientes de la línea 2 de la tabla propuesta por Elihu Trau, para obtener los esfuerzos en las aristas.
9. Corregir las fuerzas multiplicándolas por el factor 0.97.
10. Sustituir las fuerzas corregidas en los coeficientes de la línea 2 de la tabla propuesta por Eliahu Trau.
11. Calcular los momentos transversales en las artistas.

Desarrollo

1. Calcular las propiedades geométricas de cada una de las placas que constituye el sistema de placas plegadas.

Arista	Placa	b [cm]	t [cm]	A [cm ²]	S [cm ³]
	1	3.8	2.0	7.50	4.69
1					
	2	34.0	2.0	68.00	385.33
2					
	3	34.0	2.0	68.00	385.33
3					
	4	34.0	2.0	68.00	385.33

Tabla 3.1.3.1. Propiedades de la sección transversal del sistema de 6 placas plegadas.

El cálculo de α y β se presentan en la tabla 3.1.3.2.

Arista	Placa	θ	sen θ	cos θ	γ	sen γ	$\alpha_n = \frac{\cos \theta_n}{\text{sen} \gamma_{n-1}}$	$\beta_n = \frac{\cos \theta_n}{\text{sen} \gamma_n}$
	1	0.0	0.000	1.000				
1					-42.61	-0.6770		-1.477
	2	42.61	0.677	0.736			-1.087	
2					-274.78	0.9965		0.739
	3	-42.61	-0.677	0.736			0.739	
3					274.78	-0.9965		-0.739
	4	42.61	0.677	0.736			-0.739	
2'					-274.78	0.9965		0.739

Tabla 3.1.3.2. Propiedades de la sección transversal del sistema de 6 placas plegadas.

2. Determinar los momentos y reacciones en las placas al considerar que la estructura trabaja como placa en un solo sentido, apoyada en soportes que no fluyen.

Al suponer que la estructura no está articulada en las aristas, las reacciones son las siguientes:

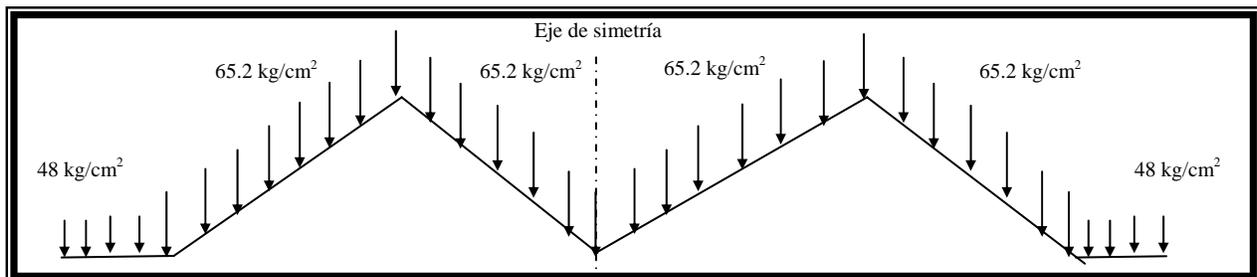


Figura 3.1.3.1. Sección transversal del sistema de 6 placas plegadas para la condición de peso propio.

Como puede observarse el análisis para la condición 1, en este método, corresponde con el método de Billington, al comparar la tabla 3.1.3.3 con la 3.1.2.3.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
k		0.000	1.000	0.500	0.500	0.000
k/2		0.000	0.500	0.250	0.250	0.000
m [kg-m/m]		-0.034	-0.461	-0.461	-0.461	-0.461
	0.0			-0.2		
	0.0		-0.05			0.1
			-0.01	0.0		0.0
Total	0.00	-0.03	-0.52	-0.70	-0.46	-0.40
Balance		0.0		0.12		
Final [kg-m/m]	0.000	-0.034		-0.581		-0.401
V [kg/m]		1.8	8.9	13.2	11.8	10.3
R [kg/m]	0	10.7		25.0		20.7

Tabla 3.1.3.3. Distribución de momentos al suponer que es una viga continua, con la condición de peso propio de la sección transversal del sistema de 6 placas plegadas.

3. Resolver las reacciones de las aristas en fuerzas de placa y considerar que los esfuerzos y momentos primarios en las placas actúan como vigas independientes.

Al sustituir en las expresiones (2.1) y (2.2):

Así, al sustituir en la expresión anterior los datos de la tabla 3.1.3.3:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= -1.087 R_1 \\
 P_2 &= 0.7385 R_2 + 1.48 R_1 \\
 P_3 &= -0.7385 R_3 + -0.7385 R_2
 \end{aligned}$$

Correspondientes a las fuerzas en la dirección del eje neutro de cada una de las placas.

4. Cálculo de los esfuerzos máximos en cada placa:

Con estos valores de carga se obtuvo el máximo esfuerzo en cada una de las placas, considerándolas libremente apoyadas con una distribución senoidal con la expresión (3.1.2.10).

$$\begin{aligned}
 \sigma_{10} &= \pm \frac{-1.129R_1[\text{kg/m}](3.85\text{m})^2 100[\text{cm/1m}]}{4.69\text{cm}^3 \pi^2} = \\
 \sigma_{10} &= \pm 34.83R_1[\text{kg/cm}^2] \\
 \sigma_{20} &= \pm \frac{0.7385R_2(3.85)^2 100}{385.33\pi^2}
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{20} = \pm(0.288R_2 + 0.58R_1)[\text{kg/cm}^2]$$

$$\sigma_{30} = \pm\left(\frac{0.7385R_2(3.85)^2 100}{385.33\pi^2} - \frac{1.48R_1(3.85)^2 100}{385.33\pi^2}\right)$$

$$\sigma_{30} = \pm(-0.288R_3 - 0.288R_2)[\text{kg/cm}^2]$$

5. Tabla propuesta por Eliahu Traum

1				2											
7.5				68.00											
0				0.9007				0.0993				0.500			
0				← -0.45033				-0.04967 →				← -0.250			
R1	R2	R3		R1	R2	R3		R1	R2	R3		R1	R2	R3	
-34.830				34.830				0.58	0.288			-0.576	-0.288		
15.426	-0.130	0						-0.569	0.004	0.072		-1.701	0.014	0	
0.256	-0.002	-0.032						-0.007	0.000	0.001		-0.028	0.000	0.004	
0.002	0.000	0	.000									0.000	0.000	0.000	
-19.146	-0.131	-0.033		34.830				-0.001	0.291	0.073		-2.306	-0.273	0.004	
								3.460	-0.029	-0.007					
2	-19.146	-0.131	-0.033					3.459	0.263	0.066					
3				-22.605	-0.394	-0.098						4.612	0.543	0.208	
4															
5				-6028.132	-105.003	-26.200						135.653	15.974	6.110	
6				6553.248	114.150	28.482						100.186	11.798	4.512	
7				200.373	23.595	9.025						37.561	12.269	7.757	
8				6753.621	137.745	37.507						137.748	24.067	12.269	
								6615.873	113.678	25.237					
														0.4286	
												-233.569	-4.013	-0.891	
												101.996	1.706	0.284	
												-131.573	-2.308	-0.607	
								525.803	9.222	2.427		-525.803	-9.222	-2.427	
				525.803	9.222	2.427						-1305.671	-23.121	-6.525	

Tabla 3.1.3.4. Distribución de esfuerzos y momentos para la condición de peso propio de la sección transversal del sistema de 6 placas plegadas, de acuerdo al método propuesto por Eliahu Traum.

Para obtener los esfuerzos, es necesario distribuir como se muestra en la tabla siguiente:

	3						Placa
	68.00						Área de placa
	0.5000						Coeficiente de distribución
	-0.25000 \longrightarrow						Factor de transporte
	R1	R2	R3	R1	R2	R3	
1		-0.288	-0.288		0.288	0.288	σ_{n0} [kg/cm ²]
				0.569	-0.0036	-0.072	
				0.0071	0.0000	-0.0009	
						0.000	Las unidades con kg y m
	0.000	-0.288	-0.288	0.576	0.284	0.215	Distribución
	-1.153	0.007	0.146				total
2	-1.153	-0.281	-0.142	0.576	0.284	0.215	σ_n [kg/cm ²]
3							
4				-1.729	-0.565	-0.357	
5				-50.858	-16.613	-10.503	$10^3 C V_n = \frac{\Delta\sigma}{b_n} 10^3$
6				37.561	12.269	7.757	$10^3 C V_n \alpha_{n+1}$
7				37.561	12.269	7.757	$-10^3 C V_{n+1} \beta_n$
8				75.123	24.539	15.514	
	62.625	-0.472	-3.244				$10^3 \Delta C \delta_n^p$
	0.5714						rigidez relativa
	4.422	-0.033	-0.229	-4.422	0.033	0.229	m'
	-135.995	-2.274	-0.378	67.997	1.137	0.189	Distribución
				63.576	1.170	0.418	m'' [kg]
							$\frac{\Delta m''}{b \cos \theta}$ [kg / m]
	-779.868	-13.899	-4.098	779.868	13.899	4.098	
				1559.7365	27.7986	8.1965	

Tabla 3.1.3.5. Distribución de esfuerzos y momentos para la condición de peso propio de la sección transversal del sistema de 6 placas plegadas, de acuerdo al método propuesto por Eliahu Traum.

6. Al considerar las cargas primarias de la primera distribución de fuerzas, y transformar la carga en serie de Fourier (primer término):

$$\begin{aligned} R'_{10} &= 13.6 & [\text{kg/m}] \\ R'_{20} &= 31.8 & [\text{kg/m}] \\ R'_{30} &= 26.3 & [\text{kg/m}] \end{aligned}$$

7. Por lo que el sistema de ecuaciones queda como sigue:

$$\begin{array}{rcccccccc} R_1 = & 13.6 & + & -525.803 & R_1 & + & -9.222 & R_2 & + & -2.427 & R_3 \\ R_2 = & 31.8 & + & 1305.671 & R_1 & + & 23.121 & R_2 & + & 6.525 & R_3 \\ R_3 = & 26.3 & + & -1559.736 & R_1 & + & -27.799 & R_2 & + & -8.197 & R_3 \end{array}$$

Al resolver el sistema anterior:

$$\begin{aligned} R_1 &= -1.1\text{kg} \\ R_2 &= 72.0\text{kg} \\ R_3 &= -24.6\text{kg} \end{aligned}$$

8. Al sustituir en las ecuaciones de la línea 2 de la tabla 2, correspondientes a los esfuerzos en los Arista 1, 2 y 3.

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 12.82 & [\text{kg/cm}^2] \\ \sigma_1 &= 13.41 & [\text{kg/cm}^2] \\ \sigma_2 &= -15.41 & [\text{kg/cm}^2] \\ \sigma_3 &= 14.52 & [\text{kg/cm}^2] \end{aligned}$$

9. Al corregir por el factor 0.97:

$$\begin{aligned} R_{1e} &= -1.53 & [\text{kg/m}] \\ R_{2e} &= 71.05 & [\text{kg/m}] \\ R_{3e} &= -25.42 & [\text{kg/m}] \end{aligned}$$

10. Al sustituir en las ecuaciones de la línea 2 de la tabla 3.1.3.4 y 3.1.3.5, correspondientes a los esfuerzos en las aristas 1, 2 y 3, se obtienen los valores corregidos.

Arista	σ_n [kg/cm ²]
0	21
1	12 (8.46)
2	-15
3	14 (12.0)

Tabla 3.1.3.6. Esfuerzos en las aristas del sistema de 6 placas plegadas para la condición de peso propio.

11. Para calcular los momentos en las aristas se tiene:

$$m_2'' = \Delta R_1 b_n \cos \theta_n \quad -3.68 \quad [\text{kg-m/m}]$$

$$m_3'' = m_2'' + \Delta R_1 b_1 \cos \theta_1 + \Delta R_2 b_2 \cos \theta_2 \quad 2.70 \quad [\text{kg-m/m}]$$

$$\Delta R_1 = R_1 - R_{1\text{inicial}} \quad -14.7 \quad [\text{kg/m}]$$

$$\Delta R_2 = \quad 40.2 \quad [\text{kg/m}]$$

$$\Delta R_3 = \quad -50.9 \quad [\text{kg/m}]$$

Al superponer las tres condiciones, se obtienen los momentos finales contenidos en la tabla 3.1.3.7.

Momentos finales	
Arista	Eliahu Traum [kg-m/m]
0	0.00
1	-0.03
2	-4.26
3	2.29

Tabla 3.1.3.7. Resumen de momentos transversales en las aristas, al aplicar el método propuesto por Eliahu Traum al sistema de 6 placas plegadas, bajo la condición de peso propio.

3.1.4 Método de Howard Simpson.

Al igual que los anteriores, este método nos permite calcular los esfuerzos longitudinales y los momentos transversales considerando las rotaciones de las aristas con las mismas hipótesis planteadas en el capítulo 3. También nos permite calcular los desplazamientos verticales y conocer la configuración deformada del sistema de placas de acuerdo a las solicitaciones.

Planteamiento del problema.

Calcular los esfuerzos y momentos, para el sistema de 6 placas plegadas que se muestra en la figura 3.1, mediante la metodología propuesta por Howard Simpson para la condición de peso propio.

Planteamiento de solución.

1. Obtener las propiedades geométricas de la sección y las reacciones debido a la carga muerta y viva, en las aristas, al aceptar que las placas están libremente apoyadas en sus extremos. Calcular los momentos de empotramiento perfecto. Distribuir los momentos anteriores. Aplicar las ecuaciones de equilibrio estático para obtener las fuerzas cortantes en las aristas. Proyectar cada una de las cargas de arista calculadas en la dirección vertical y otra paralela a la placa en la cual actúa.
2. Calcular los esfuerzos máximos en cada una de las placas, debidos a la carga distribuida que actúa en su plano neutro (esfuerzos de acción de placa).
3. Distribuir los esfuerzos calculados en el punto anterior, mediante un método de relajación.
4. Calcular los esfuerzos debidos al giro de las aristas, al suponer un momento de -1360.8 [kg-m/m] para las placas con un arista empotrado y el otro extremo libremente apoyado, así como -2721.6 [kg-m/m] para los dos extremos de la placa empotrados, distribuyéndolos, para corregir los obtenidos en el punto 3. Aplicar las ecuaciones de la estática para calcular las fuerzas cortantes debidas a los esfuerzos anteriores. Proyectar estas fuerzas en el sentido del eje neutro de las placas. Calcular los momentos que generan dichas cargas, al suponer que éstos tienen una variación senoidal. Calcular los esfuerzos debido a los momentos anteriores. Distribuir los esfuerzos anteriores con un método de relajación. El procedimiento anterior, se repite para cada arista al que se le aplica un giro arbitrario.
5. Calcular los desplazamientos debidos a la condición 1 y suponer que para las demás condiciones el desplazamiento varía en forma senoidal, al soportar los esfuerzos calculados anteriormente (punto 4), para cada giro supuesto en las aristas, multiplicándolos por un factor C_2, C_3, \dots, C_n , respectivamente.
6. Calcular el valor de C_n , al resolver el sistema de ecuaciones del punto anterior. El desplazamiento final se expresa ahora en términos de los resultados numéricos para la solución I (sin rotación de las aristas), más la solución correspondiente a las diversas rotaciones, cada una multiplicada por un factor desconocido C_n .
7. Dibujar los diagramas de momentos y esfuerzos al centro del claro.

Desarrollo.

1. Las propiedades geométricas de la sección transversal del sistema de placas plegadas son las siguientes:

Arista	Placa	b [cm]	t [cm]	A [cm ²]	$S = \frac{bt^2}{6}$ [cm ³]
0					
	1	3.75	2.00	7.50	4.69
1					
	2	34.00	2.00	68.00	385.33
2					
	3	34.00	2.00	68.00	385.33
3					
	4'	34.00	2.00	68.00	385.33

Tabla 3.1.4.1. Propiedades geométricas del sistema de 6 placas plegadas.

Arista	Placa	θ	sen θ	cos θ	γ	sen γ	b cos θ	$\alpha_n = \frac{\cos \theta_n}{\text{sen} \gamma_{n-1}}$	$\beta_n = \frac{\cos \theta_n}{\text{sen} \gamma_n}$
0									
	1	0	0.000	1.000			0	0.000	1.000
1					-42.61	-0.677			
	2	42.61	0.677	0.736			42.61	0.677	0.736
2					85.22	0.997			
	3	-42.61	-0.677	0.736			-42.61	-0.677	0.736
3					-85.22	-0.997			
	3'	42.61	0.677	0.736			42.61	0.677	0.736
					85.22	0.997			

Tabla 3.1.4.2. Ángulo entre placas y factores α y β del sistema de 6 placas plegadas.

Los factores de distribución correspondientes a la fila (1), se calculan con las fórmulas $\frac{3EJ}{L}$ y $\frac{6EJ}{L}$.

Cuando la placa esté libremente apoyada en un extremo y empotrada en el otro, se hará la siguiente consideración: Multiplicar por 0.75 el término correspondiente al lado que está simplemente apoyado y por uno el correspondiente al que está empotrado.

Se calculan los momentos de empotramiento correspondientes a la línea (2).

Las fuerzas de placa se calculan al proyectar las fuerzas calculadas en la dirección de cada una de las placas, con las expresiones (2.1) y (2.2):

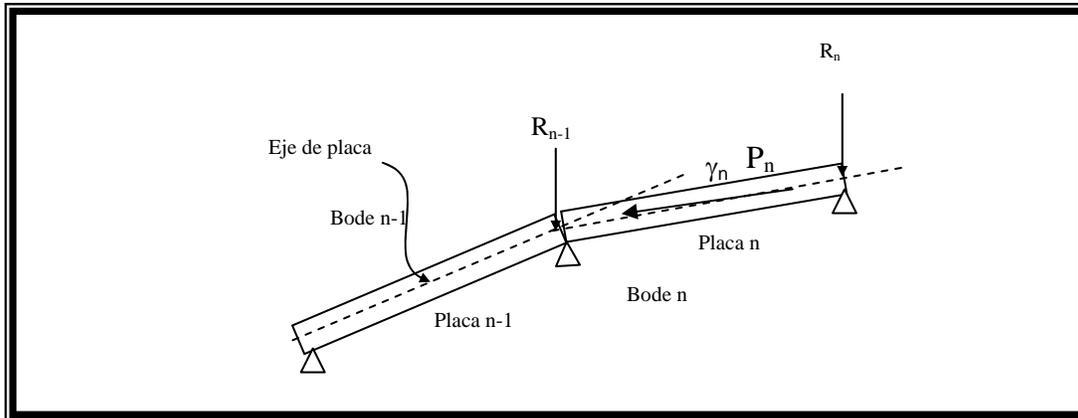


Figura 3.1.4.1. Proyección de las reacciones de las aristas en la dirección del eje neutro de la placa.

3. Una vez calculados los momentos de empotramiento, distribuir los momentos con el método de Cross (fila 3). Los cortantes se calculan al aplicar las ecuaciones de la estática.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
k		0.000	1.000	0.500	0.500	0.000
k/2		0.000	0.500	0.250	0.250	0.000
m [kg-m/m]		-0.034	-0.461	-0.461	-0.461	-0.461
Transporte	0.0			-0.2		0.05
	0.0		-0.05	0.0		0.05
			-0.01			0.01
Total	0.00	-0.03	-0.52	-0.70	-0.46	-0.40
Balance		0.0		0.12		
Final [kg-m/m]	0.000	-0.034		-0.581		-0.401
V [kg/m]		1.8	8.9	13.2	11.8	10.3
R [kg/m]		0	10.7	25.0	20.7	

Tabla 3.1.4.3. Distribución de momentos para el sistema de 6 placas primario.

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]
Cargas básicas	0		0	
		1		-11.59
	1		10.7	
		2		34.22
	2		25.0	
		3		-33.73
	3		20.7	

Tabla 3.1.4.4. Reacciones en las aristas (R) y fuerzas de placa (P), del sistema de 6 placas plegadas.

1. Las fuerzas de placa calculadas en el punto anterior producen un momento que causa flexión en cada una de las placas, la acción de placa y el correspondiente esfuerzo longitudinal (tabla 3.1.4.5.).

Condición de carga	Arista	Placa	σ_0 [kg/cm ²]
Cargas básicas	0		-458.20
		1	
	1		16.45
		2	
	2		-16.22
		3	
	3		16.22

Tabla 3.1.4.5. Esfuerzos en los extremos de las placas al considerarlas como elementos libremente apoyados, del sistema de 6 placas plegadas.

En las figuras 3.1.4.2 y 3.1.4.4 que representan la placa 3 y 1, respectivamente, se tienen tensiones en la dirección del plano de las placas. En la figura 3.1.4.3, se representa la placa 2 y se tienen compresiones en la dirección del plano de la placa. Las cargas distribuidas son las siguientes, negativo hacia arriba y positivo hacia abajo, es decir como en una viga libremente apoyada:

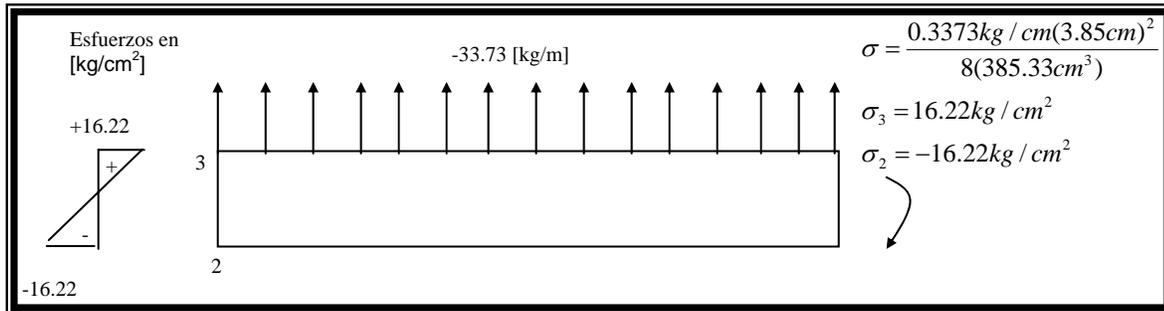


Figura 3.1.4.2. Esfuerzos en la placa 3, al considerar carga uniforme, del sistema de 6 placas.

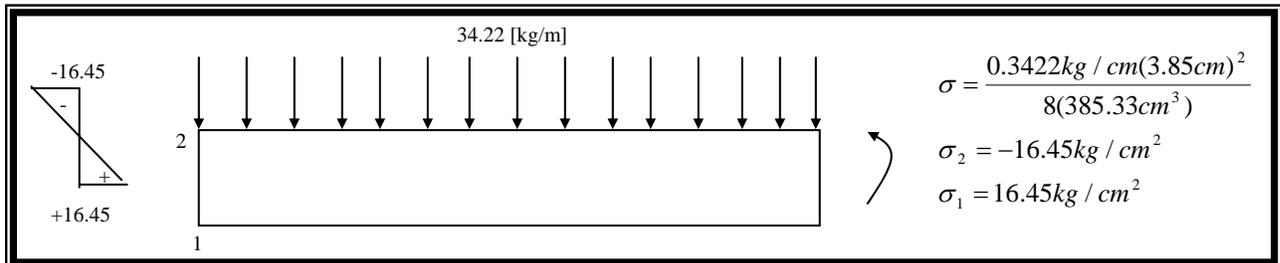


Figura 3.1.4.3. Esfuerzos en la placa 2, al considerar carga uniforme, del sistema de 6 placas.

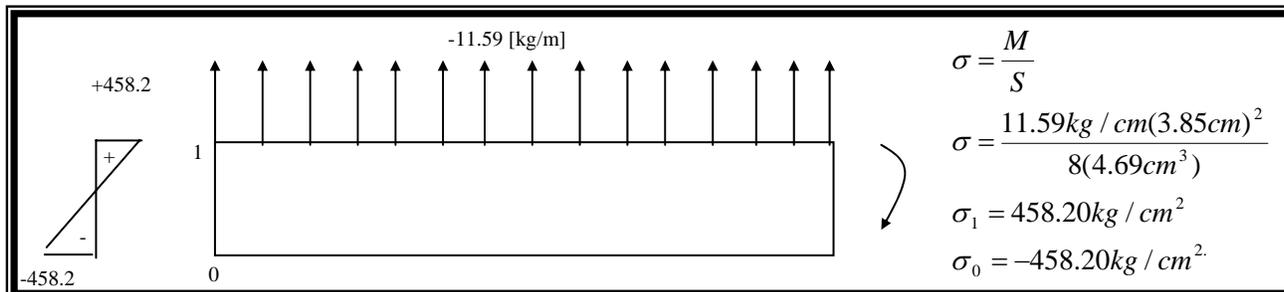


Figura 3.1.4.4. Esfuerzos en la placa 1, al considerar carga uniforme, del sistema de 6 placas plegadas.

La distribución de esfuerzos se presenta en la tabla 3.1.4.6.

Placa 1		Placa 2		Placa 3	
Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
7.5		68.0		68.0	
	0.901	0.099	0.500	0.500	0.000
	0.450	0.050	0.250	0.250	0.000
-458.2	458.2	16.5	-16.5	-16.2	16.2
198.9			-21.9		
		-5.54			5.5
2.5			-0.3		
		-0.07			0.1
-256.77	458.20	10.84	-38.67	-16.22	21.83
	-402.9		11.23		
-256.8	55.3		-27.44		21.8

Tabla 3.1.4.6. Distribución de esfuerzos para la condición 1 (peso propio), del sistema de 6 placas plegadas.

- Al no estar articulados en su totalidad las aristas, y para lograr que los esfuerzos sean iguales en ambos lados de las mismas, se recurre a un método de corrección de esfuerzos, propuesto por Yitzhaki (1948), cuyos factores de distribución se calculan con las áreas de la siguiente manera:

$$FD_{\text{en el borde 1 en placa 2}} = \frac{A_1}{A_1 + A_2}$$

$$FD_{\text{en el borde 1 en placa 1}} = \frac{A_2}{A_1 + A_2}$$

Con estos factores de distribución de los esfuerzos se distribuyen como aparecen en la tabla 3.1.4.6.

3. Se distribuyen los esfuerzos mediante un método de distribución, contenidos en la tabla 3.1.4.6.qa

Condición de carga	Arista	Placa	σ_n [kg/cm ²]
Cargas básicas	0		-256.77
		1	
	1		55.3
		2	
	2		-27.4
		3	
	3		21.8
	3'		

Tabla 3.1.4.7. Resumen de esfuerzos en las aristas para la condición de peso propio, para el sistema de 6 placas plegadas.

4. Distribución de los esfuerzos, debidos al giro de las aristas.

Al suponer un giro en la placa 2 ocasionado por un momento de -1360[kg-m/m] (Condición 2) en cual se distribuye en la tabla 3.1.4.8.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
k		0.000	0.000	0.429	0.571	0.000
k/2		0.000	0.000	0.214	0.286	0.000
m [kg-m/m]				-1360.8	0.0	0.0
				0.0		388.8
					0.0	
Total	0.00	0.00	0.00	-1360.80	0.00	388.80
Balance		0.0		583.20		0.00
Final [kg-m/m]	0	0		-777.60		388.80
V [kg/m]		0.00	-3107.51	3107.51	4661.26	-4661.26
R [kg/m]	0.00	-3107.51		7768.76		-9322.52

Tabla 3.1.4.8. Distribución de momentos al suponer un giro unitario en la arista 2, $m_2=1360.8$ [kg-m/m], para el sistema de 6 placas plegadas.

Por definición

$$m_2 = C_2 m_{20}$$

$$si m_{20} = 1360.8 [kg - m / m]$$

si

$$\delta_{20}^p = 1 [rad]$$

$$m_{20} = k_{rig} \delta_{20}^p$$

$$k_{rig} = \frac{3EJ_2}{b_2}$$

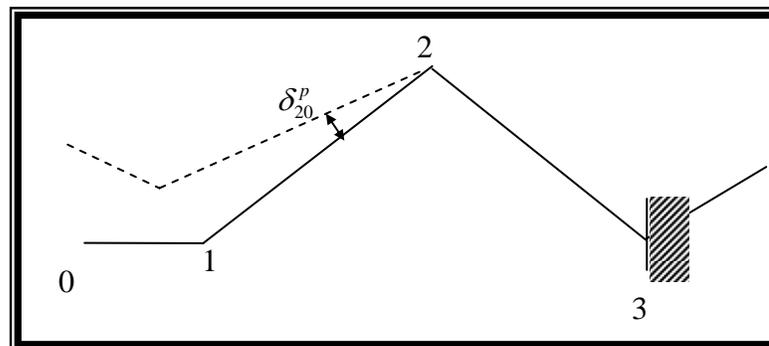


Figura 3.1.4.5. Sistema de placas desplazado al considerar una rotación unitaria en la arista 2, para el sistema de 6 placas plegadas.

Al aplicar un giro en la arista 2, tal que el momento sea $m_{20}=1360.8\text{kg}\cdot\text{m}/\text{m}$ se tiene la sección transversal de la figura 3.1.4.5.

Al proyectar las fuerzas en la dirección del eje neutro de cada una de las placas para la condición 2:

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]
Momento de 1360.8 kg en el arista 2	0.00		0.00	
		1.00		3378.20
	1.00		-3,107.51	
		2.00		1147.52
	2.00		7,768.76	
		3.00		1147.52
	3.00		-9,322.52	
		3'		-1,147.52

Tabla 3.1.4.9. Reacciones en las aristas (R) y fuerza de placa (P) al considerar carga uniforme en todo el sistema de placas (Condición I), en el sistema de 6 placas plegadas.

Se calculan los momentos que generan dichas cargas sobre las placas, al suponer que éstas varían en forma senoidal (al considerar que cuando P produce flexión en la placa en el sentido de su eje neutro).

En la figura 3.1.4.6 de tiene la placa 3, a la que se aplica una fuerza de 1147[kg/m] distribuida con variación senoidal en el sentido del plano de la placa.

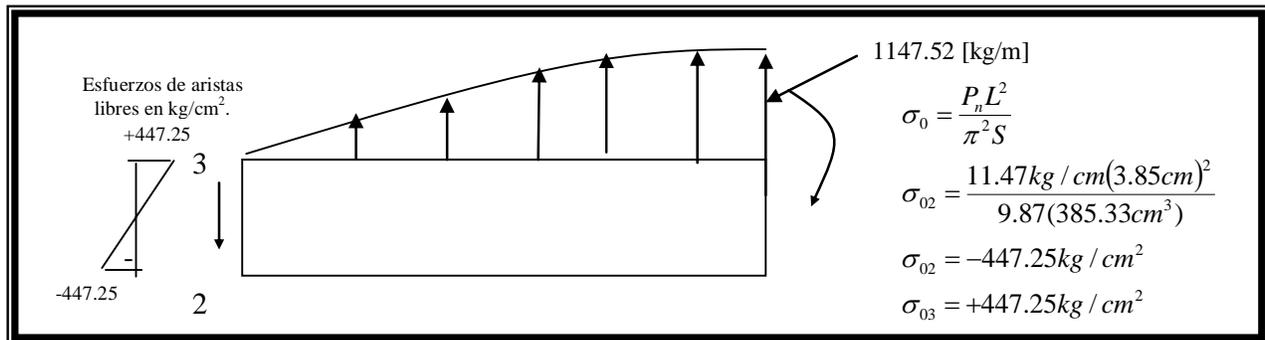


Figura 3.1.4.6. Esfuerzos en la placa 3, al considerar carga con variación senoidal, según el primer término de la serie de Fourier, en el sistema de 6 placas plegadas.

En la figura 3.1.4.7 y 3.1.4.8 se tienen las placas 2 y 1, respectivamente, donde se presenta fuerzas distribuidas de tensión en la dirección del su plano neutro.

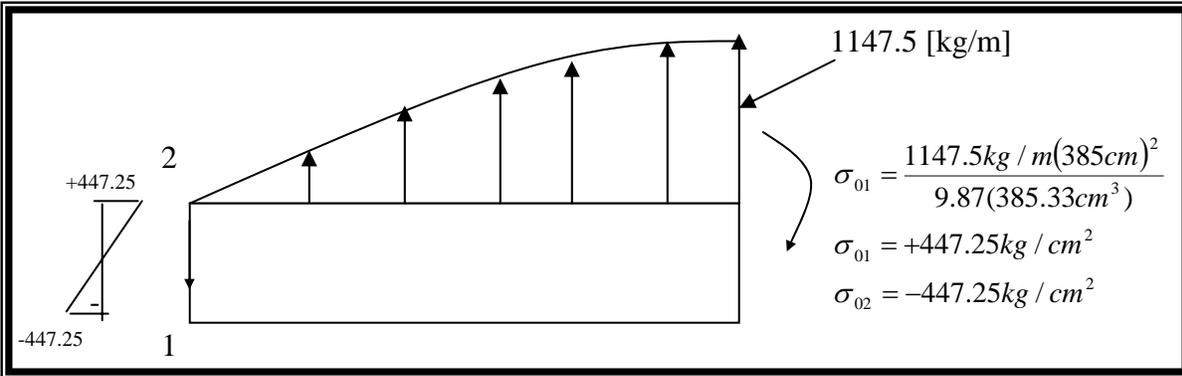


Figura 3.1.4.7. Esfuerzos en la placa 2, al considerar carga con variación senoidal, según el primer término de la serie de Fourier, en el sistema de 6 placas.

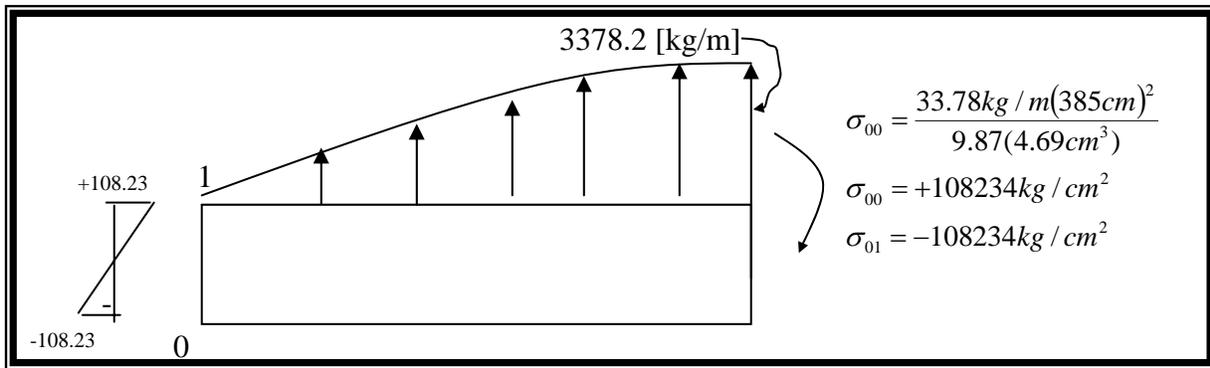


Figura 3.1.4.8. Esfuerzos en la placa 1, al considerar carga con variación senoidal, según el primer término de la serie de Fourier, en el sistema de 6 placas.

La distribución de los esfuerzos para la condición 2, se presentan en la tabla 3.1.4.10.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	
Área de la placa	7.5		68.0		68.0		
r	0.901		0.099	0.500	0.500	0.000	
r/2	0.450		0.050	0.250	0.250	0.000	
σ_0	[kg/cm ²]	-108234.6	108234.6	-447.2	447.2	-447.2	447.2
		48942.8			-5398.1		
		507.0		-1125.90			1125.9
		6.3		-13.98			-55.9
				-0.17			-0.7
Total	-58778.48	108234.63	-1587.30	-5007.48	-447.25	1587.30	
Balance		-98912.5		2280.12			
Final [kg/cm ²]	-58778	9322		-2727.36		1587.30	

Tabla 3.1.4.10. Distribución de esfuerzos al considerar variación senoidal de acuerdo al primer término de la serie de Fourier (condición 2), en el sistema de 6 placas plegadas.

Ahora al considerar un giro debido a un momento m_3 en la placa 3 (figura 3.1.4.9), se tiene una rotación de placa δ_{30}^p y aplicar el procedimiento anterior, se tienen los momentos de la tabla de distribución 3.1.4.11.

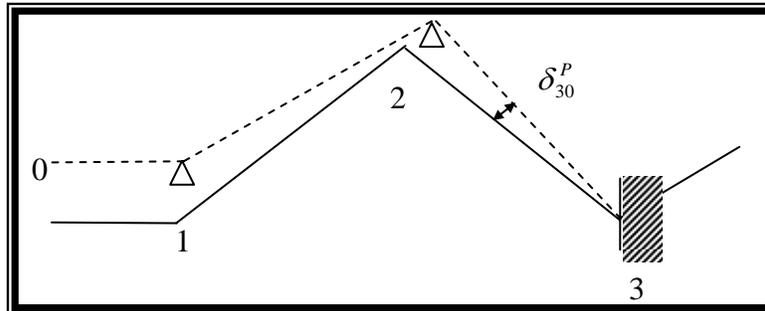


Figura 3.1.4.9. Configuración del sistema de placas al aplicar un giro en la arista 2, para el sistema de 6 placas.

