



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

INFLUENCIAS DEL CAOS EN EL TRANSPORTE EN
POTENCIALES PERIÓDICOS ASIMÉTRICOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

ALBA MARGARITA RESÉNDIZ ANTONIO

DIRECTORES DE TESIS: DR. JOSÉ LUIS MATEOS TRIGOS,
DR. HERNÁN LARRALDE RIDAURA

COMITÉ TUTORAL: DR. DENIS BOYER



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F. OCTUBRE 2008



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres todo el apoyo incondicional que me proporcionaron, mostrándome siempre el lado amable de la vida y al resto de mi familia por compartirme sus experiencias y sus mejores momentos.

Agradezco al Dr. José Luis Mateos Trigos por permitirme ser partícipe en unos de sus proyecto de investigación y al Dr. Hernán Larralde Ridaura por darme una formación y guiarme oportunamente a lo largo de este trabajo.

Agradezco a la Dra. Karen Volke Sepúlveda por permitirme ser partícipe como becaria de DGAPA en su proyecto “Estudio del transporte de motores brownianos por medio de micromanipulación óptica” en el periodo Enero-October del 2007.

Agradezco también al Dr. Denis Boyer, al Dr. Rafael Méndez Sánchez, al Dr. Luis Benet Fernandez y al Dr. Octavio Miramontes Vidal, quienes con sus revisiones y comentarios, contribuyeron al mejoramiento de esta tesis.

Agradezco a mis compañeros Raúl Salgado y Abelardo Ramírez por las muchas reuniones de discusión que contribuyeron a enriquecer el contenido de esta tesis.

Mis mas sinceros agradecimiento al Instituto de Ciencias Físicas, UNAM por darme formación académica y permitirme el uso de sus instalaciones como alumna asociada. Agradezco a Reyes García por el apoyo brindado en el Centro de Cómputo

Cuernavaca, Morelos. Octubre 2008.

Resumen

El fenómeno de transporte que ocurre en diversos sistemas microscópicos, ha sido estudiado para dar una posible explicación de las causas que originan el flujo de materia en contra de una fuerza. Unos de los modelos utilizados para describir la dinámica del transporte que ocurre en sistemas deterministas y en sistemas estocásticos es la *Matraca de Feynman*, dispositivo que describe el comportamiento de una partícula en un sistema amortiguado con inercia.

Partiendo del modelo de una matraca determinista con un forzamiento periódico dependiente del tiempo y un forzamiento externo constante en el que ocurre transporte neto de materia, se estudia la dinámica del sistema en función de las condiciones iniciales y de la magnitud de la fuerza externa. En este sistema, se muestra que existe un intervalo pequeño en el que puede existir un flujo en contra de una fuerza constante (efecto matraca) y que para aquellos valores contenidos dentro del mismo, que no producen el efecto, se puede inducir transporte mediante la variación en los parámetros de control o de las condiciones iniciales. Al calcular el flujo de partículas como función de la magnitud de la fuerza constante, se observa que ocurren cambios en la dirección de movimiento. Analizando la trayectoria del flujo y el respectivo diagrama de bifurcación, se determina que existe una fuerte correlación entre éstos: la transición de una dinámica periódica a una dinámica caótica o viceversa, está estrechamente relacionada con el cambio de la dirección del flujo.

Por otro lado, la adición de un término de ruido blanco Gaussiano a un modelo matraca modifica la dinámica del sistema. En una matraca con un forzamiento periódico externo en presencia de un ruido blanco Gaussiano, las condiciones iniciales no influyen en la dirección del flujo. En este caso, la dirección de flujo puede ser positiva o negativa y está determinada por la magnitud de la amplitud del forzamiento externo.

Abstract

Ratchets have been studied for over a decade in order to try to explain the origin of transport against a force in microscopic systems. The device used to describe this behavior is *Feynman's Ratchets*, a useful model to explain transport in deterministic and stochastic systems.

In this work, we study the dynamics of a deterministic ratchet with a periodic external time-dependent force and an additional constant external field, varying the initial conditions and the magnitude of the external force. We show that ratchet effects exist in a small range of values of the external force. For these values, we show that the system can generate a flux of matter depending on the initial conditions.

We show that there can be a reversal of flow if we change the external constant force. Through the bifurcation diagram we can explain the reversal of current in ratchet systems. The bifurcation diagram shows that sudden dynamic changes are strongly related with the reversals of flow: The transition from a chaotic dynamics to a regular dynamics (or vice versa) occurs at the same time as a current reversal.

Also, we show that the dynamics in a brownian ratchet is different from that in the deterministic ratchet. Particularly, we show that the initial conditions do not have an influence on the flux direction. Positive or negative flux is determined by the size of the periodic external force.

Índice general *A3*

Resumen - A2

1. Introducción <i>A4</i>	1	
2. Motores tipo matraca <i>A5</i>	3	
2.1. Introducción a la Física de motores tipo matraca	3	
2.2. Modelo matemático	5	
2.3. Caracterización de la dinámica de una matraca	7	
2.3.1. Flujo	7	
2.3.2. Sección de Poincaré	8	
2.3.3. Atractores	9	
2.3.4. Diagrama de bifurcación	10	
3. Matraca determinista <i>A6 - Se dividió</i>	12	
3.1. Modelo matemático	12	
3.2. Dinámica de una matraca determinista inclinado	15	<i>A6-1</i>
3.2.1. Dinámica de una trayectoria en función de las condiciones iniciales	15	
3.2.2. Dinámica de una trayectoria en función de la amplitud de un forzamiento externo	18	
3.2.3. Diagrama de bifurcación	20	
3.2.4. Naturaleza de las órbitas: atractores periódicos o caóticos	23	
3.2.5. Flujo en función de la amplitud del forzamiento.	24	
3.2.6. Fenómeno de intermitencia	26	<i>A6-2</i>
	27	<i>A6-3</i>
	26	<i>A6-4</i>
	27	<i>A6-5</i>
4. Matraca determinista inclinada <i>A7 - Se dividió</i>	28	
4.1. Modelo matemático	29	
4.2. Dinámica de una matraca determinista inclinada	30	<i>A7-1</i>
4.2.1. Flujo promedio en función de la inclinación.	30	
4.2.2. Diagrama de bifurcación	32	<i>A7-2</i>

4.2.3. Dinámica de una trayectoria en función de las condiciones iniciales.	33	A7-2
4.2.4. Dinámica de una trayectoria en función de la amplitud de un forzamiento externo	34	A7-3
	35	
	36	A7-4
	37	
5. Matraca Browniana AB		
5.1. Origen del comportamiento Browniano	37	
5.2. Modelo matemático	39	
5.3. Dinámica de una matraca browniana	40	
5.3.1. Dinámica de las trayectorias en función de las condiciones iniciales.	41	
5.3.2. Dinámica de las trayectorias en función de la amplitud del forzamiento	42	
6. Conclusiones A9	45	
Bibliografía - A 10		

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas tipo matraca (o *ratchet*)¹ son sistemas fuera del equilibrio termodinámico que dan lugar a un transporte neto² de materia originado por la presencia de un potencial periódico asimétrico y de un forzamiento externo cuyo promedio temporal es cero.

El efecto matraca, término empleado para establecer la existencia de un flujo de materia en contra de una fuerza constante [1–3], ha sido empleado en sistemas pertenecientes a distintos campos para dar una posible explicación del origen del flujo en sistemas físicos, químicos y biológicos por mencionar algunos [4].

El modelo teórico usado para emular la dinámica consiste de un conjunto de partículas independientes, inmersas en un fluido viscoso, sujetas a un potencial periódico asimétrico y en presencia de una fuerza externa dependiente del tiempo de promedio cero. El interés por estudiar este tipo de sistemas es explicar el comportamiento colectivo de un conjunto de partículas idénticas en un estado fuera del equilibrio termodinámico y establecer las propiedades dinámicas en función de los parámetros de control de los términos no lineales.

En este trabajo se estudia la dinámica de dos sistemas que exhiben el efecto matraca. Se estudia un sistema determinista en presencia de un forzamiento externo constante y un sistema en presencia de un forzamiento estocástico. Los dos sistemas de estudio están en presencia de una fuerza debida a la inercia y de un forzamiento periódico externo dependiente del tiempo.

¹El término *matraca* es la traducción del inglés de la palabra *ratchet*: *Diccionario Español-Inglés Merriam-Webster*. A lo largo de este trabajo se utilizará la palabra *matraca*.

²El término *transporte* será utilizado para hacer referencia a un transporte neto de materia y no sólo al movimiento de las partículas.

El objetivo de este trabajo es encontrar valores apropiados de los parámetros de control de los términos no lineales, que dan lugar al efecto matraca en un sistema con un forzamiento externo constante y un sistema con un forzamiento estocástico. Habiendo encontrado los valores de los parámetros de control, se hace un análisis comparativo entre los sistemas mencionados y una matraca determinista que servirá como referencia.

En el Capítulo 2 se estudia el modelo de la matraca de Feynman [5], donde se presenta el análisis teórico, desde el punto de vista microscópico, de un dispositivo *rueda dentada-trinquete*. Adicionalmente se hace una revisión de algunos conceptos básicos de Dinámica No-lineal que sustentan el trabajo desarrollado en los capítulos posteriores.

En el Capítulo 3, se analiza la dinámica reportada en las referencias [9,13–16] de una matraca determinista con inercia con inclinación nula.

En el Capítulo 4, se estudia la dinámica de una matraca determinista con inercia en presencia de una fuerza constante externa. En este caso, se investiga el comportamiento de una partícula en función de la magnitud de la fuerza. El estudio permite hacer una elección apropiada de la magnitud de la fuerza para obtener una dinámica no trivial. Establecida la magnitud, se estudia el sistema en función de i) las condiciones iniciales y ii) en función de la amplitud del forzamiento. De los resultados obtenidos, se hace un análisis comparativo de la dinámica de una matraca determinista no inclinada y una matraca determinista inclinada.

Finalmente, en el Capítulo 5 se estudia una matraca browniana. Particularmente, se analiza el comportamiento de una partícula en presencia de un término de ruido blanco Gaussiano en función de i) las condiciones iniciales y ii) la amplitud de un forzamiento externo aplicado. El análisis permite elegir un valor apropiado de la amplitud para producir un transporte no trivial.

Capítulo 2

Motores tipo matraca

2.1. Introducción a la Física de motores tipo matraca

En el capítulo 46 de *The Feynman Lectures on Physics* [5], Feynman hace un análisis sobre la posibilidad de extraer trabajo de un sistema formado por una rueda dentada, un trinquete y unas aspas. En dicho capítulo se hace un análisis, desde el punto de vista microscópico, en el que se muestra que sólo es posible extraer trabajo, con una eficiencia no mayor a la del ciclo de Carnot [6], si el sistema se encuentra en un estado fuera del equilibrio termodinámico. El dispositivo utilizado en la referencia [5] se muestra en la Figura 2.1.

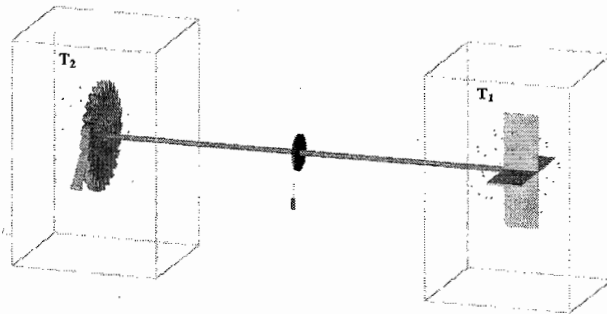


Figura 2.1: Dispositivo de Feynman formado por una rueda dentada, un trinquete y unas aspas para mostrar que es posible extraer trabajo de un sistema fuera del equilibrio termodinámico.

El modelo propuesto, comúnmente llamado **ratchet o matraca**, consiste de un eje rígido en cuyos extremos sostiene por un lado, unas aspas inmersas en un gas a temperatura T_1 y por el otro, un trinquete y una rueda dentada, inmersos en otro gas a temperatura T_2 , (ver Fig. 2.1).

La propuesta de Feynman, para saber si se puede extraer trabajo de un motor tipo matraca, es colocar una masa sostenida por un hilo que pende de la parte media de la barra. Si se logra extraer trabajo, la masa habrá ascendido de su posición inicial después de un tiempo en el que el eje haya rotado varias veces. En el caso contrario, si no se logra extraer trabajo, la masa permanecerá en promedio en su posición original, o bien, descenderá.

Del análisis de Feynman, se establece que no es posible extraer trabajo cuando las temperaturas T_1 y T_2 de los reservorios son iguales. Esto ocurre debido a que la temperatura constante e igual de los reservorios mantiene el equilibrio termodinámico y por tanto, el movimiento promedio de la rueda es nulo. Sin embargo, argumenta que la situación cambia cuando las temperaturas de los reservorios no son iguales, o dicho de otra manera, cuando el sistema se encuentra fuera del equilibrio termodinámico. En particular, hace mención que el sistema es de especial interés cuando la temperatura del reservorio donde se encuentran las aspas, es mayor que la temperatura donde se encuentran la rueda y el trinquete ($T_1 > T_2$). Para este caso, Feynman deduce que sí se puede extraer trabajo por que la rueda gira en una dirección preferencial, cambiando de este modo, la posición de la masa que pende de la barra en forma ascendente.

El argumento empleado para justificar el por qué se puede obtener trabajo de tal sistema es que, a causa del bombardeo de las moléculas del gas sobre las aspas, éstas oscilan alrededor del eje con pequeños movimientos que se transmiten hacia la rueda. Dado que la rueda tiene mayor probabilidad de girar en un sentido que en otro, porque en el otro se lo impide el trinquete, las oscilaciones transmitidas por el eje tendrán mayor efecto en una dirección que en otra. El hecho de que la rueda tenga una dirección preferencial de giro, lo justifica argumentando que el reservorio donde se encuentra el trinquete está a una temperatura T_2 menor que la temperatura T_1 donde se encuentran las aspas. Ante esta situación, el trinquete tiene menor probabilidad de que el gas menos energético le proporcione la energía necesaria para elevarlo al máximo y permitir el paso de regreso del diente.

El análisis efectuado permite concluir que la rueda girará preferencialmente en una sola dirección cuando las temperaturas de los reservorios sean distintas. Por lo tanto, de los argumentos expuestos se abstrae que las condiciones para obtener trabajo de una matraca son: 1) que exista una asimetría en la geometría del potencial para establecer una dirección preferencial de movimiento y 2) que el sistema esté en un estado fuera del equilibrio termodinámico.

