



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“CONVEXOS DE PESOS PARTICULARES SOBRE
CONJUNTOS DE PUNTOS ETIQUETADOS”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MATEMÁTICO

P R E S E N T A
JOEL DAVID ROJAS AVELLA

DIRECTORES DE TESIS: DR. RUY FABILA MONROY
DR. JORGE URRUTIA GALICIA

México, D.F.

AGOSTO 2009.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

<p>1. Datos del alumno Apellido paterno Apellido materno Nombre(s) Teléfono Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Carrera Número de cuenta</p>	<p>1. Datos del alumno Rojas Avella Joel David 56 66 25 85 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 4 0504625 2</p>
<p>2. Datos del tutor Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>2. Datos del tutor Dr. Ruy Fabila Monroy</p>
<p>3. Datos del sinodal 1 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>3. Datos del tutor Dr. Jorge Urrutia Galicia</p>
<p>4. Datos del sinodal 2 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>4. Datos del tutor Dr. José Galaviz Casas</p>
<p>5. Datos del sinodal 3 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>5. Datos del tutor Dr. Hernán González Aguilar</p>
<p>6. Datos del sinodal 4 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>6. Datos del tutor Dr. Marco Heredia Velazco</p>
<p>7. Datos del trabajo escrito. Título Subtitulo Número de páginas Año</p>	<p>7. Datos del trabajo escrito. Convexos de pesos particulares sobre conjuntos de puntos etiquetados. Estudio de islas particulares. 80 2009</p>

A mi madre

Agradecimientos

Ante todo, a mi familia. A mis padres, decir gracias nunca será suficiente. A mis hermanas, las amo. A mis abuelos, no bastan las palabras para expresar lo que ustedes representan para mí. A mis tíos; Isaac Avella, por la paciencia de todos estos años; Julio Rojas, por la enorme confianza; Margarita Durán, por el mutuo apoyo. A Luz María, más que familia, amiga.

A mis amigos, Adrián y Gabo; tan suyo como mío este título, y lo saben. Diego y Juanelo –partícipe indiscutible de los azares que me hicieron terminar en la Universidad–; todo un honor haber iniciado la carrera a su lado. A mis parejas, Elizabeth, Catalina, Pilar; por su todo amor, apoyo, comprensión, paciencia. . . mi eterno agradecimiento. Diana y Jimena. Iza y Sam. Claudia. A Laura, gracias haber sufrido esto conmigo, tan tuya como mía esta tesis.

A mis profesores. A aquellos de quienes, a través de los años, su influencia permanece en mí; Victoria, Sergio, Nancy, Soledad, Blanca Rosa. A Ana Irene, por la motivación y el apoyo. (¡y claro que terminé!). A Jorge Urrutia, por la invaluable guía y ejemplo; y muchas clases más así, por favor, maestro. A César Guevara, sin cuya ayuda y referencias haber terminado este trabajo hubiera representado un camino más largo. A mis sinodales, José Galaviz, Marco Heredia y particularmente a Hernán González; por sus pacientes lecturas y deferencia con mi trabajo. Agradezco especialmente a Pablo Padilla, por la confianza y el compañerismo.

Gracias a todos los que dejé explícitamente fuera de la lista –sin querer, claro– y de un modo u otro me acompañaron o apoyaron en la carrera.

Así pues, finalmente, y no por eso menos, sino precisamente *mucho* más importante, a quién podrá ser, o no, el mejor tutor de tesis, pero que sin ningún lugar a duda es el idóneo; Ruy Fabila; imposible haber terminado esto sin ti, hermano. Gracias.

Paz y amor a todos.

Índice general

1. Introducción	7
2. Preámbulo	9
2.1. El planteamiento correcto de un problema	9
2.2. Conjuntos de puntos	11
2.2.1. Posición general	11
2.2.2. Sobre conjuntos convexos	13
2.3. Orden de crecimiento asintótico	14
2.4. Geometría computacional	15
2.5. Teoría aditiva de números	16
2.6. Combinatoria	17
3. Geometría computacional	19
3.1. A modo de introducción	19
3.1.1. El inicio histórico	19
3.1.2. Sobre la imposibilidad y posibilidad de ciertos problemas	21
3.1.3. El estudio de la complejidad	22
3.1.4. La geometría como sistema de representación del mundo real	23
3.2. Geometría combinatoria	25
3.3. El problema a tratar	28
3.4. Proyecciones	30
3.5. Permutaciones con tercias de peso adecuado	32
3.6. Algoritmo para identificar intervalos	39

