



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

**Algoritmos de atributos sísmicos para el
mejoramiento de la resolución**

T E S I S

QUE COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS DE LA TIERRA

P R E S E N T A

FIDEL REYES RAMOS

JURADO EXAMINADOR

Dra. Rosa María Uribe Cifuentes

Dr. Gregorio Toscano Pulido

Dr. Jorge Barrios Rivera

Dr. Martín Díaz Viera

Dr. Carlos Mendoza

COMITÉ TUTORAL: Dr. René Chávez Segura, Dr. Oscar Campos Enríquez y Dr. William Bandy



MÉXICO, D.F.

Otoño de 2009



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DERECHOS DE AUTOR ©Fidel Reyes Ramos, 2007, 2008, 2009
LAS IDEAS QUE SE PROPONEN EN ESTA TESIS ESTAN PATENTADAS

Con mucho cariño dedico esta tesis a mi madre:

Sra. Graciela Ramos Sánchez,
no habría llegado a esta meta
sin su amor y apoyo sincero.

*Loco gasté mi juventud lozana
en subir a la cumbre prometida,
y hoy que llego, diviso la salida
del sol tras otra cumbre más lejana*

José Eustasio Rivera (1888 - 1928), poeta colombiano.

Contenido

1	Introducción	1
2	Transformada de Hilbert-Huang	9
2.1	Introducción	9
2.2	Transformada de Hilbert-Huang	20
2.3	Descomposición de modo intrínseco	25
2.4	Transformada de Hilbert	29
2.5	Ejemplos de la transformada de Hilbert-Huang	36
2.6	Problemas de la transformada de Hilbert-Huang	39
2.7	Aplicaciones de la transformada de Hilbert-Huang	43
3	Capas delgadas	45
3.1	Modelo de cuña	47
3.2	Método de Widess	49
3.3	Respuesta de los atributos instantáneos en capas delgadas . .	55
3.3.1	Atributo de capas delgadas	57
3.4	Detección de capas delgadas con transformada de Fourier . . .	58
3.5	Detección de capas delgadas con descomposición espectral . .	64
3.6	Detección de capas delgadas con la transformada de Hilbert- Huang	75

3.7	Aplicación a un caso de estudio: Boonsville	82
3.7.1	Geología	82
3.7.2	Estudios sísmicos	88
3.7.3	Sensibilidad a varias capas delgadas	90
3.7.4	Aplicación de la transformada de Hilbert-Huang	92
3.8	Conclusiones	101
4	Atenuación y dispersión	103
4.1	Introducción	103
4.2	Consecuencias del principio de similaridad	108
4.3	Construcción de las relaciones de dispersión	110
4.4	Representación de la dispersión	114
4.5	Inversión de la atenuación y la corrección por la dispersión	122
4.6	Resultados	128
4.7	Conclusiones	132
5	Implantación de la transformada de Hilbert-Huang	135
5.1	Introducción	135
5.2	Filtros derivadores	136
5.2.1	Filtro de Möller et al. (1998)	136
5.2.2	Filtros derivadores recursivos	141
5.3	Transformada de Hilbert	146
5.4	Resultados	148
5.4.1	Exactitud de las transformadas de Hilbert	153
5.5	Conclusiones	159
6	Mejoramiento de las imágenes de coherencia con métodos numéricos	161

6.1	Introducción	161
6.1.1	Aplicación a la coherencia C3	163
6.1.2	Programa de trabajo	165
6.2	Técnicas de Optimización	166
6.2.1	Estrategias de búsqueda directa	166
6.2.2	El método símplex	168
6.2.3	Implementación	170
6.2.4	El algoritmo de Levenberg-Marquardt	171
6.3	Pruebas y resultados	171
6.4	Conclusiones	179
7	Una solución de la saturación del echado con optimización multiobjetivo	181
7.1	Introduction	181
7.1.1	Definiciones	182
7.1.2	El problema de la saturación del echado	186
7.2	Optimización evolutiva multiobjetivo	188
7.3	Coherencia multiobjetivo	191
7.3.1	Coherencia de componentes principales	193
7.4	Resultados	197
7.5	Conclusiones	201
8	Discusión y conclusiones	203
A	Análisis Ondicular	215
A.1	Introducción	215
A.2	Algoritmo piramidal	223
A.3	Representación en tiempo frecuencia	228

A.4	Análisis biortogonal	232
A.5	Diagonalización de operadores	233
A.5.1	La nueva base ortogonal	240
A.5.2	Atributos instantáneos	241

Capítulo 1

Introducción

El propósito general de esta tesis es el de mejorar las imágenes sísmicas.

El concepto de “mejoramiento” viene ligado con el de la interpretación de las imágenes en el sentido de su claridad, continuidad y resolución con el propósito de identificar de la manera más fácil los patrones sísmicos que tienen un significado geológico.

Para ilustrar este concepto, se muestra en la figura 1.1 dos imágenes en planta de un cubo sísmico en 3-D. Haciendo abstracción de su significado geológico, su diferencia principal es que una tiene un aspecto más granuloso que la otra. Este es el ruido que en procesamiento de imágenes se llama de “sal y pimienta”, que es deseable eliminar. De este modo, el proceso que logró esta eliminación está dirigido al mejoramiento de la imagen.

El mejoramiento de la imagen también significa su simplificación. Eliminar características gradualmente para tener una idea global de la imagen. En la misma figura 1.1a se muestran algunos rasgos que se encuentran más difuminados que en la imagen 1.1b. Establecer el equilibrio entre eliminar características indeseables y conservar información relevante (por ejemplo, rasgos geológicos) es el propósito de muchos procedimientos del mejoramiento de las imágenes.

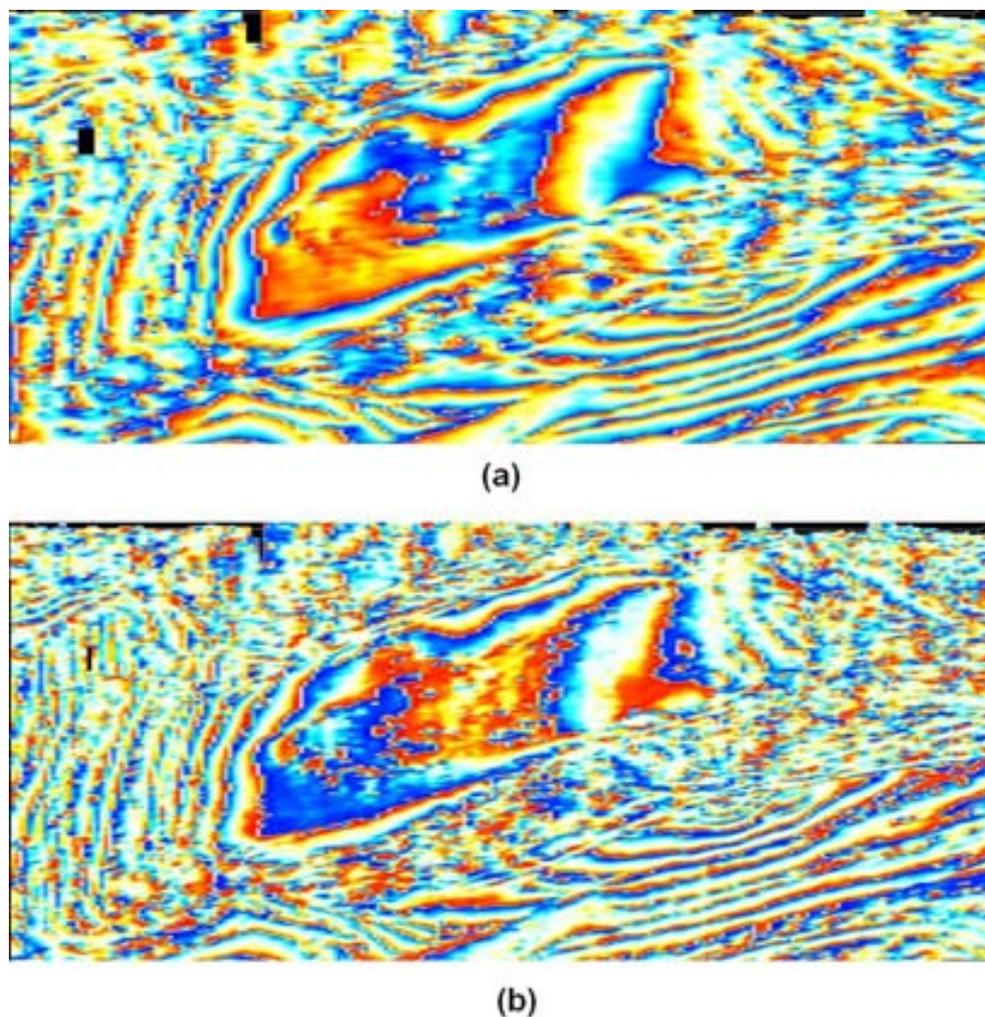


Figura 1.1: (a) Fase instantánea filtrada por el echado. (b) Fase instantánea. La imagen (a) es una versión mejorada de la (b) debido a que presenta un aspecto menos granuloso que se puede explicar por el ruido en los datos. La fase es un atributo que se utiliza para delinear posibles estructuras geológicas, por lo que estos rasgos se pueden seguir mejor en la figura (a) que en la (b).

Estos procedimientos consisten en construir otra imagen a partir del cálculo de valores con los datos sísmicos, por lo que, estos valores representan un atributo de estos datos.

En general, los atributos sísmicos son utilizados no sólo para mejorar la imagen, sino también para destacar cualidades que de otra manera no se detectarían, como son la congruencia de sus patrones, su continuidad, su energía y también, características de su naturaleza ondulatoria, como su amplitud, fase y frecuencia. O bien, asociados a fenómenos físicos vinculados a la propagación de ondas como la dispersión y atenuación.

En esta tesis se proponen una serie de atributos para mejorar las imágenes que se obtienen de procedimientos que hasta ahora, se describen mejor con un algoritmo que con una teoría matemática.

La transformada de Hilbert-Huang es una técnica de descomposición espectral dirigida a datos que no son estacionarios ni lineales, que se obtienen de medir fenómenos naturales (por ejemplo sismogramas, mediciones astronómicas, datos climáticos, etc) o industriales (por ejemplo, datos de la vibración en máquinas). Su descripción es puramente algorítmica y su autor (Norden Huang, 1998) pospone su descripción matemática para un futuro quizá no muy lejano.

De esta transformada se propone utilizar la máxima amplitud espectral que con ella se determina en dos aplicaciones: Detección de capas delgadas y filtrado de la dispersión, temas que son relevantes en la interpretación sísmica.

Es bien conocido (Randen et al., 2000) que los yacimientos entrapados en accidentes estructurales del subsuelo se están agotando, y los nuevos yacimientos deben localizarse contenidos en delgadas capas de roca porosa.

Las exploración sísmica debe contar con atributos sísmicos que permitan estudiar la situación de estas capas en el subsuelo, lo cual implica mejorar la resolución, es decir, aumentar la capacidad de estos atributos para interpretar

capas de espesor pequeño en relación a la longitud de las ondas propagadas artificialmente en un levantamiento sísmico, que es en el orden de las decenas de metros.

Es por ello que se demuestra, con la ayuda de modelos de cuña, que la amplitud máxima determinada con la transformada de Hilbert-Huang mejora la resolución, que comparado con las transformadas de Wigner y de Morlet, se concluye que con la transformada de Hilbert-Huang se pueden obtener imágenes de las que se pueda extraer mayor información de carácter geológico.

Con la máxima amplitud espectral calculada con esta esta transformada se determina el factor de atenuación de las ondas, que se se puede utilizar como un atributo indicador de hidrocarburos, y que se aplica para filtrar las trazas sísmicas de la dispersión al modificar su escala de tiempo y sus amplitudes por un procedimiento basado en el principio de similaridad.

En un caso de estudio se muestra que el resultado de aplicar este filtrado, son imágenes que resaltan los eventos sísmicos, y hace más interpretables las imágenes en vistas en planta.

Debido a que la transformada de Hilbert-Huang se basa en el cálculo de las derivadas de la fase y de la transformada de Hilbert, se prueban cuatro métodos para implementarla combinando dos métodos para determinar derivadas y otros dos para calcular la traza imaginaria.

El propósito es verificar si puede lograrse un método de derivar sin magnificar el ruido y si empleando varios métodos para calcular la transformada de Hilbert puede ayudar a mejorar la imagen.

Entre estos métodos se emplea la diagonalización del operador de Hilbert, que es un concepto de la transformada ondicular. Se prueba que la manera en que se determina la transformada de Hilbert tiene una exactitud que se puede calcular con una función derivada del teorema de Nuttall (1966). Con un ejemplo sencillo y esta función, se prueba que la diagonalización del operador

de Hilbert es más exacta, y por lo cual, más precisos los atributos instantáneos que con ella se determinan.

Las técnicas en computación se califican por su eficiencia, concepto que implica medir su desempeño en el tiempo empleado en obtener un resultado o bien, en el espacio de memoria que necesitan. Esta es la base de una rama de las ciencias de la computación llamada “complejidad de algoritmos”, en donde esta eficiencia se acota superiormente por funciones que se describe en categorías: Lineal, polinómica, logarítmica o exponencial.

Se denota con $O(f(n))$ el acotamiento de la eficiencia, a lo cual se le conoce como “complejidad”, y que también se le nombrará el costo ya sea en tiempo de cómputo o espacio en memoria, y en donde f es una función del tipo de las categorías que se acaban de enumerar y que depende del número de datos n dado inicialmente.

Los problemas que no se clasifican en estas categorías de funciones por tener una solución que consume mucho tiempo de cómputo o espacio de memoria, o bien son problemas teóricamente imposibles de resolver, se les conoce como de tipo “NP”.

En mis escasos años en el doctorado en geofísica, no he encontrado un problema en sismología que sea de tipo NP, sin embargo, he observado que los procesos pueden ser lentos debido a la enorme cantidad de datos por calcular.

En este sentido se ilustra cómo puede abreviarse el tiempo de cómputo al emplear técnicas de optimización establecidas desde hace muchos años, pero que por alguna razón han sido ignoradas en atributos sísmicos.

Entre los métodos de optimización se tienen aquellos de descenso empinado y de optimización directa (Rao, 1996).

Los primeros se basan en la propiedad de que el gradiente de la función objetivo es un vector que apunta hacia la región de su dominio donde se

encuentran valores extremos, por lo que es necesario determinar el gradiente ya sea directamente o bien mediante diferencias finitas.

Entre los algoritmos en esta clase se tienen el método de Cauchy, el de Fletcher-Reeves, y el método de gradiente conjugado o método de Powell, en donde la optimización se hace sucesivamente en el sentido del gradiente y en un vector que le es perpendicular.

Se tiene también aquellos que se basan no sólo en el gradiente, sino que también utilizan el hessiano, que es la matriz de segundas derivadas de la función objetivo, ya sea calculándola directamente como en el método de Newton y en el de Levenberg-Marquardt, o bien aproximando al hessiano de maneras que caracterizan al algoritmo, por ejemplo el método de Davidon-Fletcher-Powell o el de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shannon.

Los métodos de búsqueda se caracterizan por implantar heurísticas que no involucran el gradiente de la función objetivo, y son útiles cuando ésta no es continua o evaluar las derivadas implica una complejidad alta. Ejemplos en esta clase van desde la discretización del dominio de la función objetivo y buscar el óptimo exhaustivamente, pasando por técnicas de búsqueda aleatoria, hasta métodos que estructuran sus soluciones preliminares, como el método *símplex*.

Los métodos que se utilizaron fueron el de Levenberg-Marquardt y el método *símplex* para maximizar la semejanza sesgada. A diferencia de los autores de este atributo, en esta tesis se concluye que si se emplean estas técnicas se obtienen imágenes no sólo más rápido, sino mejores en el sentido que anteriormente describí.

Siguiendo con el tema de la optimización y de los atributos de coherencia, se propone utilizar algoritmos de computación evolutiva, pero esta vez, aplicados a un problema multiobjetivo con el propósito de destacar fallas de echado muy empinado. Estas fallas no se perciben en vistas en planta con sólo maximizar

la semblanza sesgada, por lo que se utiliza una combinación de optimización multiobjetivo, semblanza sesgada y análisis de componentes principales como solución a este problema.

Cada uno de estos temas tiene dedicado un capítulo que generalmente se construye con una amplia exposición de los elementos que se consideraron pertinentes incluir, siguiendo con un apartado con la solución que en esta tesis se propone y finalizando con algunas conclusiones.

Agradecimientos

Agradezco mucho a las personas que me apoyaron para realizar este doctorado y esta tesis. En especial a mi madre, Sra. Graciela Ramos Sánchez, por su apoyo sincero en esta carrera que a veces fue contra la corriente, y en la que hubo ocasión en que mi barca casi naufraga.

A la Dra. Leticia Flores Márquez, Coordinadora del Posgrado en Ciencias de la Tierra, le agradezco con todo mi corazón el apoyo que me brindó en momentos decisivos.

Agradezco sinceramente a los profesores a los que mi escuela encomendó revisar esta tesis, por dedicarme parte de su ocupado y valioso tiempo.

A mis asesores de la UNAM, los doctores René Chavez y Francisco Sánchez Sesma, por su paciencia y tiempo para escuchar mis desatinos.

A los muy buenos amigos que encontré en mi camino, quienes desinteresada y generosamente quisieron compartir sus conocimientos conmigo. En especial al M. en I. Marcelino Moreno del que obtuve comentarios que fueron muy valiosos para mí.

Sin pretensiones de ninguna especie, me gustaría incluir las palabras de San Jerónimo citadas por Sor Juana Inés de la Cruz, y que considero, describen mejor el trabajo que he realizado en los últimos años de mi vida:

“De cuanto trabajo me tomé, cuánta dificultad hube de sufrir, cuántas veces desesperé, y cuántas otras veces desistí y empecé de nuevo, por el empeño de aprender, testigo es mi conciencia que lo he padecido, y de los que conmigo han vivido”.

Capítulo 2

Transformada de Hilbert-Huang

2.1 Introducción

La descomposición espectral es una herramienta importante para analizar series de datos obtenidas de procesos naturales o industriales (Battista et al., 2007; Castagna et al., 2003; Castagna et al., 2006; Chen et al., 2002; Flandrin y Goncalves, 2004; Huang et al., 1998; Magrin-Chagnolleau y Baraniuk, 2004; Partyka et al., 1999; Sinha et al., 2005; Sinha et al., 2006; Steghs y Drijkoningen, 2004; Wu y Huang, 2004).

El propósito de la descomposición espectral es obtener espectros por cada instante de tiempo (o por cada unidad que discretice la dimensión en la que los datos se encuentren ordenados).

Con ello, se puede apreciar el cambio de amplitud (y también de fase) en una serie de espectros de un instante a otro.

Esto se utiliza para analizar series de tiempo y explicar las causas del fenómeno que las produjeron. Por ejemplo, para trazas sísmicas, el cambio de los espectros instantáneos se puede explicar por:

1. Dispersión y atenuación de ondas sísmicas (Castagna et al., 2003; Castagna et al., 2006; Ebro, 2004; Futterman, 1963; Kolsky, 1956; Jensen et al.,

1985; Kjartanson, 1981; Robinson, 1979), al disminuir la amplitud, distorsionar la fase, y aún crear ondículas adicionales lo cual afecta el contenido de frecuencias y por consiguiente los espectros instantáneos. Se hablará de estos fenómenos en un capítulo dedicado a ellos.

2. El grosor de las capas con distintas impedancias determina cambios de amplitud, los cuales son importantes cuando los grosores son muy pequeños al disminuir la amplitud, o bien, al hacerla grande en un fenómeno llamado “sintonía” (Marfurt y Kirlin, 2001; Partyka, 2001; Robertson, 1984; Widess, 1973).

Es por ello, que la descomposición espectral utilizada para detectar capas delgadas y estudiar la posible presencia de hidrocarburos. (Cada año se publican resultados en este sentido, por ejemplo: Castagna et al, 2003; Marfurt y Kirlin, 2001; Odebatu et al, 2006; Taner, 2003). Además, los yacimientos de hidrocarburos localizados en trampas estructurales se están agotando, por lo que, los yacimientos que en años recientes se han explorado, residen en configuraciones en donde el análisis de las capas es mas importante (Randen et al., 2000).

Existen varias técnicas para obtener descomposiciones espectrales. Algunas de ellas son:

1. Transformada de Fourier en tiempos cortos o espectograma.
2. Transformación ondicular (wavelets) discreta y continua.
3. Transformada de Wigner.

Existen muchos reportes en la literatura sobre la utilización de estas técnicas en los estudios sísmicos de exploración. Sin embargo, la atenuación, las capas delgadas y hasta el ruido asociado hacen del estudio de trazas sísmicas un

proceso muy particular. En especial, estos factores hacen que los datos en las trazas sean:

- No estacionarios.
- No lineales.

La estacionariedad se refiere a las propiedades estadísticas de los datos en las trazas. De acuerdo con Huang et al. (1998), una serie de tiempo $X(t)$ es estacionaria si:

$$\left. \begin{aligned} E(|X(t)^2|) < \infty \\ E(X(t)) = m \\ C(X(t_1), X(t_2)) = C(X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau)) = C(t_1, t_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

donde $E(\cdot)$ es la esperanza o valor medio de su argumento, m es el valor medio de la serie $X(t)$ y $C(\cdot, \cdot)$ es la covarianza determinadas de las series de tiempo simbolizadas en sus argumentos, y la expresión donde aparece establece que: La covarianza de la serie en dos intervalos de extensión predeterminada que empiezan en los instantes t_1 y t_2 es la misma si se mide a partir de estos instantes más una magnitud τ .

Estas estadísticas se pueden determinar por todos los datos que vienen en una traza (y por lo cual se dice que es asintóticamente estacionaria), o bien en intervalos de tiempo (por lo que es localmente estacionaria).

En general, las trazas sísmicas no cumplen esta propiedad por ser el resultado de convolucionar una ondícula y una serie de coeficientes de reflexión, que corresponden a los límites de capas geológicas con diferentes impedancias acústicas, por lo que tampoco la secuencia de coeficientes de reflexión tiene que ser necesariamente estacionaria.

La no linealidad se refiere a pequeños sinusoides intercalados entre las ondículas de la traza, a los cuales se les llama vibraciones intraondiculares

(Huang et al., 1998).

Al ser las trazas sísmicas el registro de un fenómeno acústico, estas vibraciones pueden interpretarse como la dispersión y atenuación que se produce en las ondículas al reflejarse en medios rocosos con propiedades particulares (como la contención de fluidos y gas) o por ser el resultado de la reflexión de las ondículas en fallas y fracturas.

Por estas razones, el análisis de trazas sísmicas por medio de descomposición espectral es un tema que hay que tratar con cuidado, principalmente porque en las técnicas que se citaron se asume de antemano que los datos son estacionarios y lineales.

Esto es más patente en la transformada de Fourier. Los espectros de esta transformada se refieren a toda la serie de tiempo, y los detalles locales se ignoran. La no linealidad que se describió anteriormente se refleja como perturbaciones en el espectro de amplitud a lo cual se les llama armónicos (Huang et al., 1998; Partyka et al., 1999).

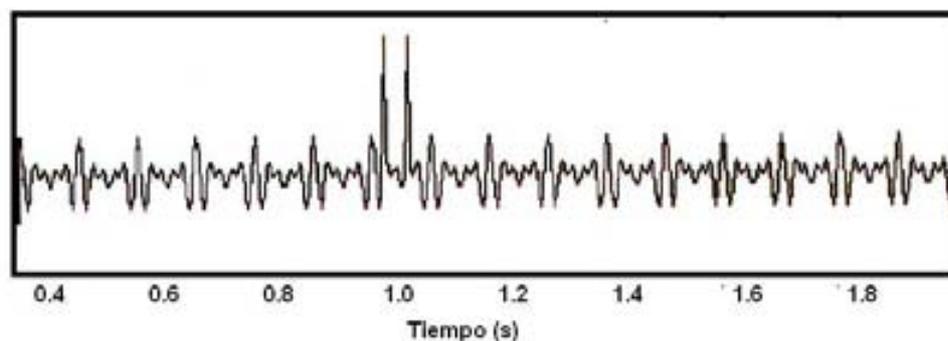


Figura 2.1: Serie de tiempo con dos picos que sobresalen (Chakraborty y Okaya, 1995).

Por ejemplo, la serie de tiempo de la Figura 2.1 presenta ciertos picos en

determinados tiempos, y tiene una forma ondicular que sugiere una frecuencia constante.

Para una transformada de Fourier, estos picos no se podrían localizar en el espectro, y que en una traza sísmica podrían indicar la reflexión que resulta entre dos estratos con diferentes propiedades litológicas.

Puesto que es importante localizar también en el tiempo las características locales, se ha propuesto realizar la transformada de Fourier en los datos tomados en ventanas o intervalos de tiempo que se trasladan a lo largo de la serie, traslapándose entre ventanas vecinas.

Analizar los datos de la serie en una ventana y de esta manera, es equivalente a convolucionarlos con una función que hace las veces de esta ventana, y cuyo soporte en el origen es compacto.

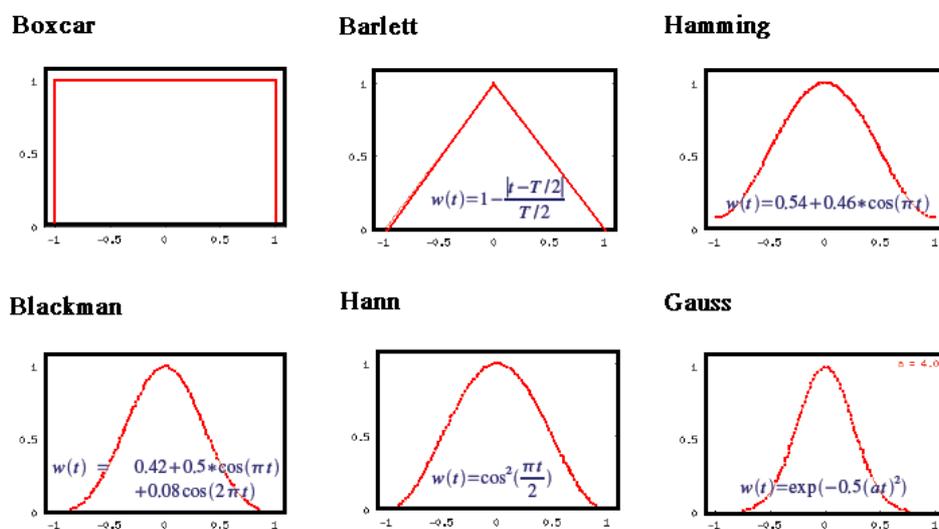


Figura 2.2: Ventanas que se pueden usar en la transformada de Fourier en tiempos cortos (TFTC).

Por ejemplo, esta función de ventana puede tomar las formas de la Figura 2.2. Se puede tener un “box car”, un triángulo, o bien una función de densidad gaussiana en la que la varianza determina el ancho de la ventana.

De este modo, la transformada de Fourier de la convolución de una función de ventana y una serie de tiempo es:

$$\text{TFTC}(\tau, \omega) = \int f(t)g(t - \tau) \exp(-j\omega t) dt \quad (2.2)$$

Que resulta en una transformación en tiempo-frecuencia a la cual se le llama transformada de Fourier en tiempos cortos (TFTC), y a la que también se le conoce como espectrograma (Cohen, 1995) y transformada ondicular continua (Taner, 2003).

De esta manera, puede identificarse características locales, como los picos en el tiempo que se mencionaron arriba, en una matriz de amplitudes cuyas filas son el tiempo original de la serie y las columnas corresponden a las frecuencias, por lo que se obtienen espectros instantáneos o por cada valor de tiempo.

El ancho de la ventana determina el detalle de las cualidades en tiempo y frecuencia que se pueden localizar, de este modo, ventanas anchas tendrán mayor detalle en frecuencia y ventanas pequeñas en el tiempo. Con la transformación TFTC no se puede observar a la misma resolución ambas características a la vez, y a esta contradicción se le conoce como el principio de incertidumbre de Heisenberg (Chakraborty y Okaya, 1995; Cohen, 1995).

Para ilustrar este principio, de la serie en la Figura 2.1, se usan ventana pequeñas para determinar sus detalles locales, y por esto en el proceso de convolución esta ventana se usa más veces, por lo que los picos (y en general los eventos) de la serie, se analizarán más veces, y se repetirá parte de su amplitud en varios espectros instantáneos, como se puede ver en la Figura 2.3.

Por otra parte, ventanas anchas determinarán espectros instantáneos de

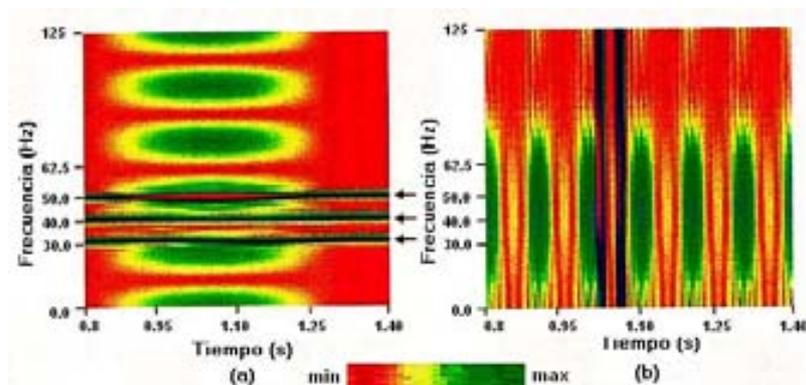


Figura 2.3: (a) Análisis de la serie de la Figura 2.1 con ventanas anchas, lo que resalta características en la frecuencia que se señalaron con flechas. (b) Análisis de la misma serie con ventanas angostas, resaltando características en el tiempo (Chakraborty y Okaya, 1995).

las características en frecuencia de la serie, resaltando menos los eventos en el tiempo.

Los datos pueden ser estacionarios en un lapso que no corresponde al tamaño del intervalo en el que la transformada de Fourier se aplica localmente. Si es más pequeño o más grande puede producir armónicos que no necesariamente signifiquen algo físicamente. Además, es muy probable que los períodos en los que la traza es estacionaria sean de diferente extensión.

Un factor que complica esta situación, es que en una serie de tiempo estacionaria, se convierte en no estacionaria al analizarla en intervalos pequeños.

Una manera de resolver estas limitaciones de la transformada de Fourier en tiempo cortos, es hacer dinámicos los intervalos de tiempo de acuerdo a la frecuencia que se analiza, es decir, tomar intervalos grandes para frecuencias bajas e intervalos pequeños para las altas (Partyka et al., 1999).

Esto puede realizarse al tomar los intervalos en función de una densidad gaussiana, cuya desviación estándar indique el tamaño del intervalo, lo cual implica convolucionar la traza de datos y la función de densidad gaussiana modulada por la frecuencia:

$$Gf(\omega, t) = \int f(u)g(u - t) \exp(-j\omega u) du \quad (2.3)$$

donde

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{\sigma^2}\right) \quad (2.4)$$

Si la desviación estándar σ es fija para todas las frecuencias, se tiene la transformada de Gabor. Por otra parte, si la desviación estándar depende de la frecuencia se tiene la transformada de Morlet:

$$g_j = \exp(-a_j t^2) \exp(-j\omega_j t) \quad (2.5)$$

donde

$$a_j = \frac{\log 2}{4\pi^2} \omega_j^2 \quad (2.6)$$

Existe una variación, a la cual se le ha llamado transformada S (Odebatu et al., 2007), donde

$$a_j = \frac{\omega_j^2}{8\pi^2} \quad (2.7)$$

Durante mucho tiempo se ha realizado descomposición espectral utilizando estas técnicas con el fin de detectar capas delgadas, y calcular el factor de calidad con el fin de apreciar la atenuación.

Sin embargo, el principio de incertidumbre hace que estas técnicas sigan teniendo limitaciones: En primer lugar porque dependen de una varianza que se determina antes de analizar los datos. Esto produce que los rasgos de amplitud se encuentren “embarrados” (smeared) en un rango de frecuencias.

A este fenómeno se le ha llamado “goteo” (leakage) (Huang et al., 1998), y es una manifestación del fenómeno que se explicó anteriormente: Que el ancho de la ventana de datos no se adapta por completo al contenido local de amplitudes, por lo que los espectros instantáneos tienen más representación en amplitudes de lo que deberían tener.

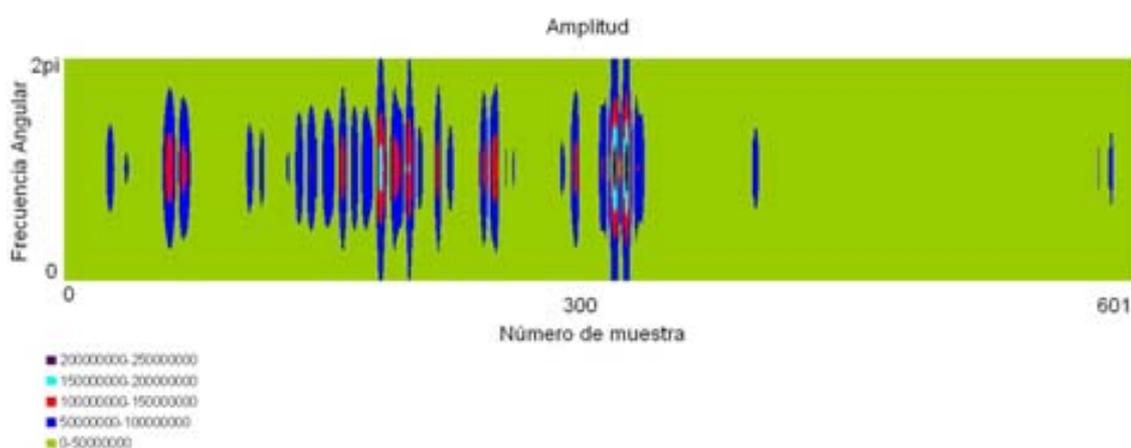


Figura 2.4: La amplitud de la transformada de Gabor de una traza sísmica. Nótese las franjas de amplitud que indican el “goteo” de esta transformada, el cual se puede apreciar cerca del tiempo 300, donde se encuentran dos franjas que abarca casi todo el espectro de frecuencias. Franjas similares y más angostas se encuentran en el tiempo 150.

Este fenómeno hace que los espectros que producen estas técnicas puedan ocultar características no lineales de los datos.

Una técnica parecida a la anterior es la transformada ondicular, que consiste en la convolución de la serie original con una “ondícula” $\psi(t)$ (función simétrica, con amplitud máxima en el origen y que decrece rápidamente al cero para coordenadas negativas y positivas) que se dilata (o se contrae) en

un factor a y que se traslada su origen de coordenadas en un factor b . De este modo se denota con W el resultado de esta convolución en función de los factores que se acaban de enumerar:

$$W(a, b; X, \psi) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (2.8)$$

La frecuencia se asocia al factor de dilatación a y el espectro se refiere al origen b .

En esta técnica, las ondículas no representan necesariamente una base ortogonal, y los factores de dilatación pueden excluir frecuencias de las que se puedan estudiar características de interés (como la atenuación).

La transformada ondicular (2.8) es atractiva debido a que su costo computacional es bajo, debido a que se basa en la convolución con una función de ondícula, cuyo costo en cómputo es proporcional al número de datos utilizado. En la práctica se utiliza el método de la pirámide (ver apéndice), que tiene un costo computacional de $O(n)$.

Finalmente, la transformada de Wigner (también llamada ondícula de Heisenberg) se basa en el espectro de la autocorrelación (modulada por la frecuencia) $V(\omega, t)$ de las trazas:

$$V(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} X\left(t - \frac{1}{2}\tau\right) X\left(t + \frac{1}{2}\tau\right) \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad (2.9)$$

El espectro que resulta de esta transformación no tiene amplitudes necesariamente positivas, por lo cual, aunque matemáticamente correcta, puede carecer de una interpretación física real.

Por basarse en la autocorrelación, el ruido local se hace global, lo cual afecta la representación en tiempo-frecuencia. Es por ello, que se han implantado algoritmos para suavizar los espectros de la transformada de Wigner mediante

la convolución con filtros pasa-bajas especiales llamados k ernes (Cohen, 1995).

Esto puede ser relevante para apreciaciones cualitativas basadas en esta descomposición espectral, pero pierden valor al utilizarlas cuantitativamente; debido a que al suavizar los espectros con el uso de k ernes, se tiene el mismo efecto que la transformada de tipo Gabor: Embarran las amplitudes en un rango de frecuencias, pudiendo ocultar rasgos de interés.

De acuerdo a mi experiencia con la transformada de Wigner con k ernel adaptativo (AOK) (Jones y Baraniuk, 1995), el costo en tiempo de cómputo de la transformada de Wigner puede ser alto por las siguientes razones:

1. Con un costo de $O(n^2)$, el algoritmo debe autocorrelacionar los datos para calcular los factores del tipo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t - \frac{1}{2}\tau)X(t + \frac{1}{2}\tau)dt$$

2. Se debe determinar la transformada de Fourier de esta correlación al tiempo t , lo cual tiene un costo aproximado de $O(n \log_2 n)$.

Apliqu  el código en lenguaje ‘‘C’’ que estos autores proporcionan a petición, para determinar la transformada de Wigner de las 64000 trazas contenidas en un cubo sísmico, y con las amplitudes que estas transformaciones determinan, calcular la atenuación con el método de radio espectral (Tonn, 1989) adaptado a las amplitudes de los espectros instantáneos. Con los valores de atenuación calculados de este cubo, se elaboran imágenes con sistemas de computación especiales que se utilizan como auxiliares para localizar yacimientos de hidrocarburos.

El tiempo que empleó el programa escrito en lenguaje ‘‘C++’’ para producir estas imágenes fue en el orden de horas, dependiendo del tipo de com-

putadora que se usó. En cubos de diferentes tamaños, la aplicación de esta transformada determinó resultados después de muchas horas de cálculo.

2.2 Transformada de Hilbert-Huang

Se han probado las técnicas que se han descrito en muchos casos de análisis de series de tiempo (Castagna et al., 2003; Chakraborty y Okaya, 1995; Holschneider et al., 2005; Odebatu et al., 2006; Sinha et al., 2005; Sinha et al., 2006), pero sus inconvenientes se deben principalmente a dos razones:

1. A que la descomposición espectral que producen tiene un carácter lineal.
2. A que suponen una base de descomposición determinada de antemano: Senos y cosenos para la transformada de Fourier en tiempos cortos, Gabor, Morlet y Wigner o a una base ondicular que no necesariamente es ortogonal como la transformada ondicular.

En este último punto se puede incluir también que la desviación estándar en la transformada de Gabor y Morlet se requiere antes de analizar los datos. En los últimos años, se han formulado algoritmos para hacer que esta desviación estándar sea adaptativa a los datos usando la curvatura de los espectros, como por ejemplo en (Daubechies y Planchon, 2002).

Tras analizar las causas de que estas técnicas no sean del todo perfectas, Huang et al. (1998) concluyen que la base de descomposición espectral deberá tener las siguientes características:

1. Completa.
2. Ortogonal.
3. Local.

4. Adaptativa a los datos.

La primera hará que la descomposición espectral sea exacta, la segunda que atenúe el goteo y que las amplitudes sean positivas. Las últimas dos harán que la descomposición espectral trate con las características no estacionarias ni lineales de los datos.

Para construir esta base, Huang hace la siguiente argumentación de la frecuencia instantánea:

De acuerdo con Cohen (1995), el ancho de banda B^2 (es decir, la varianza de las frecuencias) de la señal analítica (esto es, la serie de valores complejos que tienen por parte real los datos originales y por parte imaginaria la transformada de Hilbert de la serie dada) debe tener la siguiente expresión:

$$B^2 = \int \left(\frac{A'(t)}{A(t)} \right)^2 A^2(t) dt + \int (\phi'(t) - \langle \omega \rangle)^2 A^2(t) dt \quad (2.10)$$

donde al tiempo t , $A(t)$ y $A'(t)$ es la amplitud instantánea y su derivada con respecto al tiempo, $\phi'(t)$ es la derivada de la fase y $\langle \omega \rangle$ el promedio, ponderado por la amplitud, de las frecuencias de la serie de tiempo dada como entrada.

En esta ecuación intervienen dos factores que explican que la variación en las frecuencias se debe a cambios en la amplitud (modulación de la amplitud, AM):

$$\left(\frac{A'(t)}{A(t)} \right)^2 A^2(t) \quad (2.11)$$

O en la frecuencia (modulación de la frecuencia, FM):

$$(\phi'(t) - \langle \omega \rangle)^2 A^2(t) \quad (2.12)$$

Para el segundo factor (modulación FM) se puede reconocer que la varianza es el promedio ponderado por la amplitud de la diferencia numérica de la

frecuencia media y la derivada de la fase.

La ecuación (2.12) explican que la derivada de la fase representa también una frecuencia, y puesto que esta derivada es con respecto al tiempo, resulta ser instantánea, por lo que se le conoce también como la “frecuencia instantánea”.

Para los investigadores en análisis de señales, la frecuencia instantánea ha sido un concepto difícil de explicar, principalmente porque el concepto de frecuencia se ha asociado a los espectros de la transformada de Fourier, en los que la frecuencia se refiere a la rapidez de las oscilaciones de las funciones senos y coseno, que al superponerlas (sumarlas) aproximan a los datos que se analizan.

Es por ello, que Huang restringe el tipo de series que se pueden analizar de esta manera. Propone que los datos originales tengan sólo una frecuencia por cada instante, es decir una “componente”, por lo que a este tipo de datos se les ha llamado monocomponente.

En realidad el concepto de monocomponente y multicomponente no se define con claridad y en lugar de usarlos, se propone el concepto de banda angosta (narrow band) para referirse a las series de tiempo con poca variación en frecuencia, de las cuales, debido a su naturaleza, un buen ejemplo son las trazas sísmicas, que dependiendo de si fueron registradas en un campo terrestre o marino, su ancho de banda es de alrededor de 70 a 90 Hz.

El ancho de banda, que en la siguiente ecuación se denota con v , se puede determinar también por el número de extremos locales $N0$ y de los cruces con el cero $N1$ de la traza sísmica:

$$N1^2 - N0^2 = \frac{v^2}{\pi^2} \quad (2.13)$$

Como dato adicional, los parámetros $N0$ y $N1$ se pueden aproximar de los momentos del espectro m_i :

$$\left. \begin{aligned} N0 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{m_2}{m_0} \right) \\ N1 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{m_4}{m_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Para que los atributos de fase y frecuencia instantáneos sean significativos es necesario que las trazas sísmicas tengan las siguientes características (Battista et al., 2007; Huang et al., 1998):

1. Que los datos del principio y el final sean cero
2. Que su promedio sea cero, es decir, que estén centralizadas.

El motivo de estos requerimientos lo exponen Huang et al. (1998):

Supóngase una serie de tiempo descrita por la función:

$$f(t) = a \cos(t) + \alpha \quad (2.15)$$

La función coseno está ya centralizada, y esta cualidad se elimina en la medida en que α sea distinto de cero.

La transformada de Hilbert de esta función será el seno y ambas series en un plano cartesiano describirán un círculo de radio a . El centro de este radio se desplazará de acuerdo a α .

Si α es cero, la fase y la frecuencia instantánea serán constantes. Pero si $|\alpha| < 1$ y distinta de cero el nuevo centro se encuentra cerca del origen y la fase y frecuencia instantánea dejarán de ser constantes, como se muestra en la Figura 2.5a.

Este efecto se acentúa más si $|\alpha| > 1$. Para este caso, la fase y la frecuencia instantánea se muestran también en las figuras 2.5b y 2.5c.

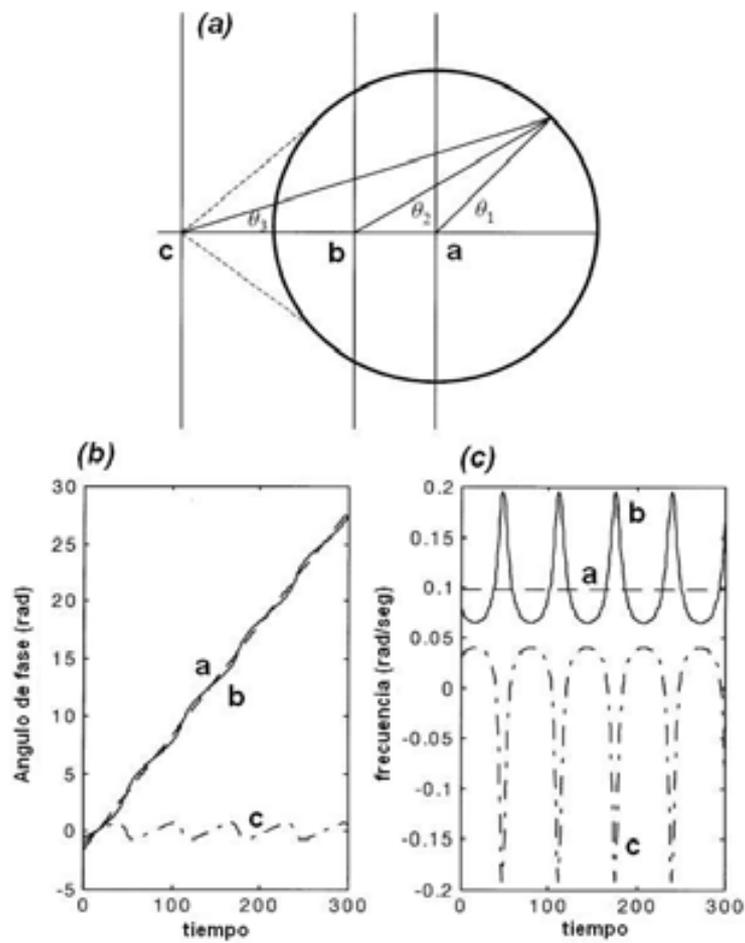


Figura 2.5: (a) El plano de fase para la función $f(t) = a \cos(t) + \alpha$ para cuando (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha < 1$ (c) $\alpha > 1$. (b) La fase en función del ángulo para los casos (a), (b) y (c). (c) La frecuencia instantánea para los mismos casos, (Huang et al., 1998).

Los atributos instantáneos que se obtienen cuando $|\alpha| \neq 0$ no reflejan el verdadero carácter de la función que en realidad contribuye más a la fase y la frecuencia, es decir, el coseno.

Con este ejemplo se puede concluir que para tener atributos instantáneos significativos, es necesario que la serie de tiempo se encuentre centralizada.

Con estas premisas se resume que, para que la base de descomposición espectral tenga frecuencias instantáneas significativas se debe cumplir los siguientes requerimientos:

1. Que deba sea de banda angosta (narrow band), es decir, que en una vecindad pequeña en torno de su frecuencia dominante, se contenga una buena parte de su espectro de potencias. Dominate, su espectro decaiga
2. Debe estar centralizada.

2.3 Descomposición de modo intrínseco

Basándose en las características anteriores, Huang concluye que cada base para la descomposición espectral deben tener las siguientes características:

1. Que el número de extremos locales difiera a lo más en uno de sus cruces con el cero.
2. Que si se encuentran sus máximos locales e interpolan para construir una envolvente superior, y del mismo modo con sus mínimos locales para una envolvente inferior, el promedio de estas envolventes es cero en cualquier instante.

La primera característica hará que cada base tenga un ancho de banda angosto, y este requisito se deriva de la definición del ancho de banda a partir

de los extremos locales y de los cruces con el cero de las ecuaciones (2.14).

El segundo punto se refiere a la centralización de las bases con el fin de hacer significativos los atributos de fase y frecuencia que de estas bases se pudieran derivar.

A las bases que cumplan estos requisitos se les llama “funciones de modo intrínseco” (FMI). Para construir la primera función de modo intrínseco, Huang propone el siguiente procedimiento:

Dada una serie de tiempo $D(t)$, $t = 1, \dots, M$ realizar los siguientes pasos:

1. Hacer $C_{(1,0)}(t) = D(t)$, $t = 1, \dots, M$
2. Repetir los pasos 3 a 6 hasta que $C_{(1,i)}(t)$ sea una FMI.
3. Encontrar los máximos locales de $C_{(1,i)}(t)$ e interpolarlos para hacer una envolvente superior $yM(t)$.
4. Encontrar los mínimos locales de $C_{(1,i)}(t)$ e interpolarlos para hacer una envolvente inferior $ym(t)$.
5. Promediar las envolventes $avg(t) = (yM(t) + ym(t))/2$
6. Hacer $C_{(1,i+1)}(t) = C_{(1,i)}(t) - avg(t)$

La segunda FMI se obtiene al hacer $D(t) = D(t) - C_{(1,L)}(t)$, para un número de iteración máxima L , y repetir el procedimiento ahora para $C_{(2,0)}(t)$. Y en general, las siguientes FMI $C_{j+1}(t)$ se obtienen de la FMI $C_j(t)$ con este algoritmo.

Se usan splines cúbicos para las interpolaciones (Press y Teukolsky, 2002), pero también existen variaciones de este algoritmo con B-splines (Chen et al., 2006), y he realizado experimentos utilizando “beta-splines” (Barsky, 1993).

Para detener las iteraciones de los pasos 3 a 6 se puede usar la varianza relativa del error entre una iteración y otra:

$$E = \frac{\sum_{t=1}^M (C_{j,i}(t) - C_{j,i-1}(t))^2}{\sum_{t=1}^M C_{j,i}(t)^2} \quad (2.16)$$

y parar el algoritmo cuando el error E sea menor que cierta tolerancia dada. Huang experimentó con este algoritmo y descubrió que con $E = 0.2$ ó $E = 0.3$ resultan criterios muy estrictos.

Otro criterio es por el número S : Consiste en parar si el número de extremos locales ha sido el mismo en las últimas S iteraciones.

Las funciones de modo intrínseco se pueden considerar como filtros cuyas bandas de frecuencia se traslapan entre sí.

Otra característica es que las FMI reconstruyen aproximadamente a la serie original, denotada con $D(t)$:

$$D(t) = \sum_{j=1}^K C_j(t) + R(t) \quad (2.17)$$

Donde $R(t)$ es una función residual.

Para ilustrar cómo las funciones de modo intrínseco recomponen a la serie original de datos se presenta la Figura 2.6a, donde se observa que al superponer la última función de modo intrínseco con la serie de datos de la que se obtuvo, se sigue su tendencia general.

Si a esta tendencia se le suma la penúltima función de modo intrínseco, se obtiene otra serie que aproxima un poco a los datos originales. Esta aproximación se hace más exacta en la medida que se suman más funciones de modo intrínseco.

Teóricamente, las funciones de modo intrínseco son ortogonales entre sí (Flandrin y Goncalves, 2004; Huang et al., 1998). En la práctica, son aproximadamente ortogonales. Para obtener una medida de su ortogonalidad se eleva al cuadrado la recomposición de la serie original y que se expresa en la

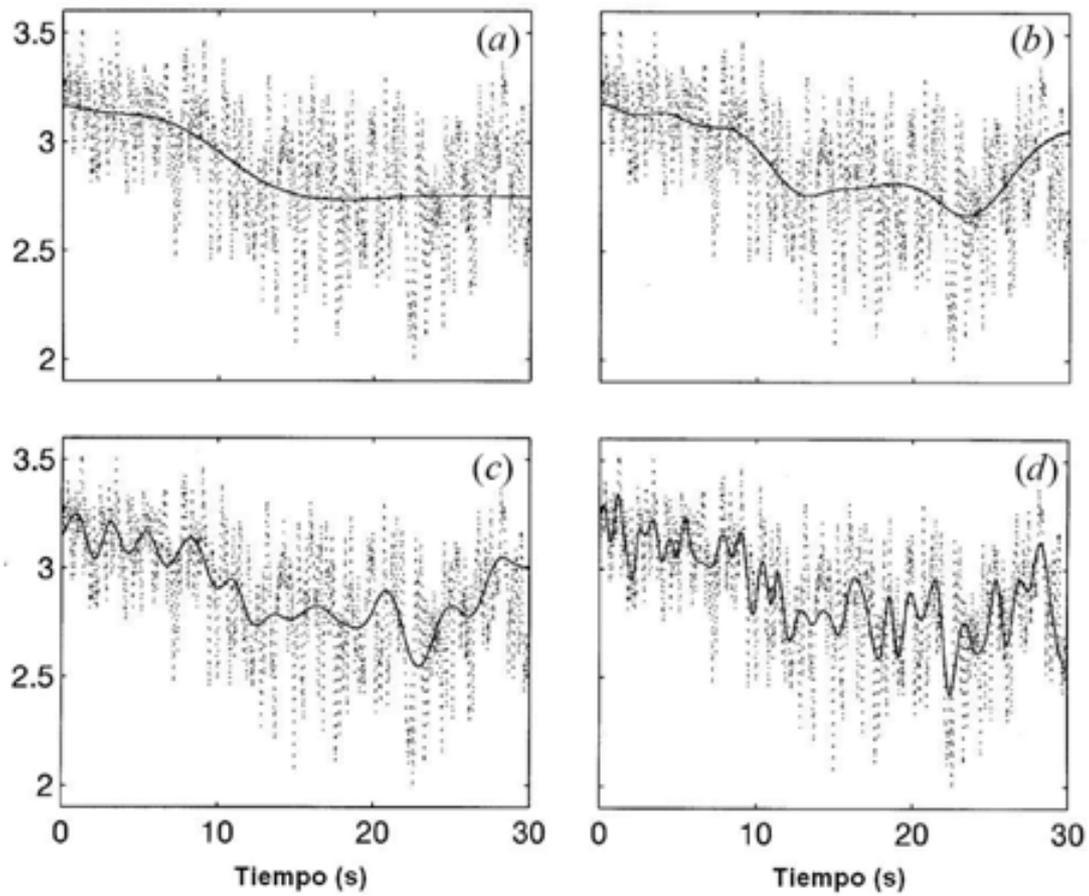


Figura 2.6: Serie original de tiempo con rayas punteadas. La suma de los últimos modos intrínsecos: (a) Sólo el último. (b) Los últimos dos. (c) Los últimos tres. (d) Los últimos cuatro. A medida que se agregan más modos intrínsecos la composición se parece más a la serie original, (Huang et al, 1998).

Ecuación (2.17):

$$X^2(t) = \sum_{j=1}^K C_k^2(t) + 2 \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^K C_j(t)C_k(t) \quad (2.18)$$

Si al superponer las funciones $C_k(t)$ se reconstruye la serie original $X(t)$, se puede seguir que la suma de sus cuadrados recompongan el cuadrado de la serie $X(t)$, por lo que los términos cruzados deberán ser mínimos (idealmente cero).

Esto quiere decir que, las funciones $C_k(t)$ son ortogonales entre sí en la medida que la suma de los términos cruzados sea menor:

$$IO = \sum_{t=1}^M \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^K C_j(t)C_k(t)}{X^2(t)} \quad (2.19)$$

Es decir, que si se pudiera calcular la matriz de covarianza de las funciones de modo intrínseco, y normalizada por las amplitudes de la serie original, la medida de ortogonalidad será la suma de los coeficientes de la matriz de covarianza que no sean los de la diagonal.

En la Figura 2.7 se muestra una serie de tiempo y sus primeras funciones de modo intrínseco. Se puede observar que la primera tiene el mayor número de oscilaciones por unidad de tiempo, por lo que representa las altas frecuencias. Estas oscilaciones decrecen con el número de función intrínseca y la última representa la tendencia de la serie de datos, y generalmente se considera como residuo.

2.4 Transformada de Hilbert

Dado que las funciones de modo intrínseco tienen son de banda angosta y están centralizadas, entonces su fase instantánea (y por tanto su frecuen-

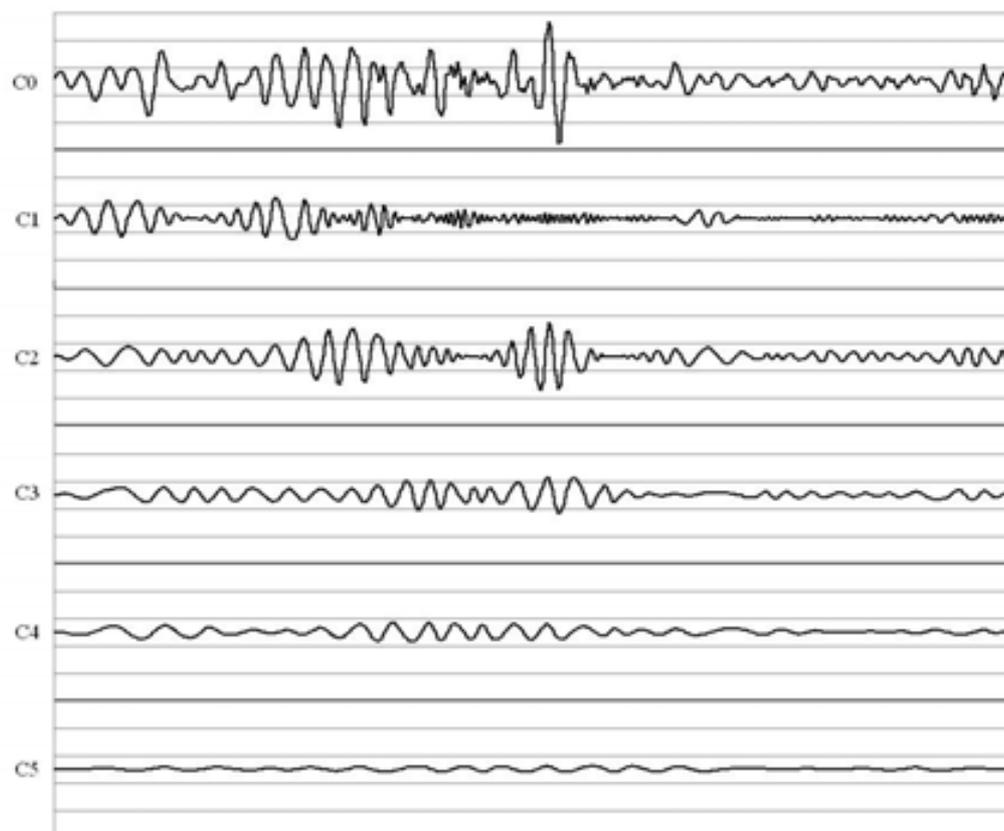


Figura 2.7: Primeros modos de funciones intrínsecas para una traza sísmica denotada como C_0 . La función C_1 tiene las componentes de alta frecuencia y la función C_5 indica la tendencia de los datos.

cia instantánea) será más significativa por las razones que se en la sección anterior.

Para obtener estos atributos instantáneos, es necesario realizar su transformada de Hilbert

$$Y_j(t) = P.V. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_j(t') dt'}{t' - t} \quad (2.20)$$

donde *P.V.* significa el valor principal de la integral. Se forma con ello la serie analítica

$$Z_j(t) = C_j(t) + iY_j(t) \quad (2.21)$$

De este modo los atributos de amplitud $A_j(t)$ y fase $\theta_j(t)$ son los siguientes:

$$\begin{aligned} A_j(t) &= \sqrt{C_j^2(t) + Y_j^2(t)} \\ \theta_j(t) &= \arctan \left(\frac{Y_j(t)}{C_j(t)} \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Y la frecuencia instantánea es:

$$\omega_j(t) = \frac{d}{dt} \theta_j(t) \quad (2.23)$$

Se tiene entonces una descomposición tiempo-frecuencia: (1) del tiempo original de la serie y (2) de la frecuencia instantánea de las funciones de modo intrínseco, que construyen un plano tiempo-frecuencia donde se localizan las amplitud instantáneas de cada función de modo intrínseco.

Las razones para tomar estas frecuencias instantáneas como frecuencias de una descomposición espectral provienen de que, en una serie analítica expresada en forma polar $Z(t) = A(t) \exp(-i\theta(t))$ puede aplicársele la transformada de Fourier:

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \exp(-i\theta(t)) \exp(-i\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \exp(-i(\theta(t) - \omega t)) dt \quad (2.24)$$

La función de fase $(\theta(t) - \omega t)$ determina el carácter oscilatorio del integrando. Las frecuencias que hacen que la fase cambie más rápido contribuyen menos a la integral al cancelar áreas bajo la curva que están sobre y bajo el eje de las abscisas. De modo que la máxima contribución a $W(\omega)$ viene dada por las frecuencias en las que la fase oscile menos, y en especial de aquella frecuencia que cumplan la siguiente relación (Huang et al., 1998):

$$\frac{d}{dt}(\theta(t) - \omega t) = 0 \quad (2.25)$$

Este es el principio del método llamado de fase estacionaria para aproximar a $W(\omega)$ sin evaluar su integral.

De esta forma se tiene una serie de espectros instantáneos que no en todas las frecuencias tiene una amplitud, y pueden percibirse como una serie de amplitudes dispersas en este plano tiempo-frecuencia. Es por esta razón que a este tipo de descomposición espectral se le llama el “esqueleto” de amplitudes, en comparación con los espectros instantáneos que resultan de otras técnicas, donde las amplitudes no se encuentran tan puntualizadas, sino representadas en rangos de frecuencia más anchos.

A este proceso (descomposición de modo intrínseco) y las transformadas de Hilbert de las FMI para obtener sus atributos instantáneos, se le llama transformada de Hilbert-Huang.

El espectro de potencias que se obtiene con este algoritmo se puede marginalizar para la frecuencia

$$h(\omega) = \int H(t, \omega) dt \quad (2.26)$$

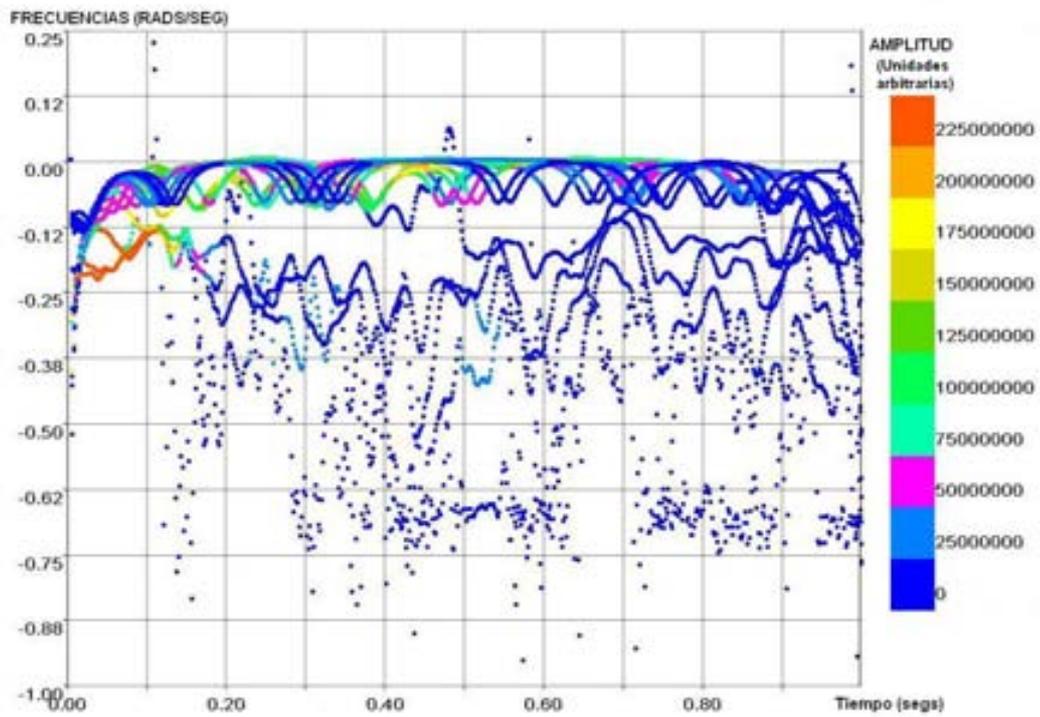


Figura 2.8: Descomposición tiempo frecuencia por la transformada de Hilbert-Huang para una traza sísmica: La escala de tiempo es la de la traza, la de frecuencia de las frecuencias instantáneas de los modos intrínsecos y los puntos de colores indican la localización de una amplitud probable en este plano.