El poder obtener trabajo útil del dispositivo de Feynman se ha relacionado con poder generar transporte de materia en contra de una fuerza originada por la presencia de un potencial. El modelo matemático más simple que imita el dispositivo *rueda dentada-trinquete*, consiste de una partícula en presencia de un potencial periódico asimétrico y de un forzamiento externo dependiente del tiempo. Estos dos términos juegan, respectivamente, el papel de asimetría de la rueda dentada y la condición de no equilibrio termodinámico.

2.2. Modelo matemático

Establecido el mecanismo de funcionamiento y las condiciones físicas necesarias para generar transporte, surgió el interés por estudiar la dinámica del sistema a través de un modelo matemático que satisfaga las condiciones del dispositivo *rueda dentada-trinquete*. Para esto, manteniendo en mente el dispositivo de Feynman, surgieron modelos teóricos cuya dinámica da lugar a transporte de materia [7, 8].

El modelo matemático unidimensional más simple, se construye al considerar las fuerzas que actúan sobre una partícula inmersa en un medio de viscosidad γ , en presencia de un potencial periódico asimétrico $V(x)$ y sujeta a un forzamiento externo $F(t)$ dependiente del tiempo y de promedio temporal cero. De forma general, se considera que el forzamiento es de tipo $F(t) = af(t)$ siendo a la amplitud del forzamiento y $f(t)$ la función que lo describe en el tiempo.

Haciendo uso de la Segunda Ley de Newton, la ecuación de movimiento es

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dx(t)}{dt} = - \frac{dV(x(t))}{dx} + F(t), \quad (2.1)$$

donde $\gamma \frac{dx(t)}{dt}$ es la fuerza disipativa debido a la viscosidad del medio y $V(x)$ es un potencial periódico asimétrico de periodo L que cumple con la condición $V(x) = V(x + L)$.

El término disipativo da lugar a la existencia de atractores, mientras que el término inercial da lugar a dos tipos de dinámica: una dinámica regular y una dinámica caótica [9, 10]. La clasificación de la dinámica es realizada a través de la serie de tiempo después de un tiempo transitorio. En el contexto de matracas, un sistema exhibe una dinámica regular cuando la trayectoria que traza una partícula tiene una dinámica repetitiva o periódica, mientras que la dinámica es caótica cuando el comportamiento no es periódico y además la distancia entre dos trayectorias diverge exponencialmente al cambiar ligeramente la condición inicial.

Para un sistema en el que actúa una fuerza $F(t) = af(t)$, la dinámica depende de la magnitud de la amplitud del forzamiento a . Si a es muy pequeña comparada con el resto de las fuerzas contenidas en la ecuación (2.1), el sistema exhibe una dinámica regular. Este comportamiento se debe a que la amplitud del forzamiento no es lo suficientemente fuerte para desplazar a la partícula a otro pozo del potencial, por lo tanto, la partícula oscila dentro de un pozo dando lugar a órbitas acotadas.

Si la magnitud de la amplitud es del orden de la magnitud de las fuerzas restantes, el forzamiento externo perturba a la partícula lo suficiente para desplazarla hacia otros pozos, permitiendo una dinámica regular o una dinámica caótica. El comportamiento de la trayectoria depende de los parámetros de control de los términos no lineales.

Finalmente, si la amplitud de a es mucho mayor que el resto de las fuerzas, el efecto del potencial se vuelve despreciable. La dinámica en este caso, está gobernada por el forzamiento externo que induce un comportamiento regular en las trayectorias debido a que la fuerza que domina es periódica.

El término inercial junto con el forzamiento externo juegan un papel importante en la existencia del caos. Si el término inercial no estuviera presente en la ecuación (2.1), no podría haber caos a pesar de la presencia del forzamiento externo. De la misma manera, si el término inercial estuviera presente pero el término de forzamiento no, tampoco habría caos. Lo interesante de la existencia del fenómeno de caos, es que éste puede presentarse en sistemas no lineales deterministas.

2.3. Caracterización de la dinámica de una matraca

En la sección 2.1 se estableció que el poder extraer trabajo de una matraca, está directamente relacionado con poder generar transporte de materia en contra del gradiente de un potencial. Por tal razón, una de las cantidades físicas de mayor importancia en el contexto de motores tipo matraca, es el **flujo promedio**. Sin embargo, existen otras cantidades físicas de la teoría de Dinámica No-lineal, que permiten conocer otras propiedades sobre el comportamiento de un sistema. El tipo de herramientas que se usa para la descripción dinámica, depende del sistema que se esté estudiando y de las propiedades que se estén buscando.

En las siguientes secciones se definirán algunos conceptos de interés para el estudio de la dinámica de sistemas tipo matraca. En particular, se definirán los términos de flujo, diagrama de bifurcación, atractores caótico y periódico y la sección de Poincaré, los cuales ayudarán a realizar la descripción de los sistemas que aquí se abordarán.

2.3.1. Flujo

La forma típica de cuantificar el transporte neto de materia en un motor tipo matraca es a través del flujo, término definido como la cantidad de materia que atraviesa una región del espacio por unidad de área por unidad de tiempo.

Para un sistema de partículas, determinar cuantitativamente el flujo requiere del conocimiento de dos cantidades: el promedio espacial de las velocidades de M trayectorias a un tiempo fijo t y el promedio temporal de cada una de sus trayectorias. La parte espacial hace referencia al promedio de las velocidades medias de un conjunto de M trayectorias con posiciones iniciales distintas y por simplicidad, con una velocidad inicial igual a cero.

La expresión para la velocidad promedio resultante es

$$v_j = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \dot{x}_i(t_j),$$

siendo t_j un intervalo de medición fijo del tiempo para cada trayectoria.

Por otro lado, dado que la velocidad instantánea en cada punto de la trayectoria es distinta, se requiere hacer un promedio temporal sobre N tiempos muestreados periódicamente de la velocidad promedio v_j para cada una de las

M trayectorias. Por tanto, el flujo promedio de partículas para un parámetro fijo dado, es de la forma

$$J = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N v_j.$$

2.3.2. Sección de Poincaré

Una forma de clasificar la dinámica periódica o caótica de una órbita es a través de la **Sección de Poincaré**, sección que se construye al registrar los valores p_i de las órbitas en el espacio fase n -dimensional, que intersectan con una **Superficie de Poincaré** $(n - 1)$ -dimensional. El registro de las intersecciones para $n = 3$ se muestra en la Figura 2.2.

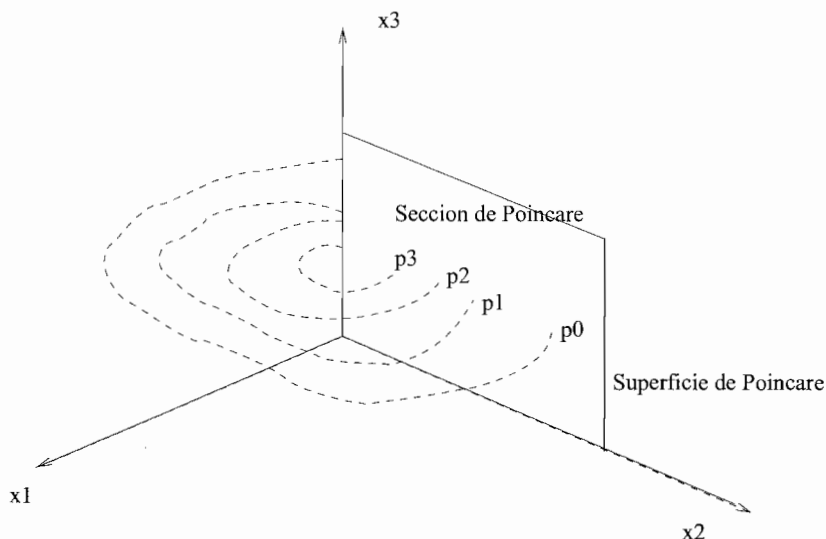


Figura 2.2: La secuencia de puntos p_1, p_2, \dots son las intersecciones de las órbitas en el espacio fase con la Superficie de Poincaré.

La Sección de Poincaré permite definir la estabilidad de un sistema. La robustez se determina a través del comportamiento de las órbitas en el espacio fase al variar ligeramente sus condiciones iniciales. Si la estructura de las órbitas es invariante ante distintas condiciones iniciales, el sistema es un sistema estable, mientras que si la estructura de la órbita cambia al variar las condiciones iniciales, la dinámica es inestable.

2.3.3. Atractores

Haciendo referencia a la Figura 2.2, si la sucesión de puntos p_1, p_2, \dots, p_n diverge de un punto fijo p en el límite de tiempos largos, las órbitas forman un *repulsor*. Por el contrario, si la sucesión p_1, p_2, \dots, p_n converge a un punto p , las órbitas forman un *atractor*.

En términos generales, un atractor es una región finita del espacio fase a la cual converge un conjunto de trayectorias inicializadas con distintas condiciones, en el límite de tiempos largos. El tiempo requerido para desprejar el transitorio está determinado por las condiciones iniciales y la magnitud de los parámetros de control de los términos no lineales.

Estrictamente hablando, un atractor se define como un conjunto cerrado A con las siguientes propiedades [11]:

- *A es un conjunto invariante*: Alguna trayectoria $x(t)$ que comienza en alguna región de A permanece en A para todo tiempo.
- *A atrae un conjunto abierto de condiciones iniciales*: Existe un conjunto abierto U que contiene a A tal que si $x(0) \in U$, entonces la distancia de $x(t)$ a A tiende a cero conforme $t \rightarrow \infty$. Esto quiere decir que A atrae a todas las trayectorias que comienzan lo suficientemente cerca de ésta. Al mayor de los conjuntos U que satisface dichas condiciones es llamado *cuenca de atracción* de A .
- *A es mínimo*: No hay un subconjunto propio de A que satisfaga las condiciones anteriores.

La naturaleza de un atractor está determinada por el comportamiento de las trayectorias en el espacio fase. Un atractor puede clasificarse como **atractor caótico**, **atractor periódico** o **atractor cuasiperiódico** [12].

Si dos trayectorias inicializadas con condiciones iniciales arbitrarias cercanas entre sí, evolucionan en el tiempo de tal forma que eventualmente convergen a una órbita cerrada cuya dinámica se repite en intervalos de tiempo τ , entonces el sistema tiene un atractor **periódico**.

Si la separación entre dos trayectorias que inician con condiciones iniciales cercanas entre sí, crece exponencialmente en el tiempo, el sistema tiene un atractor **caótico** o un **atractor extraño**.

Si una trayectoria inicializada con alguna condición arbitraria evoluciona de tal forma que después de un tiempo arbitrario describe una órbita cuya estructura global retoma condiciones previas que la hacen ver como periódica, el atractor se clasifica como un **atractor cuasiperiódico**.

En la Figura 2.3 se muestran las órbitas en el espacio fase de una partícula forzada externamente con un movimiento periódico. Esta situación se estudia en la referencia [9]. En la Figura 2.3(a) se muestra la trayectoria de un atractor caótico y en 2.3(b) se muestra la trayectoria de un atractor periódico.

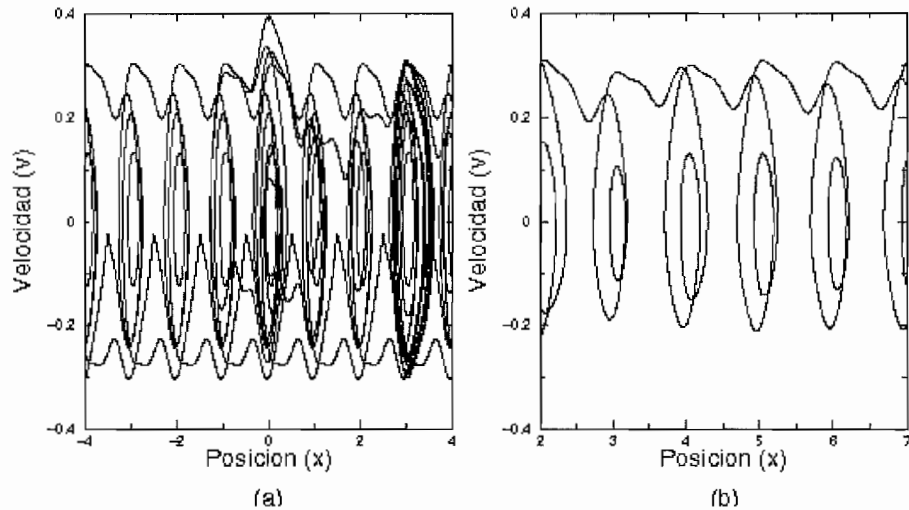


Figura 2.3: Ejemplo de (a) una órbita caótica y (b) una órbita periódica.

2.3.4. Diagrama de bifurcación

Una característica interesante que ocurre en la dinámica de sistemas no lineales es que la estructura de las trayectorias cambia cuantitativamente conforme el parámetro de control de un término no lineal es variado. Generalmente, para clasificar la dinámica periódica o caótica de las trayectorias se recurre al diagrama de bifurcación.

Al hacer un muestreo periódico de las velocidades que toma una partícula en cada intervalo de tiempo, para un parámetro de control fijo, se encuentra un conjunto de puntos $\{v_i\}$ para cada valor del parámetro. Al registro de las $\{v_i\}$

(después de un tiempo transitorio) como función de un parámetro de control se le llama **Diagrama de bifurcación**. El esquema se muestra en la Figura 2.4. El diagrama muestra las velocidades que toma una partícula en cada periodo de tiempo para una matraca determinista en función de la amplitud del forzamiento periódico externo. Este sistema es estudiado en la referencia [9] y se describirá en detalle más adelante.