3.7. Resultados estadísticos	40
4. Teoría de Números	43
4.1. Introducción	43
4.1.1. Hacia la teoría aditiva	44
4.2. $Q(n)$	46
4.3. $P(n)$	47
4.4. Una fórmula para $P(n, 3)$	50
4.5. Relación entre $P(n)$ y $Q(n)$	54
4.6. Aplicaciones	55
5. Algoritmos aleatorios	59
5.1. Preámbulo	59
5.2. Generar una permutación aleatoria	60
5.3. Análisis estadístico	63
6. Convexos, bandas y pesos	65
6.1. Intervalos distintos	67
6.2. Bandas	69
7. Conclusiones y trabajo posterior	73

Índice de figuras

2.1.	La línea horizontal puede tocar a un vértice y cambiar la paridad, sin embargo, sigue en la misma región.	10
2.2.	Ejemplos de configuraciones de puntos en posición general . .	12
2.3.	Ejemplos de conjuntos en \mathbb{R}^2	13
2.4.	Casquete convexo de un conjunto de puntos.	14
2.5.	Diagrama de Ferrer de una partición para $n = 20$	17
3.1.	El diagrama de Voronoi para los puntos p y q	24
3.2.	Un acomodamiento hexal visto desde arriba.	26
3.3.	Acomodamiento hexal de dos niveles	27
3.4.	Un polígono simple y cerrado en una retícula.	28
3.5.	Ejemplo de puntos en posición general etiquetados del 1 al n	29
3.6.	Puntos proyectados sobre una recta.	30
3.7.	Los puntos i y j invierten su posición en la proyección.	31
4.1.	Diagrama de Ferrer para una partición de $n = 20$	50
4.2.	Diagrama de Ferrer de la partición de $n = 20$ y su conjugado.	51
6.1.	La suma de todos los puntos menos la unidad no siempre realizable.	66
6.2.	Ejemplo de un peso al interior del casquete convexo pero con una partición de dicho número repartida en el casquete. . . .	66
6.3.	Permutación sobre el círculo y el intervalo I_x para un elemento x de la permutación.	68

- 6.4. Un convexo formado de tomar la banda de peso $i + j + 1$ en un conjunto de n puntos. 70

Capítulo 1

Introducción

Dada una colección de puntos en el plano, se define y trabajará alrededor del concepto de isla, esto, cuidando las restricciones clásicas que, por simplicidad, se requieren del problema (posición general, convexidad, etcétera).

Se parte de la postulación de un problema abierto (encontrar una isla de peso $2n$). Se toma dicho problema y se intenta atacar con todas las herramientas a nuestro alcance.

Para cada área y perspectiva utilizada en el desarrollo del trabajo se intenta presentar un planteamiento elemental de las principales ideas de cada área, la perspectiva histórica básica y porqué es que se trabaja en la dirección elegida.

En el primer capítulo se hace una revisión de las definiciones que será necesario tener a la mano en los subsecuentes capítulos. En el segundo capítulo se comienza ya con el cuerpo del tratado del problema, la exposición básica de ideas en torno a la Geometría Computacional y su justificación, además de presentar una primera idea sobre la resolución: las proyecciones a partir de un punto externo al conjunto de puntos. El tercer capítulo presenta la aproximación realizada mediante Teoría Aditiva de los Números. El cuarto capítulo versa sobre la utilización de un algoritmo aleatorio básico para la si-

mulación del problema. El quinto y último capítulo expone el resultado que garantiza la existencia de bastantes pesos sobre una permutación lo que, hasta cierto punto, justifica el camino que se ha seguido y da la solución aproximada que mediante sucesiones circulares se le puede dar al problema.

Capítulo 2

Preámbulo

A lo largo del presente trabajo será necesario referirse a conceptos de distintas áreas de las matemáticas. Damos a continuación las definiciones, ideas y conceptos básicos que se utilizarán en las siguientes secciones.

2.1. El planteamiento correcto de un problema

Un algoritmo implementado en una computadora exige métodos de representación finitos sobre el problema que se abstrae para su resolución; esto, pues las computadoras son de recursos finitos (memoria, tiempo de ejecución. . .), por ejemplo, no siempre se representan números reales con toda la precisión en la computadora, se opta en cambio por una aproximación en los casos en que esto no sea posible.