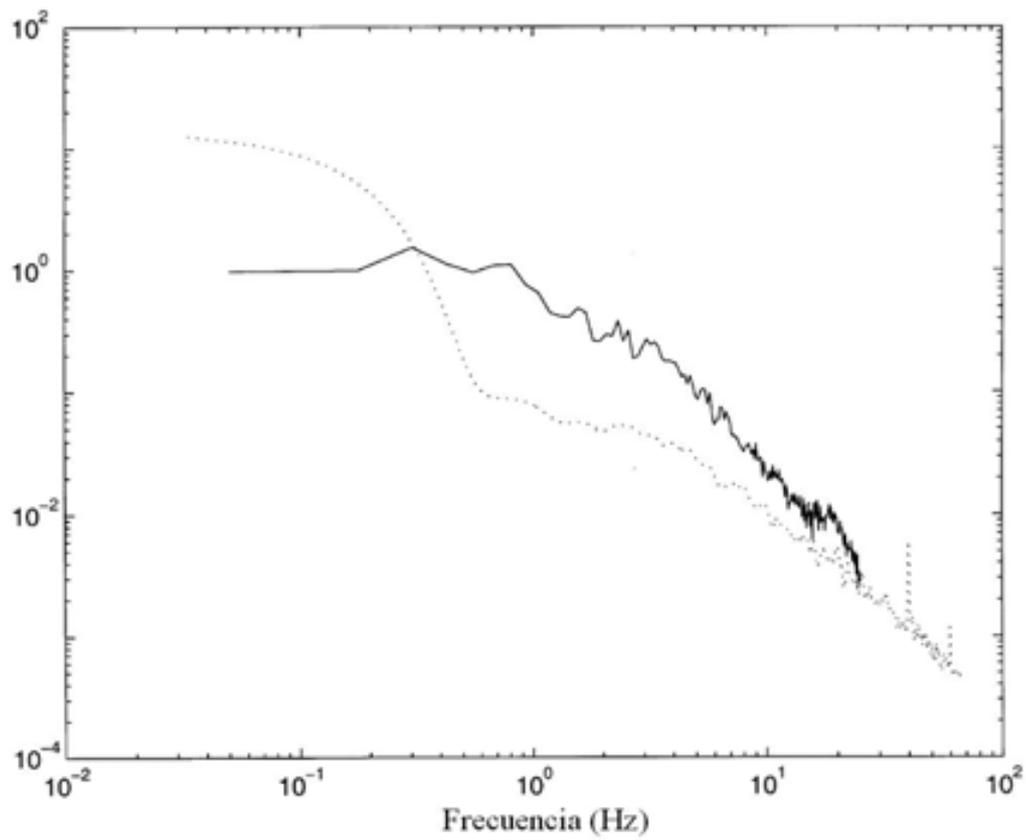


Figura 2.9: El espectro marginalizado de Hilbert-Huang está en la línea continua y el espectro con transformada de Fourier con la línea punteada, (Huang et al., 1998).

y compararlo con el que se obtiene de la transformada de Fourier. Para una serie no estacionaria y no lineal, se muestran ambos espectros en la Figura 2.9, donde la línea punteada representa el espectro de la transformada de Fourier y la línea continua el espectro marginalizado de la transformada de Hilbert-Huang.

Nótese que ambos espectros siguen la misma tendencia general, aunque su parecido es escaso: El espectro marginalizado de Hilbert-Huang tiene amplitudes más grandes y presenta más características locales que el que se obtuvo con el de la transformada de Fourier.

Se puede medir el carácter no estacionario de una serie de datos con la transformada de Hilbert-Huang (Huang et al., 1998). Para esto, se utiliza tanto el espectro marginal $h(\omega)$ como el instantáneo $H(t, \omega)$ de la siguiente forma:

$$\eta(\omega) = \frac{h(\omega)}{T} \quad (2.27)$$

donde T es la longitud del intervalo de tiempo en que se define la serie, entonces el carácter estacionario de la frecuencia ω es menor en la medida en que el siguiente índice es diferente de cero:

$$DS(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{H(\omega, t)}{\eta(\omega)} \right) dt \quad (2.28)$$

que es la marginalización en el tiempo de los espectros instantáneos normalizados por la energía total por cada frecuencia.

El carácter no estacionario en ciertas frecuencias se presenta por ejemplo cuando se observa que de la serie de tiempo, una pequeña ondícula está sobrepuesta a otra más grande como si fuera un “chipote”, lo cual es también característico de que la serie es no lineal.

Este es una característica que puede convertirse en problema y que se describe en la siguiente sección.

2.5 Ejemplos de la transformada de Hilbert-Huang

Para mostrar cómo las variaciones en la amplitud pueden causar variaciones en la frecuencia se utiliza la siguiente función, la cual es característica del modelo de atenuación que se cita en muchos artículos y patentes (González y Chamers (1993); Janssen et al. (1985); Kolsky (1956); Taner (1983) y (2003); Tonn (1991); Rickett (2008)):

$$X(t) = \exp(-0.01t) \cos\left(\frac{2}{32}\pi t\right) \quad (2.29)$$

En la Figura 2.10a se muestra la forma que tiene esta función en el dominio del tiempo, así como la descomposición espectral usando la transformada de Hilbert-Huang y con ondículas de Morlet.

Para la descomposición con THH (abreviatura con la que ahora se referirá a la transformada de Hilbert-Huang) se muestran (Figura 2.10b) variaciones de amplitud alrededor de 0.0310, pero esta descripción tan puntual de amplitudes no se encuentra tan localizada al utilizar ondículas de Morlet (Figura 2.10c). Para la imagen que le corresponde, las amplitudes están en amplias regiones del plano tiempo frecuencia en forma de franjas, que para un uso cuantitativo, no se podría decir qué parte de estas bandas es más significativo en comparación de la imagen para el THH.

Este es un efecto del “goteo” que se mencionó anteriormente y que no se tiene con la transformada de Hilbert-Huang, debido a que no se basa en ventanas de datos.

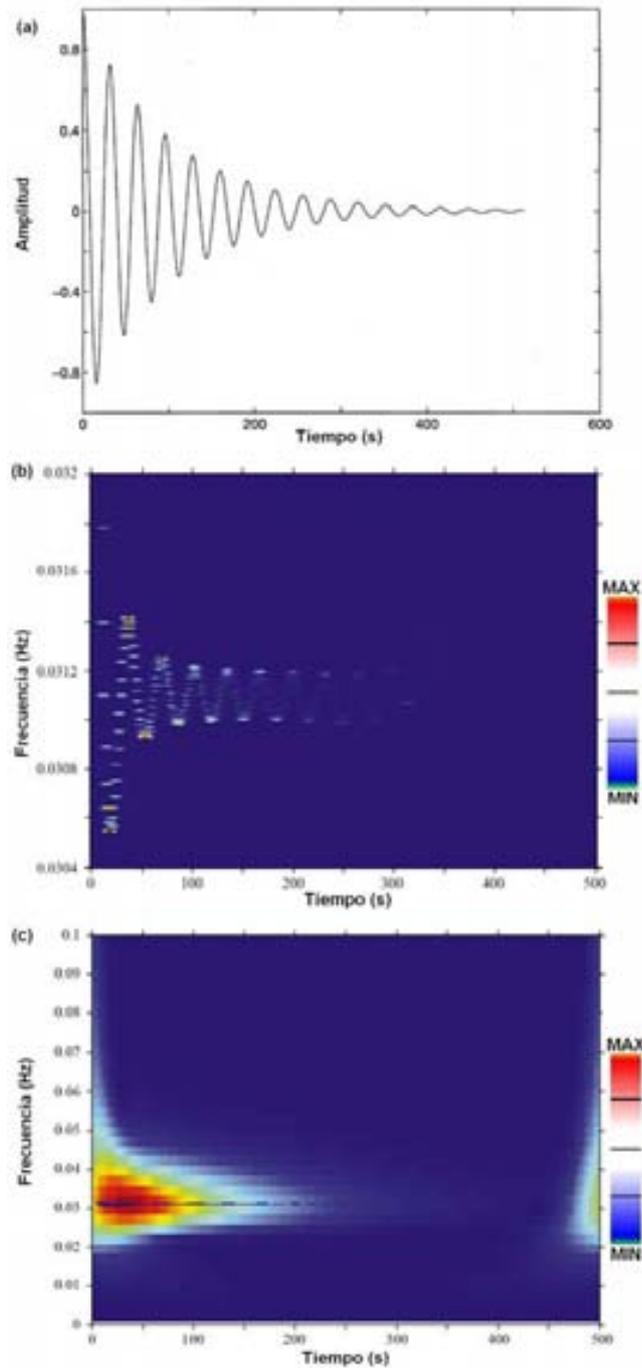


Figura 2.10: (a) La función $X(t) = \exp(-0.01t) \cos\left(\frac{2}{32}\pi t\right)$. (b) Descomposición de Hilbert-Huang. (c) Descomposición con ondículas de Morlet (Huang et al., 1998).

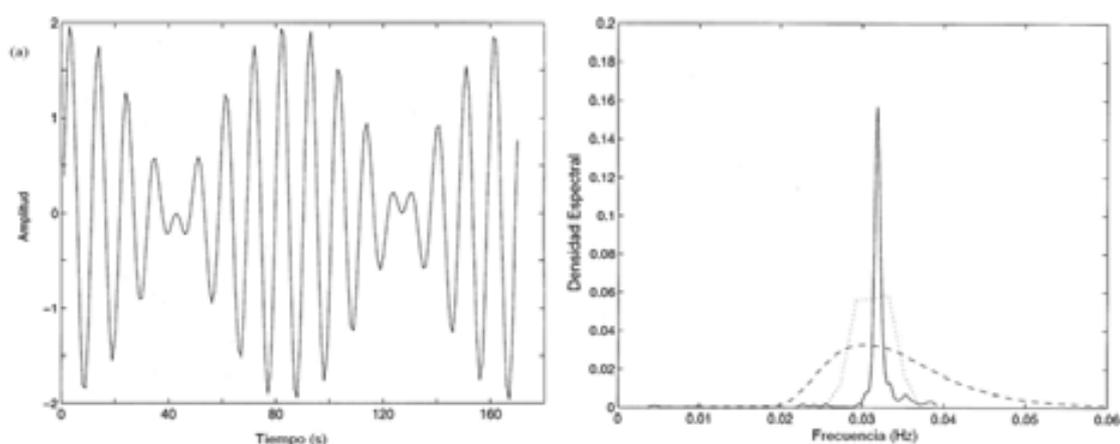


Figura 2.11: (a) La función $X(t) = \cos \frac{2}{30}\pi t + \cos \frac{2}{34}\pi t$. (b) El espectro de Fourier de esta función está en la línea punteada y el espectro marginalizado de la transformada de Hilbert-Huang en la línea continua. Nótese que hay un pico cerca de las dos frecuencias principales de la función analizada. De este pico no se puede distinguir ambas frecuencias, por lo que la resolución del espectro de Hilbert-Huang tiene sus límites. La línea punteada representa el espectro marginalizado de una transformada ondicular de Morlet (Huang et al., 1998).

Para mostrar los límites de resolución, supóngase la siguiente función:

$$X(t) = \cos \frac{2}{30}\pi t + \cos \frac{2}{34}\pi t \quad (2.30)$$

Es la superposición de dos ondículas con frecuencias muy pequeñas y cercanas. La forma de esta función se encuentra en la Figura 2.11. En el panel de la derecha se comparan los espectros marginales de THH (línea continua), de Fourier (línea punteada) y de transformada ondicular (línea de rayas intermitentes).

Se puede notar que el espectro marginal de THH presenta un pico en una frecuencia cercana a la de las ondículas, no tanto así las otras dos curvas. Sin embargo este pico debería ser doble, debido a que se tienen dos frecuencias, pequeñas pero cercanas.

Esta pérdida de resolución se atribuye al uso de splines cúbicos, por lo que queda como un problema abierto concebir un método de interpolación con el fin de mejorar esta clase de resolución.

2.6 Problemas de la transformada de Hilbert-Huang

Se ha concluido a través de muchos experimentos (Huang et al., 1998) que la THH tiene problemas que se clasifican en las siguientes categorías: Con la descomposición de modo intrínseco y con la transformada de Hilbert.

En la primera categoría se encuentran los siguientes:

La descomposición en tiempo-frecuencia es sensible al muestreo de los datos. Se pueden obtener picos en espectro marginal si se utiliza un muestreo más fino que uno más grueso (Battista et al., 2007).

El problema de los chipotes o jorobas de las ondículas que son el resultado del carácter no lineal de los datos. En la Figura 2.12a y b se muestra un caso de este tipo. Al encontrar los extremos locales con derivadas, estos

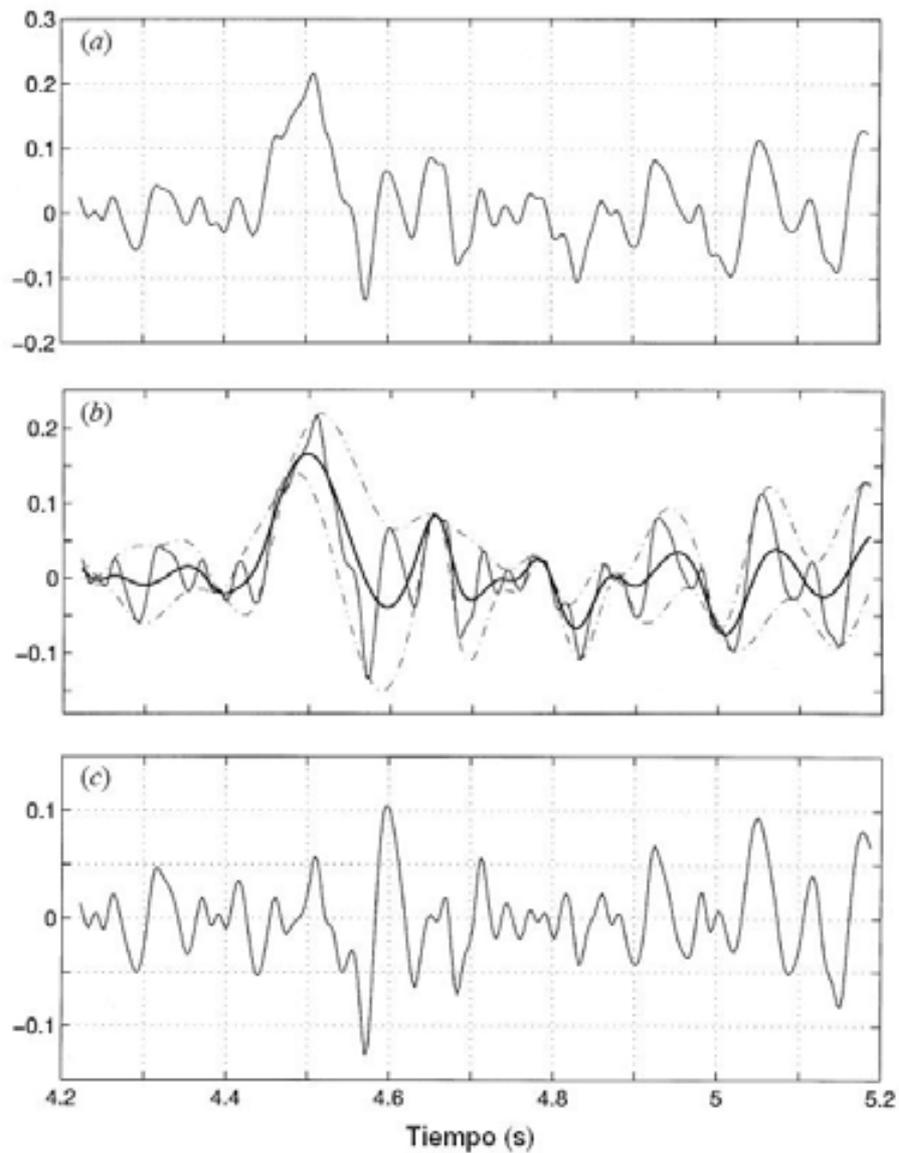


Figura 2.12: Una ilustración del problema de las “jorobas”: (a) Una serie de de datos dada. (b) La envolvente inferior y superior son calculadas. Poner atención entre el tiempo 4.4 y 4.5 donde se puede ver que la serie original está casi afuera de las envolventes. (c) El promedio de la envolventes se substraee a la serie original. El caso de (b) ahora se convierte en un máximo local (Huang et al., 1998).

extremos son difíciles de localizar debido a que siguen la tendencia de los datos. De modo que al interpolarlos para determinar las envolturas y restar su promedio, estas jorobas se exageran y puede ser que en una función de modo intrínseco se conviertan en extremos locales que no sean contenidos en la envoltura máxima y mínima. Esto se puede apreciar en la Figura 2.12.

Para resolver esta situación, Battista et al. (2007) proponen el criterio de que se ha detectado esta situación si la distancia entre máximos locales (una apreciación de la frecuencia dominante local) difiere mucho de la frecuencia dominante global.

Es decir, que si se ha determinado en toda la serie la media y la desviación estándar de la distancia entre máximos locales, se tiene una joroba cuando la distancia entre los máximos locales difiere de la media en a lo más dos veces la desviación estándar.

En este caso, se interpolan localmente los datos con un polinomio cúbico, que al evaluarlo se obtienen valores que sustituyen a los datos originales.

Este problema también se debe al uso de splines cúbicos, los cuales tienen problemas de interpolación al principio y al final de la serie de tiempo (produce funciones de curvatura muy exagerada), por lo que se menciona la posibilidad de usar otro método de interpolación.

Los problemas con la transformada de Hilbert se relacionan con su exactitud. No es única la manera en que puede determinarse la parte imaginaria de una traza, pero sólo con la transformada de Hilbert se tiene una serie analítica.

El método para calcularla es mediante la transformada de Fourier de la traza real, haciendo cero las amplitudes para frecuencias negativas, duplicando las positivas y regresando al dominio del tiempo con la transformada inversa.

Se puede considerar este proceso como un filtrado a la frecuencia de corte

cero, de modo que podrían obtenerse fenómenos de Gibbs si este corte es abrupto. Es por ello que se usan suavizaciones al corte de frecuencia que podría incluir partes pequeñas del espectro negativo, por lo que no se obtendría una cuadratura no del todo exacta.

Esta situación se describe en el teorema de Nuttall (1966), donde se establece una cota del error entre la cuadratura exacta y la transformada de Hilbert:

$$\Delta E = \int_0^T |C_q(t) - C_h(t)|^2 dt \quad (2.31)$$

Huang propone una cota del error de una transformada de Hilbert al marginalizar por el tiempo la amplitud instantánea de la serie normalizada por los valores de la envolvente interpolada por los valores máximos de la serie de tiempo. Entonces, el error es la diferencia de esta marginalización y la unidad.

Existe otro problema con la transformada de Hilbert y que está relacionado con la transformada del producto de funciones.

La traza real se puede expresar en términos de los atributos instantáneos:

$$X(t) = A(t) \cos(\theta(t)) \quad (2.32)$$

De modo que la transformada de Hilbert de este producto será:

$$H(A(t) \cos(\theta(t))) = A(t)H(\cos(t)) \quad (2.33)$$

De acuerdo al teorema de Bedrosian (1963) esta expresión es válida bajo dos condiciones:

1. Que los espectros de las funciones $A(t)$ y $H(\cos(t))$ no se traslapen en el dominio de la frecuencia.
2. Que la extensión del espectro de la primera función $A(t)$ sea mayor que el de la segunda función $\cos(\theta(t))$.

Esto implica que la amplitud instantánea deberá cambiar lentamente para que la transformada de Hilbert sea válida. Este es un inconveniente teórico que al solventarlo podría mejorar los resultados de la THH.

Una solución es normalizar los datos originales, es decir, determinar su envolvente máxima al interpolar los máximos con splines cúbicas y normalizar los datos por esta envolvente, y luego determinar la transformada de Hilbert al resultado. De esta manera, se restringe el dominio de la amplitud instantánea a que no cambie en un intervalo no mayor que el $[0, 1]$

La transformada de Hilbert-Huang, a diferencia de otras técnicas, se basa en la derivación de la fase, por lo que los problemas de la derivación para datos con ruido también le podrían estar relacionados.

2.7 Aplicaciones de la transformada de Hilbert-Huang

Básicamente se ha usado para filtrar datos al reconstruirlos hasta cierto número de función de modo intrínseco.

En Battista et al. (2007) se prueba la THH en datos con mucha y casi nula componente de ruido. Si el ruido no es importante, el filtrado con THH y con un filtro pasabajos no muestran mucha diferencia, pero si la componente de ruido es mayor, las imágenes con el THH son más nítidas.

Con el número de extremos locales de las funciones de modo intrínseco se han propuesto metodologías para calificar la clase ruido (fraccional o gaussiano) que se tiene en los datos (Flandrin y Goncalves, 2004). Con esta idea, Huang propone una técnica para determinar la relevancia estadística de las funciones de modo intrínseco (Wu y Huang, 2004).

Magrin-Chagnolleu y Barakiuk (1999) demostraron también que los datos sísmicos se pueden filtrar con las funciones de modo intrínseco, y mostraron evidencia de esto en imágenes de secciones cruzadas.

Capítulo 3

Capas delgadas

La detección de capas delgadas es un tema importante en el tratamiento de datos sísmicos de exploración. Los yacimientos localizados en trampas estructurales se están agotando, por lo que en los últimos años, ha sido importante estudiar los yacimientos de gas atrapadas en capas delgadas de roca porosa delimitadas por capas de roca de propiedades físicas contrastantes que evitan la migración.

La migración es el problema que consiste en el movimiento de los hidrocarburos hacia otras localidades en el subsuelo y que dificultan su explotación.

Sin embargo, la resolución de los datos sísmicos tienen un límite para detectar estas capas.

Se ha demostrado (Widess, 1973; Robertson, 1988; Partyka, 2001; Marfurt y Kirilin, 2000) que esta resolución está en función de la frecuencia dominante de las ondas sísmicas (de 30 a 50 Hz), de la relación de señal a ruido y del grosor de las capas que se desea detectar (menores a 30 m), y de acuerdo al tipo de roca del que estén formadas, al contraste de impedancias que proporcionen.

De entre los factores que se acaban de enumerar, uno de los más importantes es maximizar el contenido de frecuencias al adquirir y procesar de los

datos sísmicos.

En general, se ha encontrado que la capa más delgada que puede distinguirse con ondas sísmicas es a lo más un cuarto de la longitud de onda dominante (Robertson, 1984).

Esto se traduce en varios metros de espesor del medio rocoso, como más adelante se explicará, y lo cual resulta bastante burdo en comparación del muestreo que se hace con registros de pozo, donde se toman mediciones en el orden de los centímetros.

Es por ello, que un tema de investigación importante es mejorar la resolución de las imágenes sísmicas.

Entre los métodos que se han utilizado para detectar capas delgadas, se tienen los siguientes:

- Medición del tiempo entre picos y valles de las ondículas, así como de las amplitudes (Partyka, 2000).
- Métodos basados en la transformada de Fourier (Partyka et al., 1999).
- Detección de capas delgadas por medio de la descomposición espectral (Marfurt y Kirlin, 2001).

Se hablará en términos generales de estas técnicas, con especial énfasis en aquellas que usan descomposición espectral, y en especial de la transformada de Hilbert-Huang, con la cual se construyen un par de atributos sísmicos para detectar capas delgadas.

Para identificar capas delgadas se han empleado procesos de inversión, en los que se determinan las impedancias acústicas y los coeficientes de reflexión, y en los que se integra también los registros de pozo, pero en opinión del personal en el IMP que trabajan en este campo, se concluye que la ganancia en resolución es a lo más 30 %, y depende en buena parte del contenido de frecuencias que tengan los datos sísmicos.

3.1 Modelo de cuña

Los métodos que se exponen a continuación se basan en la suposición de que una capa delgada consiste en un tipo de roca con espesor pequeño (menor a 30 m, dependiendo de la longitud de onda dominante), y que tiene propiedades físicas que contrastan con las capas que la delimitan por su parte superior e inferior. Para simplificar, se supone que estas capas delimitadoras tienen las mismas propiedades físicas.

Esta situación se modela con un par de índices de reflexión que representan el contraste de impedancia entre la capa delgada y su límite inferior y superior. En un caso práctico, se supone una capa de arena encasquetada en dos de arcilla. En esta situación, los índices de reflexión serán 0.05 y -0.05 para el ímite superior e inferior.

La diferencia en tiempo entre estos índices es una variable que se utiliza para modelar el espesor de la capa. Estos índices, con su diferencia en tiempo, se convolucionan con una ondícula de Ricker (a alguna frecuencia dominante) con el fin de crear una traza sintética.

En muchas investigaciones reportadas en la literatura, se construyen una serie de trazas sintéticas donde la diferencia en tiempo de los índices de reflexión es decreciente, esto modela una capa que se hace gradualmente delgada.

Si se yuxtaponen las trazas que de esta manera se construyen, forman visualmente con sus amplitudes una cuña, por lo que a este conjunto se le llama modelo de cuña (Figura 3.1).

Los métodos para detectar capas delgadas utilizan este modelo de cuña con algunas variantes:

- Los índices de reflexión superior e inferior no sólo difieren en signo, sino también en magnitud, con lo cual se modela que la capa superior de-

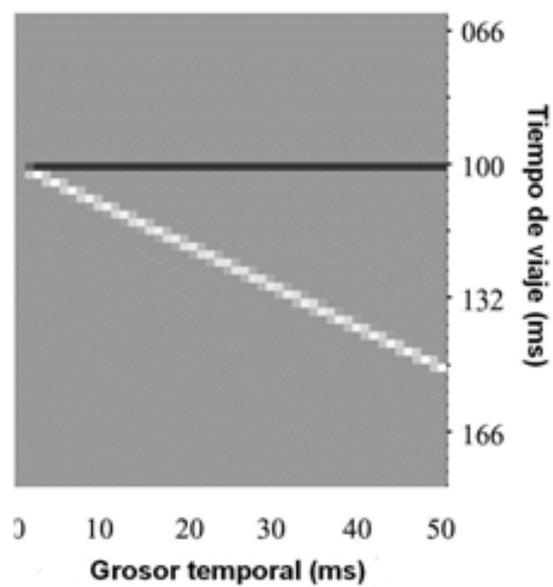


Figura 3.1: Un modelo de cuña (Partyka, 2000). Con dos índices de reflexión cuya diferencia en tiempo se hace decreciente se modela una capa de roca cuyo espesor se hace más pequeño. Visualmente, este modelo tiene forma de una v rotada 90 grados, es decir, de cuña, de ahí su nombre.

limitante tiene una impedancia acústica diferente de la capa delimitante inferior.

- Cambio de la frecuencia dominante de las ondículas de Ricker, como 20, 30, 45 y hasta 50 Hz.

3.2 Método de Widess

Widess (1973) modeló la reflexión de ondículas sísmicas en los límites superior e inferior de la capa para ilustrar cómo su respuesta sísmica puede cambiar en función de su espesor.

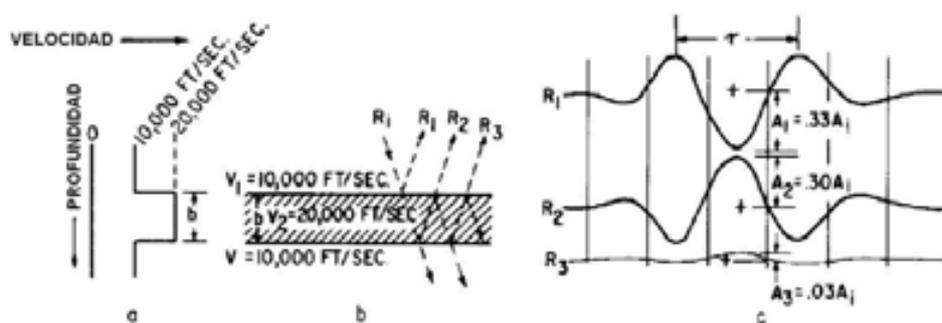


Figura 3.2: Efecto del grosor de la capa en las reflexiones: (a) Esquema de una capa de roca, marcada con la letra “b”, cuya velocidad es de 20,000 piés/seg. Esta capa está delimitada en profundidad por otra capa cuya velocidad es de 10,000 piés/seg. (b) El frente de onda marcado con “R1” se refleja de tres maneras en esta capa: Al reflejarse en el primer contraste de velocidades (marcado también con “R1”), al reflejarse en el segundo contraste de velocidades (marcado con “R2”), y al reflejarse en el primer contraste y volver a reflejarse en el segundo contraste, lo cual se marcó con “R3”. (c) Ondículas que resultan de estos reflejos. Los ondícula R3 es la interferencia de R1 y R2. R3 es casi cero por ser el resultado de la suma de ondículas de fase casi opuesta (Widess, 1973).

En la Figura 3.2a se muestra un esquema de las velocidades de una capa,

y en la Figura 3.2b las reflexiones en esta capa en su límites superior, inferior y el primer múltiple. En la Figura 3.2c se muestra que al reflejarse en cada límite de la capa, las ondículas cambian en fase y en tiempo.

Estas reflexiones interfieren entre sí (es decir, se suman) y el resultado se muestra en la Figura 3.2c denotada como R3.

La diferencia de fase y de tiempo hace que al interferirse se tenga como resultado:

- Que en las partes donde las fases de la ondículas reflejantes son del mismo signo, la interferencia suma las amplitudes (fase constructiva).
- Que en las partes donde las fases sean de signo opuesto, la interferencia reste amplitudes (fase destructiva).

Es curioso destacar que Widess plantea que este proceso de interferencia se pueda considerar como si se obtuviera la derivada de la ondícula incidente, y esto se justifica al comprender que la diferenciación es la resta de una función en un valor de su variable y en otro en una vecindad.

En la Figura 3.3a se muestran superpuestas las ondículas reflejadas, con una diferencia ligera en tiempo y en fase. La diferencia numérica de estas ondículas se muestra en la curva inferior (Figura 3.3b).

Si esta curva es la derivada, entonces sus cruces con cero indican los extremos locales de la ondículas a la que se aplica. Estos cruces indican un máximo local si la ondícula diferencia va de signo positivo a negativo y es un mínimo local si el cruce es desde valores negativos a positivos. De esta manera, puede entenderse que la ondícula diferencia y las ondículas de la que se calcula tienen fase casi opuesta. Mientras la ondícula diferencia tiene una forma de S acostada, las otras ondículas tienen una forma de M.

En la Figura 3.4 se muestran las ondículas reflejadas en los límites de una capa cuyo grosor está en función de fracciones de la longitud de onda

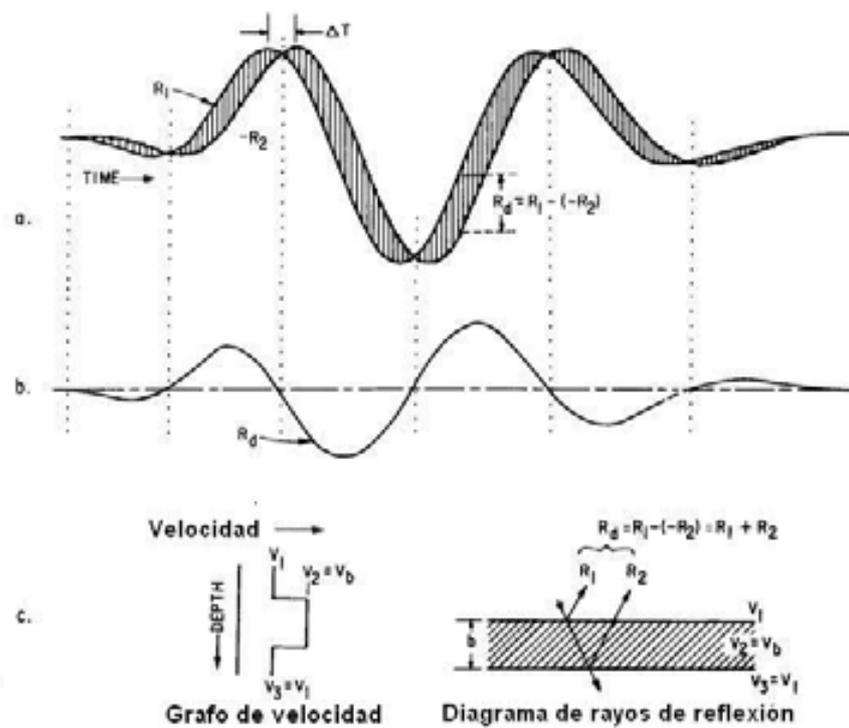


Figura 3.3: (a) Dos ondículas con diferencia de tiempo Δt (b) La diferencia de estas ondículas. (c) Simulación de una capa delgada, las velocidades V_1 y V_3 se supone que son iguales y un esquema de las reflexiones en esta capa (Widess, 1973).

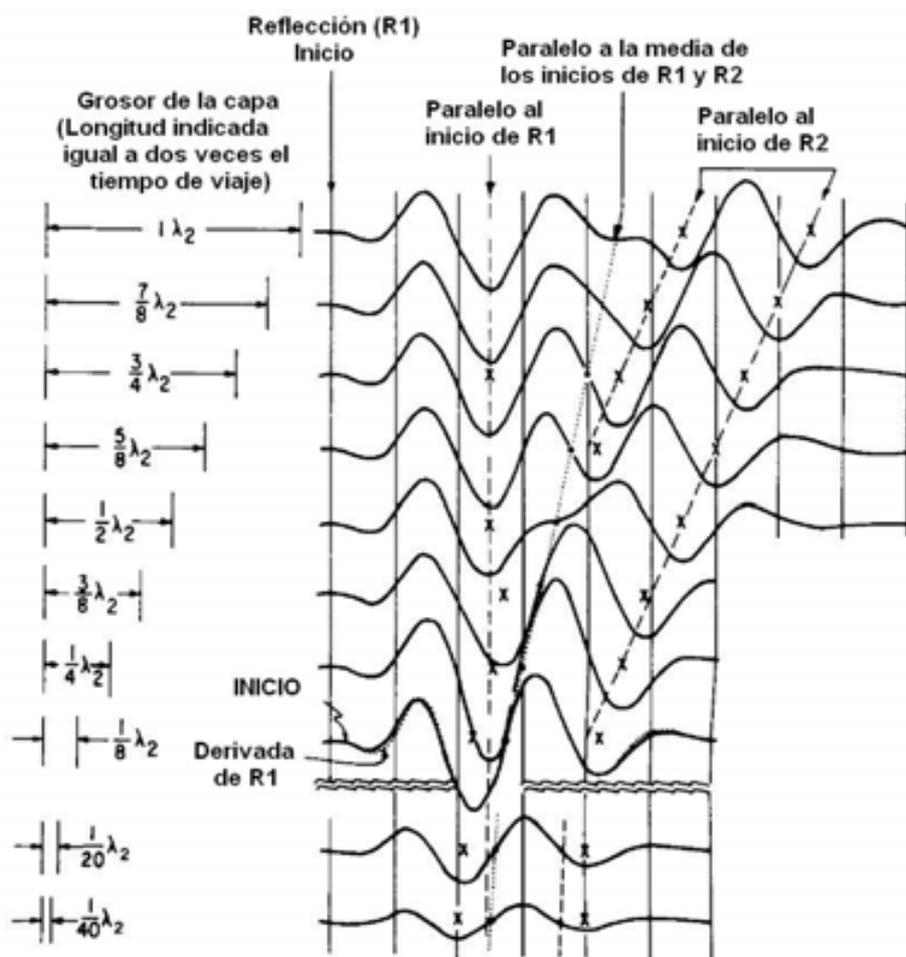


Figura 3.4: Forma y tiempo relativo de la reflexión compuesta como una función del grosor de la capa. Las cruces marcan los tiempos de los valles. Los círculos marcan tiempo de cero amplitud (“centro” de la reflexión compuesta). b = grosor de la capa, τ = periodo predominante de la ondícula incidente, λ_2 = longitud de onda dentro de la capa ($\lambda_2 = V_{2\tau}$). Las amplitudes para reflexiones compuestas son relativas a la misma ondícula incidente R_i (Widess, 1973).

dominante. Para fracciones grandes (más de la mitad), la ondícula tiene semejanza en su primera mitad con la reflexión R1 en el límite superior de la capa y en la segunda mitad con la ondícula R2 que es la reflexión en el límite inferior.

A medida que la capa se hace más delgada (tendiendo a la mitad) se manifiesta más la interferencia de estas reflexiones y la semejanza que se mencionó deja de percibirse. Se puede observar que para un grosor de la mitad de la longitud de onda dominante, esta interferencia casi anula la amplitud a la mitad de la ondícula, y finalmente, la amplitud se resalta a un grosor de un cuarto. En el primer caso, las ondículas reflejadas se interfieren en fase destructiva y en el segundo caso en fase constructiva.

A medida que el grosor es más pequeño, la ondícula reflejada se parece más a la derivada de la ondícula que incide en la capa. Esto se manifiesta más a un grosor de un octavo de la longitud de onda dominante donde se ha superpuesto la derivada de la ondícula incidente con un línea punteada. Para grosores aún menores puede verse que la amplitud tiende a decrecer.

Widess hace un análisis de la amplitud en función del grosor de la capa y concluye que: La amplitud es directamente proporcional al grosor e inversamente proporcional a la longitud de onda dominante.

Partyka (2000) utiliza esta aseveración y plantea un método para apreciar el grosor de una capa delgada. Para ello, debe suponerse que las ondículas tienen fase cero y que se tiene alta relación de señal a ruido. De las trazas se extraen dos atributos:

1. La diferencia en tiempo entre pico a valle.
2. La amplitud máxima.

Con un modelo de cuña se extrajeron estos atributos, lo cuales se muestran en la Figura 3.5 en función del grosor de la capa. Puede notarse que

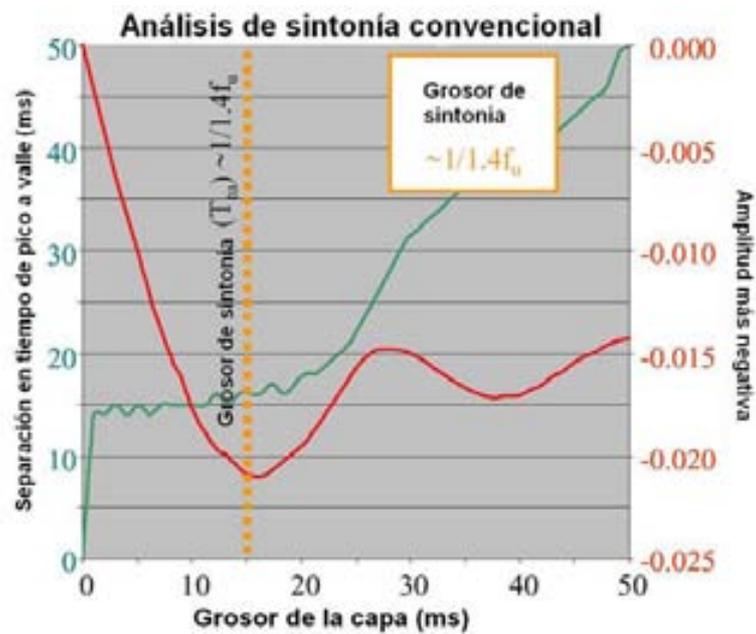


Figura 3.5: La amplitud se puede usar para cuantificar el grosor que es menor que el grosor de “sintonía”. La separación del pico al valle se puede usar para cuantificar el grosor que es más grande que el grosor de sintonía (Partyka, 2000).

para grosores mayores que un cuarto de la longitud de onda dominante, la diferencia en tiempo entre pico y valle es más sensible, pero para grosores menores, es mejor utilizar el atributo de amplitud máxima.

3.3 Respuesta de los atributos instantáneos en capas delgadas

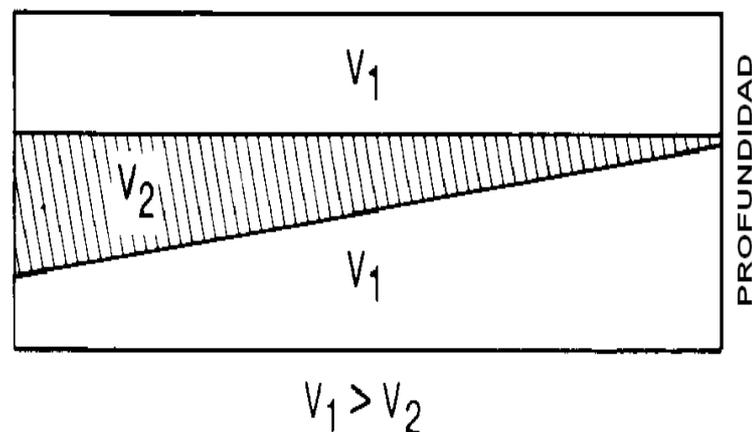


Figura 3.6: El modelo de cuña de Robertson (1984 y 1988). La parte sombreada representa una capa de roca con velocidad V_2 y cuyo grosor disminuye hacia la derecha. Una capa de velocidad V_1 delimita a esta capa tanto en su parte inferior como superior. Este modelo supone que $V_1 > V_2$.

Para estudiar los límites de observación para una capa delgada con atributos instantáneos, Robertson (1984 y 1988) construye un modelo de cuña (Figura 3.6) similar al de Widess, y al conjunto de trazas que resultan se les calcula su traza analítica y con ella, sus atributos instantáneos de amplitud, fase y frecuencia.

En la Figura 3.7 se observa en escala de colores (siendo el rojo nivel más

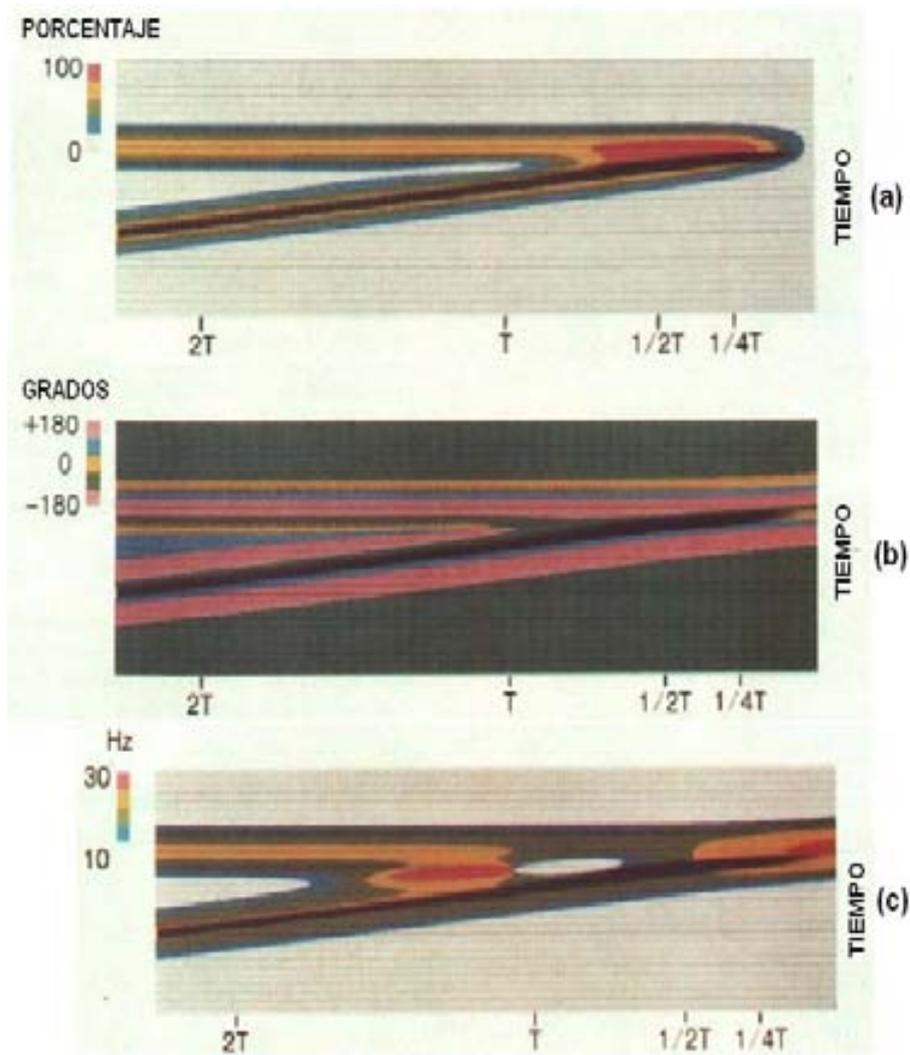


Figura 3.7: Atributos del modelo de cuña de la Figura 3.6. (Robertson, 1984, 1988): (a) A un grosor de un cuarto de la longitud de onda dominante, La amplitud instantánea en la cuña empieza a decaer. (b) La fase instantánea es invariante al grosor de la capa. (c) A un grosor de un cuarto de la longitud de onda dominante, la frecuencia instantánea empieza a crecer en la cuña.

alto y azul el más bajo) las gráficas que se obtuvieron.

La dimensión horizontal en esta figura se denota con fracciones de la longitud de onda dominante, λ , donde

$$\lambda = \frac{c}{\omega_d} \quad (3.1)$$

donde c es la velocidad de fase de la capa y ω_d es la frecuencia dominante de la ondícula de Ricker que se utilizó para construir este modelo.

Se puede decir lo siguiente para cada atributo:

- Con la amplitud instantánea se pueden distinguir los contrastes de impedancia para espesores que van desde la mitad hasta un cuarto de la longitud de onda dominante.
- Para valores menores que un cuarto se aprecia que la amplitud decae, lo que puede atribuirse a que las capa producen reflexiones en sus límites que empiezan a interferirse en fase destructiva.
- Por el contrario, los valores de la frecuencia instantánea empiezan a aumentar a medida que el espesor de la capa es menor que un cuarto de la longitud de onda dominante.
- La fase instantánea muestra la estructura de esta cuña sin importar su espesor.

3.3.1 Atributo de capas delgadas

Taner (1998) define el atributo de capas delgadas como:

$$\text{Thin bed} = \bar{\omega} - \omega(t_r) \quad (3.2)$$

La frecuencia promedio se calcula con

$$\bar{\omega} = \frac{\sum_T \omega(t) A(t)}{\sum_T A(t)} \quad (3.3)$$

donde la suma corre en una ventana de extensión T alrededor del tiempo de referencia t_r , $\omega(t)$ es la frecuencia instantánea y el factor de ponderación es la amplitud instantánea $A(t)$.

La diferencia (Ecuación 3.2) expresa la desviación de la frecuencia instantánea de la frecuencia promedio. En el pico de la ondícula ambas frecuencias deberían ser las mismas (White, 1991), lo cual es la base de los atributos llamados de “respuesta”, pero esta desviación es diferente de cero en la medida que la frecuencia instantánea aumenta (como en una capa delgada) o que disminuya (como en un bright spot, al indicador que los analistas llaman de baja frecuencia y alta amplitud instantánea que se asocia por lo general a la presencia de gas (Ebrom, 2004; Taner et al., 1979)).

3.4 Detección de capas delgadas con transformada de Fourier

Las ondículas que forman una traza son el resultado de la convolución de una ondícula y los coeficientes de reflexión que delimitan los estratos. Este proceso, que se muestra en la Figura 3.8, tiene una componente de ruido, que no se elimina por completo en el procesamiento de los datos sísmicos.

Para estudiar las características en frecuencia de una capa delgada, Partyka (1999) menciona que al determinar el espectro de potencias de un intervalo de tiempo en una traza, se puede detectar la interferencia que producen las capas:

- Si se toma un intervalo grande de tiempo de la traza, se toman más capas, cuyo grosor tiende a estar distribuido aleatoriamente. De modo que el

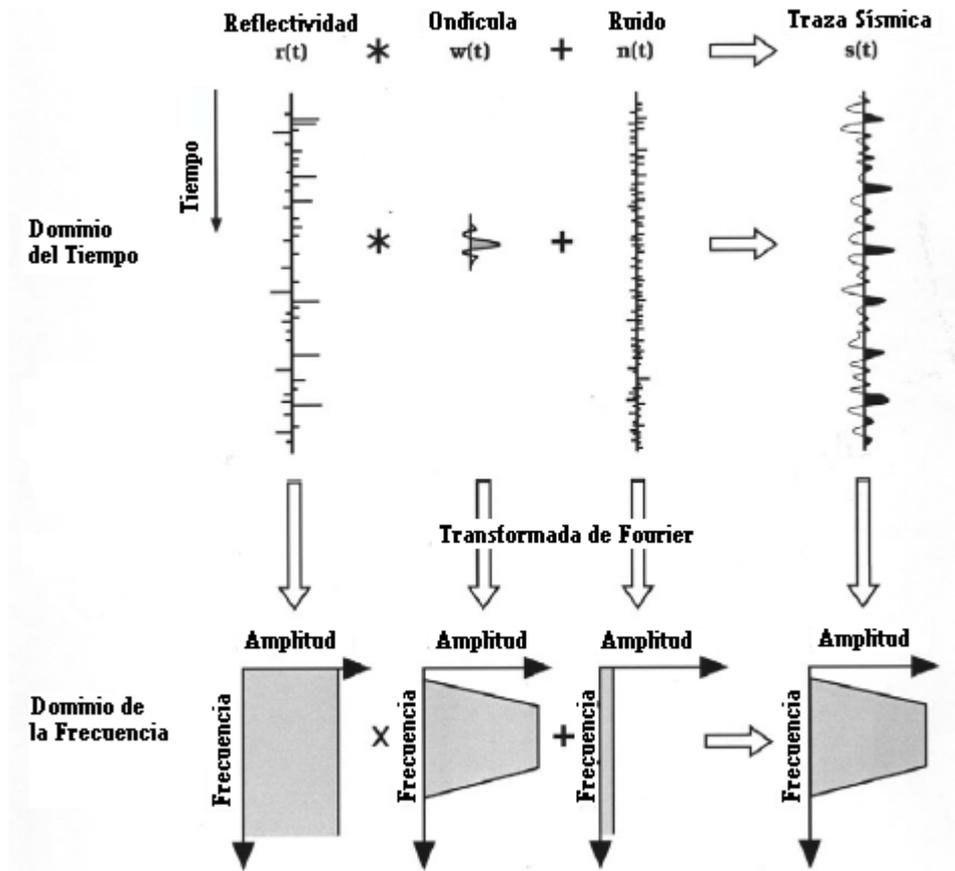


Figura 3.8: Una traza sísmica es el resultado de: La convolución de los coeficientes de reflexión y una ondícula, al cual se le agrega una componente de ruido. Este proceso se muestra de izquierda a derecha. En la parte inferior se muestra el contenido de frecuencias de estas componentes: El espectro de los índices de reflexión es plano, y la ondícula se puede considerar como un filtro pasabandas, mientras que el ruido tiene un espectro de baja amplitud que puede distribuirse por todo el rango de frecuencias (Partyka, 1999).

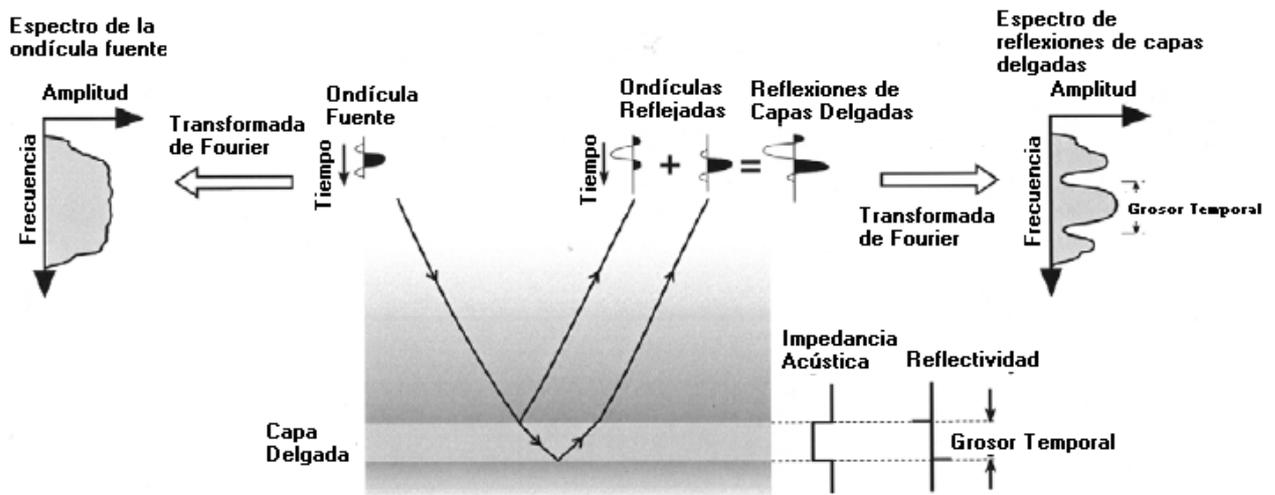


Figura 3.9: En la parte central se muestra una ondícula que se refleja en los contrastes de impedancia de una capa. Dichas reflexiones se interfieren para producir la ondícula resultante. El espectro de la ondícula original se muestra a la izquierda, y a la derecha se muestra el espectro de la ondícula que resulta de la interferencia de las reflexiones. Puede notarse que este espectro tiene dos mínimos locales a los cuales se conoce como muescas (notches). La diferencia en la frecuencia en que ocurren estos mínimos está en proporción inversa al grosor de la capa en donde se refleja la ondícula (Partyka, 1999).

espectro de potencias tiende a ser plano.

- Si se toma un intervalo pequeño, se consideran pocas capas, o inclusive una, y entonces el espectro de potencias tendrá muescas (notches) que son indicativos del grosor de la capa (Figura 3.9).

Con estas observaciones se puede concluir que el análisis de capas delgadas debe realizarse en intervalos pequeños.

En la Figura 3.10 se muestra un modelo de cuña, en donde se han dispuesto coeficientes de reflexiones de signo opuesto a diferencias de tiempo que tienden a decrecer, con el fin de estudiar la resolución.

La convolución de una ondícula con estos coeficiente resulta en trazas sintéticas que se analizan con transformada de Fourier.

En el último panel de la Figura 3.10 se muestra el espectro de potencias de cada traza. Los patrones que muestra son decaimientos de amplitud que forman patrones en forma de muescas (notches) para cada uno de los espectros de las trazas.

Se puede observar que estas muescas tienen un periodo en frecuencia más grande a medida que la capa se hace más delgada, esto es, que el periodo de la muesca es inversamente proporcional al grosor de la capa.

Como los espectros se repiten periódicamente en el eje de las frecuencias, el recíproco del periodo de la muesca es una frecuencia.

De modo que una capa es más delgada si la frecuencia de las muescas es baja.

Antes de usar este criterio, los espectros pueden suavizarse con algún filtro en el dominio de la frecuencia con el fin de que las muescas sean más nítidas y se pueda distinguir mejor su periodo (ver Figura 3.11, Partyka, 2000).

Partyka usa un filtro Ormsby, que es un filtro de forma trapezoidal cuyas esquinas se especifican por cuatro frecuencias f_1, f_2, f_3, f_4 . El filtro rechaza

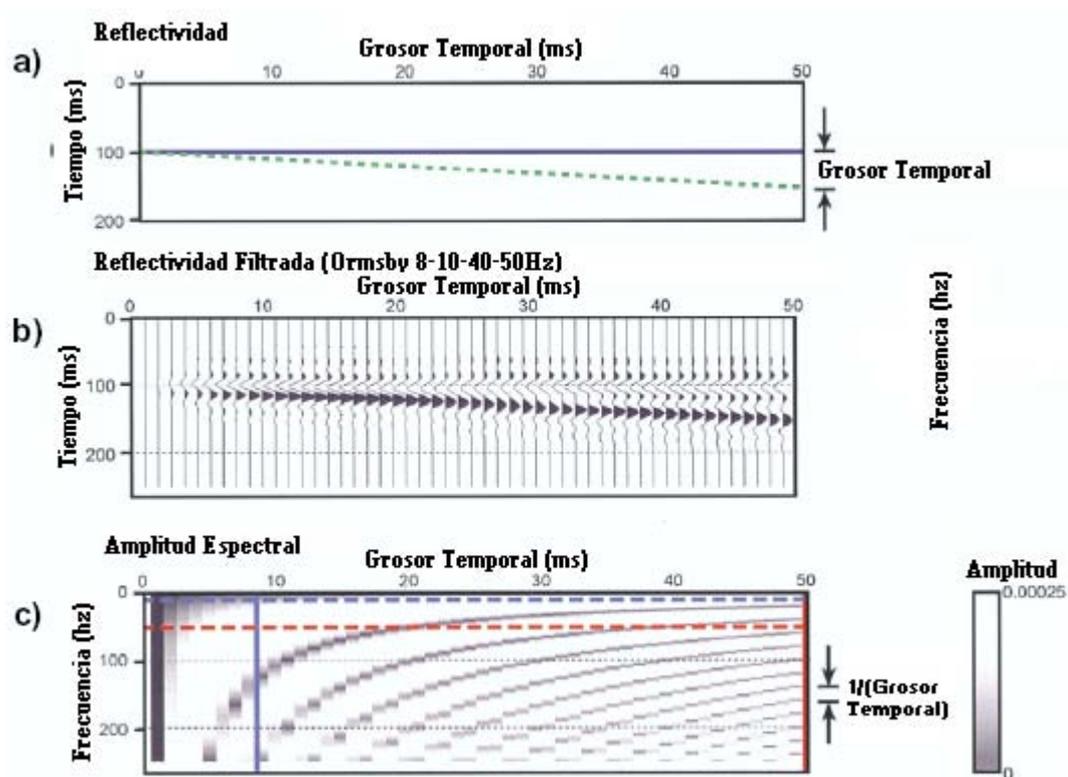


Figura 3.10: (a) Modelo de cuña: Dos coeficientes de reflexión de signo opuesto cuya diferencia en tiempo decrece a la izquierda. (b) Las trazas sintéticas que resultan de convolucionar estos coeficientes y una ondícula. (c) Representa el espectro de potencias de cada traza determinados por la transformada de Fourier. Las curvas representan los mínimos locales en estos espectros que tienden a estar más cercanos a medida que la capa se hace más gruesa (Partyka, 1999).

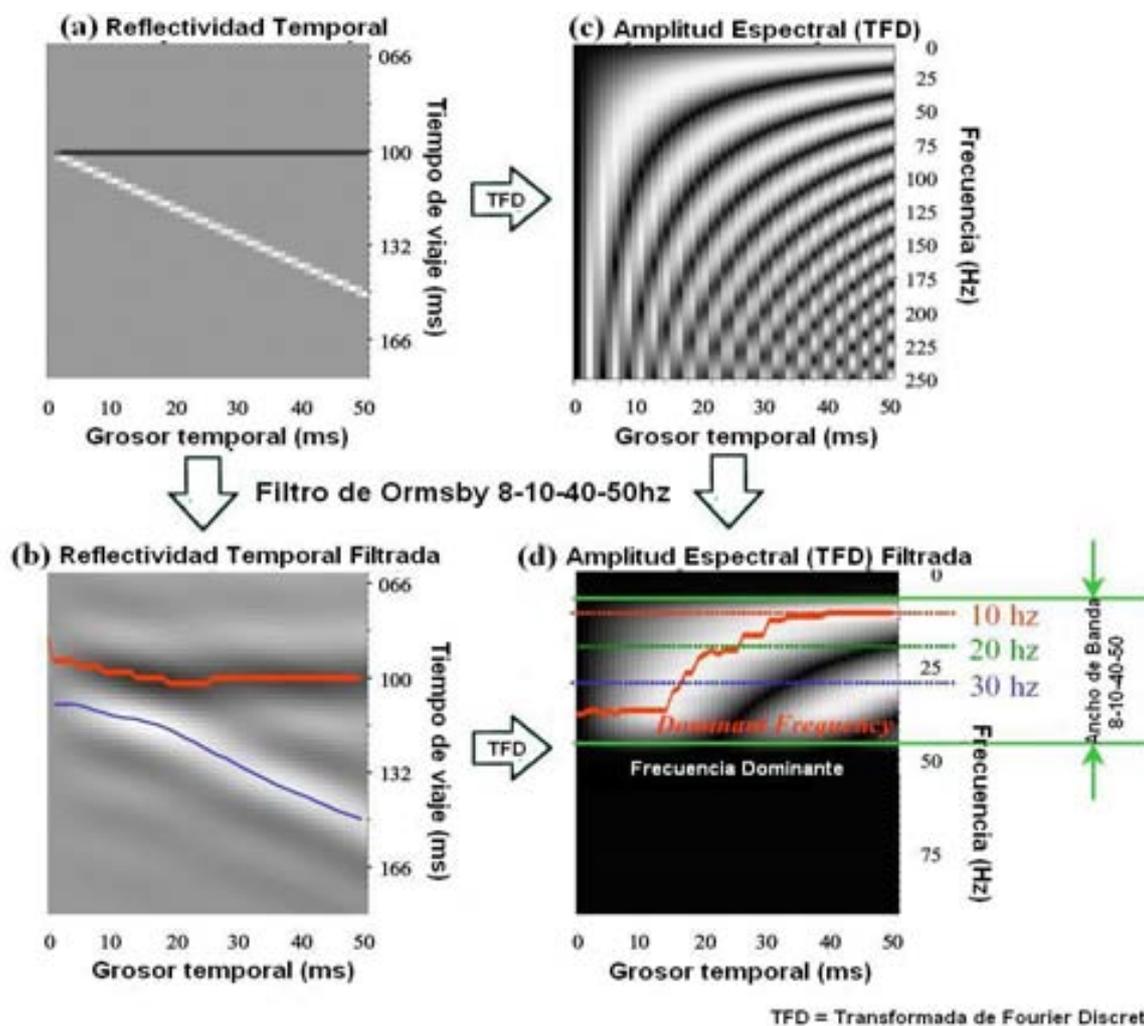


Figura 3.11: (a) Muestra la reflectividad de la cuña (blanco es amplitud positiva, negro es amplitud negativa). (b) Muestra la version filtrada de la reflectividad de la cuña en (a) (c) Muestra la transformada discreta de Fourier de las trazas que comprende la reflectividad de la cuña en (a) (blanco es amplitud alta, negro es amplitud baja). (d) Muestra la transformada de Fourier de la cuña filtrada en (b). (Partyka, 2000). Con color rojo se delinea la amplitud alta que corresponde a la frecuencia dominante.

aquellas menores que f_1 , y mayores que f_4 , es lineal de f_1 a f_2 y de f_3 a f_4 , y plana de f_2 a f_3 (Sheriff, 2002).

