



Universidad Nacional Autónoma  
de México

---

Programa de Maestría y Doctorado en  
Ingeniería

Análisis Electromagnético del  
Radiotelescopio RT5

**T E S I S**

Que para obtener el grado de:

**Maestro en Ingeniería**

presenta

**Ing. Miguel Ángel González Galicia**

Tutora. **Dra. Martha Rosete Aguilar**



2009, Ciudad Universitaria, México



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**JURADO ASIGNADO**

**Presidente.** Dr. Ramón Gutiérrez Castrejón

**Secretario.** Dr. Esau Vicente Vivas

**Vocal.** Dra. Martha Rosete Aguilar

**1<sup>er</sup> suplente.** Dr. Naser Qureshi

**2<sup>do</sup> suplente.** Dr. Neil Charles Bruce Davidson

*Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo  
Tecnológico (CCADET)*

**TUTOR DE TESIS:**

**Dra. Martha Rosete Aguilar**

---

**FIRMA**



# Agradecimientos

---

*A la Doctora Martha Rosete Aguilar, por la asesoría otorgada durante la realización de este trabajo*



# Índice general

---

Agradecimientos	III
Índice general	v
Índice de figuras	VII
Introducción	XI
<b>1. Análisis óptico</b>	<b>1</b>
1.1. Telescopio Óptico Cassegrain . . . . .	1
1.2. Análisis de la geometría del Radiotelescopio RT5 . . . . .	2
1.2.1. Análisis para el espejo primario . . . . .	3
1.2.2. Análisis para todo el arreglo Cassegrain . . . . .	6
1.3. Movimiento del espejo secundario . . . . .	9
1.3.1. Relación entre $\theta$ y $\alpha$ . . . . .	11
1.3.2. Limitaciones para el movimiento del espejo secundario	13
<b>2. Análisis Electromagnético</b>	<b>15</b>
2.1. Análisis de un reflector parabólico . . . . .	15
2.1.1. Modelado de una antena . . . . .	15
2.1.2. Teorema de reciprocidad . . . . .	16
2.1.3. Campos radiados . . . . .	16
2.1.4. Método de la apertura . . . . .	27
2.1.5. Teorema de equivalencia . . . . .	27
2.1.6. Densidad de potencia radiada . . . . .	31
2.1.7. Intensidad de radiación . . . . .	31
2.1.8. Patrón de radiación de un reflector parabólico . . . . .	34



2.1.9.	Ancho de lóbulo principal a -3 dB de un reflector parabólico . . . . .	38
2.2.	Análisis de un arreglo Cassegrain . . . . .	38
2.2.1.	Densidad de potencia radiada de un arreglo Cassegrain . . . . .	39
2.2.2.	Intensidad de radiación de un arreglo Cassegrain . . . . .	40
2.2.3.	Diagrama de radiación de un arreglo Cassegrain . . . . .	41
2.2.4.	Ancho de lóbulo principal a -3 dB de un arreglo Cassegrain . . . . .	41
<b>3.</b>	<b>Simulaciones</b> . . . . .	<b>45</b>
3.1.	Software de análisis de bocinas y reflectores (SABOR) . . . . .	45
3.1.1.	Simulación del diagrama de radiación de un reflector parabólico . . . . .	46
3.1.2.	Simulación del diagrama de radiación de un arreglo Cassegrain . . . . .	46
3.2.	Programa de simulación de reflectores GRASP9 . . . . .	47
3.2.1.	Simulación del diagrama de radiación de un reflector parabólico de 5 metros . . . . .	48
3.2.2.	Simulación del diagrama de radiación de un arreglo Cassegrain de 5 metros . . . . .	48
3.3.	Análisis de antenas reflectoras mediante el método de las corrientes inducidas (ICARA) . . . . .	52
3.3.1.	Simulación del diagrama de radiación de un reflector parabólico de 5 metros . . . . .	53
3.3.2.	Simulación del diagrama de radiación de un arreglo Cassegrain . . . . .	55
3.3.3.	Observaciones . . . . .	55
3.4.	Rotación del espejo secundario . . . . .	58
3.4.1.	Geometría Equivalente de un arreglo Cassegrain . . . . .	58
3.4.2.	Cambios en el patrón de radiación al mover de manera lateral el detector de un reflector parabólico . . . . .	60
3.4.3.	Movimiento del espejo secundario junto con el detector . . . . .	60
<b>4.</b>	<b>Conclusiones</b> . . . . .	<b>77</b>
	<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>81</b>

# Índice de figuras

---

1.	Construcción de la base del radiotelescopio en la cima del volcán Sierra Negra en el estado de Puebla . . . . .	XI
2.	Reflector parabólico en proceso de remodelación dentro de las instalaciones del INAOE . . . . .	XII
1.1.	Telescopio Cassegrain . . . . .	2
1.2.	Aproximación del radio de curvatura de una lente esférica con el radio de curvatura de una circunferencia . . . . .	3
1.3.	Interface entre dos medios con índice de refracción diferente . . . . .	4
1.4.	Análisis del espejo primario . . . . .	5
1.5.	Análisis del espejo secundario . . . . .	6
1.6.	Distancia focal posterior del sistema . . . . .	8
1.7.	Resultado obtenido en Zemax . . . . .	10
1.8.	a) Objeto centrado en el eje óptico, b) Objeto fuera del eje óptico . . . . .	10
1.9.	Espejo secundario rotado un cierto ángulo . . . . .	11
1.10.	Espejo secundario rotado 1.95 grados . . . . .	13
1.11.	Espejo secundario sin rotar . . . . .	14
1.12.	Espejo secundario rotado -1.95 grados . . . . .	14
2.1.	Dos fuentes de radiación . . . . .	17
2.2.	a) Carga puntual moviéndose. b) Densidad de carga . . . . .	18
2.3.	Zonas de radiación de una antena . . . . .	21
2.4.	Aproximación para la zona lejana . . . . .	21
2.5.	Representación geométrica de $\hat{r} \times \vec{A}$ . . . . .	23
2.6.	Representación geométrica de $\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{A})$ . . . . .	23
2.7.	Sistema de coordenadas esféricas . . . . .	24

2.8. a) Ondas esféricas emergiendo del foco b) Ondas planas reflejadas . . . . .	27
2.9. Apertura equivalente del reflector parabólico . . . . .	28
2.10. Intensidad de radiación en escala lineal . . . . .	34
2.11. Intensidad de radiación normalizada . . . . .	35
2.12. Patron de radiación en decibeles . . . . .	35
2.13. Diagrama de radiación en escala lineal . . . . .	36
2.14. Diagrama de radiación normalizado . . . . .	37
2.15. Diagrama de radiación en decibeles . . . . .	37
2.16. Bloqueo que produce el reflector secundario . . . . .	39
2.17. Densidad de potencia de un reflector parabólico y del bloqueo del secundario . . . . .	42
2.18. Diagrama de radiación de un arreglo Cassegrain . . . . .	42
3.1. Diagrama de radiación de un reflector parabólico de 5 metros calculado por el programa SABOR . . . . .	47
3.2. Diagrama de radiación de un arreglo Cassegrain de 5 metros calculado con el programa SABOR . . . . .	47
3.3. Geometría de un reflector parabólico de 5 metros generado por el programa GRASP9 . . . . .	49
3.4. Patrón de radiación de un reflector parabólico de 5 metros calculado por el programa GRASP9 . . . . .	49
3.5. Patrón de radiación de un reflector parabólico de 5 metros interpolado linealmente calculado por el programa GRASP9 . . . . .	50
3.6. Geometría de un arreglo Cassegrain generado por el programa GRASP9 . . . . .	50
3.7. Patrón de radiación de un arreglo Cassegrain Calculado por el programa GRASP9 . . . . .	51
3.8. Patrón de radiación de un arreglo Cassegrain interpolado linealmente calculado por el programa GRASP9 . . . . .	51
3.9. Geometría de un reflector parabólico de 5 metros generado por ICARA . . . . .	54
3.10. Patrón de radiación de un reflector de 5 metros calculado por ICARA . . . . .	54
3.11. Geometría de un arreglo Cassegrain generado por el programa ICARA . . . . .	56
3.12. Patrón de radiación de un arreglo Cassegrain calculado por el programa ICARA . . . . .	56

3.13. Efectos sobre el patron de radiación al rotar el espejo secundario respecto al foco del espejo primario [13] . . . . .	59
3.14. Relación geométrica entre el arreglo Cassegrain y su parábola equivalente . . . . .	59
3.15. Desplazamiento lateral del detector . . . . .	61
3.16. Patrón de radiación desplazado . . . . .	61
3.17. Distancia que barre el haz de rayos provenientes del espejo secundario . . . . .	62
3.18. Patrón de radiación del arreglo Cassegrain cuando el espejo secundario no sufre ninguna rotación . . . . .	63
3.19. Corte del patrón de radiación cuando el espejo secundario no sufre ninguna rotación . . . . .	64
3.20. Patron de radiación del arreglo Cassegrain cuando el haz principal se desplaza una longitud de onda . . . . .	65
3.21. Corte del patrón de radiación cuando el detector del arreglo equivalente se desplaza una longitud de onda . . . . .	66
3.22. Patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 2 longitudes de onda . . . . .	67
3.23. Corte del patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 2 longitudes de onda . . . . .	67
3.24. Patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 3 longitudes de onda . . . . .	68
3.25. Corte del patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 3 longitudes de onda . . . . .	69
3.26. Patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 4 longitudes de onda . . . . .	70
3.27. Corte del patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 4 longitudes de onda . . . . .	70
3.28. Patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 5 longitudes de onda . . . . .	71
3.29. Corte del patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 5 longitudes de onda . . . . .	72
3.30. Patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 6 longitudes de onda . . . . .	73
3.31. Corte del patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 6 longitudes de onda . . . . .	73
3.32. Patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 7 longitudes de onda . . . . .	74

3.33. Corte del patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 7 longitudes de onda . . .	75
3.34. Patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 7.5 longitudes de onda . . . . .	76
3.35. Corte del patrón de radiación del reflector parabólico equivalente con el detector desplazado siete y medio longitudes de onda . . . . .	76

# Introducción

---

El Radiotelescopio RT5 está en construcción en el volcán Sierra Negra en el estado de Puebla, a unos metros del GTM. Este radiotelescopio es una donación de la Universidad de Texas. Originalmente este instrumento tenía como configuración la de un reflector parabólico con el detector ubicado en el foco.

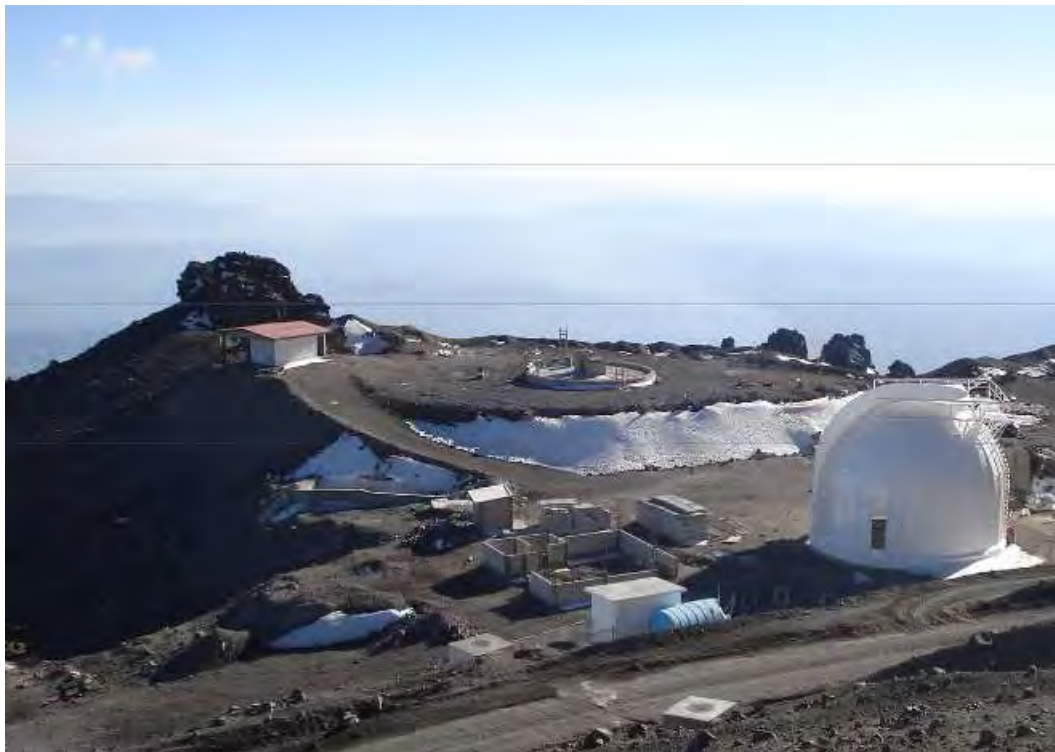


Figura 1: Construcción de la base del radiotelescopio en la cima del volcán Sierra Negra en el estado de Puebla



Figura 2: Reflector parabólico en proceso de remodelación dentro de las instalaciones del INAOE

Uno de los objetivos del proyecto del radiotelescopio de 5 metros (RT5), consiste en convertir el arreglo parabólico en un arreglo Cassegrain. Esto consiste en incorporarle un espejo secundario. Los beneficios de esta modificación son varios. Uno de estos, es que al rotar el espejo secundario, podemos enfocar otro objeto cercano al que se encuentra en el eje óptico muy rápidamente, sin necesidad de mover toda la antena. Por otro lado, al cambiar de lugar el detector se reducen las pérdidas, pues el receptor se encuentra más cerca de los instrumentos de medición.

El presente trabajo tiene como objetivo establecer los parámetros ópticos y electromagnéticos necesarios para la construcción del mecanismo para mover el espejo secundario del Radiotelescopio de 5 metros (RT5).

En el capítulo 1 se realizó un trabajo de investigación para obtener los datos físicos. Se necesitaron de varios viajes al Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica (INAOE), lugar en donde se encuentra el reflector parabólico, para medir directamente algunas de las dimensiones del instrumento. También se revisaron los trabajos de caracterización tanto del espejo

primario como del espejo secundario, para poder registrarlos y proceder al análisis del instrumento. En este capítulo se realiza un análisis óptico utilizando la ecuación de *Gauss* para determinar la distancia a la que se debe colocar al espejo secundario, con el objetivo de asegurar que la imagen del objeto que se está observando caiga en la zona donde se va instalar el detector, así como la posición en la que se debe colocar el receptor. La tarea siguiente fue comprobar que los datos obtenidos matemáticamente, fueran correctos físicamente, esto se verificó al introducir los datos del espejo primario y del espejo secundario, junto con las distancias obtenidas al programa de diseño óptico *Zemax*. En el capítulo 2 se realiza un análisis electromagnético para determinar la configuración del campo que cubre el radiotelescopio. Se realizó un estudio tanto de la configuración original como del arreglo Cassegrain, esto es con el objetivo de poder comparar las características de ambas configuraciones. En este mismo capítulo se utiliza el principio de equivalencia para poder analizar al radiotelescopio como una antena emisora y poder obtener expresiones matemáticas para visualizar gráficamente la forma y la intensidad del campo radiado por el instrumento. Se obtienen el patrón de radiación de un reflector parabólico así también como del arreglo Cassegrain. En el tercer capítulo se hace uso de varios programas para obtener el patrón de radiación de los dos arreglos. Inicialmente se pensó en utilizar un programa profesional de análisis electromagnético para simular el sistema completo, esto es simular el patrón de radiación del detector y después incorporarle el reflector parabólico. Con los programas *SABOR* (Software para Análisis de bocinas y reflectores), *ICARA* (Induced Current), así como con el programa *GRASP* (Estudiantil Edition) se calculó el patrón de radiación del radiotelescopio, pero estos programas no pueden simular el efecto sobre el patrón de radiación al modificar la posición del espejo secundario. Para realizar el análisis considerando el movimiento del espejo secundario, se utilizó el programa *Ansoft*, el programa *CST microwave studio* y finalmente el programa *Feko*. Estos programas pudieron calcular el patrón de radiación del detector, pero al incorporarle el reflector parabólico ninguno de los tres programas lograron resolver el problema. Normalmente estos programas se utilizan para simular dispositivos de alta frecuencia de algunos centímetros de dimensión. La principal limitación fue la cantidad de memoria RAM que estos programas demandan, aproximadamente 10 Gigabites. Al no poder obtener el patrón de radiación del arreglo Cassegrain con el espejo secundario rotado, se tuvo que recurrir a una aproximación, este análisis relaciona la geometría del arreglo Cassegrain con su geometría equivalente. Así se tuvo que realizar un análi-



sis mas complicado, pues se modeló matemáticamente el desplazamiento de todo el patrón de radiación. Se obtuvieron las gráficas en tres dimensiones con el programa Mathematica, en las cuales se puede observar el patrón de radiación que se obtiene al modificar la posición del espejo secundario. Finalmente en el último capítulo se muestran los resultados obtenidos, así como las conclusiones a las que se llegaron. El análisis de radiación se realizó a una frecuencia de  $43\text{ GHz}$ , pues actualmente existe un detector que se diseñó para observar máseres astrofísicos a esta frecuencia.

# Análisis óptico

---

Un radiotelescopio es un arreglo de espejos arreglados de tal forma que puedan captar las ondas electromagnéticas provenientes del espacio, y dirigir las a un detector. Naturalmente este arreglo debe de estar diseñado correctamente, esto quiere decir, que los espejos estén colocados en la posición correcta, en caso contrario la fuente de radiación que se está observando no puede ser detectada de manera óptima. El objetivo de este capítulo es hacer un análisis del tipo óptico, considerando que las ondas electromagnéticas se comportan como rayos, esto es con el objetivo de verificar que la posición del espejo secundario sea la correcta y determinar la posición en la que debe colocarse el detector.

## 1.1. Telescopio Óptico Cassegrain

Los telescopios reflectores son muy populares por su simplicidad y la buena calidad de la imagen que genera. Uno de los más conocidos es el telescopio tipo **Cassegrain** que tiene solamente dos espejos cónicos, el espejo primario es una parábola y el espejo secundario es una hipérbola, con los cuales es posible diseñar telescopios con diferentes longitudes focales posteriores sin cambiar la longitud focal efectiva. Con este tipo de telescopio es posible considerar pequeñas oscilaciones del espejo secundario alrededor de uno de sus ejes lo cual nos generara la posibilidad de cambiar la posición de la imagen de manera lateral [1]. La figura 1.1 muestra una imagen de un telescopio óptico del tipo **Cassegrain**. Algunos de los parámetros más importantes son, el foco del espejo primario  $f_p$ , el foco del espejo secundario  $f_s$ , la distancia entre espejos  $d$ , la distancia focal posterior  $d_{fp}$ , el foco del sistema  $F$ , etc.

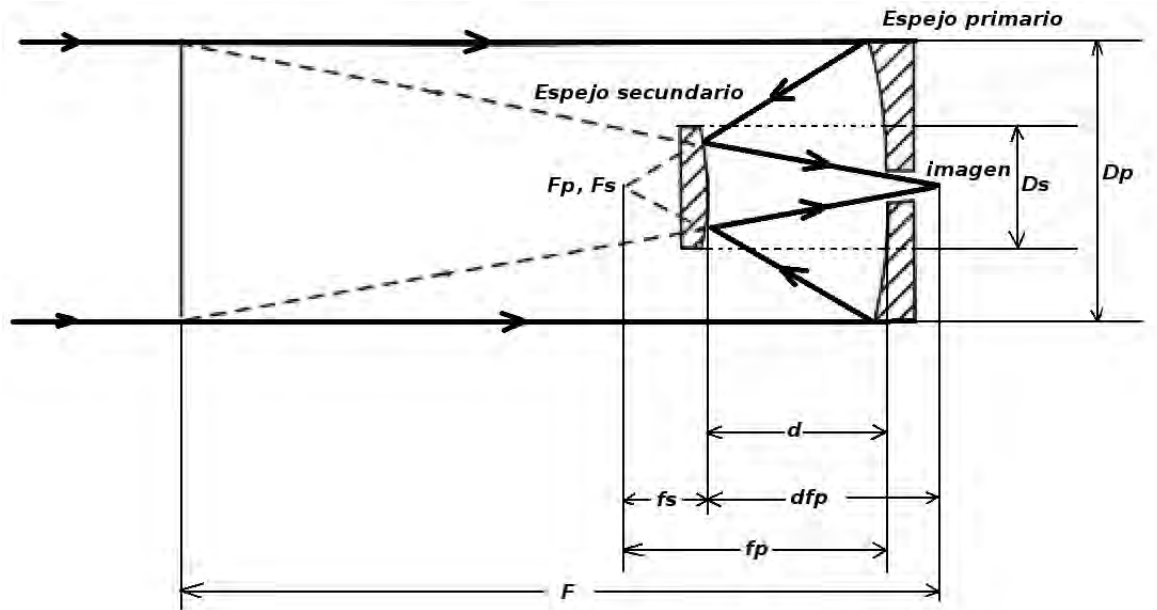


Figura 1.1: Telescopio Cassegrain

## 1.2. Análisis de la geometría del Radiotelescopio RT5

Un telescopio **Cassegrain** está compuesto por dos espejos, el espejo primario y el espejo secundario. Una lente se define como una discontinuidad en un medio dominante [2], lógicamente un espejo al reflejar un haz de luz colimada también produce este efecto. Entonces podemos utilizar la ecuación de *Gauss* para analizar la geometría del telescopio.

$$\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \quad (1.1)$$

La ecuación (1.1) es válida para lentes esféricas, pero se puede aplicar a lentes esféricas. Se puede demostrar analíticamente y gráficamente que el radio de curvatura paraxial de una lente parabólica o de una lente hiperbólica se puede aproximar con el radio de curvatura paraxial de una circunferencia. Esto es válido para lentes muy grandes. La figura 1.2 muestra gráficamente esta situación. De manera general, consideremos una interfase compuesta por un medio con índice de refracción  $n_1$  y una superficie esférica con índice de

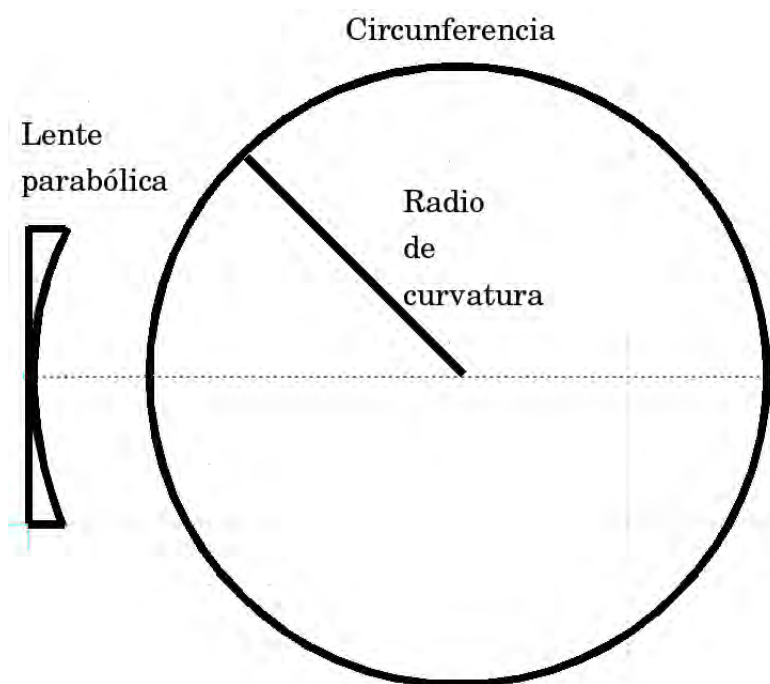


Figura 1.2: Aproximación del radio de curvatura de una lente esférica con el radio de curvatura de una circunferencia

refracción  $n_2$ , tal y como se muestra en la figura 1.3.

Al segmento dirigido  $\overline{SV}$  se le denomina  $S_0$  y es la distancia medida desde la fuente de luz  $S$  al vértice de la superficie esférica.  $S_i$  es la distancia medida desde el vértice de la superficie esférica al punto  $P$ , que es el lugar en donde se forma la imagen. El segmento dirigido  $\overline{AC}$  es el radio de curvatura del medio esférico.

### 1.2.1. Análisis para el espejo primario

El objetivo de este análisis es obtener la distancia focal del espejo primario. Aplicando la ecuación (1.1) al espejo primario, considerando que  $n_1 = n_2$  y que la superficie esférica es un espejo y se forma la imagen en el lado izquierdo del sistema tenemos:

$$\frac{1}{s_{01}} + \frac{1}{s_{i1}} = \frac{1}{f_p} \quad (1.2)$$

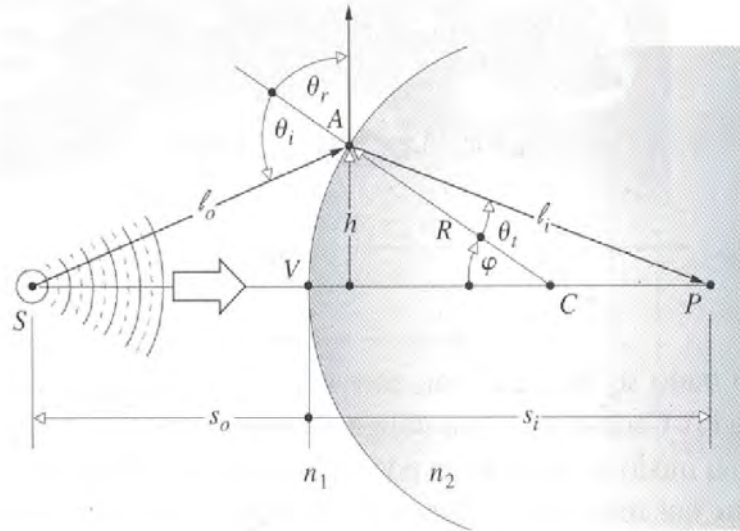


Figura 1.3: Interface entre dos medios con índice de refracción diferente

Si consideramos que la fuente de luz se encuentra en el infinito, como se muestra en la figura 1.4 entonces el ángulo que forma el rayo  $l_0$  con la horizontal es de  $0^\circ$ . Por lo tanto tenemos que:  $s_{o1} \rightarrow \infty$  y se cumple que  $s_{i1} = f_p$ , se puede demostrar que [2]:

$$f_p = -\frac{R}{2} \quad (1.3)$$

Aquí conviene utilizar una convención de signos, tal que:  $R < 0$  por consecuencia tenemos que  $f_p > 0$

La conclusión de este análisis es que la distancia focal posterior del espejo primario o foco, se encuentra a una distancia igual a la mitad del radio de curvatura. Este valor es medido desde el vértice del primario hasta donde se forma la imagen.

Con los datos físicos del radiotelescopio se generó una pequeña tabla en donde se encuentran algunos valores del espejo primario, como se muestra en el cuadro 1.2.