Como en este sencillo ejemplo, para la representación discreta de un problema geométrico también se presentan casos particulares que requieren de un manejo más cuidadoso. Cada problema tiene ciertos “casos” que requieren de mayor atención por referirse a configuraciones muy particulares de los elementos con que se trabaja. A estos casos se les llama casos degenerados.

Consideremos, por ejemplo, el problema de decidir si un punto se en-

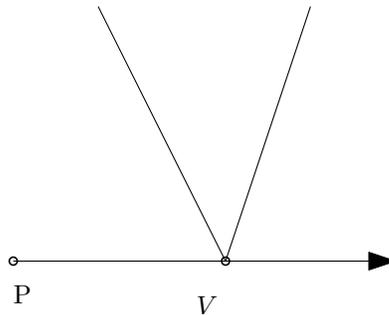


Figura 2.1: La línea horizontal puede tocar a un vértice y cambiar la paridad, sin embargo, sigue en la misma región.

cuentra dentro de un polígono. Para resolverlo existe el llamado “Algoritmo de Paridad”. Tomamos la semirecta horizontal que comienza en el punto y contamos el número de intersecciones con el polígono; si el número de intersecciones es impar, el punto está adentro, en caso contrario estará afuera.

Imaginemos, sin embargo, que la semirecta horizontal interseca a un vértice. Así, aunque se dé un cambio de paridad (dado que se interseca al polígono), no necesariamente nos ofrece el estado correcto en el que se encuentra el punto.

El conjunto de casos degenerados es proporcional a la variedad de factores que hay que considerar para la complejidad en el desarrollo de un algoritmo; es decir, la eficiencia algorítmica se complica o tiende a inconsistencias al tratar los casos degenerados.

Además, cuando viene la implementación, dichos casos degenerados pueden resultar costosos en tiempo de programación, compilado y mantenimiento.

El modo en el que se manejan computacionalmente las colecciones de puntos exige una representación finita (por las mismas limitaciones del equipo de cómputo) para realizar cálculos como, por ejemplo, calcular el área de una región, que podría realizarse mediante una triangulación y la suma del

área de los triángulos resultantes. El caso en el que tres puntos se encuentren alineados nos llevaría a una eventual no definición de algunos parámetros, o la necesidad de extenuar la cantidad de casos a tratar y con esto, las decisiones a tomar. Esto nos lleva a que se presenten al menos dos familias de problemas: en los que se permitirían dicho tipo de configuraciones y en las que no.

Dentro de la Geometría Computacional, la hipótesis bajo la que se trabaja para evitar los casos degenerados que al presente trabajo interesan se llama *posición general* y será dada a tratar en la siguiente sección.

2.2. Conjuntos de puntos

Al abordar un área de investigación, la delimitación del campo de trabajo es elemental. Dentro de la Geometría Computacional y dentro del análisis del problema que se realizará al completo largo del presente trabajo, nos referiremos a colecciones **finitas** de puntos en el plano.

2.2.1. Posición general

Para efectos del presente trabajo, en colecciones de puntos, optaremos por no considerar el caso en el que tres o más de ellos se encuentran sobre la misma línea.

En general, en \mathbb{R}^d , suele requerirse que no existan $d + 1$ puntos para un conjunto tales que todos ellos vivan en un subespacio afín de dimensión $d - 1$ (hiperplano). En lo sucesivo, se trabajará en \mathbb{R}^2 , el espacio en el que se encuentra el planteamiento del problema, dando pie así a la primera definición:

Definición 2.2.1. *Un conjunto de puntos S en \mathbb{R}^2 se encuentra en **posición general**, si y sólo si, cualesquiera tres puntos en S no están sobre una misma línea recta.*