3.5 Detección de capas delgadas con descomposición espectral

Para estudiar estas muescas, Marfurt y Kirilin (2001) proponen una capa modelada por dos coeficientes de reflexión r_1 y r_2 que suceden en los tiempos t_1 y t_2 y separados por una diferencia T , que simula el grosor de la capa.

La función de la reflexión en el tiempo será:

$$g(t, T) = r_1\delta(t - t_1) + r_2\delta(t - t_1 - T) \quad (3.4)$$

En el dominio de la frecuencia se tiene la siguiente función de valores complejos:

$$G(f, T) = r_1 \exp(-ift_1) + r_2 \exp(-if(t_1 + T)) \quad (3.5)$$

donde f es la frecuencia temporal medida en Hertz.

En la Figura 3.12 se muestra una gráfica de la amplitud de la Ecuación (3.5) en función del producto de sus variables. En el primer pánel se muestra el caso cuando $r_1/r_2 < 0$ (que sería el caso de canales de arena delimitados por una matriz de arcilla). Se observa que los mínimos se encuentran en $\omega = (n + 1/2)T$ y los máximos en $\omega = n/T$.

En el segundo pánel se muestra el caso cuando $r_1/r_2 > 0$ donde ahora los mínimos se encuentran en $\omega = n/T$ y los máximos en $\omega = (n + 1/2)T$.

Similarmente, los máximos de la fase $\Phi(\omega, T)$ de la función (mostrada en la Ecuación 3.5) se encuentran con su derivada con respecto a cada una de sus variables:

$$\frac{\partial\Phi(\omega, T)}{\partial\omega} = -T \frac{r_1 r_2 \cos(\omega T) + r_2^2}{2r_1 r_2 \cos(\omega T) + r_1^2 + r_2^2} \quad (3.6)$$

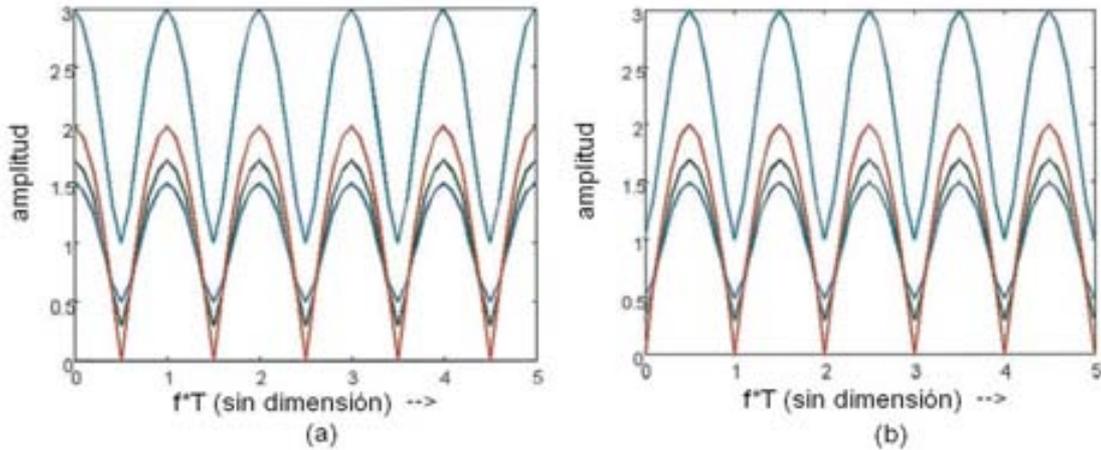


Figura 3.12: (a) Ecuación (3.5) en función del producto de sus variables cuando r_1 y r_2 tienen signos diferentes. (b) Cuando los signos son iguales. (Marfurt y Kirilin, 2001).

$$\frac{\partial \Phi(\omega, T)}{\partial T} = -\omega \frac{r_1 r_2 \cos(\omega T) + r_2^2}{2r_1 r_2 \cos(\omega T) + r_1^2 + r_2^2}$$

En la Figura 3.13(a) se muestran estas derivadas parciales en función del producto de sus variables y para diferentes valores de $|r_1/r_2|$. A medida que el radio se hace uno, la función tiene picos más pronunciados y es casi plana para radios mucho mayores que uno.

En las figuras 3.13(b) y 3.13(c) se muestran en un mapa de contornos las derivadas de la fase en función del tiempo y la frecuencia para un radio $|r_1/r_2|$ de 1.25 y 1.75, respectivamente. Se observan patrones de la misma familia pero con diferentes grosor.

Con estas bases, Marfurt y Kirilin proponen una serie de atributos sísmicos para detectar capas delgadas basados en la descomposición espectral.

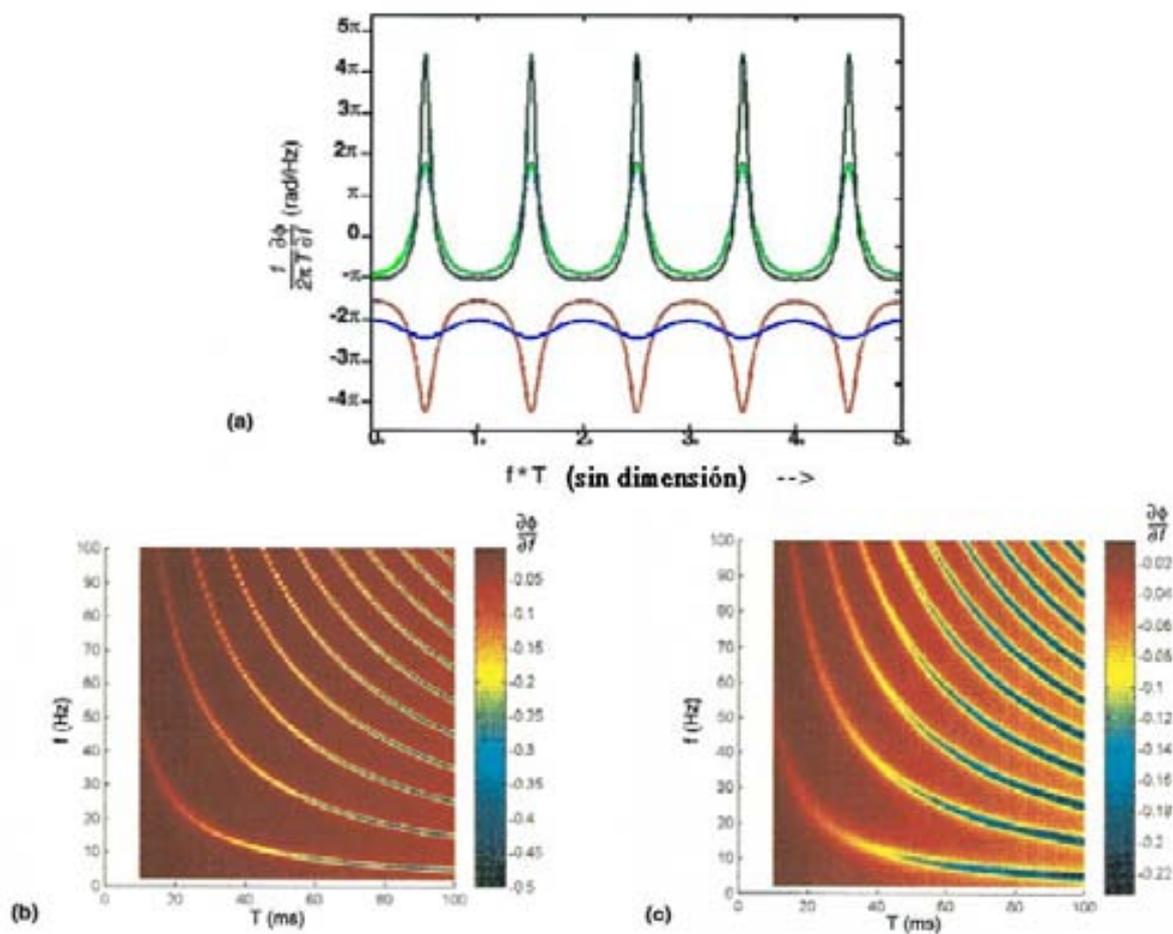


Figura 3.13: (a) La derivada de la fase con respecto a la frecuencia en función del radio r_1/r_2 . La curva tiene menos picos a medida que este radio es mayor. En la figura se muestra para las razones 0.5 (verde), 0.7 (negro), 2.0 (marrón), 10.0 (azul). La derivada de la fase con respecto a la frecuencia es una función del tiempo y la frecuencia. En las figuras inferiores se muestra en un plano de contornos esta función para el radio $r_1/r_2 =$ (b)1.25 y (c) 1.75 (Marfurt y Kirilin, 2001).

Para disminuir los efectos del ruido utilizan un conjunto de J trazas adyacentes en el espacio (como en el concepto de bin que se utiliza en los atributos de coherencia) y se descomponen espectralmente.

Sea $C_j(\omega, t)$ el valor complejo en la frecuencia ω y el tiempo t de la descomposición espectral de la traza j para $j = 1, \dots, J$.

Se propone formar un vector de dimensión J con las amplitudes de

$$C_j(\omega, t) = u_j(\omega, t) + iv_j(\omega, t) \quad (3.7)$$

para cada tiempo t y frecuencia ω , los cuales se normalizan por el factor:

$$E^p(\omega, t) = \left[\sum_{j=0}^J u_j(\omega, t)^p + v_j(\omega, t)^p \right]^{1/p} \quad (3.8)$$

donde p es la variable que caracteriza la norma de los vectores. Para $p = 1$ se tiene la norma L_1 , para $p = 2$ la norma L_2 y así sucesivamente, y donde u_j y v_j son la parte real e imaginaria de $C_j(\omega, t)$.

Se encuentra por cada espectro instantáneo las frecuencias donde haya máxima o mínima amplitud:

$$\begin{aligned} a_j^{\text{pico}}(t) &= \max_{\omega} |C_j(\omega, t)| \\ a_j^{\text{valle}}(t) &= \min_{\omega} |C_j(\omega, t)| \\ \omega^{\text{pico}} &= \arg \max_{\omega} |C_j(\omega, t)| \\ \omega^{\text{valle}} &= \arg \min_{\omega} |C_j(\omega, t)| \end{aligned} \quad (3.9)$$

También se calcula el promedio en un rango de frecuencias:

$$a_j^{\text{media}}(t) = \frac{1}{K_2 - K_1 + 1} \sum_{j=K_1}^{K_2} |C_j(\omega_j, t)| \quad (3.10)$$

$$\omega_j^{\text{media}}(t) = \frac{\sum_{j=K_1}^{K_2} \omega_j |C_j(\omega_j, t)|}{\sum_{j=K_1}^{K_2} |C_j(\omega_j, t)|}$$

En la Figura 3.14 se muestra en dos paneles, y para una rebanada de tiempo en un cubo sísmico, el grosor en tiempo T de las capas y la frecuencia donde se predice que habrá un máximo de amplitud por la Ecuación (3.5), $\omega = 1/2T$. Puede notarse que estas imágenes muestran el mismo paleocanal y se puede decir que la frecuencia de la máxima amplitud espectral puede usarse como indicador de los grosores de las capas.

En la Figura 3.15 se muestra el resultado de los atributos de frecuencia de pico, valle y media. Puede notarse que para la imagen de la frecuencia pico, existe una correspondencia con la Figura 3.14b donde se predice el máximo de amplitud con la Ecuación (3.5), lo que indica la utilidad de este atributo. La frecuencia en la que se pueden notar más detalles estratigráficos se le ha llamado de sintonía (“tuning frequency”) (Marfurt y Kirlin, 2001; Castagna, 2003).

La imagen que corresponde a la frecuencia de valle o mínima puede percibirse ruido, por lo que para mitigarlo, es necesaria la normalización por el factor $E^p(\omega, t)$ a la descomposición espectral.

Se puede apreciar en el tercer panel el atributo de frecuencia media calculada entre 10Hz y 70Hz, con lo que la resolución es buena pero no mejor que con la frecuencia pico.

En la Figura 3.16 se muestra las imágenes en planta que resultaron de los atributos de la frecuencia que corresponde a la amplitud máxima, mínima y promedio, donde se puede apreciar que tanto las frecuencias pico como promedio despliegan con claridad los detalles del paleocanal, no tanto así la frecuencia valle, que muestra una imagen contaminada por ruido.

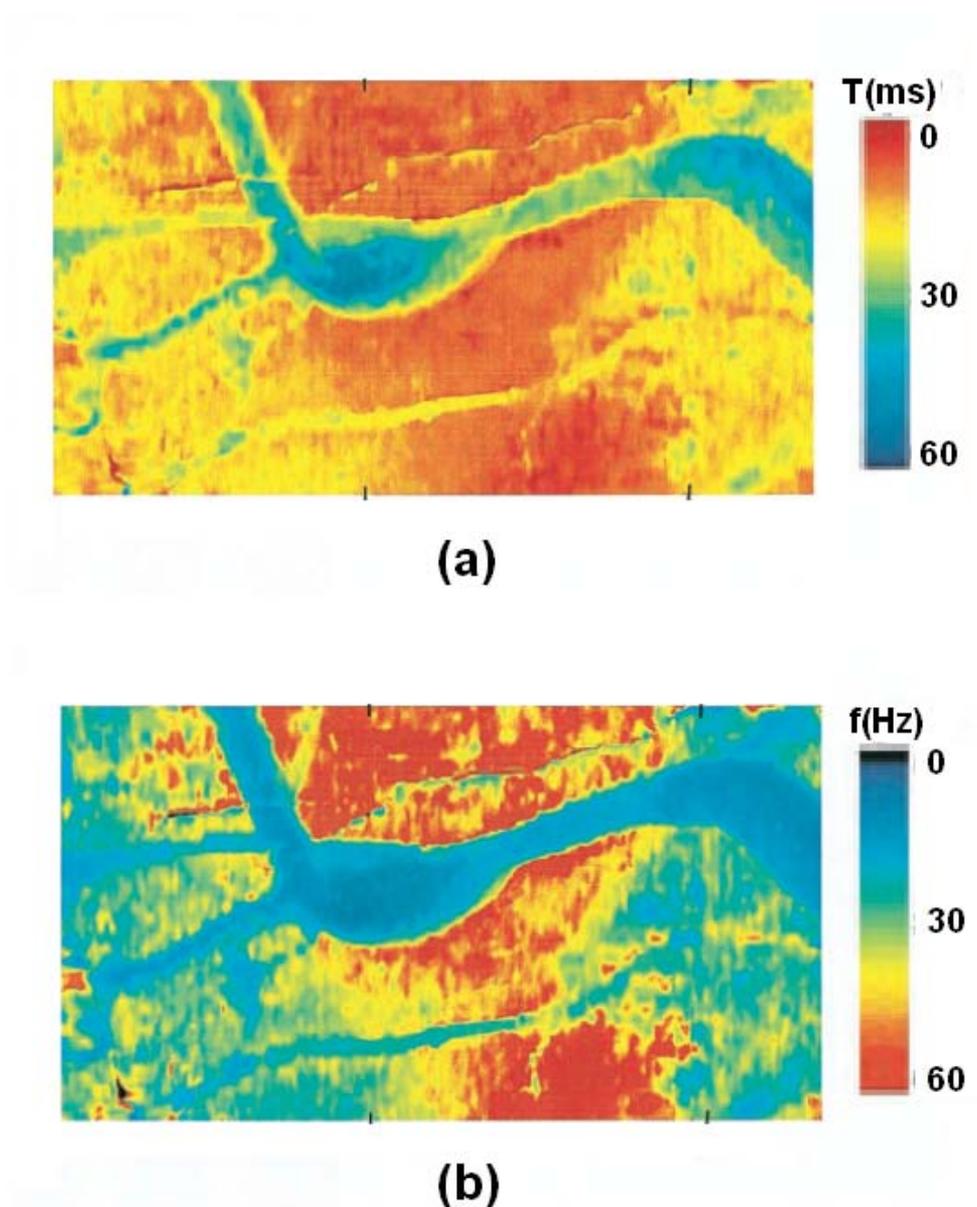


Figura 3.14: Imagen en planta de un cubo sísmico en donde se representa: (a) Grosor de las capas medido en tiempos de incidencia. (b) Frecuencia pico para $f = 1/2T$ y coeficientes de reflexión con $r_1/r_2 = -0.9$ (Marfurt y Kirilin, 2001). El norte de estas imágenes está orientado a la izquierda. El patrón con forma de “Y” rotada 90 grados a la izquierda se interpreta como un paleocanal que se encuentra en este cubo sísmico.

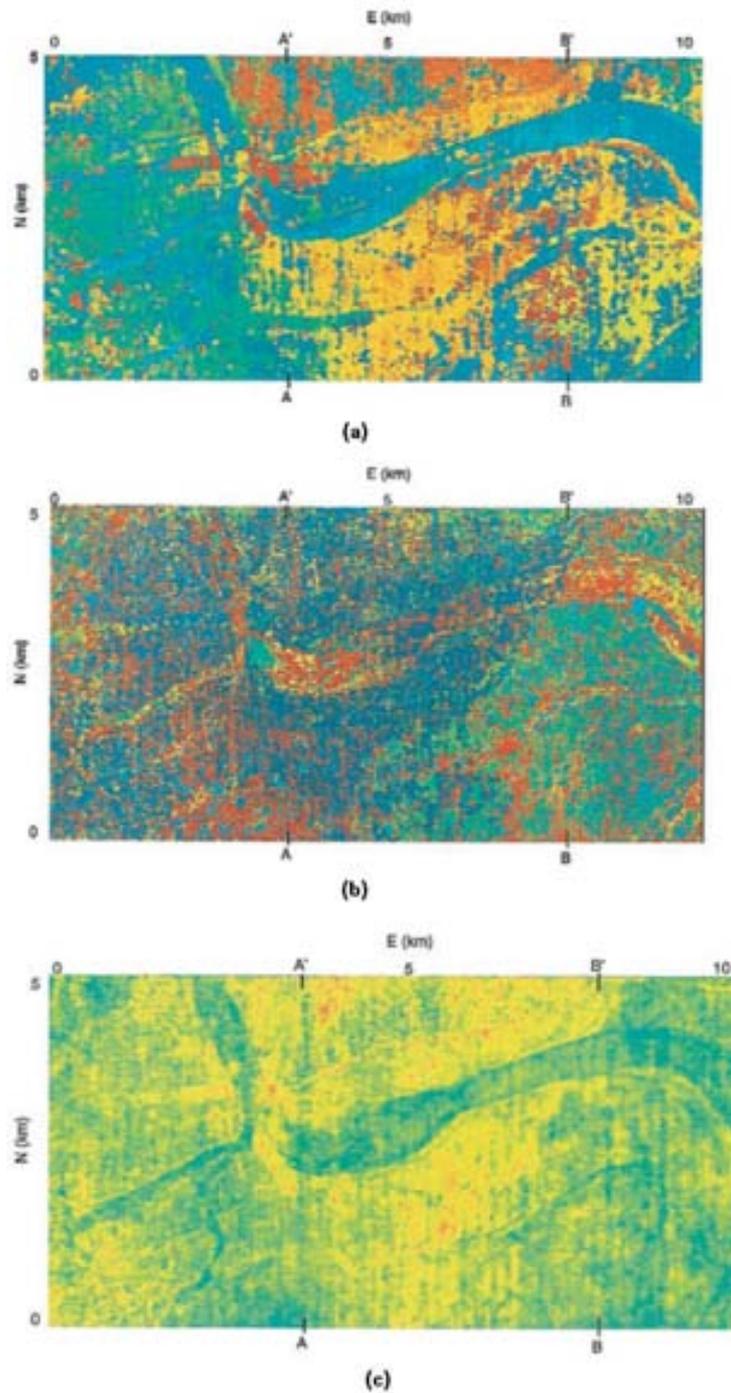


Figura 3.15: Imagen en planta de los siguientes atributos: (a) Frecuencia pico, (b) Frecuencia valle, (c) Frecuencia media, aplicados al mismo nivel de tiempo en que se mostró en la Figura 3.14. (Marfurt y Kirilin, 2001). El paleocanal se puede identificar mejor con la frecuencia pico, mientras que la imagen de la frecuencia valle está contaminada con ruido. El paleocanal se puede identificar en la imagen (c) que resulta de promediar, ponderada por la amplitud, la frecuencia en un intervalo.

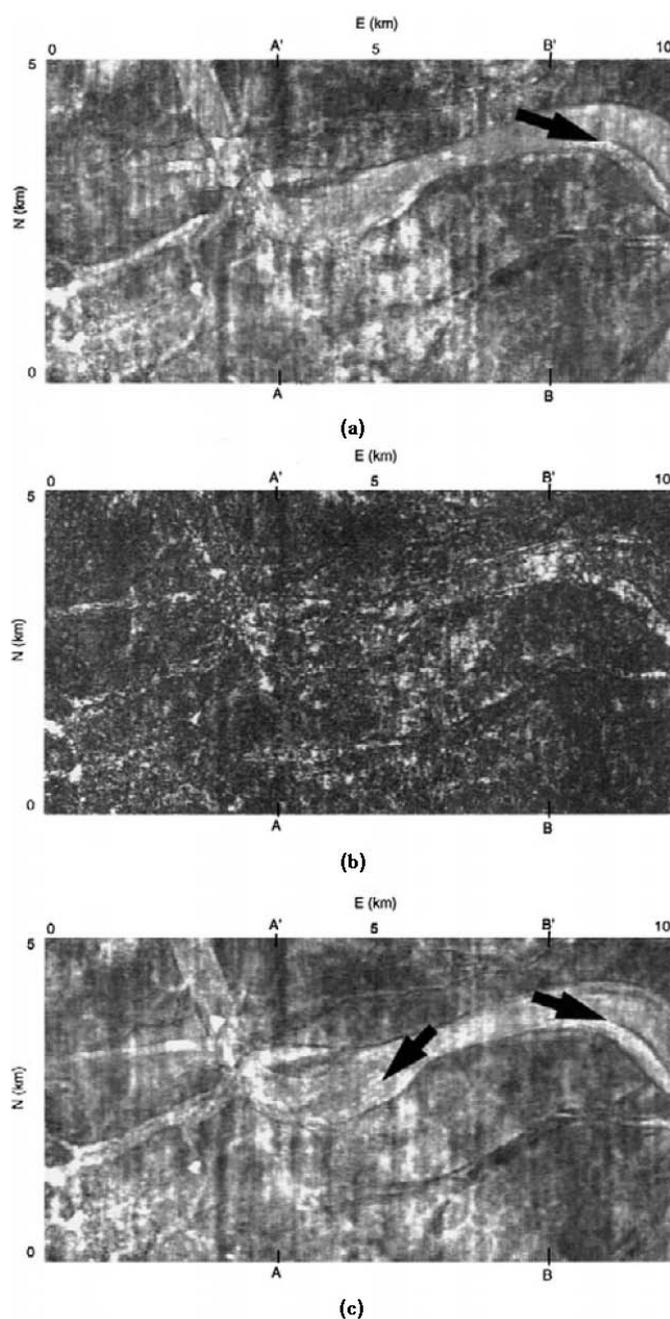


Figura 3.16: Imágenes en planta que resultaron de los atributos de de la amplitud (a) Máxima, (b) Mínima y (c) y promediada en un rango de frecuencias (Marfurt y Kirilin, 2001). El paleoanal se puede identificar con la amplitud máxima de los espectros instantáneos, mientras que este paleoanal escasamente se puede distinguir de la imagen de amplitud mínima. El paleoanal se puede distinguir con el promedio de las amplitudes en un rango de frecuencias tomado de los espectros instantáneos.

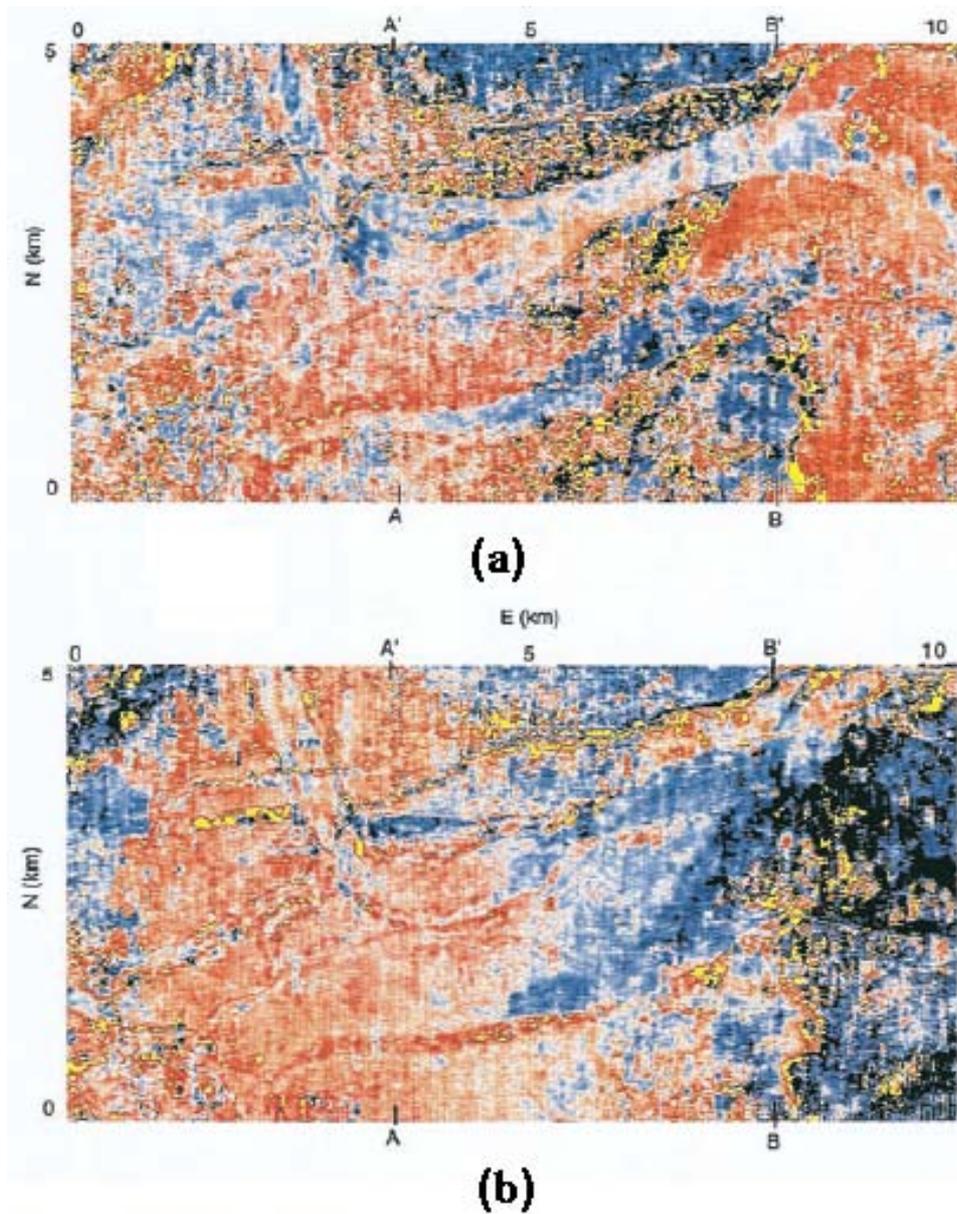


Figura 3.17: Cambio de fase $\partial\Phi(f,t)/\partial f$ evaluada en (a) 25Hz (b) 55Hz. (Marfurt y Kirilin, 2001). Se muestran más detalles estratigráficos en la imagen (b) que en la (a), por ejemplo el paleocanal que se ha mostrado en las últimas figuras, lo que indica que la derivada de la fase de los espectros instantáneos es más significativo en la frecuencia de sintonía.

La fase de los espectros instantáneos no cambia mucho, pero si lo hace sería a la frecuencia de sintonía donde podrán observarse la mayor cantidad de detalles estratigráficos. En la Figura 3.17 se muestra la derivada de la fase a 25Hz y 55Hz, donde en la parte inferior de esta última se puede observar canales que no se observan a 25Hz.

Poco antes de la investigación de Marfurt y Kirilin (2001), Partyka (2000) también utilizó estos atributos para detectar capas delgadas basándose en la descomposición espectral:

1. La amplitud máxima de cada espectro instantáneo (amplitud de la frecuencia dominante).
2. La frecuencia a la que ocurre esta amplitud (frecuencia dominante).

En la Figura 3.18 se muestra la respuesta de estos atributos en función del grosor de una capa. Puede notarse que la amplitud máxima es más sensitiva en grosores menores del grosor que aquí se le llama de “sintonía” (generalmente un cuarto de la longitud de onda dominante). Para grosores mayores, la frecuencia de la amplitud máxima es más sensitiva.

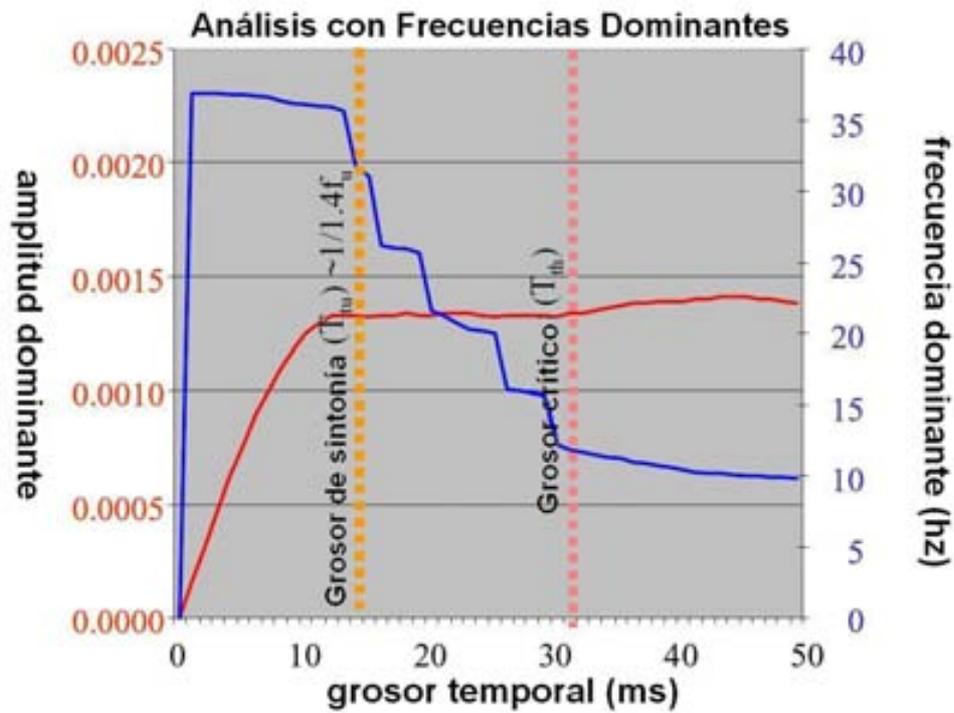


Figura 3.18: La amplitud dominante se puede usar para cuantificar el grosor que es menor del grosor de sintonía. La frecuencia dominante se puede usar para cuantificar el grosor más grande que el grosor de sintonía (Partyka, 2000). La curva roja representa la amplitud máxima del espectro a diferentes grosores. La curva azul es la frecuencia que corresponde a la amplitud máxima. La línea punteada etiquetada con “grosor de sintonía” marca el grosor de la capa a un cuarto de la longitud de la onda dominante. La línea punteada etiquetada con “grosor crítico” representa el espesor a la mitad de la longitud de onda dominante.

3.6 Detección de capas delgadas con la transformada de Hilbert-Huang

Para investigar si la máxima amplitud espectral que se obtiene mediante la transformada de Hilbert-Huang es sensible a las capas delgadas, se construyó un modelo de cuña, a cuyas trazas se aplicó la transformada de Hilbert-Huang (denotada desde ahora como THH), y de los espectros obtenidos, se encontró la máxima amplitud espectral instantánea.

Se construyen las trazas sintéticas suponiendo que se encuentra una capa de arenisca envuelta en dos de roca caliza.

La arenisca tiene una velocidad de 14200 piés/seg y una densidad de 2.4 gr/cm³, mientras que la velocidad de la roca caliza es de 15200 piés/seg y su densidad es 2.7 gr/cm³. Con estos datos se contruyen los coeficientes de reflexión que son 0.091 para el límite superior de la capa de arenisca y -0.091 para su límite inferior.

Las trazas sintéticas se obtuvieron al convolucionar los índices de reflexión con una ondícula de Ricker a 55 Hz.

La Figura 3.19 muestra la sucesión de las trazas sintéticas, donde la diferencia de tiempo entre los índices de reflexión va decreciendo, lo cual simula que la capa se hace gradualmente delgada y con lo que se obtiene el efecto de acuñaamiento.

El grosor de la capa se obtiene mediante dos pasos:

1. Se determina la velocidad V_n de intervalo por medio de la fórmula de Dix:

$$V_n^2 = \frac{\overline{V}_n^2 t_n - \overline{V}_{n-1}^2 t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \quad (3.11)$$

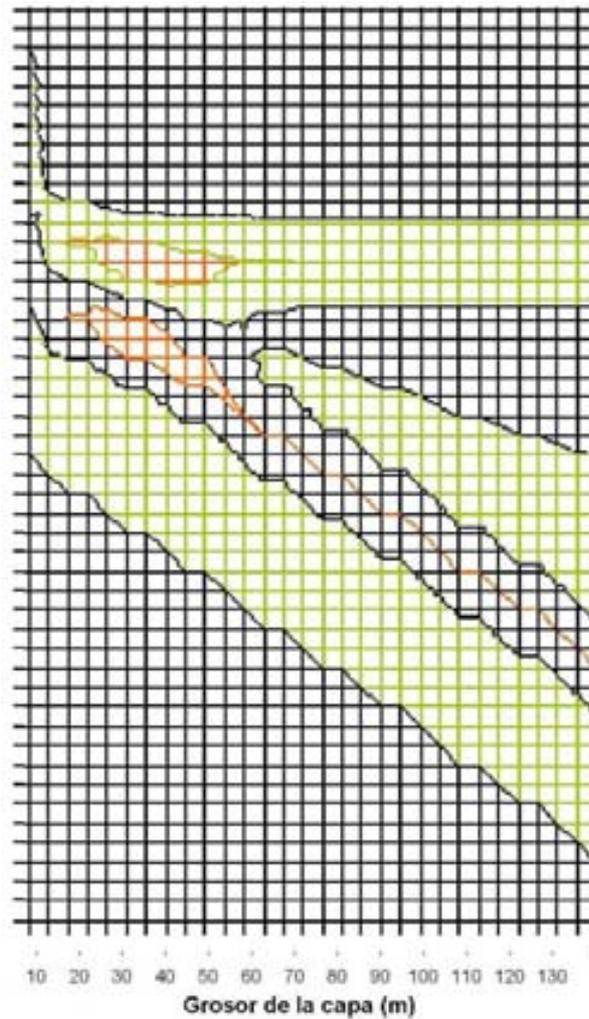


Figura 3.19: Modelo de cuña que resulta de los parámetros en el texto. Al convolucionar los índices de reflexión con una ondícula se simulan una serie de trazas sísmicas construidas a partir de índices de reflexión ubicados de modo tal, que su diferencia en tiempo se hace menor de manera gradual. Visualmente al conjunto de trazas que se construyen de esta manera dan un efecto de acuñaamiento, el cual se muestra en esta figura.

en la que

$$\overline{V}_n^{-2} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2 \Delta_i}{\sum_{i=1}^n \Delta t_i} \quad (3.12)$$

donde Δ_i representa dos veces el tiempo de viaje de la i -ésima capa y v_i su velocidad.

2. El grosor en metros Δd se obtiene al multiplicar la velocidad de intervalo V_i y la mitad del tiempo de viaje Δ_i en una capa:

$$\Delta d = 0.5 \times \Delta_i \times V_i \quad (3.13)$$

La longitud dominante es el cociente de la velocidad de la capa (14200 piés/seg) y la frecuencia dominante (55 Hz) de la ondícula, lo que resulta 258 piés. Un cuarto de esta longitud es el límite teórico de resolución: 64 piés.

En la Figura 3.20 se muestra la máxima amplitud de los espectros obtenidos con transformada de Hilbert-Huang en función del grosor de la capa en piés. Nótese que para grosores menores de aproximadamente 60 piés, la amplitud máxima tiende a decrecer, lo cual indica una pérdida en resolución.

En la misma Figura 3.20 se muestra la gráfica de la frecuencia que corresponde a la máxima amplitud en función del grosor de la capa. A medida que se presentan espesores cada vez menores que el límite teórico, la frecuencia tiende a mantenerse en valores menores en valor absoluto en relación a espesores más grandes. Para capas muy delgadas (menores que 30 piés) la frecuencia tiende a cero, lo que similarmente a la amplitud, se interpreta como pérdida de resolución.

Con el propósito de tener una idea de la capacidad resolutive de la transformada de Hilbert-Huang se comparó con otras transformaciones tiempo-frecuencia y con otros atributos de capas delgadas.

En la Figura 3.21 se muestra la máxima amplitud espectral que se determinó con las transformadas de Wigner y Morlet aplicadas al mismo modelo

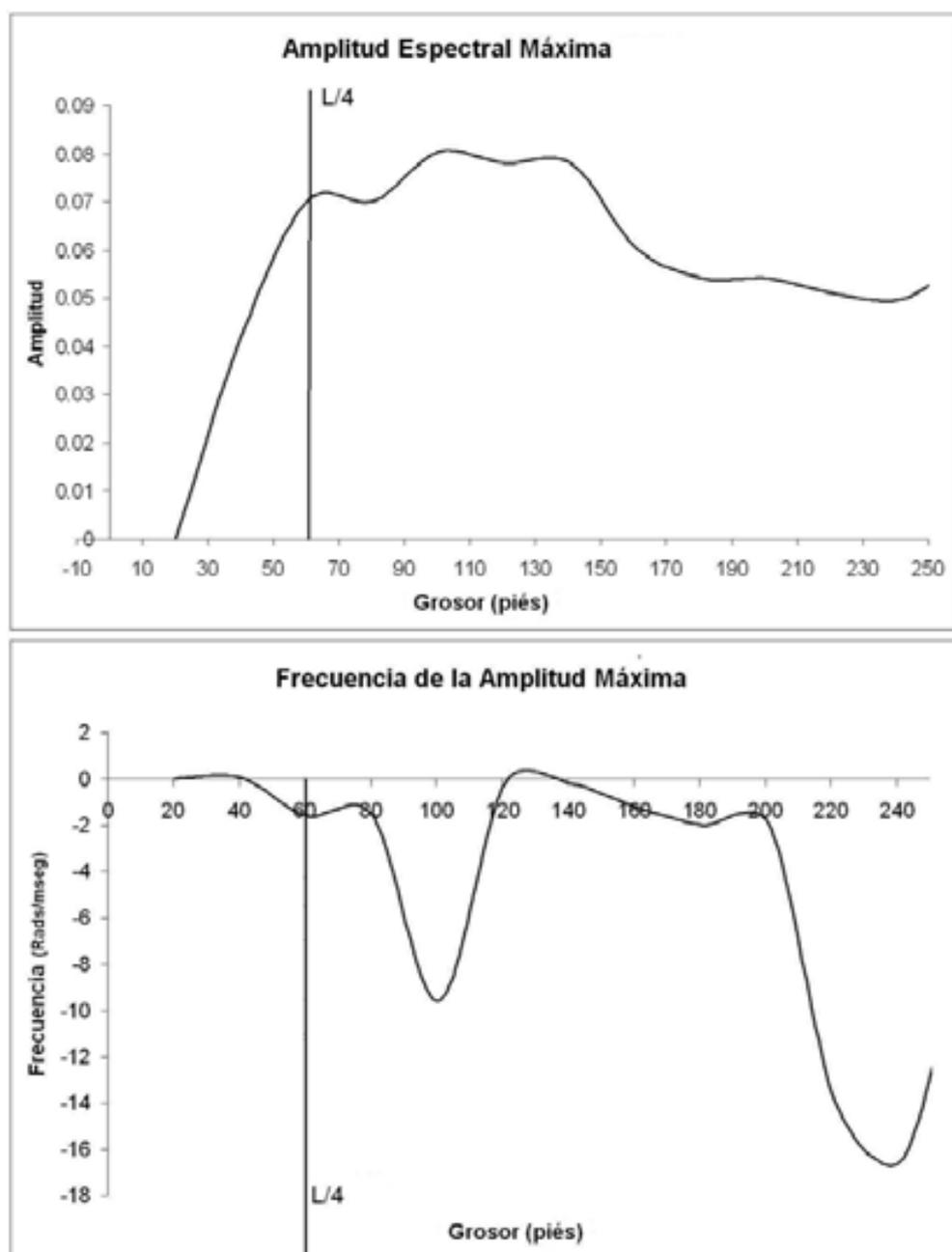


Figura 3.20: Respuesta de la máxima amplitud espectral de la transformada THH y de su frecuencia correspondiente en función del grosor de la capa en metros para el modelo del cuña. La línea marca un cuarto de la longitud de onda dominante, $L/4$, el límite teórico de la resolución de la sísmica.

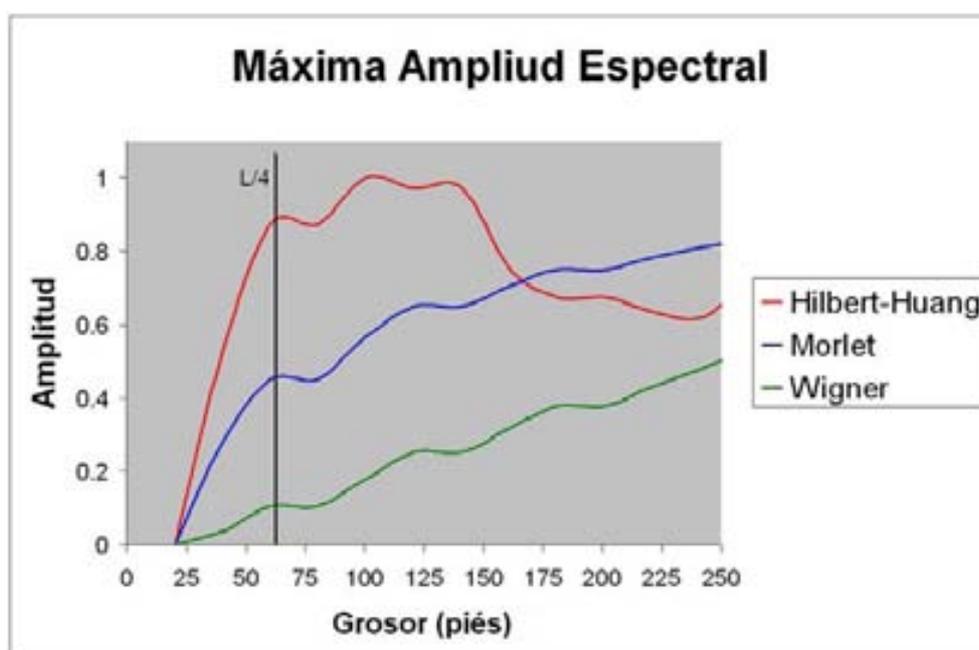


Figura 3.21: Comparación de de la máxima amplitud espectrales de tres descomposiciones tiempo - frecuencia: De Morlet, Wigner y Hilbert-Huang. La línea marca un cuarto de la longitud de onda dominante, $L/4$, el límite teórico de la resolución de la sísmica. En este límite la amplitud espectral debería decaer para todas estas transformaciones, excepto para la de Hilbert-Huang, que se eleva un poco a un octavo de la longitud de onda dominante, para enseguida decaer, lo cual significa una mejora en resolución.

de cuña. En esta gráfica se incluyó también la máxima amplitud espectral de la transformada de Hilbert-Huang. Las amplitudes están normalizadas a la escala que cada transformación produjo.

Las curvas que corresponden a las transformaciones de Wigner y Morlet siguen la misma tendencia al decaer a medida que los espesores se hacen más pequeños. La curva que corresponde a la transformada de Wigner decae más rápido que la de Morlet, y ambas decaen aceleradamente para espesores menores que un cuarto de la longitud de onda dominante.

A este grosor, la amplitud que corresponde a la transformación de Hilbert-Huang empieza a ser mayor, y aunque también decrece a espesores menores, sigue siendo mayor que las otras dos transformaciones, lo que indica una mejora en resolución.

Se probó también la sensibilidad al grosor de las capas con la frecuencia dominante y su amplitud respectiva, atributos que Partyka (2001) menciona y que se mostraron en la Figura 3.18.

Siguiendo sus procedimientos, al construir el modelo de cuña se realizó la transformada de Fourier utilizando la parte de cada traza que sólo incluye a la capa, y de esta transformación se extrajo la amplitud máxima y su frecuencia respectiva. Estos atributos se comparan con la máxima amplitud espectral de la transformada de Hilbert-Huang.

De la Figura 3.22 se puede observar que los atributos de frecuencia dominante siguen una tendencia parecida a la que Partyka (2001) reporta, pero que en comparación con la amplitud de Hilbert-Huang puede concluirse que decaen muy rápido a partir del límite teórico de resolución.

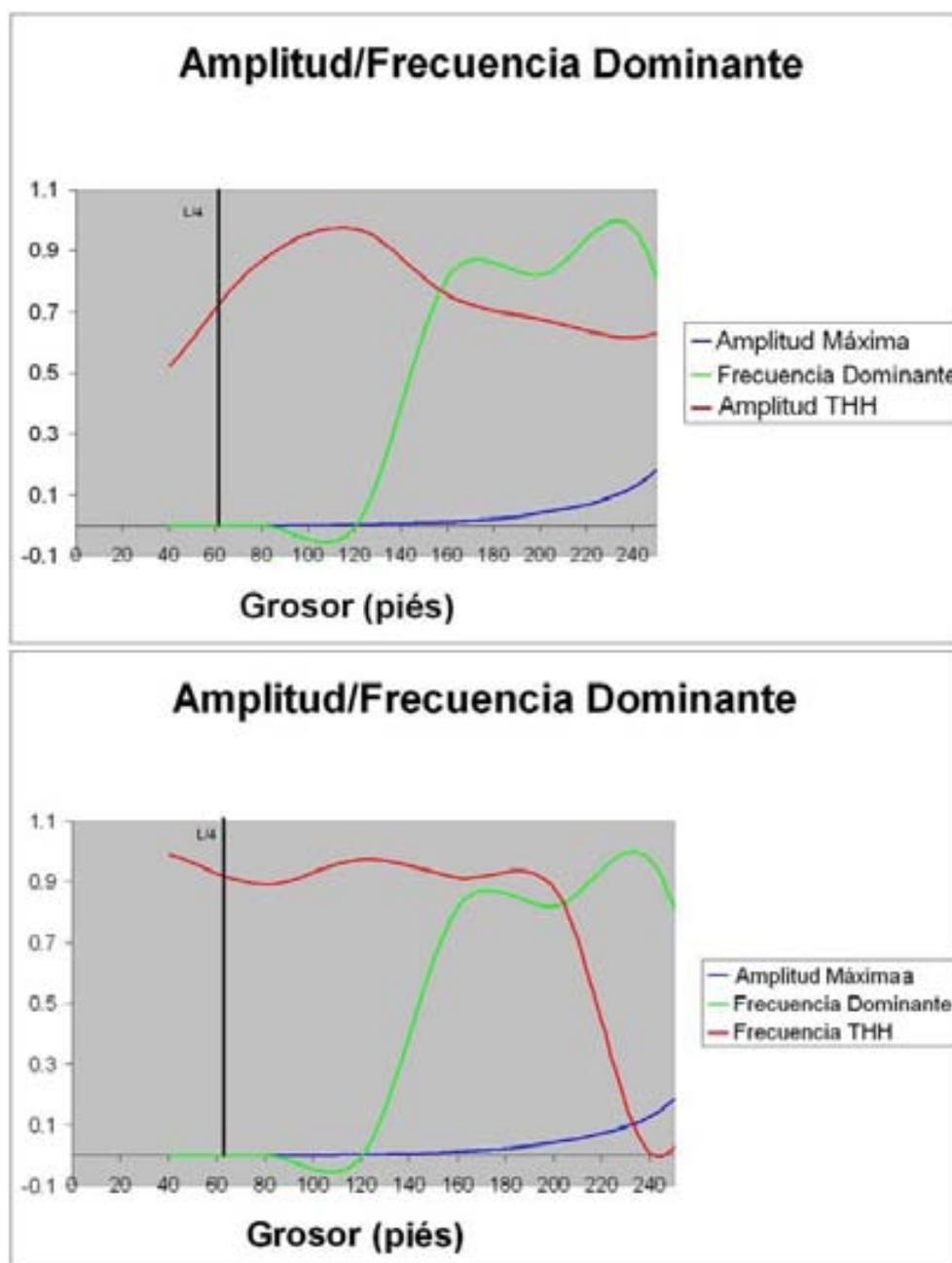


Figura 3.22: Comparación de de la máxima amplitud espectral de la THH y de su frecuencia correspondiente con la frecuencia y amplitud dominante (Partyka, 2001), en función del grosor de una capa. La línea azul representa el atributo de amplitud dominante, la verde la frecuencia dominante, y la roja representa, para el panel superior, la máxima amplitud determinada de la transformada de Hilbert-Huang, y para el panel inferior, la frecuencia que corresponde a esta amplitud máxima. La línea representa el límite teórico de la resolución sísmica. Para grosores menores, la frecuencia dominante es comparable a la amplitud máxima de la transformada de Hilbert-Huang (panel superior), pero decae a espesores menores. La amplitud dominante decae muy rápido en el límite de la resolución sísmica. Los atributos derivados de la transformada de Hilbert-Huang, no decaen con la misma rapidez a espesores pequeños, por lo que puede concluirse que estos atributos tienen mejor resolución.

3.7 Aplicación a un caso de estudio: Boonsville

3.7.1 Geología

Boonsville es un campo petrolero de un área de 52 km², que se extiende desde el Este del lago Bridegeport hasta el Oeste entrando en los condados de Wise y Jack en el Norte del estado norteamericano de Texas, donde también comprende varias áreas boscosas, muchas de propiedad privada (Pennington et al., 2001).

En este yacimiento se han perforado más de 200 pozos, cuyos registros e historia de producción se han integrado junto con el levantamiento sísmico en un conjunto de datos que el Buró de Economía de Texas pone a disposición de la comunidad geofísica con un pago moderado.

Geológicamente, el yacimiento de Boonsville es de cararácter deltaico. Pennington et al. (2001) utilizaron sus datos sísmicos para dar esta conclusión, y en la Figura 3.23 se muestra la interpretación a la que llegaron como parte de sus resultados.

Esta vista en planta muestra que el frente deltaico se encuentra en el borde Este del campo, que al extenderse hacia Oeste, se distribuye en los frente proximal, medio y distal, constituidos de capas de arena cuyos grosores y tamaño de grano aumentan y se mezclan con otros tipos de roca a medida que el frente deltaico sea más lejano. Estas capas, cuyo grosor en este campo es de aproximadamente de hasta 30 piés (10 metros), que también se encuentran en las bahías intercanal, son zonas que por general almacenan hidrocarburos. Es por ello que en la Figura 3.23 se muestra que los pozos que se han perforado se encuentran concentrados en estos lugares.

En profundidad, las zonas de interés petrolero se encuentran en un intervalo llamado el “Conglomerado Combado” (Bend Conglomerate) que geológicamente se encuentra ubicado en el Pensilvánico medio. La capa superior de

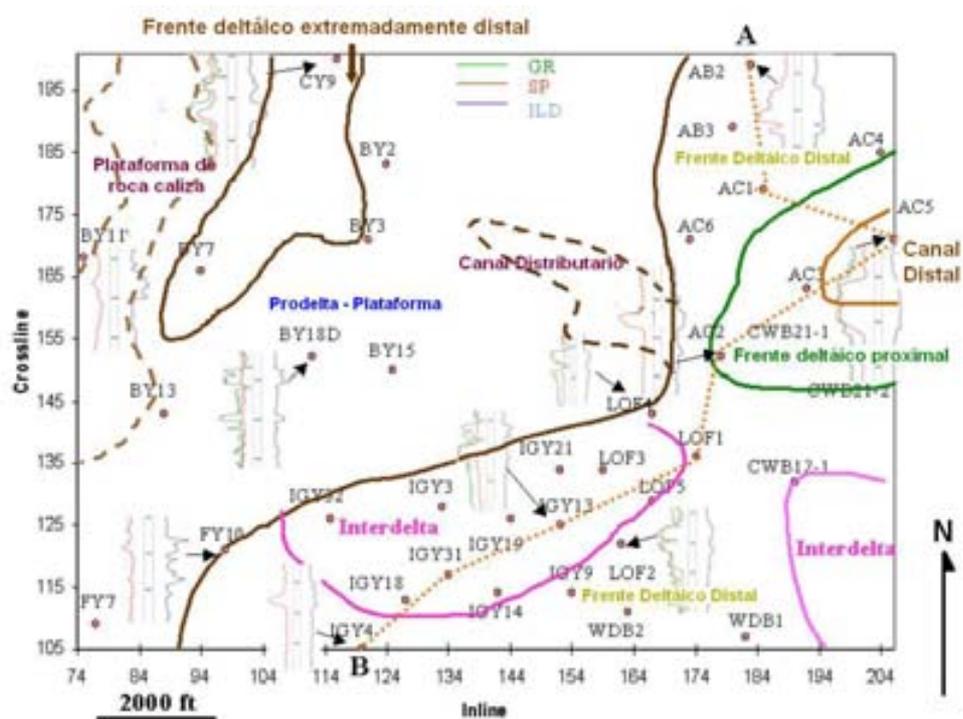


Figura 3.23: Vista en planta de la interpretación que Pennington et al. (2001) hicieron al campo de Boonsville. En el borde que representa el Este se tiene un sistema deltaico que comprende, sucesiones de interdeltas y frentes deltaicos. En el centro de la figura se encuentra el prodelta y cerca del borde que representa el Oeste hacia el centro se tiene una plataforma de roca caliza.

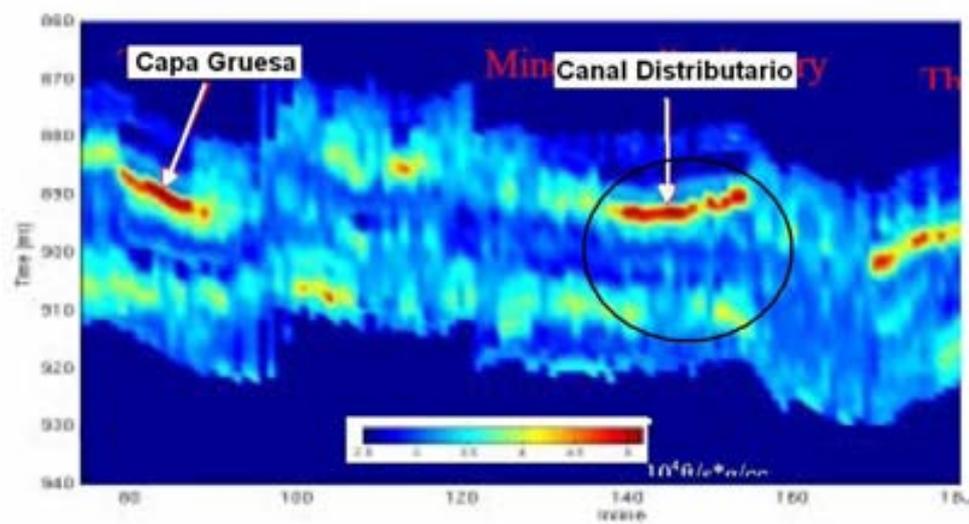


Figura 3.24: Una sección transversal en la inline 131 del cubo sísmico de Boonsville que representa con colores las impedancias acústicas del Conglomerado combado. Los tonos azules representan impedancias bajas y los tonos rojos y amarillos impedancias altas. Las flechas indican, a la izquierda una capa gruesa, y a la derecha las capas que corresponden a un paleocanal (Pennigton et al., 2001).

este intervalo se le ha llamado Cado y la inferior Vineyard. El grosor del conglomerado combado es de aproximadamente 150 m (Figura 3.24).

En la Figura 3.25 se muestran mapas en tiempo de las capas Cado y Vineyard. En ellas se muestran algunos patrones de forma ovalada. Según Hardage et al. (1996) se pueden interpretar estos patrones como karsts, esto es, depresiones que resultaron de la disolución de roca caliza, lo cual produce combamiento estructural de hasta 2500 piés (760 m). Esto influye en los patrones de distribución de las capas de arenisca, y en el entrampamiento de los hidrocarburos (Hardage et al, 1996).

Para ilustrar que estos derrumbes kársticos tienen efectos en el levantamiento sísmico, se presenta la Figura 3.26a, donde se muestra el atributo de coherencia C3, que se definirá en los capítulos que hablan sobre coherencia, de una sección en planta a 1000 ms. El patrón circular que se muestra al Noreste corresponde a un karst, lo que demuestra que la coherencia es sensible a estas características geológicas.

En la Figura 3.26b se muestra el cambio del carácter sísmico en una sección transversal que cruza sobre este karst, el cual puede notarse, de la línea blanca que esta Figura muestra dónde intersecta la vista en planta de la Figura 3.26a, la que similarmente, tiene una delgada línea blanca que indica la posición de la sección transversal, y que cruza precisamente en la zona kárstica.

Los pozos perforados en las zonas kársticas tienden a ser muy productivos en relación a los pozos que se ubicaron en su vecindad. Esto se puede explicar (Hardage et al., 1996) a que los karst puede compartamentalizar los hidrocarburos evitando su migración.

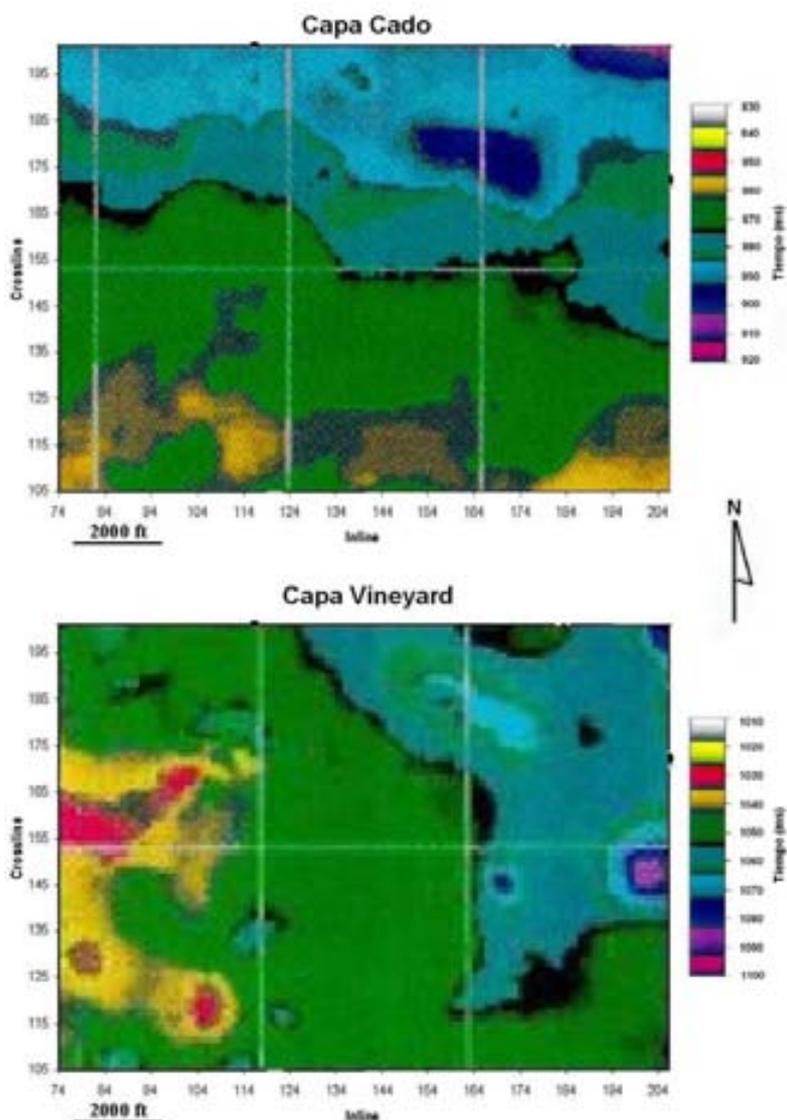
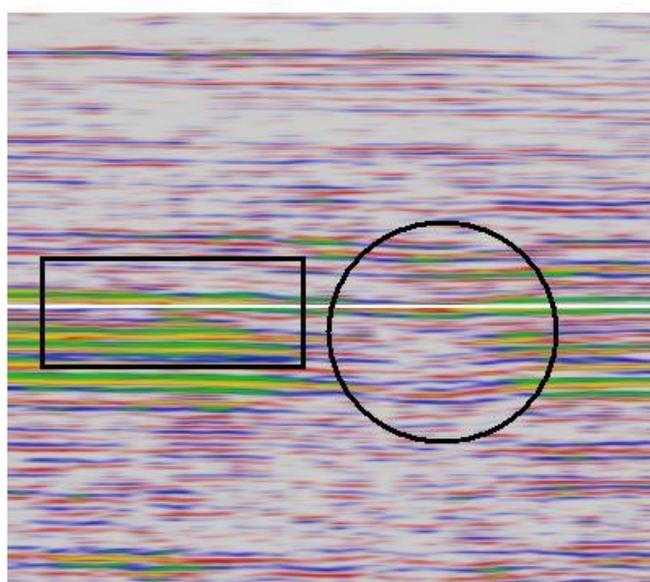


Figura 3.25: Mapas en tiempo de las capas Cado y Vineyard. Los colores representan el nivel de tiempo en el cubo sísmico en la que estas capas se interpretaron. De ello puede concluirse que: La capa Cado tiene un echado que tiene una dirección Norte y la capa Vineyard tiene un color más o menos uniforme, lo que indica que se extiende al mismo nivel de tiempo y por lo cual, carece de un echado significativo.



