UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

EL ESPACIO DE SELECCIONES DE UN ABANICO SUAVE

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

MAURICIO ESTEBAN CHACÓN TIRADO

DIRECTORA DE LA TESINA: DRA. VERÓNICA MARTÍNEZ DE LA VEGA Y MANSILLA

MÉXICO, D.F. JUNIO, 2008

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

   Chacón
   Tirado
   Mauricio Esteban
   Tel: 044 5537542853
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Maestría en Ciencias Matemáticas
   507002787

2. Datos del Tutor

   Doctor
   Alejandro
   Illanes
   Mejía

3. Datos del sinodal 1

   Doctora
   Bertha María
   Tomé
   Arreola

4. Datos del sinodal 2

   Doctor
   Jorge Andrés
   Ize
   Lamache

5. Datos del sinodal 3

   Doctora
   Laura
   Ortiz
   Bobadilla

6. Datos del sinodal 4

   Doctora
   Ana
   Meda
   Urriola

7. Datos del sinodal 5

   Doctor

   José María

   González Barrios

   Murguía

8. Datos del trabajo escrito

   El espacio de arcos ordenados largos

   21 p

   2008

Índice general

Introducción

Un continuo es un espacio métrico, compacto y conexo. Dado un continuo X, podemos considerar su hiperespacio de subcontinuos $C(X) = \{A \subset X : A \text{ es un continuo}\}$; a $C(X)$ lo dotaremos de la métrica de Hausdorff. También se puede considerar el espacio $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\} \subset C(X)$. Observemos que $F_1(X)$ es homeomorfo a X, mediante la función que asocia a cada $x \in X$ el singular $\{x\}$.

Como $F_1(X) \subset C(X)$, un problema lógico es preguntarse cuándo $F_1(X)$ es retracto de $C(X)$; en este trabajo estudiaremos un tipo particular de retracciónes de $C(X)$ a $F_1(X)$, llamadas selecciones. Una selección es una función continua $s : C(X) \to X$ tal que $s(A) \in A$ para todo $A \in C(X)$; observemos que $s(\{x\}) = x$ para todo $x \in X$. Como X es naturalmente homeomorfo a $F_1(X)$, una selección puede ser considerada como un tipo especial de retracción de $C(X)$ a $F_1(X)$. Diremos que un continuo X es seleccionable si existe selección $s : C(X) \to X$.

En el teorema [1, 10.10] se demuestra que si un continuo X es seleccionable, entonces tal continuo debe ser un dendroide. Un dendroide es un continuo hereditariamente unicoherente y hereditariamente arcoconexo. Una dendrita es un dendroide localmente arcoconexo, es fácil ver que toda dendrita es seleccionable.

En 2006, R. Cauty probó que el espacio de selecciones de una dendrita es homeomorfo al espacio l_2 de sucesiones reales que son cuadrado sumables.

Nosotros en este trabajo nos enfocamos a un tipo especial de dendroides, los llamados abanicos suaves y probamos que el espacio de selecciones de un abanico suave es un retracto absoluto métrico, separable y completo.

Capítulo 1

Preliminares

Un *continuo* X es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Dado un continuo X, definimos su *hiperespacio de subcontinuos* $C(X) = \{A \subset X : A \text{ es un continuo}\}$. Al espacio $C(X)$ lo dotaremos de la *métrica de Hausdorff* H, definida para cada pareja $A, B \in C(X)$ por

$$H(A,B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\},$$

donde $N(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x,a) < \varepsilon \text{ para algún } a \in A\}$ denota la nube de radio ε centrada en A. El espacio $C(X)$ con tal métrica es compacto y conexo, tales hechos se demuestran en [2].

Un teorema básico sobre el comportamiento de sucesiones convergentes en $C(X)$ es el siguiente.

Teorema 1.1. *Sean $\{A_n\}_n$ una sucesión en $C(X)$ y $A \in C(X)$ tal que $A_n \to A$, entonces un punto $x \in X$ está en A si y sólo si para cada n existe $a_n \in A_n$ tal que $a_n \to x$.*

Un continuo X se dice *unicoherente* si siempre que $X = Y \bigcup Z$, con Y, Z subcontinuos de X, se tiene que $Y \bigcap Z$ es conexo. Diremos que X es *hereditariamente unicoherente* si todo subcontinuo Y de X es unicoherente.

Observemos que la circunferencia unitaria de $\mathbb{R}^2$ es un continuo que no es unicoherente, pues lo podemos poner como la unión de los arcos $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1 \text{ y } x \geq 0\}$ y $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1 \text{ y } x \leq 0\}$, y la intersección de tales arcos, es el conjunto $\{(0,1), (0,-1)\}$, que es disconexo.

Un *dendroide* es un continuo arcoconexo hereditariamente unicoherentey hereditariamente arcoconexo. Dados 2 puntos x, y en un dendroide X, existe un único arco en X con puntos extremos x y y, pues si hubiera 2 de tales arcos, entonces podemos encontrar un subespacio Y de X homeomorfo a una circunferencia, sin embardo X es hereditariamente unicoherente y Y no es unicoherente. Denotaremos por xy al único arco del dendroide con puntos extremos x y y.

Un punto x de un dendroide X se dice *punto de ramificación* si $X \setminus \{x\}$ tiene más de 2 componentes.

Un *abanico* es un dendroide con un único punto de ramificación, al cual llamaremos el vértice del abanico. Así, la imagen que debemos tener de un abanico es de un continuo con un punto especial, el vértice, del cual salen arcos que sólo se intersectan en el vértice.

Definición 1.2. Una *selección* es una función continua $s : C(X) \to X$, tal que para todo $A \in C(X)$ se tiene que $s(A) \in A$. Diremos que un continuo X es *seleccionable* si existe selección $s : C(X) \to X$.

Definición 1.3. Para un continuo X, sea

$$\Sigma(X) = \{s : C(X) \to X : s \text{ es selección}\}.$$

A $\Sigma(X)$ lo llamaremos el *espacio de selecciones* del continuo X, y lo dotaremos con la métrica de la convergencia uniforme, que llamaremos ρ, la cual se define para cada pareja $r, s \in \Sigma(X)$ como

$$\rho(r, s) = \sup\{d(r(A), s(A)) : A \in C(X)\}.$$

Teorema 1.4. *Si X es un continuo seleccionable, entonces X es un dendroide.*

El teorema anterior se encuentra demostrado en [1].

Las dendritas son dendroides localmente conexos. R. Cauty demuestra en [3] que el espacio de selecciones de una dendrita es homeomorfo al espacio vectorial topológico l_2, definido por

$$l_2 = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{R} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty\},$$

dotado de la norma $\|(a_n)_n\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}$.

l_2 es un espacio topológico de dimensión infinita, no compacto, contraíble, arcoconexo y localmente arcoconexo ([5]). En este trabajo nosotros veremos que el espacio de selecciones de un abanico suave tiene estas mismas propiedades.

Definición 1.5. Un abanico X con vértice v se dice *suave* para toda sucesión convergente $x_n \to x$ en X, se cumple que la sucesión de arcos $\{px_n\}_n$ es convergente y converge al arco px en $C(X)$.

Se sabe que todo abanico suave se puede encajar en el cono sobre el conjunto de Cantor ([4]), esto nos permitirá hacer cálculos explicitos con las selecciones de abanicos suaves.

Capítulo 2

Resultados principales

En la totalidad de este capítulo, X será un abanico suave encajado en el cono de Cantor que tiene vértice en el origen y Cantor en la circunferencia unitaria de $\mathbb{R}^2$. Es decir, X consta del origen de $\mathbb{R}^2$ y de arcos que salen del origen.

Primero veremos que $\Sigma(X)$ no es compacto, para este fin empezaremos con la siguiente proposición:

Proposición 2.1. *Sea*

$$\Sigma_0([0,1]) = \{s : C([0,1]) \to [0,1] : s \textit{ es selección y } s([0,x]) = 0 \textit{ para todo } x \in [0,1]\},$$

entonces $\Sigma_0([0,1])$ *es un subconjunto cerrado de* $\Sigma([0,1])$ *que no es compacto.*

Demostración. Veamos que $\Sigma_0(X)$ no es secuencialmente compacto:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $s_n \in \Sigma_0(X)$ como:

$$s_n([a,b]) = \begin{cases} a & \text{si } a < \frac{1}{2}, \\ a + (\frac{b-a}{1-a})^n (b-a)(a - \frac{1}{2}) & \text{si } \frac{1}{2} \leq a < 1 \\ 1 & \text{si a=1.} \end{cases}$$

Para todo $x \in [0,1]$, $s_n([0,x]) = 0$. Veamos que s_n está bien definida; es decir, que para cada $n \in \mathbb{N}$, s_n es continua, selección y un elemento de $\Sigma_0(X)$.