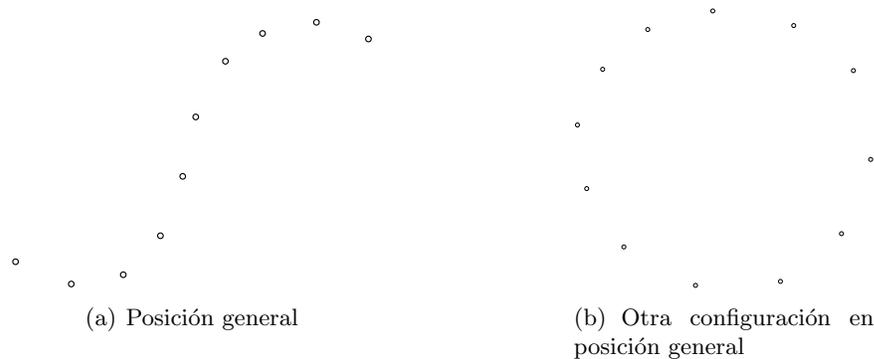


Figura 2.2: Ejemplos de configuraciones de puntos en posición general

La posición general se usa por una razón: simplicidad

Al tomar la representación ideal de un objeto geométrico, tal como una colección de puntos, la abstracción y representación de dicho objeto se realizaría en base a la descripción puntual de sus elementos. Se puede imaginar y concebir en un espacio ideal un círculo de radio π y la precisión en la expansión decimal con que se expresaría la longitud del radio podría ser infinita, como infinitas son las cifras en representación decimal de π ; pero si se quisiera pasar esta información a una computadora, cuyas capacidades de descripción son finitas, la limitación luce evidente.

En la computadora sólo tenemos una cantidad limitada de valores disponibles, ante tal carencia, tiene sentido considerar que se trabaja con datos “degenerados”, por ejemplo, dos puntos que en la vida real podrían encontrarse más cerca que lo que nuestro sistema de representación reconociera, pasarían a quedar reconocidos en la misma posición.

Así, como se decidió que por simplicidad se trabajará con puntos en posición general, para fines computacionales se puede tomar dicha asunción con tranquilidad, ya que para toda colección de puntos S en el plano, existe una colección de puntos S' , tal que S' se encuentra en posición general y que queda lo bastante cerca de la original para que se mantenga la configuración.

Mediante una técnica llamada Simulación de Simplicidad se puede perturbar a los objetos geométricos (en este caso los puntos) lo suficiente para, precisamente, simular la simplicidad que requieren los pasos algorítmicos, mas no demasiado como para que cambien las posiciones no degeneradas de los objetos.

Dicha técnica viene de un artículo de Edelsbrunner y Mücke [EM88], y aunque no sea el objetivo de este trabajo explicarla profusamente, si es importante mencionar que la representación computacional de la geometría no adolece al respecto.

2.2.2. Sobre conjuntos convexos

Es necesario referir también la siguiente definición geométrica.

Definición 2.2.2. *Un objeto $A \subset \mathbb{R}^2$ se dice que es convexo, si para cualquier par de puntos $x, y \in A$, el segmento de recta que une x e y se encuentra contenido en A .*

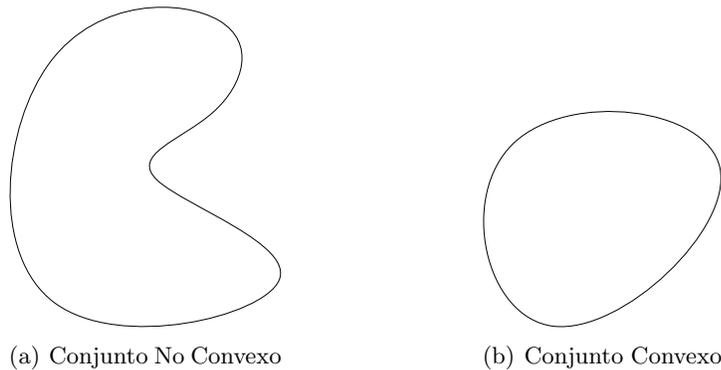


Figura 2.3: Ejemplos de conjuntos en \mathbb{R}^2 .

Podemos pasar ahora a definir *cierre* o *cerradura convexa*:

Definición 2.2.3. *El cierre o cerradura convexo de un conjunto de puntos S en \mathbb{R}^2 es la intersección de todos los conjuntos convexos cerrados que*

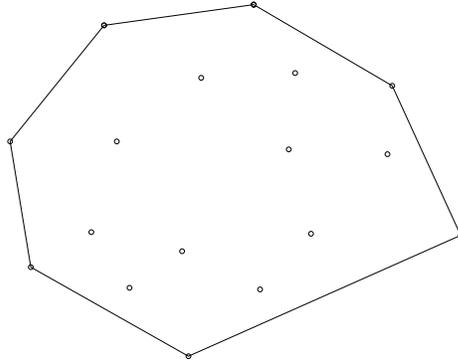


Figura 2.4: Casquete convexo de un conjunto de puntos.

contienen a S .

