



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERIA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL EVOLUTIVA:
Optimización de Forma Basada en Modelado
Paramétrico y Reglas Evolutivas**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERIA

EN EL CAMPO DE CONOCIMIENTO: INGENIERÍA MECÁNICA

- P R E S E N T A :

FERNANDO VELÁZQUEZ VILLEGAS

TUTOR:

DR. SAÚL DANIEL SANTILLÁN GUTIÉRREZ

2009





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Marcelo López Parra

Secretario: Dr. Gabriel Ascanio Gasca

1^{er.} Vocal: Dr. Saúl Daniel Santillán Gutiérrez

2^{do.} Vocal: Dr. Jesús Manuel Dorador González

3^{er.} Vocal: Dr. Alejandro Farah Simón

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

Ciudad Universitaria, D.F. México.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Saúl Daniel Santillán Gutiérrez

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México que, a través de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, me dio la oportunidad de realizar mis estudios de Doctorado en Ingeniería.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo que me brindó al otorgarme una beca para realizar los estudios de posgrado.

A los miembros del Síno, Dr. Marcelo López Parra, Dr. Gabriel Ascanio Gasca, Dr. Saúl Daniel Santillán Gutiérrez, Dr. Jesús Manuel Dorador González, Dr. Alejandro Farah Simón por revisar este trabajo de tesis y regalarme sus valiosos consejos para mejorarla.

Al Dr. Saúl Daniel Santillán Gutiérrez por ser mi tutor y guía académica, pero sobre todo por ser mi amigo.

A los miembros del Centro de Diseño y Manufactura e Innovación Tecnológica (CDMIT), en especial al Dr. Adrián Espinosa Bautista, jefe del Centro, por hacerme sentir como en casa.

Al M.I. Antonio Zepeda Sánchez por animarse a iniciar junto conmigo el grupo de Optimización Estructural, del cual, aunque no se sepa mucho todavía, pronto tendrán noticias.

A todas aquellas personas alrededor del mundo que han dirigido su talento al desarrollo de la optimización estructural y el diseño óptimo. Somos parte del mismo equipo.

A todos los grandes amigos que han compartido conmigo alegría, logros, tristeza, frustraciones, etc., o que simplemente han estado ahí cuando he necesitado de ellos. Me gustaría incluir un listado de todos ustedes pero me dolería olvidar mencionar a alguno por culpa de mi mala memoria. En fin, ustedes saben quiénes pertenecen a esa lista.

A las personas más importantes de mi vida:

- Para empezar, a Fusami Hamai, mi amadísima novia, por estar a mi lado cada vez que estiro la mano buscando alguien en quien apoyarme. Eres mi mejor amiga... ¡Te amo Bakita!
- Por último, lo cual los coloca en el primerísimo lugar, a los miembros de mi familia. A mis amados padres, Teresa Villegas Anaya y Rodolfo Velázquez Elizalde, porque siempre han creído en mí y me han apoyado en todo los sentidos posibles. Durante todo este tiempo he tenido en la mente sus palabras: “Ay hijo, termina ese doctorado. No vayas a dejarlo, tienes que terminarlo...” Ya les puedo decir: “Listo, ya no se preocupen...” A mis también amadísimos hermanos: Manuel, Carmen y Adolfo (sé que nunca lo decimos de esta forma, pero es buena la ocasión para hacerlo). No pude encontrar las palabras perfectas para decirles lo mucho que disfruto ser su hermano y que es algo que no cambiaría por nada. Finalmente, aunque no entiendan nada de ingeniería y doctorados porque están muy chiquitas como para abrumarse con ese tipo de cosas, a mis sobrinas Camila y Karen simplemente por ser hermosas y hacerme muy feliz.

Dedicada con todo mi cariño a:

Teresa y Rodolfo

Manuel, Carmen y Adolfo

Camila y Karen

Fusami

Tabla de Contenido

Agradecimientos	
Introduccion	1
Optimizacion en el diseño	1
Alcances y Objetivos	3
Organizacion del Trabajo	4
Abstract	6
Resumen	6
Referencias	6
Capitulo 1. Metodos de Optimizacion	9
Introduccion	9
Métodos Basados en Gradiente (GMB)	10
Métodos Heuristicos (HM)	12
Optimizacion de Forma	16
Referencias	20
Capitulo 2. Modelado Parametrico	24
Introduccion	24
Curvas Parametricas	24
Curvas B-Spline	27
Referencias	30
Capitulo 3. Descripcion del Metodo	31
Introduccion	31
Descripcion del Algoritmo	31
Definicion de la Geometria	35
Análisis por Elementos Finitos	36
Modificacion de la Frontera	36
Regiones Modificables	37
Modificacion de los Puntos en la Frontera	39
Calculo de la Magnitud y la Direccion de los Desplazamientos	43
Control de Distorsiones en la Frontera	46
Criterio de Paro	48
Indice de Desempeño	49
Calculo del Indice	49
Interpretacion de PI	50
Referencias	53
Capitulo 4. Aplicacion y Resultados	55
Introduccion	55
Diseño para Esfuerzo Plano	55
Viga Corta	55
Barra delgada sometida a carga axial	57
Diseño de la Geometria de un Fruto	60
Múltiples Casos de Carga	63
Puente con 3 apoyos 7 LC	63
Llave Inglesa	66
Marcos de Bicicleta	69

Marco 1	70
Marco 2	72
Diseño para Deformacion Plana	75
Diseño de Tubos a Presion	75
Diseño de Tubo Simple a Presion	76
Diseño de Tubo Doble a Presion para un Intercambiador de Calor	79
Referencias	83
Capitulo 5. Discusion y Conclusiones	85
Introduccion	85
Discusion	85
Comparacion	89
Conclusiones	90
Referencias	91
Anexo	
OPTIMAL SHAPE DESIGN BASED ON PARAMETRIC MODELING AND EVOLUTIVE RULES USING NEIGHBORING NODES INFORMATION	92

Introducción

Optimización en el Diseño

El diseñar implica la generación de soluciones, mediante un proceso bien definido y organizado, para un problema dado que satisfagan una serie de requerimientos. La mayoría de los problemas reales que existen en la ingeniería conllevan un grado de complejidad alto, al mismo tiempo que pueden llegar a tener más de una solución posible. Durante el proceso de diseño o búsqueda de soluciones, en general, se producen varias soluciones de las cuales se elige aquella que presente mayores ventajas respecto a un criterio dado.

Debido a que el conjunto o espacio de soluciones de un problema puede ser muy grande, la exploración de todas las alternativas de solución es una tarea casi imposible y económicamente no viable. En este sentido, la cuestión inevitable que surge es: ¿cómo encontrar la solución más adecuada o que implica un máximo beneficio?, es decir, ¿cómo determinar la mejor solución a un problema de diseño si el espacio de soluciones es gigantesco?.

Tradicionalmente, la tarea de encontrar mejores soluciones se limita a la exploración de un conjunto reducido de soluciones de las cuales se descartan aquellas que presenten menores beneficios y, de ser posible, se combinan las restantes en búsqueda de sumar las buenas características de éstas en una nueva solución. A pesar de ser una forma inteligente de proceder, el resultado difícilmente será el mejor de todos, es decir, el óptimo.

Así, surge el problema de optimización en el diseño como la búsqueda de aquella solución que brinde los mayores beneficios, es decir la solución óptima, de acuerdo con algún criterio de diseño dado. El criterio de diseño que se utilice durante el proceso de diseño puede utilizarse para crear lo que se conoce como función objetivo, la cual indica que tan buena es una solución. Se dice que la solución óptima será aquella cuya función objetivo sea mínima o máxima. En el caso del diseño estructural óptimo las funciones objetivo más utilizadas son: peso, relación resistencia-peso, deformación, energía de deformación, nivel de esfuerzos.

Maxwell [1], fue el primero en plantear estas ideas hacia el final del siglo XIX. Desarrolló un método poco general para producir armaduras de mínimo peso. A principios del siglo XX Michell [2] propuso los principios de la Teoría de Distribución Óptima (Optimal Layout Theory), la cual ya contaba con más elementos conceptuales que le permiten manejar un conjunto mucho más amplio de problemas con armaduras. La posibilidad de manejar problemas de estructuras discretas le proveía de ventajas sobre aquellos métodos que sólo eran aplicables a problemas descritos por funciones continuas y que se desarrollaban paralelamente en aquella época (Haftka et al [3]).

Una dificultad fundamental que afectaba a los métodos de optimización estructural de la primera mitad del siglo XX fue la limitada capacidad de cálculo que existía. Sin computadoras con las cuales realizar análisis rápidos y precisos, era poco práctico la aplicación de los métodos que, por otra parte, tenían un excelente planteamiento teórico. Con la aparición de las computadoras y el desarrollo de aplicaciones basadas tanto en el Método de los Elementos Finitos (FEM – Finite Element Method) y el Método de los Elementos Frontera (BEM – Boundary Element Method), los métodos optimización estructural se convirtieron cada vez más en herramientas viables para resolver problemas de diseño estructural.

Por otra parte, la aparición de equipo de cómputo poderoso también permitió la inclusión de métodos heurísticos y semialeatorios, y otros basados en imitación de comportamiento natural, en la búsqueda de soluciones a problemas de optimización de estructuras discretas, como lo son las armaduras. Métodos como Algoritmos Genéticos (GA) (Holland [4], Goldberg [5], Koza[6], Velázquez et al [7], Coello [8], Erbatur [9], Sushil [10]), Recocido Simulado (SA) (Yang [11]), entre otros, se convirtieron en una alternativa para producir estructuras óptimas.

El modelado y la optimización de estructuras continuas se ha abordado empleando diferentes formas de plantear la geometría y realizar el análisis de las mismas. Por una parte, existen las propuestas en las que la geometría se modela con una malla muy fina de elementos finitos; Evolutionary Structural Optimization, ESO, es el mejor ejemplo de esta forma de trabajar (Xie [12], Steven [13], Querin [14]). Por otra parte, otros métodos utilizan modelado paramétrico para generar el contorno de la estructura en cuestión a la cual posteriormente se le aplica Análisis por Elementos Finitos (FEA - Finite Element Analysis)

(Cerroloza [15], Annicchiarico [16]), Análisis por Elementos Frontera (BEA - Boundary Element Analysis) (Cervera [17, 18]) o algún otro tipo de análisis (Sethian [19, 20]) para calcular las características de la estructura sometida a un sistema de cargas.

Alcance y Objetivos

Los métodos de optimización estructural propuestos en el pasado por investigadores de todas partes del mundo han demostrado que es posible determinar soluciones óptimas o cercanas al óptimo en este campo. Ya sea utilizando métodos de cálculo tradicionales (Haftka [3], Huang [21]) o mediante métodos heurísticos y semialeatorios, como los ya enunciados, los métodos de optimización estructural se han convertido en una alternativa real para la solución de problemas de diseño estructural. Lo anterior tiene gran relación con la actual capacidad de cómputo que permite realizar cálculos complejos rápidamente que en otra época eran casi imposibles.

A pesar de las bondades mostradas por los métodos de optimización estructural, existen algunas áreas de oportunidad en las cuales es pertinente trabajar. La propuesta del autor va en ese sentido y trata de corregir algunas deficiencias mostradas por los métodos que modelan las estructuras con base en curvas paramétricas.

El método presentado por el autor en este trabajo es una propuesta para resolver problemas de optimización de estructuras continuas, modeladas paraméricamente, sometidas a sistemas de carga externos simples o múltiples. Métodos como los propuestos por Cerroloza [15], Annicchiarico [16], Cervera [17, 18], Sethian [19], entre otros, emplean modelado paramétrico para generar el contorno de una estructura. La manera como producen la estructura óptima se basa en determinar cambios sobre dicho contorno con base en alguna regla definida para el estado de esfuerzos sobre cada región de la misma. Cada uno de ellos calcula una magnitud de desplazamiento para los puntos contenidos en el contorno de la estructura; estos puntos son desplazados en dirección perpendicular al contorno. Lo anterior se realiza en un proceso iterativo hasta que se cumple cierto nivel de satisfacción.

No obstante los resultados generados por ellos, la manera en que se calcula la dirección de los desplazamientos pierde de vista, en general, la relación intrínseca que existe entre el punto a desplazar y su vecindad. El modelado paramétrico, por otra parte, permite determinar cuantitativamente la relación geométrica que existe entre un punto y su vecindad. Utilizando esta característica del modelado paramétrico, la propuesta del autor solventa las carencias de otros métodos proponiendo una manera novedosa de calcular la dirección en la cual debe cambiar el contorno de una estructura tomando en cuenta reglas basadas en el nivel de esfuerzos presente en dichos puntos, el cual se determina empleando FEA. El resultado es un método práctico y funcional que genera soluciones óptimas a problemas de optimización en los que se desea conocer la forma óptima de una estructura sometida a múltiples casos de carga basándose en un criterio de nivel de esfuerzos homogéneo. El método se prueba en algunos problemas de estructuras bajo condiciones de esfuerzo y deformación plana mostrando resultados comparables con soluciones generadas por otros métodos.

Con base en lo descrito anteriormente, los objetivos de este trabajo son:

- Generar un método de optimización estructural basado en el modelado paramétrico que tome en cuenta la interacción inherente entre las regiones de una estructura.
- Implementar dicho método, por medio de su algoritmo, en un programa de cómputo.
- Resolver algunos problemas de estructuras sometidas a condiciones de esfuerzo y deformación planas.

Organización del Trabajo

El trabajo presentado está organizado en 5 capítulos. El Capítulo 1. Métodos de Optimización presenta brevemente aspectos generales de la optimización estructural. Se describen los dos principales tipos de métodos de optimización: Métodos Basados en el Gradiente y Métodos Heurísticos; se mencionan las características básicas de algunos de los métodos que pueden englobarse en cada una de las categorías. Se describen, grosso modo, la optimización de forma y algunos de los métodos que han abordado este tipo de problema.

En el Capítulo 2: Modelado Paramétrico se describe el modelado geométrico con base en curvas paramétricas. En primer lugar, se mencionan las características

fundamentales de algunos tipos de curvas paramétricas para posteriormente describir con mayor amplitud el modelado utilizando curvas paramétricas B-Spline que son el tipo de curva empleadas en este trabajo.

La explicación del método de optimización estructural propuesto por el autor se realiza en el Capítulo 3: Descripción del Método. Cada uno de los puntos relevantes del método, así como el algoritmo para implementarlo se abordan en este capítulo con gran amplitud haciendo hincapié en la manera de calcular los desplazamientos aplicados al contorno de las estructuras para generar la geometría óptima. Además, se describe el concepto de Índice de Desempeño (Performance Index, PI) diseñado por Querin [14], el cual es aplicado en la propuesta del autor para determinar si una estructura es mejor que todas las producidas durante el proceso de optimización.

Con la intención de demostrar su funcionalidad, el método es probado con varios casos de estudio los cuales fueron desarrollados en el pasado en otros trabajos. Estos casos de estudio, sus resultados y la comparación con sus antecesores son mostrados en el Capítulo 4: Aplicación y Resultados.

En el Capítulo 5: Discusión y Conclusiones, se hace una revisión de los resultados obtenidos en el Capítulo 4 para, con base en ellos, llegar a las conclusiones del trabajo presentado. Se incluye una comparación, en una tabla, entre el método desarrollado y algunos de sus antecesores.

Por último, al final de este documento, se incluyen tres artículos producidos a partir de los resultados de este trabajo y enviados a revistas especializadas. El primero, "Optimal Shape Design Based on Parametric Modeling and Evolutive Rules Using Neighboring Nodes Information", de ellos fue enviado a la revista Finite Element in Analysis and Design (ISSN 0168-874X). Los dos siguientes, "Optimización de Forma Basado en Reglas Evolutivas y Modelado Paramétrico Aplicado a Problemas Estructurales" y "Optimización de Forma de un Cuerpo Suspendido Basada en Reglas Evolutivas y Modelado Paramétrico: la Forma de un Fruto", se dirigieron a las revistas nacionales : Ingeniería Mecánica: Tecnología y Desarrollo de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Mecánica (ISSN 1665-7381) e Ingeniería, Investigación y Tecnología (ISSN 1405-7743) respectivamente.

Abstract

This work deals with the shape optimization of bidimensional structures, which are modeled using parametric curves B-Spline. The approach is based on level stresses, that is calculated via Finite Element Analysis (FEA). Classical evolutive rules are used for the optimization process; however, the method of boundary modification in the optimization process is neither classical nor trivial. Most of methods evolve shape applying perpendicular displacements to the points on the geometry boundary without taking in account geometric information of neighboring points. In this work is presented a method to modify shape boundary based on geometric and stress level information of points neighborhood. Several study cases are presented in order to show method performance.

Resumen

Este trabajo muestra un método para la optimización de forma de estructuras bidimensionales, los cuales se modelan utilizando curvas paramétricas B-Spline. El método propuesto está basado en el nivel de esfuerzos de las estructuras, el cual es calculado por medio de Análisis por Elementos Finitos (FEA). En el proceso de optimización se emplean reglas evolutivas clásicas; sin embargo, el método para modificar el contorno de las estructuras no es ni clásico ni trivial. La mayoría de los métodos evolucionan la forma de las estructuras aplicando desplazamientos perpendiculares sobre los puntos que conforman el contorno de las mismas sin tomar en cuenta la información geométrica de los puntos vecinos. En este trabajo se presenta un método para modificar la forma basado en dicha información geométrica y el nivel de esfuerzo de los puntos vecinos. Varios casos de estudio son presentados para demostrar el desempeño del método.

Referencias

- [1] Maxwell, J.C., "On Reciprocal Figures, Frames and Diagrams of Force", Trans Roy Soc Edinburgo, 26, 1, 1872
- [2] Michell, A.G.M., "The limits of economy of material in frame structures", Philosophical Magazine, 6, 8, 47, 589-597, 1904.

- [3] Haftka, R. T., Gürdal Z., "Elements of structural optimisation", 3era ed., Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1992.
- [4] Holland, J. H., ' *Adaptation in natural and artificial systems,*' University of Michigan Press, 1975.
- [5] Goldberg, D. E., " Genetic algorithms, in search , optimization and machinelearning", Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [6] Koza, J., "Genetic Programming, On the Programming of Computers by Means of Natural Selection", The MIT Press, London, England, 1993
- [7] Velázquez, F., Santillán, S., "Diseño Óptimo Evolutivo", Ingeniería, Investigación y Tecnología, VII 3, 139-150, 2006 (Artículo arbitrado)
- [8] Coello, C., Christiansen, A., "Multiobjective Optimization of Trusses Using Genetic Algorithms", Department of Computers Science, Tulane University, New Orleans, LA 70118, USA
- [9] Erbatur, F., Hasançebi, O., et al., "Optimal Design of Planar and Space Structures with Genetic Algorithms", Computers and Structures 75, 209-224, 2000
- [10] Sushil, J., "Genetic Algorithms as a Computational Tool for Design", Ph.D. Thesis, Indiana University, Bloomington, Department of Computer Sciences, 1993
- [11] Yang, R.L. "Convergence of the Simulated Annealing Algorithm for Continuous Global Optimization", Journal of Optimization Theory and Applications 104 Vol. 3 pp. 691-716, March 2000
- [12] Xie, Y.M., Steven, G.P., "Evolutionary Structural Optimization", Springer-Verlag London, Grain Britain, 1997
- [13] Steven, G.P., Xie, Y.M., "Evolutionary Structural Optimization with FEA", Computational Mechanics, Vol.1, pp. 27-34, 1993
- [14] Querin, O. "Evolutionary Structural Optimisation: Stress Based Formulation and Implementation" Ph.D. Dissertation. Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia, pp 15-21, April 1997
- [15] Cerrolaza, M., Annicchiarico, W., et al, "Optimization of 2D Boundary Element Models Using B-Splines and Genetic Algorithms", Engineering Analysis with Boundary Elements 24, 427-440, 2000
- [16] Annicchiarico, W., Cerrolaza, M., "Structural Shape Optimization 3D Finite-Element Models Based on Genetic Algorithms and Geometric Modeling", Finite Elements in Analysis and Design 37, 403-415, 2001
- [17] Cervera, E., Trevelyan, J., "Evolutionary structural optimisation based on boundary

representation of NURBS. Part I: 2D algorithms” , Computers and Structures, 2005

[18] Cervera, E., Trevelyan, J., “Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 3D algorithms” , Computers and Structures, 2005

[19] Sethian, J.A., Wiegmann, A., “Structural Boundary Design Via Level Set and Immersed Interface Methods”, Departments of Mathematics University of California at Berkeley

[20] Sethian, J.A., “Level Set Methods: Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Material Science”, Cambridge University Press, 1996.

[21] Huang, M., Arora, J. S.,” Optimal design with discrete variables: Some numerical experiments”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 40, pp. 165-188, 1997.

Capítulo 1. Métodos de Optimización

Introducción

La búsqueda de soluciones óptimas a problemas de ingeniería es una labor que ha sido abordada desde muchos puntos de vista y aplicando una variedad extensa de métodos. Para que una solución sea óptima tiene que cumplir con algunas características; por un lado, debe minimizar los recursos involucrados en su creación (material, espacio, tiempo, peso, etc.) y, por el otro, maximizar las funciones que debe desempeñar (eficiencia, productividad, relaciones como resistencia-peso, etc.).

El problema de diseñar o determinar una solución óptima puede resumirse como la búsqueda de un conjunto de variables de diseño que generen los mejores resultados en la solución desde el punto de vista de los criterios establecidos para el mismo. En este sentido, se debe contar con una función que indique qué tan buena es una solución, a ésta se le llama función objetivo. La función objetivo relaciona a las variables de diseño de forma que, por medio de la minimización de dicha función, se determinen los valores de las variables de diseño adecuadas para que la solución del problema sea óptima, acorde con una serie de criterios de diseño que deben ser satisfechos. De hecho, la formulación de la función objetivo involucra los diferentes criterios de diseño considerados en problema.

Un área que ha sido estudiada con gran empeño es la enfocada a la optimización de estructuras la cual pretende generar las mejores soluciones a problemas en los que una estructura está sometida a un sistema de solicitudes externo, tal como un sistema de fuerzas, de manera que dicha estructura sea la mejor posible para la situación dada. La “mejor estructura posible” debe entenderse en el sentido de los criterios de diseño empleados en un problema dado. En la optimización estructural los criterios de diseño más empleados son: mínimo peso, máxima relación resistencia-peso, mínima deformación, mínima energía de deformación, nivel de esfuerzos homogéneo, entre otros.

El conjunto de métodos desarrollados en la optimización estructural pueden agruparse en dos categorías: Métodos Basados en el Gradiente y Métodos Heurísticos (GMB y HM por sus siglas en inglés, respectivamente) (Querin [1]). Los GMB emplean

directamente información del modelo matemático que describe al problema en cuestión, para construir la función objetivo y minimizar esta última por medio de sus derivadas. En el caso de los HM, estos utilizan información del comportamiento de una solución cualquiera del problema para determinar los cambios que deben aplicarse para generar una solución más adecuada, todo esto dentro de un proceso iterativo que no implica el uso de derivadas.

La información mostrada en los siguientes apartados describe, grosso modo, las características de los métodos GMB y HM.

Métodos Basados en Gradiente (GMB)

Los métodos basados en el gradiente están basados en el cálculo de derivadas de las funciones objetivo sometidas a restricciones de diseño, con la intención de encontrar los valores de las variables de diseño que minimicen las funciones objetivo. El problema con estos métodos es la necesidad de la existencia de la derivada de dichas funciones lo cual no se cumple para muchos problemas de mecánica estructural (Huang et al [2], Haftka et al [3]). Adicionalmente, debe mencionarse que los problemas a resolver pueden estar o no sometidos a restricciones lo cual implica que se aborden con métodos o técnicas distintas. Así, para problemas sin restricciones pueden emplearse métodos basados directamente en el gradiente (cálculo diferencial), mientras que para los restringidos se cuenta con métodos basados en cálculo diferencial (multiplicadores de Lagrange o método de Kuhn-Tucker) y con aquellos basados en motores de búsqueda (programación lineal) (Haftka et al [3]).

El planteamiento de los problemas no restringidos resueltos por medio del cálculo diferencial es, en general, el siguiente. La función objetivo $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ con N variables independientes (variables de diseño), tiene su máximo o mínimo dentro de un dominio de diseño siempre y cuando se cumplan dos condiciones:

1. Existe un punto $P(x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)$ para el cual las derivadas parciales de la función objetivo son cero

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f = \frac{\partial}{\partial x_2} f = \dots = \frac{\partial}{\partial x_N} f = 0 \quad (1)$$

2. La matriz Hessiana de $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ es definida positiva en el caso de existir un mínimo o definida negativa en el caso de un máximo

$$H = \begin{pmatrix} \partial_{x_1, x_1}^2 f & \partial_{x_1, x_2}^2 f & \dots & \partial_{x_1, x_N}^2 f \\ \partial_{x_2, x_1}^2 f & \partial_{x_2, x_2}^2 f & \dots & \partial_{x_2, x_N}^2 f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_N, x_1}^2 f & \partial_{x_N, x_2}^2 f & \dots & \partial_{x_N, x_N}^2 f \end{pmatrix} \quad (2)$$

El planteamiento anterior puede ser aplicado a algunos problemas estructurales muy sencillos, no obstante, cuando los problemas son de complejidad tal que tienen que ser analizados por métodos numéricos (como el método de los elementos finitos) la segunda condición no puede cumplirse. (Querin [1])

La mayoría de los problemas de optimización están restringidos en algunas de las variables de diseño o existen relaciones entre algunas de estas variables (Haftka [3]), y pueden ser expresados de la siguiente forma:

Minimizar: $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ (3)

Bajo las restricciones de igualdad:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

Y de desigualdad $x_j \geq k, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5)$

, donde g_i es una función restricción que puede o no ser lineal, y b_i es una constante.

Dependiendo del tipo de restricciones el problema de optimización puede ser resuelto por varios métodos: eliminación de variables, multiplicadores de Lagrange, Kuhn Tucker, programación lineal, entre otros. Para una revisión más detallada de dichos métodos se pueden consultar los trabajos de Querin [1], Haftka [3], Bendsøe [4], [5] y Beale [6], entre otros.

Métodos Heurísticos (HM)

Los métodos heurísticos son métodos iterativos que siguen reglas sencillas que no implican derivadas de las funciones objetivo. Un ejemplo de una regla simple es la siguiente: si en una región de una estructura se presenta un esfuerzo elevado, éste puede ser reducido aumentando las dimensiones de la estructura en dicha zona ,y viceversa, donde el esfuerzo sea muy pequeño se disminuyen las dimensiones.

En general, los métodos heurísticos no obtienen el óptimo global del problema que pretenden resolver dado que no consideran todos los aspectos relacionados con el problema ya que sus reglas no trabajan directamente con la función a minimizar sino con las variables de diseño (Goldberg [7], Querin [1]). Lo anterior conlleva que los métodos heurísticos no siempre garantizan la solución óptima global a un problema, sin embargo, pueden hacerlo (Murty [8]). En otras palabras, pueden resolver el problema pero no garantizan que dicha solución sea óptima.

Lo anterior puede parecer una contradicción pero, con base en la inmensa cantidad de problemas resueltos, es posible afirmar que los métodos heurísticos son una herramienta poderosa en el campo de la optimización.

Algunos de los HM que han tomado gran popularidad son los que emulan fenómenos de la naturaleza o el comportamiento de adaptación de los seres vivos en el medio ambiente.

El método del Recocido Simulado (Metropolis et al [9], Aarts et al [10]), (SA por sus siglas en inglés), hace una analogía con el proceso de recocido en materiales metálicos. Cuando un material es recocido lo que se busca es llevarlo a su condición de mínima energía interna. El material es calentarlo hasta la temperatura de recristalización donde se le mantiene por un tiempo de forma que las dislocaciones desaparezcan, después se le somete a un enfriamiento lento lo cual evita que el material sufra cambios en sus propiedades debido a un choque térmico. De esta forma, el material recupera sus propiedades iniciales. En este caso, y por analogía, la energía interna del material puede ocupar el lugar de la función objetivo mientras que la temperatura equivale a la variable de diseño.

Si se considera que en un problema de diseño estructural, se piensa en la variable de diseño de manera análoga a la temperatura (T), y en la función objetivo como la energía interna, definida en un dominio discreto, la solución óptima al problema corresponde al estado de mínima energía. En cada iteración se realiza una pequeña modificación en el dominio y se mide el cambio en la función de energía (E), si el cambio en la función es negativo se acepta la modificación y, en caso contrario, se acepta con una probabilidad de α , también conocida como función de aceptación. La función de aceptación permite aceptar la mayoría de los cambios cuando α es grande, pero cuando α es pequeña la aceptación de cambios es más selectiva.

De esta manera, empezando con un valor de α grande y decrementándolo en cantidades pequeñas, se logra que el dominio se modifique gradual y lentamente hasta que se alcanza el valor mínimo de la función objetivo. Algunos de los trabajos desarrollados aplicando SA al diseño estructural pueden revisarse en Hasançebi et al [11], Orta [12] y Yang [13] entre otros.

Los Algoritmos Genéticos (GA por sus siglas en inglés) (Goldberg [7], Holland [14, et al 15], Koza [16]) son algoritmos matemáticos paralelos heurísticos e iterativos empleados ampliamente en la solución de problemas con múltiples soluciones de los cuales se requiere seleccionar la mejor. Los GA emulan el proceso de supervivencia y adaptación de las especies calculando “poblaciones de soluciones”. En este sentido, para los GA una solución es un individuo de una población. Los individuos son codificados de manera que sus características son capturadas en una cadena ordenada de información llamada cromosoma; la capacidad de supervivencia de los individuos se mide a través de la función de aptitud la cual indica qué tan bien adaptado está un individuo para sobrevivir dentro de una población y bajo las condiciones y restricciones dadas: aquellos que tengan una aptitud alta tendrán una probabilidad elevada de sobrevivir.

De manera similar a una población de seres vivos, en un GA los individuos de una población de soluciones se mezclan para producir nuevos individuos que son descendientes de los primeros. Dicha mezcla se lleva a cabo por mecanismos de selección y cruce de parejas de individuos. Además, en la naturaleza aparecen de vez en cuando mutaciones en

algunos individuos de la población; de la misma manera, los GA implementan un mecanismo de mutación que permite ampliar la diversidad en el conjunto de soluciones. Así, los mecanismos de selección, cruce y mutación, generan nuevas poblaciones de individuos en cada iteración.

La idea principal es que, con el paso de las iteraciones, la aptitud de los individuos de las poblaciones converja a un valor máximo (o mínimo) que corresponde al individuo mejor adaptado, es decir, la solución óptima. Aunque son capaces de generar soluciones óptimas e incluso óptimas globales en problemas con múltiples máximos (o mínimos), en algunos casos no aseguran la convergencia de dichas soluciones ya que dependen de cálculos y parámetros semialeatorios. (Koza [16])

Existe gran cantidad de trabajos basados en GA aplicados a la optimización estructural. En general, estos se atienden la optimización topológica estructural (Velázquez et al [17], Erbatur et al [18], Sushil et al [19], Coello et al [20], entre muchos otros). Annichiarico et al [21, 22] y Cerrolaza et al [23] son algunos de los que han empleado GA para la optimización estructural de forma.

Una variante de los GA es la Evolución Diferencial (DE y SADE Technology) (Storn, R. y Price, K. [24], Hrstka, O. y Kucerova, A. [25]). DE es un método de optimización paralelo que busca soluciones en un espacio amplio de solución utilizando, igual que los GA, poblaciones de soluciones. La diferencia principal con los GA es que DE genera las nuevas poblaciones a partir de adicionar diferencias ponderadas a los cromosomas de una población para generar nuevos individuos que, si presentan mejor aptitud, son almacenados en la nueva población. Las diferencias ponderadas son calculadas a partir de los cromosomas de los individuos lo cual proporciona, en general, información de la “dirección” en el espacio de solución hacia donde se encuentra la solución óptima. En este caso también se pretende que estas diferencias ponderadas, con el paso de las iteraciones, converjan a la posición de la solución óptima.

Dentro de los métodos heurísticos aplicados a la optimización estructural uno de los más reconocidos, desde su aparición en la década de los noventas, es el desarrollado por Xie y Steven [26] llamado Optimización Estructural Evolutiva (ESO por sus siglas en inglés). La característica principal del método ESO es la remoción lenta de material en un dominio de

diseño discretizado como una malla fina de elementos finitos. Dicha remoción de material se realiza quitando elementos finitos de la malla con base en la siguiente regla:

$$\sigma_i < RR \cdot \sigma_{\text{Máx}} \quad (6)$$

, donde σ_i es el esfuerzo de von Mises del i-ésimo elemento en el dominio, $\sigma_{\text{Máx}}$ es el esfuerzo máximo de von Mises en la estructura y RR es la tasa de remoción cuyo valor debe ser pequeño (0.01, 0.001).

Aquellos elementos que cumplan la relación anterior se remueven del dominio y se vuelve a calcular los esfuerzos en la estructura resultante. La relación se vuelve a aplicar, se remueven los elementos y se repite el proceso. Así se continúa hasta alcanzar un estado permanente, es decir, que no haya más elementos que cumplan la regla. En este punto se actualiza el valor de la tasa de remoción de la siguiente manera

$$RR_t = RR_{t-1} \cdot RE \quad (7)$$

, donde RE es la tasa de evolución.

