UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Algunas caracterizaciones de espacios de Banach que contienen a ℓ^1

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMÁTICO

P R E S E N T A

PAVEL RAMOS MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS
DRA. CARMEN MARTÍNEZ ADAME ISAIS

MÉXICO, D.F. 2009

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno Ramos Martínez Pavel 58 43 35 46 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 301067827
2. Datos del tutor Dra. Carmen Martínez Adame Isais
3. Datos del sinodal 1 M. en C. Angel Manuel Carrillo Hoyo
4. Datos del sinodal 2 Dr. Francisco Marcos López García
5. Datos del sinodal 3 Dr. Hugo Arizmendi Peimbert
6. Datos del sinodal 4 Dra. Magalí Louise Marie Folch Gabayet
7. Datos del trabajo escrito Algunas Caracterizaciones de espacios de Banach que contienen a ℓ^1 157 p 2009

Agradecimientos y dedicatorias.

A mis padres Hortensia y Raúl les doy las gracias por haberme dado todo su apoyo durante la realización de este trabajo.

A si mismo agradezco a mi asesora Carmen y a mis sinodales Angel, Marcos, Hugo y Magalí, el tiempo que dedicaron a escuchar y resolver mis dudas sobre los temas tratados en esta tesis.

Finalmente, este trabajo esta dedicado a mis padres, a mis hermanas Sarahi e Itzel y a mamá Ene, que día con día me dan todo su apoyo, compresión y cariño. También dedico este trabajo a todos mis famliares y amigos que siempre me brindan su ayuda sin esperar nada a cambio.

Índice general

Introducción

Los espacios c_0 y ℓ^1 son de gran importancia en las cuestiones relativas a bases en espacios de Banach y a la teoría de espacios isomorfos. En esta tesis nos concentraremos en el espacio ℓ^1 y en un tema muy particular relacionado con éste, a saber, cuando es que un espacio de Banach arbitrario contiene un subespacio isomorfo a él.

Este problema ha sido central en el desarrollo de la teoría de espacios de Banach. Relacionado con él, un problema que permaneció abierto durante mucho tiempo fue el siguiente: ¿Todo espacio de Banach de dimensión infinita tiene un subespacio isomorfo a c_0 o ℓ^p para algún $1 \leq p < \infty$? Este problema data desde la publicación en 1932 del libro [3] de Banach.

Ahora bien, Banach probó en 1932 que si un espacio dual X^* es separable, el espacio X lo es también, y es un resultado conocido que la implicación contraria no es válida en general pues existen espacios separables con dual no separable. El ejemplo clásico de esto es ℓ^1.

Por otro lado, en 1950 R. C. James probó en [15] que X^* no es separable si X contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1. Es posible que Banach haya vislumbrado ya este resultado pues en 1923, también en [3] plantea el siguiente problema: Dado un espacio de Banach separable tal que su dual no es separable, ¿existe en X una sucesión acotada de elementos que no contenga ninguna subsucesión débilmente de Cauchy? Este problema puede ser reenunciado de la siguiente manera: ¿Un espacio separable de Banach contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1 si y sólo si su dual es no separable? Para poder expresar en estos términos al problema de Banach es necesario contar con el Teorema de Rosenthal, cuya demostración es el objetivo central de la sección 2 del capítulo 3.

Este problema fue resuelto de manera negativa por James en 1974 en [16] quien presentó un contraejemplo. Sin embargo, en 1950 James mismo había demostrado que si el espacio de Banach tenía una base incodicional entonces el problema tenía una respuesta positiva: Un espacio de Banach con base incodicional no contiene copias de ℓ^1 o c_0 si y sólo si es reflexivo.

Finalmente en 1974 Tsirelson contestó de manera negativa el problema original al construir un espacio de Banach reflexivo con base incodicional que no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0 o ℓ^p para $1 \leq p < \infty$. En la sección 1 del capítulo 3 presentamos brevemente este resultado, y en vista de este hecho nos preguntamos cuándo es que un espacio de Banach contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1. Esta es la pregunta central de esta tesis y nuestro objetivo es proporcionar algunas posibles respuestas como lo son el teorema de Rosenthal y el teorema de Haydon, cuyas demostraciones constituyen el objetivo fundamental del capítulo 3 y de este trabajo.

Se ha tratado que la tesis sea lo más autocontenida posible y con este fin se organiza de la siguiente manera: En el capítulo 1 presentamos los conceptos y resultados fundamentales para el resto del trabajo como lo son, la definición de espacio de Banach, subespacio, espacios cociente, y transformaciones lineales entre estos, además de algunos de los teoremas más importantes relativos a espacios de Banach como lo son el de Hahn-Banach, del acotamiento uniforme, de la grafica cerrada y el de Eberlein-Smulian, además introducimos los conceptos de topologías débiles y débiles*. La última sección del capítulo 1 está dedicada a estudiar los conceptos de convexidad, punto extremo y los teoremas de Krein-Milman y Bishop-Phelps, los cuales son necesarios para entender el teorema de Haydon.

El capitúlo 2 está dedicado al concepto de bases de Schauder para espacios de Banach y a los distintos tipos de éstas. El capítulo 3 es la parte culminante de la tesis, como ya habiamos mencionado en él tratamos de manera detallada los articulos [24] y [14] de Rosenthal y Haydon respectivamente, finalmente en la ultima sección del capitulo 3 incluimos una lista actualizada de las diferentes caracterizaciones que se pueden dar de espacios de Banach para que estos contengan subespacios isomorfos a ℓ^1.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos las definiciones elementales que servirán como base para este texto. Empezamos con la definición de espacio de Banach, objeto fundamental en el Análisis.

1.1. Espacios de Banach.

Definición 1.1.1. *Un espacio de Banach es un espacio normado* $(X, \| \|)$ *completo con respecto a la distancia inducida por la norma* $\| \|$.

En esta tesis sólo consideraremos espacios de Banach sobre $\mathbb{R}$, al menos que se indique lo contrario en algun resultado.

EJEMPLOS:

Todos los siguientes espacios vectoriales son de Banach.

1. $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 1$ con norma

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

2. El espacio $C[a, b]$ con la norma dada de la siguiente manera

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|,$$

para $f \in C[a, b]$ es un espacio normado.

3. El espacio $B[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es acotada}\}$ con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|,$$

para $f \in B[a,b]$.

4. ℓ^p, para $1 \leq p < \infty$ con norma

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid^p)^{1/p},$$

para $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^p$.

5. De igual forma ℓ^∞ con la norma

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|,$$

para $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$.

6. c_0 con norma

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|,$$

para $(x_n)_{n=1}^\infty \in c_0$.

7. $c_{00} = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in c_0 \mid x_n = 0 \text{ para casi todo } n \in \mathbb{N}\}$ con norma

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|,$$

para $(x_n)_{n=1}^\infty \in c_{00}$.

8. Sea $([a,b], \mathbb{B}_{[a,b]}, \lambda)$ un espacio de medida donde λ es la medida de Lebesgue. Si f y g son dos funciones Lebesgue medibles definimos la relación $\backsim$ como $f \backsim g$ si y sólo si $f = g$ casi donde quiera (a.e.). Denotando por convención a la clase de f por $\overline{f} := f$. Obtenemos así el espacio vectorial

$$L^p = \left\{ \overline{f} = f \mid \int_a^b |f|^p < \infty \right\},$$

es un espacio de Banach con norma

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p},$$

para $f \in L^p$.

Sin embargo, es importante notar que no todo espacio normado es de Banach, un ejemplo es $C[a,b]$ con una norma distinta a la definida anteriormente, a saber si $f \in C[a,b]$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt.$$

1.2. Subespacios y bases de Hamel.

Dado $(X, \| \|)$ un espacio normado decimos que Y es un *subespacio normado* o simplemente *subespacio* de X si Y es un subespacio vectorial de X con norma la restricción de la función $\| \|$ a Y. Si X es de Banach esto no implica necesariamente que cualquier subespacio normado Y sea de Banach, un ejemplo se obtiene al tomar $X = B[a,b]$ con la norma $\| \|_1$ y como subespacio $Y = C[a,b]$.

La siguiente proposición, aunque enunciada en un caso más general, nos dice cuando los subespacios de un espacio de Banach son de Banach.

Proposición 1.2.1. *Sea (X,d) un espacio métrico completo y Y un subespacio de X. Y es completo con respecto a la distancia restringida a Y si y sólo si Y es cerrado en X.*

Corolario 1.2.2. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach y Y un subespacio de X. Y es de Banach si y sólo si Y es cerrado en X.*

Definición 1.2.3. *Sea A un subconjunto de un espacio vectorial X sobre $\mathbb{R}$, decimos que A es linealmente independiente si $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A$ es linealmente independiente para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$$

entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Definición 1.2.4. *Sean X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $A \subseteq X$. Si $A \neq \emptyset$ definimos el subespacio generado por A como*

$$s(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \ x_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

si $A = \emptyset$ definimos $s(A) = \{0\}$.

Definición 1.2.5. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un subconjunto B de X es una base de Hamel si B es linealmente independiente y $s(B) = X$*

Teorema 1.2.6. *Todo espacio vectorial tiene una base de Hamel.*

Omitimos la demostración del teorema anterior pero notamos que si X es un espacio vectorial y B_1, B_2 son dos bases distintas para X se tiene que $\mathrm{card}(B_1) = \mathrm{card}(B_2)$, de aqui que se pueda definir la *dimensión* para X como $\dim X = \mathrm{card}(B)$ donde B es cualquier base de X.

Definición 1.2.7. *Sea X un espacio vectorial. X es dimensión finita si existe una base B de X finita. En caso contrario se dirá que X es dimensión infinita.*

Las siguientes definiciones son importantes pues a través de ellas podemos obtener una clasificación de los espacios vectoriales.

Definición 1.2.8. *Sean X y Y espacios vectoriales. Una transformación lineal entre X y Y es una función $T : X \to Y$ tal que*

1. $T(x + y) = T(x) + T(y)$
2. $T(\lambda x) = \lambda T(x)$

para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definición 1.2.9. *Sean X y Y espacios vectoriales. X es isomorfo a Y si existe $T : X \to Y$ transformación lineal y biyectiva*

Una aplicación inmediata del Teorema 1.2.6 nos dice que X es de dimensión infinita si y sólo si X contiene un subconjunto linealmente independiente infinito, con esto en mente presentamos los ejemplos siguientes de espacios normados de dimensón infinita. Notamos que ℓ^p con $1 \leq p < \infty$, ℓ^∞, c_0 y c_{00} son todos espacios de Banach de dimension infinita pues $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$, donde e_i es la sucesión tal que la entrada i-ésima es uno y todas las demas son cero, es un subconjunto linealmente independiente infinito de cada uno de ellos.

Veremos que todo espacio normado de dimensión finita es de Banach, pero antes demostremos las siguientes proposiciones.

Proposición 1.2.10. *Si X es un espacio vectorial de dimensión finita entonces en X siempre se puede definir una norma.*

Demostración. Sea $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ una base para X. La función $\| \, \|_1 : X \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$\|x\|_1 = |a_1| + \ldots + |a_n|$$

para $x \in X$ y $x = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ es una norma para X. $\square$

Proposición 1.2.11. *Sea* $(X, \| \, \|)$ *un espacio normado de dimensión* n. *Entonces* X *es isomorfo a* $\mathbb{R}^n$ *y existen* $m, M > 0$ *tales que*

$$m\|x\|_1 \leq \|Tx\| \leq M\|x\|_1,$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

Corolario 1.2.12. *Sean* X, Y *espacios vectoriales de dimensión finita.* X *es isomorfo a* Y *si y sólo si* $\dim X = \dim Y$.

Teorema 1.2.13. *Sea* X *un espacio normado de dimensión finita* p. *Entonces* X *es de Banach.*

Demostración. Sea $A = \{x_1, \ldots, x_p\}$ una base para X, consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^p \to X$ dada por

$$T(a_1, \ldots, a_p) = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i,$$

para toda $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$.

Ahora como

$$\begin{aligned} \|T(a_1, \ldots, a_p)\| &= \|a_1x_1 + \ldots + a_px_p\| \leq |a_1|\|x_1\| + \ldots + |a_p|\|x_p\| \\ &\leq (|a_1| + \ldots + |a_p|)(\max_{1\leq i\leq p} \|x_i\|) = \|(a_1, \ldots, a_p)\|_1 M \end{aligned} \tag{1.1}$$

deducimos que T es continua.

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X, como T es biyectiva para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in \mathbb{R}^p$ tal que $T(y_n) = x_n$, luego entonces

$$m\|y_n - y_m\|_1 \leq \|T(y_n - y_m)\| = \|Ty_n - Ty_m\| = \|x_n - x_m\|$$

lo que implica que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^p$ y como este es completo existe $y_0 \in \mathbb{R}^p$ tal que $y_n \to y_0$ si $n \to \infty$.

Sea $T(y_0) = x_0$, T es continua por lo tanto $T(y_n) \to T(y_0)$ es decir $x_n \to x_0$ ademas $x_0 \in X$ y así X es completo. $\square$

Corolario 1.2.14. *Sea* $(X, \| \, \|)$ *un espacio normado, si* Y *es un subespacio de* X *de dimensión finita entonces* Y *es cerrado.*

Proposición 1.2.15. *Si* Y *es un subespacio abierto de un espacio normado* $(X, \| \, \|)$ *entonces* $Y = X$.

Demostración. Como $Y \subseteq X$ basta probar que $X \subseteq Y$, sea $x \in X$ si $x = 0$ trivialmente $x \in Y$ pues Y es un subespacio.

Si $x \neq 0$, como $0 \in Y$ y este es abierto existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(0) \subseteq Y$ así tenemos que $\frac{\epsilon x}{2\|x\|} \in B_\epsilon(0)$.

Si $\lambda = \frac{2\|x\|}{\epsilon}$ entonces $x = \frac{\lambda \epsilon x}{2\|x\|} \in Y$ pues Y es un subespacio. □

Sabemos que en un espacio normado de dimensión finita la bola unitaria siempre es compacta puesto que en este caso todo compacto es cerrado y acotado lo cual no es cierto si el espacio no es dimensión finita. El Lema de Riesz que se enunciará enseguida nos ayudará a probar que en ningún espacio normado de dimensión infinita la bola unitaria es compacta.

Lema 1.2.16 (Riesz)**.** *Sean $(X, \| \|)$ un espacio normado y $Y \subsetneq X$ un subespacio cerrado. Para toda $0 < \Theta < 1$ existe $x_1 \in X$ tal que $d(x_1, Y) \geq \Theta$ y $\|x_1\| = 1$.*

Demostración. Como $Y \subsetneq X$ existe $x_0 \in X \setminus Y$. Dado que Y es cerrado

$$d(x_0, Y) > 0.$$

También sabemos que $d = d(x_0, Y) = \inf_{y \in Y}\{\|x_0 - y\|\}$. Sea $0 < \Theta < 1$, entonces $d < \frac{d}{\Theta}$ y por la propiedad del ínfimo existe $y_0 \in Y$ tal que

$$d < \|y_0 - x_0\| \leq \frac{d}{\Theta}.$$

Sea $x_1 = \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}$ claramente $\|x_1\| = 1$, además si $y \in Y$ entonces

$$\|x_1 - y\| = \| - y + \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}\| = \frac{\|(-y\|y_0 - x_0\| + y_0) - x_0\|}{\|y_0 - x_0\|} \geq \frac{d(x_0, Y)}{\|y_0 - x_0\|} \geq \Theta.$$

□

Ahora es fácil demostrar la siguiente proposición.

Proposición 1.2.17. *Si $(X, \| \|)$ es un espacio normado de dimensión infinita entonces $E = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ no es compacto.*

Demostración. Supongamos que E es compacto y sea $\{B_{\frac{1}{2}}(x) \mid x \in E\}$ una cubierta de abiertos para E. Entonces existe una subcubierta finita que cubre a E, es decir existen $x_1, \ldots, x_n \in E$ tal que

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{1}{2}}(x_i). \tag{1.2}$$

Sea $Y = s(x_1, \ldots, x_n)$ como $\dim Y \leq n$ entonces Y es cerrado y como X es de dimensión infinita $Y \subsetneq X$ y por el Lema de Riesz existe $z \in X$ tal que $\|z\| = 1$ y $d(z, Y) \geq \frac{1}{2}$ pero esto implica que para toda $i = 1, \ldots, n$

$$\|z - x_i\| \geq \frac{1}{2},$$

lo cual es una contradicción a la relación (1.2) pues $z \in E$, por lo tanto E no es compacto. □

1.3. Espacios Cociente.

Definición 1.3.1. *Sea Y un subespacio de un espacio vectorial X, dada $x \in X$ definimos la clase de x como el conjunto*

$$\overline{x} = x + Y = \{x + y \mid y \in Y\}.$$

Proposición 1.3.2. *El conjunto $X/Y = \{\overline{x} \mid x \in X\}$ es un espacio vectorial, con las operaciones de suma y multiplicación por escalar dadas por*

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}$$

$$\lambda\overline{x} = \overline{\lambda x}$$

para toda $\overline{x}, \overline{y} \in X/Y$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. A X/Y lo llamaremos el cociente de X módulo el subespacio Y.

Demostración. Inmediata a partir de las definiciones. □

Definición 1.3.3. *Sea Y un subespacio de un espacio vectorial X, definimos la codimensión de Y en X como $\operatorname{codim}_X Y = \dim(X/Y)$.*

Definición 1.3.4. *Sean X un espacio vectorial y $\rho : X \to \mathbb{R}^+$ una función. Se dice que ρ es una seminorma si se satisfacen las siguientes tres propiedades:*

1. $\rho(0) = 0$
2. $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$
3. $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposición 1.3.5. *Sea Y un subespacio de un espacio vectorial normado $(X, \| \|)$, la función $\| \|_Y : X/Y \to \mathbb{R}^+$ dada por*

$$\|\overline{x}\|_Y = inf\{\|z\| \mid z \in \overline{x}\}$$

para toda $\overline{x} \in X/Y$, es una seminorma.

Si Y en la proposición anterior no es cerrado entonces $\| \|_Y$ puede no ser una norma como lo muestra el siguiente ejemplo. Sea $X = (C[a,b], \| \|_\infty)$ y $Y = P[a,b] = \{a_n x^n + \ldots + a_0 \mid \forall i, a_i \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$ el subespacio de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Por el Teorema de Stone-Weierstrass sabemos que $\overline{P[a,b]} = C[a,b]$, así que $P[a,b]$ no es cerrado.

Ahora tomemos el espacio cociente X/Y, al considerar la función $\| \|_Y$ esta no es una norma pues si $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ por el Teorema de Stone-Weierstrass

$$\|\overline{f}\|_Y = d(f, Y) = 0$$

sin embargo, $\overline{f} \neq \overline{0}$ pues $f \notin Y$, es decir $\| \|_Y$ no es una norma.

Proposición 1.3.6. *Si Y un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado $(X, \| \|)$ entonces la función $\| \|_Y : X/Y \to \mathbb{R}^+$ es una norma para X/Y.*

Proposición 1.3.7. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio normado. X es de Banach si y sólo si toda serie absolutamente convergente en X es convergente, donde una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ en X es absolutamente convergente si $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$.*

Teorema 1.3.8. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach, si $(Y, \| \|)$ es un subespacio cerrado de X entonces $(X/Y, \| \|_Y)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k}$ una serie absolutamente convergente en X/Y, es decir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\overline{x_k}\| < \infty.$$

Por como se define la norma en X/Y existe $x_k \in \overline{x_k}$ tal que

$$\|x_k\| < \|\overline{x_k}\| + \frac{1}{2^k}$$

para todo $k = 1, 2, \ldots$

Por tanto, $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$, como X es de Banach existe $x \in X$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge a x.

Sea $s_n = x_1 + \ldots + x_n$ para toda $n = 1, 2, \ldots$, claramente $\overline{x - s_n} = \overline{x} - \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k}$. Como $\|\overline{x - s_n}\| \leq \|x - s_n\|$ se sigue que $\sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k}$ converge a $\overline{x}$, es así que hemos probado que toda serie en X/Y absolutamente convergente es convergente y por tanto, X/Y es de Banach. $\square$

Las dos proposiciones que siguen nos ayudarán a dar una condición necesaria y suficiente para decir cuando un subespacio de un espacio vectorial tiene codimensión finita.

Definición 1.3.9. *Sea X un espacio vectorial, si Y y Z son subespacios de X tales que $X = Y + Z$ y $Y \cap Z = \{0\}$, entonces decimos que X es la suma directa de Y y Z, y la denotamos por $X = Y \bigoplus Z$.*

Proposición 1.3.10. *Sean X un espacio vectorial y Y un subespacio , si $\overline{B} = \{\overline{x}_\alpha\}_\alpha$ es una base para X/Y entonces $X = s(\{x_\alpha\}_\alpha) \bigoplus Y$.*

Demostración. Sea $x \in X$, como $\overline{x} \in X/Y$ podemos escribir

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{x}_{\alpha_i}$$

para algunos $\overline{x}_{\alpha_i} \in \overline{B}$ y $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Ahora por la definición de suma y producto por escalar en X/Y se tiene que

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{x}_{\alpha_i} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\alpha_i}}$$

por tanto, existe $y \in Y$ tal que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\alpha_i} + y$, así hemos probado que

$$X = s(\{x_\alpha\}_\alpha) + Y$$

para probar que esta suma es directa consideremos $z \in s(\{x_\alpha\}_\alpha) \cap Y$ entonces $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\alpha_i}$, considerando clases de equivalencia

$$\overline{0} = \overline{z} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{x_{\alpha_i}}$$

y como $\overline{B}$ es una base en particular es un conjunto linealmente independiente de donde $\lambda_i = 0$ para toda $i = 1, \ldots, n$ por tanto $z = 0$, es decir la suma es directa. $\square$

Proposición 1.3.11. *Sea Y un subespacio de un espacio vectorial X, si existe $B = \{x_\alpha\}_\alpha$ linealmente independiente tal que $X = s(\{x_\alpha\}) \bigoplus Y$ entonces $\overline{B} = \{\overline{x_\alpha}\}_\alpha$ es una base para X/Y.*

Demostración. Sea $\overline{x} \in X/Y$, como $x \in X$ por hipótesis $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_{\alpha_i} + y$ para algunos $x_{\alpha_i} \in B, \lambda_i \in \mathbb{R}$ y $y \in Y$.

Considerando clases de equivalencia tenemos

$$\overline{x} = \overline{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_{\alpha_i}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overline{x_{\alpha_i}}$$

es decir $s(\{\overline{x_\alpha}\}_\alpha) = X/Y$.

Para ver que $\overline{B}$ es linealmente independiente tomemos $\overline{0} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overline{x_{\alpha_i}}$, por lo tanto existe $y \in Y$ tal que $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_{\alpha_i}$ y debido a la suma directa $0 = y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_{\alpha_i}$, pero B es linealmente independiente así tenemos que $\lambda_i = 0$ para toda $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Corolario 1.3.12. *Un subespacio Y de un espacio vectorial X tiene codimensión finita n si y sólo si existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tal que $X = s(x_1, \ldots, x_n) \bigoplus Y$.*

Recordemos la siguiente definición:

Definición 1.3.13. *Sean X y Y espacios métricos. Decimos que una función $f : X \to Y$ es abierta si para todo subconjunto abierto A de X, $f(A)$ también es abierto en $f(Y)$.*

La siguiente proposición involucra una función de X en el espacio cociente X/Y llamada la proyección canónica, la cual tiene importantes propiedades cuando X es un espacio normado.

Proposición 1.3.14. *Sea Y un subespacio cerrado de un espacio normado $(X, \| \|)$. La proyección canonica $\varphi : (X, \| \|) \to (X/Y, \| \|_Y)$ dada por*

$$\varphi(x) = \overline{x}$$

para toda $x \in X$, es lineal, continua y abierta.

Demostración. Claramente φ es lineal, pues debido a la definición de suma y producto por escalar para X/Y se tiene

$$\varphi(x + y) = \overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y} = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(\lambda x) = \overline{\lambda x} = \lambda \overline{x} = \lambda \varphi(x)$$

para toda $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Para mostrar que φ es continua consideremos $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$, si $\delta = \epsilon$ y además $\|x - x_0\| < \delta$ entonces

$$\|\varphi(x) - \varphi(x_0)\|_Y = \|\varphi(x - x_0)\|_Y = \|\overline{x - x_0}\|_Y = inf\{\|z\| \mid z \in \overline{x - x_0}\}$$

$\leq \|x - x_0\| < \delta = \epsilon$. Es decir φ es continua.

Ahora demostraremos que φ es abierta. Sea $U \subseteq X$ abierto.

1) Si $U = \emptyset$ entonces tambien $\varphi(U) = \emptyset$ es abierto.

2) Si $U \neq \emptyset$, si $\overline{u_0} \in \varphi(U)$ entonces existe $u_0 \in U$ tal que $\varphi(u_0) = \overline{u_0}$ y como U es abierto existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(u_0) \subseteq U$.

Consideremos $\overline{u} \in \overline{B}_{\epsilon/2}(\overline{u_0}) = \{\overline{x} \in X/Y \mid \|\overline{x} - \overline{u_0}\|_Y < \epsilon/2$, por la propiedad del infimo aplicada a $\|\overline{u} - \overline{u_0}\|_Y$ tenemos que existe $y \in Y$ tal que

$$\|u - u_0 - y\| < \epsilon/2 + \|\overline{u} - \overline{u_0}\|_Y < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

luego entonces podemos escribir

$$\|(u - y) - u_0\| < \epsilon$$

es decir $u - y \in U$ y $\varphi(u - y) = \varphi(u) = \overline{u}$. Por lo tanto $\overline{u} \in \varphi(U)$ de donde $\varphi(U)$ es abierto. □

1.4. Transformaciones lineales entre espacios de Banach.

Definición 1.4.1. *Sean $(X, \| \|_X)$ y $(Y, \| \|_Y)$ dos espacios normados. Se dice que una función $T : (X, \| \|_X) \to (Y, \| \|_Y)$ es un operador lineal si es una transformación lineal.*[1]

En la definición anterior si $(Y, \| \|) = (\mathbb{R}, | |)$, a la transformación lineal T se le acostumbra llamar funcional.

Las siguientes definiciones son conocidas pero vale la pena enuciarlas y establecer una notación.

Definición 1.4.2. *Sean X, Y espacios vectoriales y $T : X \to Y$ una transformación lineal, los conjuntos*

[1] En análisis se suele emplear la notación Tx en lugar de T(x) cuando se habla de operadores lineales.

1. $\ker T = \{x \in X \mid Tx = 0\} = T^{-1}(\{0\})$
2. $\mathrm{im}T = \{y \in Y \mid \exists x \in X,\ Tx = y\} = T(X)$

seran llamados kernel e imagen de T respectivamente.

Proposición 1.4.3. *Si $T : X \to Y$ es una transformación lineal entre dos espacios vectoriales, entonces $\ker T$ y $\mathrm{im}T$ son subespacios de X y Y respectivamente.*

Demostración. La demostración se sigue inmediatamente de la definición. $\square$

1.4.1. Operadores acotados en espacios de Banach.

Teorema 1.4.4. *Sea $T : (X, \| \|) \to (Y, \| \|)$ un operador lineal entre dos espacios normados, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *T es continuo en un punto.*
2. *T es continuo en X.*
3. *Existe $M \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para toda $x \in X$.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2.] Supongamos que T es continuo en x_0 y consideremos $x \in X$ entonces dada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta$ entonces $\|Tx - Tx_0\| < \epsilon$.

Si $z \in X$ y es tal que $\|z - x\| < \delta$, entonces $\|(z - x + x_0) - x_0\| < \delta$. Luego, por hipótesis

$$\|Tz - Tx\| = \|Tz - Tx + Tx_0 - Tx_0\| = \|T(z - x + x_0) - Tx_0\| < \epsilon$$

y como x fue arbitraria T es continuo en X.

2. $\Rightarrow$ 3.] Supongamos que no existe $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para toda $x \in X$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que

$$\|Tx_n\| > n\|x_n\|$$

reescribiendo tenemos $\frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|} > 1$, es decir

$$\left\| T\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right) \right\| > 1 \tag{1.3}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos la sucesión en X dada por $\frac{x_n}{n\|x_n\|}$, claramente tenemos que

$$\left\|\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right\| \to 0 \qquad si \qquad n \to \infty$$

y usando la hipótesis de que T es continuo en X se tiene que $\left\|T\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right)\right\| \to 0$ si $n \to \infty$ que es una contradicción con (1.3) por tanto, se cumple 3.

3. $\Rightarrow$ 1.] Claramente la condición $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para alguna $M > 0$ y toda $x \in X$ nos dice que T es continua en 0. $\square$

El teorema anterior motiva la siguiente definición.

Definición 1.4.5. *$T : X \to Y$ un operador lineal entre dos espacios normados es acotado si existe $M \geq 0$ tal que*

$$\|Tx\| \leq M\|x\|$$

para toda $x \in X$.

Proposición 1.4.6. *Sean $(X, \| \|)$ y $(Y, \| \|)$ dos espacios normados con X de dimensión finita, si $T : X \to Y$ es un operador lineal entonces T es continuo.*

Definición 1.4.7. *Sean $(X, \| \|)$ y $(Y, \| \|)$ dos espacios normados, definimos $B(X, Y)$ como*

$$B(X, Y) = \{T : X \to Y \mid \; T \textit{ es lineal y acotada}\}.$$

que se acostumbra llamar el espacio de los operadores acotados entre X y Y.

Teorema 1.4.8. *Sean $(X, \| \|)$ y $(Y, \| \|)$ dos espacios normados, la función $\| \| : B(X, Y) \to \mathbb{R}^+$ dada por*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

para toda $T \in B(X, Y)$, es una norma para el espacio vectorial $B(X, Y)$.

Proposición 1.4.9. *Si $T : X \to Y$ es un operador lineal acotado entre dos espacios normados, $\|T\|$ también se puede escribir como*

$$\|T\| = \text{ínf}\{M > 0 \mid \|Tx\| \leq M\|x\| \;\; \forall x \in X\} = \sup_{\|x\|=1} \{\|Tx\|\} = \sup_{\|x\| \leq 1} \{\|Tx\|\}$$

Demostración. Sea $A := \text{ínf}\{M > 0 \mid \|Tx\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X\}$, probaremos sólo que

$$\|T\| = A$$

las demas igualdades resultan de manera semejante.

Como T es acotado $A \neq \emptyset$, sea $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para toda $x \in X$.

Si $x \in X$ y $\|x\| \neq 0$ entonces

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M,$$

y por tanto, $\|T\| \leq M$, de donde $\|T\| \leq A$.

Por otra parte es claro que $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$, o lo que lo mismo $\|Tx\| \leq \left(\sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right) \|x\|$ para toda $x \in X$ por lo tanto como A es el ínfimo

$$A \leq \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|$$

de donde se tiene la igualdad. □

1.4.2. Funcionales lineales.

Aunque en esta tésis sólo consideramos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ el concepto de funcional se puede generalizar a cualquier campo K sobre el cual esté definido un espacio vectorial.

La siguiente proposición nos dice que para calcular la norma de una funcional acotada f basta encontrar la distancia que hay del origen al conjunto $f^{-1}(\{1\})$.

Proposición 1.4.10. *Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio normado, si $f : X \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal no nulo y acotado entonces $\|f\| = \frac{1}{d(0,A)}$ donde*

$$A = \{x \in X \mid f(x) = 1\}.$$

Demostración. Antes de comenzar notamos que $d(0, A) = \text{ínf}_{x\in A}\{\|x\|\} > 0$.

Sea $x \in A$, entonces $1 = |f(x)| \leq \|f\|\|x\|$, por lo tanto

$$1 \leq \|f\|d(0, A)$$

Ahora, si $x \in X \setminus \ker(f)$, entonces $\frac{x}{f(x)} \in A$ y por tanto, $d(0, A) \leq \frac{\|x\|}{|f(x)|}$, de donde $|f(x)| \leq \frac{1}{d(0,A)}\|x\|$ para todo $x \in X$, es así que $\|f\| \leq \frac{1}{d(0,A)}$. □

Otro importante resultado es el siguiente:

Proposición 1.4.11. *Sean* $(X, \| \, \|)$ *un espacio normado y* $f : X \to \mathbb{R}$ *una funcional lineal no trivial, son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. f *es continua en* X.
2. $\ker f$ *es cerrado en* X.
3. $\ker f$ *no es denso en* X.

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2.] Sabemos que $\ker f = f^{-1}\{0\}$ y debido a que f es continua y $\{0\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ se tiene que $\ker f$ es cerrado en X.

2. $\Rightarrow$ 3.] Dado que f no es trivial $\ker f$ es un subconjunto propio de X ademas $\overline{\ker f} = \ker f$, esto nos dice que tambien $\overline{\ker f}$ es un subconjunto propio de X o lo que es lo mismo $\ker f$ no es denso en X.

3. $\Rightarrow$ 1.] Supongamos que f no es continua entonces f no es acotada es decir para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \neq 0$ tal que

$$\|f(x_n)\| > n\|x_n\| \tag{1.4}$$

Por otra parte consideremos $x \in X$ y $\epsilon > 0$ y llamemos $\alpha = f(x)$, como $\frac{|\alpha|}{\epsilon} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$N > \frac{|\alpha|}{\epsilon}$$

Además si $y_N = \frac{x_N}{\|x_N\|}$ y usamos (1.4) obtenemos

$$\|f(y_N)\| > \frac{|\alpha|}{\epsilon}$$

claramente $\frac{|\alpha||f(y_n|}{|f(y_n)|} = |\alpha|$, denotemos a $z = \frac{|\alpha|y_N}{|f(y_n)|}$ de donde obtenemos

$$|f(z)| = |\alpha|$$

y dado que $\alpha = f(x)$ se tiene que $f(z) = f(x)$ o $f(z) = -f(x)$, observemos que $\|z\| = \frac{|\alpha|}{|f(y_N)|} < \epsilon$.

Considereando el caso de $f(z) = f(x)$ se deduce que $x - z \in \ker f$ y tambien

$$\|x - (x - z)\| = \|z\| < \epsilon$$

es decir $x \in \overline{\ker f}$, analogamente si $f(z) = -f(x)$ obtenemos que $\overline{\ker f} = X$ es decir $\ker f$ es denso. $\square$

1.4.3. El espacio dual.

Definición 1.4.12. *Sean* $(X, \| \|)$ *y* $(Y, \| \|)$ *dos espacios normados. Si existe un isomorfismo* $T : X \to Y$ *tal que* T *y* T^{-1} *son continuos, diremos que* X *es isomorfo a* Y*. A la función* T *se le llama homeomorfismo lineal.*

Definición 1.4.13. *Sean* $(X, \| \|_X)$ *y* $(Y, \| \|_Y)$ *dos espacios normados.* X *y* Y *son isométricos si existe* $T : X \to Y$ *tal que*

$$\|x\|_X = \|T(x)\|_Y$$

para toda $x \in X$*. Si además* T *es un isomorfismo, diremos que* T *es un isomorfismo isométrico.*

Definición 1.4.14. *Sean* X *y* Y *dos espacios normados, diremos que* Y *se puede encajar en* X *si existe* Z *un subespacio cerrado de* X *y un isomorfismo* $T : Y \to Z$*, a la función* T *se le llama encaje.*

Dados X y Y dos espacios normados se vio en el Teorema 1.4.8 que el espacio vectorial $B(X, Y)$ es normado, la pregunta ahora es: ¿Bajo que condiciones es $B(X, Y)$ un espacio de Banach? La respuesta se obtiene del siguiente teorema.

Teorema 1.4.15. *Sea* $(X, \| \|)$ *un espacio normado, si* $(Y, \| \|)$ *es un espacio de Banach entonces* $B(X, Y)$ *es un espacio de Banach con respecto a la norma dada en el Teorema 1.4.8.*

Demostración. Sea $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $B(X, Y)$, es decir, para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n, m \geq N$ se tiene

$$\|T_n - T_m\| < \epsilon. \tag{1.5}$$

Sean $x \in X \setminus \{0\}$ y $\epsilon > 0$. Existe $N = N(x, \epsilon)$ tal que $\|T_n - T_m\| < \frac{\epsilon}{\|x\|}$ para todo $n, m \geq N$, por lo cual

$$\|T_n x - T_m X\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| < \epsilon$$

para toda $n, m \geq N$, y debido a que Y es de Banach existe $Tx \in Y$ tal que $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$.

Notamos que T es lineal y continuo: Por hipótesis existe $N \geq 1$ tal que $\|T_n - T_m\| \leq 1$ si $n, m \geq N$. Si $\|x\| \leq 1$ entonces

$$\|Tx - T_n x\| = \lim_{m\to\infty} \|T_m x - T_n x\| \leq 1,$$

de donde $\|T - T_N\| \leq 1$ y por tanto, $T \in B(X, Y)$.

Vamos a probar que $T_n \to T$ si $n \to \infty$ para esto observemos que

$$\|(T - T_n)x\| = \lim_{m\to\infty} \|(T_m - T_n)x\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T_m - T_n\|\|x\|$$

de este modo podemos escribir

$$\|T - T_n\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|(T - T_n)x\|}{\|x\|} \leq \lim_{n\to\infty} \|T_m - T_n\| \leq \epsilon$$

si $n \geq N$, es decir $T_n \to T$ si $n \to \infty$.

Así hemos mostrado que toda sucesión de Cauchy en $B(X, Y)$ converge y el límite de esta se queda en el mismo espacio, es decir $B(X, Y)$ es de Banach. $\square$

Un caso particular del espacio $B(X, Y)$ es cuando consideramos $Y = \mathbb{R}$ con la norma inducida por el valor absoluto, en este caso el espacio en cuestión es llamado el espacio dual de un espacio normado X, a continuación damos la defininción precisa y mencionamos algunos ejemplos.

Definición 1.4.16. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio normado definimos el espacio dual de X como*

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{R} \mid \ f \text{ es lineal y continua}\}$$

Proposición 1.4.17. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio normado. X^* es un espacio vectorial.*

Corolario 1.4.18. *El espacio dual X^* de un espacio normado $(X, \| \|)$ es un espacio de Banach con respecto a la norma dada por*

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|},$$

para $f \in X^*$.

EJEMPLOS:

1. Sea $n \geq 1$. El espacio dual de $\mathbb{R}^n$ es isométrico a $\mathbb{R}^n$.

2. El espacio dual de ℓ^1 es isométrico a ℓ^∞.

3. Sean $p, q > 1$ tal que $\frac{1}{P} + \frac{1}{q} = 1$. El espacio dual de ℓ^p es isometrico a ℓ^q.

1.5. Teoremas fundamentales en espacios de Banach.

1.5.1. El Teorema de Hahn-Banach.

Definición 1.5.1. *Sea X un espacio vectorial, una función $\rho : X \to \mathbb{R}$ es una funcional convexa si:*

1. $\rho(x) \geq 0$ *para toda* $x \in X$.
2. $\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x)$ *para toda* $x \in X$ *y* $\lambda \geq 0$.
3. $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ *para toda* $x, y \in X$.

Lema 1.5.2. *Sean X un espacio vectorial, $\rho : X \to \mathbb{R}$ una funcional convexa, Y un subespacio propio de X y $f : Y \subsetneq X \to \mathbb{R}$ una función lineal. Si se cumple que*

$$f(y) \leq \rho(y)$$

para toda $y \in Y$, entonces existe $F : X \to \mathbb{R}$ lineal tal que $F(x) \leq \rho(x)$ para toda $x \in X$ y $F_{|Y} = f$.

Demostración. Sea $x_0 \in X \setminus Y$ y consideremos el conjunto

$$S = \{\lambda x_0 + y \mid y \in Y,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

es fácil demostrar que S es un subespacio de X. Sea $F_0 : S \to \mathbb{R}$ dada por

$$F_0(\lambda x_0 + y) = \lambda F(x_0) + f(y)$$

donde $F(x_0)$ es una constante que pertenece al intervalo

$$\left[\sup_{w \in Y}\{-\rho(-x_0 - w) - f(w)\}, \inf_{z \in Y}\{\rho(x_0 + z) - f(z)\}\right]$$

Observemos que este intervalo es distinto del vacío pues

$$f(z) - f(w) = f(z - w) \leq \rho(x_0 + z - x_0 - w) \leq \rho(x_0 + z) + \rho(-x_0 - w)$$

para todo $z, w \in Y$.

Un cálculo directo muestra que F_0 es lineal. Además como $Y \subset S$ se tiene que $F_{0|Y} = f$.

Ahora vamos a demostrar que $F_0(s) \leq \rho(s)$ para toda $s \in S$. Sea $s \in S$ entonces existen $\lambda \in \mathbb{R}$ y $y \in Y$ tal que $s = \lambda x_0 + y$.

Si $\lambda = 0$ entonces $s = y$ y por hipótesis $F_0(s) = f(y) \leq \rho(y)$.