Es decir, intuitivamente el cierre convexo de un conjunto de puntos es el convexo “más pequeño” que contiene a la colección de puntos.

Dentro del abordaje del problema, características e información importantes nos las dan los puntos que viven en la frontera del cierre convexo. Lo cual, conduce a:

Definición 2.2.4. *El casquete convexo de un conjunto S es la frontera del cierre convexo y se denotará por $CC(S)$.*

Con esto, quedan cubiertas las definiciones necesarias sobre conjuntos de puntos.

2.3. Orden de crecimiento asintótico

El orden de crecimiento del tiempo de ejecución de un algoritmo, dado en función de la entrada de los datos, nos da una caracterización de la eficiencia de un algoritmo y nos permite comparar el desempeño asintótico (en cuanto a número de operaciones que tenga o en cuanto a capacidad de memoria que requiera) contra otros algoritmos.

El orden de crecimiento asintótico queda delineado por la siguiente:

Definición 2.3.1. Para una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se denota por

- $O(g(n))$ al conjunto de funciones $O(g(n)) = \{f(n) : \text{existen constantes positivas } n_0 \text{ y } c, n_0, c \in \mathbb{R}, \text{ tales que } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ para toda } n \geq n_0\}$
- $\Omega(g(n))$ al conjunto de funciones $O(g(n)) = \{f(n) : \text{existen constantes positivas } n_0 \text{ y } c, n_0, c \in \mathbb{R}, \text{ tales que } 0 \geq f(n) \geq cg(n) \text{ para toda } n \geq n_0\}$
- $\Theta(g(n))$ al conjunto de funciones $O(g(n)) = \{f(n) : \text{existen constantes positivas } n_0 \text{ y } c_1 \text{ y } c_2, n_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \text{ tales que } c_1g(n) \leq f(n) \leq c_2g(n) \text{ para toda } n \geq n_0\}$

La definición anterior se traduce en una idea simple: el comportamiento cualitativo asintótico de una función polinomial lo dicta el término de mayor grado.

El hecho de que además se admita que la función $g(n)$ pueda ser multiplicada por una constante c en la definición de la $O(g(n))$, coloca en un mismo orden ($O(x^n)$) a funciones que lucen tan distintas como $(1+x)^n$ y $nx^n + (n-1)x^{n-1} + \dots + 2x^2 + x$, pero cuya tendencia cuando n se vuelve muy grande, sigue siendo fuertemente dominada por el término x^n .

Para una referencia y un tratamiento más profundo, remítase a [ea90].

2.4. Geometría Computacional

En la enunciación del problema a tratar, referimos el concepto de isla debido a Ferrán Hurtado [Hur]:

Definición 2.4.1. Para un conjunto de puntos S , una isla i es un subconjunto (no necesariamente propio) de puntos de S tal que al tomar el cierre convexo CC_i de la isla, $CC_i \cap S = i$

Es decir, una isla es un conjunto de puntos tales que su cierre convexo contiene a dicha selección de puntos y solamente a esa.

Para poder tratar y referenciar a los puntos, estos se etiquetan con números naturales. Es importante recalcar que dicha numeración puede ser arbitraria, pero se suele trabajar con la de los primeros n naturales cuando la cantidad de puntos en S es de n .

Usaremos también lo siguiente:

Definición 2.4.2. *Dada una isla, el peso de la isla queda definido como la suma de las etiquetas de sus elementos.*

Dentro de esta tesis se estudiará la realización de ciertas islas con pesos particulares.

2.5. Teoría Aditiva de Números

Por la naturaleza del problema, consideraciones sobre teoría aditiva de números son naturales.

Definición 2.5.1. *Una partición de un entero positivo n es la representación de n como la suma de enteros positivos.*

Dada la definición de partición se observa que un mismo número n tiene varias particiones (todos salvo el 1). Las partes (elementos de la partición) son escritas usualmente en orden no ascendente, pero el orden es ignorado, dado que dos sumas que difieren en el orden de los sumandos, son consideradas como la misma partición.

Definición 2.5.2. *En teoría aditiva de números:*

- *La **función partición** $P(n)$ representa el número de posibles particiones de un número n entero positivo.*

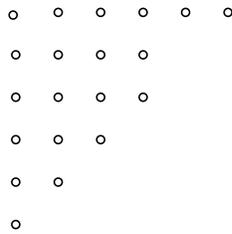


Figura 2.5: Diagrama de Ferrer de una partición para $n = 20$.