Ahora, para calcular la rigidez para la condición de apoyo mostrada en la figura 3.1.4.9. se supone un momento de 2721.6 kg-m/m en la arista 3, cuya rotación es δ_{30}^p . Por definición, se tiene un factor de participación C_3 , que depende de las otras acciones sobre el sistema.

$$m_3 = C_3 m_{30}$$

$$\text{si } m_{30} = 2721.6[\text{kg} - \text{m} / \text{m}]$$

$$k_{rig} = \frac{6EJ_3}{b_3} \quad (\text{rigidez de rotación})$$

$$k\delta_{30}^p = 2721.6[\text{kg} - \text{m} / \text{m}]$$

y

al despejar δ_{30}^p ,

$$\delta_{30}^p = \frac{b_3}{6EJ_3} (2721.6)$$

entonces

$$\delta_{30}^p = 0.1203[\text{rad}]$$

Al distribuir el momento supuesto y calcular las reacciones correspondientes mediante las ecuaciones de la estática para la condición 3, se tiene la tabla 3.1.4.11.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3
r		0.000	0.000	0.429	0.571	0.000
r/2		0.000	0.000	0.214	0.286	0.000
m [kg-m/m]	0.0	0.0	0.0	0.0	-2721.6	2721.6
	0.0			0.0		-777.6
Total	0.00	0.00	0.00	0.00	-2721.60	1944.00
Balance		0.0		-1166.40		
Final [kg-m/m]	0.00	0.00		-1166.40		1944.00
V [kg/m]		0.00	-4661.26	4661.26	12430.02	-12430.02
R [kg/m]	0.00	-4661.26		17091.28		-24860.05

Tabla 3.1.4.11. Cálculo de reacciones al considerar variación senoidal del momento en la arista 4, de acuerdo al primer término de la serie de Fourier (condición 3), en el sistema de 6 placas.

Al proyectar las fuerzas en la dirección del eje neutro de cada una de las placas se tiene el resultado de la tabla 3.1.4.12:

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]
Condición 3	0		0.00	
		1		5067.31
	1		-4,661.26	
		2		5737.60
	2		17,091.28	
		3		5737.60
	3		-24,860.05	
	3'			

Tabla 3.1.4.12. Distribución de esfuerzos al considerar variación senoidal, de acuerdo al primer término de la serie de Fourier (condición 3), en el sistema de 6 placas.

Se obtienen los momentos que generan dichas cargas sobre las placas, al suponer que éste varía en forma senoidal, (el valor de P es positivo hacia abajo y negativo en caso contrario). En la figura 3.1.4.10 y 3.1.4.11, se representan las placas 3 y 2, a las que se aplica una fuerza distribuida de tensión con variación senoidal de 5737.6 [kg/m], mientras que en la figura 3.1.4.12 en donde se representa la placa 1, se aplica una fuerza distribuida de tensión de 5067[kg/m].

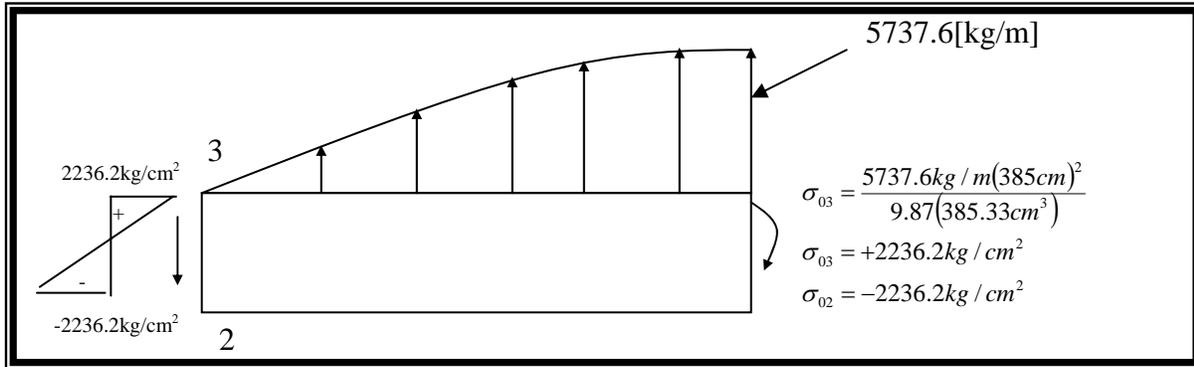


Figura 3.1.4.10. Esfuerzos en la placa 3, al considerar carga con variación senoidal, según el primer término de la serie de Fourier para la condición 3 (momento en 3), en el sistema de 6 placas plegadas.

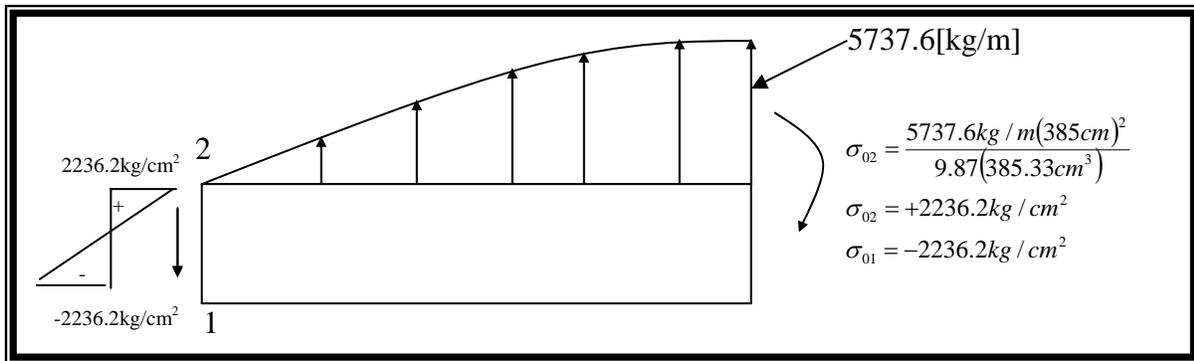


Figura 3.1.4.11. Esfuerzos en la placa 2, al considerar carga con variación senoidal según el primer término de la serie de Fourier para la condición 2 (momento en 2), para el sistema de 6 placas.

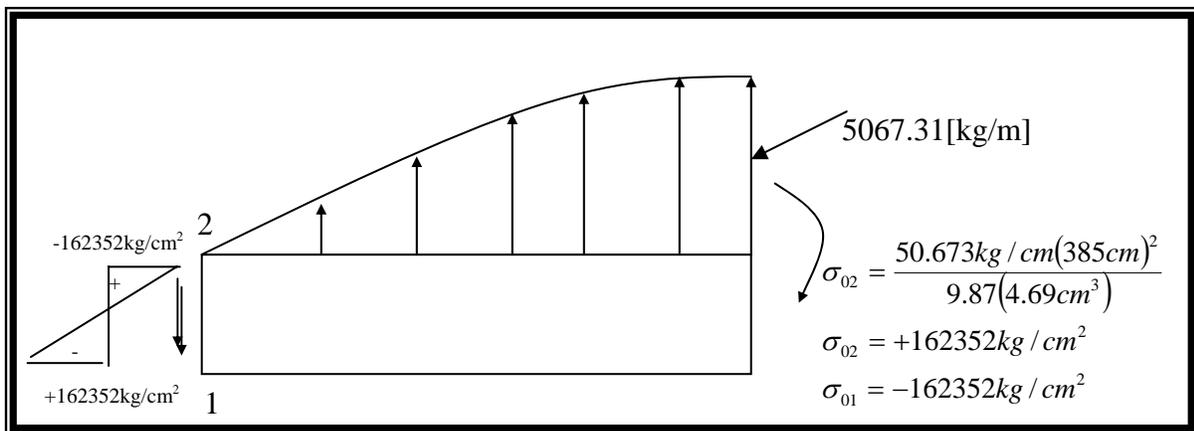


Figura 3.1.4.12. Esfuerzos en la placa 1, al considerar carga con variación senoidal, según el primer término de la serie de Fourier para la condición 1 en el sistema de 6 placas.

El resumen de esfuerzos distribuidos para la condición 3, en las aristas de las placas, se tiene en la tabla 3.1.4.13.

Condición de carga	Arista	Placa	σ_x [kg/cm ²]
Condición 3	0		87,815.94
		1	
	1		-13,269.58
		2	
	2		4,110.44
		3	
	3		-3,173.33

Tabla 3.1.4.13. Resumen de esfuerzos en las aristas del sistema de placa para la condición 3 en el sistema de 6 placas plegadas.

En la tabla 3.1.4.14 se tiene el resumen de esfuerzos de las 3 condiciones.

Caso	Placa 1		Placa 2	Placa 3
Condición 1	-257	55	-27	22
Condición 2	58778	-9322	2727	-1587
Condición 3	87816	-13270	4110	-3173

Tabla 3.1.4.14. Resumen de esfuerzos en kg/cm², en las aristas del sistema de 6 placa para las 3 condiciones en el sistema de 6 placas.

5. Al calcular los desplazamientos en el sentido del eje neutro de cada placa, acuerdo a la tabla 3.1.4.14, y considerar el módulo de elasticidad de acuerdo a los ensayos de laboratorio, se tiene lo siguiente:

Caso I, para la placa 1:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{5L^2}{48b} = \frac{-257 \text{ kg/cm}^2 - 55 \text{ kg/cm}^2}{192352 \text{ kg/cm}^2} \frac{5(3.85 \text{ m})^2}{48(0.0375 \text{ m})}$$

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{5L^2}{48b} = -0.067 \text{ m}$$

Caso II para la placa 1:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{58778 \text{ kg/cm}^2 + 9322 \text{ kg/cm}^2}{192352 \text{ kg/cm}^2} \frac{(3.85 \text{ m})^2}{\pi^2(0.0375 \text{ m})}$$

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = -14.18 \text{ m}$$

Caso III para la placa 1:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{87816 \text{ kg/cm}^2 - (13270 \text{ kg/cm}^2)}{192352 \text{ kg/cm}^2} \frac{(3.85 \text{ m})^2}{\pi^2(0.0375 \text{ m})}$$

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = 21.0 \text{ m}$$

Caso I para la placa 2:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{55 \text{kg/cm}^2 - (-27 \text{kg/cm}^2)}{192352 \text{kg/cm}^2} \frac{(3.85 \text{m})^2}{\pi^2 (0.34 \text{m})}$$
$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = 0.002 \text{m}$$

Caso II para la placa 2:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{9322 \text{kg/cm}^2 - (-2727)}{192352 \text{kg/cm}^2} \frac{(3.85 \text{m})^2}{\pi^2 (0.34 \text{m})}$$
$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = 0.271 \text{m}$$

Caso III para la placa 2:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{-13270 \text{kg/cm}^2 - (4110 \text{kg/cm}^2)}{192352 \text{kg/cm}^2} \frac{(3.85 \text{m})^2}{\pi^2 (0.34 \text{m})}$$
$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = -0.391 \text{m}$$

Caso I para la placa 3:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{-27 \text{kg/cm}^2 - (22 \text{kg/cm}^2)}{192352 \text{kg/cm}^2} \frac{(3.85 \text{m})^2}{\pi^2 (0.34 \text{m})}$$
$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = -0.001 \text{m}$$

Caso II para la placa 3:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{-2727 - (1587 \text{kg/cm}^2)}{192352 \text{kg/cm}^2} \frac{(3.85 \text{m})^2}{\pi^2 (0.34 \text{m})}$$
$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = -0.099 \text{m}$$

Caso III para la placa 3:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{4110 \text{kg/cm}^2 - (-3173 \text{kg/cm}^2)}{192352 \text{kg/cm}^2} \frac{(3.85 \text{m})^2}{\pi^2 (0.34 \text{m})}$$
$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = 0.167 \text{m}$$

Para las demás placas, se resuelven de manera análoga y el resumen de resultados se presenta en la tabla 3.1.4.15.

Caso	Fórmula	v_1 [mm]	v_2 [mm]	v_3 [mm]
Caso I ($\delta_{m}^p = 0$)	$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{5L^2}{48b}$	-66.80	1.95	-1.16
Caso II ($\delta_{20}^p = 1$)	$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b}$	-14178.98	276.70	-99.08
Caso III ($\delta_{30}^p = 1$)	$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b}$	21046.63	-399.11	167.26

Tabla 3.1.4.15. Rotaciones en las aristas para la condición de carga de servicio en el sistema de 6 placas plegadas.

Al depender las rotaciones una de otra, es necesario multiplicarlas por un factor C, que se obtuvieron al resolver el sistema de ecuaciones para C_n , simultáneamente con la acción de peso propio, las rotaciones reales.

En la tabla anterior, los desplazamientos son de ese valor, dado que se considera un módulo de elasticidad de 192352 kg/cm², que corresponde al de ensayos de cilindros de concreto en laboratorio.

6. Para los cálculos de la rotación de placa, se tiene la fórmula de recurrencia obtenida gráficamente por H. Simpson (1958), con la expresión (3.1.2.2) y valuarla para n=2:

$$\delta_2^p = \frac{1}{b_2} \left[-\frac{v_1}{\text{sen}\gamma_1} + v_2(\cot\gamma_1 + \cot\gamma_2) - \frac{v_3}{\text{sen}\gamma_2} \right]$$

A partir de la deducción anterior, se observa que puede ser aplicada a configuraciones diferentes a la presentada en este ejemplo.

Al sustituir en la expresión anterior, es decir, para la placa 2, se tiene:

$$\gamma_1 = -42.61 \quad \cot\gamma_1 = -1.0871 \quad \text{sen}\gamma_1 = -0.6770$$

$$\gamma_2 = 85.22 \quad \cot\gamma_2 = 0.0836 \quad \text{sen}\gamma_2 = 0.9965$$

$$\delta_2^p = \frac{1}{0.34m} \left[-\frac{v_1}{-0.677} + v_2(-1.087 + 0.0836) - \frac{v_3}{0.9965} \right]$$

$$\delta_2^p = 4.34v_1 - 2.95v_2 - 2.95v_3 \dots (I)$$

Para calcular la rotación en la arista 3 en función de los desplazamientos en el sentido del eje neutro de la placa y el ángulo entre la placa 2 y 3:

Por simetría

$$v_4 = -v_3$$

$\gamma_2 =$	85.22	$\cot\gamma_2 =$	0.0836	$\text{sen}\gamma_2 =$	0.9965
$\gamma_3 =$	-85.22	$\cot\gamma_3 =$	-0.0836	$\text{sen}\gamma_3 =$	-0.9965

Al sustituir en la expresión (3.1.2.2) se tiene que para la placa 3, la rotación en función del desplazamiento en el sentido del plano de la placa es siguiente:

$$\delta_3^P = \frac{1}{b_3} \left[-\frac{v_2}{\text{sen}\gamma_2} + v_3 \left[(\cot\theta_2 + \cot\theta_3) - \frac{1}{\text{sen}\gamma_3} \right] \right]$$

$$\delta_3^P = -2.95v_2 - 2.95v_3$$

$$\delta_3^P = -2.95(v_2 + v_3) \dots (II)$$

El momento final en la arista 2 y 3:

por definición :

$$m_2 = C_2 m_{20} \dots (3.1.4.1.1)$$

$$m_3 = C_3 m_{30} \dots (3.1.4.2)$$

$$m_2 = C_2 m_{20}$$

donde C es un factor de participación, m_{20} el momento

supuesto de $1360[\text{kg} - \text{m} / \text{m}]$ y m_2 el momento final en la arista 2.

$$\text{si } k_{rig} \delta_{20}^P = 1360.8[\text{kg} - \text{m} / \text{m}]$$

$$\text{si } k_{rig} = \frac{3EJ_2}{b_2}$$

al despejar δ_{20}^P :

$$\delta_{20}^P = \frac{b_2}{3EJ_2} (1360.8)$$

De la misma manera para la arista 3:

$$\delta_{30}^P = \frac{b_3}{EJ_3} (453.6 \text{kg} - \text{m} / \text{m})$$

Al sustituir los datos iniciales con $E = 192352 \text{kg} / \text{cm}^2$, $t_2 = t_3$, $J_2 = J_3$

Por lo que el término de la izquierda de la ecuación con dos incógnitas correspondiente a la arista 2 es:

$$\delta_{20}^P = \frac{0.34m}{(6.67 \times 10^{-7} \text{m}^4 / \text{m})(192352 \text{kg} / \text{m}^2)} \times 453.6 \text{kg} - \text{m} / \text{m}$$

$$\delta_{20}^P = 0.1203[\text{rad}]$$

De la misma manera para la arista 3,

$$\delta_{30}^P = 0.1203[\text{rad}]$$

Al sustituir en las ecuaciones (I), (II) los desplazamientos de la tabla 3.1.4.15 y el valor de δ_{20}^p y reducir términos, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones en función de C_n :

$$-62.244 C_2 + 92.119 C_3 = 0.293$$

$$-0.524 C_2 + 0.564 C_3 = 0.002$$

Por lo anterior, se forma un sistema de ecuaciones con dos incógnitas de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} -62.244 & 92.119 \\ -0.524 & 0.56 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.2925 \\ 0.0023 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.04 & -6.99 \\ 0.04 & -4.72 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -0.004 \\ 0.001 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= -0.0038 \\ C_3 &= 0.0006 \end{aligned}$$

Para obtener los momentos totales al considerar los giros se suman los resultados de las tres condiciones de análisis, a partir de los momentos y esfuerzos a la derecha de la arista (para las tablas presentadas en este trabajo por convención), multiplicados por su correspondiente factor de participación C_n obtenidos anteriormente:

Para la arista 3:

$$\begin{aligned} M_3 &= (-0.40) - 0.004(-388.0) - 0.001(1994.0) \\ M_3 &= 2.29 \text{ [kg-m]} \end{aligned}$$

Para la arista 2:

$$\begin{aligned} M_2 &= -0.581 - 0.004(777) - 0.001(-1166.4) \\ M_2 &= -4.25 \text{ [kg-m]} \end{aligned}$$

Para la arista 1:

$$\begin{aligned} M_1 &= -0.034 - 0.004(0) - 0.001(0) \\ M_1 &= -0.034 \text{ [kg-m]} \end{aligned}$$

Para la arista 0:

$$M_0 = 0 \text{ [kg-m]}$$

El resumen de los momentos transversales de la condición inicial (peso propio) y los momentos de corrección (condición 2 y 3) se tienen en la tabla 3.1.4.16.

Arista	Momento transversal [kg-m]	Corrección [kg-m]	Final
0	0.00	0.00	0.00
1	-0.03	0.00	-0.03
2	-0.58	-3.66	-4.25
3	-0.40	2.69	2.29

Tabla 3.1.4.16. Resumen de momentos transversales para el sistema de 6 placas plegadas para la condición de carga de servicio.

En cuanto a la corrección de los esfuerzos, se suman y se logra el esfuerzo, que es el mismo en la izquierda de la arista que en la derecha de la misma:

Para la arista 3:

$$\sigma_3 = 21.8 - 0.004(1587.3) - 0.0008(-3173.3)$$

$$\sigma_3 = 13.85 \text{ kg/cm}^2.$$

Para la arista 2:

$$\sigma_2 = -27.44 - 0.004(2727) - 0.001(4110)$$

$$\sigma_2 = -14.58 \text{ kg/cm}^2.$$

Para la arista 1:

$$\sigma_1 = 55.3 - 0.004(-9322) - 0.001(-13269)$$

$$\sigma_1 = 11.80 \text{ kg/cm}^2.$$

Para la arista 0:

$$\sigma_0 = -256 - 0.004(58778.5) - 0.001(87815)$$

$$\sigma_0 = 20 \text{ kg/cm}^2.$$

Para las aristas del resto del sistema de placas, por la simetría, son los mismos momentos y los mismos esfuerzos que en el lado izquierdo del eje de simetría.

De lo anterior, en la tabla 3.1.4.17 se tienen los esfuerzos longitudinales de la condición 1 y los esfuerzos de las condiciones 2 y 3 que son los esfuerzos correctivos que al sumarse se tiene el esfuerzo final de las aristas del sistema.

Arista	Esfuerzo longitudinal	Corrección	Final
0	-256.77	276.75	19.98
1	55.28	-43.48	11.80
2	-27.44	12.86	-14.58
3	21.83	-7.98	13.85

Tabla 3.1.4.17. Resumen de esfuerzos para el sistema de 6 placas plegadas.

7. El diagrama de momentos y esfuerzos al centro del claro se tienen en la tabla 3.1.4.13 y 3.1.4.14, respectivamente.

Se puede observar que en la figura 3.1.4.14 presenta un eje neutro, donde los esfuerzos son nulos, pero a diferencia del caso de una viga, éste presenta una inclinación respecto a la horizontal, siendo de compresión arriba de éste y de tensión por abajo del eje neutro.

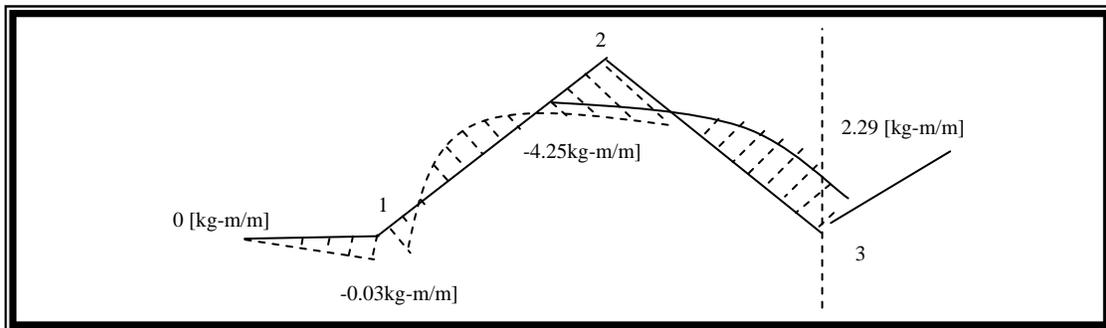


Figura 3.1.4.13. Diagrama de momentos transversales al centro del claro, para el sistema de 6 placas plegadas, para la condición de carga de servicio.

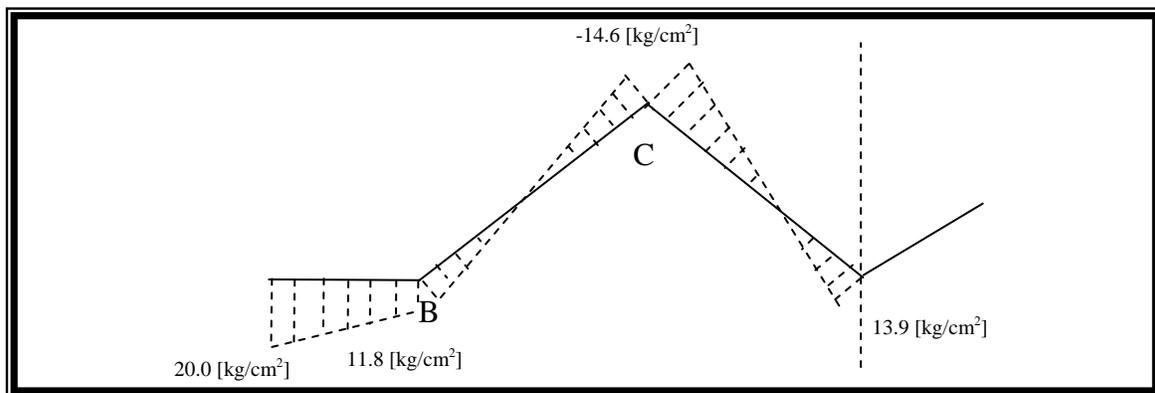


Figura 3.1.4.14 Diagrama de esfuerzos longitudinales al centro del claro, para el sistema de 6 placas plegadas, para la condición de carga de servicio.

Los resultados al aplicar las metodologías para el sistema de 6 placas se resumen en la tabla 3.1.4.16 cuyos resultados muestran la similitud de aplicar entre sí, para los esfuerzos longitudinales y momentos transversales.

Arista	Esfuerzo longitudinal en L/2 [kg/cm ²]				Momento transversal en L/2 [kg-m/m]			
	Eliahu Traum	H. Simpson	P. Billington	D. Yitzhaki Proc.Directo.	Eliahu Traum	H. Simpson	P. Billington	D. Yitzhaki (Proc.directo).
0	21	20	20	20	0.00	0.00	0.00	0.00
1	12	12	12	12 (8.46)	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03
2	-15	-15	-15	-15	-4.26	-4.25	-4.25	-4.25
3	14	14	14	14(10.77)	2.29	2.29	2.29	2.42

Tabla 3.1.4.18. Esfuerzos longitudinales y momentos transversales para el sistema de 6 placas plegadas para la condición de peso propio. El valor entre paréntesis corresponde al resultado experimental.

3.1.5. Comentarios.

Existe una gran diversidad de metodologías propuestas en la actualidad, para el análisis y diseño de placas plegadas, los más comúnmente utilizados son los métodos de Yitzhaki (1958), Billington (1962), Eliahu Traum (1964) y Howard Simpson (1958), que nos permiten saber los esfuerzos y momentos no sólo en las tres configuraciones mostradas en la figura 3.1, 3.2 y 3.3, con 6, 8 y 9 placas plegadas, respectivamente, apoyadas todas en diafragmas extremos, las cuales se estudian y comparan con los resultados obtenidos de un ensayo experimental. Lo anterior, con el objetivo de saber si los resultados son correctos, ya que entre menor cantidad de placas plegadas se tienen en la sección transversal en estudio, el grado de dificultad para determinar los elementos mecánicos disminuye, hasta que finalmente se tiene el modelo de 9 placas plegadas.

Al aplicar el método propuesto por Eliahu Traum a la configuración con 6 placas plegadas con simetría respecto a una arista, como la configuración mostrada en la figura 3.1 y 3.2, no así, para el sistema de placa de la figura 3.3. Se observa que los resultados varían en más del 5% entre ellos en la primera aproximación.

En las cuatro metodologías propuestas, es necesario calcular los esfuerzos al considerar que se trata de una viga continua prismática de un ancho unitario, apoyada en las aristas, para sumar los efectos al resolver la viga con la hipótesis de las aristas articuladas, es decir, con los giros permitidos.

Una vez calculados los esfuerzos de empotramiento, se utiliza un método de distribución de esfuerzos, similar al método de distribución de momentos simplificados de Hardy Cross, con factores de transporte igual a un medio.

En este método se supone que las reacciones a lo largo de las aristas pueden ser descritas por el primer término de la serie Fourier, ya que la variación de la carga en el sentido longitudinal se puede aproximar a una onda senoidal.

Al revisar los datos registrados por el sistema de adquisición de datos (Vishay-Ellis 20), correspondientes al instante en que el sistema de placas plegadas se encuentra sólo bajo su peso propio, se tiene un esfuerzo en la arista 1 de 8.46 kg/cm^2 contra los 12 kg/cm^2 calculados con los métodos propuestos, que indica una diferencia de 45% respecto a este último, con cualquiera de los cuatro métodos presentados.

Respecto a la arista 3, se tienen 10.77 kg/cm^2 de acuerdo al sistema de adquisición de datos, contra el teórico de 14 kg/cm^2 , es decir, este último sobrestima en 30% el desplazamiento.

En términos generales, los esfuerzos teóricos sobrestiman los experimentales, y producen valores del lado de la seguridad, para la condición de peso propio, al comparar con los resultados del ensaye.

Como puede verse en la figura 3.1, es una sección cuyo eje de simetría pasa por una arista, facilitando la aplicación de este método, ya que al resolver la mitad del sistema de placas, se tiene automáticamente la solución de la otra mitad.

En la figura 3.1.4.14, se puede ver que al igual que una viga, existe un eje neutro, donde los esfuerzos son nulos, pero a diferencia de la primera, el eje tiene un ángulo de inclinación respecto a la horizontal.

3.1.2 Condición de carga de servicio.

Ahora, para la condición de carga de servicio, el procedimiento es análogo a la condición de peso propio, con la diferencia de que la carga distribuida por metro cuadrado será de 344.5 kg/cm^2 .

En la tabla 3.1.2.1 se presentan los resultados de aplicar el método de H. Simpson al sistema de 6 placas, para la condición de carga de servicio, cuyo esfuerzo en la arista 0 para el caso de E. Traum está sobrestimado respecto a los otros 2 métodos.

Arista	Esfuerzo longitudinal en L/2 [kg/cm^2]				Momento transversal en L/2 [kg-m/m]			
	Eliahu Traum	H. Simpson	P. Billington	D. Yitzhaki Proced. Directo.	Eliahu Traum	H. Simpson	P. Billington	D. Yitzhaki (Proced. directo).
0	114	109	110	108	0.00	0.00	0.00	0.00
1	63	63	63	64	-0.24	-0.24	-0.24	-0.24
2	-78	-78	-78	-78	-23.76	-23.68	-23.68	-23.67
3	74	74	74	73	12.11	12.06	12.06	13.17

Tabla 3.1.2.1 Resumen de esfuerzos longitudinales y momentos transversales para el sistema de 6 placas plegadas, al aplicar 344.5 kg/m^2 (carga de servicio).

Se observa que los resultados metodológicos no varían en más del 3% entre sí, en el cálculo de esfuerzos como el de momentos, para 6 placas plegadas. Se puede observar que el esfuerzo máximo es el correspondiente a la arista 0, mientras que el menor esfuerzo el que corresponde a la arista 1. El máximo momento negativo está en la arista 2, es decir en la zona de compresión y el momento máximo positivo en la arista 4. El refuerzo para resistir estos momentos para el máximo negativo, deberá colocarse en el lecho superior de las placas, y para el máximo positivo, en el lecho inferior de las placas. Los resultados anteriores se grafican en las figuras 3.1.1.3 y 3.1.1.4 de la página 29.

3.2. Cálculo de esfuerzos a un sistema de 8 placas plegadas.

Por no haber gran diferencia en la aplicación de las metodologías respecto al sistema de 8 placas plegadas, se optó por no desarrollar los procedimientos, únicamente se presentan los resultados obtenidos para la condición de peso propio y la de servicio.

3.2.1. Condición de peso propio.

Ahora, al proponer una sección con 8 placas (ver figura 3.2), al aplicar los 4 métodos se tiene que la sección es simétrica respecto a una arista y puede aplicarse el método de Eliahu Trau sin dificultad. Los resultados de la aplicación de las metodologías se presentan en la tabla 3.2.1.1 cuyos valores de momento coinciden para todas las aristas excepto la 4, donde el mayor valor se tiene con el método de Yitzhaki. Mientras que los resultados de aplicar el método de Billington y los de E. Trau son prácticamente los mismos.

Arista	Esfuerzo longitudinal en L/2 [kg/cm ²]				Momento transversal en L/2 [kg-m]			
	E. Trau	H. Simpson	Billington	D. Yitzhaki Proced. Directo.	E. Trau	H. Simpson	Billington	D. Yitzhaki (Proced. directo).
0	39	19	19	19	0	0.00	0.00	0.000
1	11	11	10	11(8.46)	0	-0.03	-0.03	-0.034
2	-12	-11	-10	-10	-5	-4.24	-4.23	-4.233
3	-13	-12	-12	-12	-4	-4.00	-4.09	-3.919
4	14	13	14	13(10.77)	1.05	2.67	1.34	3.394

Tabla 3.2.1.1 Esfuerzos longitudinales y momentos transversales para el sistema de 8 placas plegadas para la condición de peso propio.

Para 8 placas, 2 más que la configuración anterior, se tiene una reducción en el valor de los esfuerzos longitudinales y un aumento en los momentos transversales, lo que era de esperarse, ya que a medida que aumenta el número de pliegues, los esfuerzos transversales son menores debido a la acción de membrana que las placas inclinadas aportan al sistema.

Al comparar con los datos experimentales, se tiene una diferencia en la arista 2 del 15% para el método de Billington respecto al ensaye, sobrestimando el esfuerzo al calcularse con las tres metodologías. Para esta configuración, los momentos transversales difieren entre sí, por lo que para fines de diseño, el mayor de los tres valores será el que rige, que corresponde al método de Yitzhaki.

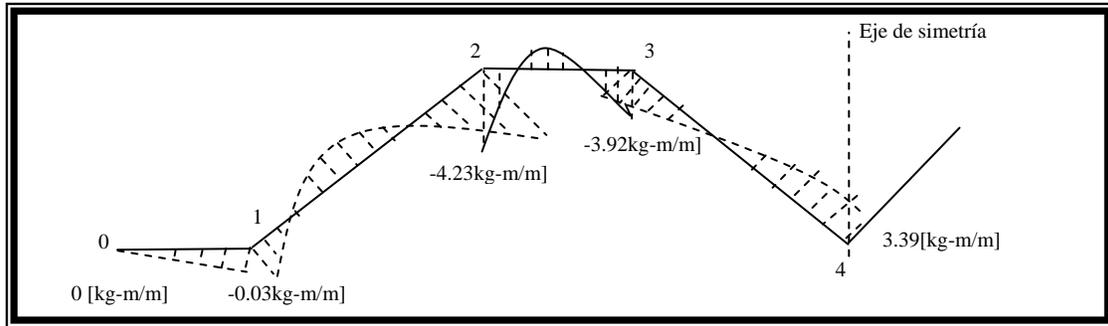


Figura 3.2.1.1. Diagrama de momentos transversales al centro del claro, para el sistema de 8 placas plegadas con el método de Yitzhaki, para la condición de peso propio.

En la figura 3.2.1.1 se tienen los momentos transversales, que la mecánica de materiales por sí sola, no describe, ya que para estos cálculos se tiene una analogía con la serie de Fourier de la presión ejercida sobre la superficie de las placas en el sentido transversal del sistema de placas. Aunque los momentos cambian de signo entre aristas, los mayores valores se consideran en las aristas del sistema.

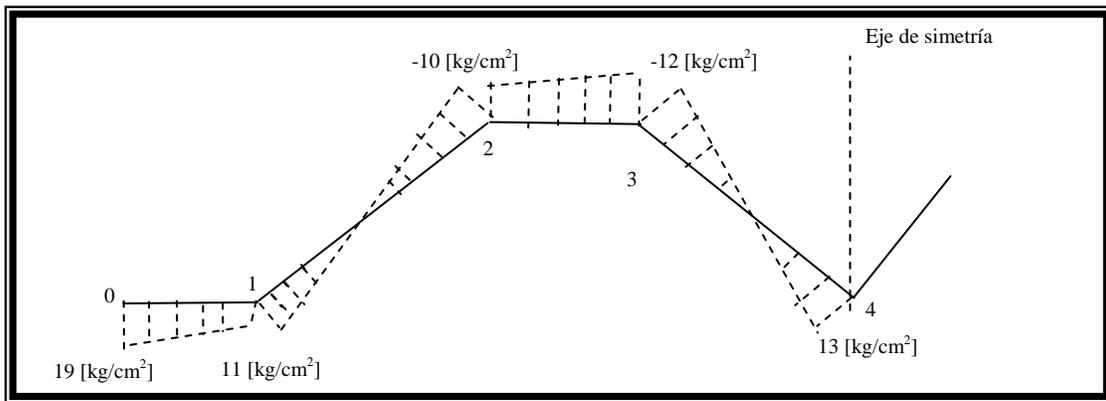


Figura 3.2.1.2. Diagrama de esfuerzos longitudinales al En el centro del claro, para el sistema de 8 placas plegadas, para la condición de peso propio.

Nótese que el esfuerzo en la arista 0 es mayor que en cualquiera de las otras aristas. También se tiene un eje de neutro, es decir donde los esfuerzos son nulos en la sección transversal, sin embargo, el esfuerzo no permanece constante para una distancia del eje neutro, como sucede en la mecánica de materiales. Además se tiene una variación lineal del esfuerzo en el sentido del eje neutro de cada placa, en las placas horizontales y en las inclinadas de la sección transversal del sistema.

3.2.2 Condición de servicio.

Ahora para la misma configuración anterior pero bajo la carga de servicio aplicada en toda la superficie del sistema de placas los esfuerzos y momentos al aplicar las cuatro metodologías, aumenta la diferencia entre ellos, sobre todo al aplicar E. Traum, donde el esfuerzo en la arista 0 es mayor que en los otros métodos. Cabe mencionar que la cantidad

de distribuciones y transportes para éste método no fueron las mismas que para los otros tres métodos. Los resultados se presentan en la tabla 3.2.2.1.

Arista	Esfuerzo longitudinal en L/2 [kg/cm ²]				Momento transversal en L/2 [kg-m/m]			
	Eliahu	H. Simpson	P. Billington	D. Yitzhaki	Eliahu	H. Simpson	P. Billington	D. Yitzhaki
0	185	106	103	105	0.00	0.00	0.00	0.000
1	61	59	56	60	-0.24	-0.24	-0.24	-0.242
2	-73	-58	-55	-58	-22.51	-23.66	-23.60	-23.651
3	-60	-64	-62	-64	-17.44	-22.37	-22.86	-21.865
4	75	72	69	70	19.32	14.55	16.80	19.114

Tabla 3.2.2.1. Resumen de esfuerzos longitudinales y momentos transversales para el sistema de 8 placas plegadas al aplicar 344.5 kg/m² (carga de servicio).

3.2.3. Comentarios

Se observa que al aumentar el número de placas, la diferencia en los resultados aumenta sin rebasar el 5% para los momentos, mientras que las diferencia entre los esfuerzos si es mayor al 19% entre ellos.

Como era de esperarse, los esfuerzos en todas las aristas es menor, reduciéndose en mayor proporción hacia los extremos de la sección es decir, en la arista 0 y 8. Sin embargo, se observa que los momentos transversales han aumentado al colocar dos placas a compresión, debido al aumento en peso de la estructura, en el sentido transversal.

3.3 Desarrollo de las metodologías para análisis y diseño de un sistema de 9 placas plegadas revisadas.

3.3.1. Método de David Yitzhaki.

A continuación se desarrolla el procedimiento propuesto por David Yitzhaki (Método de giros y desplazamientos), para un sistema de 9 placas plegadas con diafragmas extremos, correspondiente a la sección transversal del ensayo de laboratorio, para la condición de peso propio de acuerdo a la Figura 3.3.1.1.

Para determinar el peso propio se procedió de la siguiente manera:

Para las placas horizontales :

$$w = (2400\text{kg} / \text{m}^3) 0.02\text{m}$$

$$w = 48\text{kg} / \text{m}^2$$

$$48\text{kg} / \text{m}^2 (1\text{m}) = 48\text{kg} / \text{m}$$

Para las placas inclinadas :

$$w = (2400\text{kg} / \text{m}^3) 0.02\text{m} / \cos 42.61$$

$$w = 65.21\text{kg} / \text{m}^2$$

$$(65.21\text{kg} / \text{m}^2)(1\text{m}) = 65.21\text{kg} / \text{m}$$

Las cargas anteriores se aplicaron en las tres aproximaciones al sistema de placas plegadas ensayada en el laboratorio $w_1 = 48\text{kg/m}$ y $w_2 = 65.2\text{kg/m}$.