Si $\lambda > 0$, tenemos que demostrar que $\lambda F(x_0) + f(y) \leq \rho(\lambda x_0 + y)$ pero esto es equivalente a probar que $F(x_0) \leq \rho(x_0 + \frac{y}{\lambda}) - f\left(\frac{y}{\lambda}\right)$ y esto último es cierto gracias a como se escogió $F(x_0)$.

Si $\lambda < 0$, tenemos que demostrar que $\lambda F(x_0) + f(y) \leq \rho(\lambda x_0 + y)$ pero esto es equivalente a probar que $F(x_0) \geq -\rho(x_0 - \frac{y}{\lambda}) - f\left(\frac{y}{\lambda}\right)$ y esto último es cierto gracias a como se escogió $F(x_0)$. Por tanto, $F_0(s) \leq \rho(s)$.

Ahora consideremos la familia de parejas:

$$\mathbb{F} = \{(W, F_w) \mid W \text{ es subespacio de } X, Y \subset W,\ F_W : W \to \mathbb{R} \text{ es lineal,}$$

$$F_w(w) \leq \rho(w)\, \forall w \in W \; y \; F_{W|Y} = f\}.$$

Claramente $\mathbb{F} \neq \emptyset$ pues $(S, F_0) \in \mathbb{F}$. En $\mathbb{F}$ se puede establecer un orden dado de la siguiente manera:

$$(W, F_W) \leq (W', F_{W'})$$

si $W \subseteq W'$ y $F_{W'|W} = F_W$.

Sea $\mathbb{F}' = \{(W, F_W)\}_W$ un subconjunto totalmente ordenado de $\mathbb{F}$. Como $\mathbb{F}'$ es totalmente ordenado es fácil ver que $(\cup W, F_{\cup W}) \in \mathbb{F}'$ y es una cota superior para los elemento de $\mathbb{F}'$, es así que aplicando el Lema de Zorn, $\mathbb{F}$ tiene un elemento maximal $(\overline{W}, F)$, ahora sólo basta probar que $\overline{W} = X$ pero si suponemos que $\overline{W} \subsetneq X$ y repetimos lo hecho para (S, F_0) concluimos que $(\overline{W}, F)$ no es maximal. □

Teorema 1.5.3 (Hahn-Banach). *Sea M un subespacio propio y cerrado de un espacio normado $(X, \| \|)$. Si $m^* \in M^*$ entonces existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = \|m^*\|$ y ademas $x^*(x) = m^*(x)$ para toda $x \in M$.*

Demostración. Sea $\rho : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(x) = \|m^*\| \|x\|.$$

Es fácil demostrar que ρ es una funcional convexa y además $|m^*(x)| \leq \rho(x)$ para toda $x \in M$.

Aplicando el Teorema 1.5.2 encontramos $x^* : X \to \mathbb{R}$ lineal tal que

$$|x^*(x)| \leq \rho(x) = \|m^*\| \|x\|.$$

Lo anterior también nos dice que x^* es continua así que $x^* \in X^*$ y $\|x^*\| \leq \|m^*\|$, más aun $\|m^*\| \leq \|x^*\|$ debido a que $M \subsetneq X$. Por tanto, $\|x^*\| = \|m^*\|$. □

Corolario 1.5.4. *Sean* $(X, \| \ \|)$ *un espacio normado y* $x_0 \in X$*, si* $x_0 \neq 0$ *entonces existe* $x^* \in X^*$ *tal que*

$$\|x^*\| = 1 \qquad y \qquad x^*(x_0) = \|x_0\|.$$

Demostración. Sea $Y = s(x_0)$, consideremos la funcional $f : Y \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(y) = \lambda \|x_0\|,$$

para $y \in Y$ y $y = \lambda x_0$.

Si $y \in Y$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $y = \lambda x_0$, entonces podemos escribir

$$|f(y)| = |f(\lambda x_0)| = |\lambda| \|x_0\| = \|\lambda x_0\| = \|y\|$$

y debido a lo anterior f es acotado con $\|f\| = 1$.

Usando el Teorema de Hahn-Banach encontramos una funcional $x^* : X \to \mathbb{R}$ extensión de f tal que

$$\|x^*\| = \|f\| = 1$$

además, ya que $x_0 \in Y$ obtenemos $x^*(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$. □

Corolario 1.5.5. *Sea* $(X, \| \ \|)$ *un espacio normado, entonces para todo* $x \in X$ *se tiene que*

$$\|x\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

donde $f \in X^*$*.*

Demostración. La prueba es inmediata a partir del Corolario 1.5.4. □

1.5.2. El Teorema del acotamiento uniforme.

Definición 1.5.6. *Un subconjunto* M *de un espacio métrico* (X, d) *es:*

1. *Denso en ninguna parte en* X *si la cerradura de* M*, denotada por* $\overline{M}$*, tiene interior vacío.*

2. *De la primera categoria en* X *si* M *se puede escribir como la unión numerable de subconjuntos de* X *donde cada uno es denso en ninguna parte en* X*.*

3. *De la segunda categoria en* X *si* M *no es de la primera categoria en* X*.*

Teorema 1.5.7 (Baire)**.** *Si (X, d) es un espacio métrico completo distinto del vacío, entonces es de la segunda categoria. Es decir cada vez que*

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

existe k_0 tal que $\overline{A_{k_0}}$ contiene un subconjunto abierto.

Del Teorema de Baire se puede deducir con relativa facilidad el Teorema del acotamiento uniforme.

Teorema 1.5.8 (del Acotamiento Uniforme)**.** *Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach y $\mathfrak{F}$ una familia de operadores lineales acotados de X en $(Y, \| \|)$. Si para cada $x \in X$ existe $M_x > 0$ tal que*

$$\|Tx\| \leq M_x$$

para toda $T \in \mathfrak{F}$ entonces existe $M > 0$ tal que

$$\|T\| \leq M$$

para toda $T \in \mathfrak{F}$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos

$$B_n = \{x \in X \mid \|Tx\| \leq n \; \forall T \in \mathfrak{F}\}$$

Observemos que B_n es cerrado para toda n pues $B_n = \bigcap_{T \in \mathfrak{F}} (\| \| \circ T)^{-1}[0, n]$ y sabemos que tanto la norma como T son continuas.

De las hipotesis y de la propiedad arquimediana obtenemos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X$$

y por el Teorema de Baire algún B_N contiene un abierto, es decir, existe $z \in B_N$ y $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(z) \subseteq B_N$.

Sea $y \in X$ tal que $\|y\| = 1$. Un cálculo sencillo muestra que $\epsilon y + z \in B_\epsilon(z)$ y por tanto, $\|T(\epsilon y + z)\| \leq N$ para toda $T \in \mathfrak{F}$, de esta forma obtenemos que

$$\|T(\epsilon y)\| \leq \|T(\epsilon y + z)\| + \|Tz\| \leq 2N$$

para toda $T \in \mathfrak{F}$.

Luego como y fue arbitraria, si $M = \frac{2N}{\epsilon}$ y $T \in \mathfrak{F}$

$$\|T\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ty\| \leq \frac{2N}{\epsilon} = M$$

es decir $\mathfrak{F}$ es acotada. $\square$

1.5.3. El Teorema del mapeo abierto.

Lema 1.5.9. *Sean $(X, \| \|)$ y $(Y, \| \|)$ espacios de Banach. Si $T : X \to Y$ es un operador lineal acotado y sobre, entonces $T(B_1)$ donde $B_1 = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$ tiene como subconjunto un abierto alrededor de $0 \in Y$.*

Demostración. Si $A \subseteq X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $b \in X$ los subconjuntos de X λA y $A + b$ se definen como

$$\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\} \qquad A + b = \{a + b \mid a \in A\}.$$

Consideremos $B_{\frac{1}{2}} = \{x \in X \mid \|x\| < \frac{1}{2}\}$. Si $x \in X$, la propiedad arquimediana dice que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > 2\|x\|$. Entonces

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB_{\frac{1}{2}}.$$

Por hipótesis T es sobre y por tanto,

$$Y = T(X) = T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} nB_{\frac{1}{2}}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(B_{\frac{1}{2}}),$$

más aún ya que Y es cerrado y la cerradura de una unión arbitraria de conjuntos es igual a la unión de la cerrraduras, obtenemos que

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{nT(B_{\frac{1}{2}})}.$$

Pero Y es de Banach y por el Teorema de Baire concluimos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{kT(B_{\frac{1}{2}})}$ contiene un subconjunto abierto y por tanto, $\overline{T(B_{\frac{1}{2}})}$ también, es decir existe $\epsilon > 0$ y $y_0 \in Y$ tal que $B(y_0, \epsilon) \subseteq \overline{T(B_{\frac{1}{2}})}$, de esto deducimos que

$$B(0, \epsilon) = B(y_0, \epsilon) - y_0 \subseteq \overline{T(B_{\frac{1}{2}})} - y_0. \tag{1.6}$$

Más aún afirmamos que $B(0, \epsilon) \subseteq \overline{T(B_1)}$. Para esto probaremos que

$$\overline{T(B_{\frac{1}{2}})} - y_0 \subseteq \overline{T(B_1)}$$

Sea $y \in \overline{T(B_{\frac{1}{2}})} - y_0$. Entonces $y + y_0 \in \overline{T(B_{\frac{1}{2}})}$, además sabemos que $y_0 \in \overline{T(B_{\frac{1}{2}})}$. Por definición de la cerradura de un conjunto existen $(u_n)_{n=1}^{\infty} = (Tw_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(v_n)_{n=1}^{\infty} = (Tz_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en $T(B_{\frac{1}{2}})$ tales que

$$u_n \to y + y_0 \qquad v_n \to y_0$$

si $n \to \infty$.

Dado que $w_n, z_n \in B_{\frac{1}{2}}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ deducimos que

$$\|w_n - z_n\| \leq \|w_n\| + \|z_n\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

por tanto, $w_n - z_n \in B_1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Además

$$T(w_n - z_n) = Tw_n - Tz_n = u_n - v_n \to (y + y_0) - y_0 = y$$

si $n \to \infty$. Es decir $y \in \overline{T(B_1)}$, así de la ecuación (1.6) demostramos que

$$B(0, \epsilon) \subseteq \overline{T(B_1)} \tag{1.7}$$

Sea $V_n = B(0, 2^{-n}) \subset X$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Dado que T es lineal, un cálculo directo muestra que $\overline{T(V_n)} = 2^{-n}\overline{T(B_1)}$ y de la relación (1.7) se deduce que

$$U_n = B(0, \epsilon/2^n) \subseteq \overline{T(V_n)} \tag{1.8}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

Finalmente vamos a demostrar que $U_1 = B(0, \frac{\epsilon}{2}) \subset T(B_1)$. Sea $y \in U_1$ de las contenciones en (1.8) deducimos que $y \in \overline{T(V_1)}$ y por tanto, para $\epsilon/4$ existe $x_1 \in V_1$ tal que

$$\|y - Tx_1\| < \frac{\epsilon}{4}$$

observemos que $y - Tx_1 \in U_2$ de nuevo por (1.8) $y - Tx_1 \in \overline{T(V_2)}$ y por tanto para $\epsilon/8$ existe $x_2 \in V_2$ tal que

$$\|(y - Tx_1) - Tx_2\| < \frac{\epsilon}{8}$$

lo anterior dice que $y - Tx_1 - Tx_2 \in U_3 \subset \overline{T(V_3)}$. Continuando de manera inductiva podemos encontrar $x_n \in V_n$ tal que

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} Tx_k \right\| < \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \tag{1.9}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $z_n = x_1 + \ldots x_n$. Dado que $x_n \in V_n$ claramente $\|x_n\| < \frac{1}{2^n}$ y por tanto para toda $n > m$

$$\|z_n - z_m\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \to 0$$

si $m \to \infty$. Hemos probado que la sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach X y por tanto existe $x \in X$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$$

más aún

$$\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \|x_1\| + \sum_{n=2}^{\infty} \|x_n\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

es decir $x \in B_1$. La continuidad de T implica también que $\sum_{n=1}^{\infty} Tx_n = Tx$ y de (1.9) si $n \to \infty$ obtenemos que $Tx = y$ es decir $y \in T(B_1)$. $\square$

Teorema 1.5.10 (del mapeo abierto)**.** *Sean* $(X, \| \|)$ *y* $(Y, \| \|)$ *espacios de Banach. Si* $T : X \to Y$ *es un operador lineal acotado y sobre entonces* T *es una función abierta. Además si* T *es biyectiva* T^{-1} *es acotada.*

Demostración. Dado que T es sobre basta ver que todo subconjunto abierto de X es abierto en Y. Sea U abierto en X y consideremos $y \in T(U)$, de esta forma $y = Tx$ para algun $x \in U$.

Dado que U es abierto existe una bola abierta con centro en x y por tanto, $U - x$ contiene una bola abierta con centro en 0 llamemosla $B(0, r)$. Lo anterior implica que

$$B(0, 1) \subset \frac{1}{r}(U - x)$$

aplicando el Lema 1.5.9 se deduce que $T(\frac{1}{r}(U - x)) = \frac{1}{r}[T(U) - Tx]$ contiene una bola abierta con centro en el cero. Así tambien $T(U) - Tx$ cumple lo mismo y por tanto, $T(U)$ contiene una bola abierta alrededor de $Tx = y$. Es decir $T(U)$ es abierto en Y

Ahora si T es biyectiva T^{-1} es continua y por lo anterior T es acotada. $\square$

1.5.4. El Teorema de la gráfica cerrada

Definición 1.5.11. *Sea* $T : X \to Y$ *un operador lineal entre dos espacios normados* $(X, \| \|)$ *y* $(Y, \| \|)$*. Definimos la gráfica de* T *como*

$$\Gamma(T) = \{(x, Tx) \in X \times Y \mid x \in X\}.$$

Dados X y Y dos espacios normados podemos dar estructura de espacio vectorial a $X \times Y$ con la funciones

$$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w) \qquad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

para $(x,y),(z,w) \in X \times Y$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Más aún $X \times Y$ es un espacio vectorial normado con norma

$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\| \tag{1.10}$$

para todo $(x,y) \in X$. Para probar que esta función es una norma en X basta hacer un cálculo directo.

Teorema 1.5.12 (de la gráfica cerrada)**.** *Sean $(X, \|\ \|)$, $(Y, \|\ \|)$ dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal. T es acotado si y sólo si $\Gamma(T)$ es cerrada en $X \times Y$.*

Demostración. $\Leftarrow]$ Demostremos que $X \times Y$ es un espacio de Banach con respecto a la norma dada en (1.10), para esto consideremos $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $X \times Y$ donde $z_n = (x_n, y_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m > N$

$$\|z_n - z_m\| = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| < \epsilon \tag{1.11}$$

lo cual implica

$$\|x_n - x_m\| \leq \epsilon - \|y_n - y_m\| \leq \epsilon$$

para toda $n, m > N$. Es decir $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X y de manera análoga $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tambien. Por hipótesis existen $x \in X$, $y \in Y$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Más aún si $m \to \infty$ en (1.11) obtenemos que

$$z_n \to (x,y)$$

cuando $n \to \infty$. Por tanto, $X \times Y$ es completo.

Por la Proposición 1.2.1 $\Gamma(T)$ es de Banach pues $\Gamma(T)$ es cerrada en $X \times Y$. Sea $P : \Gamma(T) \to X$ dada por

$$P(x, Tx) = x.$$

Es fácil probar que P es lineal y más aún P es acotado ya que

$$\|P(x,Tx)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Tx\| \leq \|(x,Tx)\|.$$

Claramente P es biyectiva y de hecho el operador lineal inverso es $P^{-1} : X \to \Gamma(T)$ dado por

$$P^{-1}(x) = (x, Tx).$$

Ahora, al aplicar el Teorema del mapeo abierto deducimos que P^{-1} es acotado. Es decir existe $M > 0$ tal que

$$\|(x, Tx)\| \leq M\|x\|,$$

para todo $x \in X$. Por tanto,

$$\|Tx\| \leq \|Tx\| + \|x\| = \|(x, Tx)\| \leq M\|x\|,$$

para todo $x \in X$. luego T es acotado.

$\Leftarrow$] Supongamos que T es acotado y consideremos $\Omega = X \times Y \setminus \Gamma(T)$. Probaremos que Ω es abierto.

Sea $(x_0, y_0) \in \Omega$. Por definición de $\Gamma(T)$ se tiene que $y_0 \neq Tx_0$ y como todo espacio métrico es de Hausdorff podemos encontrar U y W vecindades disjuntas en Y de y_0 y Tx_0 respectivamente.

Ahora bien, que T sea acotado implica la continuidad de T. De esta forma existe U una vecindad en X de x_0 tal que $T(U) \subset W$

Claramente $U \times V$ es una vecindad de (x_0, y_0). Más aun ya que U y W son disjuntos es fácil ver que

$$U \times V \subset \Omega$$

Es decir Ω es abierto y por tanto, $\Gamma(T)$ es cerrado. $\square$

1.6. Espacios Reflexivos.

Anteriormente definimos el espacio dual X^* de un espacio normado X como el conjunto de funcionales lineales y continuas de X en $\mathbb{R}$, vimos que X^* es normado y más aún que es de Banach sin necesidad de que X lo sea. Ahora es natural preguntarnos por el dual de X^* que llamaremos el *doble dual* de X y denotaremos por X^{**}.

Veremos que X^{**} tiene propiedades importantes que se conectan de manera directa con X. Una de ellas es que X se puede encajar en X^{**} y aún más importante serán los espacios normados para los cuales X^{**} se puede identificar con X los cuales llamareros *espacios reflexivos.*

Definimos la función $C : X \to X^{**}$ dada por $C(x) = \widehat{x}$ donde $\widehat{x} : X^* \to \mathbb{R}$ es tal que

$$\widehat{x}(f) = f(x)$$

para todo $f \in X^*$.

C está bien definida, pues claramente $\widehat{x}$ es lineal y continua, además $\widehat{x}$ es acotada ya que aplicando el Corolario 1.5.5 obtenemos que

$$\|\widehat{x}\| = \sup_{f\neq 0} \frac{|\widehat{x}(f)|}{\|f\|} = \sup_{f\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|. \tag{1.12}$$

A la función C se le conoce usualmente como encaje canónico y el siguiente teorema justifica este término.

Teorema 1.6.1. *Sea $(X, \| \,\|)$ un espacio normado. La función $C : X \to X^{**}$ dada por*

$$C(x) = \widehat{x}$$

es un encaje.

Demostración. Es fácil ver que C es lineal, probemos que C es inyectiva. Sean $x, y \in X$ y supongamos que $C(x) = C(y)$ entonces $f(x) = f(y)$ para toda $f \in X^*$, así tenemos que

$$f(x - y) = 0 \tag{1.13}$$

para toda $f \in X^*$, pero el unico elemento de X que cumple la relación (1.13) es el 0 es así que $x = y$.

Por último la relación (1.12) nos dice que C es una isometría. Por tanto, C es un encaje. □

Definición 1.6.2. *Un espacio normado $(X, \| \,\|)$ es reflexivo si $C(X) = X^{**}$ donde $C : X \to X^{**}$ es el encaje canónico.*

Dado que $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$ tenemos que $\mathbb{R}^n$ es reflexivo, también como $(\ell^p)^* = \ell^q$ donde $p, q > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ concluimos que ℓ^p es reflexivo.

Proposición 1.6.3. *Si $(X, \| \,\|)$ es un espacio normado de dimensión finita entonces X es reflexivo.*

Proposición 1.6.4. *Si un espacio normado $(X, \| \,\|)$ es reflexivo, entonces es de Banach.*

Demostración. Dado que X^{**} es el dual de X^* el Teorema 1.4.15 nos dice que X^{**} es de Banach, por tanto ya que X es isomorfo a X^{**} tenemos que X es de Banach. □

Gracias a la proposición anterior y a que $C[a,b]$ no es completo con la norma

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)| dt \right)^{1/p}$$

para $f \in C[a,b]$ y $p \geq 1$, obtenemos que $(C[a,b], \| \|_p)$ no es reflexivo.

Hemos visto que si un espacio es reflexivo entonces tiene que ser de Banach, la proposición inversa no es cierta en general. La propiedad que nos ayuda a encontrar espacios normados con esta característica es la separabilidad, recordemos que un espacio métrico X es *separable* si X contiene un subconjunto denso y numerable.

Lema 1.6.5. *Sea Y un subespacio cerrado propio de un espacio normado $(X, \| \|)$. Si $x_0 \in X \setminus Y$ y*

$$\delta = d(x_0, Y) = \text{ínf}\{d(x_0, y) \mid y \in Y\},$$

entonces existe $F \in X^*$ tal que

$$\|F\| = 1, \qquad F(y) = 0 \text{ para toda } y \in Y, \qquad F(x_0) = \delta. \tag{1.14}$$

Demostración. Consideremos $Z = s(Y \cup \{x_0\})$ y definamos $f : Z \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(z) = \alpha\delta$$

si $z \in Z$ y $z = y + \alpha x_0$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, $y \in Y$.

f esta bien definida pues Z es un subespacio de X. La linealidad de f se obtiene de un calculo directo.

Dado que Y es cerrado y $x_0 \in X \setminus Y$ entonces $\delta > 0$ y por tanto, $f \neq 0$.

Ahora $\alpha = 0$ implica $f(y) = 0$ para toda $y \in Y$ y si $\alpha = 1$ junto con $y = 0$ obtenemos $f(x_0) = \delta$.

Sea $\alpha \neq 0$. Si $z = y + \alpha x_0$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, $y \in Y$ entonces

$$|f(z)| = |\alpha|\delta = |\alpha| \inf_{y \in Y} \|y - x_0\| \leq |\alpha| \left\| -\frac{1}{\alpha} y - x_0 \right\| = \|y + \alpha x_0\|$$

por lo tanto f es acotado y $\|f\| \leq 1$.

Más aún $\|f\| \geq 1$ y el siguiente argumento muestra por qué. Existe $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$ tal que $\|y_n - x_0\| \to \delta$, si $z_n = y_n - x_0$ por definición de f se tiene que $f(z_n) = -\delta$ y por tanto,

$$\|f\| = \sup_{z \neq 0} \frac{|f(z)|}{\|z\|} \geq \frac{|f(z_n)|}{\|z_n\|} = \frac{\delta}{\|z_n\|} \to \frac{\delta}{\delta} = 1$$

si $n \to \infty$. Por tanto, $\|f\| = 1$.

Aplicando el Teorema de $Hahn - Banach$ a f encontramos una extensión de f, $F \in X^*$ tal que $\|F\| = 1$ y que cumple las propiedades descritas en (1.14). $\square$

Teorema 1.6.6. *Si el espacio dual X^* de un espacio normado $(X, \| \|)$ es separable entonces X es separable.*

Demostración. Supongamos que X^* es separable. Si denotamos a la esfera unitaria en X^* por

$$B^* = \{f \in X^* \mid \|f\| = 1\}$$

también es separable, es decir existe una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ densa en B^*. Debido a que $f_n \in B^*$ existe $x_n \in X$ tal que $\|x_n\| = 1$ y

$$|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $Y = [x_n]_{n=1}^{\infty}$ la cerradura del subespacio $s(x_n)_n$. Y es separable pues la cerradura del conjunto de todas las combinaciones lineales de los $x_n's$ con coeficientes racionales es Y.

Afirmamos que $Y = X$. Supongamos que $Y \neq X$ entonces Y es un subespacio cerrado propio de X usando el Lema 1.6.5 encontramos $F \in X^*$ tal que $\|F\| = 1$ y $F(y) = 0$ para toda $y \in Y$. Debido a que $x_n \in Y$ tambien $F(x_n) = 0$ para toda n, es así que

$$\frac{1}{2} \leq |f_n(x_n)| = |f_n(x_n) - F(x_n)| = |(f_n - F)(x_n)| \leq \|f_n - F\|\|x_n\|$$

Recordando que $\|x_n\| = 1$ obtenemos que existe $F \in X^*$ tal que $\|f_n - F\| \geq \frac{1}{2}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ lo cual es una contradicción a que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es denso en B^*. Por tanto, $Y = X$ y X es separable. $\square$

Corolario 1.6.7. *ℓ^1 no es reflexivo*

Demostración. Supongamos que ℓ^1 es reflexivo, dado que ℓ^1 es isométrico a $(\ell^\infty)^*$ tendríamos por el Teorema anterior que ℓ^∞ sería separabe lo cual no es cierto. $\square$

1.7. Topología débil y débil*.

Definición 1.7.1. *Un espacio topológico es una pareja* (X, τ) *donde* τ *es una familia de subconjuntos de* X *que cumple:*

1. $\emptyset$ *y* X *pertenecen a* τ*.*

2. *Si* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *es una colección de subconjuntos de* τ *entonces* $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ *pertenece a* τ*.*

3. *Si* $\{U_i\}_{i=1}^n$ *es una colección finita de subconjuntos de* τ *entonces* $\bigcap_{1\leq i\leq n} U_i$ *pertenece a* τ*.*

A τ *se le llama topología sobre* X *y sus elementos son los abiertos de* X *con respecto a* τ*.*

Definición 1.7.2. *Sea* X *un conjunto no vacío. Una base para una topología es una familia* $\mathcal{B}$ *de subconjuntos de* X *tales que*

1. *Para toda* $x \in X$ *existe* $B_x \in \mathcal{B}$ *tal que* $x \in B_x$*.*

2. *Para cualesquiera* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *y* $x \in B_1 \cap B_2$ *existe* B_3 *tambien en* $\mathcal{B}$ *y cumple que* $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$*.*

De la definición anterior se puede obtener una topología $\tau_{\mathcal{B}}$ para X de la siguiente manera: Un subconjunto U de X está en $\tau_{\mathcal{B}}$ si para todo $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$. La demostración de que $\tau_{\mathcal{B}}$ es una topología para X se sigue inmediatamente de como se definen los elementos de $\tau_{\mathcal{B}}$. Más aún si X ya posee una topología τ se dice que $\mathcal{B}$ genera a τ si $\tau_{\mathcal{B}} = \tau$.

Si τ y τ' son dos topologías para un espacio X decimos que τ es más *débil* que τ' si $\tau \subset \tau'$ (también se dice en este caso que τ' es más *fuerte* que τ).

A continuación definimos los espacios vectoriales topológicos que generalizan a los espacios de Banach.

Definición 1.7.3. *Sea* X *un espacio vectorial con una topología* τ*. Diremos que* (X, τ) *es un espacio vectorial topológico si las operaciones de suma y producto por escalar son funciones continuas de* $X \times X$ *a* X *y de* $\mathbb{R} \times X$ *a* X *respectivamente.*

Observación 1.7.4. *El concepto de espacio dual* X^* *de un espacio normado* $(X, \| \, \|)$ *se puede generalizar a espacios vectoriales topológicos de la siguiente manera: Si* (X, τ) *es un espacio vectorial topológico, entonces* X^* *denota el conjunto de funcionales lineales* $f : X \to \mathbb{R}$ *que son continuas con respecto a la topología* τ*.*

1.7.1. Topología débil y convergencia débil.

Si $(X, \| \|)$ es un espacio normado también es un espacio vectorial topológico pues podemos inducir una topología para X a partir de la norma de la siguiente manera: Sean $r > 0$, $x \in X$ y $B(x, r) = \{y \in X \mid \|x - y\| < r\}$. La familia

$$\mathcal{B}_1 = \{B(r, x) \mid r > 0, \ x \in X\}$$

es una base para una topología sobre X. En esta sección definiremos una topología en X que llamaremos *topología débil* y a la dada por la norma la llamaremos *topología fuerte*, en general estas dos son distintas.

Proposición 1.7.5. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio normado. La siguiente familia de subconjuntos de X es una base para una topología sobre X*

$$\mathcal{B}_2 = \{U_{x,f_1,\dots,f_k,a_1,\dots,a_k} \mid x \in X, \ f_1, \dots, f_k \in X^*, \ a_1, \dots, a_k > 0, \ k \in \mathbb{N}\}$$

donde $U_{x,f_1,\dots f_k,a_1,\dots,a_k} = \{y \in X \mid |f_i(y - x)| < a_i, \ 1 \leq i \leq k\}$. [2]

A la topología generada por la base $\mathcal{B}_2$ se le llama *topología débil* para X y la denotaremos por $\sigma(X, X^*)$, tambien se dice que es la topología débil para X generada por X^*, sus elementos son las vecindades debiles.

Observación 1.7.6. *La topología débil definida en un espacio normado X tiene las siguientes propiedades:*

1. *$\sigma(X, X^*)$ esta estrictamente contenida en la topología generada por la norma pues cada elemento de $\mathcal{B}_2$ se puede escribir como*

$$U_{x,f_1,\dots,f_k,a_1,\dots,a_k} = \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(-a_i + f_i(x), a_i + f_i(x))$$

   que es abierto en X con respecto a la topología fuerte pues f_i es continua para toda $i = 1, \dots k$.

2. *$\sigma(X, X^*)$ es la topología más débil respecto a la propiedad de que si f es continua respecto a la topología fuerte entonces f es continua respecto a $\sigma(X, X^*)$.*

3. *$(X, \sigma(X, X^*))$ es un espacio vectorial topológico de Hausdorff.*

[2] En realidad esta proposición se puede enunciar para el caso más general donde X es un espacio vectorial topológico pues cada elemento de $\mathcal{B}_2$ se define en terminos de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ las cuales dependen únicamente de la topología de X.

A continuación definimos la convergencia de sucesiones de X con respecto a la topología débil.

Definición 1.7.7. *Sean $(X, \| \|)$ un espacio normado y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Decimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a x_0 si para toda vecindad débil U_{x_0} de x_0 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $x_n \in U_{x_0}$. Esta convergencia será denotada por*

$$x_n \xrightarrow{w} x_0.$$

Proposición 1.7.8. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio normado. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X converge débilmente a x_0 si y sólo si la sucesión $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x_0)$ para toda $f \in X^*$.*

Demostración. Antes de comenzar con la prueba observemos que basta probar el enunciado para el caso $x_0 = 0$, pues si esto si pasara y $x_0 \neq 0$ obtendríamos:

$x_n \xrightarrow{w} x_0$ si y sólo si $x_n - x_0 \xrightarrow{w} 0$ si y sólo si $f(x_n - x_0) \to 0$ para toda $f \in X^*$ si y sólo si $f(x_n) \to f(x_0)$ para toda $f \in X^*$.

Supongamos $x_0 = 0$.

$\Leftarrow]$ Sabemos que para toda $f \in X^*$ $f(x_n) \to 0$ si $n \to \infty$. Sea U_0 una vecindad débil del 0 de la forma

$$U_0 = \{x \in X \mid |f_1(x)| < \epsilon_1, \ldots, |f_k(x)| < \epsilon_k\}$$

donde $f_i \in X^*$ y $\epsilon_i > 0$ para toda $i = 1, \ldots, k$.

Por hipótesis existen $N_i \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_i$ entonces $|f(x_n)| < \epsilon_i$ para toda $i = 1, \ldots k$.

Si $N = \text{máx}_{1 \leq i \leq k}\{N_i\}$ y $n > N$ del párrafo anterior se deduce que $x_n \in U_0$. Es decir $x_n \xrightarrow{w} 0$.

$\Rightarrow]$ Sea $f \in X^*$ y $\epsilon > 0$. Claramente $U = \{x \in X \mid |f(x)| < \epsilon\}$ es vecindad débil de 0 y por hipótesis existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $x_n \in U$ y por tanto, $|f(x_n)| < \epsilon$. Es decir $f(x_n) \to 0$ si $n \to \infty$. $\square$

Corolario 1.7.9. *Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en un espacio normado X que converge débilmente a x_0 entonces x_0 es único.*

Demostración. Supongamos que $x_n \xrightarrow{w} x_0$ y tambien $x_n \xrightarrow{w} y_0$ si $n \to \infty$. Es así que $f(x_n) \to f(x_0)$ y $f(x_n) \to f(y_0)$ para toda $f \in X^*$. Pero como el límite es único

$$f(x_0 - y_0) = f(x_0) - f(y_0) = 0$$

para toda $f \in X^*$ y por el Corolario 1.5.5 tenemos que $x_0 = y_0$. $\square$

Una pregunta que surge inmediatamente es: ¿Qué relación existe entre la convergencia débil y la fuerte? Resulta que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge fuertemente a x_0 en un espacio normado X también converge débilmente en X pues si $f \in X^*$ se deduce que

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |f(x_n - x_0)| \leq \|f\|\|x_n - x_0\| \to 0$$

si $n \to \infty$.

Lo que no pasa en general es que la convergencia débil implique la convergencia fuerte, pero veremos que si el espacio normado es de dimensión finita entonces estos dos tipos de convergencia son equivalentes.

Teorema 1.7.10. *Sean $(X, \| \|)$ un espacio normado y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Si X es dimensión finita entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente si y sólo si converge fuertemente.*

Demostración. Supongamos que $x_n \xrightarrow{w} x$ cuando $n \to \infty$ y además que $\dim X = p$ con base $\{e_1, \ldots e_p\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escribir

$$x_n = a_1^n e_1 + \ldots + a_p^n e_p$$

de la misma manera

$$x = a_1 e_1 + \ldots a_p e_p,$$

por hipótesis $f(x_n) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$ para toda $f \in X^*$. En particular para las funcionales linelaes $f_j : X \to \mathbb{R}$ definidas en los elementos de la base por

$$f_j(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

para toda $i, j = 1, \ldots, p$. Obtenemos que $f_j(x_n) \to f_j(x)$, es decir $a_j^n \to a_j$ si $n \to \infty$ para toda $j = 1, \ldots, p$. De esta forma deducimos facilmente que

$$\|x_n - x\| = \left\| \sum_{i=1}^{p} (a_i^n - a_i) e_i \right\| \leq \sum_{i}^{p} |a_i^n - a_i| \|e_i\| \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Lo cual muestra que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge fuertemente a x. □

Es importante hacer notar que la equivalencia entre convergencia débil y fuerte no implica que el espacio sea de dimensión finita. En 1921 I. Schur demostro que en ℓ^1 toda sucesión débilmente convergente tambien converge fuertemente, en el capítulo 3 daremos una demostración de este hecho apoyandanos en el concepto de sucesión básica.

Proposición 1.7.11. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio normado. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X converge débilmente a x si y sólo si*

1. *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada.*

2. *$f(x_n) \to f(x)$ si $n \to \infty$ para toda $f \in A$ donde $A \subseteq X^*$ cumple que $\overline{s(A)} = X^*$.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a x, claramente la condición 2. se deduce de la Proposición 1.7.8.

Dado que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$ obtenemos que la sucesión $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es acotada y por tanto, existe $M_f > 0$ tal que

$$|f(x_n)| \leq M_f$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos $C : X \to X^{**}$ el encaje canónico dado por $C(x) = \widehat{x}$. Es así que podemos escribir

$$|\widehat{x_n}(f)| = |f(x_n)| \leq M_f$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el Teorema del acotamiento uniforme a la sucesión $(\widehat{x_n})_{n=1}^{\infty}$ y recordando que C es una isometría encontramos $M > 0$ tal que

$$\|x_n\| = \|\widehat{x_n}\| \leq M$$

Es decir $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada.

$\Leftarrow]$ Dado que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada existe $M_1 > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M_1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y por la propiedad arquimediana existe $M_2 > 0$ tal que $\|x\| \leq M_2$ de esta forma si $M = \text{máx}\{M_1, M_2\}$ se tiene que $\|x_n\| \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\|x\| \leq M$.

Si $f \in X^*$ entonces por hipótesis existe $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $s(A)$ tal que $f_n \to f$ si $n \to \infty$.

Sea $\epsilon > 0$. Por lo anterior encontramos $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_1$ entonces

$$\|f_n - f\| < \frac{\epsilon}{3M}$$

Fijemos $k > N_1$. Por la condición 2. sabemos que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_2$ entonces

$$|f_k(x_n) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Consideremos $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ y $n > N$ de lo anterior se deduce que

$$|f(x_n) - f(x)| \leq |f(x_n) - f_k(x_n)| + |f_k(x_n) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)|$$
$$\leq \|f - f_k\|\|x_n\| + \frac{\epsilon}{3} + \|f_k - f\|\|x\| < \frac{\epsilon}{3M}M + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3M}M = \epsilon$$

es decir $f(x_n) \to f(x)$ si $n \to \infty$ y por tanto, $x_n \xrightarrow{w} x$ si $n \to \infty$. □

Corolario 1.7.12. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio normado. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X tal que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es acotada para toda $f \in X^*$ entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada.*

Recordemos la definición de conjunto acotado en un espacio vectorial topológico.

Definición 1.7.13. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico. $M \subseteq X$ es acotado si para cualquier vecindad U del cero existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $M \subseteq \lambda U$.*

Proposición 1.7.14. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio normado. Si $M \subseteq X$ es débilmente acotado, entonces M es acotado.*

Demostración. Supongamos que M no fuese acotado, entonces existe $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión en M tal que $\|x_n\| \to \infty$ si $n \to \infty$.

Por otra parte si M es débilmente acotado entonces $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset M$ tambien es débilmente acotado.

Sea $f \in X^*$ y consideremos $U_f = \{x \in X \mid |f(x)| < 1\}$ la cual es una vecindad débil del cero.

Dado que M es débilmente acotado econtramos $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\{x_1, x_2, \ldots\} \subseteq \lambda U_f$$

por lo tanto $|f(x_n)| < \lambda$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y así por el Corolario 1.7.12 concluimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada lo cual es una contradicción. □

Proposición 1.7.15. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio normado. $M \subseteq X$ es débilmente acotado si y sólo si $f(M)$ es acotado en $\mathbb{R}$ para todo $f \in X^*$.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Supongamos que M es débilmente acotado, por la Proposición 1.7.14 se tiene que M es acotado, es decir existe $C > 0$ tal que $\|x\| \leq C$ para todo $x \in M$. De esta forma podemos escribir

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\| \leq C\|f\|$$

para toda $x \in M$. Es decir $f(M)$ es acotado.

$\Leftarrow]$ Supongamos que para toda $f \in X^*$ existe $c_f > 0$ tal que $|f(x)| \leq c_f$ para toda $x \in M$.

Sea $U = \{x \in X \mid |f_1(x)| < \epsilon, \ldots, |f_n(x)| < \epsilon\}$ una vecindad debil del 0. Consideremos $C = \text{máx}\{c_{f_1}, \ldots, c_{f_n}\}$, es fácil ver que

$$M \subset \frac{C}{\epsilon}U$$

por tanto, M es débilmente acotado. □

1.7.2. Topología débil* y convergencia débil*.

En la sección anterior vimos que si X es un espacio normado, entonces se puede definir la topología débil mediante el uso de su dual X^*. De una manera análoga se define la topología débil para X^* como la generada por X^{**} y que se denota por $\sigma(X^*, X^{**})$. sin embargo, la mayoria de los resultados que veremos no hacen uso de esta topología, hacen referencia a la toplogía débil* la cual definimos en seguida.

Sabemos que si X es un espacio normado entonces $C : X \to X^{**}$ dada por $C(x)(f) = \widehat{x}f = f(x)$ para toda $f \in X^*$ es un encaje. Es decir podemos ver a X como un subespacio de X^{**}. Con esta observación definimos la topología débil* para X^* como:

Definición 1.7.16. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio normado. Sean $x_1, \ldots, x_k \in X$ y $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k > 0$. Un conjunto de la forma*

$$U_{f,x_1,\ldots,x_k,\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k} = \{g \in X^* \mid |(f-g)(x_i)| = |\widehat{x}_i(f-g)| < \epsilon_i \; \forall i = 1, \ldots, k\}$$

es un abierto para la topología débil sobre X^*. La familia*

$$\mathcal{B}_3 = \{U_{f,x_1,\ldots,x_k,\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k} \mid f \in X^*, x_i \in X, \epsilon_i > 0 \;\; , k \in \mathbb{N}\}$$

es la base que genera la topología debil para X^*.*

La topología débil* es usualmente denotada por $\sigma(X^*, X)$. Cabe hacer notar que las topologías débil y débil* para X^* no siempre coinciden, de hecho son iguales si y sólo si X es reflexivo. De la misma forma estas topologías se pueden generalizar para X^{**}, es decir $\sigma(X^{**}, X^{***})$ denota la topología débil para X^{**} mientras que $\sigma(X^{**}, X^*)$ denota la topología debil* para X^{**}.

Observación 1.7.17. *Si $(X, \| \|)$ es un espacio normado, entonces al considerar la topología débil* sobre X se tiene que $(X, \sigma(X^*, X))$ es un espacio vectorial topológico de Hausdorff.*

Definición 1.7.18. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio normado. $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X^* converge débilmente* a $f \in X^*$ si $(f_n)_{n=1}$ converge a f con la topología debil*. Esta convergencia sera denotada por*

$$f_n \xrightarrow{w^*} f$$

si $n \to \infty$.

La demostración de la siguiente proposición se omite ya que es análoga a la hecha en 1.7.8.