Calculando la distancia focal del espejo primario mediante la expresión (1.3) tenemos

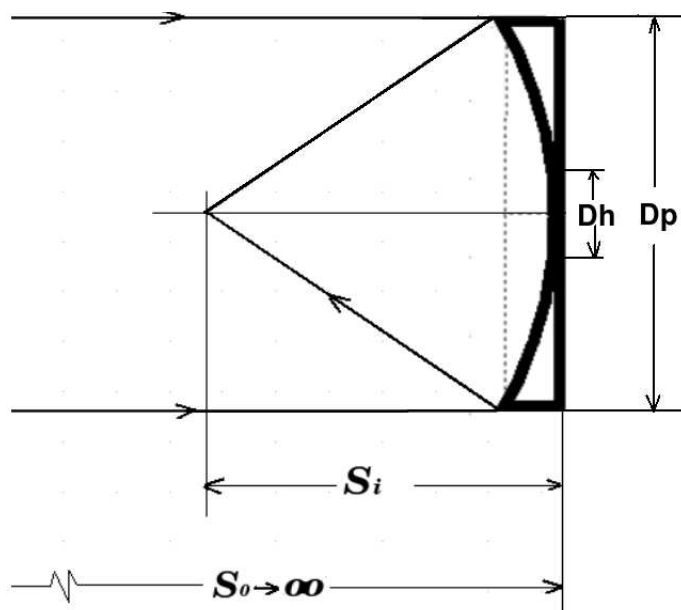


Figura 1.4: Análisis del espejo primario

Datos del espejo Primario
Diámetro del espejo primario, $D_p = 4889mm$
Radio de curvatura paraxial, $R_p = -4875.3mm$
Distancia focal del espejo primario, $R_p = -4875.3mm$
Sagita del espejo primario, $S_p = 600 mm$
Constante de conicidad del espejo primario, $K_p = -1$
Diámetro del hueco del espejo primario, $D_h = 166mm$

Cuadro 1.1: Datos del espejo primario

$$f_p = \frac{-4875.3}{2}$$

$$f_p = -2437.65mm \quad (1.4)$$

Que coincide con el valor que se obtuvo al caracterizar el reflector parabólico con la máquina de coordenadas del *INAOE*. En este trabajo [3] obtienen el radio de curvatura paraxial, valor que al dividirlo entre 2 nos da el valor que aparece en la tabla 1

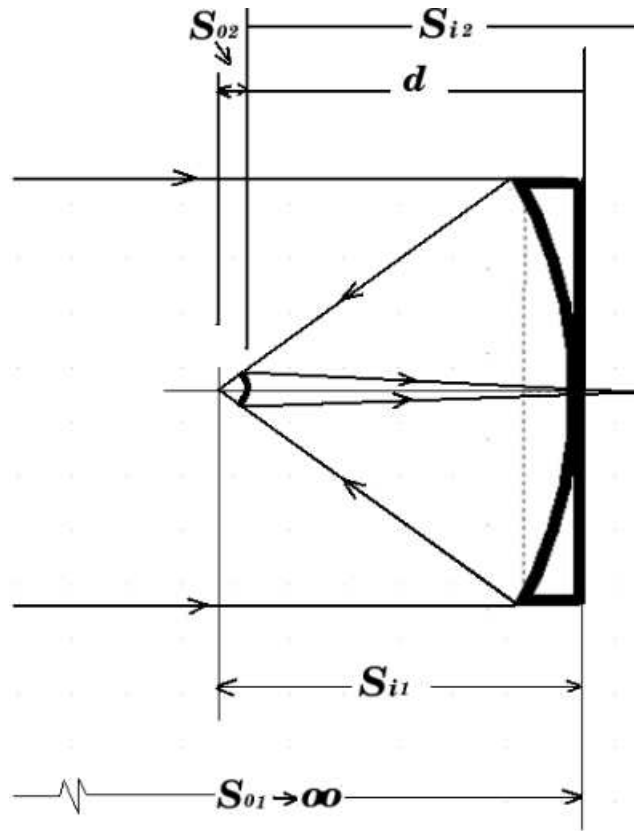


Figura 1.5: Análisis del espejo secundario

### 1.2.2. Análisis para todo el arreglo Cassegrain

De manera similar aplicando la ecuación de Gauss al sistema completo, tenemos:

$$\frac{1}{s_{02}} + \frac{1}{s_{i2}} = \frac{1}{f_s} \quad (1.5)$$

donde  $s_{02} = -(s_{i1} - d)$

Ahora, del análisis del espejo primario tenemos  $s_{i1} = f_p$ , entonces tenemos

$$s_{02} = -(f_p - d) \quad (1.6)$$

sustituyendo la ecuación ( 1.6) en la ( 1.5) tenemos

$$\frac{1}{(f_p - d)} + \frac{1}{s_{i2}} = \frac{1}{f_s} \quad (1.7)$$

despejando  $s_{i2}$  de ( 1.7) tenemos

$$\frac{1}{s_{i2}} = \frac{1}{f_s} + \frac{1}{(f_p - d)} \quad (1.8)$$

que es lo mismo

$$s_{i2} = \frac{f_s(f_p - d)}{f_p + f_s - d} \quad (1.9)$$

y se le denomina distancia focal posterior (dfp) del sistema Cassegrain, y se mide desde el vértice del espejo secundario hasta el punto donde se forma la imagen, que es el punto en donde termina el arreglo Cassegrain.

Con los datos obtenidos físicamente se generó una pequeña tabla en donde se encuentran algunos valores del espejo secundario. Estos valores se muestran en el cuadro 1.2. La distancia que hay entre espejos es de  $2221.427mm$ .

Datos del espejo secundario
Diámetro del espejo primario, $D_s = 456mm$
Radio de curvatura paraxial, $R_s = 467mm$
Distancia focal del espejo secundario, $f_s = 233.5mm$
Sagita del espejo secundario, $S_s = 55mm$
Constante de conicidad del espejo secundario, $K_s = -1.34514$

Cuadro 1.2: Datos del espejo secundario

Sustituyendo estos valores en la ecuación ( 1.9) tenemos:

$$dfp = \frac{-233.5(2437.65 - 2221.427)}{2437.65 - 233.5 - 2221.427}$$

$$dfp = \frac{-50488.07}{-17.277}$$

$$dfp = 2922.27mm \quad (1.10)$$



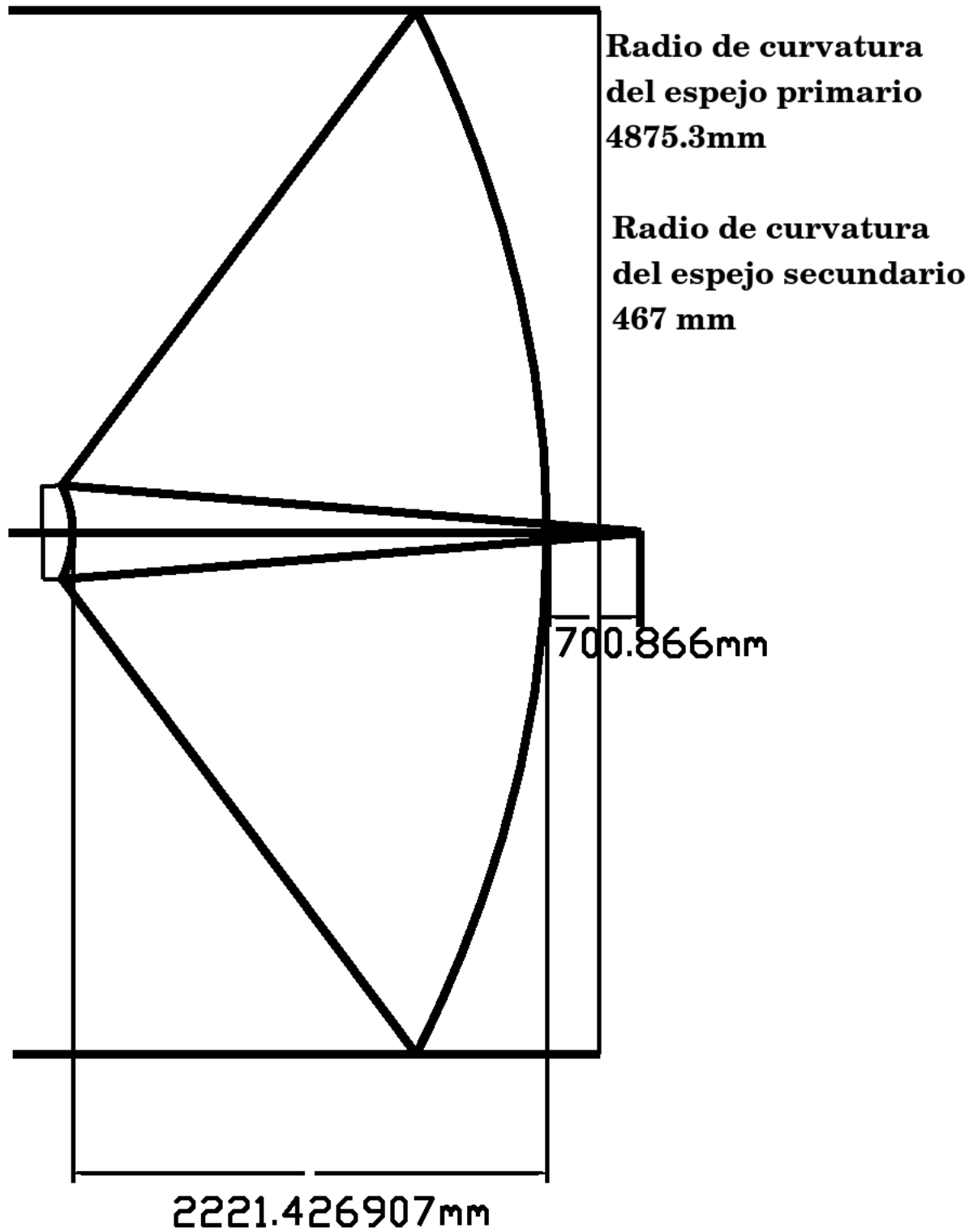


Figura 1.6: Distancia focal posterior del sistema

que es la distancia entre el vértice del espejo secundario y el foco del arreglo Cassegrain. En la figura 1.6 se muestra la distancia focal posterior del sistema.

Ahora calculamos la distancia focal del espejo secundario mediante la expresión (1.3)

$$f_s = -\frac{467}{2}$$

$$f_s = -233.5mm \quad (1.11)$$

La distancia focal efectiva esta dada por [2]:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_p} + \frac{1}{f_s} - \frac{d}{f_p f_s} \quad (1.12)$$

$$F = \frac{f_s f_p}{f_s + f_p - d} \quad (1.13)$$

$$F = \frac{-(233.5)(2437.65)}{2437.65 - 233.5 - 2221.427}$$

$$F = \frac{-569191.27}{-17.277}$$

$$F = 32945.02mm \quad (1.14)$$

$F$  se define como la **distancia focal efectiva** del sistema y es la distancia entre el plano principal posterior y el foco del sistema Cassegrain.

Finalmente al introducir estas dimensiones en el programa de diseño óptico Zemax, obtenemos la configuración que se muestra en la figura 1.7, la cual coincide con el diagrama mostrado anteriormente.

### 1.3. Movimiento del espejo secundario

Cuando el eje del espejo secundario coincide con el eje óptico, entonces el objeto que se esta mirando esta situado en el eje óptico. Sin embargo, si el espejo secundario se rota un ángulo  $\alpha$  respecto al eje óptico, entonces el objeto que se observa ya no es el que se encuentra en el eje óptico, sino un objeto que se encuentra desplazado un ángulo  $\theta$  del centro del sistema, tal como se muestra en la Figura 1.8

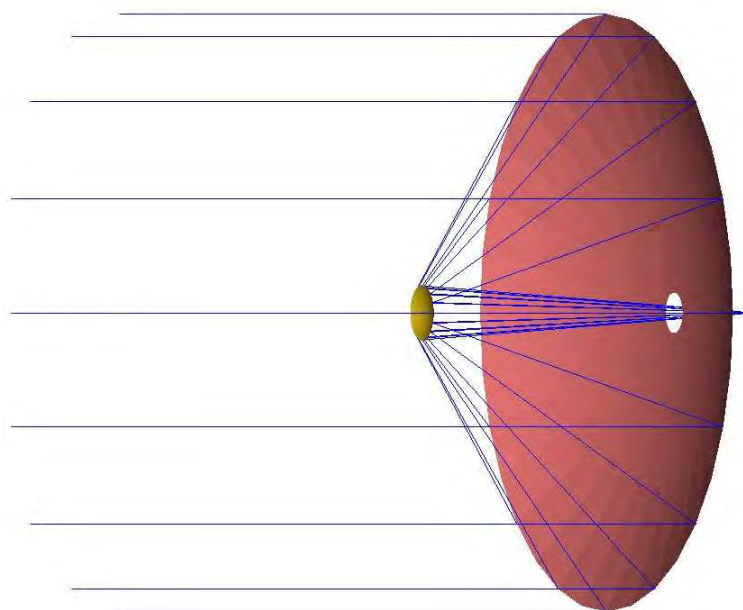


Figura 1.7: Resultado obtenido en Zemax

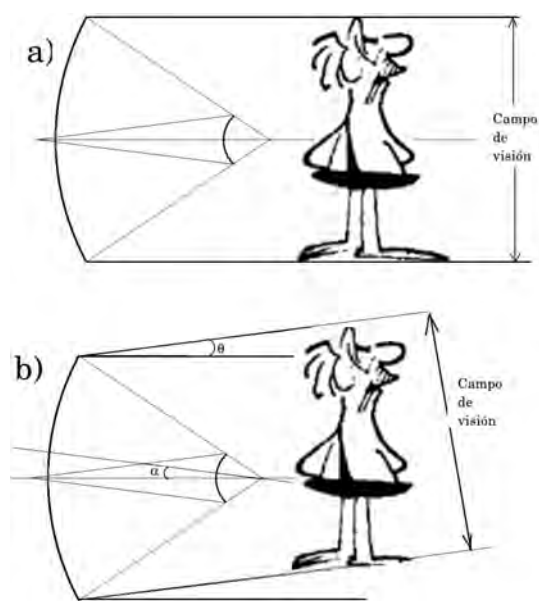


Figura 1.8: a) Objeto centrado en el eje óptico, b) Objeto fuera del eje óptico

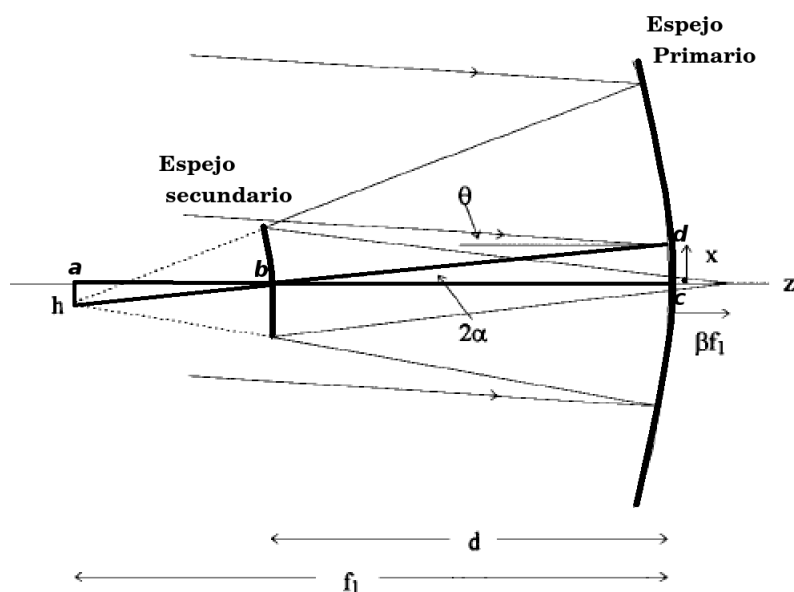


Figura 1.9: Espejo secundario rotado un cierto ángulo

### 1.3.1. Relación entre $\theta$ y $\alpha$

Consideremos el arreglo que se muestra en la figura 1.9, el cual muestra el espejo secundario rotado un ángulo  $\alpha$ . Si consideramos que los catetos opuestos de los triángulos que se forman se aproximan como el arco de una circunferencia, entonces tenemos que la longitud de arco de una circunferencia se puede calcular mediante

$$l_{\text{arco}} = \theta r \quad (1.15)$$

donde  $l_{\text{arco}}$  es la longitud de arco,  $\theta$  es el ángulo en radianes y  $r$  es el radio de la circunferencia. Si consideramos que  $r$  es muy grande entonces la curvatura tiende a ser una línea recta, entonces utilizando este concepto podemos calcular los ángulos que se forman en el triángulo formado por los vértices  $abh$ . Si le llamamos  $\alpha$  al ángulo que se forma entre el eje del espejo secundario rotado y el eje óptico, tenemos entonces:

$$h = 2\alpha(f_1 - d) \quad (1.16)$$

donde  $2\alpha$  es el ángulo que forma el rayo que proviene del espejo primario con

el eje  $z$ , resolviendo para el ángulo  $2\alpha$  tenemos

$$2\alpha = \frac{h}{(f_1 - d)} \quad (1.17)$$

Así también podemos calcular la distancia  $x$  con el triángulo que se forma con los vértices  $dbc$

$$x = -2\alpha d \quad (1.18)$$

Ahora si llamamos  $\theta$  al ángulo que se forma entre el rayo de luz incidente en el espejo primario, es fácil ver que

$$h = \theta f_1 \quad (1.19)$$

haciendo simultaneas las ecuaciones ( 1.16) y ( 1.19) tenemos

$$2\alpha(f_1 - d) = \theta f_1 \quad (1.20)$$

Ahora resolviendo para  $\theta$  tenemos

$$\theta = \frac{2\alpha(f_1 - d)}{f_1} \quad (1.21)$$

Ahora si le llamamos  $k$  al término  $\frac{f_1 - d}{f_1}$ , entonces tenemos ya la relación entre el ángulo del haz incidente  $\theta$  y el ángulo que se forma entre el eje del espejo secundario rotado y el eje óptico del sistema [5].

$$\theta = 2k\alpha \quad (1.22)$$

Para nuestro caso el foco del espejo primario es  $f_1 = 2437.648mm$  y la distancia entre espejos  $d = 2221.4269mm$  entonces la constante  $k$  es

$$k = \frac{2437.648 - 2221.4269}{2437.648} = 0.08870$$

Para nuestro arreglo la relación entre  $\theta$  y  $\alpha$  esta dada por

$$\theta = 0.1774\alpha \quad (1.23)$$

La ecuación ( 1.23) es muy importante para este trabajo, pues nos indica el ángulo  $\theta$  que forma el objeto observado respecto al eje del sistema cuando rotamos un cierto ángulo  $\alpha$  el espejo secundario. Por ejemplo si rotamos el espejo secundario un ángulo  $\alpha = 0.1^\circ$ , entonces el objeto observado esta formando un ángulo  $\theta = 0.01774^\circ$  respecto al eje del sistema.

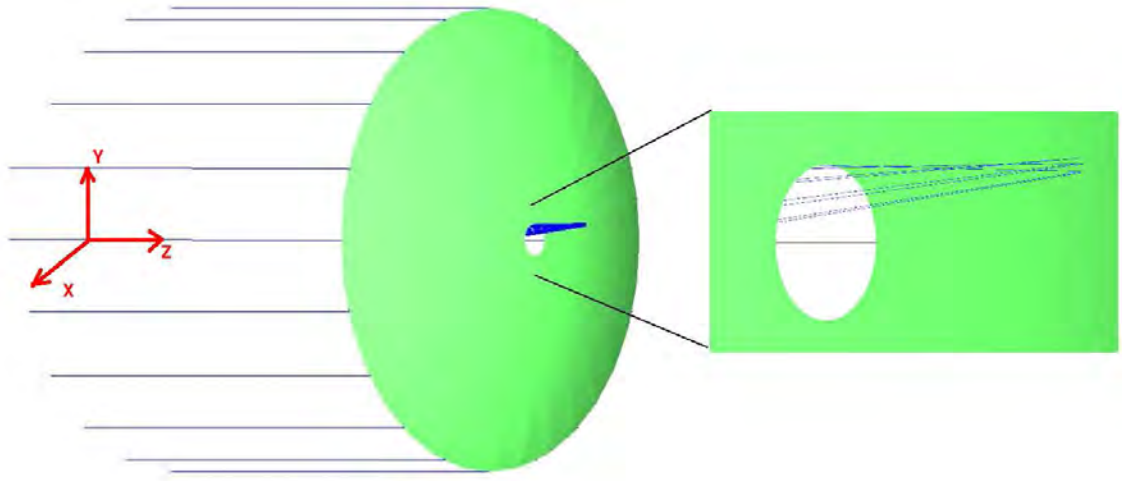


Figura 1.10: Espejo secundario rotado 1.95 grados

### 1.3.2. Limitaciones para el movimiento del espejo secundario

Siguiendo con el análisis desde el punto de vista de la óptica de rayos, la principal limitación para el movimiento del espejo secundario, es el hueco que tiene el espejo primario en su vértice, pues se debe asegurar que todo el haz de rayos pueda pasar por el hueco. El diámetro de este hueco es de  $166\text{mm}$ . Así mediante el uso del programa Zemax se comenzó a rotar el espejo secundario respecto al eje  $y$  cuidando que el haz de rayos pudiera pasar libremente, las figuras 1.10, 1.11 y la 1.12 muestran esta situación. Mediante este análisis gráfico se pudo determinar el ángulo máximo que debe ser rotado el espejo secundario, los valores correspondientes fueron  $\pm 1.95^\circ$ .

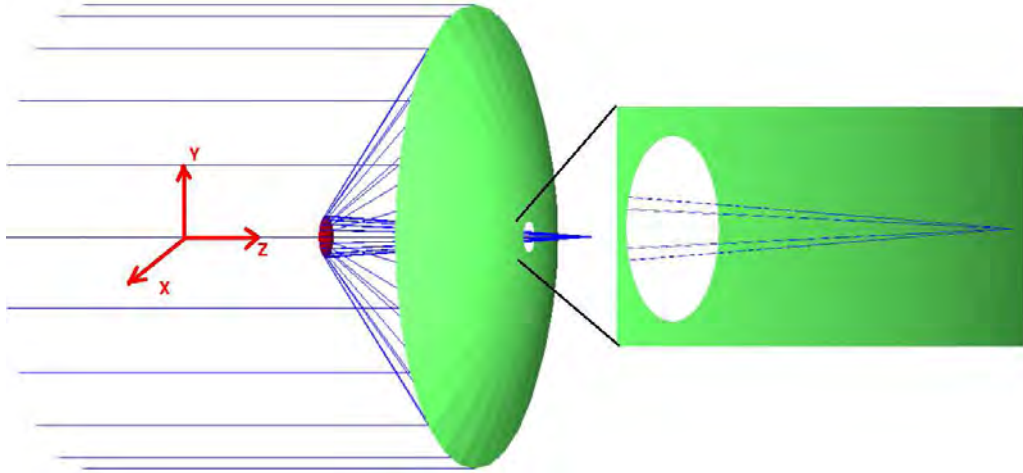


Figura 1.11: Espejo secundario sin rotar

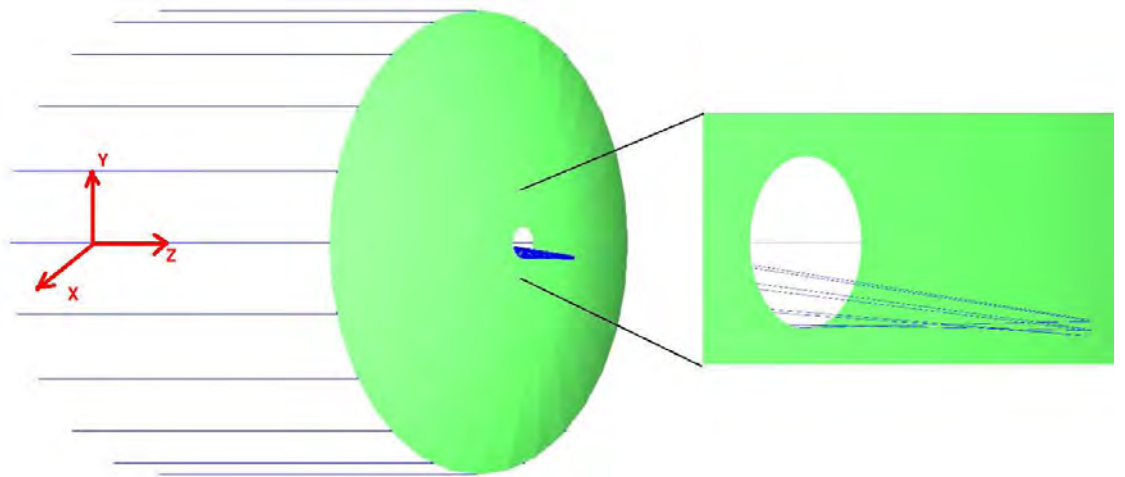


Figura 1.12: Espejo secundario rotado -1.95 grados

# Análisis Electromagnético

---

La característica principal de un radiotelescopio es recibir emisiones electromagnéticas provenientes del espacio exterior. Entonces para saber las características electromagnéticas, es necesario someterlo a un análisis de este tipo.

## 2.1. Análisis de un reflector parabólico

El objetivo principal de este análisis es saber la magnitud y la dirección de los campos radiados por un reflector parabólico.

### 2.1.1. Modelado de una antena

Supongamos una cierta región  $V$  en la que se localizan ciertas fuentes eléctricas y fuentes magnéticas. Si encerramos con una superficie esta región y evaluamos el flujo de potencia, entonces tendremos dos casos.

1. El flujo neto a través de la superficie es igual a cero
2. El flujo neto a través de la superficie es diferente de cero

El primer caso nos indica claramente que nuestra fuente no tiene ninguna manifestación. Mientras que en el segundo caso encontramos que el flujo es diferente de cero y por lo tanto esta entrando o saliendo energía, a este fenómeno se le denomina *radiación* y también podemos encontrar dos casos.

- a. El flujo neto a través de la superficie es menor que cero
- b. El flujo neto a través de la superficie es mayor que cero



Para el caso  $a$  nos damos cuenta que la radiación esta entrando y este fenómeno es el mismo que se presenta en una *antena receptora*. Mientras que para el caso  $b$  nos indica que la radiación esta saliendo y tenemos el mismo fenómeno que se presenta en una *antena transmisora*. Así, de acuerdo con lo anterior, podemos modelar un radiotelescopio como un conjunto de cargas encerradas en una superficie, en la cual esta entrando radiación.