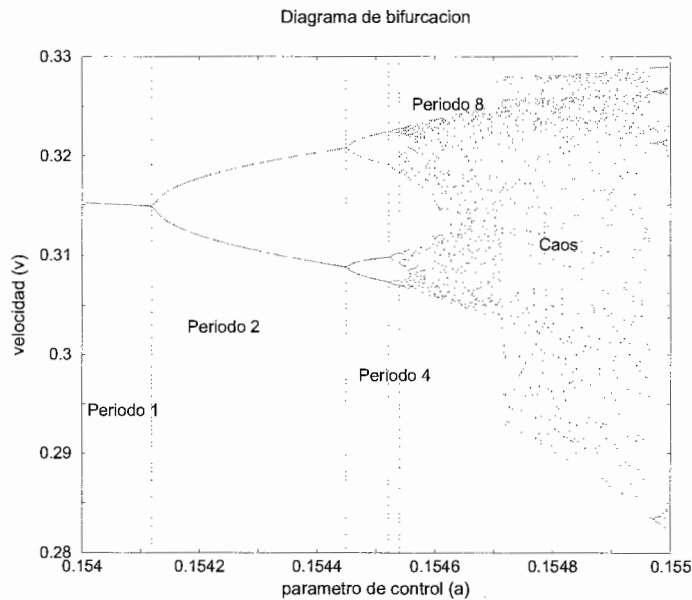


Figura 2.4: Diagrama de bifurcación: esquema del doblamiento de período de las trayectorias y las regiones donde ocurre caos de un sistema determinista con inercia forzado externamente en forma periódica.

El diagrama hace notar que las velocidades son periódicas en algunos intervalos del parámetro de control. Se muestra que ocurre un doblamiento de periodo de la forma $1, 2, 4, 8, \dots$ hasta llegar a un valor del parámetro donde se pierde el patrón 2^n , dando lugar a un comportamiento complejo llamado **caos**, región en donde la distancia entre dos trayectorias inicializadas con condiciones cercanas entre sí, crece exponencialmente.

Capítulo 3

Matraca determinista

En este capítulo se estudia la dinámica de una matraca determinista en presencia de un forzamiento externo dependiente del tiempo, reportado en las referencias [9, 13–16]. El objetivo de este capítulo es conocer algunas propiedades de transporte de una partícula en presencia de un potencial periódico asimétrico y sujeta a un forzamiento externo dependiente del tiempo. Para este sistema, se estudia el comportamiento en función de i) la amplitud del forzamiento como parámetro de control y ii) en función de las condiciones iniciales (CI). Para una amplitud del forzamiento fija, se muestra que existe un conjunto de CI que da lugar a un transporte en dirección positiva y otro conjunto complementario que da lugar a un transporte en dirección negativa. Se muestra que el conjunto de CI que da lugar a un flujo positivo es la cuenca de atracción de un atractor caótico, mientras que el conjunto complementario de CI que genera un flujo negativo es la cuenca de atracción de un atractor periódico. Por otro lado, manteniendo una CI fija arbitraria, se estudia la dinámica del sistema en función de la amplitud del forzamiento. En el análisis de las trayectorias, se muestra que ocurre el fenómeno de inversión de corriente en función de la amplitud del forzamiento y que cada inversión está directamente relacionada con una transición dinámica en el correspondiente diagrama de bifurcación.

3.1. Modelo matemático

Considere una partícula de masa m inmersa en un medio de viscosidad γ , en presencia de un potencial periódico asimétrico $V(x)$ y de una fuerza periódica $F(t)$ cuyo promedio temporal es cero.

De la Segunda Ley de Newton, la ecuación que describe la dinámica del sistema en el caso unidimensional es

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + V'(x(t)) = -\gamma \frac{dx(t)}{dt} + F(t). \quad (3.1)$$

El primer y segundo término del lado izquierdo de la ecuación (3.1) representan el término inercial y la fuerza debida al potencial, mientras que los términos del lado derecho representan la parte disipativa debido a la viscosidad del medio y el forzamiento externo dependiente del tiempo, respectivamente.

En referencia al modelo estudiado en [9,13–16], la fuerza externa y el potencial poseen las siguientes propiedades:

1. El forzamiento externo que mantiene al sistema fuera del equilibrio termodinámico es de la forma

$$F(t) = F_0 \cos(w_D t), \quad (3.2)$$

donde F_0 es la amplitud del forzamiento y w_D es la frecuencia de oscilación. Una característica importante para la elección de la fuerza externa, es que su promedio temporal debe ser cero, $\langle F \rangle = 0$, para no establecer una dirección preferencial de movimiento.

2. El potencial periódico asimétrico al que la partícula está sujeta es de la forma

$$V(x) = V_1 - V_0 \sin\left(\frac{2\pi(x - x_0)}{L}\right) - \frac{V_0}{4} \sin\left(\frac{4\pi(x - x_0)}{L}\right), \quad (3.3)$$

donde V_1 es una constante arbitraria, V_0 es la amplitud, L es la periodicidad del potencial y x_0 un corrimiento de fase elegido de tal forma que $V(0) = 0$. La geometría del potencial se muestra en la Figura 3.1.

Haciendo uso de la expresiones (3.2) y (3.3), la ecuación (3.1) toma la forma

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} - \frac{2\pi V_0}{L} \left(\cos \frac{2\pi(x - x_0)}{L} - \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi(x - x_0)}{L} \right) = -\gamma \frac{dx(t)}{dt} + F_0 \cos(w_D t). \quad (3.4)$$

En esta última ecuación los parámetros de control son V_0 , γ , F_0 y w_D .

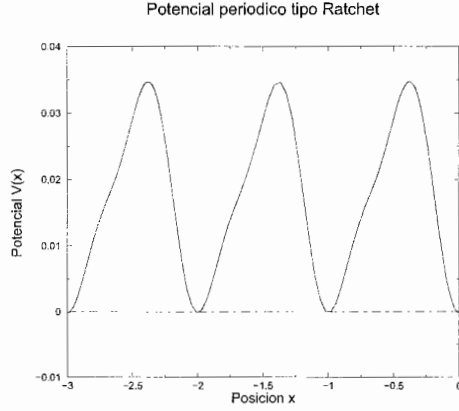


Figura 3.1: Geometría del potencial periódico asimétrico.

Para estudiar cuantitativamente el comportamiento de este modelo, es conveniente reducir el número de parámetros explícitos. Para ésto, se adimensionaliza la ecuación (3.4) mediante los cambios de variable

$$x' = \frac{x}{L}, \quad x'_0 = \frac{x_0}{L} \quad y \quad t' = w_0 t.$$

Al efectuar los cambios propuestos, la ecuación adimensional resultante es

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + V'(x(t)) = a \cos(wt), \quad (3.5)$$

donde

$$w = \frac{w_D}{w_0}; \quad b = \frac{\gamma}{mw_0} \quad y \quad a = \frac{F_0}{mLw_0^2},$$

siendo w_0 la frecuencia del movimiento lineal alrededor del mínimo del potencial expresada como

$$w_0^2 = \frac{4\pi^2 V_0 \delta}{mL^2}$$

y

$$\delta = \text{sen}(2\pi|x'_0|) + \text{sen}(4\pi|x'_0|).$$

El potencial en su forma adimensional es

$$V(x) = C - \frac{1}{4\pi^2 \delta} \left(\text{sen } 2\pi(x - x_0) + \frac{1}{4} \text{sen } 4\pi(x - x_0) \right), \quad (3.6)$$

donde

$$C = -\frac{1}{4\pi^2 \delta} \left(\text{sen } 2\pi x'_0 + \frac{1}{4} \text{sen } 4\pi x'_0 \right). \quad (3.7)$$

Se hace notar que, una vez hecho el cambio de variables se ha eliminado el símbolo primado a las variables x y t en la ecuación (3.5) y el número de parámetros ha reducido a tres: a , b y w .

Para encontrar la solución de la ecuación, es conveniente transformar esta expresión en dos ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden.

Proponiendo el cambio de variable

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad (3.8)$$

la ecuación (3.5) se escribe de la forma

$$\frac{dv}{dt} + bv + V'(x(t)) = a \cos(wt). \quad (3.9)$$

Con el cambio propuesto, la ecuación (3.5) se escribe en forma equivalente a las ecuaciones acopladas (3.8) y (3.9). Para resolver numéricamente el sistema se utiliza el método de Runge-Kutta de cuarto orden [17]. La conveniencia de usar este método radica en que el error local por truncamiento por partícula es del orden de h^5 , siendo h el paso de integración.

3.2. Dinámica de una matraca determinista inclinado

En esta sección, se estudia en forma cuantitativa la dinámica de la matraca determinista presentada en la sección 3.1. Se estudia el comportamiento del sistema en el caso en que b y w son parámetros fijos y a es el parámetro de control. Los resultados numéricos de la ecuación (3.5) son generados con las constantes $x_0 \simeq -0.19$, $\delta \simeq 1.6$, $C \simeq 0.0174$, $b = 0.1$, $w = 0.67$, tal y como se presenta en las referencias [9, 13–16]. El paso de integración usado es de $h = 0.01$.

Para iniciar el estudio de la dinámica, se analiza en la siguiente sección la dinámica de una partícula en función de las condiciones iniciales sobre el pozo del potencial. En este caso, el sistema está sujeto a una amplitud del forzamiento constante cuyo valor es de $a = 0.156$.

3.2.1. Dinámica de una trayectoria en función de las condiciones iniciales

La primera pregunta que se hace para cualquier modelo que pretenda trabajar como motor tipo matraca, es si en la dinámica que se genera existe un flujo neto de materia.

La forma elemental de conocer si existe flujo es calculando la posición de una partícula como función del tiempo. Si para una condición inicial dada se cumple que

$$\frac{x_f - x_i}{t} \rightarrow J$$

después de un tiempo suficientemente largo, entonces la condición inicial da lugar a un flujo de materia.

Para un sistema en el que la geometría del potencial es periódica y asimétrica, como el que se muestra en la Figura 3.1, se ha mostrado que bajo condiciones apropiadas se produce transporte de materia [4]. Para mostrar este hecho, se analiza la dinámica de una partícula sujeta a una amplitud de forzamiento fijo en función de las condiciones iniciales sobre un pozo del potencial.

La Figura 3.2, muestra las trayectorias de una partícula inicializada con dos condiciones distintas para un valor fijo de la amplitud del forzamiento $a = 0.156$.

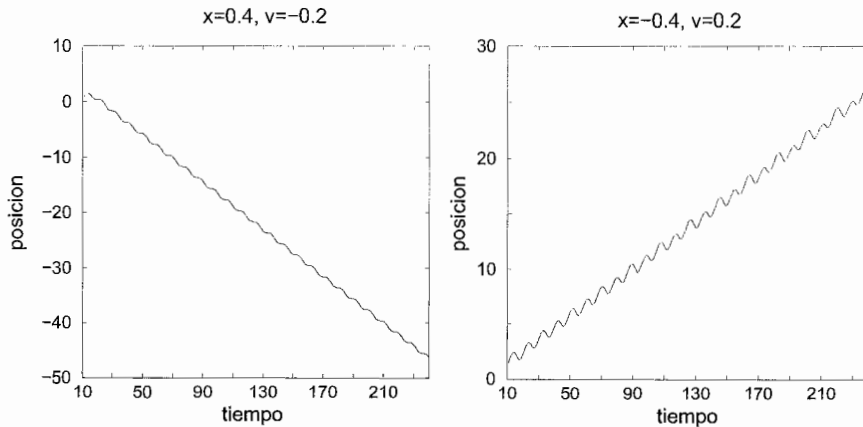


Figura 3.2: Trayectorias de una partícula inicializada con dos condiciones distintas para una amplitud del forzamiento fija $a = 0.156$.

La Figura 3.2(a) muestra que la condición inicial $x = 0.4, v = -0.2$ da lugar a un flujo en dirección negativa y la Figura 3.2(b) muestra que la condición $x = -0.4, v = 0.2$, da lugar a un flujo en dirección positiva.

Un aspecto notable entre las trayectorias de la Figura 3.2, es que la dirección del flujo varía en función de las condiciones iniciales.

Al registrar las condiciones iniciales que dan lugar a un flujo positivo o un flujo negativo en el intervalo $(-0.5, 0.5)$ de las posiciones y en $(-0.6, 0.6)$ de las velocidades con $a=0.156$, se obtiene la Figura 3.3 [15].

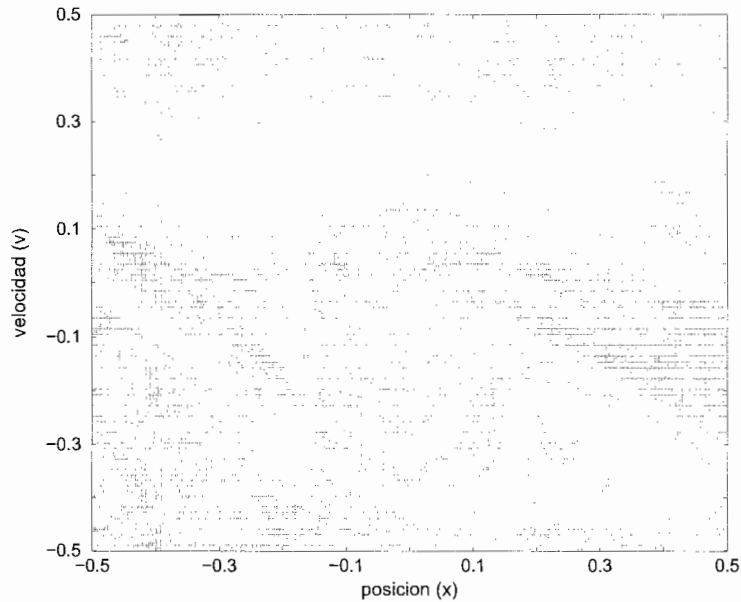


Figura 3.3: Condiciones iniciales que dan lugar a un transporte en dirección positiva o en dirección negativa. Las regiones blancas generan un flujo positivo y las negras un flujo negativo.

En el esquema, las regiones blancas integran el conjunto de condiciones iniciales que dan lugar a un transporte en dirección positiva, mientras que las regiones negras integran el conjunto de condiciones que dan lugar a un transporte en dirección negativa.

Adicionalmente, del esquema anterior se observa la sensibilidad de la dinámica en los contornos de cada región. Una pequeña variación de alguna condición inicial, ya sea en la posición o en la velocidad, sobre aquellas trayectorias cuyas condiciones iniciales están en las fronteras, genera una transición de la dirección del flujo ya sea de positivo a negativo o viceversa.

3.2.2. Dinámica de una trayectoria en función de la amplitud de un forzamiento externo

Estudios realizados sobre el comportamiento de sistemas tipo matraca forzados periódicamente, han permitido observar diversos fenómenos entre los que se encuentra la inversión de corriente múltiple [16].