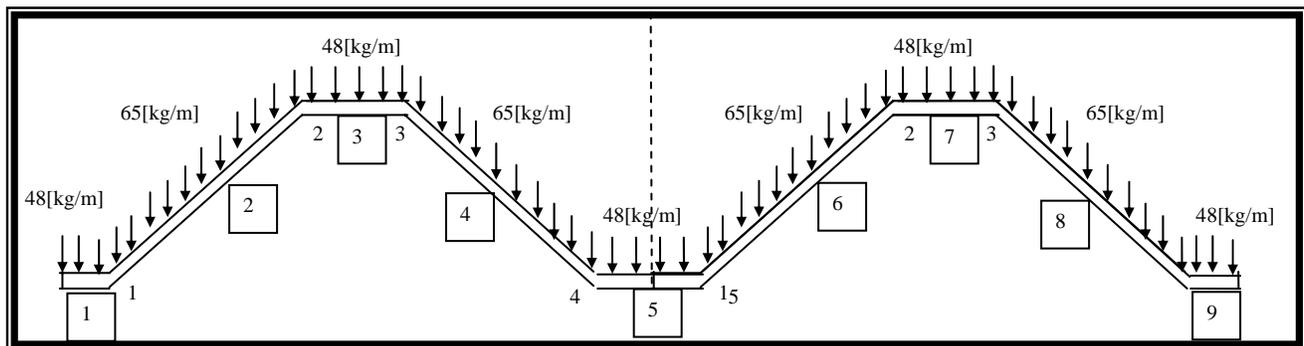


Figura 3.3.1.1. Sección transversal de 9 placas plegadas, con carga distribuida para la condición de peso propio.

Planteamiento de solución.

El planteamiento de solución es análogo al sistema de 6 placas (página 17).

DESARROLLO.

1. Las propiedades geométricas del sistema de 9 placas se presenta en la tabla 3.3.1.1 donde sólo se han escrito hasta la placa 5, dado que es simétrica respecto al centro de dicha placa.

Arista	Placa	b [cm]	t [cm]	A [cm ²]	$S = \frac{bt^2}{6}$ [cm ³]
0					
	1	3.75	2.00	7.50	4.69
1					
	2	34.00	2.00	68.00	385.33
2					
	3	7.50	2.00	15.00	18.75
3					
	4	34.00	2.00	68.00	385.33
4					
	5	7.50	2.00	15.00	18.75

Tabla 3.3.1.1. Propiedades geométricas de la sección (sistema de 9 placas).

En la tabla 3.3.1.2 se tiene la segunda parte de la tabla anterior.

Arista	Placa	θ	sen θ	cos θ	γ	sen γ	b cos θ	$\alpha_n = \frac{\cos \theta_n}{\text{sen } \gamma_{n-1}}$	$\beta_n = \frac{\cos \theta_n}{\text{sen } \gamma_n}$
0									
	1	0	0.000	1.000			0.0		-1.477
1					-42.61	-0.677			
	2	42.61	0.677	0.736			0.3	-1.087	1.087
2					42.61	0.677			
	3	0	0.000	1.000			0.1	1.477	1.477
3					42.61	0.677			
	4	-42.61	-0.677	0.736			0.3	1.087	-1.087
4					-42.61	-0.677			
	5	0	0.000	1.000			0.1	-1.477	-1.477

Tabla 3.3.1.2. Propiedades geométricas de la sección para el sistema de 9 placas plegadas.

2. Una vez obtenidos los momentos de empotramiento (m), se distribuyen de acuerdo a la tabla 3.3.1.3, de donde se calculan las reacciones que se proyectarán para calcular las fuerzas en dirección del eje neutro de las placas.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
k		0.000	1.000	0.181	0.819	0.819	0.181	0.306
k/2		0.000	0.500	0.090	0.410	0.410	0.090	0.153
m [kg-m/m]		-0.034	-0.461	-0.461	-0.023	-0.023	-0.461	-0.461
			0.43	-0.2				
				0.0	0.3	0.27		-0.06
				0.0	0.1	0.12	-0.1	-0.02
				0.0	0.0	0.03	0.0	0.00
Total	0.00	-0.03	-0.03	-0.67	0.36	0.40	-0.54	-0.55
Balance		0.0		0.19		-0.77		0.16
Final [kg-m/m]	0.000	-0.034		-0.487		-0.371		-0.386
V [kg/m]		1.8	9.2	12.9	3.4	0.2	10.99	12.91
R [kg/m]	0	11.0		16.2		11.2		12.91

Tabla 3.3.1.3. Distribución de momentos para la condición de pesos propio en el sistema de 9 placas plegadas (segunda aproximación).

Una vez calculados los momentos distribuidos, al dividirlos entre el modulo de sección se tienen los esfuerzos iniciales de la tabla 3.3.1.4, para distribuirlos.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 3	Arista 4
Área de la placa	7.5		68.0		15.0		68.0	
r		0.901	0.099	0.181	0.819	0.819	0.181	0.306
r/2		0.450	0.050	0.090	0.410	0.410	0.090	0.153
$\sigma_{n-1,n}$ [kg/cm ²]	-474.4	474.4	19.4	-19.4	-53.4	53.4	-17.2	17.2
	204.9			-22.6				
			1.03			-4.7		
	-0.5			0.1	27.0			-6.0
			-2.43			11.0	1.7	
	1.1			-0.1	3.8			-0.8
			-0.36			1.6	-0.1	
	0.2			0.0	0.7			-0.2
			-0.07			0.3	0.0	
	0.0			0.0	0.1			0.0
Total	-268.63	474.36	17.52	-42.04	-21.74	61.71	-15.60	10.17
Balance		-411.5		3.67		-63.34		-3.11
Final [kg/cm ²]	-268.6	62.9		-38.37		-1.6		7.1

Tabla 3.3.1.4. Distribución de esfuerzos para la condición de peso propio (sistema de 9 placas plegadas).

El resumen de los esfuerzos en las aristas para la condición de peso propio, se presentan en la tabla 3.3.1.5, donde se nota que sin considerar las rotaciones los esfuerzos difieren entre sí considerablemente, sobre todo en la arista 0.

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]	σ_0 [kg/cm ²]	σ_n [kg/cm ²]
Cargas básicas	0		0			-268.63
		1		-12.00	-474.36	
	1		11.0			62.9
		2		40.25	19.35	
	2		16.2			-38.4
		3		-5.40	-53.40	
	3		11.2			-1.6
		4		-35.67	-17.15	
	4		12.91			7.1
	5		0.00	0.00		
	4'		12.9			

Tabla 3.3.1.5. Resumen de esfuerzos para la condición de peso propio (sistema de 9 placas plegadas).

Una vez obtenidos los esfuerzos en las aristas del sistema de placas para la condición de peso propio (condición 1), se calculan los esfuerzo al suponer un giro unitario en la arista 2, que al sustituir en la expresión $m = (\text{rigidez ang.})\delta_n^p$ es necesario un momento de 1360.8kg-m/m (3000lb-ft/ft*0.4536kg-m/m/(1lb)) para obtener dicho giro, valor que se elige por simplicidad en el sistema ingles.

La distribución de momentos para $m_2=1360.8\text{kg-m/m}$ en la arista 2. (Condición 2) se presenta en la tabla 3.3.1.6.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
k	0.000	0.000	0.142	0.858	0.819	0.181	0.306	
k/2	0.000	0.000	0.071	0.429	0.410	0.090	0.153	
m [kg-m/m]	0.0		1360.8	0.0	0.0	0.0	0.0	
			0.0			-583.81		
			0.0	-239.2			52.75	
			0.0	-45.3	-102.60	8.1	10.00	
			0.0	-8.6	-19.45	1.5	1.90	
			0.0		-3.69	0.3		
			0.0	-1.6			0.36	
Total	0.00	0.00	0.00	1360.80	-294.71	-709.55	9.90	65.01
Balance		0.0		-235.01		589.43		-19.90
Final [kg-m/m]	0	0		1125.79		-120.13		45.11
V [kg/m]			4499.0	-4499.0	-16612.2	16612.2	660.32	-660.32
R [kg/m]	0	4499.0		-21111.2		17272.5		-660.32

Tabla 3.3.1.6. Distribución de momentos al suponer un giro unitario en la arista 2, es decir un $m_2=1360.8\text{kg-m/m}$, en la arista 2, para el sistema de 9 placas. (Condición 2).

A partir de los momentos distribuidos en la tabla anterior y dividirlos entre el módulo de sección se tienen los esfuerzos iniciales de la tabla 3.3.1.7.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
Área de la placa	7.5		68.0		15.0		68.0	
r	0.901		0.099	0.181	0.819	0.819	0.181	0.306
r/2	0.450		0.050	0.090	0.410	0.410	0.090	0.153
σ_0 [kg/cm ²]	-156699.4	156699.4	-9563.6	9563.6	334226.7	-334226.7	-9563.6	9563.6
	74873.4			-8258.1				
	13547.4		-30083.25			136377.4		17013.8
	-3077.8		6834.48	-1494.2	-77129.1	-30983.0	4068.0	3167.3
	-598.1		1328.10	339.5	-14358.2	-6020.7	484.8	587.8
	-111.1		246.77	66.0	-2664.9	-1118.7	90.0	109.2
	-20.6		45.85	12.3	-495.1	-207.8	16.7	20.3
	-3.8		8.52	2.3	-92.0	-38.6	3.1	3.8
	-0.7		1.58	0.4	-17.1	-7.2	0.6	0.7
Total	-72090.79	156699.44	-31181.54	231.75	239467.15	-236225.37	-4900.47	30466.44
Balance		-169217.3		43235.31		189519.20		-9326.46
Final [kg/cm ²]	-72091	-12518		43467.06		-46706.17		21139.98

Tabla 3.3.1.7. Distribución de esfuerzos al suponer un giro unitario en la arista 2, es decir un $m_2=1360.8\text{kg-m/m}$, en la arista 2, para el sistema de 9 placas. (Condición 2).

Los pasos anteriores para la condición 2, se resumen en la tabla 3.3.1.8.

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]	σ_0 [kg/cm ²]	σ_n [kg/cm ²]
Condición 2	0		0.00			-72,090.79
		1		-4890.88	-156,699.44	
	1		4,498.97			-12,517.87
		2		-24537.81	-9,563.59	
	2		-21,111.18			43,467.06
		3		41727.35	334,226.75	
	3		17,272.53			-46,706.17
		4		-24537.81	-9,563.59	
	4		-660.32			21,139.98
	5		0.00	0.00		
	4'		-660.32			

Tabla 3.3.1.8. Resumen de esfuerzos al suponer un giro unitario en la arista 2, es decir un $m_2=1360.8\text{kg-m/m}$, en la arista 2, para el sistema de 9 placas. (Condición 2).

Al aplicar un momento en la arista 3 ($m_3=2721.6 \text{ kg-m/m}$) se calculan los esfuerzo al suponer un giro unitario en la arista 3, que al sustituir en la expresión $m = (\text{rigidez ang.}) \delta_n^p$ es necesario un momento de $6000\text{lb-ft/ft} \cdot 0.4536\text{kg-m/m}/(1\text{lb})$, es decir $2721.6[\text{kg-m/m}]$, para obtener dicho giro, dado que en esta sección la placa se supone empotrada en ambos extremos, valor que se elige por simplicidad en el sistema ingles.

En la tabla 3.3.1.9. se presenta la distribución de momentos al aplicar un giro unitario en la arista 3, ($m_3=2721.6\text{kg-m/m}$), para estar en posibilidad de calcular las fuerzas cortantes y por lo tanto las reacciones en las aristas para ésta condición, y proyectarlas en la dirección del plano de cada placa para obtener las fuerzas de placa.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
k	0.000		0.000	0.142	0.858	0.819	0.181	0.306
k/2	0.000		0.000	0.071	0.429	0.410	0.090	0.153
m [kg-m/m]	0.0	0.0	0.0	0.0	-2721.6	2721.6	0.0	0.0
	0.0			0.0		-1167.63		
				0.0	636.6			-140.42
				0.0		273.10	-21.5	
				0.0	120.7			-26.62
				0.0		51.77	-4.1	
				0.0	22.9			-5.05
				0.0		9.81	-0.8	
				0.0	4.3			-0.96
Total	0.00	0.00	0.00	0.00	-1937.14	1888.66	-26.34	-173.04
Balance		0.0		-274.99		-1568.92		52.97
Final [kg-m/m]	0.00	0.00		-274.99		319.75		-120.07
V [kg/m]			-1098.9	1098.9	7929.8	-7929.8	-1757.62	1757.62
R [kg/m]	0	-1098.9		9028.7		-9687.4		1757.62

Tabla 3.3.1.9. Distribución de momentos al suponer un giro unitario en la arista 3, es decir un $m_3=2721.6\text{kg-m/m}$, en la arista 3, para el sistema de 9 placas. (Condición 3).

A partir de las reacciones calculadas en la tabla anterior, se procede a calcular los esfuerzos en las aristas y distribuir posteriormente para la condición 3. ($m_3=2721.6\text{kg-m/m}$):

A partir de los momentos distribuidos en la tabla anterior y dividirlos entre el módulo de sección se tienen los esfuerzos iniciales de la tabla 3.3.1.10 para distribuirlos.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
Área de la placa	7.5		68.0		15.0		68.0	
r	0.901		0.099	0.181	0.819	0.819	0.181	0.306
r/2	0.450		0.050	0.090	0.410	0.410	0.090	0.153
σ_0 [kg/cm ²]	38275.8	-38275.8	4565.1	-4565.1	-162970.9	162970.9	4565.1	-4565.1
	-19292.6		14506.05	2127.9		-65760.8		
	-6532.5			720.5	37951.0			-8371.5
	1515.0		-3364.20			15251.0	-1980.1	
	294.0		-652.92	-167.1	7058.5		2959.9	-238.3
			-121.31	-32.4	1310.1		550.0	-44.2
	54.6			-6.0	243.4			-53.7
			-22.54			102.2	-8.2	
	10.1		-4.19	-1.1	45.2		19.0	-1.5
	1.9			-0.2	8.4			-1.9
			-0.78			3.5	-0.3	
	0.4			0.0	1.6			-0.3
Total	14326.72	-38275.82	14905.26	-1923.70	-116352.71	116095.73	2292.46	-14848.58
Balance		47898.2		-20679.94		-93236.42		4545.48
Final [kg/cm ²]	14326.72	9622.37		-22603.64		22859.32		-10303.09

Tabla 3.3.1.10. Distribución de esfuerzos al suponer un giro unitario en la arista 3, es decir un $m_3 = 2721.6\text{kg}\cdot\text{m}/\text{m}$, en la arista 3, para el sistema de 9 placas. (Condición 3).

El resumen de esfuerzos para la condición 3 se presenta en la tabla 3.3.1.11.

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]	σ_0 [kg/cm ²]	σ_n [kg/cm ²]
Momento de 2721.6 kg·m/m en la arista 3	0		0.00			14,326.72
		1		1194.66	38,275.82	
	1		-1,098.93			9,622.37
		2		11713.04	4,565.15	
	2		9,028.71			-22,603.64
		3		-20346.50	-162,970.92	
	3		-9,687.41			22,859.32
		4		11713.04	4,565.15	
	4		1,757.62			-10,303.09
	5			0.00	0.00	
	3'		1,757.62			

Tabla 3.3.1.11. Distribución de momentos al suponer un giro unitario en la arista 3, es decir un $m_3 = 2721.6\text{kg}\cdot\text{m}/\text{m}$, en la arista 3, para el sistema de 9 placas. (Condición 3).

A continuación se procede a calcular los giros en las aristas, para las tres condiciones anteriores.

El resumen de los giros para la condición 1 se tiene la tabla 3.3.1.12.

Condición de carga	Arista	Placa	$C\delta_m^P [ton / m^4]$	$C\delta_{n,n}^L [ton / m^4]$	$C\delta_{n,n}^L [ton / m^4]$
Condición 1 (peso propio)	0				
		1			
	1		516922282.84	-77020.95868	516845261.88
		2			
	2		-541523351.99	-188021.7521	-541711373.74
		3			
	3		472507762.10	-16989.91736	472490772.19
	4				
4		-52233119.45	0	-52233119.45	

Tabla 3.3.1.12. Resumen de giros en las aristas al suponer un giro unitario en la arista 1, es decir un $m_3=1360.8\text{kg-m/m}$, en la arista 1, para el sistema de 9 placas. (Condición 1).

El resumen de los giros para la condición 2 se tiene en la tabla 3.3.1.13.

Condición de carga	Arista	Placa	$C\delta_m^P [ton / m^4]$	$C\delta_{n,n}^L [ton / m^4]$	$C\delta_{n,n}^L [ton / m^4]$
Condición 2	0				
		1			
	1		-30817815.97	0	-30817815.97
		2			
	2		245388247.11	-33979.83471	245354267.28
		3			
	3		-239938230.96	-376043.5041	-240314274.46
	4				
4		26334557.42	-154041.9174	26180515.50	

Tabla 3.3.1.13. Giros en las aristas al suponer un giro unitario en la arista 2, es decir un $m_2=2721.6\text{kg-m/m}$, en la arista 2, para el sistema de 9 placas. (Condición 2).

El resumen de los giros para la condición 3 se tienen en la tabla 3.3.1.4.

Condición de carga	Arista	Placa	$C\delta_m^P [ton / m^4]$	$C\delta_{n,n}^L [ton / m^4]$	$C\delta_{n,n}^L [ton / m^4]$
Condición 3	0				
		1			
	1		-549724829.95	0	-549724829.95
		2			
	2		-827985958.44	0	-827985958.44
		3			
	3		892627347.05	-154041.9174	892473305.13
		4			
4		-97467563.50	-376043.5041	-97843607.00	

Tabla 3.3.1.14. Giros en las aristas al suponer un giro unitario en la arista 3, es decir un $m_3=2721.6\text{kg-m/m}$, para el sistema de 9 placas. (Condición 3).

A partir de los giros anteriores para las tres condiciones se está en posibilidad de plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{9.87}{9.6}(-167108.33) - 541711373.74(m_2) + 245354267.3(m_3) - 827985958.4(m_4) = 0$$

$$\frac{9.87}{9.6}(-216978.57) + 472490772.2(m_2) - 240314274.46(m_3) + 892473305.1(m_4) = 0$$

$$\frac{9.87}{9.6}(21288) - 52233119.45(m_2) - 26180515.5(m_3) - 97843607(m_4) = 0$$

Al resolver para m_2 y m_3 :

$$m_2 = -0.004$$

$$m_3 = -0.004$$

$$m_4 = 0.002$$

Al superponer los efectos debido a esfuerzos longitudinales y momentos transversales de la condición 1, 2 y 3, se tienen los:

Arista	Placa	Esfuerzo $[\text{kg}/\text{cm}^2]$	$M_{om.} [\text{kg-m/m}]$
0		12	0.000
	1		
1		10	-0.034
	2		
2		-10	-4.2297
	3		
3		-11	-3.980
	4		
4		11	2.6109

Tabla 3.3.1.15. Resumen de esfuerzos longitudinales y momentos transversales para el sistema de 9 placas plegadas para la condición de peso propio. Ver Figura 3.3.1.1 correspondiente al método de Yitzhaki.

Los esfuerzos se pueden ver en la figura 3.3.1.2 correspondientes a la metodología de Yitzhaki.

3.3.2. Método de Billington.

Planteamiento del problema.

Calcular los diagramas de momentos y de esfuerzo para el sistema de 9 placas plegadas de la figura 3.3, con el método propuesto por Billington, para la condición de peso propio.

Planteamiento de resolución.

El mismo que para el sistema de 6 placas plegadas (página 26).

Desarrollo.

1. Las Propiedades geométricas de la sección se tienen en la tabla 3.3.2.1. y 3.3.2.2.

Arista	Placa	b [m]	t [m]	A [m ²]	$S = \frac{bt^2}{6} [m^3]$
0					
	1	0.06	0.02	0.0012	0.00
1					
	2	0.340	0.02	0.0068	0.00
2					
	3	0.075	0.02	0.0015	0.00
3					
	4	0.340	0.02	0.0068	0.00
4					
	5	0.075	0.02	0.0015	0.00
4'					
	6	0.34	0.02	0.0068	0.00

Tabla 3.3.2.1. Propiedades geométricas de la sección para el sistema de 9 placas.

Arista	Placa	θ	$\text{sen } \theta$	$\text{cos } \theta$	γ	$\text{sen } \gamma$	$b \text{ cos } \theta$	$\alpha_n = \frac{\text{cos } \theta_n}{\text{sen } \gamma_{n-1}}$	$\beta_n = \frac{\text{cos } \theta_n}{\text{sen } \gamma_n}$
0									
	1	0	0.000	1.000			6.0		-1.477
1					-42.61	-0.677			
	2	42.61	0.677	0.736			25.0	-1.087	1.087
2					42.61	0.677			
	3	0	0.000	1.000			7.5	1.477	1.477
3					42.61	0.677			
	4	-42.61	-0.677	0.736			25.0	1.087	-1.087
4					-42.61	-0.677			
	5	0	0.000	1.000			7.5	-1.477	-1.477
4'					-42.61	-0.677			
	6	42.61	0.677	0.736			25.0	-1.087	

Tabla 3.3.2.2. Propiedades geométricas para el sistema de 9 placas plegadas. El momento de inercia es el mismo para todas placas e igual 0.67cm^3 .

- Para calcular las reacciones se distribuyen los momentos de la siguiente manera para la condición 1 (peso propio):

Ver la tabla 3.1.1.1 y 3.1.1.2 del método de Yitzhaki.

Con las reacciones, se obtienen los esfuerzos y se distribuyen de acuerdo a las tablas 3.1.1.3 y 3.1.1.4 del método de Yitzhaki.

El resumen para la condición 1 corresponde a la tabla 3.1.1.5 del método de Yitzhaki.

- El cálculo de los momentos distribuidos a partir de los momentos de empotramiento se tienen en la tabla 3.3.2.3.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
k		0.000	0.000	0.142	0.858	0.819	0.181	0.306
k/2		0.000	0.000	0.071	0.429	0.410	0.090	0.153
m [kg-m/m]				-453.6	-453.6	0.0	0.0	0.0
	0.0			0.0				
Total	0.00	0.00	0.00	-453.60	-453.60	0.00	0.00	0.00
Balance		0.0		0.00		0.00		0.00
Final [kg-m/m]	0	0		-453.60		0.00		0.00
V [kg/m]			-1812.7	1812.7	6048.0	-6048.0	0.00	0.00
R [kg/m]	0	-1812.7		7860.7		-6048.0		0.00

Tabla 3.3.2.3. Distribución de momentos al suponer un giro unitario en la arista 2, es decir $m_2 = 453.6\text{kg-m/m}$, para el sistema de 9 placas.

Al calcular los esfuerzos dividiendo los momentos distribuidos de la tabla anterior entre el módulo de sección, se tienen los esfuerzos iniciales de la tabla 3.3.2.4.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
Área de la placa	12.0		68.0		15.0		68.0	
r	0.850		0.150	0.181	0.819	0.819	0.181	0.306
r/2	0.425		0.075	0.090	0.410	0.410	0.090	0.153
σ_0 [kg/cm ²]	24662.8	-24662.8	3481.8	-3481.8	-121110.3	121110.3	3481.8	-3481.8
	-11961.5		10819.82	2110.8		-49049.9		
	-4598.4			811.5	28092.5			-6196.9
	1047.7		-2465.15			11175.3	-1481.4	
	206.2		-485.20	-184.9	5184.7		-175.1	-1143.7
	38.8		-91.19	-36.4		2199.6		-214.6
	7.3		-17.14	-6.8	182.8	413.4	-32.8	-40.3
	1.4		-3.22	-1.3	34.3	77.7	-6.2	-7.6
	0.3		-0.61	-0.2	6.5	14.6	-1.2	-1.4
				0.0	1.2	2.7	-0.2	-0.3
Total	9404.50	-24662.84	11239.14	-789.16	-86635.62	85943.81	1784.94	-11086.53
Balance		30516.7		-15514.42		-68949.44		3393.84
Final [kg/cm ²]	9404	5854		-16303.58		16994.37		-7692.69

Tabla 3.3.2.4. Distribución de esfuerzos al suponer un giro unitario en la arista 2, es decir $m_2=453.6\text{kg-m/m}$, para el sistema de 9 placas.

El resumen de esfuerzos en las aristas del sistema de 9 placas para la condición 2 se presenta en la tabla 3.3.2.5.

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]	σ_0 [kg/cm ²]	σ_n [kg/cm ²]
Condición 2	0		0.00			9,404.50
		1		1970.62	24,662.84	
	1		-1,812.71			5,853.84
		2		8933.47	3,481.81	
	2		7,860.71			-16,303.58
		3		-15120.31	-121,110.34	
	3		-6,048.00			16,994.37
		4		8933.47	3,481.81	
	4		0.00			-7,692.69
	5			0.00	0.00	
	4'		0.00			

Tabla 3.3.2.5. Resumen de esfuerzos en las aristas, al suponer un giro unitario en la arista 2, es decir $m_2=453.6\text{kg-m/m}$, para el sistema de 9 placas.

Al analizar la condición 3, es decir, distribuir el momento m_3 de 453.6kg-m/m en la arista 3, se tienen los cortantes y las reacciones en las aristas de acuerdo a la tabla 3.3.2.6.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
k		0.000	0.000	0.142	0.858	0.819	0.181	0.306
k/2		0.000	0.000	0.071	0.429	0.410	0.090	0.153
m [kg-m/m]	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-453.6	-453.6	0.0
Total	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-453.60	-453.60	0.00
Balance		0.0		0.00		0.00		0.00
Final [kg-m/m]	0.00	0.00		0.00		-453.60		0.00
V [kg/m]			0.0	0.0	-6048.0	6048.0	1812.71	-1812.71
R [kg/m]	0	0.0		-6048.0		7860.7		-1812.71

Tabla 3.3.2.6. Distribución de momentos, al suponer un giro unitario en la arista 3, es decir $m_3 = 453.6\text{kg-m/m}$, para el sistema de 9 placas.

Al calcular los esfuerzos dividiendo los momentos distribuidos de la tabla anterior entre el módulo de sección de cada placa, se tienen los resultados de la tabla 3.3.2.7.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
Área de la placa	12.0		68.0		15.0		68.0	
r		0.850	0.150	0.181	0.819	0.819	0.181	0.306
r/2		0.425	0.075	0.090	0.410	0.410	0.090	0.153
σ_0 [kg/cm ²]	0.0	0.0	-3481.8	3481.8	121110.3	-121110.3	-3481.8	3481.8
	1479.8			-261.1				
	4527.4		-10652.68		48292.2			6265.3
	-1060.1		2494.33	-799.0	-28402.9	-11307.6	1491.9	1156.6
	-208.5		490.69	187.1	-5243.2	-2224.4	177.0	
	-39.2		92.22	36.8	-983.7	-418.1	33.2	217.0
	-7.4		17.33	6.9	-184.9	-78.6	6.2	40.8
	-1.4		3.26	1.3	-34.7	-14.8	1.2	7.7
	-0.3		0.61	0.2	-6.5	-2.8	0.2	1.4
				0.0	-1.2			0.3
Total	4690.33	0.00	-11036.06	2654.11	86253.22	-86864.40	-1772.03	11170.88
Balance		-9380.7		15108.27		69714.23		-3419.66
Final [kg/cm ²]	4690.33	-9380.65		17762.38		-17150.16		7751.22

Tabla 3.3.2.7. Distribución de esfuerzos, al suponer un giro unitario en la arista 3, es decir $m_3=453.6\text{kg-m/m}$, para el sistema de 9 placas.

El resumen de esfuerzos en las aristas del sistema, se presentan en la tabla 3.3.2.8.

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]	σ_0 [kg/cm ²]	σ_n [kg/cm ²]
Condición 3	0		0.00			4,690.33
		1		0.00	0.00	
	1		0.00			-9,380.65
		2		-8933.47	-3,481.81	
	2		-6,048.00			17,762.38
		3		15120.31	121,110.34	
	3		7,860.71			-17,150.16
		4		-8933.47	-3,481.81	
	4		-1,812.71			7,751.22
	5		0.00	0.00		
	4'		-1,812.71			

Tabla 3.3.2.8. Resumen de esfuerzos en las aristas, al suponer un giro unitario en la arista 3, es decir $m_3 = 453.6\text{kg-m/m}$, para el sistema de 9 placas.

Al proceder de forma análoga que para la condición anterior, se tiene que para la condición 4, es decir, al aplicar un momento en la arista 4 de $m_4 = 453.6\text{kg}$ y distribuirlo según la tabla 3.3.2.9 se tienen los cortantes y las reacciones en las aristas para esta condición.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
k		0.000	0.000	0.142	0.858	0.819	0.181	0.306
k/2		0.000	0.000	0.071	0.429	0.410	0.090	0.153
m [kg-m/m]	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-453.6
	0.0			0.0				
			0.00			0.00		
				0.0	0.0			0.00
			0.00			0.00	0.0	
				0.0	0.0			0.00
Total	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-453.60
Balance		0.0		0.00		0.00		0.00
Final [kg-m/m]	0.00	0.00		0.00		0.00		-453.60
V [kg/m]			0.0	0.0	0.0	0.0	-1812.71	1812.71
R [kg/m]	0	0.0		0.0		-1812.7		1812.71

Tabla 3.3.2.9. Distribución de momentos, al suponer un giro unitario en la arista 4 es decir $m_4 = 453.6\text{kg-m/m}$, para el sistema de 9 placas.

Al dividir los momentos distribuidos de la tabla anterior entre el módulo de sección para cada placa, se tienen los esfuerzos iniciales de la tabla 3.3.2.10.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
Área de la placa	12.0		68.0		15.0		68.0	
r	0.850		0.150	0.181	0.819	0.819	0.181	0.306
r/2	0.425		0.075	0.090	0.410	0.410	0.090	0.153
σ_0 [kg/cm ²]	0.0	0.0	0.0	0.0	-15784.2	15784.2	0.0	0.0
			1426.28			-6465.8		
	-606.2			107.0	3817.2			-842.0
			-335.26			1519.8	-128.9	
	142.5			-25.1	675.4			-149.0
			-63.30			287.0	-22.8	
	26.9			-4.7	126.9			-28.0
			-11.90			53.9	-4.3	
	5.1			-0.9	23.8			-5.3
			-2.24			10.1	-0.8	
	0.9			-0.2	4.5			-1.0
			-0.42			1.9	-0.2	
	0.2			0.0	0.8			-0.2
			-0.08			0.4	0.0	
	0.0			0.0	0.2			0.0
Total	-430.57	0.00	1013.10	75.98	-11135.45	11191.52	-156.95	-1025.46
Balance		861.1		-2026.16		-9297.54		313.92
Final [kg/cm ²]	-430.57	861.13		-1950.18		1893.97		-711.55

Tabla 3.3.2.10. Distribución de esfuerzos, al suponer un giro unitario en la arista 4 es decir $m_4=453.6\text{kg-m/m}$, para el sistema de 9 placas.

El resumen de esfuerzos en las aristas del sistema, para la condición 4, se presenta en la tabla 3.3.2.11.

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]	σ_0 [kg/cm ²]	σ_n [kg/cm ²]
Condición 4	0		0.00			-430.57
		1		0.00	0.00	
	1		0.00		0.00	861.13
		2		0.00		
	2		0.00			-1,950.18
		3			-1970.62	-15,784.22
	3		-1,812.71			1,893.97
		4			0.00	0.00
	4		1,812.71			-711.55
	5			0.00	0.00	
	3'		1,812.71			

Tabla 3.3.2.11. Resumen de esfuerzos en las aristas, al suponer un giro unitario en la arista 4, es decir $m_4 = 453.6\text{kg-m/m}$, para el sistema de 9 placas.

- A partir de los esfuerzos distribuidos para cada condición, se calculan las rotaciones.

Con los momentos distribuidos para la condición 1, se calculan las rotaciones del sistema de acuerdo a la tabla 3.3.2.12.

Ubicación		Propiedades de la placa		Por condiciones iniciales			
Arista	Placa	b [m]	t [cm]	corregidos para el caso I σ [kg/cm ²]	V_n [cm]	δ_n^B [rad]	δ_{n0} [rad]
0				-128			
	1	0.06	2		-2.331		
1				47			
	2	0.34	2		0.183	-8.856E-02	
2				-31			2.695E-02
	3	0.08	2		-0.292	-1.155E-01	
3				-4			-1.282E-01
	4	0.34	2		-0.027	1.270E-02	
4				8			1.270E-02
	5	0.08	2		0.000	0.000E+00	

Tabla 3.3.2.12. Rotaciones en las aristas, debidas a la condición 1 (peso propio) al suponer que la sección transversal es una viga continua, para el sistema de 9 placas.

Con los esfuerzos distribuidos para la condición 2, y las propiedades geométricas del sistema, se calculan las rotaciones para la condición 2, según la tabla 3.3.2.13.

Ubicación		Propiedades de la placa		Al suponer un momento de 453.6 kg-m/m en el arista 2					
Arista	Placa	b [m]	t [cm]	corregidos para el caso II σ [kg/cm ²]	V_n [cm]	$\delta_{n,n}^L$ [rad]	δ_n^P [rad]	$\delta_{n,n}^P$ [rad]	$\delta_{n,n}$ [rad]
0				34347					
	1	0.04	2		799.052				
1				-5557					
	2	0.34	2		-15.779	7.711E-02	3.502E+01	3.471E+01	3.479E+01
2				1588					
	3	0.34	2		5.260	1.928E-02	3.105E-01	3.105E-01	3.298E-01
3				-794					
	3'	0.34	2		-5.260				

Tabla 3.3.2.13. Rotaciones en las aristas debido al momento supuesto $m_2 = 453.6\text{kg-m/m}$, para el sistema de 9 placas.

Una de las herramientas de análisis utilizadas para calcular las rotaciones del sistema, según la tabla 3.3.2.14, fueron la viga conjugada y el teorema de Mohr.

Ubicación		Propiedades de la placa		Al suponer un momento de 453.6 kg-m/m en la arista 3					
Arista	Placa	b [m]	t [cm]	corregidos para el caso III σ [kg/cm ²]	V_n [cm]	$\delta_{n,n}^L$ [rad]	δ_n^P [rad]	$\delta_{n,n}^P$ [rad]	$\delta_{n,n}$ [rad]
0				4690		0			
	1	0.06	2		182.933				
1				-9381		0			
	2	0.34	2		-62.273		-7.828E+00		
2				17762		2.003E-02		-1.366E+02	-1.366E+02
	3	0.08	2		363.111		1.288E+02		
3				-17150		4.889E-02		1.446E+02	1.446E+02
	4	0.34	2		-57.130		-1.577E+01		
4				7751		2.003E-02		-1.577E+01	-1.575E+01
	5	0.08	2		0.000		0.000E+00		
4'				7751					

Tabla 3.3.2.14. Rotaciones en las aristas debido al momento supuesto $X_3 = 453.6\text{kg-m/m}$, para el sistema de 9 placas.

De manera análoga para la condición 4, se calculan las rotaciones en la tabla 3.3.2.15.

Ubicación		Propiedades de la placa		Al suponer un momento de 453.6 kg-m/m en la arista 4					
Arista	Placa	b [m]	t [cm]	corregidos para el caso IV σ [kg/cm ²]	V_n [cm]	$\delta_{n,n}^L$ [rad]	δ_n^P [rad]	$\delta_{n,n}^P$ [rad]	$\delta_{n,n}$ [rad]
0				-431		0			
	1	0.06	2		-16.793				
1				861		0			
	2	0.34	2		6.450		1.007E+00		
2				-1950		0.000E+00		1.505E+01	1.505E+01
	3	0.08	2		-39.981		-1.404E+01		
3				1894		2.003E-02		-1.577E+01	-1.575E+01
	4	0.34	2		5.978		1.737E+00		
4				-712		5.330E-02		1.737E+00	1.790E+00
	5	0.08	2		0.000		0.000E+00		
4'				-712					

Tabla 3.3.2.15. Rotaciones en las aristas debido al momento supuesto $X_4 = 453.6\text{kg-m/m}$, para el sistema de 9 placas.

Al aplicar las ecuaciones de compatibilidad para el sistema de placas, se tiene:

$$\begin{array}{rcccccccccc}
 13866.24 & X_2 & + & -13658.79 & X_3 & + & 1504.54 & X_4 & + & 2.69 & = & 0 \\
 -13660.36 & X_2 & + & 14460.41 & X_3 & + & -1575.50 & X_4 & + & -12.82 & = & 0 \\
 1504.5432 & X_2 & + & -1575.49 & X_3 & + & 179.03 & X_4 & + & 1.26 & = & 0
 \end{array}$$

Que al resolver para x, se tiene,

$$X = \begin{matrix} 0.0098 \\ 0.0097 \\ -0.0044 \end{matrix}$$

Al aplicar los momentos anteriores (correctivos), a la arista 2 y 3 respectivamente, y proceder de la misma forma que cuando suponemos momentos de 453.6 kg-m/m en la arista 2 y 3, se tiene: que para la arista 2, el momento correctivo es $0.0098(453.6) = 4.5$ [kg-m/m], aunque por la convención de signos, es negativo y se distribuye según la tabla 3.3.2.16, donde se calculan las fuerzas cortantes y las reacciones en las aristas.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
k		0.000	0.000	0.142	0.858	0.819	0.181	0.306
k/2		0.000	0.000	0.071	0.429	0.410	0.090	0.153
m [kg-m/m]				-4.5	-4.5	0.0	0.0	0.0
	0.0			0.0				
Total	0.00	0.00	0.00	-4.47	-4.47	0.00	0.00	0.00
Balance		0.0		0.00		0.00		0.00
Final [kg-m/m]	0	0		-4.47		0.00		0.00
V [kg/m]			-17.9	17.9	59.6	-59.6	0.00	0.00
R [kg/m]	0	-17.9		77.4		-59.6		0.00

Tabla 3.3.2.16. Cálculo de las reacciones debidas al momento correctivo en la arista 2 ($X_2 = 4.5$ kg-m/m), para el sistema de 9 placas.