(a)



(b)

Figura 3.26: (a) Vista en planta de la sección Noroeste de Boonsville a 1000 ms. El patrón circular en la esquina superior derecha se interpreta como una zona kárstica. (b) Sección transversal sobre esta zona de karst donde se puede apreciar el cambio de carácter sísmico, el cual se señala con un círculo, y con un rectángulo indica un paleocanal. Las líneas blancas representan en la sección en planta el corte que la sección transversal le hace, y viceversa, la línea blanca que la sección transversal en la figura (b) representa el nivel de tiempo de la vista en planta en la que se ubica la figura (a).

3.7.2 Estudios sísmicos

Se ha experimentado con los datos de Boonsville para hacer ejercicios sobre cómo analizar un yacimiento (por ejemplo, véase Tanakov (1997)), o bien para probar nuevas técnicas y atributos para estudiar la sísmica.

Pennington et al. (2001) utilizaron a Boonsville (y otros yacimientos cuyos datos se encuentran disponibles públicamente) para probar atributos de capas delgadas.

La capa Cado, que delimita por arriba al conglomerado combado, se ha dividido para su estudio en Cado superior y Cado inferior (Hardage et al., 1996b). La superior se ubica al Norte de Boonsville y la inferior al sur. El cubo sísmico que se adquirió del Buró Económico de Texas, y que se utiliza en esta tesis, se ubica en el Cado superior. Este cubo viene acompañado con los registros de los pozos que vienen ubicados en la Figura 3.23, los cuales se marcaron con pequeños círculos negros.

El análisis estratigráfico que Hardage et al. (1996b) hacen de este campo les hace concluir que existen una serie de capas llamadas de máxima inundación, de inundación y erosionales, que se repiten cíclicamente y que reflejan las variaciones del nivel del mar a través de la historia del planeta. Estas capas se identificaron a lo largo de los registros de pozo.

La capa que corresponde a Cado superior es del tipo erosional y es de las menos profundas. En los registros de pozo, esta capa está identificada con la etiqueta ES90, y su rango en profundidad viene indicado para cada pozo en un folleto incluido con los datos digitalizados de Boonsville (Hardage et al, 1996c).

Por otra parte, Hardage et al. (1996b) concluyeron que las capas que se encontraron productoras de hidrocarburos se pueden interpretar con los registros de pozo siguiendo la siguiente regla: Cuando el potencial espontáneo

POZO	Grosor (piés)
Ashe B2	30
Ashe B3	11
Ashe C1	29
Ashe C2	24
Ashe C3	34
Ashe C5	29
Ashe C6	2.5
Craft WB 21-1	20
Craft WB 21-2	14
C Yates 9	9
L.O. Fancher 1	11
L.O. Fancher 2	46

Tabla 3.1: Grosor de las capas productoras identificados de los registros de pozo en el campos de Boonsville a nivel de la capa Cado.

es menor que -30 mV y la resistividad superficial es mayor que 10 Ohms.

De modo que para determinar los grosores de la capas alrededor de Cado, se sigue esta regla interpretativa, teniendo en cuenta los intervalos en profundidad que se refieren a la capa que corresponde a Cado en cada pozo.

Con esta premisas, se examinaros los registros de pozo del campo de Boonsville para localizar los intervalos en profundidad que corresponden a Cado, y para determinar en ellos, el grosor de capas productoras en los registros.

Se encontró, para la mayoría de los pozos, que el rango en profundidad que se les interpretó de Cado es muy pequeño, o bien, que en este rango, las capas productoras son inexistentes, excepto para algunos pozos que se muestran en

la Tabla 3.1, donde se expresa también el grosor de las capas encontradas.

Los datos sísmicos de Boonsville tiene una frecuencia dominante de 57 Hz, y la velocidad promedio es de 12000 piés/seg, de modo que un cuarto de la longitud de onda dominante será de 52 piés (15 m), que es el límite teórico de la resolución de la sísmica.

Por consiguiente, las capas que se interpretaron de los pozos tienen un grosor menor que esta longitud, por lo que su interpretación será difícil con atributos sísmicos, ya sea por lo escaso de su grosor, o bien, porque esta longitud puede comprender a varias capas de espesor pequeño.

3.7.3 Sensibilidad a varias capas delgadas

Para investigar si la sucesión de capas muy delgadas tiene un impacto en la respuesta del atributo de máxima amplitud espectral, se construyó un modelo de dos cuñas encontradas entre sí, basándome en los parámetros de velocidad y densidad que se utilizaron anteriormente para la arenisca y arcilla.

En la Figura 3.27 se muestran una serie de recuadros en los que se ha marcado, con líneas gruesas de color negro, la posición de las reflectividades dispuestas en dos cuñas. En primer lugar, estos recuadros muestran de abajo hacia arriba, las amplitudes que resultaron de convolucionar estas reflectividades con una ondícula de Ricker de 55 Hz; en segundo lugar, los grosores que se determinaron a partir de las velocidades utilizadas usando el procedimiento que anteriormente se expuso; y finalmente, la respuesta del atributo de máxima amplitud espectral por medio de la transformada de Hilbert-Huang aplicada a las trazas sintéticas del modelo.

El grosor que corresponde al límite de la resolución sísmica a la frecuencia de la ondícula de Ricker y velocidades utilizadas es el mismo que en los modelos de trazas sintéticas mostrados anteriormente (60 piés), el cual se

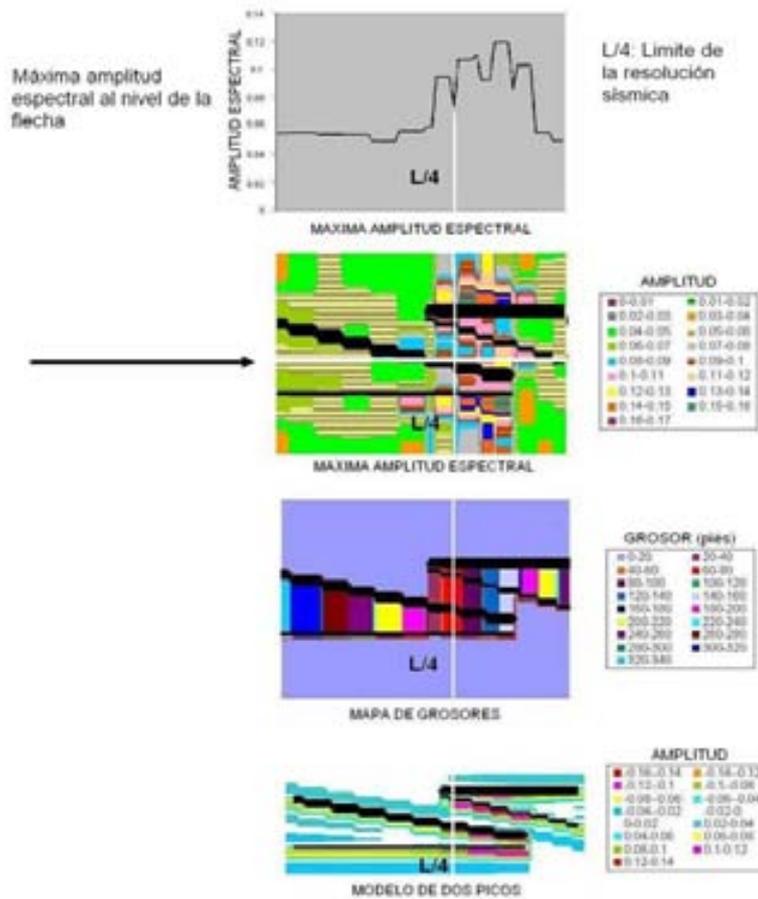


Figura 3.27: Modelo de reflectividades dispuesto en dos cuñas construido con los valores de velocidad y densidad utilizados al principio de esta sección. El modelo se repite en cada recuadro para remarcar su posición. De abajo hacia arriba, primer recuadro: Convolución del modelo de reflectividades con una ondícula de Ricker a 55 Hz. Segundo recuadro: Grosos determinados a partir de las velocidades utilizadas. La resolución sísmica a la frecuencia de la ondícula de Ricker y la velocidad de la capa es aproximadamente 60 piés. El color de este grosor está marcado con rojo, y una línea blanca vertical pasa por todos los recuadros para remarcarla. Tercer recuadro: Respuesta a este modelo de la máxima amplitud espectral con la transformada de Hilbert-Huang. Al nivel de la flecha se obtuvieron los valores de la amplitud espectral que se graficaron en el último recuadro. Puede notarse que en límite de la resolución sísmica, se encuentra un mínimo local en esta curva. Esto significa que la máxima amplitud espectral disminuye también en capas delgadas que se encuentre cercanas en profundidad.

marcó con una línea blanca vertical en todos los recuadros.

Las amplitudes de las trazas sintéticas tienden a disminuir en este límite, lo que se muestra en el recuadro inferior, y que corresponde a regiones de color blanco en el espacio que existe entre las cuñas, lo cual se puede interpretar como el resultado de la interferencia destructiva.

El color que corresponde a un grosor de las capas aproximadamente igual al límite de la resolución es el rojo, el cual se muestra en el segundo recuadro, y que se encuentra donde las cuñas están lo más próximas entre sí.

Por otra parte, la máxima amplitud espectral tiende a disminuir en capas sucesivas cuyo grosor sea menor que el límite de resolución sísmica.

Para comprobar esto, se tomaron las máximas amplitudes espectrales en todas las trazas a un nivel horizontal donde se determinó que hay capas que tienen un grosor cercano o menor que el límite de la resolución. Este nivel se marcó con una flecha horizontal en el tercer recuadro de abajo hacia arriba.

Con estas amplitudes se construyó una curva que se muestra en el recuadro en la parte superior, la cual tiene un mínimo local al nivel vertical donde se marcó el límite de la resolución sísmica, por lo que con esto se refuerza la noción de que en capas muy delgadas, inclusive si se encuentran próximas entre sí en profundidad, la máxima amplitud espectral tiende a decaer.

3.7.4 Aplicación de la transformada de Hilbert-Huang

Hardage et al. (1996b) mostraron un método para calibrar los atributos sísmicos con registros de pozo. En la Figura 3.28a se muestra una imagen a nivel de Cado en la parte Este de la Figura 3.25, obtenida al promediar la amplitud negativa de reflexión en una ventana de 30 ms. Debido a que este promedio filtra el ruido, los rasgos de esta imagen se encuentran un poco suavizados, y en los cuales se interpretaron algunas características litológicas.

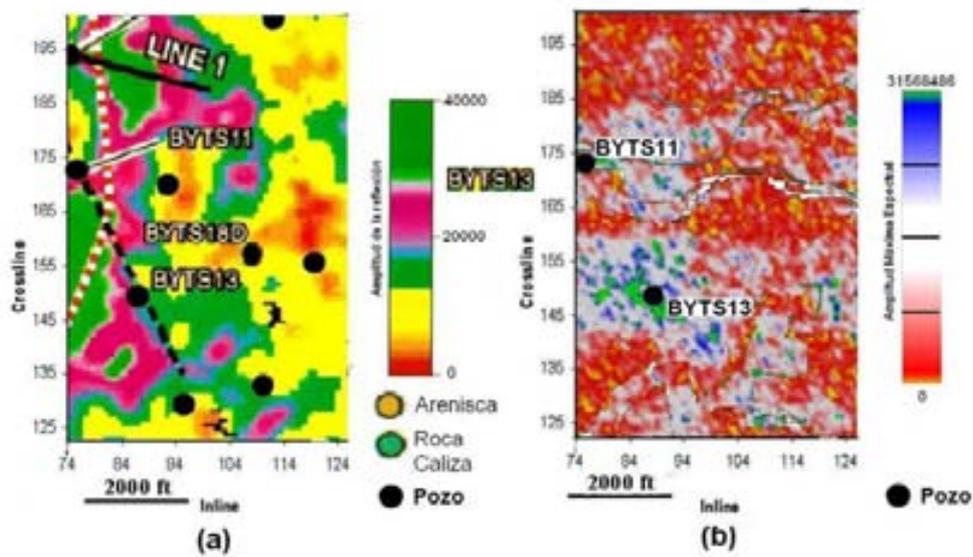


Figura 3.28: (a) Promedio de la amplitud negativa de reflexión en una ventana de 30 ms por debajo del nivel de Cado (Hardage et al., 1996b). (b) Máxima amplitud espectral instantánea obtenida mediante la transformada de Hilbert Huang al nivel de Cado.

Hardage et al. (1996b) comentan que la magnitud de este atributo tiende a decaer en capas delgadas, sobre todo en las capas de arena. En la Figura 3.28a se muestran los colores que les corresponden, que en la escala de amplitud representa una magnitud baja.

En la Figura 3.28b, en las mismas posiciones y con algunos pozos para remarcar la orientación, se muestra la imagen que produjo la máxima amplitud espectral determinada por la transformada de Hilbert-Huang al nivel de Cado.

Al comparar ambas imágenes se puede concluir que son congruentes en lo que respecta a la magnitud de los atributos, por lo que, donde una indica amplitud alta, en el mismo sitio pero en la otra imagen también, y viceversa. Por lo cual, se concluye que los rasgos en ambas imágenes se corresponden de la crossline 125 a la 175, siendo diferentes en la parte superior quizá debido al efecto de filtrado que produce el promedio que se utilizó en la imagen de la izquierda.

Y puesto Hardage et al. (1996b) calibraron que las amplitudes bajas indican capas delgadas de arena, se sigue que en la Figura 3.28b estas capas están indicadas con regiones de valor bajo de la máxima amplitud espectral.

Para probar esto, en la Figura 3.29 se muestra la correlación entre el grosor de las capas productoras identificadas a nivel de Cado, en pozos donde este grosor no sea cero, y la máxima amplitud espectral obtenida mediante la transformada de Hilbert-Huang en la posición de estos pozos en una imagen de este atributo a nivel de Cado.

En general, se puede observar que a medida que el grosor de la capa se hace menor en cada pozo, su magnitud espectral tiende también a decaer, y esta disminución se acelera a partir de grosores menores que el límite de la resolución, que también se muestra en esta figura.

Con la ayuda del mapa en tiempo para la capa Cado en la Figura 3.25, se

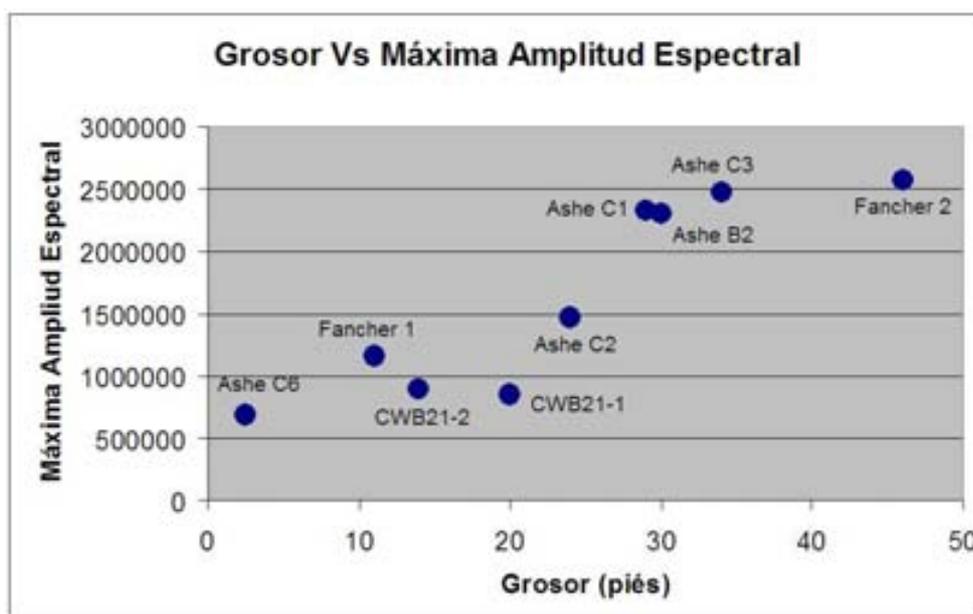


Figura 3.29: Gráfica cruzada de los grosores interpretados para la capa Cado en los pozos donde este grosor es diferente de cero, y la amplitud máxima espectral de la transformada de Hilbert-Huang medida en las posiciones de cada pozo en una imagen de este atributo a nivel de Cado.

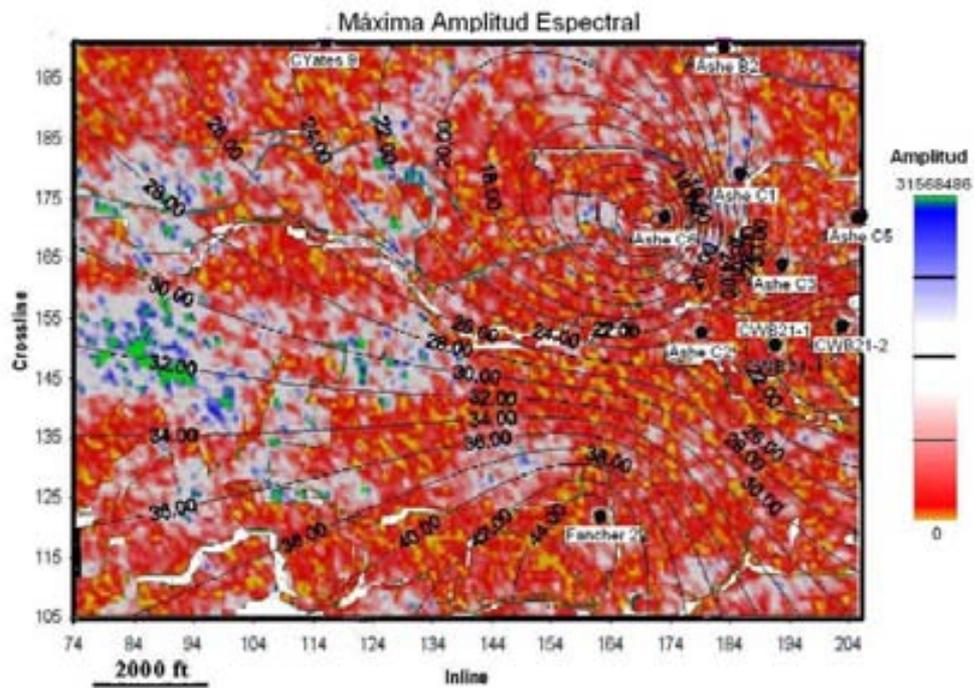


Figura 3.30: Imagen en planta del atributo de máxima amplitud espectral obtenida con la transformada de Hilbert-Huang a nivel de Cado, basado en los niveles de tiempo observados en la Figura 3.25. A esta imagen se sobrepuso un mapa de contornos basado en los grosores de los pozos mostrados en la Tabla 3.1.

realizó una composición de imágenes de la máxima amplitud espectral con el fin de obtener una imagen de este atributo al nivel de Cado superior, la cual se muestra en la Figura 3.30. A esta figura se le sobrepuso un mapa de contornos basado en la posición de los pozos y el grosor que para la capa Cado se interpretó en ellos, los cuales se mostraron en la Tabla 3.1.

Se puede concluir que la amplitud espectral tiende a aumentar en esta imagen de derecha a izquierda, lo cual es congruente con el carácter geológico de este campo, es decir, que las capas delgadas aumentan gradualmente de grosor desde el frente deltaico hacia el prodelta, y ser muy gruesos en la región que corresponde a la plataforma, la cual se encuentra a la izquierda.

En la Figura 3.31 se interpretó la imagen en planta que produjo el atributo de máxima amplitud de la descomposición espectral de Hilbert-Huang en un nivel en tiempo (931 ms) donde se pueden interpretar muchas de las características que interpretaron Pennington et al. (2001). Por ejemplo, la plataforma de roca caliza (marcada con la letra A), un canal distributivo (letra B) y un canal con forma de dona (letra C). La abundancia del color rojo y amarillo indican bajas amplitudes, y por consiguiente de capas de espesor menor que el límite de resolución.

En la Figura 3.32 se muestran las imágenes en planta que produjeron al nivel de 931 ms la máxima amplitud espectral mediante las transformadas de Morlet y Wigner, que muestran patrones que en poco se parecen a la interpretación de Pennington en la Figura 3.31.

Compárese también la Figura 3.31 con las imágenes que produjeron los atributos de coherencia C3 (o eigenstructure) y coherencia multiobjetivo, que se describen en los capítulos de esta tesis que se refieren a atributos de coherencia, las cuales se muestran en la Figura 3.33.

La imagen para la coherencia C3 muestra patrones contrastantes a los que, si bien pueden interpretarse características estratigráficas, se pueden

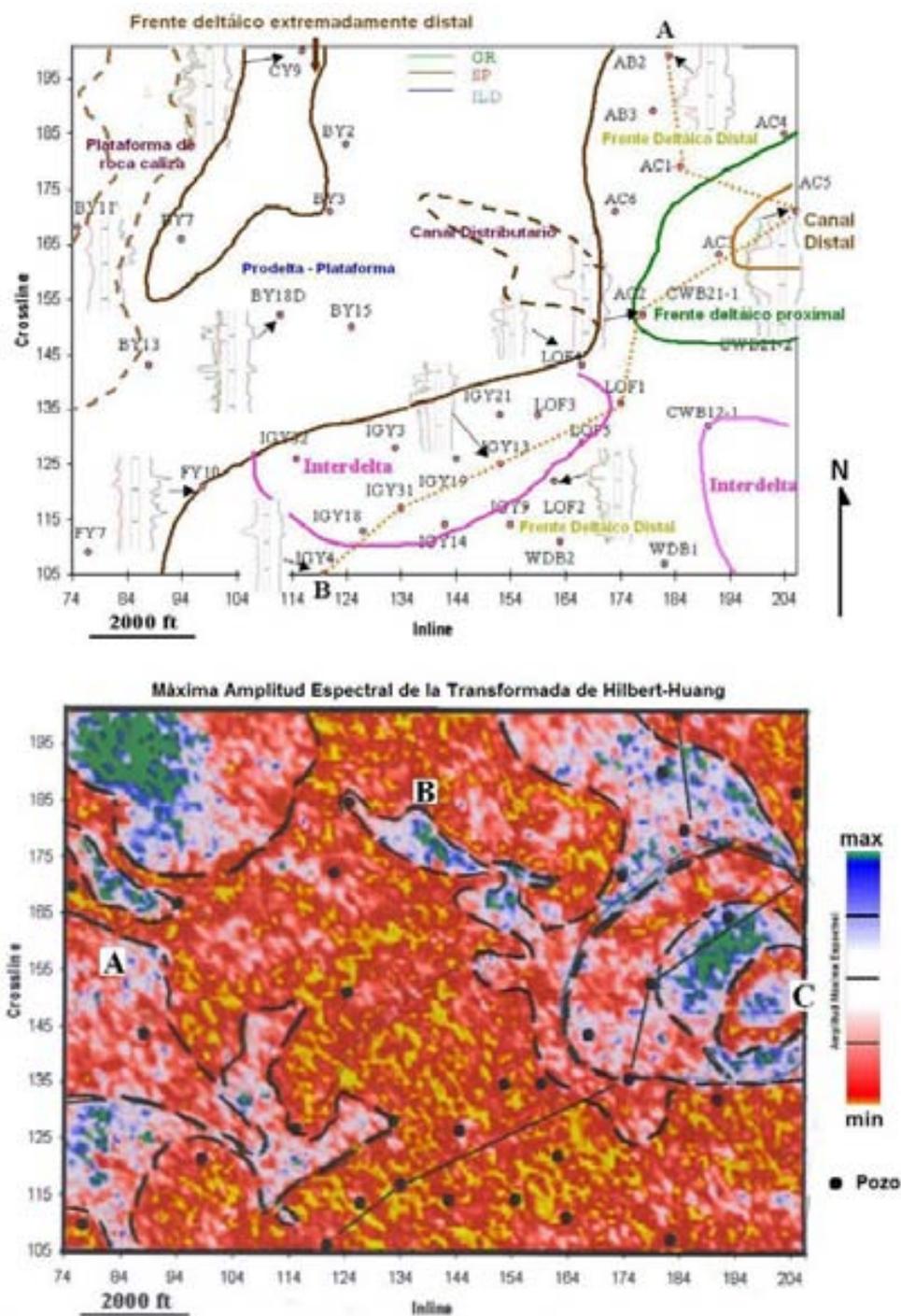


Figura 3.31: Imagen inferior: La imagen en planta de la máxima amplitud espectral por la transformada de Hilbert-Huang interpretada a 931 ms del cubo de Boonsville, que muestra algunas características que corresponden a la interpretación de este campo, la cual se muestra en la parte superior. Marcada con la letra A a la izquierda, se indica la plataforma de roca caliza (limestone), con la letra B al centro un canal distributivo, y a la extrema derecha se marcó con la letra C un canal que tiene forma de dona. Para distinguir mejor estas estructuras, se remarcaron con curvas de color negro.

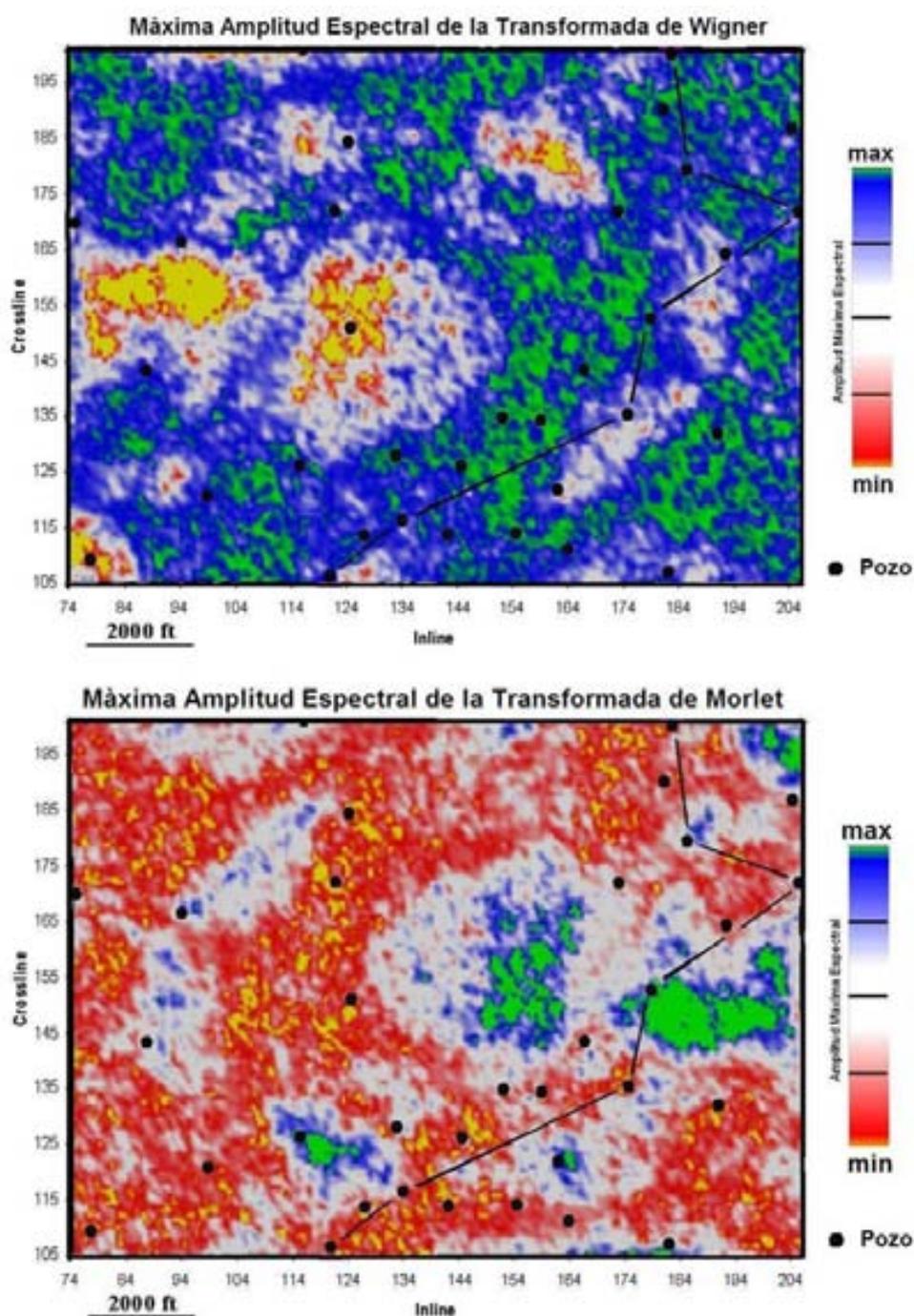


Figura 3.32: Imagen en planta del atributo de máxima amplitud de las transformadas de Wigner y Morlet a 931 ms. En comparación de la Figura 3.31 con estas imágenes no es posible interpretar ninguna característica de carácter geológico utilizando a la Figura 3.23 como guía.

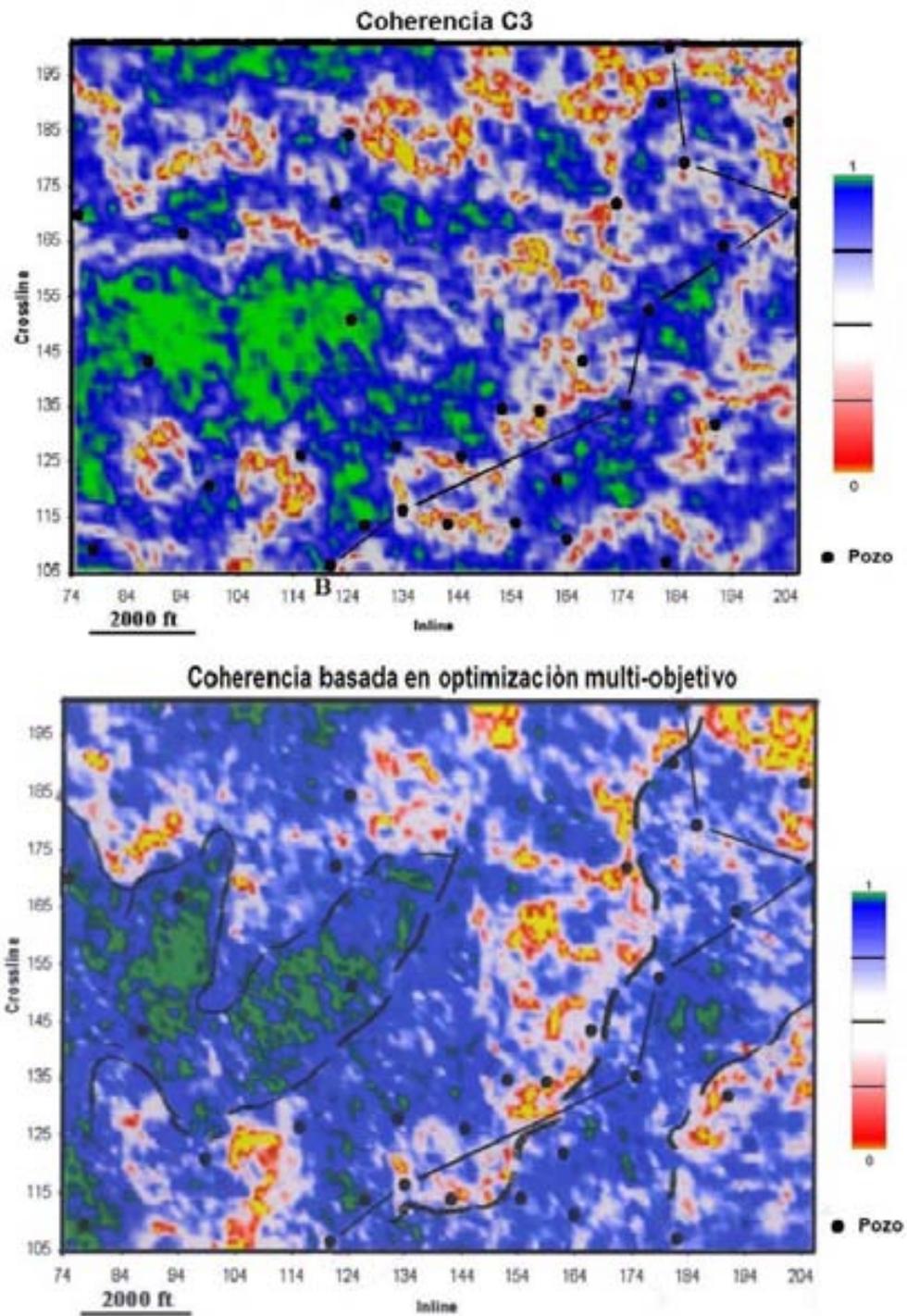


Figura 3.33: Imagen en planta de la Coherencia C3 y de optimización multi-objetivo a 931 ms en el cubo sísmico de Boonsville.

interpretar mejor con la coherencia multiobjetivo, en la que se ha indicado con rasgos de color negro, el límite entre el frente deltaico y el prodelta, localizado al centro de esta figura. Esta delimitación no la muestra el atributo de máxima amplitud espectral.

3.8 Conclusiones

Para concretar la contribución de este capítulo se llegaron a las siguientes conclusiones:

1. Con base en modelos de cuña se concluye que la máxima amplitud espectral de la transformada de Hilbert-Huang es un atributo que tiene mejor resolución al compararlo con otras transformaciones de tiempo-frecuencia y con los atributos que propone Partyka para la detección de capas delgadas.
2. Las imágenes en planta de la máxima amplitud espectral de la transformada de Hilbert-Huang son más interpretables debido a que despliegan más rasgos de carácter estratigráfico, que aquellas que se obtuvieron de la amplitud máxima de la transformada de Morlet y de Wigner.
3. Por el contrario, los atributos de coherencia, en especial el que utiliza optimización multi-objetivo, limita mejor la transición entre el frente deltaico y el prodelta, lo cual no se pudo distinguir con el atributo de máxima amplitud espectral.

Capítulo 4

Atenuación y dispersión

4.1 Introducción

Sin la atenuación y dispersión, la propagación de las ondículas en los materiales sería permanente, lo cual no se observa físicamente. Por ello, la atenuación y dispersión son los conceptos con los que se explica que las ondas disminuyen su amplitud, y también otros fenómenos asociados como la distorsión de la fase y los cambios de la velocidad de propagación.

La atenuación comprende la disminución de las amplitudes en función de la distancia a lo largo de la cual, las ondículas se han propagado.

$$A \exp(-\alpha x) \exp(-ikx/c) \quad (4.1)$$

donde α es la atenuación, x es la distancia recorrida, k es el número de onda y c la velocidad de propagación. La amplitud inicial es A .

Existen varias definiciones de atenuación:

- La razón de la diferencia de amplitud ΔW entre un ciclo de la ondícula y el siguiente, y la amplitud en el ciclo actual, que se denotará con W ,

es una medida de la atenuación:

$$\frac{2\pi}{Q} = \frac{\Delta W}{W} \quad (4.2)$$

A la variable Q se le llama factor de calidad.

- La atenuación se puede expresar en función de la frecuencia y del factor de calidad:

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega x}{Qc} = \frac{\omega t}{Q} \quad (4.3)$$

donde c es la velocidad de propagación de la ondícula.

- Si a un material se le aplica un esfuerzo cuya magnitud es sinusoidal en el tiempo, la deformación que sufre también lo será, y habrá una diferencia de fase δ en ambas ondículas cuya tangente es una medida del factor de calidad Q y por tanto de la atenuación (Kolsky, 1956):

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega \tan(\delta)}{2c} \quad (4.4)$$

La Ecuación (4.3) cobra importancia por los supuestos que implica:

- La atenuación $\alpha(\omega)$ es directamente proporcional a la frecuencia, es decir, le es lineal.
- Para el rango de frecuencias que se maneja en sismología de exploración (según Hardage et al (1996b), los datos de Boonsville llegan a los 100 Hz aunque normalmente este rango es menor), se puede considerar que el factor de calidad Q es independiente de la frecuencia y sólo depende de las propiedades visco-elásticas del medio propagante.

La dispersión es el fenómeno por el cual la velocidad de propagación cambia en función de la frecuencia. Las relaciones de dispersión son ecuaciones que expresan la razón de este cambio, y que más adelante se mostrarán.

Se puede atribuir la dispersión a dos fenómenos:

1. A que las componentes de alta frecuencia se propagan inercialmente en proporción a la distancia recorrida (dispersión geométrica).

En los experimentos de Kolsky (1959), las vibraciones producidas a varillas de diferentes materiales rebotan en los extremos y se reflejan en sentido inverso al que viajaron con un cambio de fase. Los registros de estas vibraciones muestran cómo hay distorsiones debido a la inercia lateral con las que viajan las componentes de alta frecuencia.

2. A la fricción interna del medio propagante (dispersión intrínseca).

La fricción interna se refiere a que, debido a la naturaleza del medio propagante, la energía de las ondículas se pierde por fricción, y por lo tanto, se convierte en calor.

Los métodos que se han desarrollado para calcular la dispersión no distinguen entre estos tipos, y se menciona que sería difícil determinar ambas componentes con un mismo procedimiento.

A través de muchas investigaciones se ha concluido que la atenuación siempre viene asociada con la dispersión.

Para explicar esto (Stein y Wysession, 2003), supóngase una función impulso que viaja con una velocidad c :

$$u(x, t) = \delta(t - x/c) \quad (4.5)$$

Su transformada de Fourier es:

$$u(x, \omega) = \int \delta(t - x/c) \exp(-i\omega t) dt = \exp(-\omega x/c) \quad (4.6)$$

Si existe atenuación, las amplitudes de este espectro deberán decrecer por un factor:

$$A(\omega) = \exp\left(-\frac{\omega x}{2cQ}\right) \quad (4.7)$$

De esta manera, el pulso atenuado en el dominio del tiempo es la transformada inversa de Fourier del producto de las últimas dos expresiones:

$$\hat{u}(x, t) = \int \exp\left(-\frac{\omega t}{2cQ}\right) \exp(-\omega x/c) \exp(i\omega t) d\omega \quad (4.8)$$

Cuyo resultado es:

$$\hat{u}(x, t) = \left[\frac{x/(2cQ)}{((x/(2cQ))^2 + (x/c - t)^2)} \right] / \pi \quad (4.9)$$

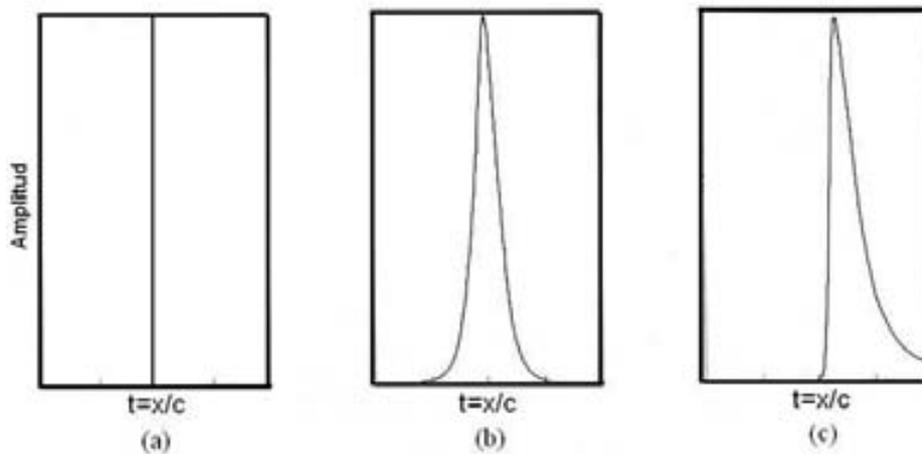


Figura 4.1: (a) Función impulso. (b) Impulso atenuado que no respeta la causalidad. (c) Impulso ideal atenuado.

Es decir, que la atenuación hace que el impulso tenga un soporte en el tiempo más amplio que incluye tanto el tiempo posterior, como el anterior de cuando se inició. Esto viola el principio de causalidad, y es deseable que el impulso atenuado tenga la forma de la Figura 4.1c.

La teoría de la viscoelasticidad establece la siguiente relación entre las velocidades de fase para hacer que el principio de causalidad se conserve (Kolsky, 1956):

$$c(\omega) = c_0 \left[1 + \frac{1}{\pi Q} \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right]^{-1} \quad (4.10)$$

Donde ω_0 , con velocidad asociada c_0 , es una frecuencia de referencia, tal que para frecuencias menores a ella, la dispersión es prácticamente inexistente.

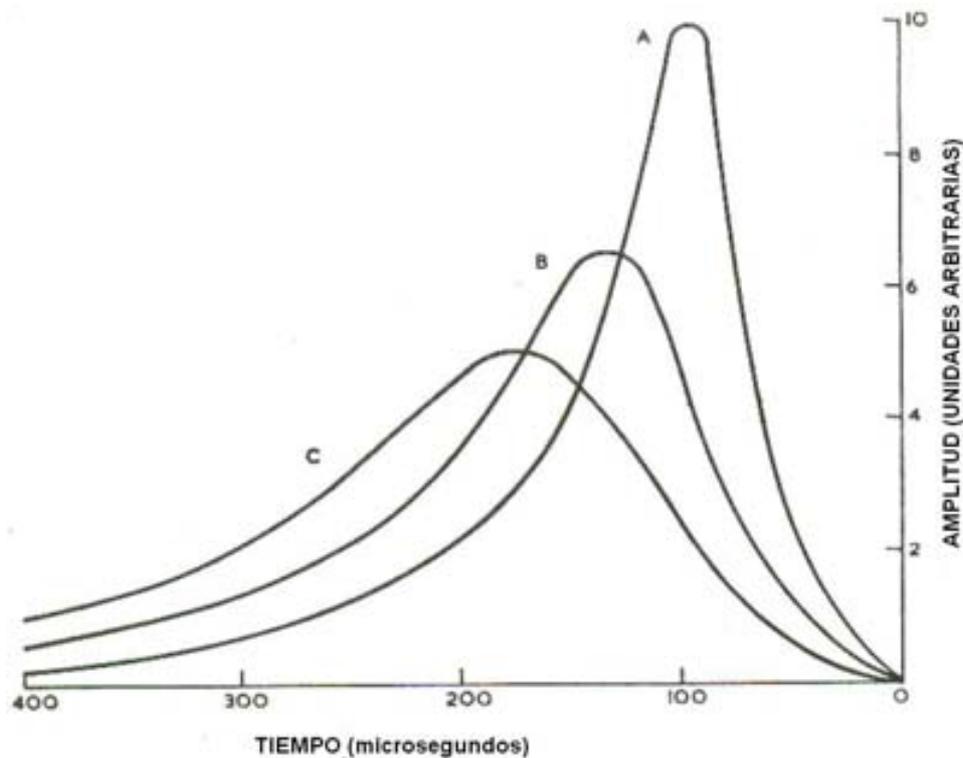


Figura 4.2: Diferentes curvas que muestran la atenuación en las ondas producidas en varillas de diferentes longitudes. (Kolsky, 1956).

Kolsky (1956) reconstruye, a partir de fotografías de un osciloscopio, la forma del impulso a partir de los desplazamientos que se miden de las vibraciones impartidas a una varilla de polietileno. En la Figura 4.2 se muestra la forma del impulso después de que viajó 30 cm, 60 cm y 90 cm en la varilla del experimento. Nótese la forma de estas ondículas en la que las amplitudes son menores si viajan mayor distancia (lo cual se explica por la atenuación) y que las colas son más largas hacia el eje del tiempo que en dirección al origen (lo cual es un efecto de la dispersión).

Puede observarse también que estas ondículas tienen una forma similar, y que es posible construir una a partir de otra al alargar o acortar su escala de tiempo. Esto se puede explicar a que el área bajo estas curvas representa el momento, conocido también como ímpetu o cantidad de movimiento, de la ondícula, que al conservarse hace que la ondículas que viajan más distancia tengan colas más largas y amplitudes menores.

Con estas bases, los objetivos de este capítulo son mostrar:

1. Que este principio de similaridad lleva a otros supuestos de la magnitud de la atenuación y del factor de calidad.
2. Que la relación de dispersión (Ecuación 4.10) se puede formular bajo los supuestos de que la atenuación es linealmente dependiente de la frecuencia y que el factor de calidad Q es casi constante (Futterman, 1963).
3. La aplicación de estos conceptos para dato sísmicos, y de la transformada de Hilbert-Huang, para formular una inversión del factor de calidad Q .

4.2 Consecuencias del principio de similaridad

Si se tiene una serie de tiempo dada por una función $f(t)$, con espectro $\hat{f}(\omega)$, a la cual se le modifica la escala de su dominio por un factor m para dar lugar

a la función $f(mt)$, con esta escala el espectro correspondiente se modifica a:

$$\frac{1}{m} \hat{f}\left(\frac{\omega}{m}\right) \quad (4.11)$$

Este es el principio de similaridad y es una propiedad de la transformada de Fourier.

Consideremos una ondícula real atenuada reconstruida de su espectro:

$$\sigma(x, t) = A \int_0^\infty \exp(-K\omega x) \cos(\omega(t - x/c)) d\omega \quad (4.12)$$

donde $K = \tan(\delta)/2c$ es una expresión de la atenuación, y supóngase un marco de referencia de velocidad v que viaja con la ondícula:

$$\sigma(x, t) = A \int_0^\infty \exp(-K\omega x) \cos(\omega(t - x/c + x/v)) d\omega \quad (4.13)$$

Si la escala de tiempo de esta expresión cambia por un factor m , con un cambio de variable $p = m\omega$, se obtiene:

$$\sigma(x, mt) = \frac{A}{m} \int_0^\infty \exp(-Kpx) \cos\left(\frac{p}{m} \left(mt - x \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{v}\right)\right)\right) dp \quad (4.14)$$

Debido a la dispersión, se espera que la velocidad de propagación c cambie con la frecuencia, por lo que para que el principio de similaridad resulte exacto, se necesita que los siguientes factores sean independientes de la frecuencia o que cambien muy poco con ella:

1. El factor de la atenuación K .
2. El factor de velocidades

$$\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{v}\right) \quad (4.15)$$

Para el primer punto se explica que $\tan(\delta)$ no cambia mucho en el rango de frecuencias que se observa (Kolsky, 1956). Por otra parte, por aproximaciones de primer orden de la Ecuación (4.10) se puede concluir que:

$$\frac{1}{c} \simeq \frac{1}{c_0} \left(1 - \frac{\tan(\delta)}{\pi} \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right) \quad (4.16)$$

y si para cierta constante x_0 se tiene que

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c_0} \left(1 + \frac{\tan(\delta)}{\pi} \log \left(\frac{x}{x_0} \right) \right) \quad (4.17)$$

Entonces resulta la diferencia

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{v} = \frac{\tan \delta}{c_0 \pi} \log \left(\frac{\omega x}{\omega_0 x_0} \right) \quad (4.18)$$

lo que indica que la diferencia del recíproco de las velocidades no es constante, sino que es una función logarítmica de la frecuencia, lo cual hace que los valores de velocidad cambien lentamente en derredor de su frecuencia respectiva.

4.3 Construcción de las relaciones de dispersión

Al considerar la atenuación en la propagación de una onda plana:

$$u(x, t) = u_0 \exp(iKx) \exp(-i\omega t) \quad (4.19)$$

se deberá considerar que el número de onda K depende de una frecuencia ω , lo cual se denota con $K(\omega)$ y que tiene una componente imaginaria

$$K(\omega) = k(\omega) - i\alpha(\omega) \quad (4.20)$$

La transformada de Hilbert de la parte real determina la parte imaginaria. En la señal analítica, la transformada de Hilbert obtiene la cuadratura de la señal real original.

De las investigaciones que hasta aquí se han expuesto se ha concluido que la atenuación:

- Es dependiente linealmente de la frecuencia.
- Que las ondículas se pueden reconstruir de su espectro, esto es, que al superponer (sumar) sus componentes de frecuencia, las reconstruyen.

Con estas suposiciones, Futterman (1963) determina una relación parecida a la Ecuación (4.10), y que a continuación se reproducen sus razonamientos:

Para una frecuencia de referencia ω_0 , supóngase que no existe dispersión y que el número de onda a esta frecuencia se denota como K_0 . Se define la siguiente razón:

$$\eta(\omega) = \frac{K(\omega)}{K_0} \quad (4.21)$$

Si se supone el principio de superposición y dada una ondícula de valores reales, la integral que corresponde a su reconstrucción, por medio de su espectro y de la transformada inversa de Fourier, deberá ser una función real.

Esto significa que el número de onda $K(\omega)$ deberá ser una función par:

$$K(\omega) = K^*(-\omega) \quad (4.22)$$

Si este número de onda es complejo, entonces deberá ser que la parte real sea impar y la imaginaria sea par:

$$\begin{aligned} k(\omega) &= -k(-\omega) \\ \alpha(\omega) &= \alpha(-\omega) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Es decir, que para frecuencias negativas la atenuación disminuye la amplitud de la misma forma que si fueran frecuencias positivas.

Por otro lado, la dispersión a una frecuencia menor que ω_0 no existe o es muy pequeña. Sea c la velocidad de propagación a la frecuencia ω_0 . Por lo

tanto a frecuencias menores que ω_0 , el número de onda se define como:

$$K_0 = \frac{\omega_0}{c} \quad (4.24)$$

A medida que la frecuencia ω tienda a cero, el número de onda $K(\omega)$ tiende a la región no dispersiva y la razón $n(\omega)$ tiende a ser idéntica uno.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \eta(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K(\omega)}{\omega/c} = 1 \quad (4.25)$$

Para frecuencias mayores que ω_0 , habría dispersión (y por tanto atenuación) y por tanto $\eta(\omega)$ es un número complejo.

La parte real de $\eta(\omega)$ se puede obtener de su parte imaginaria por medio de la integral de Kramers-Krönig (Futterman, 1963):

$$\text{Re}(\eta(x) - \eta(0)) = \frac{2x^2}{\pi} \int_0^\infty dx' \frac{\text{Im} \eta(x')}{x'(x'^2 - x^2)} \quad (4.26)$$

donde $x = \omega/\omega_0$.

Con la suposición de que la atenuación es una función lineal de la frecuencia, Futterman propone tres funciones:

$$\begin{aligned} \text{Im} \eta(x) &= \frac{1}{2Q_0} \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \\ \text{Im} \eta(x) &= \frac{1}{2Q_0} \begin{cases} x/x_0 & 0 \leq x \leq x_0 \equiv \omega/\omega_0 \\ 1 & x > x_0 \end{cases} \\ \text{Im} \eta(x) &= \frac{1}{2Q_0} (1 - \exp(-x)) \{ 0 < x \end{aligned} \quad (4.27)$$

La tercera función es asintóticamente lineal con respecto a la frecuencia.

Al integrar estas funciones con la integral de Kramers-Krönig, se obtienen los siguientes resultados.

$$\operatorname{Re} \eta(x) - 1 = -\frac{1}{\pi Q_0} \begin{cases} \frac{1}{2} \log |x^2 - 1| \\ \frac{1}{2} \left[\log \left| 1 - \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 - 1 \right| - \frac{x}{x_0} \log \left| \frac{1-x/x_0}{1+x/x_0} \right| \right] \\ \log \gamma x - \frac{1}{2} [\exp(-x) Ei(\bar{x}) + \exp(x) Ei(\bar{-x})] \end{cases} \quad (4.28)$$

donde las funciones $Ei(\cdot)$ son las integrales exponenciales que se definen como

$$\begin{aligned} -Ei(-x) &= \int_x^\infty \frac{\exp(-t)}{t} dt \\ Ei(x) &= -P \int_{-x}^\infty \frac{\exp(-t)}{t} dt \end{aligned} \quad (4.29)$$

para $x > 0$ y $\log \gamma = 0.577217 \dots$ es la constante de Euler.

Las ecuaciones (4.28) se pueden aproximar asintóticamente con la función:

$$\operatorname{Re} \eta(x) = 1 - \frac{1}{\pi Q_0} \log(x) \quad (4.30)$$

La velocidad de fase es una medida del recorrido por unidades de tiempo de la ondícula en la que la fase sea constante. Esto es que

$$v_p(\omega) = (dR/dt)_{\Phi=\text{const}} = \frac{\omega}{K(\omega)} \quad (4.31)$$

En términos de $n(\omega)$:

$$v_p(\omega) = \frac{c}{\operatorname{Re}(\eta(\omega))} \quad (4.32)$$

La velocidad de grupo se refiere a que la fase sea constante con respecto a las variaciones de frecuencia, es decir que $d\Phi/d\omega = 0$.

Si una onda plana se expresa como:

$$u(x, t) = \exp(-i(K(\omega)x - \omega t)) \quad (4.33)$$

Su fase será $\Phi(\omega) = K(\omega)x - \omega t$, que al derivarla y hacer cero la expresión que resulta, se tiene que la velocidad de grupo debe ser:

$$u_g = x/t = (dK/d\omega)^{-1} \quad (4.34)$$

En términos de $\eta(\omega)$:

$$u_g = c \left(\frac{\partial[\omega \operatorname{Re} \eta(\omega)]}{\partial \omega} \right)^{-1} \quad (4.35)$$

Entonces, al tabular la última ecuación del grupo (Ecuaciones 4.28) para valores $x > 6$ se puede concluir que la velocidad de fase y de grupo se pueden expresar como:

$$v_p(x) = c \left[1 - \frac{1}{\pi Q_0} \log \gamma x \right]^{-1} \quad (4.36)$$

$$v_g(x) = c \left[1 - \frac{1}{\pi Q_0} (1 + \log \gamma x) \right]^{-1} \quad (4.37)$$

La Ecuación (4.36) es muy parecida a la Ecuación (4.10) excepto por un signo.

De las ecuaciones (4.36) y (4.37) se puede concluir que para valores muy grandes de Q , la velocidad de fase v_p y la velocidad de grupo v_g serán iguales, de lo que se puede decir que distinguirlas es una consecuencia de que la atenuación y dispersión se encuentren presentes.

4.4 Representación de la dispersión

Supóngase una onda plana atenuada:

$$u(x, t) = \exp(-\alpha x) \cos(\phi(x, t)) \quad (4.38)$$

donde $\phi(x, t) = \omega(x/v_p - t)$. Sus picos serán cuando $\phi(x, t)$ sea múltiplo de 2π .

Si W es la energía cuando la fase es $\phi(x, t) = 0$ y ΔW es la diferencia de energía en este ciclo y cuando la fase es $\phi(x + \delta x, t) = 2\pi$, donde $\delta x = 2\pi v_p/\omega$ la razón $\Delta = \Delta W/W$ es una medida del factor de la calidad:

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{2\pi}{Q} \quad (4.39)$$

Como $u_0(x, t) \approx \exp(-\alpha v_p t)$ y $u_{2\pi}(x + \delta x, t) \approx \exp[-\alpha v_p(t + 2\pi/\omega)]$, se puede concluir que:

$$Q^{-1} = (2\pi)^{-1}(1 - \exp(-2\Delta)) \quad (4.40)$$

de lo cual se sigue que

$$\Delta = \frac{2\pi\alpha v_p}{\omega} \quad (4.41)$$

Si $\Delta \ll 1$,

$$Q(\omega) \approx \frac{\omega}{2\alpha(\omega)v_p(\omega)} \quad (4.42)$$

Es decir que

$$Q_0 = \frac{\omega}{2\alpha(\omega)c} \quad (4.43)$$

y cualquier otro factor de atenuación se puede expresar en términos de Q_0 :

$$Q = \frac{cQ_0}{v_p} \quad (4.44)$$

Por lo cual se concluye que (Futterman, 1963):

$$Qv_p = cQ_0 \quad (4.45)$$

Supóngase que a una frecuencia ω_b se tiene una velocidad de fase $v_p(\omega_b)$ y que para otra frecuencia

$$\omega = \omega_b + \Delta\omega \quad (4.46)$$

le corresponde una velocidad

$$v_p(\omega) = v_p(\omega_b) + \Delta v_p(\omega_b, \omega) \quad (4.47)$$

Si de la Ecuación (4.36) se determina la velocidad de fase para $v_p(\omega)$ a la cual se resta la velocidad para $v_p(\omega_b)$, considerando la proporción (4.45) y después de algunas simplificaciones se obtiene:

$$\frac{\Delta v_p(\omega_b, \omega)}{v_p(\omega_b)} = [\pi Q(\omega_b)]^{-1} \log \left(\frac{\omega}{\omega_b} \right) \quad (4.48)$$

Mediante esta manipulación se ha eliminado la frecuencia de referencia ω_0 así como su velocidad respectiva c .

Considérese un par de ondas planas a las frecuencias ω y ω_b que se iniciaron simultáneamente en una localidad arbitraria x_s . Los tiempos de llegada de estas ondas en una localidad receptora x_r son:

$$\begin{aligned} t(\omega) &= \frac{\Delta x}{v_p(\omega)} \\ t(\omega_b) &= \frac{\Delta x}{v_p(\omega_b)} \end{aligned} \quad (4.49)$$

donde $\Delta x = x_s - x_r$.

De esto se sigue que:

$$\begin{aligned} t(\omega_b) - t(\omega) &= t(\omega_b) - \frac{\Delta x}{v_p(\omega)} \\ &= t(\omega_b) - \frac{t(\omega_b)v_p(\omega_b)}{v_p(\omega)} \\ &= \Delta t(\omega, \omega_b) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Como la velocidad $v_p(\omega)$ se expresa por la Ecuación (4.47) se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta t(\omega, \omega_b) &= t(\omega_b) - \frac{t(\omega_b)v_p(\omega_b)}{v_p(\omega_b) + \Delta v_p(\omega, \omega_b)} \\ \frac{\Delta t(\omega, \omega_b)}{t(\omega_b)} &= 1 - \frac{v_p(\omega_b)}{v_p(\omega_b) + \Delta v_p(\omega, \omega_b)} \\ &= \frac{\Delta v_p(\omega, \omega_b)}{v_p(\omega_b) + \Delta v_p(\omega, \omega_b)} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Al sustituir en la Ecuación (4.48) se tiene que (Jones, 1985):

$$-\frac{\Delta t(\omega, \omega_b)}{t(\omega_b)} = [\pi Q(\omega_b)]^{-1} \log \left(\frac{\omega}{\omega_b} \right) \quad (4.52)$$

Tras una pequeña reflexión se puede comprender que esta ecuación expresa un cambio de la escala del tiempo en función del factor de calidad y de las frecuencias.

Entonces, si se considera que el factor de calidad es constante en un rango de frecuencias y la dispersión se encuentra presente en una traza sísmica, esto equivaldría a que su escala de tiempo se exprese en términos de una función del factor de calidad

$$\sigma(Q, \omega_b, \omega) = 1 - [\pi Q]^{-1} \log \left(\frac{\omega}{\omega_b} \right) \quad (4.53)$$

De acuerdo al principio de similaridad, su transformada de Fourier será la siguiente:

$$|\sigma(Q, \omega_b, \omega)| \hat{X}(\sigma(Q, \omega_b, \omega)\omega) \quad (4.54)$$

En la práctica se toma a ω_b como la frecuencia con la máxima amplitud espectral (Robinson, 1979).

El proceso inverso también es posible: Si el factor Q es conocido, remover la dispersión de una traza sería transformar el espectro a

$$|\sigma(Q, \omega_b, \omega)|^{-1} \hat{X}(\sigma(Q, \omega_b, \omega)^{-1} \omega) \quad (4.55)$$

y realizar la transformada inversa.

De esta manera, es posible tanto construir trazas sintéticas a las cuales se induce dispersión si se multiplica por σ como filtrar trazas sísmicas de la dispersión si se divide.

Para esto se requieren los siguientes pasos:

1. Construir un nuevo espectro de frecuencias ω' , al multiplicar (o dividir) el rango de frecuencias original ω por la función σ :

$$\omega' = \sigma(Q, \omega_b, \omega) \omega \quad (4.56)$$

Para esto se puede utilizar el método de Newton para encontrar ω dado $\omega' = n\Delta\omega$. Esto es, iterar por la función:

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \frac{\sigma(Q, \omega_b, \omega_i) \omega_i - \omega'}{\sigma(Q, \omega_b, \omega_i) + \sigma'(Q, \omega_b, \omega_i) \omega_i} \quad (4.57)$$

hasta una tolerancia dada, donde σ' es la derivada de σ con respecto a ω .

2. Como la frecuencia ω no necesariamente se encuentra muestreada en el espectro original, habrá que interpolar la parte real e imaginaria, por ejemplo con splines cúbicas.
3. Al resultado de la interpolación multiplicarlo (o dividirlo) por $\sigma(Q, \omega_b, \omega)$ y asignar el resultado a la frecuencia ω' .

Puede notarse el efecto de la dispersión en la Figura (4.3), donde se muestra una traza sintética en la parte superior y en la parte inferior se muestra la

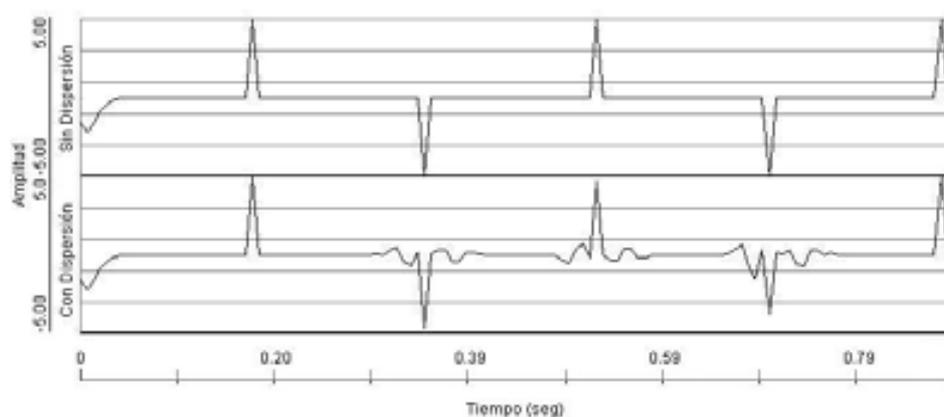


Figura 4.3: Figura superior: Traza sintética. Figura inferior: La misma traza a la cual se le indujo dispersión.

misma traza inducida con dispersión con el procedimiento que se acaba de exponer.