Considere una partícula situada en el mínimo de un pozo del potencial. Si el sistema está expuesto a un forzamiento externo nulo, $a = 0$, la dinámica de la partícula está determinada por los efectos del potencial, la viscosidad y la inercia. Cuando esta situación ocurre, la partícula oscila por un tiempo corto en forma amortiguada, situándose a un tiempo posterior en su estado de mínima energía.

Para valores de a pequeños, respecto a la magnitud del resto de las fuerzas, la magnitud del forzamiento no es lo suficientemente grande para que la partícula se desplace a otros pozos. Este comportamiento se sigue repitiendo hasta un valor umbral a_c . Cuando la amplitud del forzamiento toma este valor umbral, la partícula es impulsada por el forzamiento externo para saltar el máximo de un pozo y generar transporte de tipo periódico o de tipo caótico. Para determinar el tipo de dinámica se estudia el comportamiento de las trayectorias en función de la amplitud. En la Figura 3.4, se muestran las trayectorias de una partícula en función del tiempo. Las dos trayectorias inician con la misma condición inicial y distintos valores de la amplitud del forzamiento.

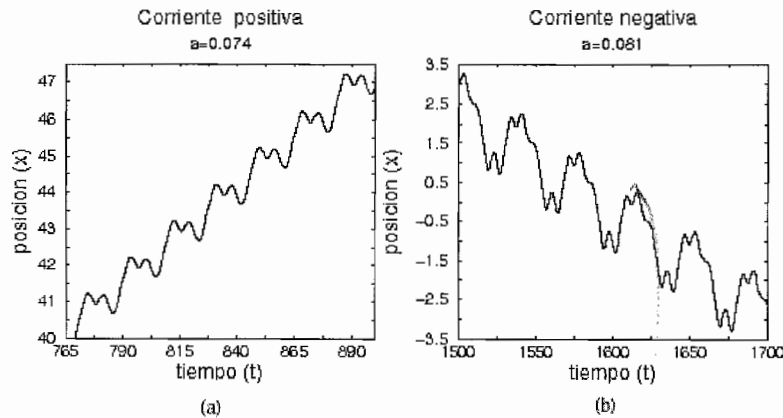


Figura 3.4: Trayectorias de una partícula inicializadas la misma condición pero con dos amplitudes del forzamiento distintas.

Al comparar las trayectorias de la Figura 3.4, se observa que ocurre una inversión en la dirección del flujo al variar ligeramente la amplitud. En la Figura 3.4(a), donde $a=0.074$, la partícula se mueve en dirección positiva mientras que en la Figura 3.4(b), donde $a=0.081$, la partícula se mueve en dirección negativa. Se hace notar que la estructura de las trayectorias cambia en función de la amplitud del forzamiento. En la Figura 3.4(a), se hace notar que el número de oscilaciones completas que efectúa una partícula en un periodo igual al periodo del forzamiento, es de periodo 2, mientras que en la Figura 3.4(b) es de periodo 4. Esta situación se aprecia observando las órbitas en el espacio de velocidades, o bien, en el espacio fase correspondiente, tal y como se muestra en la Figura 3.5.

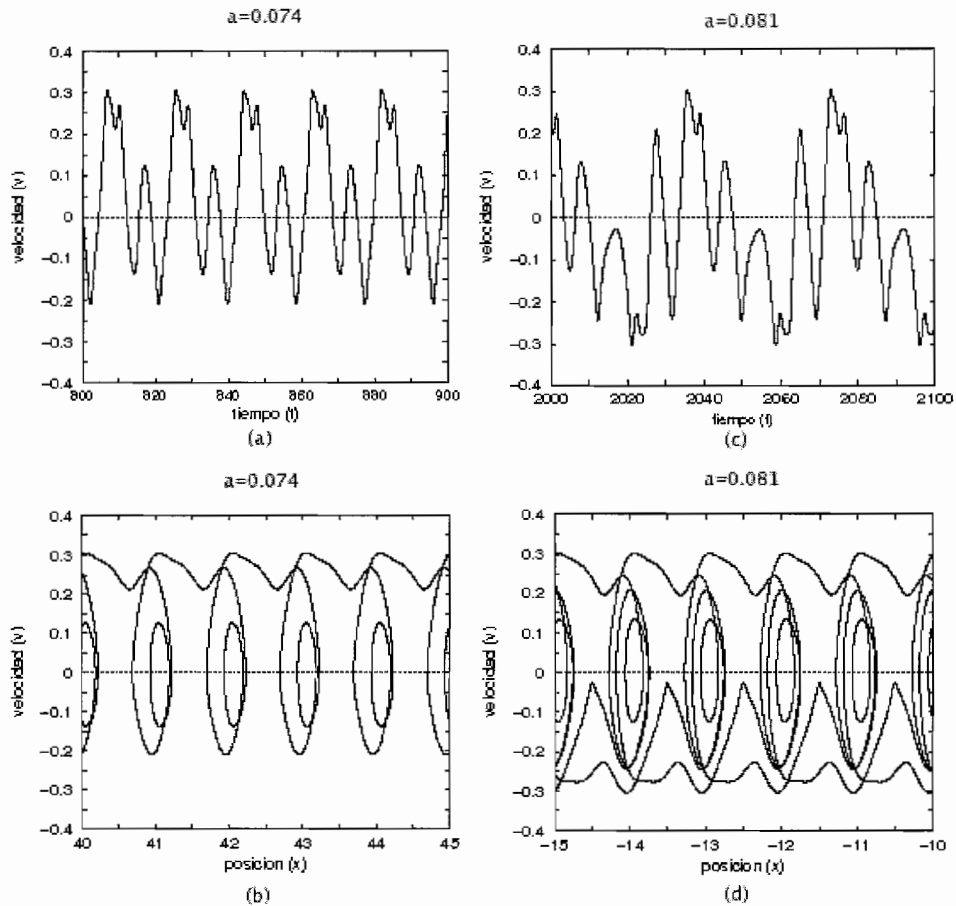


Figura 3.5: (a) Velocidad como función del tiempo y (b) el espacio fase para $a=0.074$. (c) velocidad como función del tiempo y (d) el espacio fase para $a=0.081$.

En las Figuras 3.5(a) y 3.5(c), se muestran las velocidades de una partícula para $a = 0.074$ y $a = 0.081$, respectivamente. En las Figuras 3.5(b) y 3.5(d) se muestran las órbitas en el espacio fase. Las trayectorias 3.5(a) y 3.5(b) están en correspondencia con la Figura 3.4(a), mientras que 3.5(c) y 3.5(d) con la Figura 3.4(b). Para determinar la estructura de las órbitas en función del parámetro de control, sin necesidad de graficar cada trayectoria como en la Figura 3.5, se recurre al diagrama de bifurcación.

3.2.3. Diagrama de bifurcación

Al registrar periódicamente las velocidades en función de la amplitud del forzamiento, se obtiene un conjunto de puntos que permite distinguir si la órbita es de tipo periódica o de tipo caótica. Para el sistema que se está estudiando, el registro de puntos se hace con una frecuencia que coincide con la frecuencia del forzamiento externo, para una condición inicial fija en cada trayectoria. El registro de las velocidades permite construir el diagrama de bifurcación que se muestra en la Figura 3.6.

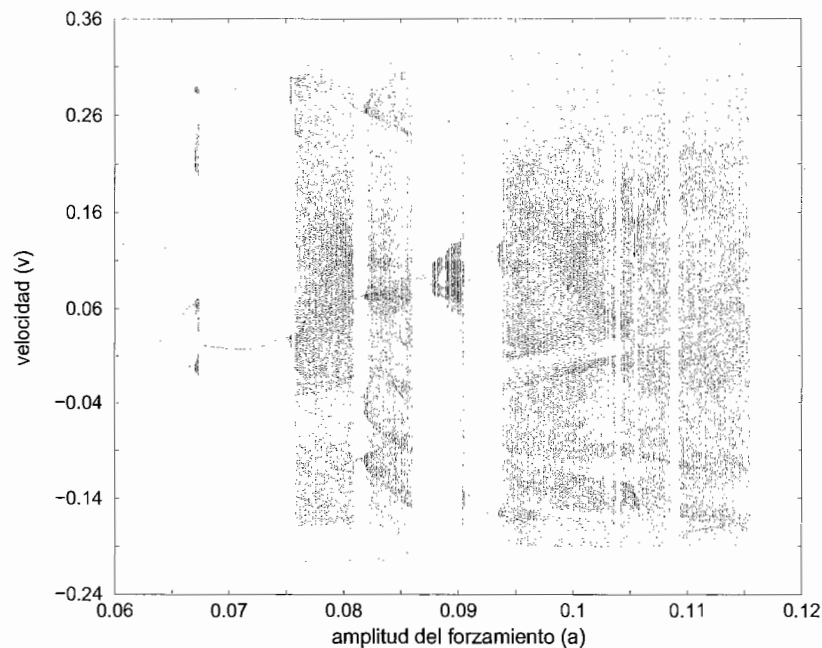


Figura 3.6: El diagrama de bifurcación se construye mediante el registro periódico de las velocidades para cada valor de la amplitud del forzamiento.

El diagrama muestra ventanas donde las trayectorias tienen un comportamiento periódico (regiones de a donde la densidad de puntos es muy baja) y ventanas donde las trayectorias tienen un comportamiento caótico (regiones de a donde la densidad de puntos es muy alta).

Para un análisis más detallado, se amplifica el diagrama de bifurcación en el intervalo $[0.074, 0.086]$, tal y como se muestra en la Figura 3.7

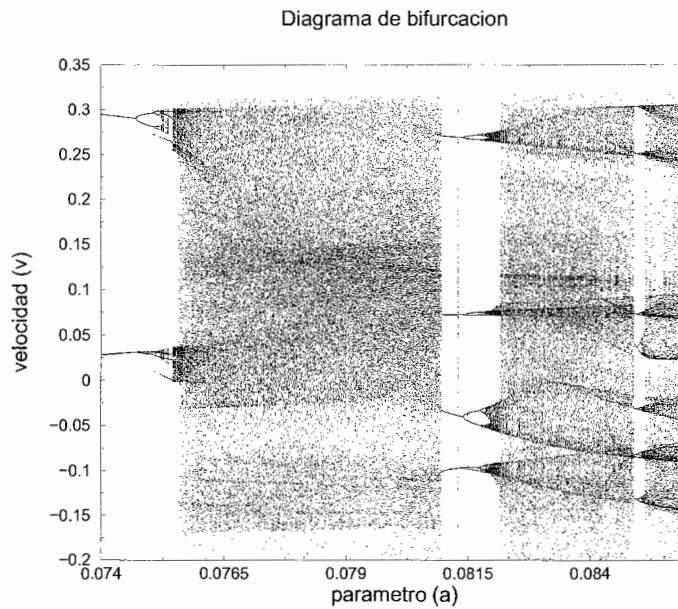


Figura 3.7: Diagrama de bifurcación amplificado en el intervalo $[0.074, 0.086]$

La Figura 3.7 muestra que el doblamiento de periodo se pierde para algunos valores de a , dando lugar a una dinámica caótica. El diagrama permite distinguir los valores que debe tener la amplitud del forzamiento para dar lugar a un comportamiento caótico, como el que ocurre alrededor de la ventana $[0.075, 0.080]$ y los valores para un comportamiento periódico, como el que ocurre alrededor de la ventana $[0.080, 0.082]$.

El análisis comparativo entre la Figura 3.4(a) y la Figura 3.7 hace notar que la trayectoria para $a = 0.074$ exhibe un comportamiento de período 2, que está en concordancia con la periodicidad de las órbitas en el respectivo valor de a del diagrama de bifurcación. La misma situación ocurre para la Figura 3.4(b), donde $a = 0.081$. La trayectoria es de período 4 y está en concordancia con lo observado en el respectivo valor del diagrama de bifurcación.

Por otro lado, la robustez de la dinámica de una matraca se determina comparando los diagramas de bifurcación para dos sistemas iguales inicializados con dos condiciones iniciales fijas y arbitrarias. Esta situación se muestra en la Figura 3.8, donde se superponen los diagramas de bifurcación generados con dos condiciones iniciales distintas. La particularidad de la elección de las condiciones es que, de acuerdo a la Figura 3.3, una de éstas da lugar a un flujo positivo y la otra a un flujo negativo. Las condiciones iniciales usadas en este gráfico son $x = 0.4$, $v = -0.2$ y $x = -0.4$, $v = 0.2$.

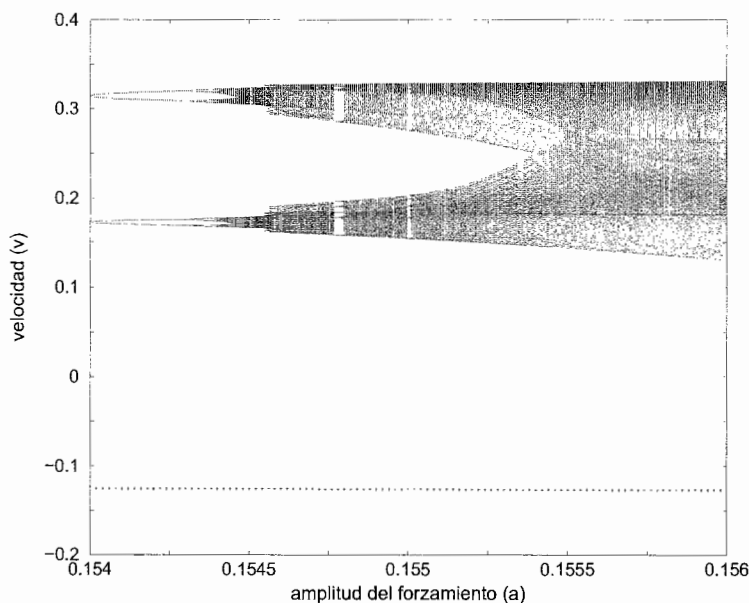


Figura 3.8: Superposición de dos diagramas de bifurcación inicializados con dos condiciones arbitrarias fijas de un sistema tipo matraca. El diagrama superior esta asociado a un atractor caótico y el diagrama inferior está asociado a un atractor periódico y cada trayectoria puede permanecer en uno o en otro en función de sus condiciones iniciales.