A partir de los momentos de la tabla anterior y dividirlos entre el módulo de sección se tienen los esfuerzos iniciales de la tabla 3.3.2.16, los cuales se distribuyen en el sistema con el método de relajación simplificado.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
Área de la placa	12.0		68.0		15.0		68.0	
R	0.850		0.150	0.181	0.819	0.819	0.181	0.306
r/2	0.425		0.075	0.090	0.410	0.410	0.090	0.153
σ_0 [kg/cm ²]	242.9	-242.9	34.3	-34.3	-1193.0	1193.0	34.3	-34.3
	-117.8			20.8				
			106.58			-483.2		
	-45.3			8.0	276.7			-61.0
			-24.28			110.1	-14.6	
	10.3			-1.8	51.1			-11.3
			-4.78			21.7	-1.7	
	2.0			-0.4	9.6			-2.1
			-0.90			4.1	-0.3	
	0.4			-0.1	1.8			-0.4
			-0.17			0.8	-0.1	
	0.1			0.0	0.3			-0.1
			-0.03			0.1	0.0	
	0.0			0.0	0.1			0.0
			-0.01			0.0	0.0	
	0.0			0.0	0.0			0.0
Total	92.64	-242.94	110.71	-7.77	-853.39	846.58	17.58	-109.21
Balance		300.6		-152.82		-679.18		33.43
Final [kg/cm ²]	93	58		-160.60		167.40		-75.78

Tabla 3.3.2.17. Distribución de esfuerzo debidas al momento correctivo $X_2=4.5\text{kg-m/m}$, para el sistema de 9 placas.

El cálculo de las reacciones debidas al momento correctivo en la arista 3 en el siguiente:

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
k	0.000		0.000	0.142	0.858	0.819	0.181	0.306
k/2	0.000		0.000	0.071	0.429	0.410	0.090	0.153
m [kg-m/m]	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-4.4	-4.4	0.0
	0.0			0.0				
			0.00			0.00		
Total	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-4.40	-4.40	0.00
Balance		0.0		0.00		0.00		0.00
Final [kg-m/m]	0.00	0.00		0.00		-4.40		0.00
V [kg/m]			0.0	0.0	-58.7	58.7	17.60	-17.60
R [kg/m]	0	0.0		-58.7		76.3		-17.60

Tabla 3.3.2.18. Cálculo de reacciones debidas al momento correctivo $X_3 = -4.4\text{kg-m/m}$, para el sistema de 9 placas.

Los momentos anteriores producen esfuerzos, cuyas magnitudes se calculan al dividirlos entre el módulo de sección de cada placa, cuyos esfuerzos se distribuyen según la tabla 3.3.2.19.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
Área de la placa	12.0		68.0		15.0		68.0	
r	0.850		0.150	0.181	0.819	0.819	0.181	0.306
r/2	0.425		0.075	0.090	0.410	0.410	0.090	0.153
σ_0 [kg/cm ²]	0.0	0.0	-33.8	33.8	1175.9	-1175.9	-33.8	33.8
	14.4			-2.5		468.9		
	44.0		-103.43					60.8
			24.22	-7.8	-275.8			
	-10.3			1.8	-50.9	-109.8	14.5	
			4.76			-21.6	1.7	
	-2.0			0.4	-9.6			2.1
			0.90			-4.1	0.3	
	-0.4			0.1	-1.8			0.4
			0.17			-0.8	0.1	
	-0.1			0.0	-0.3			0.1
			0.03			-0.1	0.0	
	0.0			0.0	-0.1			0.0
			0.01			0.0	0.0	
Total	45.54	0.00	-107.15	25.77	837.46	-843.39	-17.21	108.46
Balance		-91.1		146.69		676.88		-33.20
Final [kg/cm ²]	45.54	-91.08		172.46		-166.52		75.26

Tabla 3.3.2.19. Distribución de esfuerzos debidos al momento correctivo $X_3 = -4.4 \text{ kg-m/m}$, para el sistema de 9 placas.

Al proceder de la misma forma que para la condición 3, se tiene que el momento correctivo para la condición 4 es $0.0097(453.6) = 2.009 \text{ [kg-m/m]}$, cuya distribución se muestra en la tabla 3.3.2.20.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
k	0.000		0.000	0.142	0.858	0.819	0.181	0.306
k/2	0.000		0.000	0.071	0.429	0.410	0.090	0.153
m [kg-m/m]	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.009
Total	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.01
Balance		0.0		0.00		0.00		0.00
Final [kg-m/m]	0.00	0.00		0.00		0.00		2.01
V [kg/m]			0.0	0.0	0.0	0.0	8.03	-8.03
R [kg/m]	0	0.0		0.0		8.0		-8.03

Tabla 3.3.2.20. Cálculo de reacciones debidas al momento correctivo en la arista 4 debidas al momento $X_4 = -2.0 \text{ kg-m/m}$, para el sistema de 9 placas.

A partir de los momentos distribuidos en la tabla anterior y dividirlos entre el módulo de sección se tienen los esfuerzos iniciales de la tabla 3.3.2.21 para ser distribuidos.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
Área de la placa	12.0		68.0		15.0		68.0	
R	0.850		0.150	0.181	0.819	0.819	0.181	0.306
r/2	0.425		0.075	0.090	0.410	0.410	0.090	0.153
σ_0 [kg/cm ²]	0.0	0.0	0.0	0.0	69.9	-69.9	0.0	0.0
	0.0			0.0				
	2.7		-6.32			28.6		
	-0.6		1.49	-0.5	-16.9	-6.7	0.6	3.7
	-0.1		0.28	0.1	-3.0	-1.3	0.1	0.7
	0.0		0.05	0.0	-0.6	-0.2	0.0	0.1
			0.01	0.0	-0.1	0.0	0.0	0.0
Total	1.91	0.00	-4.49	-0.34	49.33	-49.58	0.70	4.54
Balance		-3.8		8.98		41.19		-1.39
Final [kg/cm ²]	1.91	-3.81		8.64		-8.39		3.15

Tabla 3.3.2.21. Distribución de esfuerzos debido al momento correctivo $X_4 = -2.0 \text{ kg-m/m}$ en la arista 4, para el sistema de 9 placas.

Al resumir los resultados para la condición 4 se tienen los esfuerzos en las aristas del sistema en la tabla 3.3.2.22.

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]	σ_0 [kg/cm ²]	σ_n [kg/cm ²]
Momento de 2721.6 kg-m/m en la arista 4	0		0.00			1.91
		1		0.00	0.00	
	1		0.00			-3.81
		2		0.00	0.00	
	2		0.00			8.64
		3		8.73	69.92	
	3		8.03			-8.39
		4		0.00	0.00	
	4		-8.03			3.15
	5		0.00	0.00		
	3'		-8.03			

Tabla 3.3.2.22. Resumen de esfuerzos en las aristas debidos al momento correctivo en la arista 4 ($X_4 = -2.0 \text{ kg-m/m}$), para el sistema de 9 placas.

Paso 12. Al sumar los momentos correctivos a los iniciales (de peso propio) se tienen los momentos transversales finales de la tabla 3.3.2.23.

Tipo de análisis	Arista 0	Arista 1	Arista 2	Arista 3	Arista 4
Análisis elemental	0.000	-0.086	-0.466	-0.373	-0.385
Corrección de momento	0.000	0.000	-4.468	-4.404	2.009
Valor final	0.000	-0.09	-4.93	-4.78	1.62

Tabla 3.3.2.23. Superposición de efectos, para obtener los momentos transversales por flexión corregidos en [kg-m/m], para el sistema de 9 placas.

Paso 13. Al sumar los esfuerzos iniciales (de peso propio) a los correctivos se tienen los esfuerzos en las aristas del sistema de la tabla 3.3.2.24.

Acciones	Arista 0	Arista 1	Arista 2	Arista 3	Arista 4
Análisis elemental					
Esfuerzo no corregido	-128	47	-31	-4	7.88
Correcciones					
Debido a $X_2= 4.46$ [kg]	93	58	-161	167	-75.78
Debido a $X_3= 4.40$ [kg]	46	-91	172	-167	75.26
Debido a $X_4= -2.00$ [kg]	2	-4	9	-8	3.15
Esfuerzo final	13	10 (8.46)	-10	-11	11(10.77)

Tabla 3.3.2.24. Superposición de efectos, para obtener los esfuerzos corregidos. Compresión en kg/m^2 negativo y tensión positivo, para el sistema de 9 placas. El valor entre paréntesis corresponde al experimental.

Paso 15. Al aplicar el círculo de Mohr para esfuerzos en el plano, con una variación parabólica en el sentido longitudinal de la estructura, se tiene:

Esfuerzos principales, kg/cm^2 , Tensión +, compresión -.						
Placa	Localización	x=0	L/8	L/4	3L/8	L/2
3	Arista 3	3	1	0	0	0
		-3	-6	-9	-10	-11
	h/2	1	0	0	0	0
		-1	-5	-8	-10	-11
2	Arista 2	4	2	1	0	0
		-4	-6	-8	-10	-10
	h/2	4	2	1	0	0
		-4	-6	-8	-10	-10
1	Arista 1	12	9	6	3	0
		-12	-9	-6	-3	0
	h/2	6	7	8	9	10
		-6	-3	-1	0	0
1	Arista 1	6	7	8	9	10
		-6	-3	-1	0	0
	h/2	3	6	9	10	11
		-3	-1	0	0	0
Arista 0	0	5	9	12	13	
	0	0	0	0	0	

Tabla 3.3.2.25. Esfuerzos principales en [kg/cm^2] sistema de placas plegadas, en L/2, 3L/8, L/4 L/8 y en la zona del diafragma (x=0), para el sistema de 9 placas.

3.3.3 Método de H. Simpson.

Planteamiento del problema.

Calcular los esfuerzos y momentos, para el sistema de 9 placas plegadas que se muestra en la figura 3.3, mediante la metodología propuesta por Howard Simpson para la condición de peso propio.

Planteamiento de resolución.

El mismo que para el sistema de 6 placas plegadas (página 50).

Desarrollo.

1. Las propiedades geométricas de la sección transversal del sistema de placas plegadas corresponden a los valores de la tabla 3.1.1.1 y 3.1.1.2, correspondientes al método de Yitzhaki.

3. La distribución de momentos es la misma que la tabla 3.1.1.3 del método de Yitzhaki.

La distribución de esfuerzos es la misma que la tabla 3.1.1.4 del método de Yitzhaki.

El resumen de esfuerzos para la condición de peso propio, es la misma que la tabla 3.1.1.5 del método de Yitzhaki.

Las cargas distribuidas son las siguientes, negativo hacia arriba y positivo hacia abajo, es decir como en una viga libremente apoyada.

En las figuras 3.3.3.1 a 3.3.4 se tienen fuerzas de tensión en la dirección del plano de la placa, lo que ocasiona un esfuerzo de tensión en la arista superior y uno de compresión en la arista inferior.

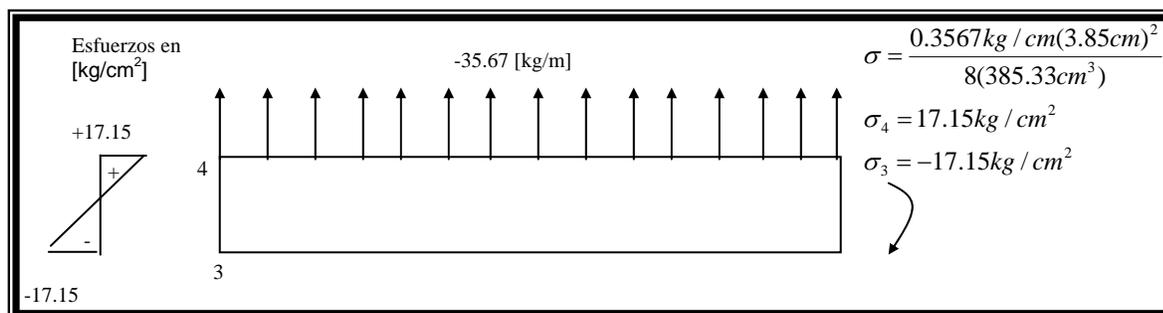


Figura 3.3.3.1. Esfuerzos en la placa 4, al considerar carga uniforme, para el sistema de 9 placas.

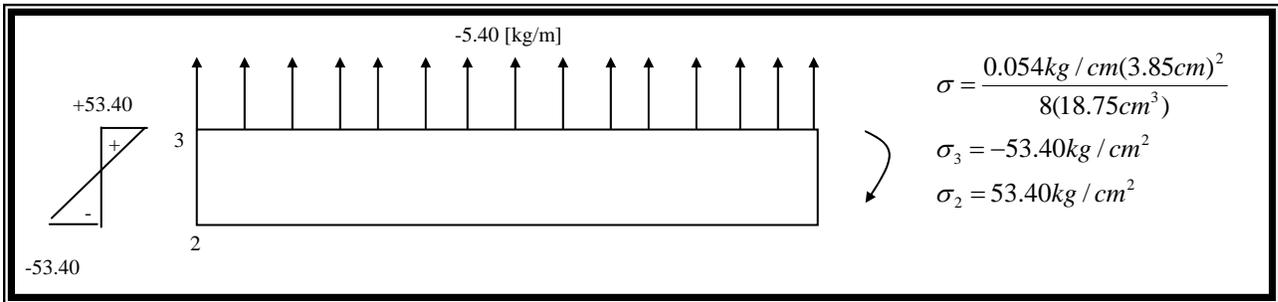


Figura 3.3.3.2. Esfuerzos en la placa 3, al considerar carga uniforme, para el sistema de 9 placas.

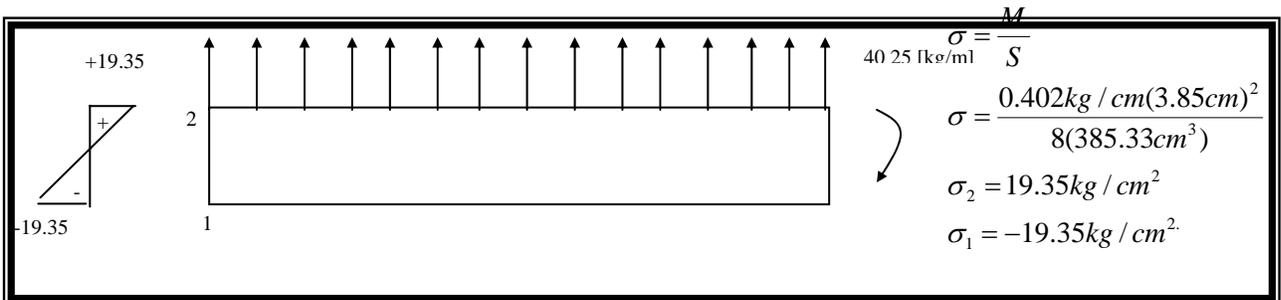


Figura 3.3.3.3. Esfuerzos en la placa 2, al considerar carga uniforme, para el sistema de 9 placas.

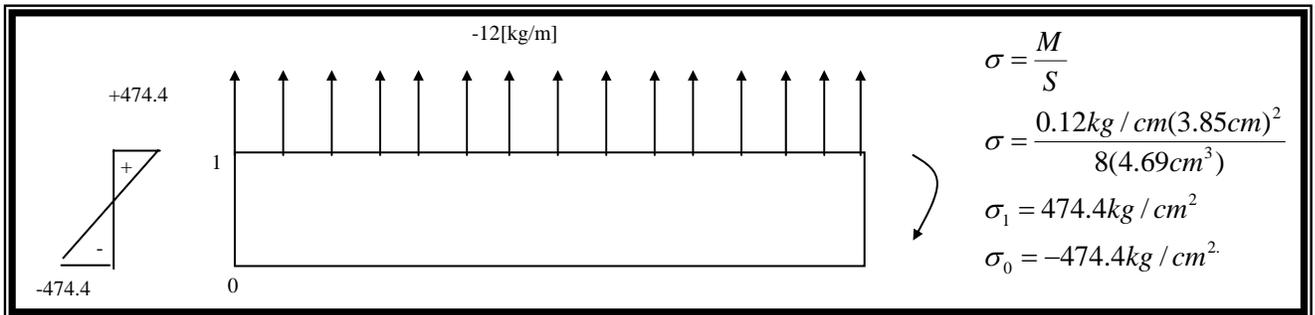


Figura 3.3.3.4. Esfuerzos en la placa 1, al considerar carga uniforme, para el sistema de 9 placas.

El resumen de esfuerzos es el mismo que la tabla 3.1.1.5 del método de Yitzhaki.

5. Corrección de los esfuerzos calculados en el paso anterior, debidos al giro de las aristas.

Por definición

$$m_2 = C_2 m_{20}$$

$$\text{si } k_{rig} = \frac{3EJ_2}{b_2}$$

$$m_{20} = k_{rig} \delta_{20}^p$$

suponiendo que :

$$m_{20} = 1360.8 [\text{kg} - \text{m} / \text{m}]$$

al despejar δ_{20}^p :

$$\delta_{20}^p = \frac{b_2}{3EJ_2} (1360.8)$$

De la misma forma para el caso del placas 3 y 4.

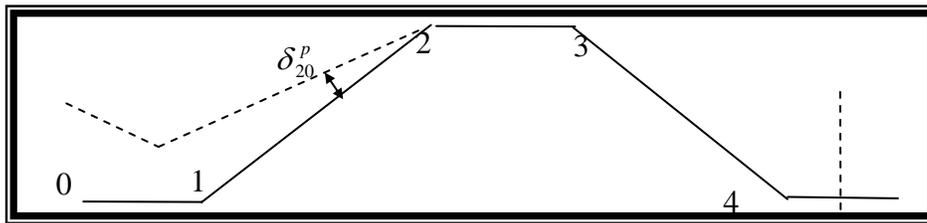


Figura 3.3.3.5. Sistema de placas desplazado al considerar una rotación en la arista 2, para el sistema de 9 placas.

Al distribuir el momento supuesto de -1360.8 [kg-m/m] según la tabla 3.3.3.6, se obtienen las reacciones en las aristas mediante las ecuaciones de la estática.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
r		0.000	0.000	0.142	0.858	0.819	0.181	0.306
r/2		0.000	0.000	0.071	0.429	0.410	0.090	0.153
m [kg-m/m]				1360.8	0.0	0.0	0.0	0.0
						-583.81		
				0.0	-239.2			52.75
				0.0	-45.3	-102.60	8.1	10.00
				0.0	-8.6	-19.45	1.5	1.90
				0.0	-1.6	-3.69	0.3	0.36
Total	0.00	0.00	0.00	1360.80	-294.71	-709.55	9.90	65.01
Balance		0.0		-235.01		589.43		-19.90
Final [kg-m/m]	0	0		1125.79		-120.13		45.11
V [kg/m]			4499.0	-4499.0	-16612.2	16612.2	660.32	-660.32
R [kg/m]	0	4499.0		-21111.2		17272.5		-660.32

Tabla 3.3.3.6. Distribución del momento supuesto en la arista 2, en el sistema de 9 placas plegadas.

Al proyectar las fuerzas en la dirección del eje neutro de cada una de las placas para la condición 2 se tiene el resumen de la tabla 3.3.3.7.

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]
Condición 1	0		0.00	
		1		-4890.88
	1		4,498.97	
		2		-24537.81
	2		-21,111.18	
		3		41727.35
	3		17,272.53	
		4		-24537.81
	4		-660.32	
	5		0.00	
	4'		-660.32	

Tabla 3.3.3.7. Reacciones en las aristas (R) y fuerza de placa (P) al considerar carga uniforme en todo el sistema de placas (Condición 1), en el sistema de 9 placas plegadas.

Se calculan los momentos que generan dichas cargas sobre las placas, al suponer que éstas varían en forma senoidal (al considerar que cuando P produce flexión en la placa en el sentido de su eje neutro).

En las figuras 3.3.3.6 a 3.3.3.9 se observan las fuerzas distribuidas en la dirección del plano de la placa, las que presentan una variación senoidal, con el fin de no contradecir las hipótesis de que el diafragma transversal solo resiste esfuerzos en el sentido de su plano neutro, es decir, no resiste fuerzas perpendiculares a su plano (esfuerzo longitudinal).

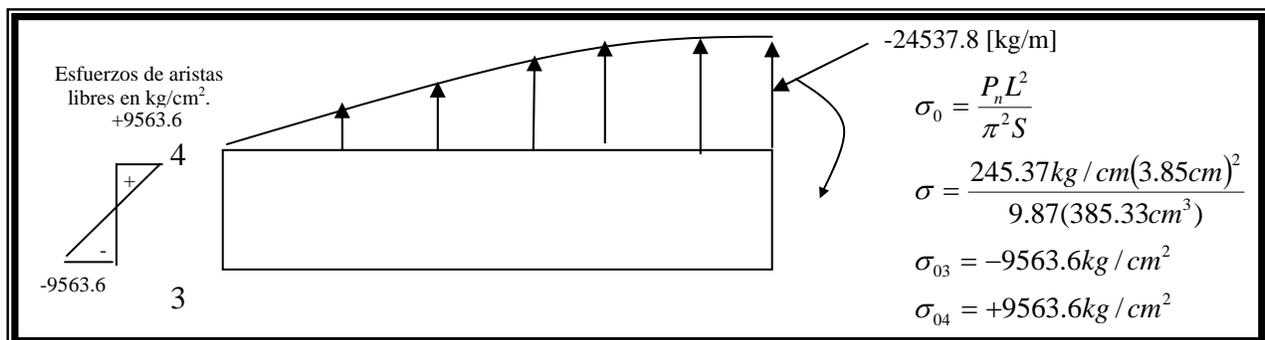


Figura 3.3.3.6. Esfuerzos en la placa 4, al considerar carga con variación senoidal, según el primer término de la serie de Fourier, en el sistema de 9 placas.

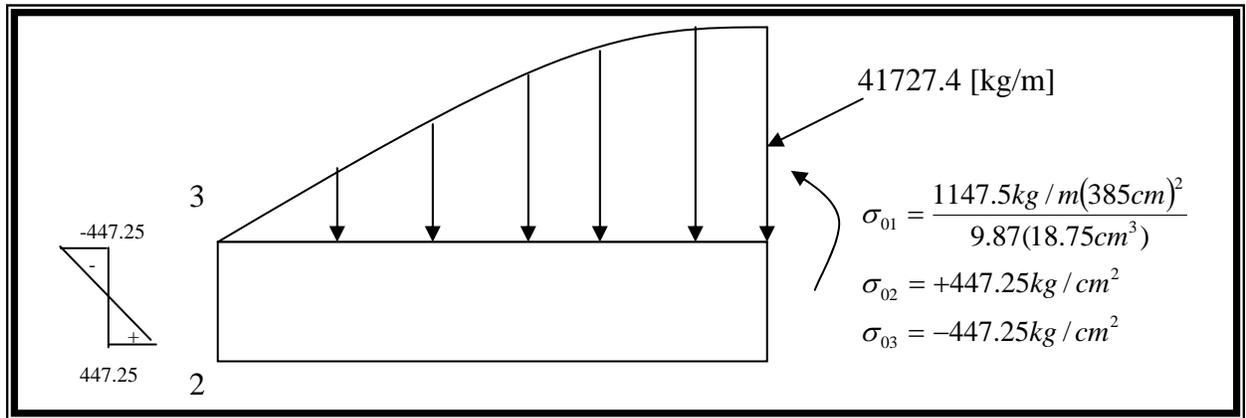


Figura 3.3.3.7. Esfuerzos en la placa 3, al considerar carga con variación senoidal, según el primer término de la serie de Fourier, en el sistema de 9 placas.

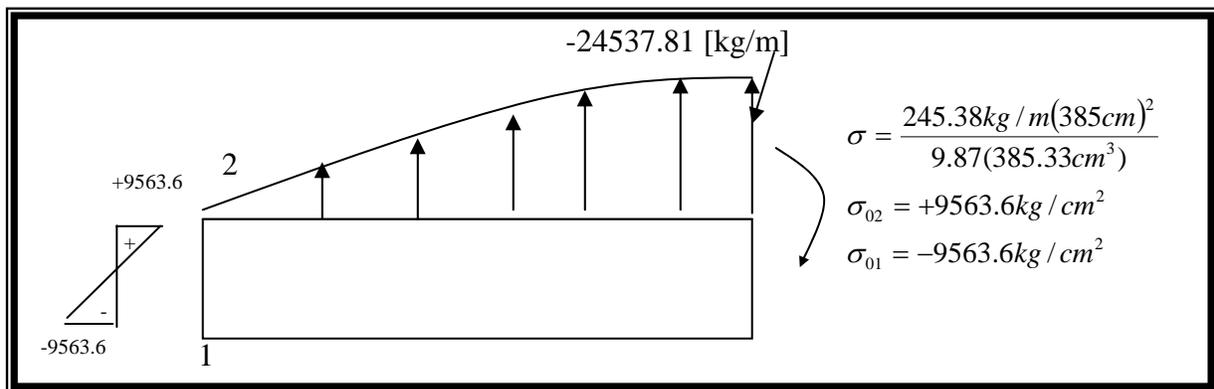


Figura 3.3.3.8. Esfuerzos en la placa 2, al considerar carga con variación senoidal, según el primer término de la serie de Fourier, en el sistema de 9 placas.

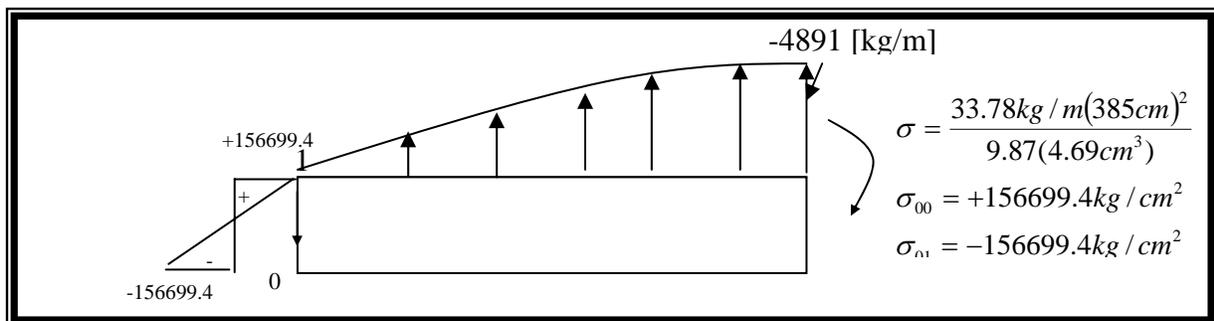


Figura 3.3.3.9. Esfuerzos en la placa 1, al considerar carga con variación senoidal, según el primer término de la serie de Fourier, en el sistema de 9 placas.

El resumen de esfuerzos sin distribuir se presenta en la tabla 3.3.3.10.

Condición de carga	Arista	Placa	σ_0 [kg/cm ²]
Condición 2	0		
		1	-156,699.44
	1		
		2	-9,563.59
	2		
		3	334,226.75
	3		
		4	-9,563.59
	4		
	5	0.00	

Tabla 3.3.3.10. Resumen de esfuerzos para la condición 2 (momento en la arista 3), para el sistema de 9 placas.

Al distribuir los esfuerzos de la tabla 3.3.3.10 y dividirlos entre el módulo de elasticidad de cada placa se tienen los esfuerzos iniciales de la tabla 3.3.3.11 que se distribuyen con el método de relajación simplificado para calcular mediante la estática, las fuerzas cortantes y reacciones en las aristas del sistema:

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
Área de la placa	7.5		68.0		15.0		68.0	
r	0.901		0.099	0.181	0.819	0.819	0.181	0.306
r/2	0.450		0.050	0.090	0.410	0.410	0.090	0.153
σ_0 [kg/cm ²]	-156699.4	156699.4	-9563.6	9563.6	334226.7	-334226.7	-9563.6	9563.6
	74873.4		-30083.25			136377.4		
	13547.4			-1494.2	-77129.1			17013.8
	-3077.8		6834.48		-14358.2	-30983.0	4068.0	
	-598.1		1328.10	339.5	-2664.9	-6020.7	484.8	3167.3
	-111.1		246.77	66.0	-1118.7		90.0	587.8
	-20.6		45.85	12.3	-495.1	-207.8	16.7	109.2
	-3.8		8.52	2.3	-92.0	-38.6	3.1	20.3
			1.58	0.4	-17.1	-7.2	0.6	3.8
	-0.7			0.1	-3.2			0.7
Total	-72090.79	156699.44	-31181.54	231.75	239467.15	-236225.37	-4900.47	30466.44
Balance		-169217.3		43235.31		189519.20		-9326.46
Final [kg/cm ²]	-72091	-12518		43467.06		-46706.17		21139.98

Tabla 3.3.3.11. Distribución de esfuerzos al considerar variación senoidal de acuerdo al primer término de la serie de Fourier (condición 2), en el sistema de 9 placas.

Ahora al considerar un giro en la placa 3, como se muestra en la figura 3.3.3.10 y aplicar el procedimiento anterior, suponiendo empotramiento en la arista 2 y 3 y libremente apoyado en 1.

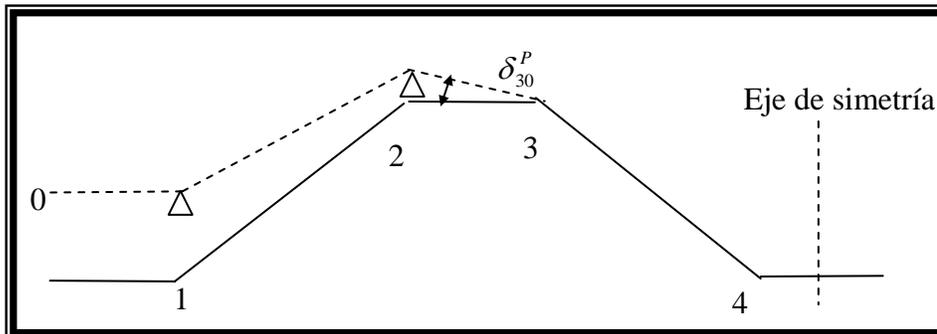


Figura 3.3.3.10. Configuración del sistema de 9 placas al aplicar un giro en la arista 2.

Al suponer un momento de 2721.6 kg-m/m se tiene que la rotación debe ser:

$$m_3 = C_3 m_{30}$$

$$\text{si } m_{30} = 2721.6 [\text{kg} - \text{m} / \text{m}]$$

$$k_{rig} = \frac{6EJ_3}{b_3} (\text{rigidez de rotación})$$

$$\text{si } m_{30} = k_{rig} \delta_{30}^p$$

y despejar δ_{30}^p :

$$\delta_{30}^p = \frac{b_3}{6EJ_3} (2721.6)$$

y

$$k = \frac{6EJ_3}{b_3}$$

entonces

$$\delta_{30}^p = 0.026$$

Al distribuir el momento supuesto según la tabla 3.3.3.12, se obtienen las reacciones en las aristas del sistema.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
r		0.000	0.000	0.142	0.858	0.819	0.181	0.306
r/2		0.000	0.000	0.071	0.429	0.410	0.090	0.153
m [kg-m/m]	0.0	0.0	0.0	0.0	-2721.6	2721.6	0.0	0.0
	0.0			0.0		-1167.63		
				0.0	636.6			-140.42
				0.0		273.10	-21.5	
				0.0	120.7			-26.62
				0.0		51.77	-4.1	
				0.0	22.9			-5.05
				0.0		9.81	-0.8	
				0.0	4.3			-0.96
Total	0.00	0.00	0.00	0.00	-1937.14	1888.66	-26.34	-173.04
Balance		0.0		-274.99		-1568.92		52.97
Final [kg-m/m]	0.00	0.00		-274.99		319.75		-120.07
V [kg/m]			-1098.9	1098.9	7929.8	-7929.8	-1757.62	1757.62
R [kg/m]	0	-1098.9		9028.7		-9687.4		1757.62

Tabla 3.3.3.12. Cálculo de reacciones al considerar variación senoidal del momento en la arista 4, de acuerdo al primer término de la serie de Fourier (Caso 3), en el sistema de 6 placas plegadas.

Al proyectar las reacciones (R) en la dirección del eje neutro de cada una de las placas, se tiene el resumen de la tabla 3.3.3.13.

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]
Condición 3	0		0.00	
		1		1194.66
	1		-1,098.93	
		2		11713.04
	2		9,028.71	
		3		-20346.50
	3		-9,687.41	
		4		11713.04
	4		1,757.62	
	5		0.00	
	4'		1,757.62	

Tabla 3.3.3.13. Fuerzas de placa para la condición 3, para el sistema de 9 placas.

Se obtienen los momentos que generan dichas cargas sobre las placas, al suponer que éste varía en forma senoidal, (el valor de P es positivo hacia abajo y negativo en caso contrario), según las figuras 3.3.3.11 a 3.3.3.14.

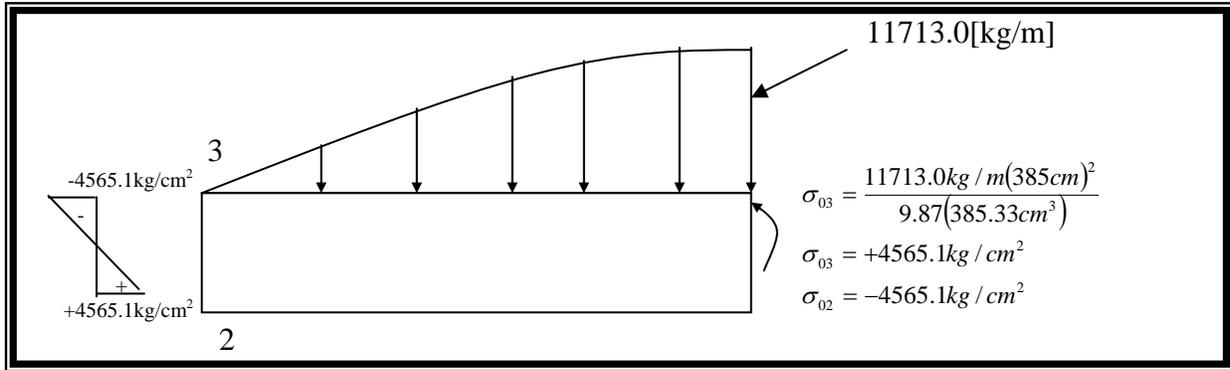


Figura 3.3.3.11. Esfuerzos en la placa 4, al considerar carga con variación senoidal, según el primer término de la serie de Fourier para la condición 3 (momento en 3), en el sistema de 9 placas.

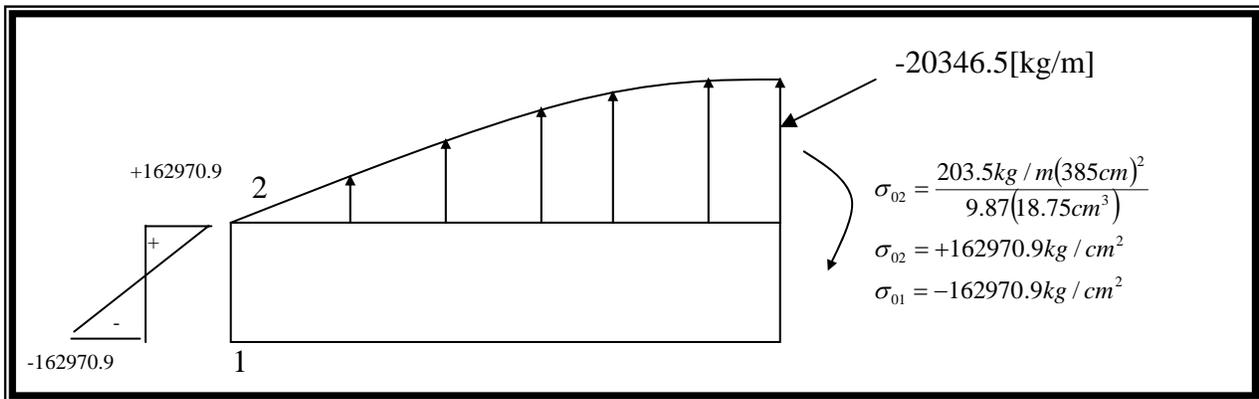


Figura 3.3.3.12. Esfuerzos en la placa 3, al considerar carga con variación senoidal según el primer término de la serie de Fourier para la condición 3 (momento en 3).