Claramente se tiene que $a \leq s_n([a,b])$; observemos que $s_n([a,b]) \leq b$ para $a < \frac{1}{2}$ y $a = 1$; si $\frac{1}{2} \leq a < 1$, entonces $\left(\frac{b-a}{1-a}\right)^n (a - \frac{1}{2}) < (a - \frac{1}{2}) < 1$, así pues,

$$a + \left(\frac{b-a}{1-a}\right)^n \left(a - \frac{1}{2}\right)(b-a) < a + (b-a) = b,$$

de manera que $a \leq s_n([a,b]) \leq b$ para todo $[a,b] \in C([0,1])$.

Ahora veamos la continuidad de s_n.

s_n es continua en $\{[a,b] : a < \frac{1}{2}\}$; cuando $a = \frac{1}{2}$, entonces $(a - \frac{1}{2}) = 0$, por tanto $s_n([a,b]) = a$. Cuando $\frac{1}{2} \leq a < 1$, $a + (\frac{b-a}{1-a})^n (b-a)(a - \frac{1}{2})$ es continuo, y se pega bien en el caso de cuando $a < \frac{1}{2}$, por tanto s_n es continuo en $\{[a,b] : a \leq b, a < 1\}$.

Cuando $a \to 1$, entonces $b \to 1$, y como $a \leq s_n([a,b]) \leq b$, entonces $\lim_{a\to 1} s_n([a,b]) = 1 = s_n([1,1])$. Por tanto, s_n es continua y es selección para toda n.

Así pues, para toda $n \in \mathbb{N}$, $s_n \in \Sigma_0(X)$.

Ahora veamos cuál es el límite puntual de las s_n :

Si $a \leq \frac{1}{2}$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, $s_n([a,b]) = a$, por tanto $\lim_{n\to\infty} s_n([a,b]) = a$.

Si $\frac{1}{2} \leq a \leq b < 1$, entonces $\left(\frac{b-a}{1-a}\right) < 1$, por tanto $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{1-a}\right)^n = 0$; así, $\lim_{n\to\infty} s_n([a,b]) = a$.

Si $\frac{1}{2} \leq a \leq b = 1$, entonces $\left(\frac{b-a}{1-a}\right) = 1$, por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{1-a}\right)^n \left(a - \frac{1}{2}\right)(b-a) = \left(a - \frac{1}{2}\right)(b-a);$$

así, $\lim_{n\to\infty} s_n([a,1]) = a + (1-a)(a - \frac{1}{2})$.

Con lo cual hemos visto que s_n converge puntualmente a la siguiente función s:

$$s([a,b]) = \begin{cases} a & \text{si } a < \frac{1}{2}, \\ a & \text{si } \frac{1}{2} \leq a < 1 \text{ y } b < 1 \\ a + (1-a)(a - \frac{1}{2}) & \text{si } \frac{1}{2} \leq a < 1 \text{ y } b = 1 \\ 1 & \text{si a=1.} \end{cases}$$

Observemos que s no es continua, pues $\lim_{m\to\infty} s([\frac{3}{4}, 1 - \frac{1}{m}]) = \frac{3}{4}$, y $s([\frac{3}{4}, 1]) = \frac{3}{4} + \frac{1}{16} \neq \frac{3}{4}$.

De esta manera, hemos probado que $\Sigma_0(X)$ no es secuencialmente compacto, y por tanto no es compacto.

Veamos ahora que $\Sigma_0(X)$ es cerrado en $\Sigma(X)$. Sea $\{s_n\}$ una sucesión en $\Sigma_0([0,1])$ que converge a una función $g \in \Sigma([0,1])$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [0,1]$ se tiene que $g_n([0,x]) = 0$, por tanto $g([0,x]) = 0$. De manera que $g \in \Sigma_0([0,1])$, con lo cual $\Sigma_0(X)$ es un subconjunto cerrado de $\Sigma([0,1])$. $\square$

Recordemos que X es un abanico suave, encajado en el cono del conjunto de Cantor que tiene como vértice al origen de $\mathbb{R}^2$ y Cantor en la circunferencia unitaria. Al vértice lo denoteremos por v.

Vamos a introducir unos conceptos que nos serán útiles al momento de referirnos a ciertos subcontinuos del abanico X.

Definición 2.2. Diremos que $L \in C(X)$ es una *pata* del abanico X si L es un arco con un extremo en el vértice v, y es maximal con respecto a esta propiedad.

Observemos que para cada $x \in X \backslash \{v\}$ existe una única pata L que contiene a x.

Definición 2.3. Dado un abanico suave Y y una pata L de Y, un *racimo* de radio $\varepsilon > 0$ alrededor de L en Y es el conjunto

$$R(\varepsilon, L, Y) = \{x : \text{existe pata } K \text{ de } Y \text{ tal que } x \in K \text{ y } K \subset N(\varepsilon, L)\}.$$

Definición 2.4. Dado un abanico suave Y y una pata L de Y, un *semirracimo* de radio $\varepsilon > 0$ alrededor de L en Y es el conjunto

$$SR(\varepsilon, L, Y) = R(\varepsilon, L, Y) \backslash \{v\}.$$

Dado un abanico suave Y, los semiracimos siempre son conjuntos abiertos de Y, como veremos a continuación.

Proposición 2.5. *Sea L una pata de un abanico suave Y y $\varepsilon > 0$, entonces el semirracimo $SR(\varepsilon, L, Y)$ es un conjunto abierto de Y.*

Demostración. Sea $A = Y \backslash (SR(\varepsilon, L, Y))$, el complemento del semirracimo. Tomemos una sucesión $\{a_n\}_n$ de A y $a \in X$ tal que $a_n \to a \in Y$. Veamos que $a \in A$.

Si $a = v$, ya terminamos.

Supongamos que $a \neq v$. Tomando una subsucesión de $\{a_n\}_n$, podemos suponer que $a_n \neq v$ para toda n. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea P_n la pata de Y que contiene a a_n. Como las patas son arcos con un extremo en el vértice, entonces para cada n existe $y_n \in X$ tal que $P_n = vy_n$. Tomando una subsucesión de $\{y_n\}_n$, podemos suponer que existe $y \in Y$ tal que $y_n \to y$. Al ser Y un abanico suave, entonces $P_n = vy_n \to vy$ en $C(X)$. Por el teorema 1.1, $a \in vy$.

Como $a_n \notin R(\delta, L, Y)$, entonces $P_n \not\subset N(\varepsilon, L)$; tomemos $x_n \in P_n$ con $x_n \notin N(\varepsilon, L)$, y tomando una subsucesión podemos suponer que existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Por el teorema 1.1, $x \in vy$, y como $N(\varepsilon, L)$ es abierto, entonces $x \notin N(\varepsilon, L)$, por tanto, $vy \not\subset N(\varepsilon, L)$. Ahora, vy está contenido en una pata de Y, que llamaremos K, como $vy \subset K$ y $vy \not\subset N(\varepsilon, L)$, entonces $a \in K$ y $K \not\subset N(\varepsilon, L)$, entonces $a \notin R(\varepsilon, L, Y)$.

Así pues, A es un subconjunto cerrado de Y y por tanto $SR(\varepsilon, L, Y)$, su complemento, es abierto. $\square$

Proposición 2.6. *Definamos*

$$\Sigma_0(X) = \{s : s \textit{ es selección y } s(A) = v \textit{ para todo } A \textit{ que contenga a } v\},$$

entonces $\Sigma_0(X)$ es un subconjunto cerrado y no compacto de $\Sigma(X)$.

Demostración. Veamos que $\Sigma_0(X)$ es un subconjunto cerrado de $\Sigma(X)$. Tomemos una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\Sigma_0(X)$ que converga a una función $s \in \Sigma(X)$. Sea $A \in C(X)$ tal que $v \in A$, entonces $s_n(A) = v$ para toda n, como $s(A) = \lim_{n\to\infty} s_n(A) = v$, entonces $s \in \Sigma_0(X)$. Así pues, $\Sigma_0(X)$ es cerrado.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la pata más larga de X es $[0, 1] \times \{0\}$ (si no, dividimos X por la longitud de la pata más larga y luego rotamos X). Definamos una función

$$\alpha : \Sigma_0(X) \to \Sigma_0([0, 1])$$

mediante

$$\alpha(s)([a,b]) = \pi(s([a,b] \times \{0\})),$$

para todo subcontinuo $[a,b] \in C([0,1])$, donde $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la proyección a la primera coordenada.