Con el valor actualizado de la tasa de remoción se repite el proceso hasta que sea necesario volver a actualizarlo. El proceso iterativo se repite hasta que se satisface algún criterio de paro, por ejemplo, se alcanza el valor de un esfuerzo de diseño (fluencia, resistencia máxima, etc.), o se alcanza el valor de la tasa de remoción igual a la unidad.

La adaptación de la tasa de remoción de manera gradual es lo que le da el nombre de Evolutivo al método ya que el valor de la tasa no cambia sino hasta que se alcanza un cierto nivel de optimización. Algunos de los trabajos realizados aplicando este método pueden revisarse en: Querin[1], Qing et al [27], Kim et al [28], Lencus et al [29], Liang et al [30]

Otro método que emula la manera en que trabaja la naturaleza es el propuesto por (Mattheck [31], [32] entre otros), éste se basa en el crecimiento adaptivo natural de los árboles. Su planteamiento considera el hecho de que la superficie un tronco crece adaptando su forma a las condiciones de carga sobre él, generando una superficie sometida a un

esfuerzo uniforme. Al presentarse un concentrador de esfuerzos, como puede ser un nudo en la madera o una rama, la superficie de la rama se adapta de manera que se mantenga el nivel de esfuerzos uniformes. Adicionalmente, dicho crecimiento adaptativo tiende a generar un diseño de mínimo peso. El método emplea el Análisis por Elementos Finitos (FEA) para calcular los esfuerzos en cada iteración.

La adaptación de las “reglas de crecimiento biológico” al problema de diseño óptimo estructural se lleva a cabo de la siguiente manera: Se propone una forma inicial de la estructura y se aplica FEA utilizando un mallado fino de espesor constante en la superficie de la estructura mientras que el resto se malla grueso, además la parte exterior de la malla se asocia con un módulo de elasticidad menor. Esta capa de mallado fino emula al anillo exterior de un tronco. Se identifican en esta capa las zonas de máximo y mínimo esfuerzo para definir si dichas zonas serán “adelgazadas” o “reforzadas”. Tales modificaciones en la capa exterior se llevan a cabo calculando un vector de desplazamientos (normal a la superficie) con base en la diferencia entre el nivel de esfuerzos en la superficie y un valor de referencia en la estructura (esfuerzo promedio, esfuerzo máximo, etc.). Una vez modificada la superficie del dominio, se iguala el módulo de elasticidad del exterior con el del interior de la estructura y se evalúa si existen zonas de esfuerzo alto o bajo que deban ser tratadas. De existir dichas zonas, se actualiza la capa superficial de la malla con el módulo de Elasticidad bajo y se repite el FEA. El proceso se continúa hasta que el nivel de esfuerzos llega a un nivel homogéneo en todo el dominio o modelo. Otros autores que han trabajado en optimización basada en crecimiento biológico son: Cai et al [33], Erman et al [34] y Wessel et al [35].

Optimización de Forma

Dentro de los métodos de optimización se pueden identificar un conjunto de ellos enfocados en resolver la pregunta ¿cuál es la forma que debe tener una estructura bajo ciertas condiciones de operación para considerarse óptima? Para responder esta pregunta lo primero que debe considerarse es la necesidad de saber de qué depende la forma, o dicho de otra manera, cuáles son las variables de diseño de las que depende la geometría de una estructura.

En este sentido, dos tipos de métodos pueden ser identificados. En primer lugar

aquellos que utilizan los elementos de una malla de elementos finitos como parte del conjunto de variables de diseño y, en segundo lugar, los métodos que toman a los nodos en una malla (ya sea de elementos finitos o elementos frontera) como parte de las variables de diseño. Al primer conjunto pertenecen los métodos como ESO (descrito en el apartado anterior) en el que la optimización de la forma de una estructura se genera quitando material, es decir, quitando elementos en la periferia de la malla. Por otra parte, métodos como los propuestos por Mattheck [31, 32], Ramm et al [36], Maute et al [37], Sethian et al [38], Cerrolaza et al [23], Annichiarico et al [21,22], Cervera et al [39, 40], entre otros, pertenecen al segundo grupo en los que la frontera, y por ende su forma, se modifica a partir de las características de los nodos en el contorno de la estructura. Una característica, en este sentido, es el resultado de aplicar una acción externa (sistema de fuerzas) sobre la estructura, es decir, esfuerzos, deformaciones, energía interna, etc.

El FEA es el tipo de análisis más empleado en el cálculo de las características, ya sea en elementos o nodos, de una estructura cuya forma quiere se optimizada (Mattheck [31, 32], Ramm et al [36], Maute et al [37], Cerrolaza et al [23], Annichiarico et al [21, 22], Xie [26]). Otros tipos de análisis que han sido empleados con éxito, cuando las variables de diseño son los nodos en la estructura, son el Análisis por Elementos Frontera (BEA – Boundary Element Analysis) (Cervera [39, 40]) y el basado en el método “Explicit Jump Immersed Interface” (Sethian [38]). Cada uno de los tipos de análisis tienen ventajas y desventajas, cuya discusión no se encuentra dentro de los objetivos de este trabajo. No obstante, hay que destacar que cada uno de ellos cumplen con el propósito encomendado: el cálculo de las características en una estructura resultantes por la acción de un sistema externo.

Para finalizar es importante señalar algunos puntos de interés. Cada uno de los métodos desarrollados durante la historia de la optimización estructural o diseño estructural óptimo tienen aspectos similares en cuanto a las reglas que los gobiernan y las acciones que realizan para llevar a cabo su labor. En un sentido estricto y llano, se puede decir que, aunque se ejecutan de con base en ideas diferentes, sus formulaciones son muy parecidas y en algunos casos iguales. Por ejemplo, las reglas empleadas por Xie y Steven en ESO, por el método de Cervera o el de Anicciarico e incluso el de Mattheck, entre muchos más, son prácticamente las mismas. Entonces, la pregunta lógica que surge es “¿qué están aportando cada uno de ellos?” La respuesta puede no ser clara en primer instancia; los esfuerzos

realizados por estas y muchas otras personas, aunque basados en preceptos similares, generaron maneras independientes, ingeniosas y sofisticadas de abordar un problema común a muchas áreas de la ingeniería: la búsqueda de la mejor solución a un problema.

A pesar de que varios de los métodos se desarrollaron casi de manera simultánea, en diferentes partes del mundo y sin aparente comunicación entre sus creadores, los preceptos en los que se basan, como ya se mencionó, son similares. Lo anterior es natural dado que los problemas que resuelven no fueron, en general, planteados por ellos sino que ya existían.

La esencia de cada uno de los métodos no se encuentra en las reglas que siguen para evaluar la geometría de una estructura, sino en la forma en que la modifican. Aunque en apariencia todos actúan de la misma manera, es decir, aplicando gradualmente e iterativamente pequeños cambios en el contorno de la estructura, en realidad no son iguales. Annichiarico[21, 22] elige, combina y evalúa para volver a elegir, según las reglas de los GA, posibles soluciones agrupadas en poblaciones. ESO [26] actúa removiendo o adicionando, literalmente, segmentos de material. En el caso de Mattheck [31, 32] y Cervera [39, 40], alteran el contorno de una estructura desplazándola en dirección normal, aunque el primero lo hace emulando crecimiento biológico (adaptando tanto forma y propiedades mecánicas), mientras que el segundo lo lleva a cabo sacando provecho de las propiedades del modelado paramétrico del contorno.

En los métodos que ejecutan remoción o adición de material existen diferencias fundamentales. En el caso de ESO la mínima cantidad de material que se puede remover o adicionar por iteración es igual a un elemento finito en cada zona donde se realiza, lo que explica el porqué dicho método requiere de mallas muy finas. Mattheck [31, 32] aplica desplazamientos basados en las relaciones entre el esfuerzo nodal y el esfuerzo de referencia en la estructura. Aunque Cervera [39, 40] emplea las mismas relaciones para decidir qué puntos modificar, el valor de los desplazamientos aplicados a dichos puntos tiene más que ver con las relaciones que guardan los nodos del contorno con los puntos de control que definen las curvas paramétricas de la geometría. La propuesta de Sethian basa los desplazamientos de la frontera tanto en el nivel de esfuerzos como en el valor de la curvatura medidos en aquellos puntos en los que se interseca con una malla externa fija, de esta forma evita la aparición de concentradores de esfuerzo.

Como se observa en la breve explicación dada de cada uno de los métodos de optimización estructural anteriores, su principal aportación proviene de su habilidad para cambiar adecuadamente la geometría de las estructuras solución de un problema dado. Aunque todos los métodos generan cambios graduales e iterativos en el contorno de la geometría de una estructura, cada uno tiene su manera particular de hacerlo y, que en general, generan resultados muy similares.

Existen algunos problemas estándar cuya supuesta solución óptima es bien conocida (soluciones de estructuras de Mitchel). Sin embargo, si se comparan las soluciones estándar de diferentes métodos, resulta patente que éstas son similares mas no iguales. En ese sentido, no es posible hablar de una solución óptima general para los problemas de optimización estructural, incluso los más simples. Lo anterior es una situación inevitable derivada de las diferencias, pequeñas o grandes, en la formulación de los diferentes métodos de optimización y, por ende, del tratamiento que le dan a la información. En general, dos métodos diferentes aplicados al mismo problema no generarán la misma solución óptima; sin embargo, las soluciones producidas guardarán gran similitud entre ellas (ver Figura 1.1).

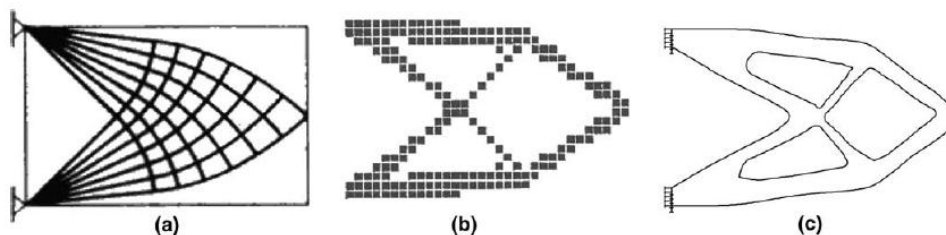


Figura 1. 1: (a), (b) y (c) muestran la solución óptima para una viga corta obtenidas por los métodos de Rozvany, Chu, y Xie respectivamente. Aunque corresponden al mismo problema las soluciones no son iguales, sin embargo, guardan entre ellas una gran similitud (Imagen tomada de Cervera [39])

El método de optimización propuesto por el autor de este trabajo pertenece al mismo grupo de métodos descrito, en los que se modifica gradual e iterativamente el contorno de la estructura. De manera similar a como lo hacen Mattheck, Cervera, Annichiarico, entre otros, el método desplaza la frontera en cada iteración con base en el nivel de esfuerzos existente en ella. Guarda una similitud importante con lo propuesto por Cervera, en el sentido de que emplea las propiedades del modelado paramétrico para generar contornos suaves y evitar la aparición de concentradores de esfuerzo.

Como se describe a detalle en el **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** la diferencia fundamental en el cálculo de los desplazamientos necesarios para cambiar el contorno de una estructura, estriba en que la dirección de estos se calcula con base en la información de toda la vecindad de los puntos en lugar de hacerlo con la información particular de dichos puntos. La información de la vecindad cada uno de los puntos del contorno viene dada por los valores de las funciones de interpolación con las que se modela; dichos valores son una medida de la injerencia de los puntos de control en la posición de los puntos del contorno. El resultado de esta forma de proceder es que, en lugar de generar desplazamientos normales al contorno, se producen desplazamientos cuya dirección considera la información de la vecindad en lugar de sólo la de un punto particular.

Referencias

- [1] Querin, O. "Evolutionary Structural Optimisation: Stress Based Formulation and Implementation" Ph.D. Dissertation. Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia, pp 15-21, April 1997
- [2] Huang, M., Arora, J. S., "Optimal design with discrete variables: Some numerical experiments", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 40, pp. 165-188, 1997.
- [3] Haftka, R. T., Gürdal Z., "Elements of structural optimisation", 3era ed., Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1992.
- [4] Bendsøe, M. P., Rasmussen, J., Rodrigues, H. C., "Topology and boundary optimization as an integrated tool for computer aided design", Engineering Optimization in Design Processes, Proceedings of the International Conference, Karlsruhe Nuclear Research Center, Germany, pp. 27 - 34, Sep 3-4, 1990.
- [5] Bendsøe, M. P., "Optimization of structural topology, shape and material", Springer, Berlin, 1995.
- [6] Beale, E. M. L., "Introduction to optimization", John Wiley & Sons, 1988.
- [7] Goldberg, D. E., "Genetic algorithms, in search, optimization and machine learning", Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [8] Murty, K.G., "Operations research. Deterministic optimization models", Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [9] Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., Teller, E., "Equation of

state calculations by fast computing machines”, J. Chem. Physics, 21(6), pp 1087 - 1092, 1953.

[10] Aarts, E. et Korst, J. “Simulated annealing and Boltzman machines: a stochastic approach to combinatorial optimization and neural computing”, Great Britain: Courier International, Tiotree, Essex, 1989.

[11] Hasançebi, O., Erbatur, F. “Layout optimisation of trusses using simulated annealing”, Advances in Engineering, 2002, vol. 33, pp. 681-696

[12] Orta, B. “Optimización de Láminas Reticuladas de una Capa”, Informes de la Construcción, 511 Vol. 60, 59-72, Madrid, Julio-Septiembre 2008.

[13] Yang, R.L. “Convergence of the Simulated Annealing Algorithm for Continuous Global Optimization”, Journal of Optimization Theory and Applications 104 vol. 3 pp. 691-716, March 2000.

[14] *Holland, J. H., 'Adaptation in natural and artificial systems,' University of Michigan Press, 1975.*

[15] *Holland, J. H., 'Hidden order - How adaptation builds complexity,' Addison-Wesley Publishing Company, 1996.*

[16] Koza, J., “Genetic Programming, On the Programming of Computers by Means of Natural Selection”, The MIT Press, London, England, 1993

[17] Velázquez, F., Santillán, S., “Diseño Óptimo Evolutivo”, Ingeniería, Investigación y Tecnología, VII 3, 139-150, 2006 (Artículo arbitrado)

[18] Erbatur, F., Hasançebi, O., et al., “Optimal Design of Planar and Space Structures with Genetic Algorithms”, Computers and Structures 75, 209-224, 2000

[19] Sushil, J., “Genetic Algorithms as a Computational Tool for Design”, Ph.D. Thesis, Indiana University, Bloomington, Department of Computer Sciences, 1993

[20] Coello, C., Christiansen, A., “Multiobjective Optimization of Trusses Using Genetic Algorithms”, Department of Computers Science, Tulane University, New Orleans, LA 70118, USA

[21] Annicchiarico, W., Cerrolaza, M., “Optimization of Finite Element Bidimensional Models: an Approach Based on Genetic Algorithms”, Finite Elements in Analysis and Design 29, 231-257, 1998

[22] Annicchiarico, W., Cerrolaza, M., “Structural Shape Optimization 3D Finite-Element Models Based on Genetic Algorithms and Geometric Modeling”, Finite Elements in Analysis and Design 37, 403-415, 2001

[23] Cerrolaza, M., Annicchiarico, W., et al, “Optimization of 2D Boundary Element Models

Using B-Splines and Genetic Algorithms”, Engineering Analysis with Boundary Elements 24, 427-440, 2000

[24] Storn, R., Preece, K., “Differential Evolution – A Simple and Efficient Adaptive Scheme for Global Optimization over Continuous Spaces”, International Computer Science Institute, Berkeley, CA., 1997

[25] Hrstka, O., Kucerova, A., “SADE Technology”, Klobouk – Faculty of Civil Engineering, Czech Technical University in Prague, 2001

[26] Xie, Y.M., Steven, G.P., “Evolutionary Structural Optimization”, Springer-Verlag London, Great Britain, 1997

[27] Qing, L., Steven, G.P., et al, “Evolutionary Optimisation for Cross Sectional Shape of Torsional Shafts”, Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia

[28] Kim, H., García, M.J., et al, “Fixed Grid Finite Element Analysis in Evolutionary Structural Optimisation”, Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia

[29] Lencus, A., Querin, O.M., et al, “Modifications to the Evolutionary Structural Optimisation (ESO) Method to Support Configurational Optimisation”, Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia

[30] Liang, Q.Q., Xie, Y.M., “Optimal Selection of Topologies for the Minimum-Weight Design of Continuum Structures with Stress Constraints”, Proc. Instn. Mech. Engrs. Vol 213 Part C. 1998

[31] Mattheck, C., “Design in Nature- Learning from Trees”, Springer Verlag, Heidelberg, 1998

[32] Mattheck, C., “Teacher Tree: The Evolution of Notch Shape Optimization from Complex to Simple”, Engineering Fracture Mechanics 73, 1732-1742, 2006

[33] Cai, R., Cai, S., et al, “A Novel Method of Structural Shape Optimization Coupling BEM with an Optimization Method Based on Biological Growth”, Structural Optimization 15, 296-300, Springer Verlag, 1998.

[34] Erman, T.A., and Güneri, A., “Shape Optimization with the Biological Growth Method: a Parameter Study”, Engineering Computations Vol. 13 No. 8, pp. 4-18, 1996

[35] Wessel, C., Cisilino, A., Sensale, B., “BEM Implementation of the Biological Growth Method for Structural Shape Optimisation”, Advances in Boundary Element Techniques, 2003

[36] Ramm, E., et al, “Adaptive Topology and Shape Optimization”, Computational Mechanics – New Trends and Applications, CIMNE, Barcelona, Spain, 1998

[37] Maute, K., Ramm, E., “Adaptive Topology Optimization”, Structural Optimization 10, 100-112, 1995

- [38] Sethian, J.A., Wiegmann, A., “Structural Boundary Design Via Level Set and Immersed Interface Methods”, Departments of Mathematics University of California at Berkeley
- [39] Cervera, E., Trevelyan, J., “Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 2D algorithms” , Computers and Structures, 2005
- [40] Cervera, E., Trevelyan, J., “Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 3D algorithms” , Computers and Structures, 2005

Capítulo 2. Modelado Paramétrico

Introducción

El modelado paramétrico tiene una amplia aplicación en los sistemas CAD desde hace varias décadas. Esto se debe a su capacidad de generar geometrías complejas de manera simple; además, las geometrías así producidas son muy flexibles y adaptables a los cambios. Otra característica fundamental del modelado paramétrico es la suavidad de los contornos o superficies que produce. Hoy en día se pueden encontrar frecuentemente productos, estructuras, modelos, etc. que contienen elementos modelados por medio de curvas paramétricas.

A continuación se describe brevemente las características del modelado en 2D utilizando curvas paramétricas. Las curvas B-Spline son explicadas de manera más detallada pues son pieza fundamental del método de optimización desarrollado en este trabajo.

Curvas Paramétricas

Una curva paramétrica en el espacio tiene la siguiente forma:

$$F(u) : [0, 1] \rightarrow (x(u), y(u), z(u)) \quad (1)$$

, donde $x(u), y(u), z(u)$ son 3 funciones reales. Así, la función $F(u)$ mapea un valor real u en un intervalo cerrado $[0, 1]$ a un punto en el espacio $(x(u), y(u), z(u))$. Si la función $F(u)$ es eliminada de (1), entonces la función $F(u)$ mapea a un punto en el plano (Shene [1], Chaudhary [2]). En realidad, el intervalo en el que mapea una curva paramétrica no es necesariamente $[0, 1]$, sino que pueden considerarse dos valores reales cualesquiera; sin embargo, este intervalo, al que se le puede llamar normalizado, es el que se usa con mayor frecuencia.

Las funciones $x(u), y(u), z(u)$ pueden ser de cualquier tipo, aunque las más extensamente usadas son polinomios y relaciones entre polinomios. Una función paramétrica

polinomial puede representar un conjunto amplio de geometrías tanto en el espacio como en el plano. Dentro de este tipo de curvas se encuentran: Bezier, Bezier Racionales, B-Splines y NURBS. Cada una de éstas tiene características particulares que le proveen cierto nivel de sofisticación y, por lo tanto, una capacidad de representar geometrías, siendo cada una más sofisticada que la anterior.

La [Figura 2.1](#) muestra esquemáticamente la capacidad de representación de cada una de ellas.

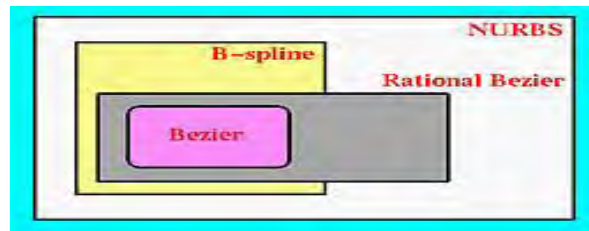


Figura 2.1: Esquema que ilustra la capacidad de representación de cada una de las curvas paramétricas. El rectángulo exterior indica el total de las geometrías que pueden representarse en el espacio o plano (Figura tomada de Shene [1])

Estas curvas son construidas a partir de algoritmos de interpolación que trabajan sobre un conjunto de puntos llamados puntos de control, los cuales definen aristas a las cuales la curva trata de adaptarse de acuerdo con su capacidad de representación, ver [Figuras 2.2 y 2.3](#).

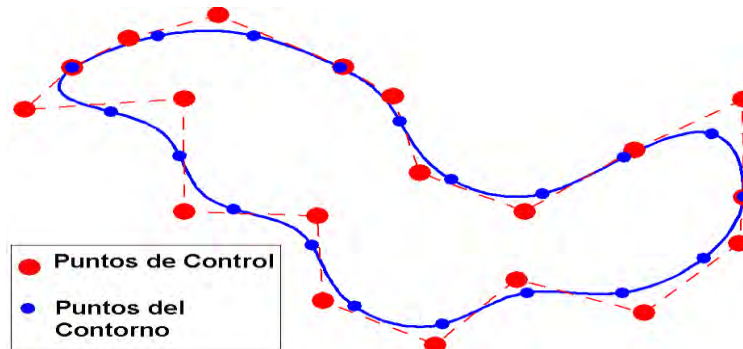


Figura 2. 2: La línea continua es una curva B-Spline de 3er grado, la línea discontinua representa las aristas definidas por los puntos de control

Aunque las Bezier Racionales tienen la capacidad de representar completamente circunferencias o elipses (geometrías aparentemente simples pero que no son fáciles de representar), el grado de los polinomios necesarios para construirlos es dependiente del

número de puntos que se utilicen, por lo que, al igual que las Bezier, requieren mayor cantidad de recursos de cómputo para ser trabajadas que las curvas B-Splines y NURBS, ya que el grado de éstas no depende del número de puntos de control.

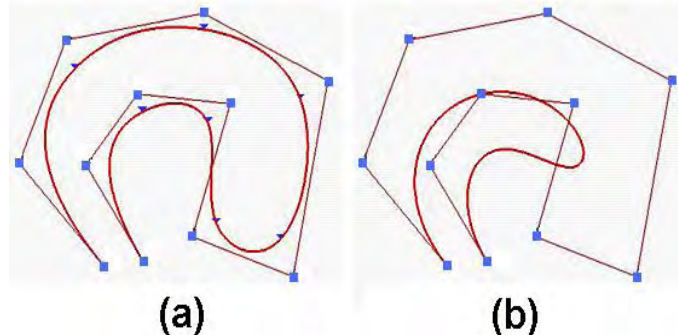


Figura 2.3: Las Curvas B-Spline se adaptan mejor, con polinomios de menor grado, que las curvas Bezier al mismo conjunto de puntos de control (10 en este caso). (a) curva B-Spline de 3er Grado, (b) curva Bezier de grado 10 (Figura tomada de Shene [1])

Por otra parte, las curvas B-Spline, a pesar de que son menos sofisticadas que las NURBS, pueden representar adecuadamente, con menor cantidad de recursos computacionales, geometrías que no sean circunferencias, elipses, entre otras. Lo anterior debido a que la definición de las B-Spline implica polinomios mientras que las NURBS emplean cocientes de polinomios.

26

Por las razones anteriores, en este trabajo se emplean B-Spline para representar la geometría de las estructuras a optimizar, dado que el modelado con este tipo de curvas genera un equilibrio entre capacidad de representación geométrica y consumo de recursos de cómputo. Además, sólo se emplean B-Spline ancladas, las cuales muestran dos características:

- El número de puntos de control que se emplean para construirla es igual al número de parámetros que se utiliza para generar las funciones base.
- La curva pasa por los puntos de control inicial y final de manera tangente al polígono que definen los puntos de control (Ver [Figura 2.2\(a\)](#))

Estas propiedades son importantes en este trabajo porque las estructuras a optimizar necesitan de puntos de apoyo o restricciones que no cambien de posición durante el proceso, lo cual es satisfecho por las B-Spline ancladas.

La explicación que se da a continuación sobre las curvas B-Spline corresponde a las B-Spline ancladas.

Curvas B-Spline

Una B-Spline de grado p es una curva paramétrica polinomial definida por segmentos, cada uno de estos segmentos es en realidad una curva Bezier de grado p . La conjunción de dichos segmentos provee a la B-Spline su capacidad de representación geométrica y una gran flexibilidad. Observando la [Figura 2.2](#), cada segmento de curva separado por los puntos del contorno es en realidad una curva Bezier de grado 3.

Si se necesita modificar la forma de una B-Spline se cuenta con dos formas: mover sus puntos de control o cambiar su segmentación. Los segmentos están definidos en función de divisiones sobre la curva, cada división corresponde a un valor del parámetro u y cada par de valores contiguos del parámetro define un intervalo:

$$\begin{aligned}
 & [u_i, u_{i+1}) \\
 & i = 1, 2, \dots, m-1 \\
 & 0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{m-1}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

, donde m es el número de puntos en la B-Spline, lo que implica que existen $m-1$ intervalos. Cada valor u_i del parámetro corresponde a un punto sobre la curva. Así, para crear una B-Spline es necesario contar con un conjunto de m puntos de control, un conjunto de m valores del parámetro u y una forma de relacionarlos. Dicha relación está dada por una combinación lineal de los puntos de control en la cual los coeficientes están dados por funciones base que relacionan los diferentes valores del parámetro u .

Para definir las funciones base de una B-Spline de grado p se emplea la fórmula recursiva de Cox-de Boor. La i -ésima función base de grado p , $N_{i,p}(u)$, se obtiene de la siguiente ecuación:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{(u - u_i)}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{(u_{i+p+1} - u)}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (3)$$

De (3), se pueden deducir las siguientes propiedades de las funciones base de las curvas B-Spline ancladas:

1. $N_{i,p}$ es un polinomio de grado p en u .
2. No negatividad: Siempre se cumple que $N_{i,p}(u) \geq 0$.
3. Soporte Local: $N_{i,p}(u) \neq 0$ en los intervalos $[u_{i-p+1}, u_{i-p+2}), [u_{i-p+2}, u_{i-p+3}), \dots, [u_i, u_{i+1})$.
4. Para cualquier intervalo $[u_i, u_{i+1})$ al menos p funciones base de grado p son no-cero, éstas son: $N_{i-1,p}(u), N_{i,p}(u), N_{i+1,p}(u), \dots, N_{i+p-1,p}(u)$.
5. En cada intervalo $[u_i, u_{i+1})$ la suma de las funciones base es igual a la unidad: $N_{i-1,p}(u) + N_{i,p}(u) + N_{i+1,p}(u) + \dots + N_{i+p-1,p}(u) = 1$.

El conjunto de propiedades anterior indica que las funciones base cambian de intervalo a intervalo, es decir, que el polinomio que las define no es el mismo para todos los intervalos. Esta característica es natural dado que las B-Spline son curvas definidas por intervalos, así que también las funciones que les dan forma deben ser definidas por intervalos. Otra característica de suma importancia para este trabajo es que, dado el soporte local, al modificar un punto o región de una B-Spline sólo algunos segmentos de la curva cambian sin alterar al resto y, por otra parte, los segmentos que cambian lo hacen de manera coherente manteniendo la propiedad de suavidad en el contorno. Ver [Figura 2.4](#)

Capítulo 3. Descripción del Método

Introducción

El método de optimización aplicado al diseño de modelos o estructuras planas propuesto por el autor, puede agruparse en el conjunto de métodos basados en estrategias evolutivas debido a que emplea reglas basadas en parámetros que cambian gradual y lentamente (evolucionan) conforme se avanza en el tiempo de proceso. La forma cómo cambian los parámetros permite que la geometría de los modelos se adapten satisfactoriamente a los requerimientos que imponen las condiciones de carga y restricciones aplicadas dentro de un proceso que se hace más exigente con el paso del tiempo. De esta manera, el proceso de optimización genera geometrías que se adecuan paulatinamente a las condiciones hasta el punto en que no hay cambio posible que genere un mejor resultado. Métodos similares, aplicados en la optimización estructural, son los propuestos por Xie[6], Cervera [7], Annicchiarico [9], Cerrolaza[10], entre otros.

El uso del modelado con curvas paramétricas brinda contornos suaves a la geometría de los modelos lo cual se traduce en evitar, en la medida de lo posible, la aparición de aristas con cambios bruscos de dirección que puedan actuar como concentradores de esfuerzo o aristas rugosas no deseables. Esta manera de modelar ha sido utilizada por varios autores, de los cuales se puede mencionar a: Cervera [7], Annicchiarico [9], Cerrolaza[10], entre otros.

A continuación se describe el algoritmo desarrollado para el método propuesto.

Descripción del Algoritmo

El algoritmo propuesto por el autor para el diseño de estructuras planas óptimas tiene las siguientes características principales:

El modelado de la geometría se realiza con curvas B-Spline las cuales son curvas paramétricas definidas por segmentos. Las propiedades inherentes de las B-Spline brindan algunas características deseables en la geometría de los modelos obtenidos, ya

mencionadas por Shene [5], Cervera [7], Annicchiarico [9], Cerrolaza[10], Yang [14]. Ver [Figura 3.1](#).

- La curva se ajusta “suavemente” a los puntos que interpola, de tal forma que no se presentan cambios abruptos en la dirección de la misma, lo cual conlleva evitar la aparición de regiones no deseables en el contorno de la geometría, por ejemplo, concentradores de esfuerzos.
- Al modificar la posición de un punto, la curva ajusta sus puntos de tal forma que no se pierde la “suavidad” de la misma.
- El ajuste de la curva ante el cambio de posición de un punto se lleva a cabo sólo en una región vecina de dicho punto mientras que el resto de la curva no sufre cambio alguno.
- Los puntos de la curva son modificados por medio de los puntos de control, siendo estos últimos las variables de diseño empleadas para llevar a cabo la optimización del modelo en cuestión.

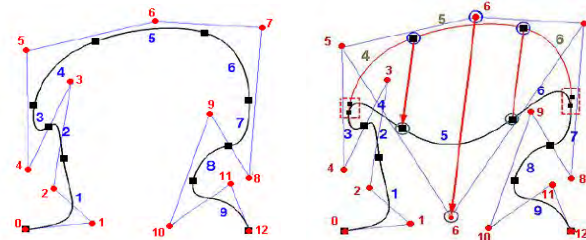


Figura 3.1: Curva B-Spline: al desplazar el punto de control 6 se modifica la vecindad influenciada por éste. El resto permanece sin cambios. Los puntos de control se indican en rojo mientras que la numeración en azul corresponde a cada uno de los segmentos de la curva. Los cuadrados negros señalan el inicio de los intervalos. (Figura tomada de Shene [5])

Se emplea Análisis por Elementos Finitos (FEA- Finite Element Analysis) para realizar el análisis estructural de esfuerzos del modelo en cuestión (Bhatti [1, 2], Zienkiewicz et al [3, 4]). El FEA junto con el Análisis por Elementos Frontera (BEA - Boundary Element Analysis) son los dos tipos de análisis más empleados para este tipo de cálculos.

- El modelo se discretiza con una malla de elementos finitos triangulares de tres nodos y seis grados de libertad.
- El tamaño promedio de los elementos es igual al promedio de la distancia entre los puntos que definen el perfil de la geometría.

- Cada uno de los nodos sobre el perfil, dado que pertenecen a la curva que lo representa, está asociado a los puntos de control de la B-Spline.
- El esfuerzo de von Mises se calcula en cada uno de los nodos de la malla para cada caso de carga existente en el modelo.

La geometría del modelo se optimiza modificando gradualmente la frontera con base en el nivel de esfuerzo de la misma.

- El nivel de esfuerzo de cada nodo en la frontera se calcula comparando el esfuerzo de von Mises en ella con el máximo en el modelo para cada uno de los casos de carga.
- Se detectan zonas de bajo o alto nivel de esfuerzos.
- Cada nodo en dichas zonas está asociado a un conjunto de puntos de control, así que modificar la posición de un nodo implica cambiar la posición de los puntos de control asociados a él. Para cada punto de control se genera una dirección de desplazamiento empleando las direcciones perpendiculares y el nivel de esfuerzo de los nodos asociados a él.
- Los puntos de control son desplazados en la dirección generada en el paso anterior. La magnitud del desplazamiento se calcula con base en el nivel de esfuerzo del nodo de mayor influencia en la posición del punto de control.

El procedimiento anterior se lleva a cabo iterativamente hasta que no pueden obtenerse mejoras en el modelo, es decir, la solución converge.