Proposición 1.7.19. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio normado. $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X^* converge debilmente* a $f \in X^*$ si y sólo si $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$ para toda $x \in X$.*

A continuación enunciamos y probamos uno de los teoremas más importantes de esta sección. El llamado Teorema de Banach-Alaoglu.

Teorema 1.7.20 (Banach-Alaoglu)**.** *Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach. La bola unitaria cerrada en X^* denotada por $B^* = \{f \in X^* \mid \|f\| \leq 1\}$ es compacta en la topología débil*.*

Demostración. Para cada $x \in X$ defínase $D_x = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid |\lambda| \leq \|x\|\}$. Claramente D_x es compacto en $\mathbb{R}$ para toda $x \in X$.

Sea $D = \prod_{x \in X} D_x$, por el Teorema de Tychonoff D es compacto en la topología producto.[3]

Consideremos B^* con la topología débil* y la función $\psi : B^* \to D$ dada por

$$\psi(f) = (f(x))_{x \in X}$$

para $f \in B^*$.

Por la forma en que definimos los abiertos en la topología débil* y la manera en que estan definidos los abiertos en la topología producto, se deduce que ψ es una función continua.

ψ es inyectiva ya que si $\psi(f) = \psi(g)$ entonces $(f(x))_{x \in X} = (g(x))_{x \in X}$ y por tanto, $f(x) = g(x)$ para toda $x \in X$. Es así que ψ es biyectiva sobre su imagen, la función inversa $\psi^{-1} : \psi(B^*) \to B_*$ viene dada por

$$\psi^{-1}((f(x))_{x \in X}) = f$$

[3]Para ver la definición de la topología producto en D y una demostración del Teorema de Tychonoff veáse [17].

para $(f(x))_{x\in X} \in \psi(B^*)$. De nuevo de las definiciones de la topología producto y la topología débil* se tiene que ψ^{-1} también es continua.

Todo lo anterior se resume a decir que $\psi : B^* \to \psi(B^*)$ es un homeomorfismo. Observemos que si probamos que $\psi(B^*)$ es cerrado en D entonces $\psi(B^*)$ sería compacto por ser cerrado en un compacto y por tanto, B^* sería débil* compacto.

Sea $\xi = (\xi_x)_{x\in X} \in D$ tal que $\xi \in \overline{\psi(B^*)}$, consideremos $f : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \xi_x$$

para todo $x \in X$.

Probaremos que f es lineal, sean $x_1, x_2 \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sea $A = \{x_1, x_2, \alpha x_1 + \beta x_2\}$ y consideremos para todo $n \in \mathbb{N}$

$$U_n = \Pi_{x\in X} U_x^n = \begin{cases} U_x^n = D_x & \text{si } x \notin A \\ U_x^n = \{r \in D_x \mid |\xi_x - r| < \frac{1}{n}\} & \text{si } x \in A, \end{cases}$$

claramente U_n es abierto en la topología producto por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que existe $f_n : X \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que $\psi(f_n) \in U_n \cap \psi(B^*)$.

Es así que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|f(\alpha x_1 + \beta x_2) - \alpha f(x_1 - \beta f(x_2)| = |f(\alpha x_1 + \beta x_2) - f_n(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

$$+\alpha f_n(x_1) - \alpha f(x_1) + \beta f_n(x_2) - \beta f(x_2) + f_n(\alpha x_1 + \beta x_2) - \alpha f_n(x_1) - \beta f_n(x_2)|$$

$$\leq |f(\alpha x_1 + \beta x_2) - f_n(\alpha x_1 + \beta x_2)| + |\alpha f(x_1) - \alpha f_n(x_1)| + |\beta f(x_2) - \beta f_n(x_2)|$$

$$< \frac{1 + |\alpha| + |\beta|}{n} \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Por tanto, $f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$, es decir f es lineal y más aún

$$|f(x)| = |\xi_x| \leq \|x\|$$

para toda $x \in X$. Por tanto, $f \in B^*$ y $\psi(f) = (\xi_x)_{x\in X} = \xi$, es decir $\xi \in \psi(B^*)$ y por lo tanto $\psi(B^*)$ es cerrado. □

Corolario 1.7.21. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio normado. $A \subseteq X^*$ es débil* compacto si y sólo si A es débil* cerrado y acotado en norma.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $A \subseteq X^*$ débil* compacto. Claramente A es débil* cerrado, consideremos $f : X^* \to \mathbb{R}$ una funcional continua que, tambien es continua con respecto a la topología débil*. De esta forma $f(A)$ es compacto en $\mathbb{R}$ y por lo tanto $f(A)$ es acotado en $\mathbb{R}$ es así que A es débil* acotado y por la Proposición 1.7.14 es acotado en norma.

$\Leftarrow$] Si A es débil* cerrado y acotado en norma entonces existe un bola abierta $B_\epsilon = \{g \in X^* \mid \|g\| < \epsilon\}$ tal que $A \subset B_\epsilon$. Por el Teorema de Alaoglu $\overline{B_\epsilon}$ es débil* compacta, además $A \subseteq \overline{B_\epsilon}$. De esta forma A que es débil* cerrado esta contenido en un conjunto débil* compacto, de donde se deduce que A es débil* compacto. $\square$

Proposición 1.7.22. *Sea $(X, \| \, \|)$ un espacio normado. El encaje canónico C del Teorema 1.6.1, considerado como función definida sobre el espacio vectorial topólogico $(X, \sigma(X, X^*))$ en el espacio vectorial topológico $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$ es un homeomorfismo sobre su imagen.*

Demostración. La demostración se sigue inmediatamente de las definiciones de la topología débil y débil*. $\square$

1.7.3. El Teorema de Eberlein-Smulian.

Definición 1.7.23. *Sea $(X, \| \, \|)$ un espacio de Banach. Decimos que una sucesión $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ en $X^* \setminus \{0\}$ separa puntos en X si para todo $x \in X$ tal que $x_n^*(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x = 0$.*

Lema 1.7.24. *Sea $(X, \| \, \|)$ un espacio de Banach. Si $X^* \setminus \{0\}$ contiene una sucesión $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ que separa puntos en X, entonces la topología débil sobre un subconjunto débilmente compacto de X es metrizable.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\|x_n^*\| = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Definimos $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x-y)|}{2^n}$$

para $x, y \in X$.

d esta bien definida pues

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x-y)|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n^*\| \|x-y\|}{2^n} = \|x - y\|$$

Claramente $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$ y $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$, ademas si $x, y, z \in X$ entonces:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x-z+z-y)|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x-z)|}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n^*(z-y)|}{2^n}$$

$$= d(x,z) + d(z,y)$$

Es decir d es una métrica para X.

Sea $A \subset X$ débilmente compacto y denotemos $A_d = A$ donde el subíndice d indica que A se considera como un subespacio del espacio métrico (X,d).

Consideremos $I : A \to A_d$ dada por $I(x) = x$ para toda $x \in A$. Sean $x_0 \in X$, $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2\|x - x_0\|}$$

El conjunto $U_{x_0} = \{x \in X \mid |x_n^*(x - x_0)| < \frac{\epsilon 2^n}{2N}\ \forall n = 1, \dots, N\}$ es una vecindad débil de x_0 tal que si $x \in U_{x_0}$ entonces

$$d(x,x_0) = \sum_{n=1}^{N} \frac{|x_n^*(x - x_0)|}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x - x_0)|}{2^n}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\epsilon 2^n}{2^n 2N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\|x - x_0\|}{2^n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Por lo tanto I es continua, más aún ya que I es biyectiva, A débilmente compacto y A_d de Haussdorff tenemos que I es un homeomorfismo. De esta forma la topología generada por d coincide con la topología débil. Es decir la topología débil sobre A es metrizable. □

Lema 1.7.25. *Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach. Si F es un subespacio de dimensión finita de X^* entonces existe $\{x_1, \dots, x_m\} \subset X$ tal que $\|x_i\| = 1$ para toda $i = 1, \dots, m$ y para toda $x^* \in F$ se cumple que*

$$\max_{1 \leq i \leq m} |x^*(x_i)| > \frac{\|x^*\|}{2}$$

Demostración. Sea $S_1^F = \{x^* \in F \mid \|x^*\| = 1\}$. Dado que F es de dimensión finita S_1^F es compacto.

Si tomamos una $\frac{1}{4}$-red para S_1^F entonces existen $x_1^*, \dots, x_m^* \in S_1^F$ tal que

$$S_1^F \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_{\frac{1}{4}}(x_i^*)$$

Sea $x^* \in S_1^F$. Por lo anterior existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\|x^* - x_j^*\| < \frac{1}{4}$ y por tanto

$$\min_{1 \leq i \leq m} \|x^* - x_i^*\| \leq \|x^* - x_j^*\| < \frac{1}{4}.$$

Recordemos que $\|x_i^*\| = \sup_{\|x\|=1} |x_i^*(x)|$. Si $\epsilon = \frac{1}{4}$ entonces existe $x_i \in X$ tal que $\|x_i\| = 1$ y

$$\|x_i^*\| - \epsilon < |x_i^*(x_i)| \leq \|x_i^*\|$$

para todo $i = 1, \ldots, m$. Por tanto, $|x_i^*(x_i)| > \frac{3}{4}$ para todo $i = 1, \ldots, m$.

De todo lo anterior y como el máximo de la suma de dos conjuntos es la suma de los máximos obtenemos:

$$\max_{1\leq i\leq m} |x^*(x_i)| = \max_{1\leq i\leq m} |x_i^*(x_i) - x_i^*(x_i) + x_i^*(x_i)|$$

$$\geq \max_{1\leq i\leq m} |x_i^*(x_i)| - \min_{1\leq i\leq m} |x^*(x_i) - x_i^*(x_i)| > \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \frac{\|x^*\|}{2}$$

de esta forma se ha demostrado el resultado para los elementos de S_1^F. Para los otros casos considerese $\frac{x^*}{\|x^*\|}$. □

Lema 1.7.26. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio normado. Si X es separable entonces X^* es débil* separable.*

Demostración. El resultado es obvio si $X = \{0\}$. Supongamos que $X \neq \{0\}$ y sea $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ un conjunto denso y numerable en B la bola cerrada de radio 1 en X, de esta forma $\|a_i\| = 1$ para todo $i \geq 1$.

Consideremos $C : X \to X^{**}$ el encaje canonico. Sea $i \in \mathbb{N}$ y recordemos que $\|\widehat{a_i}\| = \sup_{\|x^*\|=1} \|x^*(a_i)\|$ además

$$\|\widehat{a_i}\| = \|C(a_i)\| = \|a_i\| = 1$$

Por tanto existen a_i^* tal que $\|a_i^*\| = 1$ y $|\widehat{a_i}(a_i^*)| > \frac{3}{4}$ para toda $i \in \mathbb{N}$. A continuación probaremos que

$$X^* = \overline{s(a_1^*, a_2^*, \ldots)}^{w^*}$$

donde $\overline{s(a_1^*, a_2^*, \ldots)}^{w^*}$ denota la cerradura débil* del subespacio $s(a_1^*, a_2^*, \ldots)$.

Supongamos que lo anterior no se cumple, es decir que existe $x^* \in X^*$ tal que $x^* \notin \overline{s(a_1^*, a_2^*, \ldots)}^{w^*}$. Por el Corolario 1.8.14 de la siguiente sección, existe $x^{**} : X^* \to \mathbb{R}$ funcional lineal y débil* continua tal que

$$x^{**}(x^*) \neq 0 \qquad \text{y} \qquad x^{**}(a_i^*) = 0$$

para todo $i \in \mathbb{N}$.

Sabemos que el espacio dual de X^* con la topología débil* es $C(X) = \overline{X}$ y por tanto que existe $x \in X$ tal que $x^{**} = \widehat{x}$. Sea $x_0 = \frac{x}{\|x\|}$, tenemos que

$$x^*(x_0) = \widehat{x_0}(x^*) \neq 0 \qquad \text{y} \qquad a_i^*(x_0) = \widehat{x_0}(a_i) = 0$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. De esta forma si $i \in \mathbb{N}$ entonces

$$|\widehat{a_i}(a_i^*) - \widehat{x_0}(a_i^*)| = |\widehat{a_i}(a_i^*)| > \frac{3}{4}$$

y por tanto,

$$\|a_i - x_0\| = \|\widehat{a_i - x_0}\| \geq \frac{3}{4}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción al hecho de que $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ es denso en B.

Ahora, las combinaciones lineales de los $(a_i^*)_{i=1}^{\infty}$ con coeficientes racionales forman un conjunto débil* denso y numerable en X^*. □

Corolario 1.7.27. *Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio normado. Si $X \neq 0$ es separable entonces existe una sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ en X^* que separa puntos en X.*

Lema 1.7.28. *Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach. Sea $A \subset X$ tal que todo subconjunto infinito numerable de A tiene un punto de acumulación débil en X. Entonces $x^*(A)$ es relativamente compacto para todo $x^* \in X^*$.*

Demostración. Sea $x^* \in X^*$, para ver que $x^*(A)$ es relativamente compacto basta probar que $x^*(A)$ es acotado pues en $\mathbb{R}$ todo compacto es cerrado y acotado.

Supongamos que $x^*(A)$ no es acotado por tanto, podemos encontrar una sucesión $A_0 = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ contenida en A tal que $x^*(a_n) > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis existe $x_0 \in \overline{A_0}^w$, consideremos $U_l = \{x \in X \mid |x^*(x) - x^*(x_0)| < \frac{1}{l}$ para todo $l \geq 1$, claramente U_l es una vecindad débil de x_0 para todo $l \geq 1$ por tanto, existe una subsucesión $(a_{n_l})_{l=1}^{\infty}$ de A_0 tal que

$$x^*(a_{n_l}) - x^*(x_0) < \frac{1}{l},$$

para todo $l \geq 1$ y por tanto, $n_l < \frac{1}{l} + x^*(x_0)$ para todo $l \geq 1$, lo cual claramente es una contradicción, es así que $x^*(A)$ es acotado. □

Teorema 1.7.29 (Eberlein-Smulian)**.** *Sean $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach y $A \subset X$. Los siguientes tres enunciados son equivalentes:*

1. *La cerradura débil de A es débilmente compacta.*

2. *Toda sucesión de elementos de A contiene una subsucesión débilmente convergente a un elemento de X.*

3. *Todo subconjunto infinito numerable de A tiene un punto de acumulación respecto a la topología débil.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de A. Consideremos

$$X_0 = \overline{s(a_i)_{i=1}^{\infty}}^{w}$$

donde $\overline{s(a_i)_{i=1}^{\infty}}^{w}$ denota la cerradura débil del subespacio $s(a_i)_{i=1}^{\infty}$.

Ahora si $\overline{A}^{w}$ denota la cerradura débil de A entonces $\overline{A}^{w} \cap X_0 \subseteq \overline{A}^{w}$ es débilmente compacto pues $\overline{A}^{w} \cap X_0$ es un subconjunto débil cerrado de un conjunto débil compacto. Tambien sabemos que $\overline{A}^{w} \cap X_0 \subseteq X_0$ y ya que X_0 es separable el Corolario 1.7.27 y el Lema 1.7.24 nos dicen que $\overline{A}^{w} \cap X_0$ es metrizable.

Recordemos que en espacios metrizables el concepto de subconjunto compacto es equivalente al de compacto por sucesiones. Es de aquí que existe $(a_{n_k})_{n=1}^{\infty}$ subsucesión de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que para algún $a \in X$

$$a_{n_k} \xrightarrow{w} a$$

cuando $k \to \infty$.

2. $\Rightarrow$ 3. Sea $A_0 \subset A$ un conjunto infinito numerable. Por tanto, podemos escribir $A_0 = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ y por hipótesis existe $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de A_0 tal que si $k \to \infty$

$$a_{n_k} \xrightarrow{w} a$$

para algún $a \in X$. Claramente a es un punto de acumulación de A_0 respecto a la topología débil.

3. $\Rightarrow$ 1. Sea A subconjunto de X tal que todo subconjunto infinito numerable de A tiene un punto de acumulación respecto a la topología débil. Sea $x^* \in X^*$ por el Lema 1.7.28 $x^*(A)$ es relativamente compacto y por tanto, acotado. La Proposición 1.7.15 nos dice que A es débilmente acotado y la Proposición 1.7.14 implica que A es acotado.

Sea $C : X \to X^{**}$ el encaje canónico. El siguiente subconjunto de X^{**}

$$\overline{C(A)}^{w*}$$

denotara la cerradura de $C(A)$ con respecto a la topología débil*.

Basta probar que
$$\overline{C(A)}^{w*} \subset C(X)$$
ya que si esto es cierto, como C es una isometría sobre su imagen entonces $C(\overline{A}^w) = \overline{C(A)}^{w*}$, donde $\overline{A}^w$ es la cerradura débil de A. Como A es acotado se tiene que A es débilmente acotado y por tanto, $\overline{A}^w$ es débilmente acotado y por 1.7.14 se tiene que $\overline{A}^w$ es acotado de donde $C(\overline{A}^w)$ es acotado. Del Corolario 1.7.21 se tiene que $\overline{C(A)}^{w*}$ es débil* compacto y por tanto, $\overline{A}^w$ es débilmente compacto, que es lo se quería.

Sea $x^{**} \in \overline{C(A)}^{w*}$ y $x_1^* \in X^*$ tal que $\|x_1^*\| = 1$. Claramente
$$U_1 = \{z \in X^{**} \mid |(z - x^{**})(x_1^*)| < 1$$
es una vecindad débil* de x^{**}. Por lo tanto existe $a_1 \in A$ tal que
$$|(x^{**} - \widehat{a_1})(x_1^*)| < 1$$
Sabemos que $s(x^{**}, x^{**} - \widehat{a_1})$ es de dimensión 2 y por el Lema 1.7.25 existen $\{x_2^*, \ldots, x_{n(2)}^*\} \subset X^*$ tal que $\|x_i\| = 1$ para toda $i = 2, \ldots, n(2)$ y
$$\max_{2 \leq i \leq n(2)} |y^{**}(x_i^*)| > \frac{\|y^{**}\|}{2}$$
para todo $y^{**} \in s(x^{**}, x^{**} - \widehat{a_1})$.

De nueva cuenta
$$U_2 = \{z \in X^{**} \mid |(x^{**} - z)(x_i^*) < \frac{1}{2}, \forall 1 \leq i \leq n(2)\}$$
es una vecindad débil de x^{**}. Por lo tanto existe $a_2 \in A$ tal que
$$\max_{1 \leq m \leq n(2)} |(x^{**} - \widehat{a_2})(x_m^*)| \frac{1}{2}$$

El subespacio $s(x^{**}, \widehat{a_1}, \widehat{a_2})$ es dimensión finita y por el Lema 1.7.25 existe $\{x_{n(2)+1}^*, \ldots, x_{n(3}^*\} \subset X^*$ tal que $\|x_i^*\| = 1$ para todo $n(2) + 1 \leq i \leq n(3)$ y
$$\max_{n(2)+1 \leq m \leq n(3)} |y^{**}(x_m^*)| > \frac{\|y^{**}\|}{2}$$
para todo $y^{**} \in s(x^{**}, \widehat{a_1}, \widehat{a_2})$.

Ahora
$$U_3 = \{z \in X^{**} \mid |(x^{**} - z)(x_i^*)| < \frac{1}{3}, \forall 1 \leq i \leq n(3)\}$$

es una vecindad débil* de x^{**}. Por lo tanto existe $a_3 \in A$ tal que

$$\max_{1\leq m\leq n(3)} |(x^{**} - \widehat{a_3})(x_m^*)| < \frac{1}{3}$$

continuando de manera inductiva obtenemos:

1. Una sucesión creciente de naturales $(n(k))_{k=1}^{\infty}$.
2. Una sucesión $(x_i^*)_{i=1}^{\infty}$ de elementos de X.
3. Una sucesión $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ de elementos de A.

tal que

$$\max_{n(k-1)+1\leq m\leq n(k)} |y^{**}(x_m^*)| > \frac{\|y^{**}\|}{2} \tag{1.15}$$

para todo $y^{**} \in s(x^{**}, \widehat{a_1}, \ldots, \widehat{a_{k-1}})$. También

$$\max_{1\leq m\leq n(k)} |(x^{**} - \widehat{a_k})(x_m^*)| < \frac{1}{k}. \tag{1.16}$$

Consideremos $X_0 = \overline{s(x^{**}, \widehat{a_1}, \widehat{a_2}, \ldots)}^{w*}$. Por hipotesis existe $x_0 \in X$ tal que

$$a_n \xrightarrow{w} x_0$$

cuando $n \to \infty$. Pero como X_0 es débilmente cerrado $\widehat{x_0} \in X_0$.

Ahora, como $x^{**} - \widehat{x_0} \in X_0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x^{**} - \widehat{x_0} \in s(x^{**}, \ldots, \widehat{a_{k-1}})$ y de la desigualdad (1.15) deducimos que

$$\max_{m\in\mathbb{N}} |(x^{**} - \widehat{x_0})(x_m^*)| > \frac{\|x^{**} - \widehat{x_0}\|}{2} \tag{1.17}$$

Sean $m, p \in \mathbb{N}$ y $p_0 = \max\{m, p\}$. Como x_0 es un punto de acumulación con respecto a la topología débil de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tambien lo es de $(a_n)_{n=p_0}^{\infty}$ y por tanto, existe $k \leq p_0$ tal que

$$|x_i^*(a_k - x_0)| < \frac{1}{p}$$

para toda $1 \leq i, m \leq p_0$.

Sabemos, por construcción que $n(k) \geq k \geq p_0 \geq m$. Es así, que de la relación (1.16) obtenemos

$$|(x^{**} - \widehat{a_k})(x_m^*)| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{p_0} \leq \frac{1}{p}$$

De lo anterior deducimos

$$|(x^{**}-\widehat{x_0})(x_m^*)| \leq |(x^{**}-\widehat{a_k})(x_m^*)| + |x_m^*(a_k - x_0)| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}$$

para toda $m \in \mathbb{N}$. Usando la desigualdad (1.17) finalmente llegamos a que

$$\|x^{**}-\widehat{x_0}\| < \frac{4}{p}$$

para toda $p \in \mathbb{N}$. Es decir $x^{**} = \widehat{x_0} = C(x_0)$. $\square$

1.8. Convexidad.

Definición 1.8.1. *Sean A y C subconjuntos de un espacio vectorial X.*

1. *A es balanceado si $\alpha A \subseteq A$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $|\alpha| \leq 1$.*

2. *A es absorbente si para cada $x \in X$ existe $\epsilon_x > 0$ tal que $x \in tA$ para todo $t > \epsilon_x$.*

3. *Decimos que C es convexo si para todo $x_1, x_2 \in C$ se tiene que*

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$$

para todo $\lambda \in (0,1)$.

Observación 1.8.2. *Sea A un subconjunto de un espacio vectorial X.*

1. *Si A es absorbente o balanceado y no vacío entonces $0 \in A$.*

2. *Si A es balanceado entonces $-A = \{-a \mid a \in A\} = A$.*

3. *La unión e interseccion arbitraria de conjuntos balanceados es balanceada.*

4. *La intersección arbitraria de conjuntos convexos es convexa.*

Definición 1.8.3. *Sean (X,τ) un espacio vectorial topológico y $A \subseteq X$. Definimos la envolvente convexa de A como la intersección de todos los subconjuntos de X que son convexos y contienen a A. La envolvente convexa será denotada por* $\operatorname{conv}(A)$.

Proposición 1.8.4. *Si A es un subconjunto de un espacio normado X entonces*

$$\operatorname{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid a_i \geq 0,\ x_i \in A\, \forall i = 1, \dots n, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Lema 1.8.5. *Sean $C_1, \dots, C_n$ subconjuntos convexos de un espacio vectorial X. Entonces*

$$\operatorname{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i \right) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid a_i \geq 0,\ x_i \in C_i, \forall i = 1, \dots, n\ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \right\}.$$

Lema 1.8.6. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topologico de Hausdorff. Supongamos que $K_1, \dots, K_n$ son subconjuntos no vacíos, convexos y compactos de X, entonces* $\operatorname{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right)$ *es compacto.*

Demostración. Dado que la union finita de compactos es compacto, es suficiente probar el resultado para $n = 2$. Sean pues K_1 y K_2 subconjuntos convexos y compactos de X.

Dado que (X, τ) es un espacio vectorial topológico, se tiene que la función $T : \mathbb{R}^2 \times X^2 \to X$ dada por

$$T(a_1, a_2, x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

es continua en $\mathbb{R}^2 \times X^2$. Por lo tanto como $K_1 \times K_2$ es compacto en X^2 se tiene que $T(\Delta_1 \times K_1 \times K_2)$ es compacto en X, donde Δ_1 esta definido por $\Delta_1 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 + a_2 = 1,\ a_1, a_2 \geq 0\}$.

Ahora usando el Lema 1.8.5 se tiene que $\operatorname{conv}(K_1 \cup K_2) = T(\Delta_1 \times K_1 \times K_2)$, es así que $\operatorname{conv}(K_1 \cup K_2)$ es compacto. $\square$

Definición 1.8.7. *Un espacio vectorial topológico (X, τ) se dice que es localmente convexo si τ tiene una base formada por subconjuntos convexos de X.*

Observación 1.8.8. *Si $(X, \| \|)$ es un espacio normado entonces claramente es localmente convexo, más aún $(X, \sigma(X, X^*))$ y $(X^*, \sigma(X^*, X))$ son espacios vectoriales topológicos localmente convexos.*

Proposición 1.8.9. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico.*

1. *Si A es un subconjunto de X balanceado entonces $\overline{A}$ e* $\operatorname{int} A$ *son balanceados siempre y cuando* $0 \in \operatorname{int} A$.

2. *Toda vecindad del* 0 *en* X *es absorbente.*

3. *Para toda* U *vecindad del* 0 *en* X*, existe* V *una vecindad balanceada del* 0 *en* X *tal que*
$$V \subseteq \overline{V} \subseteq \overline{V+V} \subseteq U.$$
Más aún, si U *es convexo entonces* V *se puede elegir tambien convexo.*

Demostración. Daremos la demostración de 2. y 3. la prueba de la conclusión 1. se puede encontrar en [22].

2.] Sean U una vecindad del 0 y $x \in X$. Dado que el producto por un escalar es continuo, en particular es continuo en $(0,x)$ y por tanto, existe una vecindad del $0 \in \mathbb{R}$ de la forma $(-\epsilon,\epsilon)$ y una vecindad W de x tales que $ty \in U$ para todo $y \in W$ y todo $0 < t < \epsilon$. Es así que
$$x \in t^{-1}U$$
para todo $t^{-1} > \epsilon^{-1}$, es decir U es absorbente.

3.] Sea U una vecindad del 0 en X. Por la continuidad de la suma de vectores en X existen U_1 y U_2 vecindades del 0 tal que $U_1 + U_2 \subseteq U$. Consideremos
$$U_3 = U_1 \cap U_2 \cap (-U_1) \cap (-U_2),$$
claramente U_3 es una vecindad del 0 tal que $U_3 = -U_3$ y $U_3 + U_3 \subseteq U$. Este procedimiento se puede aplicar a U_3 en lugar de U y se obtiene una vecindad U_4 del 0 tal que $U_4 = -U_4$ y $U_4 + U_4 + U_4 + U_4 \subseteq U$.

Afirmamos que $U_4 + U_4 + U_4 \cap (X \setminus U + U_4) = \emptyset$, si no fuera así existiría $x+y+z \in U_4+U_4+U_4$ con $x+y+z = w \in U_4$ y $w \notin U$, de donde tendríamos que $w = x+y+z+0 \in U_4+U_4+U_4+U_4$ lo cual es una contradicción.

Observemos que $(X \setminus U) + U_4$ es abierto pues U_4 lo es, de donde deducimos que
$$\overline{U_4 + U_4} \cap ((X \setminus U) + U_4) = \emptyset$$
y por tanto, $\overline{U_4 + U_4} \subseteq U$.

La continuidad del producto por un escalar en X implica que existe $\delta > 0$ y U_5 vecindad del 0 tal que $\alpha U_5 \subseteq U_4$ para todo $|\alpha| < \delta$.

Sea
$$V = \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha U_5.$$
Afirmamos que V es balanceado. Para ver esto tomemos $|\beta| \leq 1$, si $x \in \beta V$ entonces $x = \beta\alpha y$ para algun $|\alpha| < 1$ y algun $y \in U_5$, denotando por $\gamma = \beta\alpha$

tenemos que $x \in \gamma U_5$ y dado que $|\gamma| < 1$, deducimos que $x \in V$ y por tanto, V es balanceado.

Claramente V es una vecindad del 0 contenida en U_4 y además

$$V \subseteq \overline{V} = \overline{V + \{0\}} \subseteq \overline{V + V} \subseteq \overline{U_4 + U_4} \subseteq U. \tag{1.18}$$

Es así que la Proposición esta demostrada a ecepción del caso cuando U es convexo, lo cual probamos enseguida.

Ahora supongamos que U es una vecindad convexa que contiene al cero. Es suficiente probar el resultado para $U \cap (-U)$ pues $U \cap (-U) \subseteq U$, es así que de ahora en adelante supondremos que $U = -U$. La convexidad de U implica que

$$\frac{U}{3} + \frac{U}{3} - \frac{U}{3} = U$$

lo cual implica fácilmente que

$$\left(\frac{U}{3} + \frac{U}{3}\right) \cap \left((X \setminus U) + \frac{U}{3}\right) = \emptyset.$$

Obviamente $(X \setminus U) + \frac{U}{3}$ es un conjunto abierto que contiene a $X \setminus U$ y por tanto,

$$\overline{\frac{U}{3} + \frac{U}{3}} \subseteq U$$

Un razonamiento análogo al hecho en (1.18) nos dice que es suficiente encontrar una vecindad balanceada y convexa del 0 tal que $V \subseteq \frac{U}{3}$.

Consideremos

$$W = \bigcap_{|\alpha|=1} \frac{\alpha U}{3}.$$

Claramente W es un subconjunto convexo de $\frac{U}{3}$, por lo ya demostrado tenemos que existe B una vecindad balanceada del 0 que esta contenida en $\frac{U}{3}$. Además para todo $|\alpha| = 1$ se tiene que $B = \alpha B \subset \frac{\alpha U}{3}$ y por tanto, $B \subseteq W$, lo cual implica que $0 \in \text{int} W$.

Ahora probamos que W es balancedo. Sea $|\beta| \leq 1$, podemos escribir $\beta = t\gamma$ donde $0 \leq t \leq 1$ y $|\gamma| = 1$, es así que

$$\beta W = t \left(\bigcap_{|\alpha|=1} \frac{\alpha\gamma U}{3} \right) = tW = tW + (1-t)\{0\} \subseteq W,$$

es decir W es balanceada. Del punto 1. de esta Proposición se tiene que int$W$ es una vecindad balanceada y convexa del 0 contenida en $\frac{U}{3}$, es así que $V = \text{int} W$ es la vecindad del 0 buscada. $\square$

Definición 1.8.10. *Sea C un subconjunto de X un espacio vectorial. Un punto $x \in C$ es interno si para todo $y \in X$ existe $\epsilon > 0$ tal que $x + ty \in C$ para todo $|t| < \epsilon$. El conjunto de puntos internos de C será denotado por $I(C)$.*

Proposición 1.8.11. *Sea X un espacio vectorial. Si C es un subconjunto convexo de X entonces $I(C)$ es convexo.*

Demostración. Sean $x, y \in I(C)$ y $\lambda \in [0, 1]$. Denotemos por $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, si $w \in X$ entonces existen $\epsilon_1 > 0$ y $\epsilon_2 > 0$ tales que $x + t_1 w$, $y + t_2 w \in C$ para todo $|t_1| < \epsilon_1$, $|t_2| < \epsilon_2$.

Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, si t es tal que $|t| < \epsilon$ entonces

$$z + tw = \lambda(x + tw) + (1 - \lambda)(y + tw) \in C.$$

Es decir $z \in I(C)$. □

Proposición 1.8.12. *Sea X un espacio vectorial. Supongamos que C es un subconjunto convexo de X tal que $0 \in I(C)$, consideremos $p_C : X \to \mathbb{R}$ dada por*

$$p_C(x) = \inf\left\{r \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{r} \in C, r > 0\right\}.$$

Entonces $p_C(x) < \infty$ para todo $x \in X$ y

1. *$p_C(x) \geq 0$ para todo $x \in X$.*
2. *$p_C(0) = 0$.*
3. *$p_C(\lambda x) = \lambda p_C(x)$ para todo $x \in X$ y todo $\lambda \geq 0$.*
4. *$p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$ para todo $x, y \in X$.*

p_C es llamada la funcional de Minkowski para C.

Teorema 1.8.13 (de separación de Hanh-Banach)**.** *Sean X un espacio vectorial topologico y A, B dos subconjuntos no vacios, convexos y disjuntos de X.*

1. *Si A es abierto entonces existe $f \in X^*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(a) < \gamma \leq f(b)$$

para todo $a \in A$ y todo $b \in B$.

2. *Si A es compacto, B es cerrado y X localmente convexo. Entonces existe $f \in X^*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(a) < \gamma < f(b)$$

para todo $a \in A$ y todo $b \in B$.

Demostración. 1.] Sea $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$. Denotemos $x_0 = b_0 - a_0$, dado que la suma de un conjunto abierto con otro siempre es abierto se tiene que $C = A - B + x_0$ es una vecindad convexa de 0 en X.

Sea $p_C : X \to \mathbb{R}$ la funcional de Minkowski para C, sabemos que p_C satisface las conclusiones de la Proposición 1.8.12, ya que $A \cap B = \emptyset$ se tiene que $x_0 \notin C$ y por lo tanto $p_C(x_0) \geq 1$.

Sea $M = s(x_0)$. Defínase $f_0 : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_0(tx_0) = t$$

para toda $t \in \mathbb{R}$. Supongamos que $t \geq 0$, entonces por la observación hecha en el párrafo anterior $f_0(tx_0) = t \leq tp_C(x_0) = p_C(tx_0)$. Si $t < 0$ entonces $f_0(tx_0) = t < 0 \leq p_C(tx_0)$. Por tanto,

$$f_0(tx_0) \leq p_C(tx_0)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Usando el Teorema de extensión de Hanh-Banach decimos que existe $f : X \to \mathbb{R}$ extensión lineal de f_0 tal que

$$f(x) \leq p_C(x)$$

para todo $x \in X$. Observando que $p_C(x) \leq 1$ para todo $x \in C$ deducimos que $f(x) \leq 1$ para todo $x \in C$, más aun $f(-x) \geq -1$ para todo $x \in C$. Es decir f es acotada en la vecindad convexa del 0 dada por $C \cap -C$, por lo tanto $f \in X^*$.

Sea $a \in A$ y $b \in B$. La función de $\mathbb{R}$ en X dada por

$$t \to (1+t)(a - b + x_0)$$

es continua pues el pruducto punto es una función continua de $\mathbb{R} \times X$ a X. Ahora como C es abierto en X existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ se tiene que $(1+t)(a - b + x_0) \in C$. En particular

$$(1+\epsilon)(a - b + x_0) \in C.$$

Por lo tanto $p_C((1+\epsilon)(a - b + x_0)) \leq 1$, es decir $p_C(a - b + x_0) < \frac{1}{1+\epsilon}$. Más aún dado que f es lineal y $f(x_0) = f_0(x_0) = 1$ se deduce que

$$f(a) - f(b) + 1 = f(a - b + x_0) \leq p_C(a - b + x_0) < \frac{1}{1+\epsilon}$$

De donde $f(a) - f(b) < \frac{1}{1+\epsilon} - 1 < 0$, es decir

$$f(a) < f(b)$$

para todo $a \in A$ y todo $b \in B$.

Sea $\gamma = \sup_{a\in A} f(a)$, claramente $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ para todo $a \in A$ y todo $b \in B$. Supongamos que existe $a' \in A$ tal que $f(a') = \gamma$.

La función de $\mathbb{R}$ a X dada por

$$t \to a' + tx_0$$

es continua pues el producto punto es una función continua de $\mathbb{R} \times X \to X$. Sabemos que A es abierto en X, por lo tanto existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ se tiene que $a' + tx_0 \in A$, en particular

$$a' + \epsilon x_0 \in A.$$

Es así que $\gamma + \epsilon = f(a' + \epsilon x_0) \leq \gamma$ lo cual es una contradicción.

2.] Sea A compacto y B cerrado, convexos, no vacíos y disjuntos. Dado que X es localmente convexo existe V una vecindad convexa del 0 tal que

$$(A + V) \cap B = \emptyset.$$

Claramente $A+V$ es abierto por tanto, por la parte 1. existe $f \in X^*$ y $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(c) < \gamma_1 \leq f(b)$$

para todo $c \in A + V$ y todo $b \in B$. En particular

$$f(a) < \gamma_1 \leq f(b)$$

para todo $a \in A$ y todo $b \in B$.

Como A es compacto existe $a_1 \in A$ tal que $f(a_1) = \sup_{a\in A} f(a) = \alpha$. Tambien sabemos que $\alpha < \gamma_1$, sea $\gamma = \frac{\gamma_1+\alpha}{2}$ un razomiento sencillo muestra que

$$f(a) < \gamma < f(b)$$

para todo $a \in A$ y todo $b \in B$. $\square$

Corolario 1.8.14. *Sean (X, τ) un espacio vectorial topológico localmente convexo, Y un subespacio de X y $x_0 \in X$ tal que $x_0 \notin \overline{Y}$, entonces existe $f \in X^*$ tal que $f(x_0) = 1$ y $f(x) = 0$ para todo $x \in Y$.*

Demostración. Por el punto 2. del Teorema 1.8.13 con $A = \{x_0\}$ y $B = \overline{Y}$, existe $f_1 \in X^*$ tal que $f_1(x_0)$ y $f_1(Y)$ son disjuntos, entonces $f_1(Y)$ es un subespacio propio de $\mathbb{R}$, por lo cual $f_1(Y) = 0$ y $f_1(x_0) \neq 0$. Por tanto, $f = \frac{f_1}{f_1(x_0)}$ satisface que $f(x_0) = 1$ y $f(x) = 0$ para todo $x \in Y$. $\square$

Definición 1.8.15. *Sea C un subconjunto convexo de un espacio vectorial X. $\xi \in C$ es un punto extremo de C si para todo $x_1, x_2 \in C$ tal que*

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

se tiene que $x_1 = x_2 = \xi$. El conjunto de puntos extremos de C se denotará por $\operatorname{ext}(C)$.

EJEMPLOS:

1. Sean x_1, x_2 puntos de un espacio normado X los puntos extremos del segmento que une x_1 con x_2 son los mismos x_1 y x_2.

2. Sea $C = [a, b] \times [c, d]$ un cuadrado en $\mathbb{R}^2$, los puntos extremos de C son los vértices del cuadrado, $(a, c), (a, d), (b, c)$ y (b, d).

3. Sea $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$, los puntos extremos de B son los puntos tal que $\|x\| = 1$.

La siguiente proposición enuncia algunas equivalencias de la definición de punto extremo.

Proposición 1.8.16. *Sean X un espacio vectorial, $C \subset X$ convexo y $\xi \in C$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *ξ es un punto extremo de C.*

2. *Para todo $x_1, x_2 \in C$ y todo $0 \leq \lambda \leq 1$ tal que $x_1 \neq x_2$ y $\xi = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ se tiene que $\xi = x_1$ ó $\xi = x_2$.*

3. *Para todo $x_1, x_2 \in C$ y todo $0 < \lambda < 1$ tal que $\xi = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ se tiene que $x_1 = \xi = x_2$.*

4. *Para todo $x_1, \ldots, x_n \in C$ y todo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ tales que $\xi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ se tiene que $\xi = x_1 = \ldots = x_n$.*

5. *$C \setminus \{\xi\}$ es convexo.*

Demostración. Vease [6]. $\square$

Teorema 1.8.17. *Sea K un subconjunto compacto y no vacío de un espacio vectorial topológico de Hausdorff localmente convexo (X,τ). Si $\overline{\mathrm{conv}(K)}$ es compacto, entonces $\mathrm{ext}(\overline{\mathrm{conv}(K)}) \subseteq K$.*

Demostración. Sea $x \in \mathrm{ext}(\overline{\mathrm{conv}(K)})$. Basta probar que $(x+U)\cap K \neq \emptyset$ para toda U vecindad del $0 \in X$, pues de esto se seguiría que $x \in \overline{K} = K$.

Sea U una vecindad del 0, dado que X es localmente convexo podemos suponer que U es convexo. Por la Proposición 1.8.9 punto 3. tenemos que existe V una vecindad convexa y balanceada del 0 tal que $\overline{V} \subseteq U$. Además la compacidad de K implica que existen $x_1, \ldots x_n \in K$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V).$$

Para cada $1 \leq i \leq n$ consideremos

$$K_i = \overline{\mathrm{conv}\left(K \cap (x_i + \overline{V})\right)}.$$

Claramente $K_i \subseteq \overline{\mathrm{conv}(K)}$ para todo $1 \leq i \leq n$ y por tanto, K_i es compacto, y obviamente convexo, para todo $1 \leq i \leq n$. Más aún por el Lema 1.8.6 se tiene que $\mathrm{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right)$ es compacto.