Al comparar estas imágenes puede notarse cómo las ondículas se distorsionan creando picos adicionales aproximadamente en el tiempo .35 y .70.

En la Figura 4.4 se muestra la descomposición de Hilbert-Huang para la traza sintética sin y con dispersión respectivamente. Al comparar estas figuras se puede concluir que:

1. Los patrones sinusoidales tienden a correrse a frecuencias más negativas cuando hay dispersión que cuando no la hay. Esto puede explicarse a que la dispersión distorsiona también la fase y por lo tanto, a la frecuencia instantánea.
2. Las amplitudes tienden a decaer: El patrón de colores cálidos (altas am-

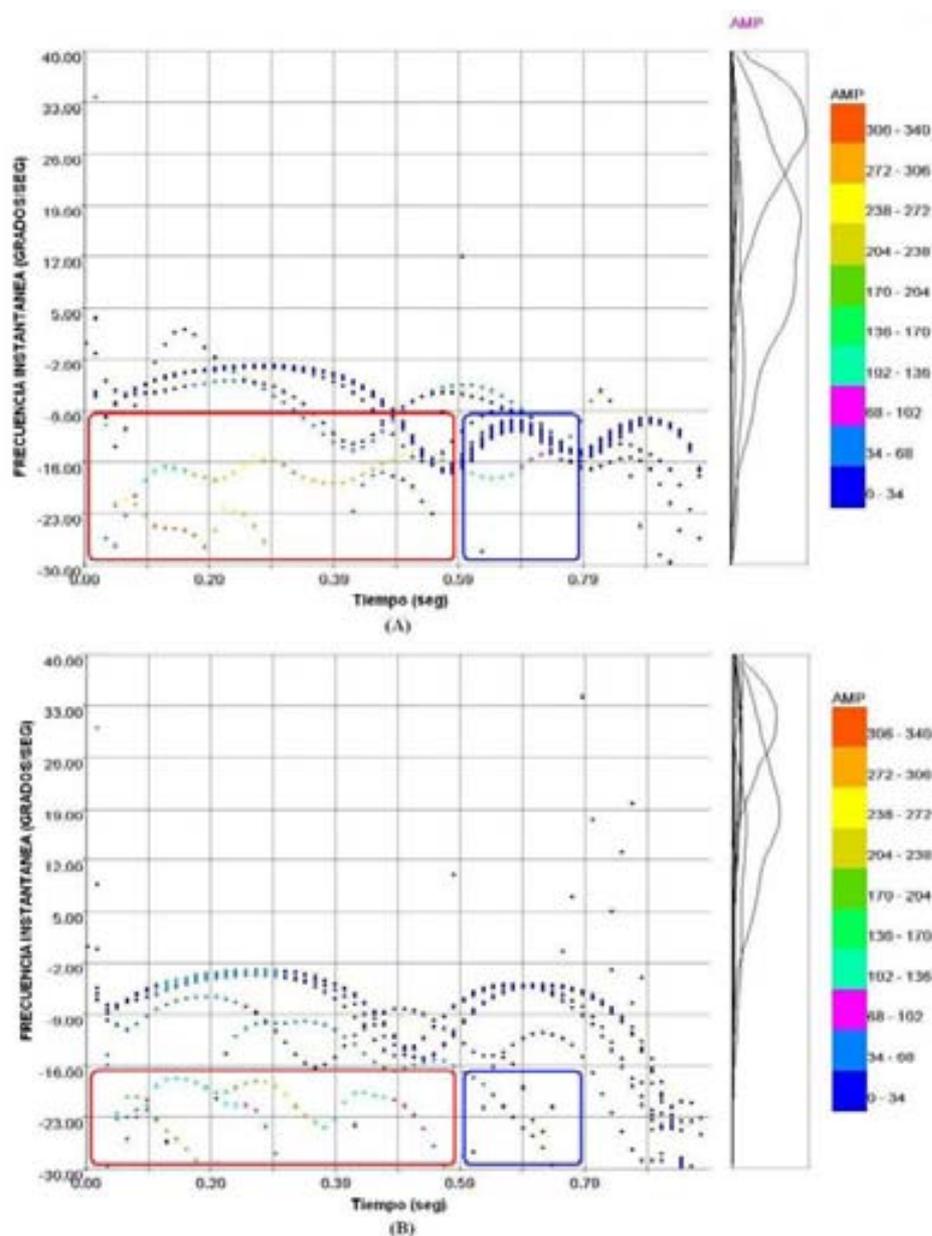


Figura 4.4: Estas figuras muestran en un plano tiempo-frecuencias la descomposición espectral determinada con la transformada de Hilbert-Huang a la trazas sintéticas de la Figura 4.3. La figura superior representa esta descomposición espectral de la traza sin dispersión y la inferior la descomposición espectral que corresponde a la traza con dispersión. Al comparar estas imágenes se puede concluir que los patrones en este plano, para la gráfica inferior, se encuentran ubicados en frecuencias más negativas y están ubicados en tiempos menores, lo cual se explica por la dispersión inducida a la traza sintética. La disminución de amplitudes debida a la dispersión se destacó en los patrones marcados con rectángulos de esquinas redondeadas. En ellas se muestran los patrones de amplitud que representan amplitudes altas de acuerdo a las escala de colores. Los rectángulos rojos marcan amplitudes que para la figura inferior suceden en frecuencias más negativas, con lo cual se explica por la distorsión de la fase que la dispersión produce y que redundo en las frecuencias instantáneas. La atenuación se representa con lo rectángulos azules. Para la figura superior contiene una variedad de colores que representan amplitudes altas. En la inferior, la mayoría de estos puntos representan amplitud baja, lo que indica que la dispersión viene ligada a la atenuación al disminuir las amplitudes.

plitudes) en la Figura 4.4a desaparece en la Figura 4.4b donde los colores tienden a ser fríos, lo cual indica bajas amplitudes. La disminución de las amplitudes es una confirmación de que la dispersión viene acompañada de la atenuación.

3. Las curvas de la derecha representan las amplitudes de los modos intrínsecos. En presencia de la dispersión (Figura 4.4b) los picos de amplitud tienden a atrasarse en el tiempo, en comparación de las amplitudes de los modos intrínsecos donde no se aplicó dispersión (Figura 4.4a).

En este plano tiempo frecuencia, las amplitudes máximas marcan los tiempos de llegada a las velocidades de grupo en la frecuencia en que ocurren, por lo cual, es posible determinar las velocidades de grupo a partir de ellas (Chen et al., 2002).

Los motivos de esta afirmación son los siguientes:

- A diferencia de la velocidad de fase, la velocidad de grupo se refiere al movimiento de un paquete de ondículas, que como tales, debe componerse de la interferencia de varias frecuencias, entre las que destaca la frecuencia de mayor energía, a la cual se le llama frecuencia dominante.
- Para paquetes de ondículas, la frecuencia dominante representa mejor al paquete por las razones que explican el método de fase estacionaria (Papoulis, 1962): (a) Porque la transformada inversa de Fourier, que permite convertir del dominio de la frecuencia al del tiempo, incluye términos de alta frecuencia que al oscilar rápidamente se anulan en la integral de Fourier, y por lo cual, (b) la frecuencia de mayor amplitud contribuye más a la integral de Fourier.
- Si de la transformación tiempo-frecuencia de una ondícula que resulte de un experimento sísmico, el tiempo divide a la distancia entre la fuente

y el receptor, se tiene un mapa de velocidades y frecuencia, en el cual, y por las dos razones anteriores, las máximas amplitudes representan las velocidades de grupo a las frecuencias en que estén ubicadas. Esta es la manera en que se obtienen curvas de dispersión a partir de las amplitudes máximas y con las que se calcula la dispersión (Pedersen, 2003; Holschneider et al., 2005).

En la Figura 4.5 se muestra una gráfica cruzada de tiempo contra frecuencias instantáneas sólo de las amplitud máximas de los espectros que se obtienen con la HHT. Estos puntos marcan la llegada de grupo en esas frecuencias. Esta gráfica no incluye dispersión. Las llegadas de grupo con dispersión se muestran en la Figura 4.5b. Al comparar ambas gráficas puede notarse cómo la dispersión afecta los tiempos de llegada al desplazarlos a frecuencias más negativas. También puede notarse que las amplitudes tienden a decrecer (de colores cálidos en la Figura 4.5a a colores fríos en la Figura 4.5b), lo que confirma que la dispersión está asociada con la atenuación de las amplitudes.

Con estos conceptos y la transformada de Hilbert-Huang se presenta un algoritmo para el filtrado por la dispersión.

4.5 Inversión de la atenuación y la corrección por la dispersión

Para una frecuencia dada ω_b la velocidad de grupo será $V(\omega_b)$ que se calcula con la Ecuación (4.37), y para una frecuencia $\omega_b + \Delta\omega$ se tendría una velocidad de grupo $V(\omega) = V(\omega_b) + \Delta V(\omega, \omega_b)$ determinada también por la Ecuación (4.37).

Al restar $V(\omega_b)$ a $V(\omega_b + \Delta\omega)$ las igualdades que corresponden de la Ecuación (4.37) para la velocidad de grupo, y al suponer que se cumple

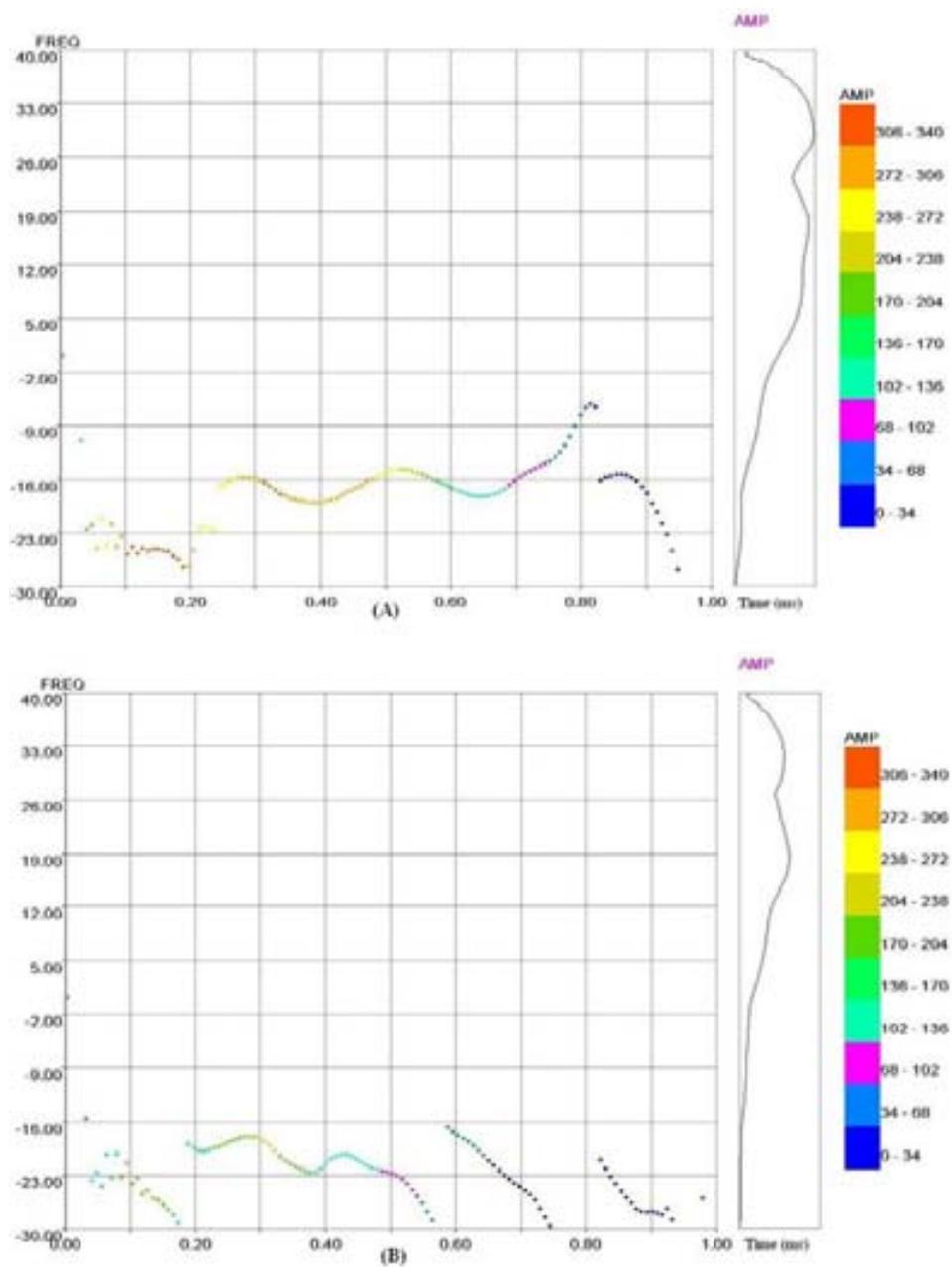


Figura 4.5: Figura superior: Máximas amplitudes de la transformada de Hilbert-Huang a la traza sin dispersión de la Figura 4.3. Figura inferior: Máximas amplitudes de la transformada de Hilbert-Huang a la traza con dispersión de la Figura 4.3.

la relación (4.45), se obtiene después de algunas simplificaciones:

$$\frac{\Delta V(\omega, \omega_b)}{V(\omega_b) + \Delta V(\omega, \omega_b)} = \frac{1}{\pi Q(\omega_b)} \log \left(\frac{\omega}{\omega_b} \right) \quad (4.58)$$

Esta ecuación es la misma que Robinson (1979) determinó para velocidades de fase (Ecuación 4.52). Siguiendo sus razonamientos y con los elementos que se dieron en la sección anterior, puede suponerse que:

- El factor Q es constante para el rango de frecuencias de los datos sísmicos.
- Que la fracción del lado izquierdo expresa también la razón entre la diferencia de tiempos de llegada en ambas velocidades, y el tiempo de llegada a la velocidad $V(\omega_b)$:

$$-\frac{\Delta t}{t_b} = \frac{\Delta V}{V(\omega_b) + \Delta V} \quad (4.59)$$

De esta manera se eliminan la frecuencia de referencia ω_0 y su velocidad correspondiente V_0 , y el factor de calidad Q se expresará en términos de una operación en los tiempos de llegada de grupo t_b que corresponde a la velocidad $V(\omega_b)$:

$$-\frac{\Delta t}{t_b} = \frac{1}{\pi Q} \log \left(\frac{\omega}{\omega_b} \right) \quad (4.60)$$

La llegada de grupo t_b será para una velocidad de grupo en la frecuencia ω_b cuando las coordenadas (t_b, ω_b) marquen una amplitud máxima local en la descomposición espectral que se determine por la transformada de Hilbert-Huang.

Supóngase que el tiempo t_b es la llegada de grupo a la frecuencia ω_b , y en el instantes anterior $t_a = t_b - \Delta t$ y posterior $t_c = t_b + \Delta t$ las llegadas de grupo corresponden a las frecuencias f_a y f_c .

En esta vecindad puede suponerse la siguiente aproximación lineal basándose en la Ecuación (4.60):

$$y = mx \quad (4.61)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{t-t_b}{t_b} \\ m &= \frac{1}{\pi Q} \\ x &= \log\left(\frac{\omega_i}{\omega_b}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.62)$$

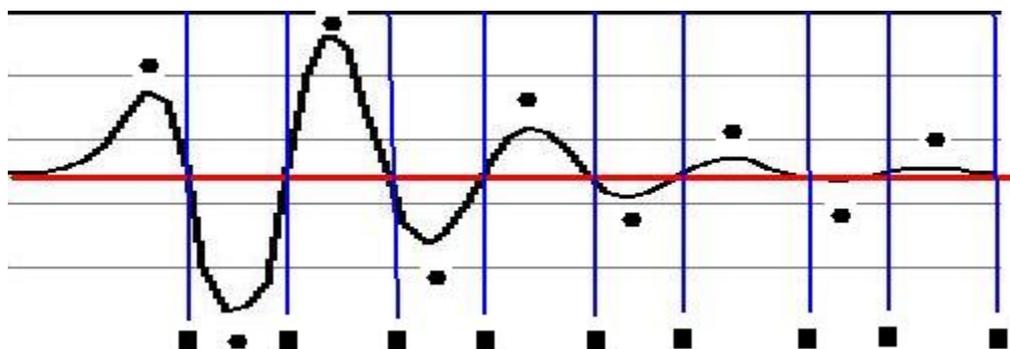


Figura 4.6: Las marcas cuadradas marcan donde acaba una ondícula y empieza otra. Las marcas circulares marcan cada pico o valle de cada ondícula.

Por lo que la pendiente m (y por lo tanto el factor de calidad Q) puede calcularse con una regresión lineal:

$$m = \frac{\sum xy}{\sum x^2} \quad (4.63)$$

donde la variable de tiempo corre desde t_a hasta t_c , y en general puede correr desde donde empieza y termina cada ondícula. En la Figura 4.6 se ilustra para una traza el principio y final de cada ondícula con marcas cuadradas.

Debido que el promedio de las frecuencias instantáneas están representadas precisamente en la frecuencia instantánea en los picos o valles (Brown, 1985) cuyos tiempos se denotará t_b para cada ondícula, se tomará como frecuencia de referencia la frecuencia espectral de la amplitud máxima en el pico o valle de cada ondícula, la cual se denotará con ω_b .

La regresión lineal directa de la Ecuación (4.63) puede determinar pendientes que no sean representativas para todos los datos, debido a que las frecuencias instantáneas se determinan de una derivación de la fase que en principio tienen una componente de ruido.

Para evitar este problema se emplea una regresión de mínimos cuadrados regularizada. Si esta regresión utiliza L pares de datos (x_i, y_i) comprendidos entre los límites de una ondícula, los cuales deben ajustarse a una recta $y = mx + c$, entonces esta relación puede expresarse en términos de toda la serie de datos:

$$\begin{aligned} y_1 &= mx_1 + c \\ y_2 &= mx_2 + c \\ &\dots \\ y_L &= mx_L + c \end{aligned} \tag{4.64}$$

que en notación matricial puede expresarse como:

$$Y = AM \tag{4.65}$$

donde Y es un vector de dimensión L que contiene a los datos y_i y A es una matriz de $L \times 2$ cuya primera columna contiene a los datos x_i y la segunda columna el número 1. El vector por encontrar M es de dos dimensiones, y contiene en su primera coordenada a la pendiente m y en la segunda coordenada el intercepto c .

La solución de este sistema de ecuaciones sobredeterminado es un resultado muy conocido:

$$M = (A^T A + \epsilon I)^{-1} A^T Y \quad (4.66)$$

donde I es la matriz identidad de 2×2 que se multiplica por un factor de regularización ϵ muy pequeño.

Debido a que el logaritmo de números menores o iguales a cero no tiene sentido, las frecuencias de las amplitudes máximas comprendidas entre los límites de una ondícula se normalizan a un rango en donde no haya riesgo de utilizar el logaritmo natural de factores del tipo ω_i/ω_b , por lo que este rango puede ser por ejemplo el intervalo $[1, 2]$. El escalamiento que se utiliza para esta normalización es lineal y no afecta la manera en que estas frecuencias expresan la dispersión, por medio de las ecuaciones que se han mostrado.

Por lo tanto, dado una traza de datos ondiculares como entrada, el algoritmo para obtener la atenuación será el siguiente:

1. Obtener la transformada de Hilbert-Huang a los datos e identificar la amplitud espectral máxima y frecuencia correspondiente.
2. Identificar en el tiempo los límites de cada ondícula de la traza original.
3. Normalizar las frecuencias de la amplitud máxima al intervalo $[1, 2]$.
4. Para cada ondícula, determinar la frecuencia de la amplitud máxima en el pico (o valle, y cuyos tiempos de ocurrencia serán t_b) y utilizarlas como frecuencias de referencia ω_b .
5. En el lapso de tiempo que comprende una ondícula, determinar los pares de datos (x_i, y_i) por medio de las ecuaciones (4.62).
6. Para el lapso del paso anterior, determinar la atenuación m con la regresión de mínimos cuadrados (Ecuación 4.66).

La corrección por la dispersión se realiza utilizando el principio de similitud que Robinson (1979) identificó. Esto significa construir una traza cuyas amplitudes sean:

$$\widehat{Tr}(t) = \frac{1}{\sigma(m, \omega_b, \omega)} Tr \left(\frac{t}{\sigma(m, \omega_b, \omega)} \right) \quad (4.67)$$

donde $Tr(t)$ es la traza dada, y

$$\sigma(m, \omega_b, \omega) = 1 - m \log \left(\frac{\omega}{\omega_b} \right) \quad (4.68)$$

donde ω y ω_b son las frecuencias que corresponden a la amplitud máxima expectral al tiempo t y al pico o valle de cada de la ondícula que le sea más próxima.

4.6 Resultados

Para probar la corrección por la dispersión se utilizó el campo de Boonsville, el cual se describió en un apartado en el capítulo dedicado a las capas delgadas.

En la Figura 4.7 se muestran imágenes de una sección en crossline. Al comparar las secciones que corresponden a los datos originales y los corregidos por al dispersión, puede notarse que hay una diferencia en el contraste que cada imagen muestra para delimitar los eventos.

Se presenta en la Figura 4.8 la sección transversal que muestra la impedancia del conglomerado combado en la misma sección en crossline que en la Figura 4.7 corresponde a un subintervalo en tiempo delimitado por las líneas rojas. Puede notarse, marcado con un círculo, el canal distributivo a la derecha de estas imágenes.

La Figura 4.9 muestra una sección en inline donde se ha localizado un karst, que de acuerdo a la interpretación de Hardage et al. (1996) se extiende

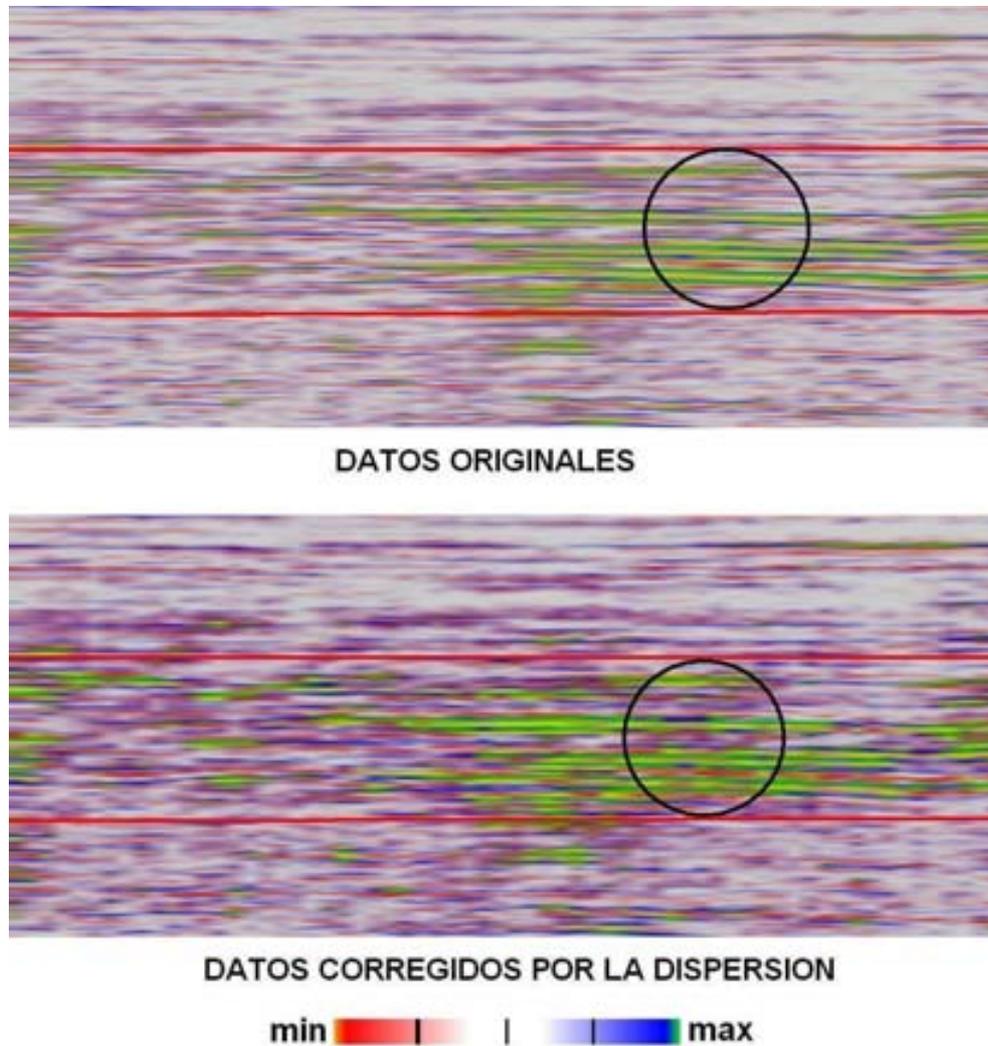


Figura 4.7: Imágenes de la sección en crossline 131 del campo de Boonsville. La imagen superior se tomó de los datos en esta sección sin hacerles ningún procesamiento. La imagen inferior fue tomada de esta sección tras aplicar el algoritmo de corrección de la dispersión. Las líneas rojas indican el nivel de tiempo en que se ubica el conglomerado combado, y y al empatar esta figura con la siguiente, con los círculos se localiza una vista transversal de un canal distributivo. Puede notarse que, en general, con el algoritmo de corrección de la dispersión se acentúan los eventos sísmicos.

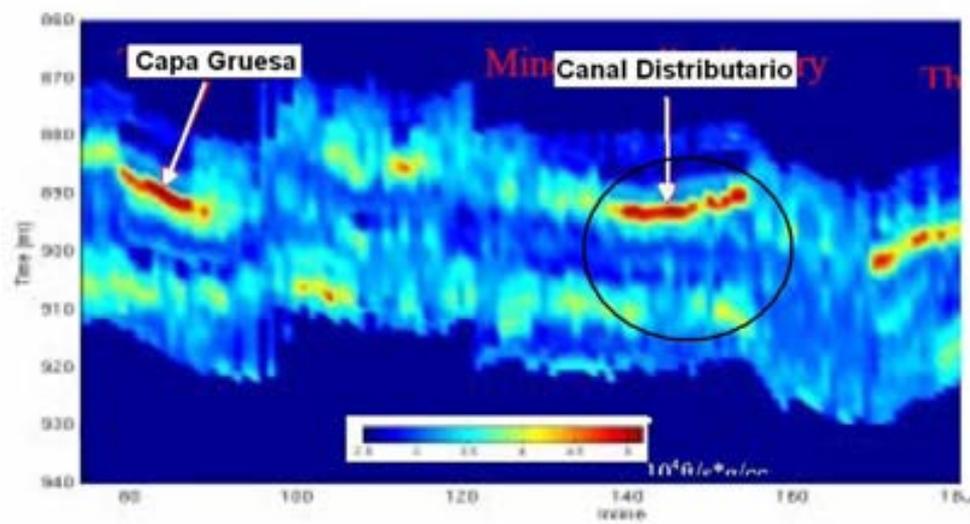


Figura 4.8: El conglomerado combado interpretado por Pennington et al. (2001). Los colores significan impedancias acústicas. Los tonos rojos y amarillos representan impedancias altas y los azules impedancias bajas. A la izquierda, Pennington et al. interpretaron una capa de grueso espesor y que está marcada con una flecha. A la derecha identificaron una vista transversal de un canal distributivo, que en la Figura 4.7 corresponde a un círculo.

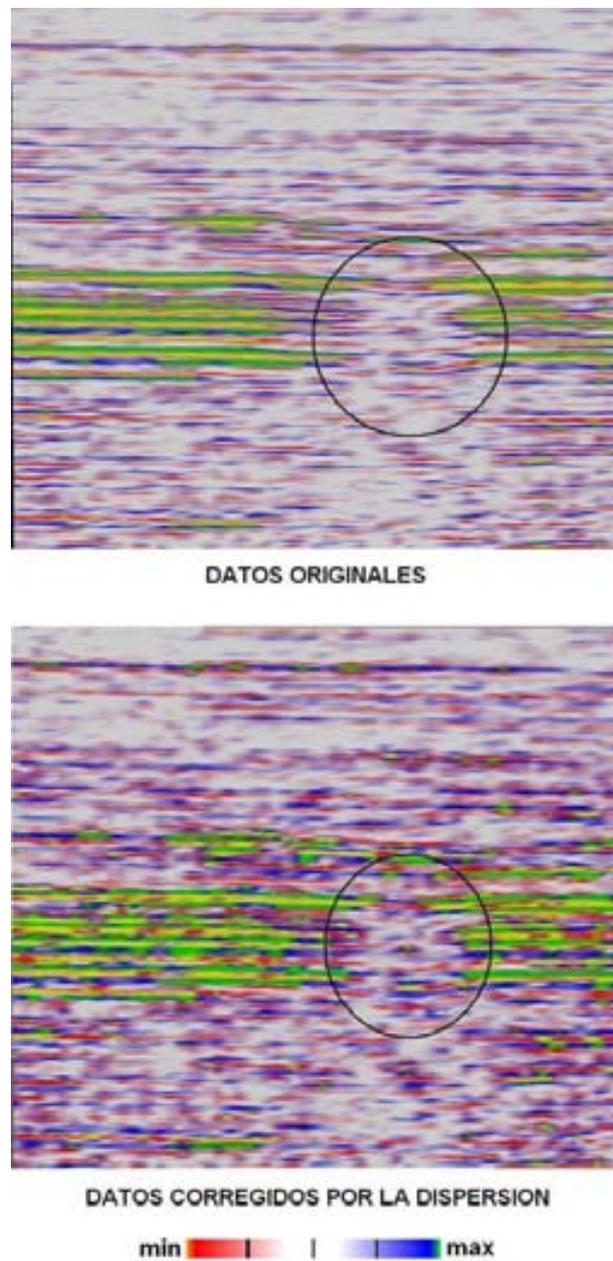


Figura 4.9: Imágenes de una sección en inline del campo de Boonsville. Los colores significan amplitudes de las ondículas. La imagen superior se produjo de los datos del cubo de Boonsville sin hacerles ningún procesamiento. La imagen en la parte inferior se obtuvo después de aplicar el algoritmo de corrección por dispersión a los datos localizados en esta sección en inline. Los círculos indican la perturbación en las ondículas debido a la presencia de un karst. Las diferencias consisten principalmente, en que la corrección de la dispersión acentúa más lo eventos sísmicos.

verticalmente y que en un estudio sísmico se interpreta como la perturbación vertical de las ondículas que en estas figuras se marcó con círculos. Al comparar estas imágenes se concluye también que la corrección por dispersión acentúa más los eventos en comparación de imágenes de los datos originales, y que en general, no altera sus tiempos de ocurrencia.

En la Figura 4.10 se muestra en la parte superior y al nivel de tiempo de 931 ms, la imagen en planta de los datos originales, y en la parte inferior de la misma figura se muestra la imagen que produjo la corrección por dispersión al mismo nivel de tiempo, interpretada de la misma forma que en la Figura 3.31, la cual es la imagen del atributo de máxima amplitud espectral.

Se puede notar en la Figura 4.10 que cuando se corrige por la dispersión, mucho de los rasgos interpretados coinciden con la Figura 3.31, en especial la plataforma de limestone a la izquierda, marcada con la letra A, el canal distributivo, marcado con la letra B, y se puede distinguir mejor el canal distal en forma de dona a la derecha, que se marcó con la letra C. Estos rasgos escasamente se pueden distinguir de la imagen de los datos originales.

4.7 Conclusiones

Con la transformada de Hilbert-Huang, la corrección por dispersión es un procedimiento de bajo costo que ayuda a mejorar las imágenes sísmicas. En especial, se mostró que:

- Esta corrección acentúa los eventos en secciones cruzadas sin alterar sus tiempos de ocurrencia.
- En vistas en planta, ayuda a mostrar rasgos que, para el cubo sísmico que se utilizó, concordaron con interpretaciones previas.

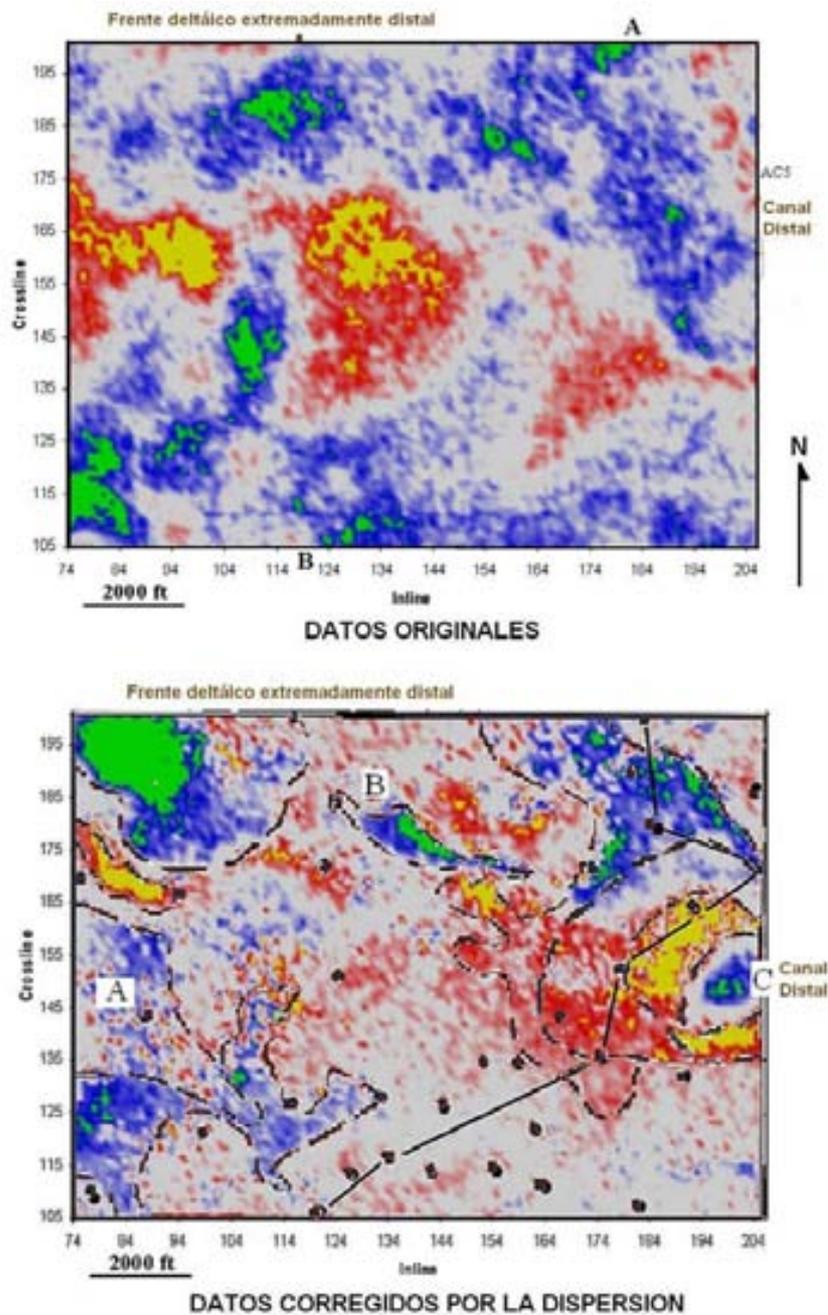


Figura 4.10: Imagen superior: Vista en planta a 931 ms de los datos originales del cubo sísmico del campo de Boonsville. En esta imagen no se puede identificar algunas de las estructuras que Pennington et al. (2001) interpretaron de este cubo sísmico. Imagen inferior: Vista en planta de la corrección por dispersión de la imagen en la figura superior. En esta imagen se pueden interpretar algunas de las estructuras geológicas que se muestran en la Figura 3.23. Por ejemplo: La plataforma de roca caliza a la izquierda marcado con la letra A; el canal distributivo marcado con la letra B que en la Figura 4.8 se muestra a la derecha con una flecha y en la Figura 4.7 se marcó con un círculo; y la estructura en forma de dona a la derecha que es un canal distal marcado con la letra C. La escala de colores es la misma que en las figuras anteriores.

Esto cobra su valor cuando uno se da cuenta de que las características geológicas que se pueden interpretar en el yacimiento de Boonsville, como son de ser de un ambiente deltáico en las que hay poca diferencia de velocidades y densidad entre las areniscas y las arcillas, las cuales forman capas de espesores muy pequeños, son factores que contribuyen a que haya poca reflectividad y por lo cual se interpreten, en primera instancia, pocas características geológicas si no es con la ayuda de atributos sísmicos, como el que se aplicó en este capítulo.

Capítulo 5

Implantación de la transformada de Hilbert-Huang

5.1 Introducción

La transformada de Hilbert-Huang es una herramienta adaptativa para analizar en tiempo y frecuencia series de tiempo. Utiliza la transformada de Hilbert y la derivada de la fase para calcular la frecuencia instantánea de los modos intrínsecos.

Sin embargo, la derivada es una operación que magnifica el ruido y, por otra parte, la cuadratura de una serie de tiempo tiene un error cuya existencia se puede consultar en el teorema de Nuttall (Huang y Shen, 2005).

Es por ello, que en este capítulo pruebo dos filtros derivadores y dos métodos para calcular la transformadas de Hilbert, y con ello se tienen cuatro posibles implementaciones de la transformada de Hilbert-Huang, que comparo con las imágenes del atributo de capas delgadas aplicado a los datos de Boonesville.

5.2 Filtros derivadores

La base de la transformada de Hilbert-Huang (HHT) es la derivada de la fase instantánea, a diferencia de otras transformadas en tiempo frecuencia, que usan la convolución con una base ortogonal fija.

Sin embargo, el ruido de los datos se magnifica con la operación de derivación, y es por ello que se prueban dos filtros derivadores: Uno que se basa en la expansión de la serie de Taylor de la función por derivar (Möller et al., 1998), y otro basado en filtros recursivos (Young y van Vliet, 1995).

5.2.1 Filtro de Möller et al. (1998)

La derivada de una función $f(t)$ se puede determinar por su convolución con un filtro w :

$$f_r^w(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]w\left(\frac{t}{T} - k\right) \quad (5.1)$$

donde T es el muestreo en tiempo de la serie $f(t)$ y por lo cual, $f[k] = f(kT)$.

La expansión en series de Taylor en una vecindad $\tau \in [0, 1]$ de esta convolución tiene la siguiente expresión:

$$f_r^w(t) = \sum_{n=0}^N a_n^w(\tau) f^n(t) + r_N^w(\tau) \quad (5.2)$$

donde

$$a_n^w(\tau) = \frac{T^n}{n!} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k - \tau)^n w(\tau - k) \quad (5.3)$$

$$r_N^w(\tau) \approx a_{N+1}^w(\tau) f^{N+1}(t)$$

donde el término r_N^w es el error de la función.

Un filtro w implanta la k -ésima derivada con función de error de N -ésimo orden si se cumplen las siguientes condiciones:

- $a_n^w = 0$ para $n < k$
- $a_n^w = 1$ para $n = k$
- $a_n^w = 0$ para $k < n < N$
- Que el filtro $w(\tau)$ pertenezca al espacio de funciones continuas C^M , es decir, que sus primeras M derivadas existan.

Por ejemplo, para encontrar un filtro w para la primera derivada con función de error de orden dos, deben realizarse las siguientes acciones:

1. Desarrollar a^n para $k = 1$, y con función de error de orden 2, $N = 2$. Por lo tanto, estos coeficientes serán:

$$a_0(\tau) = 0 \quad (5.4)$$

$$a_1(\tau) = 1 \quad (5.5)$$

donde la función de error es:

$$a_2(\tau) = 0 \quad (5.6)$$

2. Establecer una función base para cada $w_i(t)$, por ejemplo un polinomio de grado 3:

$$w_i(t) = a_i t^3 + b_i t^2 + c_i t + d \quad (5.7)$$

3. Para que el filtro w tenga una condición de suavidad debe estar en C^1 y para que exista continuidad que:

$$w_{i-1}(1) = w_i(0) \quad (5.8)$$

que son factores en a_{i-1} y a_i

Esto implica que debe resolverse un sistema de ecuaciones que resulta al desarrollar estos términos para los coeficientes de cada polinomio $w(t)$ restringido a las condiciones anteriores:

- De los términos de la condición 1 se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} w_{-2} + w_{-1} + w_0 + w_1 &= 0 & (5.9) \\ T(2 - \tau)w_{-2} + (1 - \tau)w_{-1} + (-\tau)w_0 + (-1 - \tau)w_1 &= 1 \end{aligned}$$

- Para la función de error:

$$(2 - \tau)^2 w_{-2} + (1 - \tau)^2 w_{-1} + (-\tau)^2 w_0 + (-1 - \tau)^2 w_1 = 0 \quad (5.10)$$

- Continuidad:

$$\begin{aligned} w_{-2}(0) &= 0 & w'_{-2}(0) &= 0 & (5.11) \\ w_{-2}(1) &= w_{-1}(0) & w'_{-2}(1) &= w'_{-1}(0) \\ w_{-1}(1) &= w_{-0}(0) & w'_{-1}(1) &= w'_0(0) \\ w_0(1) &= w_1(0) & w'_0(1) &= w'_1(0) \\ w_1(1) &= 0 & w'_1(1) &= 0 \end{aligned}$$

Con las condiciones de continuidad, los valores del filtro w para cada coeficiente estarán conectados no sólo en las curvas, sino también en las derivadas.

De las primeras tres condiciones se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$w_1 = w_1 \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned}
w_0 &= -3w_1 + \tau - \frac{3}{2} \\
w_{-1} &= 3w_1 - 2\tau + 2 \\
w_{-2} &= -w_1 + \tau - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Si se aproximan cada $w(\tau)$ con

$$w_k(\tau) = C_k\tau^2 + B_k\tau + A_k \quad (5.13)$$

Al sustituir estas ecuaciones en las de las condiciones de continuidad (5.11):

$$\left. \begin{array}{ll}
A_{-2} = 0 & B_{-2} = 0 \\
C_{-2} + B_{-2} + A_{-2} = A_{-1} & 2C_{-2} + B_{-2} = B_{-1} \\
C_{-1} + B_{-1} + A_{-1} = A_0 & 2C_{-1} + B_{-1} = B_0 \\
C_0 + B_0 + A_0 = A_1 & 2C_0 + B_0 = B_1 \\
C_1 + B_1 + A_1 = 0 & 2C_1 + B_1 = 0
\end{array} \right\} \quad (5.14)$$

Que al sustituir en el sistema de ecuaciones (5.12), se obtiene:

$$\left. \begin{array}{lll}
C_0 = -3C_1 & B_0 = -3B_1 + 1 & A_0 = -3A_1 - \frac{3}{2} \\
C_{-1} = 3C_1 & B_{-1} = 3B_1 - 2 & A_{-1} = 3A_1 + 2 \\
C_{-2} = -C_1 & B_{-2} = -B_1 + 1 & A_{-2} = -A_1 - \frac{1}{2}
\end{array} \right\} \quad (5.15)$$

Para simplificar, si se requiere un filtro antisimétrico (o de fase cero):

$$w_{k-1}(\tau) = -w_{-k}(1 - \tau) \quad (5.16)$$

da lugar a que:

$$\begin{aligned}
C_{k-1} &= C_{-k} \\
B_{k-1} &= 2C_{-k} + B_{-k} \\
A_{k-1} &= C_{-k} + B_{-k} + A_{-k}
\end{aligned} \quad (5.17)$$

Al resolver el sistema (5.12) se llega a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= -\frac{1}{2}\tau^2 + \tau - \frac{1}{2} \\
 w_0 &= \frac{3}{2}\tau^2 - 2\tau \\
 w_{-1} &= -\frac{3}{2}\tau^2 - \frac{1}{2} \\
 w_{-2} &= \frac{1}{2}\tau^2
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Esto se puede expresar en términos del producto de una matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ -1.5 & 1.0 & 0.5 \\ 1.5 & -2.0 & 0.0 \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

y un factor τ tal que el filtro es $C(\tau^3, \tau^2, \tau, 1)^T$.

Con el propósito de que las condiciones (5.4) y (5.5) se cumplan, los coeficientes de este filtro deben normalizarse. El factor que debe dividir a los coeficientes es:

$$n = \sum_{i=-2}^1 (i - \tau)w[i] \tag{5.20}$$

de modo que el filtro normalizado será:

$$\frac{1}{n}C(\tau^3, \tau^2, \tau, 1)^T \tag{5.21}$$

5.2.2 Filtros derivadores recursivos

Dada una serie de tiempo $f(t)$ se requiere que su derivada se determine con la convolución

$$f'(t) = \int f(u)g(u-t)du \quad (5.22)$$

donde el filtro $g(t)$ es una función de tipo gaussiano:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5.23)$$

Al convolucionar con una función gaussiana se tiene el efecto de un filtro pasabajas, es decir, que la derivada que se obtiene de esta expresión atenúa el ruido de la serie de tiempo.

Existe un algoritmo para calcular de manera rápida la convolución con una función de densidad gaussiana (Young y van Vliet, 1995).

Se tiene la siguiente aproximación numérica de la densidad gaussiana:

$$\tilde{g}(t) = \frac{a_0}{a_0 + a_2t^2 + a_4t^4 + a_6t^6} \quad (5.24)$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= 2.4990895 & a_2 &= 1.466003 \\ a_4 &= -0.024393 & a_6 &= 0.178257 \end{aligned} \quad (5.25)$$

y de que su transformada de Fourier es:

$$G(\omega) = \exp(-\sigma^2\omega^2/2) \quad (5.26)$$

La transformada de Laplace se obtiene al reemplazar ω por $s = jq$, donde se establecerá más adelante la correspondencia de q con σ :

$$G_q(s) = \frac{a_0}{a_0 - a_2q^2 + a_4q^4 - a_6q^6} \quad (5.27)$$

Las raíces del denominador de esta ecuación tienen multiplicidad 2:

$$\begin{aligned} m_0 &= 1.16680 \\ m_1 &= 1.10783 \\ m_2 &= 1.40586 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Entonces la Ecuación (5.27) se puede descomponer en el siguiente producto de fracciones parciales:

$$\begin{aligned} G_q(s) &= \frac{a_0}{(qs + m_0)(qs + m_1 + jm_2)(qs + m_1 - jm_2)} \\ &\times \frac{1}{(qs - m_0)(qs - m_1 - jm_2)(qs - m_1 + jm_2)} \end{aligned}$$

Los factores a la derecha de esta igualdad representan la transformada de Laplace de ecuaciones diferenciales, en la que una es causal y otra es anticausal. Estos factores se denotarán como $G_+(s)$ y $G_-(s)$.

Estas ecuaciones diferenciales se convierten a ecuaciones en diferencias al reemplazar s por $(1 - z^{-1})$ y obtener las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} H_+(z) &= \frac{1}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}} \\ H_-(z) &= \frac{B}{b_0 + b_1 z^1 + b_2 z^2 + b_3 z^3} \end{aligned} \tag{5.29}$$

donde las constantes son:

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= -q \frac{(2m_0 m_1 + m_1^2 + m_2^2 + (2m_0 + 4m_1)q + 3q^2)}{\text{scale}} \end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= q^2 \frac{(m_0 + 2m_1 + 3q)}{\text{scale}} \\
b_2 &= -\frac{q^3}{\text{scale}} \\
\text{scale} &= (m_0 + q)(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1q + q^2)
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Al producto

$$H(z) = H_+(z)H_-(z) \tag{5.32}$$

se le llama función de transferencia, y es la transformada Z de un filtro $h[n]$.

Entonces, la convolución de una serie de datos de entrada $\text{in}[n]$ con un filtro gaussiano corresponde al acoplamiento de dos filtros, cuyos términos son los coeficientes en los polinomios de los denominadores en las ecuaciones (5.29):

- Uno hacia adelante:

$$w[n] = \frac{\text{in}[n] - (b_1w[n-1] + b_2w[n-2] + b_3w[n-3])}{b_0} \tag{5.33}$$

- Que se acopla con uno hacia atrás:

$$\text{out}[n] = \frac{Bw[n] - (b_1\text{out}[n+1] + b_2\text{out}[n+2] + b_3\text{out}[n+3])}{b_0} \tag{5.34}$$

donde

$$B = \left(\frac{m_0(m_1^2 + m_2^2)}{\text{scale}} \right)^2 \tag{5.35}$$

La función de densidad gaussiana es par, por lo que un muestreo en ambos ejes contiene al cero. Si el filtro que se acaba de formular aproxima al gaussiano,

debe ser que es par, esto es que $h[n] = h[-n]$, lo cual es la definición de un filtro de fase cero.

Para hacer que el filtro recursivo $h[n]$ aproxime al filtro que resulta de muestrear una función de densidad gaussiana $g[n]$, se optimiza por q de modo que el error $\sum ||h[n] - g[n]||^2$ se minimice.

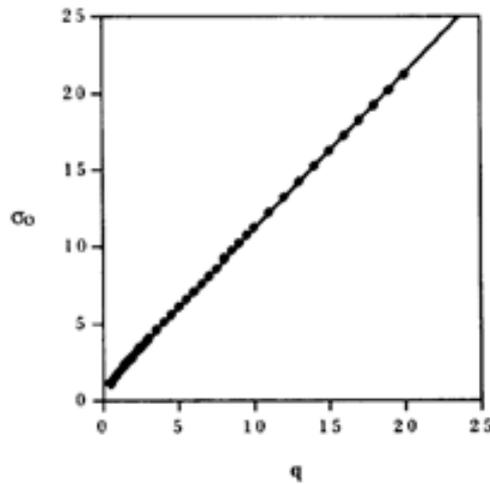


Figura 5.1: Correlación lineal entre los valores de σ y q .

Al aplicar el método de Levenberg-Marquardt para varios valores de q se encontró que su relación con σ fue la que se muestra en la Figura 5.1, con una tendencia casi lineal. Al hacer regresiones con estos datos se concluyó que la relación entre q y σ es (Young y van Vliet, 1995):

$$q(\sigma) = \begin{cases} 0.98711\sigma - 0.96330 & \sigma < 2.5 \\ 3.97156 - 4.14554\sqrt{1 - 0.26891\sigma} & 0.5 \leq \sigma \leq 2.5 \end{cases} \quad (5.36)$$

Otro método para encontrar q dado σ se basa en el segundo momento de un

filtro $h[n]$ y su relación con la segunda derivada de su función de transferencia (5.32):

$$\sigma^2 = \frac{\sum n^2 h[n]}{\sum h[n]} = \frac{\frac{d^2 H(z)}{dz^2} |_{z=1}}{H(z=1)} \quad (5.37)$$

Al evaluar esta función se obtiene que:

$$\sigma^2 = -\frac{2(b_2 b_3 + b_1(b_2 + 4b_3) + b_0(b_1 + 4b_2 + 9b_3))}{(b_0 + b_1 + b_2 + b_3)^2} \quad (5.38)$$

y sustituyendo por las constantes (5.31) se llega a la siguiente expresión:

$$\sigma^2 = 1.17709q^2 + 3.09727q \quad (5.39)$$

Si σ se conoce pero q no, esta ecuación es de segundo grado y se puede resolver por la fórmula general, la cual se factoriza de la siguiente manera:

$$q = \frac{b}{2a} \left(\sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}} - 1 \right) \quad (5.40)$$

De la Ecuación (5.39) se pueden identificar las constantes a , b y c y concluir que:

$$q(\sigma) = 1.31564(\sqrt{1 + 0.490811\sigma^2} - 1) \quad \sigma \geq 1 \quad (5.41)$$

Para calcular las derivadas, se reemplaza el filtro (5.33) por el siguiente:

$$w[n] = \frac{(\text{in}[n+1] - \text{in}[n-1]) - (b_1 w[n-1] + b_2 w[n-2] + b_3 w[n-3])}{b_0} \quad (5.42)$$

El arreglo in y out representan a los datos de entrada y su derivación resultante. Para esta exposición, la variable w es un arreglo auxiliar, que junto con el de salida debe limpiarse, esto es, establecer todos sus elementos cero.

Para lenguajes de programación como “C” o “C++” donde los arreglos empiezan en el cero (base cero), la recursión empieza para $n = 3$, puesto que para valores menores, la recursión define índices negativos. Esto hace que del arreglo de datos de entrada, los primeros tres no es posible calcular su derivada o filtrado.

5.3 Transformada de Hilbert

La transformada de Hilbert de una traza sísmica representa su energía potencial. Si los datos están centralizados (como están normalmente las trazas sísmicas), la transformada de Hilbert tiene el efecto de transformar los picos y valles en cruces con cero, y viceversa, los cruces con cero en picos y valles.

Esto se puede interpretar como si la fase de la traza original estuviera desplazada en un ángulo de $-\pi/2$, y por esta razón a la transformada de Hilbert también se le llama cuadratura.

Hay dos maneras de calcular la transformada de Hilbert (Taner, 1998):

- Con la transformada de Fourier.
- Con la convolución con el filtro de Hilbert:

$$(2/\pi)(\dots, -\frac{1}{5}, 0, -\frac{1}{3}, 0, -1, 0, 1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \dots) \quad (5.43)$$

que es la transformada de Hilbert de la función impulso $\delta(t)$.

- Aquí se agrega una tercera: La diagonalización de la transformada de Hilbert (Ekstedt y Lindberg, 2000).

La transformada de Fourier de una serie de tiempo de valores reales es un espectro de potencias simétrico con respecto al cero, es decir, par.

La transformada de Hilbert es la parte imaginaria de la señal analítica (Aki y Richards, 2002), y que se obtiene al hacer cero el espectro para frecuencias negativas, multiplicarlo por dos en las frecuencias positivas, y aplicar al espectro que resulta de estas operaciones, la transformada de Fourier inversa.

Sin embargo, este proceso tiene una complejidad computacional del doble de una transformada de Fourier, $N \log_2(N)$, donde N es la cardinalidad de los datos, que generalmente es una potencia de dos.

Este procedimiento es equivalente a aplicar el siguiente operador al espectro de potencias, también llamado operador de Hilbert:

$$H(\omega) = -i \operatorname{sign}(\omega) F(\omega) \quad (5.44)$$

El operador de Hilbert pertenece a la clase de operadores lineales, que tienen en común que en el dominio de la frecuencia su aplicación se expresan por medio del siguiente producto:

$$Kf(\omega) = \hat{\kappa}(\omega) f(\omega) \quad (5.45)$$

y por lo tanto, en el tiempo por una convolución:

$$Kf(t) = k(t) * f(t) \quad (5.46)$$

Por otra parte, una serie de tiempo $f(t)$ se puede analizar y reconstruir con la transformada ondicular, lo cual se expresa de la siguiente manera:

$$f(t) = \sum_l \langle f, \tilde{\phi}_{J,l} \rangle \phi_{J,l} + \sum_k \sum_l \langle f, \tilde{\psi}_{k,l} \rangle \psi_{k,l} \quad (5.47)$$

Las funciones de escala $\tilde{\phi}$ y de ondícula $\tilde{\psi}$ son de análisis, y la serie $f(t)$ se proyecta en ellas. Las funciones ϕ y ψ son de síntesis y la función $f(t)$ se reconstruye con ellas y con su representación ondicular.

Las funciones de análisis y de síntesis pueden ser las mismas, pero al distinguirlas de esta manera se permite que sean diferentes con la condición de que sean biortonormales.

El operador K^* , adjunto de K , es proporcional a esta dilatación por una constante: $k_j = k^j$. El operador de Hilbert $H(\omega)$ tiene esta propiedad.

La representación ondicular de la aplicación del operador H a una serie de tiempo $f(t)$ es:

$$\begin{aligned} Hf(t) &= \sum_{jl} \langle Hf, \tilde{\psi}_{jl} \rangle \psi_{jl} \\ &= \sum_{jl} \langle f, H^* \tilde{\psi}_{jl} \rangle \psi_{jl} \end{aligned} \quad (5.48)$$

donde H^* es el operador adjunto de H .

Es conveniente que los coeficientes de la representación ondicular se escriban en términos de una base que se construya especialmente y proporcional por un factor constante:

$$\langle f, H^* \tilde{\psi}_{jl} \rangle = k_j \langle f, \tilde{\psi}_{jl}^H \rangle \quad (5.49)$$

La diagonalización del operador H se define de esta manera. Los detalles de la construcción de esta base y la implementación para calcular la transformada de Hilbert, así como una introducción a la transformada ondicular pueden consultarse en el apéndice que se escribió sobre este tema.

5.4 Resultados

Con dos métodos de derivación (filtros de Gauss y Möller) y dos para calcular la transformada de Hilbert (convolución con la transformada de Hilbert de la función impulso y diagonalización del operador de Hilbert) se tienen cuatro modos diferentes en que se pueden implementar la transformada de Hilbert-Huang y los atributos de capas delgadas.

Debido a la naturaleza de los atributos de amplitud y frecuencia instantánea de los modos intrínsecos, se espera que:

- El método para calcular la transformada de Hilbert afecte sobre todo a las amplitudes instantáneas, y por lo tanto, a la máxima amplitud espectral.
- La transformada de Hilbert, así como el método para derivar la fase instantánea, afecta principalmente a la frecuencia asociada a la máxima amplitud espectral.

En la Tabla 5.1 se presentan las combinaciones de los métodos de transformada de Hilbert y de derivación. En las filas se enlistan los tipos de filtro derivador que se aplicaron: El filtro recursivo y el de Möller. En las columnas el método para determinar la transformada de Hilbert: Convolución con la transformada de la función impulso (que de ahora en adelante se le llamará filtro de Hilbert) y la diagonalización del operador de Hilbert. Es posible diagonalizar el operador de derivada, sin embargo en este análisis no se utiliza.

	Filtro de Hilbert	Diagonalización de Hilbert
Filtro Recursivo	(1)	(2)
Filtro de Möller	(3)	(4)

Tabla 5.1: Combinaciones de método de transformada de Hilbert y de filtro derivador para implantar la transformada de Hilbert-Huang.

Se utilizó el atributo de máxima amplitud espectral para averiguar si la manera en que se implementa la transformada de Hilbert afecta las amplitudes.

En la Figura 5.2a se presenta la imagen de la rebanada de tiempo a 931 ms del cubo de Boonsville que muestra por una parte la máxima amplitud espectral utilizando la diagonalización del operador de Hilbert (Figura 5.2a)

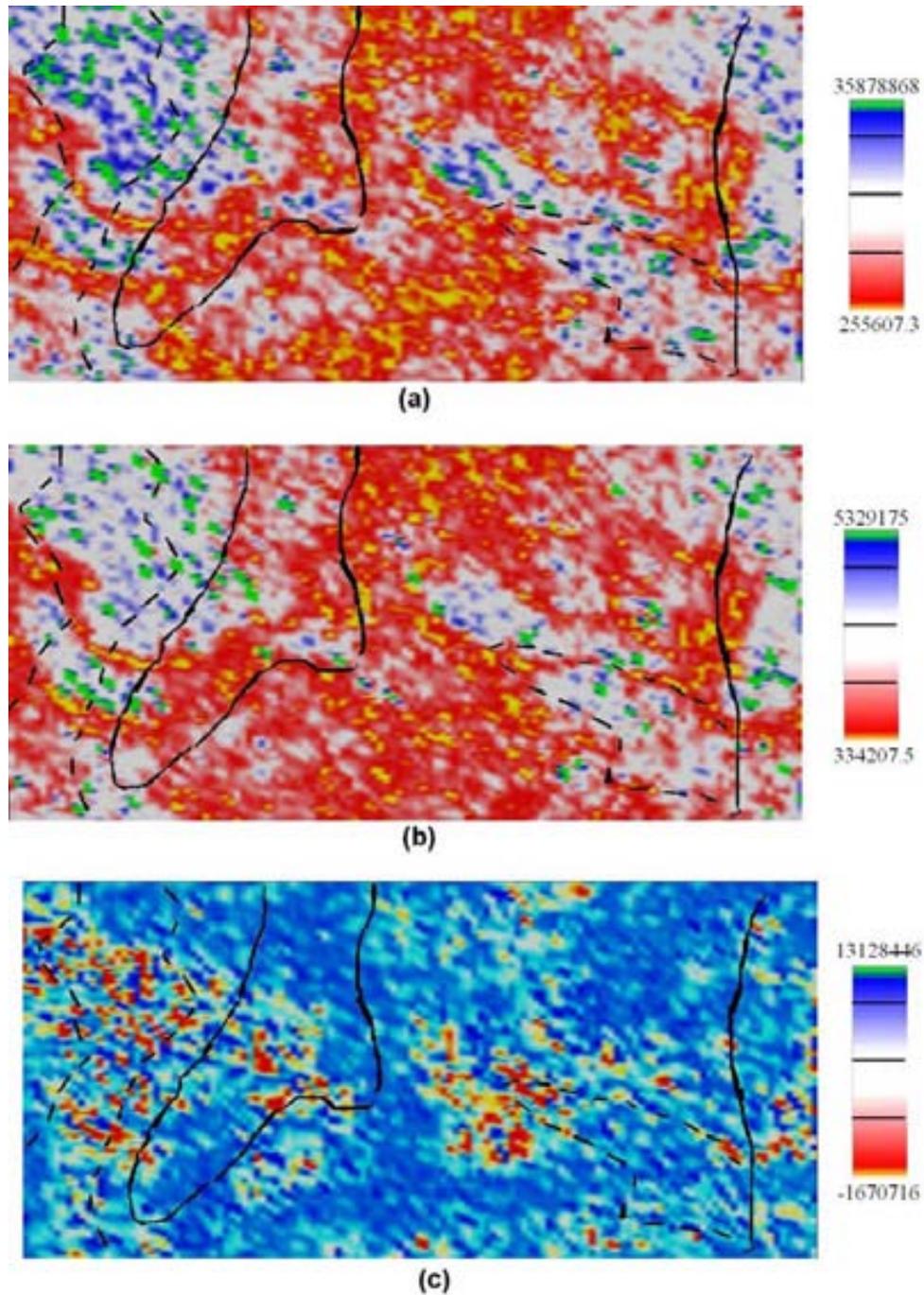


Figura 5.2: Amplitud espectral máxima de la transformada de Hilbert-Huang a 931 ms, utilizando (a) la diagonalización del operador de Hilbert, (b) el filtro de Hilbert. La diferencia entre la amplitud en (a) y (b) se despliega en (c). Las líneas negras son la interpretación que hicieron Pennington et al. (2001) y que se mostró en la Figura 3.23 en la esquina superior izquierda.

y y por otra, el filtro de Hilbert (Figura 5.2b). Se pueden notar muchas de las características geológicas que en el capítulo sobre capas delgadas que se mostraron de este cubo.