En general, los diferentes métodos de optimización estructural guardan entre ellos muchas similitudes. El caso de la propuesta que el autor de este trabajo expone no es la excepción. Empero, se distingue de los demás, entre otras cosas, por la manera en que modifica la geometría de la frontera del modelo. A diferencia de Cervera [7], Annicchiarico [9], Cerrolaza[10], Sethian [20], entre otros, cuyas propuestas implican el desplazar la frontera en dirección perpendicular a ella misma, la propuesta del autor desplaza la frontera por medio de los puntos de control que la definen, calculando la dirección de desplazamiento con base en la características (es decir, el nivel de esfuerzos) de aquellos nodos vecinos que ejercen influencia sobre cada uno de los puntos de control. De esta forma, como se explica más adelante en este capítulo, se obtienen direcciones de

desplazamiento más adecuadas para los puntos de control, ya que la posición de estos depende de todos aquellos puntos contenidos dentro de una región bien definida sobre el contorno del modelo en cuestión, lo cual no es tomado en cuenta por otros autores en sus propuestas.

Tomando en cuenta las características enunciadas anteriormente, el algoritmo de optimización es el siguiente:

1. La geometría del modelo se define con curvas B-Spline y se indican las restricciones y los casos de carga aplicados al modelo.
2. Se calcula el esfuerzo de von Mises en los nodos por medio de FEA.
3. Se modifica la frontera de la geometría con base en un proceso de remoción y/o adición de material basada en el nivel de esfuerzo de los nodos en la frontera. La remoción se lleva a cabo en los nodos de bajo nivel de esfuerzo aplicando vectores de desplazamiento en dirección interior sobre los puntos de control asociados a dichos nodos. Por otra parte, la adición de material se aplica a aquellos nodos cuyo nivel de esfuerzo sea alto o cuyo esfuerzo de von Mises sea mayor al esfuerzo de cedencia del material. En este caso, la dirección del desplazamiento de los puntos de control es exterior (ver Figura 3.2).
4. Los pasos 2 y 3 se repiten hasta que no es posible mejorar el modelo.

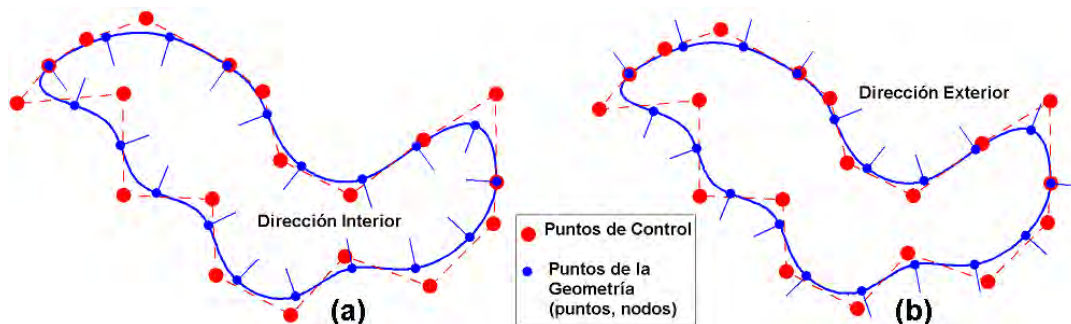


Figura 3.2: Geometría modelada con 20 puntos y curvas B-Spline de 3er grado. (a) y (b) muestran las direcciones interior y exterior de la geometría respectivamente

A continuación se hace una descripción más detallada de los pasos señalados en el algoritmo de optimización.

Definición de la Geometría

El dominio de diseño se define con base en un conjunto de puntos que indican la geometría inicial del modelo, un conjunto de restricciones de desplazamiento o condiciones de frontera y un conjunto de casos de carga que pueden estar compuestos por fuerzas puntuales, distribuidas o de cuerpo. La frontera de la geometría se genera interpolando con curvas B-Spline de 3er grado entre los puntos; de esta forma se asegura que la geometría del modelo no presente cambios abruptos de dirección. Se pueden identificar tres tipos de curvas en el contorno así modelado: curvas libres cuyos puntos pueden modificarse sin restricción por lo que representan las regiones a optimizar, curvas o líneas de simetría las cuales sólo pueden cambiar su longitud a lo largo de la simetría y, por último, curvas o líneas fijas las cuales pueden contener las condiciones de frontera o simplemente no deben ser alteradas por alguna especificación en el diseño.

La [Figura 3.3](#) muestra la geometría inicial empleada en la optimización de una tubería doble a presión. El dominio de diseño se muestra en (a) y corresponde a la tubería completa; en el proceso de optimización se emplea únicamente una cuarta parte del dominio puesto que existe tanto simetría vertical como horizontal. En (b) y (c) aparecen los puntos y las curvas B-Spline que definen la cuarta parte del dominio. Finalmente, en (d) se observan los nodos en el contorno de la malla de elementos finitos. La explicación y los resultados de este caso son mostrados en el Capítulo 4: Aplicación y Resultados.

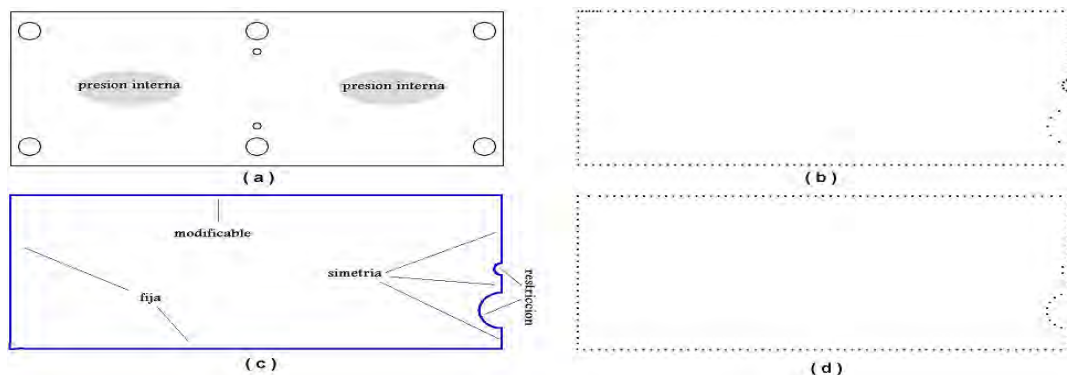


Figura 3.3: (a) Dominio de diseño, (b) puntos que definen al dominio de diseño, (c) dominio modelado por curvas B-Splines, (d) nodos del contorno de la malla de elementos finitos

Análisis por Elementos Finitos

El FEA en el análisis estructural es una herramienta que permite calcular los desplazamientos de los nodos que constituyen una malla de elementos finitos, que representa un modelo o estructura bajo un conjunto de condiciones de frontera y un sistema de cargas. Con base en las relaciones existentes entre desplazamientos y deformaciones, se calcula el estado de deformaciones en cada uno de los elementos finitos y, a su vez, el estado de esfuerzos de estos se determina empleando la ecuación constitutiva. El estado de esfuerzos en cada nodo de la malla es el valor promedio del esfuerzo de los elementos conectados por el nodo. Finalmente, el esfuerzo de von Mises se calcula en los nodos y este valor es el empleado para determinar el estado de esfuerzos nodal y aquellas regiones susceptibles a ser modificadas en cada iteración del proceso de optimización.

Los problemas en los que una estructura o modelo puede estar sometido a más de un caso de carga se presentan en muchas de las áreas de la ingeniería. En estos, el estado de esfuerzos debe calcularse para cada uno de los casos de carga y, como se explicará más adelante, detectar las regiones susceptibles de cambio para cada uno de ellos.

Modificación de la Frontera

Como se mencionó anteriormente, la optimización del modelo se realiza a través de cambios graduales en la frontera del mismo. Los cambios sólo se realizan en aquellas secciones de la frontera modeladas por curvas que pueden ser modificadas, es decir, curvas libres. Como en otros métodos, los cambios en la geometría son el resultado de un proceso de remoción o adición de material en la frontera del modelo. Mientras que en métodos como ESO tal remoción o adición de material se lleva a cabo de manera literal agregando o retirando fragmentos de la geometría, lo que genera fronteras escalonadas y rugosas, en el método propuesto por el autor se lleva a cabo aplicando desplazamientos pequeños sobre los puntos que definen la frontera y que muestren un nivel de esfuerzos identificado como bajo o alto. Algunos autores (Xie et al [6], Cervera [7], entre otros) consideran regiones ineficientes a las que contienen estos nodos.

Regiones Modificables

Para modelos sometidos a un solo caso de carga, una región modificable (o ineficiente) será aquella que esté compuesta por nodos que cumplan con alguna de las siguientes inecuaciones:

$$\sigma_i \leq \cdot \cdot \cdot (1)$$

$$\sigma_i \geq TA * \sigma_r \text{ ó } \cdot \cdot \cdot (2)$$

, donde es el esfuerzo de von Mises del i-ésimo nodo; es un esfuerzo de referencia, por ejemplo el esfuerzo máximo de la estructura; es el esfuerzo de cedencia del material; y son las tasas de remoción y adición de material respectivamente, también pueden ser llamados parámetros de evolución.

Así, aquellos nodos que satisfagan la inecuación (1) son candidatos a ser modificados emulando remoción de material, mientras que los que cumplan (2) emulan adición. Dicho de otra forma, (1) identifica regiones sub-esforzadas de la frontera, y (2) identifican regiones sobre-esforzadas

El concepto de región ineficiente es común a la mayoría de los métodos o técnicas de optimización estructural, así como también lo son las tasas de remoción y adición de material, también llamadas tasas de evolución . Estas últimas son valores dentro del intervalo de 0.0 a 1.0, siendo , cuya función es definir límites temporales en el nivel de esfuerzo para cada iteración en el proceso de optimización.

Los valores de y se actualizan cada vez que se alcanza un estado permanente en el proceso, es decir, un estado en el cual no es posible mejorar el modelo (remover o adicionar material) empleando los valores actuales de y . Así, la actualización de los parámetros se lleva a cabo de acuerdo con:

$$TR_{j+1} = TR_j \cdot (3)$$

$$TA_{j+1} = TA_j \cdot (4)$$

, donde y son las tasas evolutivas de remoción y adición respectivamente,

y i indica el j -ésimo estado permanente. Los valores adecuados de los parámetros TR , TA , TER y TEA deberían ser determinados para cada proceso de optimización que se realice ya que son sensibles a varios factores tales como: geometría, tamaño de la malla, esfuerzo de referencia, estado de esfuerzos inicial, entre otros. Sin embargo, en este trabajo, después de hacer pruebas con diferentes valores de los parámetros, se establecieron los siguientes valores:

$$TR \approx 0.01 \quad TA \approx 0.9 \quad TER \approx 0.01 \quad TEA \approx 0.0$$

Si se comparan estos valores con sus equivalentes en otros métodos de optimización (Xie [6] y Cervera [7], entre otros) se observa que son similares a los valores típicos propuestos en estos últimos.

Para problemas en los que existen varios casos de carga, las regiones ineficientes deben determinarse comparando el efecto de cada uno de los niveles de esfuerzos obtenidos para cada caso de carga. De esta forma, un nodo será candidato a remoción si lo es para todos los casos de carga, mientras que será candidato a adición si lo es al menos para uno de los casos. A esta manera de considerar los nodos de remoción y adición se le puede englobar en un algoritmo de lógica AND/OR (Li et al [8])

Tomando en cuenta lo anterior, las inequaciones (1) y (2) cambian de la siguiente forma: si n es el número de casos de carga aplicados en el modelo, para cada nodo i se verifican las siguientes expresiones, donde j representa al caso de carga j -ésimo:

$$\sigma_{i,j} \leq TR * \sigma_{r,j} \quad \forall j \dots (5) \quad N$$

$$\exists j \ni (\sigma_{i,j} \geq TA * \sigma_{r,j}) ; j \dots (6) \quad N$$

Si para el nodo i se cumple (5) dicho nodo se somete a remoción (lógica AND), mientras que si se satisface (6) entonces el nodo sufrirá adición de material (lógica OR). Dicho de otra forma, (5) implica que la existencia de al menos un caso de carga para el cual un nodo no tiene un nivel de esfuerzos bajo impide que éste sea modificado pues el efecto que se puede producir es que el modelo en esa región, y para ese caso de carga, eleve su nivel de esfuerzos a un valor indeseable. Por otra parte, (6) asegura que una región con alto nivel de esfuerzos, por lo menos para un caso de carga, sea modificada de forma que dicho nivel sea reducido.

Modificación de los Puntos en la Frontera

La optimización del modelo se lleva a cabo por medio de la modificación de la frontera del mismo. Ésta se realiza cambiando la posición de los puntos de las curvas B-Spline desplazando los puntos de control que definen las curvas:

$$C(u) = \sum_{i=1}^m N_i(u) P_i \quad (7)$$

, donde u es el parámetro, $N_i(u)$ son las funciones de interpolación calculadas entre los puntos conocidos de la curva.

En general, los diferentes métodos de optimización estructural o diseño estructural óptimo que trabajan con base en movimiento de la frontera, lo hacen aplicando desplazamientos en dirección perpendicular a la frontera sobre los puntos de la misma. Algunos de estos métodos, que han mostrado excelentes resultados, aplican los desplazamientos sobre todos los puntos susceptibles de cambio (Annicchiarico [9], Cerrolaza et al[10], Mattheck[11]), mientras que otros métodos trabajan sólo sobre aquellos puntos de máxima susceptibilidad (por ejemplo, Cervera [12, 13]). El problema común de estos es que, al sólo tomar en cuenta la dirección perpendicular a la frontera en el punto a desplazar, no consideran que pueden existir puntos vecinos también susceptibles de modificación. En este sentido, información importante de la geometría y el estado de esfuerzos en la vecindad del punto no es tomada en cuenta.

El autor propone utilizar la información de la vecindad de los puntos a modificar aprovechando las propiedades de las curvas B-Spline. En primer lugar, la posición de un punto en una curva B-Spline es dependiente de la posición de los puntos de control de acuerdo con (7); sin embargo, en realidad lo es sólo de m puntos. Por otra parte, como se describió en el capítulo anterior, las B-Spline son curvas paramétricas definidas por segmentos. Si n es el número de puntos que definen la curva, entonces existen $m - 1$ segmentos cada uno en el intervalo $[u_i, u_{i+1}]$ puntos de control. Además, si cada punto de la curva coincide con el inicio de un intervalo, entonces los puntos de control de los cuales depende la posición del punto son:

Dado que, como fue mencionado anteriormente en este capítulo, en este trabajo se utilizó el valor $\alpha = 1$, los puntos de control que determinan la posición de $C(u_i)$ son: $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, \dots$ (ver Figura 3.4).

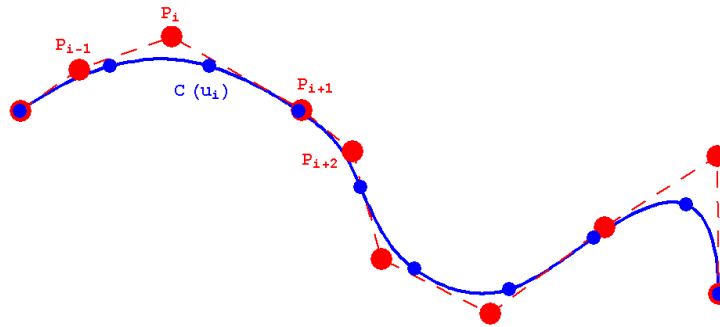


Figura 3.4: Curva B-Spline de 3er grado. La posición del punto $C(u_i)$ depende de los puntos de control $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$

Lo anterior también puede apreciarse si se estudia el siguiente sistema (8) en el que se muestra la relación entre puntos de la curva, puntos de control y funciones de interpolación correspondiente a una curva B-Spline de 3er grado:

$$\begin{aligned}
 C(u_1) &= N_1(u_1)P_1 + N_2(u_1)P_2 + N_3(u_1)P_3 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 ; \\
 C(u_2) &= N_1(u_2)P_1 + N_2(u_2)P_2 + N_3(u_2)P_3 + N_4(u_2)P_4 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 ; \\
 C(u_3) &= 0 + N_2(u_3)P_2 + N_3(u_3)P_3 + N_4(u_3)P_4 + N_5(u_3)P_5 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 ; \\
 C(u_4) &= 0 + 0 + N_3(u_4)P_3 + N_4(u_4)P_4 + N_5(u_4)P_5 + N_6(u_4)P_6 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 ; \\
 C(u_5) &= 0 + 0 + 0 + N_4(u_5)P_4 + N_5(u_5)P_5 + N_6(u_5)P_6 + N_7(u_5)P_7 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 ; \\
 \vdots &= \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \dots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots ; \\
 C(u_{m-2}) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots + N_{m-3}(u_{m-2})P_{m-3} + N_{m-2}(u_{m-2})P_{m-2} + N_{m-1}(u_{m-2})P_{m-1} + N_m(u_{m-2})P_m ; \\
 C(u_{m-1}) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + N_{m-2}(u_{m-1})P_{m-2} + N_{m-1}(u_{m-1})P_{m-1} + N_m(u_{m-1})P_m ; \\
 C(u_m) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + N_{m-1}(u_m)P_{m-1} + N_m(u_m)P_m ;
 \end{aligned}$$

..(8)

o matricialmente:

$$\dots(9)^{N.P}$$

Una propiedad importante de las funciones de interpolación es que, para todo punto de la Spline se cumple:

$$N_{i-1} + N_i + N_{i+1} + N_{i+2} + \dots + N_i = 1 \tag{10}$$

Esta propiedad también puede entenderse como si los puntos de control

$P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, \dots, P_{i+p-1}$ contribuyen con porcentajes $N_{i-1}, N_i, N_{i+1}, N_{i+2}, \dots, N_{i+p-1}$ respectivamente, en la posición del punto de la curva. En este sentido, un punto de control afecta en porcentajes $N_i(u_{i-p+1}), N_i(u_{i-p+2}), \dots, N_i(u_i)$, la posición de los puntos $C(u_{i-p+1}), C(u_{i-p+2}), \dots, C(u_i)$, respectivamente (ver Figura 3.5). Notar que, en general:

$$N_i(u_{i-p+1}) + N_i(u_{i-p+2}) + \dots + N_i(u_i) + N_i(u_{i+1}) = 1 \quad (11)$$

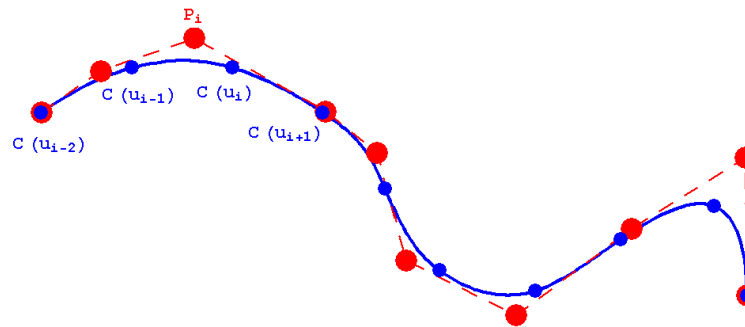


Figura 3.5: Curva B-Spline de 3er grado. El punto de control P_i ejerce influencia sólo sobre los puntos $C(u_{i-p+1}), C(u_{i-p+2}), \dots, C(u_i)$, de la curva B-Spline

Revisar la siguiente situación. Si se desea modificar la posición del punto de una curva B-Spline por un desplazamiento \vec{d}_i , los puntos de control $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, \dots, P_{i+p-1}$ deben afectarse por los desplazamientos $\vec{d}_{i-1}, \vec{d}_i, \vec{d}_{i+1}, \vec{d}_{i+2}, \dots, \vec{d}_{i+p-1}$ respectivamente. Aún más, si se debe cambiar la posición de los puntos $C(u_{i-p+1}), C(u_{i-p+2}), \dots, C(u_i)$ con desplazamientos $\vec{d}_{i-p+1}, \vec{d}_{i-p+2}, \dots, \vec{d}_{i+1}$ respectivamente, entonces los desplazamientos a calcular serán $\vec{d}_{i-1,i}, \vec{d}_{i,i}, \vec{d}_{i+1,i}, \vec{d}_{i+2,i}, \dots, \vec{d}_{i+p-2,i}, \vec{d}_{i+p-1,i}$, y $\vec{d}_{i,i+1}, \vec{d}_{i+1,i+1}, \vec{d}_{i+2,i+1}, \vec{d}_{i+3,i+1}, \dots, \vec{d}_{i+p-1,i+1}$, los cuales son arbitrarios e independientes entre sí.

Posteriormente se generan conjuntos similares de vectores de desplazamientos para cada uno de los puntos de la curva, donde el primer subíndice corresponde al punto de control sobre el cual se deben aplicar y el segundo a el punto sobre la curva para el cual fue

generado. Si se aíslan los vectores correspondientes a un punto de control se obtiene el conjunto:

$$\vec{d}_{i,i-p+1}, \vec{d}_{i,i-p+2}, \dots, \vec{d}_{i,i}, \vec{d}_{i,i+1}$$

Es evidente que, en general, el vector de desplazamiento equivalente necesario para llevar a cabo las modificaciones correspondientes a cada uno de los puntos dependientes de la posición de \vec{d}_i no es igual a la suma de los vectores asociados, es decir:

$$\vec{d}_i \neq \vec{d}_{i,i-p+1} + \vec{d}_{i,i-p+2} + \dots + \vec{d}_{i,i+1} \quad (12)$$

Si se engloban los desplazamientos de todos los puntos de control, derivados de modificar la posición de los puntos \vec{d}_i a \vec{d}_i' , en un vector incógnita \vec{c} , aparentemente éste podría determinarse resolviendo la ecuación matricial:

$$\vec{c} = \mathbf{N} \cdot \vec{d} \quad (13)$$

Sin embargo, esta forma de proceder no considera que modificar arbitrariamente la posición de los puntos \vec{d}_i , provoca que los valores de los parámetros ξ_i de los puntos y, por lo tanto, los intervalos de definición de los segmentos de la curva cambien al mismo tiempo que los valores de las funciones de interpolación. Hay que recordar que los valores de los parámetros ξ_i son resultado de una relación geométrica entre los puntos \vec{d}_i . Así, resolver la ecuación (13), sin tomar en cuenta tales circunstancias, produciría puntos de control que representarían una curva B-Spline diferente a la original. Adicionalmente, si los cambios en los parámetros y los intervalos son demasiado grandes es muy probable que la nueva curva sufra distorsiones indeseables para la optimización del modelo. (Cervera [12], Yang [14])

En el método de optimización propuesto por el autor es regla general que en cada iteración sea modificada la posición de varios puntos de la frontera. El cambio de posición está directamente relacionado con el nivel de esfuerzo de dichos puntos a través de las ecuaciones (1) y (2), si se trata de un problema con un solo caso de carga, ó (5) y (6), si existen múltiples casos de carga. A su vez, los cambios deben llevarse a cabo desplazando

los puntos de control de la curva, cuyo cálculo, como ya fue descrito, no es trivial.

Para resolver esta dificultad, se propone calcular los vectores de desplazamiento de los puntos de control de forma que, por una parte, se asegure que la magnitud de los desplazamientos no genere distorsiones indeseables y, por la otra, la dirección de los mismos considere la información de la vecindad de cada punto.

Cálculo de la Magnitud y la Dirección de los Desplazamientos

Para asegurar que al desplazar los puntos de control no se produzcan distorsiones en la frontera del modelo y, al mismo tiempo, obtener una velocidad moderada en el proceso de optimización, lo cual es requisito en los métodos de optimización estructural, la magnitud de los desplazamientos de todos los puntos de control se restringe de modo que

$|\vec{d}_i| \in [0, \alpha \cdot e_{size}]$, donde e_{size} es el tamaño promedio de los elementos finitos, es decir, la longitud promedio de las aristas de los triángulos que conforman la malla, y α es un factor de modificación que permite controlar la velocidad con que cambia la geometría cuyo valor es menor o igual a la unidad.

Sólo los puntos P_i , en líneas libres del modelo, que satisfagan las ecuaciones (1) y (2), ó (5) y (6), deben considerarse para el cálculo de los desplazamientos de los puntos de control. Para cada punto P_i se calcula un vector de desplazamiento \vec{D}_i de acuerdo con las siguientes reglas:

si P_i satisface (1) ó (2), entonces la magnitud D_i es:

$$|\vec{D}_i| = \text{Absoluto} \left(\frac{\sigma_i - TR}{TR} \right) \cdot r \quad (14)$$

ó

$$|\vec{D}_i| = \text{Absoluto} \left(\frac{\sigma_i - TA}{TA} \right) \cdot r \quad (15)$$

, respectivamente; si P_i satisface (5) ó (6), entonces la magnitud D_i es:

$$|\vec{D}_i| = \text{Max} \left(\text{Absoluto} \left(\frac{\sigma_{i,j} - \text{TR}}{\text{TR} * \sigma_{r,j}} \right) \right) \quad (16)$$

, ó

$$|\vec{D}_i| = \text{Max} \left(\text{Absoluto} \left(\frac{\sigma_{i,j} - \text{TA}}{\text{TA} * \sigma_{r,j}} \right) \right) \quad (17)$$

, respectivamente, donde $j = 1, 2, \dots, n$ indica cada uno de los casos de carga.

Por otro lado, si \vec{n}_i es el vector unitario normal exterior a la frontera en el punto P_i , la dirección de \vec{D}_i es:

$$\vec{D}_i = \begin{cases} \vec{n}_i & \text{si (1) ó (5) se satisfacen} \\ -\vec{n}_i & \text{si (2) ó (6) se satisfacen} \end{cases} \quad (18)$$

, ó

$$\vec{D}_i = \begin{cases} \vec{n}_i & \text{si (2) ó (6) se satisfacen} \\ -\vec{n}_i & \text{si (1) ó (5) se satisfacen} \end{cases} \quad (19)$$

Esto implica que en regiones de bajo nivel de esfuerzo se remueva material, mientras que en las de alto nivel de esfuerzo se ejecute adición de material.

Los vectores $\vec{D}_{i-p+1}, \vec{D}_{i-p+2}, \dots, \vec{D}_i, \vec{D}_{i+1}$ son la base para el cálculo del vector \vec{D}_i de cada punto de control P_i . Para desplazar a P_i deben tomarse en cuenta los cambios de posición de los puntos $C(u_{i-p+1}), C(u_{i-p+2}), \dots, C(u_i), C(u_{i+1})$ es decir,

$\vec{D}_{i-p+1}, \vec{D}_{i-p+2}, \dots, \vec{D}_i, \vec{D}_{i+1}$; a su vez, a estos puntos les corresponden por la influencia de P_i en sus posiciones, respectivamente, los valores de las funciones de interpolación

$N_i(u_{i-p+1}), N_i(u_{i-p+2}), \dots, N_i(u_i), N_i(u_{i+1})$. Estos últimos representan el porcentaje de participación del punto de control P_i en la posición de cada uno de los puntos mencionados de la curva. Dicho de otra forma, si el punto P_i debe desplazarse, el vector \vec{D}_i debe tomar en cuenta la participación del punto de control sobre los correspondientes puntos de la curva.

El procedimiento propuesto en este trabajo para el cálculo del vector \vec{D}_i emplea los valores $N_i(u_{i-p+1}), N_i(u_{i-p+2}), \dots, N_i(u_i), N_i(u_{i+1})$ como factores de ponderación para combinar los vectores $\vec{D}_{i-p+1}, \vec{D}_{i-p+2}, \dots, \vec{D}_i, \vec{D}_{i+1}$ de acuerdo con:

$$\vec{d}'_i = \sum_{k=-p+1}^1 [N_i(u_{i+k}) \vec{D}_{i+k}] \quad \dots(20)$$

, y

$$\hat{d}_i = \frac{\vec{d}'_i}{|\vec{d}'_i|} \quad \dots(21)$$

, donde \hat{d}_i es la suma vectorial ponderada de los desplazamientos de los puntos sobre la frontera que están asociados al punto de control P_i . El cálculo de \hat{d}_i es necesario, como se indica en (2), para determinar la dirección del desplazamiento (\hat{d}_i) del punto de control P_i de forma que tome en cuenta, en su justa medida, la dirección de desplazamiento de los puntos sobre la frontera (ver Figura 3.6).

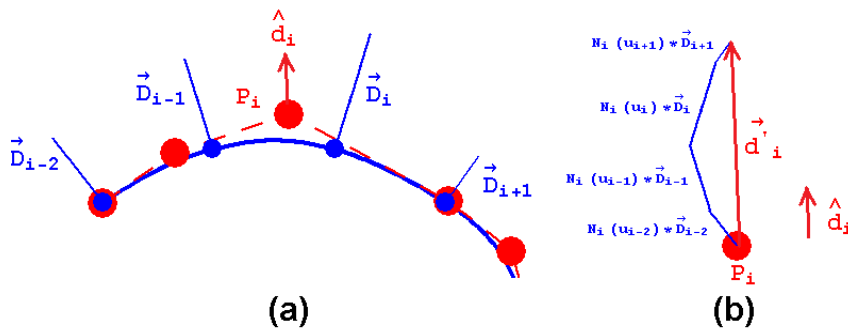


Figura 3.6: Segmento de curva B-Spline de 3er grado para el cálculo de la dirección del desplazamiento de los puntos de control. (a) la dirección depende de los vectores $\vec{D}_{i-2}, \vec{D}_{i-1}, \vec{D}_i, \vec{D}_{i+1}$; (b) la dirección se obtiene con la suma vectorial ponderada

$$\vec{d}'_i = \sum_{k=-p+1}^1 [N_i(u_{i+k}) \vec{D}_{i+k}]$$

El cálculo de la magnitud de \hat{d}_i es más complicado. Si m es el número de puntos en la frontera y i es el subíndice del parámetro de la función de interpolación que cumple con $\text{Max}(N_i(u_{i-p+1}), N_i(u_{i-p+2}), \dots, N_i(u_i), N_i(u_{i+1}))$, entonces el valor de \hat{d}_i será:

$$|\hat{d}_i| = \frac{|\vec{D}_q|}{\text{Max}(|\vec{D}_1|, |\vec{D}_2|, \dots, |\vec{D}_m|)} \quad \dots(22)$$

En otras palabras, la magnitud del desplazamiento del punto de control P_i es igual al valor normalizado del desplazamiento del punto de la curva sobre el cual tiene mayor

efecto (es decir, Δ), multiplicado por el tamaño promedio de la malla (Δ) y por el factor de modificación (f).

La idea principal de ésta forma de calcular el vector Δ es que, por una parte, en el cálculo de la dirección se utiliza la información de la vecindad de los puntos en la frontera y no sólo la de un punto aislado; por la otra, en el cálculo de la magnitud se favorece el desplazamiento de los nodos más influenciados por el punto de control.

Control de Distorsiones en la Frontera

A pesar de que el proceso para desplazar los puntos de control está diseñado para prevenir la distorsión de la frontera, con el paso de las iteraciones es probable que se presente distorsión en aquellas regiones que hayan sufrido desplazamiento acumulado de consideración.

La distorsión de una región de la frontera es resultado de la variación en las relaciones geométricas existentes entre los puntos en dicha región, concretamente hablando se presenta cuando las longitudes de cuerda entre los puntos de una región de la frontera pierden su proporción inicial. En este sentido, puede suceder que los puntos se alejen o acerquen demasiado entre sí, lo que provoca que los valores de los parámetros Δ , y sus intervalos, dejen de representar una curva B-Spline sin distorsión.

Los métodos propuestos en algunos trabajos relacionados con geometría computacional (Cervera [12], Yang [14], Burczynski [15], entre otros) se basan en calcular y comparar iteración por iteración la distancia entre puntos de control contiguos. Si la distancia entre dos puntos de control, durante una iteración i , difiere de su valor inicial (iteración de referencia) en una proporción ϵ se modifican los puntos de control. Si la proporción indica que los puntos de control se han alejado demasiado, se inserta un nuevo punto de control en un punto intermedio de los otros con el propósito de que la proporción entre las distancias vuelva a ser homogénea. En caso contrario, si los puntos se han acercado, se elimina el punto de control intermedio y se recalculan los restantes para obtener la proporción adecuada entre sus distancias.

A pesar de que los métodos para el control de distorsión basados en la proporción de distancias entre los puntos de control producen buenos resultados, en general, pierden información de la geometría generada durante la optimización ya que el agregar o eliminar un punto de control cambia la forma de la frontera. Para ejemplificar lo anterior, en las Figuras 3.7 y 3.8 se muestran dos figuras tomadas de [12] en las que se observa que la geometría de la curva cambia al agregar o remover un punto de control de la misma

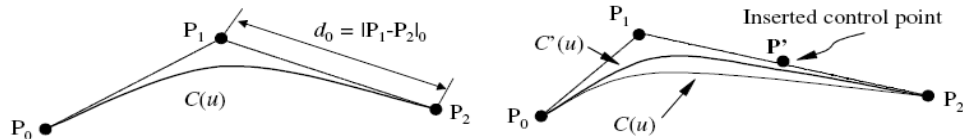


Figura3.7: Al agregar un punto P' de control cambia la forma de la curva C(u) perdiendo información de la geometría generada

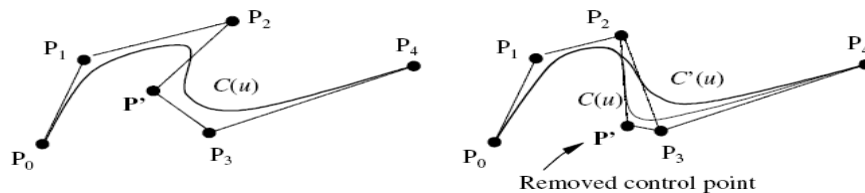


Figura3.8: Al remover el punto de control P' cambia la forma de la curva C(u) perdiendo información de la geometría generada

Para evitar perder información de la geometría se plantea un procedimiento análogo pero basado en la longitud de cuerda entre puntos contiguos de la frontera, es decir, la longitud de la curva calculada para cada intervalo.

$$s_i = \int_{u_i}^{u_{i+1}} \sqrt{\left(\frac{dC_x(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{dC_y(u)}{du}\right)^2} du \quad (23)$$

, donde $C_x(u)$ y $C_y(u)$ son las coordenadas x e y de la curva en el punto u.