Veamos que α es una función continua y sobre.

Sea $x \in [0,1]$, observemos que para todo $s \in \Sigma_0(X)$,

$$\alpha(s)([0,x]) = \pi(s([0,x] \times \{0\})) = \pi(v) = 0,$$

pues $v \in [0,x] \times \{0\}$, entonces α está bien definida y claramente α es una función continua.

Veamos que α es sobre; dado $s \in \Sigma_0([0,1])$, definimos $\phi : C(X) \to X$ por

$$\phi(A) = \begin{cases} v & \text{si } v \in A \\ (s([a,b]), \theta) & \text{si } A = ([a,b], \theta), \text{ visto como coordenadas polares;} \end{cases}$$

observemos que $\phi \in \Sigma_0(X)$, además

$$\begin{aligned} \alpha(\phi)([a,b]) &= \pi(\phi([a,b] \times \{0\})) \\ &= \pi(s([a,b], 0)) \\ &= s([a,b]), \end{aligned}$$

por tanto $\alpha(\phi) = s$, así pues, α es sobre.

Como $\Sigma_0([0,1])$ no es compacto, entonces $\Sigma_0(X)$ no puede ser compacto. $\square$

Corolario 2.7. $\Sigma(X)$ *no es compacto.*

Demostración. $\Sigma_0(X)$ es un subconjunto cerrado y no compacto de $\Sigma(X)$. $\square$

Teorema 2.8. $\Sigma(X)$ *es contraíble.*

Demostración. Sea g la selección definida para cada $A \in C(X)$ por

$$g(A) = \text{ punto de } A \text{ más cercano al vértice.}$$

Definamos una función $K : \Sigma(X) \times [0,1] \to \Sigma(X)$ por

$$K(s,t)(A) = t(s(A)) + (1-t)g(A), \ A \in C(X).$$

Veamos que $K(s,t)$ es una selección de X para cada $s \in \Sigma(X)$ y $t \in [0,1]$: Sea $A \in C(X)$, si $v \in A$, entonces $g(A) = v$ y $K(s,t)(A)$ es un punto del arco $vs(A) \subset A$; si $v \notin A$, entonces A se queda contenida en una pata de X, así, tanto $g(A)$ como $s(A)$ se quedan en la misma pata, y también el arco $g(A)s(A)$, con lo cual

$$K(s,t)(A) \in g(A)s(A) \subset A,$$

por tanto K está bien definida y K es continua, pues es suma de funciones continuas.

Como $K(S,0) = g$ y que $K(S,1) = S$ para toda $S \in \Sigma(X)$, entonces K es una contracción de $\Sigma(X)$ a g. $\square$

Corolario 2.9. $\Sigma(X)$ *es arcoconexo.*

Demostración. Al ser $\Sigma(X)$ contraíble, es arcoconexo. $\square$

Observación 2.10. Se puede probar la arcoconexidad de $\Sigma(X)$ de otra manera, quizás más intuitiva, es decir: Dada una pareja de selecciones $f, g \in \Sigma(X)$, para cada tiempo $t \in [0,1]$, definimos $f_t \in \Sigma(X)$, donde para cada $A \in \Sigma(X)$, $f_t(A)$ es el punto del arco $f(A)g(A)$ que está en proporción t entre $f(A)$ y $g(A)$, más específicamente, pongamos $f(A) = (r_1, \theta_1)$, $g(A) = (r_2, \theta_2)$, vistos en coordenadas polares y definamos f_t en coordenadas polares como:

$$f_t(A) = \begin{cases} (tr_1 + (1-t)r_2, \theta_1) & \text{si } \theta_1 = \theta_2, \\ (tr_1 - (1-t)r_2, \theta_1) & \text{si } tr_1 \geq (1-t)r_2 \\ ((1-t)r_2 - tr_1, \theta_2) & \text{si } tr_1 \leq (1-t)r_2. \end{cases}$$

Se puede probar que tal f_t es continua, f_t es selección pues $f_t(A)$ elige un punto del arco $f(A)g(A) \subset A$, y $\{f_t : t \in [0,1]\}$ es un arco en $\Sigma(X)$.

Como la topoloía de $\Sigma(X)$ es la topología de la convergencia uniforme, podemos controlar el coeficiente de continuidad uniforme de 2 funciones que estén muy cercanas.

Proposición 2.11. *Sea* $s \in \Sigma(X)$ *y* $\{s_n\}_n$ *una sucesión de* $\Sigma(X)$ *que converja uniformemente a* s*. Sea* $\varepsilon > 0$*, entonces existen* $\delta > 0$ *y* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $B, C \in C(X)$ *con* $H(B,C) < \delta$ *y* $n > N$*, se cumple que* $d(s(B), s(C)) < \varepsilon$ *y* $d(s_n(B), s_n(C)) < \varepsilon$*.*

Demostración. Como $s : C(X) \to X$ y $C(X)$ es compacto, entonces s es uniformemente continua, sea $\delta > 0$ tal que si $B, C \in C(X)$ cumplen que $H(B,C) < \delta$, entonces $d(s(B), s(C)) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Como $s_n \to s$ uniformemente, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $A \in C(X)$ y $n > N$ se tiene que $d(s(A), s_n(A)) < \frac{\varepsilon}{4}$. De esta manera, si $H(B,C) < \delta$ y $n > N$,

$$\begin{aligned} d(s_n(B), s_n(C)) &\leq d(s_n(B), s(B)) + d(s(B), s(C)) + d(s(C), s_n(C)) \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Ahora probaremos que $\Sigma(X)$ es localmente arcoconexo, para eso necesitamos un modo de controlar selecciones cercanas, el siguiente lema nos ayudará.

Lema 2.12. *Sean* $s \in \Sigma(X)$ *y* $A \in C(X)$ *tales que* $v \in A$ *y* $s(A) \neq v$*. Sea* $\{s_n\}_n$ *una sucesión en* $\Sigma(X)$ *tal que* $s_n \to s$ *uniformemente, entonces existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para toda* $n > N$*,* $s_n(A)$ *y* $s(A)$ *están en la misma pata.*

Demostración. Supongamos que el lema no es cierto, es decir, que tenemos una subsucesión $\{s_{n_m}\}_m$ de $\{s_n\}_n$ tal que para toda $m \in \mathbb{N}$, $s_{n_m}(A)$ y $s(A)$ están en patas distintas. Como $\{s_{n_m}\}$ es subsucesión de $\{s_n\}_n$, entonces que $g_{n_m} \to s$ uniformemente. Para mantener limpia la notación, sustituiremos $\{s_{n_m}\}_m$ por $\{s_n\}_n$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $d(v, s(A)) > \varepsilon$, tomando una subsucesión de $\{s_n\}$, también podemos suponer que $d(v, s_n(A)) > \varepsilon$ para toda n. Por la proposición 2.11, podemos encontrar $\delta > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que si $B, C \in C(X)$ y $H(B, C) < \delta$, entonces $d(s(B), s(C)) < \frac{\varepsilon}{2}$ y si $n > N$, entonces $d(s_n(B), s_n(C)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea L la pata de A que contiene a $s(A)$.

Sea $M > N$ tal que el racimo $R(\delta, L, A)$ contenga $s_M(A)$, tal M existe, pues el racimo $R(\delta, L, A)$ es una vecindad de $s(A) \neq v$. Observemos que como $s_M(A) \in R(\delta, L, A)$ entonces la pata K de A que contiene a $s_M(A)$ se queda contenida en $R(\delta, L, A)$, como K es la pata que contiene a $s_M(A)$, $K \neq L$.

Sea $E = (A \backslash SR(\delta, L, A)) \cup (L \cap A)$; E es cerrado, pues $SR(\delta, L, A)$ es abierto. E es conexo, ya que cada para cada punto $p \in E$, el arco vp se queda contenido en E.

Para cada $t \in [0, 1]$, sea $B(t, v)$ la bola cerrada en $\mathbb{R}^2$ de radio t con centro en el origen, definamos

$$A_t = E \cup (B(t, v) \cap R(\delta, L, A) \cap A).$$

Observemos que A_t es subcontinuo de A para todo t, pues E y $B(t, v) \cap R(\delta, L, A) \cap A$ son subcontinuos de A que además contienen a v.

Ahora veremos que $H(A, A_t) < \delta$ para todo t. Claramente $A_t \subset N(\delta, A)$. Sea $a \in A \backslash A_t$, entonces $a \in R(\delta, L, A)$, de aquí que $a \in N(\delta, L) \subset N(\delta, A_t)$, por tanto $A \subset N(\delta, A_t)$; entonces $H(A, A_t) < \delta$ para todo t.