Sin embargo, al comparar estas imágenes puede notarse que si se usa la diagonalización del operador de Hilbert se obtienen amplitudes muy grandes o muy pequeñas, lo que contribuye a contrastar e interpretar mejor las características de relevancia geológica. Para apoyar esto, en la Figura 5.2 se muestra también la escala de colores para cada imagen, en la que se observa que el rango numérico de amplitudes determinado por la diagonalización del operador de Hilbert es de alrededor de 10 veces mayor que el que se determinó con el filtro de Hilbert.

La diferencia numérica de la amplitud calculada con estos dos métodos se muestra en la Figura 5.2c. De su escala de colores se infiere que las mayores diferencias se encuentran en el canal distributivo y en la plataforma de caliza a la izquierda de las imágenes, que son los rasgos en que la Figura 5.2a son más claros que en la Figura 5.2b.

Puede concluirse, que al determinar la amplitud máxima espectral con la diagonalización del operador de Hilbert se obtienen una escala más amplia de valores, lo cual se contrasta mejor las amplitudes, y permite interpretar más fácilmente los eventos geológicos. Esto es especialmente relevante en esta tesis, puesto que se ha presentado el uso de la la máxima amplitud espectral como atributo sísmico.

Por lo que respecta al filtro derivador, en la Figura 5.3 se muestran cuatro rebanadas de tiempo de cubo sísmico de Boonsville que se refieren a la frecuencia de la máxima amplitud espectral para cada una de las cuatro implementaciones en el orden que se mostró en la Tabla 5.1.

Para producir la primera fila de figuras se utilizó el filtro gaussiano recursivo. En comparación de las figuras en la segunda fila, para las que se utilizó

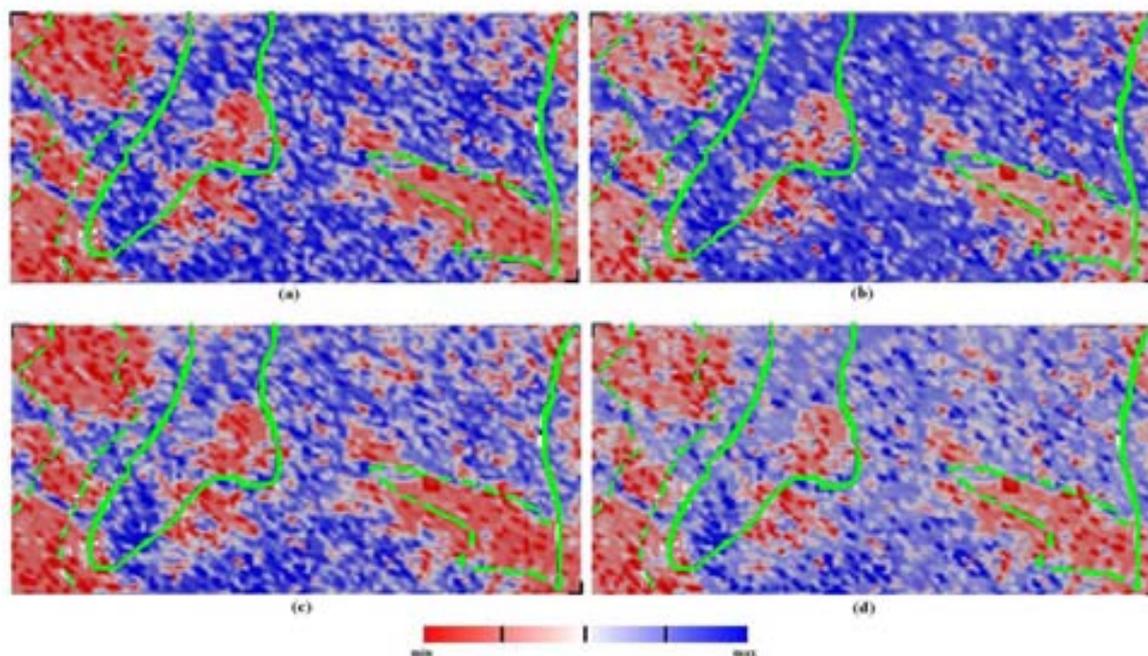


Figura 5.3: Frecuencia de la amplitud espectral máxima calculada con las implementaciones listadas en la Tabla 5.1. En la primera fila de figuras se utilizó el filtro derivador recursivo, mientras que en la segunda se utilizó el filtro de Möller. En la primera columna de figuras la transformada de filter se obtuvo con el filtro de Hilbert, mientras que en la segunda columna se empleó la diagonalización del operador de Hilbert. Al ubicar los métodos que se emplearon para cada figura, se puede enumerarlos para una en especial. Por ejemplo, la figura ubicada en la primera fila y segunda columna se produjo de la frecuencia de la amplitud máxima por medio de la transformada de Hilbert-Huang al usar: El filtro derivador recursivo y la diagonalización del operador de Hilbert. En especial, al usar estos métodos, esta figura es la más clara. Las líneas verdes son la interpretación que hicieron Pennington et al. (2001) y que se mostró en la Figura 3.23 en la esquina superior izquierda.

el filtro de Möller, se puede percibir que el ruido se filtra mejor con un filtro gaussiano.

También existen diferencias en las imágenes si se utiliza el filtro de Hilbert y la diagonalización del operador de Hilbert, que en la tabla de figuras 5.3 corresponde a la primera y segunda columna respectivamente, en las que se puede apreciar que las figuras de la segunda columna tiene un aspecto menos granuloso que la primera, por lo que se concluye que también el método para determinar la transformada de Hilbert contribuye a filtrar el ruido.

5.4.1 Exactitud de las transformadas de Hilbert

Nuttall (1966) propone un teorema para determinar la exactitud de la transformada de Hilbert $X_H(t)$ de una función del tipo

$$X(t) = r(t) \cos(2\pi f_0 t + \Phi(t)) \quad (5.50)$$

a su cuadratura, es decir, a la función

$$\widehat{X}(t) = r(t) \sin(2\pi f_0 t + \Phi(t)) \quad (5.51)$$

En el dominio del tiempo, este error se expresa como:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |X_H(t) - \widehat{X}(t)|^2 dt \quad (5.52)$$

En el dominio de la frecuencia se pueden encontrar los espectros que corresponden a $X_H(t)$ y a $\widehat{X}(t)$, que se denotarán como $S_H(f)$ y $S_X(f)$, y el error E se convierte en la siguiente expresión:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S_H(f) - S_X(f)|^2 df \quad (5.53)$$

Sea la función $f(t) = r(t) \exp(i\Phi(t))$, cuya transformada de Fourier es una función de valores complejos:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi t) f(t) dt \quad (5.54)$$

y sea $F^*(f)$ su complejo conjugado.

La parte real de $F(f - f_0)$, representa el espectro de $X(t)$ de la siguiente manera:

$$S(f) = (F(f - f_0) + F^*(f - f_0))/2 \quad (5.55)$$

y el espectro de su cuadratura es la parte imaginaria:

$$S_X(f) = (F(f - f_0) - F^*(-f - f_0))/2i \quad (5.56)$$

Por la definición de la transformada de Hilbert (Ecuación 5.44), el espectro $S_H(f)$ es:

$$\begin{aligned} S_H(f) &= -i \operatorname{sign}(f) S(f) \\ &= -i \operatorname{sign}(f) ((F(f - f_0) + F^*(-f - f_0))/2) \end{aligned} \quad (5.57)$$

Entonces la diferencia que expresa la Ecuación (5.53) se puede expresar en términos de las ecuaciones (5.56) y (5.57):

$$E = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \|F(f - f_0) - F^*(-f - f_0) - \operatorname{sign}(f)F(f - f_0) - \operatorname{sign}(f)F^*(-f - f_0)\|^2 df \quad (5.58)$$

Tras algunas simplificaciones, la igualdad anterior se puede expresar como:

$$E = \int_0^{\infty} \|F(-f - f_0)\|^2 df + \int_{-\infty}^0 \|F(f - f_0)\|^2 df = 2 \int_{-\infty}^{f_0} \|F(f)\|^2 df \quad (5.59)$$

Este error se puede normalizar por la energía de la serie original $X(t)$, y con ello obtener la siguiente función de error:

$$\text{ERROR}(f_0) = 2 \int_{-\infty}^{f_0} F(f) / \int_{-\infty}^{\infty} X(t)^2 dt \quad (5.60)$$

Por lo tanto, un procedimiento para medir la exactitud de la transformada de Hilbert determinada por algún medio será el siguiente:

1. Dada una serie de tiempo original $X(t)$ y su transformada de Hilbert $X_H(t)$ a la cual se medirá su exactitud, formar una serie tiempo de valores complejos $X(t) + iX_H(t)$, a la cual se determina su espectro complejo con la transformada de Fourier.
2. Encontrar f_0 de modo tal que $\text{ERROR}(f_0)$ sea mínimo.

De acuerdo con estas ecuaciones, el factor constante f_0 desplaza la función de fase $\Phi(t)$. En la cuadratura, el factor $f_0 + \Phi(t)$ deberá desplazarse 90 grados a la izquierda, de modo que la función $\cos(f_0 + \Phi(t))$ se convierta en $-\sin(f_0 + \Phi(t))$.

Si el método para calcular la transformada de Hilbert aproxima mal la cuadratura, se tendrá un factor f_0 con el que obtendrá un error, que se puede medir con la Ecuación 5.60.

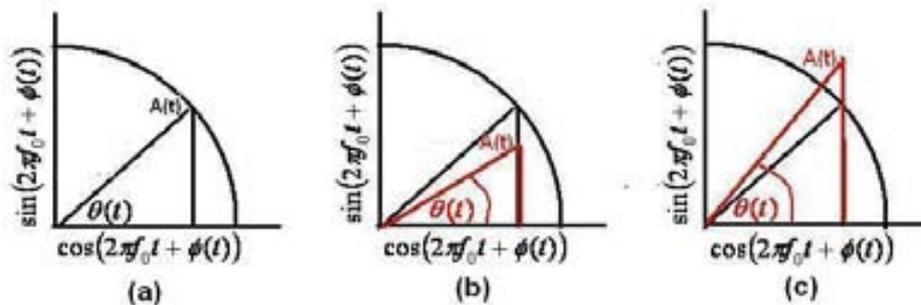


Figura 5.4: Estas figuras muestran, para un instante de tiempo t , que la amplitud y fase instantánea se calcularán incorrectamente si la transformada de Hilbert no aproxima bien a la cuadratura, ya sea que la subestime (Figura b) o que la sobrestime (Figura c). Los ejes horizontales representan la magnitud de la serie original, los verticales, los valores de la cuadratura y de la transformada de Hilbert. Las funciones $A(t)$ y $\theta(t)$ representan la amplitud y fase instantánea.

En la Figura 5.4 se muestra cómo se afectan los atributos de amplitud y fase instantáneos al utilizar una aproximación a la cuadratura con un error muy grande, ya sea al subestimar o al sobrestimar su verdadero valor.

Para probar la exactitud de la diagonalización del operador de Hilbert y del filtro de Hilbert, se aplicaron a una función del tipo $f(t) = \cos(bt)$, que junto con su cuadratura exacta, se muestran en la imagen en la parte superior de la Figura 5.5. Se puede notar que las ondículas que se obtuvieron con el filtro de Hilbert tiene, en picos y valles, una amplitud menor en comparación de la amplitud en los picos y valles que les corresponden en las ondículas de la cuadratura exacta.

En contraste, la amplitud de las ondículas que se obtuvieron con la diagonalización es casi igual a la cuadratura exacta, por lo que estas curvas se traslapan casi por completo.

En la imagen de la parte inferior de la Figura 5.5 se comparan las amplitudes instantáneas que se obtuvieron con estos métodos y la amplitud exacta, la cual siempre deber ser igual a uno. Se puede observar de esta imagen que las amplitudes instantáneas obtenidas con el filtro de Hilbert son por lo general menores a las amplitudes exactas, y fluctúan sinusoidalmente con valles de hasta 8% menor que el valor correcto, mientras que las amplitudes que se determinaron con la diagonalización del operador de Hilbert oscilan alrededor de los valores de la amplitud exacta con un error de hasta 4%.

Estas observaciones explican que el rango de amplitudes que se mostró en la Figura 5.2 para el filtro de Hilbert sea más angosto que para el filtro de Hilbert.

En la Figura 5.6 se muestran las correlaciones entre las fases instantáneas obtenidas de las partes imaginarias que se determinaron con estos métodos y las fases correctas. Con el filtro de Hilbert se muestra que hay pequeños errores en el intervalo en radianes de -1 a 1, cuyo número es aproximada-

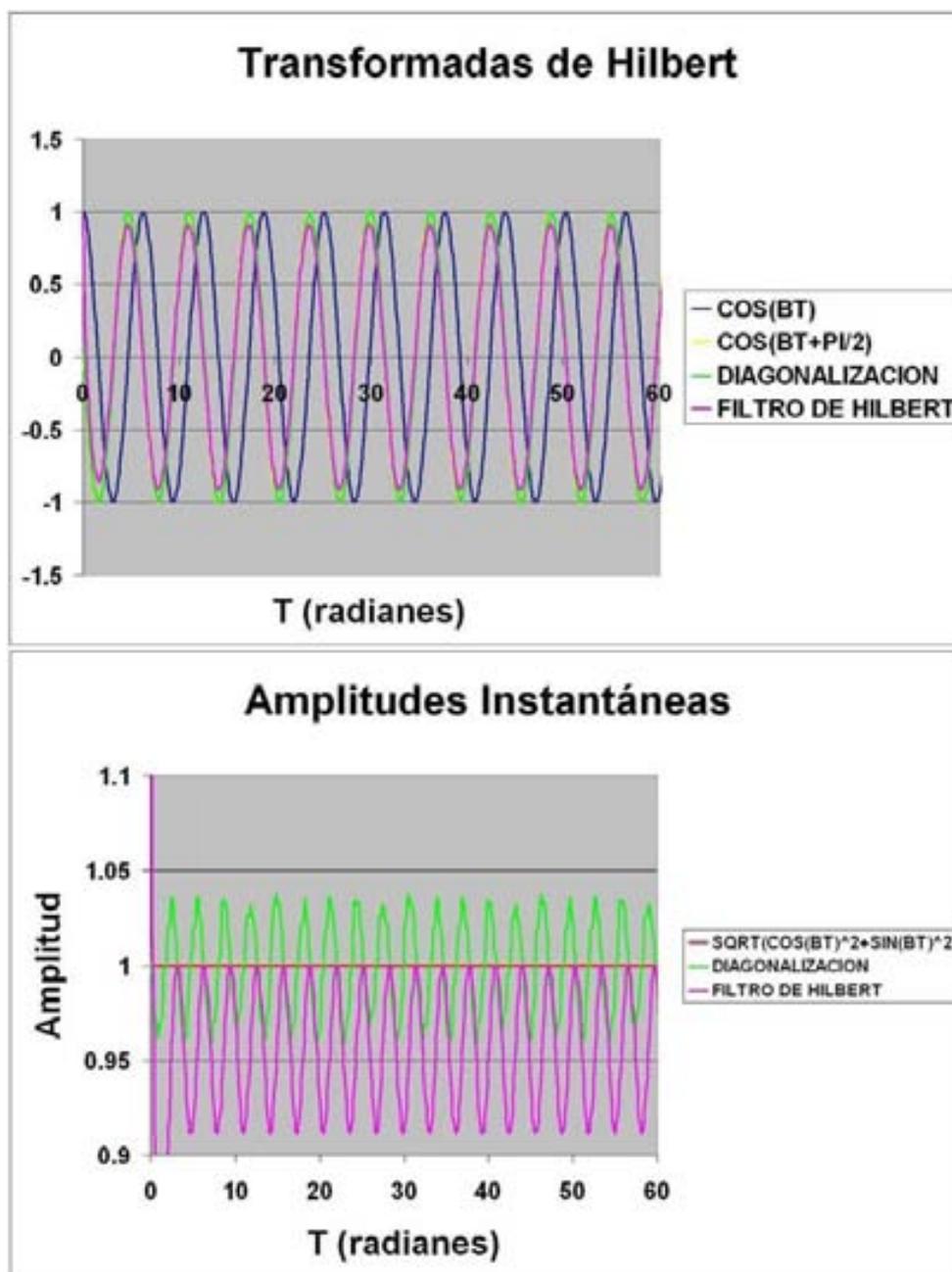


Figura 5.5: Con una función del tipo $\cos(bt)$ se determinaron las transformadas de Hilbert con el filtro de Hilbert y con la diagonalización del operador de Hilbert. En la imagen superior se muestran los resultados de ambas transformaciones, donde se puede ver que la que se obtuvo con el filtro de Hilbert tiene menor amplitud máxima y mínima que la serie original. En la imagen inferior se muestran las amplitudes instantáneas obtenidas con ambas transformaciones. La que se refiere al filtro de Hilbert siempre subestima a la amplitud correcta.

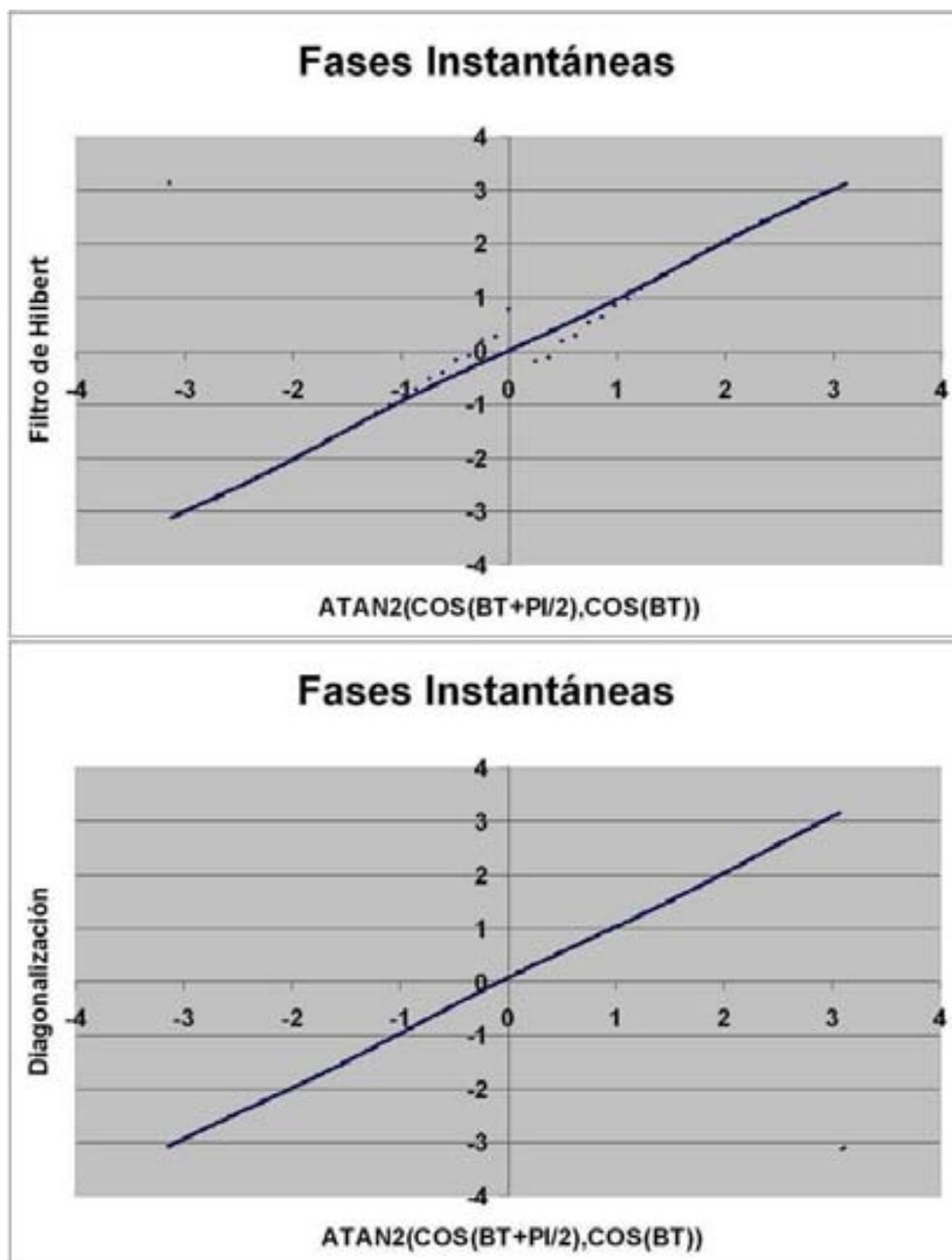


Figura 5.6: Correlaciones de la fase instantánea obtenidas con las transformadas de Hilbert y la fase correcta. La que se refiere al filtro de Hilbert tiene un error en un intervalo en radianes de -1 a 1.

mente igual al número de picos y valles de la serie original de datos, por lo que corresponden a las fases en donde el filtro de Hilbert subestima más la amplitud correcta (mostradas en la Figura 5.5), y por lo tanto se reproduce la situación de la Figura 5.4b, que ilustra cómo se afectan las fases instantáneas en caso de subestimar los valores de la cuadratura.

	Diagonalización	Filtro de Hilbert
f_0	3.055777	3.055781
Error	0.458245	0.913670

Tabla 5.2: Errores calculados con la Ecuación 5.60 utilizando las transformaciones de Hilbert que se determinaron con la diagonalización del operador de Hilbert y el Filtro de Hilbert.

Se determinó el error de cada método por medio de la Ecuación (5.60), minimizando su valor con el algoritmo de la razón dorada (Rao, 1996) e interpolando el espectro de potencias con splines cúbicos. Se obtuvieron los resultados de la Tabla 5.2, donde se muestra que la diagonalización del operador de Hilbert tiene el menor error.

5.5 Conclusiones

De estas pruebas se puede concluir que la manera en la que se calcula la transformada de Hilbert afecta a las amplitudes y fase instantáneas. De los métodos que se probaron, se encontraron diferencias en la máxima amplitud espectral.

Esto confirma que estos métodos determinan la cuadratura de una serie ondicular de datos de manera aproximada, cuyo error se describe con el teorema de Nuttall. Con la diagonalización del operador de Hilbert se aproxima a la cuadratura de manera más exacta, lo que permite obtener una escala más

amplia de amplitudes e imágenes en las que se contrastan mejor los eventos geológicos.

La derivación afecta al cálculo de las frecuencias. De los métodos que se utilizaron, se concluye que es mejor un filtro basado en una función gaussiana. El que aquí se describió y utilizó en estas pruebas resulta bastante eficiente en varios aspectos: En su implantación, puesto que se basa en una recursión, lo cual redundaba en menor tiempo de cómputo, y con resultados de los que puede percibirse que el ruido se filtra mejor.

Por lo tanto, una combinación eficiente sería usar un filtro recursivo gaussiano y la diagonalización del operador de Hilbert para determinar tanto la máxima amplitud espectral como su frecuencia correspondiente.

Capítulo 6

Mejoramiento de las imágenes de coherencia con métodos numéricos

6.1 Introducción

La coherencia es un ejemplo de un atributo sísmico que utiliza valores complejos y multi-traza. Es una medida de la similaridad de las trazas (Neidell y Taner, 1979) y ha sido usado en la delineación de los cambios laterales en la respuesta sísmica debido a cambios en la estructura, estratigrafía, litología, porosidad y la presencia de hidrocarburos. La primera versión de coherencia fue el coeficiente de correlación (Taner, 1979) usada para calcular velocidades sísmicas.

El cubo de coherencia (Bahorich y Farmer, 1995, 1996) mostró los potenciales de la coherencia para la interpretación sísmica, basándose en las correlaciones como un atributo por sí mismo . En particular, permitió el cálculo del echado y acimut de los reflectores.

El cubo de coherencia representó una innovación en la época en que se propuso. Es útil para delimitar fallas y delinear cambios sutiles en la estratigrafía (por ejemplo canales distributarios). Sin embargo, los intérpretes sísmicos se

dieron cuenta después de su introducción, que el cubo de coherencia no era robusto para datos con una baja relación de señal a ruido.

Debido a esto, Marfurt et al. (1998) usaron la semblanza como una medida generalizada de coherencia basándose en la idea de mover el tiempo de las trazas en proporción a los echados aparentes (apilado sesgado). Este proceso también se le conoce como transformada de Radon. La semblanza sesgada se define como:

$$C(\tau, p, q) = \max_{p, q} \frac{\sum_{k=-K}^K \left(\sum_{j=1}^J u(\tau - k\Delta t - px_j\Delta x - qy_j\Delta y, x_j, y_j) \right)^2}{J \sum_{k=-K}^K \sum_{i=-K}^K \sum_{j=-N}^N u(\tau - k\Delta t - px_j\Delta x - qy_j\Delta y, x_j, y_j)^2} \quad (6.1)$$

Donde (τ, p, q) representan que un evento plano en el tiempo τ tiene echados aparentes p y q en las direcciones en inline y crossline; Δx y Δy son el espaciamiento de las trazas en inline y crossline y Δt es el muestreo temporal. La ventana de análisis vertical tiene una extensión de w milisegundos con $2w/\Delta t$ muestras.

Al máximo valor de la Ecuación (6.1) se le conoce como coherencia C2 (Marfurt, et al., 1998). Los mismos autores proponen discretizar el dominio de la Ecuación (6.1) y buscar aquellos valores de las variables p y q con las cuales se maximiza. Los modos en que se realiza esta discretización y los procesos de búsqueda se le llamarán estrategias de búsqueda directa.

Se han propuesto otras versiones de coherencia, además de las que aquí se han mencionado, y entre los que se puede citar:

La coherencia basada en MUSIC (abreviación en inglés de “Clasificación multi-escala de señal”, Marfurt et al, 2000) la cual se basa en maximizar, en el dominio de la frecuencia y con respecto a los echados aparentes, una función objetivo que relaciona la energía en el espacio de la señal con la del espacio de ruido. También tenemos a la coherencia que se basa en estadística

de cuarto orden (Lu, et al., 2005).

La coherencia es una medida de la confiabilidad de la estimación de los echados aparentes. Los valores de coherencia pequeños significan que la similitud de las trazas también es pequeña y los patrones de amplitud no siguen un patrón definido con una clara orientación que los echados aparentes puedan describir. Si la similitud es más grande los patrones de amplitud se pueden definir mejor y su orientación claramente se puede establecer con los echados aparentes.

En todos estos atributos, los echados aparentes se obtienen al maximizar sus respectivas funciones de coherencia.

6.1.1 Aplicación a la coherencia C3

La siguiente generación de coherencia sísmica utiliza la matriz de covarianza (Gerztenkorn y Marfurt, 1999). Describiéndola de una manera directa, de una ventana espacial, generalmente con forma de rectángulo, que contiene J trazas y un intervalo de tiempo $[-K, K]$ de $2K + 1$ muestras, se construyen vectores de datos de dimensión J al tomar la amplitud de cada traza al nivel de tiempo t . La j -ésima componente de este vector es:

$$X_t(j) = u(t, x_j, y_j) \quad (6.2)$$

donde $u(t, x_j, y_j)$ representa un dato en un cubo sísmico al nivel t y coordenadas en inline y crossline (x_j, y_j) .

La matriz de covarianza de los vectores de datos es el promedio del producto exterior de estos vectores:

$$C = \frac{1}{2K + 1} \sum_{t=-K}^K X_t X_t^T \quad (6.3)$$

Los valores propios de la matriz son siempre más grandes o iguales a cero y la coherencia de eigenstructure es el cociente del primer valor propio, λ_1 , y la traza de C , $Tr(C)$:

$$C3 = \frac{\lambda_1}{Tr(C)} \quad (6.4)$$

Si los datos son coherentes por completo, los vectores de datos X serán idénticos y el rango de C es uno. Por lo tanto sus valores propios son cero excepto el primero, y debido a que la traza de C es la suma de sus valores propios (Golub y van Loan, 1983), resulta que el eigenstructure será uno.

El eigenstructure es la relación de la “energía” de los datos en las direcciones principales, apuntadas por el primer vector propio a la suma de su energía en las direcciones ortogonales, las cuales son cero en caso de coherencia total. Por el contrario, si no hay coherencia, el eigenstructure será un mínimo diferente de cero.

La coherencia C3 se puede poner en función de los echados aparentes y maximizarla con respecto a ellos. Para ver cómo se hace esto, primero los vectores de datos se sesgan por los echados

$$X_t^* = u(t - px_j\Delta x - qy_j\Delta y, x_j, y_j) \quad (6.5)$$

Y se construye una matriz de covarianza con ellos

$$C^* = \frac{1}{2K + 1} \sum_{t=-K}^K X_t^* (X_t^*)^T \quad (6.6)$$

Por lo que, el eigenstructure maximizado por los echados aparentes es

$$C3.5 = \max_{p,q} \frac{\lambda_1^*}{Tr(C^*)} \quad (6.7)$$

donde C^* , $Tr(C^*)$ y λ^* son respectivamente la matriz de covarianza, su traza y su primer valor propio. Esta matriz se determina al sesgar las trazas medio de la Ecuación (6.5) en función de los echados aparentes p y q .

Marfurt et al. (1999) la nombraron coherencia C3.5, y se dieron cuenta que no tiene buena resolución, y que además, produce un fenómeno llamado “saturación de echado”, es decir, que en presencia de fallas muy empinadas, los echados aparentes que se estiman corresponden a la falla y no a los reflectores. De esta manera, se asigna coherencia donde en realidad no existe y por lo cual, las fallas de echado muy grande permanecen ocultas.

Para evitar este problema, Marfurt et al. (1999) proponen suavizar con un filtro pasa-bajas los echados aparentes que se calculan para posiciones vecinas. Con los echados que resultan, las trazas sísmicas son sesgadas antes de calcular el eigenstructure. De esta manera se determina la coherencia C3.6.

6.1.2 Programa de trabajo

En las siguientes secciones se describen los resultados que se obtuvieron de las siguientes actividades:

- Se estudiaron los métodos para realizar maximizar la Ecuación (6.1), los cuales se comparan tanto en su tiempo de cómputo como en los resultados que se obtienen de ellos en imágenes sísmicas.

En particular, se compararon los métodos *síplex* y *Levenberg-Marquardt* con las estrategias de búsqueda directa, y concluyo que el método *síplex* es el más rápido y con el que se maximiza mejor la semblanza sesgada, y con lo cual se puede mejorar también la resolución de las imágenes de coherencia.

- Una vez que se formuló un algoritmo satisfactorio para maximizar la semblanza sesgada, lo apliqué en la coherencia C3: En lugar de calcular los echados aparentes al maximizar la función de eigenstructure (Ecuación 6.7), se determinaron primero al maximizar la función (Ecuación 6.1), y el resultado se usa para sesgar las trazas (Ecuación 6.3), con las cuales se determina la coherencia C3 con la función (Ecuación 6.5). En adelante, se nombrará a este atributo “eigenstructure corregido por echado”.

Se mostrará que con el eigenstructure corregido por el echado se tienen imágenes más nítidas en rebanadas de tiempo, en comparación de la semblanza sesgada y la coherencia C3.

6.2 Técnicas de Optimización

6.2.1 Estrategias de búsqueda directa

Marfurt et al. (1998) maximizan la función de coherencia con una búsqueda directa sobre un rango de los echados aparentes, donde este rango está definido por el usuario. Estos autores proponen discretizar este dominio en forma rectangular, polar o en forma de damas chinas (Figura 6.1). Las distancias $(\Delta p, \Delta q)$ entre los elementos discretos deberá ser

$$\Delta p \leq \frac{1}{2af_{\max}} \quad (6.8)$$

$$\Delta q \leq \frac{1}{2bf_{\max}} \quad (6.9)$$

De una ventana rectangular de trazas, a y b representan la mitad de su

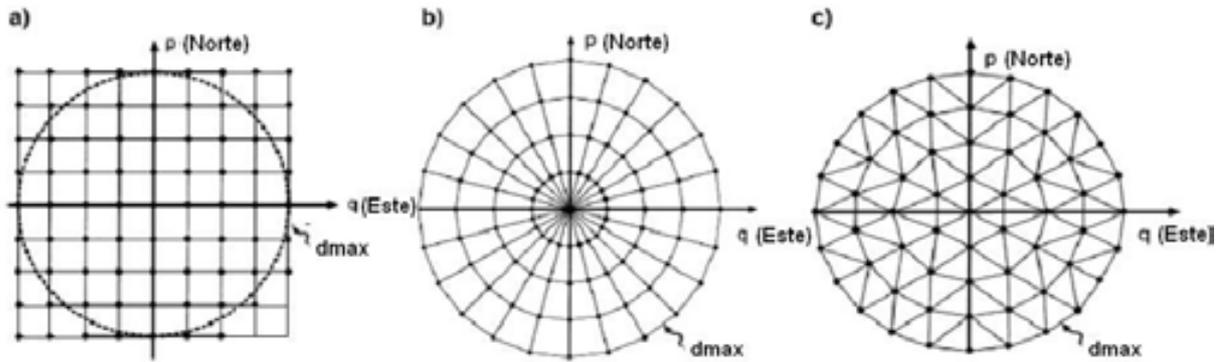


Figura 6.1: Discretización del dominio de echados aparentes (Marfurt et al., 1998). (a) Cuadrado, (b) Polar, (c) "Damas chinas".

extensión en ancho y largo, y f_{\max} es la frecuencia de Nyquist medida del muestreo temporal Δt de los datos sísmicos.

De esta manera, la optimización se reduce a calcular directamente la función de coherencia $C(\tau, p, q)$ probando $n_p \times n_q$ pares de echados (p_l, q_m) , donde $n_p = 2d_{\max}/\Delta p + 1$ y $n_q = 2d_{\max}/\Delta q + 1$ y conservando el par (p, q) que mejor maximice la semblanza sesgada (Ecuación 6.1). El intérprete puede definir el máximo echado verdadero d_{\max} .

Maximizar directamente no es eficiente debido a que, por una parte, si bien con una discretización muy fina se encontrará necesariamente un óptimo muy exacto, el costo en tiempo de cómputo que se emplea debe ser mayor, y por otra parte, si se requieren resultados más rápidos, se obtendrán sacrificando exactitud.

En el contexto de encontrar el echado en los cientos de posiciones en una sección de un cubo sísmico en tres dimensiones, es deseable tener resultados en menor tiempo, por lo que se propone utilizar métodos más elaborados

para optimizar la semejanza sesgada y averiguar si son mejores en exactitud y costo en tiempo de cómputo.

6.2.2 El método *símplex*

El método *símplex*, que es de búsqueda directa (Rao, 1996), se basa en un poliedro cuyos vértices son constituidos por puntos en el espacio de dimensión de las variables del problema al que se busca una solución. Este poliedro se denomina *símplex*. En cada iteración, el peor punto evaluado por la función objetivo se reemplaza por uno nuevo y el algoritmo puede crear un nuevo *símplex* del anterior. Este proceso permite al *símplex* evolucionar, es decir, alejarse de la región del peor punto del *simplex* previo.

Al buscar un máximo de la función de coherencia (Ecuación 6.1) se tiene un espacio bidimensional de los echados aparentes, por lo que el poliedro correspondiente es un triángulo (Figura 6.2).

La función objetivo indica la dirección en la que se conduce la búsqueda, junto con una serie de reglas: En primer lugar, se calcula el centroide del poliedro, el peor punto se refleja en este centroide (Figura 6.2a). Si al evaluar la función objetivo se obtiene un mejor valor que el mejor del *símplex*, entonces se ha entrado a una mejor región en el espacio de soluciones. En este caso, se expande en la dirección del centroide y del nuevo punto. Si el nuevo punto es peor que el peor punto del *símplex*, se considera que el *símplex* ha entrado en una peor región del espacio de soluciones. En este caso se aplica una contracción a lo largo de la dirección del centroide (Figura 6.2c). Finalmente, si el valor de la función es mejor que el peor punto pero peor que el segundo peor, esta contracción se limita como en la Figura 6.2d. La contracción se controla por un factor β (negativo en la Figura 6.2c y positivo en la Figura 6.2d), mientras la expansión se controla por un factor γ . De

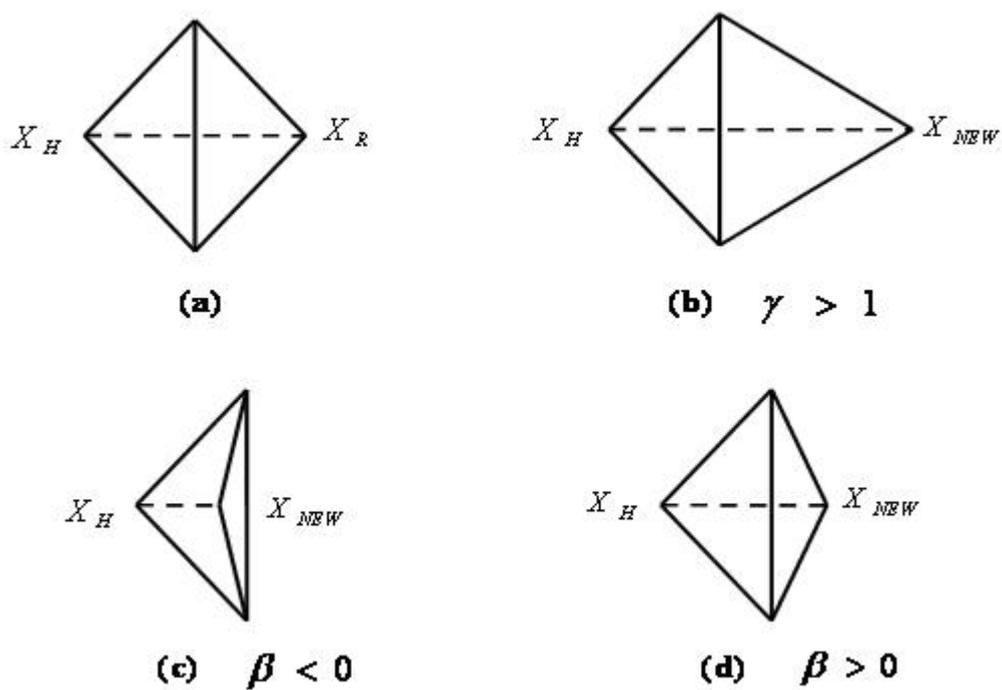


Figura 6.2: (a) El peor punto en el simplex X_H se refleja en el lado opuesto lo que resulta en el punto X_R . (b) A lo largo de esta reflexión se encuentra un punto nuevo usando un factor γ . (c) y (d) Cuando esta reflexión no constituye un punto mejor, se prueba un nuevo punto afuera y dentro del simplex.

esta manera, cada vez que un nuevo símplex se genera, la función objetivo se evalúa tres veces.

Esta búsqueda ingeniosa fue propuesta por Spendley et al. (1962) y modificada por Nelder y Mead (1965).

6.2.3 Implementación

Para un punto inicial (X_0, Y_0) y un tamaño del símplex α determinado por el valor mayor entre Δp y Δq , el resto de los vértices está dado por :

$$\begin{aligned}(X_1, Y_1) &= (X_0 + \Delta_1, Y_0 + \Delta_2) \\(X_2, Y_2) &= (X_0 + \Delta_2, Y_0 + \Delta_1)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}\alpha \\ \Delta_2 &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\alpha\end{aligned}\tag{6.10}$$

Se puede controlar el número de iteraciones ya sea limitándolas directamente, o bien, al fijar una tolerancia, esto es, se para el proceso cuando el valor absoluto de la diferencia del valor de la función objetivo en la iteración anterior y la previa sea menor que un umbral.

Ni el echado verdadero d_{\max} , ni la frecuencia de Nyquist f_{\max} de los datos son necesarios, variables que podrían no conocerse en primera instancia.

6.2.4 El algoritmo de Levenberg-Marquardt

Se basa en la familia de algoritmos de descenso empinado (Rao, 1996). A fin de maximizar una función de varias variables, un vector de una solución se mejora al agregar un factor de la forma $-(H - \lambda I)^{-1} \nabla f$, donde H y ∇f son el Hessiano y el gradiente de la función objetivo (Ecuación 6.1), I es la matriz identidad y λ es un factor de regularización. En la versión Levenberg-Marquardt, la traza de la matriz identidad se reemplaza con la traza del Hessiano a fin de evitar que el proceso de optimización “oscile” alrededor de una solución. Si la nueva solución es mejor que la vieja, el factor se reemplaza por su mitad, de otra manera por el doble de su valor.

La inversión de matrices es un problema para este algoritmo y este factor incrementa su costo computacional. Sin embargo, se escogió el algoritmo de Levenberg-Marquardt debido a que muchos algoritmos de descenso empinado requieren que la función objetivo sea maximizada a lo largo de una línea parametrizada entre dos vectores de soluciones propuestas, lo cual incrementa aún más su costo computacional y hace difícil su implantación.

Se dió como punto inicial de este algoritmo el mismo que se estableció para el método símplex.

6.3 Pruebas y resultados

En un primer paso, se hicieron varios experimentos numéricos para evaluar las estrategias directas y los algoritmos Levenberg-Marquardt y símplex con el fin de maximizar la coherencia C2. En un segundo paso, los resultados que se obtuvieron fueron aplicados al eigenstructure, lo cual resulta en el “eigenstructure corregido por el echado”, que se propuso anteriormente.

La primera prueba comprende un conjunto de 25000 trazas de un cubo de

datos reales, cuya separación entre trazas es de 30 m tanto en inline como en crossline. El número de trazas en la semblanza sesgada (Ecuación 6.1) fue de tres trazas en inline y crossline y una ventana de tiempo de $[-5\text{ms}, 5\text{ms}]$.

El tamaño del símplex inicial y de las discretizaciones fue igual al de la Ecuación (6.9), la tolerancia igual a $1.E-6$ para los algoritmos numéricos. Los resultados se ilustran para una rebanada de tiempo en la Figura 6.3.

Con las coherencias calculadas se obtienen imágenes de patrones similares. Sin embargo, con un análisis más detenido y utilizando la escala de colores, se puede decir que:

1. Los valores de coherencia que se obtienen con el símplex son más altos que los que se obtuvieron con el Levenberg-Marquardt.
2. Las imágenes para el algoritmo símplex son más nítidas. La primera característica implica que el símplex realiza maximizaciones de manera más eficiente, mientras que el Levenberg-Marquardt converge a máximos locales que no son mejores.

Para las estrategias de búsqueda directa, el tamaño de cada discretización fue de acuerdo a las ecuaciones (6.8) para la polar y de "damas chinas" y ecuaciones (6.8) y (6.9) para la cuadrada. El máximo echado fue de 0.5 ms/m . Hay que notar que el mismo rango y escala de colores se usó para desplegar estos resultados.

Las Figuras 6.3c a 6.3e presentan los resultados para las estrategias directas de damas chinas, polar y cuadrada, respectivamente. En general, la resolución es relativamente más alta con el algoritmo Levenberg-Marquardt, pero es mejor con el símplex, aunque también la estrategia de damas chinas muestra resultados equiparables.

Un análisis más cuidadoso permite observar que, para la estrategia de damas chinas los valores de coherencia disminuyeron alrededor del patrón

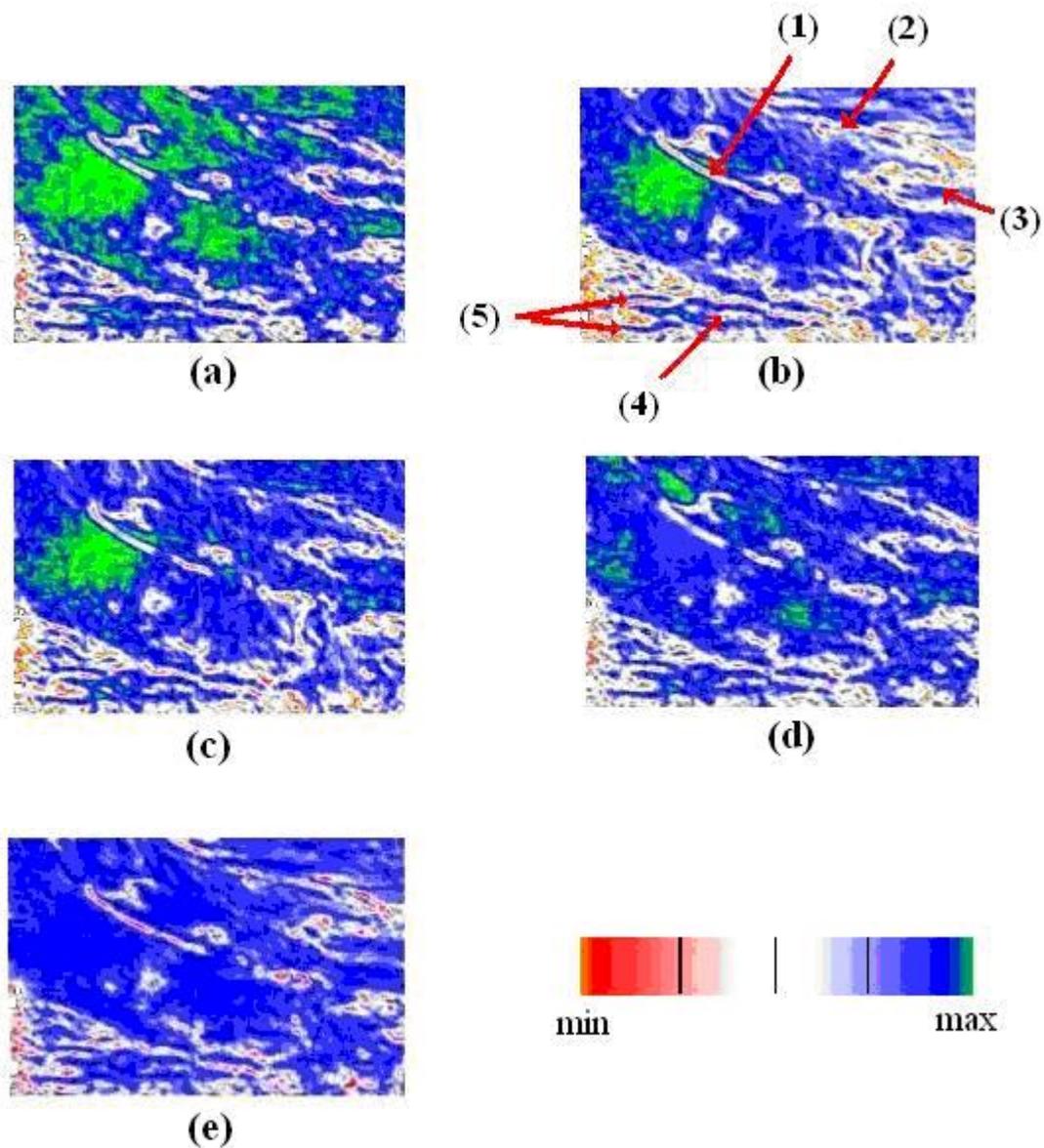


Figura 6.3: Imágenes de coherencia que se obtuvieron de los métodos que se analizaron: (a) Símplex; (b) Levenberg-Marquardt; Discretización para la búsqueda directa (c) de damas chinas; (d) polar; (e) cuadrada. Los tonos azules y verde indican coherencia altas y los tonos rojos y amarillo coherencia baja. De acuerdo a esto, en la figura (a) se determinaron mayores valores de coherencia (regiones verdes) en comparación de las otras figuras, por lo que la maximización de la semblanza sesgada con el método símplex es mejor. En cuanto a calidad de la imagen, los rasgos señalados con números se pueden distinguir mejor con el método símplex y Marquardt, escasamente con la estrategia de damas chinas y en menor grado en el resto de las figuras.

2. En general, los patrones 2 y 3 se hacen menos claros, lo que indica una pérdida de resolución. La resolución no mejora para las estrategias polar y cuadrada.

Este experimento indica que esta mejora en resolución está asociado a un mejor muestreo en el espacio de parámetros, es decir, que este muestreo es más fino si el simplex se hace más pequeño (Figura 6.2) a medida que las iteraciones avanzan alrededor de un máximo local de la semblanza sesgada, o se hace más grande alrededor de un mínimo local. Las búsquedas directas carecen de esta cualidad adaptativa y esto puede explicar porqué los rangos de coherencia que se estiman con el simplex son los más amplios entre las técnicas que se han analizado.

Se analizó la sensibilidad de las estrategias directas a los tamaños de discretización tanto en la máxima coherencia como en el tiempo que emplearon para determinar las imágenes (Figura 6.3).

Se puede observar de la Figura 6.4, que para todas las fracciones de la discretización establecidas por las ecuaciones (6.8) y (6.9), con el algoritmo simplex se determina la coherencia mayor, tiene una tendencia casi lineal y se puede concluir que es estable con respecto al tamaño de la discretización.

Esta clase de estabilidad no la tienen los métodos de búsqueda directa donde aparecen tendencias contradictorias. Si el tamaño de discretización es más grande, las estrategias “polar” y “cuadrada” tienden a producir valores más grandes de coherencia, mientras que la búsqueda de “damas chinas” tiene un comportamiento inverso: Para discretizaciones muy pequeñas se acerca (pero no mejora) la coherencia producida por el simplex.

Las tendencias en el tiempo de cómputo son más congruentes, como se puede ver en la Figura 6.4 en función del tamaño de la discretización. Si se emplean fracciones más pequeñas, se emplean más cantidad de tiempo, lo cual es más exagerado para las estrategias cuadrada y polar. La búsqueda

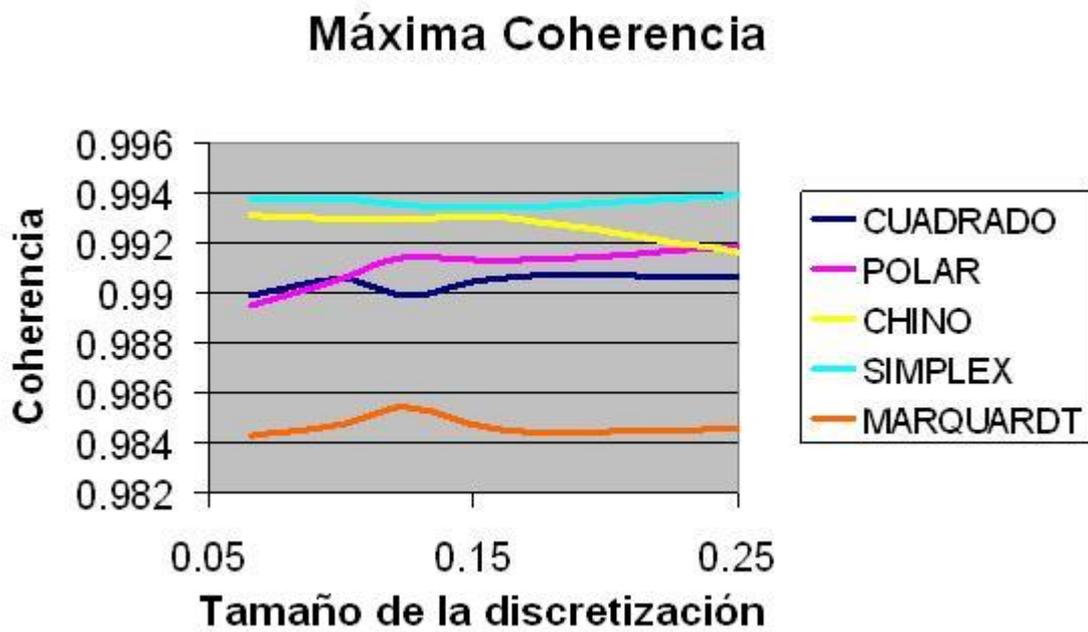


Figura 6.4: Coherencia máxima que se obtuvo de cada algoritmo para producir las imágenes en la Figura 6.3, en función de un porcentaje del tamaño de discretización dada por las ecuaciones (6.8) y (6.9).

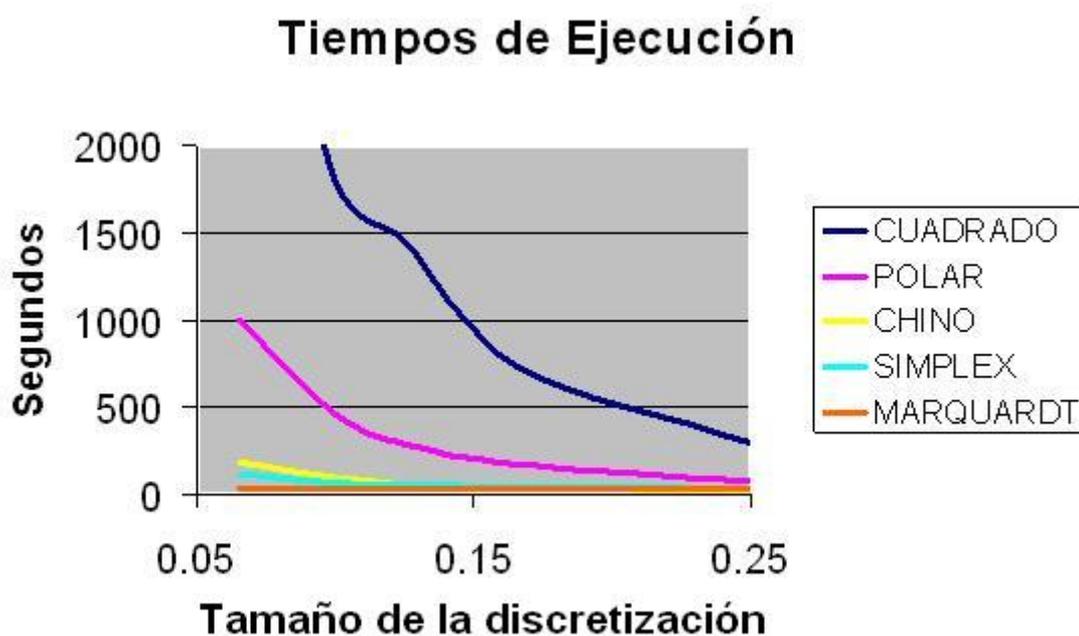


Figura 6.5: Tiempos que se emplearon con cada algoritmo para producir las imágenes en la Figura 6.3, en función del porcentaje del tamaño de discretización dada por las ecuaciones (6.8) y (6.9). En general, las estrategias de búsqueda directa emplean más tiempo de cómputo, en especial la búsqueda con malla cuadrada y polar. El tiempo que empleó la estrategia de damas chinas es comparable al tiempo que se usó al aplicar los métodos numéricos, de los cuales, el *simplex* fue el más rápido.

de damas chinas emplea casi para todos los casos un tiempo equiparable a los métodos numéricos, excepto para fracciones muy pequeñas (alrededor de $1/15$) donde se hace ligeramente mayor que el *síplex*. Por el contrario, los métodos numéricos emplean en comparación el menor tiempo de cómputo.

En las estrategias directas, la función objetivo se evalúa una vez por punto estudiado. El *Levenberg-Marquardt* requiere no sólo el valor de la función objetivo, sino también de sus derivadas que se calcula con diferencias finitas. En el algoritmo *síplex*, la función objetivo se evalúa tres veces como ya se ha mencionado. Sin embargo, el proceso converge hacia la solución más rápido debido a su naturaleza. Para la estrategia cuadrada se evalúan mucho más puntos que con la polar y de damas chinas.

Se supone que las operaciones de comparación en un programa de cómputo son costosas en tiempo por cada iteración, y que por lo tanto podrían contribuir más al tiempo que se necesita para las técnicas numéricas, pero de los experimentos que se realizaron, no parece ser un factor importante debido a que el *síplex* hace tres comparaciones por iteración y sin embargo es la técnica más rápida.

Se obtuvieron tiempos de procesamiento bajos con tolerancias grandes, y también se realizaron pruebas con diferentes tamaños de ventanas: Para una ventana de una muestra (4 ms) el proceso fue estable.

Finalmente, se aplicaron las técnicas que se acaban de analizar para calcular la coherencia C3. El procedimiento es el siguiente:

1. Calcular los echados aparentes. Esto se logra con la semblanza sesgada C2 y el algoritmo *síplex*.
2. Se sesgan las trazas con los echados calculados (Ecuación 6.5) y se forma una matriz de covarianza.
3. Se calcula la coherencia C3.

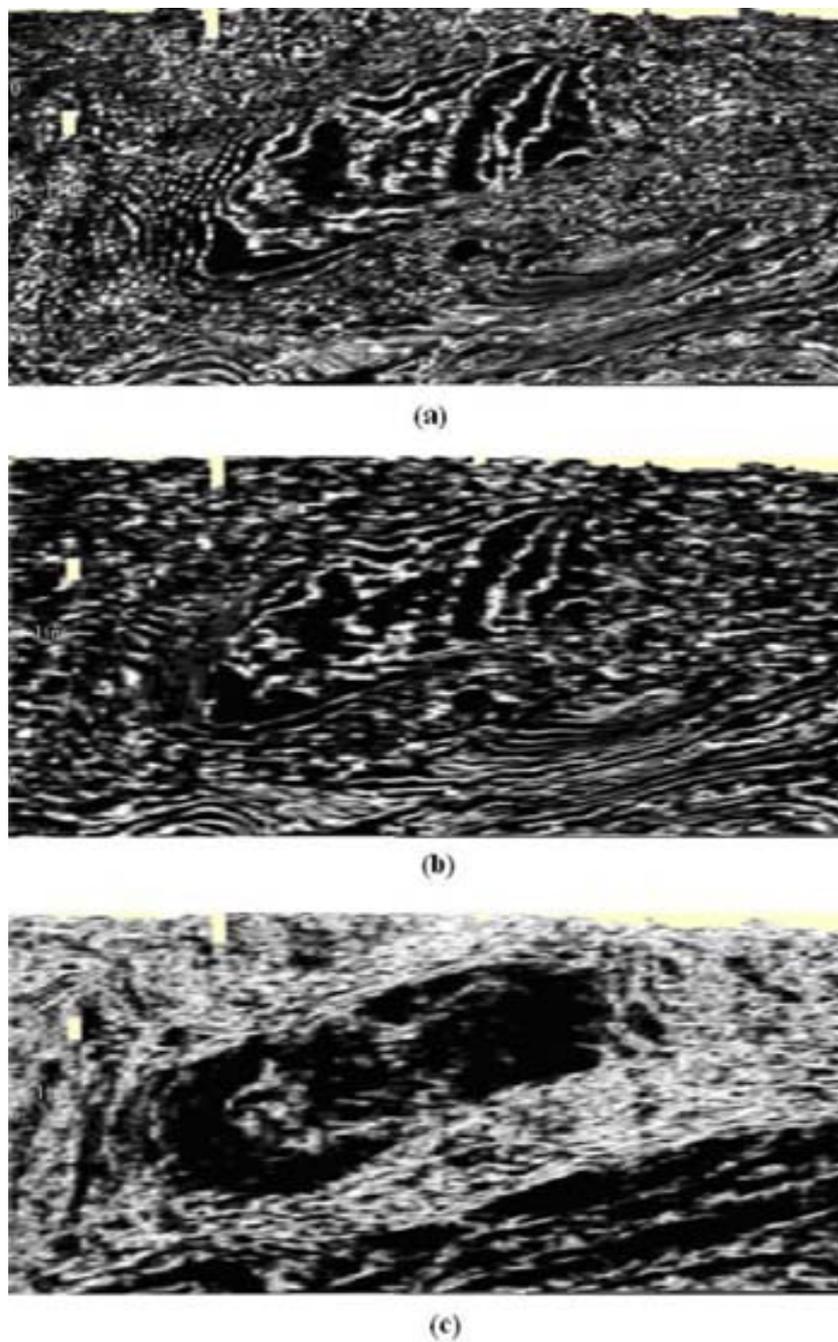


Figura 6.6: Imágenes en planta de un cubo sísmico que se determinaron al usar: (a) Eigenstructure corregido por el echado (b) Eigenstructure (c) Coherencia C2. Los tonos claros significan coherencia baja y los oscuros, coherencia alta. La Figura (a) muestra más rasgos estratigráficos en comparación de las otras imágenes, en especial de la Figura (c).

En la Figura 6.6 se puede ver que el eigenstructure corregido por el echado muestra rasgos más marcados que si no estuviera corregido, y se muestran patrones más continuos. Las figuras 6.6b y 6.6c permiten comparar las coherencias C2 y C3.

6.4 Conclusiones

Se ha demostrado que es posible determinar los echados aparentes de un conjunto de trazas sísmicas por medio de técnicas de optimización. Se probaron los algoritmos *símplex* y *Levenberg-Marquardt* con datos reales. Para evaluar su eficiencia, y para propósitos comparativos, se usaron también las técnicas de búsqueda directa con los mismos datos. De acuerdo con estas comparaciones, se concluye lo siguiente:

1. En general, las estrategias de búsqueda directa dan imágenes con buena resolución. Se obtienen resultados comparables con las búsquedas polar y de damas chinas. En comparación, la estrategia rectangular es la peor.
2. La búsqueda directa no es tan estable como los métodos numéricos en tiempo de cómputo y máxima coherencia con respecto al tamaño de la discretización.
3. De entre todas las técnicas que se analizaron, *símplex* fue la más rápida, con la que se determinaron los mayores valores de coherencia y con la que se produjo imágenes de mejor resolución.
4. Se requiere discretizaciones pequeñas para lograr resultados comparables con búsquedas directas, pero esto implica utilizar más tiempo de cómputo.

5. Se logró obtener una buena resolución con el eigenstructure corregido por el echado al mejorar la resolución de la coherencia C3. Esto nos indica que los atributos volumétricos (aquellos calculados en un subvolumen de los datos sísmicos en 3D) pueden mejorar su resolución si siguen el echado de los reflectores indicado por los echados aparentes.

Capítulo 7

Una solución de la saturación del echado con optimización multiobjetivo

7.1 Introduction

La detección de fallas es una parte importante en la interpretación sísmica. La localización de trampas de aceite y gas tiene como uno de sus principios el reconocimiento de fallas geológicas.

Se han propuesto muchos atributos sísmicos para detectar fallas en secciones cruzadas y rebanadas de tiempo en la que la coherencia es el atributo más importante para este propósito, lo cual se ha documentado en varias casos de estudio (Bahorich y Farmer, 1995; Gerztenkorn y Marfurt, 1999; Lu et al., 2005; Marfurt y Kirilin, 2000; Marfurt et al., 1999).

Sin embargo, las imágenes de los atributos de coherencia no siempre despliegan fallas muy empinadas en vistas en planta.

Marfurt et al. (1998) proponen una solución a este problema con un algoritmo que usa un conjunto de ventanas de trazas que se traslapan en el espacio. Se busca aquel par de echados aparentes que haga la coherencia máxima en una ventana en este conjunto.