La longitud de los segmentos en cada iteración $(s_{i,0})$ se compara con su valor original $(s_{i,0})$ y (24) y (25) indican que la longitud del segmento se ha incrementado o decrementado más allá del valor deseable, respectivamente.

$$\frac{s_{i,t}}{s_{i,0}} (24)^{1/k}$$

, y

$$\dots (25)^{1/k}$$

En ambos casos, se recalculan los puntos del intervalo en cuestión y de sus intervalos vecinos de tal forma que la longitud de cuerda entre ellos sea homogénea, es decir, $s_{i,t} = \text{size}$. Es claro que en el primer caso, (24), se creará un nuevo punto, mientras que en el segundo, (25), se elimina.

En este procedimiento el valor de la proporción límite se fija por debajo que el empleado en otros procedimientos para no permitir que una distorsión se desarrolle demasiado antes de corregirla a diferencia de los otros en los que la distorsión se corrige una vez que ya se ha desarrollado. Aunque el planteamiento propuesto computacionalmente es más costoso, asegura que la forma generada durante la optimización no se pierda, lo que es importante ya que el objetivo principal de la optimización es producir la geometría óptima.

Criterio de Paro

En los métodos de optimización existen diferentes criterios de paro los cuales dependen de las variables de diseño y las características que se estén considerando. En este trabajo se utiliza un criterio basado en la homogeneidad del nivel de esfuerzos en el modelo, medida en cada iteración. El nivel de esfuerzos de todo el modelo se calcula como:

$$NO = \sum_{e=1}^{NE} (\sigma_e)^2 \dots (26)$$

Así el criterio de paro es:

$$cp = \text{Absoluto} \left[\frac{NO_{t+1} - NO_t}{NO_t} \dots (27) \right]^{1/5}$$

Por lo tanto, si durante la optimización, para la iteración se satisface (27) se detiene el proceso. Con lo anterior se asegura que el nivel de esfuerzo en la estructura es

homogéneo en el orden de 10^{-5} .

Índice de Desempeño

La pregunta inherente a cualquier método de optimización empleado en el diseño óptimo de estructuras o partes es: ¿la geometría generada por el método realmente es la óptima para las condiciones de cargas y las restricciones dadas? Aunque existen algunas soluciones estándar para algunos problemas específicos (como las desarrolladas por Michell [16], Hemp [17], Rozvany [18], entre otros), el espectro de problemas que pueden plantearse es ilimitado por lo que resulta imposible encontrar una solución estándar para cada uno de ellos. Más aún, si las soluciones estándar de un problema particular son comparadas entre sí, se llega a la conclusión de que son similares mas no iguales, ya que cada una de ellas tiene una fuerte dependencia con los planteamientos, suposiciones, consideraciones y funciones objetivo empleadas en la formulación de los métodos que las produjeron. Ver [Figura 3.9](#)

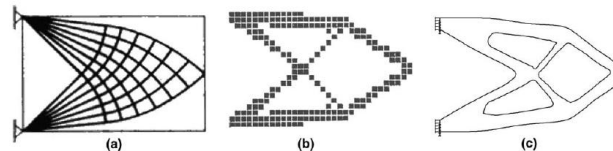


Figura 3.9: (a), (b) y (c) muestran la solución óptima para una viga corta obtenidas por los métodos de Rozvany, Chu, y Xie respectivamente. Aunque corresponden al mismo problema las soluciones no son iguales, sin embargo, guardan entre ellas una gran similitud (Figura tomada de Cervera [12])

Por estas razones, es necesaria una medida que cuantifique qué tan bueno y qué tan cercano a un resultado óptimo es el modelo o estructura generado independientemente del método utilizado para ello. A esta medida se le llama Índice de Desempeño.

Cálculo del índice

El procedimiento de cálculo del índice de desempeño usado en este trabajo es una adaptación del procedimiento desarrollado por Querin [19], el cual se abrevia como PI por sus siglas en inglés (Performance Index).

El concepto de índice de desempeño no es particular de los problemas de optimización y, en la mayoría de los casos, puede compararse con el concepto ampliamente usado de eficiencia. Las dos características principales de el PI son, en primer lugar, es un número que engloba las características completas de la solución y, en segundo lugar, es adimensional. Dado que el método propuesto se basa en el nivel de esfuerzos, el PI se calcula como una medida del efecto sufrido por el modelo o estructura y la causa que lo provoca. Dicho de otra manera, es una relación del estado de esfuerzos de la estructura entre el sistema de cargas aplicado, esto es:

PI

$$PI = \frac{1}{F * L} * \sum_{e=1}^{NE} \sigma_e V_e \quad (28)$$

, donde σ_e y V_e son el esfuerzo de von Mises y el volumen del e-ésimo elemento finito, N es el número de elementos finitos en la malla, F es la resultante del sistema de fuerzas aplicado y L es una longitud nominal de la geometría.

Si el problema de optimización implica la aplicación de varios casos de carga, entonces (28) debe adaptarse, cuyo resultado es:

50

$$PI = \frac{1}{LC} * \sum_{j=1}^{LC} \left(\frac{1}{F_j * L} * \sum_{e=1}^{NE} \sigma_{e,j} V_e \right) \quad (29)$$

, donde LC es el número de casos de carga aplicados, F_j es la fuerza resultante del j-ésimo caso de carga.

Interpretación de PI

El trabajo mostrado por Querin señala que el mejor modelo o estructura optimizado es fácilmente identificado si se monitorea el valor de PI durante el proceso de optimización y se elige aquella con el menor valor de PI .

Una característica fundamental de μ es que, durante el proceso de optimización, mientras una estructura evoluciona hacia la estructura óptima constituida por una geometría continua el valor de μ se decrementa. Geometría continua debe entenderse como aquella que no presenta huecos, cavidades o concavidades importantes.

En general, cuando la geometría deja de ser continua, por ejemplo cuando se crean huecos, el valor de μ se eleva abruptamente. Dado que en este trabajo sólo se optimiza la estructura modificando su frontera, este efecto ocurrirá cuando, durante el proceso de optimización, la frontera presente concavidades de consideración o regiones de curvatura elevada. Lo anterior es de esperarse pues los huecos, concavidades, etc., generalmente actúan como concentradores de esfuerzo, por lo que (28) y (29) en sus numeradores contendrían valores que se incrementan respecto de los correspondientes a una geometría continua.

De los resultados obtenidos en este trabajo (Capítulo 4. Aplicación y Resultados), así como los presentados por Querin, se pueden hacer algunas observaciones en cuanto al significado de μ . Si bien el óptimo global es la estructura que muestre el menor valor de μ , los resultados muestran que pueden obtenerse varios óptimos locales durante el proceso de optimización.

El óptimo global, en general, es una estructura con geometría continua. Sin embargo, si el proceso de optimización se lleva a cabo más allá del óptimo global, la geometría evoluciona a una que deja de ser continua pero cuyo μ continúa cambiando y mostrando mínimos locales que corresponden a resultados óptimos que también pueden llamarse locales. En este sentido, μ permite identificar más de un óptimo durante el proceso de optimización, es decir, un óptimo global y un conjunto de óptimos locales, cada uno para las características geométricas del modelo en las iteraciones identificadas.

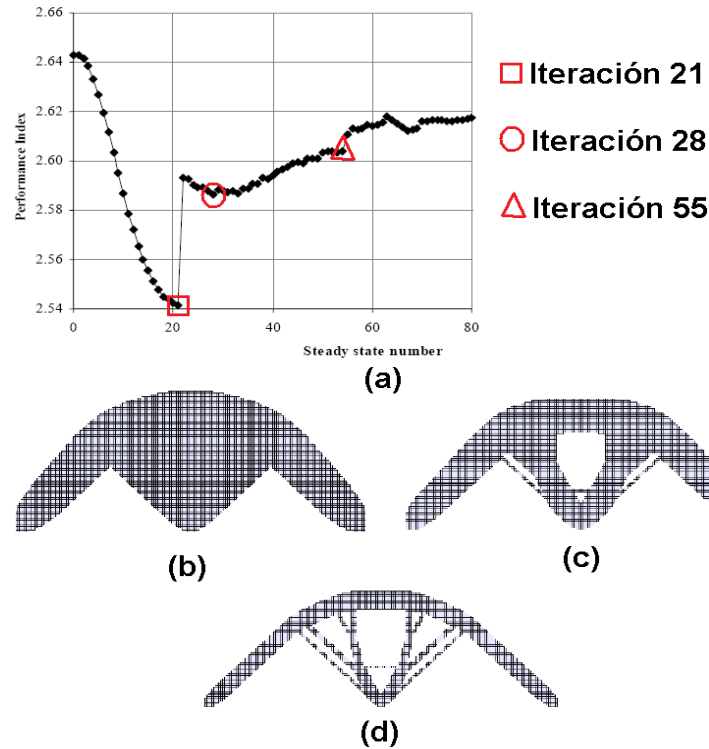


Figura 3.10: En (a) se muestra el historial del índice de desempeño PI del proceso de optimización. (b), (c) y (d) modelos obtenidos en las iteraciones 21, 28 y 55 respectivamente

La Figura 3.10 se obtuvo de [19] y corresponde al diseño de un caso de las estructuras de Michell. De (a) se identifica como óptimo global la estructura obtenida en la iteración 21. Al continuar con el proceso de optimización aparecen óptimos locales para las iteraciones 28 y 55 los cuales son identificados en (a) como los puntos que corresponden a mínimos locales. Como se explicó anteriormente, estos óptimos locales están caracterizados por la aparición de cavidades en la estructura.

A diferencia del trabajo realizado por Querin, el método y el algoritmo desarrollados en este trabajo, únicamente trabajan sobre el contorno de los modelos a optimizar. En este sentido, los óptimos tanto global como locales se caracterizan por la aparición de concavidades de curvatura elevada que actúan como concentradores de esfuerzos. A pesar de esta diferencia, la información arrojada por el historial del índice de desempeño permite identificar los óptimos del proceso. Hay que mencionar que la elección del óptimo más útil entre el global y los locales depende de varios factores, tales como facilidad de fabricación, material de fabricación, peso, estética, entre otros.

Referencias

- [1] Bhatti, A. “Fundamental Finite Element Analysis and Applications”, John Wiley & Sons, Inc., USA, 2005
- [2] Bhatti, A. “Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures”, John Wiley & Sons, Inc., USA, 2006
- [3] Zienkiewicz, O.C., et al, “The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals”, 6th Edition, Elsevier Butterworth-Heinemann, UK, 2006
- [4] Zienkiewicz, O.C., et al, “The Finite Element Method for Solid Structural Mechanics”, 6th Edition, Elsevier Butterworth-Heinemann, UK, 2006
- [5] Shene C. (1998, July 1). “Introduction to computing with geometry. Course Notes”. [documento WWW]. URL: <http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/>
- [6] Xie, Y.M., Steven, G.P., “Evolutionary Structural Optimization”, Springer-Verlag London, Grain Britain, 1997
- [7] Cervera, E., Trevelyan, J., “Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 2D algorithms”, Computers and Structures, 2005
- [8] Li, Q., Steven, G.P., Xie Y.M., “On equivalence between stress criterion and stiffness criterion in evolutionary structural optimization”. Structural Multidisciplinary Optimisation 18, 67-73, 1999)
- [9] Annicchiarico, W., Cerrolaza, M., “Structural Shape Optimization 3D Finite-Element Models Based on Genetic Algorithms and Geometric Modeling”, Finite Elements in Analysis and Design 37, 403-415, 2001
- [10] Cerrolaza, M., Annicchiarico, W., et al, “Optimization of 2D Boundary Element Models Using B-Splines and Genetic Algorithms”, Engineering Analysis with Boundary Elements 24, 427-440, 2000
- [11] Mattheck, C., “Teacher Tree: The Evolution of Notch Shape Optimization from Complex to Simple”, Engineering Fracture Mechanics 73, 1732-1742, 2006
- [12] Cervera, E., Trevelyan, J., “Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 2D algorithms”, Computers and Structures, 2005
- [13] Cervera, E., Trevelyan, J., “Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 3D algorithms”, Computers and Structures, 2005
- [14] Yang, H., et al, “Control Point adjustment for B-Spline Curve Approximation”, Computer – Aided Design 36, 639-652, 2004
- [15] Burczynski, T., Kokot, G., “The Evolutionary Optimization Using Genetic Algorithms and

Boundary Elements”, Department for Strength of Materials and Computational Mechanics, Silesian University of Technology, Poland.

[16] Michell, A.G.M., "The limits of economy of material in frame structures", Philosophical Magazine, 6, 8, 47, 589-597, 1904.

[17] Hemp, W.S., "Optimum Structures", Clarendon Press, Oxford, 1973

[18] Rozvany, G.I., et al, "Layout Optimization of Structures", Appl. Mech. Rev., Vol 48, No. 2, pp 41-119, 1995

[19] Querin, O. "Evolutionary Structural Optimisation: Stress Based Formulation and Implementation" Ph.D. Dissertation. Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia, pp 15-21, April 1997

[20] Sethian, J.A., Wiegmann, A., "Structural Boundary Design Via Level Set and Immersed Interface Methods", Departments of Mathematics University of California at Berkeley

Capítulo 4. Aplicación y Resultados

Introducción

A lo largo de este capítulo se demuestra la funcionalidad y se prueba el desempeño del método de optimización estructural desarrollado en este trabajo aplicándola a ejemplos clásicos en el campo de la optimización de forma de estructuras planas.

En primer lugar se describen ejemplos con geometrías sometidas a estados de esfuerzo plano. Dentro de estos se encuentran dos ejemplos de estructuras sometidas a sólo un caso de carga y tres en los que la optimización tiene que considerar casos de carga múltiples. Además, se resuelve un ejemplo en el que el modelo sólo está sometido a cargas debidas a fuerzas de cuerpo, es decir, su peso.

Como segundo apartado se detallan los resultados obtenidos al aplicar el método propuesto en dos ejemplos en los que las geometrías están sujetas a estados de deformación plana. Ambos se refieren a la optimización de forma de tubos sometidos a presión interna; en el primero se diseña únicamente la forma del interior de un tubo, en tanto que en el segundo caso se va más allá optimizando las partes interna y externa de un tubo doble.

Diseño para Esfuerzo Plano

Viga Corta

La optimización de forma de una viga corta es uno de los ejemplos clásicos desarrollados en el campo de la optimización. Ha sido resuelto desde muchos puntos de vista: topología, forma, etc. Algunos de los autores que han desarrollado este problema son: Xie et al [1], Querin [2], Liang et al [3], Cervera et al[4], entre otros. Lo que hay en común en la solución de cada uno de estos autores, y también con los resultados mostrados en este apartado, es que la solución óptima de este problema es una estructura tipo marco formado por dos barras unidas una con la otra en un extremo y empotradas por los otros extremos. A continuación se muestra el desarrollo y resultados producidos en este trabajo.

Se consideró un dominio de diseño rectangular de 160 mm x 100 mm y 1 mm de espesor, modelado con 6 líneas, ver [Figura 4.1](#); las propiedades mecánicas del material para el dominio fueron: módulo de Young = 200 GPa y coeficiente de Poisson = 0.3. Se aplicó una carga de 10 N en dirección vertical negativa en el punto medio del extremo derecho del dominio, esto es a la mitad de la línea L2, mientras que los extremos superior e inferior izquierdos (líneas L4 y L6) se restringieron al movimiento completamente. El tamaño de elemento promedio empleado fue 4 mm. Con base en lo anterior, las características del dominio de diseño inicial fueron: 16000 mm² de área, esfuerzo de von Mises máximo = 1.4 MPa, esfuerzo promedio = 0.33MPa.

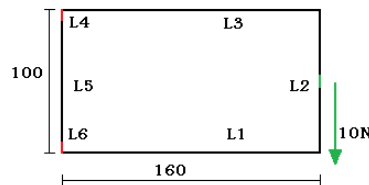


Figura 4.1: Dominio de diseño de la viga corta

Los parámetros de optimización iniciales: TR = 0.10, TA = 0.90, TRE = 0.01 y TAE = 0.00. Después de 301 iteraciones el valor de TR cambió a 0.42, mientras que el área de la estructura disminuyó a 1140 mm² (reducción del 92.88%), y los esfuerzos máximo y promedio de von Mises alcanzaron los valores 2.85 MPa y 1.2MPa respectivamente (incrementos del 103.57% y 263.63%).

En la [Figura 4.2](#) se puede apreciar la historia de la optimización de la geometría de la viga corta. En la iteración $i = 1$, el nivel de esfuerzos en el dominio es completamente heterogéneo. Conforme el número de iteraciones aumenta, también lo hace la homogeneidad de los esfuerzos en la estructura, lo cual se hace patente si se observa el resultado de la iteración $i = 301$, en la cual se tiene una estructura esforzada homogéneamente casi por completo.

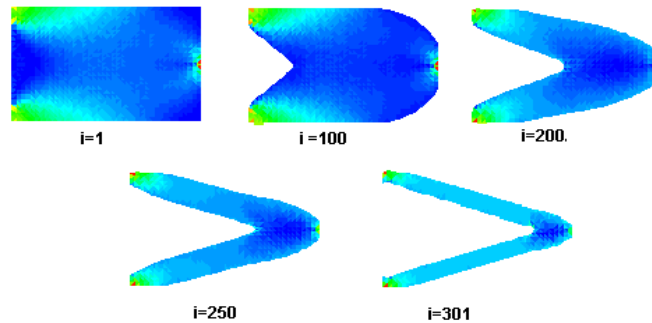


Figura 4.2: Diferentes estados de esfuerzos de la optimización de la barra corta

Barra delgada sometida a carga axial

El segundo ejemplo mostrado consiste en la optimización de un dominio rectangular de 120 mm X 20 mm y 1 mm de espesor, sometido a una carga distribuida de 450 N/m en la dirección horizontal aplicada en el extremo libre de la misma como se muestra en la [Figura 4.3](#). El material empleado en el dominio tiene las siguientes propiedades: módulo de Young 200 GPa, coeficiente de Poisson 0.3 y esfuerzo de cedencia 250 MPa. Las aristas susceptibles de modificación son las líneas L1 y L5 de 80 mm de longitud cada una (longitud nominal). El resto del perímetro no sufre cambio alguno.

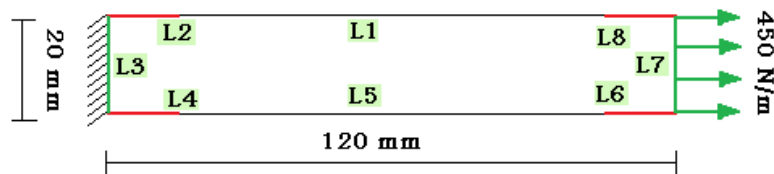


Figura 4.3: Dominio de diseño en la optimización de la barra delgada

Se emplearon elementos finitos triangulares de 2 mm de tamaño promedio. Se consideraron los siguientes parámetros de optimización: $TR=0.5$, $TA=0.99$, $TRE=0.01$, $TAE=0$. Del análisis por elementos finitos se obtuvo la siguiente información del dominio inicial: área = 2400 mm², esfuerzo de von Mises máximo = 8.02 MPa, esfuerzo de von Mises promedio = 4.51 MPa. Hay que señalar que el valor TR inicial elegido es elevado aparentemente, sin embargo, tomando en cuenta el esfuerzo mínimo = 3.78 MPa corresponde al 47% del máximo, es de esperar que valores bajos de TR resulten en iteraciones y cálculos innecesarios.

Al algoritmo le toma 786 iteraciones alcanzar un valor de $TR=1$. Lo anterior no significa que todo el contorno de la geometría se encuentre al mismo nivel de esfuerzos. Hay que recordar que existen regiones de la frontera que no pueden ser modificadas por lo que, a pesar de que estas zonas tengan un nivel inferior de esfuerzo, al no sufrir cambio alguno el valor de TR se incrementa cada que las zonas modificables no experimentan cambios para el valor que el parámetro tenga en una iteración dada.

El diseño resultante, obtenido después de 786 iteraciones, tiene las siguientes características: área = 1413 mm^2 , esfuerzos máximo y promedio 14.04 MPa y 8.13 MPa respectivamente. Con una reducción del 41.1% del área se obtuvieron aumentos del 75.1% y 80.3% en los esfuerzos máximo y promedio del diseño respectivamente.

En las imágenes siguientes (Figura 4.4) se encuentra el desarrollo de los esfuerzos máximo, medio y mínimo durante el proceso. Se destacan las tendencias de los mismos, en el primer y segundo casos a la alza y en el tercero a la baja. En los dos primeros casos no se logra una estabilización dado que se alcanza al valor límite $TR = 1$ antes de lograr la homogeneidad de esfuerzos. En realidad, en este caso, no es posible llegar a dicha característica ya que hay regiones de muy bajo esfuerzo en la frontera, justo en los extremos del dominio, que no pueden ser modificadas por la definición del caso.

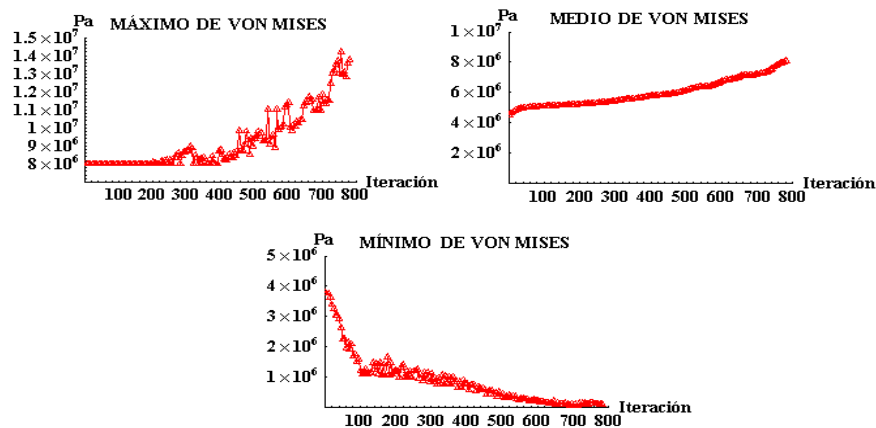


Figura 4.4: Evolución de los esfuerzos de von Mises en el diseño óptimo de la barra delgada

Sin embargo, el valor medio del esfuerzo en la frontera, calculado para el diseño final, es 9.55 MPa , valor apenas por encima del esfuerzo medio de toda la geometría. Lo anterior es una evidencia de que el nivel de esfuerzos o utilización en la región esforzada del diseño,

la región central adelgazada para ser precisos, es homogénea. A continuación, en la [Figura 4.6](#) se observan los gráficos de distribución de esfuerzos de von Mises de algunas etapas del proceso de optimización.

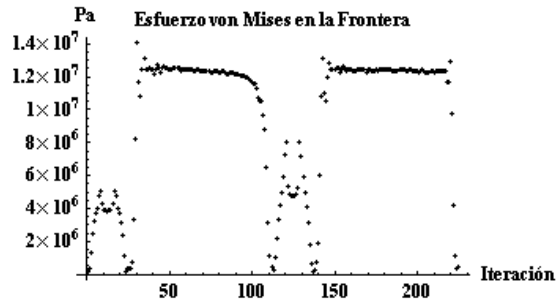


Figura 4.5: Esfuerzos en los nodos de la frontera de la geometría final

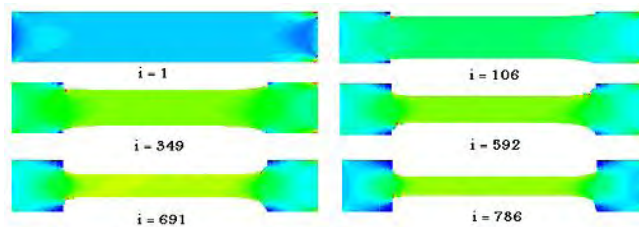


Figura 4.6: Gráficos de esfuerzos para diferentes iteraciones en la optimización de la barra delgada

En la [Figura 4.7](#) se muestra el detalle de la zona de mayor modificación en la barra. El perfil de la geometría muestra que la curva B-Spline se ajusta de manera suave a las modificaciones propias del proceso de optimización.

Por último se muestra la evolución del índice de desempeño para este ejemplo ([Figura 4.8](#)). Observando el gráfico se aprecia que en la iteración $i = 691$ se presenta el diseño óptimo de la barra antes de llegar al valor de $TR = 1$. No obstante, como se corroboró en los párrafos anteriores, el diseño aún puede ser modificado para obtener un mejor aprovechamiento del material. Es decir, aunque el índice de desempeño indique que el resultado óptimo es el de la iteración 691 se puede llevar el proceso más allá con el fin de obtener un diseño que aproveche un poco más el material en él, a pesar de que sea menos homogéneo en cuanto a su nivel de esfuerzos. Lo anterior también es posible en tanto no se rebasa el esfuerzo límite, en este caso el esfuerzo de cedencia del material.



Figura 4.7: Detalle de la geometría resultante

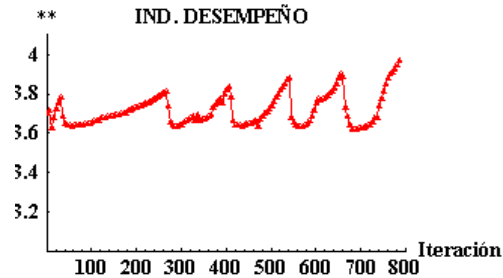


Figura 4.8: Gráfico del comportamiento del índice de desempeño en la optimización de la barra delgada

Diseño de la Geometría de un Fruto

Las formas que la naturaleza ha dado a los frutos son bien conocidas por todo mundo aunque no todos saben el porqué de éstas. Querin [2], por medio del método ESO, demostró que la forma de algunos frutos, tales como la cereza o la manzana, surge de un proceso de optimización natural que depende fundamentalmente del nivel de esfuerzos experimentado por el fruto debido a fuerzas de cuerpo. En este apartado se corrobora lo comprobado por Querin aplicando la metodología de optimización propuesta.

El dominio de diseño representa un cuerpo suspendido sujeto a la acción de fuerzas de cuerpo debidas a la gravedad (densidad de 2700 kg/m^3 y $g = 9.81 \text{ m/s}^2$), con módulo de Young de 70 GPa y coeficiente de Poisson de 0.33, el cual está contenido en un cuadrado de 100 mm por lado, ver [Figura 4.9\(a\)](#). En la [Figura 4.9\(b\)](#) se observa la distribución de esfuerzos de von Mises inicial en el dominio de diseño (obtenida usando un tamaño promedio de elemento de 2 mm), donde el máximo y promedio son: 65.87 kPa y 2.99 kPa respectivamente.

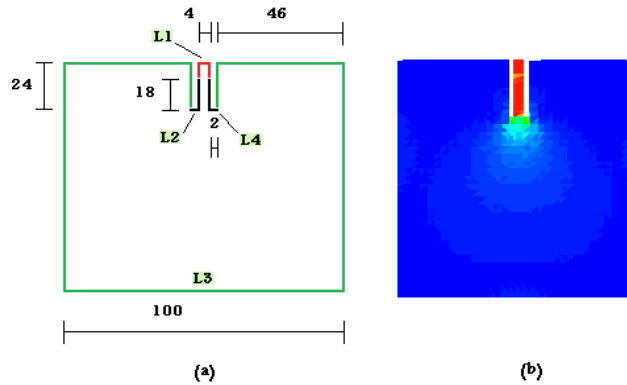


Figura 4.9: a) Dominio de diseño, b) distribución de esfuerzos de von Mises

Se utilizaron los siguientes valores iniciales para los parámetros de optimización: TR = 0.5, TA = 0.9, TRE = 0.015, TAE = 0.001. Durante el proceso se consideraron las líneas L1, L2 y L4 como fijas, evolucionando únicamente la L3 la cual modela el cuerpo del fruto. Los cambios en el área y los esfuerzos máximo y promedio de von Mises generados durante la optimización se pueden apreciar en los gráficos de la [Figura 4.10](#).

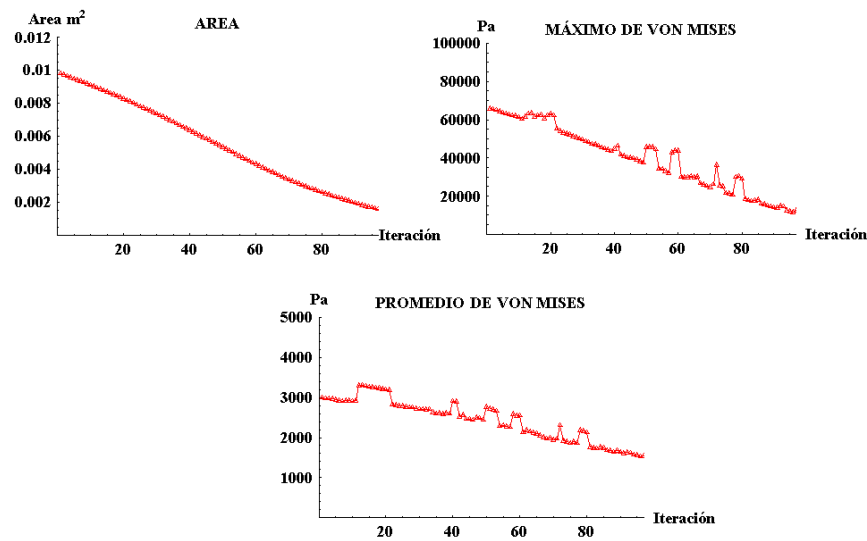


Figura 4.10: Gráficos del comportamiento de área y esfuerzos de von Mises máximo y promedio en la optimización de la geometría del fruto

Según el gráfico del índice de desempeño, [Figura 4.11](#), se alcanza una geometría óptima en la iteración 39. Sin embargo, el índice continúa decreciendo paulatinamente con la cualidad de que las geometrías correspondientes son similares entre sí cambiando prácticamente sólo en su tamaño. En la iteración 61 se presenta otro cambio en la tendencia

del índice de desempeño así como en la forma de las geometrías resultantes. Observando los gráficos de la [Figura 4.12](#) se pueden identificar formas bien conocidas de frutos. Estos resultados, igual que los de Querin ([Figura 4.13](#)), indican que la forma que la naturaleza ha dado a muchos de los frutos que se conocen se define con base en el nivel de esfuerzos de las mismas.

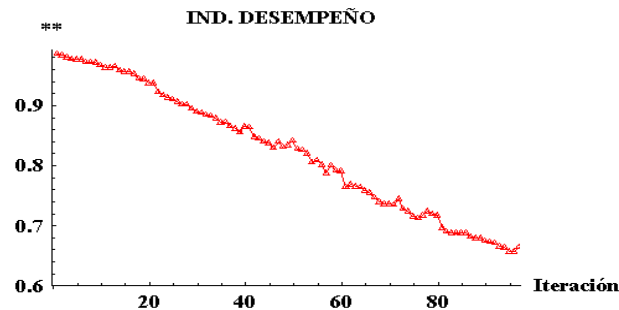


Figura 4.11: Gráfico del índice de desempeño en la optimización del fruto

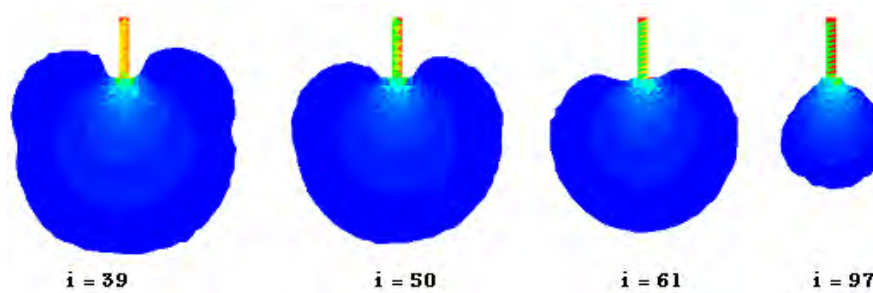


Figura 4.12: Gráficos de las geometrías obtenidas en iteraciones clave durante la optimización del fruto

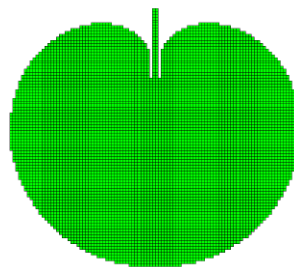


Figura 4.13: Geometría generada por Querin [2] para el problema de optimización de forma de un fruto

Cabe señalar que, aunque las geometrías producidas por ambos métodos son muy similares, el método propuesto por el autor requiere mucho menos recursos de cómputo. Mientras que Querin utilizó una malla de 100x100 elementos finitos, los resultados mostrados en la [Figura 4.12](#) requirieron únicamente una malla de 50x50, una cuarta parte de

la cantidad de elementos finitos usada por el primero. Lo anterior es una de las virtudes intrínsecas al modelado paramétrico de la geometría.