Observemos que $A_0 = E = (A \backslash SR(\delta, L, A)) \cup L$, que no contiene a la pata K (recordemos que $g_M(A) \in K$). $A_1 = E \cup R(\delta, L, A)$, pues $R(\delta, L, A) \subset X \subset B(1, v)$, así, $A_1 = (A \backslash SR(\delta, L, A)) \cup R(\delta, L, A) = A$.

Así pues, hemos conectado a $A_1 = A$ con $A_0 = (A \backslash R(\delta, L, A)) \cup L$ mediante una trayectoria en $C(X)$ que no se aleja más que δ de A_1.

Como K fue borrado de A_0 al quitar el racimo $R(\delta, L, A)$, entonces $s_M(A_0) \notin K$, pero $s_M(A_1) \in K$, con lo cual la imagen bajo s_M de la trayectoria $\{A_t : t \in [0, 1]\}$ debe ser una trayectoria en X que se queda a distancia menor que ε de $s_M(A)$ y que cambia de patas, por tanto debe pasar por el vértice, lo cual es una contradicción, pues $d(v, s_M(A)) > \varepsilon$. □

Cuando A, B son subcontinuos de X que contienen al vértice, podemos conectarlos en $C(X)$ por una trayectoria que no se aleja mucho de A, como veremos en el siguiente lema.

Lema 2.13. *Sean A, B subcontinuos de X, y ε tal que $H(A, B) < \varepsilon$, $v \in A$ y $v \in B$, entonces existe una trayectoria $\alpha : [0, 1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = A \cup B$, y para toda $t \in [0, 1]$, $H(A, \alpha(t)) < \varepsilon$.*

Demostración. Sea $\alpha : [0,1] \to C(X)$ definida por

$$\alpha(t) = A \cup (B(t,v) \cap B).$$

α es una trayectoria en $C(X)$ que une $\alpha(0) = A$ con $\alpha(1) = A \cup B$.

Veremos que $H(A, \alpha(t)) < \varepsilon$ para toda t. Como $H(A,B) < \varepsilon$, entonces $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$, con lo cual $A \cup B \subset N(\varepsilon, A)$. Sea $t \in [0,1]$, al ser $\alpha(t)$ subconjunto de $A \cup B$, entonces

$$\alpha(t) \subset A \cup B \subset A \cup N(\varepsilon, A) \subset N(\varepsilon, A); \tag{2.1}$$

como $A \subset \alpha(t)$, entonces

$$A \subset \alpha(t) \subset N(\varepsilon, \alpha(t)). \tag{2.2}$$

De 2.1 y 2.2, $H(A, \alpha(t)) < \varepsilon$ para toda t, que es lo que queríamos. □

El lema anterior nos permite controlar selecciones de continuos cercanos, el caso que más nos interesa es el siguiente.

Lema 2.14. *Sean $A \in C(X)$ tal que $v \in A$ y sea $s \in \Sigma(X)$ tal que $s(A) \neq v$. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una suceción en $C(X)$ tal que $v \in A_n$ para toda n, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > M$, $s(A_n)$ y $s(A)$ están en una misma pata de X.*

Demostración. Supongamos que el teorema no es cierto, es decir, que tenemos una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $C(X)$ con $v \in A_n$ para toda n, que converge a A, y que para toda n, $s(A_n)$ está en una pata de X distinta a la pata que contiene a $s(A)$. Sea ε con $d(v, s(A)) > \varepsilon$, y tomando una subsucesión de $\{A_n\}_n$, podemos suponer que $d(v, s_n(A)) > \varepsilon$ para toda n. Sea $\delta > 0$ tal que si $H(B,C) < \delta$, entonces $d, (s(B), s(C)) < \varepsilon$.

Sea M tal que $H(A, A_M) < \delta$, por el lema 2.13, podemos encontrar una trayectoria que una A con $A \cup A_M$ que no se aleje más que δ de A, por tanto la imagen bajo s de tal trayectoria es una trayectoria en X que no se aleja más que ε de $s(A)$, entonces tal trayectoria se queda contenida en una pata de X, así, $s(A \cup A_M)$ es un punto de la pata que contiene a $s(A)$. Análogamente, intercambiando A y A_M, obtenemos que $s(A \cup A_M)$ un punto de la pata que contiene a $s(A_M)$, lo cual es una contradicción, pues tales patas son distintas. □

Proposición 2.15. *Sea $s \in \Sigma(X)$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $g \in \Sigma(X)$ y $\rho(s,g) < \delta$, entonces para toda $A \in C(X)$ se tiene que $s(A)$ y $g(A)$ están en la misma pata o $d(v, s(A)) < \varepsilon$ y $d(v, g(A)) < \varepsilon$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $g_n \in \Sigma(X)$, $A_n \in C(X)$ tales que $s(A_n)$ y $g_n(A_n)$ están en distintas patas, $\rho(s, g_n) < \frac{1}{n}$ y $d(v, s(A_n)) \geq 2\varepsilon$ o $d(v, g_n(A_n)) \geq 2\varepsilon$.

Observemos que como $s(A_n)$ y $g_n(A_n)$ están en distintas patas, entonces el arco $s(A_n)g_n(A_n)$ contiene al vértice v, como $s(A_n)g_n(A_n) \subset A_n$ entonces $v \in A_n$ para toda n.

Tomando una subsucesión podemos suponer que existe $A \in C(X)$ tal que $A_n \to A$; como $v \in A_n$ para toda n, entonces $v \in A$. Observemos que $d(v, s(A)) > \varepsilon$. Por la proposición 2.11, existe $\eta > 0$ y $M_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $H(B, C) < \eta$, entonces $d(s(B), s(C)) < \varepsilon$ y $d(g_n(B), g_n(C)) < \varepsilon$ para $n > M_0$.

Como $A_n \to A$, sea $M_1 > M_0$ tal que $H(A, A_n) < \frac{\eta}{4}$ para $n > M_1$. Sea $n > M_1$, como $v \in A_n$, entonces A y $A \cup A_n$ pueden ser unidos por una trayectoria en $C(X)$ con diámetro menor que $\frac{\eta}{2}$; análogamente podemos encontrar una trayectoria que una A_n con $A \cup An$ de diámetro menor que $\frac{\eta}{2}$; de esta manera, uniendo tales trayectorias podemos encontrar una trayectoria que una A con A_n con diámetro menor que η. La imagen bajo s de tal trayectoria será una trayectoria en X a distancia ε de $s(A)$, y por tanto no puede pasar por el vértice; así, tal imagen se deberá quedar en una pata. Con esto, si $n > M_1$, $g_n(A_n), g_n(A \cup A_n)$ y $g_n(A)$ están en una misma pata, que es distinta a la pata que contiene a $s(A)$.

Pero por el lema 2.12, $g_n(A)$ y $s(A)$ deben estar en la misma pata para n suficientemente grande.

Así, hemos obtenido que para n suficientemente grande, $g_n(A)$ y $s(A)$ deben estar en la misma pata y además en patas distintas, una contradicción. $\square$

Teorema 2.16. $\Sigma(X)$ *es localmente conexo.*

Demostración. Sean $s \in \Sigma(X)$ y $\varepsilon > 0$. Por la proposición 2.15, existe $\delta < \varepsilon$ tal que si $g \in \Sigma(X)$ y $\rho(s, g) < \delta$, entonces para toda $A \in C(X)$ se tiene que $d(v, s(A)) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(v, g(A)) < \frac{\varepsilon}{2}$ o $s(A)$ y $g(A)$ están en la misma pata. Sean f_t un elemento de la trayectoria definida en la Observación 2.10 y $A \in C(X)$. Si $s(A)$ y g(A) están en la misma pata, entonces $d(s(A), f_t(A)) < \delta$; si $d(v, s(A)) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(v, g(A)) < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $d(s(A), f_t(A)) \leq d(s(A), v) + d(v, f_t(A)) \leq d(s(A), v) + d(v, g(A)) < \varepsilon$. De esta manera tenemos que $\rho(s, f_t) \leq \varepsilon$ para todo elemento f_t de la trayectoria que una a s y g.

Hemos obtenido pues, que todo punto s y $\varepsilon > 0$, existe vecindad arcoconexa V de s tal que $V \subset B(\varepsilon, s)$, donde $B(\varepsilon, s) = \{g : \rho(g, s) < \varepsilon\}$, o equivalentemente, que para todo abierto U que contenga a s, exite V vecindad arcoconexa de s tal que $V \subset U$.