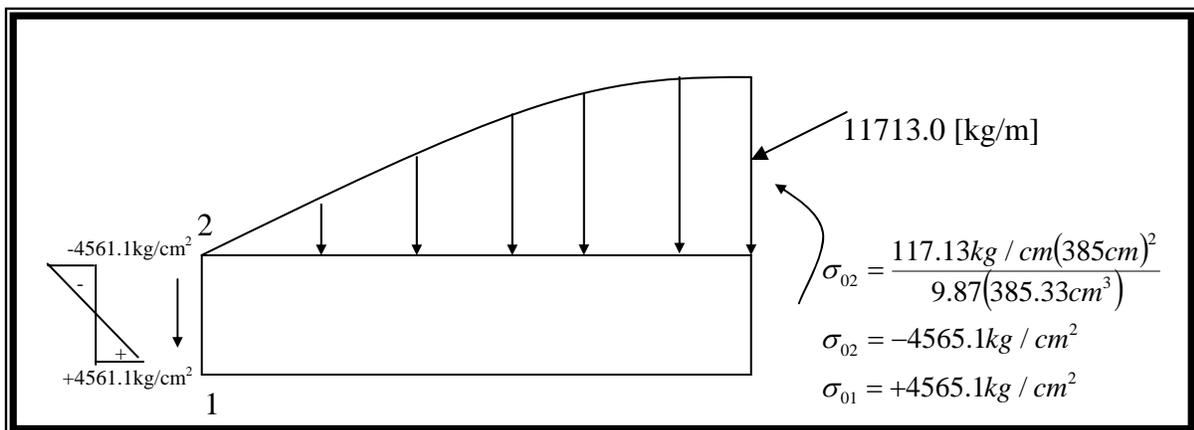


Figura 3.3.3.13. Esfuerzos en la placa 2, al considerar carga con variación senoidal, según el primer término de la serie de Fourier para la condición 3, en el sistema de 9 placas.

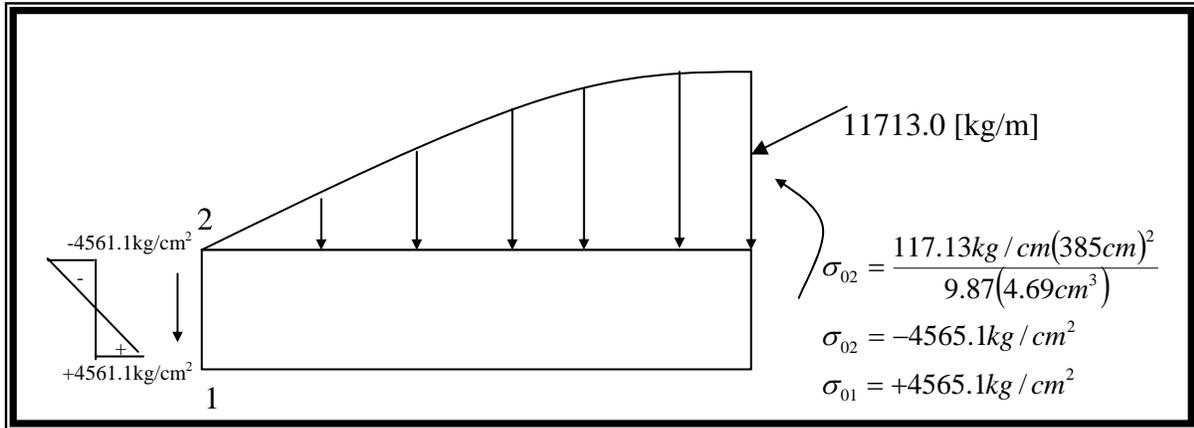


Figura 3.3.3.14. Esfuerzos en la placa 1, al considerar carga con variación senoidal, según el primer término de la serie de Fourier para la condición 3 en el sistema de 9 placas.

Los esfuerzos anteriores requieren ser distribuidos, por lo que al aplicar el método de distribución simplificado según la tabla 3.3.3.14 se tienen los esfuerzos finales para la condición 3.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
Área de la placa	7.5		68.0		15.0		68.0	
r		0.901	0.099	0.181	0.819	0.819	0.181	0.306
r/2		0.450	0.050	0.090	0.410	0.410	0.090	0.153
σ_0 [kg/cm ²]	38275.8	-38275.8	4565.1	-4565.1	-162970.9	162970.9	4565.1	-4565.1
	-19292.6			2127.9				
	-6532.5		14506.05			-65760.8		
				720.5	37951.0			-8371.5
			-3364.20			15251.0	-1980.1	
	1515.0			-167.1	7058.5			-1557.0
			-652.92			2959.9	-238.3	
	294.0			-32.4	1310.1			-289.0
			-121.31			550.0	-44.2	
	54.6			-6.0	243.4			-53.7
			-22.54			102.2	-8.2	
	10.1			-1.1	45.2			-10.0
			-4.19			19.0	-1.5	
	1.9			-0.2	8.4			-1.9
			-0.78			3.5	-0.3	
	0.4			0.0	1.6			-0.3
Total	14326.72	-38275.82	14905.26	-1923.70	-116352.71	116095.73	2292.46	-14848.58
Balance		47898.2		-20679.94		-93236.42		4545.48
Final [kg/cm ²]	14326.72	9622.37		-22603.64		22859.32		-10303.09

Tabla 3.3.3.14. Distribución de esfuerzos para la condición 3, para el sistema de 9 placas.

Para la condición 4, es decir, al suponer un momento en la arista 4, se tiene el siguiente desarrollo, al considerar un giro en la placa 4, según la figura 3.2.4.15 y suponer el apoyo 2, 3 y 4 empotrados y el apoyo 1 libremente apoyado y seguir el procedimiento del giro en la arista 3, se calcula la rotación δ_{40}^p .

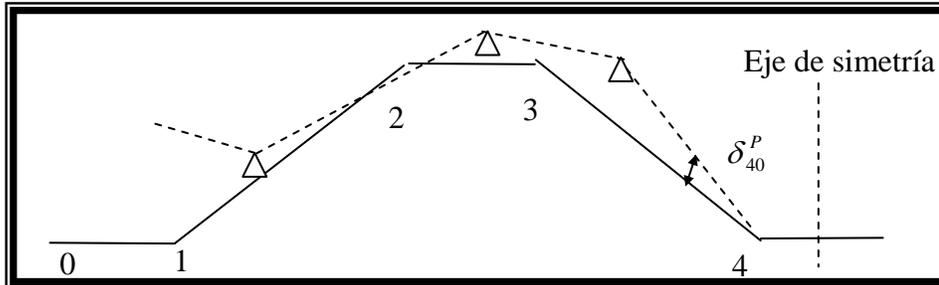


Figura 3.2.4.15. Configuración del sistema de 9 placas al aplicar un giro en la arista 4.

Ahora, al calcular la rigidez para la condición de apoyo mostrada en la figura 3.2.4.15 suponiendo un momento de 2721.6 kg-m/m y que

$$m_4 = C_4 m_{40}$$

$$\text{si } \delta_{40}^p = 1.0[\text{rad}]$$

$$m_{40} = k \delta_{40}^p$$

al suponer

$$m_{40} = 2721.6[\text{kg} - \text{m} / \text{m}]$$

además

$$k_{\text{rig}} = \frac{6EJ_4}{b_4}$$

al despejar, δ_{40}^p

$$\delta_{40}^p = \frac{b_4}{EJ_4} (2721.6)$$

al sustituir los valores de b_4 , E y J_4

$$\delta_{40}^p = 0.1203[\text{rad}]$$

La constante C_4 se calcula al resolver el sistema de ecuaciones planteado mas adelante, al considerar la compatibilidad de deformaciones en las aristas del sistema de placas.

Al distribuir el momento supuesto y calcular las reacciones correspondientes mediante las ecuaciones de la estática para la condición 4, se tiene la tabla 3.3.3.15.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
r		0.000	0.000	0.142	0.858	0.819	0.181	0.306
r/2		0.000	0.000	0.071	0.429	0.410	0.090	0.153
m [kg-m/m]	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-2721.6	2721.6
	0.0			0.0		0.00		
				0.0	1114.9			-245.93
				0.0		478.30	378.9	
				0.0	40.7			-8.98
				0.0		17.46	-1.4	
				0.0	7.7			-1.70
				0.0		3.31	-0.3	
				0.0	1.5			-0.32
Total	0.00	0.00	0.00	0.00	1164.76	499.08	-2344.31	2464.67
Balance		0.0		165.34		-2329.52		-754.49
Final [kg-m/m]	0.00	0.00		165.34		-1830.44		1710.18
V [kg/m]			660.8	-660.8	-26610.5	26610.5	14149.29	-14149.29
R [kg/m]	0	660.8		-27271.2		40759.8		-14149.29

Tabla 3.3.3.15. Cálculo de reacciones al considerar variación senoidal del momento en la arista 4, de acuerdo al primer término de la serie de Fourier (condición 3), en el sistema de 9 placas.

Al proyectar las fuerzas en la dirección del eje neutro de cada una de las placas para la condición 4 se tiene el resumen de la tabla 3.3.3.16.

Condición de carga	Arista	Placa	R [kg/m]	P [kg/m]
Condición 4	0		0.00	
		1		-718.32
	1		660.76	
		2		-39306.20
	2		-27,271.23	
		3		73957.24
	3		40,759.76	
		4		-39306.20
	4		-14,149.29	
	5		0.00	
4'			-14,149.29	

Tabla 3.3.3.16. Fuerzas de placas debido a la condición 4, para el sistema de 9 placas.

Se obtienen los momentos que generan dichas cargas sobre las placas, al suponer que éste varía en forma senoidal, (el valor de P es positivo hacia abajo y negativo en caso contrario), según las figuras 3.3.3.16 a 3.3.3.19.

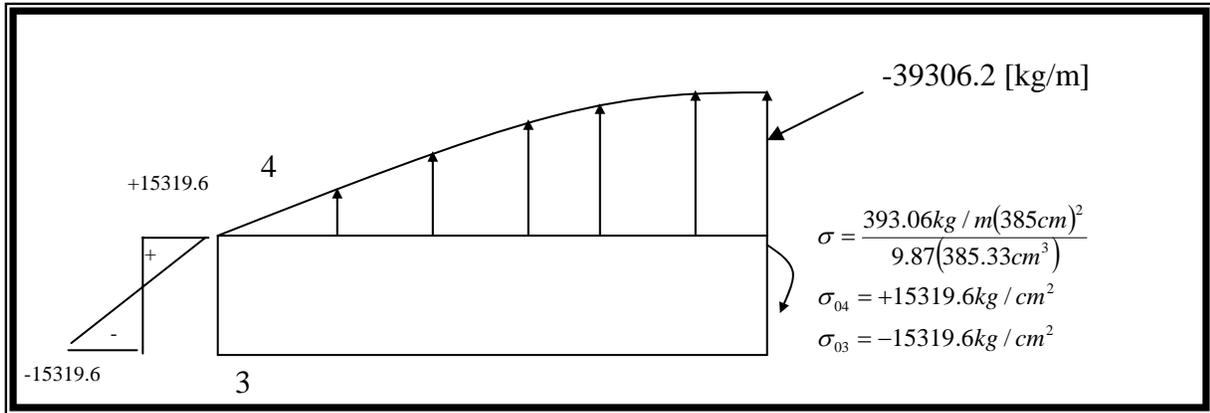


Figura 3.3.3.16. Esfuerzos en la placa 4, al considerar carga con variación senoidal, según el primer término de la serie de Fourier para la condición 4 (momento en 4), en el sistema de 9 placas plegadas.

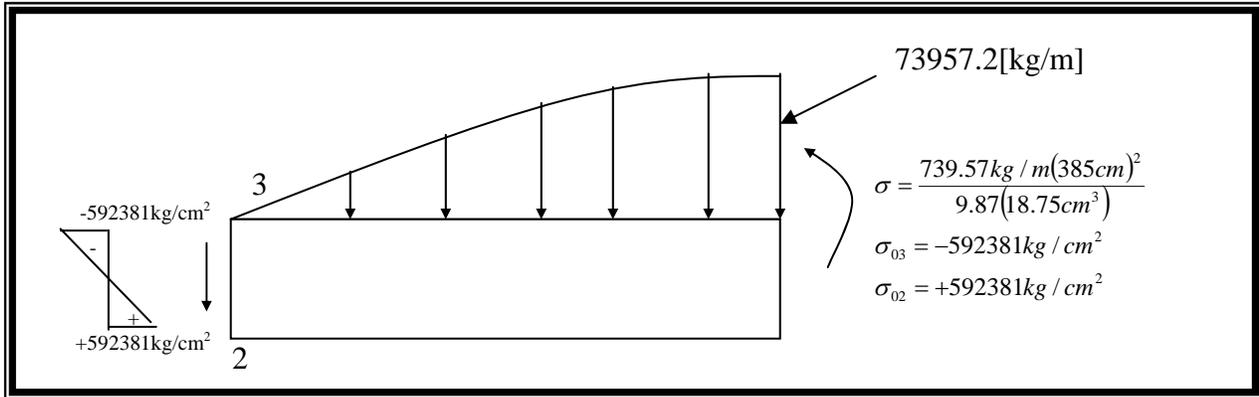


Figura 3.3.3.17. Esfuerzos en la placa 3, al considerar carga con variación senoidal según el primer término de la serie de Fourier para la condición 4 (momento en 4), para el sistema de 9 placas.

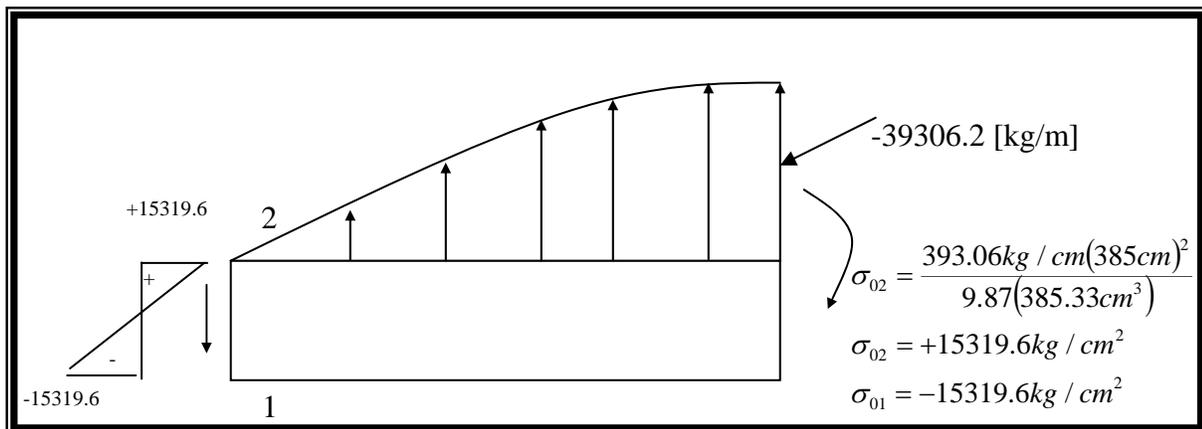


Figura 3.3.3.18. Esfuerzos en la placa 2, al considerar carga con variación senoidal, según el primer término de la serie de Fourier para la condición 4, en el sistema de 9 placas.

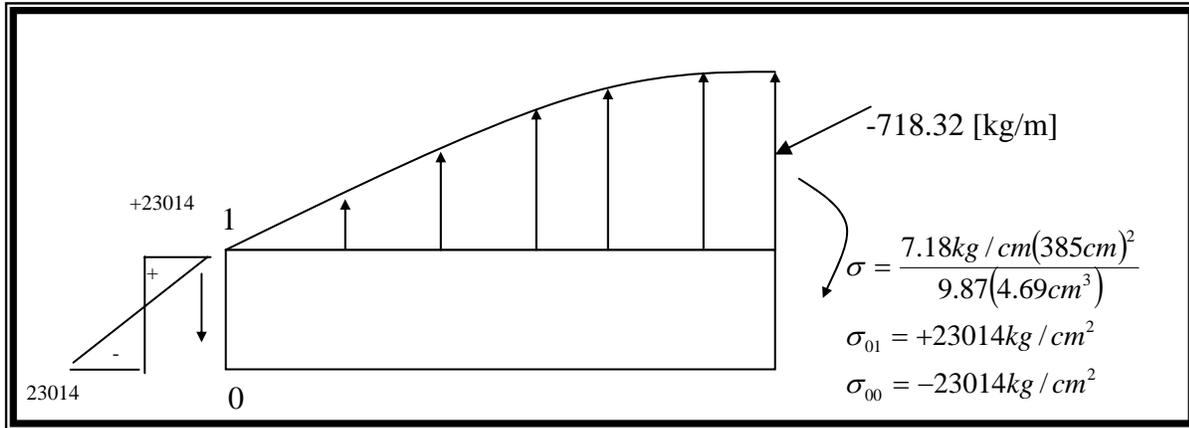


Figura 3.3.3.19. Esfuerzos en la placa 1, al considerar carga con variación senoidal, según el primer término de la serie de Fourier para la condición 4, en el sistema de 9 placas.

Los esfuerzos anteriores se distribuyen según la tabla 3.3.3.17.

Propiedades	Placa 1		Placa 2		Placa 3		Placa 4	
	Arista 0	Arista 1	Arista 1	Arista 2	Arista 2	Arista 3	Arista 4	Arista 5
Área de la placa	7.5		68.0		15.0		68.0	
R	0.901		0.099	0.181	0.819	0.819	0.181	0.306
r/2	0.450		0.050	0.090	0.410	0.410	0.090	0.153
σ_0 [kg/cm ²]	-23014.4	23014.4	-15319.6	15319.6	592381.0	-592381.0	-15319.6	15319.6
	17263.0			-1904.0				
			-52316.16			237166.6		
				-2598.5	-139234.1			30713.4
			12346.59			-55971.2	7045.9	
				613.2	-25814.2			5694.3
			2388.02			-10825.7	871.6	
				118.6	-4791.7			1057.0
			443.70			-2011.4	161.8	
				22.0	-890.2			196.4
			82.43			-373.7	30.1	
				4.1	-165.4			36.5
			15.32			-69.4	5.6	
				0.8	-30.7			6.8
			2.85			-12.9	1.0	
				0.1	-5.7			1.3
Total	10927.59	23014.41	-52356.81	11575.95	421449.04	-424478.82	-7203.65	53025.14
Balance		-67884.0		74073.45		341863.99		-16232.19
Final [kg/cm ²]	10927.59	-44869.60		85649.40		-82614.83		36792.96

Tabla 3.3.3.17. Distribución de esfuerzos para la condición 3, para el sistema de 9 placas.

2. El resumen de esfuerzos distribuidos en las aristas para la condición 4 se presentará en la tabla 3.3.3.18.

Condición de carga	Arista	Placa	σ_n [kg/cm ²]
Momento de 2721.6 kg-m/m en la arista 4	0		10,927.59
		1	
	1		-44,869.60
		2	
	2		85,649.40
		3	
	3		-82,614.83
		4	
	4		36,792.96

Tabla 3.3.3.18. Resumen de esfuerzos en las aristas del sistema de placa para la condición 3 en el sistema de 9 placas.

Al presentar los resultados de esfuerzo de las 3 condiciones se tiene la tabla 3.3.3.19.

Caso	placa 1	placa 2	placa 3	placa 4
Cargas básicas	-269	63	-38	-2
Condición 2	-72091	-12518	43467	-46706
Condición 3	14327	9622	-22604	22859
Condición 4	10928	-44,869.60	85,649.40	-82,614.83

Tabla 3.3.3.19. Resumen de esfuerzos en kg/cm², en las aristas del sistema de 9 placas para las 4 condiciones.

5. Al calcular los desplazamientos en cada arista de acuerdo a la tabla de esfuerzos anterior, y considerar el módulo de elasticidad de acuerdo a los ensayos de laboratorio, se tienen los siguientes casos:

Caso I, para la placa 1:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{5L^2}{48b} = \frac{-269 \text{ kg/cm}^2 - 63 \text{ kg/cm}^2}{192352 \text{ kg/cm}^2} \frac{5(3.85 \text{ m})^2}{48(0.0375 \text{ m})}$$

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{5L^2}{48b} = -0.071 \text{ m}$$

Caso II para la placa 1:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{72091 \text{ Kg/cm}^2 + 12518 \text{ kg/cm}^2}{192352 \text{ kg/cm}^2} \frac{(3.85 \text{ m})^2}{\pi^2(0.0375 \text{ m})}$$

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = -12.40 \text{ m}$$

Caso III para la placa 1:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{14327 \text{kg/cm}^2 - (9622 \text{kg/cm}^2)}{192352 \text{kg/cm}^2} \frac{(3.85 \text{m})^2}{\pi^2 (0.0375 \text{m})}$$
$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = 0.98 \text{m}$$

Caso IV para la placa 1:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{10928 \text{kg/cm}^2 - (-44869.6 \text{kg/cm}^2)}{192352 \text{kg/cm}^2} \frac{(3.85 \text{m})^2}{\pi^2 (0.0375 \text{m})}$$
$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = 11.62 \text{m}$$

Caso I para la placa 2:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{63 \text{kg/cm}^2 - (-38 \text{kg/cm}^2)}{192352 \text{kg/cm}^2} \frac{(3.85 \text{m})^2}{\pi^2 (0.34 \text{m})}$$
$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = 0.0024 \text{m}$$

Caso II para la placa 2:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{43467 \text{kg/cm}^2 - (-46706)}{192352 \text{kg/cm}^2} \frac{(3.85 \text{m})^2}{\pi^2 (0.34 \text{m})}$$
$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = -1.29 \text{m}$$

Caso III para la placa 2:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{-12518 \text{kg/cm}^2 - (43467 \text{kg/cm}^2)}{192352 \text{kg/cm}^2} \frac{(3.85)^2}{\pi^2 (0.34 \text{m})}$$
$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = 0.74 \text{m}$$

Caso IV para la placa 2:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{-44869.6 \text{kg/cm}^2 - (85649.4 \text{kg/cm}^2)}{192352 \text{kg/cm}^2} \frac{(3.85)^2}{\pi^2 (0.34 \text{m})}$$
$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = -3.0 \text{m}$$

Caso I para la placa 3:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{-38kg/cm^2 - (-2kg/cm^2)}{192352kg/cm^2} \frac{(3.85m)^2}{\pi^2(0.075m)}$$

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = -0.0039m$$

Caso II para la placa 3:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{43467 - (46706kg/cm^2)}{192352kg/cm^2} \frac{(3.85m)^2}{\pi^2(0.075m)}$$

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = 9.39m$$

Caso III para la placa 3:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{-22604kg/cm^2 - (22859kg/cm^2)}{192352kg/cm^2} \frac{(3.85m)^2}{\pi^2(0.075m)}$$

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = -4.73m$$

Caso IV para la placa 3:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{85649.4kg/cm^2 - (-82614.83kg/cm^2)}{192352kg/cm^2} \frac{(3.85m)^2}{\pi^2(0.075m)}$$

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = 17.52m$$

Caso I para la placa 4:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{-2kg/cm^2 - (7kg/cm^2)}{192352kg/cm^2} \frac{(3.85m)^2}{\pi^2(0.34m)}$$

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = -0.0002m$$

Caso II para la placa 4:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{-46706 - (21140kg/cm^2)}{192352kg/cm^2} \frac{(3.85m)^2}{\pi^2(0.34m)}$$

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = -1.55m$$

Caso III para la placa 4:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{-22859 \text{ kg/cm}^2 - (-10303 \text{ kg/cm}^2)}{192352 \text{ kg/cm}^2} \frac{(3.85 \text{ m})^2}{\pi^2 (0.34 \text{ m})}$$

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = 0.76 \text{ m}$$

Caso IV para la placa 4:

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = \frac{-82614.8 \text{ kg/cm}^2 - (36793 \text{ kg/cm}^2)}{192352 \text{ kg/cm}^2} \frac{(3.85 \text{ m})^2}{\pi^2 (0.34 \text{ m})}$$

$$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b} = -2.74 \text{ m}$$

El resumen de resultados de los desplazamientos en el plano de las placas para las cuatro condiciones se presenta en tabla 3.3.3.20.

Caso	Fórmula	v_1 [mm]	v_2 [mm]	v_3 [mm]	v_4 [mm]
Caso I ($\delta_{nn}^p = 0$)	$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{5L^2}{48b}$	-0.0710	0.0024	-0.0039	-0.0002
Caso II ($\delta_2^p = 1$)	$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b}$	-12.4035	-1.2856	9.3873	-1.5580
Caso III ($\delta_3^p = 1$)	$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b}$	0.9795	0.7400	-4.7328	0.7615
Caso IV ($\delta_4^p = 1$)	$\frac{\sigma_B - \sigma_T}{E} \frac{L^2}{\pi^2 b}$	11.6173	-2.9972	17.5168	-2.7421

Tabla 3.3.3.20. Rotaciones en las aristas para la condición de carga de servicio en el sistema de 9 placas.

Al depender las rotaciones una de otra, es necesario multiplicarlas por un factor C, que se calculan al resolver el sistema de ecuaciones para C_n , simultáneamente con la acción de peso propio, las rotaciones reales.

En la tabla anterior, los desplazamientos par la condición 1, corresponden al caso de peso propio, para u concreto con módulo de elasticidad de 192352 kg/cm^2 , que corresponde al de ensayos de cilindros de concreto en laboratorio.

6. Las rotaciones finales de la placa al sustituir los valores de la tabla anterior en la expresión deducida a partir de la geometría de la sección, son las siguientes:
Para los cálculos de deformación, se tiene la siguiente fórmula de recurrencia obtenida gráficamente por H. Simpson (1958), con la expresión (3.1.2.2).

Al sustituir en la expresión (58) la rotación en la arista 2 (para n=2):

$$\delta_2^P = \frac{1}{b_2} \left[-\frac{v_1}{\text{sen}\gamma_2} + v_2(\cot\theta_2 + \cot\theta_3) - \frac{v_3}{\text{sen}\gamma_3} \right]$$

A partir de la deducción anterior, se observa que puede ser aplicada a configuraciones diferentes a la presentada en este ejemplo.

Al sustituir en la expresión anterior:

$$\begin{array}{llll} \gamma_2 = & -42.61 & \cot\gamma_2 = & -1.0871 & \text{sen}\gamma_2 = & -0.6770 \\ \gamma_3 = & 42.61 & \cot\gamma_3 = & 1.0871 & \text{sen}\gamma_3 = & 0.6770 \end{array}$$

$$\delta_2^P = \frac{1}{0.34m} \left[-\frac{v_1}{-0.677} + v_2(-1.087 + 0.0836) - \frac{v_3}{0.677} \right]$$

$$\delta_2^P = 4.34v_1 - 0v_2 - 4.34v_3 \dots(1)$$

Para calcular la rotación en la arista 3 en función de los desplazamientos en el sentido del eje neutro de la placa y el ángulo entre la placa 2 y 3:

$$\begin{array}{llll} \gamma_3 = & 42.6 & \cot\gamma_3 = & 1.0871 & \text{sen}\gamma_3 = & 0.6770 \\ \gamma_4 = & 42.6 & \cot\gamma_4 = & 1.0871 & \text{sen}\gamma_4 = & 0.6770 \end{array}$$

Al sustituir en la expresión (3.1.2.2),

$$\delta_3^P = \frac{1}{b_3} \left[-\frac{v_2}{\text{sen}\gamma_2} + v_3 \left[(\cot\gamma_2 + \cot\gamma_3) - \frac{v_4}{\text{sen}\gamma_3} \right] \right]$$

$$\delta_3^P = -19.70v_2 + 29v_3 - 19.70v_4$$

Al suponer un giro en la arista 4:

Para calcular la rotación en la arista 4 en función de los desplazamientos en el sentido del eje neutro de la placa y el ángulo entre la placa 3 y 4:

$$\begin{array}{llll} \gamma_4 = & 42.6 & \cot\gamma_4 = & 1.0871 & \text{sen}\gamma_4 = & 0.6770 \\ \gamma_5 = & -42.6 & \cot\gamma_5 = & -1.0871 & \text{sen}\gamma_5 = & -0.6770 \end{array}$$

Al sustituir en la expresión (3.1.2.2),

$$\delta_4^P = -4.34v_3 - 4.34v_5$$

$$\text{si } v_5 = 0$$

$$\delta_4^P = -4.34v_3$$

Al resolver la ecuación (1), (2) y sustituir los valores de δ_{20}^P , δ_{30}^P y δ_{40}^P calculados anteriormente y reducir términos, se tiene:

$$\begin{array}{rclclclcl} -94.78 C_2 & + & 24.81 C_3 & + & -25.62 C_4 & = & 0.2912 \\ 328.13 C_2 & + & -166.80 C_3 & + & 620.83 C_4 & = & 0.1571 \\ -40.78 C_2 & + & 20.56 C_3 & + & -76.22 C_4 & = & -0.0171 \end{array}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones:

$$C_2 = -0.0067$$

$$C_3 = -0.0141$$

$$C_4 = 0.00003$$

Posteriormente se suman los resultados de cada condición de análisis, como se hizo con el sistema de 6 placas plegadas, obteniéndose la tabla 3.3.3.19.

Arista	Momento transversal	Corrección	Final
0	0.00	0.00	0.00
1	-0.03	0.00	-0.03
2	-0.49	-3.74	-4.23
3	-0.37	-3.78	-4.15
4	-0.39	1.46	1.07

Tabla 3.3.3.19. Resumen de momentos transversales para el sistema de 9 placas, para la condición de carga de servicio.

En cuanto a la corrección de los esfuerzos, se sigue el procedimiento utilizado en el sistema de 6 placas plegadas, cuyo resumen se presenta en la tabla 3.3.3.20.

Arista	Esfuerzo	Corrección	Final [kg/cm ²]
0	-268.63	287.01	18
1	62.90	-52.93	10(8.46)
2	-38.37	28.13	-10
3	-1.62	-9.64	-11
4	7.05	3.73	11(10.77)

Tabla 3.3.3.20. Resumen de esfuerzos para el sistema de 9 placas. El valor entre paréntesis corresponde al experimental.

7. En el diagrama mostrado en la figura 3.3.3.20 se puede ver la variación parabólica y que son máximos en las aristas del sistema.

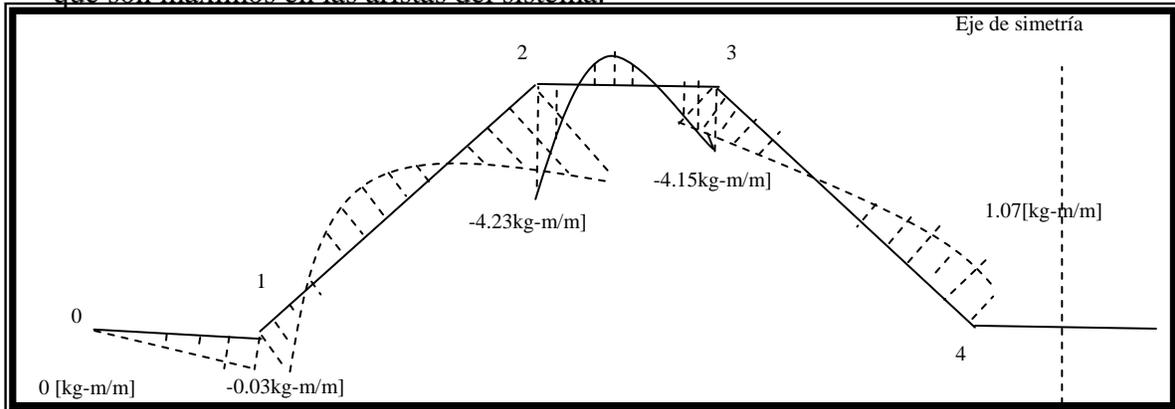


Figura 3.3.3.20. Diagrama de momentos transversales al centro del claro, para el sistema de 9 placas.

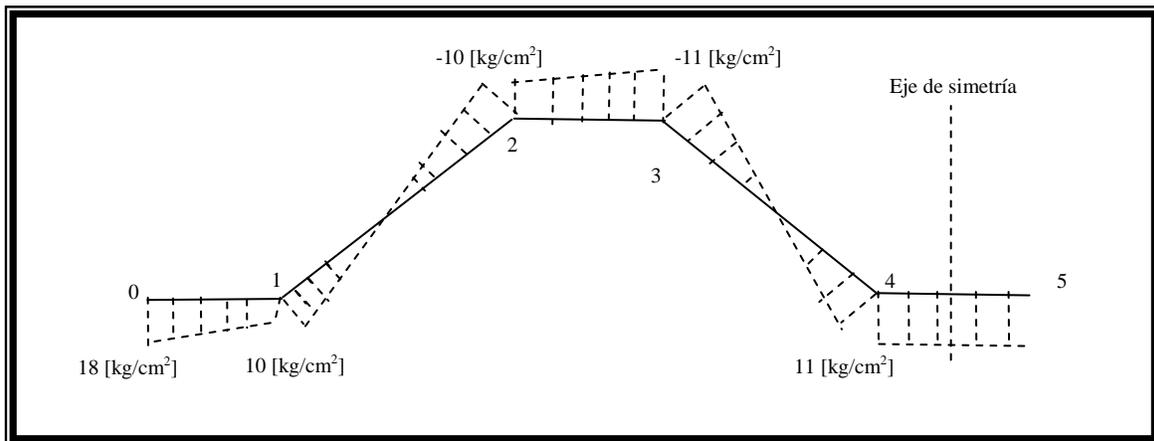


Figura 3.3.3.21. Diagrama de esfuerzos longitudinales al centro del claro, para el sistema de 9 placas.

En la figura 3.3.3.21 se observa un eje neutro inclinado a diferencia de las vigas que es horizontal.

Se observa una variación en el sentido horizontal para las aristas a una misma distancia del eje neutro geométrico.

3.3.4 Condición de peso propio.

Al pasar a la tercera aproximación (9 placas), que corresponde a la configuración ensayada en el laboratorio para la condición de peso propio, se observa que al calcular la fuerza en la dirección del eje neutro de placa, para la placa 5, es cero, esto indica que las fuerzas están en equilibrio en esta parte del sistema y sólo hay fuerzas de flexión en el sentido longitudinal de la misma. Como en el caso de 8 placas, la arista más esforzada es la 0, y los esfuerzos son constantes y de tensión en el sentido longitudinal en la placa 5, como se puede ver en la tabla 3.3.1.1.

El resultado de la aplicación de las metodologías se presenta en la tabla 3.3.4.1.

Arista	Esfuerzo longitudinal en L/2 [kg/cm ²]			Momento transversal en L/2 [kg-m/m]		
	H. Simpson	D. Billington	D. Yitzhaki (giros y desplazamientos.)	H. Simpson	D. Billington	D. Yitzhaki (Proced. directo).
0	18	18	18	0.00	0.00	0.00
1	10	10	11(8.46)	-0.03	-0.03	-0.03
2	-10	-10	-10	-4.23	-4.23	-4.23
3	-11	-11	-11	-4.15	-4.15	-3.98
4	11	11	10(10.77)	1.07	1.07	2.61

Tabla 3.3.4.1. Esfuerzos longitudinales y momentos transversales para el sistema de 9 placas plegadas, para la condición de peso propio. El valor entre paréntesis corresponde al experimental.

La ventaja de aplicar esta configuración sobre la anterior, es que el esfuerzo longitudinal para resistir las compresiones puede distribuirse mejor, además de que los esfuerzos disminuyen en la arista 4, manteniéndose prácticamente igual los esfuerzos en las aristas restantes respecto a la configuración de ocho placas.

Al comparar el esfuerzo calculado en la arista 4 con los obtenidos en el ensaye (10.77kg/cm²), aquellos son mayores en 3% calculados con el método de Yitzhaki, estando así, del lado de la seguridad. De lo anterior, el comportamiento del sistema de placas ensayado, predice esfuerzos longitudinales debidos a peso propio, con las metodologías desarrolladas en el anexo de este trabajo, al comparar con los resultados del ensaye.

De lo anterior, los momentos transversales al igual que los esfuerzos longitudinales, disminuyen al aumentar el número de pliegues. La sección transversal elegida para ser ensayada, tiene mejores espacios para acomodar el acero de refuerzo a tensión y

compresión, al tener una placa más respecto a la aproximación 2, y se logra el trabajo más eficiente de la cuantía de refuerzo longitudinal.

Al comparar los 11 kg/cm^2 (en tensión) obtenidos teóricamente en la arista 4, con los 10.77 kg/cm^2 (en tensión) obtenidos experimentalmente, se tiene una diferencia de 2% del lado de la seguridad.

Para tener un parámetro de comparación, se calculan los esfuerzos con la teoría de flexión en vigas en la arista superior de la sección transversal (figura 3.1.1.3), de acuerdo a los datos siguientes:

$$I = 0.0001951 \text{ m}^4$$

$$y_{\text{sup}} = 0.1248 \text{ m}$$

$$w = \frac{48 + 65}{2}$$

$$w = 70.63 \text{ kg} / \text{m}^2$$

$$M = \frac{Pl^2}{8} \dots (3.3.1.1)$$

$$M = \frac{(70.63 \text{ kg} / \text{m}^2)(1.3 \text{ m})(3.85 \text{ m})^2}{8}$$

$$M = 170.11 \text{ kg} - \text{m}$$

$$\sigma = \frac{M}{I} \text{ y} \dots (3.3.1.2)$$

al sustituir :

$$\sigma_{\text{sup}} = - \frac{170.1 \text{ kg} - \text{m}}{0.0001951 \text{ m}^4} 0.1248 \text{ m}$$

$$\sigma_{\text{sup}} = -11 \text{ kg} / \text{cm}^2$$

Lo que significa que al aplicar las metodologías a la configuración correspondiente a la primera aproximación (9 placas) coincide favorablemente con la hipótesis de viga.

Al comparar los diagramas de las figuras 3.3.4.1 y 3.3.4.2 con las figuras 3.3.3.20 y 3.3.3.21 son prácticamente los mismos.