Múltiples Casos de Carga

En este apartado se presentan los resultados obtenidos al aplicar la metodología propuesta de diseño óptimo a tres casos de estructuras sometidas a múltiples casos de carga. Como se menciona en el Capítulo 3. Descripción del Método, las estructuras sometidas a varios casos de carga tienen que ser optimizadas considerando y comparando los resultados de cada uno de los casos de carga a la vez.

Los ejemplos desarrollados en este trabajo fueron: un puente soportado en tres apoyos, una llave para inglesa y un par de marcos para bicicleta.

- *Puente con 3 apoyos 7 LC*

Algunos de los trabajos dedicados al diseño óptimo de puentes pueden ser revisados en Xie [1], Cervera [4] entre otros. Para el diseño de un puente hay que tener en cuenta que la carga se desplaza a lo largo de la superficie superior del mismo, por lo que para cada posición de la carga se define un caso de carga (LC). Para el puente diseñado aquí se considera un dominio de diseño de 18 m X 6 m y 0.5 m de espesor, sometido a 7 casos de carga (LC1, ..., LC7) generados por una carga móvil de 1000 N en dirección vertical negativa, como se muestra en la [Figura 4.14](#). Además, se considera una zona de no diseño, es decir que no puede modificarse durante el proceso de optimización, que abarca la región con ordenada mayor a 5 m lo cual permite que haya un espesor mínimo de 1 m en la parte superior del puente.

Las propiedades del material utilizado en el dominio son: 200 GPa de módulo de elasticidad, 0.3 como coeficiente de Poisson, 250 MPa esfuerzo de fluencia. Empleando elementos triangulares y un tamaño promedio de 0.5 m se obtuvieron los siguientes valores de esfuerzo de von Mises para cada caso de carga:

LC	1	2	3	4	5	6	7
Máx (kPa)	4.13	18.90	18.51	18.35	18.42	18.32	39.87
Promedio (kPa)	0.251	0.152	0.160	0.183	0.161	0.150	0.256

Tabla 4.1: Esfuerzos de von Mises calculados sobre el dominio de diseño para cada uno de los casos de carga

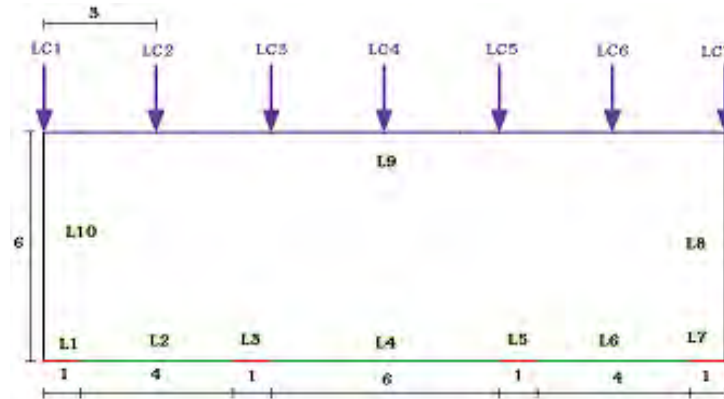


Figura 4.14: Dominio de diseño para la optimización de un puente

Se fijaron los valores iniciales de los parámetros de optimización en: $TR = 0.2$, $TA = 0.95$, $TRE = 0.015$ y $TAE = 0.001$. Después de 2886 iteraciones se alcanzó el valor de $TR=1$ (TA se mantuvo en 0.95), aunque el diseño óptimo se presentó en la iteración 2021 de acuerdo con la historia del índice de desempeño. En la [Figura 4.15](#) se muestra el desarrollo del área, el índice de desempeño y los esfuerzos máximo y promedio de von Mises. En el caso de los gráficos de esfuerzos hay que señalar que sólo se toman en cuenta los primeros cuatro casos de carga por la simetría que hay con el resto de ellos.

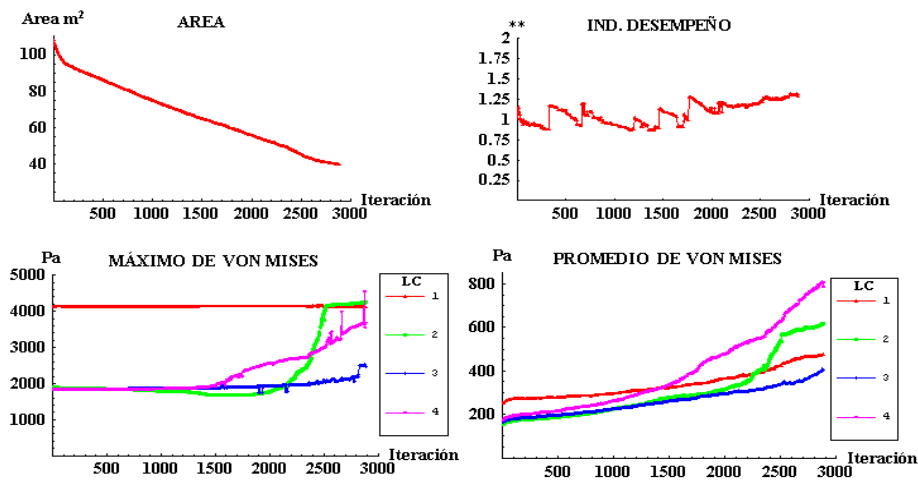


Figura 4.15: Gráficos del comportamiento de área, índice de desempeño y esfuerzos de von Mises máximo y promedio

En la [Tabla 4.2](#) están los valores de esfuerzos correspondientes a los diseños de las iteraciones 2021 y 2886, es decir, el óptimo y el último. De la misma forma, en la [Figura 4.16](#) se aprecian las distribuciones de esfuerzos para el caso de carga LC4 de estas mismas iteraciones.

Iteración	LC	1	2	3	4	5	6	7
2021	Máx (kPa)	4.14	1.80	1.93	2.56	1.85	2.23	4.01
	Promedio (kPa)	0.370	0.321	0.304	0.483	0.307	0.332	0.359
2886	Máx (kPa)	4.12	4.25	2.47	3.67	1.95	4.22	4.10
	Promedio (kPa)	0.475	0.617	0.404	0.807	0.398	0.599	0.464

Tabla 4.2: Esfuerzos máximo y promedio de von Mises por caso de carga para las iteraciones 2021 y 2886 en el diseño óptimo del puente



Figura 4.16: Distribución de esfuerzos para las iteraciones 2021 y 2886 en el diseño óptimo del puente

En las [Figuras 4.17\(a\) y \(b\)](#) se muestran los resultados generados por los métodos de Cervera y Xie, respectivamente. La similitud entre estos resultados y el generado aquí comparten muchas características a pesar de que cada uno de los métodos son diferentes. Cada una de estas soluciones es óptima en sí para el método empleado. Lo anterior, como ya fue explicado al final del Capítulo 3. Descripción del Método, es normal.



Figura 4.17: Soluciones al problema del puente sometido a múltiples casos de carga: (a) solución generada por Cervera [4], (b) solución generada por Xie [1]

- *Llave Inglesa*

Una llave inglesa es una herramienta diseñada básicamente para dos casos de carga los cuales representan las acciones de usarla en sentido horario o antihorario respectivamente. Para simular dicho par de casos de carga, sobre el dominio mostrado en la [Figura 4.18](#) se aplicó una carga distribuida de 2 N/mm. Como se aprecia en la figura, las líneas L3 y L5 están sometidas a la carga distribuida, mientras que las líneas L7 y L1 están restringidas al movimiento. Las líneas L2 y L6 son las únicas que se modificaron durante la optimización. Las propiedades del material empleado fueron: módulo de elasticidad 200 GPa, coeficiente de Poisson 0.3. El espesor del dominio fue 5 mm y el área inicial 4359.1 mm².

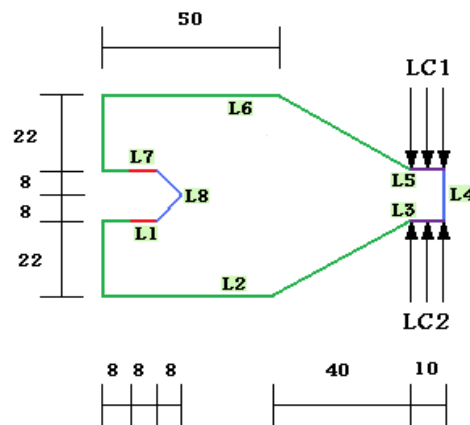


Figura 4.18: Dominio de diseño empleado en la optimización de la llave inglesa

Utilizando elementos finitos triangulares de tamaño promedio 2.5 mm se obtuvieron los siguientes valores de esfuerzo de von Mises máximo y promedio: 1.230 MPa y 0.211 MPa, respectivamente. En la [Figura 4.19](#) están los gráficos de la distribución de esfuerzos en el dominio para ambos casos de carga.

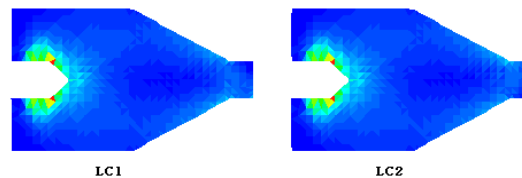


Figura 4.19: Distribución de esfuerzos de von Mises calculadas en el dominio de diseño para ambos casos de carga

Los parámetros de optimización considerados en este ejemplo fueron: $TR = 0.2$, $TA = 0.95$, $TRE = 0.01$, $TAE = 0.001$. Con estos números el proceso evolutivo se desarrolló a lo largo de 357 iteraciones durante las cuales se presentan valores del índice de desempeño que denotan la aparición del estado óptimo a partir de la iteración 16, sin embargo, para dicha posición aún existe demasiado material por remover y que está siendo subutilizado. Continuando con el proceso podemos observar que en realidad se presentan múltiples estados en los que se puede considerar un óptimo para un determinado nivel de esfuerzos, ver [Figura 4.20](#). De esta forma tenemos los diseños de las iteraciones 59, 101, 163, 247, y 357 como soluciones óptimas referidas a diferentes niveles de esfuerzo, de las cuales es la última la de mejores características en cuanto a utilización eficiente del material. Las distribuciones de esfuerzos de estas iteraciones para el caso de carga LC1 se muestran en la [Figura 4.21](#), la historia de los esfuerzos máximo y promedio de von Mises se puede observar en la [Figura 4.22](#).

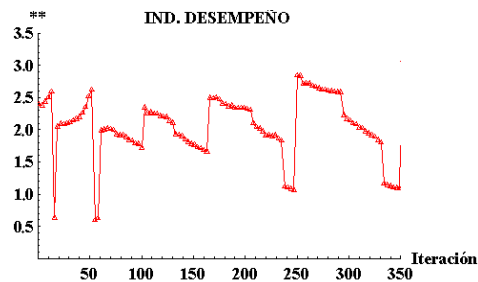


Figura 4.20: Gráfico del índice de desempeño en la optimización de la llave inglesa

Por último, la relación del área de las iteraciones mencionadas con la correspondiente a la iteración 16 indican las siguientes reducciones:

Iteración	16	59	101	163	247	357
Área mm ²	4211.4	3955.1	3709.0	3425.9	3155.4	2508.8
Reducción %	0	6.01	11.93	18.65	25.07	40.43

Tabla 4.3: Comparación de área entre los resultados principales según el gráfico del índice de desempeño

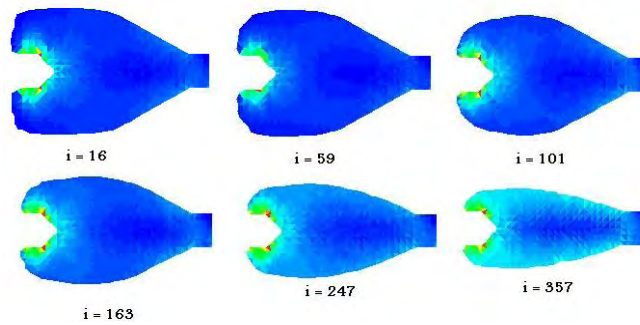


Figura 4.21: Distribuciones de esfuerzo de von Mises para las iteraciones clave en la optimización de la llave inglesa

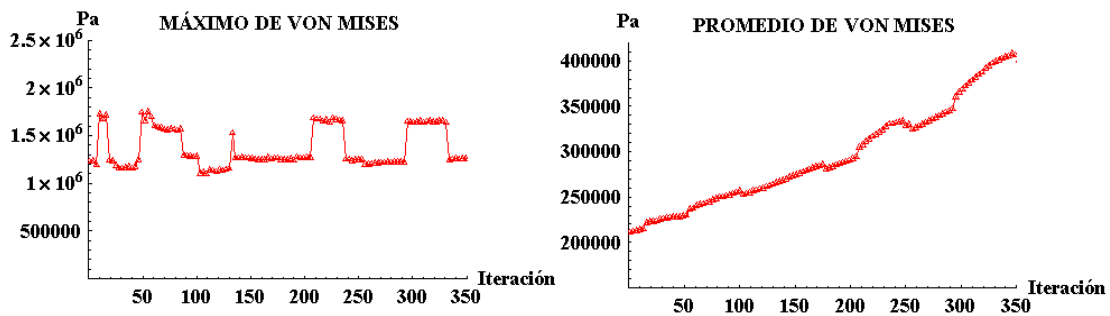


Figura 4.22: Gráficos del comportamiento de los esfuerzos de von Mises máximo y promedio durante la optimización de la llave inglesa

Querin [2] resolvió este mismo problema en su trabajo doctoral obteniendo la geometría mostrada en la Figura 4.23. En este caso las diferencias entre las soluciones de ESO y las desarrolladas aquí son de apreciarse. Lo anterior no es extraño ya que la función objetivo de Querin fue el peso de la herramienta, mientras que en este trabajo el objetivo es lograr homogeneidad en el nivel de esfuerzos. No obstante, y aunque no lo indica, Querin logra una reducción de peso de alrededor del 49% contra el 40% obtenido por homogeneidad de esfuerzos.

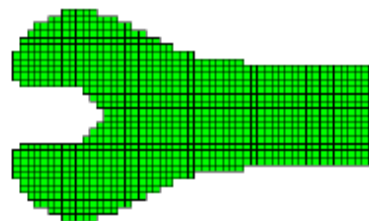


Figura 4.23: Solución óptima generada mediante ESO. Querin [2]

- *Marcos de Bicicleta*

En este apartado se muestran los resultados obtenidos al diseñar, por medio de la propuesta descrita, dos marcos de bicicleta sobre los que se simulan tres casos de carga . Dichos casos representan las siguientes situaciones:

Caso de carga	Descripción	Esfuerzo	Velocidad m/s	Dirección de la fuerza	Fuerza Asiento (N)	Fuerza Manubrio (N)	Fuerza Pedal (N)
LC1	Rodando en superficie plana con velocidad moderada	Ligero	10	x	0	0	0
				y	-800	0	-104
LC2	Rodando en superficie poco inclinada (pendiente 1/10) a velocidad moderada	Moderado	8	x	80	0	52
				y	-796	0	-512
LC3	Rodando en superficie inclinada (pendiente 1/25) a velocidad lenta (El ciclista no va sentado)	Extremo	4	x	0	400	414
				y	0	0	-1655

Tabla 4.4: Descripción de los casos de carga aplicados al marco de bicicleta diseñado (Valores obtenidos de Tom Compton [5])

El dominio de diseño para este ejemplo está constituido por 10 líneas según se muestra en la [Figura 4.24](#), con un espesor de 5 cm y un área total de 6295.5 cm². Las características del material empleado son: módulo de Young 200 GPa, coeficiente de Poisson 0.3; además se usaron elementos finitos triangulares de tamaño promedio 2.5 cm para el cálculo de los esfuerzos. Con base en lo anterior, se obtuvieron los siguientes resultados para el dominio de diseño ([Tabla 4.5](#)):

Caso de carga	Esfuerzo Máximo de von Mises (kPa)	Esfuerzo Promedio de von Mises (kPa)
LC1	623.677	37.635
LC2	658.698	53.689
LC3	600.487	86.89

Tabla 4.5: Esfuerzos máximos y mínimos de von Mises generados por cada caso de carga sobre el dominio de diseño

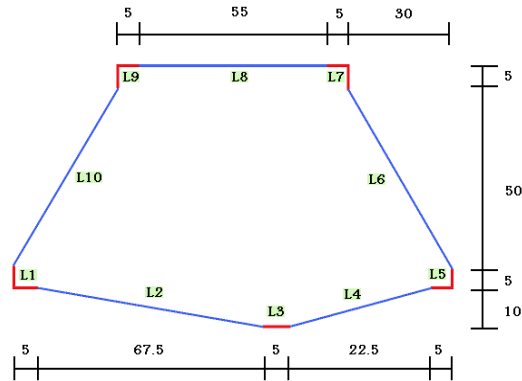


Figura 4.24: Dominio de diseño para el marco de bicicleta

Los valores de TR, TA, TRE y TRA utilizados en el diseño de ambos marcos fueron 0.2, 0.95, 0.015 y 0.01 respectivamente.

➤ Marco 1

El primer marco de bicicleta fue diseñado bajo el supuesto de que todas las líneas en el dominio fueran susceptibles de modificación, excepto aquellas que contienen los puntos principales de la bicicleta. Así las líneas modificables fueron L2, L4, L6, L8 y L10.

Del gráfico en la [Figura 4.25](#) se observa que el índice de desempeño en la iteración 111 indica que se produjo un resultado óptimo para el nivel de esfuerzos de la misma iteración. Sin embargo, como se puede constatar en la primer fila de imágenes en la [Figura 4.26](#), aunque la forma sea óptima, aún se puede modificar para niveles de esfuerzo más elevados y sobre la misma forma encontrada. De esta manera, después de 652 iteraciones se obtuvo el diseño de la última fila de la [Figura 4.26](#) cuya distribución de esfuerzos es más homogénea que el de la iteración 111.

Caso de carga	Esfuerzo Máximo de von Mises (kPa)		Incremento %	Esfuerzo Promedio de von Mises (kPa)		Incremento %
	i = 111	i=652		i = 111	i=652	
LC1	624.701	627.218	0.4	42.932	111.892	160.6
LC2	658.443	658.844	0.06	60.809	148.375	144.0
LC3	612.544	611.603	-0.15	100.957	228.529	126.4

Tabla 4.6: Comparación entre los diseños de las iteraciones 111 y 652: esfuerzos máximo y promedio de von Mises

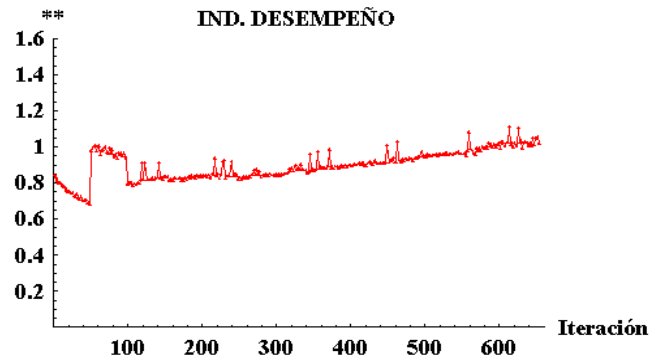


Figura 4.25: Gráfico del índice de desempeño producido durante el proceso de optimización

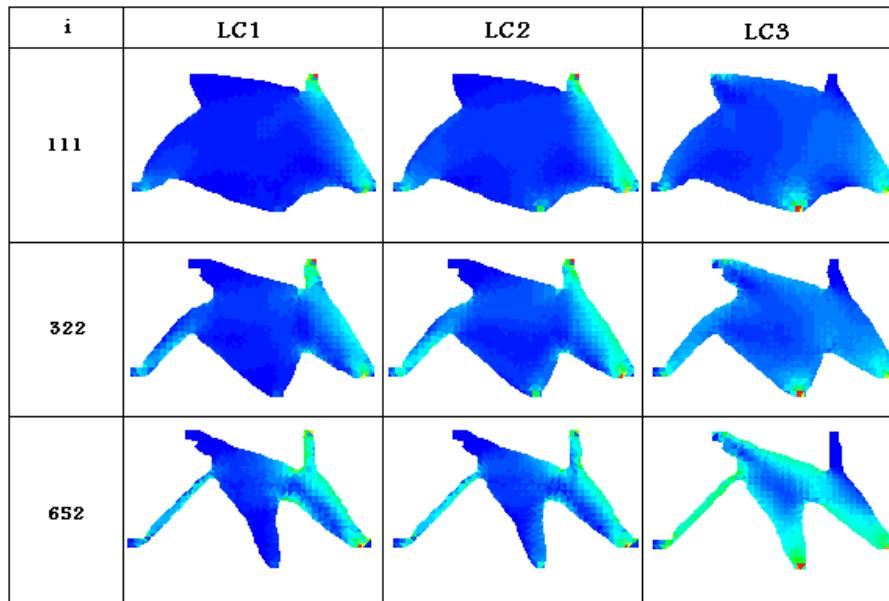


Figura 4.26: Distribuciones de esfuerzos para cada uno de los casos de carga e iteraciones clave

Como lo señala la [Tabla 4.6](#) el valor del esfuerzo máximo de von Mises apenas se ve modificado durante el proceso, no obstante, el esfuerzo promedio aumenta gradualmente logrando así que el nivel de esfuerzos en la estructura sea más homogéneo. Lo anterior es evidente al observar la evolución del LC3 en la [Figura 4.26](#). El comportamiento del cambio en el esfuerzo promedio de von Mises está dado con mayor detalle en la [Figura 4.27](#).

➤ Marco 2

Como segundo caso se presenta el diseño del marco de la bicicleta considerando que la línea que une al pedal con la rueda trasera permanece sin cambios, así como también la línea que une el manubrio con la llanta delantera. Es decir, las líneas L2, L6 y L8 fueron las únicas modificadas durante el proceso. En este caso, haciendo referencia al gráfico del índice de desempeño ([Figura 4.28](#)), se revela que no existe un punto mínimo evidente que indique la aparición de un modelo óptimo para algún nivel de esfuerzos y alguna iteración. Sin embargo, se puede identificar que entre el dominio de diseño inicial y aproximadamente la iteración 100 no existe un cambio significativo en el índice de desempeño, es decir, en este rango el índice describe una línea horizontal. En este sentido se puede decir que, para las restricciones impuestas en este caso, la geometría base del diseño óptimo se detalla en este rango de iteraciones después del cual se mejora el desempeño de la estructura.

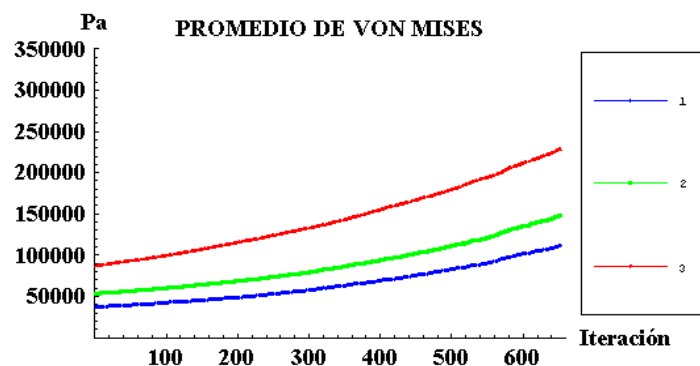


Figura 4.27: Comportamiento del esfuerzo promedio de von Mises para cada uno de los casos de carga durante el proceso de optimización

Como lo indica el gráfico del índice de desempeño, el proceso de optimización se llevó a cabo a lo largo de 732 iteraciones, deteniéndose porque la zona de la unión entre el manubrio y el resto de la estructura se adelgazó considerablemente (ver [Figura 4.29](#)).

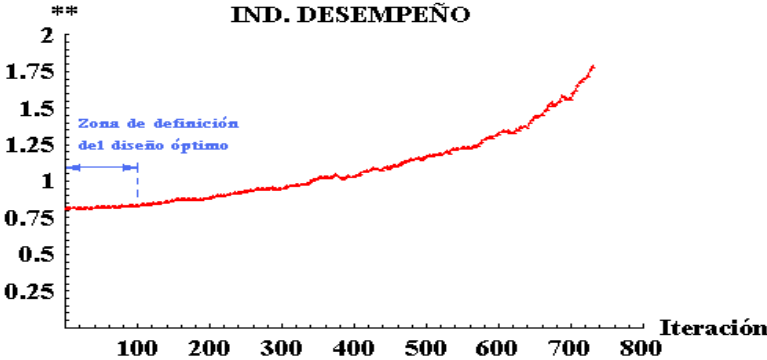


Figura 4.28: Gráfico del índice de desempeño obtenido en el diseño óptimo del marco 2

i	LC1	LC2	LC3
100			
500			
732			

Figura 4.29: Distribuciones de esfuerzos para cada uno de los casos de carga en iteraciones clave

En la siguiente tabla se muestra un comparativo de los esfuerzos máximos y promedio de von Mises para los diseños de las iteraciones 100 y 732. Como puede observarse, a diferencia del resultado obtenido en el apartado anterior, el diseño obtenido no está esforzado homogéneamente para ningún caso de carga. Sin embargo, el esfuerzo promedio al cual está sometido sufre un incremento bastante considerable.

Caso de carga	Esfuerzo Máximo de von Mises (kPa)		Incremento %	Esfuerzo Promedio de von Mises (kPa)		Incremento %
	i = 100	i = 732		i = 100	i = 732	
LC1	624.892	627.723	0.45	44.661	188.924	323.02
LC2	658.445	1183.361	79.72	62.294	274.231	340.22
LC3	607.708	1602.942	163.77	98.417	442.645	349.76

Tabla 4.7: Comparación entre los diseños de las iteraciones 100 y 732: esfuerzos máximo y promedio de von Mises

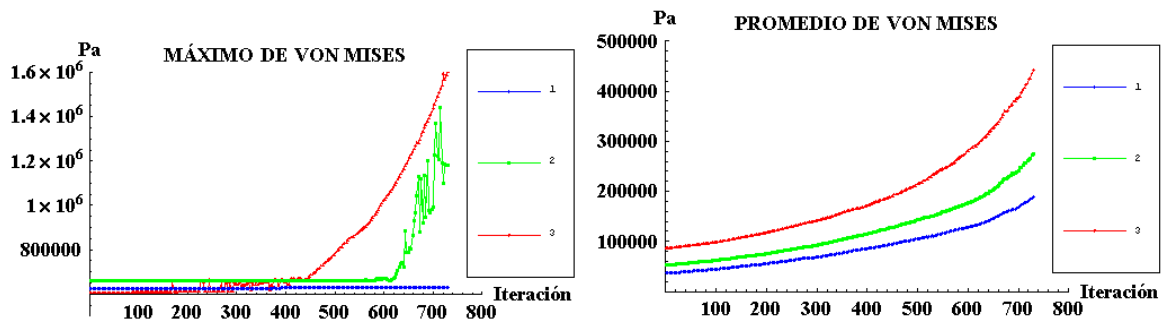


Figura 4.30: Comportamiento de los esfuerzos máximo y promedio de von Mises para cada uno de los casos de carga durante el proceso de optimización

Finalmente, a continuación se presentan las imágenes de ambos marcos de bicicleta desarrollados indicando ruedas, manubrio, asiento y pedales.

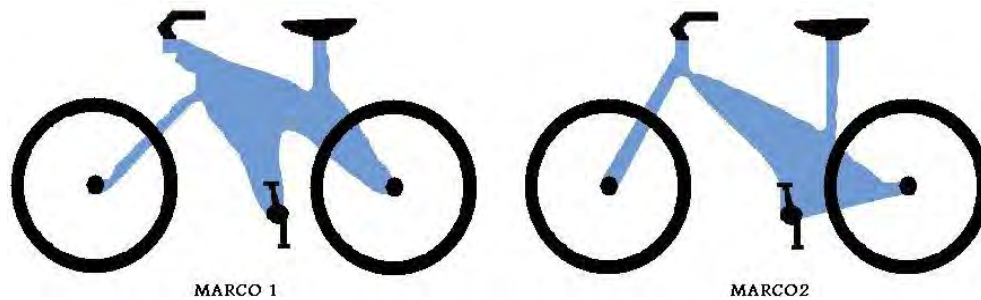


Figura 4.31: Marcos de bicicleta resultantes

En la figura anterior se muestran los dos marcos de bicicleta desarrollados mediante el procedimiento de optimización estructural propuesto. Las diferencias geométricas entre ambos son notorias, las cuales son resultado de las restricciones consideradas para cada uno de ellos. Para el marco 1 se logra una reducción de área de 5413.132 cm^2 a 2642.352 cm^2 (51.19%) y para el marco 2 la reducción fue de 5491.280 cm^2 a 2309.278 cm^2 (57.95%).

En ambos casos el valor de referencia es el correspondiente a la iteración en la que se halló la geometría de la cual parte el diseño óptimo (111 y 100 respectivamente).

El marco de la bicicleta de competencia mostrada en la [Figura 4.32](#) (Mevdev [6]) fue diseñado por medio de ESO. Las modificaciones que el contorno sufrió son similares a las obtenidas en el marco 2 mostrado en la [Figura 4.31](#) excepto en el soporte del asiento, no obstante el resto de ambos marcos es casi el mismo.

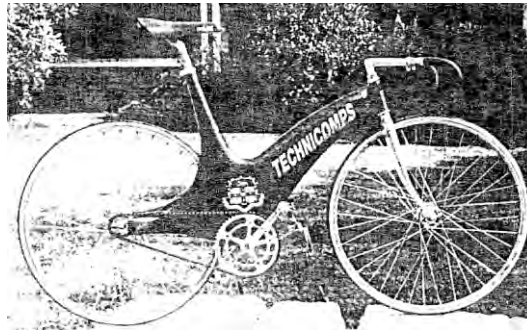


Figura 4.32: Bicicleta de fibra de carbono cuyo marco es resultado de optimización mediante ESO. Xie [1], Mevdev [6]

Diseño para Deformación Plana

Diseño de Tubos a Presión

La tarea principal en la optimización de tubos a presión implica el diseño de la forma interna de un dominio sometido a un estado de deformación plana provocado por una presión aplicada en el interior del dominio. No obstante, también se puede considerar la parte externa del dominio para ser trabajada teniendo así dos posibilidades de optimización del dominio, interna y externa. En la mayoría de los casos se pueden establecerse dos planos de simetría, horizontal y vertical, que pasan por el centro del dominio lo cual reduce considerablemente la cantidad de cálculos que hay que realizar en cada iteración del proceso, sobre todo en la parte de la evaluación de esfuerzos (FEA). Ver [Figura 4.33](#)

En el caso de que se trabaje sobre ambas fronteras, es necesario dividir el proceso en dos etapas: interna y externa. Se inicia con la parte interna del dominio debido a que es la más importantes de las dos. Además, si se inician ambas al mismo tiempo, la frontera

externa del dominio sería la primera en evolucionar debido a que su nivel de esfuerzos es mucho más bajo que el que se presenta en la externa. En este sentido, se debe utilizar un valor relativamente alto de TR (>0.3) para forzar a que la frontera empiece a modificarse.

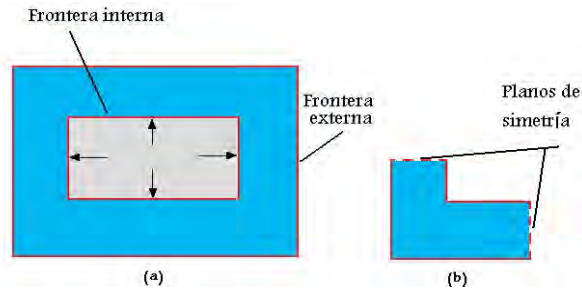


Figura 4.33: Indicaciones de las fronteras consideradas en el diseño de tubos a presión

A continuación se muestran dos ejemplos de optimización de tubos a presión. El primero consiste en sólo optimizar la parte interna de un tubo con perfil exterior rectangular. El segundo se refiere al problema de una tubería doble en el cual es necesario optimizar tanto la parte interna como la externa.

- *Diseño de Tubo Simple a Presión*

El objetivo es optimizar la parte interna de un tubo sometido a una presión interna de 1.5 Mpa y de medidas exteriores 100 mm X 80 mm y espesor mínimo de 7 mm el cual cuenta con 4 barrenos de 2.5 mm de radio cuyo dominio de diseño se muestra en la [Figura 4.34\(a\)](#).