La interpretación física de la Figura 3.8 es que el sistema tiene asociado dos tipos de atractores: un atractor periódico (diagrama inferior) y un atractor caótico (diagrama superior) y la estancia en uno o en otro depende de las condiciones iniciales del sistema. Si se estudian las trayectorias para un valor específico de la amplitud del forzamiento, por ejemplo $a = 0.156$, el comportamiento dinámico de las trayectorias es reflejado en el correspondiente diagrama de bifurcación. Esta situación se corrobora con las trayectorias de la Figura 3.2.

3.2.4. Naturaleza de las órbitas: atractores periódicos o caóticos

Una característica de los sistemas disipativos es la presencia de atractores. La forma de conocer la naturaleza de un atractor es a través de la estructura de las órbitas en el espacio fase. Si la estructura retoma exáctamente propiedades físicas particulares en cada intervalo de tiempo fijo, el atractor es periódico, mientras que si no retoma las propiedades en tiempos finitos, y adicionalmente, al compararla con otra órbita inicializada con una condición inicial ligeramente diferente, la distancia entre éstas crece exponencialmente en el tiempo, el atractor es caótico.

Al hacer un registro de las condiciones iniciales que generan órbitas periódicas o caóticas, se encuentra el mismo esquema de la Figura 3.3. De ésta, se deduce que el conjunto de condiciones iniciales contenidas en las regiones blancas, además de dar lugar a un transporte en dirección positiva, es la cuenca de atracción de un atractor caótico. En forma complementaria, el conjunto de condiciones iniciales contenidas en las regiones negras, además de dar lugar a un transporte en dirección negativa, es la cuenca de atracción de un atractor periódico.

La dinámica periódica o caótica de una trayectoria se obtiene al registrar estroboscópicamente la posición y velocidad de una partícula confinada en un pozo del potencial en el espacio fase, tal y como se muestra en la Figura 3.9, donde se observa la coexistencia de dos atractores: uno caótico y uno periódico.

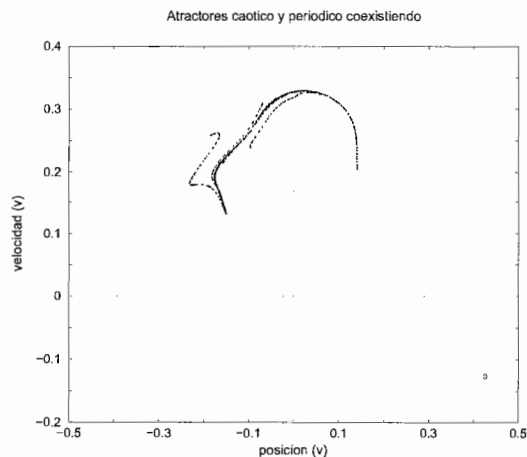


Figura 3.9: Atractor caótico (esquema superior) y periódico (esquema inferior) coexistiendo para dos condiciones iniciales distintas. El flujo negativo se origina con las condiciones $x = 0.4$, $v = -0.2$ y el flujo positivo con $x = -0.4$, $v = 0.2$.

El registro estroboscópico de las velocidades se hace con una frecuencia que coincide con la frecuencia del forzamiento externo para $a = 0.156$ y con dos condiciones iniciales arbitrarias, una de ellas dando lugar a un flujo positivo y la otra a un flujo negativo. El esquema que se muestra corresponde a las condiciones iniciales $x = 0.4$, $v = -0.2$ para el flujo negativo y $x = -0.4$, $v = 0.2$ para el flujo positivo. La figura muestra que para una amplitud del forzamiento constante, la órbita en el espacio fase puede ser de tipo periodica o de tipo caótica y que la clasificación depende de las condiciones iniciales [9].

3.2.5. Flujo en función de la amplitud del forzamiento.

En la Figura 3.4 se hizo notar que distintos valores de la amplitud del forzamiento pueden generar transporte en dirección positiva o negativa. En base a la diferencia entre las trayectorias, es conveniente calcular el flujo de partículas para una amplia gama de amplitudes del forzamiento.

Del formalismo expuesto en la sección 2.3.1, el valor que toma J para cada valor del parámetro de control a un tiempo fijo, se muestra en la Figura 3.10.

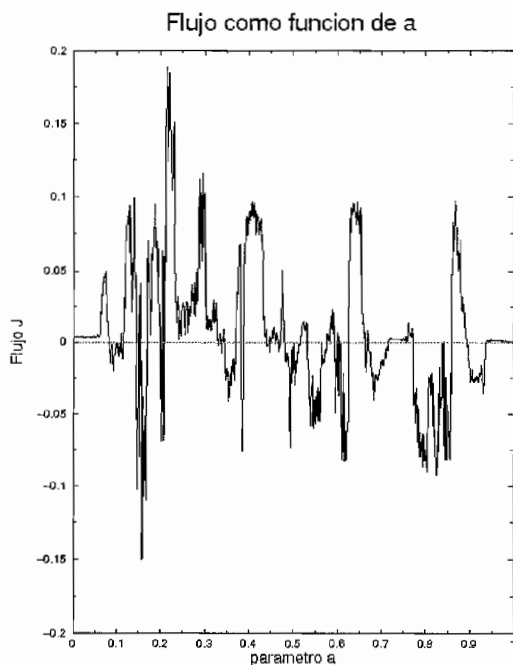


Figura 3.10: Flujo de partículas en función de la amplitud del forzamiento

En ésta se muestra la existencia del fenómeno de inversión de corriente múltiple al notar que existen valores específicos de la amplitud del forzamiento en los que la dirección del flujo es positiva o bien, negativa. Adicionalmente, se hace notar que la dirección del flujo se invierte al variar ligeramente la amplitud alrededor de los puntos críticos, donde $J = 0$. Este hecho se muestra claramente en la Figura 3.11, donde se amplifica el comportamiento de J en el intervalo $(0.074, 0.086)$, región donde ocurre la primera inversión del flujo.

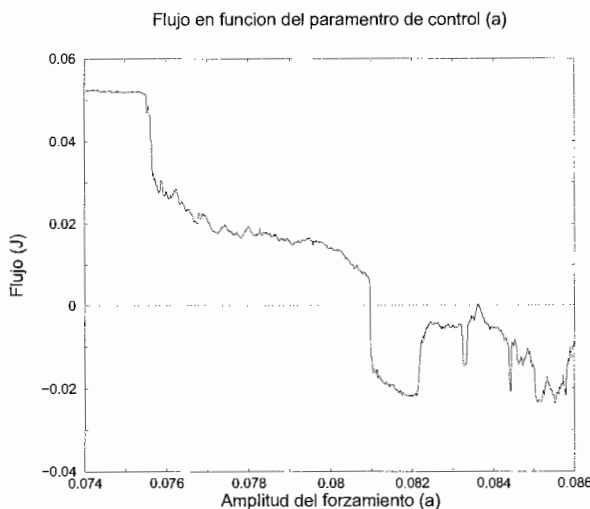


Figura 3.11: Flujo en función de la amplitud del forzamiento. La gráfica muestra la primera inversión de corriente que ocurre alrededor del punto crítico $a \approx 0.08092$.

La Figura 3.11, muestra que una pequeña variación de la amplitud del forzamiento alrededor del punto crítico $a \approx 0.08092$, da lugar a una transición abrupta en la dirección del flujo. Este comportamiento ocurre alrededor de cualquier valor crítico de la Figura 3.10.

La comparación cualitativa entre las Figuras 3.7 y 3.11, como se observa en la Figura 3.12, muestra que la inversión de la dirección del flujo ocurre en el mismo valor de la amplitud del forzamiento donde ocurre una transición de una dinámica caótica a una dinámica periódica o viceversa. Esta situación establece que la inversión de corriente está estrechamente relacionada con el cambio de dinámica que ocurre en el diagrama de bifurcación. Sin embargo, se hace notar que la transición que ocurre en el diagrama de bifurcación no siempre da lugar a la inversión del flujo, sino que genera un cambio abrupto en el comportamiento sin necesidad de que ocurra la inversión.

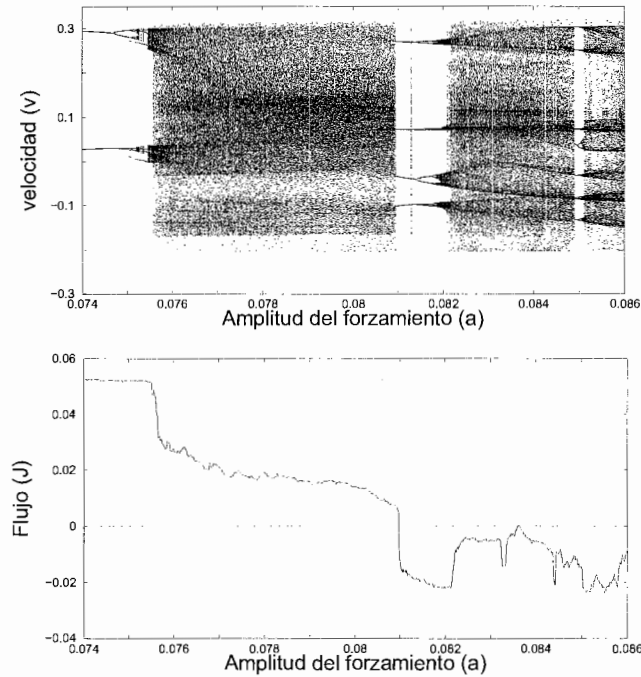


Figura 3.12: La comparación del diagrama de bifurcación con la gráfica del flujo en función de la amplitud del forzamiento muestran el origen de la inversión de corriente.

3.2.6. Fenómeno de intermitencia

Un fenómeno interesante que ocurre al analizar las trayectorias alrededor de un punto crítico es el fenómeno de intermitencia. En la Figura 3.4 se mostraron las trayectorias que traza una partícula en $a = 0.074$ y en $a = 0.081$. En éstas, se mostró que la trayectoria de periodo dos da lugar a un flujo positivo y la trayectoria de periodo cuatro da lugar a un flujo negativo. Al graficar la trayectoria para el punto crítico $a = 0.08092$, se nota que la periodicidad se pierde, tal y como se muestra en la Figura 3.13, donde se observa que la trayectoria global no tiene un comportamiento definido. Sin embargo, se hace notar que existen regiones donde localmente la trayectoria es caótica como ocurre en el intervalo de tiempo $(300, 400)$ y otras donde es localmente periódica. En este último comportamiento existen dos modos: el *modo estancado* donde la partícula oscila alrededor de un mínimo, como ocurre alrededor del intervalo $(120, 210)$ y el *modo activo* donde la partícula se dirige hacia otros pozos en forma periódica, como ocurre alrededor del intervalo $(450, 600)$.

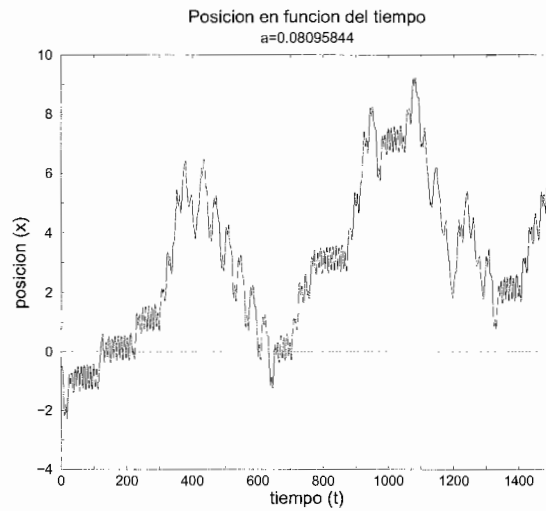


Figura 3.13: Trayectoria que exhibe el fenómeno de intermitencia.

Al comportamiento caóticos y periódico alternado que ocurre en una trayectoria en función del tiempo se le conoce como *intermitencia*.

Este fenómeno se observa en la Figura 3.14, donde se muestra la velocidad en función del tiempo y el espacio fase correspondiente.

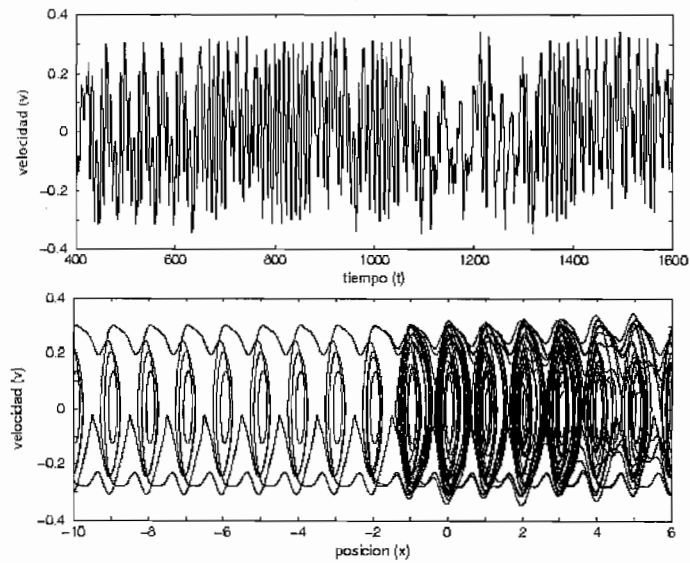


Figura 3.14: Trayectoria de la velocidad como función del tiempo y su respectiva órbita en el espacio fase en las que muestra el fenómeno de intermitencia.

Capítulo 4

Matraca determinista inclinada

En este capítulo se estudia la dinámica de una matraca determinista inclinada. El objetivo es estudiar las propiedades de transporte de una partícula inmersa en un fluido viscoso, en presencia de un potencial periódico asimétrico, sujeta a una fuerza periódica externa dependiente del tiempo y de una fuerza constante externa.

En este capítulo, se analizan las mismas propiedades dinámicas estudiadas en el capítulo previo. Este estudio permite hacer una comparación cuantitativa entre las propiedades de transporte de una matraca determinista no inclinada y una matraca determinista inclinada.

Como paso preliminar, se estudia el flujo en función de la magnitud de la fuerza constante. Este análisis permitirá hacer una elección apropiada de la magnitud de la inclinación para generar una dinámica no trivial.

Establecido el valor de la pendiente, se estudia el comportamiento del sistema en función de la amplitud del forzamiento. Se estudia cómo varían las trayectorias 1) en función de la amplitud del forzamiento externo y 2) en función de las condiciones iniciales. Se analiza el flujo promedio de partículas en función de la amplitud del forzamiento para determinar los valores del parámetro en los que ocurre el fenómeno de inversión de corriente, así como el conjunto de condiciones iniciales que dan lugar a un flujo positivo o a un flujo negativo.