Es fácil ver que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K_i \subseteq \overline{\mathrm{conv}(K)}$$

de donde se deduce que

$$\overline{\mathrm{conv}(K)} = \overline{\mathrm{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right)} = \mathrm{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right).$$

Dado que $x \in \overline{\mathrm{conv}(K)}$, el Lema 1.8.5 nos dice que existen $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ tales que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ y $y_1, \ldots, y_n$ elementos de $K_1, \ldots, K_n$ respectivamente que satisfacen

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i,$$

pero x es un punto extremo de $\overline{\mathrm{conv}(K)}$, lo cual implica que existe un $y_{i_0} \in K_{i_0}$ tal que $x = y_{i_0}$. De esta forma obtenemos que

$$x \in K_{i_0} = \overline{\mathrm{conv}\left(K \cap (x_{i_0} + \overline{V})\right)} \subseteq x_{i_0} + \overline{V} = x_{i_0} - \overline{V}.$$

Por tanto, $x_{i_0} \in (x + \overline{V}) \cap K \subseteq (x+U) \cap K$, es decir $(x+U)\cap K \neq \emptyset$. $\square$

Definición 1.8.18. *Sean X un espacio vectorial topológico y C un subconjunto convexo de X. Definimos:*

1. *$H \subset X$ es un medio espacio abierto si existe $f : X \to \mathbb{R}$ funcional lineal continua y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$H = \{x \in X \mid f(x) < \lambda\} \quad \text{ó} \quad H = \{x \in X \mid f(x) > \lambda\}$$

   H es un medio espacio cerrado si en los conjuntos anteriores $<$ ó $>$ se cambian por $\leq$ ó $\geq$ respectivamente.

2. *Una rebanada de C es una intersección no vacía de C con un medio espacio abierto.*

3. *$\zeta \in C$ es un punto fuertemente extremo si las rebanadas de C que contienen a ζ forman una base local para ζ en C. Es decir, para toda U vecindad relativa a C de ζ existe V rebanada de C que contiene a ζ tal que $V \subset U$.*

Observación 1.8.19. *Los conceptos de punto extremo y fuertemente extremo no son en general equivalentes. Consideremos C un triángulo abierto en $\mathbb{R}^2$ con un punto x sobre algun lado del mismo que no sea un vértice, tenemos que x es un punto extremo pero no fuertemente extremo.*

La siguiente proposición da condiciones necesarias y suficientes para la equivalencia entre punto extremo y punto fuertemente extremo.

Proposición 1.8.20. *Sean (X, τ) un espacio vectorial topológico de Hausdorff localmente convexo y $C \subset X$ convexo y compacto. $\xi \in C$ es extremo si y sólo si es fuertemente extremo.*

Demostración. $\Leftarrow$] Supongamos que $\xi \in C$ es fuertemente extremo. Afirmamos que

$$C \setminus \{\xi\} = \bigcup \{H \cap C \mid H \text{ es un medio espacio cerrado que no contiene a } \xi\}.$$

Sea $x \in C \setminus \xi$, entonces $x \neq \xi$ y dado que X es de Hausdorff existen abiertos U y V relativos a C disjuntos tales que $x \in U$ y $\xi \in V$. Pero ξ es fuertemente extremo, por lo tanto existe H un medio espacio abierto tal que $\xi \in H \cap C \subset V$, más aún $H' = X \setminus H$ es un medio espacio cerrado tal que $\xi \notin H'$, además $x \in H' \cap C$. La otra contención es obvia.

Observemos que $H \cap C$ es convexo para todo H medio espacio cerrado que no contiene a ξ por lo tanto $C \setminus \{\xi\}$ es convexo.

Supongamos que ξ no es extremo entonces existen $x_1, x_2 \in C$ tal que

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{1.19}$$

con $x_1 \neq \xi$ ó $x_2 \neq \xi$, si pasara que $x_1 \neq \xi$ y $x_2 \neq \xi$ tendríamos, dado que $C \setminus \{\xi\}$ es convexo, que $\xi \in C \setminus \{\xi\}$, lo cual es una contradicción. Ahora si $x_1 \neq \xi$ pero $x_2 = \xi$ de la ecuación (1.19) se deduce que $x_1 = \xi$, de nuevo es imposible, en el ultimo caso se llega a una contradicción de manera analoga. Es decir ξ es extremo. [4]

$\Rightarrow$] Sea $\sigma(X, X^*)$ la topología débil para X. Dado que $\sigma(X, X^*) \subset \tau$ tenemos que la identidad en C

$$I : (C, \tau) \to (C, \sigma(X, X^*))$$

es continua. Más aún, como C es compacto y de Hausdorff se tiene que I es un homeomorfismo.

Sea $\xi \in C$ un punto extremo y $V = U \cap C$ una vecindad relativa a C de ξ, donde U es abierto en X. Por lo dicho en el parrafo anterior U es una vecindad débil de ξ es decir

$$U = \{x \in X \mid |f_i(x) - f_i(\xi)| < \epsilon_i \ \forall i = 1, \dots, n\}$$

donde $f_i \in X^*$, $\epsilon_i > 0$ para toda $i = 1, \dots, n$ y $n \in \mathbb{N}$.

Si $x \in U$ podemos escribir $f_i(\xi) - \epsilon_i < f_i(x) < \epsilon_i + f_i(\xi)$ para todo $i = 1, \dots, n$. Por lo tanto U es una intersección finita de medios espacios abiertos H_i, $i = 1, \dots k$ y de esto tenemos que

$$V = \bigcap_{i=1}^{k} H_i \cap C.$$

Usando la igualdad anterior podemos escribir a $C \setminus V$ como

$$C \setminus V = \bigcup_{i=1}^{k} H_i' \cap C$$

donde $H_i' = X \setminus H_i$ es un medio espacio cerrado para toda $i = 1, \dots, k$.

Ahora $H_i' \cap C$ es convexo y compacto para toda $i = 1, \dots, n$, usando el Lema 1.8.6 se tiene que $\operatorname{conv}(C \setminus V)$ es convexo y compacto. Observemos que

[4] Obsérvese que para probar esta implicación sólo se usó que X sea de Hausdorff.

$\xi \notin \operatorname{conv}(C \setminus V)$, pues si pasara eso tendriamos que $\xi = \sum_{i=1}^{m} a_i z_i$ donde $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$ y $z_i \in \bigcup_{i=1}^{k} H_i' \cap C$ y dado que ξ es un punto extremo de C se tendría $\xi = z_i$ para toda $i = 1, \ldots, m$ lo cual es una contración pues $\xi \notin H_i'$ para toda i.

Finalmente por el Teorema 1.8.13 existe $g \in X^*$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\{\xi\} \subset \{x \in X \mid g(x) < \lambda\}$ y $\operatorname{conv}(C \setminus V) \subset \{x \in X \mid g(x) > \lambda\}$. Un razonamiento sencillo muestra que

$$\{x \in X \mid g(x) < \lambda\} \cap C \subset V.$$

Es decir la rebanadas de C que contienen a ξ forman una base local para ξ en C. Por lo tanto ξ es un punto fuertemente extremo. $\square$

Definición 1.8.21. *Sea C un subconjunto convexo de X un espacio vectorial. F es una cara de C si satisface las siguientes propiedades:*

1. *F es convexo.*
2. *Si existen $x_1, x_2 \in C$ y $\lambda \in (0,1)$ tal que $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in F$ entonces $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in F$ para todo $\lambda \in [0,1]$.*

1.8.1. El Teorema de Krein-Milman.

Sabemos que si f es una funcional lineal y continua entonces alcanza su supremo en todo subconjunto K de X compacto, más aún si K es convexo el siguiente lema dice que el punto en cual se alcanza el supremo es extremo.

Lema 1.8.22 (H. Bauer)**.** *Sean (X, τ) un espacio vectorial topologico de Hausdorff locamente convexo y $C \subseteq X$ no vacío, compacto y convexo. Si $f : C \to \mathbb{R}$ es una funciónal lineal y continua entonces existe un punto extremo ξ de C tal que*

$$f(\xi) = \sup_{x \in C} f(x).$$

Demostración. Consideremos el siguiente conjunto.

$$S = \{F \subset C \mid F \neq \emptyset,\ F \text{ es cerrado y si existen } x_1, x_2 \in C \text{ tal que}$$

$$]x_1, x_2[\cap F \neq \emptyset \text{ entonces } [x_1, x_2] \subseteq F\}$$

donde $]x_1, x_2[= \{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \mid 0 < \lambda < 1\}$ y $[x_1, x_2] = \{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$.

S tiene las siguientes propiedades:

1. $C \in S$.
2. Sea $\{F_i\}_{i\in I} \subset S$ tal que $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$. Entonces claramente $\bigcap_{i\in I} F_i \in S$.
3. Sea $x \in C$, $\{x\} \in S$ si y sólo si x es un punto extremo de C. Esto se demuestra a continuación:

   $\Rightarrow$] Supongamos que $\{x\} \in S$, ademas consideremos $x_1, x_2 \in C$ tal que
   $$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
   entonces $]x_1, x_2[\cap\{x\} \neq \emptyset$ y por lo tanto $[x_1, x_2] = \{x\}$, de donde $x = x_1 = x_2$. Es decir x es un punto extremo de C.

   $\Leftarrow$] Supongamos que x es un punto extremo. Claramente $\{x\}$ no es vacío y cerrado, sea $x_1, x_2 \in C$ tal que $]x_1, x_2[\cap\{x\} \neq \emptyset$, entonces existe $0 < \lambda < 1$ tal que
   $$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x \tag{1.20}$$
   Afirmamos que $x_1 = x = x_2$, supongamos que $x_1 \neq x$ ó $x_2 \neq x$. Si pasara que $x_1 \neq x$ y $x_1 \neq x$ usando la ecuación (1.20) llegariamos a una contradicción pues x es extremo. Ahora, si $x_1 \neq x$ pero $x = x_2$ usando la misma relación llegamos a que $\lambda x_1 - \lambda x = 0$ y dado que $\lambda > 0$ tendriamos que $x_1 = x$ una contradicción a nuestra suposición. Analagomente, si $x_1 = x$ pero $x_2 \neq x$ se tendria una contradicción. Por lo tanto $x_1 = x = x_2$, es decir $[x_1, x_2] = \{x\}$.
4. Para cualquier $F \in S$ y $g : C \to \mathbb{R}$ funciónal lineal y continua se tiene que
   $$F' = \left\{x \in F \mid g(x) = \sup_{y\in F} g(y)\right\} \in S.$$
   Esto es cierto pues: Dado que F es compacto $F' \neq \emptyset$, además F' se puede escribir como
   $$F' = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in F \mid g(x) \geq \sup_{y\in F} g(y) - \frac{1}{n}\right\}$$
   lo cual implica que F' es cerrado.

   Sean $x_1, x_2 \in C$ tal que $]x_1, x_2[\cap F' \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in]x_1, x_2[\cap F'$ y consideremos $x \in [x_1, x_2]$ distinto de x_0. Podemos encontrar $x' \in [x_1, x_2]$ y $0 < \lambda < 1$ tal que
   $$x_0 = \lambda x + (1-\lambda)x'$$

Sabemos que $[x_1, x_2] \subseteq F$ y por lo tanto $x, x' \in F$ de donde se deduce que

$$g(x) \leq g(x_0) \qquad\qquad g(x') \leq g(x_0)$$

supongamos que $g(x) < g(x_0)$ entonces $\lambda g(x) < \lambda g(x_0)$ ademas $(1 - \lambda)g(x') \leq (1-\lambda)g(x_0)$. Sumando estas desigualdades y usando el hecho de que g es lineal obtenemos que

$$g(x_0) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(x') < \lambda g(x_0) + (1-\lambda)g(x_0) = g(x_0)$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $g(x) = g(x_0) = \sup_{y\in F} g(y)$, es decir $x \in F'$.

Ahora, S es un conjunto parcialmente ordenado con el orden dado por $F \leq F'$ si y sólo si $F' \subseteq F$ para todo $F, F' \in S$. Sea $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots$ una cadena[5] en S, dado que F_i es compacto para todo $i = 1, \ldots, n$ tenemos que $G = \bigcap_i^\infty F_i \neq \emptyset$. Entonces por la propiedad 2. de S deducimos que $F_i \leq G$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y $G \in S$. Por lo tanto por el Lema de Zorn existe $M \in S$ un elemento maximal de S. En particular para

$$F_0 = \left\{ x \in C \mid f(x) = \sup_{y\in C} f(y) \right\}$$

que es un elemento de S por las propiedades 1. y 4. es así que $F_0 \leq M$.

Finalmente si M es maximal en S entonces afirmamos que $M = \{\xi\}$ con $\xi \in C$. Sea $\xi \in M$ y supongamos que existe $\zeta \in M$ tal que $\xi \neq \zeta$. Por el Teorema 1.8.13 existe $h : C \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que $h(\xi) \neq h(\zeta)$, Dado que h es lineal y continua deducimos de la propiedad 4. de S que F', el conjunto que resulta de la propiedad 4. al cambiar F por M y g por h, es un subconjunto propio de M y por lo tanto $M < F'$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $M = \{\xi\}$ y de la propiedad 3. de S ξ es un punto extremo tal que $\xi \in F_0$ lo cual prueba el resultado. □

Corolario 1.8.23. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico de Hausdorff localmente convexo y C un subconjunto de X no vacío, convexo y compacto. Entonces* $\mathrm{ext}(C) \neq \emptyset$.

Demostración. Inmediata a partir del Lema de Bauer, aplicado a $f : C \to \mathbb{R}$ la función constante cero, la cual es lineal y continua. □

Ahora podemos dar una demostración sencilla del Teorema de Krein-Milman.

[5] La definición precisa de cadena y el Lema de Zorn pueden verse en: [18].

Teorema 1.8.24 (Krein-Milman)**.** *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico de Hausdorff localmente convexo. Si $C \subseteq X$ no vacío compacto y convexo entonces*

$$C = \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(C))}.$$

Demostración. Dado que C es cerrado y convexo se tiene que

$$\overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(C))} \subset C.$$

Supongamos que existe $x_0 \in C \setminus \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(C))}$. Usando el Teorema 1.8.13 encontramos $f \in X^*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$f\left(\overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(C))}\right) < \gamma < f(x_0).$$

El Teorema de Bauer nos dice que existe $\xi \in C$ punto extremo tal que $f(\xi) = \sup_{x \in C} f(x)$ por lo tanto

$$\gamma < f(x_0) \leq f(\xi) < \gamma$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, $C \subset \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(C))}$ y el Teorema queda demostrado. □

La propiedad más importante del conjunto de puntos extremos de un conjunto convexo C es que es un espacio de Baire. Para probar esto necesitamos el siguiente lema.

Lema 1.8.25. *Sean X un espacio vectorial topológico de Hausdorff, C un subconjunto convexo de X y $A \subset C$ convexo y tal que si existe una recta que intersecta A entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tal que $[x_1, x_2] \subseteq A$. Supongamos además que $C \setminus A$ es convexo y $\operatorname{ext}(A) \neq \emptyset$, entonces $\operatorname{ext}(A) \cap \operatorname{ext}(C) \neq \emptyset$.*

Demostración. Véase: [6]. □

Teorema 1.8.26. *Sea X un espacio vectorial topológico de Hausdorff localmente convexo. Si $C \subseteq X$ es convexo y compacto entonces $\operatorname{ext}(C)$ es un espacio de Baire con respecto a la topología relativa.*

Demostración. Sea $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos distintos del vacío, abiertos y densos en $\operatorname{ext}(C)$. Probaremos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ es denso en $\operatorname{ext}(C)$, para esto basta ver que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ intersecta a todo abierto V en $\operatorname{ext}(C)$ distinto del vacío.

Dado que V y V_n son abiertos en $\operatorname{ext}(C)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, existen U y U_n abiertos en X tal que

$$V = U \cap \operatorname{ext}(C) \qquad V_n = U_n \cap \operatorname{ext}(C)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que existe una sucesión $(W_n)_{n=1}^{\infty}$ de rebanadas cerradas de C tales que

$$W_1 \subseteq U$$

$$W_{n+1} \subseteq W_n \cap U_n$$

y además

$$W_n \cap \mathrm{ext}(C) \neq \emptyset$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, como $V \neq \emptyset$ tenemos que existe $x_1 \in V = U \cap \mathrm{ext}(C)$. Por tanto, $U \cap C$ es una vecidad relativa en C de x_1 y como también $x_1 \in \mathrm{ext}(C)$ por la Proposición 1.8.20 tenemos que x_1 es fuertemente extremo, es decir existe W_1 una rebanada abierta de C tal que $x_1 \in W_1 \subseteq U \cap C \subseteq U$, como W_1 es una rebanada abierta de C podemos escribirlo como

$$W_1 = A_1 \cap C$$

donde $A_1 = \{x \in X \mid f_1(x) > \lambda_1\}$, para algunos $f_1 \in X^*$ y $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Es así que si tomamos $B_1 = \{x \in X \mid f_1(x) \geq \lambda_1 + 1\}$ y denotamos por $W_1' = B_1 \cap C$ tenemos que W_1' es una rebanada cerrada de C tal que

$$W_1' \subseteq W_1 \subseteq U$$

por tanto, podemos suponer que W_1 es una rebanada cerrada de C tal que $W_1 \subseteq U$.

Supongamos que la afirmación es cierta para n, es decir existe W_n una rebanada cerrada de C tal que $W_n \subseteq W_{n-1} \cap U_{n-1}$. Como W_n es una rebanada cerrada de C podemos escribir

$$W_n = A_n \cap C$$

donde $A_n = \{x \in X \mid f_n(x) \geq \lambda_n\}$, $f_n \in X^*$ y $\lambda_n \in \mathbb{R}$. Consideremos $C_n = \{x \in X \mid f_n(x) > \lambda_n + 1\}$ el cual es claramente abierto en X y además $C_n \subseteq A_n$, esto ultimo nos dice que

$$C_n \cap U_n \cap C \subseteq W_n \cap U_n.$$

Claramente $C_n \cap \mathrm{ext}(C)$ es abierto en $\mathrm{ext}(C)$ y como V_n es denso en $\mathrm{ext}(C)$ tenemos que existe $x_{n+1} \in C_n \cap \mathrm{ext}(C) \cap V_n$ por tanto, $x_{n+1} \in C_n \cap U_n \cap C$ y $x_{n+1} \in \mathrm{ext}(C)$, por la Proposición 1.8.20 tenemos que x_{n+1} es fuertemente extremo y por tanto, existe una rebanada abierta W_{n+1} de C que contiene a x_{n+1} tal que

$$W_n \subseteq C_n \cap U_n \cap C \subseteq W_n \cap U_n$$

pero al igual que se hizo con W_1, podemos suponer que W_{n+1} es una rebanada cerrada de C tal que $W_{n+1} \subseteq W_n \cap U_n$. De la misma construcción anterior tenemos que $W_n \cap \text{ext}(C) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Claramente W_n es no vacío, convexo y compacto con $C \setminus W_n$ convexo para todo $n \in \mathbb{N}$. Todas la propiedades anteriores también son ciertas para

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n.$$

Dado que F es la intersección de una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados de un compacto, en este caso C, del Teorema del encaje de Cantor deducimos que $F \neq \emptyset$. Además ya que W_n son rebanadas de C si una recta intersecta a F entonces también un segmento entre dos puntos de esta y por el Corolario 1.8.23 obtenemos que $\text{ext}(F) \neq \emptyset$. Por lo tanto usando el Lema 1.8.25 y recordando que $\text{ext}(F) \subset F$ tenemos que

$$F \cap \text{ext}(C) \neq \emptyset.$$

Por lo cual existe $x_0 \in F$ y $x_0 \in \text{ext}(C)$, de nuevo por la construcción $x_0 \in U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, más aun $x_0 \in U$ por estar en W_1 y en particular $x_0 \in U \cap \text{ext}(C) = V$. Por lo tanto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \cap V \neq \emptyset.$$

Es decir $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ es denso en $\text{ext}(C)$. □

1.8.2. El Teorema de Bishop-Phelps.

Definición 1.8.27. *Sea X un espacio vectorial. Definimos:*

1. *$K \subseteq X$ es un cono convexo si K es convexo y $\lambda x \in K$ para todo $x \in K$ y todo $\lambda \geq 0$.*

2. *Sea $A \subseteq X$ y $x_0 \in C$. Si K es un cono convexo tal que*

$$(K + x_0) \cap A \setminus \{x_0\} = \emptyset$$

entonces diremos que $K + x_0$ soporta a A en x_0.

En el caso cuando K tiene interior no vacío se tiene la siguiente propiedad.

Proposición 1.8.28. *Sean $(X, \| \|)$ un espacio normado , $C \subseteq X$ convexo y $x_0 \in C$. Si K un cono convexo con interior no vacío tal que $K + x_0$ soporta a C en x_0 entonces existe $g \in X^*$ tal que*

$$\sup_{x \in C} g(x) = g(x_0) = \inf_{y \in K + x_0} g(y).$$

Demostración. Sabemos que $K + x_0$ soporta a C en x_0 entonces $K + x_0 \cap C \setminus \{x_0\} = \emptyset$ de donde se obtiene que $K + x_0 \cap C = \{x_0\}$. Sea U abierto en X tal que $U \subset K + x_0$, podemos suponer que U es convexo pues X es localmente convexo y $U \cap C = \emptyset$. Por lo tanto usado el Teorema 1.8.13 obtenemos que existe $f \in X^*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(u) < \gamma \leq f(x)$$

para todo $u \in U$ y todo $x \in C$. De lo anterior podemos deducir que

$$\inf_{y \in K + x_0} f(y) \leq \inf_{u \in U} f(u) \leq sup_{x \in C} f(x),$$

por tanto si consideramos $g = -f \in X^*$ se tiene que

$$\sup_{x \in C} g(x) \leq \inf_{y \in K + x_0} g(y).$$

Observemos que $x_0 \in C \cap K + x_0$ por lo que usando la desigualdad anterior es fácil ver que

$$\sup_{x \in C} g(x) = g(x_0) = \inf_{y \in K + x_0} g(y)$$

Que es lo se quería probar. □

De ahora en adelante usaremos un tipo especial de cono convexo que se define en seguida.

Definición 1.8.29. *Sean $(X, \| \|)$ un espacio normado, $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $k > 0$. Definimos*

$$K(f, k) = \{x \in X \mid \|x\| \leq k f(x)\}.$$

Observación 1.8.30. *$K(f, k)$ es un cono convexo pues si $x, y \in K(f, k)$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ entonces*

$$\|\lambda x + (1-\lambda) y\| \leq \lambda \|x\| + (1-\lambda)\|y\| \leq \lambda k f(x) + (1-\lambda) k f(y) = k f(\lambda x + (1-\lambda) y)$$

lo cual muestra que $K(f,k)$ *es convexo. Además si* $\lambda \geq 0$ *y* $x \in K(f,k)$ *entonces*

$$\|\lambda x\| = \lambda\|x\| \leq \lambda k f(x) = kf(\lambda x)$$

lo cual muestra que $K(f,k)$ *es un cono.*

Otra característica importante es que si $k > 1$ *entonces* $K(f,k)$ *tiene interior no vacío. Para ver esto observemos que tanto* $\| \ \|$ *como* f *son funciones continuas de* X *en* $\mathbb{R}$*. Ahora si* $k > 1$ *entonces* $k^{-1} < 1$*, por lo que* $1 - k^{-1} > 0$*. Usando la propiedad del supremo encontramos* $x \in X$ *tal que* $\|x\| = 1$ *y* $\|f\| - (1 - k^{-1}) < f(x)$ *de donde*

$$\|x\| = 1 < kf(x)$$

Dado que $\| \ \|$ *y* f *son continuas existe* U *una vencindad de* x *tal que* $\|y\| \leq kf(y)$ *para todo* $y \in U$*. Es decir* $K(f,k)$ *tiene interior no vacío.*

Lema 1.8.31. *Sean* $(X, \| \ \|)$ *un espacio de Banach,* $A \subseteq X$ *cerrado,* $f \in X^*$ *tal que* $\|f\| = 1$ *y acotada en* A *y* $k > 0$*. Si* $z \in A$ *entonces existe* $x_0 \in A$ *tal que* $x_0 \in K(f,k) + z$ *y* $K(f,k) + x_0$ *soporta* A *en* x_0*.*

Demostración. Consideremos el orden parcial para A dado por $y < x$ si $x - y \in K(f,k)$, lo cual es equivalente a decir que $\|x - y\| \leq kf(x - y)$. Consideremos

$$Z = \{x \in A \mid z < x\}.$$

Sea $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ una cadena en Z. Sea $i \in \mathbb{N}$, dado que $x_i < x_{i+1}$ se tiene que $x_{i+1} - x_i \in K$, por lo que $f(x_{i+1} - x_i) \geq \|x_{i+1} - x_i\|k^{-1} \geq 0$ es así que $f(x_i) \leq f(x_{i+1})$. Por lo tanto la sucesión $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es creciente, pero f es acotada en A por lo que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a su supremo. Lo anterior tambien nos dice que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ se tiene que

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$$

Sean x_n, x_m tal que $n, m > N$, supongamos que $x_n < x_m$. Entonces

$$\|x_n - x_m\| \leq kf(x_m - x_n) \leq k|f(x_m) - f(x_n)| < k\epsilon$$

Lo cual quiere decir que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en Z. Pero $Z = A \cap K(f,k) + z$ y tanto A como $K(f,k)$ es cerrado, por lo tanto Z es cerrado y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $y \in Z$.

Ahora sea $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $x_n < x_{n+k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por lo tanto

$$\|x_{n+k} - x_n\| \leq kf(x_{n+k} - x_n)$$

si k tiendo a infinito como la norma y f son funciones continuas obtenemos que $x_n \leq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto y es una cota superior para la cadena. Por el Lema de Zorn exite $x_0 \in Z$ elemento maximal para Z, por lo que claramente por como se definio Z se tiene que $x_0 \in K(f,k) + z$. Supongamos que $K(f,k) + x_0$ no soporta A en x_0, esto quiere decir que

$$K(f,k) + x_0 \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

Es así que podemos encontrar $x_1 \in K(f,k) + x_0$ y $x_1 \neq x_0$, esto nos dice que $x_1 - x_0 \in K(f,k)$ y $x_1 \neq x_0$, por lo que $x_0 < x_1$ y $x_0 \neq x_1$, además dado que $z < x_0$ tambien $z < x_1$ es decir $x_1 \in Z$. Lo cual es una contradicción al hecho que x_0 es maximal en Z. □

Lema 1.8.32. *Sean* $(X, \| \|)$ *un espacio normado,* $\epsilon > 0$ *y* $f, g \in X^*$ *tales que* $\|f\| = 1 = \|g\|$. *Si* $|g(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ *para todo* $x \in X$ *tal que* $\|x\| \leq 1$ *y* $f(x) = 0$ *entonces* $\|f + g\| \leq \epsilon$ *ó* $\|f - g\| \leq \epsilon$.

Demostración. Claramente $f^{-1}(0) = \ker f$ es un subsepacio propio cerrado de X, consideremos la restricción de g al $\ker f$, $g : \ker f \to \mathbb{R}$ que es continua y lineal. Por el Teorema de extensión de Hahn-Banach existe $h : X \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que

$$h(x) = g(x) \quad \text{para todo } x \in \ker f \quad \text{y} \quad \|h\| = \|g\| = \sup_{x \in B \cap \ker f} |g(x)|$$

donde $B = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$. Pero por hipótesis $\|h\| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Más aun dado que $g - h$ se anula en $\ker f$ y f obviamente también se tiene que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$g - h = \alpha f$$

por lo tanto $\|g - \alpha f\| = \|h\| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Probaremos que si $\alpha > 0$ entonces $\|f - g\| \leq \epsilon$, un razonamiento análogo aplicado al caso cuando $\alpha \leq 0$ y considerando $-\alpha f$ tendriamos que $\|f+g\| \leq \epsilon$.

Supongamos que $\alpha > 0$, de donde se deduce que $\alpha < 1$ ó $\alpha \geq 1$. Si $\alpha \geq 1$ entonces $\alpha^{-1} \leq 1$ y por lo tanto

$$\|g - f\| = \|(1 - \alpha^{-1})g + \alpha^{-1}(g - \alpha f)\| \leq 1 - \alpha^{-1} + \alpha^{-1}\|g - \alpha f\|. \quad (1.21)$$

Ahora también $\alpha = \|\alpha f\| \leq \|g\| + \|g - \alpha f\|$, por lo que

$$\alpha^{-1} \geq (1 + \|g - \alpha f\|)^{-1}$$

por tanto,

$$1 - \alpha^{-1} \leq \frac{\|g - \alpha f\|}{1 + \|g - \alpha f\|}$$

usando esto y que $(1 + \|g - \alpha f\|)^{-1} \leq 1$ deducimos que

$$1 - \alpha^{-1} \leq \frac{\|g - \alpha f\|}{1 + \|g - \alpha f\|} \leq \|g - \alpha f\|.$$

De la ecuación (1.21) obtenemos que

$$\|f - g\| \leq 2\|g - \alpha f\| \leq \epsilon.$$

Ahora, si $0 \leq \alpha < 1$ entonces

$$\|f - g\| \leq \|g - \alpha f\| + \|(1 - \alpha) f\| = \|g - \alpha f\| + 1 - \alpha$$

$$= \|g - \alpha f\| + \|g\| - \|\alpha f\| \leq 2\|g - \alpha f\| \leq \epsilon.$$

Que es lo que se quería probar. □

Lema 1.8.33. *Sean $(X, \| \ \|)$ un espacio normado, $f, g \in X^*$ tal que $\|f\| = 1 = \|g\|$, $0 < \epsilon < 1$ y $k > 1 + \frac{2}{\epsilon}$. Si g es no negativa en $K(f, k)$, entonces $\|f - g\| \leq \epsilon$.*

Demostración. Sea $0 < \epsilon < 1$ y $k > 1 + \frac{2}{\epsilon}$, claramente $\delta = 1 - \left(1 + \frac{2}{\epsilon}\right) k^{-1} > 0$. Por la propiedad del supremo existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y

$$f(x) = |f(x)| > 1 - \delta = k^{-1} \left(1 + \frac{2}{\epsilon}\right).$$

Afirmamos que para todo $y \in X$ tal que $f(y) = 0$ y $\|y\| \leq 1$ se tiene que $|g(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Sea $y \in X$ tal que $f(y) = 0$ y $\|y\| \leq 1$, consideremos $y' = \frac{2}{\epsilon} y$, de nuevo $f(y') = 0$ pero $\|y'\| \leq \frac{2}{\epsilon}$.

Por tanto,

$$\|x \pm y'\| \leq 1 + \frac{2}{\epsilon} < k f(x) = k f(x \pm y')$$

es decir $x \pm y' \in K(f, k)$, de donde $g(x \pm y') \geq 0$. Es así que

$$-g(x - y') \leq 0 \qquad\qquad - g(x + y') \leq 0$$

y dado que g es lineal obtenemos que

$$g(y') - g(x) \leq 0 \qquad\qquad - g(y') - g(x) \leq 0$$

lo cual implica que

$$|g(y')| \leq g(x) = |g(x)| \leq \|g\| = 1.$$

Es así que $\frac{2}{\epsilon}|g(y)| \leq 1$, por lo tanto $|g(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Hemos mostrado así que todas la hipótesis del Lema 1.8.32 se satisfacen, entonces $\|f+g\| \leq \epsilon$ ó $\|f-g\| \leq \epsilon$.

Ahora, como $k^{-1} < 1$ y $\epsilon < 1$ entonces $\delta_1 = 1 - \text{máx}\{k^{-1}, \epsilon\} > 0$. Por la propiedad del supremo existe $z \in X$ tal que $\|z\| = 1$ y

$$f(z) > 1 - \delta_1 = \text{máx}\{k^{-1}, \epsilon\}$$

dado que $f(z) > k^{-1}$ entonces $\|z\| = 1 < kf(z)$, es decir $z \in K(f,k)$ y por tanto, $g(z) \geq 0$. Esto implica que

$$\|f+g\| \geq (f+g)(z) > \epsilon.$$

Por lo tanto $\|f-g\| \leq \epsilon$. □

Teorema 1.8.34. *Sean $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach y $C, A \subseteq X$ tales que C es cerrado y convexo, A acotado y no vacío. Si $\epsilon > 0$ y $f \in X^*$ es tal que $\|f\| = 1$ con*

$$\sup_{x\in C} f(x) < \inf_{y\in A} f(y).$$

Entonces existen $g \in X^*$ y $x_0 \in C$ tal que $\|g\| = 1$, $\|f-g\| \leq \epsilon$ y

$$g(x_0) = \sup_{x\in C} g(x) < \inf_{y\in A} g(y).$$

Demostración. Sea $\gamma = \sup_{x\in C} f(x)$ y $\delta = \inf_{y\in A} f(y)$. Sabemos que existe $\gamma < \beta < \delta$, consideremos V la vecindad de A dada por

$$V = A + (\delta - \beta)U$$

donde $U = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$, claramente V es acotado. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\inf_{x\in U} f(x) = -1$, es así que

$$\inf_{w\in V} f(w) = \inf_{y\in A} f(y) - (\delta - \beta) = \beta.$$

Sea $\alpha = 1 + \frac{2}{\epsilon}$, dado que $(2\alpha)^{-1}(\beta - \gamma) > 0$ entonces por la propiedad del supremo existe $z \in C$ tal que

$$\gamma - f(z) < (2\alpha)^{-1}(\beta - \gamma).$$

Ahora, por la propiedad arquimediana, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$M > \max\left\{2^{-1}(\beta - \gamma), \sup_{w \in V} \|w - z\|\right\} \tag{1.22}$$

además consideremos $k = 2\alpha M(\beta - \gamma)^{-1}$. De la relación (1.22) se deduce que

$$k > \alpha > 1.$$

Por el Lema 1.8.31 aplicado a C, existe $x_0 \in C$ tal que $K(f,k) + x_0$ soporta C en x_0 y $x_0 - z \in K(f,k)$.

A continuación probaremos que $V \subset K(f,k) + x_0$. Sea $w \in V$, por (1.22) y dado que $x_0 - z \in K(f,k)$ tenemos que

$$\|w - x_0\| \leq \|w - z\| + \|x_0 - z\| < M + kf(x_0 - z) \leq M + k(\gamma - f(z))$$

$$< M + k(2\alpha)^{-1}(\beta - \gamma) = 2M < 2\alpha M = k(\beta - \gamma) \leq kf(w - x_0).$$

Es decir $w - x_0 \in K(f,k)$ y por tanto, $w \in K(f,k) + x_0$. Lo anterior muestra que $K(f,k)$ tiene interior no vacío y por la Proposición 1.8.28 existe $g \in X^*$ tal que $\|g\| = 1$ y

$$\sup_{x \in C} g(x) = g(x_0) = \inf_{y \in K(f,k)+x_0} g(y) \leq \inf_{w \in V} g(w) = \inf_{y \in A} g(y) - (\delta - \beta) < \inf_{y \in A} g(y).$$

Sabemos que $\inf_{t \in K(f,k)} g(t) \geq 0$ y además $k > 1 + \frac{2}{\epsilon}$, por lo que usando el Lema 1.8.33 se tiene que $\|f - g\| \leq \epsilon$. $\square$

Como corolario del teorema anterior obtenemos el teorema de Bishop-Phelps.

Teorema 1.8.35 (Bishop-Phelps)**.** *Sean $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach y C un subconjunto de X acotado, cerrado y convexo. El conjunto*

$$BP = \left\{f \in X^* \mid \exists\, x \in C,\ f(x) = \sup_{y \in C} f(y)\right\}$$

es denso en X^*.

Demostración. Sean $f \in X^*$ y $\epsilon > 0$, supongamos que $\|f\| = 1$. Dado que C es un subconjunto acotado de X, existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{y \in C} f(y) \leq M.$$

Además sabemos que toda función lineal de X en $\mathbb{R}$ es sobre y por tanto, existe $z \in X$ tal que $f(z) = M$, de donde

$$\sup_{y \in C} f(y) \leq f(z).$$

El Teorema 1.8.34 con $A = \{z\}$ nos dice que existe $g \in BP$ tal que $\|g\| = 1$ y

$$\|f - g\| \leq \epsilon.$$

Si $\|f\| \neq 1$, al considerar $h = \frac{f}{\|f\|}$, el analisis anterior muestra que también existe una $g' \in BP$ tal que

$$\|h - g'\| \leq \epsilon.$$

Es decir $\overline{BP} = X^*$. $\square$

Capítulo 2

Bases en espacios de Banach

2.1. Bases de Schauder.

Esta sección esta dedicada a estudiar el concepto de Base de Schauder, el cual fue introducido en el año de 1927 por el matemático J. Schauder. Comenzamos por hacer la siguiente convención.

Definición 2.1.1. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio de Banach $(X, \| \|)$. Definimos:*

$$[x_n] = \overline{s(x_n)_{n=1}^{\infty}}.$$

Definición 2.1.2. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio de Banach $(X, \| \|)$. Decimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder para X si para todo $x \in X$ existe una única sucesión de reales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder para $[x_n]$ entonces se dice que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X. Ademas si $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, decimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ está normalizada.

Observación 2.1.3. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de Schauder para un espacio de Banach $(X, \| \|)$ entonces:*

1. *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es linealmente independiente.*

2. *$s(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es denso en X.*

3. *X es separable. Esto es cierto por el punto 2. y dado que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. Es decir, el conjunto*

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

es denso y numerable.

En adelante llamaremos a una base de Schauder simplemente una base pero debe tenerse cuidado de no confundir este concepto con el de base de Hamel introducido en el capítulo 1. De hecho la siguiente proposición muestra que estos conceptos son diferentes cuando el espacio en cuestión es de dimensión infinita.

Proposición 2.1.4. *Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Si B es una base de Hamel para X entonces B es no numerable.*

Demostración. Supongamos que B es numerable, es decir que $B = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Claramente

$$X_n = s(x_i)_{i=1}^{n}$$

es cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$, pues X_n es de dimensión finita para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, Sabemos que X es de dimensión infinita lo cual implica que todo subespacio de dimensión finita de X tiene interior vacío por tanto, X_n tiene interior vacío para todo $n \in \mathbb{N}$.

B es una base de Hamel por tanto,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

El Teorema de Baire nos dice que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que X_{n_0} tiene interior distinto del vacío, lo cual es una contradicción y por tanto, B es no numerable. $\square$

EJEMPLOS:

1. Sea $1 \leq p < \infty$. La sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, donde $e_n = (\delta_{in})_{i=1}^{\infty}$ y

$$\delta_{in} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \\ 0 & \text{si } i \neq n \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, es una base para los espacios ℓ^p y c_0.

2. Claramente ℓ^∞ no puede tener una base de Schauder, pues ℓ^∞ no es separable.

Como ya hemos visto, si un espacio de Banach tiene una base entonces es separable, es importante mencionar que esto era conocido por Banach quien en 1933 formuló la siguiente pregunta: ¿todo espacio de Banach separable tiene una base? cuarenta años despues la respuesta fue dada por Per Enflo, quien la contestó negativamente, para una revisión detallada de este hecho véase [11].

Aunque el resultado de Per Enflo es difícil de tratar, más adelante demostraremos que todo espacio de Banach de dimensión infinita contiene una subsucesión básica.

Teorema 2.1.5. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach con una base $(x_n)_{n=1}^\infty$. Definamos para todo $n \in \mathbb{N}$ la funcion $P_n : X \to X$ dada por*

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

para todo $x \in X$ y $x = \sum_{i=1}^\infty a_i x_i$. Entonces P_n es un operador lineal acotado para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$K = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| < \infty.$$

A los operadores P_n para toda $n \in \mathbb{N}$, los llamaremos proyecciones naturales asociadas a la base $(x_n)_{n=1}^\infty$.

Demostración. La idea de la demostración se debe a Banach. El que las funciones P_n sean lineales es inmediato.

Definimos una nueva norma para X dada por

$$|||x||| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n x\|$$

para todo $x \in X$. Esta función esta bien definida pues $P_n x \to x$ cuando $n \to \infty$ y por tanto, $|||x||| < \infty$, y la justificación de que $||| \; |||$ es una norma se debe a que $\| \;\|$ es norma y el supremo saca escalares y es subaditivo.

Afirmamos que $(X, ||| \; |||)$ es un espacio de Banach. Para probar esto consideremos $(y_k)_{k=1}^\infty$ una sucesión $||| \; |||$-Cauchy. Observemos que

$$\|P_n y_i - P_n y_j\| = \|P_n(y_i - y_j)\| \leq |||y_i - y_j||| \tag{2.1}$$

y por tanto, $(P_n y_k)_{k=1}^\infty$ es de Cauchy para todo $n \in \mathbb{N}$. Más aun la desigualdad (2.1) nos dice que no sólo son de Cauchy si no que si $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i, j > N$ entonces

$$\|P_n y_i - P_n y_j\| < \epsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir la N es independiente de la n que se tome.