Una antena tiene varios parámetros que la caracterizan. Normalmente pensaríamos que la antena funcionando como receptora tiene ciertos parámetros y que la antena funcionando como emisora tiene otros parámetros. La pregunta es la siguiente; ¿Los parámetros de una antena receptora tienen alguna relación con los parámetros de una antena transmisora?. La respuesta es sí, la teoría electromagnética ya ha respondido esa pregunta mediante un teorema, el teorema de reciprocidad.

### 2.1.2. Teorema de reciprocidad

Consideremos dos fuentes eléctricas y magnéticas  $a$  y  $b$  que crean dos conjuntos de campos eléctricos y magnéticos a la misma frecuencia y que se encuentran en un medio lineal e isótropo, como las que se muestran en la figura 2.1. El teorema de reciprocidad, indica que la interacción de los campos emitidos por las fuente  $b$  con las corrientes generadas por la fuente  $a$  es el mismo que la interacción de los campos emitidos por la fuente  $a$  con las corrientes de la fuente  $b$ . [6] Matemáticamente esto es equivalente a escribir

$$\int_V \vec{E}_b \cdot \vec{J}_a dV = \int_V \vec{E}_a \cdot \vec{J}_b dV \quad (2.1)$$

Entonces por el teorema de reciprocidad, sabemos que los parámetros de emisión son iguales de los parámetros de recepción. Por lo tanto bastará solo con calcular los parámetros de emisión, para saber los parámetros de recepción.

### 2.1.3. Campos radiados

El problema fundamental de una antena, es calcular los campos radiados. Específicamente calcular los campos eléctricos y los campos magnéticos radiados. Consideremos una carga que se esta moviendo dentro en un sistema

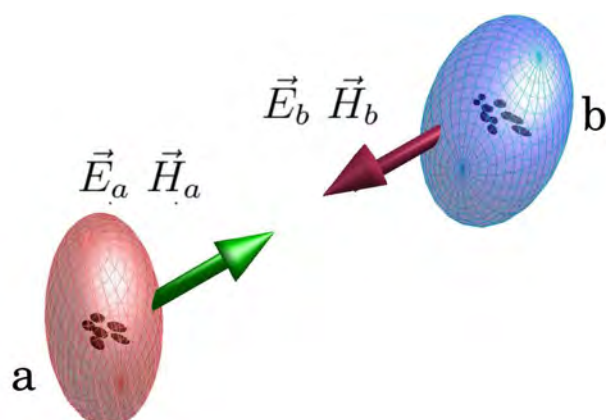


Figura 2.1: Dos fuentes de radiación

inercial y produce un campo radiado que está siendo medido por un observador en el punto  $P$ , dicho campo está compuesto por un campo eléctrico  $\vec{E}$  y un campo magnético  $\vec{H}$ . Esta situación se muestra en la figura 2.2 a) en donde  $\vec{r}$  es la distancia del origen del sistema al punto  $P$ ,  $\vec{r}'$  es el vector que indica la posición de la carga  $q$  y  $\vec{R}$  es la distancia de la carga  $q$  al punto  $P$ . Como la carga se está moviendo, tanto el vector de posición  $\vec{r}'$  y  $\vec{R}$  van a estar cambiando de magnitud. Ahora si consideramos una densidad de carga volumétrica  $\rho$  y esta genera una densidad de corriente  $\vec{J}$ . Ver figura 2.2 b).

### Teorema de Helmholtz

El sentido común y la naturaleza, nos indica que todo aquello que fluye, debe tener una fuente. Matemáticamente esto es equivalente a decir que un campo vectorial tiene una fuente. Definiremos como fuentes de un campo vectorial  $F(\vec{r})$  a su rotacional y denominaremos fuentes escalares a su divergencia. El teorema de Helmholtz establece.

1. Un campo vectorial se puede definir unívocamente si se conocen sus fuentes escalares y vectoriales en todos los puntos  $(x, y, z)$  del espacio. Un campo vectorial puede derivarse de unas funciones potenciales, un campo escalar  $f(\vec{r})$  y un campo vectorial  $\vec{g}(\vec{r})$  a través de las operaciones gradiente y rotacional.

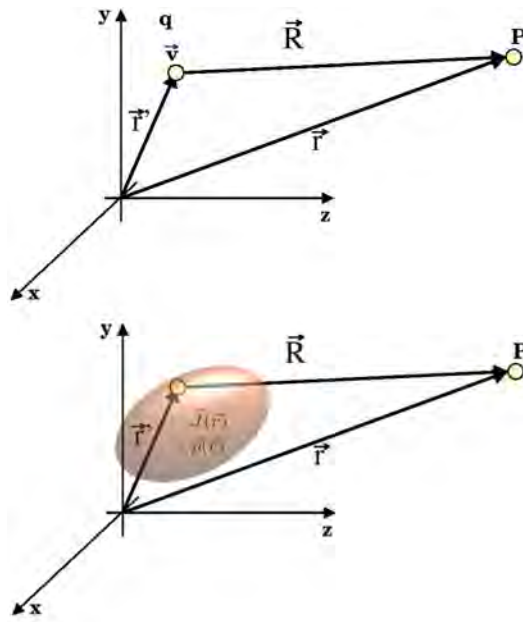


Figura 2.2: a) Carga puntual moviéndose. b) Densidad de carga

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla f(\vec{r}) + \nabla \times \vec{g}(\vec{r}) \quad (2.2)$$

2. Los potenciales pueden expresarse en función de las fuentes del campo como

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dv \quad (2.3)$$

$$g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\rho}(\vec{r}')}{R} dv \quad (2.4)$$

donde  $\vec{R} = |\vec{r} - \vec{r}'|$  y  $V$  contienen a todos los puntos del campo y en particular al campo de observación  $\vec{R} = \vec{0}$  [7]

De acuerdo con el Teorema de Helmholtz los campos radiados por una antena pueden ser expresados mediante su potencial vector  $\vec{A}$  y su potencial escalar  $\phi$ , esto es

$$\vec{E} = -\nabla\vec{\phi} - i\omega\vec{A} \quad (2.5)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.6)$$

Los potenciales que satisfacen las ecuaciones (2.5) y (2.6) deben tener la forma de las ecuaciones (2.3) y (2.4), las cuales son

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-ikR}}{R} dV \quad (2.7)$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{e^{-ikR}}{R} dV \quad (2.8)$$

Donde al término

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{(-ik|\vec{r}-\vec{r}'|)}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

se le denomina función de Green. Así el vector potencial  $\vec{A}$  y el escalar potencial  $\phi$  pueden ser puestas en términos de las funciones de Green.

$$\vec{A} = \mu \int_V G(|\vec{r}-\vec{r}'|) \vec{J}(\vec{r}') dV \quad (2.9)$$

$$\vec{\phi} = \frac{1}{\epsilon} \int_V G(|\vec{r}-\vec{r}'|) \rho(\vec{r}') dV \quad (2.10)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.9) y (2.10) en las ecuaciones (2.5) y (2.6) tenemos

$$\vec{E} = -\nabla \left[ \frac{1}{\epsilon} \int_V \rho(\vec{r}') G(|\vec{r}-\vec{r}'|) dV \right] - i\omega \left[ \mu \int_V \vec{J}(\vec{r}') G(|\vec{r}-\vec{r}'|) dV \right]$$

$$\vec{B} = \nabla \times \left[ \mu \int_V \vec{J}(\vec{r}') G(|\vec{r}-\vec{r}'|) dV \right]$$

Desarrollando estas expresiones y considerando que  $\vec{B} = \mu\vec{H}$  se llega a

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \int_V \left[ \hat{R} \cdot \vec{\rho}(\vec{r}') \right] \frac{G(|\vec{r}-\vec{r}'|)}{R} dV + \frac{ik}{\epsilon} \int_V \left[ \hat{R} \cdot \vec{\rho}(\vec{r}') - \sqrt{\mu\epsilon} \vec{J}(\vec{r}') \right] G(|\vec{r}-\vec{r}'|) dV \quad (2.11)$$

$$\vec{H} = - \int_V \left[ \vec{J}(\vec{r}) \times \hat{R} \right] \frac{G(|\vec{r} - \vec{r}'|)}{R} dV - ik \int_V \left[ \vec{J}(\vec{r}) \times \vec{R} \right] G(|\vec{r} - \vec{r}'|) dV \quad (2.12)$$

Al primer termino de la ecuación (2.11) se le denomina **campo eléctrico inducido**  $\vec{E}_{Ind}$  y al segundo término se le llama **campo eléctrico radiado**  $\vec{E}_{Rad}$ . De igual manera al primer término de la ecuación (2.12) se le denomina **campo magnético inducido**  $\vec{H}_{Ind}$ . Por otro lado, al segundo término se le llama **campo magnético radiado**  $\vec{H}_{Rad}$ . De las ecuaciones (2.11) y (2.12) podemos obtener las siguientes conclusiones:

1. Cuando  $R \rightarrow \infty$  los campos inducidos  $\vec{E}_{Ind}$  y  $\vec{H}_{Ind}$  tienden a cero.
2. A esta región se le denomina *zona lejana* y es la zona en donde más interés se tiene de una antena

Entonces solo hay que calcular los campos  $\vec{E}_{Rad}$  y  $\vec{H}_{Rad}$

$$\vec{E}_{Rad} = \frac{ik}{4\pi\epsilon} \int_V \left[ \hat{R} \cdot \vec{\rho}(\vec{r}) - \sqrt{\mu\epsilon} \vec{J}(\vec{r}) \right] \frac{e^{(-ik|\vec{r}-\vec{r}'|)}}{R} dV \quad (2.13)$$

$$\vec{H}_{rad} = -\frac{ik}{4\pi} \int_V \left[ \vec{J}(\vec{r}) \times \vec{R} \right] \frac{e^{(-ik|\vec{r}-\vec{r}'|)}}{R} dV \quad (2.14)$$

Para el análisis en la zona lejana consideremos la figura 2.4, como el punto en donde esta el observador esta muy lejos, entonces en el lugar cerca del origen el vector  $\vec{R}$  y el vector  $\vec{r}$  tienden a ser paralelos,

$$\vec{R} = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(r^2 - 2\vec{r}\vec{r}' + r'^2)}$$

desarrollando el término anterior en serie de *Taylor* y tomando los dos primeros términos

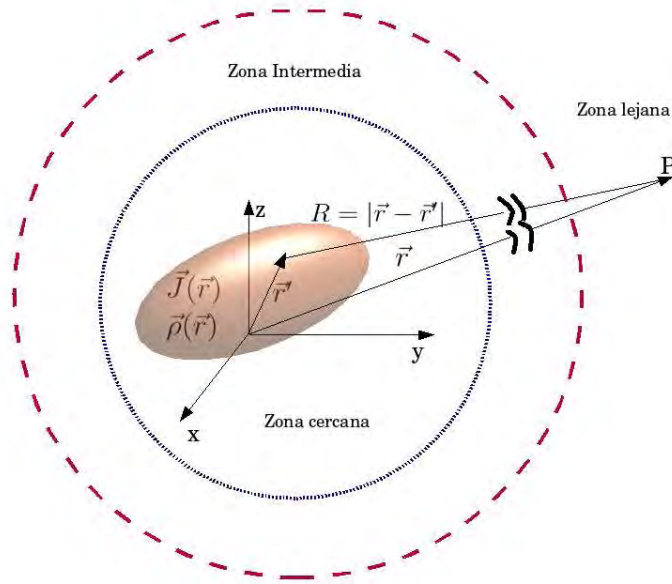


Figura 2.3: Zonas de radiación de una antena

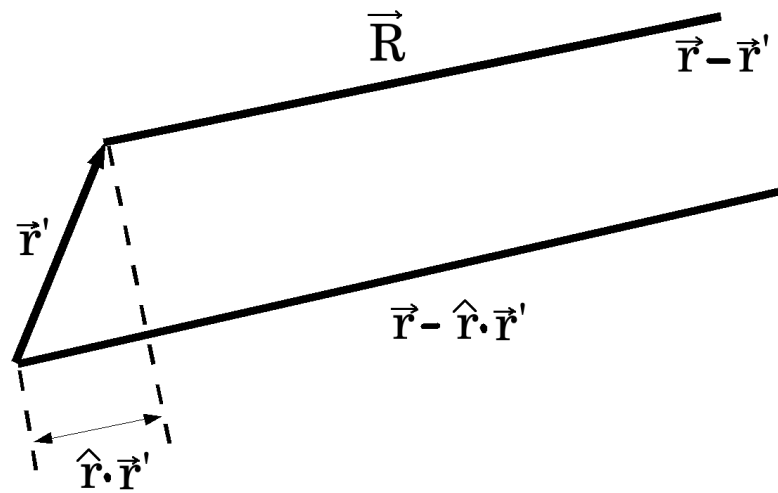


Figura 2.4: Aproximación para la zona lejana

$$\sqrt{(r^2 - 2\vec{r}\vec{r}' + r'^2)} \approx r \left(1 - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right)$$

$$\sqrt{(r^2 - 2\vec{r}\vec{r}' + r'^2)} \approx \vec{r} - \hat{r} \cdot \vec{r}'$$

$$\vec{R} \approx \vec{r} - \hat{r} \cdot \vec{r}' \quad (2.15)$$

Sustituyendo esta aproximación solamente en el argumento de las exponenciales que se encuentran en las funciones de Green de las ecuaciones ( 2.13) y ( 2.14) podemos poner los campos radiados en términos de  $\hat{r}$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-ikR}}{4\pi} \approx \frac{e^{-ikr}}{4\pi} e^{ik\hat{r}\cdot\vec{r}'} \quad (2.16)$$

Ahora tenemos los campos radiados en términos de  $\hat{r}$

$$\vec{E}_{Rad} = \frac{i\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \hat{r} \times \left[ \vec{r}' \times \int_V \vec{J}(\vec{r}') e^{ik\hat{r}\cdot\vec{r}'} dV \right] \quad (2.17)$$

$$\vec{H}_{rad} = \frac{-ik}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \hat{r} \times \left[ \int_V \vec{J}(\vec{r}') e^{ik\hat{r}\cdot\vec{r}'} dV \right] \quad (2.18)$$

Ahora reordenando términos y simplificando, podemos poner los campos radiados  $\vec{E}_{rad}$  y  $\vec{H}_{rad}$  en términos del vector potencial  $\vec{A}$  (ecuación 2.7).

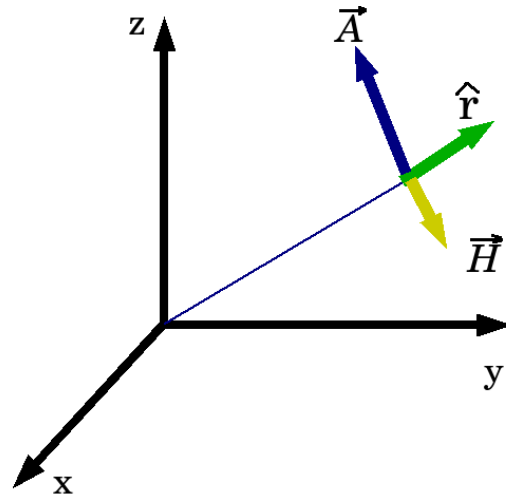
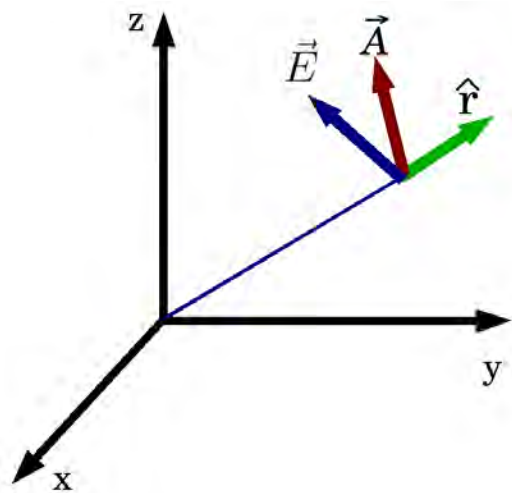
$$\vec{E}_{rad} = i\omega\hat{r} \times (\hat{r}) \times \vec{A} \quad (2.19)$$

$$\vec{H}_{rad} = -i\frac{\omega}{\eta}\hat{r} \times \vec{A} \quad (2.20)$$

Donde  $\eta$  es la *impedancia intrínseca* o *impedancia característica del espacio libre*. De la ecuación (2.20) podemos ver que el producto cruz del vector  $\hat{r}$  y el potencial  $\vec{A}$  dan como resultado el vector intensidad de campo magnético radiado. La representación geométrica se muestra en la figura 2.5.

Para la ecuación (2.19), el campo eléctrico radiado  $\vec{E}_{rad}$ , desarrollamos el doble producto cruz, la cual tiene la representación gráfica mostrada en la figura 2.6.

Ahora cambiando nuestro sistema de referencia cartesiano a un sistema de referencia esférico, como el que se muestra en la figura 2.7, desarrollamos el producto cruz, así como el doble producto cruz entre los vectores  $\hat{r}$  y  $\vec{A}$ .

Figura 2.5: Representación geométrica de  $\hat{r} \times \vec{A}$ Figura 2.6: Representación geométrica de  $\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{A})$



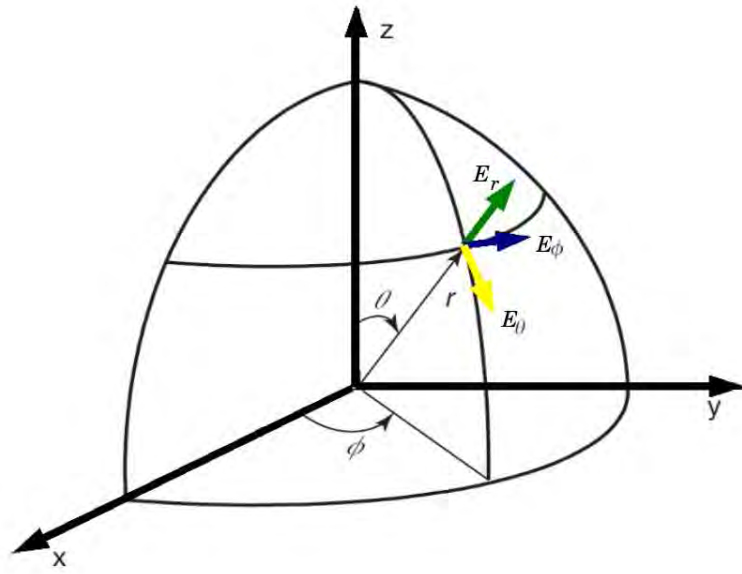


Figura 2.7: Sistema de coordenadas esféricas

$$\hat{r} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\phi \\ 1 & 0 & 0 \\ A_r & A_\theta & A_\phi \end{vmatrix}$$

$$\hat{r} \times \vec{A} = \hat{e}_r \left[ (0)(A_\phi) - (0)(A_\theta) \right] - \hat{e}_\theta \left[ (1)(A_\phi) - (0)(A_r) \right] + \hat{e}_\phi \left[ (1)(A_\theta) - (0)(A_r) \right]$$

$$\hat{r} \times \vec{A} = \hat{e}_r 0 - \hat{e}_\theta A_\phi + \hat{e}_\phi A_\theta \quad (2.21)$$

Ahora el doble producto cruz es

$$\vec{r} \times (\hat{r} \times \vec{A}) = \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\phi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -A_\phi & A_\theta \end{vmatrix}$$

$$\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{A}) = \hat{e}_r \left[ (0)(A_\theta) - (0)(A_\phi) \right] - \hat{e}_\theta \left[ (1)(A_\theta) - (0)(0) \right] + \hat{e}_\phi \left[ (1)(A_\phi) - (0)(0) \right]$$

$$\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{A}) = \hat{e}_r(0) - \hat{e}_\theta(A_\theta) + \hat{e}_\phi(A_\phi) \quad (2.22)$$

sustituyendo la ecuación (2.22) en la (2.19) tenemos

$$\vec{E}_{rad} = \hat{e}_r(0) - \hat{e}_\theta(i\omega A_\theta) - (i\omega A_\phi)\hat{e}_\phi \quad (2.23)$$

y sustituyendo la ecuación (2.21) en la (2.20) tenemos

$$\vec{H}_{rad} = \hat{e}_r(0) - \hat{e}_\theta\left(i\frac{\omega}{\eta}A_\theta\right) - \hat{e}_\phi\left(i\frac{\omega}{\eta}A_\phi\right) \quad (2.24)$$

Al término  $\int_V \vec{J}(\vec{r}')e^{ik\hat{r}\cdot\vec{r}'} dV$  del potencial  $\vec{A}$  ecuación (2.7) se le denomina vector de radiación  $\vec{N}$

$$\vec{N} = \int_V \vec{J}(\vec{r}')e^{ik\hat{r}\cdot\vec{r}'} dV \quad (2.25)$$

Así el campo radiado  $\vec{E}_{rad}$  se puede escribir en términos del vector de radiación  $\vec{N} = \hat{e}_r N_r + \hat{e}_\theta N_\theta + \hat{e}_\phi N_\phi$

$$\vec{E}_{rad1} = \hat{e}_r(0)N_r - \hat{e}_\theta\left(i\omega\mu\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}\right)N_\theta - \hat{e}_\phi i\omega\mu\left(\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}\right)N_\phi \quad (2.26)$$

y el campo magnético está dado por

$$\vec{H}_{rad1} = \hat{e}_r(0)N_r - \hat{e}_\theta\left(i\omega\mu\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}\right)N_\theta - \hat{e}_\phi i\omega\mu\left(\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}\right)N_\phi \quad (2.27)$$

Debido a que estos campos están producidos por corrientes eléctricas los denominamos  $\vec{E}_{rad1}$  y  $\vec{H}_{rad1}$ . Ahora para corrientes magnéticas se realiza un análisis idéntico al anterior y se obtiene un vector potencial  $\vec{F}$  dado por:

$$\vec{F} = \int_V \frac{\epsilon\vec{M}e^{-ikR}}{a\pi R} \quad (2.28)$$

y al término  $\vec{L} = \int_V \vec{M}(\vec{r}')e^{ik\hat{r}\cdot\vec{r}'} dV$  se le denomina vector de radiación  $\vec{L}$

$$\vec{L} = \int_V \vec{M}(\vec{r}')e^{ik\hat{r}\cdot\vec{r}'} dV \quad (2.29)$$

de la misma manera se puede poner el potencial  $\vec{F}$  en términos de un vector de magnetización  $\vec{L}$

$$\vec{F} = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \vec{L} \quad (2.30)$$

donde

$$\vec{L} = \int_V \vec{M}(\vec{r}) e^{ik\hat{r}\cdot\vec{r}} dV \quad (2.31)$$

y podemos poner los campos  $\vec{E}_{Rad2}$  y  $\vec{H}_{Rad}$  en función de las componentes del vector de radiación  $\vec{L}$

$$\vec{H}_{\theta 2} = \hat{e}_r(0)L_r - \hat{e}_\theta\left(i\frac{\omega\epsilon}{4\pi}\frac{e^{-ikr}}{r}L_\theta\right) - \hat{e}_\phi\left(i\frac{\omega\epsilon}{4\pi}\frac{e^{-ikr}}{r}L_\phi\right) \quad (2.32)$$

$$\vec{E}_{\theta 2} = \hat{e}_r(0)L_r - \hat{e}_\theta\left(\frac{i}{2}\frac{e^{-ikr}}{r}L_\phi\right) + \hat{e}_\phi\left(\frac{i}{2}\frac{e^{-ikr}}{r}L_\theta\right) \quad (2.33)$$

Así, para el campo eléctrico radiado total tenemos

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_{rad1} + \vec{E}_{rad2} \quad (2.34)$$

$$\vec{E}_{total} = \hat{e}_r(0) - \hat{e}_\theta\frac{i}{2}\frac{e^{-ikr}}{r}\left[\eta N_\theta + L_\phi\right] - \hat{e}_\phi\frac{i}{2}\frac{e^{-ikr}}{r}\left[\eta N_\phi - L_\theta\right] \quad (2.35)$$

De los conocimientos básicos de la teoría electromagnética se sabe que el campo eléctrico esta relacionado con el campo magnético mediante la impedancia de onda [8]

$$\vec{H} = \frac{\vec{E}}{\eta} \quad (2.36)$$

Aplicado a nuestro caso tenemos

$$\vec{H}_{total} = \vec{H}_{rad1} + \vec{H}_{rad2} \quad (2.37)$$

$$\vec{H}_{total} = \hat{e}_r(0) + \hat{e}_\theta\frac{E_\theta}{\eta} - \hat{e}_\phi\frac{E_\phi}{\eta} \quad (2.38)$$

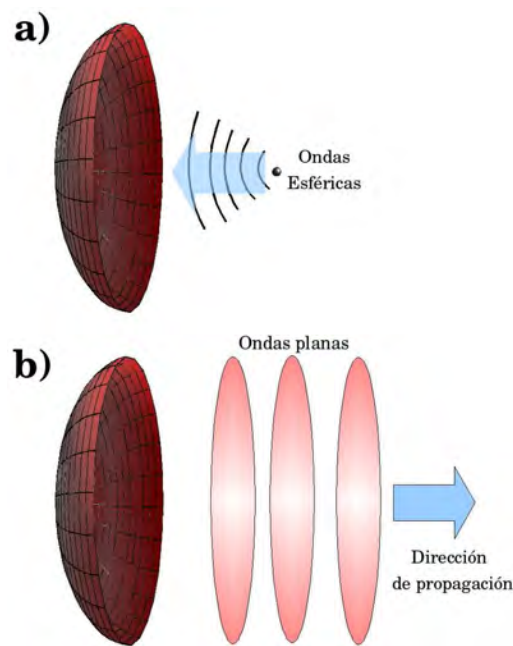


Figura 2.8: a) Ondas esféricas emergiendo del foco b) Ondas planas reflejadas

#### 2.1.4. Método de la apertura

Ahora que ya conocemos con detalle los campos radiados por una antena, vamos a particularizar el análisis para una antena parabólica, consideremos que en el foco del reflector parabólico se encuentra un alimentador puntual, el frente de ondas que emite el alimentador se puede considerar esférico. Esta onda se desplaza desde el foco hasta el reflector parabólico tal como se muestra en la figura 2.8 a). Después de que las ondas se reflejan en el reflector parabólico, se comportan como ondas planas, esta situación se muestra en la figura 2.8 b). Esto es equivalente a considerar al reflector parabólico como una apertura circular. Entonces considerando que sobre la apertura se está radiando un campo eléctrico y un campo magnético que están relacionados mediante una impedancia de onda  $Z_0$ .