4.1. Modelo matemático

Para el planteamiento matemático de una matraca determinista inclinada, se retoma el planteamiento presentado en la sección 3.1, por tanto, para cualquier explicación en detalle refiérase al capítulo previo.

Considere una partícula de masa m inmersa en un fluido de viscosidad γ , sujeta a un potencial periódico asimétrico $V(x)$, a un forzamiento periódico externo $F(t)$ de promedio cero y a una fuerza constante externa f debida al gradiente de un potencial de inclinación.

La ecuación dinámica que describe al sistema es

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + V'(x(t)) = -\gamma \frac{dx(t)}{dt} + F(t) + f. \quad (4.1)$$

donde

$$F(t) = F_0 \cos(w_D t), \quad (4.2)$$

que cumple con la propiedad $\langle F(t) \rangle = 0$ y el potencial efectivo V_{eff} debido a la inclinación es de la forma

$$V_{eff} = V(x) - fx,$$

siendo fx el potencial debido a la inclinación. La geometría del potencial efectivo se muestra en la Figura 4.1.

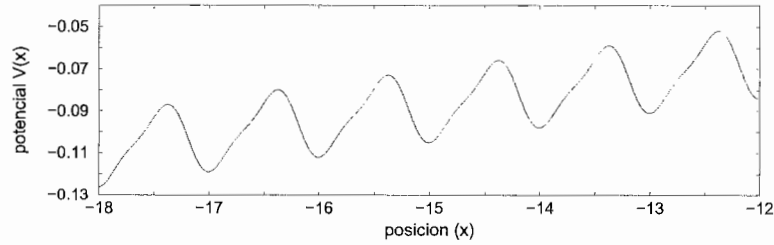


Figura 4.1: Geometría de un potencial periódico asimétrico en presencia de una fuerza constante $f = -0.006$ debida a un potencial de la forma fx .

Al sustituir las expresiones correspondientes del potencial y del forzamiento, y escribir la ecuación explícita en su forma adimensional se tiene

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + V'(x(t)) = a \cos(wt) + R, \quad (4.3)$$

donde las constantes de normalización son

$$w = \frac{w_D}{w_0}, \quad b = \frac{\gamma}{mw_0}, \quad a = \frac{F_0}{mLw_0^2}, \quad R = \frac{-f}{mLw_0^2}.$$

Definida la ecuación de movimiento, se determina la solución numérica mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden para cada partícula.

4.2. Dinámica de una matraca determinista inclinada

Para hacer una comparación cualitativa con el sistema estudiado en el Capítulo 3, los valores de los parámetros fijos y el valor de la amplitud del forzamiento son los mismos del capítulo previo.

4.2.1. Flujo promedio en función de la inclinación.

La magnitud de la fuerza de inclinación es un factor de importancia para no obtener una dinámica trivial. Una manera de elegir un valor, es caracterizando el flujo promedio en función de la fuerza debida al potencial de inclinación, como se muestra en la Figura 4.2 [18]. Este gráfico corresponde al flujo promedio de 100 partículas inicializadas con distintas condiciones.

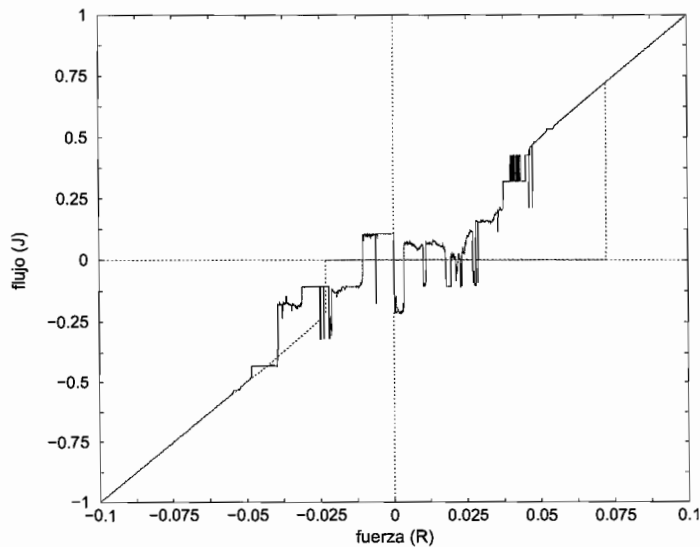


Figura 4.2: Flujo promedio de un ensamble de 100 partículas en función de la fuerza debida a la inclinación R del sistema. Cada elemento del ensamble es inicializado con distintas condiciones iniciales.

El esquema de la Figura 4.2 muestra que si se elige un valor positivo muy grande o un valor negativo muy pequeño de R , la dinámica que rige al sistema es trivial, ya que el movimiento está gobernado en forma predominante por la

fuerza debida a la inclinación. Esta situación se muestra en $R \gtrsim 0.05$ y en $R \lesssim -0.05$, donde la fuerza R predomina sobre el resto de los términos de la ecuación (4.4), produciendo en forma trivial un flujo negativo cuando $R \lesssim -0.05$ o un flujo positivo cuando $R \gtrsim 0.05$. Sin embargo, se observa que en el intervalo $-0.05 \lesssim R \lesssim 0.05$ el flujo fluctúa en función de la magnitud de la fuerza debida a la inclinación. Este comportamiento se origina porque la magnitud de R está en un intervalo donde compite con el resto de las fuerzas, dando lugar a una dinámica no trivial.

Para elegir un valor de la fuerza R se analiza un intervalo contenido dentro de la región donde J fluctúa. En la Figura 4.3, se muestra la amplificación del intervalo $-0.02 \leq R \leq 0.02$.

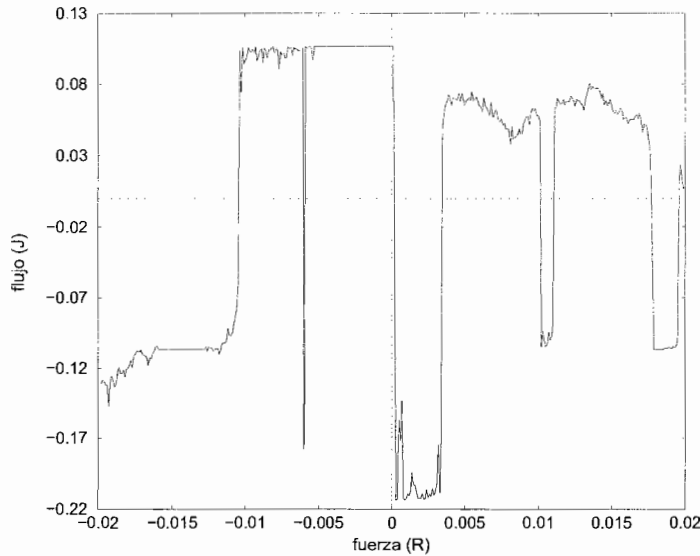


Figura 4.3: Flujo promedio en función de la inclinación R de un sistema con una amplitud del forzamiento constante $a=0.156$ en el intervalo $-0.02 \leq R \leq 0.02$.

La figura hace resaltar dos aspectos de importancia: (1) existen valores específicos de R en los que ocurren transiciones abruptas en el flujo al variar ligeramente el valor de la fuerza debida a la pendiente y (2) existen otros valores de R en los que J promedio permanece constante alrededor de sus vecindades. Si se elige un valor de R en el que J promedio es constante alrededor de sus vecindades, la dinámica del sistema permanece cualitativamente invariante en función de las condiciones iniciales o de la amplitud del forzamiento.

Por el contrario, si se elige un valor de R en el que J varía en sus regiones circundantes, la dinámica del sistema varía en función de sus parámetros de control. Bajo este argumento se elige el valor de $R = -0.006$, en el cual J sufre cambios abruptos en sus alrededores.

4.2.2. Diagrama de bifurcación

Una forma de conocer la dinámica del sistema en función de la fuerza debida a la inclinación es a través del diagrama de bifurcación. El registro periódico de las velocidades en cada trayectoria generada por el parámetro R , permite construir el diagrama en negro mostrado en la Figura 4.4

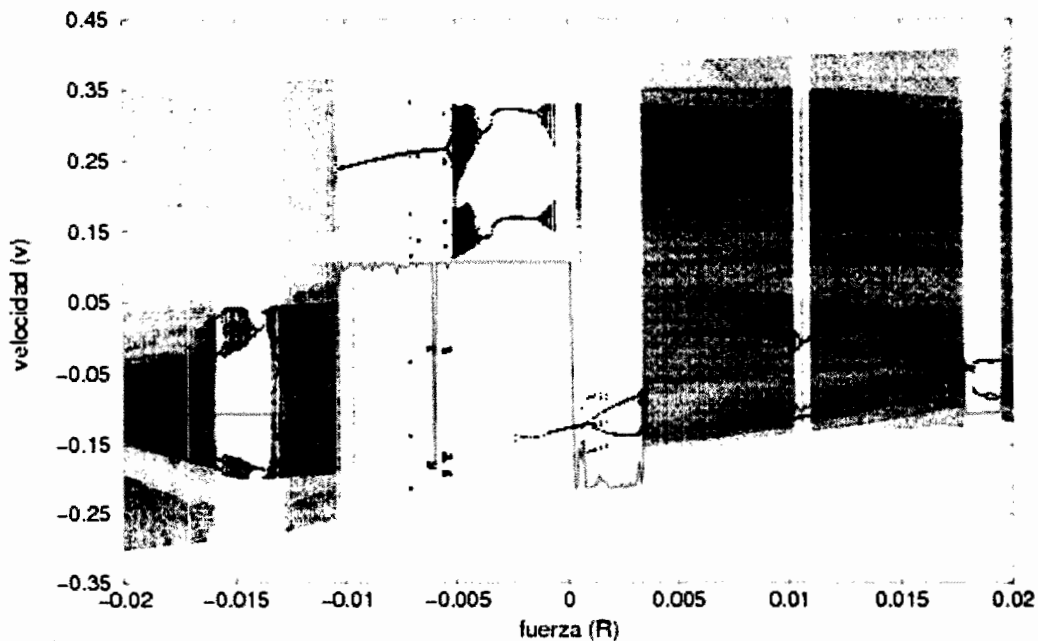


Figura 4.1: La superposición del diagrama de bifurcación y el flujo, muestran que la inversión de la corriente está correlacionada con la transición de una dinámica caótica a una dinámica periódica o viceversa.

El diagrama muestra que existen valores específicos de R en donde la dinámica de las trayectorias es periódica (donde la densidad de puntos es baja para un valor constante de R) o es de tipo caótica (donde la densidad de puntos es alta para una valor constante de R).

Un hecho que resalta al superponer la Figura 4.3 sobre el diagrama de bifurcación, es que los cambios bruscos que ocurren en J denotados con la trayectoria roja en la Figura 4.4, ocurren simultáneamente en la dinámica del diagrama. Este

hecho muestra que las transiciones de un régimen caótico a un régimen periódico o viceversa, coinciden con los cambios abruptos del flujo J . De aquí que, la inversión del flujo como función de la fuerza de inclinación R está originada por los cambios en el comportamiento de la dinámica del sistema.

4.2.3. Dinámica de una trayectoria en función de las condiciones iniciales.

Habiendo elegido el valor de R , se estudia la dinámica de las trayectorias en función de las condiciones iniciales. En la Figura 4.5 se muestran las trayectorias de una partícula inicializada con dos distintas condiciones. En la Figura 4.5(a) $x = 0.3$, $v = -0.1$ y en la Figura 4.5(b) $x = 0.4$, $v = -0.1$.

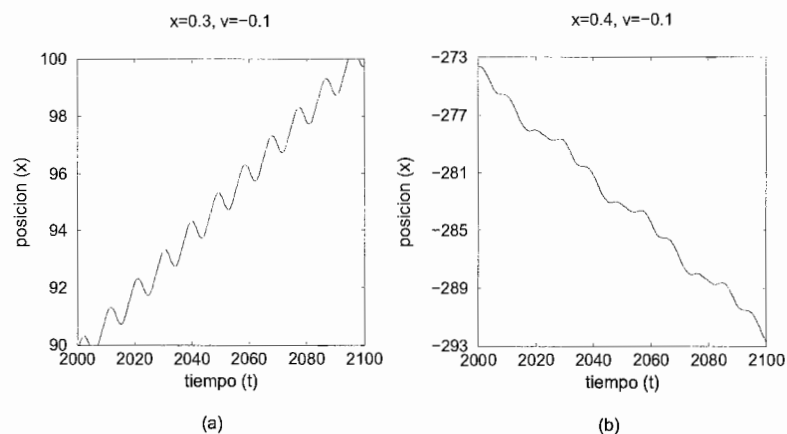


Figura 4.5: Trayectorias de una partícula en función de las condiciones iniciales para una fuerza debida a la inclinación $R = 0.006$ y una amplitud del forzamiento $a = 0.156$. En 4.5(a) $x = 0.3$, $v = -0.1$ y en 4.5(b) $x = 0.4$, $v = -0.1$

La comparación entre las Figuras 4.5(a) y 4.5(b) muestra que la dirección del flujo depende de las condiciones iniciales. En 4.5(a) el flujo es positivo, mientras que en 4.5(b) el flujo es negativo. Adicionalmente, se hace notar que el periodo de cada trayectoria es distinto. En la Figura 4.5(a) la longitud de un periodo es casi la mitad de la longitud de un periodo de la Figura 4.5(b).

De acuerdo con lo observado en la Figura 4.5, la dirección del flujo es función de las condiciones iniciales. Para conocer las condiciones que dan lugar a un flujo positivo o a un flujo negativo se hace un barrido sobre un conjunto de posiciones y velocidades.

La posición promedio final a un tiempo largo t , de un conjunto de partículas inicializadas con distintos valores de la posición y de la velocidad, se muestra en la Figura 4.6.