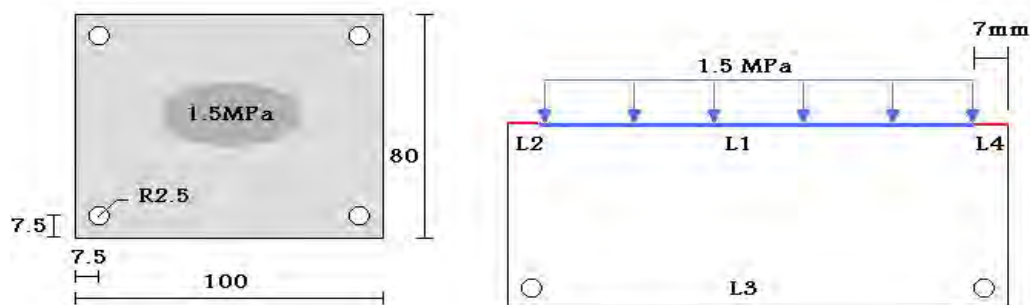


Figura 4.34: Dominio de diseño empleado en el diseño del tubo a presión simple: a) dominio completo, b) dominio simplificado por simetría

Considerando la simetría vertical del dominio el problema se reduce a optimizar la frontera horizontal (línea L1) que divide el tubo en dos partes iguales y que se modeló con 35

puntos de control. No se emplea la simetría horizontal para evitar que se generen distorsiones debidas a la perpendicularidad entre las simetrías horizontal y vertical. De esta forma, el dominio de diseño se reduce al mostrado en la [Figura 4.34\(b\)](#) formado por 4 líneas, de las cuales L2 y L4 son líneas de simetría con la dirección vertical.

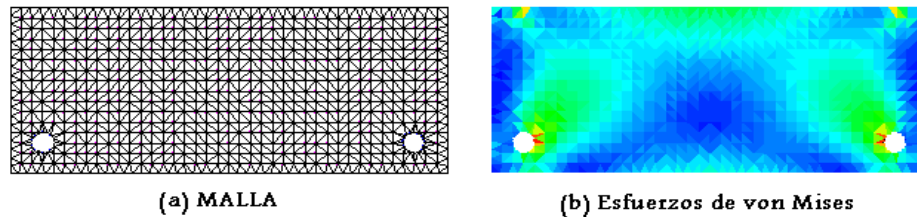


Figura 4.35: Dominio de diseño

Por otra parte, para este ejemplo se consideró una aleación de aluminio con módulo de elasticidad de 70 GPa, coeficiente de Poisson de 0.33 y esfuerzo de fluencia 230 MPa, además se empleó un tamaño promedio de elemento de 2 mm. La longitud nominal para este ejemplo es la inicial de la línea L1 (86 mm). Las características calculadas en este dominio son: área = 4000 mm², esfuerzos de von Mises: máximo 4.88 MPa y promedio 1.81MPa e índice de desempeño 0.61, ver [Figura 4.35\(b\)](#).

Los parámetros iniciales de optimización empleados fueron: TR=0.90, TA=0.99, TRE=0.0015, TAE=0.0; se destaca el valor elevado de TR el cual se justifica si se revisan los valores del esfuerzo en los nodos de la línea L1 y su ubicación (máximo_{L1} =4.19MPa en la zona media de L1, promedio_{L1} =1.25MPa, mínimo_{L1} =2.55MPa en ambos extremos de L1), así como la relación del máximo de la línea con el máximo de todo el dominio

$$\frac{\text{Max [L1]}}{\text{Max [Dominio]}}$$

Si se emplea un valor de TR por debajo de 0.86 los extremos de la línea L1 empezarán a evolucionar mientras que la región media permanecerá sin cambios, lo cual generaría distorsiones en la forma de dicha línea. Lo anterior se puede evitar tomando un valor de TR por encima de 0.86 y permitiendo, en cada iteración, desplazamientos muy pequeños de los puntos de control de la línea L1, así como un valor TRE más pequeño de lo normal. Sin embargo, el precio que se paga es que el número de iteraciones necesarias se incremente notoriamente y por ende el tiempo de cómputo. Una manera de disminuir este inconveniente es emplear un tamaño de elemento no muy fino, aminorando así el tiempo en el cálculo de los esfuerzos; en este caso un tamaño de elemento de 2 mm.

El proceso de optimización se lleva a cabo a lo largo de 427 iteraciones y se pueden identificar dos etapas. En la primera, que es la más larga con 398 iteraciones, aparece una superficie convexa al centro de la línea L1 que reduce gradualmente su área hasta que alcanza el espesor mínimo de 7mm (Figura 4.36). En la segunda etapa, una vez que la zona convexa desaparece, evolucionan las regiones cercanas a los barrenos hasta que se obtiene un espesor muy cercano al valor límite medido entre los barrenos y la línea (Figura 4.37).

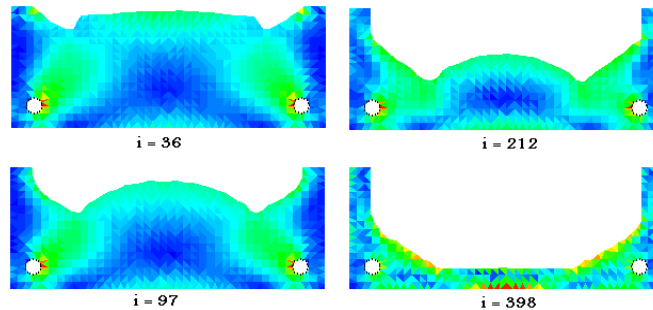


Figura 4.36: Secuencia de imágenes de la distribución de esfuerzos obtenidas durante la optimización del tubo a presión

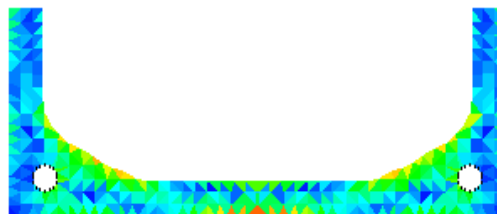


Figura 4.37: Distribución de esfuerzos del diseño óptimo del tubo a presión $i = 427$

Las características del último diseño son: área = 1452.7 mm² (reducción del 64%), esfuerzos de von Mises: máximo 25.36 Mpa y promedio 7.58MPa e índice de desempeño 0.58. En los gráficos mostrados en la Figura 4.38 se observa el desarrollo las características del diseño a través de cada una de las iteraciones.

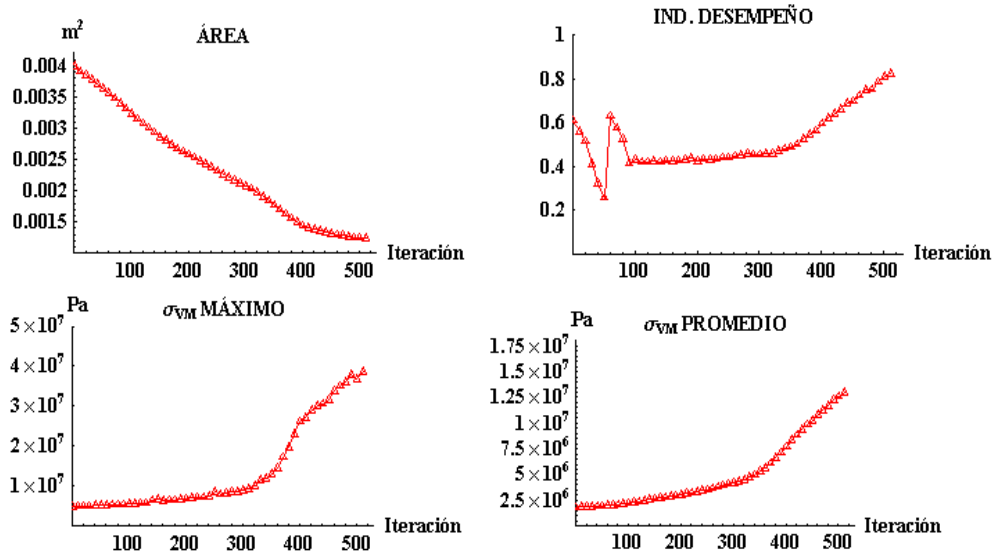


Figura 4.38: Gráficos de área, índice de desempeño y esfuerzos máximo y promedio de von Mises obtenidos en la optimización del tubo a presión

- *Diseño de tubo doble a presión para un intercambiador de calor.*

En este apartado se produce el diseño óptimo de un tubo doble sometido a presión empleado en un intercambiador de calor. El primero en resolver este problema fue O. Querin [2] Se considera la geometría del diseño original mostrada en la [Figura 4.39](#).

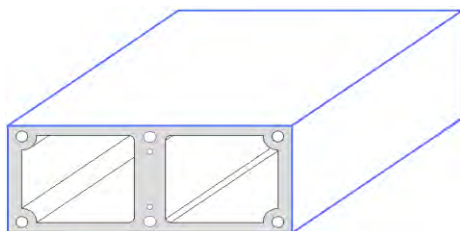


Figura 4.39: Diseño original del tubo doble para el intercambiador de calor

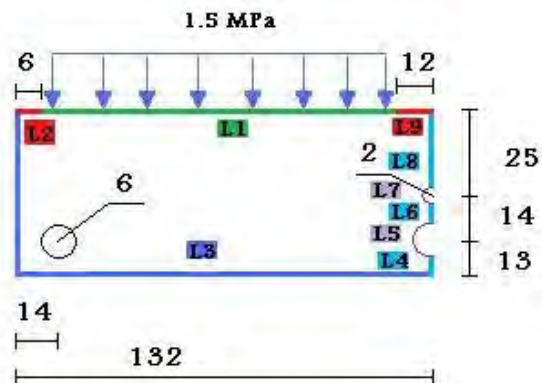


Figura 4.40: Dominio de diseño simplificado empleado en el diseño del tubo doble a presión

La especificación original requiere el diseño de la forma interna del tubo con una presión de operación de 1.5 Mpa sin modificar la posición ni el tamaño de los 8 agujeros los cuales son utilizados para fijar el tubo. Dadas las simetrías horizontal y vertical del dominio

de diseño sólo se emplea una cuarta parte de éste.

En su propuesta Querin desarrolló 5 etapas para llegar a la solución óptima. La solución aquí presentada es prácticamente la misma aunque, en este caso, sólo se fueron necesarias 2 etapas de solución: interna y externa. El dominio de diseño inicial se encuentra en la [Figura 4.40](#), mismo que está compuesto por 9 líneas (L1, L2, ..., L9). Durante la etapa de diseño interno sólo la línea L1 se somete a modificaciones permaneciendo el resto fijas.

Para este segundo ejemplo de geometrías sometidos a deformación plana se empleó el mismo material que en el ejemplo anterior: módulo de elasticidad de 70 GPa, coeficiente de Poisson de 0.33 y esfuerzo de fluencia 230 Mpa, así como una presión interna de 1.5 MPa. El tamaño de elemento promedio fue 2 mm y la longitud nominal para el cálculo del índice de desempeño fue la inicial de la línea L1 (114 mm). Bajo estas condiciones las características del dominio de diseño son: área 6803.38 mm², esfuerzos de von Mises máximo = 5.43 Mpa y promedio = 1.78 Mpa e índice de desempeño 0.51, ver [Figura 4.41](#). Los parámetros de optimización empleados en la primera etapa fueron: TR=0.73, TA=0.92, TRE=0.0015, TAE=0.001.

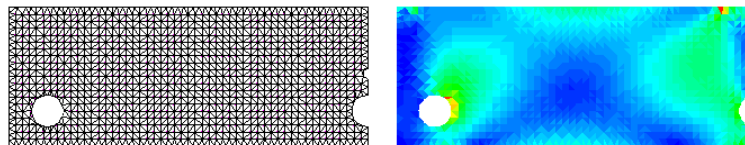


Figura 4.41: Malla y distribución de esfuerzos en el dominio de diseño del tubo doble a presión

De la figura anterior se destaca la no simetría en la distribución del esfuerzo lo cual se verá reflejado en el resultado final. De las imágenes mostradas a continuación se distingue que la optimización compensa la no simetría reduciendo el área del dominio a velocidades diferentes para cada extremo; sin embargo, la similitud geométrica entre ellos se conserva. El resultado óptimo de esta primer etapa se genera después de 483 iteraciones, obteniéndose un diseño con características: 3441 mm² de área, 11.29 MPa y 3.48 MPa como esfuerzos máximo y medio de von Mises (ver [Figura 4.42](#)).

El diseño obtenido en la iteración 483 ya es un óptimo si se piensa dejar intacta la parte externa del tubo. Sin embargo, de la figura anterior es claro que aún hay mucho material que puede ser retirado si se somete al proceso la parte externa del dominio. Para tal

propósito se consideró la línea L3 como la única a modificar, siendo todas las demás, incluso la L1, fijas. También se modificaron los parámetros de optimización debido a que los valores de esfuerzo sobre la línea L3 son considerablemente menores a los de la línea L1: $TR=0.30$, $TA=0.92$, $TRE=0.0015$, $TAE=0.001$.

En la [Figura 4.43](#) se muestran varias de las iteraciones en el proceso de optimización. El diseño óptimo se obtiene después de 1019 iteraciones adicionales. Este número es considerablemente mayor que el necesario para la primer etapa y se justifica porque se inicia con un valor de $TR=0.30$, es decir, hay una diferencia notable entre los esfuerzos máximo y promedio en la estructura.

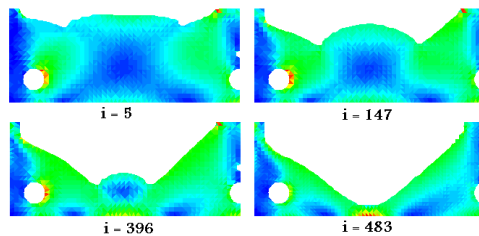


Figura 4.42: Distribución de esfuerzos de diferentes resultados obtenidos durante la primera etapa de la optimización del tubo doble a presión

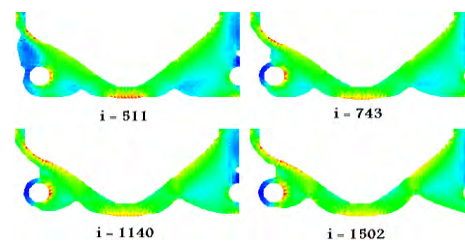


Figura 4.43: Distribución de esfuerzos de diferentes resultados obtenidos durante la segunda etapa de la optimización del tubo doble a presión

Las características del diseño en la iteración 1502 son las siguientes: área = 2674 mm², 8.76 MPa y 4.29 MPa esfuerzos de von Mises máximo y promedio respectivamente. Si se comparan estos valores con los de la solución de la iteración 483 obtenemos: 22.3% menos en área, 28.89% menos en esfuerzo máximo y 18.89% más en esfuerzo promedio. La diferencia entre los esfuerzos máximos puede ser engañosa pues se esperaría que el esfuerzo máximo aumentara; sin embargo, en la iteración 483 ([Figura 4.42](#)) esto se debe a que el esfuerzo en dicha iteración se está concentrando en la parte baja del dominio y el agujero del extremo derecho, mientras que en la iteración 1502 el esfuerzo se distribuye de manera más eficaz. Es conveniente poner atención en la comparación entre los esfuerzos promedio la cual nos indica que hay un beneficio importante al hacer parte del proceso de optimización a la parte externa del dominio.

Los gráficos que se muestran a continuación describen la historia de optimización de la tubería doble. Con una línea discontinua se separan las etapas desarrolladas. Como se

menciona anteriormente, el resultado obtenido al final de la primer etapa (iteración 483) ya es un resultado óptimo lo cual se verifica al mirar el gráfico de índice de desempeño; no obstante, aún conserva material que puede ser descartado.

Además de la disminución de área del diseño se pueden identificar otro par de beneficios trascendentes. En primer lugar, atendiendo el gráfico de esfuerzo máximo de von Mises, se logra que el esfuerzo se homogenice, es decir, se distribuya mejor en el dominio. Adicionalmente, del gráfico de esfuerzo promedio resalta la tendencia ascendente del mismo, lo que indica que el material en el dominio está siendo aprovechado más eficientemente.

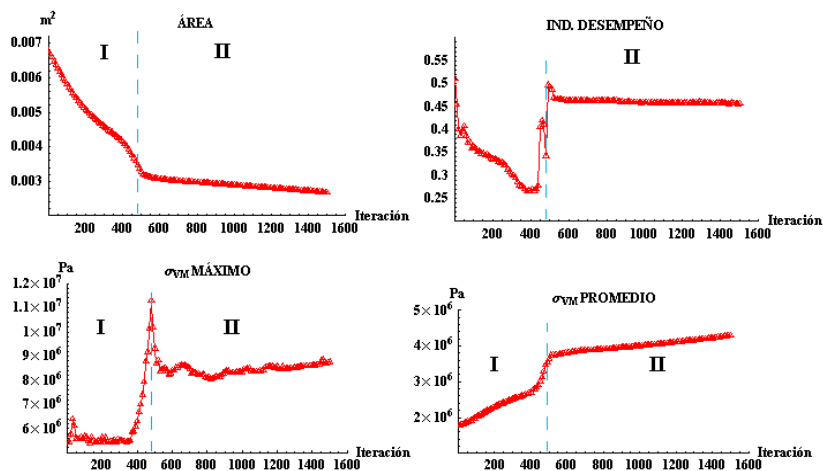


Figura 4.44: Gráficos de área, índice de desempeño y esfuerzos máximo y promedio de von Mises obtenidos en la optimización del tubo a presión. Se indica con la línea punteada la división entre las dos etapas desarrolladas en el proceso

Por último, en las Figuras 4.45 y 4.46 se presenta el tubo doble resultante, en la primer imagen se muestra la distribución de esfuerzos del tubo completo y en la segunda una representación en 3D del mismo. Se destaca la homogeneidad de los esfuerzos en la estructura.

El diseño obtenido por Querin (Figura 4.47), como se indicó al inicio de este apartado, es prácticamente el mismo en concepto. Recordando lo mencionado al principio del apartado “Índice de Desempeño” del Capítulo 4, ambos resultados son muy similares pero no llegan a ser iguales debido a que los métodos que los generan, aunque buscan el mismo objetivo, tienen planteamientos diferentes. Por un lado, Querin sigue el planteamiento del método

ESO en el que se modifica la geometría retirando o poniendo fragmentos de material; por otro lado, el método aquí propuesto modifica la frontera desplazándola lentamente ya sea interna o externamente. Aunque ambos planteamientos conllevan la adición o reducción de material, el resultado que cada uno genera no es idéntico al otro.

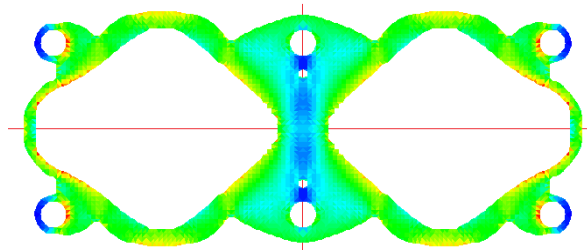


Figura 4.45: Distribución de esfuerzos en el diseño final del tubo doble a presión

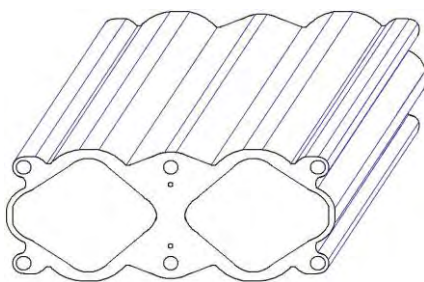


Figura 4.46: Tubo doble a presión óptimo producido

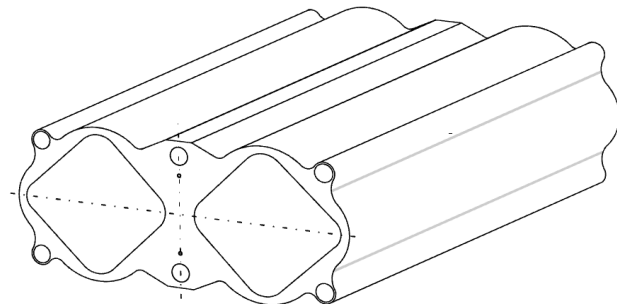


Figura 4.47: Diseño óptimo del tubo doble a presión desarrollado por Querin [2]

Referencias

- [1] Xie, Y.M., Steven, G.P., "Evolutionary Structural Optimization", Springer-Verlag London, Grain Britain, 1997
- [2] Querin, O. "Evolutionary Structural Optimisation: Stress Based Formulation and Implementation" Ph.D. Dissertation. Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia, pp 15-21, April 1997
- [3] Liang, Q.Q., Xie, Y.M., "Optimal Selection of Topologies for the Minimum-Weight Design of Continuum Structures with Stress Constraints", Proc. Instn. Mech. Engrs. Vol 213 Part C. 1998
- [4] Cervera, E., Trevelyan, J., "Evolutionary structural optimisation based on boundary

representation of NURBS. Part I: 2D algorithms” , Computers and Structures, 2005

[5] Tom Compton (2001). “Analytic Cycling – Forces on Rider” [documento WWW],
URL:http://www.analyticcycling.com/ForcesPower_Page.html

[6] Mevdev, J.J., “Design and Optimization of a Carbon Monocoque Bicycle Frame”, 4th year
Thesis, Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia, 1995.

Capítulo 5. Discusión y Conclusiones

Introducción

En el capítulo anterior se presentaron las evidencias de la funcionalidad y el desempeño del método de optimización estructural basado en modelado paramétrico propuesto en este trabajo. Los resultados son comparados con los generados por otros autores mostrando, de esta forma, que los resultados producidos en este trabajo son adecuados.

A continuación se discuten dichos resultados con la intención de destacar los puntos importantes del método propuesto comparado con algunos de sus antecesores. Al final del capítulo se encuentra una tabla ([Tabla 5.1](#)) en la cual se compara el método desarrollado en este trabajo con los mencionados. Lo anterior ayudará a entender la contribución lograda en el campo de la optimización estructural al realizar esta tesis.

Discusión

Los primeros tres problemas resueltos en este trabajo son ejemplos de estructuras sometidas a un solo caso de carga. El primero de ellos, aunque se trate de un problema un tanto trivial cuya solución puede encontrarse en Xie [1], Querin [2], entre otros, permitió comprobar que el método propuesto es funcional y produce buenos resultados comparados con los ya existentes. En la [Figura 5.1](#) se muestran los resultados obtenidos por Querin y por el autor de este trabajo. Revisando con mayor detalle ambos resultados se destaca que el encontrado por Querin presenta un contorno rugoso inherente a la malla de elementos finitos, mientras que el obtenido por el método propuesto tiene un contorno más suave sobre todo en el extremo derecho de la estructura, resultado de el uso del modelado paramétrico de la geometría. Lo anterior es importante para evitar la aparición de zonas problemáticas en el contorno, por ejemplo, concentradores de esfuerzos.

En el segundo caso resuelto, es decir, la barra delgada sometida a carga axial, es más notorio este hecho. Las diferentes etapas del proceso de optimización mostradas en las [Figuras 5.1](#) y [5.2](#) se destacan porque las zonas de adelgazamiento están suavizadas. Lo

anterior es una evidencia de que el método propuesto evita la aparición de zonas indeseables en el contorno, tales como concentradores de esfuerzos o rugosidades.

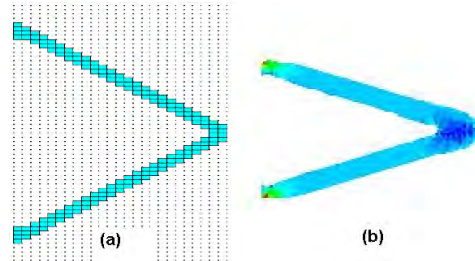


Figura 5. 1: Comparación de resultados para el problema de la viga corta. (a) Resultado tomado de Querin[2], (b) Solución generada mediante la propuesta del autor

En este punto se pueden mencionar un par de conclusiones: en primer lugar, el método propuesto por el autor es funcional y genera soluciones comparables con las producidas por otros autores; en segundo, el modelado paramétrico permite que, durante el proceso de optimización, se evite la aparición de un contorno con geometría indeseable, tal como concentradores de esfuerzos.

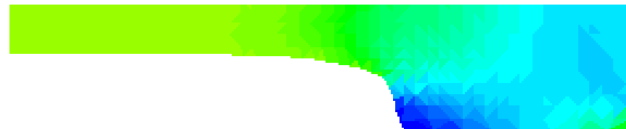


Figura 5.2: Zona de adelgazamiento de la barra delgada. No se presenta concentración de esfuerzos gracias al suavizado producido por las curvas B-Spline

Por medio del modelado de un cuerpo colgado por un apéndice y sometido sólo a fuerzas de cuerpo (Diseño de la geometría de un fruto), se pudo comprobar, al igual que Querin [2], que, en principio, la forma que la naturaleza ha diseñado para algunos frutos, tales como manzanas, cerezas, entre otras, es resultado de la optimización de forma basada en el nivel de esfuerzos superficial que produce el peso de la misma fruta.

De los resultados obtenidos en el ejemplo de la viga corta y la geometría del fruto, se demostró lo dicho en el Capítulo 3 acerca del Índice de Desempeño. Tanto el gráfico de Índice de Desempeño vs Iteración de la barra delgado como el de la geometría del fruto presentan una serie de mínimos locales que, como se señaló en el apartado referente al

Índice de Desempeño, indican el hallazgo de una geometría óptima para determinado nivel de esfuerzos. El continuar el proceso de optimización más allá de estos óptimos locales produce estructuras que, además de tener un nivel de esfuerzos bastante homogéneo, son más ligeras lo cual puede ser atractivo cuando, por ejemplo, el costo del material empleado o el peso del diseño sean restrictivos. En este sentido se concluye que, por una parte, el Índice de Desempeño indica si un resultado es óptimo o cercano a éste y, por otra parte, para cada nivel de esfuerzos existen geometrías solución que pueden ser consideradas como óptimas para un determinado nivel de esfuerzos aunque la elección de una de ellas como solución final depende de otros factores, por ejemplo, el peso de la estructura.

Los resultados producidos al aplicar el método propuesto a problemas de estructuras sometidas a varios casos de carga permiten plantear algunas conclusiones. En primer lugar, se pudo demostrar que el método es igualmente funcional en problemas con uno o varios casos de carga. Los resultados arrojados por el problema del puente con 3 apoyos y 7 casos de carga guardan gran similitud con los producidos por Xie[1] y Cervera [3]. Sobre todo hay que señalar que la propuesta de Cervera es de aquellas que aplican desplazamientos en dirección perpendicular a la frontera en cada uno de los puntos de la misma. La propuesta del autor de este trabajo, como se explica en el Capítulo 3, toma en cuenta la información de la vecindad de los puntos para calcular la dirección de dichos desplazamientos, la cual no necesariamente resulta ser perpendicular a la frontera. Con los resultados producidos en la solución de este problema se corrobora la validez de calcular las direcciones de desplazamiento en la manera propuesta. Decir cuál de las dos formas es la mejor es una cuestión que no es posible responder por estos resultados pues la información de los correspondientes a lo realizado por Cervera es muy limitada. Lo importante en este caso es que, con éste y los demás ejemplos mostrados en el Capítulo 4, se demuestra la validez de la propuesta del autor de este trabajo en cuanto al procedimiento para el cálculo de los desplazamientos.

En lo que se refiere al diseño de la Llave Inglesa los resultados indican, al compararlos con el diseño comercial de esta herramienta y con el resultado para mínimo peso desarrollado por Querin [2], que la geometría final del proceso de optimización no es la misma debido a que se emplean diferentes funciones objetivo. En el caso de Querin, éste emplea la función peso como función objetivo mientras que los resultados generados en este trabajo se basan en nivel de esfuerzos homogéneos. No obstante, la diferencia en la

reducción de peso de ambos casos no es muy diferente: El primero logra aproximadamente 49% (no indicado en su trabajo) contra el 40% alcanzado por el método basado en nivel de esfuerzos.

El diseño de los marcos de bicicleta viene a corroborar que el óptimo de una estructura, en cuanto a su nivel de esfuerzos, puede no ser la solución más adecuada o conveniente a un problema dado. Tanto para el marco 1 como para el marco 2 la geometría óptima se presenta muy temprano en el proceso de optimización. Sin embargo, al continuar con el proceso, aunque se obtiene una solución no tan homogénea en su nivel de esfuerzos, se generan geometrías con buen nivel de homogeneidad y con mucho menor peso. En los gráficos de Índice de Desempeño de ambos marcos se observa que el óptimo (identificado por el valor mínimo) aparece durante las primeras iteraciones. Al seguir con el proceso las geometrías obtenidas son más atractivas pues son más ligeras, e incluso muy similares a diseños comerciales como el producido por Mevdev [4]. En este sentido, proceder de esta forma produce diseños de elevada homogeneidad en su nivel de esfuerzo y de bajo peso.

Al igual que en el caso del marco de bicicleta número 2, el método propuesto por el autor aplicado al diseño de tubos a presión demostró su funcionalidad al generar soluciones de considerable homogeneidad en el nivel de esfuerzos y bajo peso. Además, en el caso del tubo doble a presión, mostró ser capaz de obtener una solución óptima de manera más simplificada que el caso de Querin [2]. En el primer caso sólo fueron necesarias definir 2 etapas de optimización, una interna inicial y luego una externa mientras que en el segundo se requirieron 5 etapas para llegar al resultado óptimo: interna, externa, interna-externa, interna-externa sólo en el lado derecho del dominio, e interna-externa sólo en el lado izquierdo del dominio. En este sentido, el modelado paramétrico empleado en el método propuesto demuestra una ventaja importante frente al modelado empleando simplemente mallas de elementos finitos. Aunque también utiliza el mallado de elementos finitos, el método propuesto no basa la evolución de la geometría en dicha malla. Querin utilizó las etapas de optimización mencionadas porque necesitaba aislar regiones de la frontera de tal forma que no fueran modificadas mientras el resto del contorno cambiaba. Lo anterior, en parte, es consecuencia de la eliminación de material basada en retirar fragmentos (elementos finitos) de la frontera sin tomar en cuenta la vecindad de cada punto. En ESO, la unidad mínima de material que puede retirarse o añadirse es igual a un elemento finito, en cambio empleando modelado paramétrico no existe un mínimo y la modificación de la

frontera depende únicamente del nivel de esfuerzo en la vecindad de los puntos de la frontera.

Tanto en ESO como en el método propuesto por el autor, existe la siguiente regla de eliminación de material:

$$\sigma_i < \frac{1}{k} \cdot \sigma_{\text{Máx}}$$

La diferencia fundamental es que en el caso de ESO se remueven elementos finitos mientras que en el otro caso se modifica la frontera desplazando sus puntos de control. ESO elimina por igual todos aquellos elementos que cumplen con (1), si tomar en cuenta la diferencia en el valor de esfuerzo entre los diferentes elementos a eliminar, mientras que el método propuesto en este trabajo modifica la frontera emulando eliminación de material. Lo anterior se traduce en que el segundo caso tiene un tratamiento más adecuado al modificar la geometría de un modelo que el método ESO. De esta forma es que el problema del tubo doble a presión puede resolverse con menos etapas que las empleadas por Querin.

Comparación

En la [Tabla 5.1](#) se muestra una comparación del método desarrollado en este trabajo y algunos de sus antecesores. Se resaltan aquellas características deseables de cada uno de los métodos de optimización. Al final de esta tabla se listan las características del algoritmo desarrollado en este trabajo; se destaca por contar con todas las características deseables y, adicionalmente, emplear mayor información durante el proceso de optimización. De hecho la principal característica del método, como se menciona a lo largo de los capítulos anteriores, es el uso de una cantidad mayor de información que la que utilizan el resto de los métodos. De lo anterior se deriva el que pueda aplicarse en la solución de problemas de considerable complejidad como el del tubo doble a presión descrito al final del capítulo anterior.

Método y/o autor	Contorno generado	Tamaño de malla	Unidad de modificación	Simplificación	Manejo de múltiples LC	Información empleada	Método de evaluación	Base de optimización	Modelado
ESO / Xie, Querin	Rugoso	Muy fino	Un elemento finito	No	Sí	Esfuerzo elemental	FEM	Reglas evolutivas	Malla de elementos finitos
Annicchiarico, Cerrolaza	Suave	Regular	Variable	Sí	No	Esfuerzo nodal	FEM y BEM	Algoritmos genéticos	Curvas Paramétricas
Cervera, Trevelyan	Suave	Regular	Variable	Sí	Sí	Esfuerzo nodal, distancias entre puntos,	BEM	Reglas evolutivas	Curvas paramétricas
Biological growth / Mattheck	Rugoso	Muy fino	Un elemento finito	No	No	Esfuerzo elemental y propiedades del material	FEM	Reglas evolutivas	Malla de elementos finitos
Sethian	Suave	Regular	Variable	No	No	Esfuerzo nodal y curvatura	Explicit Jump Immersed Interface	Reglas evolutivas	Malla de elementos
Velázquez	Suave	Regular	Variable	Sí	Sí	Esfuerzo del nodo y su vecindad. Valores de interpolación y su influencia	FEM	Reglas evolutivas	Curvas paramétricas

Tabla 5.1: Comparación entre algunos de los diferentes métodos de optimización estructural y el método propuesto

Conclusiones

Después de realizada la discusión de los resultados producidos en este trabajo, se generan las siguientes conclusiones:

1. El método propuesto basado en el modelado paramétrico tiene un desempeño adecuado y comparable con el de otros métodos de optimización estructural.
2. El método propuesto es capaz de obtener diseños óptimos para problemas estructurales con considerable grado de complejidad
3. La modificación de la geometría de un modelo calculada con base en la información de la vecindad de los puntos en la frontera genera resultados adecuados y comparables con los obtenidos empleando la información de puntos particulares en sí
4. El método propuesto es capaz de resolver problemas de diseño estructural óptimo de manera más simplificada que otros métodos de optimización estructural

Referencias

- [1] Xie, Y.M., Steven, G.P., "Evolutionary Structural Optimization", Springer-Verlag London, Grain Britain, 1997
- [2] Querin, O. "Evolutionary Structural Optimisation: Stress Based Formulation and Implementation" Ph.D. Dissertation. Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia, pp 15-21, April 1997
- [3] Cervera, E., Trevelyan, J., "Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 2D algorithms" , Computers and Structures, 2005
- [4] Mevdev, J.J., "Design and Optimization of a Carbon Monocoque Bicycle Frame", 4th year Thesis, Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia, 1995.