Sea $W = \{g : \text{existe trayectoria que une } g \text{ y } s \text{ en } B(\varepsilon, s)\}$. Claramente s es un elemento de W, W es arcoconexo y $W \subset B(\varepsilon, s)$. Veremos que W es un conjunto abierto, sea $g \in W$, entonces existe vecindad arcoconexa V de g tal que $V \subset B(\varepsilon, s)$; sea $v \in V$, entonces existe una trayectoria que une a v y g en $B(\varepsilon, s)$ y otra que une a g con s en $B(\varepsilon, s)$, uniendo tales trayectorias, obtenemos una trayectoria que une a v con s, y que se queda en $B(\varepsilon, s)$, por tanto $V \subset W$, con lo cual W es un conjunto abierto de $\Sigma(X)$.

Así pues, $\Sigma(X)$ es localmente arcoconexo. $\square$

Ahora veremos que $\Sigma(X)$ es un retracto absoluto, para lo cual usaremos una construcción tipo Dugundji, como la vista en [6].

Para cada $n \in N$, sea $\Delta_n = \{(t_1, t_2, \ldots, t_n) : 0 \leq t_i \leq 1 \text{ y } \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\}$.

Definición 2.17. Un espacio Y tiene una *estructura convexa* si existe una función E, con dominio $\mathcal{M} = \cup_{n=1}^{\infty} Y^n \times \Delta_n$ y con contradominio Y, que tiene las siguientes propiedades:

1. $E((y, y, \ldots, y), (t_1, t_2, \ldots, t_n)) = y$,
2. $E((y_1, y_2, \ldots, y_n), (t_1, t_2, \ldots, t_n)) =$ $E((y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \ldots, y_{\sigma(n)}), (t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \ldots, t_{\sigma(n)}))$ para toda permutación $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$,
3. $E((y_1, y_2, \ldots, y_n), (t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, t_n)) =$ $E((y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n), (t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n))$,
4. E es continua en las t_i's.

Una estructura convexa nos será de utilidad para demostrar que $\Sigma(X)$ es un retracto absoluto, primero veamos que $\Sigma(X)$ tiene una estructura convexa.

Proposición 2.18. $\Sigma(X)$ *tiene una estructura convexa* E.

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \Sigma(X)$, $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \Delta_n$. Nuestro fin es definir una selección $E((s_1, \ldots, s_n), (t_1, \ldots, t_n))$, para eso, definiremos cómo se evalúa en cada $A \in C(X)$.

Sea
$$\mathcal{P} = \{P : P \text{ es pata de } X\}.$$

Tomemos A un sobcontinuo de X. Para cada $P \in \mathcal{P}$, sea
$$S_P = \sum \{t_i \|s_i(A)\| : i \text{ cumple que } s_i(A) \in P\}.$$

Recordemos que una suma vacía se define como 0.

Sean $P_{Max} \in \mathcal{P}$ tal que $S_{P_{Max}} \geq S_P$ para todo $P \in \mathcal{P}$ y sea $P_{max} \in \mathcal{P} \backslash \{P_{Max}\}$ tal que $S_{P_{max}} \geq S_P$ para todo $P \in \mathcal{P} \backslash \{P_{Max}\}$. Sea x el único elemento de la pata P_{Max} tal que $\|x\| = S_{P_{Max}} - S_{P_{max}}$, y definamos
$$E((s_1, \ldots, s_n), (t_1, \ldots, t_n))(A) = x;$$
cuando no existe un único P_{Max}, entonces hay selecciones $s_i(A)$ y $s_j(A)$ en patas distintas de X, con lo cual $v \in A$, y también tenemos que $S_{P_{max}} = S_{P_{Max}}$, por tanto x tiene norma 0, es decir, $x = v$; así pues, E está bien definida en este caso, pues no importa cómo elijamos P_{Max} y P_{max}, siempre tenemos que $x = v \in A$,.

Ahora veamos que en realidad x siempre es un punto de A: Sea j tal que $s_j(A)$ es la selección de A con mayor norma que está en la pata P_{Max}. Observemos que
$$\begin{aligned}
S_{P_{Max}} &= \sum \{t_i \|s_i(A)\| : i \text{ es tal que } s_i(A) \in P_{Max}\} \\
&\leq \sum \{t_i \|s_j(A)\| : i \text{ es tal que } s_i(A) \in P_{Max}\} \\
&\leq \|s_j(A)\| \sum \{t_i : i \text{ es tal que } s_i(A) \in P_{Max}\} \\
&\leq \|s_j(A)\|,
\end{aligned}$$

Supongamos que existe selección $s_k(A)$ que está es una pata distinta a $s_j(A)$, de aquí tenemos que $v \in A$, observemos que $0 \leq S_{P_{Max}} - S_{P_{max}} \leq \|s_j(A)\|$, por tanto $x \in vs_j(A)$; como v y $s_j(A)$ son elementos de A, entonces el arco $vs_j(A) \subset A$, así, $x \in A$.

Ahora supongamos que todas las selecciones $s_i(A)$ se quedan en la pata P_{Max}, sea k tal que $s_k(A)$ es la selección de A con menor norma, entonces

$$\begin{aligned} S_{P_{Max}} &= \sum\{t_i\|s_i(A)\| : i \text{ es tal que } s_i(A) \in P_{Max}\} \\ &\geq \sum\{t_i\|s_k(A)\| : i \text{ es tal que } s_i(A) \in P_{Max}\} \\ &\geq \|s_k(A)\| \sum\{t_i : i \text{ es tal que } s_i(A) \in P_{Max}\} \\ &\geq \|s_k(A)\|, \end{aligned}$$

pues $\{i : i \text{ es tal que } s_i(A) \in P\} = \{1, \ldots, n\}$. Entonces x es un elemento del arco $s_k(A)s_j(A) \subset A$, por tanto $E((s_1, \ldots, s_n), (t_1, \ldots, t_n))(A) \in A$.

Veamos ahora que para cada n, $s_1, \ldots, s_n \in \Sigma(X)$, $(t_1, \ldots, t_n) \in \Delta_n$, la función $E((s_1, \ldots, s_n), (t_1, \ldots, t_n)) : C(X) \to X$ es continua, por simplicidad, llamemos F a tal función. Sean

$$C_P(X) = \{A \in C(X) : \text{existe } L \text{ pata de } X \text{ tal que } A \subset L\},$$

$$C_0(X) = \{A \in C(X) : v \in A\}.$$

Observemos que $C_P(X)$ y $C_0(X)$ son subconjuntos cerrados de $C(X)$ que cubren a $C(X)$.

Primero veremos que F es continua en $C_P(X)$, sea $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión en $C_P(X)$ que converja a un subcontinuo $A \in C_P(X)$; entonces las definiciones de $F(A)$ y $F(A_m)$ son simplemente las combinaciones convexas normales en $\mathbb{R}^2$ de las selecciones $s_1(A), \ldots, s_n(A)$ y $s_1(A_m), \ldots, s_n(A_m)$, respectivamente, pues todos esos puntos viven en una misma pata. Como para toda $i = 1, \ldots, n$, $\lim_{m\to\infty} s_i(A_m) = s_i(A)$ en $\mathbb{R}^2$, entonces las combinaciones convexas $F(A_m)$ converjen a la combinación convexa $F(A)$, por tanto F es continua en $C_P(X)$.

Ahora veremos que F es continua en $C_0(X)$. Sea $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión en $C_0(X)$ que converja a un subcontinuo $A \in C_0(X)$. Sea $J = \{i : s_i(A) \neq v\}$. Sea $\varepsilon > 0$, por el lema 2.14, podemos tomar $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \in J$, $s_j(A_m)$ está en la misma pata que $s_j(A)$ si $m > M$, y además podemos pedir que $d(s_i(A_m), s_i(A)) < \varepsilon$ para toda $i = 1, \ldots, n$, $m > M$. Así, las definiciones auxiliares $S_{P_{Max}}$ y $S_{P_{max}}$ se mueven poco cuando pasamos de A a A_m si $m > M$, con lo cual $F(A_m)$ y $F(A)$ están muy cercanos. Así $E((s_1, \ldots, s_n), (t_1, \ldots, t_n))$ realmente es una selección de X.

Ahora veremos que E cumple con las 4 propiedades de la definición 2.17. Sean $n \in \mathbb{N}$, $s, s_1, s_2, \ldots, s_n \in \Sigma(X)$, $(t_1, \ldots, t_n) \in \Delta_n$ y $A \in C(X)$.

1. Si $s(A) = v$, entonces para cada $P \in \mathcal{P}$ se tiene que $S_P = 0$, por tanto $x = v$, es decir $E((s, \ldots, s), (t_1, \ldots, t_n))(A) = v = s(A)$.