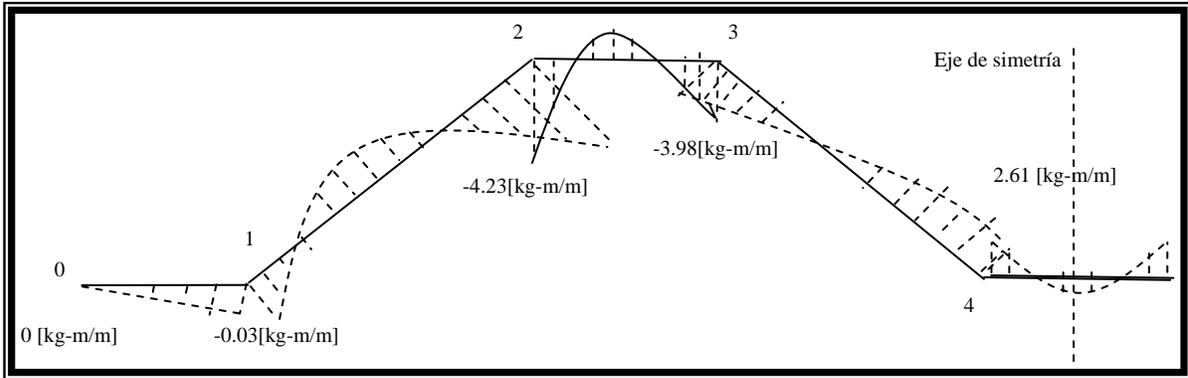


Figura 3.3.4.1. Diagrama de momentos transversales al centro del claro para el sistema de 9 placas plegadas, con el método de Yitzhaki.

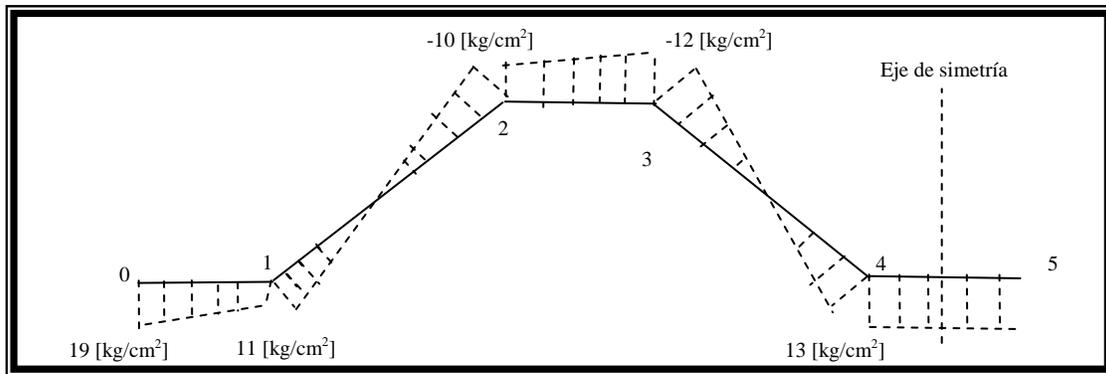


Figura 3.3.4.2. Diagrama de esfuerzos longitudinales al centro del claro para el sistema de 9 placas plegadas, con el método de Yitzhaki.

A partir de los esfuerzos calculados, se tiene que rige el acero mínimo, se propone que una malla 66/10-10 cubre los esfuerzos solicitados y la cuantía mínima requerida, adicionalmente, se colocaran unas barras del No. 2.5 en cada arista como se muestra en la figura 3.3.1.2b.

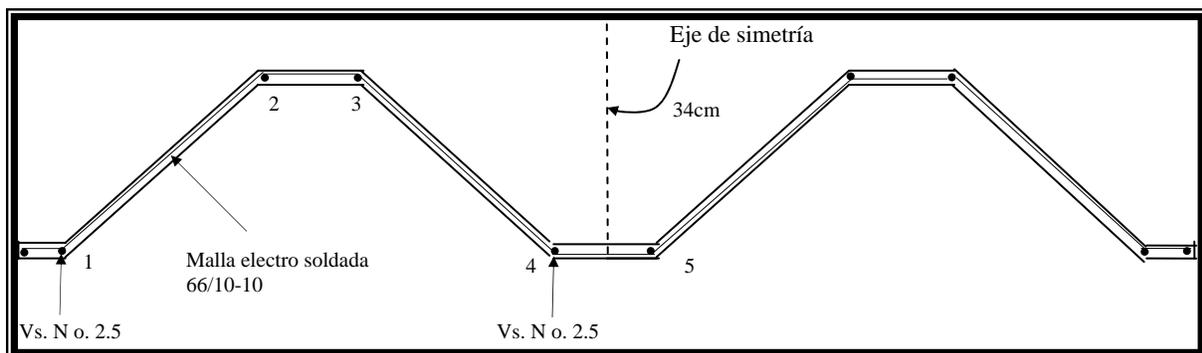


Figura 3.3.4.2b. Armado propuesta para la sección transversal del sistema de 9 placas plegadas, para la condición de peso propio.

3.3.5 Condición de carga de servicio.

Para el sistema de 9 placas plegadas bajo la condición de carga de servicio (344.5 kg/cm^2), se tiene que el esfuerzo en la arista 0 es menor que $0.45f'_c = 172 \text{ kg/cm}^2$, que corresponde al esfuerzo de ruptura para el concreto con $f'_c = 383 \text{ kg/cm}^2$ utilizado, y por lo tanto, la sección soporta adecuadamente las solicitaciones, como se observa en la tabla 3.3.2.1., sin embargo, estos valores son subestimados respecto a los resultados experimentales.

En la tabla 3.3.5.1 se nota la similitud entre los esfuerzos, sin embargo en el caso de los momentos en de Yitzhaki está sobrestimando respecto a los otros dos métodos.

Arista	Esfuerzo longitudinal en L/2 [kg/cm^2]			Momento transversal en L/2 [kg-m/m]		
	H. Simpson	P. Billington	D. Yitzhaki (Proced. directo).	H. Simpson	P. Billington	D. Yitzhaki (Proced. directo).
0	103	102	66	0.00	0.00	0.00
1	56	56	58	-0.24	-0.24	-0.62
2	-57	-57	-59	-23.64	-23.58	-28.10
3	-63	-63	-63	-23.17	-23.16	-26.24
4	60	60	56	6.08	10.16	18.28

Tabla 3.3.5.1. Resumen de esfuerzos longitudinales y momentos transversales para el sistema de 9 placas, al aplicar 344.5 kg/m^2 (carga de servicio).

Sin embargo al realizar un cálculo con la hipótesis de viga simplemente apoyada en sus extremos con carga repartida en todo su claro, el valor de los esfuerzos es similar al considerar la teoría de vigas, por los cálculos que muestran a continuación:

$$M = \frac{(344.5 \text{ kg/m}^2)(1.3\text{m})(3.85\text{m})^2}{8}$$

$$M = 829.8 \text{ kg-m}$$

$$I_{ag} = 0.00009928 \text{ m}^4$$

$$y_{\text{sup}} = 0.1248 \text{ m}$$

$$y_{\text{inf}} = 0.1251 \text{ m}$$

al sustituir :

$$\sigma_{\text{sup}} = -\frac{829.8 \text{ kg-m}}{0.00009928 \text{ m}^4} 0.1248 \text{ m}$$

$$\sigma_{\text{sup}} = -104.31 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{inf}} = 104.56 \text{ kg/cm}^2$$

Para la condición de carga de servicio, el momento de inercia a utilizar para el cálculo de esfuerzos con la teoría de viga, es el de agrietamiento, calculado en la página 126 a partir de la figura 3.3.2.7, cuyo valor es de 9928.6 cm^4 (0.00009928m^4).

La teoría de vigas sobrestima los esfuerzos en el sistema de placas plegadas para este nivel de carga, respecto a las metodologías (60 kg/cm^2) en un 48%. Se tiene que el esfuerzo promedio en las barras de refuerzo contenidas en la placa 5 fue de 277 kg/cm^2 , según el registro del sistema de adquisición de datos, más de 4 veces el teórico.

Aparecen fisuras en las placas inferiores vistas durante el ensaye al aplicarse la carga de servicio, por lo que disminuye la resistencia del sistema de placas. Las placas que tienen grietas, tienen en consecuencia un mayor desplazamiento ν , que el calculado con la teoría elástica y por tanto un comportamiento de conjunto diferente al de una viga, más eficiente el de las placas plegadas, que el de una viga. Sin embargo, la placa 5 donde aparecen las grietas, las fuerzas de placa están equilibradas y por lo tanto es de esperarse que no afecte el comportamiento transversal de la estructura.

Los esfuerzos longitudinales en general, disminuyen al considerar la rotación entre las placas.

Al comparar los resultados de esfuerzos en función del número de placas, se tiene que la tendencia es a disminuir en forma proporcional al número de placas plegadas.

Se ha visto que al aumentar los esfuerzos longitudinales disminuyen los momentos transversales, es decir, que en un cascarón de sección circular, los momentos transversales son nulos prácticamente, pero los esfuerzos longitudinales dependen del claro libre y del momento de inercia.

Arista	Esfuerzo promedio [kg/cm ²]	Galgas (al multiplicar el desplazamiento por el módulo de elasticidad del concreto).
0	102	
1	57	219 kg/cm ² . (Promedio de arista 1 y 8)
2	-57	
3	-63	
4	59	277 [kg/cm ²] (Promedio de arista 4 y 5)

Tabla 3.3.5.2.Comparativa de esfuerzos entre el calculado con los métodos propuestos y los obtenidos del ensaye experimental, para la condición de carga de servicio.

Los resultados de esfuerzos experimentales registrados en la tabla 3.3.5.2 fueron registrados con el sistema de adquisición de datos que registra deformaciones unitarias en las barras de acero en la arista 1 y 4 del modelo, por lo que se ha multiplicado por el módulo de elasticidad de concreto. Esto último implica que sólo es válido hasta el momento de agrietamiento del sistema.

Se observa en la figura 3.3.5.1 que el momento tiene un cambio de signo en la arista 4, siendo necesario colocar el acero de refuerzo en el lecho inferior de la placa 5.

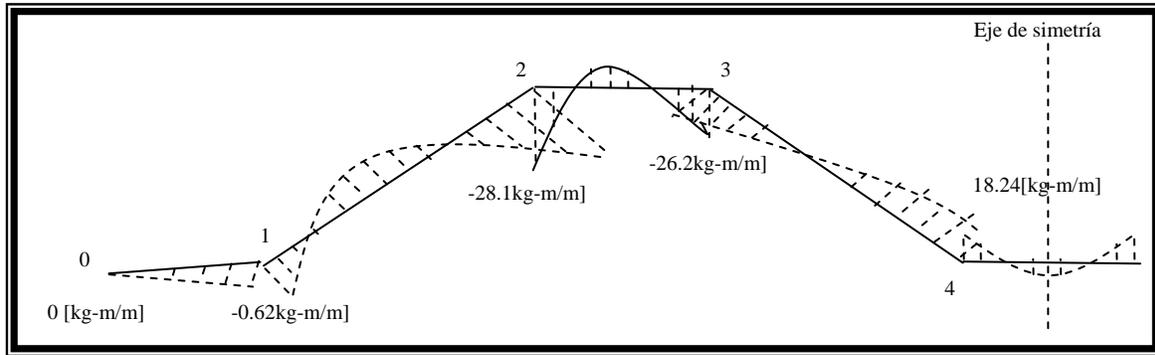


Figura 3.3.5.1. Diagrama de momentos transversales al centro del claro para el sistema de 9 placas plegadas, con el método de Yitzhaki, para la condición de carga de servicio.

En la figura 3.3.5.2 se tiene que el esfuerzo en la placa 5 es contante en toda su longitud, a diferencia de la placa 3, donde el máximo se presenta en la arista 0 y disminuye hacia la arista 1.

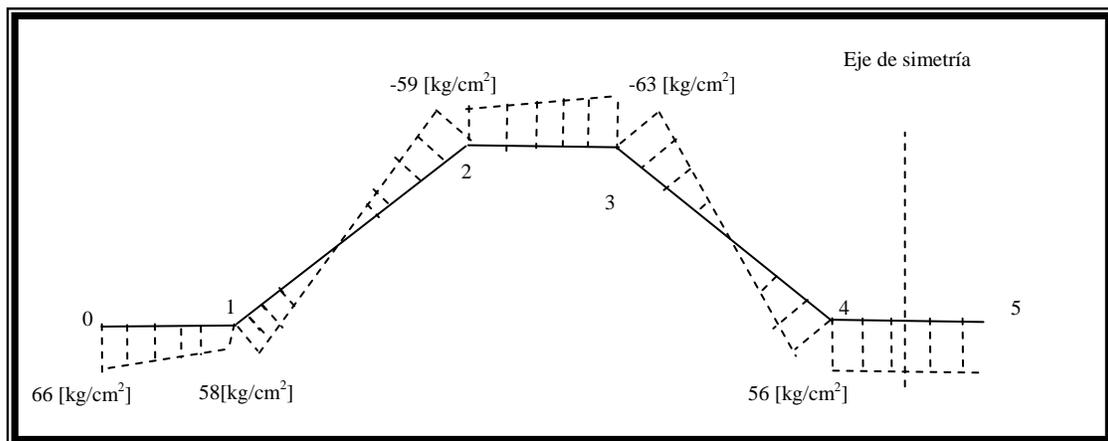


Figura 3.3.5.2. Diagrama de esfuerzos longitudinales al centro del claro para el sistema de 9 placas plegadas, con el método de Yitzhaki, para la condición de carga de servicio.

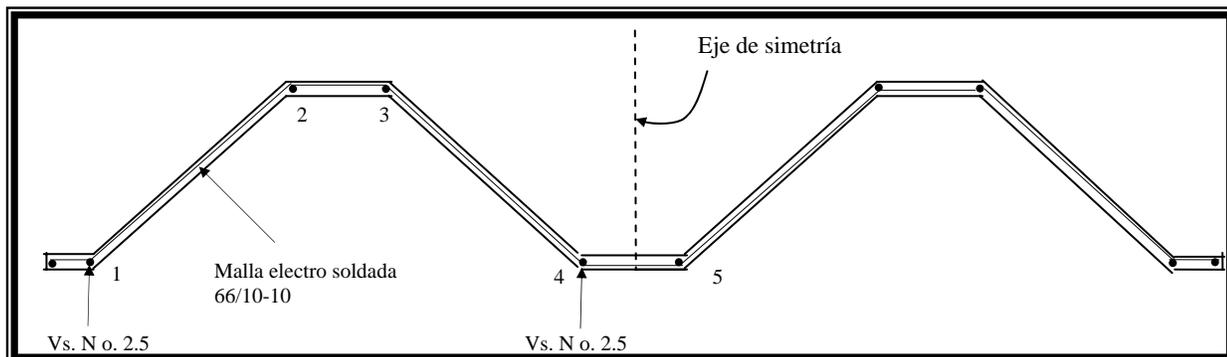


Figura 3.3.5.3. Armado propuesto para la sección transversal del sistema de 9 placas plegadas, al aplicar la metodología de H. Simpson, para la condición de carga de servicio.

En la figura 3.3.5.3 se propone el armado, se han colocado barras en las aristas sólo por procedimiento constructivo, ya que el acero de temperatura (malla 66-1010) es suficiente para resistir las solicitaciones.

Además de realizar el análisis de placas plegadas para la condición de peso propio y de servicio, se han generado las curvas de carga- esfuerzo para ver el comportamiento del sistema de 6, 8 y 9 placas plegadas al variar la carga distribuida aplicada. Se observa que ninguna de las tres aproximaciones analizadas con las metodologías, corresponde con los resultados experimentales más allá de los 188 kg/cm². (Ver las figuras 3.3.5.4 a 3.3.5.6.)

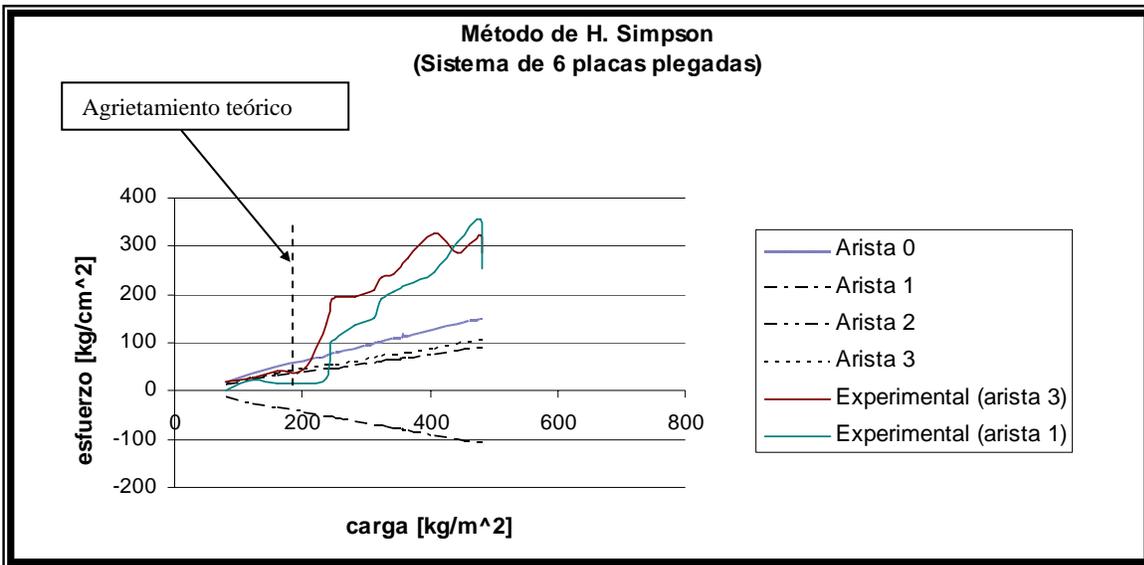


Figura 3.3.5.4 Gráfico de carga-esfuerzo para el sistema de 6 placas plegadas al aplicar el método de H. Simpson.

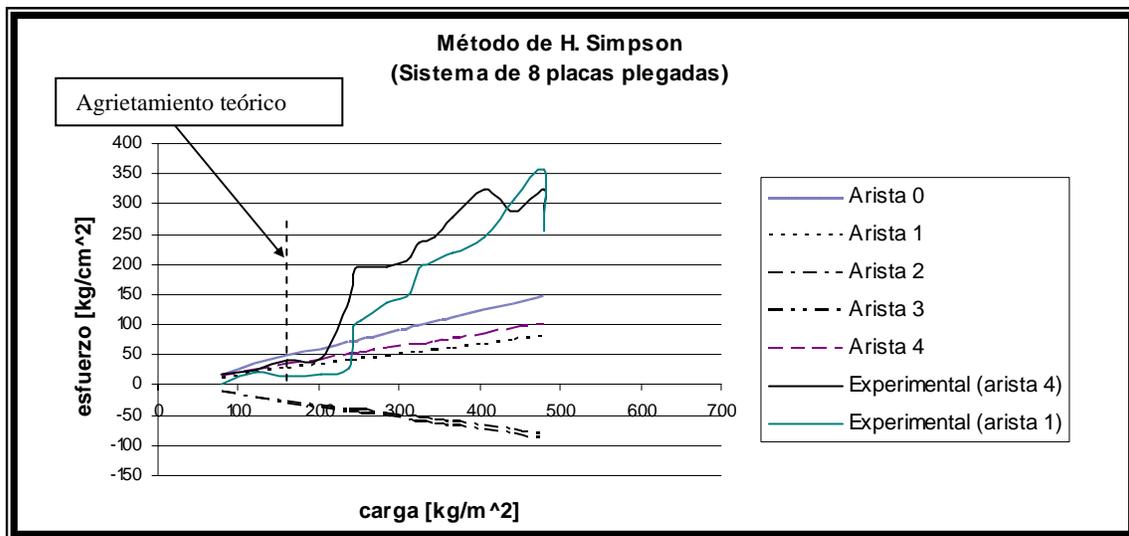


Figura 3.3.5.5 Gráfico de carga-esfuerzo para el sistema de 8 placas plegadas al aplicar el método de H. Simpson.

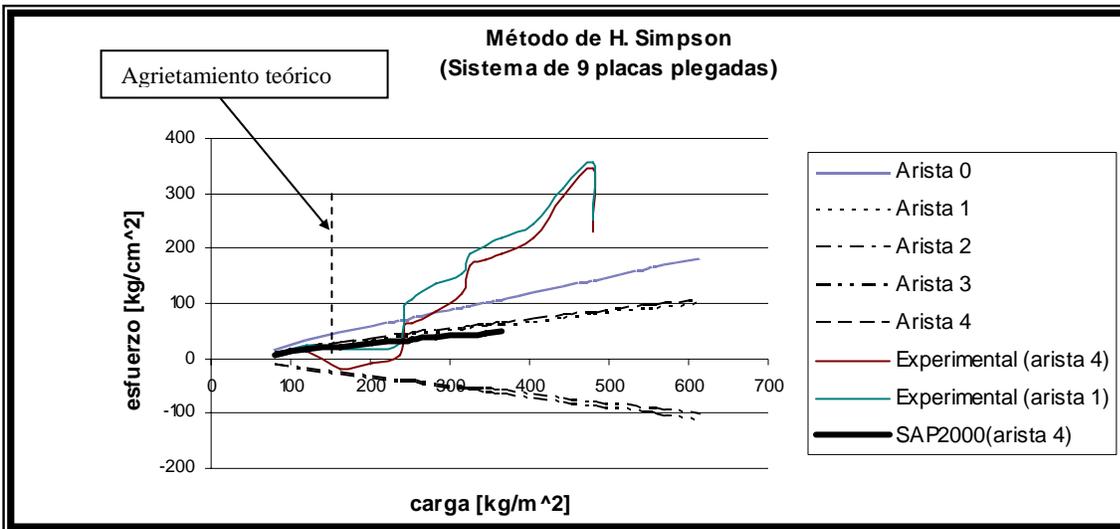


Figura 3.3.5.6 Gráfico de carga-esfuerzo para el sistema de 9 placas plegadas al aplicar el método de H. Simpson.

Se ha calculado el momento de inercia agrietado para el sistema de 9 placas plegadas, siendo el siguiente:

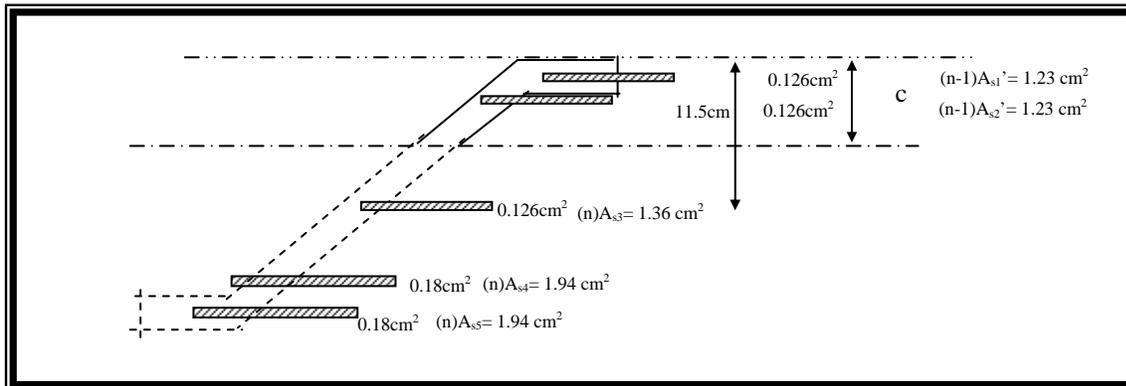


Figura 3.3.5.7 Sección transversal agrietada, para el cálculo del momento de agrietamiento para el sistema de 9 placas plegadas de concreto $f'_c = 383 \text{ kg/cm}^2$, reforzado con barras No. 3/16" y barras 5/32" de acero de alta resistencia.

La sección transformada de la figura 3.3.5.7 nos permite calcular el momento de agrietamiento en el sistema, al considerar la teoría de vigas.

Al calcular la posición del eje neutro de la sección transformada agrietada para el sistema de 9 placas plegadas, se tiene:

$$3.75(2)(c-1) + \frac{2}{\cos 42.61} \frac{(c-2)^2}{2} + 1.85(c-1) + 1.23(c-2) = 1.36(11.5-c) + 1.94(20-c) + 1.94(22-c)$$

al resolver para c :

$$c = 5.35 \text{ cm}$$

Con el valor de c, se tiene el siguiente momento de inercia agrietado:

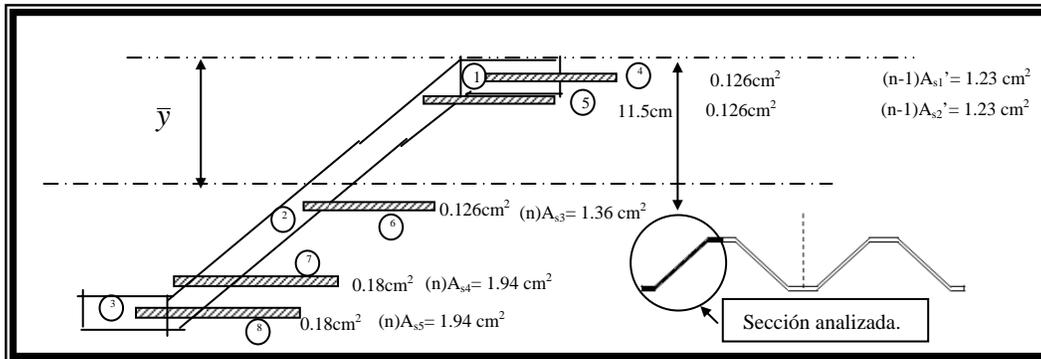
$$I'_{ag} = 3.75 \frac{2^3}{12} + 2(3.75)(5.35-1)^2 + \frac{2}{\cos 42.61} \frac{(5.35-2)^3}{12} + \frac{2}{\cos 42.61} \frac{(5.35-2)^2}{2} + 1.85(5.35-1)^2 + 1.23(5.35-2)^2$$

$$+ \frac{2}{\cos 42.61} \frac{(21-5.35)^3}{12} + \frac{2}{\cos 42.61} \frac{(21-5.35)^2}{2} + 1.36(11.5-5.35)^2 + 1.94(21-5.35)^2 + 1.94(22-5.35)^2$$

$$I'_{ag} = 2482.2 \text{ cm}^4$$

$$I_{ag} = 4I'_{ag} \text{ (se tienen 4 piezas iguales en la sección transversal del sistema de 9 placas plegadas.)}$$

$$I_{ag} = 9928.6 \text{ cm}^4$$



Ver figura 3.3.5.8 Sección transversal no agrietada, para el cálculo del momento de no agrietamiento para el sistema de 9 placas plegadas de concreto $f'_c = 383 \text{ kg/cm}^2$, reforzado con barras No. 3/16" y barras 5/32" de acero de alta resistencia.

Por simplicidad, se ha calculado el momento de inercia no agrietado de una parte de la sección transversal mostrada en la figura 3.3.5.8 en el extremo inferior derecho, donde se calculan las áreas de acero transformadas al multiplicarse por la relación modular menos uno para el caso de acero que está por encima del eje neutro y por n el acero que está por debajo del eje neutro de la sección transversal bruta, por lo que será necesario multiplicar cuatro veces éste valor para obtener el momento de inercia de toda la sección transversal.

Cálculo de la distancia al eje neutro de la sección no agrietada:

Figura	A [cm ²]	y [cm]	Ay [cm ³]
1	7.50	1.00	7.50
2	54.34	12.00	652.08
3	7.50	23.00	172.50
4	8.72	1.00	8.72
5	1.24	2.00	2.47
6	1.24	11.50	14.20
7	1.76	22.00	38.81
8	1.76	23.00	40.57
suma	84.06		936.85

A sustituir el momento de inercia agrietado (I_{ag}) en la siguiente expresión:

$$M_{ag} = \frac{I_{ag}}{y} f_{cr}$$

$$M_{ag} = \frac{9928.6cm^4}{11.14cm} 39.14kg/cm^2$$

$$M_{ag} = 34883kg - cm$$

$$M_{ag} = 348.8kg - m$$

$$w_{ag} = \frac{8(348.8kg - m)}{(3.85m)^2}$$

$$w_{ag} = 188.2kg/m$$

Al observar la figura 3.3.2.6 se tiene que los resultados de la aplicación de las metodologías, son mayores que las experimentales para el caso de la arista 4. Los valores experimentales, difieren considerablemente para valores mayores que la carga distribuida correspondiente al agrietamiento en el sistema de placas plegadas.

De lo anterior, las metodologías dan resultados aceptables (del lado de la seguridad) hasta antes del momento de ruptura del sistema de placas plegadas, observándose un comportamiento lineal aún después de este límite, siendo que en los resultados experimentales, se tiene que el comportamiento del sistema ante una presión uniforme en la superficie de la misma, no es lineal, como se puede ver en las figuras 3.3.2.4, 3.3.2.5 y 3.3.2.6 para el caso de la curva experimental (arista 4), por la pérdida de adherencia entre el acero y el concreto al formarse grietas en la zona de compresión.

4. CAMBIO DE CONFIGURACIÓN DE PLACAS PLEGADAS.

En cuanto al cálculo de los desplazamientos, se puede utilizar el método de Williot-Mohr, que consiste en trazar una línea perpendicular al eje transversal de la placa que pase por el extremo de la deformación de la placa “n”. Se hace lo mismo con la placa “n+1” y donde se intersectan las líneas, digamos el punto a. La distancia que existe entre el nudo y el punto a, será el desplazamiento vertical de la junta o, mediante una fórmula deducida del método gráfico, la cual lleva a los mismos resultados, ver ecuación (2.7.1) y (2.7.2).

Se presentan el resultado y se comparan con los experimentales, realizando un cálculo del desplazamiento como si fuera viga para ver si el comportamiento puede ser descrito con esa teoría. Es de esperar que el desplazamiento vertical sea menor en la teoría de placas plegadas que en la de vigas y similar al obtenido en los ensayos de laboratorio. Las expresiones que describen dichos desplazamientos son las siguientes:

$$v_n = \frac{\Delta\sigma_n L^2}{9.6bE} \dots (4.1)$$

$$C = \frac{9.6E}{L^2} \dots (4.2)$$

$$\Delta\sigma_n = \sigma_B - \sigma_T$$

$$cv_n = \frac{\Delta\sigma_n}{b_n} \dots (4.3)$$

Cuyas variables de han definido anteriormente.

4.1 Desplazamiento de las aristas en un sistema de 6 placas plegadas.

El procedimiento para el cálculo de los desplazamientos en éste sistema no se desarrolla, dado que es análogo al de 9 placas plegadas el cual si se presenta en su capítulo respectivo.

Las hipótesis para el cálculo de los desplazamientos son las siguientes:

La sección permanece plana antes y después de las deformaciones

El comportamiento de los materiales es elástico lineal

Los desplazamientos son calculados considerando la rotación de placas y el desplazamiento en el sentido del plano neutro de cada placa. Para esto, es necesario calcular las fuerzas de placa

4.1.1 Condición de peso propio.

Al aplicar las tres metodologías ante peso propio, para obtener los desplazamientos en las aristas se tiene para la primera aproximación (6 placas), se tienen los resultados de la tabla 4.1.1.1.

Arista	Desplazamientos [mm]			
	Eliahu Traum (1964)	H. Simpson (1947)	P. Billington (1968)	D. Yitzhaki (1958)
3	1.0	0.96	0.96	0.96 (0.6)

Tabla 4.1.1.1. Desplazamientos de la primera aproximación para el sistema de 6 placas. El valor entre paréntesis corresponde a experimental.

Al comparar los desplazamientos teórico promedio (0.96mm) con los experimentales 0.6mm para el peso propio, las metodologías sobrestiman en un 60% los del ensaye.

4.1.2 Condición de carga de servicio.

Al calcular la configuración desplazada con la metodología de Yitzhaki al sistema de 6 placas plegadas bajo la condición de la carga de servicio, los desplazamientos en la arista 3, que corresponden al máximo en el sistema se presentan en la tabla 4.1.2.1.

Arista	Desplazamientos [mm]			
	Eliahu Traum (1964)	H. Simpson (1947)	P. Billington (1968)	D. Yitzhaki (1958)
3	5.0	5.0	5.0	4.9

Tabla 4.1.2.1. Sistema de 6 placas plegadas para la condición de carga de servicio (344.5 kg/cm²).

A continuación se calcula la configuración deformada para la condición de carga de servicio, donde se puede observar que para este sistema de 6 palcas plegadas, el máximo desplazamiento vertical se presenta en la arista 3 y el menor en la arista 0. Al variar la longitud de las placas de extremo (1 y 6), se nota que los desplazamientos en la arista 1 y 5 disminuyen en valor absoluto, es decir, que se presenta un efecto de rotación de estas placas hacia arriba, como un ave que emprende el vuelo. Es por ello que se incrementó la longitud de las mismas; y fue hasta la longitud de 6 cm, cuyos desplazamientos resultaron de signo positivo (hacia debajo), como se puede ver en la figura 4.1.2.1.

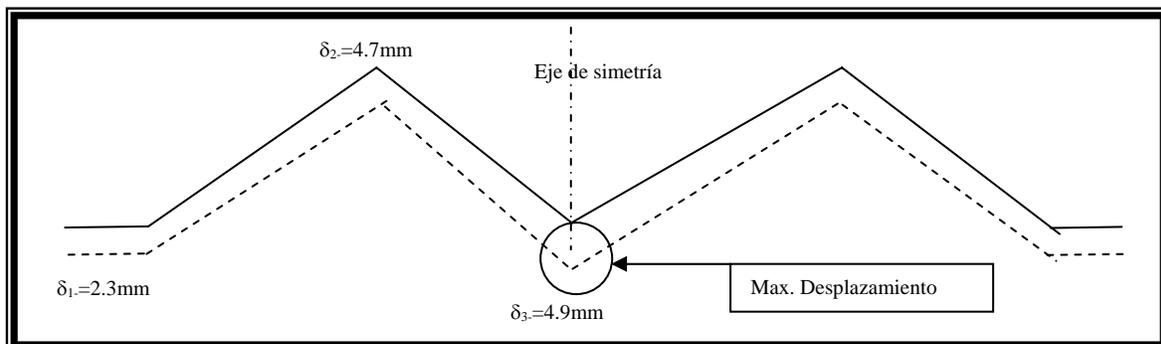


Figura 4.1.2.1 Deformaciones de corto plazo para la primera aproximación, al aplicar la metodología propuesta por D. Yitzhaki, al aumentar la longitud de las placas 1 y 6 de 3.75cm a 6.0cm), para la condición de carga de servicio.

En la figura 4.1.2.1 se ha dibujado la sección deformada sin considerar el diagrama de momentos transversales, al tomarse en cuenta se tendría concavidad en la deformada hacia arriba en la zona de momentos positivo y cóncava hacia abajo en zonas de momento negativo, además que el ángulo entre placas permanece constante durante la rotación debida a las solicitaciones.

4.1.3. Comentarios

Al comparar con los resultados del programa SAP2000 cuyo desplazamiento fue 4.2mm el calculado con el método de Yitzhaki, éste lo sobrestima en un 17% respecto al programa y lo subestima en 41%, respecto al experimental.

4.2 Desplazamiento de las aristas en un sistema de 8 placas plegadas.

Para esta configuración, al igual que para la anterior, sólo se presentan los resultados de aplicar las metodologías por se análoga a la de 9 placas plegadas.

4.2.1 Condición de peso propio.

Se ha notado que los desplazamientos disminuyen al incrementar de 6 a 8 el número de placas, acercándose al valor experimental, como se muestra en la tabla 4.2.1.1.

Arista	Desplazamientos [mm]		
	H. Simpson (1947)	P. Billington (1968)	D. Yitzhaki (1958)
4	0.84	0.82	0.78 (0.6)

Tabla 4.2.1.1. Desplazamientos de la segunda aproximación (8 placas), para la condición de peso propio. El valor entre paréntesis corresponde al experimental.

4.2.2 Condición de carga de servicio.

De manera similar al caso anterior, los desplazamientos son subestimados respecto al resultado experimental como se muestra en la tabla 4.2.2.1. Cabe aclarar, que los resultados de dicha tabla, se obtienen con las dimensiones de placa dadas en la figura 3.1.1.2, es decir, sin aumentar las dimensiones de las placas de los extremos del sistema de placas plegadas (1 y 8), como se hace para obtener la configuración desplazada de la figura 4.2.2.1, para lograr que los desplazamientos según los métodos de análisis fueran más cercanos a los valores experimentalmente obtenidos por medio de los deformímetros colocados en la parte inferior del sistema de placas plegadas (arista 1 y 4 del modelo de la figura 3.1.1.3).

Arista	Desplazamientos [mm]		
	H. Simpson (1947)	P. Billington (1968)	D. Yitzhaki (1958)
4	4.443	4.456	4.256 (9.5)

Tabla 4.2.2.1. Sistema de 8 placas plegadas para la condición de carga de servicio (344.5 kg/cm²). El valor entre paréntesis corresponde al experimental.

El desplazamiento vertical máximo se presenta en la arista 3, es decir, en la placa que está en la zona de compresión, y no donde está el eje de simetría como en el caso anterior (6 placas). Para lograr que se presente esta configuración, necesariamente debe existir un desplazamiento en el sentido horizontal, lo cual puede simularse al elaborar un modelo hecho con una hoja de papel y aplicarle una carga uniforme sobre la superficie de arriba, sin embargo, en el presente trabajo sólo se calculan los desplazamientos verticales, despreciando los horizontales, dado que son pequeños respecto a los verticales.