**OPTIMAL SHAPE DESIGN BASED ON PARAMETRIC MODELING AND EVOLUTIVE RULES
USING NEIGHBORING NODES INFORMATION**

Abstract

This paper deals with the shape optimization of bi-dimensional models which are modelled using parametric curves B-Spline. The approach is based on stress level that is calculated via Finite Element Analysis (FEA). Classical evolutive rules, which are common to most of the shape optimization methods, are used; however, the way the geometry is changed is neither classical nor trivial. Most of the methods evolve shape applying perpendicular displacements to the points on the geometry's boundary without taking into account geometric information of neighboring points. This work presents a method to modify the shape of the models' boundary based on geometric and stress level information of neighboring nodes. Two cases of study are presented in order to show the method's performance. The first one is the optimal design of a bicycle frame subjected to multiple load cases. The second one deals with the design of a dual tube subjected to internal pressure.

Keywords: Optimal Design, Shape optimization, Structural optimization, Finite element analysis,

Introduction

Traditionally, structural design problems were solved based on designers' intuition and experience applying conventional design methodologies. This fact started to change when optimal design became important to reduce costs in both design and manufacturing processes. Maxwell [2] (end of XIX century) was the first to arise this kind of ideas; he developed a method to generate minimum weight trusses. At the beginning of the XX century, Michell [13] proposed the Optimal Layout Theory. This method was more general than Maxwell's and allowed to handle a wider range

of trusses problems and other discrete problems. Therefore, Michell's method showed advantages over other methods which were only applicable to continuous functions problems (Haftka et al [5]).

Broadly, there are two kinds of optimization methods: Based on Gradient and Heuristics methods (Querin [14]). The former implies that the problem is represented by continuous functions which use derivatives to find optimal solutions, while the latter, instead of using derivative values it applies iterative semi-random search to achieve a close solution to the optimal one.

Thanks to the development of computers, it is possible to use powerful numeric methods (such as Finite Element Method – FEM– and Boundary Element Method – BEM) in optimization techniques in order to create efficient structural optimization algorithms. The goal of these algorithms is to obtain the best solution for a given structural problem that must satisfy all the limitations and constraints, under selected design criteria.

One of the most interesting problems of structural optimization is shape optimization. The fundamental question in this kind of problems is how the shape of a structure should be, under certain operational conditions, in order to be considered optimal. To answer this question the first thing one should determine is: which are the design variables that define the structure's geometry?.

Two kinds of methods can be identified in this sense. Firstly, those that consider each of the elements of a finite element mesh as a design variable and, secondly, the methods that take each node into a mesh (whether finite or boundary elements) as a design variable. Methods as ESO (Evolutionary Structural Optimization) [19, 20, 14] belong to the former set, where the shape optimization is generated by taking away material, i. e., eliminating elements on the mesh boundary. On the other hand, methods as the ones proposed by Mattheck [9, 10], Ramm et al [15], Maute et al [12], Sethian et al [17], Cerrolaza et al [2], Annicchiarico et al [1], Cervera et al [3, 4], among others, belong to the second group, in which the structure's geometry is modified according to the

value of the nodes' features on the perimeter. A feature, in this sense, comes as a result of applying an external action (for instance, a system of forces) over the structure, namely, stresses, strains, internal energy, etc.

The essence that distinguishes each of the methods is not found in the rules followed to evaluate the geometry of a structure, but in the way it is modified. Even though in appearance all of them behave in the same way, i.e. applying small changes in the structure's boundary gradually and iteratively, actually they are not the same. Annicchiarico [1] selects, combines and evaluates iteratively in order to create new populations according to the rules of Genetic Algorithms (GA's); ESO [7, 19] removes and adds, literally, segments of material. In the cases of Mattheck [9, 10] and Cervera, they alter the boundary of a structure moving it on a perpendicular direction to itself, although the first one does it by emulating biological growing (adapting both shape and mechanical properties), while the second one does it by taking advantage of the boundary parametric modeling.

B-Spline curves

The optimization method proposed in this work behaves in a similar way to Mattheck's, Cervera's and Annicchiarico's, among others: the boundary is moved iteratively based on the stress level existing in its nodes. An important similarity is kept with the one proposed by Cervera, in the sense that it applies the parametric modeling properties to generate soft boundaries and to avoid the generation of stress concentrators. The fundamental difference with the rest of the methods is found in the calculation of the required movements to change the boundary of the structure. The direction of the movements of each node on the boundary is calculated based on the information of their neighboring nodes instead of doing it with the particular information of it. Such information is given by the values of the interpolation functions with which the boundary is modeled; such values are a measure of the influence of the control points in the nodes' position.

OPTIMAL SHAPE DESIGN BASED ON PARAMETRIC MODELING AND EVOLUTIVE RULES USING NEIGHBORING NODES INFORMATION

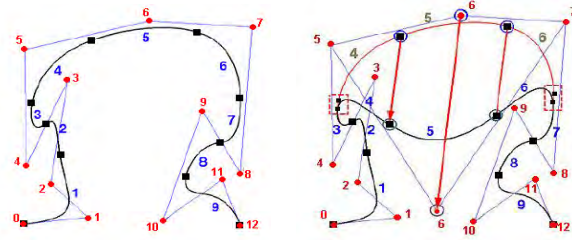


Figure 1. Shape changing generated by moving a control point in a B-Spline curve. (Shene [18])

The position change of the nodes in a B-Spline curve is done indirectly by moving the control points that define such curve (Figure 1). Such thing is evident if the definition of a B-Spline curve is revised (eq.’s (1) and (2)). Let be P_1, P_2, \dots, P_m control points of a polygon and $0=u_1 \leq u_2, \dots, \leq u_m =1$ values of a parameter u , that define $m-1$ segments. Therefore, the B-Spline curve, that is contained by the polygon and constituted by $m-1$ degree p polynomial segments, is defined as:

$$C (u) = \sum_{i=1}^m N_{i,p} u^p P_i \quad \dots \quad (1)$$

, or in matrix form:

$$\begin{aligned} [u_1, u_2] \rightarrow C(u) &= N_1 * P_1 + N_2 * P_2 + N_3 * P_3 + N_4 * P_4 \dots + N_p * P_p && \dots \\ [u_2, u_3] \rightarrow C(u) &= N_1 * P_1 + N_2 * P_2 + N_3 * P_3 + N_4 * P_4 \dots + N_p * P_p + N_{p+1} * P_{p+1} && \dots \\ [u_3, u_4] \rightarrow C(u) &= \dots + N_2 * P_2 + N_3 * P_3 + N_4 * P_4 \dots + N_p * P_p + N_{p+1} * P_{p+1} + N_{p+2} * P_{p+2} && \dots \\ [u_4, u_5] \rightarrow C(u) &= \dots \dots + N_3 * P_3 + N_4 * P_4 \dots + N_p * P_p + N_{p+1} * P_{p+1} + N_{p+2} * P_{p+2} + N_{p+3} * P_{p+3} && \dots \\ [u_5, u_6] \rightarrow C(u) &= \dots \dots \dots + N_4 * P_4 \dots + N_p * P_p + N_{p+1} * P_{p+1} + N_{p+2} * P_{p+2} + N_{p+3} * P_{p+3} + N_{p+4} * P_{p+4} \dots && \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \quad (2) \end{aligned}$$

, where the form or interpolation functions $N_{i,p}$ are:

$$N_{i,0} (u) = \left\{ \begin{aligned} &1 \quad \text{if } u_i \leq u < u_{i+1} \\ &0 \quad \text{otherwise} \end{aligned} \right\}$$

$$N_{i,p} (u) = \frac{(u - u_i)}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1} (u) + \frac{(u_{i+1} - u)}{u_{i+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1} (u) \quad \dots \quad (3)$$

From this definition, it is observed that by making modifications in the control points' position, a specific region of the curve suffers changes. Moreover, if such control points' modifications are ruled by the value of some feature measured on the boundary's nodes (i.e. stress level), then they should take into account the necessary changes in each of the nodes under their influence (See Figure 1). Such influence is given by the value of the interpolation functions defined above (eq. 3).

Method and Algorithm

The method applied to design optimal shape structures proposed in this work, can be classified in the set of methods based on evolutive strategies, which algorithm's rules use parameters that change slowly and iteratively as the process time goes on. The way the parameters change allows the models' geometry to be adapted satisfactorily to the operational conditions applied in a process that becomes stricter as it is executed. Therefore, the optimization process generates geometries that are adequated gradually to the conditions up to a point where no better results can be found. Similar methods applied in structural optimization are the ones proposed by Xie et al [20], Cervera [3], Annichiarico [1] and Cerrolaza [2], among others.

Parametric modeling produces soft boundaries which avoid, as possible, the appearance of edges with drastic changes of direction that can generate stress concentrators or unwanted rough edges. Below the algorithm developed for the proposed method is described.

1. Define the model's geometry using B-Spline curves and apply the constraints and the load cases to the model.
2. Calculate the nodal von Mises stress via FEA.
3. Modify the geometry's boundary removing and/or adding material based on the nodal stress level. Removal is held on the nodes with low stress level by applying displacement vectors in their inner direction (not perpendicular necessarily) over the control points that influence such nodes. On the other hand, the addition of material is applied to those nodes with high stress level or where von Mises stress is higher to the material's yield stress. In this case, the displacement's direction is outer.
4. Repeat steps 2 and 3 until there are no more possible model improvements.

The previous steps are easy to understand; however, the way the boundary is modified,

namely step 3, requires special attention since the calculus of the displacement vectors is not trivial. A more detailed description about such vectors is given below.

Boundary Modification

As mentioned above, shape optimization is carried out by gradual changes applied to the geometry's boundary. Similar to other methods, boundary changes come from addition or removal of material, although there are some differences. While methods as ESO implies adding or eliminating segments of material (which generates staircase or jagged shapes), this paper's method proposes to apply small displacements (in inner direction when addition is needed or outer, when removal must be applied) to boundary's nodes which have high or low stress level.

Modifiable Regions

For geometries under a single load case, a modifiable region is one that contains nodes that satisfy one of the following inequations:

$$\sigma_i \leq \dots (4)$$

$$\sigma_i \geq TA * \sigma_r \dots (5)$$

where σ_i is the von Mises stress of the i -th node; σ_r is a reference stress in the geometry, for example the maximum stress; σ_y is the yield stress of the material; and \dots are the rates of removal and addition of material, respectively. The latters can also be called evolutive parameters. Therefore, the position of the nodes that satisfy (4) is modified by material removal, while those that satisfy (5) are subjected to material addition. Namely, (4) and (5) identify over-stressed and under-stressed regions on the boundary, respectively. \dots and \dots are values in the range of 0.0 to 1.0, where \dots . They define temporal high and low stress level limits in each iteration in the optimization process. Values of \dots and \dots are updated when a steady state is achieved, this is,

OPTIMAL SHAPE DESIGN BASED ON PARAMETRIC MODELING AND EVOLUTIVE RULES USING NEIGHBORING NODES INFORMATION

a state for which it is not possible to improve the geometry (removing or adding material) using their current values. The evolutive parameters are updated according to (6) and (7):

$$TR_{j+1} = TR_j \cdot (6)_{ER}$$

$$TA_{j+1} = TA_j \cdot (7)_{EA}$$

, where r_{ER} and r_{EA} are the evolutive rates of removal and addition respectively, and j indicates the j -th steady state. Values of these parameters, which are determined through numerical experience, typically belong to the following ranges: $TR \approx 0.01$ to 0.1 and $TA \approx 0.9$ to 0.99

. These parameters are conceptually similar to the ones used in most of the structural optimization methods (Xie [20], Cervera [3, 4], among others).

For multi load cases problems, modifiable regions are determined by comparing the stress level generated for each load case. Therefore, removal process is applied on a node only if for all load cases (4) is satisfied. On the other hand, addition process is applied on a node if (5) is satisfied at least for one load case. In other words, an AND/OR logic algorithm is used, Li et al [7]. As a consequence of the former, the expressions (4) and (5) change; if N is the number of load cases in the problem, for each i -th node the expressions (8) and (9) are verified, where j represents the j -th load case:

$$\sigma_{i,j} \leq TR * \sigma_{r,j} \quad \forall j \dots (8)_N$$

$$\exists j \ni (\sigma_{i,j} \geq TA * \sigma_{r,j}) ; j \dots (9)_N$$

The expression (8) identifies regions to be subjected to removal process (AND logic), whereas (9) determines if it is necessary to add material in that region (OR logic).

Boundary Nodes Modification

Shape optimization is carried out by altering the geometry's boundary of a model or structure. This is achieved by changing the position of the nodes of B-Spline curves indirectly

through the control points that define the curves according to (1). In general, several methods that deal with structural optimization based on boundary's modification, work by applying displacements in a perpendicular direction to the boundary's nodes. Some of these methods, which have shown excellent results, apply these displacements simultaneously on all the nodes that are susceptible to change (i.e. nodes that satisfy (4), (5), (8) or (9)) (Annicchiarico [1] Cerrolaza et al [2], Mattheck [9, 10, 11]), whereas other methods work only on those nodes of maximum susceptibility (e. g. Cervera, [3, 4]). The common problem of these methods is that by only taking into account the perpendicular direction, they do not consider that there may be neighboring nodes also susceptible to change. In this way, they miss important information about the boundary's region.

In order to get around this problem, the authors of this work propose to use the information in the neighboring nodes combined with the properties of the B-Spline curves. First, the position of a node in a B-Spline curve depends on the position of a set of control points (Shene [18]). Moreover, since the B-Spline curves are defined by parametric segments, if n is the number of nodes that define the curve, then the curve has $n-1$ segments, each in the range of $[u_i, u_{i+1}]$ and n control points. Besides, if each node coincides with the beginning of an interval, then the control points on which the position of a node depends are:

$P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, \dots$. Since this work uses $C(u_i)$, the control points that determine the position of the node are: $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$. (See Figure 2). The latter can also be appreciated if the matrix system in (10) and (11) is studied; they show the relationship between nodes, control points and interpolation functions for a 3rd grade B-Spline curve:

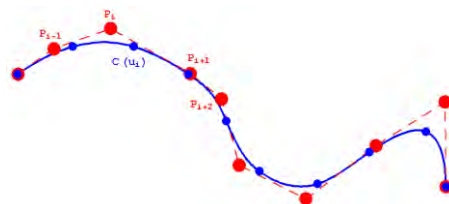


Figure 2: 3rd grade B-Spline Curve. Position of de point P_i depends on $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$ control points.

OPTIMAL SHAPE DESIGN BASED ON PARAMETRIC MODELING AND EVOLUTIVE RULES USING NEIGHBORING NODES INFORMATION

$$\begin{aligned}
 C(u_1) &= N_1(u_1)P_1 + N_2(u_1)P_2 + N_3(u_1)P_3 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0; \\
 C(u_2) &= N_1(u_2)P_1 + N_2(u_2)P_2 + N_3(u_2)P_3 + N_4(u_2)P_4 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0; \\
 C(u_3) &= 0 + N_2(u_3)P_2 + N_3(u_3)P_3 + N_4(u_3)P_4 + N_5(u_3)P_5 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0; \\
 C(u_4) &= 0 + 0 + N_3(u_4)P_3 + N_4(u_4)P_4 + N_5(u_4)P_5 + N_6(u_4)P_6 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0; \\
 C(u_5) &= 0 + 0 + 0 + N_4(u_5)P_4 + N_5(u_5)P_5 + N_6(u_5)P_6 + N_7(u_5)P_7 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0; \\
 \vdots &= \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \dots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots; \\
 C(u_{m-2}) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots + N_{m-3}(u_{m-2})P_{m-3} + N_{m-2}(u_{m-2})P_{m-2} + N_{m-1}(u_{m-2})P_{m-1} + N_m(u_{m-2})P_m; \\
 C(u_{m-1}) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + N_{m-2}(u_{m-1})P_{m-2} + N_{m-1}(u_{m-1})P_{m-1} + N_m(u_{m-1})P_m; \\
 C(u_m) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + N_{m-1}(u_m)P_{m-1} + N_m(u_m)P_m.
 \end{aligned} \tag{10}$$

, or ... (11)^P

An important property of the interpolation functions is that for any node u_i the following expression is satisfied:

$$N_{i-1} + N_i + N_{i+1} + N_{i+2} + \dots + N_i = 1 \tag{12}$$

This property can also be understood by considering that the control points $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, \dots$ contribute in percentages $N_{i-1}, N_i, N_{i+1}, N_{i+2}, \dots$ in the position of the nodes $C(u_{i-p+1}), C(u_{i-p+2}), \dots, C(u_i), \dots$ respectively. In this respect, a control point influences the position of the nodes $C(u_{i-p+1}), C(u_{i-p+2}), \dots, C(u_i), \dots$ through quantities $N_i(u_{i-p+1}), N_i(u_{i-p+2}), \dots, N_i(u_i), N_i(u_{i+1}), \dots$ respectively (See Figure 3). In general,

$$N_i(u_{i-p+1}) + N_i(u_{i-p+2}) + \dots + N_i(u_i) + N_i(u_{i+1}) \tag{13}$$

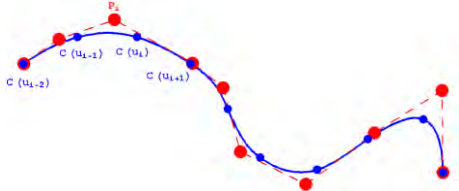


Figure 3: Control point P_i influences only on the curve points $C(u_{i-p+1}), C(u_{i-p+2}), \dots, C(u_i), C(u_{i+1})$

If it is necessary to change the position of the i -th node by a displacement \vec{d}_i , then the control points $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, \dots, P_{i-p+1}$ must change their position by displacements $\vec{d}_{i-1}, \vec{d}_i, \vec{d}_{i+1}, \vec{d}_{i+2}, \dots, \vec{d}_{i-p+1}$ respectively. Furthermore, if the positions of the nodes $C(u_{i-1})$ and $C(u_{i+1})$ must be changed by \vec{d}_{i-1} and \vec{d}_{i+1} , respectively, then the displacement $\vec{d}_{i-1,i}, \vec{d}_{i,i}, \vec{d}_{i+1,i}, \vec{d}_{i+2,i}, \dots, \vec{d}_{i+p-2,i}, \vec{d}_{i+p-1,i}$ and $\vec{d}_{i,i+1}, \vec{d}_{i+1,i+1}, \vec{d}_{i+2,i+1}, \vec{d}_{i+3,i+1}, \dots, \vec{d}_{i+p-1,i+1}, \vec{d}_{i+p,i+1}$ must be

calculated. It is important to highlight that both sets of displacements are independent.

Similar sets of displacements are generated for each node that must change its position, where the first subscript corresponds to the control point on which the displacement is applied and the second one corresponds to the node for which it was generated. If the vectors corresponding to a control point are isolated, the displacement set $\vec{d}_{i,i-p+1}, \vec{d}_{i,i-p+2}, \dots, \vec{d}_{i,i}$ is obtained.

It is clear that, in general, the equivalent displacement vector required to carry out the changes for each node, that depends on the position of i , is not equal to the sum of its associated vectors, namely:

$$\vec{d}_i \neq \vec{d}_{i,i-p+1} + \vec{d}_{i,i-p+2} + \dots + \vec{d}_{i,i} \quad (14)$$

If the displacements of all the control points are combined in an unknown vector \vec{c} , in order to change the position of a node from i to i' , the following matrix equation could be established:

$$\vec{c} = N \cdot \vec{c} \quad (15)$$

However, this approach does not consider that changing the position of the nodes arbitrarily, causes the values of the parameters on these nodes and, therefore, the ranges of definition of the segments and their interpolation functions to change. It is important to remember that the value of the parameter in each node is the result of geometrical relationships among them. Thus, solving (15) would produce a set of control points that defines a different B-Spline curve (Shene [18]). Additionally, if the changes of the parameters and their intervals are too large, the new curve could contain undesirable distortions (Cervera [3], Yang [21]).

In the optimization method proposed in this paper, it is a general rule that, in each iteration, the position of several boundary nodes is modified at the same time. The position's change is directly related to the stress level of these nodes through (4) and (5), if it is a single load case

problem, or (8) and (9), if there are multiple load cases. In turn, these changes should be done by changing the control points' position. However, the latter is not an easy task to perform. In order to solve this difficulty, it is proposed that the displacements of the control points are calculated so that, firstly, their magnitude does not generate undesirable distortions and, secondly, their direction takes into account the information from the nodes' neighborhood.

Magnitude and Direction of Displacements

In order to ensure that, when moving the control points, distortions at the boundary are not produced and, at the same time, a moderate speed in the optimization process is obtained (a common requirement in structural optimization methods), the magnitude of displacement of all control points is restricted by $|\vec{d}_i| \in [0, e_{max}]$, where e_{max} is the average size of the finite elements at the boundary, and α is a modification factor that controls the geometry's change speed. For each node i , a displacement \vec{D}_i is calculated according to the following rules: If σ_i satisfies (4) or

(5), then the magnitude D_i is:

$$|\vec{D}_i| = \text{Abs} \left[\frac{\sigma_i - TR}{TR} \cdot r \right] \quad \text{or} \quad |\vec{D}_i| = \text{Abs} \left[\frac{\sigma_i - TA}{TA} \cdot r \right] \quad (16)$$

, respectively; and, if $\sigma_{i,j}$ satisfies (8) or (9), then the magnitude D_i is:

$$|\vec{D}_i| = \text{Max} \left[\text{Abs} \left[\frac{\sigma_{i,j} - TR}{TR * G_{z,j}} \cdot r \right] \right] \quad \text{or} \quad |\vec{D}_i| = \text{Max} \left[\text{Abs} \left[\frac{\sigma_{i,j} - TA}{TA * G_{z,j}} \cdot r \right] \right] \quad (17)$$

, respectively, where $j = 1, 2, \dots, N$ indicates each of the load cases. On the other hand, if σ_i is

the outward unit vector perpendicular to the boundary, the direction of \vec{D}_i is:

$$\text{if (4) or (5) are satisfied:} \quad \vec{D}_i = D_i \cdot \vec{n}_i \quad (20)$$

, or

$$\text{If (8) or (9) are satisfied:} \quad \vec{D}_i = D_i \cdot \vec{c}_i \quad (21)$$

This implies that in low stressed regions, removal of material is applied, while in high stressed regions, adding of material is executed. Vectors $\vec{D}_{i-p+1}, \vec{D}_{i-p+2}, \dots, \vec{D}_i$ are the basis for

OPTIMAL SHAPE DESIGN BASED ON PARAMETRIC MODELING AND EVOLUTIVE RULES
USING NEIGHBORING NODES INFORMATION

calculating the vector of each control point. In order to modify its position, the displacement of the nodes $C(u_{i-p+1}), C(u_{i-p+2}), \dots, C(u_i)$, in e_{u_i} $\vec{D}_{i-p+1}, \vec{D}_{i-p+2}, \dots, \vec{D}_i, \vec{D}_{i+1}$ should be taken into consideration; in turn, the values of the interpolation functions $N_i(u_{i-p+1}), N_i(u_{i-p+2}), \dots, N_i(u_i)$, will correspond to these nodes, because of the influence of in their position. The latter represents the percentage of influence of the control point in the position of each of the mentioned nodes. In other words, if the control point is moved, the vector will take into account the influence of this control point on the corresponding nodes.

The procedure proposed in this paper to calculate vector uses the values of the interpolation functions $N_i(u_{i-p+1}), N_i(u_{i-p+2}), \dots, N_i(u_i)$, as weighting factors to combine the vectors $\vec{D}_{i-p+1}, \vec{D}_{i-p+2}, \dots, \vec{D}_i$ according to:

$$\vec{d}'_i = \sum_{k=-p+1}^1 [N_i(u_{i+k}) \vec{D}_{i+k}] \quad \text{and} \quad \hat{d}'_i = \frac{\vec{d}'_i}{|\vec{d}'_i|} \quad \dots \quad (23)$$

, where is the weighted vector sum of the displacements of the nodes associated with the control point. The calculation of is needed, as indicated in (23), to determine the direction of the displacement of the control point so that the direction of the nodes' movement is considered (See Figure 4).

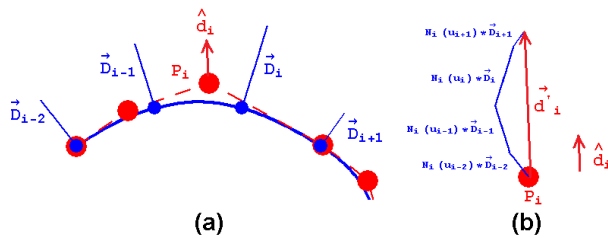


Figure 4: 3rd grade B-Spline curve segment for calculating the direction of displacement of the control points. (a) Vector direction depends on the vectors $\vec{D}_{i-2}, \vec{D}_{i-1}, \vec{D}_i, \vec{D}_{i+1}$, (b) Vector direction is generated by the weighted sum $\vec{d}'_i = \sum_{k=-p+1}^1 [N_i(u_{i+k}) \vec{D}_{i+k}]$

On the other hand, the magnitude calculation of is more complex. If is the number of nodes and is the subscript of the parameter of the interpolation function that satisfies

OPTIMAL SHAPE DESIGN BASED ON PARAMETRIC MODELING AND EVOLUTIVE RULES USING NEIGHBORING NODES INFORMATION

Max $(N_i(u_{i-p+1}), N_i(u_{i-p+2}), \dots, N_i(u_i), N_i(u_{i+1}))$, then the value of d_i is:

$$|\vec{d}_i| = \frac{|\vec{D}_i|}{\text{Max}(|\vec{D}_1|, |\vec{D}_2|, \dots, |\vec{D}_m|)} \cdot e_{size} \cdot f \quad \dots (24)$$

In other words, the magnitude of displacement of the control point is equal to the value of the normalized displacement of the node on which it has the greatest effect (i.e. $N_i(u_i)$), multiplied by the average size of the mesh (e_{size}) and the modification factor (f). The main idea of calculating the vector \vec{d}_i in this way is that, firstly, the information of the nodes' neighborhood is used (not only the information of a single node); and secondly, in the magnitude calculation of d_i , the displacement of the more influenced nodes, by the control points, is favored.

Stopping Criterion

In optimization methods, there are several stopping criteria that depend on the variables and design features that are being considered. In this work, a criterion based on homogeneity of the stress level is used. This is measured in each iteration. The stress level throughout the model is calculated as follows:

$$NO = \sum_{e=1}^{NE} (\sigma_e)^2 \quad \dots (25)$$

Thus, the stopping criterion is:

$$sc = \text{Abs} \left[\frac{NO_{t+1} - NO_t}{NO_t} \right] \dots (26)$$

Therefore, if for the iteration t (26) is satisfied, the process stops. In this way, the homogeneity of the stress level is ensured.

Performance Index

In any optimization method used in the structural design the inherent question of the optimal

geometry arises: is this geometry the real optimal one, considering the load conditions and restrictions given? Although some solutions exist for specific problems (such as those developed by Michell [13] Hemp [6] Rozvany [16]), the spectrum of problems that can exist is unlimited making it impossible to find a standard solution for each one of them. On the other hand, each method generates a particular standard solution. In this way, for a particular problem, it there is a set of particular standard solutions that when compared, similarities are identified but they are not equal among them. The latter is a consequence of the strong dependence between the solutions and the characteristics of the methods (approaches, assumptions, considerations and objective functions) that generate them (See [Figure 5](#)).

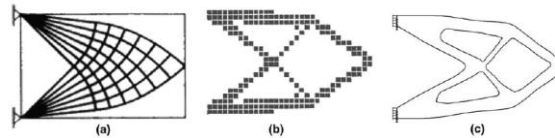


Figure 5: (a), (b) y (c) show the optimal solution for a short beam obtained by the methods of Rozvany, Chu and Xie respectively. Although for the same problem the solutions are not equal, however, there is a remarkable similarity between them (Cervera [3])

For these reasons, a measure that quantifies how good and how close to the optimal result the structure is, regardless the method, must be defined. This measure is called the Performance Index.

Performance Index Calculation

The performance index () used in this work is an adaptation of the one developed by Querin [14] (See also Liang et al [8]). The concept of performance index is not particular to the optimization problems. In most cases, it can be compared to the widely used concept of efficiency.

is a dimensionless number that includes all the features of a solution (i.e. geometry, loads and their effects, etc.). Since the proposed method is based on the stress level, is calculated as a measure of the effect suffered by the structure and its causes. In this case, is a ratio of the stress state and the applied loads, namely:

OPTIMAL SHAPE DESIGN BASED ON PARAMETRIC MODELING AND EVOLUTIVE RULES
USING NEIGHBORING NODES INFORMATION

$$PI = \frac{1}{F \star L} \star \sum_{e=1}^{NE} V_e \quad (27)$$

, where σ_e and V_e are the von Mises stress and the volume of e-th finite element, respectively; N is the number of finite elements in the mesh, F is the equivalent force to the applied loads and L is a characteristic length of the model. If the optimization problem involves several load cases, then (27) should be adapted as follows:

$$PI = \frac{1}{LC} \star \sum_{j=1}^{LC} \left(\frac{1}{F_j \star L} \star \sum_{e=1}^{NE} V_e \right) \quad (28)$$

, where LC is the number of the applied load cases, and F_j is the equivalent force to the j-th load case.

Interpretation

Querin indicates that the optimal solution is easily identified by the lowest value of PI during the optimization process. A key feature of PI (identified by the authors of this work) is that while a structure evolves towards the optimum, keeping a regular-convex geometry, the value of PI is decremented. A regular-convex geometry can be understood as one that has no voids, cavities or concave borders with considerable size.

In general, when the geometry is no longer regular-convex, such as when holes are created, the value of PI rises abruptly. Since in this work the optimization only implies modifications of the structures' boundary, PI suffers this abrupt change when concavities or regions of high curvature appear. This is expected because voids, concavities, etc., act as stress concentrators, so that the numerators in (28) and (29) increase.

From the results obtained in this work as well as those submitted by Querin, some

OPTIMAL SHAPE DESIGN BASED ON PARAMETRIC MODELING AND EVOLUTIVE RULES USING NEIGHBORING NODES INFORMATION

observations can be made regarding the meaning of π . Although the global optimum is the structure that shows the lowest value of π , the results show that several local optima can be obtained during the optimization process. In this sense, the global optimum is a model which geometry is as similar as possible to a regular-convex one. However, if the optimization process is carried out beyond the global optimum, the geometry evolves to one that is no longer regular-convex, but which π continues changing and showing local minima that correspond to other local optima. π identifies more than one optimum during the process, i.e. a set of one global and several local optima. Each of them has particular geometric features which depend on the conditions given in the corresponding iteration, namely, the corresponding stress level (See Figure 6).

Figure 6 was taken from Cervera [3] and corresponds to a case of Michell's structures. In Figure 6(a) the global optimum is reflected in iteration 21. Continuing the optimization process, local optima appear in iterations 28 and 55. As explained above, these local optima are characterized by the appearance of cavities in the structure.

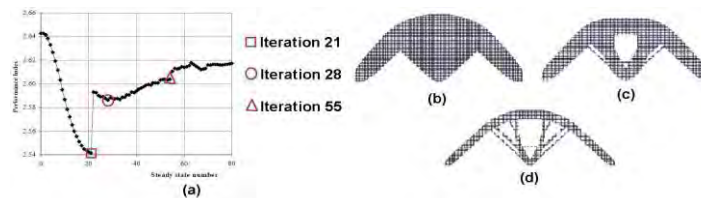


Figure 6: (a) shows a graph of PI for the optimization process. (b), (c) and (d) show the solutions obtained in iterations 21, 28 and 55 respectively, which are marked in (a)

Since the method here described only modifies the boundary of the geometry, both global and local optima are characterized by the appearance of high curvature boundary regions which act as stress concentrators. Despite this difference, the information produced by the performance index can be used to identify the optimal structures. It is important to mention, that the most useful optimum (among global and locals) depends on several factors such as ease of fabrication, material, weight, aesthetics, etc.

Cases Study

The following sections show two case studies solved using the method proposed in this paper. The optimal design of a bicycle frame subjected to multiple loading cases is solved at first; and then, a case study that deals with the design of a double tube subjected to inner pressure.