Como $(X, \| \ \|)$ es de Banach, existe $z_n \in X$ tal que $z_n = \lim_{k\to\infty} P_n y_k$, de nuevo esta convergencia es uniforme con respecto a n. Esto quiere decir que dado $\epsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $k > N_1$ entonces

$$\|P_n y_k - z_n\| < \epsilon \tag{2.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora probaremos que $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$ y $k > N_1$, claramente

$$\|z_n - z_m\| \leq \|z_n - P_n y_k\| + \|P_n y_k - P_m y_k\| + \|P_m y_k - z_m\|.$$

Por tanto, por (2.2) se tiene que

$$\|z_n - z_m\| \leq \frac{2\epsilon}{3} + \|P_n y_k - P_m y_k\|$$

y como $P_n y_k \to y_k$ si $n \to \infty$ se sigue que $\|z_n - z_m\| \leq \epsilon$.

Sabemos que $(X, \| \ \|)$ es de Banach, por lo que existe $z = \lim_{n\to\infty} z_n$. Dado que $P_n(X)$ es cerrado, pues es de dimensión finita, se tiene que $z_n \in P_n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora sean $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m$, es fácil ver que en este caso $P_m P_n = P_{\min\{m,n\}}$ y por tanto, como todo operador lineal definido sobre un espacio de dimensión finita es continuo deducimos que

$$P_m(z_n) = \lim_{k\to\infty} P_m P_n y_k = \lim_{k\to\infty} P_m y_k = z_m,$$

es así que $P_m z = \lim_{n\to\infty} P_m z_n = z_m$ para todo $m \geq 1$, lo cual implica que $z = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ y $P_n z = z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo anterior sirve para ver que

$$|||y_k - z||| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n y_k - z_n\| \to 0$$

cuando $k \to \infty$. Es decir $z = \lim_{k\to\infty} y_k$ y por tanto, $(X, ||| \ |||)$ es de Banach.

Sea $I : (X, ||| \ |||) \to (X, \| \ \|)$ la función identidad, la cual es continua pues

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n x\| \leq |||x|||.$$

Sabemos que I es continua y biyectiva, además $(X, ||| \ |||)$ y $(X, \| \ \|)$ son de Banach por tanto, usando el Teorema del mapeo abierto tenemos que $I^{-1} = I$ es continua y por tanto, existe $M > 0$ tal que

$$|||x||| \leq M\|x\|$$

para todo $x \in X$. Esto implica que

$$\|P_n x\| \leq M\|x\|$$

para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$, es decir P_n es acotado para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el Teorema del acotamiento uniforme obtenemos que existe $M_1 > 0$ tal que

$$\|P_n\| \leq M_1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir $K < \infty$. $\square$

Definición 2.1.6. *Sea $(X, \| \, \|)$ un espacio de Banach con base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. A la constante*

$$K = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\|$$

la llamaremos constante básica, donde P_n para $n \in \mathbb{N}$ son las proyecciones naturales asociadas a la base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Si $K = 1$ decimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base monótona.

Un ejemplo de base monótona es la base canónica de ℓ^p. Más aún, si $(X, \| \, \|)$ es un espacio de Banach con una base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, se puede encontrar una norma equivalente a $\| \, \|$ tal que la base resulte monótona con respecto a esa norma. La demostración del Teorema 2.1.5 prueba que la identidad $I : (X, ||| \, |||) \to (X, \| \, \|)$ es un homeomorfismo y por tanto, $||| \, |||$ es equivalente a $\| \, \|$, además claramente

$$|||P_n x||| = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|P_m P_n x\| = \sup_{1 \leq m \leq n} \|P_m x\| \leq |||x|||$$

para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Es así que si consideramos a los P_n como funciones en $(X, ||| \, |||)$ obtenemos que $\|P_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base monótona para $(X, ||| \, |||)$.

A continuación probamos un teorema que resulta útil, pues da condiciones necesarias y suficientes para que una sucesión en un espacio de Banach sea base.

Teorema 2.1.7. *Sea $(X, \| \, \|)$ un espacio de Banach. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base para X si y sólo si*

1. *$x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

2. *Existe una constante K tal que para toda sucesión de reales $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ y naturales $n < m$ se tiene que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|.$$

3. $[x_n] = X$.

Demostración. $\Rightarrow]$ Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base para X, entonces por la Observación 2.1.3 se tiene que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es linealmente independiente y por tanto, $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, además claramente $[x_n] = X$.

Sean $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de reales y $n < m$. Considerando los operadores P_n dados en el Teorema 2.1.5 obtenemos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = \left\| P_n \left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right) \right\| \leq \|P_n\| \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|.$$

Donde K es la constante básica.

$\Leftarrow]$ Consideremos

$$Y = \left\{ x \in X \mid \exists (a_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R},\ x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\}.$$

Claramente $x_n \in Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por tanto, por 3. $X = [x_n] \subseteq \overline{Y}$. A continuación probaremos que Y es cerrado.

Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Y que converge a $y_0 \in (X, \| \ \|)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : s(x_n)_{n=1}^{\infty} \to s(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$p_n \left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i & \text{si } n < m \\ \sum_{i=1}^{m} a_i x_i & \text{si } n \geq m \end{cases}$$

la cual claramente está bien definida, es lineal en $s(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y por la condición 2. $\|p_n\| \leq K$. Ahora ya que $s(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es denso en X, existe $P_n' : X \to X$ extensión de p_n lineal y continua con $\|P_n'\| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Copiando la demostración hecha en el Teorema 2.1.5 de que $(X, ||| \ |||)$ es un espacio de Banach y considerando en este caso $|||x||| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n' x\|$ concluimos que

$$y_0 = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i$$

para alguna sucesión $(b_i)_{i=1}^{\infty}$. Es decir Y es cerrado y por tanto $Y = X$, es así que para todo $x \in X$ existe una sucesión de numeros reales $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i. \tag{2.3}$$

Ahora, sea $n < m$. Por la condición 2. obtenemos que

$$|a_n| \|x_n\| - \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|$$

y por tanto,

$$|a_n| \|x_n\| \leq 2K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|$$

para todo $n < m$. Usando esta última desigualdad e inducción sobre m deducimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es linealmente independiente lo cual implica que la representación en (2.3) es única y por lo tanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base para X. $\square$

Corolario 2.1.8. *Sea $(X, \| \, \|)$ un espacio de Banach. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X si y sólo si*

1. *$x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Existe una constante K tal que para toda sucesión de reales $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ y naturales $n < m$ se tiene que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|.$$

Como una aplicación del Teorema 2.1.7 probamos que tanto $C[0,1]$ como $L^p[0,1]$, con $1 \leq p < \infty$, tienen ambos bases de Schauder.

Proposición 2.1.9. *El espacio de Banach $(C[0,1], \| \, \|_\infty)$ tiene una base de Schauder normalizada y monótona.*

Demostración. Consideremos la sucesión de funciones $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ dadas por:

$f_0(t) = 1$, $f_1(t) = t$ para todo $t \in [0,1]$ y para $k = 0, 1, 2, \dots$ y $l = 1, 2, \dots 2^k$ definimos

$$f_{2^k+l}(t) = \begin{cases} 2^{k+1}\left(t - \left(\frac{2(2^k+l)-2}{2^{k+1}} - 1\right)\right) & \text{si } t \in [\frac{(2l-2)}{2^{k+1}}, \frac{(2l-1)}{2^{k+1}}] \\ 1 - 2^{k+1}\left(t - \left(\frac{2(2^k+l)-1}{2^{k+1}} - 1\right)\right) & \text{si } t \in ((2l-1)2^{-k-1}, 2l2^{-k-1}] \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Se recomienda al lector realizar los dibujos de estas funciones para los primeros casos.

Claramente $f_n \in C[0,1]$, además $f_n \neq 0$ y $\|f_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos enumerar a los racionales diadicos de la siguiente forma: $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ y para $n > 1$

$$t_n = \begin{cases} \frac{2(2^k)-2}{2^{k+1}} & \text{si } n = 2^k \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \\ \frac{2(2^k+l)-1}{2^{k+1}} - 1 & \text{si } n = 2^k + l \text{ para algunos } k \in \mathbb{N} \text{ y } 0 < l \leq 2^k - 1, \end{cases}$$

es decir $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = \frac{1}{2}, t_3 = \frac{1}{4}, t_4 = \frac{3}{4}, t_5 = \frac{1}{8}, \ldots$.

Observemos que $f_n(t_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $f_m(t_n) = 0$ para todo $m > n$. La sucesión $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ es linealmente independiente, pues si tomamos un subconjunto finito $\{f_{k_1}, \ldots, f_{k_n}\}$ y consideramos reales $a_{k_1}, \ldots a_{k_n}$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{k_i} f_{k_i} = 0$$

entonces, dado que $\{k_1, \ldots, k_n\}$ es un subconjunto finito de naturales, existe un elemento mínimo el cual sin pérdida de generalidad podemos suponer que es k_1. Es así que $k_1 < k_i$ para todo $i \geq 2$ y por tanto,

$$a_{k_1} = \sum_{i=1}^{n} a_{k_i} f_{k_i}(t_{k_1}) = 0.$$

Siguiendo un proceso análogo podemos deducir que $a_{k_2} = \ldots = a_{k_n} = 0$ y por tanto, $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ es linealmente independiente.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y

$$A_{2^n} = \{g \in C[0,1] \mid \text{ g es poligonal con vertices en } t = \frac{k}{2^n}$$

$$\text{para todo } k = 0, 1, \ldots 2^n\}.^1$$

el cual es claramente un subespacio de $C[0,1]$ de dimensión $2^n + 1$. Además $\{f_0, \ldots, f_{2^n}\} \subset A$ es linealmente independiente por tanto,

$$s(f_0, \ldots, f_{2^n}) = A_{2^n}.$$

Ahora probaremos que $[f_n] = C[0,1]$. Sean $f \in C[0,1]$ y $\epsilon > 0$, dado que f es uniformemente continua en $[0,1]$ podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $|x-y| < \frac{1}{2^N}$ se tiene que $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$.

[1] Una función $g \in C[0,1]$ es poligonal si exite una partición $\{t_1, \ldots, t_n\}$ tal que g esta definida en los intervalos $[t_i, t_{i+1}]$ como el segmento de recta que une $(t_i, g(t_i))$ y $(t_{i+1}, g(t_{i+1}))$.

Definimos $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera: $g\left(\frac{k}{2^N}\right) = f\left(\frac{k}{2^N}\right)$ para todo $k = 0, 1, \ldots, 2^N$ y g lineal en cada intervalo $\left(\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}\right)$.

Claramente $g \in A_{2^N}$ y por tanto, $g \in s(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Sea $x \in [0,1]$, existe $0 \leq k \leq 2^N - 1$ tal que $x \in \left(\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}\right)$ y por tanto,

$$|f(x) - g(x)| \leq \left| f(x) - f\left(\frac{k}{2^N}\right)\right| + \left| f\left(\frac{k}{2^N}\right) - g(x)\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Es así que $\|f - g\|_\infty < \epsilon$, es decir $[f_n] = C[0,1]$.

Sea $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y $n < m$. Denotemos por $p_n = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k$ y $p_m = \sum_{k=0}^{m} a_k f_k$. Dado que p_n y p_m son funciones poligonales obtenemos que

$$\|p_n\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |p_n(t_k)| \qquad \|p_m\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq m} |p_m(t_k)|.$$

Sea $0 \leq k \leq n$, si tomamos $j > n \geq k$ entonces $f_j(t_k) = 0$ y por tanto,

$$p_m(t_k) = p_n(t_k).$$

Es así que

$$\|p_n\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |p_n(t_k)| = \max_{0 \leq k \leq n} |p_m(t_k)| \leq \|p_m\|_\infty.$$

Finalmente del Teorema 2.1.7 deducimos que $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ es una base normalizada para $C[0,1]$ con constante básica $K = 1$. $\square$

Proposición 2.1.10. *El espacio de Banach* $(L^p[0,1], \| \, \|_p)$ *tiene una base de Schauder monótona para todo* $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Consideremos la sucesión de funciones $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ dadas por:

$g_1(t) = 1$ para todo $t \in [0,1]$ y para $k = 0, 1, 2, \ldots$ y $l = 1, 2, \ldots 2^k$ definimos

$$g_{2^k+l}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [(2l-2)2^{-k-1}, (2l-1)2^{-k-1}] \\ -1 & \text{si } t \in ((2l-1)2^{-k-1}, 2l2^{-k-1}] \\ 0 & \text{cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Se recomienda al lector realizar los dibujos de estas funciones para los primeros casos.

Claramente $g_n \in L^p[0,1]$, además $g_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, observemos que para todo $n < m$ el producto $g_n g_m$ es 0 ó $\pm g_m$, de donde se puede deducir que $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ es linealmente independiente.

A continuación probamos que $[g_n] = L^p[0,1]$. Para cada $k = 0, 1, 2, \ldots$ consideremos las siguientes familias de subconjuntos de $[0,1]$

$$A_k = \left\{ \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k} \right] \mid i = 1, \ldots, 2^k \right\},$$

es decir A_k es la familia de intervalos diadicos de longitud $\frac{1}{2^k}$. Para cada $I \in A_k$ denotemos por $\chi_I : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{si } x \notin I \end{cases}$$

claramente $g_i \in s(\chi_I \mid I \in A_k)$ para todo $i = 1, \ldots, 2^k$ y dado que $s(\chi_I \mid I \in A_k)$ es un subespacio de $L^p[0,1]$ de dimensión 2^k tenemos que

$$s(g_1, \ldots, g_{2^k}) = s(\chi_I \mid I \in A_k). \tag{2.4}$$

Sea $f \in L^p[0,1]$ y $\epsilon > 0$, sabemos que el subespacio de las funciones simples en $L^p[0,1]$ es denso en $L^p[0,1]$, lo cual implica que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ y $a_I \in \mathbb{R}$ para todo $I \in A_{k_0}$ tales que

$$\left\| \sum_{I \in A_{k_0}} a_I \chi_I - f \right\| < \epsilon$$

pero por (2.4) tenemos que $\sum_{I \in A_{k_0}} a_I \chi_I = \sum_{i=1}^{2^{k_0}} b_i g_i$ para algunos $b_1, \ldots, b_{2^{k_0}} \in \mathbb{R}$ y por tanto, $[g_n] = L^p[0,1]$.

Ahora, sean $m \in \mathbb{N}$ y $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de numeros reales. Supongamos que $m > 1$ entonces existe $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ y $l \in \{1, \ldots 2^k\}$ tales que $m = 2^k + l$, denotemos por

$$I_1 = [(2l-2)2^{-k-1}, (2l-1)2^{-k-1}] \qquad I_2 = ((2l-1)2^{-k-1}, 2l2^{-k-1}].$$

y por α el valor constante en $I_1 \cup I_2$ de $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i g_i$. Recordemos que para todo $s, t \geq 0$ se cumple

$$s^p + t^p - 2\left(\frac{s+t}{2}\right)^p \geq 0,$$

lo cual implica que

$$\int_{[0,1]} \left| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_i \right|^p - \int_{[0,1]} \left| \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i g_i \right|^p$$

$$= \int_{I_1} |\alpha + \alpha_m|^p + \int_{I_2} |\alpha - \alpha_m|^p - \int_{I_1 \cup I_2} |\alpha|^p$$
$$= \frac{|\alpha + \alpha_m|^p + |\alpha - \alpha_m|^p - 2|\alpha|^p}{2^{k+1}} \geq 0.$$

Lo anterior implica que $\left\|\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i g_i\right\|_p \leq \|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_i\|_p$, y como fue para una m arbitraria se puede deducir que si $n < m$ entonces

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i\right\|_p \leq \left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_i\right\|_p$$

por tanto, del Teorema 2.1.7 se sigue que $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base monótona para $L^p[0,1]$, la cuál es conocida como base de Haar. $\square$

2.2. Sucesiones básicas.

Los resultados precedentes nos ayudarán a probar que todo espacio de Banach tiene un sucesión básica, esto ya era conocido por Banach pero la prueba que daremos aquí fue ideada por S. Mazur.

Lema 2.2.1. *Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio normado de dimensión infinita. Si Y es un subespacio de X de dimensión finita entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y*
$$\|y\| \leq (1+\epsilon)\|y + \lambda x\|$$
para todo $y \in Y$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0 < \epsilon < 1$. Dado que Y es de dimensión finita el conjunto

$$S_Y = \{y \in Y \mid \|y\| = 1\}$$

es compacto. Lo cual implica que existen $y_1, \ldots, y_k \in S_Y$ tal que

$$S_Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{\epsilon}{2}}(y_i).$$

Ahora, por un Corolario del Teorema de Hahn-Banach, para todo $i = 1, \ldots k$ existe $y_i^* \in X^*$ tal que
$$y_i^*(y_i) = 1.$$

afirmamos que

$$N = \bigcap_{i=1}^{k} \ker y_i^* \neq \{0\},$$

supongamos que $N = \{0\}$. Sea $x^* \in X^*$, como $x^*(0) = 0$ entonces $N \subseteq \ker x^*$ y por tanto,[2] $x^* \in s(y_1^*, \ldots, y_k^*)$ de donde deducimos que

$$X^* = s(y_1^*, \ldots, y_k^*)$$

lo cual es una contradicción pues X de dimensión infinita implica que X^* es de dimensión infinita. Es así que podemos tomar $x \in N$ tal que $\|x\| = 1$.

Sea $y \in S_Y$, entonces existe $1 \leq i \leq k$ tal que

$$\|y - y_i\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Más aún, si $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\|y + \lambda x\| \geq \|y_i + \lambda x\| - \|y - y_i\| \geq |y_i^*(y_i + \lambda x)| - \frac{\epsilon}{2} = 1 - \frac{\epsilon}{2} \geq \frac{1}{1+\epsilon}.$$

Es decir $\|y\| \leq (1+\epsilon)\|y + \lambda x\|$ para todo $y \in S_Y$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Pero esta última desigualdad es homogénea y por lo tanto también se cumple para todo $y \in Y$. □

Teorema 2.2.2. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach. Si X es de dimensión infinita entonces X tiene una sucesión básica.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, consideremos $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de reales positivos tal que

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \epsilon_n) \leq 1 + \epsilon.$$

Como un ejemplo considerese $\epsilon_n = \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{2^{n-1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $x_1 \in X$ tal que $\|x_1\| = 1$, por el Lema 2.2.1 existe $x_2 \in X$ tal que $\|x_2\| = 1$ y

$$\|y\| \leq (1 + \epsilon_1)\|y + \lambda x_2\|$$

para todo $y \in s(x_1)$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

usando inducción encontramos una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\|x_n\| = 1$ y

$$\|y\| \leq (1 + \epsilon_n)\|y + \lambda x_{n+1}\|$$

[2] Para una demostración de este hecho consulte [28] Lema 3.9.

para todo $y \in s(x_1, \ldots, x_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X. Claramente $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y es así que la condición 1. del Corolario 2.1.8 se cumple. Basta ver que también se satisface la condición 2.

Sea $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y $n < m$ naturales arbitrarios. Por la construcción de los x_n se tiene que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq \prod_{i=n}^{m}(1+\epsilon_i)\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \leq (1+\epsilon)\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|.$$

Por lo tanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X. □

Proposición 2.2.3. *Sea $(X, \| \, \|)$ un espacio de Banach con base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $x_n^* : X \to \mathbb{R}$ por*

$$x_n^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = a_n.$$

Entonces x_n^* es una funcional lineal y continua con

$$\|x_n^*\| \leq \frac{2K}{\|x_n\|}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, donde K es la constante básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Demostración. Es fácil ver que x_n^* es lineal para todo $n \in \mathbb{N}$, además sabemos que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por tanto, si $x \in X$ y $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ se tiene que

$$|x_n^*(x)| = |a_n| = \frac{\|a_n x_n\|}{\|x_n\|} = \frac{\|P_n x - P_{n-1}x\|}{\|x_n\|} \leq \frac{2K}{\|x_n\|}\|x\|.$$

Es así que $\|x_n^*\| \leq \frac{2K}{\|x_n\|}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Definición 2.2.4. *Sea $(X, \| \, \|)$ un espacio de Banach con una base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. La sucesión de funcionales continuas $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$, dadas en la Proposición anterior, se llama sucesión de funcionales biortogonales asociadas a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Observación 2.2.5. *Es fácil ver que $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$, la sucesión de funcionales biortogonales asociadas a una base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, satisfacen que*

$$x_n^*(x_m) = \delta_{nm}$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Definición 2.2.6. *Sean $(X, \| \|)$ y $(Y, \| \|)$ dos espacios de Banach, con bases $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ respectivamente. Decimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ si $(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k)_{n=1}^{\infty}$ converge si y sólo si $(\sum_{k=1}^{n} a_k y_k)_{n=1}^{\infty}$ converge para toda sucesión de reales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.*

La siguiente proposición justifica el término de bases equivalentes.

Proposición 2.2.7. *Sean $(X, \| \|)$ y $(Y, \| \|)$ dos espacios de Banach, con bases $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ respectivamente. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ si y sólo si existe un isomorfismo $T : X \to Y$ tal que*

$$Tx_n = y_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. $\Leftarrow]$ Supongamos que existe $T : X \to Y$ isomorfismo tal que $Tx_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $T^{-1} : Y \to X$ la inversa de T la cual claramente cumple que $T^{-1}y_n = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además sabemos que T y T^{-1} son acotadas, por tanto es fácil ver que $C = \text{máx}\{\|T\|, \|T^{-1}\|\}$ cumple lo siguiente

$$C^{-1} \left\| \sum_{n=i}^{j} a_n y_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=i}^{j} a_n x_n \right\| \leq C \left\| \sum_{n=i}^{j} a_n y_n \right\|$$

para todo $j > i$ y toda sucesión de reales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Usando la desigualdad anterior deducimos que $(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k)_{n=1}^{\infty}$ converge si y sólo si $(\sum_{k=1}^{n} a_k y_k)_{n=1}^{\infty}$ converge para toda sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reales. Es decir $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$.

$\Rightarrow]$ Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son bases equivalentes para X y Y respectivamente. Consideremos $T : X \to Y$ dada por

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$$

la cual, por hipótesis, está bien definida. Más aún es fácil ver que T es lineal y biyectiva pues la inversa $T^{-1} : Y \to X$ viene dada por

$$T^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

que también está bien definida.

Basta probar que $\Gamma(T) = \{(x, Tx) \in X \times Y \mid x \in X\}$ la gráfica de T es cerrada, pues si esto fuera cierto tendríamos por el Teorema de la gráfica cerrada que T es acotado y por tanto, continuo pero T es biyectiva, lo cual implica, por el Teorema del mapeo abierto, que T^{-1} tambien es continua y por tanto, T es un isomorfismo entre X y Y, además claramente

$$Tx_n = y_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k x_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k y_n \right)_{k=1}^{\infty}$$

una sucesión en $\Gamma(T)$ que converge a $(x, y) \in X \times Y$, que podemos escribir como

$$(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n, \sum_{n=1}^{\infty} d_n y_n \right).$$

Por convergencia entrada a entrada deducimos que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k x_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \qquad \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k y_n = \sum_{n=1}^{\infty} d_n y_n.$$

Sean $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ las sucesiones biortogonales asociadas a las bases $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ respectivamente, por la Proposición 2.2.3 se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} a_n^k = \lim_{k\to\infty} x_n^* \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^k x_m \right) = x_n^* \left(\sum_{m=1}^{\infty} c_m x_m \right) = c_n$$

y

$$\lim_{k\to\infty} a_n^k = \lim_{k\to\infty} x_n^* \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^k y_m \right) = x_n^* \left(\sum_{m=1}^{\infty} c_m y_m \right) = d_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Es así que $c_n = d_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto, $(x, y) \in \Gamma(T)$, es decir $\Gamma(T)$ es cerrado. □

Corolario 2.2.8. *Sean $(X, \|\ \|)$ y $(Y, \|\ \|)$ dos espacios de Banach, con bases $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ respectivamente. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ si y sólo si existe $C > 0$ tal que*

$$C^{-1} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leq C \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\|$$

para toda sucesión de reales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Demostración. La Proposición 2.2.7 nos dice que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ si y sólo si existe $T : X \to Y$ isomorfismo tal que $Tx_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es así que la demostración se sigue de considerar $C = \text{máx}\{\|T\|, \|T^{-1}\|\}$. $\square$

En 1964 I. Singer y A. Pelczynski demostraron que si un espacio de Banach de dimensión infinita tiene una base entonces existe una cantidad no numerable de bases mutuamente no equivalentes, resolviendo así el problema de la unicidad de una base. El enunciado preciso es el siguiente.

Teorema 2.2.9. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Si X tiene una base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces existe una cantidad no numerable de bases que no son equivalentes una a una con $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Demostración. Véase [29] para una demostración detallada de este resultado. $\square$

El siguiente teorema muestra que bajo pequeñas perturbaciones las bases y sucesiones básicas se conservan.

Teorema 2.2.10. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach con una base (sucesión básica) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y constante básica K. Supongamos que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X distinta de cero que satisface $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n - y_n\|}{\|x_n\|} = \delta < \infty$.*

1. *Si $2K\delta < 1$, entonces $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base (sucesión básica) para X equivalente a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

2. *Si $2K\delta < 1$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es tan sólo sucesión básica y existe una proyección lineal y continua $P : X \to [x_n]$ tal que $8K\delta\|P\| < 1$, entonces existe también $Q : X \to [y_n]$ una proyección lineal y continua.*

Demostración. 1.] Sin pérdida de generalidad supongamos que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el operador lineal $T : X \to [y_n]$ dado por

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$$

donde $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. T está bien definido pues como $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| = \delta < \infty$ entonces

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (a_n y_n - a_n x_n) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|$$

$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(x)| \delta + \|x\| \leq \|x\|(2K+1),$$

donde $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ es la sucesión de funcionales biortogonales asociadas a $(x_n)_{n=1}^\infty$.

Sea $(a_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de reales tal que $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n \in X$, la Proposición 2.2.3 nos dice que

$$\frac{1}{2K} \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|$$

y por tanto,

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \|x_n - y_n\| \leq \delta \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \leq 2K\delta \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|,$$

es así que

$$(1-2K\delta) \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\| \leq (1+2K\delta) \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|. \tag{2.5}$$

La desigualdad (2.5) en particular es cierta para aquellas sucesiones de numeros reales que a partir de cierto momento son cero, esto implica que para todo $n < m$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right\| \leq (1+2K\delta) \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq (1+2K\delta) K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|$$

$$\leq (1+2K\delta) K (1-2K\delta)^{-1} \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i y_i \right\|.$$

Es decir $(y_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión básica. Esto nos dice que para todo $y \in [y_n]$ podemos escribir $y = \sum_{n=1}^\infty b_n y_n$ para alguna sucesión de reales $(b_n)_{n=1}^\infty$, y con esto T es invertible pues $T^{-1} : [y_n] \to X$ está dada por

$$T^{-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Más aún, la desigualdad (2.5) nos dice que tanto T como T^{-1} son continuas y por tanto, T es un ismorfismo entre X y $[y_n]$ lo cual implica que $(y_n)_{n=1}^\infty$ también es base para X. Tomando $C = \max\{1+2K\delta, (1-2K\delta)^{-1}\}$ del Corolario 2.2.8 se deduce que $(x_n)_{n=1}^\infty$ y $(y_n)_{n=1}^\infty$ son bases equivalentes.

2.] Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X, la demostración del inciso 1.] permite ver que $T : [x_n] \to [y_n]$ dada por

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$$

es un isomorfismo, con $\|T\| \leq 1 + 2K\delta < 2$ y $\|T^{-1}\| \leq (1 - 2K\delta)^{-1}$. Sea $P : X \to [x_n]$ una proyección sobre $[x_n]$, claramente $\|P\| \geq 1$.

La condición de que $8K\delta\|P\| < 1$ implica que $4K\delta < 1$. Sea $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ y $y = Tx$

$$\|x\| \leq (1 - 2K\delta)^{-1}\|y\| < (1 + 4k\delta)\|y\| < 2\|y\|$$

es decir $\|T^{-1}\| < 2$

Sea $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funcionales biortogonales asociada a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, de la Proposición 2.2.3 podemos deducir que

$$|a_n| \leq 2K\|x\| < 4K\|y\|.$$

Es decir $\|y_n^*\| \leq 4K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos $TP : X \to [y_n]$ el cual cumple que

$$\|TPy - y\| = \|TP(y - x)\| = \left\|TP\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(y_n - x_n)\right)\right\|$$

$$\leq \|T\|\|P\|\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\right)\sum_{n\in\mathbb{N}} \|y_n - x_n\| \leq 8K\delta\|P\|\|y\| < \|y\|.$$

Para todo $y \in [y_n]$, es así que $\|(TP)_{|[y_n]} - I\| < 1$ y por tanto, la diferencia $I - \big((TP)_{|[y_n]} - I\big) = (TP)_{|[y_n]} = S$ es invertible [3] más aun S es un isomorfismo en $[y_n]$. Sea $Q = S^{-1}TP : X \to [y_n]$, Q es una proyección sobre $[y_n]$ pues

$$QQ = S^{-1}TPS^{-1}TP = P^{-1}T^{-1}TPP^{-1}T^{-1}TP = I_{[y_n]}$$

que es lo que se quería probar. □

El Teorema 2.2.10 tiene varias aplicaciones importantes, entre las cuales se encuentra el siguiente Corolario.

Corolario 2.2.11. $C[0,1]$ *tiene una base que consta de puros polinomios. Lo mismo es cierto para* $L^p[0,1]$ *para todo* $1 \leq p < \infty$.

[3] Este resultado aunque no se demostro aquí se puede encontrar en [19], Teorema 7.3-1.

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base normalizada para $C[0,1]$ y constante básica $K > 0$, denotemos por $\epsilon_n = \frac{1}{4^n K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Stone-Weierstrass existe un polinomio p_n tal que

$$\|x_n - p_n\|_\infty < \epsilon_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es así que

$$\delta = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - p_n\|_\infty < \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n = \frac{1}{3K}.$$

Por tanto, es claro que $2K\delta < \frac{2}{3} < 1$, usando el Teorema 2.2.10 deducimos que $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base para $C[0,1]$. La demostación para $L^p[0,1]$ es análoga. □

Ahora definimos las sucesiones básicas por bloques, las cuales nos permitiran obtener nuevas sucesiones básicas de otras ya conocidas.

Definición 2.2.12. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica en un espacio de Banach $(X, \|\ \|)$. Una sucesión $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ en X de la forma*

$$u_k = \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} a_i x_i$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, donde $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de naturales estrictamente creciente y $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de reales, es llamada una sucesión básica por bloques de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Proposición 2.2.13. *Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach con una base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y constante básica K. Si $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión básica por bloques de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ entonces $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión básica con constante básica menor o igual que K.*

Demostración. Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de reales y $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de naturales estrictamente creciente tales que

$$u_k = \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} a_i x_i$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Sean $n < m$ naturales y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de reales, es claro que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} b_j u_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} b_j a_i x_i \right\|$$

$$= \left\| \sum_{l=p_1+1}^{p_{n+1}} c_l x_l \right\| \leq K \left\| \sum_{l=p_1+1}^{p_{m+1}} c_l x_l \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{m} b_j u_j \right\|$$

donde $c_l = b_j a_i$ para todo $1 \leq j \leq n$ y todo $p_j + 1 \leq i \leq p_{j+1}$. Por tanto, según el Corolario 2.1.8 se tiene que $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión básica con constante básica menor o igual que K. □

Teorema 2.2.14. *Sea $(X, \| \, \|)$ un espacio de Banach con base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y constante básica K. Supongamos que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es otra sucesión en X que cumple:*

1. $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\| > 0$
2. $\lim_{n\to\infty} x_k^*(y_n) = 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$,

donde $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión biortogonal asociada a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces existe una subsucesión básica $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que es equivalente a una subsucesión básica por bloques de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Demostración. Denotemos por $\alpha = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\| > 0$. Sea $0 < \nu < \frac{1}{4}$ y

$$y_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,n} x_i$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $n_1 = 1$, dado que $\lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{j} a_{i,1} x_i = y_{n_1}$ existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{i=p_1+1}^{\infty} a_{i,1} x_i \right\| = \left\| y_{n_1} - \sum_{i=1}^{p_1} a_{i,1} x_i \right\| < \frac{\nu\alpha}{2K}.$$

La condición 2. de nuestra hipótesis implica que

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{p_1} a_{i,n} x_i \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_1} |a_{i,n}| \|x_i\| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_1} |x_i^*(y_n)| \|x_i\| \to 0$$

y por tanto, $\lim_{n\to\infty} \|\sum_{i=1}^{p_1} a_{i,n} x_i\| = 0$, es así que existe $n_2 > n_1$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{p_1} a_{i,n_2} x_i \right\| < \frac{\nu^2\alpha}{2K}.$$

De nuevo, $\lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{j} a_{i,n_2} x_i = y_{n_2}$ implica que existe $p_2 > p_1$ tal que

$$\left\| \sum_{i=p_2+1}^{\infty} a_{i,n_2} x_i \right\| = \left\| y_{n_2} - \sum_{i=1}^{p_2} a_{i,n_2} x_i \right\| < \frac{\nu^2\alpha}{2K}.$$

Además la condición 2. implica que

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{p_2} a_{i,n} x_i \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_2} |a_{i,n}| \|x_i\| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_2} |x_i^*(y_n)| \|x_i\| \to 0$$

y por tanto, $\lim_{n\to\infty} \|\sum_{i=1}^{p_2} a_{i,n} x_i\| = 0$ de donde existe $n_3 > n_2$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{p_2} a_{i,n_3} x_i \right\| < \frac{\nu^3 \alpha}{2K}.$$

Continuando de manera inductiva, obtenemos una subsucesión $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ y una sucesión de natulares $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{i=1}^{p_{k-1}} a_{i,n_k} x_i \right\| < \frac{\nu^k \alpha}{2K} \qquad \left\| \sum_{i=p_k+1}^{\infty} a_{i,n_k} x_i \right\| < \frac{\nu^k \alpha}{2K} \tag{2.6}$$

donde $p_0 = 0$ si $k = 1$, es decir la proyección sobre el cero.

Sea

$$u_k = \sum_{i=p_{k-1}+1}^{p_k} a_{i,n_k} x_i$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Claramente $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión básica por bloques de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y por tanto, también es una sucesión básica con constante básica menor o igual a K, ademas por (2.6) tenemos que

$$\|u_k - y_{n_k}\| = \left\| \sum_{i=p_{k-1}+1}^{p_k} a_{i,n_k} x_i - \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,n_k} x_i \right\| \tag{2.7}$$

$$\leq \left\| \sum_{i=1}^{p_{k-1}} a_{i,n_k} x_i \right\| + \left\| \sum_{i=p_k+1}^{\infty} a_{i,n_k} x_i \right\| < \frac{\nu^k \alpha}{2K} + \frac{\nu^k \alpha}{2K} = \frac{\nu^k \alpha}{K}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Usando que $\nu^k \leq \nu$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y que $K \geq 1$, obtenemos que

$$\|u_k\| > \alpha - \frac{\nu^k \alpha}{K} \geq \left(1 - \frac{\nu}{K}\right) \alpha \geq (1-\nu)\alpha.$$

Es decir $u_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, más aún por (2.7) tenemos que

$$2K \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|u_k - y_{n_k}\|}{\|u_k\|} < 2(1-\nu)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k = 2\nu(1-\nu)^{-2} < \frac{8}{9} < 1.$$

Por lo tanto por el Teorema 2.2.10 tenemos que $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión básica de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que es equivalente a $(u_k)_{k=1}^{\infty}$. $\square$

Corolario 2.2.15. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach con base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Si Y es un subespacio de X cerrado y de dimensión infinita entonces Y contiene una sucesión básica que es equivalente a una sucesión básica por bloques de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la función $F_n : Y \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$F_n(y) = (x_1^*(y), \ldots, x_n^*(y))$$

donde $(x_k^*)_{k=1}^{\infty}$ es la sucesión biortogonal asociada a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Es fácil ver que F_n es lineal y afirmamos que $\bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^* \neq 0$, pues si no entonces

$$0 = \ker F_n = \bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^*$$

entonces F_n sería biyectiva sobre su imagen y por tanto, Y sería de dimensión finita, lo cual es una contradicción.

Lo anterior nos dice que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in Y$ tal que $\|y_n\| = 1$ y $y_n \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^*$, es decir

$$y_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{i,n} x_i.$$

Es así que $\lim_{n\to\infty} x_k^*(y_n) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, el Teorema 2.2.14 nos dice que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión básica que es equivalente a una sucesión básica por bloques de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. □

Corolario 2.2.16. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach con base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Supongamos que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X tal que $y_n \xrightarrow{w} 0$ pero $\|y_n\| \not\to 0$, cuando $n \to \infty$. Entonces $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión básica.*

Demostración. Inmediata a partir del Teorema 2.2.14 □

2.3. Bases que encogen y bases acotadamente completas.

Proposición 2.3.1. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach con una base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. La sucesión de funcionales biortogonales $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X^* y además $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n^*\| < \infty$ donde P_n^* es el operador adjunto a la proyección canónica P_n para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Para todo $n \in \mathbb{N}$ consideremos $P_n^* : X^* \to X^*$ los operadores adjuntos de las proyecciones canonicas $P_n : X \to X$ asociadas a la base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Estos operadores estan definidos por

$$P_n^*(f)(x) = f(P_n(x)) \tag{2.8}$$

para todo $f \in X^*$ y todo $x \in X$.

Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares y $n < m$, afirmamos que

$$P_n^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*. \tag{2.9}$$

Sea $x = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i$ elemento de X. Por un lado tenemos que

$$P_n^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*\right)(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*(P_n(x)) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} b_j x_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Y por el otro

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Es así que es cierta la igualdad en (2.8).

Claramente $x_n^* \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, además

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*\right\| = \left\|P_n^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*\right)\right\| \leq \|P_n^*\| \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*\right\| =$$

$$\|P_n\| \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*\right\|$$

donde K es la constante básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Por tanto del Corolario 2.1.8 se deduce que $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X^*. $\square$

Observación 2.3.2. *Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach con una base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Si $P_n^* : X^* \to X^*$ denota el operador adjunto a P_n para cada $n \in \mathbb{N}$ y además $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x) x_i$ es un elemento de X entonces*

$$P_n^*(x^*)(x) = x^*(P_n(x)) = x^*\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) x_i^*(x),$$

por lo cual P_n^* se puede escribir como

$$P_n^*(x^*) = \sum_{i=1}^{\infty} x^*(x_i)x_i^*$$

donde $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de funcionales biortogonales asociada a la base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

La Proposición 2.3.1 dice que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base para X entonces $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X^*, por lo cual es natural preguntarse: ¿$(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base para X^*? la respuesta es no, pues si fuera cierto entonces en particular X^* tendría que ser separable, lo cual no pasa en el caso $X = \ell^1$. Es decir la sucesión biortogonal $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ asociada a la base canonica de ℓ^1 es una sucesión básica en ℓ^{∞} pero no es base, lo mismo sucede para cualquier base de $C[0,1]$.

Definición 2.3.3. *Una base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ para un espacio de Banach $(X, \| \ \|)$ es una base que encoge para X si la sucesión de funcionales biortogonales $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base para X^*.*

La siguiente proposición arroja varios ejemplos de espacios con bases que encogen.

Proposición 2.3.4. *Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio de Banach con una base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Si X es reflexivo entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base que encoge.*

Demostración. Dado que $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X^*, basta probar que $[x_n^*] = X^*$. Supongamos que existe $0 \neq x^* \in X^*$ tal que $x^* \notin [x_n^*]$, por el Teorema de separación de Hanh-Banach se tiene que existe $x^{**} \neq 0 \in X^{**}$ tal que $x^{**}(h) = 0$ para todo $h \in [x_n^*]$.

Como X es reflexivo, existe $x \in X$ tal que $\widehat{x} = x^{**}$, además $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Es así que

$$0 = x^{**}(x_n^*) = \widehat{x}(x_n^*) = x_n^*(x) = a_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto, $x = 0$ de donde $x^{**} = 0$ lo cual es una contradicción. □

No siempre podemos asegurar que $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base para X^* cuando $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base para X, pero la siguiente proposición nos muestra que al considerar convergencia débil* la sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ tiene una propiedad muy importante.