#### 2.1.5. Teorema de equivalencia

Consideremos el reflector parabólico que se muestra en la figura 2.9, el teorema de equivalencia nos permiten sustituir los campos que hay sobre esta

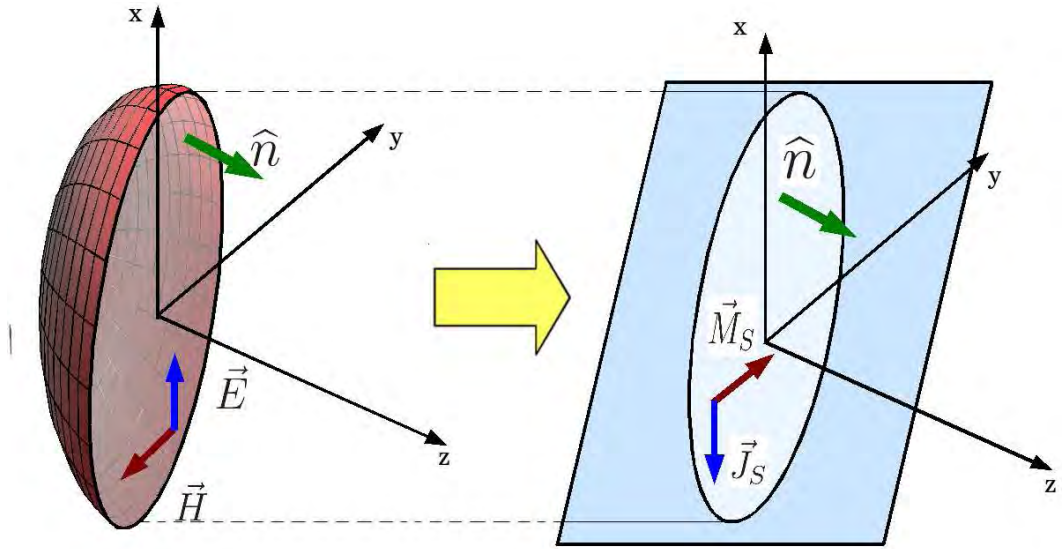


Figura 2.9: Apertura equivalente del reflector parabólico

superficie por los campos que se generan en una apertura. [6]

Si consideramos que tenemos una onda electromagnética, cuyo campo eléctrico tiene componente en el eje  $x$ , entonces el campo electromagnético tiene componente en el eje  $y$  y considerando que la onda electromagnética se propaga en la dirección  $z$ , la densidad de corriente  $\vec{J}_s$  que existe en la apertura equivalente esta en función del campo eléctrico  $\vec{E}_s$  del volumen del reflector.

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H} \quad (2.39)$$

$$\vec{J}_s = \frac{E_x}{Z_0} [\hat{z} \times \hat{y}] \quad (2.40)$$

$$\vec{J}_s = -\frac{E_x}{Z_0} (\hat{x}) \quad (2.41)$$

Mientras que la corriente magnética  $\vec{M}_s$  esta en función del campo magnético  $\vec{H}$  que ilumina la apertura equivalente.

$$\vec{M}_S = -\hat{n} \times \vec{E} \quad (2.42)$$

$$\vec{M}_S = -E_x \left[ -\hat{z} \times \hat{x} \right] \quad (2.43)$$

$$\vec{M}_S = -E_x(\hat{y}) \quad (2.44)$$

Las ecuaciones (2.41) y (2.44) se sustituyen en las ecuaciones que definen a los vectores de radiación, ecuaciones (2.25) y (2.29).

$$N_x = \int_S -\frac{E_x}{Z_0} e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} dx dy \quad (2.45)$$

$$L_y = \int_S -E_x e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} dx dy \quad (2.46)$$

Los campos eléctricos radiados estan en términos de las componentes en coordenadas esféricas los cuales son:

$$N_\theta = N_x \cos\theta \cos\phi \quad (2.47)$$

$$N_\phi = -N_x \sin\phi \quad (2.48)$$

$$L_\theta = L_y \cos\theta \sin\phi \quad (2.49)$$

$$L_\phi = L_y \cos\phi \quad (2.50)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.47), (2.48), (2.49) y (2.50) en la ecuación (2.35).

$$E_{total} = 0 + E_\theta + E_\phi \quad (2.51)$$

$$E_{total} = -\frac{i}{2\lambda} \frac{e^{-ikr}}{r} \left[ \left( \eta(N_x \cos\theta \cos\phi) + L_y \cos\phi \right) - \left( \eta(N_x \cos\theta \cos\phi) + L_y \cos\phi \right) \right] \quad (2.52)$$

Ahora sustituyendo las ecuación (2.45) y la ecuación (2.46) en la ecuación (2.52) y separando esta expresión en sus componentes vectoriales tenemos

$$E_r = 0 \quad (2.53)$$

$$E_\theta = \frac{i}{2\lambda} \frac{e^{-ikr}}{r} \cos\phi \left( \frac{\eta}{Z_0} \cos\theta + 1 \right) \int_S E_x e^{ik_x x} e^{ik_y y} dx dy \quad (2.54)$$

$$E_\phi = -\frac{i}{2\lambda} \frac{e^{-ikr}}{r} \operatorname{sen}\phi \left( \frac{\eta}{Z_0} \cos\theta + 1 \right) \int_S E_x e^{ik_x x} e^{ik_y y} dx dy \quad (2.55)$$

La integral a resolverse depende de la geometría de la apertura, para nuestro caso es una apertura circular con radio  $a$ , así las ecuaciones (2.53), (2.54) y la (2.55) se convierten en

$$E_r = 0 \quad (2.56)$$

$$E_\theta = \frac{i}{2\lambda} \frac{e^{-ikr}}{r} \cos\phi \left( \frac{\eta}{Z_0} \cos\theta + 1 \right) \int_0^a \int_0^{2\pi} E_x e^{ik\rho \operatorname{sen}\theta \cos(\phi-\phi')} \rho d\phi d\rho \quad (2.57)$$

$$E_\phi = -\frac{i}{2\lambda} \frac{e^{-ikr}}{r} \operatorname{sen}\phi \left( \frac{\eta}{Z_0} \cos\theta + 1 \right) \int_0^a \int_0^{2\pi} E_x e^{ik\rho \operatorname{sen}\theta \cos(\phi-\phi')} \rho d\phi d\rho \quad (2.58)$$

La solución de la integral exponencial compleja esta dada por

$$\int_0^{2\pi} e^{(iz \cos x)} dx = 2\pi J_0(z) \quad (2.59)$$

Donde  $J_0$  es la función de Bessel de orden cero, por lo tanto la segunda integral se resuelve utilizando

$$\int_0^{z'} z' J_0(z') dz' = z J_1(z) \quad (2.60)$$

Finalmente tenemos los campos eléctricos radiados

$$E_r = 0 \quad (2.61)$$

$$E_\theta = \frac{i}{2\lambda r} (\cos\theta + 1) \operatorname{sen}\phi \left( \pi a^2 E_0 2 \frac{J_1(u)}{u} \right) \quad (2.62)$$

$$E_\phi = \frac{i}{2\lambda r}(1 + \cos\theta)\cos\phi \left( \pi a^2 E_0 2 \frac{J_1(u)}{u} \right) \quad (2.63)$$

### 2.1.6. Densidad de potencia radiada

Podemos ver que los campos radiados son vectores cuyas componentes son complejas, al elevar al cuadrado cada una de sus componentes y dividiendo esta expresión entre la impedancia intrínseca del medio  $\eta$ , se obtiene la **densidad de potencia radiada** [6]

$$\rho(\theta, \phi) = \frac{E_r^2 + E_\theta^2 + E_\phi^2}{\eta} \quad (2.64)$$

$$\rho(\theta, \phi) = \frac{(0)^2 + \left[ \frac{i}{2\lambda r}(\cos\theta + 1)\sin\phi \left( \pi a^2 E_0 2 \frac{J_1(u)}{u} \right) \right]^2 + \left[ \frac{i}{2\lambda r}(1 + \cos\theta)\cos\phi \left( \pi a^2 E_0 2 \frac{J_1(u)}{u} \right) \right]^2}{\eta}$$

$$\rho(\theta, \phi) = \frac{4\pi^2 a^4 E_0^2}{\eta \lambda^2 r^2} \cos^4 \frac{\theta}{2} \left| \frac{J_1(k a \sin\theta)}{k a \sin\theta} \right|^2 \quad (2.65)$$

### 2.1.7. Intensidad de radiación

La densidad de potencia radiada esta relacionada con la **intensidad de radiación** mediante la siguiente expresión [6]

$$\rho(\theta, \phi) = \frac{K(\theta, \phi)}{r^2} \quad (2.66)$$

resolviendo para  $K$  tenemos

$$K(\theta, \phi) = \rho(\theta, \phi)r^2 \quad (2.67)$$

Ahora sustituyendo la ecuación (2.65) en la (2.67)

$$K = \frac{4\pi^4 a^2 E_0^2}{\eta \lambda^2} \cos^4 \frac{\theta}{2} \left| \frac{J_1(k a \sin\theta)}{k a \sin\theta} \right|^2 \quad (2.68)$$



Si hacemos un cambio de variable tenemos

$$u = k a \operatorname{sen} \theta \quad (2.69)$$

entonces tenemos

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{u}{ka} \quad (2.70)$$

por otro lado tenemos

$$\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)$$

$$\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2$$

$$\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{4} + (2)\frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{2} + \frac{\cos^2\theta}{4}$$

$$\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\cos\theta}{2} + \frac{\cos^2\theta}{4}$$

$$\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\cos\theta}{2} + \frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{4}$$

$$\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}{2} + \frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{4} \quad (2.71)$$

sustituyendo la ecuación (2.70) en la ecuación (2.71) tenemos

$$\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{1-\left(\frac{u}{ka}\right)^2}}{2} + \left(\frac{1-\left(\frac{u}{ka}\right)^2}{4}\right)$$

$$\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{1-\left(\frac{u}{ka}\right)^2}}{2} + \frac{1}{4} - \left(\frac{\left(\frac{u}{ka}\right)^2}{4}\right)$$

$$\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2}{4} + \frac{\sqrt{1-\left(\frac{u}{ka}\right)^2}}{2} - \left(\frac{\left(\frac{u}{ka}\right)^2}{4}\right)$$

$$\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-\left(\frac{u}{ka}\right)^2}}{2} - \left(\frac{\left(\frac{u}{ka}\right)^2}{4}\right)$$

$$\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{u}{ka}\right)^2}\right) - \frac{\frac{u^2}{(ka)^2}}{\frac{1}{4}}$$

$$\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{u^2}{(ka)^2}} - \frac{u^2}{2(ka)^2}\right) \quad (2.72)$$

Finalmente sustituyendo la ecuación (2.72) en la ecuación (2.68) tenemos

$$K = \frac{4\pi^2 a^4 E_0^2}{2\eta\lambda^2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{u^2}{(ka)^2}} - \frac{u^2}{2(ka)^2}\right] \left|\frac{J_1(u)}{u}\right|^2 \quad (2.73)$$

Para nuestro caso tenemos que el radio del reflector parabólico es de  $a = 2.5$  m, y la frecuencia a observar es de  $\nu = 43$  GHz, y la impedancia intrínseca del espacio libre es  $\eta = 120\pi\Omega \approx 377\Omega$  [8]

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \times 10^8 \frac{m}{s}}{43 \times 10^9 Hz} = 0.006976m \quad (2.74)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.006976m} = 900.68 \frac{rad}{m} \quad (2.75)$$

$$ka = (2.5m)(900.68 \frac{rad}{m}) = 2251.7rad \quad (2.76)$$

Sustituyendo estos valores numéricos en la ecuación (2.73) y considerando que la amplitud del campo eléctrico radiado por el alimentador es  $E = 1 \frac{V}{m}$ , tenemos

$$K = \frac{4\pi^2(2.5)^4(1)^2}{(2)(377)(0.006976)^2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{u^2}{(2251.7)^2}} - \frac{u^2}{2(2251.7)^2}\right] \left|\frac{J_1(u)}{u}\right|^2 \quad (2.77)$$

$$K = 42027.6862 \left[1 + \sqrt{1 - \frac{u^2}{(2251.7)^2}} - \frac{u^2}{10140305.78}\right] \left|\frac{J_1(u)}{u}\right|^2 \quad (2.78)$$

La intensidad de radiación es la potencia radiada por unidad de ángulos sólido y tiene como unidades  $\frac{watts}{steradian}$ . Como podemos ver en la ecuación (2.78), no aparece el término que relacione la distancia a la que se encuentra el observador, esto nos da como consecuencia que la intensidad de radiación  $K$  sea

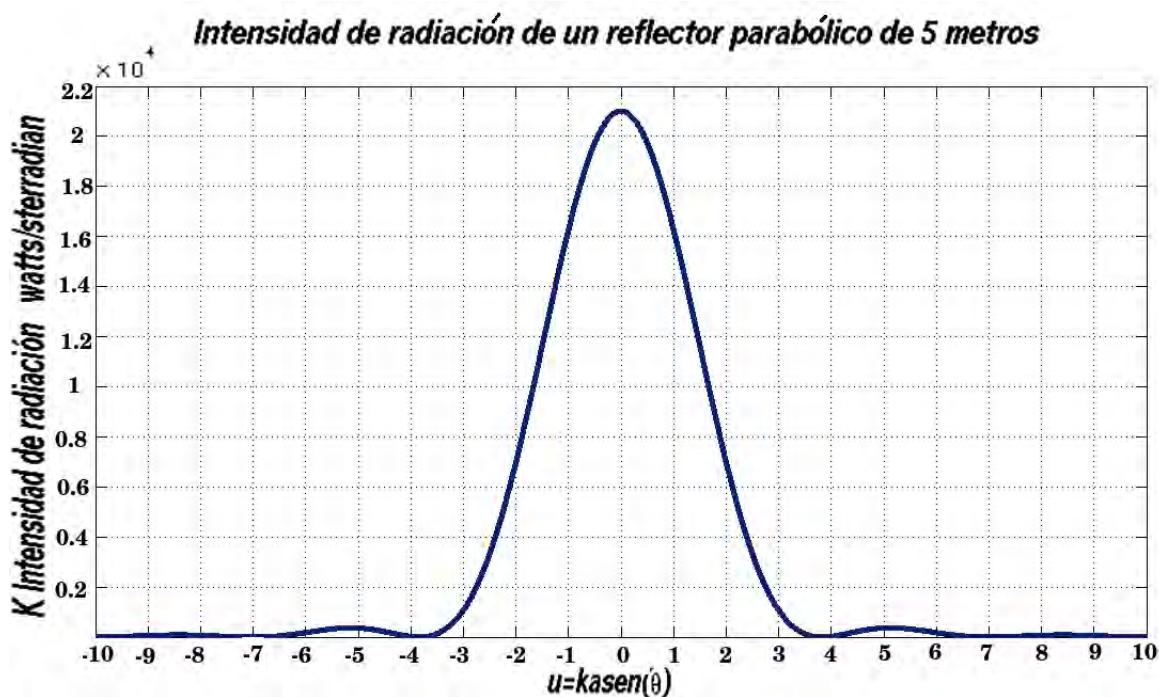


Figura 2.10: Intensidad de radiación en escala lineal

un parámetro independiente de la distancia entre la antena y el observador. La figura 2.10 muestra la gráfica de la intensidad de radiación, mientras que la figura 2.11 muestra la gráfica de la intensidad de radiación normalizada y finalmente la figura 2.12 muestra la intensidad de radiación en decibeles.

### 2.1.8. Patrón de radiación de un reflector parabólico

El parámetro más importante de una antena es la distribución espacial de la energía radiada. A la representación gráfica de las propiedades de radiación de una antena a una distancia fija, se le denomina **Patrón de radiación**. La variable a graficarse es la densidad de potencia radiada, ecuación 2.66. Como podemos ver, esta ecuación relaciona la densidad de potencia radiada con la intensidad de radiación. Entonces solo necesitamos proponer una distancia fija para obtener el diagrama de radiación de un reflector parabólico. Por conveniencia proponemos un valor tal que el término constante sea igual a uno, el valor que cumple con esto es  $r = 250m$ , valor

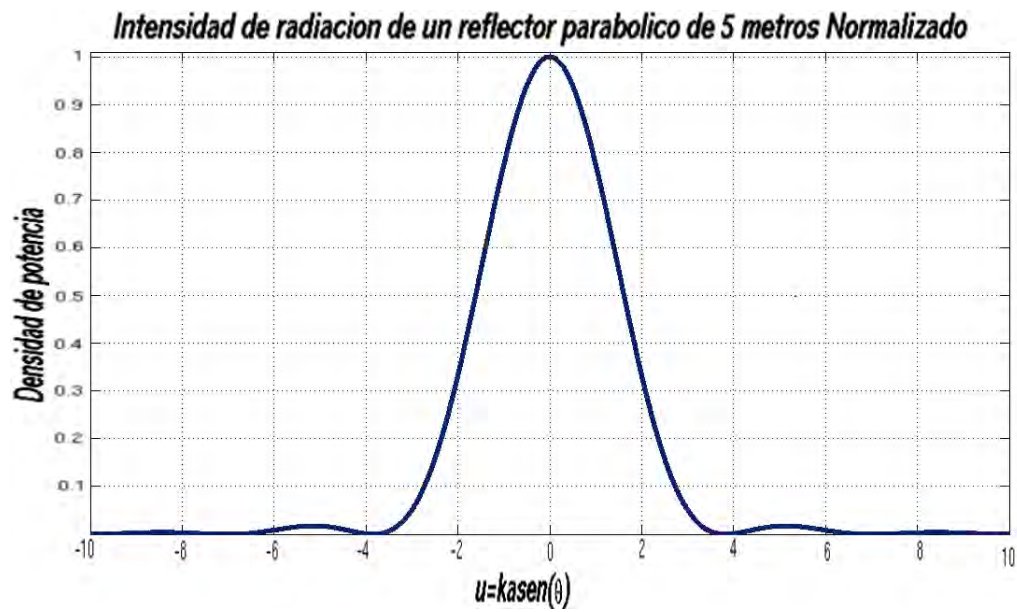


Figura 2.11: Intensidad de radiación normalizada

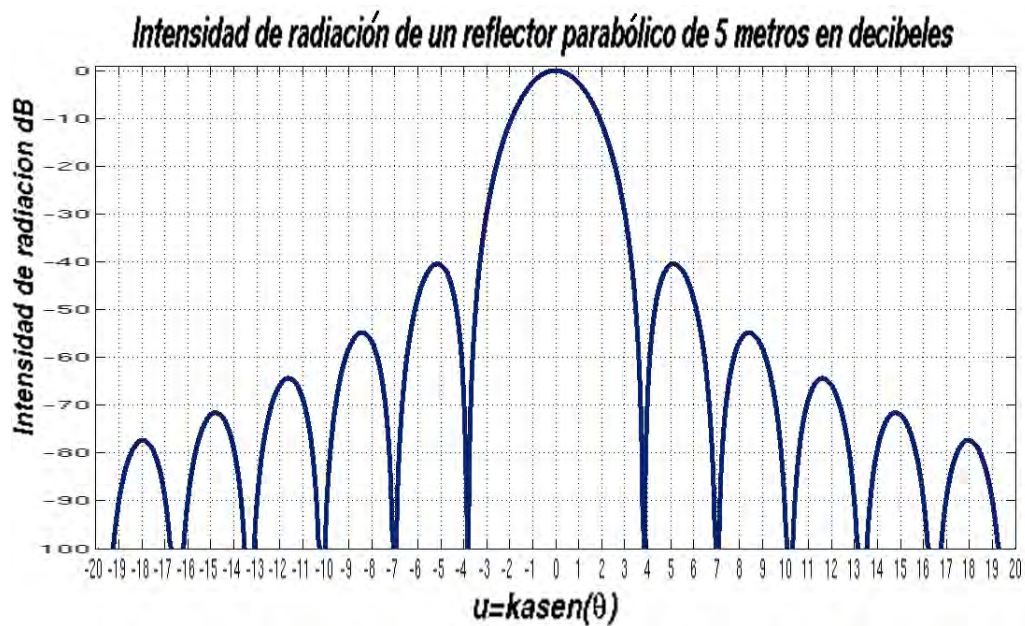


Figura 2.12: Patrón de radiación en decibeles

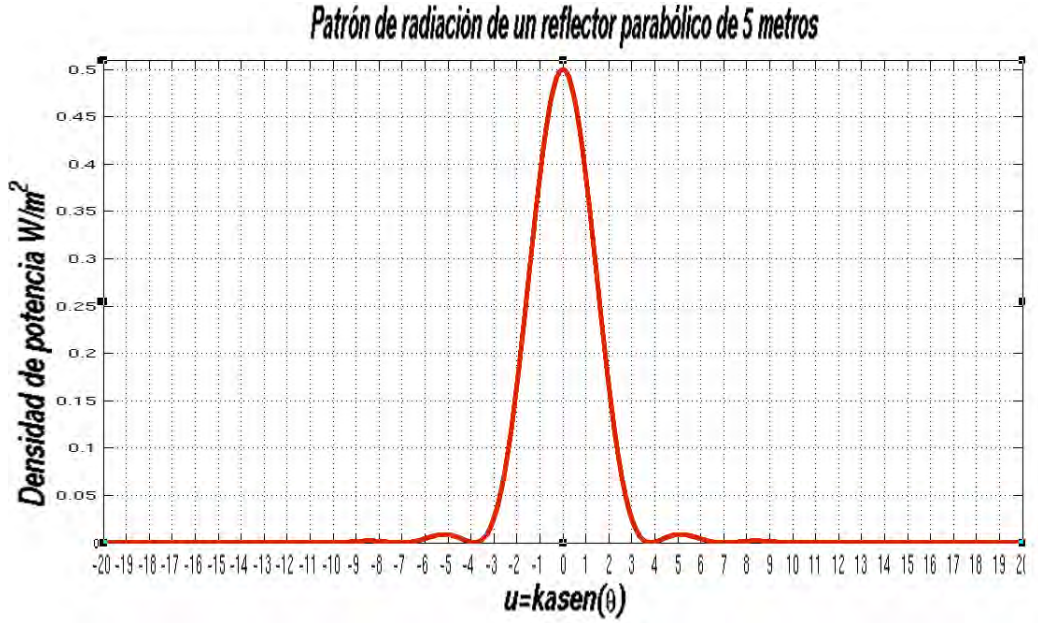


Figura 2.13: Diagrama de radiación en escala lineal

que es válido para el campo lejano. Entonces si graficamos la ecuación (2.78), tenemos la gráfica que se muestra en la figura 2.13

$$\rho = \frac{4\pi^2(2.5)^4(1)^2}{(2)(377)(0.006976)^2(250)^2} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{u^2}{(2251.7)^2} - \frac{u^2}{2(2251.7)^2}} \right] \left| \frac{J_1(u)}{u} \right|^2 \quad (2.79)$$

$$\rho = \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{u^2}{(2251.7)^2} - \frac{u^2}{2(2251.7)^2}} \right] \left| \frac{J_1(u)}{u} \right|^2 \quad (2.80)$$

El valor máximo de la figura 2.13 se obtiene evaluando la ecuación 2.80 en cero y el valor que se obtiene es  $\rho(0) = 0.375 \frac{W}{m^2}$ , ahora dividiendo la ecuación 2.80 entre este valor, obtenemos **la densidad de potencia normalizada**, figura 2.14. Normalmente se acostumbra graficar el diagrama de radiación en decibeles, la expresión a utilizarse es la ecuación (2.81), y el diagrama de radiación en decibeles se muestra en la figura 2.15.

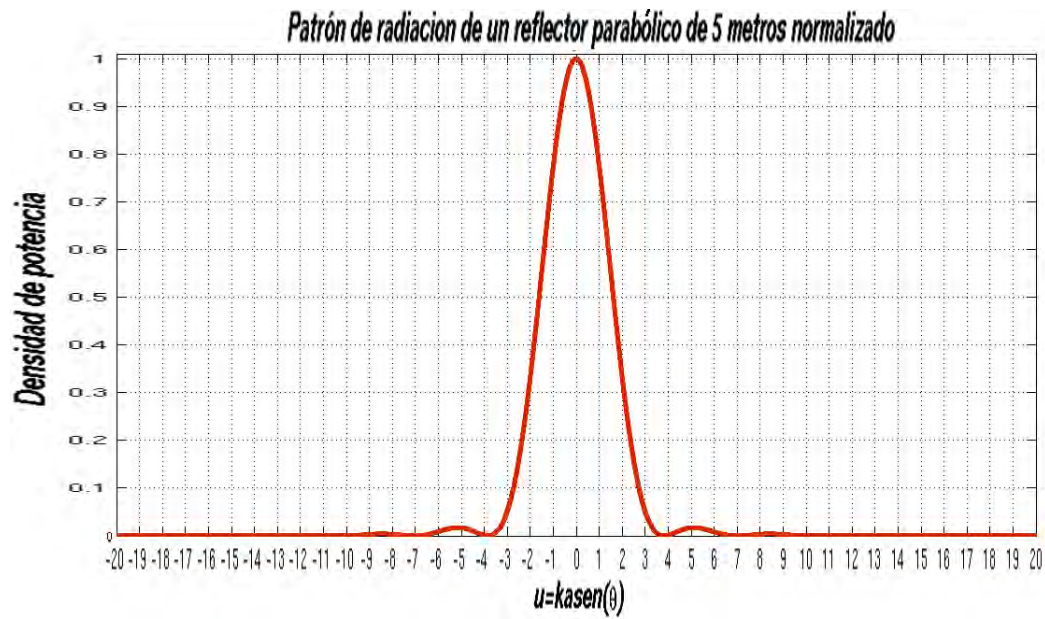


Figura 2.14: Diagrama de radiación normalizado

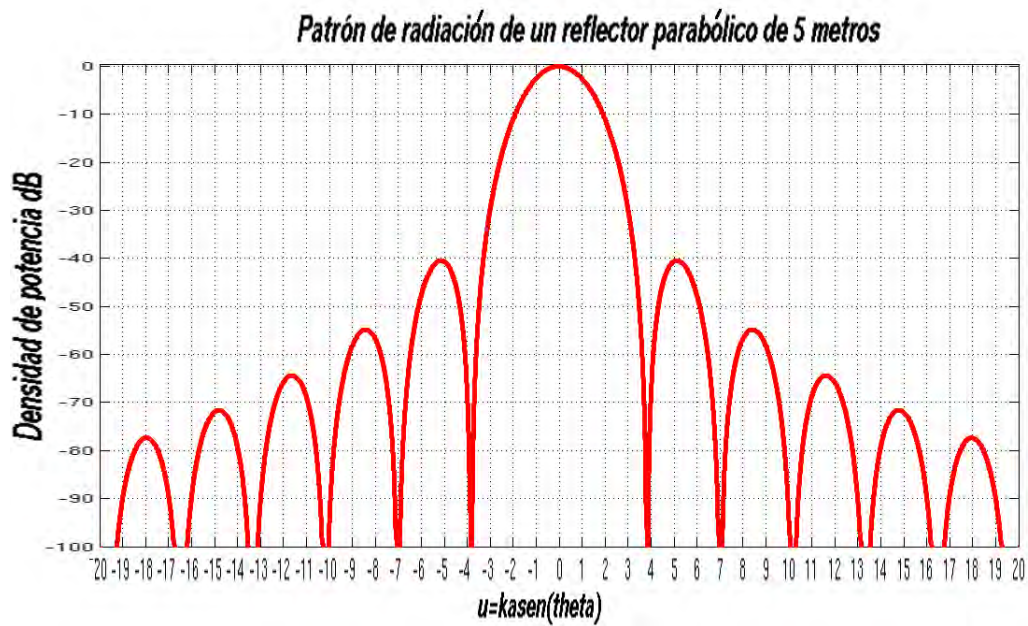


Figura 2.15: Diagrama de radiación en decibeles

$$\rho_{decibels} = 10 \log_{10} \left( \frac{\rho}{\rho_{max}} \right) \quad (2.81)$$

Físicamente esta gráfica es el resultado de la suma de frentes de onda y es simétrica debido a que existe una simetría en la posición del detector.