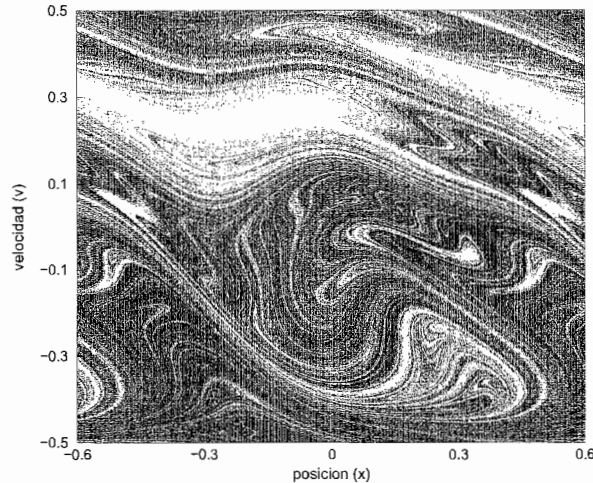


Figura 4.6: Conjunto de condiciones iniciales que dan lugar a un flujo positivo (regiones blancas) o a un flujo negativo (regiones negras), para un sistema con una fuerza debida a una inclinación de $R = -0.006$ y una amplitud del forzamiento $a = 0.156$.

En el esquema se muestra que existe un conjunto de condiciones iniciales (regiones negras) que dan lugar a un flujo negativo y un conjunto complementario (regiones blancas) que dan lugar a un flujo positivo, siendo este último el que da lugar al efecto matraca por generar transporte el contra de una fuerza constante externa.

4.2.4. Dinámica de una trayectoria en función de la amplitud de un forzamiento externo

En esta sección se estudia la dinámica de las trayectorias en función de la amplitud del forzamiento para una misma condición inicial: $x = 0.3$ y $v = 0.0$, condición que no da lugar al efecto matraca. La elección de la condición que no da lugar al efecto matraca es para estudiar si el efecto puede ser inducido mediante la variación de algún otro parámetro del sistema.

En la Figura 4.7, se muestran las trayectorias de un partícula para tres valores distintos de la amplitud del forzamiento.

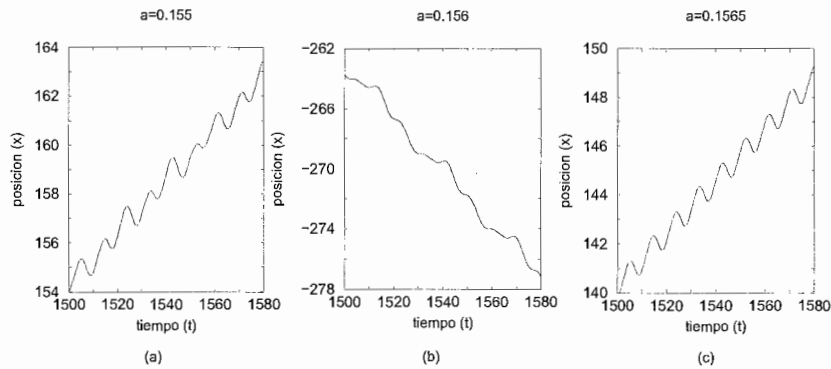


Figura 4.7: Trayectorias que sigue una partícula inicializada en $x = 0.4$ y $v = -0.2$ para un sistema con una fuerza $R = -0.006$ debida a la inclinación. para tres valores distintos de la amplitud del forzamiento. En (a) $a = 0.155$, en (b) $a = 0.156$ y en (c) $a = 0.1565$.

De la figura se observa que el modo de transporte varía en función de la amplitud del forzamiento. En 4.7(a) donde $a = 0.155$, la trayectoria tiene un comportamiento caótico con movimiento en dirección positiva, dando lugar al efecto matraca. En 4.7(b) donde $a = 0.156$ la trayectoria tiene un comportamiento periódico con movimiento en dirección negativa y en 4.7(c) donde $a = 0.1565$ la trayectoria tiene un comportamiento periódico con movimiento en dirección positiva nuevamente.

El aspecto relevante del análisis comparativo entre las tres Figura 4.9, 4.10 y 4.11, es que una pequeña variación de la amplitud del forzamiento alrededor de los puntos donde ocurre la transición de una dinámica periódica a una caótica o viceversa, induce una inversión de la dirección del transporte.

Para conocer la naturaleza periódica o caótica de las trayectorias en función de la amplitud del forzamiento, se recurre al diagrama de bifurcación.

La Figura 4.8 muestra el comportamiento de las trayectorias en función de la amplitud del forzamiento. El diagrama de bifurcación se obtiene al registrar en forma periódica, con un periodo igual al del forzamiento, los valores de la velocidad para cada valor de la amplitud.

Al ampliar el intervalo $(0.151, 0.157)$ del parámetro de control, se obtiene la Figura 4.9, de la que se puede apreciar la dinámica contenida dentro del sistema en la región de interés. El diagrama muestra que existen regiones donde la dinámica de la partícula es periódica y regiones donde la dinámica es caótica. Para el valor

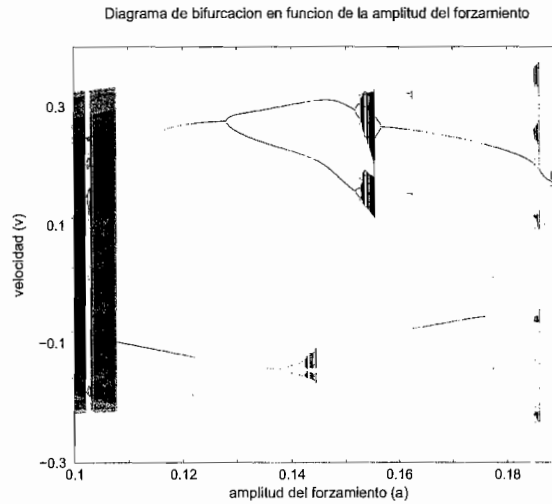


Figura 4.8: Diagrama de bifurcación en función de la amplitud del forzamiento. Los valores de v registrados para cada a corresponden a un muestreo periódico sobre cada trayectoria de la velocidad.

$a = 0.155$ se observa que la dinámica del sistema es caótica y en $a = 0.156$ y $a = 0.1565$ la dinámica es periódica de periodo dos.

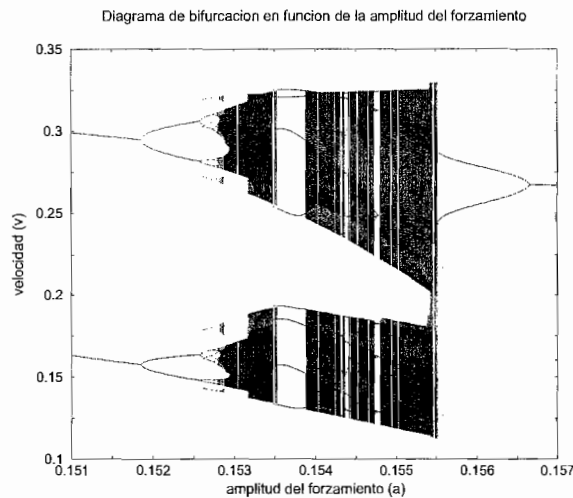


Figura 4.9: Diagrama de bifurcación en función de la amplitud del forzamiento para un sistema con una fuerza $R = 0.006$ debida a la inclinación, inicializado en $x = 0.4$ y $v = -0.2$.

Capítulo 5

Matraca Browniana

Entre los sistemas que han sido estudiados en la literatura de motores tipo matraca, se encuentran aquellos que son perturbados por la presencia de un término estocástico. Estos motores, denominados *motores brownianos*, están caracterizados por la presencia de un término de ruido generado por los efectos de un ambiente térmico que no pueden ser eliminados.

Recientemente, se ha mostrado que la presencia de un término estocástico en una matraca forzada periódicamente, además de cambiar la dinámica de una partícula, puede contribuir a generar un flujo en contra de una fuerza periódica dependiente del tiempo [19,20].

En el presente capítulo se estudia la dinámica de una partícula inmersa en un medio viscoso, en presencia de un potencial periódico asimétrico, sujeta a un forzamiento periódico externo de promedio cero y a una perturbación estocástica. En este sistema se muestra que la presencia del término estocástico influye fuertemente en la dinámica de la partícula y que el comportamiento cambia en función de la intensidad del ruido. En particular, se estudia la dinámica cuando la perturbación es un ruido blanco gaussiano muy pequeño. Se hará un análisis comparativo entre la dinámica del sistema inercial determinista estudiada en el capítulo 3 y 4 y el sistema estocástico que se estudia en este capítulo.

5.1. Origen del comportamiento Browniano

En 1827, el botánico inglés, R. Brown observó por primera vez el movimiento irregular de partículas de polen inmersas en un fluido. La explicación sobre el

comportamiento, no fué hecha hasta 1905 por A. Einstein en su artículo “*Sobre el movimiento de partículas pequeñas suspendidas en reposo, exigido por la teoría cinético-molecular del calor*” [21]. En ese trabajo, Einstein explica, desde el punto de vista microscópico, que el movimiento irregular es a causa de colisiones sucesivas que ocurren con las moléculas del medio que las rodean, dando origen al denominado *movimiento browniano*. El argumento empleado para justificar la participación del término de ruido en un sistema tipo matraca es el siguiente:

Considere una partícula de masa m inmersa en un medio de viscosidad γ , a una temperatura T que asocia una cantidad de energía cinética al sistema. Si la masa de la partícula es pequeña respecto a las moléculas del medio, la dinámica se verá afectada por las posibles colisiones con las moléculas circundantes. El efecto inmediato, como consecuencia de cada colisión, es un cambio repentino en la velocidad. Dado que las colisiones suceden de forma incesante, la velocidad y dirección fluctúa dando lugar al movimiento browniano.

Si la energía mecánica total, en el caso unidimensional, es

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + V(x),$$

el teorema de equipartición establece que, el valor promedio de cada término cuadrático de E es igual a $\frac{1}{2}kT$, siendo k la constante de Boltzman y T la temperatura promedio del sistema. Por lo tanto, el promedio de la energía cinética es

$$\frac{1}{2}m\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2}kT$$

de donde se obtiene que la velocidad térmica v_{th} [22], es

$$v_{th} = \sqrt{\langle v_x^2 \rangle} = \frac{kT}{m}.$$

Si la masa m de la partícula es lo suficientemente pequeña, entonces el cociente de kT y m no es una cantidad despreciable, trayendo como consecuencia que las fluctuaciones debidas al efecto térmico sean partícipes en la ecuación dinámica.

El cambio repentino e incesante de la velocidad está asociado a una *fuerza estocástica* o *fuerza aleatoria* denominada *ruido*, término utilizado para nombrar a una función que toma valores aleatorios en el tiempo.

5.2. Modelo matemático

Para cuantificar la dinámica que ocurre en este tipo de sistemas, se hace un análisis desde el punto de vista microscópico. Considere una partícula inmersa en un medio de viscosidad γ , a una temperatura T , sujeta a un potencial periódico asimétrico y a un forzamiento externo de promedio cero.

La descripción del sistema, de acuerdo con la segunda ley de Newton, es

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + V'(x(t)) = F(t) + g, \quad (5.1)$$

donde el primer y segundo término de lado izquierdo, representan la parte inercial y la fuerza debido al potencial, respectivamente. En el lado derecho, el primer término representa el forzamiento periódico externo dependiente del tiempo y el segundo representa las fuerzas mecánicas de interacción entre la partícula y cada una de las moléculas.

Estrictamente hablando, la ecuación (5.1) es la ecuación que describe la dinámica. Sin embargo, dado que hay un número de moléculas del orden del número de Avogadro, la descripción requiere del conocimiento de un número igual de condiciones iniciales de la posición y la velocidad, lo cual se desconoce. Si se tuviera la información de las condiciones iniciales, la solución al sistema sería extremadamente complicada.

La forma clásica de representar las fuerzas de interacción entre la partícula y las moléculas del medio es reemplazando las fuerzas de interacción por términos que imiten los efectos térmicos del medio circundante. Para el caso que se está abordando, los efectos térmicos son la fuerza debida al término de disipación y una fuerza que fluctúa aleatoriamente en forma de ruido térmico. Por lo tanto, las fuerzas mecánicas g del sistema son satisfactoriamente representadas por

$$g \longrightarrow -\gamma \frac{dx}{dt} + \sqrt{2\gamma k_B T} \xi(t). \quad (5.2)$$

donde el término $\sqrt{2\gamma k_B T}$ representa el coeficiente de difusión térmica y $\xi(t)$ una variable aleatoria dependiente del tiempo que fluctúa entre $-\infty$ y ∞ .

Por otro lado, para no producir un movimiento perpetuo de segundo orden las fluctuaciones $\xi(t)$ deben ser de tipo ruido blanco Gaussiano de promedio cero, i.e. $\langle \xi(t) \rangle = 0$ y debe satisfacer la relación de fluctuación-disipación [4]

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2\gamma k_B T \delta(t - t').$$

Esta última expresión establece que no hay correlación en el tiempo entre las perturbaciones aleatorias que ocurren en el sistema, pero también relaciona las fluctuaciones con la disipación.

Finalmente, la ecuación diferencial unidimensional estocástica es

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + V'(x(t)) = -\gamma \frac{dx(t)}{dt} + F(t) + \sqrt{2\gamma k_B T} \xi(t). \quad (5.3)$$

Para hacer una comparación cualitativa entre el comportamiento de un sistema matraca determinista y un sistema matraca estocástico se usarán las expresiones del forzamiento periódico externo y del potencial periódico usadas en los capítulos previos.

Al adimensionalizar la ecuación (5.3) para reducir el número de parámetros de control se obtiene la ecuación

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{dV(x)}{dx} = -b \frac{dx(t)}{dt} + a \cos(\omega t) + \sqrt{2\gamma k_B T w_0} \xi(t) \quad (5.4)$$

La solución a la ecuación (5.4) se determina usando el método de Runge-Kutta estocástico de segundo orden [23].

5.3. Dinámica de una matraca browniana

En esta sección se estudiará el comportamiento dinámico promedio de un ensemble de $N = 1000$ partículas brownianas. Se estudiará la dinámica del sistema para una amplitud del forzamiento fija en función de las condiciones iniciales y la dinámica del sistema para una condición fija en función de las condiciones iniciales. A partir de este estudio, se establecerán los valores óptimos de la amplitud del forzamiento que dan lugar a un flujo promedio máximo y aquellos que dan lugar a una inversión de corriente.

Los cálculos numéricos de este capítulo se obtienen utilizando los parámetros b , w y a , donde los primeros dos son fijos y el último es de control. Así como también, los valores de las constantes $x_0 \simeq -0.19$, $\delta \simeq 1.6$, $C \simeq 0.0174$ y $b = 0.1$ y $w = 0.67$. El valor del coeficiente del ruido es $\sqrt{2\eta k_B T w_0} = 0.02$.