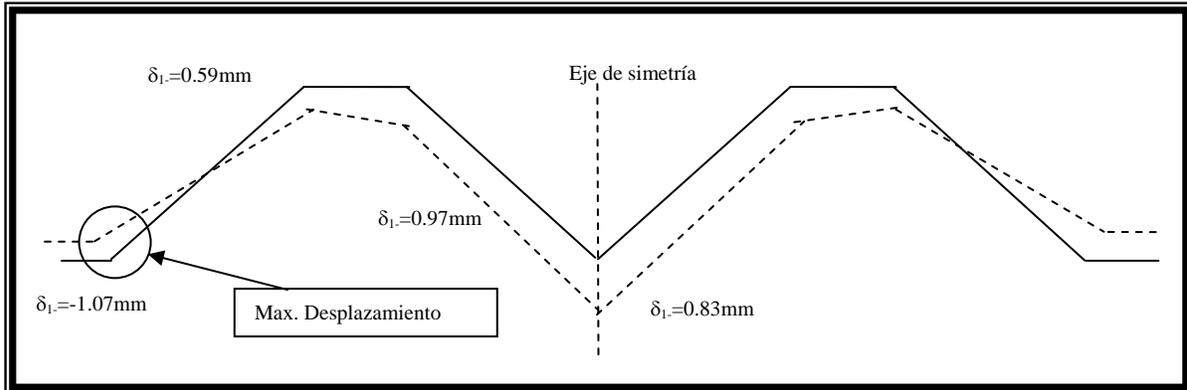


Figura 4.2.2.1. Deformaciones de corto plazo para la segunda aproximación al sistema de 8 placas plegadas, ensayado en el laboratorio al aplicar la metodología propuesta por D. Yitzhaki, para la condición de peso propio.

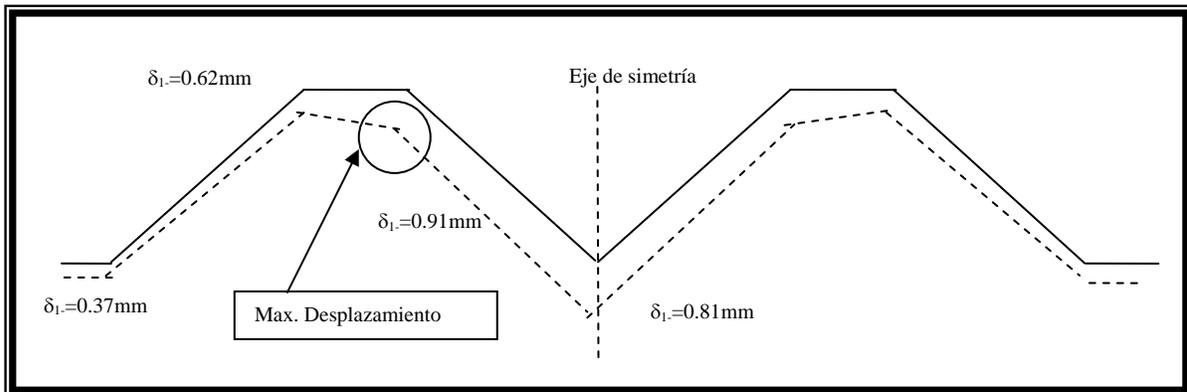


Figura 4.2.2.2. Deformaciones de corto plazo para la segunda aproximación, ensayado en el laboratorio al aplicar la metodología propuesta por D. Yitzhaki, al aumentar la longitud de las placas 1 y 8 de 3.75 cm a 6.0 cm, para la condición de peso propio.

En la figura 4.1.2.1 y 4.2.2.2, se ha dibujado la configuración deformada sin considerar el diagrama de momentos transversales, al tomarse en cuenta se tendría concavidad en la deformada hacia arriba en la zona de momentos positivo y cóncava hacia abajo en zonas de momento negativo, además que el ángulo entre placas permanece constante durante la rotación.

4.2.3. Comentarios

Al calcular el desplazamiento para la segunda aproximación se tiene que para la arista 4 varían en 30% respecto al experimental para el cálculo mediante el método de Yitzhaki y 23% respecto al modelo de elemento finito.

De lo anterior, los desplazamientos obtenidos a partir del modelo realizado en el programa bajo la misma solicitación de carga, están más cercanos al resultado obtenido con el método de Yitzhaki. Esto no quiere decir que los resultados del ensaye estén incorrectos, sino que es insuficiente con un solo ensaye, por variables probabilísticas que están fuera de control en el laboratorio.

4.3 Desplazamiento de las aristas en un sistema de 9 placas plegadas.

A continuación se presenta el desarrollo para determinar la configuración deformada del sistema para la condición de peso propio.

4.3.1 Método de Yitzhaki.

Planteamiento del problema

Dibujar la configuración deformada del sistema de 9 placas plegadas, por el método de Yitzhaki (giros y desplazamientos), a partir del diagrama de los esfuerzos longitudinales y momentos transversales finales para la condición de peso propio, de acuerdo a las figuras 3.3.1.2 y 3.3.1.3 de las paginas 67, modificando las placas extremas (1 y 9) de 3.75cm a 6cm, respectivamente y los datos siguientes:

$$\begin{aligned} f'_c &= 383 \text{ kg/cm}^2 \\ E &= 192352 \text{ kg/cm}^2 \\ L &= 385 \text{ cm} \\ C &= 9.6E/L^2 \\ C &= 12.46 \text{ [kg/cm}^4\text{]} \\ C &= 9.87E/L^2 \\ C &= 12.80 \text{ [kg/cm}^4\text{]} \end{aligned}$$

Los datos de la geometría corresponden a la tabla 3.3.1.1 de la página 67, modificando las placas extremas de 3.75cm a 6cm.

Planteamiento de solución.

1. A partir de las propiedades del material, calcular $C = \frac{9.6E}{L^2} \dots (1)$ para la condición de peso propio y $C = \frac{9.87E}{L^2} \dots (2)$ para las demás condiciones, donde E es el modulo de elasticidad del concreto y L el claro del sistema de placas plegadas.
2. Calcular Cv_n . $Cv_n = \frac{\sigma_B - \sigma_T}{b_n}$
3. Calcular el factor $C\delta$ para cada arista.

$$C\delta_n = Cv_n\alpha_{n+1} - Cv_{n+1}\beta_n$$

4. Despejar δ , es decir, el desplazamiento en la arista correspondiente.
5. Revisar los desplazamientos máximos de acuerdo a las NTC-2004.

Permisible: $L/240+0.5$ [cm] = 2.1cm

6. Dibujar la configuración deformada del sistema de placas.

Desarrollo.

Arista	Placa	Cv_n [ton/m ³]	v_n [cm]	$C\delta_n$ [kg/m ³]	δ_n [cm]
0				0.00	0.000
	1	0.02	238.94		
1				642.55	0.050
	2	0.05	610.86		
2				808.49	0.063
	3	-0.11	-1399.29		
3				1014.09	0.079
	4	0.00	-37.14		
4				920.27	0.072

Tabla 4.3.1.1 Desplazamientos verticales de las aristas.

Arista	Desp.Permisible
0	0k
1	0k
2	0k
3	0k
4	0k

Tabla 4.3.1.2. Desplazamientos permisibles.

La configuración deformada para la condición de peso propio, se tiene en la figura 4.3.1.2.

4.3.2. Método de Billington.

Planteamiento del problema

Dibujar la configuración deformada del sistema de 9 placas plegadas, por el método de Billington, a partir del diagrama de los esfuerzos longitudinales finales para la condición de peso propio para los datos siguientes:

$$\begin{aligned} f'_c &= 383 \text{ kg/cm}^2 \\ E &= 192352 \text{ kg/cm}^2 \\ L &= 385 \text{ cm} \\ C &= 9.6E/L^2 \\ C &= 12.46 \text{ [kg/cm}^4\text{]} \\ C &= 9.87E/L^2 \\ C &= 12.80 \text{ [kg/cm}^4\text{]} \end{aligned}$$

Los datos de la geometría corresponden a la tabla 3.3.2.1 de la página 84.

Planteamiento de solución.

El mismo que el desarrollado en la sección anterior.

Desarrollo.

En la tabla 4.3.2.1 se tienen los desplazamiento verticales, que son máximos en la arista 3.

Arista	Placa	Cv_n [kg/cm ³]	v_n [cm]	$C\delta_n$ [kg/m ³]	δ_n [cm]
0				0.00	0.000
	1	0.49	0.04		
1				0.34	0.026
	2	0.59	0.05		
2				0.77	0.060
	3	0.090	0.01		
3				1.04	0.081
	4	-0.636	-0.05		
4				0.94	0.073
	5	0.000	0.00		

Tabla 4.3.2.1 Desplazamientos verticales de las aristas.

Arista	Desp. Permissible
0	0k
1	0k
2	0k
3	0k
4	0k

Tabla 4.3.2.2. Desplazamientos permisibles.

En la tabla 4.3.2.2 se presenta el resumen de la revisión de los desplazamientos verticales permisibles de acuerdo a la NTC2004.

La sección deformada es similar a la figura es similar a la 4.3.1.2.

4.3.3. Comentarios

Al calcular el desplazamiento para la segunda aproximación se tiene que para la arista 4 varían en 30% respecto al experimental para el cálculo mediante el método de Yitzhaki y 23% respecto al modelo de elemento finito.

De lo anterior, los desplazamientos obtenidos a partir del modelo realizado en el programa bajo la misma sollicitación de carga, están más cercanos al resultado obtenido con el método de Yitzhaki. Esto no quiere decir que los resultados del ensaye estén incorrectos, sino que es insuficiente con un solo ensaye, por variables probabilísticas que están fuera de control en el laboratorio.

Arista	Desplazamientos [mm]		
	H. Simpson (1947)	P. Billington (1968)	D. Yitzhaki (1958)
4	0.75	0.75	0.70 (0.60)

Tabla 4.3.3.1. Desplazamientos de la tercera aproximación para el sistema de 9 placas. El valor entre paréntesis corresponde al experimental.

Los desplazamientos de la tabla 4.3.3.1 no corresponden a los máximos del sistema, sin embargo, son los que se pueden comparar con los experimentales, dada la manera de instrumentar el sistema.

Para el sistema de 9 placas plegadas se tiene 14% de sobrestimación en los desplazamientos con el método de Yitzhaki en la arista 4, respecto a los experimentales y 16% respecto al modelo de elemento finito.

Los resultados más cercanos a los obtenidos experimentalmente, corresponden al sistema de 9 placas plegadas.

El desplazamiento calculado al suponer que se tiene una viga simplemente apoyada en sus extremos, fue prácticamente el mismo que el calculado con las metodologías propuestas para el análisis y diseño de placas plegadas, por lo que para la acción de peso propio, la teoría de flexión en vigas da una buena aproximación al valor real del desplazamiento al centro del claro, para la condición de peso propio.

Al realizar un cálculo del desplazamiento en el centro del claro como si tuviera el comportamiento de una viga debido a su peso propio, libremente apoyada en sus extremos, se tiene:

$$\delta = \frac{5Wl^4}{384EI} \dots (4.3.1.1)$$

donde:

$$w = \frac{48 + 65}{2}$$

$$w = 56.5 \text{ kg / m}^2$$

$$W = (56.5 \text{ kg / m}^2)(1.3 \text{ m})$$

$$W = 73.45 \text{ kg / m}$$

$$I = 0.0001951 \text{ m}^4$$

al sustituir:

$$\delta = \frac{5(73.45)(3.85)^4}{384(192532 * 100^2)(0.0001951)} (1000)$$

$$\delta = 0.6 \text{ mm}$$

Al comparar el resultado con la hipótesis de viga (0.6mm en la arista 4), coincide con el resultado experimental, para la condición de peso propio.

Para esta configuración se ha visto que el máximo desplazamiento vertical es en la arista 3. Cabe aclarar que para esta configuración el diseño requiere que las placas de los extremos (1 y 9) tengan una longitud de 6cm contra los 3.75cm, si se quiere que los desplazamientos verticales de la arista 1 sean positivos, para la condición de peso propio.

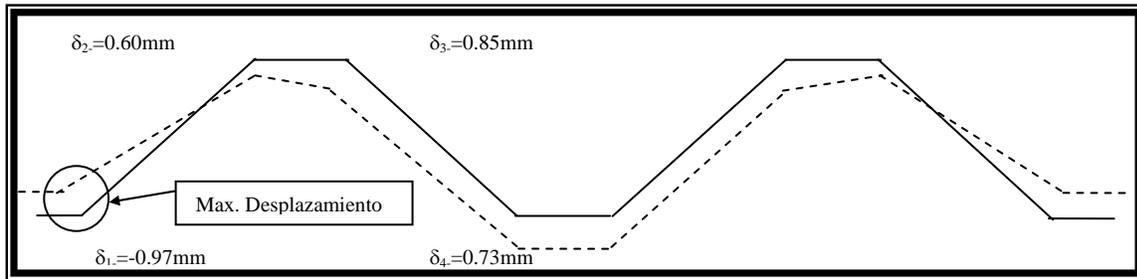


Figura 4.3.3.1. Desplazamientos para el sistema de 9 placas plegadas ensayada en el laboratorio, al aplicar la metodología propuesta por D. Yitzhaki, para la condición de peso propio.

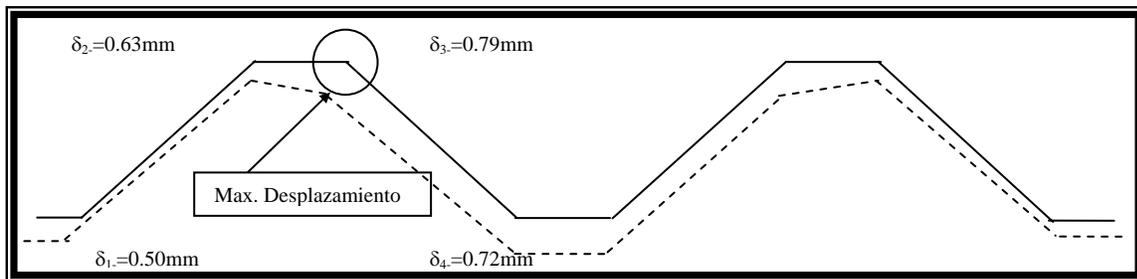


Figura 4.3.3.2. Desplazamientos para el sistema de 9 placas plegadas ensayada en el laboratorio, al aplicar la metodología propuesta por D. Yitzhaki, para la condición de peso propio, al aumentar la longitud de las placas extremas (1 y 9) de 3.75 cm a 6 cm.

En la figura 4.3.2.1 y 4.3.2.2, se ha dibujado la configuración deformada sin considerar el diagrama de momentos transversales, al tomarse en cuenta se tendría concavidad en la deformada hacia arriba en la zona de momentos positivo y cóncava hacia abajo en zonas de momento negativo, además que el ángulo entre placas permanece constante durante la rotación. El máximo desplazamiento se presenta en la arista 3.

Bajo la carga de servicio, los desplazamiento calculados con la teoría de vigas, son menores que los calculados con la teoría de placas 3.41mm y 3.9mm, respectivamente.

$$w = 344.5 \text{ kg} / \text{m}^2$$

$$W = (344.5 \text{ kg} / \text{m}^2)(1.3 \text{ m})$$

$$W = 447.9 \text{ kg} / \text{m}$$

$$I = 0.0001951 \text{ m}^4$$

al sustituir en la expresión (5.3.2):

$$\delta = \frac{(5)(447.9)(3.85)^4}{384(192532 * 100^2)(0.0001951)}$$

$$\delta = 3.41 \text{ mm}$$

El cálculo de desplazamientos con la metodología de Yitzhaki, 3.92mm, subestima el desplazamiento en 60%, respecto al experimental (9.5mm) y 7% respecto al modelo de elemento finito (4.2mm). Los cálculos de la tabla 4.3.2.1 se obtienen a partir de las dimensiones de la figura 3.1.1.3 sin incrementar las dimensiones de las placas extremas (1 y 9).

Arista	Desplazamientos [mm]		
	H. Simpson (1947)	P. Billington (1968)	D. Yitzhaki (1958)
4	4.07	4.01	3.92 (9.5)

Tabla 4.3.3.2. Sistema de 9 placas plegadas para la condición de carga de servicio (344.5 kg/cm²). El desplazamiento experimental está entre paréntesis.

En la tabla 4.3.3.2 no se han registrado los desplazamiento máximos, dado que en la arista 3, no colocaron deformímetros en el modelo ensayado.

La configuración desplazada de la figura 4.3.2.1 se obtiene al incrementar las dimensiones de las placas extremas (1 y 9) para lograr resultados más cercanos a los experimentales, sin embargo, se calcularon los desplazamientos de acuerdo a la figura 3.1.1.3 (sin incrementar las dimensiones de las placas extremas) y se obtuvo que el desplazamiento vertical máximo se presenta en la arista 3, es decir en la zona de compresión. Esto es posible si se presentan desplazamientos horizontales, que son proporcionales a los verticales.

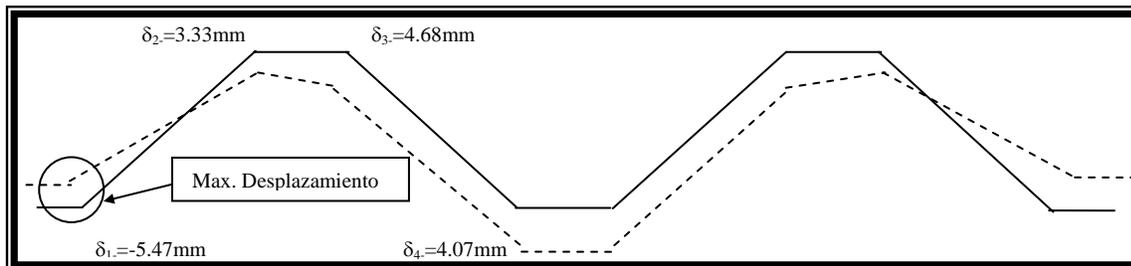


Figura 4.3.3.3. Desplazamientos para el sistema de 9 placas plegadas ensayada en el laboratorio, al aplicar la metodología propuesta por D. Yitzhaki, para la condición de carga de servicio.

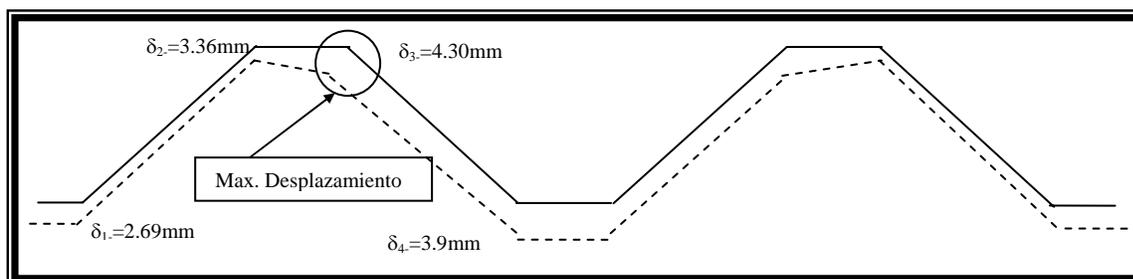


Figura 4.3.3.4. Desplazamientos para el sistema de 9 placas plegadas ensayada en el laboratorio, al aplicar la metodología propuesta por D. Yitzhaki, al aumentar la longitud de las placas 1 y 9 de 3.75cm a 6.0cm, bajo la carga de servicio.

En la figura 4.3.3.3 y 4.3.3.4, se ha dibujado la configuración deformada sin considerar el diagrama de momentos transversales, al tomarse en cuenta se tendría concavidad en la deformada hacia arriba en la zona de momentos positivo y cóncava hacia abajo en zonas de

momento negativo, además que el ángulo entre placas permanece constante durante la rotación. Se han analizado dos casos de configuración deformada donde se puede ver que la sección cuyas deformaciones se asemejan a los resultados del modelo ensayado, corresponde a la figura 4.3.3.4.

En el caso del sistema de 9 y 8 placas plegadas se tiene que los máximos desplazamientos se presentan en la arista 3, mientras que en el sistema de 6 placas plegadas es en donde atraviesa el eje de simetría (arista 3). De lo anterior, para la revisión de los desplazamientos verticales permisibles de acuerdo a la NTC2004, al considerar las rotaciones en el sistema de 8 y 9 placas plegadas, rige el desplazamiento de la arista 3.

Al realizarse una comparativa de los resultados metodológicos con los experimentales y los de un programa de análisis (SAP2000) se tiene lo siguiente, para el caso del sistema de 9 placas plegadas:

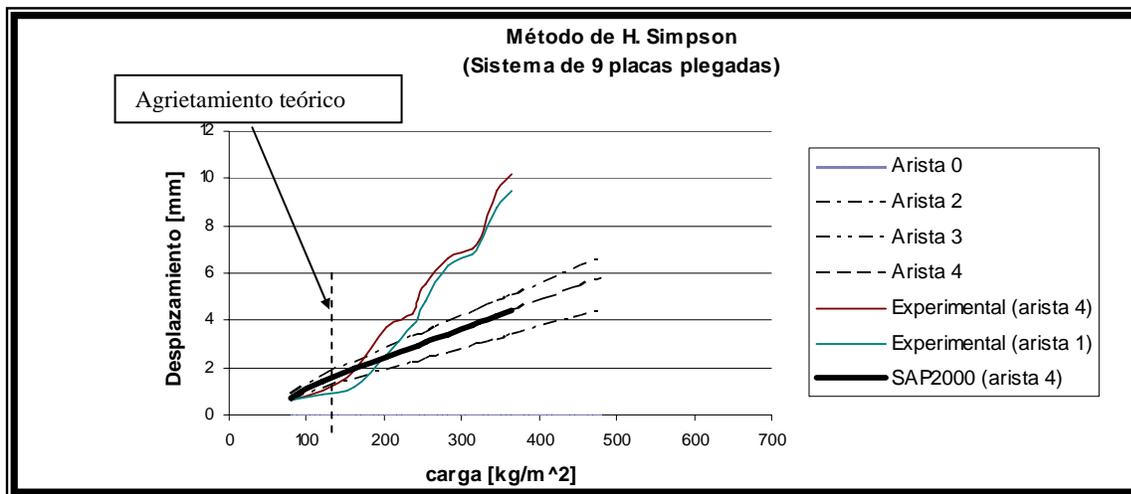


Figura 4.3.2.3. Gráfica de carga-desplazamientos, para el sistema de 9 placas plegadas ensayada en el laboratorio, al aplicar la metodología propuesta por H. Simpson, para las aristas en la sección transversal correspondiente al centro del claro.

En la figura 4.3.2.3 se observa que los resultados experimentales con los teóricos coinciden hasta antes del momento de agrietamiento del sistema.

Se observa que los resultados de desplazamientos del programa, coinciden con los teóricos, más allá del agrietamiento teórico, por lo que al igual que las metodologías no está considerando el agrietamiento de las placas.

5. DISEÑO DE DIAFRAGMA O TIMPANO.

A partir de las fuerzas de placa, se procede a proyectarlas en la dirección horizontal y en la dirección vertical, a lo largo del claro del diafragma.

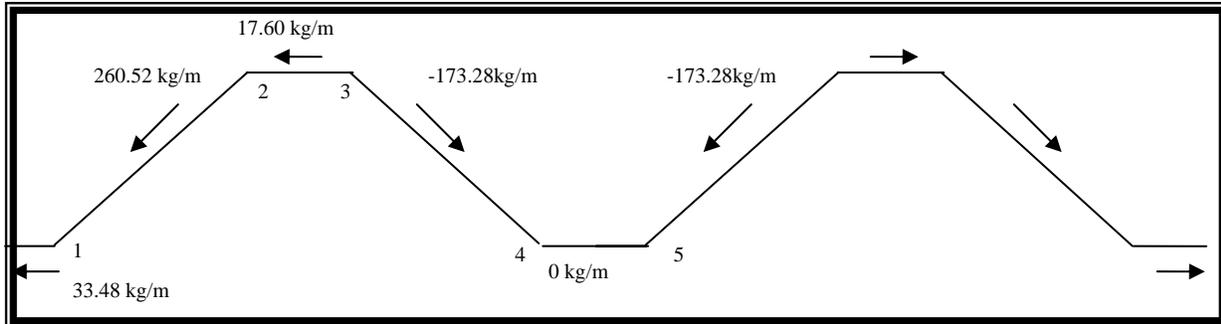


Figura 5.1. Fuerzas en placas para el sistema de 9 placas plegadas.

En la figura 5.1 se trazan las fuerzas de placa en el sistema al centro del claro, que habría que comparar con las fuerzas cortantes en los apoyos (zona de diafragmas) para ver los mayores valores y diseñar el diafragma.

Se considera la fuerza de mayor magnitud al proyectarse sobre la horizontal, en este caso para la carga de servicio es $(2)(260.52)(\cos 41.62) = 389.5 \text{ kg/m}$.

$$389.5 \text{ kg/m en tensión}$$

Para la fuerza vertical se observa que no existen fuerzas de tensión, por lo que sólo se coloca el acero mínimo en esta dirección, resulta que la fuerza de compresión resistente es por lo menos $(260.52) \text{ sen } 42.61 + (173.28) \text{ sen } 42.61 = 294 \text{ kg/m}$.

Para el modelo ensayado en el laboratorio, se propone el armado de la figura 5.2 para el diafragma.

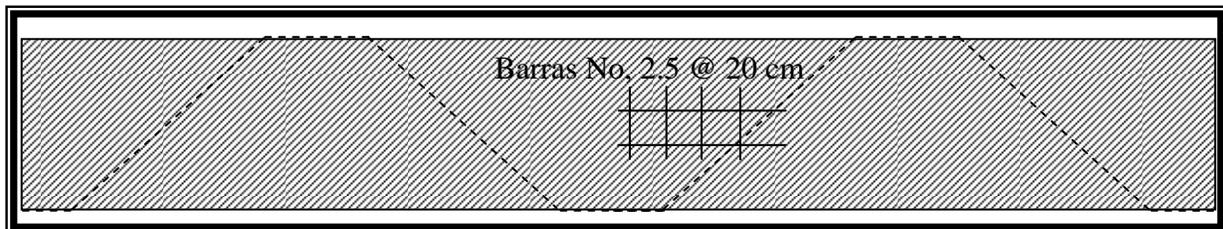


Figura 5.2. Armado propuesto para los diafragmas de extremo.

Al suponer barras del No. 2.5 ($A_s = 0.49 \text{ cm}^2$) a cada 20cm
Acero mínimo

$$\rho_{\min} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_y} \dots (6.1)$$

$$\text{para } f'_c = 383 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 6000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\rho_{\min} = 0.0023$$

$$\rho = \frac{6(0.49)}{(130)(7.5)}$$

$$\rho = 0.003 > 0.0023$$

Los diafragmas de rigidez, a parte de contribuir a mantener la configuración de la sección transversal del sistema de placas plegadas, transiten las fuerzas a las columnas, luego a la cimentación y finalmente el suelo, como se ilustra en el diagrama de cuerpo libre de la figura 5.3 b).

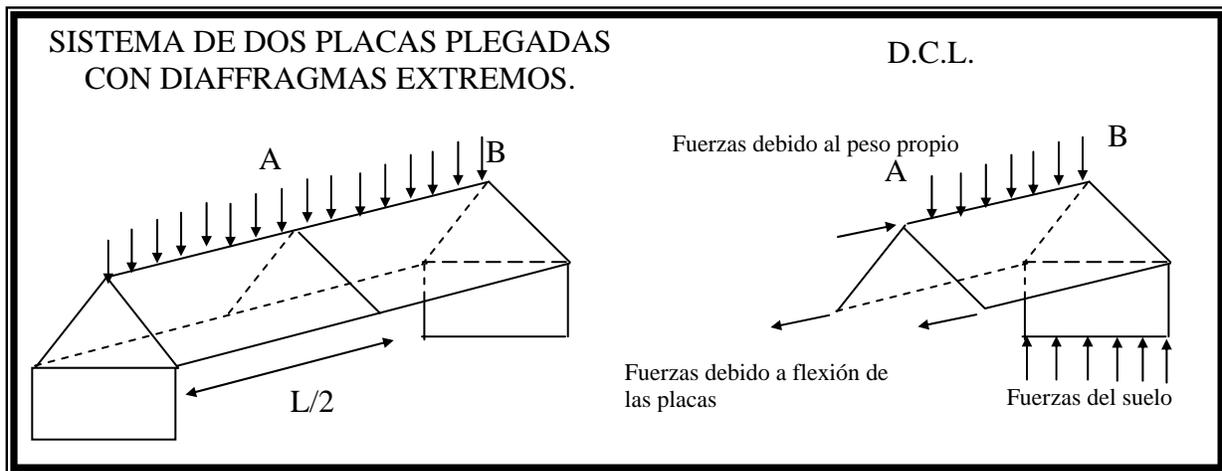
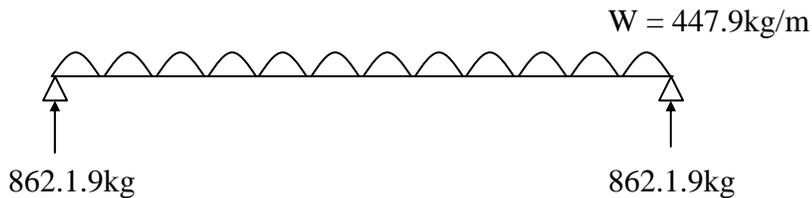


Figura 5.3. Fuerza participantes en el equilibrio del sistema un sistema de placas plegadas.

Para verificar que las fuerzas de compresión, es decir, el peso propio de la estructura más la carga adicional que tiene que resistir el diafragma, se tiene:



$$A_g = 1.3(0.07)$$

$$A_g = 0.091 \text{ m}^2$$

$$f'_c = 383 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_g f'_c = 348530 \text{ kg} > 862.9 \text{ kg ok}$$

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES SOBRE EL DISEÑO Y ANÁLISIS DE PLACAS PLEGADAS.

Por lo antes expuesto, se tiene que los esfuerzos longitudinales al ser comparados con los resultados experimentales, bajo peso propio, son adecuadas las metodologías propuestas en este trabajo ya que para esta condición, los desplazamientos verticales como esfuerzos longitudinales están sobrestimados 14% y 2%, respectivamente, para el sistema de 9 placas plegadas, es decir, por el lado de la seguridad, y para presiones mayores que 188.2 kg/cm^2 , por ejemplo para las condiciones de servicio (344.5 kg/cm^2), para el sistema de 9 placas plegadas, se tienen resultados menores que los experimentales, tanto en los desplazamientos verticales, como en los esfuerzos longitudinales.

Los desplazamientos verticales registrados por los micrómetros difieren 64% para la condición de carga de servicio, respecto a los obtenidos con los métodos propuestos. Sin embargo, se tiene que al comparar los resultados del modelo de elemento finito para el caso de la arista 4 (4.2mm), con los obtenidos con las metodologías (3.9mm), casi son los mismo valores, lo mismo para los esfuerzos en la misma arista (66kg/cm^2) y (56kg/cm^2), sin embargo, para el sistema de 9 placas plegadas de la figura 3.3.2.5, se tienen resultados por el lado de la seguridad hasta el momento de ruptura.

Para la revisión de los desplazamientos verticales permisibles de acuerdo a las metodologías propuestas por Yitzhaki, Billington, E. Traum y H. Simpson para la configuración ensayada, se recomienda revisar la arista 3, ya que los resultados han mostrado que es ahí donde se presentan los valores máximos de desplazamientos verticales al considerar las rotaciones, para el sistema de 9 placas plegadas.

En cuanto a la aplicación de los métodos, el propuesto por Eliahu Traum, se sugiere su uso, para cuando el eje de línea está al centro de una placa (ver figura 3.1.1.2), como sucedió con la aproximación 2 y 3, se complica, por lo que se sugiere analizar con los métodos de Yitzhaki, Billington y/o H. Simpson, en caso contrario.

Dado que sólo los resultados del programa SAP2000, coinciden con los resultados de las metodologías, es recomendable se realicen otros ensayos instrumentando todas las aristas con deformímetros para obtener la configuración deformada del sistema de placas, ya que son diferentes en cada una de ellas, y puede presentarse el máximo en una arista distinta al centro del línea, y así comparar con los resultados al aplicar las metodologías, y revisar los métodos propuestos, y considerar la no linealidad del comportamiento de los materiales a través del tiempo, así como el agrietamiento en el sistema de placas plegadas.

ANEXOS

A. MÉTODO DE LA FÓRMULA DE LOS TRES CORTANTES.

A.1. Condición de carga de servicio.

Planteamiento del problema.

Calcular los esfuerzos para el sistema de 6 placas con el método de los tres cortantes para la condición de carga de servicio.

Planteamiento de solución.

1. Calcular las reacciones en cada arista.

2. Con las reacciones anteriores, se proyectan sobre el eje neutro de cada placa y se suman para obtener las “fuerzas de placa” P.

3. Calcular los momentos de placa $M_{0n} = \frac{P_n L^2}{8}$.

4. Calcular los esfuerzos máximos (al centro del claro) debidos a M_{0n} ,

$$\sigma_{0n} = \frac{M_{0n}}{S_n}.$$

5. Aplicar la ecuación de los 3 cortantes.

$$T_A \left(\frac{1}{A_1} \right) + 2T_B \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) + T_C \left(\frac{1}{A_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{M_{01}}{S_1} + \frac{M_{02}}{S_2} \right) \quad (\text{A.1.1})$$

6. Resolver el sistema a partir de la matriz inversa.

7. Dibujar el esquema de fuerzas

8. Calcular los momentos adicionales que producen dichas fuerzas.

$$M_{Ti} = \frac{\sum T_i}{2} (h) \quad (\text{A.1.2})$$

9. Calcular los esfuerzos adicionales debidos a M_{Tn}

$$\sigma_{Tn} = \frac{M_{Tn}}{S_n} \quad (\text{A.1.3})$$

10. Considerar los esfuerzos de compresión positivos y en tensión negativos, y calcular los esfuerzos al tratar la fuerza cortante en la arista como “normal” o “directa” al obrar sobre las placas.

$$\sigma_{Tn} = \frac{\sum T_n}{A_n} \quad (\text{A.1.4})$$

11. Calcular los esfuerzos finales.

$$\sigma_{1A} = \sigma_{01} + \sigma_{T1} + \sigma_{TT1}$$

(A.1.5)

Desarrollo.

Las propiedades de la sección se muestran en la tabla A.1.1.

Arista	Placa	b [m]	t [m]	A [m ²]	$S = \frac{bt^2}{6}$ [m ³]	θ	sen θ	cos θ	tan θ
0									
	1	0.0375	0.02	7.50E-04	4.69E-06	0	0.000	1.000	0.000
1									
	2	0.340	0.02	6.80E-03	3.85E-04	42.61	0.677	0.736	0.920
2									
	3	0.075	0.02	1.50E-03	1.88E-05	0	0.000	1.000	0.000
3									
	4	0.340	0.02	6.80E-03	3.85E-04	-42.61	-0.677	0.736	-0.920
4									
	5	0.075	0.02	1.50E-03	1.88E-05	0	0.000	1.000	0.000
4'									
	6	0.34	0.02	0.0068	3.85E-04	42.61	0.677	0.736	0.920
3'									
	7	0.075	0.02	0.0015	1.88E-05	0	0.000	1.000	0.000
2'									
	8	0.34	0.02	0.0068	3.85E-04	-42.61	-0.677	0.736	-0.920
1'									
	9	0.0375	0.02	0.0008	4.69E-06	0	0.000	1.000	0.000
0'									

Tabla A.1.1. Propiedades de la sección transversal, para el sistema de 9 placas plegadas.