### 2.1.9. Ancho de lóbulo principal a -3 dB de un reflector parabólico

Los valores correspondientes para los cuales la potencia del lóbulo principal cae a la mitad corresponde a  $3dB$ . En ingeniería este valor es muy importante pues cuando la potencia cae mas de  $3dB$  entonces se considera que la señal ha desaparecido. Los valores correspondientes al ancho de lóbulo a  $-3dB$  se pueden aproximar para un reflector parabólico mediante la siguiente expresión [9]

$$HPBW \approx 67.3^\circ \frac{\lambda}{D} \quad (2.82)$$

Para nuestro caso el ancho de lóbulo a  $-3dB$  es

$$HPBW \approx 67.3^\circ \left( \frac{0.006976m}{5m} \right)$$

$$HPBW \approx 0.09389^\circ$$

## 2.2. Análisis de un arreglo Cassegrain

Ahora que ya obtuvimos el diagrama de radiación de un reflector parabólico, la tarea siguiente es analizar el caso de un arreglo Cassegrain. Siguiendo con el análisis del método de la apertura. Ahora que conocemos los campos radiados de un reflector parabólico, le incorporamos el espejo secundario, el cual genera un bloqueo. Esta situación se muestra en la figura 2.16. La consecuencia directa de este bloqueo es una atenuación en la intensidad de radiación. Entonces los campos radiados son los de un reflector parabólico con radio  $a$  menos los campos bloqueados por el espejo secundario con radio  $b$  y estan dados por

$$E_r = 0 \quad (2.83)$$

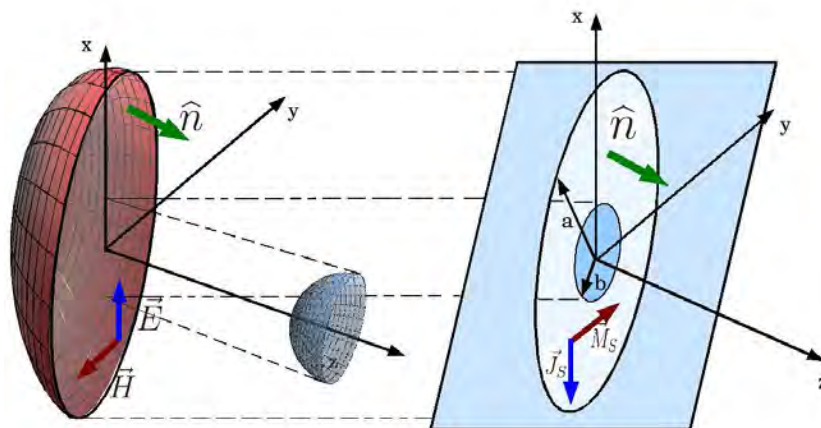


Figura 2.16: Bloqueo que produce el reflector secundario

$$E_{\theta} = \frac{ie^{ikr}}{2\lambda r} (\cos\theta + 1) \phi \pi E_0 \operatorname{sen}\phi \left( 2a^2 \frac{J_1(u_1)}{u_1} - 2b^2 \frac{J_1(u_2)}{u_2} \right) \quad (2.84)$$

$$E_{\theta} = \frac{ie^{ikr}}{2\lambda r} (\cos\theta + 1) \phi \pi E_0 \cos\phi \left( 2a^2 \frac{J_1(u_1)}{u_1} - 2b^2 \frac{J_1(u_2)}{u_2} \right) \quad (2.85)$$

con

$$u_1 = k a \sin\theta \quad (2.86)$$

$$u_2 = k b \sin\theta \quad (2.87)$$

### 2.2.1. Densidad de potencia radiada de un arreglo Cassegrain

De igual manera que en el caso de un reflector parabólico, la densidad de potencia radiada de un arreglo Cassegrain está relacionada con la **intensidad de radiación** mediante la siguiente expresión

$$\rho(\theta, \phi)_{\text{Cassegrain}} = \frac{K_{\text{Cassegrain}}(\theta, \phi)}{r^2} \quad (2.88)$$



### 2.2.2. Intensidad de radiación de un arreglo Cassegrain

Resolviendo la ecuación (2.88) para la intensidad de radiación, tenemos

$$K_{Cassegrain} = r^2 \rho(\theta, \phi)_{Cassegrain} \quad (2.89)$$

que es lo mismo

$$K_{Cassegrain} = K_{Parabolico} - K_{Secundario} \quad (2.90)$$

$$K_{Parabólico} = \frac{4\pi^2 a^4 E_0^2}{2\eta\lambda^2} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{u^2}{(ka)^2} - \frac{u^2}{2(ka)^2}} \right] \left| \frac{J_1(u_1)}{u_2} \right|^2 \quad (2.91)$$

$$K_{Secundario} = \frac{4\pi^2 b^4 E_0^2}{2\eta\lambda^2} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{u_2^2}{(kb)^2} - \frac{u_2^2}{2(kb)^2}} \right] \left| \frac{J_1(u_2)}{u_2} \right|^2 \quad (2.92)$$

$$kb = (900.68 \frac{rad}{m})(0.228m) = 205.35rad \quad (2.93)$$

$$K_{Parabolico} = \frac{4\pi^2(2.5)^4(1)^2}{(2)(377)(0.006976)^2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{(2251.7)^2} - \frac{u_1^2}{2(2251.7)^2}} \right) \left| \frac{J_1(u_1)}{u_1} \right|^2$$

$$K_{Secundario} = \frac{4\pi^2(0.228)^4(1)^2}{(2)(377)(0.006976)^2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{u_2^2}{(205.35)^2} - \frac{u_2^2}{2(205.35)^2}} \right) \left| \frac{J_1(u_2)}{u_2} \right|^2$$

$$K_{Parabolico} = 42027.68 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{(2251.7)^2} - \frac{u_1^2}{2(2251.7)^2}} \right) \left| \frac{J_1(u_1)}{u_1} \right|^2$$

$$K_{Secundario} = 2.9074 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{u_2^2}{(205.35)^2} - \frac{u_2^2}{2(205.35)^2}} \right) \left| \frac{J_1(u_2)}{u_2} \right|^2$$

### 2.2.3. Diagrama de radiación de un arreglo Cassegrain

La densidad de potencia radiada de un arreglo *Cassegrain* esta dada por la densidad de potencia radiada del reflector parabólico menos la densidad de potencia radiada del bloqueo. Como se menciono anteriormente, el diagrama de radiación necesita una distancia para poder graficarla, utilizando la distancia utilizada en el reflector parabólico  $r = 250m$  tenemos

$$\rho(\theta, \phi)_{Cassegrain} = \rho_{Parabólico}(\theta, \phi) - \rho_{Bloqueo}(\theta, \phi) \quad (2.94)$$

$$\rho_{Parabólico}(\theta, \phi) = \left(1 + \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{(2251.7)^2} - \frac{u_1^2}{2(2251.7)^2}}\right) \left|\frac{J_1(u_1)}{u_1}\right|^2 \quad (2.95)$$

$$\rho_{Bloqueo}(\theta, \phi) = 0.01418 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{u_2^2}{(205.35)^2} - \frac{u_2^2}{2(205.35)^2}}\right) \left|\frac{J_1(u_2)}{u_2}\right|^2 \quad (2.96)$$

En la figura 2.17 se grafica por separado el patrón de radiación de un reflector parabólico y el patrón de radiación del espejo secundario. Mientras que la figura 2.18 muestra el diagrama de radiación del arreglo Cassegrain en decibeles.

### 2.2.4. Ancho de lóbulo principal a -3 dB de un arreglo Cassegrain

Para determinar el ancho de lóbulo principal a  $-3dB$  podemos utilizar la ecuación (2.82). En la práctica se considera que el ancho de lóbulo principal es el mismo. Existe una expresión empirica que resulta de comparar el patrón de radiación de un reflector parabólico y el patrón de radiación de un arreglo Cassegrain. La cual es

$$HPBW \approx 67.3^\circ \frac{\lambda}{(D_{parabolico} + d_{secundario})} \quad (2.97)$$

$$HPBW \approx 67.3^\circ \left(\frac{0.006976}{5.456}\right)$$

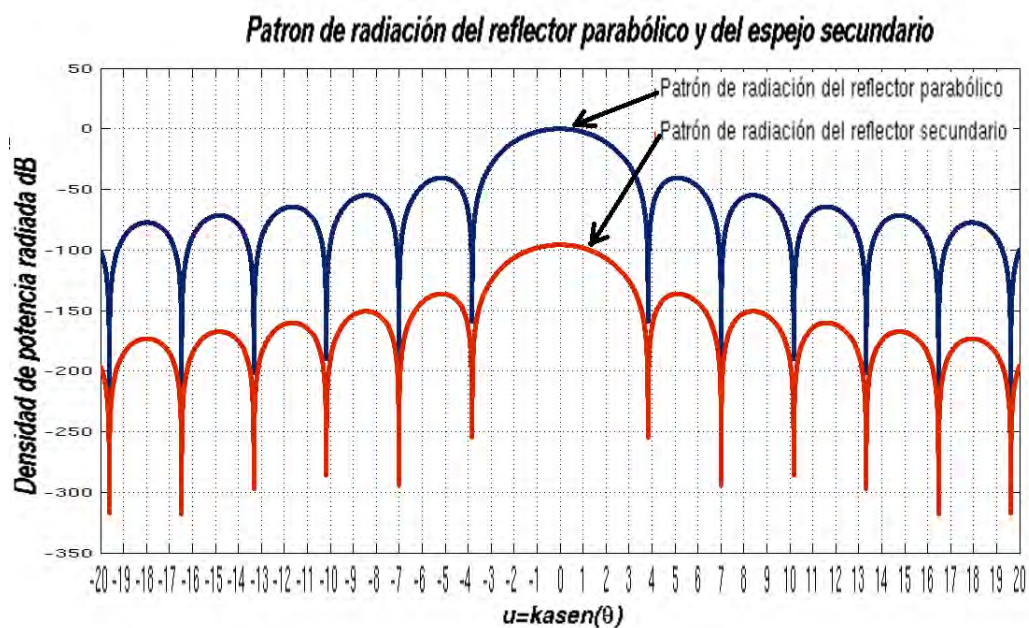


Figura 2.17: Densidad de potencia de un reflector parabólico y del bloqueo del secundario

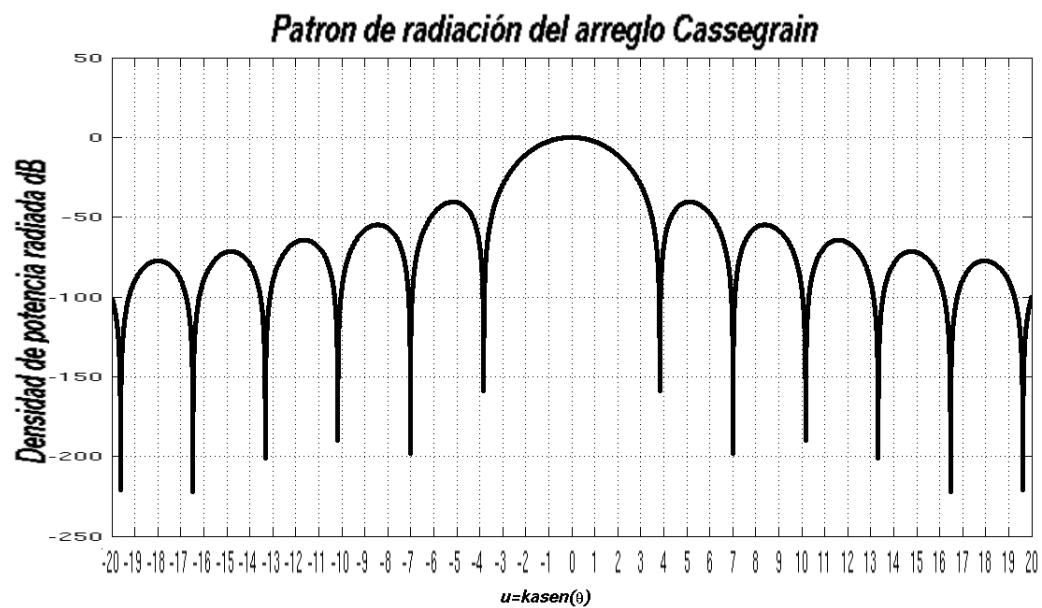


Figura 2.18: Diagrama de radiación de un arreglo Cassegrain

$$HPBW \approx 0.08604^\circ$$

Valor que corresponde si se mide directamente el ancho de lóbulo principal a  $-3dB$  en la grafica correspondiente al patrón de radiación de un arreglo Cassegrain.



# Simulaciones

---

Para poder comprobar los resultados obtenidos mediante el método de la apertura es necesario realizar simulaciones con programas destinados al análisis de reflectores parabólicos. La mayoría de los métodos para obtener los campos radiados, son numéricos, esto se debe principalmente a la dificultad que se tiene para evaluar las integrales y obtener los campos radiados. Razón por la cual fue necesario desarrollar programas destinados exclusivamente para reflectores parabólicos. Actualmente se pueden encontrar en el mercado programas de análisis electromagnético para el análisis de antenas reflectoras. Existen también programas libres desarrollados por diversas universidades. En este capítulo utilizaremos algunos programas para calcular el patrón de radiación tanto de un reflector parabólico, como el de un arreglo Cassegrain.

## 3.1. Software de análisis de bocinas y reflectores (SABOR)

SABOR es un programa muy sencillo que permite obtener el diagrama de radiación y los parámetros más importantes de un reflector parabólico o un arreglo Cassegrain. En el capítulo 2 se presentó el método de la apertura. Sin embargo el método de la apertura también puede ser resuelto con técnicas numéricas. Este programa utiliza el método de la apertura, solo que a diferencia del método desarrollado en el capítulo 2 donde la solución de las integrales es una función de Bessel, en este programa se utiliza un método numérico para evaluar la integral.

El programa SABOR obtiene el patrón de radiación resolviendo las ecuaciones que describen el campo eléctrico, las cuales son:

$$E_\theta = \frac{ie^{-ikr}}{2\pi r} \left( \frac{1 + \cos\theta}{2} \right) (P_x \cos\phi + P_y \sin\phi) \quad (3.1)$$

$$E_\phi = \frac{ie^{-ikr}}{2\pi r} \left( \frac{1 + \cos\theta}{2} \right) (-P_x \sin\phi + P_y \cos\phi) \quad (3.2)$$

donde

$$P_x = \iint E_x(x, y) e^{ik(x \sin\theta \cos\phi + y \sin\theta \sin\phi)} dx dy \quad (3.3)$$

$$P_y = \iint E_y(x, y) e^{ik(x \sin\theta \cos\phi + y \sin\theta \sin\phi)} dx dy \quad (3.4)$$

La característica principal de este método es resolver las integrales de las ecuaciones ( 3.3) y ( 3.4) mediante el método de cuadratura de Gauss-Legendre [10].

### 3.1.1. Simulación del diagrama de radiación de un reflector parabólico

El caso más simple es un reflector parabólico. Los datos de entrada son: el diámetro del espejo parabólico  $D_p$  en centímetros y la relación  $\frac{f}{D_p}$ . Para nuestro caso tenemos  $D_p = 500cm$  y  $f_p/D_p = \frac{243.7648}{500} = 0.4985$ , El diagrama de radiación que genera se muestra en la figura 3.1. Los parámetros más importantes que podemos calcular son el ancho de lóbulo principal a  $-3dB$  que es de  $HPBW = 0.0915^\circ$  y el ancho de lóbulo principal es de  $ALP = 0.25^\circ$ .

### 3.1.2. Simulación del diagrama de radiación de un arreglo Cassegrain

Para el arreglo Cassegrain, los datos de entrada son: El diámetro del espejo primario  $D_p$ , el diámetro del espejo secundario  $D_s$  la relación  $\frac{f_p}{D_p}$  y la distancia interfocal  $d_{if}$  que es la distancia que se mide desde el foco del espejo primario y el punto donde se forma la imagen, esto es la suma del foco primario más la distancia focal posterior del arreglo Cassegrain  $d = f_p + dfp$ . Los datos del arreglo son:  $D_p = 500cm$ ,  $D_s = 45.6cm$ ,  $d_{if} = 313.8514cm$ ,  $\frac{f_p}{D_p} = \frac{243.7648}{500} = 0.4985$ . Así el diagrama de radiación del arreglo Cassegrain

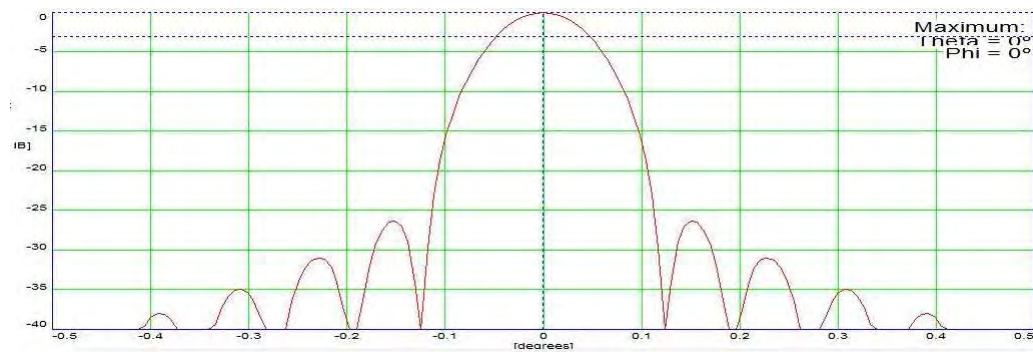


Figura 3.1: Diagrama de radiación de un reflector parabólico de 5 metros calculado por el programa SABOR

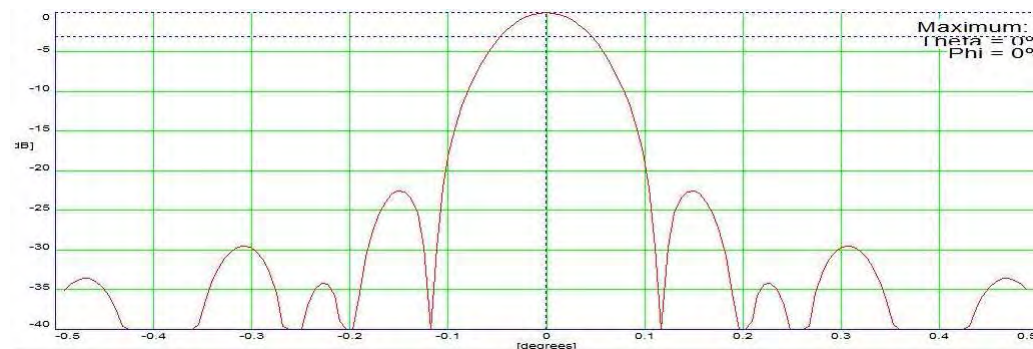


Figura 3.2: Diagrama de radiación de un arreglo Cassegrain de 5 metros calculado con el programa SABOR

se muestra en la figura 3.2. El ancho de lóbulo a  $-3dB$  es igual a  $HPBW = 0.0915^\circ$  y el ancho de lóbulo principal es de  $ALP = 0.24^\circ$ .

### 3.2. Programa de simulación de reflectores GRASP9

*Grasp* es un programa profesional dedicado exclusivamente al análisis de reflectores. Las simulaciones realizadas fueron desarrolladas con la versión estudiantil, este programa es una versión limitada y puede ser descargada de la pagina del fabricante.[11] Este programa es muy eficiente, pues la version



profesional puede realizar simulaciones de reflectores de hasta 50 metros de diámetro.

### 3.2.1. Simulación del diagrama de radiación de un reflector parabólico de 5 metros

El método que utiliza para calcular los campos electromagnéticos es resolver las ecuaciones (2.53), (2.54) y (2.55)

$$E_r = 0$$

$$E_\theta = \frac{i}{2\lambda} \frac{e^{-ikr}}{r} \cos\phi \left( \frac{\eta}{Z_0} \cos\theta + 1 \right) \int_S E_x e^{ik_x x} e^{ik_y y} dx dy$$

$$E_\phi = -\frac{i}{2\lambda} \frac{e^{-ikr}}{r} \sin\phi \left( \frac{\eta}{Z_0} \cos\theta + 1 \right) \int_S E_x e^{ik_x x} e^{ik_y y} dx dy$$

Solo que para resolver estas integrales, utilizan un método numérico, el denominado método de integración trapezoidal de Gauss [11]. los datos de entrada son el diámetro del espejo parabólico  $D_p = 5m$ , la distancia focal  $f_p = 2.437m$  y la frecuencia  $\nu = 43GHz$ . La geometría que genera el programa *GRASP9* se muestra en la figura 3.3, mientras que la gráfica del patrón de radiación obtenida por este programa se muestra en la figura 3.4, finalmente la figura 3.5 muestra el patrón de radiación interpolado linealmente. El ancho de lóbulo principal a  $-3dB$  se obtiene midiendolo directamente de la figura 3.5, el valor correspondiente es  $HPBW = 0.09^\circ$ , y el ancho de lóbulo es  $ALP = 0.265^\circ$ .

### 3.2.2. Simulación del diagrama de radiación de un arreglo Cassegrain de 5 metros

Para el cálculo del patrón de radiación se resuelven las ecuaciones (2.53), (2.54) y (2.55) mediante el método de integración trapezoidal de Gauss, solo que se consideran las corrientes que se generan en el espejo primario y las que se generan en el espejo secundario. Los datos de entrada son el diámetro del espejo primario  $D_p$ , la distancia focal del espejo primario  $f_p$ , la excentricidad  $e$  del espejo secundario, la distancia entre focos  $d_{if}$ . El ancho de lóbulo principal a  $-3dB$  se obtiene de manera similar al del reflector parabólico,  $HPBW = 0.088^\circ$  y el ancho de lóbulo principal es  $ALP = 0.25^\circ$ .

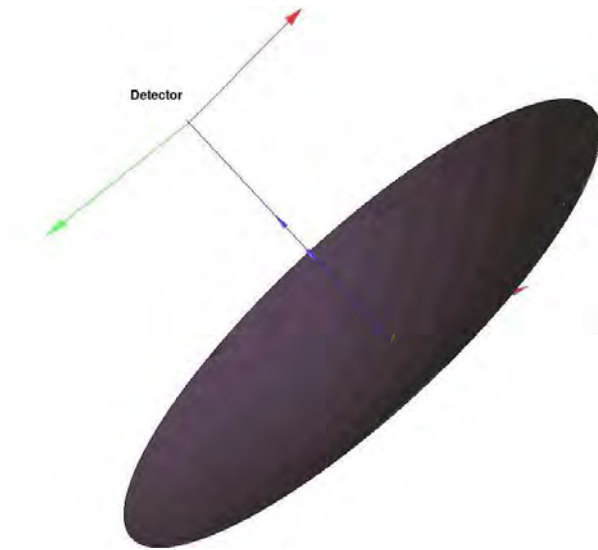


Figura 3.3: Geometría de un reflector parabólico de 5 metros generado por el programa GRASP9

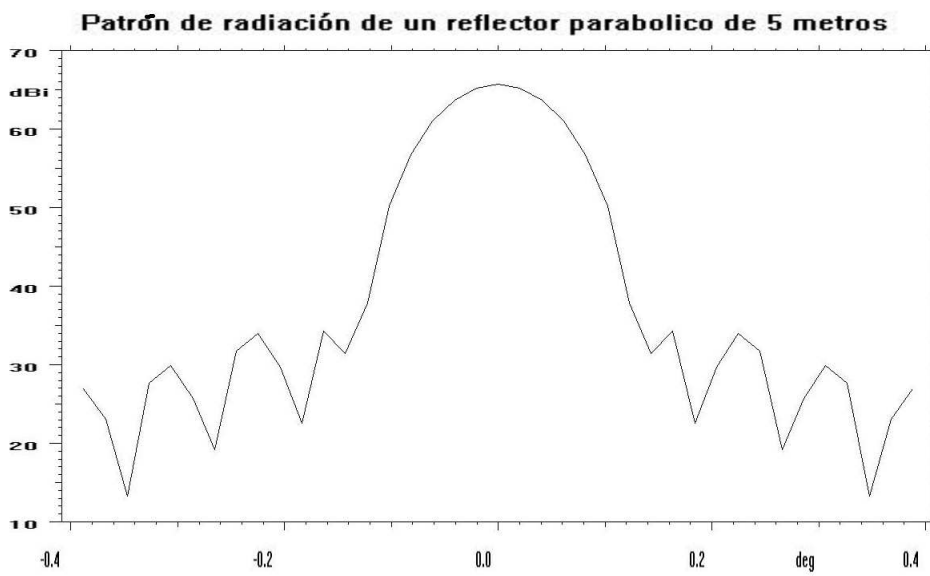


Figura 3.4: Patrón de radiación de un reflector parabólico de 5 metros calculado por el programa GRASP9

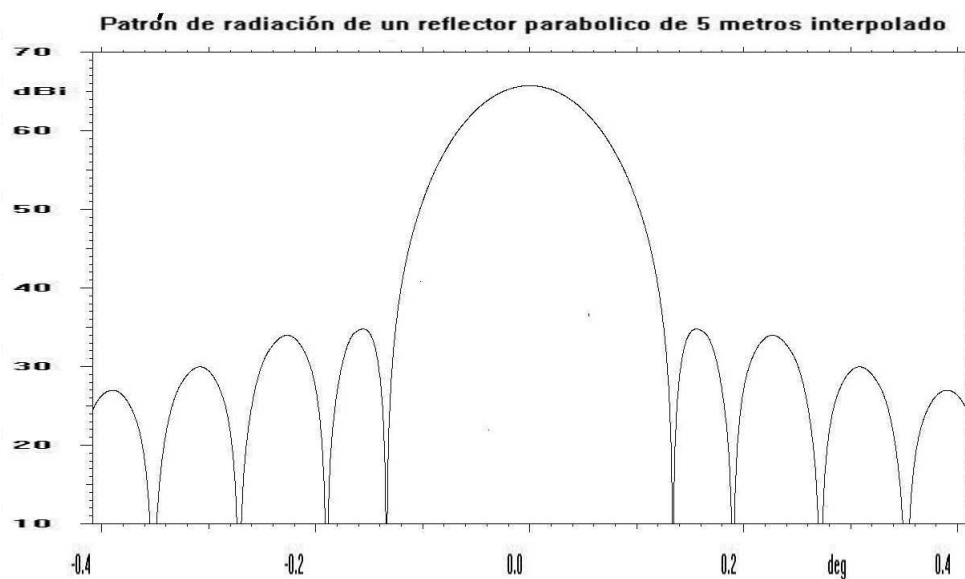


Figura 3.5: Patrón de radiación de un reflector parabólico de 5 metros interpolado linealmente calculado por el programa GRASP9