5.3.1. Dinámica de las trayectorias en función de las condiciones iniciales.

El interés de esta sección es determinar el comportamiento promedio de un sistema de $N = 1000$ partículas que se encuentran inmersas en un fluido viscoso, sujetas a un potencial periódico asimétrico, a un forzamiento periódico externo y a un ruido blanco gaussiano. Se estudiará si el comportamiento promedio de las N partículas varía o no en función de las condiciones iniciales para una amplitud del forzamiento a constante.

De un análisis cualitativo de la dinámica de las trayectorias se establece que, a pesar de que el sistema es un sistema disipativo, la dinámica de una trayectoria a tiempos cortos está influenciada por las condiciones iniciales. A tiempos largos, los efectos de las condiciones iniciales y el resto de las fuerzas que actúan en el sistema, cesan debido a la disipación del medio, preservándose únicamente los efectos del ruido Gaussiano sobre la dinámica del sistema.

Al graficar las trayectorias promedio a tiempos cortos, para dos sistemas idénticos inicializados con dos condiciones distintas, se obtienen las trayectorias de la Figura 5.1.

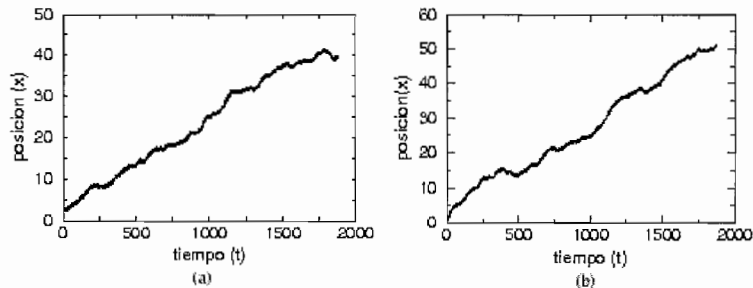


Figura 5.1: Trayectorias promedio de un ensamble de N partículas brownianas ante distintas condiciones iniciales. En (a) $x = 0.4$, $v = 0.4$ y en (b) $x = -0.1$, $v = 0.25$.

De la Figura 5.1, se hace notar que la presencia del término estocástico para un sistema tipo matraca, hace que las trayectorias sean erráticas, independientemente de las condiciones iniciales. Al hacer un registro de la posición final de una partícula para tiempos cortos ($t < 15$ periodos donde los efectos de las condiciones iniciales aún no cesan) sobre un conjunto de posiciones iniciales distintas, en las que por simplicidad $v = 0$, se tiene el esquema de la Figura 5.2.

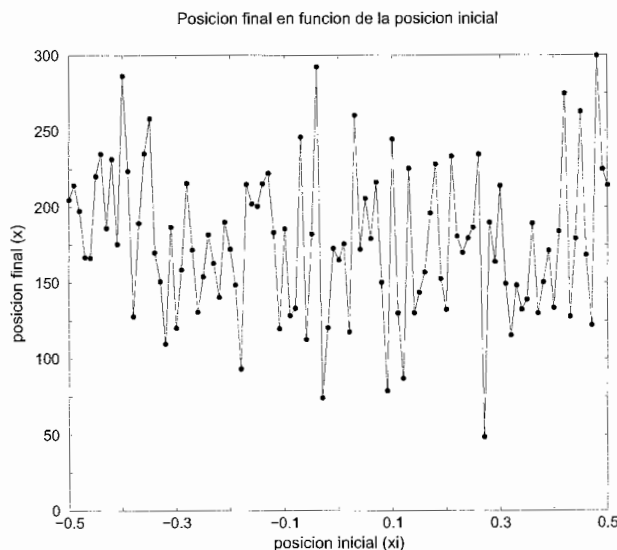


Figura 5.2: Posiciones finales promedio de un ensamble inicializado en distintas condiciones iniciales en las que $v = 0$.

El esquema de la Figura 5.2 hace notar que independientemente de la posición inicial se produce un flujo positivo siempre. Es importante resaltar que la dirección del flujo no cambia cuando la velocidad inicial es cero, $v \neq 0$.

A partir de las trayectorias de la Figura 5.1 y el esquema de la Figura 5.2, se deduce que para un sistema estocástico con una amplitud de forzamiento $a = 0.156$, no ocurre inversión de corriente como función de la posición inicial. Adicionalmente, debido al comportamiento aleatorio de las trayectorias, se deduce que cada trayectoria tiene un comportamiento parecido al caótico sin dar lugar a alguna trayectoria periódica.

En la siguiente sección estudiaremos el comportamiento del sistema en función de la amplitud del forzamiento para una condición inicial fija. Para este caso estudiaremos si ocurre el fenómeno de inversión de corriente como función de a .

5.3.2. Dinámica de las trayectorias en función de la amplitud del forzamiento

Al graficar las trayectorias promedio que sigue un ensamble de $N = 1000$ partículas inicializadas con una condición inicial fija como función de la amplitud del forzamiento, se obtiene el esquema mostrado en la Figura 5.3.

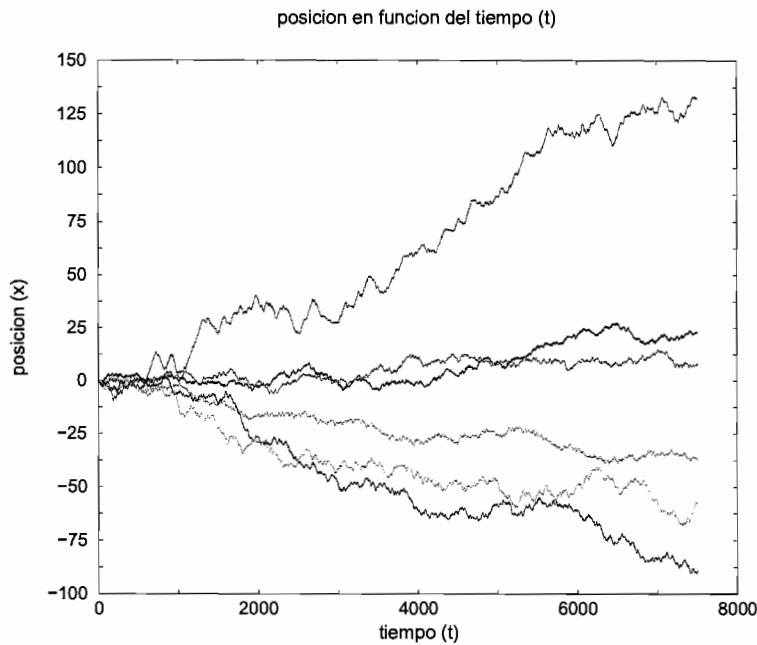


Figura 5.3: *Trayectorias promedio de $N = 1000$ partículas brownianas inicializadas con la misma condición para distintas amplitudes del forzamiento.*

En la Figura 5.3 se muestra el valor promedio para cada instante de tiempo t , de la posición promedio de N partículas brownianas en función de la amplitud del forzamiento a .

Al calcular la trayectoria promedio del ensamble para un forzamiento de magnitud $a = 0.080$, se obtiene la trayectoria de color negro. Ésta muestra que dicho valor de la amplitud induce un flujo positivo. Al aumentar la amplitud a un valor $a = 0.084$, la trayectoria (roja) muestra que en el mismo intervalo de tiempo, las partículas viajan en dirección positiva, visitando un número menor de pozos del potencial respecto al anterior pese a que la amplitud del forzamiento es mayor. Para $a = 0.090$, la trayectoria (verde) muestra que dirección del flujo ha cambiado de positiva a negativa. Si se aumenta el valor a $a = 0.115$ la trayectoria (rosa) indica que la dirección de las partículas sigue siendo negativa, visitando un número mayor de pozos. La misma situación ocurre para $a = 0.125$, mostrada en la trayectoria (azul). Al aumentar una vez más el valor hasta $a = 0.150$ la trayectoria (morada) muestra que la dirección del flujo se ha invertido a positivo, dando como resultado una corriente positiva.

Las trayectorias mostradas en la Figura 5.3, muestran que la dirección del flujo depende del valor de la amplitud del forzamiento. Para sustentar esta afirmación se calcula el flujo promedio de un ensamble de partículas en función de la amplitud.

El flujo promedio medido a un tiempo largo t de 200 periodos se muestra en la Figura 5.4.

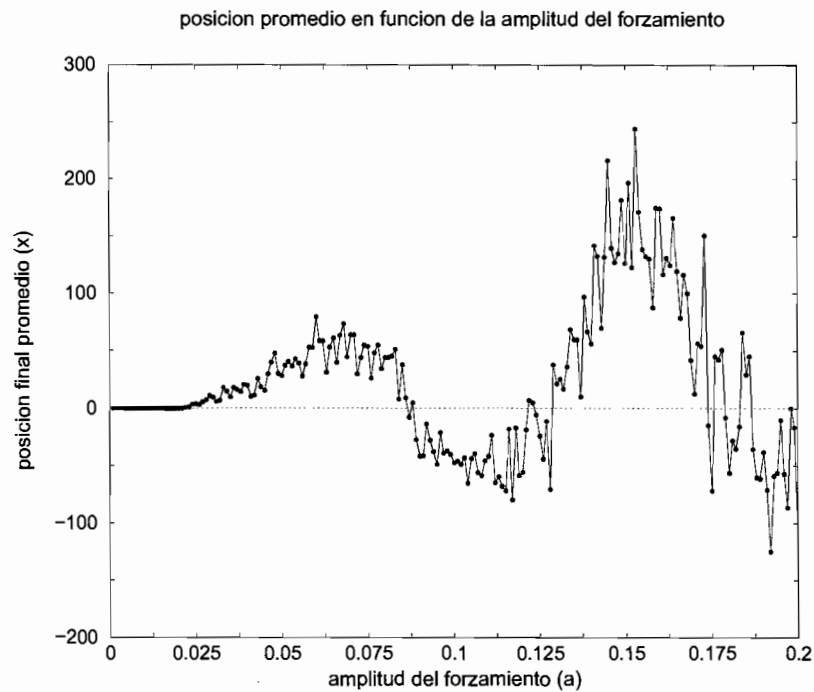


Figura 5.4: Posicion promedio de ensamble de partículas a un tiempo t , en función de la amplitud del forzamiento.

La Figura 5.4, muestra que la dirección del flujo, en el límite de tiempos largos, depende fuertemente del valor de la amplitud del forzamiento. El interés de esta gráfica, para el sistema inercial estocástico estudiado a lo largo de este capítulo, es que permite seleccionar el valor óptimo de la amplitud del forzamiento para maximizar el transporte de partículas en sistemas estocásticos.

Capítulo 6

Conclusiones

En un sistema determinista inercial inclinado con un forzamiento periódico externo dependiente del tiempo, no cualquier valor de la fuerza debida a la inclinación da lugar al efecto matraca. Este resultado se obtiene al conocer el flujo promedio de partículas como función de la magnitud de la fuerza constante externa. A partir de este, se determina el intervalo de la magnitud de la fuerza en el que se puede extraer trabajo y producir transporte en contra de una fuerza constante.

Al analizar el diagrama de bifurcación y compararlo con el flujo promedio en función de la fuerza constante, se determina que existe una fuerte correlación entre éstos. La inversión de la dirección de la corriente ocurre en el mismo valor de la fuerza constante donde ocurre la transición de una dinámica periódica a una dinámica caótica (o viceversa). Esta situación se preserva tal y como ocurre en una matraca determinista no inclinada.

A partir del valor elegido de la fuerza constante $R=-0.006$, valor donde no ocurre el efecto matraca, se muestra que es posible generar transporte de materia en contra del forzamiento constante externo mediante la variación de la magnitud de la amplitud del forzamiento, o bien, de las condiciones iniciales.

En el sistema inercial estocástico se encuentra que la presencia del término de ruido, cuya magnitud está muy por debajo de la magnitud de las fuerzas actuantes, influye fuertemente en la dinámica. Entre los hechos a destacar se encuentra que en el caso donde la amplitud del forzamiento es constante, las condiciones iniciales no influyen en la dirección del flujo. En este caso, la dirección puede ser positiva o negativa y está determinada por la magnitud de la amplitud del forzamiento externo.

Bibliografía

- [1] P. Hänggi and R. Bartussek, *Nonlinear Physics of Complex Systems*. **476** (1996) 294.
- [2] R. D. Astumian, *Science* **276** (1997) 917.
- [3] F. Jülicher, A. Ajdari and J. Prost, *Rev. Mod. Phys.* **69** (1997) 1269.
- [4] P. Reimann, *Phys. Rep.* **361** (2002) 57.
- [5] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* Vol. 1 Capítulo. 46 (Addison Wesley 1996).
- [6] E. Fermi, *Thermodynamics* Capítulo III (Dover Publications, 1956).
- [7] M. O. Magnasco, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 1477.
- [8] J. M. Parrondo and P. Español, *Am. J. Phys.* **64** (1996) 9.
- [9] J. L. Mateos, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 258.
- [10] P. Jung, J.G. Kissner and P. Hänggi, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 3436.
- [11] Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Perseus book, 1994)
- [12] R. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics* (Oxford University Press, New York, 1994)
- [13] J.L. Mateos, *Fluctuation and Noise Letters* **3** (2003) 233.
- [14] J. L. Mateos, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations* **8** (2003) 253.
- [15] J. L. Mateos, *Physica A* **325** (2003) 92.
- [16] J. L. Mateos, *Physica D* **168** (2002) 205.

- [17] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* (Limusa, 1998).
- [18] F.R. Alatríste and J.L. Mateos, *Physica A* **384** (2007) 223.
- [19] P. Reimann and P. Hänggi, *Appl. Physica* **75** (2002) 169.
- [20] L. Machura, M. Kostur, P. Talkner, J. Luczka, F. Marchesoni and P. Hänggi, *Phys. Rev. Lett.* **70** (2004) 061105.
- [21] “On the Movement of Small Particles Suspended in a Stationary Liquid Demanded by the Molecular-Kinetic Theory of Heat”, A. Einstein, *Investigations on the Theory of the Brownian Motion*, Dover, 1956.
- [22] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, 2nd. Edition, (Springer,1989).
- [23] R. L. Honeycutt, *Phys. Rev. A* **45** (1992) 2.
- [24] T. Hugel, N. B. Holland, A. Cattani, L. Moroder, M. Seitz and H. E. Gaub, *Science* **296** (2002) 1103.