Proposición 2.3.5. *Sea* $(X, \| \ \|)$ *un espacio de Banach con base* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$*. Para todo* $x^* \in X^*$ *se tiene que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n)x_n^* \stackrel{w^*}{=} x^*$$

donde $\stackrel{w^*}{=}$*, indica convergencia respecto a la topología débil*.*

Demostración. Sea $x^* \in X^*$. Dado $x \in X$ se tiene que existe $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de escalares tales que $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, además como el encaje canónico de X en X^{**} es continuo se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{x}\left(\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)x_i^*\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)x_i^*(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i x^*(x_i)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \widehat{x_i}(x^*) = \lim_{n\to\infty} \widehat{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}(x^*) = \widehat{x}(x^*).$$

Lo cual prueba la afirmación. □

Corolario 2.3.6. *Si* $(X, \| \ \|)$ *es un espacio de Banach con una base que encoge* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$*, entonces para todo* $x^* \in X^*$ *se tiene que*

$$x^* = \sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n)x_n^*$$

Demostración. Esto se sigue inmediatamente de la Proposición anterior y del hecho que convergencia en norma implica convergencia débil* y recordando que el limite débil* de una sucesión es único. □

A continuación damos una equivalencia de la definición de base que encoge.

Proposición 2.3.7. *Sea* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *una base para un espacio de Banach* $(X, \| \ \|)$*. Entonces* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una base que encoge si y sólo si para todo* $x^* \in X^*$ *se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x^* \mid_{[x_i]_{i=n}^{\infty}} \right\| = 0.$$

Donde $[x_i]_{i=n}^{\infty} = \overline{s(x_i)_{i=n}^{\infty}}$*.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $x^* \in X^*$. Consideremos $P_n^* : X^* \to X^*$ los operadores adjuntos de $P_n : X \to X$ las proyecciones canónicas asociadas a la base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, por la Observación 2.3.2 tenemos que $(P_{n-1}^* x^*)\mid_{[x_i]_{i=n}^{\infty}} = 0$ ya que $x_j^*(x_i) = \delta_{ij}$.

Si $y \in [x_i]_{i=n}^{\infty}$ y $\|y\| = 1$, entonces

$$|x^* \mid_{[x_i]_{i=n}^{\infty}} (y)| = |x^*(y)| = |x^*(y) - (P_{n-1}^* x^*)(y)| \leq \|x^* - P_{n-1}^* x^*\| \to 0$$

cuando $n \to \infty$, esto último se debe a que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base que encoge. Por lo tanto $\left\|x^* \mid_{[x_i]_{i=n}^{\infty}}\right\| \to 0$ si $n \to \infty$.

$\Leftarrow$] Sea $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Entonces

$$|(x^* - P_n^* x^*)(x)| = |x^*(x - P_n(x))| = \left| x^* \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i x_i \right) \right|$$

$$\leq \left\| x^* \mid_{[x_i]_{i=n+1}^{\infty}} \right\| \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i x_i \right\| \leq \left\| x^* \mid_{[x_i]_{i=n+1}^{\infty}} \right\| \left(\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| + \|x\| \right)$$

$$\leq \left\| x^* \mid_{[x_i]_{i=n+1}^{\infty}} \right\| (K+1) \to 0$$

cuando $n \to \infty$, donde K es la constante básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. De esta manera $\|P_n^* x^* - x^*\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, pero la Observación 2.3.2 nos dice que

$$P_n^* x^* = \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) x_i^*,$$

y por tanto, $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n) x_n^*$, es decir $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base que encoge. $\square$

Otro tipo importante de bases en espacios de Banach son las bases acotadamente completas, que enseguida se definen.

Definición 2.3.8. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach con una base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Decimos que esta base es acotadamente completa en X si para toda sucesión de numeros reales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| < \infty$$

se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge en X.

La siguiente proposición muestra la relacion que existe entre una base que encogen y una base acotadamente completa.

Proposición 2.3.9. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach con una base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base que encoge para X si y sólo si la sucesión de funcionales biortogonales $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base acotadamente completa en $[x_n^*]$.*

Demostración. $\Leftarrow]$ Sea $x^* \in X^*$ y supongamos que $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base acotadamente completa. Sabemos por la Proposición 2.3.5 que

$$x^* \overset{w^*}{=} \sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n)x_n^*$$

y en particular la sucesión $(\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)x_i^*)_{n=1}^{\infty}$ es acotada en norma, y por hipótesis también converge en norma a un punto $y^* \in [x_n^*]$, pero convergencia en norma implica convergencia débil* y dado que el límite débil* de una sucesión es unico se tiene que $x^* = y^*$ y por tanto,

$$x^* = \sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n)x_n^*.$$

Es decir $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base que encoge para X.

$\Rightarrow]$ Supongamos ahora que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base que encoge para X, es decir $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base para X^*.

Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^* \right\| < \infty.$$

Usando el Teorema de Alaoglu encontramos $x^* \in X^*$ punto de acumulación débil* de la sucesión $(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*)_{n=1}^{\infty}$. Esto implica que dado $\epsilon > 0$ y $k \geq 1$ existe $m \geq k \geq 1$ tal que

$$|a_k - x^*(x_k)| = \left| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*(x_k) - x^*(x_k) \right| < \epsilon.$$

Es decir para todo $k \geq 1$ se tiene que $x^*(x_k) = a_k$. Además, como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base que encoge tenemos que

$$x^* = \sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n)x_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n^*. \tag{2.10}$$

Por lo tanto $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base acotadamente completa en $X^* = [x_n^*]$. $\square$

Proposición 2.3.10. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach con base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. La función $j : X \to [x_n^*]^*$ dada por*

$$j(x)(f) = f(x)$$

para todo $x \in X$ y todo $f \in [x_n^*]$ es un encaje. Es decir j es un isomorfismo sobre su imagen.

Demostración. Observamos que $j(x) = C(x)_{|[x_n^*]}$ para todo $x \in X$, donde C es el encaje canónico de X en X^{**} y por lo tanto j esta bien definida y es lineal, además es claro que $[x_n^*]^*$ es un espacio de Banach con la norma dada por

$$\|y\| = \sup\{|y(f)| \mid f \in [x_n^*], \|f\| \leq 1\}$$

para cada $y \in [x_n^*]^*$.

Ahora, sea $x \in X$, dado que $[x_n^*]$ es un subespacio de X^* se tiene que

$$\|j(x)\| = \sup\{|f(x)| \mid f \in [x_n^*], \|f\| \leq 1\} \leq \|\widehat{x}\| = \|x\|.$$

Por el Corolario 1.5.4 del Teorema de Hahn-Banach existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1$ y $x^*(x) = \|x\|$. Lo cual implica que, si K denota la constante básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene lo siguiente

$$\frac{|(P_n^* x^*)(x)|}{K} \leq \frac{|(P_n^* x^*)(x)|}{\|P_n^* x^*\|} \leq \sup\{|f(x)| \mid f \in [x_n^*], \|f\| \leq 1\} = \|j(x)\|. \tag{2.11}$$

Sabemos que $\lim_{n\to\infty} \|P_n(x) - x\| = 0$ y por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} |(P_n^* x^*)x| = \lim_{n\to\infty} |x^*(P_n(x))| = \|x\|$$

es así que si en (2.11) $n \to \infty$ se obtiene que

$$\frac{\|x\|}{K} \leq \|j(x)\| \leq \|x\| \tag{2.12}$$

es decir j es un isomorfismo sobre su imagen. □

Otra proposición importante es la siguiente.

Proposición 2.3.11. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach con una base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base acotadamente completa en X si y sólo si $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base que encoge para $[x_n^*]$.*

Demostración. $\Leftarrow$] Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de reales tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| < \infty.$$

Consideremos $j : X \to [x_n^*]^*$ dada por $j(x)(f) = f(x)$ para todo $x \in X$ y todo $f \in [x_n^*]$, la Proposición 2.3.10 nos da la siguiente desigualdad

$$\left\| j\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|$$

por lo tanto la sucesión $(\sum_{i=1}^{n} a_i j(x_i))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en $[x_n^*]^*$, más aún usando el Teorema de Alaoglu encontramos $h^* \in [x_n^*]^*$ punto de acumulación débil* de esta sucesión.

Usando el mismo argumento que se dio para probar (2.10) de la Proposición 2.3.9, deducimos que $h^*(x_n^*) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por tanto, usando nuestra hipótesis se obtiene que

$$h^* = \sum_{n=1}^{\infty} h^*(x_n^*) j(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n j(x_n),$$

pero j es un isomorfismo sobre su imagen, lo cual implica que existe $x \in X$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, es decir $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa.

$\Rightarrow$] Sabemos por la Proposición 2.3.10 que j es un isomorfismo sobre su imagen, veremos que la hipótesis de que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sea acotadamente completa implica que j es sobre, es decir j es un isomorfismo.

Sea $y^* \in [x_n^*]^*$, por el Teorema de extensión de Hahn-Banach tenemos que existe $x^{**} \in X^{**}$ tal que $x^{**}_{|[x_n^*]} = y^*$. Consideremos la sucesión en X dada por $(\sum_{i=1}^{n} x^{**}(x_i^*) x_i)_{n=1}^{\infty}$, usando el Corolario 2.3.2 obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} x^{**}(x_i^*) j(x_i) = P_n^{**} x^{**}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, donde P_n^{**} es el doble operador adjunto de P_n.

De la desigualdad dada en (2.12) se obtiene que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x^{**}(x_i^*) x_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{n} x^{**}(x_i^*) j(x_i)\right\| = K\|P_n^{**} x^{**}\|$$

$$\leq K \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n^{**}\| \, \|x^{**}\| \leq K^2 \|x^{**}\|.$$

Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa, podemos encontrar $x \in X$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x^{**}(x_n^*)x_n$, más aún $j(x) = y^*$ pues para todo $k \in \mathbb{N}$

$$j(x)(x_k^*) = x_k^*(x) = x^{**}(x_k^*) = y^*(x_k^*)$$

y por tanto, j es un isomorfismo.

Ahora, por lo anterior $(j(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es una base para $[x_n^*]^*$ y más aún es la sucesión de funcionales biortogonales asociadas a la base $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$, es decir $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base que encoge para $[x_n^*]$. □

De los resultados precedentes se puede deducir fácilmente el siguiente teorema.

Teorema 2.3.12. *Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach con una base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces X es reflexivo si y sólo si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es al mismo tiempo una base que encoge y una base acotadamente completa.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Supongamos que X es reflexivo. La Proposición 2.3.4 nos dice que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base que encoge y por tanto $[x_n^*] = X^*$, ahora dado que el encaje canónico $C : X \to X^{**}$ es un isomorfismo, se tiene que $(C(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es una base para X^{**} y más aún es la sucesión de funcionales biortogonales asociadas a la base $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$, es así que $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base que encoge para $X^* = [x_n^*]$ y por la Proposición 2.3.11 se sigue que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa.

$\Leftarrow]$ Ahora supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base que encoge y una base acotadamente completa. En la demostración de la Proposición 2.3.11 se probó que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa entonces $j : X \to [x_n^*]^*$ dada por $j(x)(f) = f(x)$ para todo $x \in X$ y todo $f \in X^*$ es un isomorfismo pero por hipótesis $[x_n^*] = X^*$ y por tanto, el encaje canónico C coincide con j, es decir X es reflexivo. □

2.4. Bases incondicionales.

Definición 2.4.1. *Sean $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos en X. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente si $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ converge para toda permutacion π de $\mathbb{N}$.*

La siguiente proposición muestra varias equivalencias a la definición anterior.

Proposición 2.4.2. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos en un espacio de Banach $(X, \|\ \|)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge incondicionalmente.*

2. *La serie* $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ *converge para cualquier sucesion de naturales* $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$

3. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$ *converge para cualquier elección de signos* $\theta_n = \pm 1$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

4. *Para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\left\| \sum_{i \in \sigma} x_i \right\| < \epsilon$$

   para todo σ *subconjunto finito de* $\mathbb{N}$ *tal que* $n < \text{mín}\{i \in \sigma\}$.

Demostración. $2 \Rightarrow 3]$ Sea $(\theta_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de signos, es decir $\theta_n = \pm 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \theta_n = 1\}$ y $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \theta_n = -1\}$, claramente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n = \sum_{n \in A} x_n - \sum_{n \in B} x_n.$$

Por hipotesis $\sum_{n \in A} x_n$ y $\sum_{n \in B} x_n$ convergen y por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$ converge.

$3 \Rightarrow 2]$ Sea $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de naturales tales que $n_1 < n_2 < \ldots$, por hipótesis si $\theta_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

Consideremos $\theta_{n_k} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\theta_m = -1$ si m no es un elemento de la sucesión $(n_k)_{k=1}^{\infty}$, por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$ converge. Es así que

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2x_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$$

converge.

$4 \Rightarrow 1]$ y $4 \Rightarrow 2]$ Si se satisface la condición 4. entonces es claro que las sucesiones de sumas parciales $\left(\sum_{i=1}^{n} x_{\pi(i)}\right)_{n=1}^{\infty}$ y $\left(\sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\right)_{k=1}^{\infty}$ cumplen la condición de Cauchy y por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ son convergentes.

$2 \Rightarrow 4]$ Supongamos que la condición 4. no es cierta, es decir existe $\epsilon > 0$ y una sucesión de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que

$$\left\| \sum_{i \in \sigma_n} x_i \right\| \geq \epsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Más aún se puede suponer sin perdida de generalidad que

$$q_n = \text{máx}\{i \in \sigma_n\} < p_{n+1} = \text{mín}\{i \in \sigma_{n+1}\}.$$

Claramente $\sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ es una sucesión de numeros naturales tal que $\sum_{i \in \sigma} x_i$ no converge.

$1 \Rightarrow 4$] Supongamos que la condición 4. no se cumple, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\sigma_n \subset \{n+1, n+2, \ldots\}$ finito y

$$\left\| \sum_{i \in \sigma_n} x_i \right\| \geq \epsilon.$$

Sea $n_1 = 1$ y consideremos $A_1 = \sigma_{n_1}$, podemos tomar $n_2 = \text{máx}\, A_1$ y también $B_1 = \{n_1 + 1, \ldots, n_2\} \setminus A_1$.

De nuevo, Sea $A_2 = \sigma_{n_2}$, $n_3 = \text{máx}\, A_2$ y $B_2 = \{n_2 + 1, \ldots, n_3\} \setminus A_2$. Continuando de manera inductiva encontramos una sucesión de numeros naturales $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ y una partición de $\mathbb{N}$ dada por $A_k \cup B_k = \{n_k + 1, \ldots, n_{k+1}\}$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Definamos π una permutación de $\mathbb{N}$, tal que $\pi(A_k \cup B_k) = A_k \cup B_k$ y $\text{máx}\, A_k < \text{mín}\, B_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Es fácil ver que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ no converge pues su sucesión de sumas parciales no satisfacen la condición de Cauchy. $\square$

En la siguiente proposición enunciamos varias propiedades importantes relacionadas con la converegencia incondicional de una serie de elementos en un espacio de Banach, estas serán de utilidad más adelante. Las demostraciónes de estos hechos, aunque no se dan aquí, pueden ser encontradas en [20].

Proposición 2.4.3. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio de Banach $(X, \| \|)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente. Se cumple entonces que:*

1. *Existe $x \in X$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = x$ para toda permutación π de $\mathbb{N}$.*

2. *El subconjunto de X cuyos elementos son de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$ para cualquier elección de signos $\theta_n = \pm 1$, es compacto.*

3. *Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada de numeros reales, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge y la función $T : \ell^{\infty} \to X$ dada por $T(a_n)_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ es un operador lineal acotado.*

4. *Suponiendo que X es de dimensión finita se tiene que, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente si y sólo si converge absolutamente, es decir $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.*

Ahora podemos dar la definición de base incodicional para un espacio de Banach.

Definición 2.4.4. *Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach con una base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Decimos que esta base es incondicional si para todo $x \in X$ la serie $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge incondicionalmente. Además $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica incondicional si es una base incondicional para $[x_n]_{n=1}^{\infty}$.*

Proposición 2.4.5. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para un espacio de Banach $(X, \|\ \|)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional para X.*
2. *La sucesión $(x_{\pi(n)})_{n=1}^{\infty}$ es una base para X, donde π es cualquier permutación de $\mathbb{N}$.*
3. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ es una serie convergente, entonces para cualquier subconjunto σ de $\mathbb{N}$ se tiene que $\sum_{n\in\sigma} a_n x_n$ converge.*
4. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ es una serie convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$ también converge para toda sucesión de reales $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $|b_n| \leq |a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. La demostración es análoga a la que se dio en la Proposición 2.4.2. □

De la Proposición anterior, del Teorema del acotamiento uniforme y del Teorema de la gráfica cerrada podemos hacer las siguientes observaciones importantes, las cuales generalizan al Teorema 2.1.5.

Observación 2.4.6. *Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach con una base incondicional $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces:*

1. *Si σ es un subconjunto de $\mathbb{N}$, entonces la función $P_\sigma : X \to X$ dada por*

$$P_\sigma\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = \sum_{n\in\sigma} a_n x_n$$

   es un operador lineal acotado. Además $K_s = \sup_{\sigma\subseteq\mathbb{N}} \|P_\sigma\| < \infty$, las funciones P_σ son llamadas proyecciones naturales asociadas a la base incondicional $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Claramente si $\sigma = \{1, \ldots, n\}$ entonces P_σ coincide con la proyección natural P_n.

2. *Consideremos $\theta = (\theta_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de signos, es decir $\theta_n = \pm 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, la función $M_\theta : X \to X$ dada por*

$$M_\theta\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta_n x_n$$

es un operador lineal acotado. Además $K_u = \sup_\theta \|M_\theta\| < \infty$ y es llamada la constante incondicional de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

3. *Con las notaciones de K_s y K_u dadas en los puntos anteriores se tiene que*

$$K \leq K_s \leq K_u \leq 2K_s.$$

Donde K es la constante básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

4. *Toda sucesión básica por bloques de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica incondicional con constante incondicional menor o igual que K_u.*

5. *La sucesión de funcionales biortogonales $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica incondicional en X^* con constante incondicional igual a K_u.*

A continuación probamos un teorema que sera de utilidad más adelante.

Teorema 2.4.7. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach con base incondicional $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y constante incondicional K_u. Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de numeros reales tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge, entonces para toda sucesión acotada $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ de numeros reales se tiene que*

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n x_n\right\| \leq K_u \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\|$$

Demostración. Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de numeros reales tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge y $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada distinta de cero. Por el Corolario 1.5.4 existe $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| = 1$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n x^*(x_n) = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n x_n\right\|$$

Sea $\theta = (\theta_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de signos dada por $\theta_n = 1$ si $a_n x^*(x_n) \geq 0$ y $\theta_n = -1$ si $a_n x^*(x_n) < 0$. Entonces

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n x_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n||a_n x^*(x_n)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n a_n x^*(x_n)$$

$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| x^* \left(M_\theta \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) \right) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| K_u \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|.$$

□

2.5. Espacios reflexivos con bases incondicionales.

Esta sección esta dedicada a probar que un espacio de Banach con una base incondicional es reflexivo si y sólo si el espacio no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1 y no contiene subespacios isomorfos a c_0. Para probar esto necesitamos de los siguientes resultados.

Lema 2.5.1. *Una base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ para un espacio de Banach $(X, \| \|)$ es una base que encoge si y sólo si toda sucesión básica por bloques acotada de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es débilmente convergente a cero.*

Demostración. $\Leftarrow$] Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no es una base que encoge, entonces $X^* \neq [x_n^*]$ y por tanto, existe $x^* \in X^* \setminus [x_n^*]$ tal que $\|x^*\| = 1$. Es así que $(\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)x_i^*)_{n=1}^{\infty}$ converge débil* a x^* si $n \to \infty$ pero no converge en norma a x^*.

Como $(\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)x_i^*)_{n=1}^{\infty}$ no converge en norma entonces no satisface la condición de Cauchy para series, es decir existe $\epsilon > 0$ y $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de numeros naturales tal que

$$\left\| \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} x^*(x_i)x_i^* \right\| \geq \epsilon$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Ahora por la propiedad del supremo, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $z_k \in X$ tal que $\|z_k\| = 1$ y

$$\left| \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} x^*(x_i)x_i^*(z_k) \right| > \epsilon.$$

Sea $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ la sucesión básica por bloques de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$u_k = \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} x_i^*(z_k)x_i$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Tomemos $x^* \in X^*$ y observemos que

$$|x^*(u_k)| = \left| \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} x_i^*(z_k)x^*(x_i) \right| > \epsilon$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $(u_k)_{k=1}^\infty$ no converge débilmente a cero.

$\Rightarrow$] La demostración de esta parte es inmediata a partir de la Proposición 2.3.7. □

Usando el Lema anterior deducimos la siguiente proposición, resultado que se debe a R. C. James en 1974.

Proposición 2.5.2. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach con una base incondicional $(x_n)_{n=1}^\infty$. Entonces $(x_n)_{n=1}^\infty$ es una base que encoge para X si y sólo si X no tiene subespacios isomorfos a ℓ^1.*

Demostración. $\Rightarrow$] Si X contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1, entonces X^* no es separable[4]. Lo cual implica que $(x_n)_{n=1}^\infty$ no es una base que encoge, pues todo espacio de Banach con una base es separable.

$\Leftarrow$] Supongamos que $(x_n)_{n=1}^\infty$ no es una base que encoge, entonces por el Lema 2.5.1 se tiene que existen $\epsilon > 0$, $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| = 1$ y una sucesión básica por bloques normalizada $(u_k)_{k=1}^\infty$ de $(x_n)_{n=1}^\infty$ tal que

$$x^*(u_k) \geq \epsilon$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observemos que para toda sucesión $(a_i)_{i=1}^m$ tal que $a_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$ se tiene que

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i u_i \right\| \geq \left| x^* \left(\sum_{i=1}^m a_i u_i \right) \right| \geq x^* \left(\sum_{i=1}^m a_i u_i \right) = \sum_{i=1}^m a_i x^*(u_i) \geq \epsilon \sum_{i=1}^m a_i.$$

Ahora, sea $(a_i)_{i=1}^m$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y consideremos la sucesión acotada $(\lambda_i)_{i=1}^m$ dada por $\lambda_i = 1$ si $a_i \geq 0$ y $\lambda_i = -1$ si $a_i < 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$.

Si denotamos K_u la constante incondicional de $(x_n)_{n=1}^\infty$, entonces del Teorema 2.4.7 y del parrafo anterior deducimos que

$$\epsilon \sum_{i=1}^m |a_i| = \epsilon \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \leq \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i u_i \right\|$$

[4]Para una demostración detallada de este hecho vease [15].

$$\leq K_u \sup_{1\leq i\leq m} |\lambda_i| \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \right\| = K_u \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \right\|.$$

Es decir $\frac{\epsilon}{K_u}\sum_{i=1}^{m}|a_i| \leq \|\sum_{i=1}^{m} a_i u_i\|$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y segun el Corolario 2.6.3 $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ es equivalante a la base canónica de ℓ^1 y por tanto, $[u_k]$ es isomorfo a ℓ^1. □

Lema 2.5.3. *Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio de Banach con una base incondicional $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ cuya sucesión de funcionales biortogonales es $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$. Sea $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en X tal que $\lim_{k\to\infty} x^*(y_k)$ existe para todo $x^* \in X^*$ y $\lim_{k\to\infty} x_n^*(y_k) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\lim_{k\to\infty} x^*(y_k) = 0$$

para todo $x^* \in X^*$, es decir $y_k \xrightarrow{w} 0$ si $k \to \infty$.

Demostración. Supongamos que $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ no converge débilmente a 0. Entonces existen $x^* \in X^*$ y $\epsilon > 0$ tales que $x^*(y_k) \geq \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Lo anterior implica que $\|x^*\|\|y_k\| \geq \epsilon > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y por tanto, $\inf_{k\in\mathbb{N}} \|y_k\| > 0$ además por hipótesis $\lim_{k\to\infty} x_n^*(y_k) = 0$. El Teorema 2.2.14 nos dice que existe una subsucesión $(y_{k_l})_{l=1}^{\infty}$ de $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ que es equivalente a una subsucesión básica por bloques $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, más aún la demostración del Teorema 2.2.14 deja ver que la sucesión $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ se puede escoger tal que

$$\|y_{k_l} - u_l\| < \frac{1}{2^l}$$

para todo $l \in \mathbb{N}$. Lo cual claramente implica que

$$x^*(y_{k_l}) - x^*(u_l) < \frac{\|x^*\|}{2^l}$$

para todo $l \in \mathbb{N}$. Pero $x^*(y_{k_l}) \geq \epsilon$ y $\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2^l} = 0$, de donde se deduce que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x^*(u_l) > \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $l \geq N$. Si copiamos la demostración que se hizo en la Proposición 2.5.2 deducimos que $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ es equivalente a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ la báse canonica de ℓ^1, y por tanto, $(y_{k_l})_{l=1}^{\infty}$ también, es decir el subespacio cerrado $[y_{k_l}]$ es isomorfo a ℓ^1.

Ahora, la función $y^* : \ell^1 \to \mathbb{R}$ dada por $y^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, esta bién definida pues si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in \ell^1$ entonces se cumple que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ .Además

$$\left| y^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right\|_1 .$$

Por tanto, y^* es un operador lineal acotado en ℓ^1 tal que $y^*(e_n) = (-1)^n$, lo cual implica que también existe $z^* \in X^*$ tal que $z^*(y_{k_l}) = (-1)^l$ para todo $l \in \mathbb{N}$, es decir $\lim_{k\to\infty} z^*(y_k)$ no existe, lo cual es una contradicción a nuestra hipótesis. $\square$

Proposición 2.5.4. *Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach con una base incondicional $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa.*

2. *X tiene la siguiente propiedad: Para toda sucesion $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existe para todo $f \in X^*$, se tiene que existe $x_0 \in X$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x_0$.*[5]

3. *X no tiene subespacios isomorfos a c_0.*

Demostración. 2 $\Rightarrow$ 3] Observemos primero que c_0 no tiene la propiedad 2. esto se debe a que la sucesión $(e'_n)_{n=1}^{\infty}$ dada por $e'_n = e_1 + \ldots + e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ es débilmente de Cauchy, pero no converge débilmente en c_0 puesto que $(e'_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débil* en $c_0^{**} = \ell^{\infty}$ a $(1, 1, 1, \ldots)$.

Ahora, supongamos que existen Y un subespacio de X y $F : c_0 \to Y$ un isomorfismo. Sabemos que convergencia débil es invariante bajo isomorfismos[6] lo cual implica que la sucesión en X dada por $(F(e'_n))_{n=1}^{\infty}$ es débilmente de Cauchy pero no débilmente convergente, es decir X no es c.s.d.

3 $\Rightarrow$ 1] Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no es acotadamente completa, entonces existen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y $M > 0$ tal que $\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)_{n=1}^{\infty}$ no converge.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $M = 1$. Dado que $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)_{n=1}^{\infty}$ no converge, entonces tampoco satisface la condición de Cauchy y por tanto,

[5] Cuando X tiene esta propiedad se dice que X es completo por sucesiones débiles, este concepto lo usaremos en el capítulo 3, véase la definición 3.2.9

[6] De hecho si $T \in B(X, Y)$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a x entonces $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a Tx, vease [28] ejercicio 18 del capítulo 4.

existen $\epsilon > 0$ y $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión básica por bloques de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de la forma $u_k = \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} a_i x_i$ tal que

$$\|u_k\| \geq \epsilon$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sea $m \in \mathbb{N}$ y $(\lambda_i)_{i=1}^{m}$ una sucesión de numeros reales. Si K_u denota la constante incondicional de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ entonces por el Teorema 2.4.7 deducimos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \right\| \leq K_u \sup_{1 \leq i \leq m} |\lambda_i| \left\| \sum_{i=1}^{m} u_i \right\| \leq K_u \sup_{1 \leq i \leq m} |\lambda_i|. \tag{2.13}$$

Por otro lado si K denota la constante básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ la Proposición 2.2.3 nos dice que

$$|\lambda_i| \leq \frac{2K}{\|u_i\|} \left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \right\|$$

para todo $1 \leq i \leq m$. Lo anterior implica que

$$\epsilon |\lambda_i| \leq |\lambda_i| \|u_i\| \leq 2K \left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \right\| \leq 2K_u \left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \right\| \tag{2.14}$$

para todo $1 \leq i \leq m$. Por tanto, de las desigualdades (2.13) y (2.14) se deduce que

$$\frac{\epsilon}{2K_u} \sup_{1 \leq i \leq m} |\lambda_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \right\| \leq K_u \sup_{1 \leq i \leq m} |\lambda_i|.$$

Lo cual implica que $[u_k]$ es isomorfo a c_0.

$1 \Rightarrow 2]$ Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa y sea $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en X que es débilmente de Cauchy, es decir $\lim_{k \to \infty} x^*(y_k)$ existe para todo $x^* \in X^*$.

Sea $a_n = \lim_{k \to \infty} x_n^*(y_k)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, claramente para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} a_n x_n \right\| = \lim_{k \to \infty} \|P_m y_k\| \leq K \sup_{k \in \mathbb{N}} \|y_k\|$$

donde K es la constante básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(P_m)_{m=1}^{\infty}$ son las proyecciones canonicas asociadas a esta base.

Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge en norma a un elemento y de X, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(y) x_n$$

Por lo tanto es fácil ver que la sucesión $(y_k - y)_{k=1}^{\infty}$ satisface las condiciones del Lema 2.5.3 y por tanto, $y_k - y$ converge débilmente a 0 si $k \to \infty$, es decir y_k converge débilmente a y por tanto, X satisface la condición 2. $\square$

El siguiente enunciado puede ser considerado como un corolario de las proposiciones anteriores, pero debido a su importancia lo llamaremos un Teorema.

Teorema 2.5.5 (James)**.** *Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach con una base incondicional. Entonces, X es reflexivo si y sólo si no contiene subespacios isomorfos a c_0 ni a ℓ^1.*

Demostración. La demostración es inmediata del Teorema 2.3.12 y de las Proposiciones 2.5.2 y 2.5.4. $\square$

2.6. Sucesiones estrictamente equivalentes

Para finalizar este capítulo incluimos las siguientes definiciones y proposiciones que servirán como punto de partida para el capítulo 3.

En la definición 2.2.6 vimos el significado de bases y sucesiones básicas equivalentes, la siguiente definición generaliza este hecho para sucesiones arbitrarias en espacios de Banach. Además, de la proposición 2.6.2 es fácil ver que los conceptos de estrictamente equivalente y equivalente coinciden en el caso cuando las sucesiones son bases o sucesiones básicas.

Definición 2.6.1. *Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en espacios de Banach X y Y respectivamente.*

1. *Decimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ domina estrictamente a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ si existe un operador lineal y continuo $U : [x_n] \to [y_n]$ tal que*

$$U(x_n) = y_n \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   En este caso escribimos $(x_n)_{n=1}^{\infty} \gg (y_n)_{n=1}^{\infty}$.

2. *Decimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente equivalente a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ si $(x_n)_{n=1}^{\infty} \gg (y_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty} \gg (x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Proposición 2.6.2. *Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en espacios de Banach X y Y respectivamente. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente equivalente a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$.*

2. *Existen $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tal que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right\| \leq C_1 \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \qquad \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq C_2 \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right\| \tag{2.15}$$

   para cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

3. *Existe $U : [x_n] \to [y_n]$ isomorfismo tal que $U(x_n) = y_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2.] Si $(x_n)_{n=1}^{\infty} \gg (y_n)_{n=1}^{\infty} \gg (x_n)_{n=1}^{\infty}$ entonces existen operadores lineales y continuos $U : [x_n] \to [y_n]$ y $V : [y_n] \to [x_n]$ tal que

$$U(x_n) = y_n \qquad V(y_n) = x_n$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $C_1 = \|U\| > 0$. Claramente se tiene que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right\| = \left\| U \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) \right\| \leq \|U\| \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|$$

Analogamente si tomamos $C_2 = \|V\|$ se tiene la otra desigualdad.

2. $\Rightarrow$ 1.] Consideremos la función $U_0 : s(x_n)_{n=1}^{\infty} \to s(y_n)_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$U_0(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i y_i$$

donde $x = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i$ y $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$.

Supongamos que $\sum_{i=1}^{N} a_i x_i = \sum_{i=1}^{M} b_i x_i$ entonces

$$\sum_{i=1}^{N} a_i x_i + \sum_{i=1}^{M} (-b_i) x_i = 0$$

y usando la primera ecuación de (2.15) obtenemos que $\sum_{i=1}^{N} a_i y_i = \sum_{i=1}^{N} b_i x_i$. Es decir, U_0 esta bien definida.

Además U_0 es lineal y la primera ecuación de (2.15) nos dice que U_0 es continua. Por tanto, existe una extensión continua $U : [x_n] \to [y_n]$ de U_0 y claramente

$$U(x_n) = U_0(x_n) = y_n$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

1. $\Rightarrow$ 3.] Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente equivalente a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ entonces existen operadores lineales y continuos $U : [x_n] \to [y_n]$ y $V : [y_n] \to [x_n]$ tal que

$$U(x_n) = y_n \qquad\qquad V(y_n) = x_n$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

Claramente U y V son inversos uno del otro, pues si $x \in [x_n]$ entonces $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ y dado que U y V son continuos se tiene que

$$V(U(x)) = V\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = x$$

analogamente $U(V(y)) = y$ para toda $y \in [y_n]$.

3. $\Rightarrow$ 1.] Es inmediato a partir de la definición. □

Corolario 2.6.3. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en un espacio de Banach X. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente equivalente a la base canonica de ℓ^1 si existe $\delta > 0$ tal que*

$$\delta \sum_{i=1}^{n} |c_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \right\|$$

para todo $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Demostración. Debido a la Proposición 2.6.2 basta probar que existe $C > 0$ tal que $\|\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\| \leq C \sum_{i=1}^{n} |c_i|$. Pero esto es inmediato ya que existe $C > 0$ tal que $\|x_n\| \leq C$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |c_i| \|x_i\| \leq C \sum_{i=1}^{n} |c_i|$$

y esto pasa para todo $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. □

Observación 2.6.4. *Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ satiface las hipótesis del Corolario anterior. Por la Proposición 2.6.2 tendríamos que $[x_n]$ es isomorfo a ℓ^1 y más aún el isomorfismo es tal que la imagen de x_n es e_n para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Capítulo 3

Espacios de Banach que contienen a ℓ^1.

3.1. El espacio de Tsirelson.

En 1923 Banach formuló la siguiente pregunta: ¿Todo espacio de Banach de dimensión infinita tiene un subespacio isomorfo a c_0 o ℓ^p con $1 \leq p < \infty$? Para los espacios de Banach mas comunes la respuesta es afirmativa, por ejemplo en la Proposición 3.2.3 veremos que ℓ^p contiene un subespacio isomorfo a ℓ^p para toda $1 \leq p < \infty$ y lo mismo es cierto para c_0. Más aun en el Teorema 6.4.8 de [1], se puede encontrar que para todo $p > 2$ el espacio L^p contiene un subespacio isomorfo a ℓ^p o ℓ^2, el caso cuando $1 \leq p \leq 2$ aunque es más difícil también resulta cierto pues en 1981 Aldous mostro en [2] que L^p contiene un subespacio isomorfo a algun ℓ^q. Sin embargo en 1974 B. S. Tsirelson construyó en [30] un ejemplo de un espacio de Banach reflexivo con una base incondicional que no contiene subespacios isomorfos a ℓ^p o c_0 con $1 \leq p < \infty$.

En esta sección presentamos el dual del espacio construido por Tsirelson el cual también contesta de manera negativa la pregunta hecha por Banach, esta idea de tomar el dual fue dada por Figiel y W. B. Johnson en [12], no es nuestro objetivo presentar una demostración formal de estos hechos, pero si daremos la idea general de por qué el espacio de Tsirelson resuelve el problema.

El siguiente teorema se debe a R. C. James y es de vital importancia en la construcción del espacio de Tsirelson.

Teorema 3.1.1. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica normalizada equivalente a la base canónica de ℓ^1 en un espacio de Banach $(X, \| \|)$. Entonces para todo $0 < \epsilon < 1$ existe una sucesión básica por bloques normalizada $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de*

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que
$$\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k y_k\right\| \geq (1-\epsilon)\sum_{k=1}^{N}|a_k|$$
para cualquier sucesión de numeros reales $(a_k)_{k=1}^{N}$.

Demostración. Dado que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a la base canónica de ℓ^1, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una constante K_n tal que
$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| \leq K_n \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right\|,$$
si $(a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^1$.

De donde, para cada $n \geq 1$ el número
$$M_n = \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| : (a_k)_{k=1}^{\infty} \in c_{00}, \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right\| = 1 \text{ y } a_k = 0 \text{ si } k \leq n\right\}$$
está bien definido, $M_n \leq K_n$ y se cumple
$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| \leq M_n \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right\|$$
si $(a_k)_{k=1}^{\infty} \in c_{00}$ y $a_k = 0$ si $k \leq n$.

Sabemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es normalizada, por tanto $M_n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pues si suponemos que $M_n < 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$ tendremos que
$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| \leq M_n \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right\| < \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|.$$
para todo $(a_k)_{k=1}^{\infty} \in c_{00}$ tal que $a_k = 0$ si $k \leq n$, lo cual es imposible. Además, es fácil ver que $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y por tanto, $\lim_{n\to\infty} M_n = M \geq 1$. Así, dado $0 < \epsilon < 1$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M_n < (1-\epsilon)^{-\frac{1}{2}}M$ si $n \geq N_0$.

Sea $p_1 > N_0$; como $(1-\epsilon)^{\frac{1}{2}}M_{p_1} < M_{p_1}$, entonces existe un natural $p_2 > p_1$ y escalares $b_{p_1+1}, , , b_{p_2}$ tales que
$$y_1 = \sum_{i=p_1+1}^{p_2} b_i x_i$$
tiene norma 1 y

$$\sum_{i=p_1+1}^{p_2} |b_i| > (1-\epsilon)^{\frac{1}{2}} M_{p_1} \geq (1-\epsilon)^{\frac{1}{2}} M.$$

Por inducción podemos construir una sucesión de naturales $p_1 < p_2 < p_3 \ldots$ y una sucesión de sucesiones finitas de escalares $b_{p_n+1}, , , b_{p_{n+1}}$ tales que

$$y_n = \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} b_i x_i$$

es de norma 1 y

$$\sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} |b_i| > (1-\epsilon)^{\frac{1}{2}} M_{p_n} \geq (1-\epsilon)^{\frac{1}{2}} M.$$

Entonces $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica por bloques normalizada que satisface

$$\sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} |b_i| \geq (1-\epsilon)^{\frac{1}{2}} M$$

para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $M_{p_1} < (1-\epsilon)^{-\frac{1}{2}} M$.

Para cualquier sucesión finita de numeros reales $(a_k)_{k=1}^{N}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} |a_k| &\leq (1-\epsilon)^{-\frac{1}{2}} M^{-1} \sum_{k=1}^{N} |a_k| \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} |b_i| \\
&\leq (1-\epsilon)^{-\frac{1}{2}} M^{-1} M_{p_1} \left\| \sum_{k=1}^{N} a_k y_k \right\| \leq (1-\epsilon)^{-1} \left\| \sum_{k=1}^{N} a_k y_k \right\|
\end{aligned}$$

Es decir $\left\| \sum_{k=1}^{N} a_k y_k \right\| \geq (1-\epsilon) \sum_{k=1}^{N} |a_k|$. □

Lema 3.1.2. *Si S es una operador lineal continuo de ℓ^p, con $1 < p < \infty$, o c_0 en un espacio normado X, (e_n) es la base canónica de ℓ^p o c_0 y $x^* \in X^*$, entonces $x^*(S(e_n)) \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Como $x^* \circ S \in (\ell^p)^*$ o $x^* \circ S \in (c_0)^*$, se tiene que $x^* \circ S = S_{(b_n)}$ para alguna sucesión (b_n), donde $S_{(b_n)}((x_n)) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i$ para todo $(x_i) \in \ell^p$. En el primer caso $(b_i) \in \ell^q$ siendo q el exponente conjugado de p y en el segundo $(b_i) \in \ell^1$. En cualquiera de los dos se tiene que $b_n \to 0$. Como $x^*(S(e_n)) = S_{(b_i)}(e_n) = b_n$, se sigue el resultado. □

Teorema 3.1.3 (Tsirelson). *Existe un espacio de Banach reflexivo con una base incondicional que no contiene un subespacio isomorfo a ℓ^p o c_0 para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Consideremos el espacio de Banach $(c_{00}, \| \ \|_0)$ donde c_{00} es el conjunto de sucesiones reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_n = 0$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$ y $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_0 = \text{máx}_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

Observemos que si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ denota la base canónica para c_{00}, entonces para todo $x \in c_{00}$ con $x = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ tenemos que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Para cada $m \geq 0$ definimos

$$\|x\|_{m+1} = \text{máx}\left\{ \|x\|_0, \frac{1}{2} \text{máx} \sum_{j=0}^{k} \left\| \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n e_n \right\|_m \right\}$$

para todo $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ en c_{00}, donde el máximo interno es tomado sobre todas las posibles sucesiones finitas de enteros no negativos $(p_j)_{j=0}^{k+1}$, con $k \geq 0$, tales que $k \leq p_0 < p_1 < \ldots < p_{k+1}$.