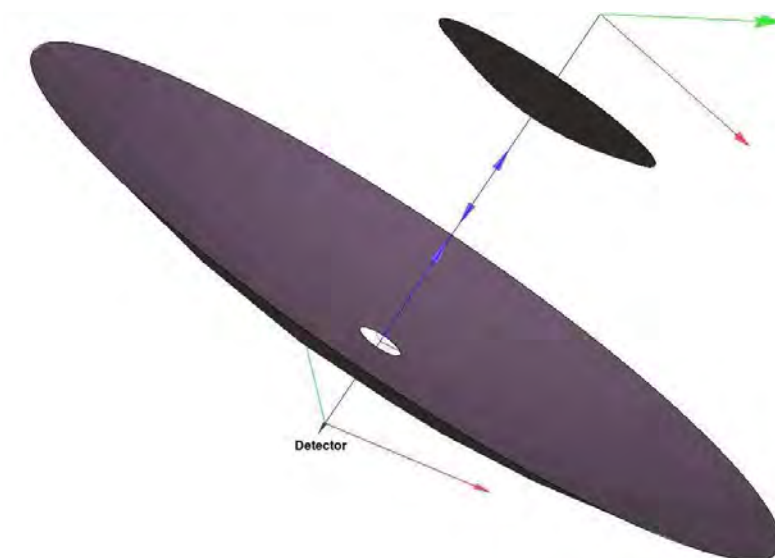


Figura 3.6: Geometría de un arreglo Cassegrain generado por el programa GRASP9

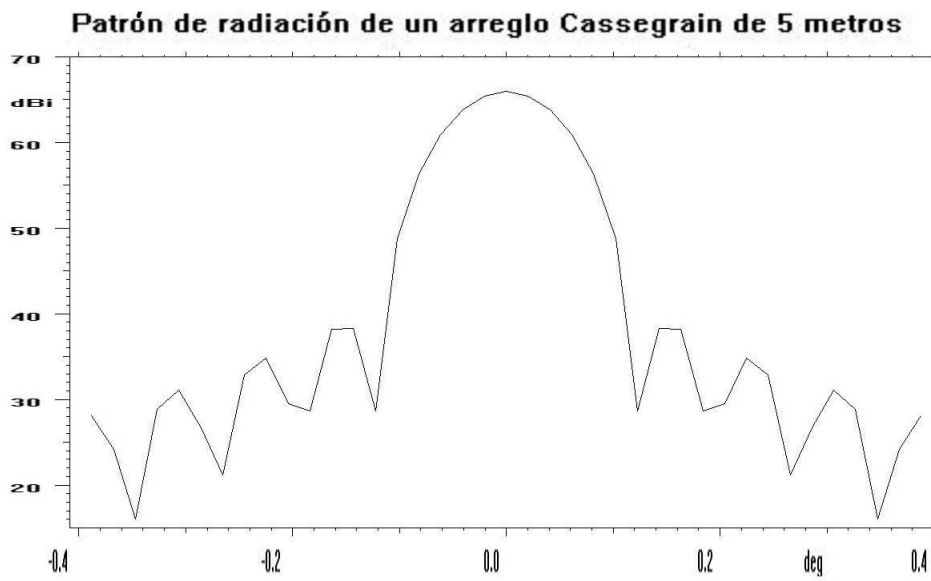


Figura 3.7: Patrón de radiación de un arreglo Cassegrain Calculado por el programa GRASP9

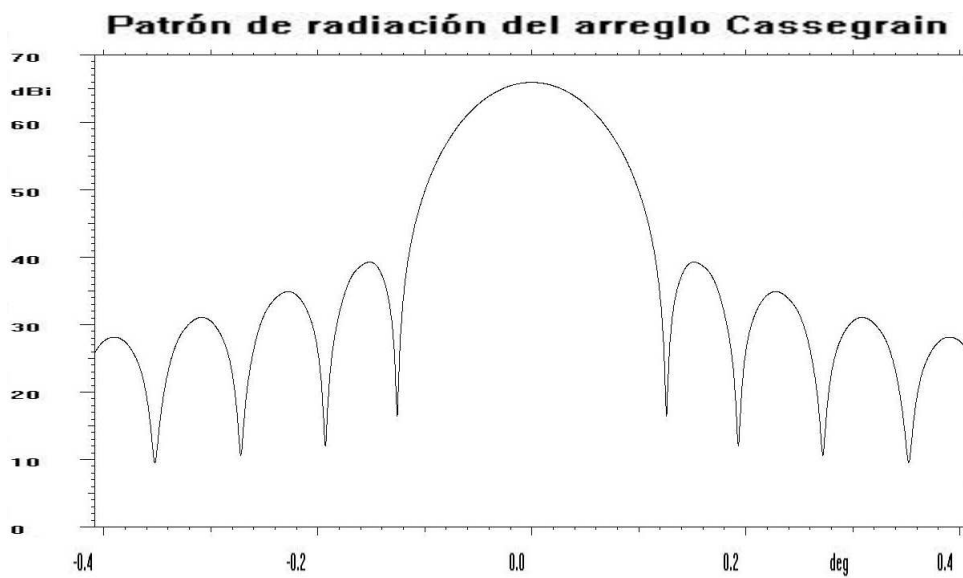


Figura 3.8: Patrón de radiación de un arreglo Cassegrain interpolado linealmente calculado por el programa GRASP9

### 3.3. Análisis de antenas reflectoras mediante el método de las corrientes inducidas (ICARA)

ICARA es un programa destinado exclusivamente para el análisis de antenas reflectoras, se puede obtener el patrón de radiación de un reflector parabólico, de un arreglo Cassegrain y de un arreglo Gregoriano. Este programa utiliza el método de las corrientes inducidas. Para el cálculo de los campos electromagnéticos radiados por un conductor eléctrico perfecto, se utilizan las ecuaciones siguientes

$$\vec{E}^S = \frac{i\eta}{k} \int_{S_0} \nabla \times [\vec{J}(\vec{r}') \times \nabla G(\vec{r}, \vec{r}')] dS' \quad (3.5)$$

$$\vec{H}^S = - \int_{S_0} [\vec{J}(\vec{r}') \times \nabla G(\vec{r}, \vec{r}')] dS' \quad (3.6)$$

donde  $\vec{J}(\vec{r}')$  es la densidad de corriente sobre la superficie. Las coordenadas sin primar representan al punto en donde se encuentra el observador, mientras que las coordenadas primadas representan al lugar donde se encuentra la fuente y  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  es una función de *Green* y fue presentada en el capítulo 2. Como la zona de interés es el campo lejano, entonces las ecuaciones ( 3.5) y ( 3.6) se transforman en:

$$\vec{E}^S = -\frac{i\eta}{2\lambda} \frac{e^{-ikr}}{r} \int_{S_0} \{ \vec{J}(\vec{r}') - \hat{r} [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \hat{r}] \} e^{ik\vec{r}' \cdot \hat{r}} dS' \quad (3.7)$$

$$\vec{H}^S = -\frac{i\eta}{2\lambda} \frac{e^{-ikr}}{r} \left[ \hat{r} \times \int_{S_0} \vec{J}(\vec{r}') e^{ik\vec{r}' \cdot \hat{r}} dS' \right] \quad (3.8)$$

Para resolver las ecuaciones numéricamente, dividimos la superficie en elementos triangulares. Cada uno de esos elementos se denota con el índice  $j$  y los puntos de observación se denota mediante el índice  $l$ . Entonces el campo eléctrico y magnético que radia cada uno de los elementos superficiales se puede calcular mediante:

$$\vec{E}_{jl}^S = -\frac{i\eta}{2\lambda} \frac{e^{-ikr_{jl}}}{r_{jl}} \int_{S_j} \{ \vec{J}(\vec{r}') - \hat{r}_{jl} [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \hat{r}_{jl}] \} e^{ik\vec{r}' \cdot \hat{r}_{jl}} dS' \quad (3.9)$$

$$\vec{H}_{jl}^S = -\frac{i\eta}{2\lambda} \frac{e^{-ikr_{jl}}}{r_{jl}} \left[ \hat{r}_{jl} \times \int_{S_l} \vec{J}(\vec{r}') e^{ik\vec{r}' \cdot \hat{r}_{jl}} dS' \right] \quad (3.10)$$

Los campos electromagnéticos totales se calculan sumando cada distribución de campos producidos por cada elemento [12]

$$\vec{E}_j^S = \sum_l \vec{E}_{jl}^S \quad (3.11)$$

$$\vec{H}_j^S = \sum_l \vec{H}_{jl}^S \quad (3.12)$$

### 3.3.1. Simulación del diagrama de radiación de un reflector parabólico de 5 metros

En el método de la apertura considera que los campos electromagnéticos que radia el alimentador se reflejan en el reflector parabólico sin producir ningún efecto. En el método de las corrientes inducidas se considera que los campos electromagnéticos que inciden sobre el reflector parabólico inducen una distribución de corrientes, las cuales producen una distribución de campos electromagnéticos. Así el campo total es la suma de los campos radiados por el alimentador y los campos producidos en el reflector parabólico, esto es

$$\vec{H}_{total} = \vec{H}^{inc} + \vec{H}^{ind} \quad (3.13)$$

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}^{inc} + \vec{E}^{ind} \quad (3.14)$$

Los datos de entrada de *ICARA* son el foco del espejo parabólico  $fp$ , el diámetro del espejo parabólico  $D_p$  y se elige un alimentador ideal, que produce un frente de ondas esférico. En la figura 3.9 se muestra la geometría del reflector parabólico. Mientras que en la figura 3.10 se muestra el diagrama de radiación que produce el reflector parabólico.

Los parámetros más importantes se obtienen gráficamente de la figura 3.4. El ancho de lóbulo a  $-3dB$  es de  $HPBW = 0.097^\circ$  y el ancho de lóbulo principal es de  $0.13^\circ$ . Podemos observar que los lóbulos laterales se han deformado, esto se debe principalmente a los campos que se generan en el reflector parabólico.

### 3.3. Análisis de antenas reflectoras mediante el método de las corrientes inducidas (ICARA)

54

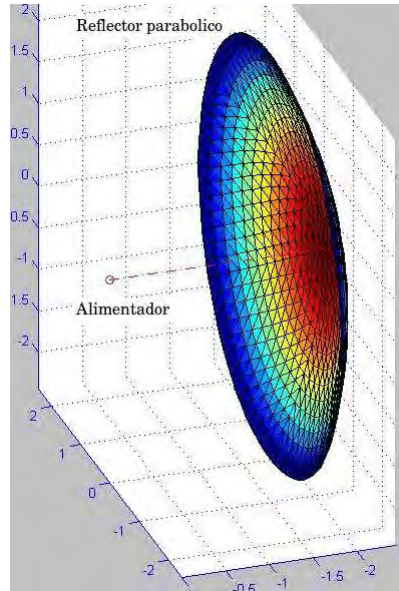


Figura 3.9: Geometría de un reflector parabólico de 5 metros generado por ICARA

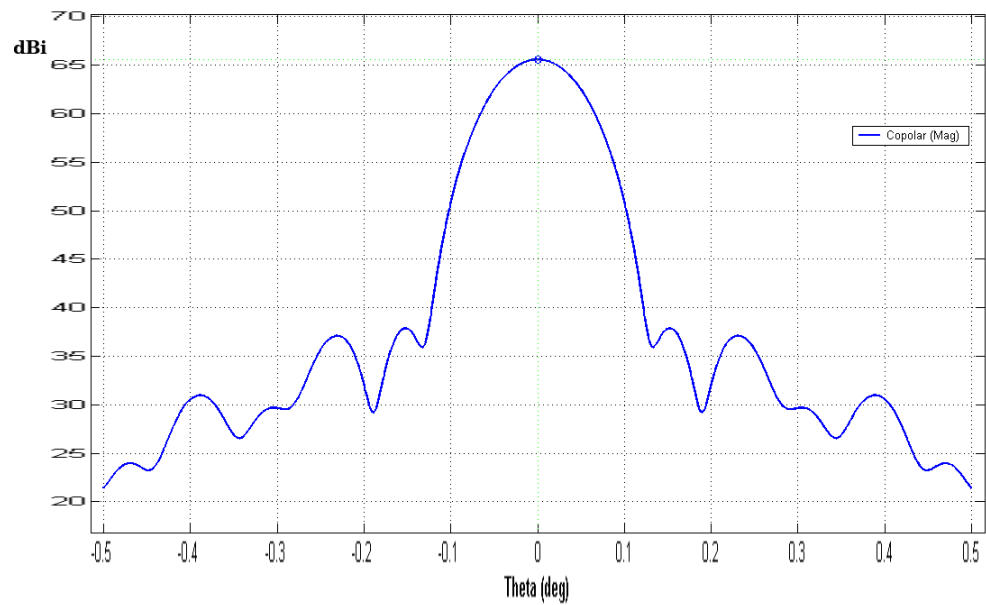


Figura 3.10: Patrón de radiación de un reflector de 5 metros calculado por ICARA

### 3.3.2. Simulación del diagrama de radiación de un arreglo Cassegrain

Para calcular la distribución de campos electromagnéticos de un arreglo Cassegrain, se procede a calcular la densidad de corriente sobre el espejo secundario producido por el alimentador  $\vec{J}_S^S$ . El siguiente paso es determinar la densidad de corriente sobre el espejo parabólico  $\vec{J}_M^S$ , esta densidad de corriente genera un campo eléctrico  $\vec{E}_M^S$  y un campo magnético  $\vec{H}_M^S$ . El bloqueo que produce el espejo secundario se obtiene mediante el cálculo de la corriente de bloqueo  $\vec{J}_{SB}^S$ , inducida por la radiación en el espejo primario, que se genera en la superficie del espejo secundario, Así la corriente  $\vec{J}_{SB}^S$  genera una campo eléctrico  $\vec{E}_{SB}^S$  y un campo magnético  $\vec{H}_{SB}^S$ . Entonces los campos radiados totales por el arreglo Cassegrain son

$$\vec{H}_{total} = \vec{H}^{inc} + \vec{H}_S^S + \vec{H}_M^S + \vec{H}_{SB}^S \quad (3.15)$$

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}^{inc} + \vec{E}_S^S + \vec{E}_M^S + \vec{E}_{SB}^S \quad (3.16)$$

Los parámetros necesarios para realizar la simulación de los campos radiados por el arreglo Cassegrain son el foco del espejo parabólico  $fp$ , el diámetro del espejo parabólico  $Dp$ , la exentricidad del espejo secundario  $e = -k^2$  y la distancia interfocal, la cual se define como la distancia que se mide desde el foco del espejo primario hasta donde se forma la imagen.  $di = fp + dfp$ . La geometría que genera el programa ICARA se muestra en la figura 3.11. Mientras que en la figura 3.12 se muestra el diagrama de radiación generado por el arreglo Cassegrain con las características del RT5.

Igualmente que en el reflector parabólico obtenemos los parámetros mas importantes del arreglo Cassegrain. El ancho de lóbulo principal a  $-3dB$  es de  $HPBW = 0.9^\circ$  y el ancho de lóbulo principal es de  $ALP = 0.21$ . La disminución del ancho de lóbulo principal se debe principalmente a la deformación de los lóbulos laterales.

### 3.3.3. Observaciones

Los resultados de las simulaciones del reflector parabólico se muestran en el cuadro 3.1. Aquí podemos observar que al ancho de lóbulo a  $-3dB$  es de  $0.9^\circ$  en todos los casos analizados, en el método de la apertura se obtuvo el valor de  $0.09389^\circ$  que es un valor obtenido directamente del análisis teórico.



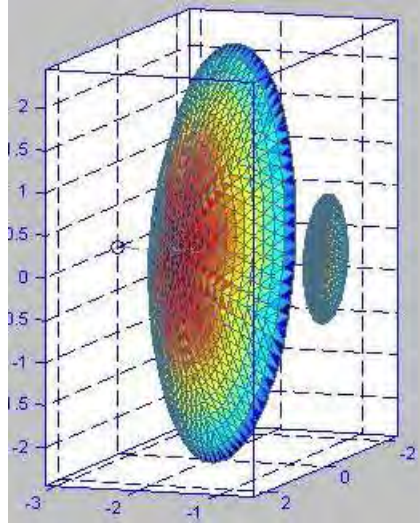


Figura 3.11: Geometría de un arreglo Cassegrain generado por el programa ICARA

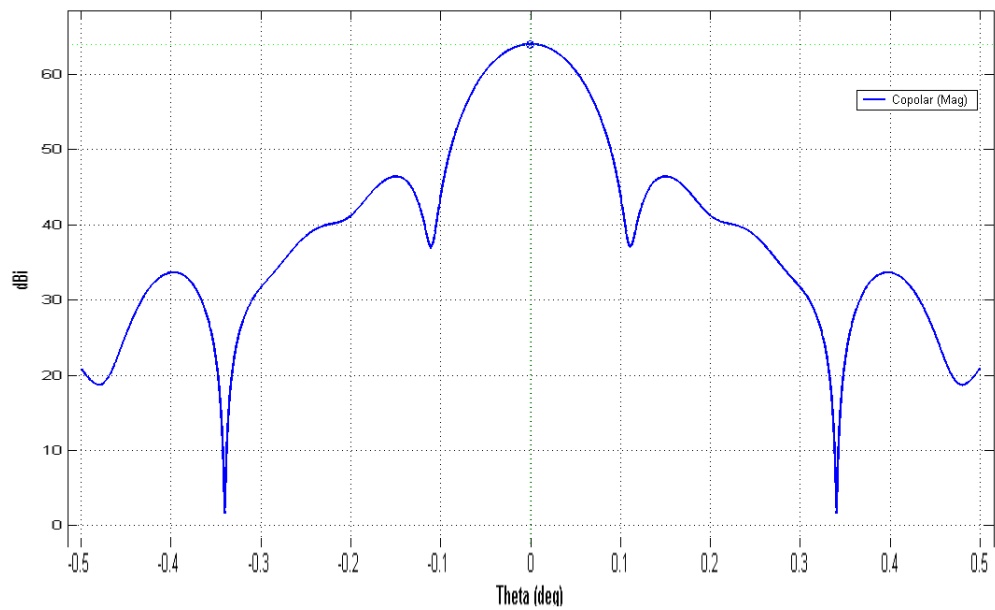


Figura 3.12: Patrón de radiación de un arreglo Cassegrain calculado por el programa ICARA

Cada valor obtenido difiere ligeramente de este valor, esto se debe principalmente a que estos valores se obtuvieron utilizando algoritmos diferentes. Para el caso del ancho de lóbulo principal, se tiene el mismo caso los cuatro valores obtenidos son diferentes, pero difiere principalmente en centésimas de grado. El valor promedio correspondiente al *HPBW* es de  $0.093^\circ$  mientras que el *ALP* es de  $0.25^\circ$

Método	HPBW	ALP
Método de la apertura	0.09389	0.24
Programa <i>Sabor</i>	0.0915	0.25
Programa <i>Grasp9</i>	0.09	0.265
Programa <i>ICARA</i>	0.097	0.26

Cuadro 3.1: Resultados obtenidos para el reflector parabólico

Por otro lado los resultados del arreglo Cassegrain se muestran en el cuadro 3.2. Aquí podemos observar que el *HPBW* se redujo un poco en comparación con el valor obtenido al analizar un reflector parabólico, esto se debe principalmente a que hay una atenuación en todo el patrón de radiación, lo que hace que este parámetro se decremente, dando como resultado que el instrumento se vuelva más selectivo. Entonces el valor promedio para el *HPBW* es de  $0.088^\circ$ , mientras que el valor promedio para el *ALP* es de  $0.025^\circ$ .

Método	HPBW	ALP
Método de la apertura	0.08604	0.22
Programa <i>Sabor</i>	0.0915	0.24
Programa <i>Grasp9</i>	0.088	0.23
Programa <i>ICARA</i>	0.09	0.21

Cuadro 3.2: Resultados obtenidos para el arreglo Cassegrain

### 3.4. Rotación del espejo secundario

Desafortunadamente los programas anteriores tienen ciertas limitaciones, ninguno de ellos puede simular la rotación del espejo secundario de un arreglo Cassegrain. Para nuestro caso se ha intentado resolver el problema con un programa de análisis electromagnético más potente, pero debido a las dimensiones tan grandes del arreglo, se necesita de cantidades muy grandes de memoria RAM para resolver el problema. Se ha intentado con el programa *Ansoft*, *CST Microwave Studio* y con el programa *FEKO*. Pero los tres programas demandan muchos recursos de computo, razón por la cual se ha tenido que recurrir a un análisis más detallado para poder ver los cambios en el patrón de radiación al rotar el espejo secundario respecto al foco del espejo primario. En el trabajo de Hannan [13] se muestran los resultados obtenidos al modificar la posición del espejo secundario de un radiotelescopio construido por los laboratorios Weller. Se reportan las pruebas realizadas, así como los patrones de radiación que se obtienen al modificar la posición del espejo secundario. La figura 3.13 muestra la gráfica del patrón de radiación. En el lado izquierdo de la gráfica tenemos el patrón de radiación que resulta de rotar el espejo secundario respecto al foco del espejo primario. Mientras que en el lado derecho podemos observar el patrón de radiación que se obtiene al rotar el espejo secundario junto con el detector.

#### 3.4.1. Geometría Equivalente de un arreglo Cassegrain

Los mismos efectos que se obtienen al rotar el espejo secundario, pueden ser reproducidos en un reflector parabólico equivalente, en particular el patrón de radiación que se obtiene al mover el espejo secundario, puede ser obtenido moviendo el detector de un reflector parabólico equivalente [13]. La geometría equivalente se obtiene al prolongar los extremos del haz de rayos en dirección contraria a la dirección de propagación al intersectarse con dos líneas paralelas que tocan el diámetro del espejo parabólico. En la figura 3.14 se muestra la relación geométrica entre un arreglo Cassegrain y su geometría equivalente. La ecuación para obtener la parábola equivalente es

$$\frac{F_e}{F_m} = \frac{L_r}{L_v} \quad (3.17)$$

De la ecuación (3.17) resolvemos para obtener el foco del reflector equivalente

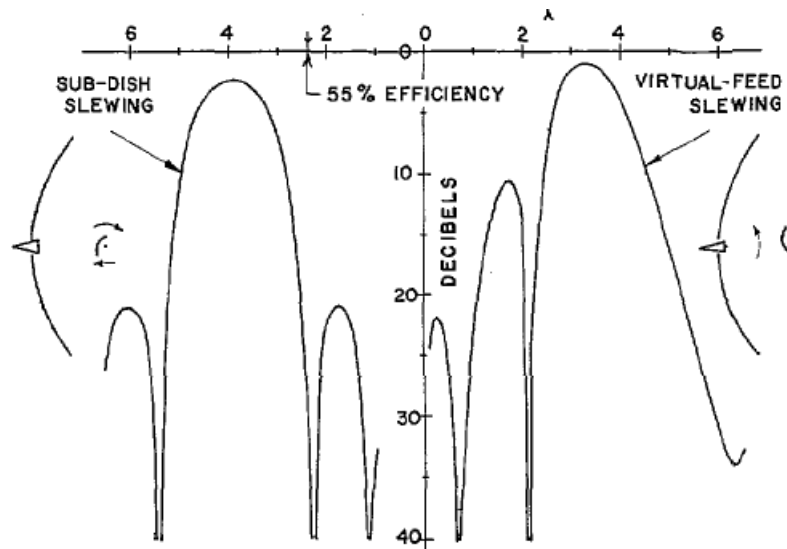


Figura 3.13: Efectos sobre el patrón de radiación al rotar el espejo secundario respecto al foco del espejo primario [13]

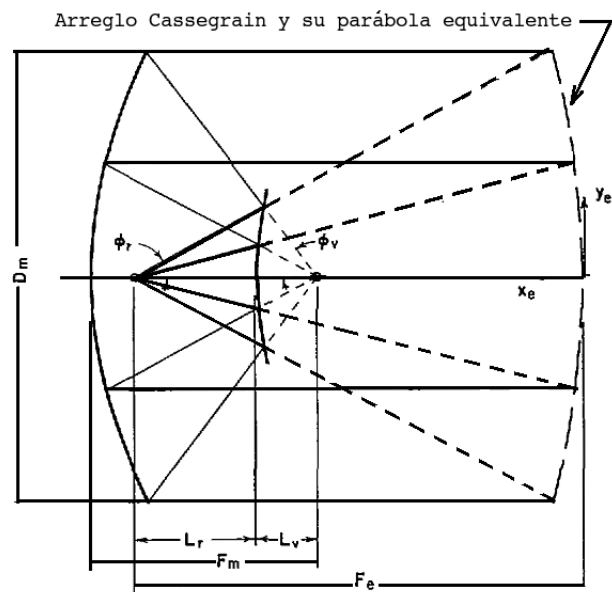


Figura 3.14: Relación geométrica entre el arreglo Cassegrain y su parábola equivalente

$$F_e = \frac{L_r}{L_v} F_m$$

Donde  $L_r$  es la distancia focal posterior de nuestro sistema  $L_r = 2922.2929mm$ , mientras que  $L_v$  es la distancia del foco al espejo, secundario  $L_v = 216.2210mm$

$$F_e = \left( \frac{2922.2929}{216.2210} \right) (2437.648)$$

$$F_e = 32945.5577mm$$

### 3.4.2. Cambios en el patrón de radiación al mover de manera lateral el detector de un reflector parabólico

En el caso de un reflector parabólico, al momento de mover el detector de manera lateral, se presenta la situación que se muestra en la figura 3.15. Es fácil ver que cuando el detector se desplaza en una dirección, el campo de visión se desplaza en la dirección contraria. Conforme se va moviendo el detector, el patrón de radiación se va trasladando en dirección contraria mientras que va sufriendo una atenuación en el lóbulo principal, al mismo tiempo los lóbulos laterales correspondientes a la dirección de translación van creciendo y los lóbulos del otro lado disminuyen de tamaño, a este fenómeno se le denomina coma [14]. La figura 3.16 muestra claramente esta situación. Cuando el movimiento del detector es de unas cuantas longitudes de onda se considera que la atenuación que sufre el lóbulo principal es despreciable.