Bicycle Frame

This section shows the results of designing, through the proposed method, a bicycle frame that is simulated under three load cases. These cases represent the following situations, for a person that weights 75 kg approximately:

Load Case	Description	Kind of Effort	Speed m/s	Loads Direction	Seat Load (N)	Manubrium Load (N)	Pedal Load (N)
LC1	Rolling on a flat surface with moderate speed	Light	10	x	0	0	0
				y	-800	0	-104
LC2	Running in a slightly sloped surface (slope 1/10) at moderate speed	Moderate	8	x	80	0	52
				y	-796	0	-512
LC3	Rolling on a sloped surface (slope 1 / 25) at low speed (The rider is not sitting)	Strong	4	x	0	400	414
				y	0	0	-1655

Table 1. Description of the load cases bicycle frame design (Tom Compton [23])

The design domain for this example consists of 10 lines (as shown in [Figure 7](#)), with a thickness of 5 cm and a total area of 6295.5 cm². The properties of the material are: elastic modulus 200 GPa, Poisson ratio 0.3; besides, triangular finite elements are used (average size of 2.5 cm). Based on the latter, the following results are obtained ([Table 2](#)):

Load Case	Max. von Mises Stress (kPa)	Average von Mises Stress (kPa)
LC1	623.677	37.635
LC2	658.698	53.689
LC3	600.487	86.89

Table 2. Maximum and minimum von Mises stress for each load case

OPTIMAL SHAPE DESIGN BASED ON PARAMETRIC MODELING AND EVOLUTIVE RULES
USING NEIGHBORING NODES INFORMATION

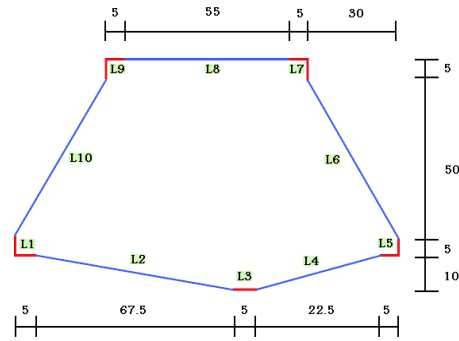


Figure 7. Frame bicycle design domain

The values of TR, TA, TRE and TRA used in the optimization process are 0.2, 0.95, 0.01 and 0.015, respectively. For this case study, it is considered that the line connecting the pedal to the rear wheel (L4) and the line connecting the manubrium to the front wheel (L10) remain unchanged.

The performance index graph (Figure 8) shows that there is no clear minimum point that indicates an optimal result. However, it can be identified that between the initial shape and the one after 100 iterations there is no significant change, i.e. the line that PI describes is horizontal. In this sense, it can be said that the basic shape of the global optimum is defined in this range of iterations and is very similar to the initial one.

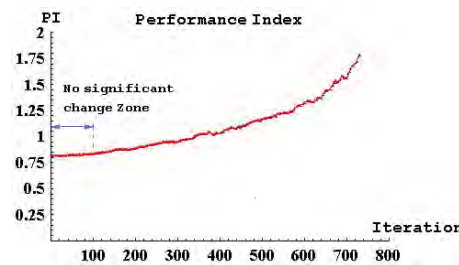


Figure 8. PI graph for the case study

As the PI graph indicates, the optimization process performs until 732 iterations, when the process stops because the union zone between the manubrium and the rest of the structure is significantly diminished (see Figure 9).

OPTIMAL SHAPE DESIGN BASED ON PARAMETRIC MODELING AND EVOLUTIVE RULES USING NEIGHBORING NODES INFORMATION

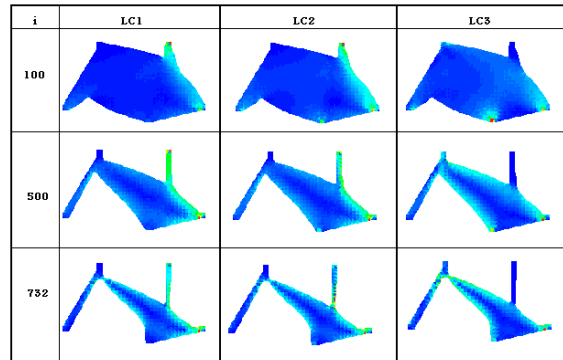


Figure 9. Stress distribution for each load case obtained for key iterations

Table 3 shows a comparison between the maximum and the average von Mises stress for the iterations 100 and 732, respectively. As it can be noticed, the stress level in these geometries is not homogeneous for any load case. However, the average stress is substantially increased. Figure 11 shows the shape of the bike generated by the optimization method proposed. Between the result obtained in iteration 100 (which is the global optimum according to the PI graph) and the final design there is a volume reduction of 57.95% . The bicycle frame of competition shown in Figure 12 was designed by ESO (Xie [20], Mevdev [24]). Both frames are very similar, although they were designed by two different methods.

Load Case	Maximum von Mises stress (kPa)		%	Average von Mises stress (kPa)		%
	i = 100	i = 732		i = 100	i = 732	
LC1	624.892	627.723	0.45	44.661	188.924	323.02
LC2	658.445	1183.361	79.72	62.294	274.231	340.22
LC3	607.708	1602.942	163.77	98.417	442.645	349.76

Table 3. Comparison between results of iterations number 100 and 732

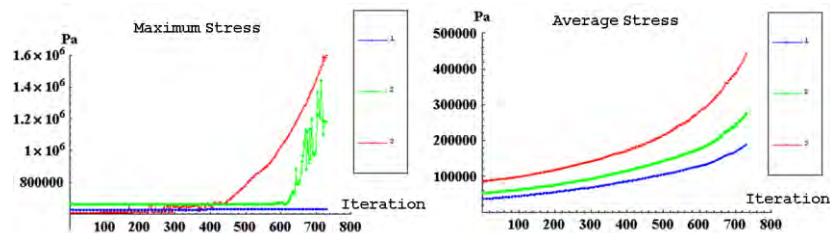


Figure 10. Behavior of the maximum and average von Mises stress for each load case during the optimization process

OPTIMAL SHAPE DESIGN BASED ON PARAMETRIC MODELING AND EVOLUTIVE RULES
USING NEIGHBORING NODES INFORMATION



Figure 11. Final Bicycle frame

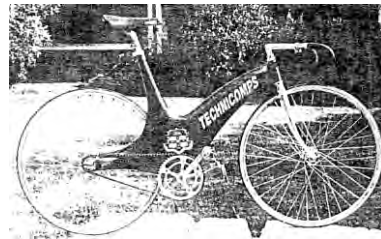


Figure 12. Fiber-carbon bicycle. This frame was designed using ESO. Xie [20], Mevdev [24]

Double tube design considering inner pressure

This section deals with the optimal design of a double tube under inner pressure used in a heat exchanger. The geometry of the original design is shown in Figure 13. The original specification requires the design of the internal shape of the tube (that is under a pressure of 1.5 MPa) to maintain the position and size of the eight holes which are used to fix the tube. Given the horizontal and vertical symmetries of the tube only a fourth of the domain is modeled. This problem was solved by Querin [14] applying ESO. In his proposal, Querin developed 5 stages in order to reach the optimal solution. The solution obtained in this work is very similar to Querin's, with the difference that only 2 stages are needed: one internal and one external stage. The initial design domain is shown in Figure 14, which is composed of 9 lines (L1, L2, ..., L9). During the first stage only line L1 undergoes changes.

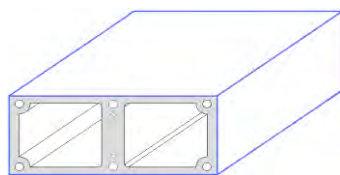


Figure 13. Original design for the double tube heat exchanger

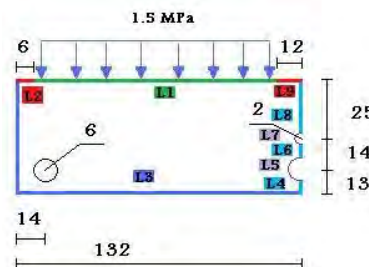


Figure 14. Design domain

The material used in this problem has the following properties: elastic modulus of 70 GPa, Poisson ratio of 0.33 and yield stress of 230 MPa. The average element size is 2 mm and the characteristic length to calculate PI is the initial length of line L1 (114 mm). Under these conditions the design domain features are: area 6803.38 mm², maximum von Mises stress= 5.43 MPa and

OPTIMAL SHAPE DESIGN BASED ON PARAMETRIC MODELING AND EVOLUTIVE RULES
USING NEIGHBORING NODES INFORMATION

average von Mises stress = 1.78 MPa. The optimization parameters used in the first stage are: TR = 0.73, TA = 0.92, TRE = 0.0015, TAE= 0.001.

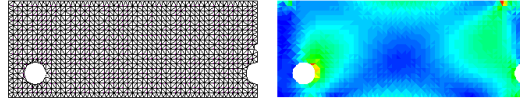


Figure 15. Mesh and stress distribution in the design domain

As the figure above shows, the stress distribution is non-symmetry, which is reflected in the final result. The images below show that non-symmetry is compensated during the optimization process by reducing the area of the domain at different speeds for each end, but the geometric similarity between them is preserved. The optimal result of this initial phase is generated after 483 iterations, generating a shape which features are: 3441 mm² area, maximum von Mises stress =11.29 MPa and average von Mises stress=3.48 MPa.

The tube obtained in the iteration 483 (Figure 16) is optimal already if the outer boundary is considered to be unchanged. However, in the figure above it is clear that there is material that can be removed if the optimization process is applied to the outside boundary (second stage). For this purpose, the only line that can be modified is L3. The parameters of optimization are changed in the second stage because the values of stress on line L3 are significantly lower than line L1: TR = 0.30, TA = 0.92, = 0.0015 TRE, APR = 0.001. Figure 17 shows different iterations results. The final design is obtained after 1019 additional iterations (1502 total). This number is considerably higher than that required in the first stage because, in this case, an initial value of TR = 0.30 is used, i.e. there is a noticeable difference between the maximum and the average stress in the structure.

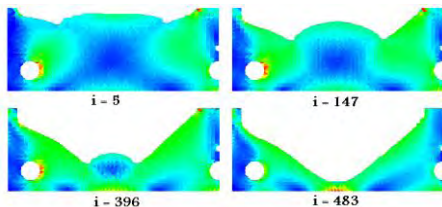


Figure 16. Stress Distribution for some iterations obtained during the first optimization stage

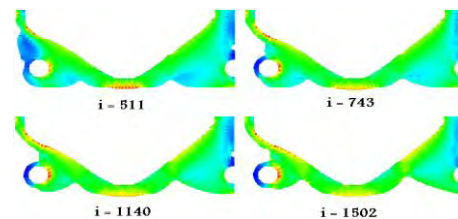


Figure 17. Stress Distribution for some iterations obtained during the second optimization stage

OPTIMAL SHAPE DESIGN BASED ON PARAMETRIC MODELING AND EVOLUTIVE RULES USING NEIGHBORING NODES INFORMATION

The designed tube after 1502 iteration has the following features: area = 2674 mm², 8.76 MPa and 4.29 MPa maximum and average von Mises stresses, respectively. When comparing these values to the tube produced in the first stage, an area reduction of 22.3%, a maximum stress reduction of 28.89% and an average stress increment of 18.89%, are obtained. From the latter, a better stress distribution is the main characteristic of the final design. From the comparison of the average stress between the stages, an important benefit from the second one can be appreciated.

The graphs shown below describe the process of optimization of the double tube. A dashed line separates the two stages developed. As mentioned above, the result at the end of the first stage (iteration 483) is an optimal result which is verified by looking at PI graph, but still another optimization process can be run, since outer material can still be removed. In addition to the area reduction, a couple of important benefits can be identified. First, given the graphs of maximum and average von Mises stress, the stress level is getting homogeneous, i.e. the stress distribution is improved and material is used more efficiently.

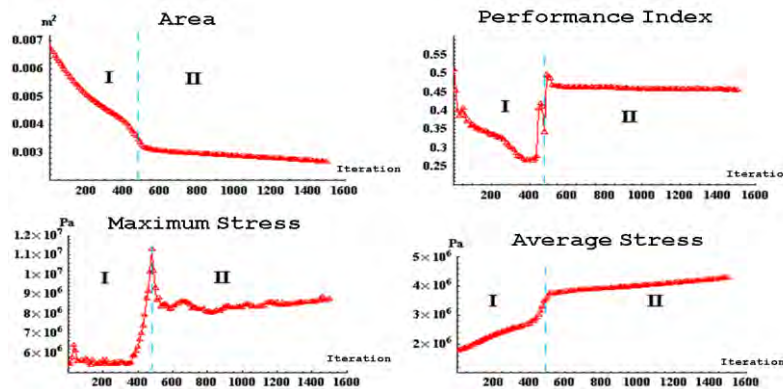


Figure 18. Graphs of area, PI, maximum and average von Mises stress obtained in the optimization process. It is indicated by the dotted line the division between the two stages in the process developed

Finally, [Figures 19](#) and [20](#) show the resulting double tube; the first image shows the stress distribution of the complete tube and the second one shows a 3D representation. The design obtained by Querin ([Figure 21](#)), as indicated at the beginning of this section, is practically the same in concept. Recalling what was mentioned above, both results are very similar but not the same, because the methods that generate them, although they share the same goal, they have different

approaches. On the one hand, the approach of Querin ESO method in which the geometry is modified by removing or adding pieces of material, the method proposed in this paper modifies the boundary by slowly moving either the inner or the outer boundary. Although both approaches involve the addition or removal of material, the results of the methods are not identical.

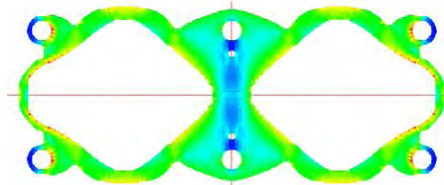


Figure 19. Stress distribution of the final design

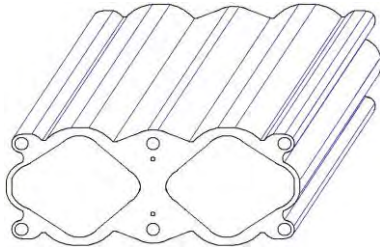


Figure 20. 3D view of the double tube designed

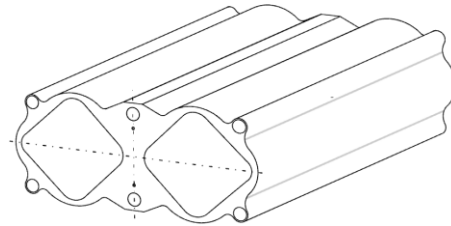


Figure 21. Optimal design obtained by Querin [14]

Conclusions

Following the description of the proposed method and the presentation of the results produced for the case studies, it can be concluded that:

1. The proposed method based on parametric modeling is appropriate and has comparable performance with other optimization methods.
2. The proposed method is capable of obtaining optimal designs for problems with a considerable degree of structural complexity.
3. Modifying the geometry of a model based on information from the neighboring nodes on the boundary, generates adequate results comparable to those obtained by using the nodes information separately.

4. The proposed method is capable of solving problems of optimal design in a more streamlined way than other optimization methods.

References

[1] Annicchiarico, W., Cerrolaza, M., *Structural Shape Optimization 3D Finite-Element Models Based on Genetic Algorithms and Geometric Modeling*, Finite Elements in Analysis and Design 37, 2001, pp 403-415

[2] Cerrolaza, M., Annicchiarico, W., et al, *Optimization of 2D Boundary Element Models Using B-Splines and Genetic Algorithms*, Engineering Analysis with Boundary Elements 24, 2000, pp 427-440

[3] Cervera, E., Trevelyan, J. 2005. *Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS: Part II: 3D algorithms*. Computers & Structures 83(23-24). 2005. pp 1917-1929

[4] Cervera, E., and Trevelyan, J. *Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS: Part I: 2D algorithms*. Computers & Structures 83 (23-24). 2005. pp 1902-1916.

[5] Haftka, R. T., Gürdal Z., Elements of structural optimisation, 3rd Edition, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1992.

[6] Hemp, W.S. *Optimum Structures*. Clarendon Press. Oxford. 1973

[7] Li, Q., Steven, G.P., Xie Y.M. *On equivalence between stress criterion and stiffness criterion in evolutionary structural optimization*. Structural Multidisciplinary Optimisation 18. 1999. pp 67-73

[8] Liang, Q.Q., Xie, Y.M. Optimal Selection of Topologies for the Minimum-Weight Design of Continuum Structures with Stress Constraints, Proc. Instn. Mech. Engrs. Vol 213 Part C. 1998

[9] Mattheck C, Burkhardt S. *A new method of structural shape optimization based on biological growth*. Intn. J. Fatigue. 12. (1990) pp 185-90.

- [10] Mattheck, C. *Design in Nature- Learning from Trees*. First Edition. Germany. Springer Verlag. 1998
- [11] Mattheck, C., "Teacher Tree: The Evolution of Notch Shape Optimization from Complex to Simple", *Engineering Fracture Mechanics* 73, pp 1732-1742, 2006
- [12] Maute, K., Ramm, E., "Adaptative Topology Optimization", *Structural Optimization* 10, pp 100-112, 1995
- [13] Michell, A.G.M. *The limits of economy of material in frame structures*, *Philosophical Magazine* 8. 1904. pp 589-597
- [14] Querin, O. *Evolutionary Structural Optimisation: Stress Based Formulation and Implementation*. Ph.D. Dissertation. Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia. April 1997
- [15] Ramm, E., et al, "Adaptative Topology and Shape Optimization", *Computational Mechanics – New Trends and Applications*, CIMNE, Barcelona, Spain, 1998
- [16] Rozvany, G.I., et al. *Layout Optimization of Structures*, *Appl. Mech. Rev.*, Vol 48, No. 2. 1995. pp 41-119
- [17] Sethian, J.A., and Wiegmann, A., *Structural Boundary Design via Level Set and Immersed Interface Methods*, *J. Comp. Phys.*, 163, 2, Sep 2000, pp. 489-528,
- [18] Shene C. (1998, July 1). Introduction to computing with geometry. Course Notes. [WWW document]. URL: <http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/>
- [19] Steven, G.P., Xie, Y.M. *Evolutionary Structural Optimization with FEA*. *Computational Mechanics*, Vol.1. 1993. pp. 27-34
- [20] Xie, Y. M., Steven, G. P. *Evolutionary Structural Optimization (ESO)*. First Edition. London. Springer, 1997.
- [21] Yang, H., et al. *Control Point adjustment for B-Spline Curve Approximation*. *Computer – Aided Design* 36. 2004. pp 639-652

OPTIMAL SHAPE DESIGN BASED ON PARAMETRIC MODELING AND EVOLUTIVE RULES
USING NEIGHBORING NODES INFORMATION

[22] Maxwell, J.C., "On Reciprocal Figures, Frames and Diagrams of Force", Trans Roy Soc Edinburgo, 26, 1, 1872

[23] Tom Compton (2001). "Analytic Cycling – Forces on Rider" [documento WWW], URL:http://www.analyticcycling.com/ForcesPower_Page.html

[24] Mevdev, J.J., "Design and Optimization of a Carbon Monocoque Bicycle Frame", 4th year Thesis, Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia, 1995.

Referencias

Introducción

- [1] Maxwell, J.C., "On Reciprocal Figures, Frames and Diagrams of Force", Trans Roy Soc Edinburgo, 26, 1, 1872
- [2] Michell, A.G.M., "The limits of economy of material in frame structures", Philosophical Magazine, 6, 8, 47, 589-597, 1904.
- [3] Haftka, R. T., Gürdal Z., "Elements of structural optimisation", 3era ed., Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1992.
- [4] Holland, J. H., 'Adaptation in natural and artificial systems,' University of Michigan Press, 1975.
- [5] Goldberg, D. E., "Genetic algorithms, in search, optimization and machinelearning", Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [6] Koza, J., "Genetic Programming, On the Programming of Computers by Means of Natural Selection", The MIT Press, London, England, 1993
- [7] Velázquez, F., Santillán, S., "Diseño Óptimo Evolutivo", Ingeniería, Investigación y Tecnología, VII 3, 139-150, 2006 (Artículo arbitrado)
- [8] Coello, C., Christiansen, A., "Multiobjective Optimization of Trusses Using Genetic Algorithms", Department of Computers Science, Tulane University, New Orleans, LA 70118, USA
- [9] Erbatur, F., Hasançebi, O., et al., "Optimal Design of Planar and Space Structures with Genetic Algorithms", Computers and Structures 75, 209-224, 2000
- [10] Sushil, J., "Genetic Algorithms as a Computational Tool for Design", Ph.D. Thesis, Indiana University, Bloomington, Department of Computer Sciences, 1993
- [11] Yang, R.L. "Convergence of the Simulated Annealing Algorithm for Continuous Global Optimization", Journal of Optimization Theory and Applications 104 Vol. 3 pp. 691-716, March 2000
- [12] Xie, Y.M., Steven, G.P., "Evolutionary Structural Optimization", Springer-Verlag London, Grain Britain, 1997
- [13] Steven, G.P., Xie, Y.M., "Evolutionary Structural Optimization with FEA", Computational Mechanics, Vol.1, pp. 27-34, 1993
- [14] Querin, O. "Evolutionary Structural Optimisation: Stress Based Formulation and Implementation" Ph.D. Dissertation. Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia, pp 15-21, April 1997
- [15] Cerrolaza, M., Annicchiarico, W., et al, "Optimization of 2D Boundary Element Models Using B-Splines and Genetic Algorithms", Engineering Analysis with Boundary Elements 24, 427-440, 2000
- [16] Annicchiarico, W., Cerrolaza, M., "Structural Shape Optimization 3D Finite-Element Models Based on Genetic Algorithms and Geometric Modeling", Finite Elements in Analysis and Design 37, 403-415, 2001
- [17] Cervera, E., Trevelyan, J., "Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 2D algorithms", Computers and Structures, 2005
- [18] Cervera, E., Trevelyan, J., "Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 3D algorithms", Computers and Structures, 2005
- [19] Sethian, J.A., Wiegmann, A., "Structural Boundary Design Via Level Set and Immersed Interface Methods", Departments of Mathematics University of California at Berkeley
- [20] Sethian, J.A., "Level Set Methods: Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Material Science", Cambridge University Press, 1996.

[21] Huang, M., Arora, J. S., "Optimal design with discrete variables: Some numerical experiments", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 40, pp. 165-188, 1997.

Capítulo 1. Métodos de Optimización

[1] Querin, O. "Evolutionary Structural Optimisation: Stress Based Formulation and Implementation" Ph.D. Dissertation. Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia, pp 15-21, April 1997

[2] Huang, M., Arora, J. S., "Optimal design with discrete variables: Some numerical experiments", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 40, pp. 165-188, 1997.

[3] Haftka, R. T., Gürdal Z., "Elements of structural optimisation", 3era ed., Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1992.

[4] Bendsøe, M. P., Rasmussen, J., Rodrigues, H. C., "Topology and boundary optimization as an integrated tool for computer aided design", Engineering Optimization in Design Processes, Proceedings of the International Conference, Karlsruhe Nuclear Research Center, Germany, pp. 27 - 34, Sep 3-4, 1990.

[5] Bendsøe, M. P., "Optimization of structural topology, shape and material", Springer, Berlin, 1995.

[6] Beale, E. M. L., "Introduction to optimization", John Wiley & Sons, 1988.

[7] Goldberg, D. E., "Genetic algorithms, in search, optimization and machine learning", Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[8] Murty, K.G., "Operations research. Deterministic optimization models", Prentice Hall, New Jersey, 1995.

[9] Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., Teller, E., "Equation of state calculations by fast computing machines", J. Chem. Physics, 21(6), pp 1087 - 1092, 1953.

[10] Aarts, E. et Korst, J. "Simulated annealing and Boltzman machines: a stochastic approach to combinatorial optimization and neural computing", Great Britain: Courier International, Tiotree, Essex, 1989.

[11] Hasançebi, O., Erbatur, F. "Layout optimisation of trusses using simulated annealing", Advances in Engineering, 2002, vol. 33, pp. 681-696

[12] Orta, B. "Optimización de Láminas Reticuladas de una Capa", Informes de la Construcción, 511 Vol. 60, 59-72, Madrid, Julio-Septiembre 2008.

[13] Yang, R.L. "Convergence of the Simulated Annealing Algorithm for Continuous Global Optimization", Journal of Optimization Theory and Applications 104 vol. 3 pp. 691-716, March 2000.

[14] Holland, J. H., 'Adaptation in natural and artificial systems,' University of Michigan Press, 1975.

[15] Holland, J. H., 'Hidden order - How adaptation builds complexity,' Addison-Wesley Publishing Company, 1996.

[16] Koza, J., "Genetic Programming, On the Programming of Computers by Means of Natural Selection", The MIT Press, London, England, 1993

[17] Velázquez, F., Santillán, S., "Diseño Óptimo Evolutivo", Ingeniería, Investigación y Tecnología, VII 3, 139-150, 2006 (Artículo arbitrado)

[18] Erbatur, F., Hasançebi, O., et al., "Optimal Design of Planar and Space Structures with Genetic Algorithms", Computers and Structures 75, 209-224, 2000

[19] Sushil, J., "Genetic Algorithms as a Computational Tool for Design", Ph.D. Thesis, Indiana University, Bloomington, Department of Computer Sciences, 1993

- [20] Coello, C., Christiansen, A., "Multiobjective Optimization of Trusses Using Genetic Algorithms", Department of Computers Science, Tulane University, New Orleans, LA 70118, USA
- [21] Annicchiarico, W., Cerrolaza, M., "Optimization of Finite Element Bidimensional Models: an Approach Based on Genetic Algorithms", *Finite Elements in Analysis and Design* 29, 231-257, 1998
- [22] Annicchiarico, W., Cerrolaza, M., "Structural Shape Optimization 3D Finite-Element Models Based on Genetic Algorithms and Geometric Modeling", *Finite Elements in Analysis and Design* 37, 403-415, 2001
- [23] Cerrolaza, M., Annicchiarico, W., et al, "Optimization of 2D Boundary Element Models Using B-Splines and Genetic Algorithms", *Engineering Analysis with Boundary Elements* 24, 427-440, 2000
- [24] Storn, R., Preece, K., "Differential Evolution – A Simple and Efficient Adaptive Scheme for Global Optimization over Continuous Spaces", International Computer Science Institute, Berkeley, CA., 1997
- [25] Hrstka, O., Kucerova, A., "SADE Technology", Klobouk – Faculty of Civil Engineering, Czech Technical University in Prague, 2001
- [26] Xie, Y.M., Steven, G.P., "Evolutionary Structural Optimization", Springer-Verlag London, Great Britain, 1997
- [27] Qing, L., Steven, G.P., et al, "Evolutionary Optimisation for Cross Sectional Shape of Torsional Shafts", Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia
- [28] Kim, H., García, M.J., et al, "Fixed Grid Finite Element Analysis in Evolutionary Structural Optimisation", Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia
- [29] Lencus, A., Querin, O.M., et al, "Modifications to the Evolutionary Structural Optimisation (ESO) Method to Support Configurational Optimisation", Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia
- [30] Liang, Q.Q., Xie, Y.M., "Optimal Selection of Topologies for the Minimum-Weight Design of Continuum Structures with Stress Constraints", *Proc. Instn. Mech. Engrs. Vol 213 Part C.* 1998
- [31] Mattheck, C., "Design in Nature- Learning from Trees", Springer Verlag, Heidelberg, 1998
- [32] Mattheck, C., "Teacher Tree: The Evolution of Notch Shape Optimization from Complex to Simple", *Engineering Fracture Mechanics* 73, 1732-1742, 2006
- [33] Cai, R., Cai, S., et al, "A Novel Method of Structural Shape Optimization Coupling BEM with an Optimization Method Based on Biological Growth", *Structural Optimization* 15, 296-300, Springer Verlag, 1998.
- [34] Erman, T.A., and Güneri, A., "Shape Optimization with the Biological Growth Method: a Parameter Study", *Engineering Computations* Vol. 13 No. 8, pp. 4-18, 1996
- [35] Wessel, C., Cisilino, A., Sensale, B., "BEM Implementation of the Biological Growth Method for Structural Shape Optimisation", *Advances in Boundary Element Techniques*, 2003
- [36] Ramm, E., et al, "Adaptive Topology and Shape Optimization", *Computational Mechanics – New Trends and Applications*, CIMNE, Barcelona, Spain, 1998
- [37] Maute, K., Ramm, E., "Adaptive Topology Optimization", *Structural Optimization* 10, 100-112, 1995
- [38] Sethian, J.A., Wiegmann, A., "Structural Boundary Design Via Level Set and Immersed Interface Methods", Departments of Mathematics University of California at Berkeley
- [39] Cervera, E., Trevelyan, J., "Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 2D algorithms", *Computers and Structures*, 2005
- [40] Cervera, E., Trevelyan, J., "Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 3D algorithms", *Computers and Structures*, 2005

Capítulo 2. Modelado Paramétrico

- [1] Shene C. (1998, July 1). "Introduction to computing with geometry. Course Notes", Department of Computer Science, Michigan Technological University. [documento WWW]. URL: <http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/>
- [2] Chaudhary, A. "Computer Graphics. Course Notes" Department of Computer Science and Engineering, IIT Delhi [documento WWW] URL: <http://www.cse.iitd.ernet.in/~pkalra/cs474/>
- [3] Yang, H., et al, "Control Point adjustment for B-Spline Curve Approximation", Computer – Aided Design 36, 639-652, 2004

Capítulo 3. Descripción del Método

- [1] Bhatti, A. "Fundamental Finite Element Analysis and Applications", John Wiley & Sons, Inc., USA, 2005
- [2] Bhatti, A. "Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures", John Wiley & Sons, Inc., USA, 2006
- [3] Zienkiewicz, O.C., et al, "The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals", 6th Edition, Elsevier Butterworth-Heinemann, UK, 2006
- [4] Zienkiewicz, O.C., et al, "The Finite Element Method for Solid Structural Mechanics", 6th Edition, Elsevier Butterworth-Heinemann, UK, 2006
- [5] Shene C. (1998, July 1). "Introduction to computing with geometry. Course Notes". [documento WWW]. URL: <http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/>
- [6] Xie, Y.M., Steven, G.P., "Evolutionary Structural Optimization", Springer-Verlag London, Grain Britain, 1997
- [7] Cervera, E., Trevelyan, J., "Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 2D algorithms", Computers and Structures, 2005
- [8] Li, Q., Steven, G.P., Xie Y.M., "On equivalence between stress criterion and stiffness criterion in evolutionary structural optimization". Structural Multidisciplinary Optimisation 18, 67-73, 1999)
- [9] Annicchiarico, W., Cerrolaza, M., "Structural Shape Optimization 3D Finite-Element Models Based on Genetic Algorithms and Geometric Modeling", Finite Elements in Analysis and Design 37, 403-415, 2001
- [10] Cerrolaza, M., Annicchiarico, W., et al, "Optimization of 2D Boundary Element Models Using B-Splines and Genetic Algorithms", Engineering Analysis with Boundary Elements 24, 427-440, 2000
- [11] Mattheck, C., "Teacher Tree: The Evolution of Notch Shape Optimization from Complex to Simple", Engineering Fracture Mechanics 73, 1732-1742, 2006
- [12] Cervera, E., Trevelyan, J., "Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 2D algorithms", Computers and Structures, 2005
- [13] Cervera, E., Trevelyan, J., "Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 3D algorithms", Computers and Structures, 2005
- [14] Yang, H., et al, "Control Point adjustment for B-Spline Curve Approximation", Computer – Aided Design 36, 639-652, 2004
- [15] Burczynski, T., Kokot, G., "The Evolutionary Optimization Using Genetic Algorithms and Boundary Elements", Department for Strength of Materials and Computational Mechanics, Silesian University of Technology, Poland.
- [16] Michell, A.G.M., "The limits of economy of material in frame structures", Philosophical Magazine, 6, 8, 47, 589-597, 1904.
- [17] Hemp, W.S., "Optimum Structures", Claredon Press, Oxford, 1973

- [18] Rozvany, G.I., et al, "Layout Optimization of Structures", Appl. Mech. Rev., Vol 48, No. 2, pp 41-119, 1995
- [19] Querin, O. "Evolutionary Structural Optimisation: Stress Based Formulation and Implementation" Ph.D. Dissertation. Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia, pp 15-21, April 1997
- [20] Sethian, J.A., Wiegmann, A., "Structural Boundary Design Via Level Set and Immersed Interface Methods", Departments of Mathematics University of California at Berkeley

Capítulo 4. Aplicación y Resultados

- [1] Xie, Y.M., Steven, G.P., "Evolutionary Structural Optimization", Springer-Verlag London, Grain Britain, 1997
- [2] Querin, O. "Evolutionary Structural Optimisation: Stress Based Formulation and Implementation" Ph.D. Dissertation. Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia, pp 15-21, April 1997
- [3] Liang, Q.Q., Xie, Y.M., "Optimal Selection of Topologies for the Minimum-Weight Design of Continuum Structures with Stress Constraints", Proc. Instn. Mech. Engrs. Vol 213 Part C. 1998
- [4] Cervera, E., Trevelyan, J., "Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 2D algorithms", Computers and Structures, 2005
- [5] Tom Compton (2001). "Analytic Cycling – Forces on Rider" [documento WWW], URL:http://www.analyticcycling.com/ForcesPower_Page.html
- [6] Mevdev, J.J., "Design and Optimization of a Carbon Monocoque Bicycle Frame", 4th year Thesis, Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia, 1995.

Capítulo 5. Discusión y Conclusiones

- [1] Xie, Y.M., Steven, G.P., "Evolutionary Structural Optimization", Springer-Verlag London, Grain Britain, 1997
- [2] Querin, O. "Evolutionary Structural Optimisation: Stress Based Formulation and Implementation" Ph.D. Dissertation. Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia, pp 15-21, April 1997
- [3] Cervera, E., Trevelyan, J., "Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 2D algorithms", Computers and Structures, 2005
- [4] Mevdev, J.J., "Design and Optimization of a Carbon Monocoque Bicycle Frame", 4th year Thesis, Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia, 1995.