Al considerar las siguientes cargas:

$$\begin{aligned} W_1 &= 344.5[\text{kg/m}^2] \\ W_2 &= 344.5 \text{ kg/m}^2 \\ W_3 &= 344.5[\text{kg/m}^2] \\ W_4 &= 344.5[\text{kg/m}^2] \\ W_5 &= 344.5[\text{kg/m}^2] \end{aligned}$$

Cálculo de las reacciones en las aristas, al suponer que están articuladas.

$$R_1 = 56.0 \text{ Kg/m}$$

Para este caso en particular, todas las reacciones en las aristas son iguales a R_1

Al proyectar en cada placa estas reacciones, se tiene:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= 51.5 \text{ kg/m} \\
 P_2 &= 165.5 \text{ kg/m} \\
 P_3 &= 0.0 \text{ kg/m} \\
 P_4 &= 165.5 \text{ kg/m} \\
 P_5 &= 0.0 \text{ kg/m} \\
 P_6 &= 165.5 \text{ kg/m} \\
 P_7 &= 0.0 \text{ kg/m} \\
 P_8 &= 165.5 \text{ kg/m} \\
 P_9 &= 51.5 \text{ kg/m}
 \end{aligned}$$

Momento debido a la fuerza de placa.	Esfuerzo kg/m^2 en las aristas debidos a la fuerza de placa.	Arista	Esfuerzo en $[\text{Kg/cm}^2]$
$M_{01} = -95.48 \text{ kg-m}$	$\sigma_{01} = -2.04\text{E}+07$	A	-2.04E+07
		B	2.04E+07
$M_{02} = 306.64 \text{ kg-m}$	$\sigma_{02} = 7.96\text{E}+05$	B	7.96E+05
		C	-795768.964
$M_{03} = 0.00 \text{ kg-m}$	$\sigma_{03} = 0.00\text{E}+00$	C	0.00E+00
		D	0
$M_{04} = -306.64 \text{ kg-m}$	$\sigma_{04} = -7.96\text{E}+05$	D	-7.96E+05
		E	795768.9641
$M_{05} = 0.00 \text{ kg-m}$	$\sigma_{05} = 0.00\text{E}+00$	E	0.00E+00
		F	0
$M_{06} = 306.64 \text{ kg-m}$	$\sigma_{06} = 7.96\text{E}+05$	F	7.96E+05
		G	-795768.964
$M_{07} = 0.00 \text{ kg-m}$	$\sigma_{07} = 0.00\text{E}+00$	G	0.00E+00
		H	0
$M_{08} = -306.64 \text{ kg-m}$	$\sigma_{08} = -7.96\text{E}+05$	H	-7.96E+05
		I	795768.9641
$M_{09} = 95.48 \text{ kg-m}$	$\sigma_{09} = 2.04\text{E}+07$	I	2.04E+07
		J	-20369010.8

Al sustituir:

$$\begin{array}{rclclclcl}
 1333.33 & T_0 & + & 2960.78 & T_1 & + & 147.06 & T_2 & = & -9.79E+06 \\
 147.06 & T_1 & + & 1627.45 & T_2 & + & 666.67 & T_3 & = & 3.98E+05 \\
 666.67 & T_2 & + & 1627.45 & T_3 & + & 147.06 & T_4 & = & -3.98E+05 \\
 147.06 & T_3 & + & 1627.45 & T_4 & + & 666.67 & T_5 & = & -3.98E+05 \\
 666.67 & T_4 & + & 1627.45 & T_5 & + & 147.06 & T_6 & = & 3.98E+05 \\
 147.06 & T_5 & + & 1627.45 & T_6 & + & 666.67 & T_7 & = & 3.98E+05 \\
 666.67 & T_6 & + & 1627.45 & T_7 & + & 147.06 & T_8 & = & -3.98E+05 \\
 147.06 & T_7 & + & 2960.78 & T_8 & + & 1333.33 & T_9 & = & 9.79E+06
 \end{array}$$

Al resolver el sistema para $T_0=T_9=0$ por ser aristas libres.

$$X = \begin{array}{c} -3343 \\ 762 \\ -527 \\ -334 \\ 334 \\ 527 \\ -762 \\ 3343 \end{array} \quad [\text{kg}]$$

Momentos adicionales debido a las T:

$$\begin{array}{l}
 M_{T1} = 62.69 \text{ kg-m} \\
 M_{T2} = 438.76 \text{ kg-m} \\
 M_{T3} = -8.84 \text{ kg-m} \\
 M_{T4} = 146.22 \text{ kg-m} \\
 M_{T5} = 0.00 \text{ kg-m} \\
 M_{T6} = -146.22 \text{ kg-m} \\
 M_{T7} = 8.84 \text{ kg-m} \\
 M_{T8} = -438.76 \text{ kg-m} \\
 M_{T9} = -62.69 \text{ kg-m}
 \end{array}$$

Esfuerzos debidos a M_m :

$$\begin{array}{l}
 \sigma_{T1} = 1.34E+07 \text{ kg/m}^2 \\
 \sigma_{T2} = 1.14E+06 \text{ kg/m}^2 \\
 \sigma_{T3} = 4.71E+05 \text{ kg/m}^2 \\
 \sigma_{T4} = 3.79E+05 \text{ kg/m}^2 \\
 \sigma_{T5} = 0.00E+00 \text{ kg/m}^2 \\
 \sigma_{T6} = 3.79E+05 \text{ kg/m}^2 \\
 \sigma_{T7} = 4.71E+05 \text{ kg/m}^2 \\
 \sigma_{T8} = 1.14E+06 \text{ kg/m}^2 \\
 \sigma_{T9} = 1.34E+07 \text{ kg/m}^2
 \end{array}$$

Al considerar las compresiones positivas y las tensiones negativas, se tienen los siguientes esfuerzos debidos a T "fuerza normal":

$$\begin{aligned}
 \sigma_{TT1} &= 4.46E+06 \text{ kg/m}^2 \\
 \sigma_{TT2} &= -6.04E+05 \text{ kg/m}^2 \\
 \sigma_{TT3} &= 8.59E+05 \text{ kg/m}^2 \\
 \sigma_{TT4} &= -2.84E+04 \text{ kg/m}^2 \\
 \sigma_{TT5} &= -4.45E+05 \text{ kg/m}^2 \\
 \sigma_{TT6} &= -2.84E+04 \text{ kg/m}^2 \\
 \sigma_{TT7} &= 8.59E+05 \text{ kg/m}^2 \\
 \sigma_{TT8} &= -6.04E+05 \text{ kg/m}^2 \\
 \sigma_{TT9} &= 4.46E+06 \text{ kg/m}^2
 \end{aligned}$$

Esfuerzos finales en kg/cm²

$$\begin{aligned}
 \sigma_{1A} &= -1145 \\
 \sigma_{1B} &= 254 \\
 \sigma_{2B} &= 254 \\
 \sigma_{2X} &= -133 \\
 \sigma_{3X} &= -133 \\
 \sigma_{3\Delta} &= -39 \\
 \sigma_{4\Delta} &= -39 \\
 \sigma_{4E} &= 44 \\
 \sigma_{5E} &= 44 \\
 \sigma_{5\Phi} &= 44 \\
 \sigma_{6\Phi} &= 44 \\
 \sigma_{6\Gamma} &= -39 \\
 \sigma_{7E} &= -39 \\
 \sigma_{7H} &= -133 \\
 \sigma_{8H} &= -133 \\
 \sigma_{8I} &= 254 \\
 \sigma_{9I} &= -1145
 \end{aligned}$$

El resumen de esfuerzos en las aristas del sistema se presenta en la tabla A.1.2.

Arista	Esfuerzo [kg/cm ²]
0	-1145
1	254
2	-133
3	-39
4	44

Tabla A.1.2. Esfuerzos en las aristas bajo la condición de carga de servicio al aplicar el método de las tres cortantes al sistema de 6 placas plegadas.

A.2. Condición de peso propio.

Para tener parámetros de comparación, se aplica el método de los tres cortantes al sistema de 9 placas plegadas, con lo que se tienen los esfuerzos sin considerar el giro de las aristas y los resultados para fines de diseño son menos específicos, al dar valores muy conservadores en unas aristas y menores que las obtenidas con las metodologías del capítulo III en otras aristas, como se verá más adelante.

Para el caso de peso propio (48 kg/cm^2 y 65 kg/cm^2), en las placas horizontales e inclinadas respectivamente), el procedimiento es análogo al anterior por lo que sólo se presentan los resultados:

Arista	Esfuerzo [kg/cm^2]
0	-203
1	45(8.46)
2	-24
3	-7
4	8 (10.77)

Tabla .A.2.1. Esfuerzos calculados con el método de los tres cortantes, para la condición de peso propio. El valor entre paréntesis corresponde al experimental.

A.3. Comentarios

Al analizar los datos de las tablas anteriores, el esfuerzo máximo se presenta en la arista 0 (1145 kg/cm^2 en compresión), y disminuyen hacia el centro del claro (44 kg/cm^2 en tensión), bajo estas condiciones, la estructura podría resistir su peso propio con una resistencia a la compresión del concreto mayor que $f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$ (presenta durante el ensaye); sin embargo, al aplicar las metodologías del capítulo 3 se tienen esfuerzos menores en la misma arista 0 (66 kg/cm^2 con el método de Yitzhaki) y mayores en la arista 4 (56 kg/cm^2 con el método de Yitzhaki); además son más parecidos al trabajo de viga, con tensiones en las aristas por debajo del eje neutro (inferiores) y compresiones en las aristas por encima del eje neutro (superiores) (ver capítulo 3).

De lo anterior, los esfuerzos máximos, se presentan en la arista 0, es decir, en las placas con un arista libre y la otra empotrada (placa en cantiliver).

En cuanto al método de los tres esfuerzos, no se desarrolla por generar una matriz que no es cuadrada y cuya solución no puede ser calculada con el método de la matriz inversa, es decir, su solución es más complicada que el procedimiento anterior.

B. DESCRIPCIÓN DEL MODELO ENSAYADO EN EL LABORATORIO DE MATERIALES DE LA UAEM.

El modelo fue realizado en su totalidad por la UAEM, así como la instrumentación y registro de los datos registrados en la tabla C.1.

El modelo consiste de un sistema de 9 placas plegadas de concreto reforzado con acero de alta resistencia, y un concreto $f'c = 383\text{kg/cm}^2$ (de ensayos a compresión del concreto utilizado en el sistema), el espesor de las placas es de 2cm y el ángulo de las placas inclinadas es de 42.61° respecto a la horizontal. El claro libre entre apoyos es de 3.85m. El armado consiste en 4 barras No. 3/16 en el lecho a compresión, y 5 barras No. 5/32, como se indica en la figura B.1.

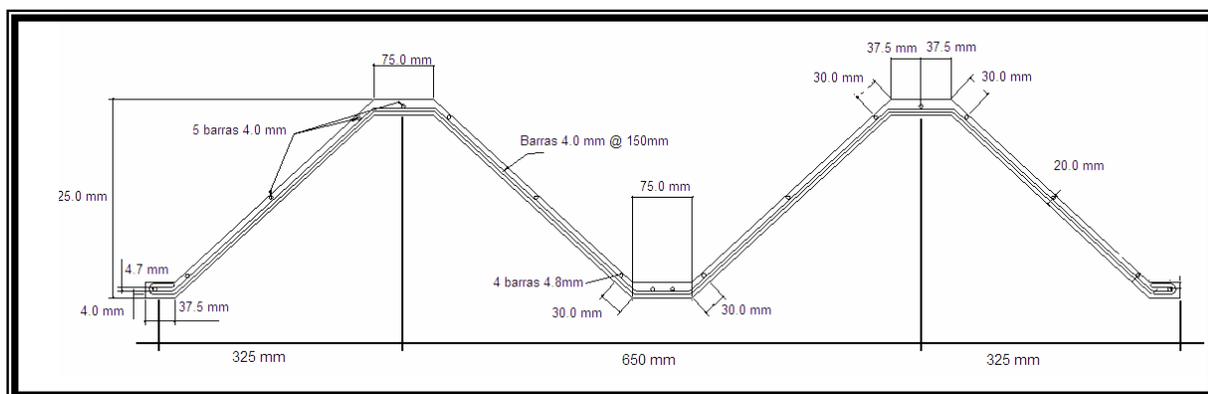


Figura B.1. Sección transversal con el refuerzo propuesto para el sistema de 9 placas plegadas.

El colado del sistema de placas, fue en dos partes, una vez terminada la primera, se colocó un epóxico para adherir el concreto fresco con el terminado, descimbrado a los 5 días después de haberse colocado el concreto en cada una de ellas. Se instrumentó con un sistema de adquisición de datos Vishay - Ellis 20, colocando deformímetros en las barras de refuerzo a tensión, para determinar los esfuerzos en dichas barras al multiplicar por el módulo de elasticidad del acero, y para determinar los esfuerzos en el concreto, (ver la figura 3.3.2.7) se multiplica por el módulo de elasticidad del concreto obtenido de ensayos de laboratorio.

En la figura B.2 se puede ver la mitad del módulo terminado y el armado del módulo en proceso, con la cimbra colocada en los extremos para que el colado de los diafragmas sea monolítico.



Figura B.2. Modelo del sistema de 9 placas plegadas ensayado en la UAEM, con la mitad de la sección terminada. (Dr. Horacio Ramírez de Alba).

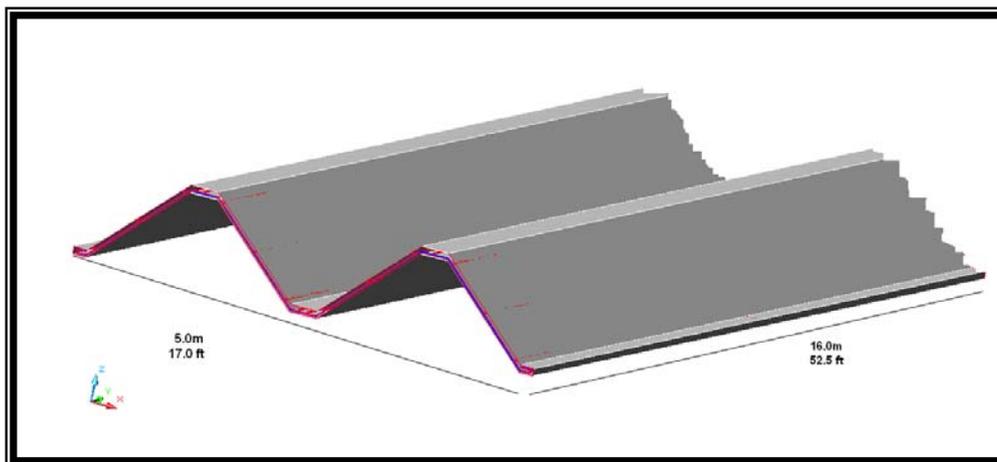


Figura B.3. Prototipo del sistema de 9 placas plegadas de concreto reforzado, con $f'c=383 \text{ kg/cm}^2$ y acero de alta resistencia. (Dr. Horacio Ramírez de Alba).

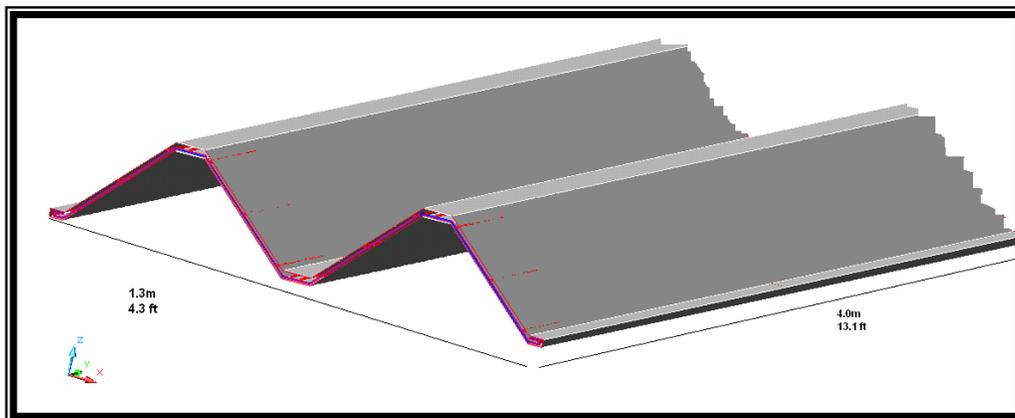


Figura B.4. Modelo del sistema de 9 placas plegadas de concreto reforzado, con $f'c=383 \text{ kg/cm}^2$ y acero de resistencia normal. (Dr. Horacio Ramírez de Alba).

En la figura B.3 y B.4 se pueden ver las dimensiones del prototipo y del modelo, que fue realizado a escala 1:4.

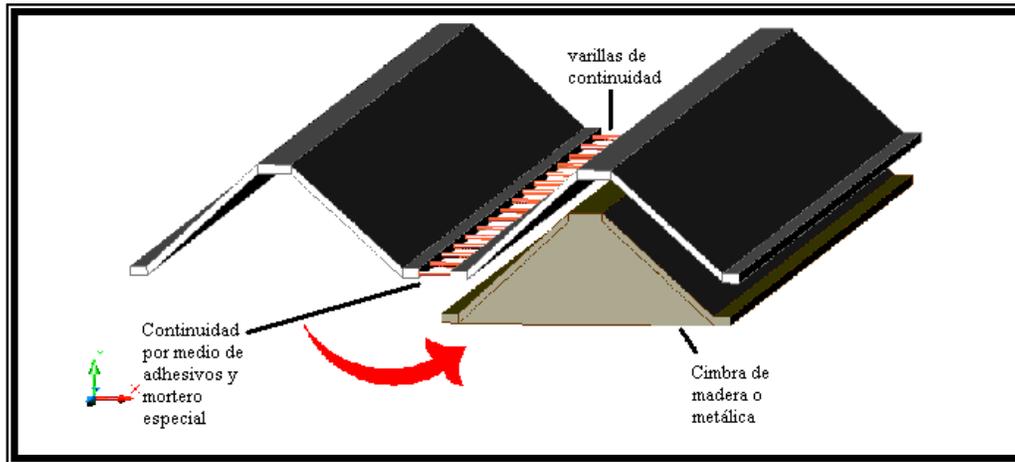


Figura B.5. Detalle de las barras de continuidad entre los dos módulos del sistema de 9 placas plegadas. (Dr. Horacio Ramírez de Alba).

En la figura B.5 se tiene el molde utilizado para el colado de los dos módulos.

Para conocer los desplazamientos verticales, se colocaron deformímetros en la parte inferior del sistema de placas (correspondientes aproximadamente con la arista 1 y 4 de la figura 3.1.1.3, cuyos valores se registran en la tabla B.1.

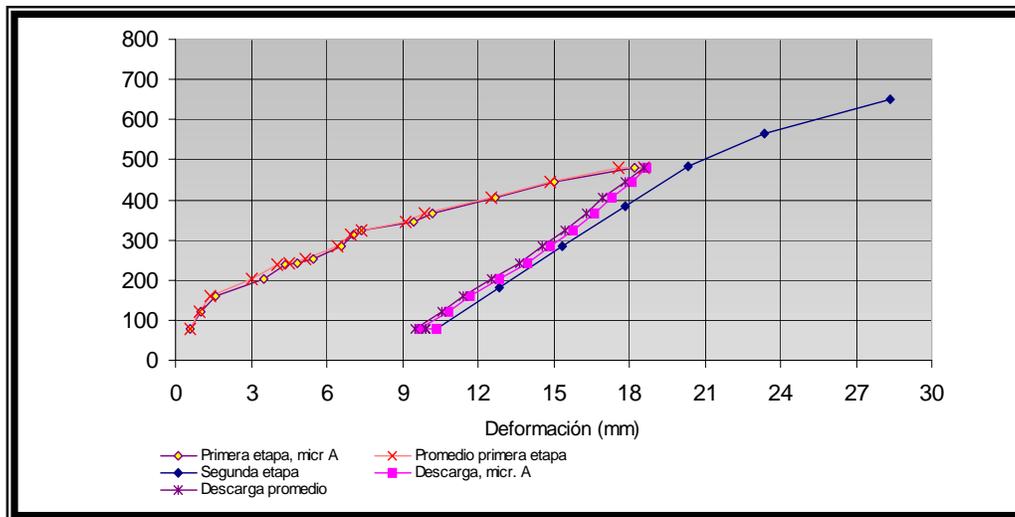


Figura B.6. Curva carga-deformación del sistema de 9 placas plegadas, ensayada en el laboratorio de la UAEM. (Dr. Horacio Ramírez de Alba).

En la figura B.6 se puede ver la curva de histéresis del sistema, donde se aprecia una deformación permanente al descargar, y una degradación en la resistencia, como se ve en el cambio de pendiente para el caso de la segunda etapa.

C. RESULTADOS EXPERIMENTALES, DEL ENSAYE REALIZADO EN LA UAEM.

$$E_C = 192532 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_g = 0.0001951 \text{ m}^4$$

$$I_g = 19510 \text{ cm}^4$$

w [kg/m ²]	DEF [mm]		σ_{\max} por la teoría de vigas en [kg/cm ²]	Deformímetros [$\mu\epsilon$]				Esfuerzos [kg/cm ²] (Mediciones)			
	MIC "A"	MIC "B"		1	2	3	4	1	2	3	4
55	0.6	0.6	8	55	56	213	172	10.59	10.78	41.01	33.12
120.7	1	0.9	19	-97	142	293	262	-18.68	27.34	56.41	50.44
161.4	1.9	1.2	25	-39	80	371	216	-7.51	15.40	71.43	41.59
202.1	3.7	2.5	31	26	288	1180	254	5.01	55.45	227.19	48.90
237.7	4.3(10.4)	3.8	37	317	458	1435	695	61.03	88.18	276.28	133.81
242.8	4.9	4.1	37	334	472	1555	737	64.31	90.88	299.39	141.90
253	5.5	4.8	39	439	485	1553	771	84.52	93.38	299.00	148.44
283.5	6.6	6.3	44	622	537	1658	967	119.75	103.39	319.22	186.18
314	7	6.8	48	872	623	1819	1113	167.89	119.95	350.22	214.29
324.2	7.4	7.3	50	938	643	1890	1190	180.60	123.80	363.89	229.11
344.5	9.5	8.8	53	997	878	2005	1280	191.95	169.04	386.03	246.44
365	10.2	9.5	56	1147	1297	2091	1400	220.83	249.71	402.58	269.54
405.6	12.7	12.4	62	1535	1716	1473	1670	295.54	330.38	283.60	321.53
443	15.1	14.7	68	1804	1724	1836	1912	347.33	331.93	353.49	368.12
480	18.2	16.9	74	1195	1711	1465	1445	230.08	329.42	282.06	278.21
480.4	18.7	18.4	74	1302	1288	1584	1559	250.68	247.98	304.97	300.16
480.4	18.7	18.5	74		1287				247.79		
443	18.1	17.6	68		1282				246.83		
405.6	17.3	16.6	62		1281				246.63		
364.9	16.7	15.9	56		1274				245.29		
324.2	15.8	15.2	50		1275				245.48		
283.5	14.9	14.2	44		1297				249.71		
242.8	13.9	13.3	37		1295				249.33		
202.1	12.8	12.2	31		1310				252.22		
161.4	11.7	11.2	25		1304				251.06		
120.7	10.8	10.4	19		1302				250.68		
80	9.7	9.3	12	472	1298	810	809	90.88	249.91	155.95	155.76
80	10.4	9.5	12	438	279	769	786	84.33	53.72	148.06	151.33
80	10.4	9.5	12	434	258	887	733	83.56	49.67	170.78	141.13

Tabla C.1 Resultados experimentales del sistema de adquisición de datos y micrómetros para el modelo ensayado en el laboratorio consistente en un sistema de 9 placas.

El valor de los esfuerzos calculados en la tabla C.1 se tiene al multiplicar la deformación registrada por el sistema de adquisición de datos por el módulo de elasticidad del material utilizado en el laboratorio.

D. MODELO DE ELEMENTO FINITO PARA EL SISTEMA DE 9 PLACAS PLEGADAS.

D.1. Condición de peso propio.

Al modelar la estructura ensayada en el laboratorio, bajo la condición de peso propio, en el programa SAP2000 con elementos finitos se tiene los resultados de esfuerzos y deformaciones al centro del claro que a continuación se presentan:

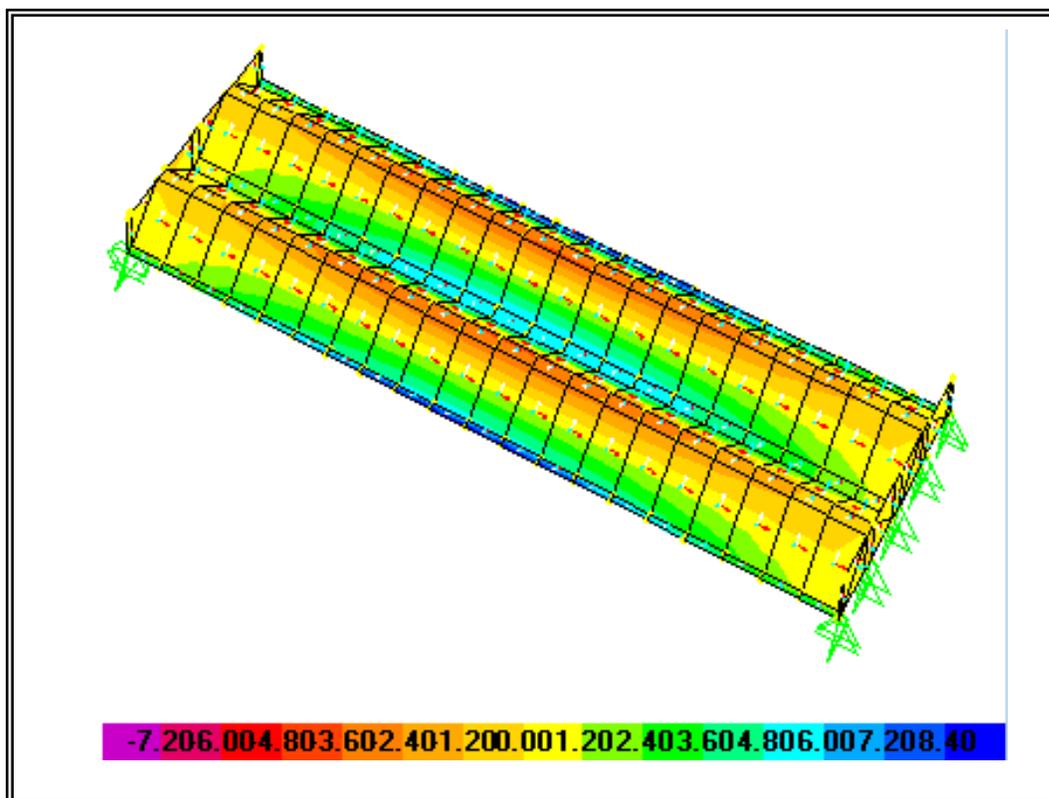


Figura D.1.1. Esfuerzos en $[\text{kg}/\text{cm}^2]$ en el modelo de elemento finito para el sistema de 9 placas plegadas bajo la condición de peso propio.

En la figura D.1.1, se pueden observar las curvas de igual esfuerzo en forma de elipses concéntricas por las placas que están en compresión, con un valor máximo al centro del claro y disminuyendo en la medida en que se está cerca de los diafragmas, además el esfuerzo de compresión es del orden del de tensión.

Arista	Esfuerzo [kg/cm^2]	Desplazamiento vertical [mm]
0	9.3 (18)	0.76
1	9.4 (10) (8.46)	0.73
2	-8.6 (-10)	0.61
3	-8.5 (-11)	0.59
4	9.3 (10) (10.77)	0.59 (0.70)

Tabla D.1.1. Esfuerzos y desplazamiento para el sistema de 9 placas plegadas bajo la condición de peso propio. El primer valor entre paréntesis corresponde al resultado de aplicar la metodología de Yitzhaki y el segundo a los resultados experimentales.

Al analizar la tabla D.1.1, se observa que los esfuerzos en las aristas según el modelo de elemento finito elaborado en el programa SAP2000 son cuando mucho 23% menores que los calculados con el método de Yitzhaki (por el lado de la seguridad), acentuándose esta diferencia en la arista 0.

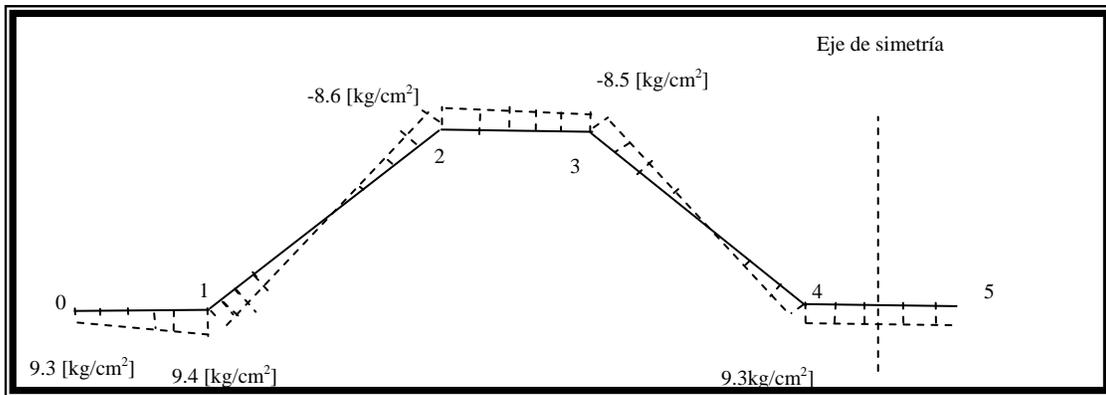


Figura D.1.2. Esfuerzos en $[\text{kg}/\text{cm}^2]$ en el modelo de elemento finito para el sistema de 9 placas plegadas bajo la condición de peso propio.

En la figura D.1.2 se observa que en la placa 3 no es constante en esfuerzo, siendo mayor en la arista 2. Al comparar con los teóricos, se tiene lo contrario, que los esfuerzos aumentan en forma lineal de la arista 2 a la arista 3.

D.2. Condición de servicio.

Al colocar al modelo de elemento finito una carga distribuida de 344.5 kg/cm^2 correspondiente a la carga de servicio se obtuvieron los siguientes resultados:

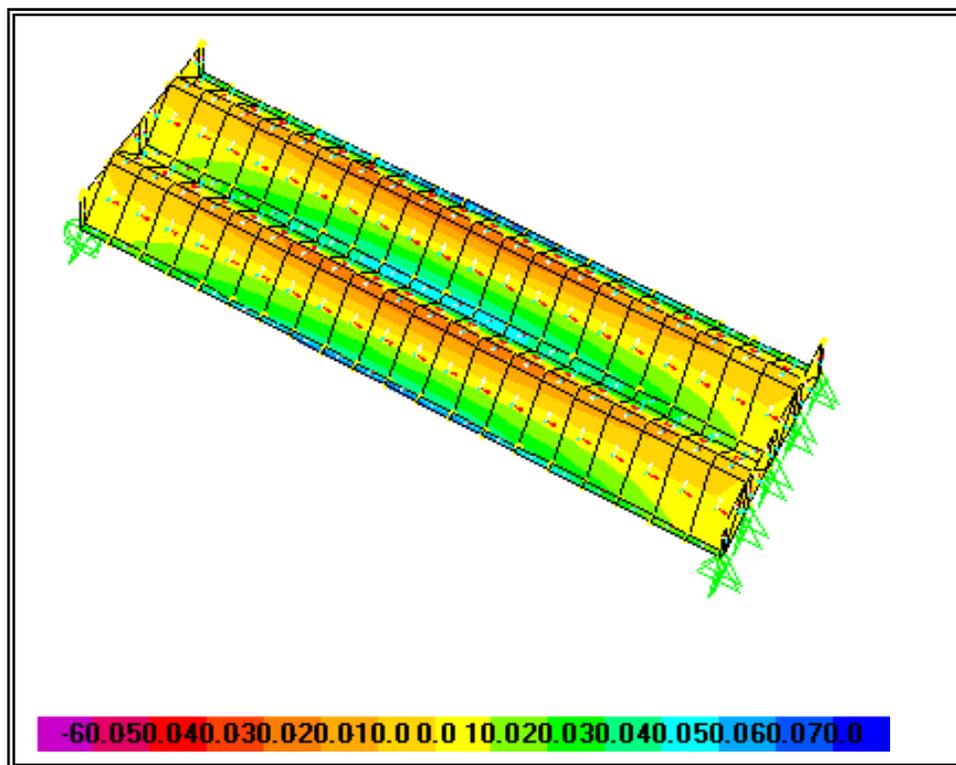


Figura D.2.1. Esfuerzos en $[\text{kg/cm}^2]$ en el modelo de elemento finito para el sistema de 9 placas plegadas bajo la condición de carga de servicio.

En la figura D.2.1 se puede ver que como en caso de la condición de peso propio, los esfuerzos son mayores al centro del claro, sobre todo en la placa 3 para el caso de compresión y en la placa 1 y 9 en tensión, y también disminuyen al acercarse a los diafragmas extremos. Es importante mencionar que las curvas elípticas que describen la trayectoria de igual esfuerzo, están en cada uno de los módulos, esto es, se interrumpen al cambiar la concavidad del sistema de placas.

Arista	Esfuerzo $[\text{kg/cm}^2]$	Desplazamiento vertical $[\text{mm}]$
0	65.7 (66)	5.4
1	67.2 (58)	5.2
2	-61.6 (-59)	4.3
3	-61.2 (-63)	4.2
4	66.0 (56)	4.2 (3.9)

Tabla D.2.2. Esfuerzos y desplazamientos para el sistema de 9 placas plegadas bajo la condición de carga de servicio. El número entre paréntesis corresponde al resultado de aplicar la metodología de Yitzhaki.

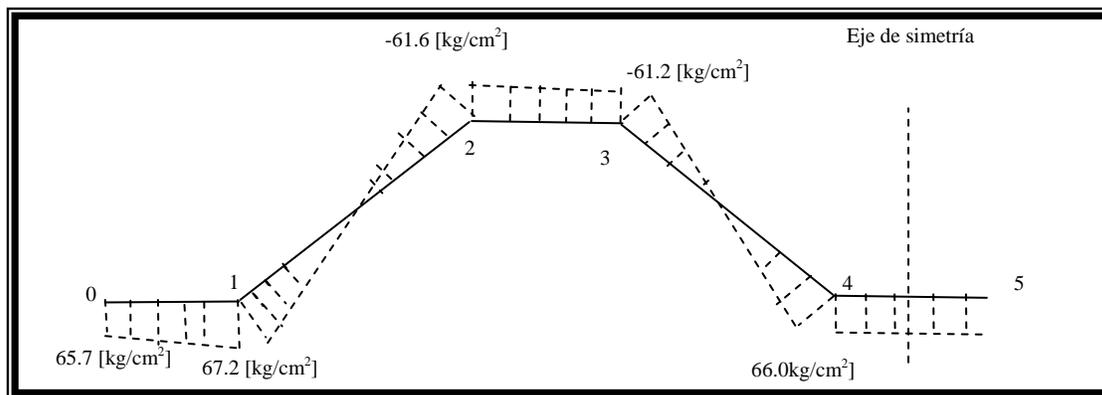


Figura D.2.2. Diagrama de esfuerzos longitudinales al centro del claro para el sistema de 9 placas plegadas con diafragmas extremos y claro de 3.85m.

En la figura D.2.2 se observa que en la placa 3 no es constante en esfuerzo, siendo mayor en la arista 2. Al comparar con los teóricos, se tiene que los esfuerzos aumentan de la arista 2 a la arista 3.

Al aplicar la carga de servicio, se tiene, que los esfuerzos longitudinales son menores en los resultados obtenidos al aplicar el método de Yitzhaki (15% respecto al experimental).

En cuanto a los desplazamientos calculados con el programa SAP, se observa que son 7% menores respecto al calculado con el método de Yitzhaki.

El máximo valor del desplazamiento se presenta en la arista 0, y de acuerdo a los métodos empleados, se presenta en la arista 3, es decir, que la configuración desplazada no es la misma, ya que al dirigirse de la arista 4 a la arista 0, los desplazamientos verticales aumentan en el modelo de elemento finito; lo contrario ocurre en los resultados del ensaye, donde el desplazamiento en la arista 0 es menor al desplazamiento en la arista 1.

Cabe aclarar que los desplazamientos calculados con las metodologías son de corta duración y los registrados por los deformímetros son desplazamientos debidos a deformaciones instantáneas en algunas datos, mientras que en otros son de corta duración, debido a que se registraron en tiempos diferentes a la aplicación de la presión distribuida sobre la superficie del sistema de placa ensayado en el laboratorio.

Por lo anterior, para la condición de peso propio, deben ser instantáneas durante el ensaye y de corta duración para los cuatro métodos, que es prácticamente lo mismo.

Se puede observar que son mayores las deformaciones en el sistema de placas plegadas respecto a los resultados experimentales, por lo que el tiempo juega un papel importante en el resultado de los desplazamientos. Sería necesario tomar considerar el tiempo para el cálculo de estos desplazamientos, ya que el comportamiento del concreto no es elástico lineal, es decir, su modulo de elasticidad se modifica a través del tiempo.

REFERENCIAS

- [1] Traum, E., "The design of folded plates", ACI Journal, Proceedings V., 1959, pp. 2229-2238.
- [2] Yitzhaki, D., and Reiss, M., "Analysis of Folded Plates", Proceedings, ASCE, V. 88, ST5, Oct. 1962, pp. 107-142.
- [3] A. A. Brielmaier "Prismatic Folded Plates", Journal of the American Concrete Institute, March, 1962, Title No. 59-11, Pags. 407-427.
- [4] Eliahu Traum, "The Design of Folded Plates", Journal of the Structural Division, Octubre, 1959, Pag. 2229.
- [5] Howard Simpson, "The Design of Folded Plates", Journal of the Structural Division October, 1958, Pag. 2229.
- [6] David Yitzhaki and Max Reiss, "Analysis of Folded Plates", Journal of the Structural Division, October 1962, Pag. 3303.
- [7] Tesis de Licenciatura "Placas plegadas para la construcción de laboratorios en escuela secundaria", Gil Grayeb Alfonso, 1965, Facultad de ingeniería UNAM.
- [8] Horacio Ramírez de Alba/Elizabeth Camacho Zepeda/Elizabeth A. Valdez Medina, "Estudio experimental sobre un procedimiento para construir placas plegadas con concreto reforzado", Universidad Autónoma del Estado de México, 2006.
- [9] "Hanging Roofs"
Edited by N. Esquillan y Saillard. París, 1963, North-Holland Publishing Company-
Amsterdam
- [10] Apuntes de la materia de Mecánica Estructural Avanzada, impartida por el Ing. Neftalí Rodríguez Cuevas, en el semestre 2008-I, en el Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.
- [11] "Theory of plates and shells", Timoshenko, S., editorial McGraw-Hill, 1a. edición, Nueva York, 194, 492 páginas.
- [12] "Hipped - Plates Structures, Their theory and Analysis." Joachim Born, Crosby Lockwood and Son LTD, 250 páginas, London 1962.
- [13] Egor, E. Popov, "Introducción a la mecánica de sólidos", editorial LIMUSA, 1990, Pág. 452-454.
- [14] Traum, E., "Prismatic folded Plates. A simplified Procedure of Analysis", ACI Journal, Proceedings V., 1965, pp. 1286-1302.

[15] Yitzhaki, D., and Reiss, M., “Analysis of Folded Plates”, Proceedings, ASCE, V. 88, ST5, Oct. 1962, pp. 107-142.

[16] Edwin H. Gaylor Jr., Charles N. Gaylor, “Structural Engineering Handbook”, 3A edición, 1990.

[17] Billington, D. P. “Thin shell concrete structures”, McGraw-Hill, New York, segunda edición, 1982.

[18] Yitzhaki, David, “The design of prismatic and cylindrical shell roofs”, Haifascience Publishers, Haifa, 1958.

[19] Félix Candela (1970) Faber, Colin 1970. “Las estructuras de Félix Candela”, Compañía editorial continental, México, España, Argentina, Chile (Candela, Sheel Builder).

<http://html.rincondelvago.com/felix-candela.html>

[20] Rafael García García (1996)

<http://www.aq.upm.es/Departamentos/Composicion/webcompo/webcnotas/Cambridge%202006.pdf>

[21] Ketchum, Milo (1990). Memoirs 4. Folded Plates, www.ketchum.org/shellpix.html.

[22] Caspers, SW. 1960. “Het Service-Laboratorium van het Verenigd Plastic-Verkoopkantoor N.V. te Zeist”, Cement, n.14, pp. 17-9.