### 3.4.3. Movimiento del espejo secundario junto con el detector

El caso más estudiado es considerar que el espejo secundario se encuentra en el mismo eje que el detector, y mantener esta relación cuando se mueve el espejo secundario, en la geometría equivalente esto es idéntico a mover de manera lateral el detector. Como estamos considerando que el punto donde converge el haz de rayos del arreglo Cassegrain es el foco del reflector parabólico equivalente, entonces hay que determinar la distancia máxima que se debe mover el detector virtual para barrer el campo del detector. Del análisis óptico pudimos determinar geoméricamente que el ángulo máximo que se puede rotar el espejo secundario es de  $1.95^\circ$  respecto al eje óptico. Ahora para obtener la distancia máxima que barre el haz de rayos que proviene del

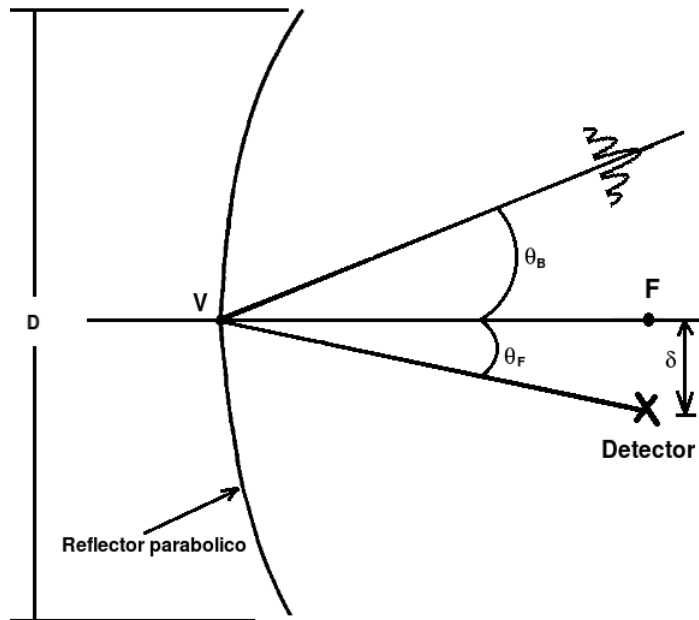


Figura 3.15: Desplazamiento lateral del detector

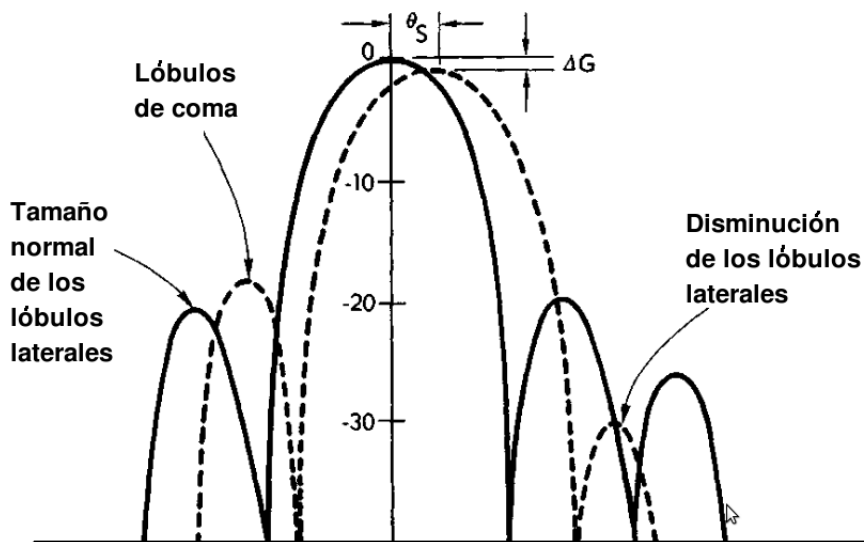


Figura 3.16: Patrón de radiación desplazado

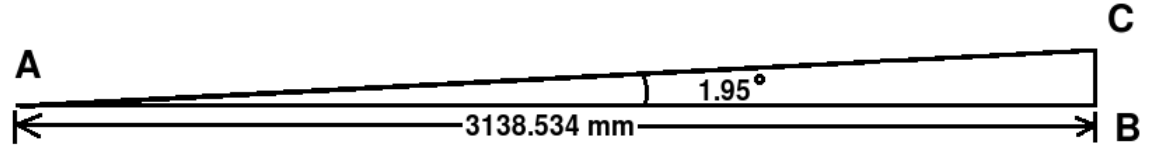


Figura 3.17: Distancia que barre el haz de rayos provenientes del espejo secundario

espejo secundario, formamos un triángulo rectángulo, como el que se muestra en la figura 3.17. El punto  $A$  coincide con el foco del espejo primario, mientras que el punto  $B$  es el lugar donde se forma la imagen. La distancia que nos interesa es la que hay entre los puntos  $B$  y  $C$ , la distancia entre los puntos  $A$  y  $B$  es la distancia focal del espejo primario y la distancia que hay entre la parte posterior del espejo primario y el lugar donde se forma la imagen.  $\overline{AB} = 2437.648\text{mm} + 700.866\text{mm} = 3138.5\text{mm}$

$$\text{sen}(1.95^\circ) = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$$

$$\overline{CB} = \overline{AB}\text{sen}\theta$$

$$\overline{CB} = 3139.6312\text{sen}(1.95^\circ)$$

$$\overline{CB} = 106.8333\text{mm}$$

Esta es la distancia máxima que debe moverse el detector antes de que el haz de rayos proveniente del espejo secundario comience a bloquearse. La longitud de onda cabe aproximadamente 15 veces en la distancia que se puede mover el detector. Hay que recordar que este valor es dos veces el movimiento lateral. Por lo que si consideramos el movimiento de un solo lado en términos de la longitud de onda este valor es igual a 7.5 veces la longitud de onda. Este valor es un desplazamiento corto, pues se considera que los movimientos grandes son mayores a 10 veces la longitud de onda [15]. Baars desarrolla la expresión para obtener el patrón de radiación cuando se desplaza el detector [16]. La expresión correspondiente al patrón de radiación es

$$f(u) = \int_0^1 F(r) J_0 \left[ r \left( u - \frac{2k\delta}{\Xi} \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{\Xi}\right)^2} \right) \right] r dr \quad (3.18)$$

con  $\Xi = \frac{4f}{d}$  y  $d$  es el diámetro del reflector parabólico. Calculando  $\Xi$  para el reflector parabólico equivalente

$$\Xi = \frac{(4)(32945.4206)}{4889}$$

$$\Xi = 26.9543$$

Ahora vamos a mover el detector de 0 a 5 longitudes de onda en pasos de 1 longitud de onda. Las gráficas del patrón de radiación se graficaron con el programa *Mathematica*

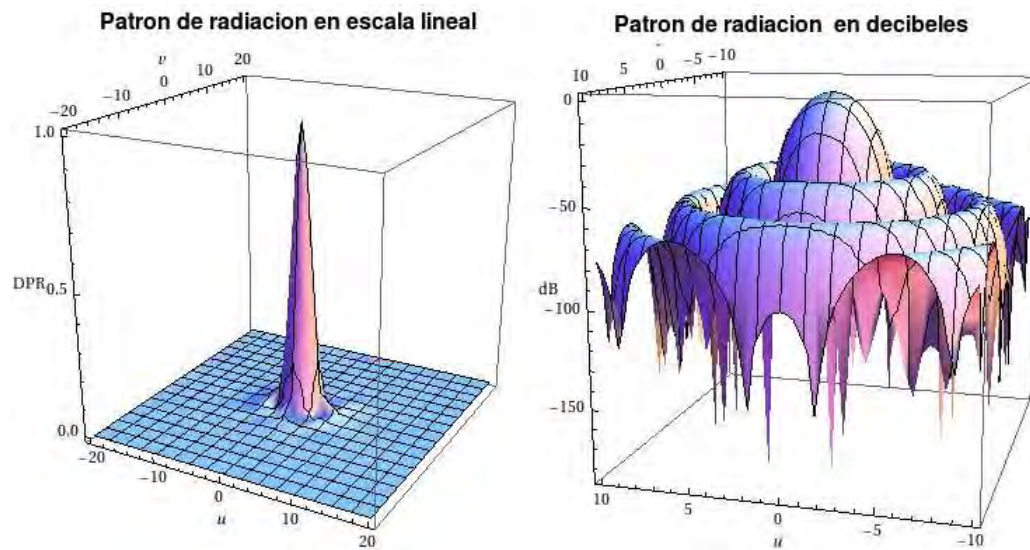


Figura 3.18: Patrón de radiación del arreglo Cassegrain cuando el espejo secundario no sufre ninguna rotación

## Cuando el detector se encuentra en el foco

El primer caso que se presenta es cuando el detector se encuentra en el foco del reflector parabólico equivalente, lo que corresponde a que el espejo secundario no tenga ninguna rotación. La figura 3.18 corresponde al patrón de radiación en escala lineal y en decibels. Mientras que la figura 3.19 muestra un corte del patrón de radiación cuando  $v = 90^\circ$ , en esta figura podemos determinar gráficamente el ángulo en el que se está observando. Para este caso particular se está observando un objeto que se encuentra en el eje óptico.



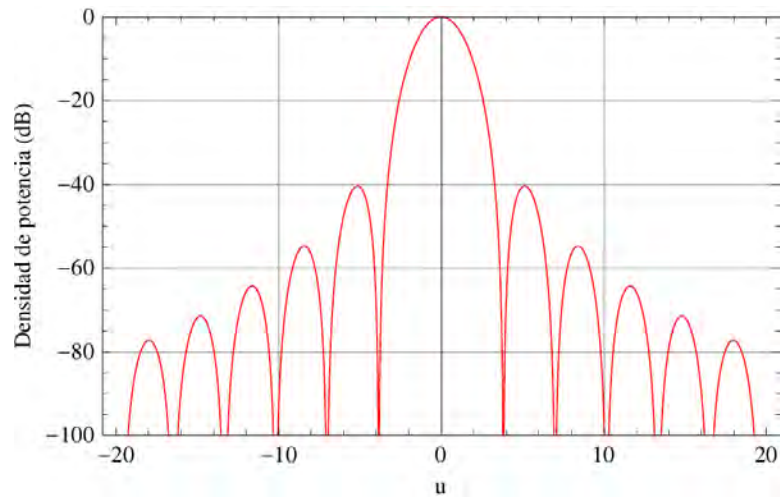


Figura 3.19: Corte del patrón de radiación cuando el espejo secundario no sufre ninguna rotación

Así de igual manera vamos a ir moviendo el detector en pasos de una longitud de onda hasta llegar al valor máximo que son 7.5 veces la longitud de onda.

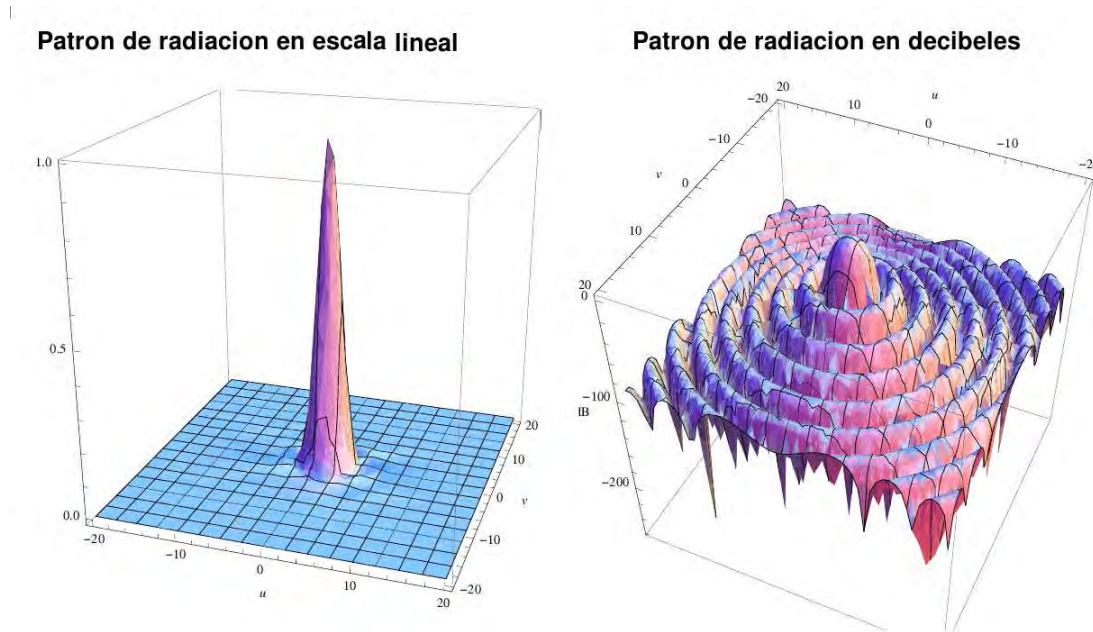


Figura 3.20: Patron de radiación del arreglo Cassegrain cuando el haz principal se desplaza una longitud de onda

## Cuando el detector se mueve una longitud de onda

$$u = 0.9311$$

$$0.9311 = 2251.7 \operatorname{sen} \theta$$

$$\theta = \operatorname{angsen} \left( \frac{0.9311}{2251.7} \right)$$

$$\theta = 0.02369^\circ$$

Mientras que para calcular el ángulo que se rota el espejo secundario respecto al foco del reflector parabólico es

$$\tan \alpha = \frac{0.006976}{3.138}$$

$$\alpha = \operatorname{angtan} \left( \frac{0.006976}{3.138} \right)$$

$$\alpha = 0.1273^\circ$$

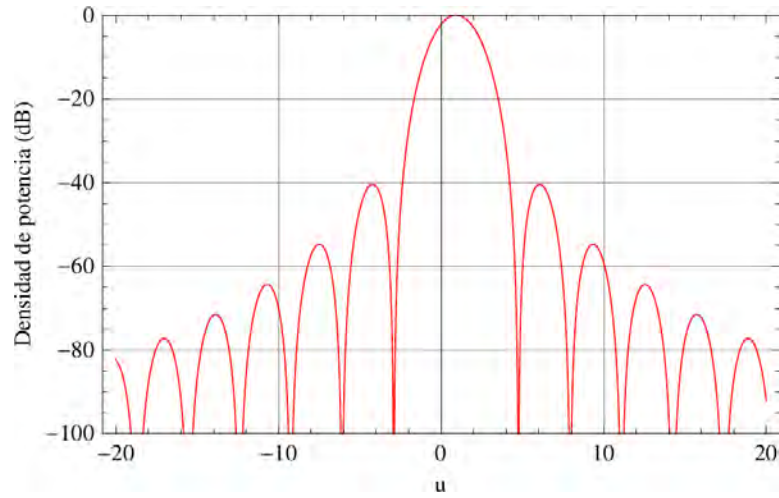


Figura 3.21: Corte del patrón de radiación cuando el detector del arreglo equivalente se desplaza una longitud de onda

## Cuando el detector se mueve dos longitudes de onda

$$u = 1.862$$

$$1.862 = 2251.7 \operatorname{sen} \theta$$

$$\theta = \operatorname{angsen} \left( \frac{1.862}{2251.7} \right)$$

$$\theta = 0.04740^\circ$$

El ángulo que se debe rotar el espejo secundario debe ser

$$\tan \alpha = \frac{0.013952}{3.138}$$

$$\alpha = \operatorname{angtan} \left( \frac{0.013952}{3.138} \right)$$

$$\alpha = 0.2547^\circ$$

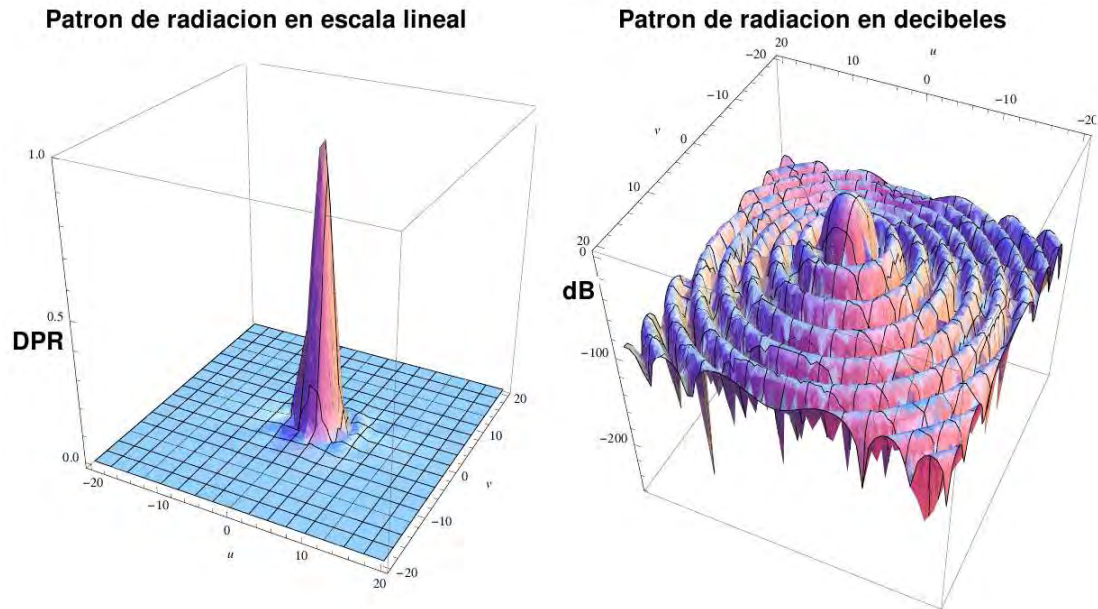


Figura 3.22: Patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 2 longitudes de onda

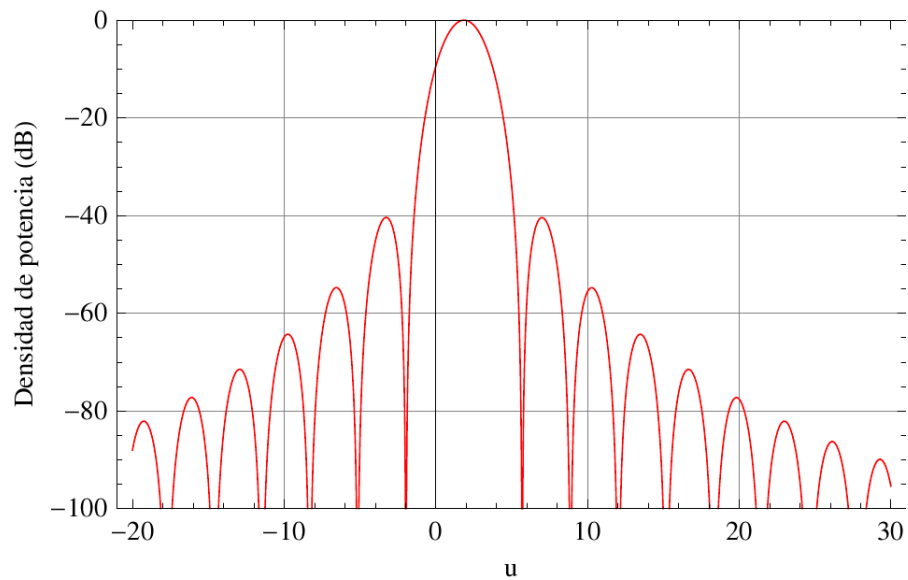


Figura 3.23: Corte del patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 2 longitudes de onda

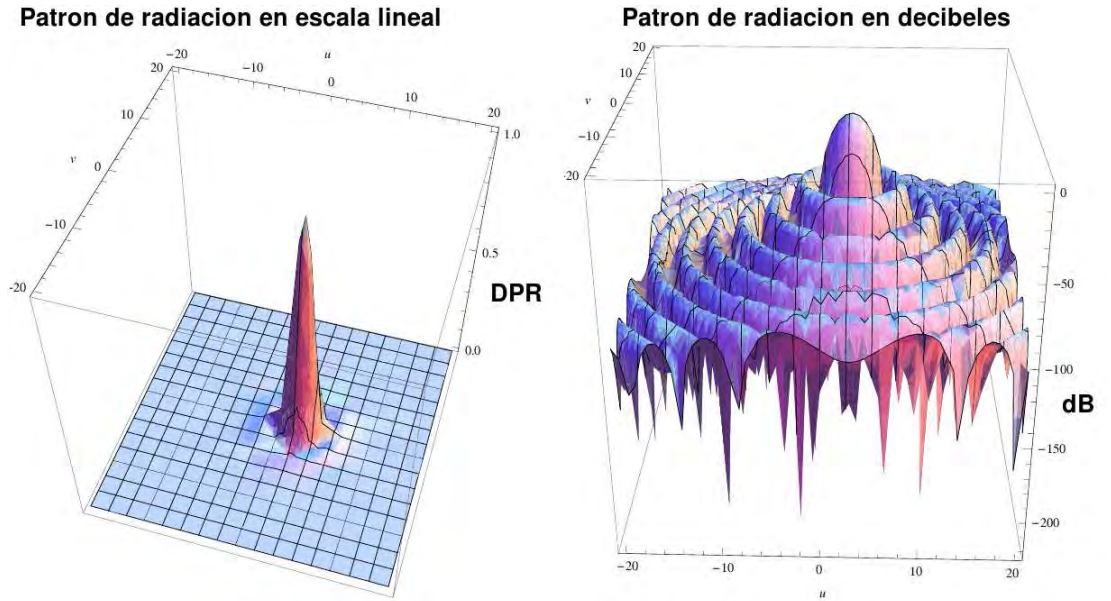


Figura 3.24: Patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 3 longitudes de onda

### Cuando el detector se mueve tres veces la longitud de onda

$$u = 2.795$$

$$2.795 = 2251.7 \operatorname{sen} \theta$$

$$\theta = \operatorname{angsen} \left( \frac{2.795}{2251.7} \right)$$

$$\theta = 0.06870^\circ$$

El ángulo que se debe rotar el espejo secundario debe ser

$$\tan \alpha = \frac{0.020928}{3.138}$$

$$\alpha = \operatorname{angtan} \left( \frac{0.020928}{3.138} \right)$$

$$\alpha = 0.3821^\circ$$

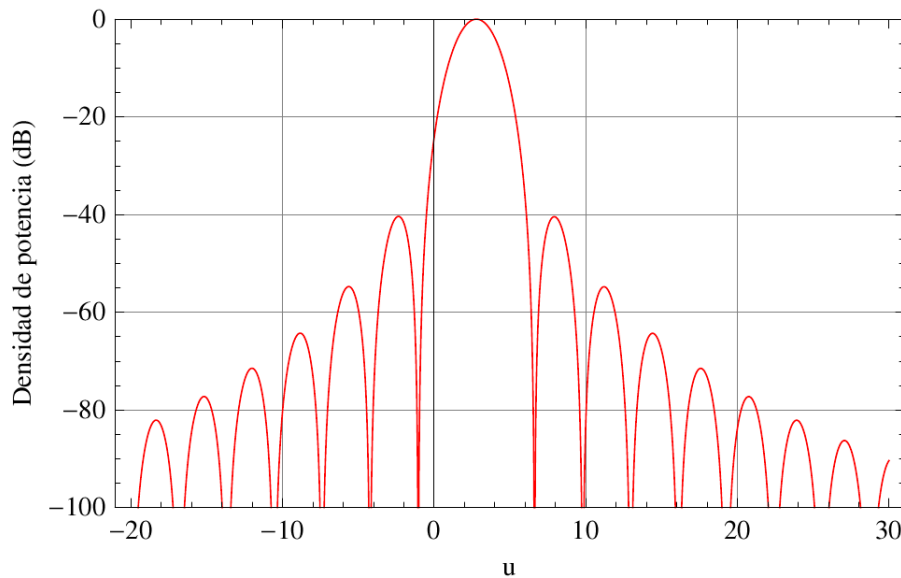


Figura 3.25: Corte del patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 3 longitudes de onda

## Cuando el detector se mueve cuatro veces la longitud de onda

$$u = 3.726$$

$$3.726 = 2251.7 \operatorname{sen} \theta$$

$$\theta = \operatorname{angsen} \left( \frac{3.726}{2251.7} \right)$$

$$\theta = 0.09414^\circ$$

El ángulo que se debe rotar el espejo secundario debe ser

$$\tan \alpha = \frac{0.027904}{3.138}$$

$$\alpha = \operatorname{angtan} \left( \frac{0.027904}{3.138} \right)$$

$$\alpha = 0.5094^\circ$$

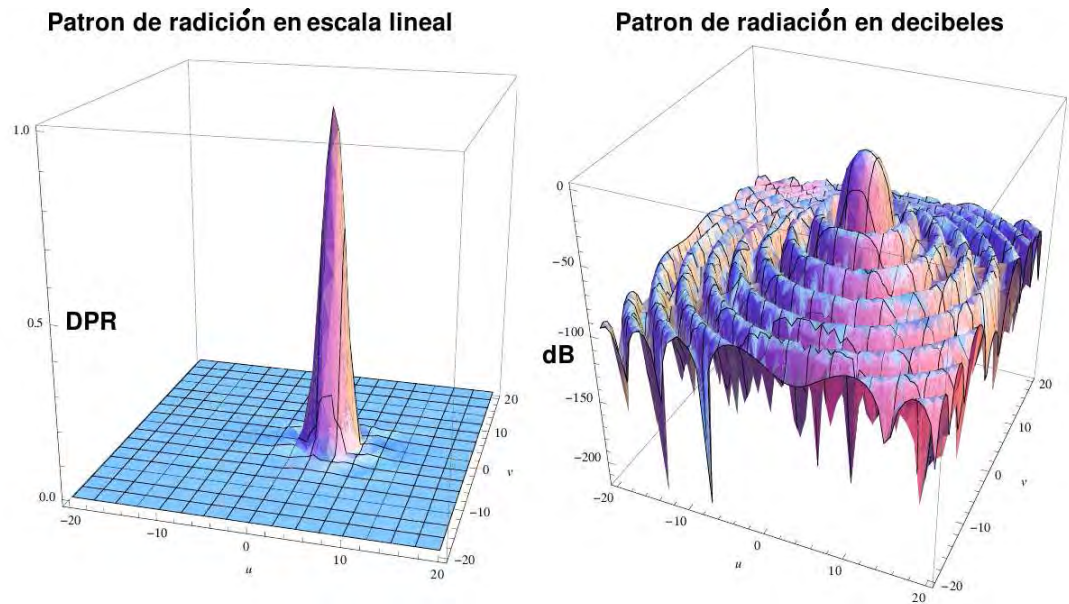


Figura 3.26: Patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 4 longitudes de onda