   Si $s(A) \neq v$, entonces $P_{Max} = \|s(A)\|$ y $P_{max} = 0$, entonces $E((s, \ldots, s), (t_1, \ldots, t_n))(A) = s(A)$.

Así, hemos probado que $E((s,\dots,s),(t_1,\dots,t_n)) = s$.

2. Sea $\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ una permutación. Como la definición de S_P no depende del orden que tomemos el conjunto $\{s_i(A) : i = 1,2,\dots,n\}$, entonces $E((s_1,s_2,\dots,s_n),(t_1,t_2,\dots,t_n))(A) =$ $E((s_{\sigma(1)},s_{\sigma(2)},\dots,s_{\sigma(n)}),(t_{\sigma(1)},t_{\sigma(2)},\dots,t_{\sigma(n)}))(A)$.

3. Queremos calcular $x = E((s_1,\dots,s_n),(t_1,\dots,t_{j-1},0,t_{j+1},\dots,t_n))(A)$, y compararlo con $y = E((s_1,\dots,s_{j-1},s_{j+1},\dots,s_n),(t_1,\dots,t_{j-1},t_{j+1},\dots,t_n))(A)$. Como $t_j = 0$, la definición de S_P que usamos para definir

$$x = E((s_1,\dots,s_n),(t_1,\dots,t_{j-1},0,t_{j+1},\dots,t_n))(A)$$

no cambia si no tomamos en cuenta a $s_j(A)$, pues $t_j\|s_j(A)\| = 0$, así, la definición auxiliar S_P es igual cuando queremos definir

$$y = E((s_1,\dots,s_{j-1},s_{j+1},\dots,s_n),(t_1,\dots,t_{j-1},t_{j+1},\dots,t_n))(A),$$

por tanto $x = y$, como queríamos.

4. Continuidad en t_i's.

Sea $G : \Delta_n \times C(X)$ definida por $G(T,A) = E((s_1,\dots,s_n),T)(A)$. Veremos que G es una función continua.

Primero veamos que G es continua en $\Delta_n \times C_P(X)$. Cuando $A \in C_P(X)$, la definición de $E((s_1,\dots,s_n),T)(A)$ es simplemente la combinación convexa normal en $\mathbb{R}^2$ con respecto a T de $(s_1(A),\dots,s_n(A))$, entonces la función G es continua en $\Delta_n \times C_P(X)$.

Ahora veamos que G es continua en $\Delta_n \times C_0(X)$. Sea $A \in C_0(X)$, $T = (t_1,\dots,t_n) \in \Delta_n$ y $\varepsilon > 0$. Sean $\{S_P^A : P \text{ es pata de } X\}$, $S_{P_{Max}}^A$ y $S_{P_{max}}^A$ las contrucciones auxiliares con las cuales definimos $E((s_1,\dots,s_n),T)(A)$. Tomemos $J = \{i : s_i(A) \neq v\}$.

Supongamos que $S_{P_{Max}}^A > S_{P_{max}}^A$ y sea $\eta < \frac{\text{mín}\{S_{P_{Max}}^A - S_{P_{max}}^A, \varepsilon\}}{2n}$, que también cumpla $\|s_j(A)\| > \eta$ para todo $j \in J$.

Sea $\delta > 0$ tal que si $B \in C_0(X)$ y $H(A,B) < \delta$, entonces para todo $j \in J$, $s_j(A)$ y $s_j(B)$ están en la misma pata y $d(s_i(A),s_i(B)) < \eta$ para $i = 1,\dots,n$, con esto, si $s_i(A) \neq v$, entonces $s_i(B) \neq v$. Tomemos $R = (r_1,\dots,r_n) \in \Delta_n$ y sean $\{S_P^B : P \text{ es pata de } X\}$, $S_{P_{Max}}^B$, $S_{P_{max}}^B$ las contrucciones auxiliares con las cuales definimos $E((s_1,\dots,s_n),R)(B)$. Sea P pata de X, recordemos que $S_P^A = \sum\{t_i\|s_i(A)\| : s_i(A) \in P\}$ y $S_P^B = \sum\{r_i\|s_i(B)\| : s_i(B) \in P\}$. Tomemos j tal que $s_j(B) \in P$, si $j \in J$, entonces $s_j(A) \neq v$, y además $s_j(A)$ y $s_j(B)$ están en la misma pata; si $j \notin J$, entonces $s_j(A) = v$, con lo cual también $s_j(A) \in P$. Así, para cada pata P de X, $\{i : s_i(B) \in P\} \subset \{i : s_i(A) \in P\}$, y además si $s_i(A) \in P$ y $s_i(B) \notin P$, entonces $s_i(A) = v$. Así, si T y R están muy cercanos, entonces $t_i\|s_i(A)\|$ y $r_i\|s_i(B)\|$ distan no más de η para toda i, entonces S_P^A y S_P^B distan no más de $n * \eta$ para toda pata P de X, con lo cual

$S^A_{P_{Max}}$ está $\frac{\varepsilon}{2}$ cercano de $S^B_{P_{Max}}$ y más aún, P^A_{Max} es el mismo que P^B_{Max}. También $S^A_{P_{max}}$ está $\frac{\varepsilon}{2}$ cercano de $S^B_{P_{max}}$, entonces $E((s_1,\ldots,s_n),T)(A)$ y $E((s_1,\ldots,s_n),R)(B)$ están en la misma pata (P^A_{Max}) a distancia no más que ε, si R,T están muy cercanos y $H(A,B)<\delta$.

Ahora supongamos que $S^A_{P_{Max}} = S^A_{P_{max}}$, con lo cual $E((s_1,\ldots,s_n),T)(A) = v$. Usando los mismos argumentos que en el caso anterior, podemos obtener que S^A_P y S^B_P están $\frac{\varepsilon}{2}$ cercanos si $H(A,B)<\delta$ y R,T están muy cercanos, entonces $S^B_{P_{Max}}$ está ε cercano de $S^A_{P_{max}}$, por tanto $E((s_1,\ldots,s_n),R)(B)$ se queda ε cercano del vértice.

Así, G es continua, y por tanto $E((s_1,\ldots,s_n),(t_1,\ldots,t_n)) : C(X)\to X$ es continua en los t_i's.

□

Además, la estructura E tiene la siguiente propiedad.

Proposición 2.19. *Sean $s\in\Sigma(X)$ y $\varepsilon>0$, entonces existe $\eta>0$ tal que para toda n, $s_1,\ldots,s_n\in\Sigma(X)$, $T=(t_1,\ldots,t_n)\in\Delta_n$, si $\rho(s,s_i)<\eta$, entonces*

$$\rho(E((s,\ldots,s),T),E((s_1,\ldots,s_n),T))<\varepsilon.$$

Demostración. Supongamos lo contrario, entonces para cada $m\in\mathbb{N}$ existen n_m, $s^m_1,\ldots,s^m_{n_m}\in\Sigma(X)$ y $T^m=(t^m_1,\ldots,t^m_n)$ tal que $\rho(s,s^m_i)<\frac{1}{n}$ y

$$\rho(E((s,\ldots,s),T),E((s^m_1,\ldots,s^m_n),T))\geq\varepsilon;$$

esto quiere decir que existe $A_n\in C(X)$ tal que

$$d(E((s,\ldots,s),T)(A_n),E((s^m_1,\ldots,s^m_n),T)(A_n))\geq\varepsilon, \tag{2.3}$$

Sea m tal que $\frac{1}{m}<\varepsilon$, si todos los elementos $s^m_1(A_m),\ldots,s^m_{n_m}(A_m)$ se quedan contenidos en una pata, entonces $E((s^m_1,\ldots,s^m_{n_m}),T^m)(A_m)$ es simplemente la combinación convexa en $\mathbb{R}^2$ asociada a T^m de $(s^m_1(A_m),\ldots,s^m_{n_m}(A_m))$, es decir, $\sum_{i=1}^{n_m} t^m_i s^m_i(A_m)$; así

$$\varepsilon\leq d(E((s^m_1,\ldots,s_{n_m}),T^m)(A_m),s(A_m))<\frac{1}{m},$$

lo cual no tiene sentido, entonces existen j_m y k_m tales que $s^m_{j_m}(A_m)$ y $s^m_{k_m}(A_m)$ están en patas distintas, con esto $v\in A_m$. Observemos que $s^m_{k_m}\to s$ y que $s^m_{j_m}\to s$.

Tomando una subsucesión, podemos suponer que $\{A_m\}$ converge a un continuo $A\in C(X)$. Como $s_{k_m}\to s$ uniformemente y $A_m\to A$, entonces $s_{k_m}(A_m)\to s(A)$.