Al comprender que la estimación de echados aparentes es un problema de optimización, y basándome en el atributo de Marfurt de coherencia en varias ventanas que cité en el párrafo anterior, propongo un atributo de coherencia basado en optimización multiobjetivo usando algoritmos evolutivos.

La solución de un problema multiobjetivo es un conjunto de soluciones, que mapeado en el espacio de las funciones objetivo determinan un conjunto de vectores no dominados, también conocido como “el frente de Pareto”. Se determina el centroide de este conjunto y se calculan sus echados aparentes respectivos con un proceso de inversión. El objetivo final es sesgar las trazas con estos echados y calcular una versión de la coherencia C3 (Gerztenkorn y Marfurt, 1999), que aquí se le llama “eigenstructure corregido por el echado”.

Como ejemplo, se usa una sección cruzada donde encontré una falla muy empinada, y se muestra que esta falla se delinea mejor con el atributo de coherencia multiobjetivo, en comparación de imágenes obtenidas con los atributos de coherencia ya publicados.

La optimización de la coherencia multiobjetivo implementa implícitamente un filtro no lineal, mejorado con el procedimiento de componentes principales que se utiliza para encontrar el centroide del frente de Pareto.

7.1.1 Definiciones

En una vecindad pequeña, se pueden seguir patrones similares de amplitud en un plano pequeño en el dominio del espacio-tiempo. La orientación de este plano se puede calcular a partir de su vector normal; la conversión a coordenadas esféricas resultan en dos ángulos: θ y ϕ .

El ángulo θ es el echado del plano. Cuando $\theta > 0$ el plano buza hacia abajo, y cuando $\theta < 0$ buza hacia arriba. Finalmente, si $\theta = 0$ es paralelo al plano $X - Y$.

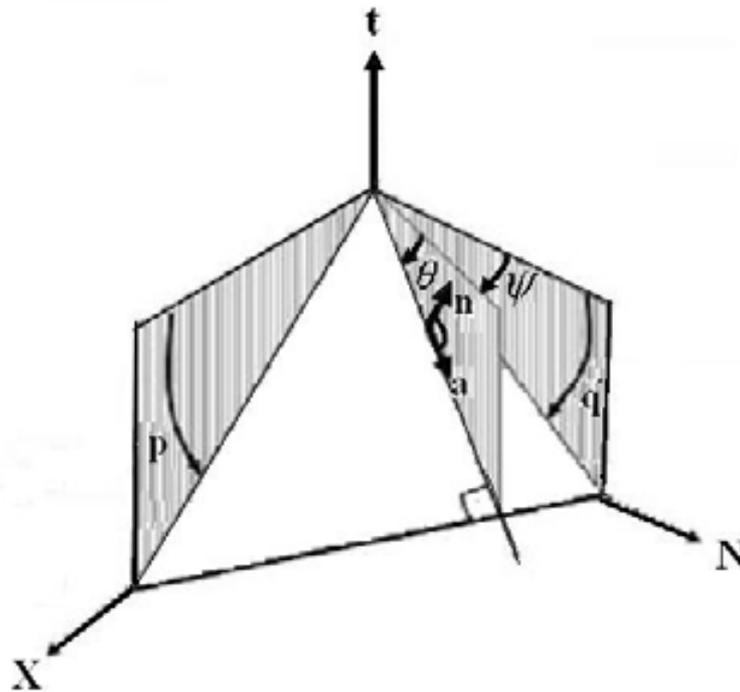


Figura 7.1: Supóngase un reflector plano con echado aparente θ y azimuth Φ . La proyección de plano del reflector en los planos $X - T$ y en $Y - T$ indican que las pendientes están definidas por los echados aparentes p y q .

La variable ψ es ángulo de rotación del plano con respecto al eje norte-sur Y , y se le conoce también como el “acimut”.

El rango del echado es $[-\pi/2, \pi/2]$ y el acimut es $[-\pi, \pi]$.

La proyección de este plano de amplitudes a los planos $X - T$ y $Y - T$ resultan en dos rectas con pendientes p y q , también conocidas como los echados aparentes, y se relacionan al ángulo de buzamiento θ (al que se conoce también como “echado verdadero”) y el acimut ψ con las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\psi &= \arccos(\sqrt{p^2 + q^2}) \\ \theta &= \arctan\left(\frac{q}{p}\right)\end{aligned}$$

Se estiman los echados aparentes al maximizar una función de coherencia, de la cual son variables.

Supóngase una ventana espacial de $2M + 1$ trazas en crossline (el eje X en un levantamiento sísmico) y $2N + 1$ en inline (el eje Y), con un espaciamiento de Δx y Δy entre cada traza con respecto a cada eje. Los índices de las trazas están numerados en el siguiente orden: $-M, -M + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, M - 1, M$ en crossline y en inline $-N, -N + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N - 1, N$.

El tiempo de muestreo es Δt y un intervalo de tiempo $[\tau - K\Delta t, \tau + K\Delta t]$, cuyo centro es un nivel de tiempo dado τ al que se refiere la coherencia calculada.

Con estas definiciones, la coherencia C2 (Marfurt et al., 1998), en la posición relativa $(0, 0)$ en la ventana espacial y el nivel de tiempo τ , está dada por la maximización de la función de la semblanza sesgada con respecto a los echados aparentes p y q :

$$C2(\tau) = \max_{p,q} \frac{\sum_{k=-K}^K \left(\sum_{i=-M}^M \sum_{j=-N}^N X(\tau - k\Delta t - pi\Delta x - qj\Delta y, i, j) \right)^2}{J \sum_{k=-K}^K \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-N}^N X(\tau - k\Delta t - pi\Delta x - qj\Delta y, i, j)^2} \quad (7.1)$$

donde $X(t, i, j)$ es la amplitud de las trazas en la coordenada local (i, j) en el tiempo t , y $J = (2M + 1)(2N + 1)$ es el número de trazas en la ventana espacial.

En esta ecuación, el tiempo de cada traza se sesga por un factor

$$pi\Delta x + qj\Delta y \quad (7.2)$$

Las unidades de los echados aparentes están dadas en milisegundos por metro (msecs/metro), lo que significa que p y q son lentitudes, o recíprocamente, que $1/p$ y $1/q$ son velocidades de fase.

Al desarrollar el cuadrado generalizado en el numerador de la Ecuación (7.1) se obtiene la suma de todas las correlaciones de amplitudes posibles entre cada par de trazas, la cual se normaliza por el denominador, que es la suma de las autocorrelaciones de cada traza, con el fin de que la coherencia $C2$ tenga un valor en el intervalo $[0, 1]$.

En una matriz T de $J \times J$ se puede colocar la correlación de la traza i con la j , en la intersección de su i -ésima fila y j -ésima columna y en la intersección de la j -ésima fila e i -ésima columna, y el lado derecho de la Ecuación (7.1) se puede escribir en la forma matricial:

$$C(\tau, p, q) = \frac{\mathbf{1}^T T \mathbf{1}}{Tr(T)} \quad (7.3)$$

donde $\mathbf{1}$ es un vector de dimensión J al cual contiene el factor $1/\sqrt{J}$ en cada coordenada, y $Tr(T)$ es la traza de la matriz T .

El vector $\mathbf{1}$ es un vector unitario fijo, pero si en la función (7.3) se generaliza a un vector variable \mathbf{u} , se tiene la siguiente función:

$$C(u, \tau, p, q)_{\|u\|=1} = \frac{u^T T u}{Tr(T)} \quad (7.4)$$

Se puede demostrar fácilmente que el máximo de esta función con respecto a \mathbf{u} es el primer vector propio E_1 de la matriz T :

$$\max_{\|u\|=1} C(u, \tau, p, q) = \frac{E_1^T T E_1}{Tr(T)} = \frac{\lambda_1}{Tr(T)} \quad (7.5)$$

donde λ_1 es el primer valor propio de T .

La coherencia de eigenstructure (Gerztenkorn y Marfurt, 1999) se define como:

$$C3(\tau) = C(E_1, \tau, 0, 0) = \frac{\lambda_1}{Tr(T)} \quad (7.6)$$

El eigenstructure corregido por el echado se define aquí en la Ecuación (7.5) con u igual al primer vector propio E_1 de la matriz T y se utilizan los echados aparentes \hat{p} y \hat{q} que se obtienen al maximizar la función (7.1) .

$$C3.7(p, q) = C(E_1, \tau, \hat{p}, \hat{q}) \quad (7.7)$$

7.1.2 El problema de la saturación del echado

La estimación del echado implica también calcular la pendiente de patrones similares de amplitud. Por ejemplo, la recta que siguen los picos de amplitud similar en la Figura 7.2a tiene un echado aparente marcada con pendiente m en esta figura.

Un esquema de una falla buzando con ángulo grande se muestra en la Figura 7.2b. Para maximizar la correlación entre las trazas en ambos lados

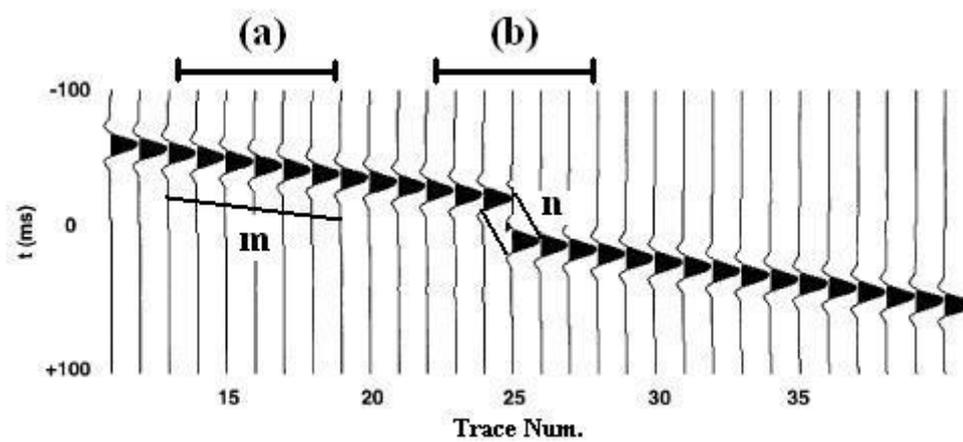


Figura 7.2: (a) Con (7.1) se pueden estimar el echados aparente (marcado como la pendiente m) al maximizar la similaridad de las trazas. (b) Con una discontinuidad, ¿Cuáles echados maximiza la similaridad? ¿La de los reflectores (pendiente m) o la de la la discontinuidad (pendiente n)?

de esta discontinuidad, se necesita el echado aparente de la discontinuidad, marcado con la pendiente n .

Esta es la causa de que en un caso real, esta clase de discontinuidades no siempre se podrán detectar en imágenes de rebanadas de tiempo, debido a la maximización de la coherencia con echados aparentes erróneos.

A este problema se le llamó saturación del echado (Marfurt et al., 1999), y se han propuesto varios algoritmos para resolverlo.

1. En posiciones vecinas, calcular los echados aparentes. Entonces suavizarlos con un filtro pasabajos y calcular la coherencia con los echados filtrados (Marfurt et al., 1999).
2. Se secciona un pequeño cubo de datos sísmicos de dimensiones preestablecidas, en varias subvolumenes en el tiempo y espacio, y para cada subvolumen se determina la coherencia. La coherencia del cubo seccionado sera la de aquel subvolumen con la máxima coherencia (Marfurt, 2006).

Basado en esta idea, propongo maximizar al mismo tiempo la coherencia en un conjunto de subvolumenes con respecto a los echados aparentes. La solución no es única, sino un conjunto de echados aparentes, tal que evaluado en la coherencia $C2$ de cada subvolumen forman un conjunto de vectores no dominados al cual se conoce como “el frente de Pareto”.

7.2 Optimización evolutiva multiobjetivo

Los algoritmos de optimización evolutiva representan un concepto nuevo especialmente útil para funciones objetivo no continuas, o con derivadas no definidas o difíciles de calcular.

Los óptimos que se determinan con los algoritmos evolutivos son de naturaleza global. Dependiendo de la función objetivo, los algoritmos de descenso empinado conducen el proceso de optimización a un óptimo local.

Los algoritmos evolutivos se basan en la evolución de un conjunto de soluciones candidato (llamados individuos), codificados en binario y mapeados al dominio del problema. A este conjunto se le conoce como la población.

Para un número fijo de veces (llamado generaciones), un pareja de soluciones se selecciona y se intercambian segmentos de bits (a este proceso se le llama cruza), o se se muta aleatoriamente su codificación, esto es, se invierte bits seleccionados.

Estos individuos se mapean al dominio del problema y se determina su valor por la función objetivo, conservando aquellas soluciones con la mejor evaluación.

Este proceso se puede extender a la optimización mutiobjetivo.

Con N funciones objetivo, f_i de M variables (X_1, \dots, X_M) en un dominio, el problema es maximizar la función vectorial (f_1, \dots, f_N) .

Si existe una solución, su evaluación proporcionará un vector $F_1 = (f_1^1, \dots, f_N^1)$. Si cualquier otro vector M -dimensional X le corresponde otro vector $F = (f_1, \dots, f_N)$, que no sea el máximo, sus coordenadas de F son menores o iguales a aquellas de F_1 .

Entonces, se dice que el vector F_1 domina a F y F_1 es un óptimo de Pareto. El óptimo de Pareto no es único, por lo que si existe otro vector F_2 no dominado por F_1 , y F_1 tampoco dominado por F_2 , entonces F_2 representan también una evaluación máxima.

Esto se debe a que si la solución (X_1^2, \dots, X_M^2) con evaluación F_2 se perturba por un factor ϵ en cualquier variable, para el vector correspondiente $(X_1^2, \dots, X_i + \epsilon, \dots, X_M^2)$, la función se evaluará en el vector F_* , puede ser dominada por F_1 o F_2 .

Por lo tanto, la solución de un problema multiobjetivo no es único, sino un conjunto no dominado de vectores evaluados. Este conjunto mapeado en el espacio de las funciones objetivo se le llama el “frente de Pareto” (Coello y Toscano, 2001).

Por ejemplo, sea el problema:

$$\begin{aligned}\min_{(x_1, x_2)} f_1(x_1, x_2) &= x_1 \\ \min_{(x_1, x_2)} f_2(x_1, x_2) &= \frac{x_1}{g(x_2)}\end{aligned}$$

donde

$$g(x_2) = 2.0 - \exp \left\{ - \left(\frac{x_2 - 0.2}{0.004} \right)^2 \right\} - \exp \left\{ - \left(\frac{x_2 - 0.6}{0.4} \right)^2 \right\} \quad (7.8)$$

y restringido a $0.1 < x_1 < 1.0$ y $0.1 < x_2 < 1.0$.

El frente de Pareto es un conjunto de vectores de dos coordenadas. Los vectores de este conjunto pueden desplegarse en un plano cartesiano, donde cada eje es la evaluación de una función objetivo. Cada vector no dominado marca un punto en este plano cartesiano, y todo el conjunto forma una curva que se muestra en la Figura 7.3.

Un problema de optimización multiobjetivo se puede resolver con algoritmos evolutivos. De los algoritmos en esta clase escogí por su velocidad el algoritmo micro-genético multiobjetivo (MGMO) (Coello-Coello y Toscano-Pulido, 2001).

El algoritmo MOGA usa dos poblaciones, una con tres miembros para cruzar y mutar, conservando los vectores no dominados. Los individuos en la otra población se incluyen aleatoriamente para cruzar, pero no cambian, con el fin de conservar la diversidad genética.

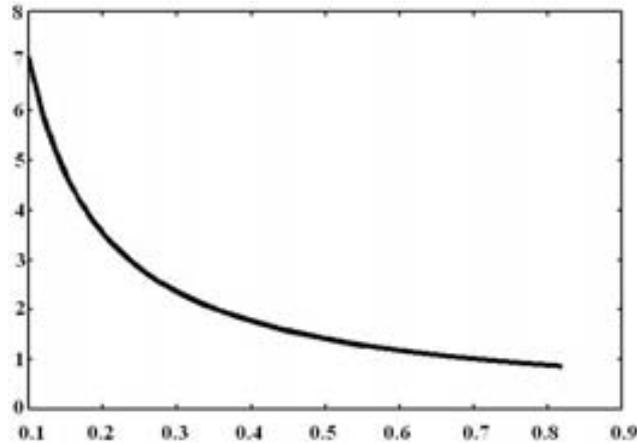


Figura 7.3: Frente de Pareto para el problema del ejemplo.

7.3 Coherencia multiobjetivo

Sea una ventana espacial de $2M + 1$ trazas en crossline y $2N + 1$ en inline. Recordando la numeración de las trazas que se estableció anteriormente, el centro de esta ventana se encuentra en la posición local $(0, 0)$. Alrededor de este centro hay 9 subventanas de tamaño $M + 1 \times N + 1$. De ahora en adelante, todas las sub-ventanas, con excepción de la central, se les llamará ventanas laterales (ver la Figura 7.4).

El centro $(0, 0)$ y este sistema de ventanas se traslada por todas las posiciones de referencia (x, y) al cual se asigna el valor de coherencia, que se explicará a continuación, y con los cuales se construyen imágenes de vistas en planta, que aquí se llamarán “rebanadas en tiempo” o “time slices”.

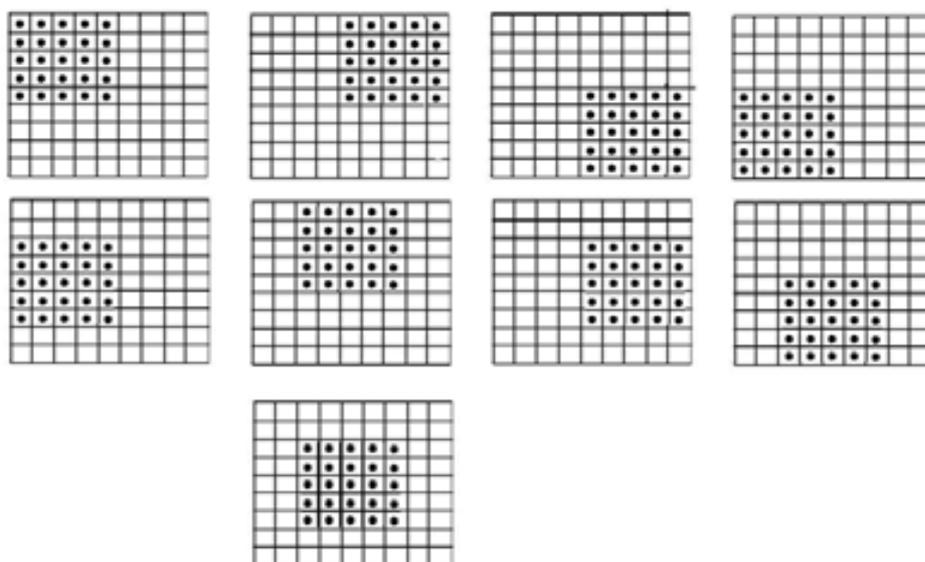


Figura 7.4: Con una ventana espacial de 9×9 trazas, hay 8 ventanas laterales de 3×3 trazas y una ventana central. En esta figura se señala con puntos el conjunto de trazas que se asigna a cada ventana, y de donde puede verse que hay posiciones que son comunes a dos o más ventanas, por lo cual, se traslapan. Esto es una característica del algoritmo que se describe en este capítulo, y que consiste en maximizar la coherencia simultáneamente con un algoritmo genético, y al frente de Pareto que resulta determinar su centroide al que se determina su echado correspondiente.

7.3.1 Coherencia de componentes principales

Los valores de coherencia que se calculan en las ventanas laterales y central constituyen una función vectorial de 9 dimensiones que se maximizará con el algoritmo micro-genético, y el frente de Pareto será un conjunto no dominado de vectores de coherencia con sus correspondientes echados aparentes.

Por otra parte, la “saturación del echado” puede afectar la coherencia en la ventana central que se puede contener una falla muy empinada (esto es, con echado aparente grande), y que las ventanas laterales la contienen parcialmente dependiendo de su tamaño (es decir de la magnitud de M y N) y el rumbo de la falla.

Sean los vectores $\{C_i^{\max}, i = 1, \dots, 9\}$ los vectores no dominados con la coherencia más grande en la i -ésima coordenada en comparación a todos los miembros del frente de Pareto. Estos vectores son susceptibles de verse afectados por la saturación del echado en la i -ésima coordenada, puesto que valores de coherencia grandes pueden ocultar una falla de echado muy empinado.

Sea C un vector miembro del frente de Pareto y no igual a ninguno de los vectores C_i^{\max} . Su coherencia en la i -ésima coordenada es menor que aquellos en el conjunto C_i^{\max} , $C(i) < C_i^{\max}(i)$. Por la condición de no dominancia, existe una coordenada j tal que $C_i^{\max}(j) < C(j)$.

Entonces, los echados aparentes correspondientes para C son menos afectados por la saturación del echado en comparación a cualquiera de los vectores de máxima coherencia, C_{\max}^i , en cualquier ventana.

En consecuencia, la saturación del echado afecta menos la coherencia en un vector no dominado C que no sea igual a ninguno de los vectores C_{\max}^i .

En especial, el vector menos afectados por la saturación del echado C^* deben tener la misma distancia a cualquiera de los vectores máximos C_{\max}^i . Esto significa que C^* bien puede ser el centroide geométrico del espacio en 9

dimensiones que ocupan los vectores no dominados.

Para encontrar este centroide, la matriz de covarianza de los vectores no dominados se calcula como:

$$Cov = \frac{1}{L} \sum C_i C_i^T \quad (7.9)$$

y se calculan su primer valor propio β_1 y vector propio correspondiente U_1 . Supóngase que la cardinalidad del frente de Pareto es L .

Por definición, el primer valor propio es la proyección media de los vectores no dominados en el primer vector propio:

$$\beta_1 = E(\langle C_i, U_1 \rangle) \quad (7.10)$$

Por lo tanto, el primer vector propio es un centroide de los vectores normalizados del frente de Pareto.

Propongo medir la dispersión de los vectores alrededor de este centroide con:

$$\sigma = \frac{\beta_1}{Tr(Cov)} \quad (7.11)$$

La traza de la matriz de covarianza es la suma de todos sus valores propios. Valores grandes o pequeños de σ significan menor o mayor dispersión respectivamente. La dispersión σ es una medida de la confiabilidad del primer vector propio como un centroide de los vectores no dominados ya normalizados. El primer vector propio U_1 no es necesariamente un miembro del frente de Pareto. A fin de encontrar sus echados aparentes correspondientes, buscaré un vector C_* , miembro del frente de Pareto, el cual una vez normalizado, su distancia con respecto al primer vector propio es mínima. Esto es:

$$C_* = \arg \min_i \left\| U_1 - \frac{C_i}{\|C_i\|} \right\| \quad (7.12)$$

Los echados aparentes que corresponden a C_* son p_0 y q_0 .

Un procedimiento mejorado es encontrar los echados aparentes (p_1, q_1) para U_1 dado C_* y (p_0, q_0) como punto inicial.

Matemáticamente: Sea

$$C(p, q) = (c_1(p, q), c_2(p, q), \dots, c_9(p, q)) \quad (7.13)$$

el vector de coherencia para las ventanas laterales y central para los echados aparentes (p, q) , y sea

$$F(p, q) = \frac{C(p, q)}{\|C(p, q)\|} \quad (7.14)$$

el vector normalizado. Se debe encontrar (p_1, q_1) , solución de

$$\min_{(p, q)} \|F(p, q) - U_1\| \quad (7.15)$$

Este es un problema que se resuelve con el siguiente método:

Sean J_{i1} y J_{i2} las derivadas de la i -ésima coordenada de F con respecto a los echados aparentes p y q , que en la implantación, se determina con diferencias finitas. Estas derivadas son la i -ésima fila de la matriz jacobiana J de F .

Una aproximación a U_1 se puede escribir con una aproximación de primer orden:

$$U_1 \approx F(p_0, q_0) + J(p_0, q_0)^T m \quad (7.16)$$

done $m = (p_0 - p_1, q_0 - q_1)$

Esto es lo mismo que:

$$Jm = d \quad (7.17)$$

donde $d = U_1 - F(p_0, q_0)$.

Los echados aparentes (p_1, q_1) se desconocen, por lo que m también. La expresión (7.17) es un sistema de 9 ecuaciones de dos variables, que puede resolverse por el método de mínimos cuadrados:

$$m = (J^T J + \epsilon I)^{-1} J^T d \quad (7.18)$$

donde ϵ es un factor de regularización:

Por definición de m ,

$$(p_1, q_1) = (p_0, q_0) - m \quad (7.19)$$

Un algoritmo que calcula los echados aparentes por el primer vector propio U_1 dada una aproximación inicial (Ecuación 7.12), será la siguiente:

Repetir un número fijo de veces:

1. Calcular el vector de diferencia d y el Jacobiano $J(p_0, q_0)$ por diferencias finitas.
2. Calcular m con (7.18).
3. Mejorar la solución con (7.19).
4. Hacer $(p_0, q_0) = (p_1, q_1)$ y calcular $F(p_0, q_0)$

Finalmente, los pasos de un algoritmo para calcular la coherencia basada en el primer vector propio del frente de Pareto son:

- Calcular la matriz de covarianza (7.9) de los vectores de coherencia del frente de Pareto, y con ella, encontrar su primer vector propio U_1 y correspondiente valor propio β_1 . Calcular la dispersión σ con (7.11).
- Encontrar el vector de coherencia C_* miembro del frente de Pareto tal que entre su normalización y U_1 tienen la menor distancia (Ecuación 7.12).
- Estimar los echados aparentes (p_1, q_1) para el primer vector propio U_1 con el proceso de inversión teniendo a C_* y sus echados respectivos (p_0, q_0) como punto inicial.
- Con (p_1, q_1) calcular el eigenstructure corregido por el echado (7.7) en la ventana central y, el resultado final es:

$$coh = \sigma C_{3.7}(p_1, q_1) \quad (7.20)$$

Frente de Pareto de Coherencias				
L1	L2	L3	L4	Central
6.188634e-001	3.941233e-001	8.062808e-001	6.866695e-001	8.815103e-001
6.036953e-001	3.565139e-001	7.842981e-001	6.814289e-001	8.969456e-001
6.184757e-001	3.981358e-001	8.105729e-001	6.816769e-001	8.759344e-001
6.036953e-001	3.565139e-001	7.842981e-001	6.814289e-001	8.969456e-001
6.255614e-001	4.020150e-001	8.022442e-001	7.005510e-001	8.889330e-001
6.059721e-001	3.585437e-001	7.760638e-001	6.932679e-001	9.063618e-001
6.099839e-001	3.692037e-001	7.905299e-001	6.867846e-001	8.941947e-001
6.188634e-001	3.941233e-001	8.062808e-001	6.866695e-001	8.815103e-001
6.008468e-001	3.500596e-001	7.781593e-001	6.820889e-001	8.015023e-001
6.139186e-001	3.869060e-001	8.063704e-001	6.782552e-001	8.784160e-001
6.184757e-001	3.981358e-001	8.105729e-001	6.816769e-001	8.759344e-001
6.004207e-001	3.485233e-001	8.726659e-001	6.866579e-001	9.066910e-001
6.255614e-001	4.020150e-001	8.022442e-001	7.005510e-001	8.889330e-001

Tabla 7.1: Frente de Pareto para la maximización de un función de coherencia de 5 dimensiones. Las columnas 1 a 4 son la coherencia para las ventanas laterales, y la coherencia para la ventana central es la última columna.

7.4 Resultados

Se muestra un frente de Pareto en la Tabla 7.1 usando solamente 4 ventanas laterales. Las columnas 1 a 4 contienen la coherencia para las ventana laterales y la coherencia para la ventana central está en la última columna.

Nótese las diferencias numéricas entre las diferentes filas. Este frente de Pareto se calcula para cada coordenada en una sección sísmica y su centroide se estima con el procedimiento que se expuso anteriormente.

Este procedimiento no se aplica cuando la cardinalidad del frente de Pareto

es de un solo miembro. En este caso, los echados aparentes corresponden al del único miembro en el conjunto.

Una sección cruzada de datos reales se muestra en la Figura 7.5a donde se pueden interpretar varias fallas empinadas, no se aplicó ningún atributo sísmico. Las fallas de la sección cruzada se detectaron con la coherencia C2 en la Figura 7.5b, y por lo tanto se puede concluir, que la saturación del echado no es un problema para la coherencia en una sección cruzada.

Las rebanadas de tiempo de la Figura 7.6 están al mismo nivel de tiempo marcado en las secciones cruzadas de la Figura 7.5, y viceversa, se marcó en estas rebanadas de tiempo la posición de la sección cruzada.

Se interpretaron algunas fallas verticales, las cuales se muestran en la sección cruzada en la Figura 7.6a y que horizontalmente, intersecta a la línea que corresponde al nivel de las rebanadas de tiempo. En estas imágenes, estas intersecciones se marcaron con números y se corresponden, debido a que tienen la misma escala horizontal.

Las imágenes en planta se produjeron con los atributos de coherencia C2, eigenstructure y con el procedimiento de optimización multiobjetivo que se expuso anteriormente, en las figuras 7.6b, 7.6c y 7.6d respectivamente.

Se puede suponer que con los atributos de coherencia se desplegarán vistas en planta las fallas que se detectaron en la sección cruzada, pero de estas imágenes se puede concluir que esto no es del todo cierto.

La imagen que produjo el atributo de coherencia de componentes principales (7.6d) tiene más continuidad y claridad en comparación con las otras imágenes. En especial, se corresponden las fallas de esta imagen con la imagen de la sección cruzada al seguir los rasgos que se marcaron con números.

Este no es el caso para las coherencias C2 y C3. Se puede decir que con la coherencia de eigenstructure (Figura 7.6c) se despliegan las características principales de esta rebanada de tiempo. Además, no se puede identificar las

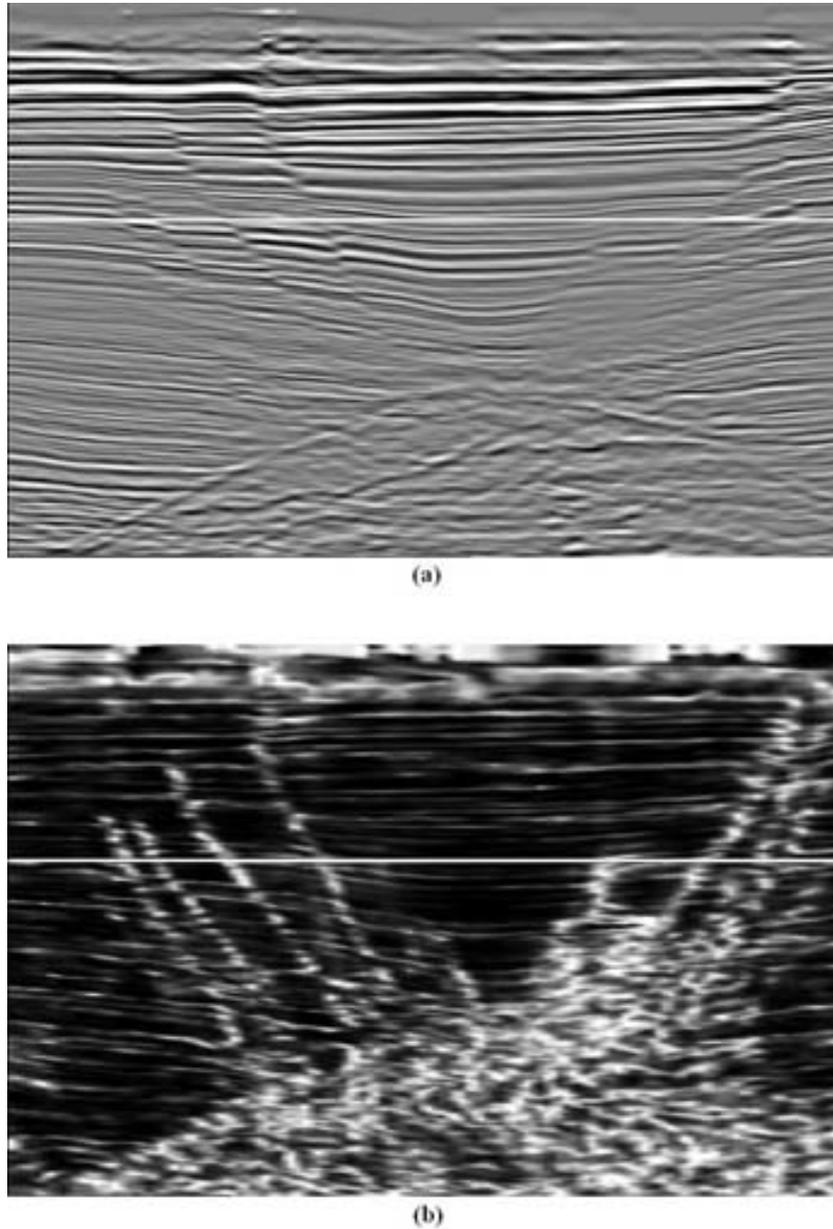


Figura 7.5: (a) Una sección cruzada mostrando algunas fallas de alto ángulo. No se aplicó ningún atributo sísmico. (b) Con la coherencia C2 se pueden detectar las fallas de alto ángulo.

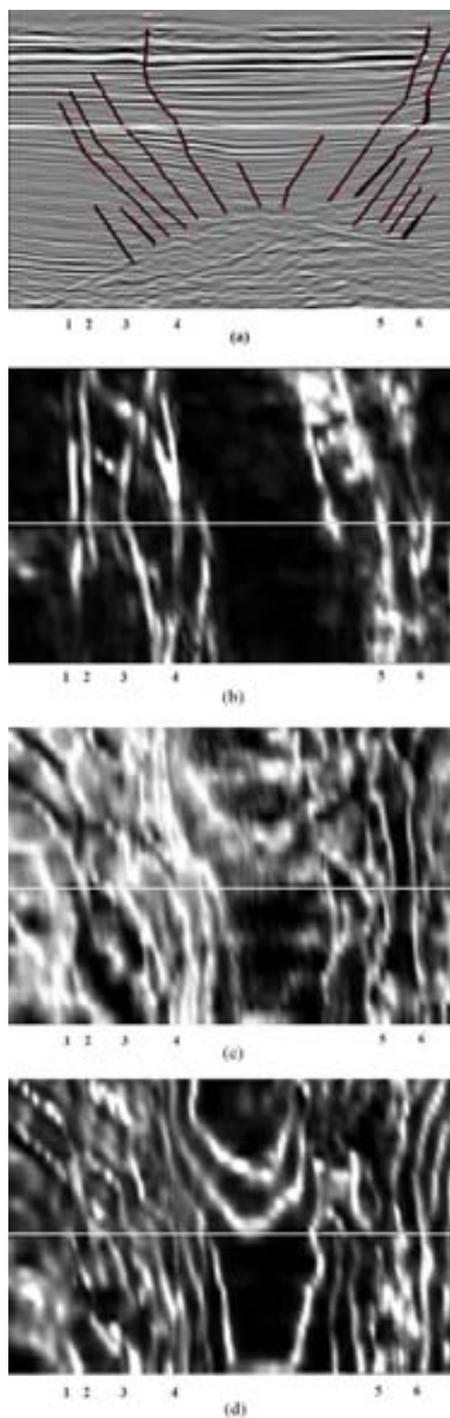


Figura 7.6: (a) La sección cruzada de la Figura 7.5 donde se interpretaron algunas fallas verticales. Secciones en planta al tiempo marcado en la Figura (a): (b) Coherencia C2. (c) Eigenstructure o coherencia C3, (d) Coherencia utilizando optimización multiobjetivo y componentes principales.

fallas señaladas con los número (1), (3) y (5) y las otras fallas son escasamente detectables con rasgos blancos de baja coherencia.

La imagen más pobre en claridad está en la Figura 7.6b y que se obtuvo con la coherencia C2, donde las fallas marcadas con los números (1) y (3) no se pueden identificar.

La coherencia C2 y C3 fueron calculadas con una ventana espacial de 3×3 trazas y un intervalo de tiempo de $[-5, 5]$ ms, mientras la coherencia de optimización multiobjetivo y componentes principales se usó una ventana de 7×7 trazas y un intervalo de tiempo de $[-5, 5]$ ms. Las subventanas son de tamaño 3×3 trazas.

La optimización multiobjetivo corrió 100 generaciones para cada coordenada de traza en la rebanada de tiempo. Con menos generaciones (alrededor de 20) la resolución de la coherencia de componentes principales fue pobre, y el programa de computadora que la implementa no determinó estos resultados.

7.5 Conclusiones

Este procedimiento de optimización multiobjetivo y componentes principales emplea una mayor cantidad de tiempo de cómputo que otros atributos de coherencia ya publicados, sin embargo, de las imágenes que se han mostrado se puede concluir que al usar varias ventanas de datos se filtra implícitamente los datos sísmicos de dos maneras:

1. Al traslaparse entre sí ventanas espaciales de trazas.
2. Al estimar el centroide del frente de Pareto, y un valor que indica su confianza como tal.

Si los datos sísmicos tienen una componente de ruido, el frente de Pareto tendrá vectores de coherencia que lo ajusten, pero el centroide de todos ellos representa la dirección en que en su mayoría estos vectores apuntan. Es quiere decir que: El centroide simplifica la diversidad de direcciones que la componente de ruido puede inducir, por lo que una conclusión es que al usar el centroide del frente de Pareto es una manera de filtrar el ruido.

La maximización de la coherencia conduce a usar los echados de una falla y no la de los reflectores, y con esto, también es posible al maximizar simultáneamente la coherencia en varias ventanas de datos. En el frente de Pareto estas soluciones las representan aquellos vectores con la coherencia más grande en alguna de sus coordenadas en comparación de cualquier otro vector en el conjunto de soluciones. El centroide del frente de Pareto no puede ser ninguno de estos vectores, y por lo tanto, es el menos afectado por la saturación del echado.

Esto explica porqué las fallas con echado muy empujado se pueden detectar en vistas en planta (time slices) al acoplar, por una parte y mediante el uso de optimización multiobjetivo, el cálculo de la coherencia, y por otra esta metodología que usa varias ventanas de datos.

Capítulo 8

Discusión y conclusiones

La transformada de Hilbert-Huang es un procedimiento de descomposición espectral que tiene las siguientes ventajas:

1. No está sujeto a una ventana de datos, y por lo tanto, del principio de incertidumbre, por lo que nunca produce el goteo de amplitudes.
2. Su construcción se basa en principios simples y su implantación es relativamente fácil.
3. No depende de una base de descomposición, ni de parámetros escogidos a priori. La base de descomposición (las funciones de modo intrínseco) se obtienen de los mismos datos y son teóricamente ortogonales.
4. Huang et al. (2001) han demostrado su utilidad para series de tiempo no estacionarias, pero sobre todo, no lineales.

Las desventajas que se observaron en esta transformada fueron las siguientes:

1. Todavía no hay una teoría matemática que la describa, como se hace por ejemplo en la transformada ondicular con el análisis multi-escala que

se presenta en el apéndice. Su descripción hasta ahora es puramente algorítmica.

2. Por basarse en la derivación de la fase, sus resultados dependen de la relación de señal a ruido de los datos a los que se aplica.
3. Esta transformación proporciona valores dispersos de amplitud en el plano tiempo-frecuencia, por lo que el manejo de sus espectros requiere un tratamiento diferente.

En esta tesis se propuso aplicar esta transformada a datos sísmicos de exploración en 3-D en problemas en los que la descomposición espectral normalmente se usa: La inversión del factor de atenuación y la detección de capas delgadas.

Para ello, se propuso utilizar la máxima amplitud espectral que con esta transformada se determina en cada instante de tiempo de las trazas sísmicas. En el capítulo sobre dispersión se enumeraron las razones de la importancia de este atributo.

La frecuencia de la máxima amplitud espectral es la componente más relevante en el espectro, y que la transformada de Hilbert-Huang determina de una manera puntual (Figuras 2.10 y 4.5), en contraste con otras descomposiciones espectrales donde la máxima amplitud se representa en un rango de frecuencias, lo cual se debe al goteo de amplitudes (Figuras 2.3 y 2.4).

Se encontró que la máxima amplitud espectral ya se había utilizado para detectar capas delgadas (Marfurt y Kirilin, 2001). De varias trazas en una ventana espacial de datos (o bin), obtienen la descomposición espectral y apilan las amplitudes, cuestión que sirve para filtrar el ruido y evitar un poco el problema del goteo de amplitudes. Esto genera un costo adicional en tiempo de cómputo.

Sin embargo se demostró que de la máxima amplitud espectral determinada por varias descomposiciones tiempo-frecuencia, la de Hilbert-Huang fue más resolutive sin hacer este apilamiento (Figura 3.21).

Al aplicar la transformada de Hilbert-Huang a un caso de estudio, se observó que la curva que forman los datos de la máxima amplitud espectral y el grosor de capas productoras que se midieron en varios pozos en un nivel interpretado del cubo sísmico de Boonsville, se comportó de manera parecida a otros atributos de capas delgadas (Figura 3.29): La amplitud tiende a decaer a medida que el grosor de la capa disminuye, y este decaimiento se acelera a partir del límite teórico de la resolución, pero no es tan abrupto como los atributos de frecuencia dominante y máxima amplitud local que Partyla (2001) propone (Figura 3.22).

Con ello se tiene la confianza basada en datos duros (el grosor de las capas medida en los registros de pozos de Boonsville, el campo petrolero que se usó como caso de estudio) para establecer que baja amplitud espectral es un indicador de capas delgadas.

Boonsville fue especialmente útil en esta aplicación, debido a que ha sido documentado extensamente por Hardage et al. (1996a, 1996b y 1996c) y Pennington et al. (2001), quienes fueron buenas guías en lo que se debía observar: Capas delgadas que aumentan su grosor desde los frentes deltáicos hacia el prodelta, y capas delgadas en las bahías intercanal.

Debe decirse que estos resultados se debieron también a la calidad de los datos sísmicos. En Boonsville, estos datos tienen un ancho de banda de hasta 90 Hz (Hardage et al., 1996b). Por lo general, el ancho de banda es menor que esta magnitud en cubos sísmicos en 3-D. Según estos autores (Hardage et al., 1996a), también fue importante la secuencia de procesado, en donde se filtró en lo que se pudo el ruido que se adquirió en el levantamiento sísmico en el que dicho sea de paso, se utilizaron explosivos como fuente de energía.

Existen otras técnicas para la detección de capas delgadas (como la deconvolución), por lo que se presenta el atributo de máxima amplitud espectral como una herramienta más que se puede utilizar en este problema.

Una imagen del atributo de máxima amplitud espectral a un nivel interpretado (Cado), fue parcialmente congruente con un mapa de contornos hecho con los grosores medidos en los pozos donde hubo información al respecto (Figura 3.30).

A un nivel de tiempo en el cubo sísmico, se encontraron características que fueron congruentes con la interpretación de Pennington et al. (2001) (Figura 3.31). Estas características no fueron visibles con la transformada de Morlet y Wigner (Figura 3.32), quizá porque no se le hizo el tratamiento de apilamiento que Marfurt y Kirilin (2001) describen, esto es, que se compararon estas transformadas en igualdad de circunstancias.

Por lo que respecta al filtrado de la dispersión: En mi opinión, la idea de utilizar la descomposición espectral para determinar el factor de atenuación, es adaptar esta herramienta a métodos que se usaban desde hace algunos años.

El método de radio espectral (Tonn, 1989) utiliza los espectros determinados en dos ventanas de datos consecutivas en el tiempo. Como la descomposición espectral determina espectros instantáneos, se utilizan los mismos procedimientos en dos instantes de tiempo consecutivos (Taner, 2003).

Es difícil utilizar esta técnica con la transformada de Hilbert-Huang: Los espectros no se encuentran ordenados en una matriz de amplitudes cuyas filas representan instantes de tiempo y las columnas, las frecuencias. En cambio, las frecuencias que vienen en un instante pueden no estar incluidas en el instante vecino, por lo que la operación en la que se basa el método de radio espectral (la regresión lineal de la frecuencia y el logaritmo de la división de amplitudes en espectros vecinos), puede no tener lugar.

En esta situación, la inversión del factor de calidad utilizando la transformada de Hilbert-Huang debe hacerse utilizando la variación en el tiempo de la frecuencia más importante en cada espectro instantáneo, es decir, la frecuencia asociada a la máxima amplitud espectral.

Gracias al modelo de la dispersión de las ondas en el dominio de la frecuencia (Futterman, 1963) y desarrollado para utilizarlo en el dominio del tiempo con la ayuda del principio de similaridad (Carpenter, 1966; Robinson, 1979; Jones, 1985; Hargreaves, 1991; Bickel, 1993), fue posible modelar e invertir el factor de atenuación utilizando la máxima amplitud espectral.

De todas las fuentes que se han citado (inclusive se pagó un servicio de búsqueda de información en este campo en la oficina de patentes), no existe una patente ni publicación que utilice las relaciones de dispersión para determinar el factor de calidad, y por tanto el de atenuación. En vista de esto, se registró como patente el método que se presentó en esta tesis.

Por otro lado, la idea de cambiar la escala de las ondiculas para corregir la dispersión no es nueva. Existen artículos que ya la han descrito (Carpenter, 1966; Robinson, 1979; Hargreaves, 1992), en los que inclusive se han utilizado conceptos como la distribución de Pareto (Bickel, 1993; Mandelbrot, 1960) y relacionar el modelo de la atenuación con un modelo que generaliza la difusión del calor y la ecuación de onda (Mainardi y Tomirotti, 1997; Carcione et al., 2002).

Hargreaves (1992) y Bickel (1993) discuten si los métodos que describen modifican el tiempo de los eventos visualizados en las imágenes sísmicas, lo cual es un factor que podría afectar la interpretación de los datos si se hace una conversión de tiempo a profundidad (Liner, 2004).

A través de muchas pruebas con el algoritmo de corrección de la dispersión que en esta tesis se propone, se llegó a la conclusión de que el tiempo de los eventos se modifica menos si la escala de tiempo se modifica ondícula por

ondícula. Esto se puede verificar al comparar las secciones con y sin corrección de la dispersión en las figuras 4.7 y 4.9, en donde se puede observar que los eventos conservan su posición vertical.

En cada ondícula se determina también la atenuación, por medio de la regresión lineal de mínimos cuadrados regularizada. Tras muchas pruebas con las ecuaciones de la regresión lineal que comunmente se utilizan, se concluyó que las pendientes que se determinan no son representativas de los datos determinados con las Ecuaciones 4.62.

Se atribuyó este problema a que se utilizan las frecuencias instantáneas, que en la transformada de Hilbert-Huang se determinan con la derivación de datos que tienen, por principio, una componente de ruido, el cual se expresa como una pequeña varianza ϵ dada a priori en la Ecuación 4.66. La varianza exacta se puede determinar utilizando métodos derivados de la teoría de Bayes.

Los resultados de estas aplicaciones de la transformada de Hilbert-Huang dependen en buena parte en la manera en cómo se implementaron los componentes en los que se basa esta descomposición espectral: El método de derivación de la fase y para determinar la transformada de Hilbert.

El método con el que se implantó el filtro gaussiano (Young y Van Vliet, 1995) es de los más directos y elegantes que he visto. De las pruebas que se realizaron, este fue el que mejor filtró el ruido (Figura 5.3).

De la literatura que consulté, poco se ha escrito sobre la manera de implantar la transformada de Hilbert. Existe un atributo de transformada de Hilbert generalizada a cualquier potencia (Luo et al, 2003) y con el cual se produjeron imágenes que ayudaron a localizar un yacimiento. Huang y Shen (2005) y Huang et al. (1998) mencionan los teoremas de Nuttall (1966) y Bedrosian (1963) sobre la cuadratura de una serie de tiempo.

Tras consultar las referencias de estos autores, llegué a la conclusión que Huang no practicó con los resultados de estos teoremas: Huang y Shen (2005) escriben que el teorema de Nuttall es de naturaleza teórica, y por otra parte, encontré que Nuttall (1966) propone una función del error de la transformada Hilbert en el dominio de la frecuencia (Ecuación 5.60), la cual apliqué a los dos métodos que se describieron en esta tesis para determinarla.

Con esta función, llegué a concluir que la diagonalización del operador de Hilbert es más exacta (Figuras 5.5 y 5.6 y Tabla 5.2). Por aproximar mejor la cuadratura, son más exactos los atributos instantáneos de amplitud, fase y frecuencia instantáneos, y con ello se obtienen imágenes más nítidas de estos atributos (Figuras A.6 y 5.2). Este fue el método que invariablemente se usó en las imágenes que se presentaron como resultado de aplicar la transformada de Hilbert-Huang.

En conclusión, la transformada de Hilbert produce los mejores resultados si se implanta con un filtro derivador gaussiano, pero sobre todo, si se utiliza la diagonalización del operador de Hilbert.

En cuanto a los atributos de coherencia. Este es un tema en el que Kurt Marfurt es autor de casi todos los atributos en esta clase, de modo que ha calificado con categorías los atributos de coherencia de acuerdo al orden de su publicación: Existen las coherencia de clase C1 (Bahorich y Farmer, 1995, 1996), C2 (Marfurt et al., 1998), C3 (Gerztenkorn y Marfurt, 1999) y C5 (Marfurt y Kirilin, 2001). Por alguna razón, no existe la coherencia C4.

Cada clase de coherencia aumenta su grado de complejidad, pero todas se basan en el mismo principio: La correlación ordenada de un conjunto de trazas ordenadas en una ventana espacial de trazas sísmicas (Neidell y Taner, 1971).

La coherencia mide la discontinuidad de la amplitud, y se usa principalmente como indicador de fallas, aunque, dependiendo de la calidad de los

datos, permite interpretar detalles más finos como paleocanales. La coherencia C1 fue uno de los primeros atributos que se aplicaron a datos sísmicos en 3-D.

Con la coherencia se calculan atributos que se refieren a la orientación de los reflectores, medidos en los echados aparentes, lo que se determinan al maximizar la correlación de las trazas en función de ellos.

Tras estudiar y practicar con muchos métodos de optimización, los métodos que usa Marfurt para encontrar los echados aparentes me parecieron primitivos: Discretizar el dominio de los echados aparentes y buscar el máximo de la semblanza sesgada. Es seguro que encuentre a los defensores de estos métodos, pero por otra parte, si se han escrito tratados sobre algoritmos de optimización (Rao, 1996; Press et al., 2002), me pregunto la razón por la cual no se usó uno, aunque sea el más sencillo.

Aplicué el método *símplex*. Me pareció atractivo porque no necesita usar derivadas y su implantación es relativamente sencilla. Rao cita que el método *símplex* es de búsqueda directa, la misma categoría en la que entran los procedimientos de Marfurt, pero esta búsqueda es más refinada: Adapta el tamaño del *símplex* según se encuentre lejos o cerca de un máximo local, lo cual es equivalente a adaptar dinámicamente el tamaño de la discretización.

En los métodos de Marfurt, el tamaño de la discretización es fija y se recorre en las maneras que nombré: Damas chinas, cuadrado y polar.

Si el objetivo fue maximizar la semblanza sesgada, el método *símplex* fue superior a estos métodos por el menor tiempo de cómputo y por maximizar mejor la semblanza sesgada (Figuras 6.4 y 6.5).

Una vez calculados los echados aparentes con el método *símplex*, se pueden utilizar para sesgar las trazas y apilarlas y calcular una serie de atributos con ellas, proceso que en algunos paquetes de software, como Opendtect, se le llama “dip steering”.

La figura 1.1 muestra una imagen de estos atributos (fase instantánea apilada por el echado). O bien, con las trazas sesgadas se puede determinar la coherencia C3, a lo que nombré como “eigenstructure corregido por el echado”, y que presento como contribución en esta tesis (Figura 6.6).

Existe una razón para explicar que el máximo de la semblanza sesgada es, por lo general, único.

Las trazas contenidas en un cubo sísmico son datos redundantes, ruidosos y no estacionarios (Coléau et al., 2003). Redundantes porque los patrones ondulares en trazas vecinas espacialmente, siguen una tendencia coherente dictada por los echados. Ruidosos porque siempre existe una componente de ruido que persiste aún después del procesado a que son sujetos los datos sísmicos (migración DMO, NMO, apilamiento, etc). Y no estacionarios porque las propiedades estadísticas locales no son uniformes a lo largo de las trazas.

En caso de una discontinuidad (como cuando se trata de una falla), el patrón de amplitudes que se encuentra en una traza se puede encontrar en otra vecina en un desplazamiento en tiempo que se explica por la presencia de la discontinuidad. Dependiendo del ángulo de la discontinuidad, esta correlación será mejor si se utilizan sus echados en lugar de los echados de los reflectores (Figura 7.2).

Por lo que si existen dos orientaciones para la semblanza sesgada (la de la discontinuidad y la de los reflectores), la que mejor la maximice se tomará como resultado.

La existencia y unicidad del máximo garantiza que la función de semblanza sesgada sea convexa y que los métodos de optimización *síplex* y *Levenberg-Marquardt* converjan, lo cual comprobé al probar estos métodos en una serie de cubos sísmicos.

Si esta maximización tiende a utilizar los echados de las fallas de ángulo alto se tiene una “saturación del echado”, problema que Marfurt reconoció años atrás (Marfurt et al., 1999). Su efecto principal es que en una sección en planta, se representa coherencia alta en la zonas de las fallas de ángulo alto, ocultándolas en la imagen.

Para ello, propuse solucionar este problema con el procedimiento basado en optimización multi-objetivo y el filtro de Kuwahara.

Este filtro se utiliza en procesamiento de imágenes y consiste en tomar ventanas de píxeles traslapadas entre sí, a las cuales se determina algún parámetro de confianza (como la varianza de la intensidad de los píxeles) y de aquella ventana que tenga el valor mínimo, se toma el promedio de la intensidad como atributo. Esta idea ya se ha utilizado en atributos sísmicos (Bakker, 2002; Luo et al., 2002), y Marfurt la emplea en el problema de la saturación del echado, al tomar no sólo ventanas en planta, sino ventanas tridimensionales de datos a las cuales se determina la coherencia, y el resultado es la coherencia máxima en este conjunto de ventanas (Marfurt, 2006).

A diferencia de la solución de Marfurt, propongo maximizar simultáneamente la coherencia en un conjunto de ventanas de datos en planta. Gracias al algoritmo de Coello y Toscano (2001), se obtiene más información de la coherencia con los frentes de Pareto que resultan, y a los que se determina su centroide por medio de análisis de componentes principales, y otros procedimientos, entre los que se incluye el eigenstructure corregido por el echado, que mencioné anteriormente.

De esta manera, este procedimiento actúa implícitamente como un filtro no lineal, al resaltar las partes de interés (las fallas de ángulo alto) pero filtrando el ruido.

Los resultados de este algoritmo son costosos en tiempo de cómputo (en el orden de horas para las imágenes que se mostraron), pero en comparación de

las imágenes que se obtuvieron con otros atributos de coherencia, las fallas de echado muy grande que se mostraron en una sección transversal, ahora se pueden visualizar en planta (Figura 7.6).

De la misma forma que en el método para determinar la dispersión, se solicitó a la oficina de patentes una búsqueda de información sobre las publicaciones e inventos relacionados con la saturación del echado, y se me entregó un documento donde se enumeran los atributos de Marfurt (inclusive con patentes registradas en nuestro país), en el que no aparece algo parecido a este procedimiento multi-objetivo, por eso puedo decir que el algoritmo que presento es nuevo y que registré también como patente.

En resumen, las contribuciones que en esta tesis se proponen son las siguientes:

1. Aplicar la máxima amplitud espectral determinada con la transformada de Hilbert-Huang como indicador de capas delgadas y como atributo básico para determinar el factor de atenuación.
2. Filtrado de la dispersión con un procedimiento basado en el principio de similaridad.
3. Aplicación de métodos numéricos para optimizar la semblanza sesgada.
4. El atributo de eigenstructure corregido por el echado.
5. El algoritmo basado en optimización evolutiva multi-objetivo para interpretar fallas de ángulo alto en vistas en planta.

Apéndice A

Análisis Ondicular

A.1 Introducción

Si con un sistema de proceso de imágenes se realiza una operación de “zoom” para ver como si fuera con una lupa, se tienen los siguientes efectos:

- La superficie de la imagen aumentan proporcionalmente a la escala que se aplica.
- La operación sucesiva de este escalamiento tiene la propiedad de que los detalles de la imagen se desplacen en los ejes de coordenadas.

Para simular esto, supóngase que esta imagen es de una dimensión. Ejemplos de esta clase incluyen datos que se miden en diversos procesos industriales, como por ejemplo los registros de pozo.

En el análisis ondicular se simula la proyección de una imagen en una serie de espacios que difieren entre sí por una escala α .

Estos espacios se denotan por $\dots, V_{-3}, V_{-2}, V_{-1}, V_0, V_1, V_2, V_3, \dots$ que incluyen a aquellos cuando la escala es negativa y en las que se reducen dimensiones. Se denota con A_{2^j} la operación con que se proyecta la imagen en estos espacios, lo cual tiene las siguientes propiedades (Mallat, 1989):

1. La proyección sucesiva en el mismo espacio, siempre determina el mismo resultado, esto es

$$A_{2^j} \circ A_{2^j} = A_{2^j} \quad (\text{A.1})$$

2. La proyección que resulta en este espacio es la más similar a los datos originales, esto es, que de todas las aproximaciones $g(t)$ a la escala 2^j resulta que

$$|g(t) - f(t)| \geq |A_{2^j} f(t) - f(t)| \quad (\text{A.2})$$

3. Debido a que los espacios V_j difieren por un factor de escala, los detalles en una escala mayor contienen los detalles a una escala menor, y por tanto tienen toda la información para reproducirlos:

$$V_j \subset V_{j+1} \quad (\text{A.3})$$

4. Una consecuencia de esto, es que los espacios se pueden reproducir por un factor de escala, esto es que si $f(t) \in V_j$ entonces $f(2t) \in V_{j+1}$.
5. Si $f(t) \in V_0$ entonces $f(t - k) \in V_0$
6. Para cada espacio V^j hay 2^j muestras por unidad de longitud. Esto es, que a menor escala hay menos muestras y viceversa.
7. Finalmente, que $\cup_j V_j$ es denso y que $\cap_j V_j = \emptyset$

Se define como análisis multiresolutivo como la descomposición en la que se proyecta una función original en una serie de espacios V_j que cumplen las propiedades anteriores.

Si se considera el producto escalar de funciones $f(t)$ y $g(t)$ como la integral:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)du \quad (\text{A.4})$$

y si se considera a los espacios V_j como espacios de funciones, deberá haber una base de funciones $\phi_j(t - 2^{-j}l)$ ortogonales entre sí en el sentido del producto escalar anterior

$$\langle \phi_j(t - 2^{-j}l), \phi_j(t - 2^{-j}m) \rangle = 0 \text{ para } l \neq m \quad (\text{A.5})$$

y en el que las funciones se expresen como una combinación lineal

$$f(t) = 2^{-j} \sum_l \langle f(t), \phi_j(t - 2^{-j}l) \rangle \phi_l(t - 2^{-j}l) \quad (\text{A.6})$$

A una escala 2^j , Mallat (1989) demuestra que una base del espacio V_j es

$$\phi_j(t - 2^{-j}n) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi(t - 2^{-j}n) \quad (\text{A.7})$$

donde la función $\phi(t)$ genera las bases de todos los espacios V_j y el factor $1/\sqrt{2^j}$ sirve para normalizar cada base.

A esta función se le denomina la función de escalamiento.

Debido a que los espacios se contienen entre sí, la base de un espacio a escala menor debe expresarse en la base del espacio en la escala inmediata mayor:

$$\phi_{2^j}(t - 2^{-j}n) = 2^{-(j+1)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \phi_{2^j}(t - 2^{-j}n), \phi_{2^{j+1}}(t - 2^{-(j+1)}k) \rangle \phi_{2^{j+1}}(t - 2^{-(j+1)}k) \quad (\text{A.8})$$

Con un cambio de variable se puede demostrar que cada producto escalar es:

$$2^{-(j+1)} \langle \phi_{2^j}(t - 2^{-j}n), \phi_{2^{j+1}}(t - 2^{-(j+1)}k) \rangle = \langle \phi_{2^{-1}}(t), \phi(t - (k - 2n)) \rangle \quad (\text{A.9})$$

De este modo, la proyección de cualquier función en una de las bases en estos espacios tendrá que ser:

$$\langle f(t), \phi_{2^j}(t-2^{-j}n) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \phi_{2^{-1}}(t), \phi(t-(k-2n)) \rangle \langle f(t), \phi_{2^{j+1}}(t-2^{-j-1}k) \rangle \quad (\text{A.10})$$

Esta ecuación se puede abreviar si se define a la función

$$h(n) = \langle \phi_{2^{-1}}(t), \phi(t-n) \rangle \quad (\text{A.11})$$

Entonces se obtiene una definición recursiva de la proyección de una función en cada espacio en términos de los espacios de escala mayor:

$$\langle f(t), \phi_{2^j}(t-2^{-j}n) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(2n-k) \langle f(t), \phi_{2^{j+1}}(t-2^{-(j+1)}k) \rangle \quad (\text{A.12})$$

Para el caso especial en que $V_0 \subset V_1$, debe ser que

$$\phi(t) = 2 \sum_l h(l) \phi(2t-l) \quad (\text{A.13})$$

que en el dominio de la frecuencia resulta ser

$$\hat{\phi}(\omega) = \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) H\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (\text{A.14})$$

donde H es la representación en frecuencia de h .

Aplicando este concepto para $\hat{\phi}(\omega/2)$

$$\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{4}\right) H\left(\frac{\omega}{4}\right) H\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (\text{A.15})$$

Al descomponer al infinito la función $\hat{\phi}(\omega)$ se obtiene la ecuación de dilatación:

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{\infty} H(2^{-p}\omega) \quad (\text{A.16})$$

Las propiedades de $h(n)$ en el dominio de la frecuencia $H(\omega)$ son las siguientes (Mallat, 1989):

$$\begin{aligned} |H(0)|^2 &= 1 \\ |H(w)|^2 + |H(w + \pi)|^2 &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

En el dominio del tiempo resulta que $h(n) = O(n^{-2})$, de modo que tiende a cero cuando n es muy grande y que

$$\sum_n h(n) = 0 \quad (\text{A.18})$$

Por otra parte, sea W_j el complemento ortogonal de V_j que está incluido en V_{j+1} lo cual se denotará como $V_j \perp W_j$.

Los espacios W_j representan la diferencia entre V_j y V_{j+1} , y se le ha llamado el detalle de la señal a la resolución 2^j .

Como $W_j \subset V_{j+1}$ y $V_{j+1} \perp W_{j+1}$, resulta que $W_j \subset W_{j+1}$.