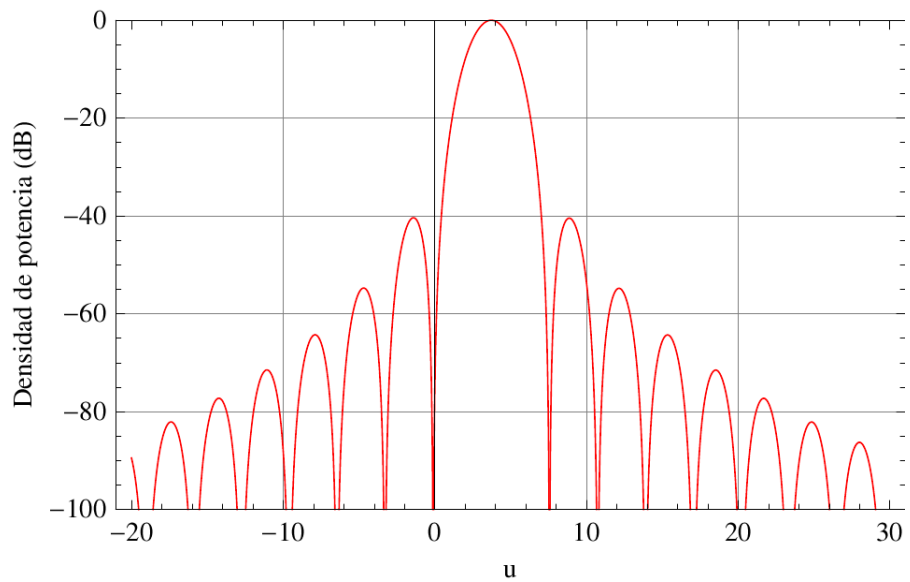


Figura 3.27: Corte del patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 4 longitudes de onda

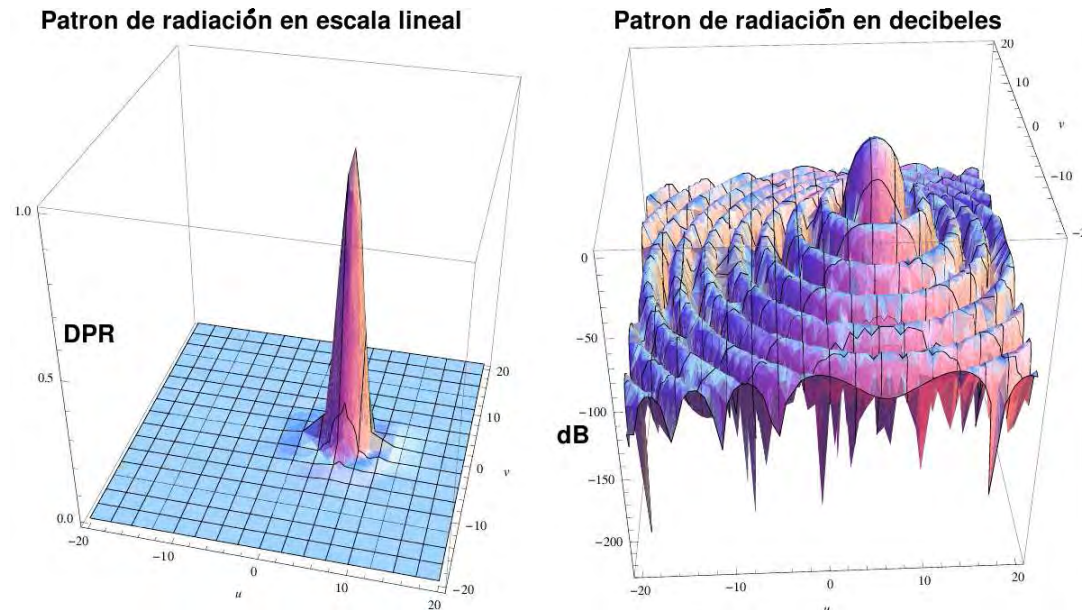


Figura 3.28: Patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 5 longitudes de onda

## Cuando el detector se mueve cinco veces la longitud de onda

$$u = 4.658$$

$$4.658 = 2251.7 \text{sen}\theta$$

$$\theta = \text{angsen}\left(\frac{4.658}{2251.7}\right)$$

$$\theta = 0.1185^\circ$$

El ángulo que se debe rotar el espejo secundario debe ser

$$\tan\alpha = \frac{0.03488}{3.138}$$

$$\alpha = \text{angtan}\left(\frac{0.03488}{3.138}\right)$$

$$\alpha = 0.6368^\circ$$



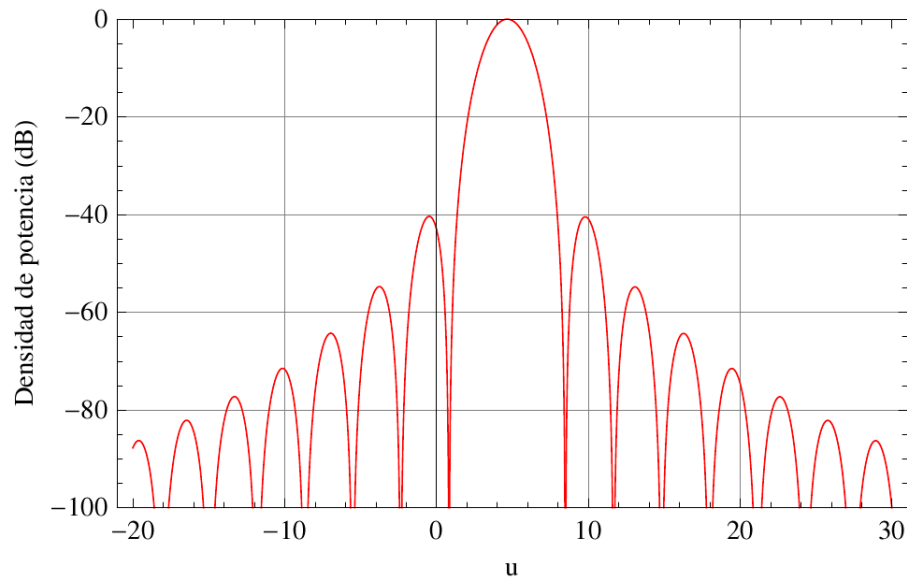


Figura 3.29: Corte del patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 5 longitudes de onda

### Cuando el detector se mueve seis veces la longitud de onda

$$u = 5.589$$

$$5.589 = 2251.7 \operatorname{sen} \theta$$

$$\theta = \operatorname{angsen} \left( \frac{5.589}{2251.7} \right)$$

$$\theta = 0.1369^\circ$$

El ángulo que se debe rotar el espejo secundario debe ser

$$\tan \alpha = \frac{0.041856}{3.138}$$

$$\alpha = \operatorname{angtan} \left( \frac{0.041856}{3.138} \right)$$

$$\alpha = 0.7641^\circ$$

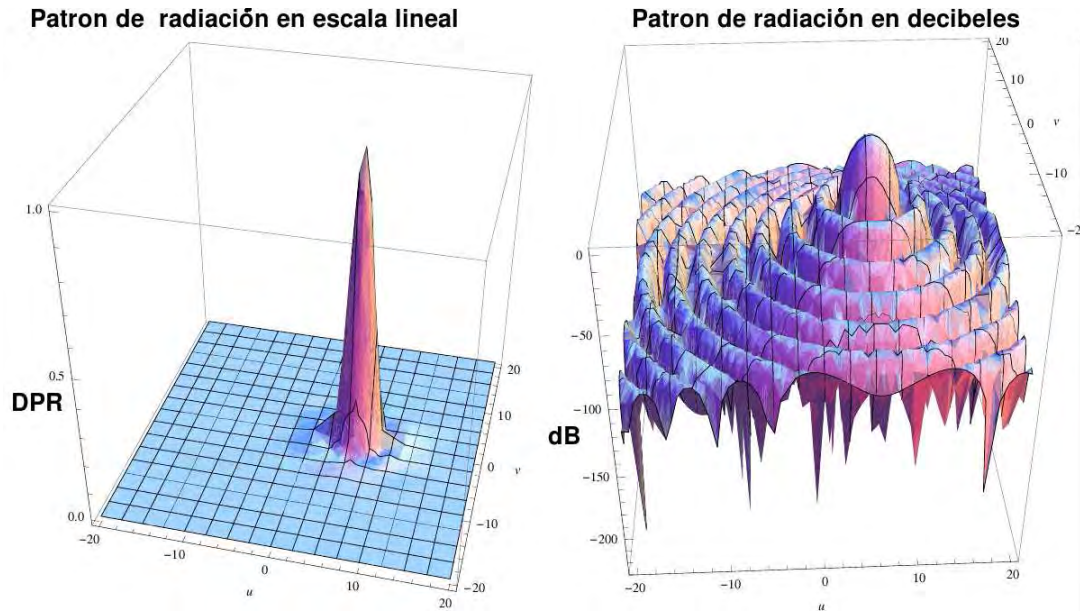


Figura 3.30: Patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 6 longitudes de onda

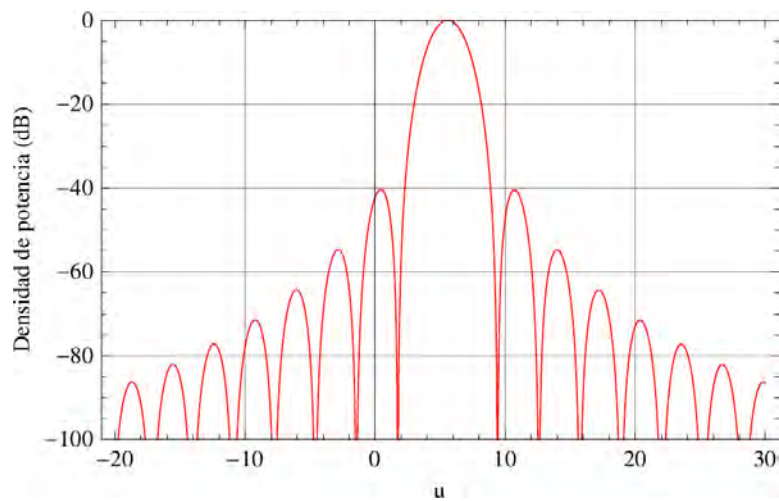


Figura 3.31: Corte del patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 6 longitudes de onda

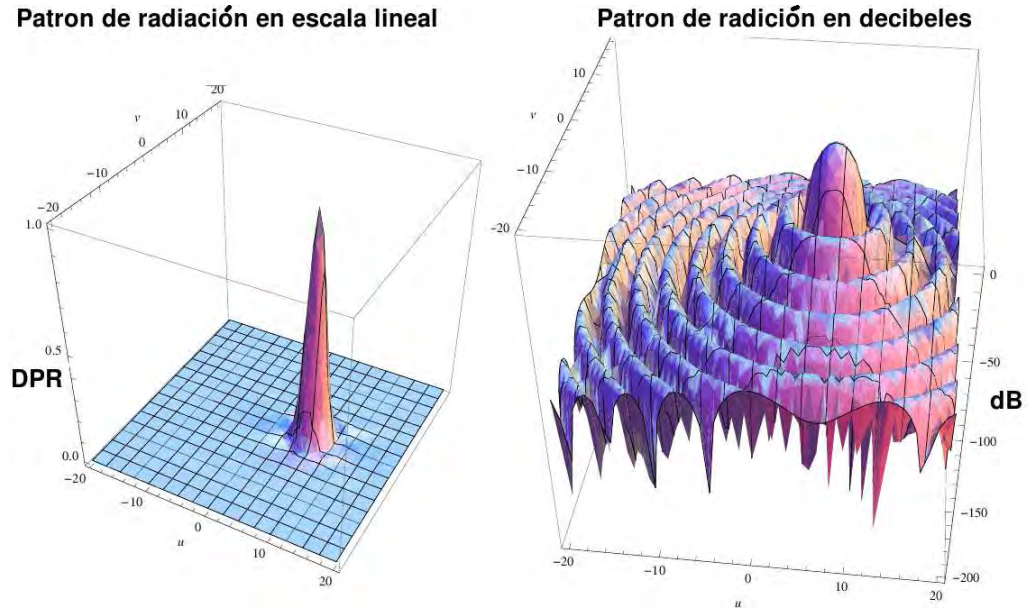


Figura 3.32: Patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 7 longitudes de onda

### Cuando el detector se mueve siete veces la longitud de onda

$$u = 6.65$$

$$6.65 = 2251.7 \operatorname{sen} \theta$$

$$\theta = \operatorname{angsen} \left( \frac{6.65}{2251.7} \right)$$

$$\theta = 0.1704^\circ$$

El ángulo que se debe rotar el espejo secundario debe ser

$$\tan \alpha = \frac{0.048832}{3.138}$$

$$\alpha = \operatorname{angtan} \left( \frac{0.048832}{3.138} \right)$$

$$\alpha = 0.8915^\circ$$

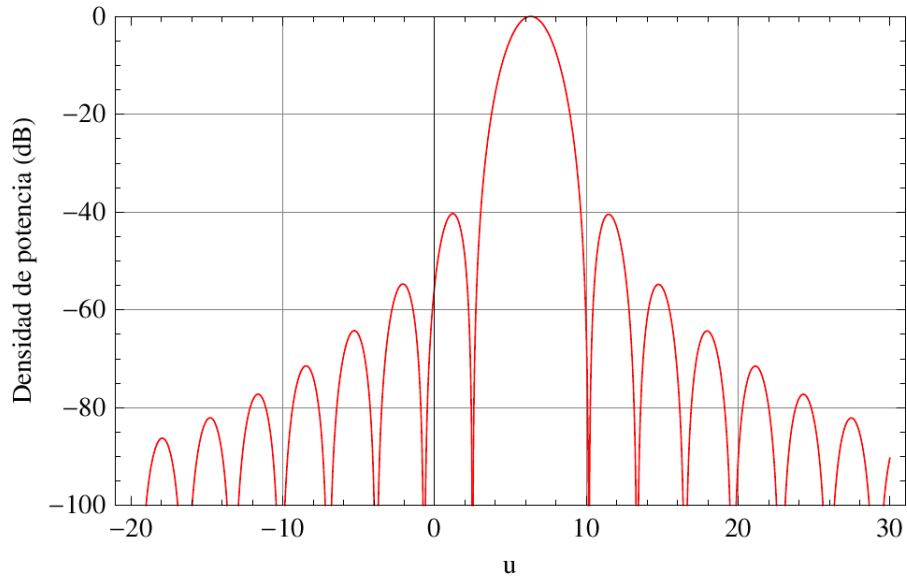


Figura 3.33: Corte del patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 7 longitudes de onda

### Cuando el detector se mueve siete y medio veces la longitud de onda

$$u = 6.987$$

$$6.987 = 2251.7 \operatorname{sen} \theta$$

$$\theta = \operatorname{angsen} \left( \frac{6.987}{2251.7} \right)$$

$$\theta = 0.1777^\circ$$

El ángulo que se debe rotar el espejo secundario debe ser

$$\tan \alpha = \frac{0.05232}{3.138}$$

$$\alpha = \operatorname{angtan} \left( \frac{0.05232}{3.138} \right)$$

$$\alpha = 0.9552^\circ$$

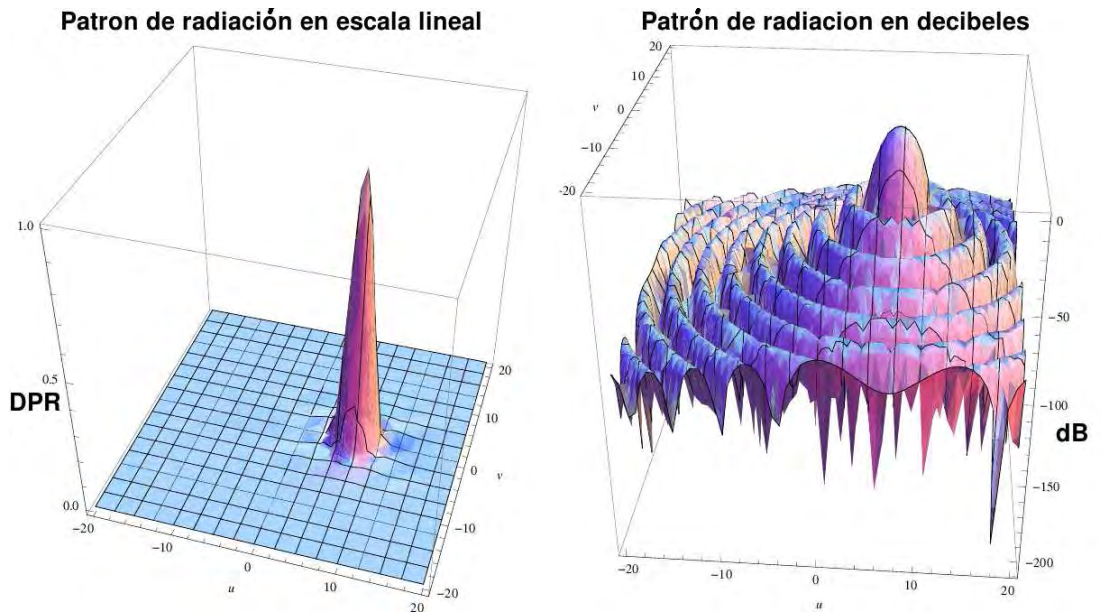


Figura 3.34: Patrón de radiación del reflector parabólico equivalente cuando el detector se desplaza 7.5 longitudes de onda

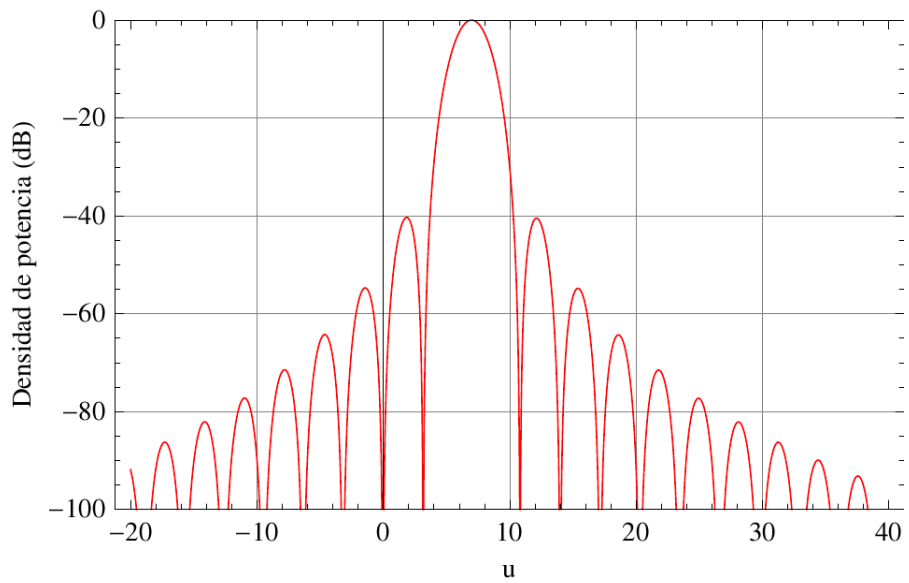


Figura 3.35: Corte del patrón de radiación del reflector parabólico equivalente con el detector desplazado siete y medio longitudes de onda

# Conclusiones

---

Del análisis óptico y utilizando la ecuación de *Gauss*, pudimos proponer una configuración completa de todo el arreglo Cassegrain. En este modelo sugerido se determinaron la distancia entre espejos, la distancia focal posterior del sistema, que es el lugar en donde se forma la imagen y es también el lugar donde debe instalarse el detector. Estas cantidades fueron corroboradas con el programa de diseño óptico *Zemax*.

Mediante el programa *Zemax* pudimos determinar los límites de rotación del espejo secundario respecto al foco del reflector parabólico. Estos valores son  $\pm 1.95^\circ$ . Estos valores son totalmente confiables, pues se realizó un acercamiento al espejo secundario con el programa *Zemax* cuando se encuentra rotado  $1.95^\circ$  y se verificó que no hubiera desbordamiento de rayos en el espejo secundario, esto quiere decir que todos los rayos se reflejan completamente en el espejo secundario y no hay pérdida de rayos.

Cuando el espejo secundario se rota en un sentido, el campo de visión se desplaza en sentido contrario. Mediante el enfoque electromagnético se puede decir que cuando se rota el espejo secundario en un sentido, el patrón de radiación se desplaza en sentido contrario.

La relación que hay entre la posición del objeto observado y la posición del espejo secundario fue resuelto de manera geométrica. La relación que se obtuvo es que  $\theta = 0.1774\alpha$ , esta relación entre  $\theta$  y  $\alpha$  es completamente lineal.

Cuando el espejo secundario comienza a rotarse, el patrón de radiación sufre aberración del tipo coma, esto es, los lóbulos adyacentes al sentido de desplazamiento aumentan de tamaño mientras que los del lado contrario disminuyen su tamaño.

Cuando el patrón de radiación se desplaza, el lóbulo principal sufre de una atenuación proporcional al desplazamiento efectuado. Aquí hay que aclarar que los resultados que se obtienen en este trabajo no consideran esta atenuación. No hay una técnica exacta que pueda determinar con exactitud esta atenuación, en artículos se ha reportado este fenómeno pero las gráficas que se reportan son experimentales, esto es, que se ha medido el patrón de radiación cuando el radiotelescopio ya se encuentra funcionando.

Este trabajo muestra los valores máximos para los cuales debe ser rotado el espejo secundario. Debido al patrón de radiación del detector, que tiende a ser esférico, entonces podemos asumir que tenemos el caso en el cual el alimentador se mueve junto con la rotación del espejo secundario. La única consecuencia que se espera cuando se pruebe el arreglo es que al ir rotando el espejo secundario, el patrón de radiación se va a desplazar en sentido contrario y se va a ir atenuando conforme se acerque al límite de rotación.

Para poder tener un buen desempeño en la intensidad de radiación obtenida, las rotaciones del espejo secundario se deben de combinar con pequeños movimientos del espejo secundario hacia o en contra del espejo primario, esto es con el objetivo de tratar de corregir las aberraciones que se producen al rotar el espejo secundario. Este proceso se debe de realizar *In situ* pues es el método más confiable para calibrar el instrumento.

En cuanto a los resultados que se obtuvieron teóricamente con el método de la apertura al determinar el patrón de radiación y los resultados al obtener el patrón de radiación con los programas de simulación, se muestra el cuadro 4.1 en donde se recaban los resultados obtenidos para un reflector parabólico

con el detector colocado en foco. Mientras que en el cuadro 4.2 se muestran los resultados del arreglo Cassegrain.

Método	HPBW	ALP
Método de la apertura	0.09389	0.24
Programa <i>Sabor</i>	0.0915	0.25
Programa <i>Grasp9</i>	0.09	0.265
Programa <i>ICARA</i>	0.097	0.26

Cuadro 4.1: Resultados obtenidos para el reflector parabólico

Para el arreglo Cassegrain que es el caso que más nos interese, podemos ver que los valores del *HPBW* y del *ALP* son muy semejantes, aquí hay que señalar, que el *HPBW* del arreglo Cassegrain es más pequeño que el *HPBW* del reflector parabólico, en el único caso en el que el valor del *HPBW* es el mismo es en la simulación con el programa *SABOR*, esto se debe principalmente a que este programa de simulación es muy sencillo. Por lo tanto al pasar de un reflector parabólico a un arreglo Cassegrain, el *HPBW* disminuye, esto nos indica que el instrumento se hace más selectivo, lo cual nos permite detectar pequeñas características en el objeto observado.

Método	HPBW	ALP
Método de la apertura	0.08604	0.22
Programa <i>Sabor</i>	0.0915	0.24
Programa <i>Grasp9</i>	0.088	0.23
Programa <i>ICARA</i>	0.09	0.21

Cuadro 4.2: Resultados obtenidos para el arreglo Cassegrain

Aquí hay que recalcar que el programa menos eficiente es el programa *SABOR* debido a que el patrón de radiación que genera, tanto de un reflector parabólico como de un arreglo *Cassegrain* es muy similar al patrón de radiación que se obtiene con el método de la apertura. Mientras que el programa que genera un patrón de radiación más cercano a uno real, es el programa *ICARA*, esto se debe principalmente a que considera las corrientes



que se generan tanto en el espejo primario como en el espejo secundario, lo cual genera campos electromagnéticos que distorsionan el patrón de radiación.

Como conclusión general podemos decir que el método de la apertura que se desarrollo, es correcto pues fué comprobado con los programas dedicados al análisis de radiotelescopios debido a que el patrón de radiación tiene el mismo ancho. Finalmente, el actuador a construirse debe lograr que el espejo secundario pueda rotarse  $\pm 1.95^\circ$ .

# Bibliografía

---

- [1] Salazar-Romero, M y Vazquez-Montiel, S. Scanner 3D: Transversal And Longitudinal Directions. Memorias SOMI XV OPT-10-1.
- [2] Hecht E. Óptica Addison Wesley 2000.
- [3] Montiel y Vazquez S. Jaramillo Núñez A. Chávez Pedraza J. Medición de una antenna de 5 metros de diámetro usando la Maquina de Medición por Coordenadas. Reporte interno. INAOE 2003.
- [4] García Campos M., Moreno Oliva V., Avendaño Alejo M., Uribe Díaz R. Prueba de una superficie hiperbólica cóncava mediante pantallas nulas cilíndricas . Reporte interno. CCADET UNAM 2008.
- [5] Lucke, I. R. Tilting Aplanat RF Telescope. IEEE Transaction on Antennas and Propagation, VOL. 46, NO. 12, December 1998
- [6] Cardanal A., Antenas., Universitat Politecnica de Catalunya. Ediciones UPC 2002
- [7] Olmedo B., Fundamentos de Electromagnetismo., Universidad de Granada. 2006
- [8] Lorrain P., Electromagnetic Fields and Waves., Third edition W. H. Freeman and Company, New York. 1988.
- [9] Milligan T. A., Modern Antenna Design., IEEE press, John Wiley & Song, inc., Publication. 2005
- [10] Volakis, J.L., SABOR: a fast analysis tool for horn and reflector antennas., IEEE Transaction on Antennas and Propagation, vol 40 Issue 3; May 1998.

- 
- [11] Pontoppidan K., GRASP9: Technical description, TICRA Engineering Consultants, Copenhagen, Denmark 2005. [www.ticra.com](http://www.ticra.com)
  - [12] Martínez, J.A. Pino, A.J. Bega, I. Arias, M., ICARA: Induced-Current Análisis of Reflector Antennas., IEEE TRANS ON ANTENNAS AND PROPAGATION, vol 47; No. 2. April 1998
  - [13] P. W. Hannan., Microwave antennas derived from the Cassegrain telescope IEEE Transaction on Antennas And Propagation, vol AP-11; May 1963
  - [14] Johnson R. Antenna Engineering Handbook, Third Edition McGraw-Hill, 1993.
  - [15] Imbriale W., Ingerson P. Wong W. Large Lateral Feed Displacements in a Parabolic Reflector. Trans. IEEE Transactions on antennas and propagation., Vol. AP-22, NO. 6, November 1974
  - [16] W.M. Baars The paraboloidal reflector antenna in radio astronomy and communication. Springer. 2007
  - [17] Hiriart, D. y Valdez J. Receptor a 43  $GHz$  para la observación de máseres astrofísicos de monóxido de silicio (SiO). Instituto de Astronomía. Ensenada B. C. México 2007