Supongamos que $s(A)\neq v$. Sea $\eta<d(v,s(A))$, y podemos suponer que $\eta<d(v,s^m_{k_m}(A_m))$ para toda m. Por la proposición 2.15, existe M tal que si $m>M$, entonces $s(A_m)$ y $s(A)$ están en la misma pata. Sea δ y $N>M$ tal que si $H(B,C)<\delta$, entonces $d(s(B),s(C))<\eta$, y si $m>N$, entonces

$d(s^m_{k_m}(B), s^m_{k_m}(C)) < \eta$. Sea $P > N$ tal que si $m > P$, entonces $H(A, A_m) < \delta$. Tomemos $m > P$, como en la demostración de la proposición 2.15, podemos conectar A con A_m con una trayectoria α de diámetro menor que δ, la imagen bajo s_{k_m} de tal trayectoria es una trayectoria de diametro menor que η, como en tal trayectoria está $s_{k_m}(A_m)$, y tal punto está a distancia mayor que η de v, entonces tal trayectoria se queda sólo en una pata, por tanto $s_{k_m}(A)$ está en la misma pata que $s_{k_m}(A_m)$. Por la proposición 2.12, $s(A)$ está en la misma pata que $s^m_{k_m}(A)$ para m suficientemente grande, que es la misma pata en la que está $s^m_{k_m}(A_m)$. Análogamente con j_m, $s(A)$ está en la misma pata que en la que está $s^m_{j_m}(A_m)$, una contradicción, pues $s^m_{k_m}(A_m)$ y $s^m_{j_m}(A_m)$ están en patas distintas.

Entonces podemos suponer que $s(A) = v$. Existe M tal que si $m > M$, entonces $d(v, s(A_m)) < \frac{\varepsilon}{4}$, sea $m > M$ tal que $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{4}$, entonces para $i = 1, \ldots, n_m$ $\rho(s, s^m_i) < \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{4}$, por tanto $d(s(A_m), s^m_i(A_m)) < \frac{\varepsilon}{4}$; así,

$$d(v, s^m_i(A_m)) \leq d(v, s(A_m)) + d(s(A_m), s^m_i(A_m)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

para $i = 1, \ldots, n_m$, entonces

$$d(v, E((s^m_1, \ldots, s^m_{n_m}), T^m)(A_m)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

como $d(v, s(A_m)) < \frac{\varepsilon}{4}$, tenemos que

$$d(s(A_m), E((s^m_1, \ldots, s^m_{n_m}), T^m)(A_m)) < \varepsilon,$$

una contradicción a (2.3).

Así, hemos obtenido una contradicción en todos los casos, y hemos acabado la demostración de la proposición. □

Ahora estamos listos para demostrar que $\Sigma(X)$ es un retracto absoluto, o lo que es lo mismo, un extensor absoluto métrico.

Teorema 2.20. *El espacio de selecciones del abanico suave X, $\Sigma(X)$ es un retracto absoluto.*

Demostración. Por [2, Theorem 9.1] esto es equivalente a probar que $\Sigma(X)$ es un extensor absoluto para espacios métricos. De manera que si (Z, d) es un espacio métrico, A un subconjunto cerrado de Z y $g : A \to \Sigma(X)$ es una función continua, sólo necesitamos probar que existe $G : Z \to A$ un afunción continua que extiende a g, (i. e. $G|_A = g$).

Dado $p \in Z - A$ definimos $B_p = \{z \in Z : d(p, z) < \frac{1}{2} d(p, A)\}$

Como $Z - A$ es métrico por [8, 5.1.3], es paracompacto y por tanto existe $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{J}'\}$ un refinamiento abierto localmente finito de $\{B_p : p \in Z - A\}$, esto es que:

(a) U_α es abierto para toda $\alpha \in \mathcal{J}$,

(b) para toda $p \in Z - A$ existe $\alpha \in \mathcal{J}$ y $q \in Z$ tal que $p \in U_\alpha \subset Bq$ y

(c) para toda $p \in Z - A$ existe un número finito $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathcal{J}$ tal que $B_p \cap U_{\alpha_i} \neq \emptyset$ y $B_p \cap U_\alpha = \emptyset$ para toda $\alpha \in \mathcal{J} \backslash \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$.

Por [8, 5.1.9] existe $\Phi = \{\phi_\alpha : \alpha \in \mathcal{J}\}$ una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$. Esto es que cada $\phi_\alpha : Z\backslash A \to [0,1]$ es una función continua que cumple con las siguientes propiedades:

(i) $\phi_\alpha^{-1}((0,1]) \subset U_\alpha$ y

(ii)para toda $x \in Z\backslash A$ existe existe un número finito $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathcal{J}$ tal que $\phi_{\alpha_i}(x) > 0$ y $\sum_{i=1}^n \phi_{\alpha_i}(x) = 1$.

Para cada $\alpha \in \mathcal{J}$, elegimos un punto $p_\alpha \in U_\alpha$ y un punto $a_\alpha \in A$ tales que $d(p_\alpha, a_\alpha) < 2d(p_\alpha, A)$.

Dado $p \in Z\backslash A$, vamos a definir $G(p)$ de la siguiente manera, sean $\alpha_1, ..., \alpha_n$ los elementos de $\mathcal{J}$ tales que $\phi_{\alpha_i}(x) > 0$, y por (ii), tenemos que $\sum_{i=1}^n \phi_{\alpha_i}(x) = 1$, para cada α_i hemos elegido $a_{\alpha_i} \in A$. Definamos

$$G(p) = E((g(a_{\alpha_1}), \ldots, g(a_{\alpha_n})), (\phi_{\alpha_1}(p), \ldots, \phi_{\alpha_n}(p)))$$

donde E es la estructura convexa definida en la proposición 2.18. Por la propiedad 2 de la definición 2.17, no importa el orden en que eligamos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, por tanto $G(p)$ está bien definida.

Ahora estamos listos para definir $G : Z \to \Sigma(X)$ de la siguiente manera:

$$G(p) = \begin{cases} g(p) & \text{si } p \in A \\ E(g(a_{\alpha_1}), ..., g(a_{\alpha_n}), \phi_{\alpha_1}(p), ..., \phi_{\alpha_n}(p)) & \text{si } p \in Z\backslash A \end{cases},$$

notemos que G es una función bien definida y extiende a g, veamos ahora que G es continua.

Afirmación 1. G es continua en $Z\backslash A$,

Tomemos un punto $p \in Z\backslash A$.

Sea U una vecindad de p en Z tal que:

(A) $U \cap A = \emptyset$,

(B) Existe un número finito $\alpha_1, ..., \alpha_n$ de elementos de $\mathcal{J}$ tal que $U \cap U_{\alpha_i} \neq \emptyset$.

Dada $q \in U$ por (i) y (ii) el conjunto $\{\alpha \in \mathcal{J} : \phi_\alpha(q) > 0\}$ es finito y está contenido en $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, además $\sum_{i=1}^n \phi_{\alpha_i}(q) = 1$.

Definamos una función $H : U \to \Sigma(X)$ por

$$H(q) = E((g(a_{\alpha_1}), \ldots, g(a_{\alpha_n})), (\phi_{a_{\alpha_1}}(q), \ldots, \phi_{a_{\alpha_1}}(q))),$$

esta función es continua, pues los elementos $g(a_{\alpha_i})$ están fijos, E es continua en la segunda coordenada y cada $\phi_{a_{\alpha_i}}$ es continua en U.

Ahora observemos que H y G son iguales en U. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{\alpha \in \mathcal{J} : \phi_\alpha(q) > 0\} = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\} \subset \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ con $m \leq n$, de manera que

$$\begin{aligned} H(q) &= E((g(a_{\alpha_1}), ..., g(a_{\alpha_n})), (\phi_{\alpha_1}(q), ..., \phi_{\alpha_m}(q), 0, \ldots, 0)) \\ &= E((g(a_{\alpha_1}), ..., g(a_{\alpha_m})), (\phi_{\alpha_1}(q), ..., \phi_{\alpha_m}(q))) \\ &= G(q). \end{aligned}$$

por la propiedad 3 de la definición 2.17.

Por tanto G es continua en $Z\backslash A$ y la afirmación 1 queda demostrada.

Afirmación 2. G es continua en $Fr_Z(A)$

Sean $a \in Fr_Z(A)$, y $\varepsilon > 0$, mostraremos que existe δ tal que si $p \in Z\backslash A$ y $d(p,a) < \delta$, entonces $\rho(G(p), G(a)) < \varepsilon$.