La operación de proyección de una función $f(t)$ en los espacios W_j se denotará como D_{2^j} , así $D_{2^j} f(t) \in W_j$.

Similarmente a los espacios V_j , las bases de los espacios W_j se puede generar con una función $\psi(t)$, a la que se ha llamado ondícula (Mallat, 1989):

$$\psi_{2^j}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi(t - 2^{-j}n) \quad (\text{A.19})$$

Una función puede expresarse como una combinación lineal en la base de un espacio W_j :

$$f(t) = 2^{-j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f(t), \psi_{2^j}(t - 2^{-j}n) \rangle \psi_{2^j}(t - 2^{-j}n) \quad (\text{A.20})$$

Asimismo, una base ψ_{2^j} al pertenecer al espacio $V_{2^{j+1}}$, puede expresarse en términos de una combinación lineal en la base de este espacio:

$$\psi_{2^j}(t-2^{-j}n) = 2^{-(j+1)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \psi_{2^j}(t-2^{-j}n), \phi_{2^{j+1}}(t-2^{-(j+1)}k) \rangle \phi_{2^{j+1}}(t-2^{-(j+1)}k) \quad (\text{A.21})$$

Con un cambio de variables, se puede demostrar que los productos escalares son:

$$2^{-(j+1)} \langle \psi_{2^j}(t-2^{-j}n), \phi_{2^{j+1}}(t-2^{-(j+1)}k) \rangle = \langle \psi_{2^{-1}}(t), \phi(t-(k-2n)) \rangle \quad (\text{A.22})$$

De modo que la proyección de $f(t)$ en cada función ψ_{2^j} es:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \psi_{2^{-1}}(t), \phi(t-(k-2n)) \rangle \langle f(t), \psi_{2^j}(t-2^{-j}n) \rangle \quad (\text{A.23})$$

Esto puede simplificarse al definir

$$g(n) = \langle \psi_{2^{-1}}(t), \phi(t-n) \rangle \quad (\text{A.24})$$

con lo que se obtiene

$$\langle f(t), \psi_{2^j}(t-2^{-j}n) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(2n-k) \langle f(t), \psi_{2^j}(t-2^{-j}k) \rangle \quad (\text{A.25})$$

En el dominio de la frecuencia, Mallat (Mallat, 1989) demuestra que la función de $g(n)$ se obtiene de $h(n)$ por las relaciones:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\omega) &= G\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \text{ y} \\ G(\omega) &= \exp(-i\omega) \overline{H(\omega + \pi)} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

De esta última igualdad puede verse que la función $g(n)$ se relaciona con $h(n)$ de la siguiente manera:

$$g(n) = (-1)^{1-n}h(1-n) \quad (\text{A.27})$$

Por ejemplo, si $h(n)$ es un filtro que consiste de los coeficientes $\{h(0) = c_0, h(1) = c_1, h(2) = c_2, h(3) = c_3\}$, $g(n)$ sería otro filtro con los coeficientes $\{g(-2) = -c_3, g(-1) = c_2, g(0) = -c_1, g(1) = c_0\}$

La función de ondícula $\psi(t)$ tiene las siguientes propiedades:

- Promedio cero:

$$\int \psi(t)dt = 0 \quad (\text{A.28})$$

- De soporte compacto, lo cual quiere decir que fuera de un intervalo alrededor del cero, la ondícula se hace rápidamente cero.

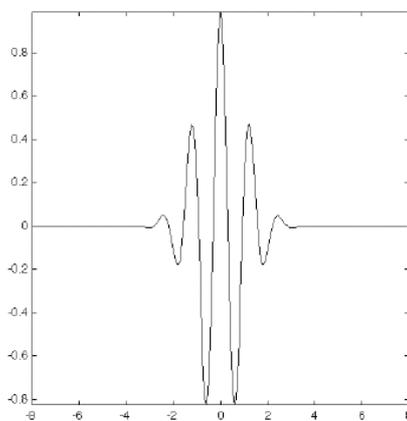


Figura A.1: Ondícula de Morlet.

Estas cualidades hacen que la función de ondícula $\psi(t)$ fluctúe alrededor del cero como si fuera una onda que rápidamente decrece, de ahí su nombre.

Si se tiene la proyección A_{2^j} , que se obtiene con la función de escala ϕ a una escala J fija, y las proyecciones D_{2^j} de detalle obtenida con las funciones ψ a escalas $J, J + 1, J + 2, \dots$, es posible reconstruir la función original del siguiente modo: A la proyección A_J , se le suma su diferencia D_J para obtener A_{J+1} , a la cual se le suma la diferencia D_{J+1} para obtener A_{J+2} y así sucesivamente.

La representación de la función $f(t)$ en el espacio de escala $j + 1$ se da en términos de la proyección en el espacio a escala j tanto para las funciones de escala como de ondícula. En particular para $f(t) = \phi_{2^j}(t - 2^{-j}n)$

$$\begin{aligned} \phi_{2^{j+1}}(t - 2^{-j-1}n) &= 2^{-j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \phi_{2^j}(t - 2^{-j}k), \phi_{2^{-j-1}}(t - 2^{-j-1}n) \rangle \phi_{2^j}(t - 2^{-j}k) \\ &+ 2^{-j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \psi_{2^j}(t - 2^{-j}k), \phi_{2^{-j-1}}(t - 2^{-j-1}n) \rangle \psi_{2^j}(t - 2^{-j}k) \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

El producto escalar de una función $f(t)$ con $\phi_{2^{j+1}}(t - 2^{-(j+1)}n)$ será por lo tanto

$$\begin{aligned} &\langle f(t), \phi_{2^{j+1}}(t - 2^{-j-1}n) \rangle = \\ &2^{-j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \phi_{2^j}(t - 2^{-j}k), \phi_{2^{-j-1}}(t - 2^{-j-1}n) \rangle \langle f(t), \phi_{2^j}(t - 2^{-j}k) \rangle + \\ &2^{-j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \psi_{2^j}(t - 2^{-j}k), \phi_{2^{-j-1}}(t - 2^{-j-1}n) \rangle \langle f(t), \psi_{2^j}(t - 2^{-j}k) \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Y dadas las definiciones para $h(n)$ y $g(n)$, esto se puede expresar como:

$$\langle f(t), \phi_{2^{j+1}}(t - 2^{-(j+1)}n) \rangle = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n - 2k) \langle f(t), \phi_{2^j}(t - 2^{-j}k) \rangle$$

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_3 & c_2 & -c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_2 & -c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_3 & c_2 & -c_1 & c_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_3 & c_2 & -c_1 & c_0 \\ c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 \\ -c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_3 & c_2 \end{bmatrix}$$

Tabla A.1: Matriz de convolución para filtros de 4 elementos.

$$+ 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n-2k) \langle f(t), \psi_{2^j}(t-2^{-j}k) \rangle \quad (\text{A.31})$$

A.2 Algoritmo piramidal

La ecuación anterior se puede entender como la convolución de los filtros $h(n)$ y $g(n)$ con las proyecciones en V_j y D_j a una escala menor, de modo, que para obtener la proyección a escalas mayores, se les vuelve a convolucionar con los mismos filtros hasta llegar a la escala que se quiere obtener.

La convolución de un filtro y una función $f(t)$ dada puede representarse como una multiplicación por la matriz de la Tabla A.1 (suponiendo que la función tiene 10 elementos).

Al multiplicar las filas impares por el vector de datos, se obtiene la con-

volución con un filtro $\{c_0, c_1, c_2, c_3\}$ y con las pares, se obtiene la convolución con el filtro $\{-c_3, c_2, -c_1, c_0\}$, que como se ha dicho, corresponden respectivamente a los filtros $h(n)$ y $g(n)$.

En las últimas dos filas los dos primeros elementos son la última parte del filtro, como si este se hubiera corrido al principio por no haber más columnas a la derecha donde colocar estos elementos. Esto hace que al multiplicar estas filas por el vector de datos se obtenga una convolución en la que los datos de entrada son cíclicos, es decir, que el siguiente dato después será el primero.

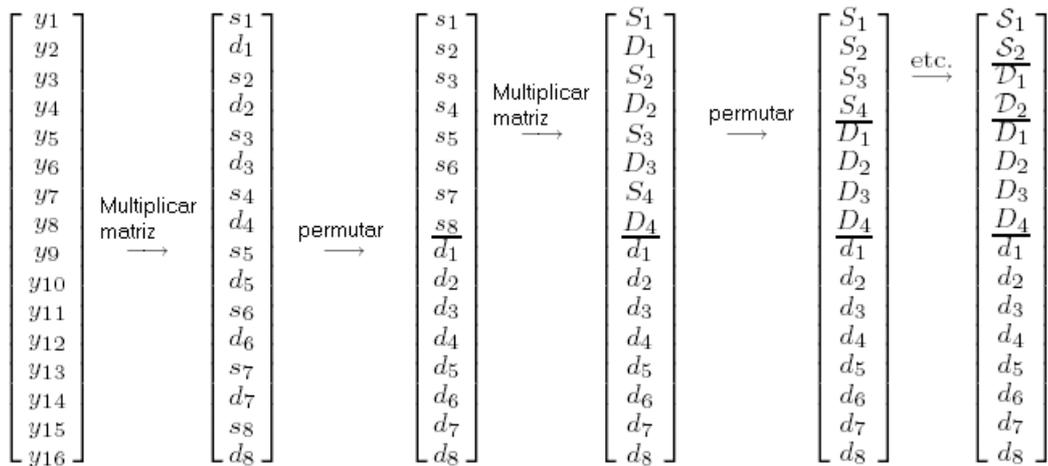


Figura A.2: Algoritmo piramidal. De izquierda a derecha: La serie original se multiplica por la matriz de la Tabla A.1. Se permuta. Se multiplica la primera mitad por la matriz. Se permuta. Y así sucesivamente

Si se reacomodan estas convoluciones para que venga primero la parte de escala y luego la de detalle y se aplica esta matriz a la primera parte, se obtendría la parte de escala y parte de detalle a un cuarto de los datos y a la escala 2^{-2} . Si se vuelve a reacomodar y a la parte de escala se aplica

esta matriz y se reacomoda, se obtendría la parte de escala y detalle a un octavo de los datos a una escala de 2^{-3} . Y este proceso continúa a una escala mínima predefinida.

En el proceso inverso se usa la inversa de la matriz (que por razones prácticas deberá ser su traspuesta) que se multiplica con los componentes en la última escala obtenida y agregando componentes en el sentido inverso del que fueron obtenidos.

A este proceso se le llama algoritmo piramidal y tiene una complejidad computacional de $O(\log_2(N))$ donde N es el número de datos, por lo que es más rápida que la transformada de Fourier de complejidad $O(N \log_2(N))$.

Este algoritmo funciona si el número de datos N es una potencia de 2, y si no lo es, se debe completar con ceros al final de la serie de tiempo hasta que el número de datos sea la potencia de dos más pequeña pero mayor que N .

Para las ondículas de Daubechies, el proceso para diseñar esta matriz se basa en que los coeficientes $\{-c_3, c_2, -c_1, c_0\}$ deben tener los primeros dos momentos cero, es decir que

$$\begin{aligned} -c_3 + c_2 - c_1 + c_0 &= 0 \\ -0c_3 + c_2 - 2c_1 + 3c_0 &= 0 \end{aligned} \tag{A.32}$$

En general, puede requerirse que tengan los primeros p momentos nulos, en cuyo caso se dice que se tiene una aproximación de orden p (Press y Teukolsky, 2002).

Para que el proceso piramidal sea invertible, la matriz inversa deberá ser igual a su traspuesta, en cuyo caso deben cumplirse las siguientes restricciones:

- El producto escalar de la fila i -ésima por la columna i -ésima es un elemento de la diagonal.

$$c_2^2 + c_3^2 + c_0^2 + c_1^2 = 1 \quad (\text{A.33})$$

- El producto de una fila con una columna cuyos números de índice difieran en dos deberá ser cero.

$$c_0c_2 + c_1c_3 = 0 \quad (\text{A.34})$$

Al resolver estas cuatro ecuaciones se tienen las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{(1 + \sqrt{3})}{4\sqrt{2}} \\ c_1 &= \frac{(3 + \sqrt{3})}{4\sqrt{2}} \\ c_2 &= \frac{(3 - \sqrt{3})}{4\sqrt{2}} \\ c_3 &= \frac{(1 - \sqrt{3})}{4\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

De manera similar con 6 coeficientes y una aproximación de grado 3 se tiene matriz en la Tabla A.2:

Se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -c_5 + c_4 - c_3 + c_2 - c_1 + c_0 &= 0 \\ -0c_5 + 1c_4 - 2c_3 + 3c_2 - 4c_1 + 5c_0 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{bmatrix}
 c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -c_5 & c_4 & -c_3 & c_2 & -c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -c_5 & c_4 & -c_3 & c_2 & -c_1 & c_0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -c_5 & c_4 & -c_3 & c_2 & -c_1 & c_0 \\
 c_4 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\
 -c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_5 & c_4 & -c_3 & c_2 \\
 c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 \\
 -c_3 & c_2 & -c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_5 & c_4
 \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

Tabla A.2: Matriz de convolución para filtros de 6 elementos.

$$-0c_5 + 1c_4 - 4c_3 + 9c_2 - 16c_1 + 25c_0 = 0$$

(Los tres momentos principales)

$$\begin{aligned}
 c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 &= 1 & (\text{A.38}) \\
 c_3c_5 + c_2c_4 + c_1c_2 + c_0c_2 &= 0 \\
 c_1c_5 + c_0c_4 &= 0
 \end{aligned}$$

(Son los productos para formar los elementos en la diagonal (primera ecuación) y fuera de ella de la matriz que resulta de multiplicar la matriz y su transpuesta, de modo que para que sea la identidad tienen que igualarse a 1 para la diagonal y cero para las demás).

Al resolver estas ecuaciones se obtiene (Press y Teukolsky, 2002):

$$\begin{aligned}
c_0 &= 0.332670552950 & (A.39) \\
c_1 &= 0.806891509311 \\
c_2 &= 0.459877502118 \\
c_3 &= -0.135011020010 \\
c_4 &= -0.085441273882 \\
c_5 &= 0.035226291882
\end{aligned}$$

Y con este procedimiento se pueden obtener ondículas de mayor número de coeficientes.

A.3 Representación en tiempo frecuencia

El resultado del análisis ondicular es en tiempo-escala, donde cada escala representa una banda con frecuencia media:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_0}{\lambda} \quad (A.40)$$

donde ω_0 es el centro de masa del lóbulo derecho de la ondícula:

$$\omega_0 = \frac{\int \omega |\psi(\omega)|^2}{\int |\psi(\omega)|^2} \quad (A.41)$$

Recientemente se ha propuesto otro método para una conversión en tiempo frecuencia a partir de una en tiempo escala que resulta del análisis ondicular:

Primero se menciona que una transformada ondicular es invertible si

$$C_\psi = \int \frac{|\widehat{\psi(\omega)}|}{\omega} d\omega < \infty \quad (A.42)$$

La transformada inversa se encuentra con la identidad de Calderón:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int \int F_W(\sigma, \tau) \psi\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right) \frac{d\sigma}{\sigma^2} \frac{d\tau}{\sqrt{\sigma}} \quad (\text{A.43})$$

donde $F_W(\sigma, \tau)$ es la representación tiempo escala y $\psi(\cdot)$ la función de ondícula.

Por lo tanto, la transformada de Fourier de la función $f(t)$ se puede realizar de esta transformación inversa:

$$\begin{aligned} \widehat{f(\omega)} &= \int f(t) \exp(-j\omega t) dt \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int \int \int F_W(\sigma, \tau) \psi\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right) \exp(-j\omega t) \frac{d\sigma}{\sigma^2} \frac{d\tau}{\sqrt{\sigma}} dt \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Los términos de la ondícula y de la exponencial, y la integración por el tiempo, pueden interpretarse como la transformada de Fourier de la función de ondícula y que por los teoremas básicos se tiene que:

$$\int \psi\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right) \exp(-j\omega t) dt = \sigma \exp(-j\omega\tau) \widehat{\psi}(\sigma\omega) \quad (\text{A.45})$$

Al sustituir en la Ecuación (A.44) y eliminando términos comunes:

$$\widehat{f(\omega)} = \frac{1}{C_\psi} \int \int F_W(\sigma, \tau) \widehat{\psi}(\sigma\omega) \exp(-j\omega\tau) \frac{d\sigma}{\sigma^{3/2}} d\tau \quad (\text{A.46})$$

Esta doble integral se interpreta de la siguiente manera:

- Se marginaliza por la escala (al integrar por σ) y se tiene una función que depende del tiempo.
- Esta función dependiente del tiempo se modula por un factor complejo $\exp(-j\omega\tau)$ y se integra por τ , lo que define una transformada de Fourier.

Entonces se puede identificar que una representación tiempo frecuencia es el factor:

$$f(\widehat{\omega}, t) = \frac{1}{C_\psi} \int F_W(\sigma, \tau) \widehat{\psi}(\sigma\omega) \exp(-j\omega t) \frac{d\sigma}{\sigma^{3/2}} \quad (\text{A.47})$$

El algoritmo y estos conceptos fueron formulados en (Sinha et al., 2006).

Debe citarse que el análisis ondicular tiene buena resolución en frecuencia para bajas frecuencias y buena resolución en tiempo para altas frecuencias.

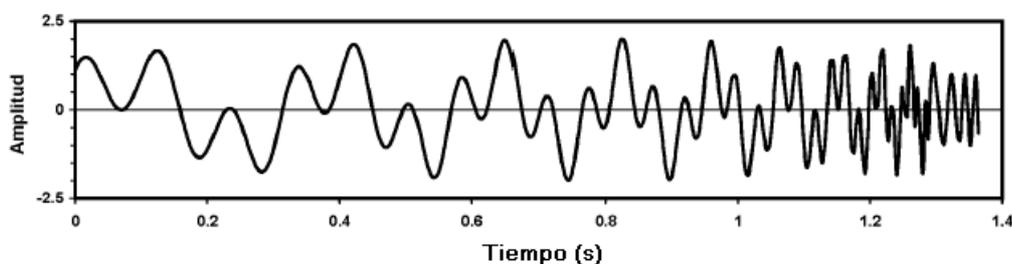


Figura A.3: Ejemplo de serie de tiempo (Sinha et al., 2006).

Para ilustrar esto, Sinha y su equipo aplicaron esta representación tiempo frecuencia con una serie de tiempo que se muestra en la Figura A.3. La serie aumenta su frecuencia dominante a medida que aumenta el tiempo, esto es, que las ondículas que la componen se comprimen a lo largo de la duración de la serie.

En la Figura A.4 se muestra la descomposición tiempo frecuencia con los métodos de transformada de Fourier en tiempos cortos, transformada continua de Wavelets, al tomar como frecuencia central la Ecuación (A.41) y la representación en tiempo-frecuencia (Figura A.47) que se acaba de mostrar.

La descomposición en tiempo frecuencia basada en el análisis ondicular muestra mejor resolución en el tiempo para los eventos de alta frecuencia en

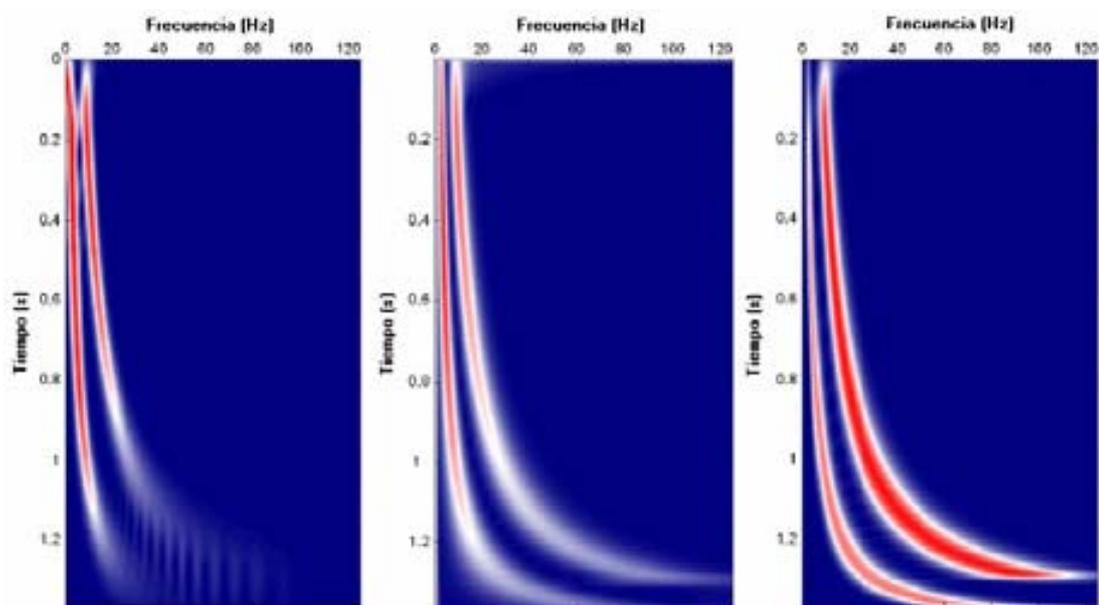


Figura A.4: Representación tiempo frecuencia (Sinha et al., 2006) de la serie de la Figura A.3. De Izquierda a Derecha: Con transformada de Fourier de tiempos cortos. Transformada continúa de wavelets, tomando como frecuencia central la Ecuación (A.41). Representación tiempo frecuencia con la Ecuación (A.47).

la parte final de la serie, mejor resolución en frecuencia para los eventos de baja frecuencia, que se extienden casi por todo el eje del tiempo.

A.4 Análisis biortogonal

La descomposición con ondículas puede expresarse como

$$f(t) = \sum_l \langle f, \widetilde{\phi}_{J,l} \rangle \phi_{J,l} + \sum_k \sum_l \langle f, \widetilde{\psi}_{k,l} \rangle \psi_{k,l} \quad (\text{A.48})$$

Las funciones de escala $\widetilde{\phi}$ y ondícula $\widetilde{\psi}$ se les llama de análisis, puesto que en ella se proyecta la función original, y las funciones de ϕ y ψ se le denomina de síntesis y con ellas se forma una combinación lineal que reconstruye la función dada.

Estas funciones pueden ser las mismas, pero al distinguirlas de esta manera se permite que sean diferentes con la condición de que deben ser biortogonales, esto es, que debe cumplirse que:

$$\langle \widetilde{\phi}, \psi(\cdot, l) \rangle = \langle \widetilde{\psi}, \phi(\cdot, l) \rangle = 0 \quad (\text{A.49})$$

$$\langle \widetilde{\phi}, \phi(\cdot, l) \rangle = \langle \widetilde{\psi}, \psi(\cdot, l) \rangle = \delta_l \quad (\text{A.50})$$

donde, por ejemplo

$$\langle \widetilde{\phi}, \phi(\cdot, l) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\phi}(t) \phi(t-l) dt \quad (\text{A.51})$$

En el dominio de la frecuencia, esto significa que (Ekstedt y Lindberg, 2000) (demostrado en Rivera, 2005):

$$H(\widetilde{\omega}) \overline{H(\omega)} + H(\widetilde{\omega} + \pi) \overline{H(\omega + \pi)} = 1 \quad (\text{A.52})$$

$$\begin{aligned}\widetilde{G}(\omega)\overline{G(\omega)} + G(\widetilde{\omega} + \pi)\overline{G(\omega + \pi)} &= 1 \\ \widetilde{G}(\omega)\overline{H(\omega)} + G(\widetilde{\omega} + \pi)\overline{H(\omega + \pi)} &= 0 \\ \widetilde{H}(\omega)\overline{G(\omega)} + H(\widetilde{\omega} + \pi)\overline{G(\omega + \pi)} &= 0\end{aligned}$$

Esto en forma matricial puede expresarse como

$$\widetilde{M}(\omega)\overline{M^T(\omega)} = I \quad (\text{A.53})$$

donde

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} H(\omega) & H(\omega + \pi) \\ G(\omega) & G(\omega + \pi) \end{pmatrix} \quad (\text{A.54})$$

Si $\Delta(\omega) = \det M(\omega)$, debe ser que

$$\begin{aligned}\widetilde{H}(\omega) &= \frac{\overline{G(\omega + \pi)}}{\Delta(\omega)} \\ \widetilde{G}(\omega) &= \frac{H(\omega + \pi)}{\Delta(\omega)}\end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

A.5 Diagonalización de operadores

Si se tiene un operador K , que en el dominio de la frecuencia puede expresarse como

$$Kf(\omega) = \widehat{\kappa}(\omega)f(\omega) \quad (\text{A.56})$$

y por lo tanto en el tiempo como una convolución

$$Kf(t) = k(t) * f(t) \quad (\text{A.57})$$

se dice que es un operador lineal.

Al determinar el producto escalar de dos funciones, una de las cuales es resultado de este operador y existe un operador K^* tal que

$$\langle Kf, g \rangle = \langle f, K^*g \rangle \quad (\text{A.58})$$

se dice que K^* es el operador adjunto de K .

Sea A_{2^j} el operador de dilatación de orden j que se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A_{2^j} f(t) &= 2^{j/2} f(2^j t) \\ \widehat{A_{2^j} f}(\omega) &= 2^{-j/2} \hat{f}(2^{-j} \omega) \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

El operador K^* es invariante a una dilatación A_{2^j} hasta una constante k_j si

$$\begin{aligned} K^* A_{2^j} f &= k_j A_{2^j} K^* f \\ \hat{k}(\omega) 2^{-j/2} \hat{f}(2^{-j} \omega) &= k_j 2^{-j/2} \hat{k}(2^{-j} \omega) \hat{f}(2^{-j} \omega) \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

En lo que sigue, se considera operadores que sean a la vez lineales y que cumplan esta condición. Ejemplos en esta clase son:

- Diferenciación: $\hat{k}(\omega) = i\omega^\alpha$
- Transformada de Hilbert: $\hat{k}(\omega) = -i \operatorname{sign}(\omega)$
- Potencial de Riesz: $\hat{k}(\omega) = |\omega|^\alpha$

De la segunda ecuación en (A.60) se puede despejar k_j y llegar a la conclusión que debe ser:

$$k_j = \frac{\hat{k}(\omega)}{\hat{k}(2^{-j} \omega)} \quad (\text{A.61})$$

que para ser constante debe ser independiente de ω , y se propone que cada $k_j = k^j$.

Para demostrar esto, se utiliza inducción matemática.

Con $j = 1$, $k_1 = k$

Si es cierto que $k_j = k^j$, entonces

$$\begin{aligned} k_{j+1} &= \frac{k(\omega)}{k(2^{-(j+1)}\omega)} = \frac{k(\omega)}{k(2^{-j}\omega)} \frac{k(2^{-j}\omega)}{k(2^{-(j+1)}\omega)} \\ &= k_j \frac{k(2^{-j}\omega)}{k(2^{-1}2^{-j}\omega)} = k_j \frac{k(\omega_1)}{k(2^{-1}\omega_1)} = k^j k^1 = k^{j+1} \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

Si se aplica el operador K a la representación en escala y detalle de una función $f(t)$ se tendría:

$$\begin{aligned} Kf(t) &= \sum_{jl} \langle Kf, \tilde{\psi}_{jl} \rangle \psi_{jl} \\ &= \sum_{jl} \langle f, K^* \tilde{\psi}_{jl} \rangle \psi_{jl} \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

Para evaluar el operador con base en su representación ondicular, conviene que los coeficientes de detalle sean proporcionales a los coeficientes en otra base ondicular especialmente construida para este operador, es decir que

$$\langle f, K^* \tilde{\psi}_{jl} \rangle = k_j \langle f, \tilde{\psi}_{jl}^K \rangle \quad (\text{A.64})$$

Esta relación define la diagonalización del operador K (Ekstedt y Lindberg, 2000).

El problema ahora es encontrar esta nueva base de ondículas $\tilde{\psi}^K$ así como también de funciones de escala $\tilde{\phi}^K$, lo cual fue resuelto en (Ekstedt y Lindberg, 2000) y aplicado en (Rivera, 2005) para atributos sísmicos.

Como K es lineal, debe ser también que la base ondicular de análisis es:

$$\widehat{\psi}^K(\omega) = \widehat{\kappa}(\omega)\widehat{\psi}(\omega) \quad (\text{A.65})$$

Si las bases $\widetilde{\psi}$ y ψ son ortogonales, entonces por la Ecuación (A.50) su convolución es diferentes de cero, y por lo tanto, en el dominio de la frecuencia el producto de sus espectros también lo será:

$$\widetilde{\psi}(\omega)\widehat{\psi}(\omega) \neq 0 \quad (\text{A.66})$$

Para que se conserve esta condición debe ser que la base ondicular de síntesis tiene que ser:

$$\psi^{\widehat{K}}(\omega) = \frac{\widehat{\psi}(\omega)}{\widehat{\kappa}(\omega)} \quad (\text{A.67})$$

de modo que en el producto de los espectros de las bases de síntesis (Ecuación A.65) y análisis (A.67), el factor $\widehat{\kappa}(\omega)$ se anule y se tiene como resultado el producto (A.66) que se supuso inicialmente diferentes de cero.

Por los mismas razones, las nuevas bases de funciones de escala de análisis y síntesis serán:

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}^K(\omega) &= l(\omega)\widehat{\phi}(\omega) \\ \phi^{\widehat{K}}(\omega) &= \frac{\widehat{\phi}(\omega)}{l(\omega)} \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

para una función $l(\omega)$ desconocida.

Para que se cumplan las condiciones de biortogonalidad, debe tenerse que:

$$\begin{aligned} H^{\widetilde{K}}(\omega)\overline{H^{\widehat{K}}(\omega)} + H^{\widehat{K}}(\widetilde{\omega} + \pi)\overline{H^{\widetilde{K}}(\omega + \pi)} &= 1 \\ G^{\widetilde{K}}(\omega)\overline{G^{\widehat{K}}(\omega)} + G^{\widehat{K}}(\widetilde{\omega} + \pi)\overline{G^{\widetilde{K}}(\omega + \pi)} &= 1 \\ G^{\widetilde{K}}(\omega)\overline{H^{\widehat{K}}(\omega)} + G^{\widehat{K}}(\widetilde{\omega} + \pi)\overline{H^{\widetilde{K}}(\omega + \pi)} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

$$H^{\widetilde{K}}(\omega)\overline{G^K(\omega)} + H^K(\widetilde{\omega} + \pi)\overline{G^K(\omega + \pi)} = 0$$

De la definición para las funciones de escala y de la ecuación de dilatación, debe tenerse que:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}^K(\omega) &= l(\omega)\widetilde{H}(\omega/2)\tilde{\phi}(\omega/2) \\ &= l(\omega)\widetilde{H}(\omega/2)\frac{\tilde{\phi}^K(\omega/2)}{l(\omega/2)}\end{aligned}\quad (\text{A.70})$$

Por lo tanto

$$\widetilde{H}^K(\omega) = \frac{l(2\omega)}{l(\omega)}H(\omega) \quad (\text{A.71})$$

Con argumentos similares se tiene que:

$$\begin{aligned}H^K(\omega) &= \frac{l(\omega)}{l(2\omega)}H(\omega) \\ G^K(\omega) &= \frac{l(\omega)}{\widehat{\kappa}(2\omega)}G(\omega) \\ \widetilde{G}^K(\omega) &= \frac{\widehat{\kappa}(2\omega)}{l(\omega)}G(\omega)\end{aligned}\quad (\text{A.72})$$

Que al sustituirlo en las condiciones de biortogonalidad, se tiene:

$$\frac{l(2\omega)}{\widehat{\kappa}(\omega)}\widetilde{H}(\omega)\frac{l(\omega)}{\widehat{\kappa}(2\omega)}G(\omega) + \frac{l(2\omega + 2\pi)}{\widehat{\kappa}(\omega + \pi)}\widetilde{H}(\omega)\frac{l(\omega + \pi)}{\widehat{\kappa}(2\omega + 2\pi)}G(\omega) = 0 \quad (\text{A.73})$$

Y como

$$H^{\widetilde{K}}(\omega)\overline{G^K(\omega)} + H^K(\widetilde{\omega} + \pi)\overline{H^K(\omega + \pi)} = 0 \quad (\text{A.74})$$

se necesita que

$$\frac{l(2\omega)}{\hat{\kappa}(2\omega)} = \frac{l(2\omega + 2\pi)}{\hat{\kappa}(2\omega + 2\pi)} \quad (\text{A.75})$$

Se define a

$$m(\omega) = \frac{\hat{\kappa}(\omega)}{l(\omega)} \quad (\text{A.76})$$

que tiene que ser periódica en 2π .

Por otra parte, por las definiciones

$$\begin{aligned} m(\omega)\tilde{\phi}^K(\omega) &= \hat{\kappa}(\omega)\tilde{\phi}(\omega) \\ \hat{\kappa}(\omega)\phi^K(\omega) &= m(\omega)\phi(\omega) \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

y como $\phi^K(0) = \phi^{\widetilde{K}}(0) = 0$, debe ser que

$$\frac{m(\omega)}{\hat{\kappa}(\omega)} \rightarrow 0 \quad (\text{A.78})$$

a medida que $\omega \rightarrow 0$, es decir, que a $m(\omega)$ aproxima a $\hat{\kappa}(\omega)$ para valores pequeños de ω .

Bajo estas condiciones, la función para $m(\omega)$ se escogió como (Ekstedt y Lindberg, 2000):

$$m(\omega) = k(-i(\exp(i\omega) - 1)) \quad (\text{A.79})$$

debido a que cuando $\omega \rightarrow 0$ entonces $-i(\exp(i\omega) - 1) \rightarrow \omega$.

Si m_l es la transformada inversa de Fourier de $m(\omega)$

$$m(\omega) = \sum_l m_l \exp(-il\omega) \quad (\text{A.80})$$

Por las definiciones, el producto

$$m(\omega)\tilde{\phi}^K(\omega) = m(\omega)l(\omega)\tilde{\phi}(\omega) = \frac{\hat{\kappa}(\omega)}{l(\omega)}l(\omega)\tilde{\phi}(\omega) = \hat{\kappa}(\omega)\tilde{\phi}(\omega) \quad (\text{A.81})$$

por lo que en el dominio del tiempo, convolucionar m_l y $\tilde{\phi}^K$ daría el efecto de obtener $K^*\tilde{\phi}^K$:

$$K^*\tilde{\phi}(t) = \sum_l \bar{m}_l \tilde{\phi}^K(t+l) \quad (\text{A.82})$$

Se se aplica el operador K a la representación ondicular de una función $f(t)$ a partir de la escala J :

$$Kf(t) = \sum_l \langle f(t), K^*\tilde{\phi}_{Jl} \rangle \phi_{Jl}(t) + \sum_{j=J}^{\infty} \sum_l \langle f(t), K^*\tilde{\psi}_{jl} \rangle \psi_{jl}(t) \quad (\text{A.83})$$

e invocando la condición A.60 se tiene:

$$Kf(t) = \sum_l k_J \langle f(t), \tilde{\phi}_{Jl}^K \rangle \phi_{Jl}^K(t) + \sum_{j=J}^{\infty} \sum_l k_j \langle f(t), \tilde{\psi}_{jl}^K \rangle \psi_{jl}(t) \quad (\text{A.84})$$

De la Ecuación (A.82) y de la condición (A.60) se puede entender que:

$$\langle f(t), \tilde{\phi}_{Jl}^K \rangle = k_J \sum_l m_n \langle f, \tilde{\phi}_{j,l-n}^K \rangle \quad (\text{A.85})$$

es la convolución de los coeficientes de escala en la base $\tilde{\phi}$ con el filtro m_n .

En resumen: Para implantar un operador K lineal homogéneo deberán realizarse los siguientes pasos:

1. Dada una base original de análisis y síntesis, construir las bases de análisis para el operador de acuerdo a la exposición que se hace en la siguiente subsección, y determinar el filtro m_l de la Ecuación A.80.
2. Con la función $f(t)$, estas bases y para una escala mínima J , obtener los coeficientes de escala y detalle con el algoritmo piramidal:
 - λ_{Jl}^K : Coeficientes de escala.
 - γ_{jl}^K : Coeficientes de detalle.

3. Los coeficientes λ_{jl}^K se convolucionan con m_l y el resultado se multiplica por k^J .
4. Los coeficientes γ_{jl}^K se multiplican por k^j .
5. Con estos coeficientes se realiza la reconstrucción con el algoritmo piramidal. Se utiliza la base original de síntesis.

A.5.1 La nueva base ortogonal

Para encontrar expresiones explícitas de la nueva base ortogonal, partamos de la identidad:

$$\frac{\exp(i\omega) - 1}{i\omega} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\exp(i2^{-j}\omega) + 1}{2} \quad (\text{A.86})$$

Los operadores cumplen que $\hat{\kappa}(\omega_1\omega_2) = \hat{\kappa}(\omega_1)\hat{\kappa}(\omega_2)$. Por las condición A.60 se tiene que $\hat{\kappa}(2) = k\hat{\kappa}(1)$.

Si se aplica el operador en frecuencia $\hat{\kappa}(\cdot)$ a la identidad (A.86) se tiene:

$$\frac{\hat{\kappa}(-i(\exp(i\omega) - 1))}{\hat{\kappa}(\omega)} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{\kappa}(\exp(i2^{-j}\omega) + 1)}{k\hat{\kappa}(1)} \quad (\text{A.87})$$

Por la Ecuación de dilatación, deber ser que:

$$\phi(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} H(2^{-j}\omega) \quad (\text{A.88})$$

Si se multiplican las expresiones miembro por miembro de (A.87) y (A.88):

$$\frac{\hat{\kappa}(-i(\exp(i\omega) - 1))}{\hat{\kappa}(\omega)}\phi(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{\kappa}(\exp(i2^{-j}\omega) + 1)}{k\hat{\kappa}(1)}H(2^{-j}\omega) \quad (\text{A.89})$$

Del lado izquierdo de esta ecuación se puede reconocer a $m(\omega)$ de su definición, y que al dividirse por $\hat{\kappa}(\omega)$, resulta ser el factor $1/l(\omega)$, por lo que de este lado se define a la función de ondícula de análisis para el operador K :

$$\phi^K(\omega) = \frac{\hat{\kappa}(-i(\exp(i\omega) - 1))}{\hat{\kappa}(\omega)} \phi(\omega) \quad (\text{A.90})$$

Del lado derecho de A.89 se reconoce el filtro $H^K(\omega)$ que se utiliza en la ecuación de dilatación:

$$H^K(\omega) = \frac{\hat{\kappa}(\exp(i\omega) + 1)}{k\hat{\kappa}(1)} H(\omega) \quad (\text{A.91})$$

Con argumentos similares, las nuevas funciones de filtro serán:

$$\begin{aligned} \tilde{H}^K(\omega) &= \frac{k\hat{\kappa}(1)}{\hat{\kappa}(\exp(i\omega) + 1)} \tilde{H}(\omega) \\ G^K(\omega) &= \frac{1}{k\hat{\kappa}(-i(\exp(i\omega) - 1))} G(\omega) \\ \tilde{G}^K(\omega) &= \frac{1}{k\hat{\kappa}(-i(\exp(i\omega) - 1))} \tilde{G}(\omega) \end{aligned} \quad (\text{A.92})$$

A.5.2 Atributos instantáneos

Estos conceptos se aplicaron a las funciones de ondículas y filtros de escalamiento de la familia que Daubechies formuló y que se muestran en la Figura A.5. También se muestran sus versiones para la transformada de Hilbert al construir la base de análisis con las ecuaciones A.92.

Por la definición de la transformada de Hilbert:

$$H\widehat{f}(\omega) = -i\text{sign}(\omega)\widehat{f}(\omega) \quad (\text{A.93})$$

se tiene que:

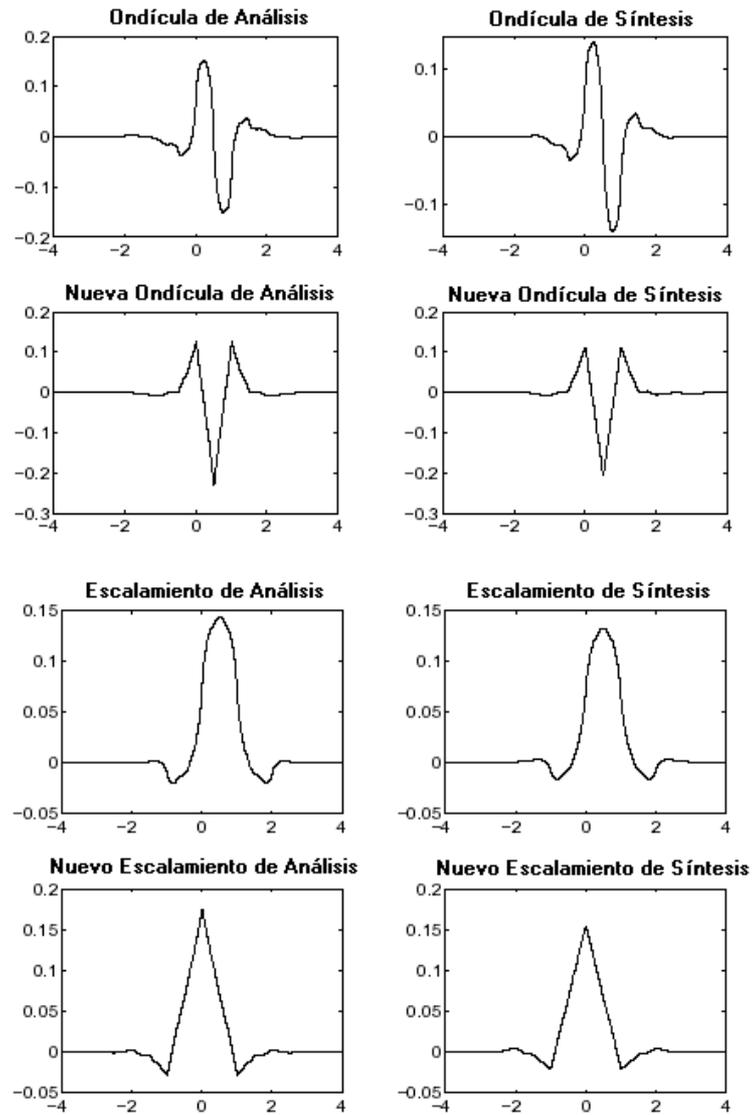


Figura A.5: Funciones de ondículas y escalamiento originales y especiales para la transformada de Hilbert (Ekstedt y Lindberg, 2000).

- La constante $k = 1$.
- La función

$$m(\omega) = \frac{\exp(-i\omega) - 1}{|\exp(-i\omega) - 1|} \quad (\text{A.94})$$

en el tiempo es:

$$m_l = \frac{1}{\pi(l + 1/2)} \quad (\text{A.95})$$

Con la transformada de Hilbert y los datos originales se forma una serie de tiempo de números complejos a los cuales se determina su amplitud y fase. La frecuencia instantánea se determina en la práctica al utilizar un filtro derivador que se convoluciona con la serie de tiempo de fases instantáneas.

En la Figura A.6 se comparan los atributos instantáneos convencionales con los que se obtienen con este análisis ondicular. Se utilizaron datos públicos del campo de Boonsville. De estas figuras se puede identificar con mayor facilidad un paleocanal con los atributos de ondícula que con los convencionales.

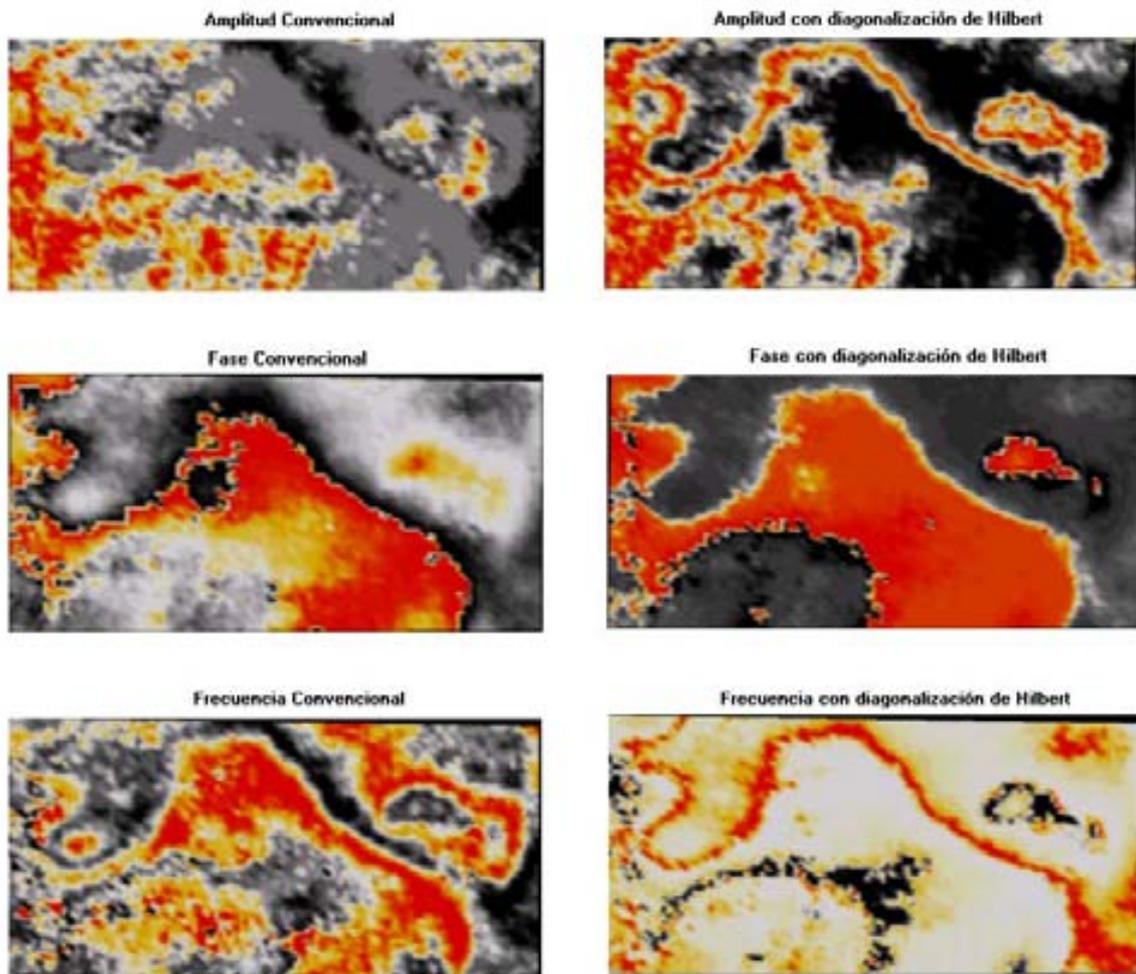


Figura A.6: Atributos instantáneos de amplitud, fase y frecuencia. En la derecha se utilizó la diagonalización de la transformada de Hilbert.

Bibliografía

- [1] Aki, K. y P. G. Richards, 2002, Quantitative Seismology, University Science Books.
- [2] Bahorich, M. S. y S. Farmer, 1995, The coherency cube, The Leading Edge, 14-10, 1053-1058.
- [3] Bahorich., M. S. y S. Farmer, 1996, Method of seismic signal processing and exploration, US Patent 5,563,949.
- [4] Bakker, P., 2002, Image structure analysis for seismic interpretation, disertación doctoral, Universidad Técnica de Delft, Países Bajos.
- [5] Battista, B. M., C. Knapp, T. McGee y V. Goebel, 2007, Application of the empirical mode decomposition and Hilbert-Huang transform to seismic reflection data, Geophysics, 72-2, H29-H37.
- [6] Barsky, B. A., 1993, Rotational beta-splines for representing curves and surfaces, IEEE Computer Graphics and Applications, 13-6, 24-32.
- [7] Bedrosian, E., 1963, A product theorem for Hilbert transform, Proceedings of the IEEE, 51, 868-869.
- [8] Bickel, S. H., 1993, Similarity and the inverse Q filter: The Pareto-Levy stretch, Geophysics, 58-11, 1629-1633.

- [9] Box, G. y N. R. Draper, 1969, *Evolutionary operation: A statistical technique for process improvement*, John Wiley and Sons.
- [10] Brown, A. R., 1985, *Seismic attributes and their classification*, *The Leading Edge*, 4-10, 60-65.
- [11] Carcione, J. M., F. Cavallini, F. Mainardi y A. Banyga, 2002, *Time-domain modeling of constant-Q seismic waves using fractional derivatives*, *Pure and applied geophysics*, 159-7, 1719-1736.
- [12] Carpenter, E. W., 1966, *Absorption of elastic waves. An operator for a constant Q mechanism*, AWRE Report, incluido en Toksoz, M. N. y D. H. Johnston, 1981, *Seismic Wave Attenuation*, Geophysical Reprint Series, Vol 2, SEG.
- [13] Castagna, J. P., S. Sun y R. W. Siegfried, 2003, *Instantaneous spectral analysis: Detection of low-frequency shadows associated with hydrocarbons*, *The Leading Edge*, 22-2, 120-126.
- [14] Castagna, J. P., R. W. Siegfried y S. Sun, 2006, *Instantaneous Spectral Analysis*, US Patent 6,985,815 B2.
- [15] Chakraborty, A. y D. Okaya, 1995, *Frequency-time decomposition of seismic data using wavelet-based methods*, *Geophysics*, 60-6, 1906-1916.
- [16] Chen, C., C. Li y T. Teng, 2002, *Surface-wave dispersion measurements using Hilbert-Huang transform*, *Terrestrial, Atmospheric and Oceanic Sciences*, 13-2, 171-184.
- [17] Chen, Q, N. Huang, S. D. Riemenschneider y Y. Xu, 2006, *A B-spline approach for empirical mode decompositions*, *Advances in Computational Mathematics*, 24, 171-195.

- [18] Coello-Coello, C. A. y G. Toscano-Pulido, 2001, A Micro-genetic algorithm for multi-objective optimization, consultado en Junio de 2007 en <http://citeseer.ist.psu.edu/444668.html>
- [19] Cohen, L., Time Frequency Analysis, 1995, Prentice Hall.
- [20] Coléau, T., M. Poupon y K. Azbel, Unsupervised seismic facies classification: A review and comparison of techniques and implementation, 2003, The Leading Edge, 22-10, 942-953.
- [21] Daubechies, I. y F. Planchon, Adaptive Gabor Transforms, 2002, Applied and Computational Harmonic Analysis, 13-1, 1-21.
- [22] Ebrom, D., 2004, The low frequency gas shadow on seismic sections, The Leading Edge, 23-8, 772.
- [23] Ekstedt, F. y M. Lindberg, 2000, Diagonalization of homogeneous linear operator in biorthogonal wavelet bases, accedido en octubre de 2006 en <ftp://ftp.md.chalmers.se/pub/users/mlind/diag-letterer.ps.gz>
- [24] Flandrin, P. y P. Goncalves, 2004, Empirical mode decomposition as a filter bank, IEEE Signal Processing Letters, 11-2, parte 1, 112-114.
- [25] Futterman, W. I., 1963, Dispersive body waves, Journal of Geophysical Research, 67-13, 5279-5291.
- [26] Gersztenkorn, A. y K. J. Marfurt, 1999, Eigenstructure-based coherence computations as an aid to 3-D structural and stratigraphic mapping, Geophysics, 64-5, 1468-1479.
- [27] Golub, G. H. y C. F. van Loan, 1983, Matrix computations, John Hopkins University Press.

- [28] González, A. y R. E. Chambers, 1993, Method for compensating seismic wavelfield amplitudes for transmission losses in the overburden, US Patent 5,479,376.
- [29] Hardage, B. A., D. L. Carr, D. E. Lancaster, J. L. Simmons Jr, R. Y. Elphick, V. M. Pendleton y R. A. Johns, 1996, 3-D seismic evidence of the effects of carbonate karst collapse on overlying clastic stratigraphy and reservoir compartmentalization, *Geophysics*, 61-5, 1336-1350.
- [30] Hardage, B. A., D. L. Carr, D. E. Lancaster, J. L. Simmons, D. S. Hamilton, R. Y. Elphick, K. L. Oliver y R. A. Johns, 1996b, 3-D seismic imaging and seismic attribute analysis of genetic sequences in low-accomodation conditions, *Geophysics*, 61-5, 1351-1362.
- [31] Hardage, B. A., J. L. Simmons, D. E. Lancaster, R. Y. Elphick, E. D. Edson y D. L. Carr, 1996c, Boonsville 3-D seismic data set, Bureau of Economic Geology, The University of Texas at Austin.
- [32] Hargreaves, N. D., 1992, Similarity and the inverse Q filter: Some simple algorithms for inverse Q filter, *Geophysics*, 57-7, 944-947.
- [33] Holschneider, M., M. S. Diallo, M. Kulesh, M. Ohrberger, E. Lück y F. Scherbaum, 2005, Characterization of dispersive surface waves using continuous wavelet transforms, *Geophysical Journal International*, 163-3, 463-478.
- [34] Huang, N. E., Z. Shen, S. H. Long, M. C. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N. Yen, C. C. Tung y H. H. Liu, 1998, The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 454-1971, 903-995.

- [35] Huang, N. E., C. C. Chern, K. Huang, L. W. Salvino, S. R. Long y S. L. Fan, 2001, A new spectral representation of earthquake data: Hilbert spectral analysis of station TCU129, Chi-Chi, Taiwan, 21 September 1999, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 91-5, 1310-1338.
- [36] Huang, N. E. y S. P. Shen, 2005, *The Hilbert-Huang transform and its applications*, World Scientific Press.
- [37] Janssen, D., J. Voss y F. Theilen, 1985, Comparison of methods to determine Q in shallow marine sediments from vertical reflection seismograms, *Geophysical Prospecting*, 33-4, 479-497.
- [38] Jones, D. L. y R. G. Baraniuk, 1995, An adaptive optimal-kernel time-frequency representation, *IEEE Transactions on signal processing*, 43-10, 2361-2371.
- [39] Jones, I. F., 1985, *Applications of the Karhunen-Loeve transform in reflection seismology*, disertación doctoral, Universidad de la Columbia Británica, Canadá.
- [40] Kjartansson, E., 1981, Constant Q -wave propagation and attenuation, *Journal of Geophysical Research*, 84-B9, pags 4737-4748.
- [41] Kolsky, H., 1956, The propagation of stress pulses in viscoelastic solids, *Philosophical Magazine*, 1-8, 696-710.
- [42] Liner, C. L., 2004, *Elements of 3D seismology*, Pennwell Press.
- [43] Lu, W., Y. Li, S. Zhang, H. Xiao y Y. Li, 2005, Higher order statistics and supertrace based coherence estimation algorithm, *Geophysics*, 70-3, P13-P18.
- [44] Luo Y., S. Al Dossary y M. Alfaraj, 2002, Edge-preserving smoothing and applications: The Leading Edge, 21-2, 136-158.

- [45] Luo, Y., S. Al-Dossary, M. Maher y M. Alfaraj, 2003, Generalized Hilbert transform and its applications in geophysics, *The Leading Edge*, 22-3, 198-202.
- [46] Magrin-Chagnolleau, I. y R. Baraniuk, 1999, Empirical mode decomposition based time-frequency attributes, *SEG Expanded Abstracts*, 1949-1952.
- [47] Mainardi, F. y M. Tomirotti, 1997, Seismic pulse propagation with constant Q and stable probability distributions, *XL-5*, 1311-1328.
- [48] Mallat, S. G., 1989, A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation, *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 11-7, 674-693.
- [49] Mandelbrot, B., 1960, The Pareto-Lévy law and the distribution of income, *International Economic Review*, 1-2, 79-106.
- [50] Marfurt, K. J., R. L. Kirlin, S. L. Farmer y M. Bahorich, 1998, 3-D seismic attributes using a semblance-based coherency algorithm, *Geophysics*, 63-4, 1150-1165.
- [51] Marfurt, K. J., V. Sudhaker, A. Gezternkorn, K. D. Crawford y S. Nissen, 1999, Coherency calculations in the presence of structural dip, *Geophysics*, 64-1, 104-111.
- [52] Marfurt, K. J. and R. L. Kirlin, 2000, 3-D broad-band estimates of reflector dip and amplitude, *Geophysics*, 65-1, 304-320.
- [53] Marfurt, K. J. y R. L. Kirlin, 2001, Narrow-band spectral analysis and thin-bed tuning, *Geophysics*, 60-4, 1274-1283.
- [54] Marfurt, K. J., 2006, Robust estimates of 3-D reflector dip and azimuth, *Geophysics*, 71-4, P29-P40.

- [55] Möller, T., K. Mueller, Y. Kurzion, R. Machiraju y R. Yagel, 1998, Design of accurate and smooth filters for function and derivatives reconstruction, Proceedings of the 1998 symposium on volume visualization, 143-151, accedido en mayo de 2007 en http://www.cs.sunysb.edu/~mueller/papers/volvis98_Design.pdf
- [56] Neidell, N. S. y M. T. Taner, 1971, Semblance and other coherency measures of multichannels data, *Geophysics*, 36-3, 482-497.
- [57] Nelder, J. A. y R. Mead, 1965, A Simplex Technique for Function Minimization, *Computer Journal*, 7-4, 308-313.
- [58] Nuttall, A. H., 1966, On the quadrature approximation to the Hilbert transform of modulated signals, *Proceedings of the IEEE*, 54-10, 1458-1459.
- [59] Odebatu, E., J. Zhang, M. Chapman, E. Liu y X. Yang Li, 2006, Application of spectral decomposition to detection of dispersion anomalies associated with gas saturation, *The Leading Edge*, 25-2, 206-210.
- [60] Papoulis, A., 1962, *The Fourier integral and its applications*, Mc Graw-Hill.
- [61] Partyka, G. A., J. Gridley y J. López, 1999, Interpretational applications of spectral decomposition in reservoir characterization, *The Leading Edge*, 18-3, 353-360.
- [62] Partyka, G. A., 2001, Seismic thickness estimation: Three approaches, pros and cons, expanded abstract, *SEG Expanded Abstracts*.
- [63] Pedersen, S. I., T. Randen y L. Sonneland, 2002, Automatic fault extraction using artificial ants, *SEG Expanded Abstracts*.

- [64] Pedersen, H. A., J. I. Mars y P. O. Amblard, 2003, Improving surface-wave group velocity measurements by energy reassignment, *Geophysics*, 68-2, 677-684.
- [65] Pennington, W. D., 2001, Calibration of seismic attributes for reservoir characterization, DOE Award Number DE-AC26-98BC15135, accedido en Mayo de 2008 en http://www.geo.mtu.edu/spot/Calibration_Seismic/15135R06.pdf
- [66] Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling y B. P. Flannery, 2002, *Numerical Recipes in C++*, Cambridge University Press.
- [67] Randen, T., E. Monsen y C. Signer, A. Abrahmsen, J. O. Hansen, T. Sæter, J. Shlaf y L. Sønneland, 2000, Three dimensional texture attributes for seismic data analysis, *SEG Expanded Abstracts*.
- [68] Rao, S. S., 1996, *Engineering optimization*, John Wiley and Sons.
- [69] Reyes Ramos, F. y J. O. Campos Enríquez, 2007, Enhancing C2 and C3 coherency resolutions through optimizing semblance-based functions, *Geofísica Internacional*, 46-3, 363-174.
- [70] Rickett, J. E., 2008, Method for estimation of interval seismic quality factor, US Patent 7,376,517 B2.
- [71] Rivera Recillas, D. E., 2005, Atributos sísmicos mediante transformada ondicular discreta, disertación doctoral, Instituto de Geofísica, UNAM.
- [72] Robertson, J. D. y H. H. Nogami, 1984, Complex seismic trace of thin beds, *Geophysics*, 49-4, 344-352.
- [73] Robertson, J. D. y D. A. Fisher, 1988, Complex seismic trace attributes, *The Leading Edge*, 7, 22-26.

- [74] Robinson, J. C., 1979, A technique for the continuous representation of dispersion in seismic data, *Geophysics*, 44-8, 1345-1351.
- [75] Sheriff, R. E., 2002, *Encyclopedic Dictionary of Applied Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists.
- [76] Sinha, S., P. Routh, P. Anno y J. P. Castagna, 2005, Spectral decomposition of seismic data with continuous wavelet transform, *Geophysics*, 70-6, P19-P25.
- [77] Sinha, S. K., P. S. Routh, P. D. Anno y J. P. Castagna, 2006, Time frequency attribute of seismic data using continuous wavelet transform, *SEG Expanded Abstracts*.
- [78] Spendley, W., G. R. Hext, y F. R. Himsforth, 1962, Sequential Application of Simplex Designs in Optimization and Evolutionary Operation, *Technometrics*, 4-4, 441-461.
- [79] Steeghs, P. y G. Drijkoningen, 2004, Seismic sequence analysis and attribute extraction, Rice consortium for computational seismic interpretation, accedido en mayo de 2006 en <http://citeseer.ist.psu.edu/364425.html>
- [80] Stein, S. y M. Wysession, 2003, *An introduction to seismology, earthquakes, and earth structure*, Blackwell Publishing.
- [81] Tanakov, M. Y., 1997, Integrated reservoir description for Boonsville (Texas) field using 3-D seismic, well and production data, tesis de maestría en ciencias, Universidad de Tulsa.
- [82] Taner, M. T., F. Koehler y R. E. Sheriff, 1979, Complex seismic trace analysis, *Geophysics*, 44-6, 1041-1063.

- [83] Taner, M. T., 1983, Joint time/frequency analysis Q quality factor and dispersion computation using Gabor-Morlet wavelets or Gabor-Morlet transform, Rock Solid Images, accedido el 22 de septiembre de 2008 en la dirección <http://www.rocksolidimages.com/pdf/gabor.pdf>
- [84] Taner, M. T., 1998, Seismic Attributes Revisited, Rock Solid Images, 1998.
- [85] Taner, M. T., 2003, A robust method for Q estimation, SEG Expanded Abstracts.
- [86] Tonn, R., 1989, Comparison of seven methods for the computation of Q, Physics of the earth and planetary interiors, 55-3, 259-268.
- [87] Tonn, R., 1991, The determination of the seismic quality factor Q from VSP data: A comparison of different computational methods, Geophysical Prospecting, 39-1, 1-27.
- [88] White, R. E., 1991, Properties of instantaneous seismic attributes, The Leading Edge, 10-7, 26-32.
- [89] Widess, M. B., 1973, How thin is a thin bed?, Geophysics, 38, 1176-1180.
- [90] Wu, Z. y N. E. Huang, 2004, A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition method, Proceeding of the Royal Society, A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 460-2046, 1597-1611.
- [91] Young, I. T. y L. van Vliet, 1995, Recursive implementation of the gaussian filter, Signal Processing, 44-2, 139-151.