Por inducción es fácil probar que $\|x\|_m \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ para todo $m \geq 1$ y $x \in c_{00}$. Como además $\|x\|_m \leq \|x\|_{m+1}$ para todo $m \geq 1$, entonces existe $\text{lím}_{m\to\infty} \|x\|_m$ y definimos

$$\|x\|_T = \lim_{m\to\infty} \|x\|_m$$

para todo $x \in c_{00}$. Como cada $\| \cdot \|_m$ es una norma en c_{00}, es claro que $\| \ \|_T$ también lo es en c_{00}.

Sea T la compleción del espacio normado $(c_{00}, \| \ \|_T)$ [1], la sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ forma una base normal incondicional de T con constante incondicional $K_u = 1$.

Afirmamos que para todo $x \in c_{00}$ con $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ tenemos que

$$\|x\|_T = \text{máx}_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \|x\|_0, \frac{1}{2} \text{máx} \sum_{j=0}^{k} \left\| \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n e_n \right\|_T \right\}$$

donde, como antes, el máximo interno es tomado sobre todas las posibles sucesiones finitas de enteros no negativos $(p_j)_{j=0}^{k+1}$, con $k \geq 0$, tales que $k \leq p_0 < p_1 < \ldots < p_{k+1}$.

[1] Recordemos que en general si $(X, \| \ \|)$ es un espacio normado, entonces existe un único espacio de Banach $\overline{X}$ tal que existe una isometría de X en Y donde Y es un subespacio denso de $\overline{X}$, a este espacio $\overline{X}$ se le llama la compleción de X, para una demostración de este hecho véase [19].

En efecto, $\|x\|_T \geq \|x\|_m$ para todo $m \geq 0$, por lo que $\|x\|_T \geq \|x\|_0$ y

$$\|x\|_T \geq \frac{1}{2} \text{máx} \sum_{j=1}^{k} \left\| \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n e_n \right\|_m$$

Al tomar el límite sobre m en el lado derecho obtenemos

$$\|x\|_T \geq \frac{1}{2} \text{máx} \sum_{j=1}^{k} \left\| \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n e_n \right\|_T .$$

Así

$$\|x\|_T \geq \max_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \|x\|_0, \frac{1}{2} \text{máx} \sum_{j=1}^{k} \left\| \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n e_n \right\|_T \right\}$$

y sólo resta probar

$$\|x\|_T \leq \max_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \|x\|_0, \frac{1}{2} \text{máx} \sum_{j=1}^{k} \left\| \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n e_n \right\|_T \right\} \tag{3.1}$$

Si $\|x\|_T = \|x\|_0$ entonces se cumple la desigualdad anterior. Supongamos que $\|x\|_T > \|x\|_0$ y sea n_1 el primer natural tal que

$$\|x\|_0 < \|x\|_{n_1} = \text{máx} \left\{ \|x\|_0, \frac{1}{2} \text{máx} \sum_{j=0}^{k} \left\| \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n e_n \right\|_{n_1-1} \right\}.$$

Entonces

$$\|x\|_{n_1} = \frac{1}{2} \text{máx} \sum_{j=0}^{k} \left\| \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n e_n \right\|_{n_1-1} \leq \frac{1}{2} \text{máx} \sum_{j=0}^{k} \left\| \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n e_n \right\|_T$$

Si $\|x\|_{n_1} = \|x\|_T$, entonces (3.1) está probado. Si $\|x\|_{n_1} < \|x\|_T$ repetimos el proceso y encontramos el primer natural n_2 tal que $\|x\|_{n_1} < \|x\|_{n_2}$, entonces $n_1 < n_2$ y

$$\|x\|_{n_2} = \frac{1}{2} \text{máx} \sum_{j=0}^{k} \left\| \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n e_n \right\|_{n_2-1} \leq \frac{1}{2} \text{máx} \sum_{j=0}^{k} \left\| \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n e_n \right\|_T .$$

Si $\|x\|_{n_2} = \|x\|_T$, entonces (3.1) está probado.

Si el proceso continúa indefinidamente, obtenemos una sucesión estrictamente creciente de naturales (n_k) tales que

$$\|x\|_{n_k} \leq \frac{1}{2} \text{máx} \sum_{j=1}^{k} \left\| \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n e_n \right\|_T$$

para todo $k \geq 1$. Al tomar el límite en el lado derecho obtenemos

$$\|x\|_T \leq \frac{1}{2} \text{máx} \sum_{j=1}^{k} \left\| \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n e_n \right\|_T .$$

y (3.1) se cumple.

De lo anterior se puede deducir que para todo $k \in \mathbb{N}$ y toda sucesión finita $\|\cdot\|_T$-normalizada $(u_j)_{j=1}^k$, donde $u_j = \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n e_n$, con $0 \leq j \leq k$, y $k \leq p_0 < p_1 < \ldots < p_{k+1}$, se tiene que

$$\sum_{j=1}^{k} |b_j| \geq \left\| \sum_{j=1}^{k} b_j u_j \right\|_T \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} |b_j|$$

para toda sucesión finita de números reales $(b_j)_{j=1}^k$.

Probaremos a continuación que T no contiene subespacios isomorfos a ℓ^p ni a c_0. Supongamos primero que T contiene un subespacio cerrado Y isomorfo a ℓ^p, por tanto existe $S : \ell^p \to Y$ un isomorfismo lineal, continuo con inversa continua, de donde existen $M_1, M_2 > 0$ tales que

$$M_2 \|x\|_p \leq \|Sx\|_T \leq M_1 \|x\|_p \tag{3.2}$$

para todo $x \in \ell^p$.

Consideremos $(Se_n)_{n=1}^{\infty}$, la cual es una sucesión en T que por (3.2) satisfsface $\text{ínf}_{n\in\mathbb{N}} \|Se_n\| \geq M_2 > 0$ y por el Lema 3.1.2 tenemos que $\text{lím}_{n\to\infty} e_k^*(Se_n) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, donde $(e_k^*)_{k=1}^{\infty}$ es la sucesión biortogonal asociada a la base $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ de c_{00}. Por tanto, aplicando el Teorema 2.2.14 concluimos que existe $(Se_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $(Se_n)_{n=1}^{\infty}$ que es equivalente a una sucesión básica por bloques $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, donde $v_k = \sum_{l=p_k+1}^{p_{k+1}} a_l e_l$ donde $(a_l)_{l=1}^{\infty}$ es una sucesión de reales no todos nulos y $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ Es así que existe $C > 0$ tal que

$$C^{-1} \left\| \sum_{j=1}^{k} b_j S e_{n_j} \right\|_T \leq \left\| \sum_{j=1}^{k} b_j v_j \right\|_T \leq C \left\| \sum_{j=1}^{k} b_j S e_{n_j} \right\|_T \tag{3.3}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y toda sucesión de numeros reales $(b_j)_{j=1}^{\infty}$.

Sea $k \in \mathbb{N}$, claramente existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq p_l < p_{l+1} < \ldots < p_{l+(k+1)}$. Consideremos los respectivos $v_{l+1}, \ldots, v_{l+(k+1)}$, usando las relaciones dadas en (3.2) y en (3.3) concluimos que

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} \leq \left\|\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}v_{l+j}\right\|_T \leq C\left\|\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}Se_{n_{l+j}}\right\|_T = C\left\|S\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}e_{n_{l+j}}\right)\right\|_T$$

$$\leq M_1C\left\|\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}e_{n_{l+j}}\right\|_p \leq M_1C\left\|\left(\frac{1}{j}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_p < \infty,$$

lo cual es una contradicción pues la serie armónica no es convergente. Por tanto, no existe subespacio de T isomorfo a ℓ^p. Con este mismo argumento y cambiando $\| \ \|_p$ por $\| \ \|_0$ se demuestra que T no contiene subespacios isomorfos a c_0.

Ahora falta probar que T no contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1. Supongamos que T contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1, entonces por el Teorema 3.1.1 obtenemos una sucesión básica por bloques normalizada $(v_j)_{j=0}^{\infty}$ de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\sum_{j=0}^{k}|b_j| \geq \left\|\sum_{j=0}^{k}b_jv_j\right\|_T \geq \frac{8}{9}\sum_{j=0}^{k}|b_j|,$$

para toda sucesión de números reales $(b_j)_{j=0}^{k}$. En particular, tenemos que

$$\|v_0 + r^{-1}(v_1 + v_2 + \ldots + v_r)\|_T \geq \frac{16}{9} \tag{3.4}$$

para todo $r \in \mathbb{N}$.

Consideremos $k \in \mathbb{N}$ y una sucesión de naturales $(p_j)_{j=1}^{k+1}$ tal que $k \leq p_1 < p_2 < \ldots < p_{k+1}$ y sean $(P_j)_{j=1}^{k}$ proyecciones tales que $P_j(e_n) = e_n$ si $p_j < n \leq p_{j+1}$ y $P_j(e_n) = 0$ en cualquier otro caso.

Sea n_0 el natural más grande que pertenece al soporte[2] de v_0. Si $k \geq n_0$, entonces

$$\sum_{j=1}^{k}\|P_j(v_0 + r^{-1}(v_1 + \ldots + v_r))\|_T = \sum_{j=1}^{k}\|P_j(r^{-1}(v_1 + \ldots + v_r))\|_T \leq 2.$$

[2]Recordemos que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales, entonces el soporte se define como el conjunto de numeros naturales n tal que $x_n \neq 0$.

Si $k < n_0$, consideremos los siguientes conjuntos

$$\delta = \{i \mid \|P_j(v_i)\|_T \neq 0 \text{ para al menos dos valores de } j\},$$

$$\sigma = \{i \mid \|P_j(v_i)\|_T \neq 0 \text{ para a lo más un valor de } j\}.$$

Ahora, como δ tiene a lo mas $k-1$ elementos obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{k} \|P_j(v_0 + r^{-1}(v_1 + \ldots + v_r))\|_T$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \|P_j v_0\|_T + r^{-1} \left(\sum_{i\in\delta} \sum_{j=1}^{k} \|P_j v_i\|_T + \sum_{i\in\sigma} \sum_{j=1}^{k} \|P_j v_i\|_T \right)$$

$$\leq 2\|v_0\|_T + r^{-1} \left(2 \sum_{i\in\delta} \|v_i\|_T + \sum_{i\in\sigma} \|v_i\|_T \right)$$

$$\leq 2 + r^{-1}(2(k-1) + r - k + 1) \leq 3 + r^{-1}(k-1) \leq 3 + r^{-1}(n_0 - 1).$$

Por tanto si tomamos $r \geq 2n_0$, deducimos que

$$\sum_{j=1}^{k} \|P_j(v_0 + r^{-1}(v_1 + \ldots + v_r))\|_T \leq \frac{7}{2}$$

y por como se definió $\| \ \|_T$ obtenemos que $\|v_0 + r^{-1}(v_1 + \ldots + v_r)\|_T \leq \frac{7}{4}$, lo cual es una contradicción a (3.4).

Finalmente dado que T tiene una base incondicional y no contiene subespacios isomorfos a c_0 ni a ℓ^1 deducimos del Teorema 2.5.5 que T es reflexivo. $\square$

3.2. La caracterización de Rosenthal.

En esta sección daremos una condicion necesaria y suficiente para que un espacio de Banach X contenga un subespacio isomorfo a ℓ^1 esto fue hecho por Haskell P. Rosenthal en 1974 [3]. Varias caracterizaciones fueron dadas por Rosenthal en [25] bajo la supocisión de que X fuera separable, tiempo después y gracias a varios matemáticos se logró probar que la separabilidad no siempre era una condición necesaria.

[3] Véase [24].

Comenzamos por probar que ℓ^1 tiene una propiedad muy importante, esta es que la convergencia en norma y la convergencia débil son conceptos equivalentes lo cual en general no es cierto para espacios de Banach de dimensión infinita como lo vimos en el capítulo 1. Los espacios que cumplen esta condición reciben un nombre especial.

Definición 3.2.1. *Un espacio de Banach X tiene la propiedad de Schur si toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X que converge débilmente a 0 tambien converge en norma a 0.*

Proposición 3.2.2. *La base canónica de ℓ^1, $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge débilmente. Más aún, ninguna subsucesión de esta base converge débilmente.*

Demostración. Supongamos que existe $x \in \ell^1$ tal que $e_n \xrightarrow{w} x$ cuando $n \to \infty$. Consideremos $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funcionales biortogonales asociadas a la base canónica.

Claramente si $x = (a_1, a_2, \ldots)$ entonces $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ y por tanto

$$e_n^*(x) = a_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, por nuestra suposición tenemos que

$$0 = \lim_{n \to \infty} e_k^*(e_n) = e_k^*(x) = a_k$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir $x = 0$. Es así que hemos mostrado que si la base canónica de ℓ^1 converge débilmente a un punto, entonces ese punto es el cero.

Sea $(b_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$ tal que $b_i = k \neq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Dado que el dual de ℓ^1 es isomorfo a ℓ^{∞} tenemos que $f : \ell^1 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \qquad\qquad x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$$

es una funcional continua de ℓ^1. De nuevo por nuestra suposición

$$0 = f(0) = \lim_{n \to \infty} f(e_n) = b_n = k \neq 0$$

lo cual claramente es imposible. Por tanto $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge débilmente en ℓ^1.

El argumento anterior tambien sirve para probar que ninguna subsucesión converge débilmente. $\square$

Proposición 3.2.3. *Sea $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica por bloques normalizada en c_0 o en ℓ^p con $1 \leq p < \infty$. Entonces $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente equivalente a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ la base canónica de ℓ^p o c_0.*

Demostración. Supongamos primero que $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión básica por bloques en ℓ^p donde $1 \leq p < \infty$.

Sean $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \ldots$ una sucesión de naturales y $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de reales. De esta forma podemos escribir

$$u_k = \sum_{n=r_{k-1}+1}^{r_k} a_n e_n \qquad\qquad k \in \mathbb{N}.$$

Por hipótesis

$$\|u_k\|_p^p = \sum_{n=r_{k-1}+1}^{r_k} |a_n|^p = 1.$$

Ahora, sean $m \in \mathbb{N}$ y $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$. Obtenemos que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{m} b_k u_k\right\|_p &= \left\|\sum_{k=1}^{m} \sum_{n=r_{k-1}+1}^{r_k} b_k a_n e_n\right\|_p \\ &= \left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|^p \sum_{n=r_{k-1}+1}^{r_k} |a_n|^p\right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|^p\right)^{1/p}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Por la Proposición 2.6.2 tenemos que $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es estríctamente equivalente a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, más aún las igualdades en (3.5) dicen que $[u_k]$ es isométrico a ℓ^p. El caso cuando la sucesión está en c_0 es análogo. □

Proposición 3.2.4. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión normalizada en ℓ^p con $1 \leq p < \infty$ o en c_0. Si para toda $j \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{n\to\infty} e_j^*(x_n) = 0 \tag{3.6}$$

donde $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es el sistema biortogonal asociado a la base canónica de ℓ^p o c_0, entonces existe $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ subsucesión básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que es estrictamente equivalente a la base canonica de ℓ^p o c_0.

Demostración. Por el Lema 2.2.14 existe una subsucesión básica $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que es equivalente a una subsucesión básica por bloques $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, la base canónica de ℓ^p o c_0.

Por la Proposición 3.2.3, $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ es estrictamente equivalente a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ y por tanto $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ también es estrictamente equivalente a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. □

Corolario 3.2.5. *ℓ^1 tiene la propiedad de Schur.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que converge débilmente a 0. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge en norma a 0 podemos suponer que

$$\|x_n\| = 1$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Además por hipótesis se satisface la ecuación (3.6) y por la Proposición 3.2.4, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión básica $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ que es estríctamente equivalente a la base canónica de ℓ^1, y por tanto ya que convergencia débil es invariante bajo isomorfismos, la base canónica de ℓ^1 convergería débilmente a 0, lo cual es una contradicción. □

Proposición 3.2.6. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach con la propiedad de Schur. $W \subseteq X$ es débilmente compacto si y sólo si W es compacto en la topología de la norma.*

Demostración. Claramente si W es compacto en la topología de la norma entonces W es débilmente compacto.

Supongamos que W es débilmente compacto y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en W. Por el Teorema de Eberlein-Smulian existe $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge débilmente a $x \in W$. Dado que X tiene la propiedad de Schur $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge en norma a x, además la topología de la norma es metrizable. Por lo tanto W es compacto en norma. □

Corolario 3.2.7. *Si $(X, \| \|)$ es un espacio de Banach reflexivo con la propiedad de Schur entonces X es de dimensión finita.*

Demostración. Sea B la bola unitaria en X y B^{**} la bola unitaria en X^{**}. Dado que X es reflexivo $C(B) = B^{**}$, donde C es el encaje canónico. Sabemos que el encaje canónico C considerado como función de X con la topologiía débil en X^{**} con la topología débil* es un homeomorfismo sobre su imagen, por lo cual B es débil compacto pues B^{**} es débil* compacto y por la Proposición 3.2.6 B es compacto en norma y por tanto X es de dimensión finita. □

Definición 3.2.8. *Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X es débilmente de Cauchy si $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existe para toda $f \in X^*$.*

Definición 3.2.9. *Un espacio de Banach* $(X, \|\ \|)$ *es completo por sucesiones débiles, que abreviaremos c.s.d, si toda sucesión débilmente de Cauchy es débilmente convergente.*

Proposición 3.2.10. *Si* $(X, \|\ \|)$ *es un espacio de Banach reflexivo entonces* X *es c.s.d.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X débilmente de Cauchy. Es fácil ver que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$. Además dada $f \in X^*$ existe $M_f > 0$ tal que

$$|C(x_n)(f)| = |\widehat{x_n}(f)| = |f(x_n)| \leq M_f$$

para toda $n \in \mathbb{N}$ y C es el encaje canónico.

Por el Teorema del acotamiento uniforme $(C(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es acotada y ya que C es una isometría $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada. Por tanto existe $M > 0$ tal que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset B(0, M)$, pero X es reflexivo de donde se deduce que $C(B(0, M)) = B(0, M)^{**}$ y por el Teorema de Alaoglu $B(0, M)^{**}$ es débil* compacto lo cual implica que $B(0, M)$ sea débil compacto.

Por el Teorema de Eberlein-Smulian $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene un punto débil de acumulación x y por tanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a x. $\square$

Proposición 3.2.11. *Si* $(X, \|\ \|)$ *es un espacio de Banach con la propiedad de Schur entonces* X *es c.s.d.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X débilmente de Cauchy. Existen $r_f \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = r_f$$

para toda $f \in X^*$.

Si $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ y $(x_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ son subsucesiones de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ entonces dada $f \in X^*$ tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k} - x_{m_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) - \lim_{k\to\infty} f(x_{m_k}) = r_f - r_f = 0.$$

Es decir $(x_{m_k} - x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge débilmente a cero y por hipótesis

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - x_{m_k}\| = 0.$$

Esto último nos dice que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Sabemos que X es de Banach, por tanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge en norma a $x \in X$ lo cual implica que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a x. $\square$

Corolario 3.2.12. *ℓ^1 es c.s.d.*

Definición 3.2.13. *Sean S un conjunto distinto del vacío, $X \subset S$; $M, L \subset \mathbb{N}$ infinitos y $(A_n, B_n)_{n\in M}$ una sucesión de pares de subconjuntos de S tal que $A_n \bigcap B_n = \emptyset$ para toda $n \in M$. Diremos que:*

1. *L está casi contenido en M si $L \setminus M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \in L, n \notin M\}$ es finito.*
2. *$(A_n, B_n)_{n\in N}$ es una subsucesión de pares de subconjuntos de S, si $N \subset M$.*
3. *$(A_n, B_n)_{n\in M}$ converge en X si para todo $x \in X$ se tiene que x pertenece a una cantidad finita de conjuntos A_n o x pertenece a una cantidad finita de conjuntos B_n. Si $X = S$ sólo se dirá que $(A_n, B_n)_{n\in M}$ converge.*
4. *$(A_n, B_n)_{n\in M}$ es independiente si para todo G y B subconjuntos finitos de M disjuntos y distintos del vacío se tiene que*
$$\left(\bigcap_{n\in G} A_n\right) \cap \left(\bigcap_{n\in B} B_n\right) \neq \emptyset \tag{3.7}$$
5. *Si consideramos una enumeración estrictamente creciente de M dada por $M = \{m_1, m_2, \ldots\}$ y $(f_{m_j})_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de valores reales definidas en S y uniformemente acotada, entonces denotamos por:*
$$\overline{\lim_{M}} f_m(s) = \overline{\lim_{j\to\infty}} f_{m_j}(s) \qquad \underline{\lim}_M f_m(s) = \underline{\lim}_{j\to\infty} f_{m_j}(s)$$
para toda $s \in S$.[4]

Observación 3.2.14. *El punto 2. de la definición 3.2.13 es quivalente a decir que $(A_n, B_n)_{n\in M}$ converge en X si para todo $x \in X$*
$$\lim_{j\to\infty} \chi_{A_{m_j}}(x) = 0 \ \ o \ \lim_{j\to\infty} \chi_{B_{m_j}}(x) = 0$$

La siguiente proposición muestra algunas propiedades de convergencia de pares de subconjuntos de un conjunto.

Proposición 3.2.15. *Sean S un conjunto y $(A_n, B_n)_{n\in M}$ una sucesión de pares de subconjuntos disjuntos de S. Se cumple que:*

[4] Aquí $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ y $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ denotan respectivamente el límite superior e inferior de una sucesión acotada $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}$.

1. *Si* $(A_n, B_n)_{n\in M}$ *converge en* X *entonces para todo* $L \subset M$ *infinito tambien* $(A_n, B_n)_{n\in L}$ *converge en* X.

2. *Si* $(A_n, B_n)_{n\in M}$ *converge en* $X_1, X_2, \dots$ *entonces* $(A_n, B_n)_{n\in M}$ *converge en* $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$.

3. $(A_n, B_n)_{n\in M}$ *converge en* $X = \emptyset$.

Demostración. Inmediatas a partir de la definición. $\square$

Lema 3.2.16. *Sean* S *un conjunto,* $(A_n, B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de pares de subconjuntos de* S *disjuntos,* $l \geq 1$ *y* $X_1, \dots, X_l$ *subconjuntos disjuntos de* S. *Si para todo* $1 \leq i \leq l$, $(A_n, B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no tiene subsucesiones convergentes en* X_i, *entonces existe* $j \in \mathbb{N}$ *y* $M \subseteq \mathbb{N}$ *infinito tal que para toda* $1 \leq i \leq l$, $(A_n, B_n)_{n\in M}$ *no tiene subsucesiones convergentes en* $X_i \bigcap A_j$ *ni tampoco en* $X_i \bigcap B_j$ *para todo* $1 \leq i \leq l$.

Demostración. La prueba será por inducción sobre l. Sea $l = 1$ y supongamos que $(A_n, B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $X \subseteq S$, más aún sin pérdida de generalidad podemos suponer que $S = X$ ya que si el resultado se prueba en este caso entonces tambien es cierto para cualquier subconjunto de S.

Convención: Diremos que j y M subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ *funcionan* si $(A_n, B_n)_{n\in M}$ no tiene subsucesiones convergentes en $X \bigcap A_j = A_j$ y en $X \bigcap B_j = B_j$.

Sea $n_1 \in \mathbb{N} = N_0$. Si n_1 y N_0 no funcionan entonces existe $N_1 \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $(A_n, B_n)_{n\in N_1}$ converge en A_{n_1} o en B_{n_1}.

Sea $n_2 \in N_1$ tal que $n_2 > n_1$. Si n_2 y N_1 no funcionan entonces existe $N_2 \subset N_1$ infinito tal que $(A_n, B_n)_{n\in N_2}$ converge en A_{n_2} o en B_{n_2}.

Nuevamente sea $n_3 \in N_2$ tal que $n_3 > n_2$. Si n_3 y N_2 no funcionan entonces existe $N_3 \subset N_2$ infinito tal que $(A_n, B_n)_{n\in N_3}$ converge en A_{n_3} o en B_{n_3}.

Afirmamos que el proceso anterior debe de ser finito, es decir debe existir $k \in \mathbb{N}$ tal que n_k y N_{k-1} funcionan.

Supongamos que no. Inductivamente podemos construir para toda $k \in \mathbb{N}$, n_k y N_k tal que $n_k > n_{k-1}$, $n_k \in N_{k-1}$, $N_k \subset N_{k-1}$ infinito y $(A_n, B_n)_{n\in N_k}$ converge en A_{n_k} o en B_{n_k}.

Consideremos los dos casos posibles:

1. $K_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid (A_n, B_n)_{n\in N_k} \text{converge en } A_{n_k}\}$

2. $K_2 = \{k \in \mathbb{N} \mid (A_n, B_n)_{n\in N_k} \text{converge en } B_{n_k}\}$.

Estos conjuntos K_1 y K_2 pueden ser: Uno finito y el otro infinito o los dos infinitos. Sin pérdida de generalidad supondremos que K_1 y K_2 son infinitos.

Ahora, sea $M = \{n_1, n_2, \ldots\}$. Afirmamos que $(A_n, B_n)_{n\in M}$ converge en

$$F = \left(\bigcup_{k\in K_1} A_{n_k}\right) \cup \left(\bigcup_{k\in K_2} B_{n_k}\right).$$

Sea $x \in F$ entonces existe $k \in K_1$ tal que $x \in A_{n_k}$ o existe $k' \in K_2$ tal que $x \in B_{n_{k'}}$. Supongamos que se cumple lo primero (el otro caso es análogo), ya que $(A_n, B_n)_{n\in Nk}$ converge en A_{n_k}, x pertenece a una cantidad finita de $A_{n's}$ o x pertenece a una cantidad finita de $B_{n's}$ donde los $n's$ estan en N_k. Pero M está casi contenido en N_k para todo $k \in \mathbb{N}$, esto implica x pertenece a lo más a una cantidad finita de $A_{n's}$ o x pertenece a una una cantidad finita de $B_{n's}$ donde los $n's$ pertenecen a M. Es decir $(A_n, B_n)_{n\in M}$ converge en F.

Ahora, consideremos los subconjuntos infinitos de M dados por:

1. $M' = \{n_k \mid k \in K_1\}$
2. $M'' = \{n_k \mid k \in K_2\}$.

Claramente $(A_n, B_n)_{n\in M'}$ es una subsucesión de $(A_n, B_n)_{n\in M}$, además sabemos que $\bigcup_{k\in K_1} A_{n_k} \subset F$ por tanto $(A_n, B_n)_{n\in M'}$ converge en $\bigcup_{k\in K_1} A_{n_k}$.

Sabemos por hipótesis que $(A_n, B_n)_{n\in M'}$ no converge en S, por tanto existe $y \in S$ tal que

$$G = \{n \in M' \mid y \in A_n\} \qquad\qquad H = \{n \in M' \mid y \in B_n\}$$

son infinitos. De esta forma tambien $y \in \bigcup_{k\in K_1} A_{n_k}$ pues si esto no fuera cierto tendríamos que $G = \emptyset$ lo cual no puede ser, es decir hemos llegado a la conclusión de que $(A_n, B_n)_{n\in M'}$ no converge en $\bigcup_{k\in K_1} A_{n_k}$ lo cual es una contradicción. Es decir el caso para $l = 1$ ha sido probado.

Supongamos que el resultado es cierto para $l = r$, y tomemos X_i subconjuntos disjuntos de S para toda $1 \le i \le r+1$ que satisfacen las hipótesis del Lema.

Convención: De nuevo diremos que j y M subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, *funcionan* si $(A_n, B_n)_{n\in M}$ no tiene subsucesiones convergentes en $X_{r+1} \bigcap A_j$ ni tampoco en $X_{r+1} \bigcap B_j$. Además también diremos que j y M *r-funcionan* si para todo $1 \le i \le r$ se tiene que $(A_n, B_n)_{n\in M}$ no tiene subsucesiones convergentes en $X_i \bigcap A_j$ ni tampoco en $X_i \bigcap B_j$.

Considerando sólo los conjuntos $X_1, \ldots, X_r$ y aplicando la hipótesis de inducción encontramos n_1 y N_1' un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ tal que n_1 y N_1' r-funcionan.

Si n_1 y N_1' no funcionan entonces existe N_1 subconjunto infinito de N_1' tal que $(A_n, B_n)_{n\in N_1}$ converge en $X_{r+1}\bigcap A_{n_1}$ o converge en $X_{r+1}\bigcap B_{n_1}$.

Sabemos que $(A_n, B_n)_{n\in N_1}$ es una subsucesión de $(A_n, B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por lo tanto $(A_n, B_n)_{n\in N_1}$ no tiene subsucesiones convergentes en $X_1,\ldots,X_r$ y por la hipótesis de inducción existe $n_2 \in N_1$ tal que $n_2 > n_1$ y N_2' un subconjunto infinito de N_1 tal que n_2 y N_2' r-funcionan.

Si n_2 y N_2' no funcionan entonces existe N_2 subconjunto infinito de N_2' tal que $(A_n, B_n)_{n\in N_2}$ converge en $X_{r+1}\bigcap A_{n_2}$ o converge en $X_{r+1}\bigcap B_{n_2}$.

Sabemos que $(A_n, B_n)_{n\in N_2}$ es una subsucesión de $(A_n, B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por lo tanto $(A_n, B_n)_{n\in N_2}$ no tiene subsucesiones convergentes en $X_1,\ldots,X_r$ y por la hipótesis de inducción existe $n_3 \in N_2$ tal que $n_3 > n_2$ y N_3' un subconjunto infinito de N_2 tal que n_3 y N_3' r-funcionan.

Si n_3 y N_3' no funcionan se continua el proceso anterior de manera inductiva. Afirmamos que este proceso es finito, es decir, que existe $k\in\mathbb{N}$ tal que n_k y N_k' subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ funcionan.

Supongamos que no. Inductivamente podemos construir para toda $k\in\mathbb{N}$, n_k y N_k' tal que $n_k > n_{k-1}$, $n_k \in N_{k-1}'$ para $k\geq 3$, $N_k' \subset N_{k-1}'$ infinito y $(A_n, B_n)_{n\in N_k'}$ converge en $X_{r+1}\bigcap A_{n_k}$ o en $X_{r+1}\bigcap B_{n_k}$, por tanto podemos suponer que $(A_n, B_n)_{n\in N_k}$ converge en A_{n_k} o en B_{n_k}.

Observemos que esta es la misma suposición del caso $l=1$ la cual nos llevó a una contradicción, por tanto esta afirmación también es cierta. En otras palabras, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que n_k y N_k' funcionan, más aún por construcción n_k y N_k' también r-funcionan. Es decir el caso para $l = r+1$ ha sido probado. $\square$

Teorema 3.2.17. *Sea S un conjunto y $(A_n, B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de pares de subconjuntos de S tal que $A_n\bigcap B_n = \emptyset$ para toda $n\in\mathbb{N}$. Si $(A_n, B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene subsucesiones convergentes entonces existe M un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ tal que $(A_n, B_n)_{n\in M}$ es independiente.*

Demostración. Adoptemos la siguiente notación: Para toda $n\in\mathbb{N}$ sea $\epsilon_n = \pm 1$ definimos:

$$\epsilon_n A_n = \begin{cases} A_n & \text{si } \epsilon_n = 1 \\ B_n & \text{si } \epsilon_n = -1 \end{cases}.$$

A continuación usaremos el Lema 3.2.16 para probar por inducción la siguiente afirmación: Para toda $k\in\mathbb{N}$ existen $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ naturales y M_k un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ tal que $(A_n, B_n)_{n\in M_k}$ no tiene subsucesiones convergentes en todos los 2^k posibles conjuntos de la forma

$$\bigcap_{j=1}^{k} \epsilon_{n_j} A_{n_j}. \tag{3.8}$$

La razón de tomar 2^k conjuntos es debido a que $\epsilon_{n_j} = \pm 1$ para toda $1 \leq j \leq k$.

Sea $k = 1$. Consideremos $X_1 = S$, por hipótesis $(A_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene subsucesiones convergentes en X_1 y por el Lema 3.2.16 existe $n_1 \in \mathbb{N}$ y M_1 subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ tal que $(A_n, B_n)_{n \in M_1}$ no tiene subsucesiones convergentes en $X_1 \bigcap A_{n_1} = A_{n_1}$ ni en $X_1 \bigcap B_{n_1} = B_{n_1}$. Es decir, la afirmación es cierta para $k = 1$.

Supongamos que la afirmación es cierta para k, probaremos que es cierta para $k+1$. Claramente los 2^k conjuntos dados en (3.8) son todos disjuntos pues $A_n \bigcap B_n = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$, además por hipótesis de inducción $(A_n, B_n)_{n \in M_k}$ no tiene subsucesiones convergentes en estos mismos, por lo que podemos aplicar el Lema 3.2.16 para el caso $l = 2^k$ y obtenemos que existe n_{k+1} natural tal que $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1}$ y M_{k+1} subconjunto infinito de M_k tal que $(A_n, B_n)_{n \in M_{k+1}}$ no tiene subsucesiones convergentes en

$$\bigcap_{j=1}^{k} \epsilon_{n_j} A_{n_j} \bigcap A_{n_{k+1}} \qquad \text{ni en} \qquad \bigcap_{j=1}^{k} \epsilon_{n_j} A_{n_j} \bigcap B_{n_{k+1}}$$

para todo $\epsilon_{n_j} = \pm 1$ y $1 \leq j \leq k$. Es decir la afirmación es válida para $k+1$ y por tanto es cierta para toda $k \in \mathbb{N}$.

Finalmente sean $M = \{n_1, n_2, \ldots\}$ y $G, B \subset M$ finitos tales que $G \bigcap B = \emptyset$. Supongamos que

$$\left(\bigcap_{n \in G} A_n \right) \cap \left(\bigcap_{n \in B} B_n \right) = \emptyset. \tag{3.9}$$

Sea $G = \{l_1, \ldots, l_m\}$ y $B = \{s_1, \ldots, s_t\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $l_1 < \ldots < l_m < s_1 < \ldots < s_t$, además claramente existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 < \ldots < l_m < \ldots < s_t < \ldots < n_k$. La relación (3.9) también implica que

$$\bigcap_{j=1}^{k} A_{n_j} \bigcap_{j=1}^{k} B_{n_j} = \emptyset.$$

El punto 3. de la Proposición 3.2.15 nos dice que $(A_n, B_n)_{n \in M_k}$ converge en $\bigcap_{j=1}^{k} A_{n_j} \bigcap_{j=1}^{k} B_{n_j}$ lo cual es una contradicción a la afirmación. Por tanto $(A_n, B_n)_{n \in M}$ es independiente. □

La siguiente proposición nos da una condición necesaria para saber cuando una sucesión de funciones uniformemente acotada es estrictamente equivalente a la base canonica de ℓ^1.

Proposición 3.2.18. *Sean S un conjunto no vacío y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión uniformemente acotada de funciones definidas en S con valores reales. Supongamos que existen $r, \delta \in \mathbb{R}$ con $\delta > 0$ tal que al considerar los subconjuntos de S dados por*

$$A_n = \{x \in S \mid f_n(x) > \delta + r\} \qquad B_n = \{x \in S \mid f_n(x) < r\}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $(A_n, B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ resulta independiente. Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente equivalente a la base canónica de ℓ^1 con la norma del supremo.

Demostración. Sean $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tal que $\|(c_i)_{i=1}^n\|_1 = \sum_{i=1}^n |c_i| = 1$.

Consideremos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ dados por $G = \{i \in \mathbb{N} \mid c_i > 0\}$ y $B = \{i \in \mathbb{N} \mid c_i < 0\}$, estos conjuntos son tales que ambos son distintos del vacío o uno de los dos es vacío y el otro no. Supongamos que $G \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$.

Dado que $(A_n, B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es indepediente, existen $x, y \in S$ tal que

$$x \in \left(\bigcap_{i\in G} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i\in B} B_i\right) \qquad y \in \left(\bigcap_{i\in B} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i\in G} B_i\right). \tag{3.10}$$

Por definición de los B_n sabemos que $f_i(x) < r$ para todo $i \in B$, más aún $c_i f_i(x) > c_i r = |c_i|(-r)$ para toda $i \in B$. Sumando sobre todos los $i \in B$ obtenemos que

$$\sum_{i\in B} c_i f_i(x) > \sum_{i\in B} |c_i|(-r). \tag{3.11}$$

Por definición de los B_n sabemos que $f_i(y) < r$ para todo $i \in G$, más aún $c_i f_i(y) < c_i r$ y por tanto $-c_i f_i(y) > -c_i r = |c_i|(-r)$ para toda $i \in G$. Sumando sobre todos los $i \in G$ obtenemos que

$$-\sum_{i\in G} c_i f_i(y) > \sum_{i\in G} |c_i|(-r). \tag{3.12}$$

De las relaciones (3.10), (3.11) y (3.12) podemos deducir que:

$$\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) > \sum_{i\in G} |c_i|(\delta + r) + \sum_{i\in B} |c_i|(-r)$$

y también

$$-\sum_{i=1}^n c_i f_i(y) > \sum_{i\in B} |c_i|(\delta + r) + \sum_{i\in G} |c_i|(-r). \tag{3.13}$$

Sumando las dos desigualdades dadas en (3.13) obtenemos

$$2\left\|\sum_{i=1}^{n} c_i f_i\right\|_\infty \geq \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(y)$$

$$> \left(\sum_{i\in G} |c_i|(\delta + r) + \sum_{i\in B} |c_i|(\delta + r)\right) + \left(\sum_{i\in B} |c_i|(-r) + \sum_{i\in G} |c_i|(-r)\right)$$

$$= (\delta + r) - r = \delta.$$

Por tanto $\|\sum_{i=1}^{n} c_i f_i\|_\infty \geq \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}\sum_{i=1}^{n} |c_i|$. Claramente esta última desigualdad también se cumple cuando $\|(c_i)_{i=1}^{n}\|_1 \neq 0$. Por tanto usando el Corolario 2.6.3 se tiene que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estríctamente equivalente a la base canónica de ℓ^1. sólo basta ver los casos cuando $G = \emptyset$ y $B \neq \emptyset$ o cuando $G \neq \emptyset$ y $B = \emptyset$, pero observemos que los argumentos anteriores siguen siendo verdaderos si definimos la intersección indexada sobre un conjunto vacío como S y la suma sobre un conjunto vacío como cero. □

Definición 3.2.19. *Sean M un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión uniformemente acotada de funciones de valores reales definidas sobre un conjunto S. Definimos*

$$\delta(M) = \sup_{x\in S} \left(\overline{\text{lím}}_M f_m(x) - \underline{\text{lím}}_M f_m(x)\right).$$

Proposición 3.2.20. *Sean L y M subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Si L está casi contenido en M entonces $\delta(L) \leq \delta(M)$.*

Demostración. Sea $L = \{l_1, l_2, \ldots\}$ y $M = \{m_1, m_2, \ldots\}$. Dado que L está casi contenido en M entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{l_n, l_{n+1}, \ldots\} \subset \{m_n, m_{n+1}, \ldots\}$ para toda $n \geq N$ y por tanto

$$\{f_{l_n}(x), f_{l_{n+1}}(x), \ldots\} \subset \{f_{m_n}(x), f_{m_{n+1}}(x), \ldots\}$$

para todo $n \geq N$ y para todo $x \in S$. Tomando supremos obtenemos que

$$\sup\{f_{l_n}(x), f_{l_{n+1}}(x), \ldots\} \leq \sup\{f_{l_m}(x), f_{l_{m+1}}(x), \ldots\}$$

para todo $n \geq N$. De donde deducimos que $\overline{\text{lím}}_L f_l(x) \leq \overline{\text{lím}}_M f_m(x)$.

Análogamente se prueba que $\underline{\text{lím}}_L f_l(x) \geq \underline{\text{lím}}_M f_m(x)$. Por tanto

$$\overline{\text{lím}}_L f_l(x) - \underline{\text{lím}}_L f_l(x) \leq \overline{\text{lím}}_M f_m(x) - \underline{\text{lím}}_M f_m(x)$$

para todo $x \in S$. Es así que $\delta(L) \leq \delta(M)$. □

Lema 3.2.21. *Existe Q un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ tal que para todo L subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ casi contenido en Q se tiene que $\delta(L) = \delta(Q)$.*

Demostración. Supongamos que no. Usando la Proposición 3.2.20 tendríamos que para todo $Q \subseteq \mathbb{N}$ infinito existe $L \subseteq \mathbb{N}$ infinito casi contenido en Q tal que $\delta(L) < \delta(Q)$.

Sea ω_1 el primer ordinal no numerable. La suposición anterior nos permitiría construir por recursión transfinita una familia de subconjuntos de $\mathbb{N}$ $\{N_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ con la propiedad de que para todo $\alpha < \beta < \omega_1$, N_β está casi contenido en N_α y por tanto, $\delta(N_\beta) < \delta(N_\alpha)$.