Observación 1. Por el Lema 2.19, dado $\varepsilon > 0$, y $g(a) \in \Sigma(X)$ existe $\eta > 0$ tal que para toda n, $\{s_i\}_{i=1}^n$ selecciones en $\Sigma(X)$, $(t_1, \ldots, t_n)$ con $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ si $\rho(g(a), s_i) < \eta$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$, entonces

$$\rho(E((s_1, \ldots, s_n), (t_1, \ldots, t_n)), E((g(a), ..., g(a)), (t_1, \ldots, t_n))) < \varepsilon.$$

Observación 2. Por la continuidad de g en a, dado $\eta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $d(x,a) < 9\delta$, entonces $\rho(g(x), g(a)) < \eta$.

Estamos listos para probar la continuidad de G en a; sea $p \in Z - A$ tal que

$$d(p,a) < \delta \tag{2.4}$$

recordemos que para toda $\alpha \in \mathcal{J}$ elegimos $p_\alpha \in U_\alpha$ y $a_\alpha \in A$ tal que

$$d(p_\alpha, a_\alpha) < 2d(p_\alpha, A) \tag{2.5}$$

Sea $\alpha \in \mathcal{J}$ tal que $\phi_\alpha(p) > 0$, entonces existe $q \in Z\backslash A$ tal que $p \in U_\alpha \subset B_q = \{x \in Z : d(q,x) < \frac{1}{2}d(q,A)\}$, entonces

$$d(p,q) < \frac{1}{2}d(q,A) \tag{2.6}$$

Como

$$d(q,A) \leq d(q,a) \leq d(q,p) + d(p,a) \tag{2.7}$$

Por (2.6) y (2.7) tenemos que

$$d(p,q) < \frac{1}{2}d(q,A) \leq \frac{1}{2}d(p,q) + \frac{1}{2}d(p,a) \tag{2.8}$$

De manera que por (2.4) y (2.8) deducimos que

$$d(p,q) < d(p,a) < \delta; \tag{2.9}$$

de (2.7) y (2.9) deducimos que

$$d(q,A) < 2\delta \tag{2.10}$$

Ahora notemos que para $y, z \in B_q = \{x \in Z : d(q,x) < \frac{1}{2}d(q,A)\}$ por (2.10)

$$d(y,z) \leq d(y,q) + d(q,z) < \frac{1}{2}d(q,A) + \frac{1}{2}d(q,A) < 2\delta \tag{2.11}$$

También notemos que $d(y,A) \leq d(y,q) + d(q,A)$ y por (2.8) y (2.9) tenemos que $d(q,A) \leq d(p,q) + d(p,a) < 2\delta$ y por (2.11) $d(y,q) < \delta$, tenemos que

$$d(y, A) \leq d(y, q) + d(q, A) < 3\delta \tag{2.12}$$

Notemos entonces que $d(a, a_\alpha) \leq d(a, p) + d(p, p_\alpha) + d(p_\alpha, a_\alpha)$ y por (2.4) $d(p, a) < \delta$, por (2.11) $d(p, p_\alpha) < 2\delta$ y por (2.5) $d(p_\alpha, a_\alpha) < 2d(p_\alpha, A)$, y por (2.12) $2d(p_\alpha, A) < 6\delta$de manera que

$$d(a, a_\alpha) \leq 3\delta + 2d(p_\alpha, A) < 9\delta \tag{2.13}$$

Sea $\{\alpha \in \mathcal{J} : \phi_\alpha(p) > 0\} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, tenemos que $\sum_{i=1}^n \phi_{\alpha_i}(p) = 1$

Como $d(p, a) < \delta$, entonces $d(a, a_{\alpha_i}) < 9\delta$ para toda i y por la Observación 2, $\rho(g(a_{\alpha_i}), g(a)) < \eta$.

Como

$$G(p) = E((g(a_{\alpha_1}), \ldots, g(a_{\alpha_n})), (\phi_{a_{\alpha_1}}(p), \ldots, \phi_{a_{\alpha_n}}(p)))$$

y

$$g(a) = E((g(a), \ldots, g(a)), (\phi_{a_{\alpha_1}}(q), \ldots, \phi_{a_{\alpha_n}}(q)))$$

entonces por la observación 1 tenemos que

$$\rho(G(p), g(a)) < \varepsilon,$$

por tanto hemos demostrado que G es continua en la frontera de A, como G extiende a g y g es continua en el interior de A, entonces G es continua en el interior de A.

Así pues, la función $G : Z \to \Sigma(X)$ es una función continua que extiende a la función $g : A \to \Sigma(X)$, con esto se demuestra que $\Sigma(X)$ es un extensor absoluto métrico, y por tanto un retracto absoluto. □

Ahora veremos que $\Sigma(X)$ es un espacio separable y completo. Recordaremos unos resultados clásicos sobre espacios de funciones.

Teorema 2.21. *Todo espacio métrico compacto es separable.*

El teorema anterior está en [8, 4.1.18].

Teorema 2.22. *Sea Y un espacio métrico compacto y Z un espacio métrico separable, entonces el espacio de funciones $\{f : Y \to Z : f$ es continua$\}$, dotado con la métrica de la convergencia uniforme, es separable.*

El teorema anterior se encuentra en [8, 4.2.18].

Teorema 2.23. *Sea Y un espacio métrico, entonces Y es separable si y sólo si Y es segundo numerable.*

El teorema anterior se encuentra en [8, 4.1.16].

Corolario 2.24. $\Sigma(X)$ *es separable.*

Demostración. $\Sigma(X)$ es un subespacio de $\mathcal{F} = \{f : C(X) \to X : f \text{ es continua}\}$, ahora, $C(X)$ es un espacio métrico compacto y X es un espacio métrico separable, entonces $\mathcal{F}$ es separable y por tanto segundo numerable. Claramente todo subespacio de un espacio segundo numerable es segundo numerable, entonces $\Sigma(X)$ es segundo numerable; como $\Sigma(X)$ es métrico, entonces $\Sigma(X)$ es separable. □

Teorema 2.25. *Sea Y un espacio topológico compacto y Z un espacio métrico completo, entonces $\{f : Y \to Z : f$ es continua$\}$, dotado con la métrica de la convergencia uniforme, es un espacio métrico completo.*

El teorema anterior se encuentra en [8, 4.3.13].

Teorema 2.26. $\Sigma(X)$ *es completo.*

Demostración. Veamos que $\Sigma(X)$ es un espacio cerrado de $\mathcal{F} = \{f : C(X) \to X : f \text{ es continua}\}$. Sea $\{s_i\}_{i=1}^{n}$ una sucesión en $\Sigma(X)$ convergente a una función s en $\mathcal{F}$. Sea $A \in C(X)$, queremos ver que $s(A) \in A$; como $\{s_i\}_i$ converge uniformemente a s, entonces $\{s_i(A)\}_i$ converge en X a $s(A)$, entonces $s(A) \in A$, pues $s_i(A) \in A$ para todo i, y A es cerrado.

Ahora, sea $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\Sigma(X)$, como $\mathcal{F}$ es completo, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f_i \to f$ uniformemente. Como $\Sigma(X)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{F}$, entonces $f \in \Sigma(X)$, por tanto $\Sigma(X)$ es completo. □

Así pues, en esta tesina hemos demostrado que el espacio de selecciones de un abanico suave, dotado con la métrica de la convergencia uniforme, es un espacio métrico completo separable, no compacto, contraíble, localmente arcoconexo, y además un retracto absoluto. Todas estas características las comparte con el espacio l_2.

Puede ser posible que el espacio $\Sigma(X)$ sea homeomorfo a l_2, para eso se necesitan herramientas técnicas sofisticadas, como la caracterización dada por Toruńczyk en [9].

Bibliografía

[1] A. Illanes: *Hiperespacios de Continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos (28), Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[2] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr: *Hiperspaces, Fundamentals and Recents Advances*, Pure and Applied Mathematics 216, Marcel Dekker, Inc, New York, 2004.

[3] R. Cauty: *L'espace des selections d'une dendrite*, Preprint.

[4] C. Eberhart: *A note on smooth fans*, Colloq. Math. 20(1969) 89-90.

[5] J. van Mill: *Infinite dimensional topology: prerequisites and introduction*, North-Holland, Amsterdam, 1989.

[6] M. Lynch: *Whytney levels in $C_p(X)$ are ARs*, Proc. Amer. Math. Soc. 98(1986), 748-750.

[7] J. Dugundji: *Topology*, Wn. C. Brown Publishers, 1989.

[8] R. Engelking: *General Topology - Revised and completed ed.*, Berlin: Heldermann, 1989.

[9] H. Toruńczyk: *Characterizing Hilbert space topology*, Fund. Math., 111 (1981), 247-262.

Índice alfabético