Claramente $0 \leq \delta(M)$ para todo M subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ por tanto, la familia transfinita $\{\delta(N_\alpha) \mid \alpha < \omega_1\}$ está acotada inferiormente y por tanto, tiene un ínfimo:

$$\delta = \inf_{\alpha<\omega_1} \{\delta(N_a)\}.$$

Sabemos que existe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de ordinales tal que $\delta = \lim_{n\to\infty} \delta(N_{\alpha_n})$. Pero para $\beta > \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$[5] se tiene que

$$\delta(N_\beta) < \delta(N_{\alpha_n})$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir $\delta(N_\beta) < \delta$, lo cual es una contradicción pues δ es el ínfimo. □

Lema 3.2.22. *Sean S un conjunto, $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión uniformemente acotada de funciones de valores reales definidas en S que no tiene subsucesiones puntualmente convergentes en S, Q un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ que satisface la conclusión de Lema 3.2.21 y $\delta = \frac{\delta(Q)}{2} \geq 0$. Entonces existe $M' \subset Q$ infinito y un numero racional r tal que para todo $L \subset M'$ infinito se tiene que existe $x \in S$ que satisface*

$$\overline{\lim}_L f_l(x) > \delta + r \qquad y \qquad \underline{\lim}_L f_l(x) < r.$$

Demostración. Supongamos que no. Observemos primero que dado que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene subsucesiones puntualmente convergentes se tiene que $\delta(M) > 0$ para todo $M \subset \mathbb{N}$ infinito.

Sea $r_1, r_2, \ldots$ una enumeración de los racionales. Afirmamos que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $L_k \subset Q$ tal que $L_k \subset L_{k-1}$ y para todo $x \in S$

$$\overline{\lim}_{L_k} f_l(x) \leq \delta + r_k \qquad \text{o} \qquad \underline{\lim}_{L_k} f_l(x) \geq r_k.$$

[5]Notamos que si α y β son ordinales, $\alpha < \beta$ si y sólo si $\alpha \subset \beta$. Remitimos al lector que desee profundizar sobre este tema a [18].

Sea $k = 1$. Definimos $L_0 = Q$, como estamos suponiendo que el resultado es falso se tiene que existe $L_1 \subset Q$ tal que para todo $x \in S$ se cumple que

$$\overline{\lim}_{L_1} f_l(x) \leq \delta + r_1 \qquad \text{o} \qquad \underline{\lim}_{L_1} f_l(x) \geq r_1.$$

Supongamos el resultado cierto para k, dado que $L_k \subset Q$ y por nuestra suposición existe $L_{k+1} \subset L_k$ tal que para toda $x \in S$

$$\overline{\lim}_{L_{k+1}} f_l(x) \leq \delta + r_{k+1} \qquad \text{o} \qquad \underline{\lim}_{L_{k+1}} f_l(x) \geq r_{k+1}.$$

Es así que nuestra afirmación es cierta.

El argumento anterior define por inducción una sucesión decreciente de subconjuntos infinitos de Q, $L_1 \supset L_2 \supset \ldots \supset L_k \ldots$. Tomemos para cada $k \in \mathbb{N}$, $l_k \in L_k$ y consideremos $L = \{l_1, l_2, \ldots\}$. Claramente L está casi contenido en L_k para todo $k \in \mathbb{N}$ y por tanto

$$\overline{\lim}_{L} f_l(x) \leq \delta + r_k \qquad \text{o} \qquad \underline{\lim}_{L} f_l(x) \geq r_k. \tag{3.14}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in S$

Sabemos que L es un subconjunto infinito de Q y Q satisface la conclusión del Lema 3.2.21, por lo tanto $\delta(L) = \delta(Q) = 2\delta$. Sea $\epsilon = \frac{\delta}{2}$, usando la definición de $\delta(L)$ obtenemos que

$$\overline{\lim}_{L} f_l(x) - \underline{\lim}_{L} f_l(x) > \delta(L) - \epsilon.$$

Denotemos por $a = \overline{\lim}_{L} f_l(x)$ y $b = \underline{\lim}_{L} f_l(x)$. La desigualdad anterior se puede expresar como

$$a > 2\delta - \epsilon + b > b.$$

Dado que los racionales son densos podemos tomar un racional r tal que $r > b$ y $r - b + \delta < 2\delta - \epsilon = \frac{3}{2}\delta$. Por lo tanto

$$b < r < r + \delta = (r - b) + \delta + b < 2\delta - \epsilon + b < a.$$

Es decir $a > \delta + r$ y $b < r$, lo cual contradice a la desigualdad dada en (3.14). $\square$

A continuación enunciamos los teoremas principales de esta sección.

Teorema 3.2.23. *Sean S un conjunto distinto del vacío y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión uniformemente acotada de funciones de valores reales definidas en S. Entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que satisface una de las siguientes propiedades:*

1. $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge puntualmente en* S.

2. $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *es estrictamente equivalente con respecto a la norma del supremo a la base canonica de* ℓ^1.

Demostración. Supongamos que la primera posibilidad no es cierta. Es decir, para toda $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ no converge puntualmente en S. Por el Lema 3.2.22 existen $M'\subset Q$ infinito y r un numero racional tal que para todo $L\subset M'$ infinito existe $x\in S$ tal que

$$\overline{\lim}_L f_l(x) > \delta + r \qquad \text{y} \qquad \underline{\lim}_L f_l(x) < r.$$

Abusando de la notación tomemos $n\in M'$ y consideremos

$$A_n = \{x\in S \mid f_n(x) > \delta + r\} \qquad\qquad B_n = \{x\in S \mid f_n(x) < r\}.$$

Sea L un subconjunto infinito de M'. Sabemos que existen $\{l_1, l_2, \ldots\}$ y $\{l'_1, l'_2, \ldots\}$ subconjuntos de L tal que

$$\lim_{k\to\infty} f_{l_k}(x) = \overline{\lim}_L f_l(x) > \delta + r \qquad \text{y} \qquad \lim_{k\to\infty} f_{l'_k}(x) = \underline{\lim}_L f_l(x) < r.$$

Lo anterior implica que x pertenece a una cantidad infinita de $A_{n's}$ y a una cantidad infinita de $B_{n's}$. Es decir $(A_n, B_n)_{n\in L}$ no es convergente en S. Por tanto la sucesión de subconjuntos de S dada por $(A_n, B_n)_{n\in M'}$ no tiene subsucesiones convergentes. Aplicando el Teorema 3.2.17 a esta sucesión[6] obtenemos que existe $M\subset M'$ infinito tal que $(A_n, B_n)_{n\in M}$ es independiente.

Por tanto de la Proposición 3.2.18 deducimos que $(f_n)_{n\in M}$ es estríctamente equivalente a la base canonica de ℓ^1. □

Teorema 3.2.24 (Rosenthal)**.** *Sea* $(x_n)_{n=1}^\infty$ *una sucesión acotada en un espacio de Banach* X. *Entonces existe* $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ *una subsucesión de* $(x_n)_{n=1}^\infty$ *que satisface una y sólo una de las siguientes dos alternativas:*

1. $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ *es débilmente de Cauchy.*

2. $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ *es estrictamente equivalente a la base canónica de* ℓ^1.

Demostración. Sea $M>0$ tal que $\|x_n\|\le M$ para todo $n\in\mathbb{N}$, denotemos por $B^* = \{x^*\in X^* \mid \|x^*\|\le 1\}$.

[6]Aunque el Teorema 3.2.17 se demostró para $\mathbb{N}$ es fácil ver que tambien es cierto para cualquier subconjunto infinito M de $\mathbb{N}$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos $f_n : B^* \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x^*) = C(x_n)(x^*),$$

para todo $x^* \in B^*$ y donde C es el encaje canónico de X en X^{**}. Claramente f_n es lineal y continua para todo $n \in \mathbb{N}$ además

$$|f_n(x^*)| = |x^*(x_n)| \leq \|x^*\|\|x_n\| \leq \|x^*\|M,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x^* \in B^*$. Por tanto el Teorema del acotamiento uniforme nos dice que existe $M_1 > 0$ tal que

$$\|f_n\| \leq M_1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el Teorema 3.2.23 a $S = B^*$ encontramos $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ que satisface uno de los dos siguientes casos:

1. $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge puntualmente en B^* y por tanto también converge puntualmente en X^* es decir

   $$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x^*) = \lim_{k\to\infty} x^*(x_{n_k}),$$

   existe para todo $x^* \in X^*$. Por lo cual $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es débilmente de Cauchy.

2. $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es estrictamente equivalente a la base canónica de ℓ^1, es decir existe $\delta > 0$ tal que

   $$\delta \sum_{i=1}^{n} |c_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{k} c_i f_{n_i} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{k} c_i x_{n_i} \right\|$$

   para todo $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Es decir $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es estrictamente equivalente a la base canónica de ℓ^1.

$\square$

Observación 3.2.25. *El que $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ satisfaga 1. ó 2. pero no ambas se debe a que la base canónica de ℓ^1 no es débilmente de Cauchy, pues si lo fuera usando que ℓ^1 es c.s.d. tendríamos que la base canonica de ℓ^1 sería débilmente convergente, lo cual no es cierto.*

Corolario 3.2.26. *Un espacio de Banach X contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1 si y sólo si existe $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en X que no tiene subsucesiones débilmente de Cauchy.*

Demostración. $\Leftarrow$] Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X que no tiene subsucesiones débilmente de Cauchy. Por el Teorema de Rosenthal existe $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ que es estríctamente equivalente a la base canónica de ℓ^1 y por tanto por la Proposición 2.6.2 $[x_{n_k}]$ es isomorfo a ℓ^1.

$\Rightarrow$] Supongamos que existe un subespacio cerrado Y de X isomorfo a ℓ^1, si $f : \ell^1 \to Y$ denota el isomorfismo, sea $x_n = f(e_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ donde $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es la base canónica de ℓ^1.

Si existe $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ débilmente de Cauchy entonces también $(f^{-1}(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ sería débilmente de Cauchy y como ℓ^1 es c.s.d se tendría que $(f^{-1}(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$, subsucesión de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, sería débilmente convergente lo cual es una contradicción. □

Corolario 3.2.27. *Si X es un espacio de Banach c.s.d. entonces X es reflexivo o contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1.*

Demostración. Sea $B = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$, si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en B entonces por el Teorema de Rosenthal existe $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que satiface una de las dos siguientes posibilidades:

1. $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es débilmente de Cauchy y por hipótesis existe $x \in X$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$. Por tanto el Teorema de Eberlein-Smulian implica que B es débilmente compacto por lo cual X es reflexivo.

2. $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es estrictamente equivalente a la base canónica de ℓ^1 y por lo tanto $[x_{n_k}]$ es isomorfo a ℓ^1.

□

Corolario 3.2.28. *Si X es un espacio de Banach con la propiedad de Schur entonces todo subespacio de X de dimensión infinita contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1.*

Demostración. Si X tiene la propiedad de Schur entonces es c.s.d. Si Y es un subespacio de X de dimensión infinita entonces también Y tiene la propiedad de Schur y por el Corolario 3.2.27 se tiene que Y es reflexivo o Y contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1, pero si Y es reflexivo usando que Y es de Schur se tendría por el Corolario 3.2.7 que Y es de dimensión finita lo cual no puede ser. Por lo tanto Y contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1. □

3.3. La caracterización de Richard Haydon.

Basándose en los resultados obtenidos por Rosenthal se puede obtener otra caracterizacíon de espacios de Banach que contienen a ℓ^1, sólo que esta vez los resultados son un poco más geométricos. Comenzamos demostrando un lema que da una condición necesaria para que un espacio de Banach contenga un subespacio isomorfo a ℓ^1.[7]

Lema 3.3.1. *Sean $(X, \| \|)$ un espacio de Banach, S un subconjunto no vacío y acotado de X^*, $\phi \in X^{**}$ y r, δ números reales con $\delta > 0$. Supongamos que si U es un conjunto débil* abierto tal que $S \cap U \neq \emptyset$, entonces existen ξ, η en la cerradura débil* de la envolvente convexa de $S \cap U$ tales que*

$$\phi(\xi) > \delta + r \qquad\qquad \phi(\eta) < r.$$

Entonces X contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1.

Demostración. Probaremos por inducción que para toda $n \in \mathbb{N}$ existen $x_1, \ldots x_n \in X$ tal que al considerar los conjuntos

$$A_i = \{\zeta \in S \mid \zeta(x_i) > \delta + r\} \qquad\qquad B_i = \{\zeta \in S \mid \zeta(x_i) < r\}$$

para toda $i = 1, \ldots, n$, se tiene que

$$V(M, N) = \bigcap_{m \in M} A_m \cap \bigcap_{n \in N} B_n \neq \emptyset$$

para todo M y N subconjuntos disjuntos de $\{1, \ldots, n\}$.

Dado que X^* es débil* abierto, por hipótesis existen $\xi, \eta \in \overline{\text{conv}(S \cap X^*)}^* = \overline{\text{conv}(S)}^*$ tal que

$$\phi(\xi) > \delta + r \qquad\qquad \phi(\eta) < r.$$

Denotemos por $B = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ y $B^{**} = \{f \in B^{**} \mid \|f\| = 1\}$ sabemos que $\overline{C(B)}^* = B^{**}$ donde C es el encaje canónico[8] . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\|\phi\| = 1$, consideremos

$$\epsilon_1 = \phi(\xi) - (\delta + r) > 0 \qquad\qquad \epsilon_2 = r - \phi(\eta) > 0.$$

[7] Véase [14].

[8] Obsérvese que se considera la cerradura débil* de $C(B)$ con respecto a la topologia débil* de X^{**}.

Claramente $U_1 = \{f \in X^{**} \mid |(f-\phi)(\xi)| < \epsilon_1\}$ y $U_2 = \{f \in X^{**} \mid |(f-\phi)(\eta)| < \epsilon_2\}$ son ambas vecindades débil* de ϕ. Pero $\phi \in B^{**}$ y $C(B)$ es débil* denso en B^{**} por lo tanto existe x_1 tal que $\|x_1\| = 1 = \|\phi\|$ y

$$|\widehat{x_1}(\xi) - \phi(\xi)| < \phi(\xi) - (\delta + r) \qquad |\widehat{x_1}(\eta) - \phi(\eta)| < r - \phi(\eta),$$

de donde deducimos que

$$\xi(x_1) > \delta + r \qquad\qquad \eta(x_1) < r.$$

Afirmamos que

$$A_1 = \{\zeta \in S \mid \zeta(x_1) > \delta + r\} \neq \emptyset \qquad\qquad B_1 = \{\zeta \in S \mid \zeta(x_1) < r\} \neq \emptyset.$$

Supongamos que $A_1 = \emptyset$, dado que $\xi \in \overline{\text{conv}(S)}^*$ entonces existe $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $\text{conv}(S)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_1) = \xi(x_1).$$

Pero $s_n = \sum_{i=1}^{k_n} a_{in} s_{in}$ donde $a_{in} \geq 0$ y $s_{in} \in S$ para toda i con $\sum_{i=1}^{k_n} a_{in} = 1$ y dado que $A_1 = \emptyset$ entonces $s_{in}(x_1) \leq \delta + r$ y por lo tanto

$$s_n(x_1) = \sum_{i=1}^{k_n} a_{in} s_{in}(x_1) \leq \delta + r$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando límites de ambos lados cuando $n \to \infty$ obtenemos que $\xi(x_1) \leq \delta + r$ lo cual es una contradicción. Análogamente $B_1 \neq \emptyset$, es decir la afirmación es cierta para $n = 1$.

Supongamos que es cierto para $n = k$, es decir que existen $x_1, \ldots, x_k \in X$ tal que $V(M, N) \neq \emptyset$ para cualesquiera subconjuntos M y N disjuntos de $\{1, \ldots, k\}$.

A continuación demostraremos que A_i y B_i es débil* abierto en S para toda $i = 1, \ldots, k$.

Sea $i \in \{1, \ldots, k\}$, por hipótesis de inducción $A_i \neq \emptyset$ denotemos por $U_\zeta = \{x^* \in X^* \mid |(\zeta - x^*)(x_i)| < \zeta(x_i) - (\delta + r)\}$ para todo $\zeta \in A_i$, claramente U_ζ es una vecindad débil* de ζ. Además un razomamiento sencillo muestra que

$$A_i = \bigcup_{\zeta \in A_i} U_\zeta \cap S$$

y por lo tanto A_i es débil* abierto en S, analogamente B_i es débil* abierto en S para todo $i = 1, \ldots, k$.

Recordando que la intersección finita de subconjuntos débil* abiertos es débil* abierta, deducimos que $V(M,N)$ es débil* abierto en S, es decir para todo M y N subconjuntos de $\{1,\ldots,k\}$ existe $U_{M,N}$ débil* abierto tal que

$$\emptyset \neq V(M,N) = U_{M,N} \cap S.$$

Usando la hipótesis de este Lema concluimos que existe $\xi(M,N), \eta(M,N) \in \overline{\mathrm{conv}(V(M,N))}^*$ tal que

$$\phi(\xi(M,N)) > \delta + r \qquad\qquad \phi(\eta(M,N)) < r.$$

De igual forma al caso n=1 consideremos

$$\epsilon_{M,N} = \phi(\xi(M,N)) - (\delta + r) > 0 \qquad\qquad \delta_{M,N} = r - \phi(\eta(M,N)) > 0$$

para toda pareja M,N de subconjuntos disjuntos de $\{1,\ldots,k\}$.

Claramente los conjuntos

$$V_{M,N} = \{f \in X^{**} \mid |(f-\phi)(\xi(M,N))| < \epsilon_{M,N}\}$$

$$W_{M,N} = \{f \in X^{**} \mid |(f-\phi)(\eta(M,N))| < \delta(M,N)\}$$

son vecindades débil* de ϕ para todo M,N subconjuntos disjuntos de $\{1,\ldots,k\}$. Si suponemos que $\|\phi\| = 1$ entonces dado que $C(B)$ es débil* denso en B^{**} se tiene que existe $x_{n+1} \in X$ tal que $\|x_{n+1}\| = 1 = \|\phi\|$ y también

$$|\widehat{x_{n+1}}(\xi(M,N)) - \phi(\xi(M,N))| < \phi(\xi(M,N)) - (\delta + r)$$

$$|\widehat{x_{n+1}}(\eta(M,N)) - \phi(\eta(M,N))| < r - \phi(\eta(M,N))$$

para todo M,N subconjuntos disjuntos de $\{1,\ldots,k\}$.

Por tanto

$$\xi(M,N)(x_{n+1}) > \delta + r \qquad\qquad \eta(M,N)(x_{n+1}) < r$$

para todo M,N subconjuntos disjuntos de $\{1,\ldots,k\}$.

Un argumento similar al que se hizo para probar que $A_1 \neq \emptyset$ y $B_1 \neq \emptyset$ muestra que

$$A_{n+1} \cap V(M,N) \neq \emptyset \qquad\qquad B_{n+1} \cap V(M,N) \neq \emptyset.$$

Es decir la afirmación es cierta para $k+1$ y por lo tanto es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora consideremos la sucesión $(\widehat{x_n})_{n=1}^{\infty}$ en X^{**}, la cual es acotada ya que $\|\widehat{x_n}\| = \|x_n\| = \|\phi\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si consideramos los conjuntos

$$A_n = \{\zeta \in S \mid \zeta(x_n) > \delta + r\} \qquad\qquad B_n = \{\zeta \in S \mid \zeta(x_n) < r\}$$

los párrafos anteriores muestran que la sucesión $(A_n, B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es linelamente independiente y por tanto por la Proposición 3.2.18 se tiene que $(\widehat{x_n})_{n=1}^{\infty}$ es estríctamente equivalente a la base canónica de ℓ^1 y dado que C el encaje canónico es una isometría, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión en X también lo es. Es decir $[x_n]$ el subespacio cerrado generado por la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es isomorfo a ℓ^1. $\square$

A continuación el teorema principal de esta sección.

Teorema 3.3.2 (Haydon)**.** *Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1.*
2. *Para todo C subconjunto de X^* débil* compacto y convexo se tiene que:*
$$C = \overline{\text{conv}(\text{ext}C)}.$$
3. *Para todo T subconjunto débil* compacto de X^* se tiene que*
$$\overline{\text{conv}(T)}^{w*} = \overline{\text{conv}(T)}.$$

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2.] Sea C un subconjunto débil* compacto y convexo de X^* y supongamos que

$$C \neq \overline{\text{conv}(\text{ext}C)}.$$

Usando que todo conjunto débil* cerrado es débil cerrado obtenemos que

$$C = \overline{C}^{w*} = \overline{\overline{C}^{w*}}^{w} = \overline{C}^{w} = \overline{C}$$

es decir C es cerrado. Es así que se tiene la siguiente contención

$$\overline{\text{conv}(\text{ext}C)} \subset C.$$

Por lo tanto de nuestra suposición se deduce que existe $x_0 \in C$ y $x_0 \notin \overline{\text{conv}(\text{ext}C)}$. Por el Teorema 1.8.13 existe $f \in X^*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_0) < \gamma < f(y)$$

para todo $y \in \overline{\text{conv}(\text{ext}C)}$. Sean $\varphi = -f$ y $\beta = -\gamma$, las desigualdades anteriores muestran que

$$\varphi(x_0) > \beta > \sup_{y \in \overline{\text{conv}(\text{ext}C)}} \varphi(y) \geq \sup_{y \in \text{ext}C} \varphi(y)$$

pero como $x_0 \in C$ se tiene que

$$\sup_{x \in C} \varphi(x) > \sup_{y \in \text{ext}C} \varphi(y). \tag{3.15}$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $1 = \sup_{x \in C} \varphi(x)$. Por el Teorema de Bishop-Phelps podemos suponer que φ es tal que existe $\xi \in C$ tal que $\varphi(\xi) = \sup_{x \in C} \varphi(x)$, y por tanto

$$F = \{\xi \in C \mid \varphi(\xi) = 1\} \neq \emptyset.$$

Ahora probaremos que F es una cara de C. Claramente F es convexo, sean $x_1, x_2 \in C$ tal que existe $0 < \lambda_0 < 1$ y

$$\lambda_0 x_1 + (1 - \lambda_0) x_2 \in F. \tag{3.16}$$

Supongamos que $x_1 \notin F$ ó $x_2 \notin F$, entonces $\varphi(x_1) < 1$ ó $\varphi(x_2) < 1$, supongamos que $\varphi(x_1) < 1$ por tanto

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_0 x_1 + (1 - \lambda_0) x_2) = \lambda_0 \varphi(x_1) + (1 - \lambda_0) \varphi(x_2) &< \lambda_0 + (1 - \lambda_0) \varphi(x_2) \\ &\leq \lambda_0 + (1 - \lambda_0) = 1 \end{aligned}$$

lo cual es imposible por (3.16), análogamente si $\varphi(x_2) < 1$ se llega a la misma contradicción, es decir $x_1, x_2 \in F$. Finalmete, sea $0 \leq \lambda \leq 1$ entonces

$$\varphi(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) = \lambda \varphi(x_1) + (1 - \lambda) \varphi(x_2) = \lambda + (1 - \lambda) = 1$$

es decir F es una cara de C.

Sea $K = \overline{F}^{w*}$ y denotemos por $E = \text{ext}K$, los dos equipados con la topología débil*. Afirmamos que $E \cap F = \emptyset$, si no fuera así podemos tomar $\xi \in E \cap F$, tomemos $x_1, x_2 \in C$ tal que

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Dado que $0 < \frac{1}{2} < 1$ y F es una cara de C se tiene que $x_1, x_2 \in F \subseteq K$, pero $\xi \in E$ y por como se definió E obtenemos que $x_1 = \xi = x_2$. Es decir ξ

es un punto extremo de C y por (3.15) se tiene que $\varphi(\xi) < 1$ lo cual es una contradicción pues $\xi \in F$, y por tanto $\varphi(\xi) < 1$ para todo $\xi \in E$.

Consideremos $I_n = \{\xi \in E \mid \varphi(\xi) < 1 - \frac{1}{n}\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es fácil ver que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, además por el Teorema 1.8.26 E es un espacio de Baire y por tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $E_N = \overline{I_N}^{w*} \cap E$ tiene interior relativo a E no vacío, es decir existe S débil* abierto en E tal que $S \subseteq E_N$.

A continuación trateremos de probar que son ciertas las hipótesis del Lema 3.3.1 con S, φ, $r = 1 - \frac{1}{N}$ y $\delta = \frac{1}{2N}$.

Sea V débil* abierto en X^* con $V \cap S \neq \emptyset$, es así que podemos tomar $x_0 \in V \cap S$, pero S es débil* abierto en E, por lo cual existe O débil* abierto en X^* tal que $S = O \cap E$. Claramente $V \cap O \cap K$ es una vecindad de x_0 en K, x_0 es un punto extremo de K y también K es débil* compacto y convexo por lo cual la Proposición 1.8.20 nos dice que existe una rebanada de K de la forma $W \cap K$, con $W = \{\xi \in X^* \mid \xi(x) > \alpha\}$ para algunos $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_0 \in W \cap K \subseteq V \cap O \cap K,$$

si en la contención anterior intersectamos ambos lados con E, deducimos que

$$\emptyset \neq W \cap E \subseteq V \cap S. \tag{3.17}$$

Ahora, dado que F es débil* denso en K, existe $\xi_0 \in W \cap F$ y claramente tenemos dos casos, que $\xi_0 \in \overline{\text{conv}(W \cap E)}^{w*}$ o que $\xi_0 \notin \overline{\text{conv}(W \cap E)}^{w*}$.

Si pasara que $\xi_0 \in \overline{\text{conv}(W \cap E)}^{w*}$ entonces por (3.17) tendríamos, denotando por $\xi = \xi_0$, que $\xi \in \overline{\text{conv}(V \cap S)}^{w*}$ y además, como $\xi_0 \in F$, $\varphi(\xi) = 1 > 1 - \frac{1}{2N} = \delta + r$.

En caso contrario, supongamos que $\xi_0 \in K \setminus \overline{\text{conv}(W \cap E)}^{w*}$ lo cual implica que ξ_0 no es un punto extremo de K, y por la Proposición 1.8.16 existen $\xi, \zeta \in K$ distintos entre sí y distintos de ξ_0 y $0 \leq \lambda \leq 1$ tales que

$$\xi_0 = \lambda\xi + (1 - \lambda)\zeta. \tag{3.18}$$

Consideremos los siguientes subconjuntos de K:

$$\overline{\text{conv}(W \cap E)}^{w*} \qquad \text{y} \qquad \overline{\text{conv}(E \setminus W)}^{w*}.$$

Observemos primero que ξ y ζ no pueden estar ambos en $\overline{\text{conv}(E \cap W)}^{w*}$ pues como este conjunto es convexo tendríamos que $\xi_0 \in \overline{\text{conv}(E \cap W)}^{w*}$ lo cual no es cierto, también tenemos que ξ y ζ no pueden pertenecer ambos a $\overline{\mathrm{conv}(E\setminus W)}^{w*}$ pues si esto fuera cierto se tendría que existen $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en $\mathrm{conv}(E\setminus W)$ tales que

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n(x)=\xi(x)\qquad\qquad \lim_{n\to\infty}\beta_n(x)=\zeta(x),$$

más aún para todo $n\in\mathbb{N}$ podemos escribir $\alpha_n=\sum_{i=1}^{k_n}a_i^n s_i^n$ y $\beta_n=\sum_{i=1}^{l_n}b_i^n t_i^n$ donde k_n,l_n son naturales, $\sum_{i=1}^{k_n}a_i^n=\sum_{i=1}^{l_n}b_i^n=1$ y $s_i^n,t_i^n\in E\setminus W$. De lo anterior podemos deducir que $\xi(x)\le\alpha$ y $\zeta(x)\le\alpha$, usando (3.18) se tendría que $\xi_0(x)\le\alpha$ lo cual es una contradicción pues $\xi_0\in W$. Por tanto como $\xi,\zeta\in K=\overline{\mathrm{conv}(E)}^{w*}=\overline{\mathrm{conv}((E\cap W)\cup(E\setminus W))}^{w*}$ deducimos que $\xi\in\overline{\mathrm{conv}(E\cap W)}^{w*}$ y $\zeta\in\overline{\mathrm{conv}(E\setminus W)}^{w*}$ o $\zeta\in\overline{\mathrm{conv}(E\cap W)}^{w*}$ y $\xi\in\overline{\mathrm{conv}(E\setminus W)}^{w*}$ sin perdida de generalidad supongamos el primer caso, de donde obtenemos que $\zeta(x)\le\alpha$ y por tanto de (3.18) debe pasar que $0<\lambda<1$, pues si $\lambda=1$ entonces $\xi_0=\xi$ lo cual no es el caso y si $\lambda=0$ entonces $\xi_0=\zeta$ lo cual es imposible pues $\xi_0(x)>\alpha$, por tanto como F es una cara $\xi\in F$. De nueva cuenta por (3.17) $\xi\in\overline{\mathrm{conv}(V\cap S)}^{w*}$ y además $\varphi(\xi)=1>1-\frac{1}{2N}=\delta+r$.

Ahora probaremos que $A=\{\eta\in S\mid\varphi(\eta)<1-\frac{1}{N}\}$ es débil* denso en S. Sea $s\in S$ y $U_1=\{\eta\in S\mid |(s-\eta)(y_0)|<\epsilon_1\}$ una vecindad de s débil* abierta en S, como S es débil* abierto en E existe $U_2=\{\eta\in E\mid |(s-\eta)(y_i)|<\epsilon_2\ \forall i=1,\dots,n\}$ una vecindad de s débil* abierta en E tal que $U_2\subseteq S$. Sea $U_3=\{\eta\in E\mid |(s-\eta)(y_i)|<\max\{\epsilon_1,\epsilon_2\}\ \forall i=0,1,\dots,n\}$, claramente $U_3\subseteq U_2\subseteq S$, además U_3 es una vecindad de s débil* abierta en E y como $s\in E_N$ tenemos que existe $\eta\in U_3\cap I_N$ por tanto, $\eta\in S$, $|(s-\eta)(y_0)|<\epsilon_1$ y $\varphi(\eta)<1-\frac{1}{N}$ de donde $\eta\in U_1\cap A$, por lo cual $s\in\overline{A}^{w*}$ y por lo tanto $S\subseteq\overline{A}^{w*}$ y así hemos probado que A es débil* denso en S, lo cual implica que existe $\eta\in V\cap S\subseteq\overline{\mathrm{conv}(V\cap S)}^{w*}$ tal que $\varphi(\eta)<1-\frac{1}{N}=r$. De esta forma hemos probado que las hipótesis del Lema 3.3.1 se satisfacen y por tanto X contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1.

2. $\Rightarrow$ 3.] Dado que todo subconjunto débil* abierto de X^* es abierto respecto a la topología de la norma, deducimos que todo subconjunto débil* cerrado de X^* es cerrado con respecto a la topología de la norma.

Sea T un subconjunto débil* compacto de X^*, sabemos que

$$\mathrm{conv}(T)\subseteq\overline{\mathrm{conv}(T)}^{w*}$$

y por el parrafo anterior tenemos que

$$\overline{\mathrm{conv}(T)}\subseteq\overline{\mathrm{conv}(T)}^{w*}.$$

Ahora como T es débil* compacto, por el Teorema 1.8.17 obtenemos que

$$\mathrm{ext}\left(\overline{\mathrm{conv}(T)}^{w*}\right)\subseteq T$$

Pero tambien $A = \overline{\text{conv}(T)}^{w*}$ es débil* compacto y convexo, por lo cual nuestra hipótesis nos dice que

$$\overline{\text{conv}(T)}^{w*} = A = \overline{\text{conv}\left(\text{ext}(A)\right)} \subseteq \overline{\text{conv}(T)}.$$

Es así que

$$\overline{\text{conv}(T)}^{w*} = \overline{\text{conv}(T)}.$$

3. $\Rightarrow$ 1.] La demostración de esta implicación esta fuera del alcance de esta tésis puesto que hace uso de conceptos y resultados no mencionados hasta ahora en este trabajo, sin embargo hemos decidido poner la demostración que presenta Richard Haydon en [14] para dar una idea de los temas que se necesitan para entenderla.

Supongamos que existe $j : \ell^1 \to X$ un encaje, y sea $u : \ell^1 \to C[0,1]$ un mapeo cociente. Denotemos, como es usual, por $\delta(t)$ la medida en

$$M[0,1] = C[0,1]^*$$

que vale 1 en el punto $t \in [0,1]$. Entonces la cerradura débil* de la envolvente convexa de $\delta[0,1]$ contiene todas las medidas de probabilidad en $M[0,1]$, mientras que la cerradura en norma de la envolvente covexa de $\delta[0,1]$ contiene solamente medidas atómicas, es decir esta contenido en $\ell^1[0,1]$. Sea $S = u^*\delta[0,1]$, que es débil* compacto en $\ell^{1*} = \ell^\infty$, de esta forma

$$\overline{\text{conv}(S)}^* \neq \overline{\text{conv}(S)}.$$

Finalmente, sea T cualquier subconjunto débil* compacto de X^* tal que $j^*(T) = S$, entonces

$$j^*\left(\overline{\text{conv}(T)}^*\right) = \overline{\text{conv}(S)}^*$$

pero tambien

$$j^*\left(\overline{\text{conv}(T)}\right) \subseteq \overline{\text{conv}(S)}$$

lo cual implica que $\overline{\text{conv}(T)}^* \neq \overline{\text{conv}(T)}$. □

3.4. Algunos resultados recientes.

Para concluir este trabajo incluimos una lista de equivalencias para que un espacio de Banach contenga un subespacio isomorfo a ℓ^1. Esta lista está tomada de un articulo muy reciente de Rosenthal , véase [26], que ha sido enviado para su publicación al Israel Journal of Mathematics en el 2007.

Nuestro interés no es presentar la demostración del teorema que se enuncia en seguida, de hecho esta fuera del marco de la tesis, si no redondear el trabajo realizado aquí y mostrar las posibles líneas de investigación que a partir del tema tratado se han abierto.

Antes de enunciar el teorema es necesario dar algunas definiciones y notaciones importantes.

Si $T : X \to Y$ es un operador, entonces decimos que T es compacto si para todo A subconjunto acotado de X se tiene que $T(A)$ es relativamente compacto, es decir $\overline{T(A)}$ es compacto, además T es llamado de Dunford-Pettis cuando para todo A subconjunto débilmente compacto de X se tiene que $T(A)$ es compacto con la norma de Y. Un subconjunto acotado W de X^* norma de manera isomorfa a X si existe un numero real C tal que

$$\|x\| \leq C \sup_{w \in W} |w(x)|$$

para todo $x \in X$. Cuando $C = 1$ y $\|w\| = 1$ para todo $w \in W$ decimos que W norma de manera isométrica a X.

Una función f discontinua entre dos espacios métricos es de la primera clase de Baire si f es el limite puntual de una sucesión de funciones continuas, si f es real y definida en K, un espacio métrico compacto, decimos que f es universalmente medible cuando f es medible con respecto a la compleción de cualquier medida de Borel en K. Finalmente denotamos por $\mathfrak{c}$ la cardinalidad de $2^{\aleph_0}$, es decir $\mathfrak{c} = \left|2^{\aleph_0}\right|$.

Teorema 3.4.1. *Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *No existe un subespacio de X isomorfo a ℓ^1.*

2. *Toda sucesión acotada de elementos en X tiene una subsucesión débilmente de Cauchy.*

3. *Cualquier operador integral de Y a X^* es compacto, para todo Y espacio de Banach.*

4. *Cualquier operador integral de ℓ^1 a X^* es compacto.*

5. *Cualquier operador integral de X^* a X^* es compacto.*

6. *Cualquier operador integral de X a Y es compacto, para todo Y espacio de Banach.*

7. *Cualquier operador integral de X a X^* es compacto.*

8. *Cualquier operador de L^1 a X^* es Dunford-Pettis.*

9. *Cualquier operador Dunford-Pettis de X a Y es compacto, para todo espacio de Banach Y.*

10. *Cualquier subconjunto débil* compacto y convexo de X es la cerradura en norma de la envolvente convexa de sus puntos extremos.*

11. *Si K es un subconjunto débil* compacto de X^* que norma de manera isomorfa a X, entonces $[K] = X^*$. Donde $[K]$ es el subespacio cerrado generado por K.*

    Si además X es separable, también se tienen las siguientes equivalencias:

12. *Cualquier familia incondicional en X^* es numerable.*

13. *Cualquier familia incondicional en X^* tiene cardinalidad menor que $\mathfrak{c}$.*

14. *$B(X^*, \ell^\infty)$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$.*

15. *$B(X^*)$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$.*

16. *X^{**} tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$.*

17. *X^{**} tiene cardinalidad menor que $2^{\mathfrak{c}}$.*

18. *Si K es un subconjunto débil* compacto de X^*, $(x_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión acotada en X y consideramos $(\widehat{x_n})_{n=1}^\infty$ la sucesión en K^* dada por $\widehat{x_n}(k) = k(x_n)$ para todo $k \in K$ y todo $n \in \mathbb{N}$, entonces cualquier punto de acumulación puntual de $(\widehat{x_n})_{n=1}^\infty$ es de la primera clase de Baire.*

19. *Existe un subconjunto K débil* compacto de X^* que norma de manera isomorfa a X^* tal que si $(x_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión acotada en X, entonces $(\widehat{x_n})_{n=1}^\infty$ tiene un punto de acumulación puntual que es universalmente medible en K.*

20. *Existe un subconjunto K débil* compacto de X^* que norma de manera isomorfa a X^* tal que si $(x_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión acotada en X, entonces la cardinalidad del conjunto de puntos de acumulación puntuales de $(\widehat{x_n})_{n=1}^\infty$ en K es menor que $2^{\mathfrak{c}}$.*

Bibliografía

[1] Fernando Albiac, Nigel J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Springer Inc. United States of America, 2006.

[2] D. J. Aldous, *Subspaces of L^1, via random measures*, Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981), 445-463.

[3] Banach S. *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932.

[4] Bishop E. and Phelps R. R. *The support functionals of a convex set*, Proc. Symp. Pure Maths. (Convexity) A.M.S. 7, 27-35, 1963.

[5] Choquet G. *Lectures in Analysis vol. I*, New York, Benjamin, 1969.

[6] Choquet G. *Lectures in Analysis vol. II*, New York, Benjamin, 1969.

[7] Carothers N. L. *A short course on Banach space theory*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 64, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[8] Dunford N. and Schwartz J. T. *Linear operators. Part I*, Wiley Classics Library, John Wiley and Sons, New York, 1988.

[9] Dunford N. and Schwartz J. T. *Linear operators. Part II*, Wiley Classics Library, John Wiley and Sons, New York, 1988.

[10] Dunford N. and Schwartz J. T. *Linear operators. Part III*, Wiley Classics Library, John Wiley and Sons, New York, 1988.

[11] P. Enflo, *A counterexample to the approximation property in Banach spaces*, Acta Math. 130, 309-317, 1973.

[12] T. Figiel and W. B. Johnson, *A uniformly convex Banach space which contains no l^p*, Compositio Math. 29, 179-190, 1974.

[13] J. Hagler, *Some more Banach spaces which contain ℓ^1*, Studia Math. 46, 3542, 1973.

[14] R. Haydon, *Some more characterizations of Banach spaces containing ℓ^1*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 8, 269-276, 1976.

[15] James R. C. *Bases and reflexivity of Banach Spaces*, Ann. of Math. 52, 518-527, 1950.

[16] James R. C. *A separable somewhat reflexive Banach Space with non separable dual*, Bull. Amer. Math. Soc. 80, 738-743, 1974.

[17] James R. Munkres, *Topología*, Prentice Hall Inc. 2000.

[18] Jech Thomas, *Set theory*, Academic press, New York, 1978.

[19] Erwin Kreyszig, *Introductory functional Analysis with applications*, John Wiley and sons, United States of America, 1989.

[20] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces. I*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Sequence spaces.

[21] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces. II*, vol. 97, Springer-Verlag, Berlin, 1979, Function spaces.

[22] R. E. Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 183, Springer-Verlag, New York, 1998.

[23] E. Odell and H. P. Rosenthal, *A double-dual characterization of separable Banach spaces containing ℓ^1*, Israel J. Math. 20, 375-384, 1975.

[24] H. P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing ℓ^1*. Proc. Nat. Acad. Sci. 71, 2411-2413, 1974.

[25] H. P. Rosenthal, *Point-wise compact subsets of the first Baire class*, Amer. J. Math. 99, 362378, 1977.

[26] H. P. Rosenthal, *Some new characterizations of Banach spaces containing ℓ^1*, submitted for publication to the Israel J. of Math. 2007

[27] H.P. Rosenthal, *Some recent discoveries in the isomorphic theory of Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 84, 803831, 1978.

[28] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1991.

[29] I. Singer and A. Pelczynski,*On non-equivalent bases and conditional bases in Banach spaces*, Studia Mathematica 25, 5-25, 1964.

[30] B. S. Tsirelson, *Not every Banach space contains ℓ^p or c_0*, Funct. Anal. Appl. 8, 139-141, 1974.