- La **función partición** $Q(n)$ será el número de particiones de n , entero positivo, en sumandos distintos entre sí.

Finalmente:

Definición 2.5.3. *Un diagrama de Ferrer será la representación de una partición como un patrón de puntos. La n -ésima fila presentará la misma cantidad de puntos que el n -ésimo número de la partición.*

Los diagramas de Ferrer serán particularmente útiles al visualizar el desarrollo de ciertas demostraciones sobre particiones.

Y con ellos se puede dar fácilmente la siguiente definición.

Definición 2.5.4. *La partición conjugada de una partición para un entero positivo n será aquella partición en la que su representación con diagrama de Ferrer tenga intercambiadas las columnas por filas –y viceversa– de la partición original.*

2.6. Combinatoria

Para la parte combinatoria se tomarán en cuenta un par de observaciones elementales que surgen a partir de la definición de las *combinaciones de n en k* .

Definición 2.6.1. Dado un entero no negativo n y un entero k , las combinaciones de n en k son la cantidad de subconjuntos de tamaño k en un conjunto de n elementos y se denota

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ si } n \leq k \leq 1$$

y

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ si } k < 0 \text{ o } k > n$$

en donde $n!$ denota al factorial de n .

Será necesario considerar posteriormente este par de observaciones.

Proposición 1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Que se sigue directamente de la definición de combinación.

Proposición 2 (Relación de recurrencia).

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Demostración. Igualmente se sigue de la definición de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\ &= \left(\frac{n!(k+1)}{k!(n-k)!(k+1)} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-(k+1))!(n-k)} \right) \\ &= \left(\frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \right) \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Geometría computacional

3.1. A modo de introducción

Al principio Dios creó el cielo y la tierra. Creó la luz, el día y la noche, separó las aguas de la tierra, creó las plantas, el firmamento, los animales y al hombre y descansa al séptimo día [gen]. Dentro de esta creación, el orden fue estricto y la precisión preponderante. Cuando el hombre se civiliza y desarrolla la suficiente capacidad de percibir y aprehender el orden en las formas, lo llama geometría.

Al respecto se puede dudar y/o polemizar de Dios y la creación, pero difícilmente de ese orden. De la geometría se desprenden históricamente las ideas del cuerpo sobre el que se cierne la matemática moderna: la axiomatización.

3.1.1. El inicio histórico

La notoriedad de la geometría es relevante incluso previo al avance que el axiomatizar representó. Es, por excelencia, gran parte de la herencia científica que las antiguas culturas legaron. Los egipcios, griegos y mayas la desarrollan aplicadamente y encuentran en ella la herramienta para tasar adecua-

damente los impuestos de las tierras y erigir sus construcciones.

Además, es un campo de las matemáticas en el que la intuición abunda, y la comprensión y resolución de los problemas planteados se encuentran aún dentro de la capacidad de comprensión de gente no necesariamente especializada. Prueba de esto es la gran cantidad de demostraciones que gente *no matemática* ha realizado de un teorema tan famoso como el de Pitágoras.

Es Euclides, en el siglo II a.d.n.e., quien atiende a la cita que la historia de las matemáticas le tenía preparada y desarrolla su principal contribución en la exposición de un método axiomático de demostración. Desarrolla además la *construcción Euclidiana*, un esquema que consiste en un algoritmo y su demostración, y cumple con lo que se espera de un algoritmo: sin ambigüedad, correcto y siempre finaliza.

Históricamente y a partir de ahí, la geometría continúa su desarrollo sobre los pasos de las construcciones y demostraciones en base a los axiomas euclidianos y muchas ideas que continuamente completarían y renovarían la perspectiva del área, sin embargo, la resolución de problemas matemáticos atendiendo a la construcción de algoritmos que los resuelvan queda estancada por bastante tiempo.

Junto con lo que haría Descartes en el siglo XVII, la aportación de Euclides es trascendental en el sentido operativo, por presentar una serie de axiomas como operaciones básicas, y las herramientas de la regla y el compás como los instrumentos con los que se realizarán las construcciones.

Sabido es de más que René Descartes propone el uso de un sistema coordinado como método de representación geométrico. La aportación de Descartes es tan trascendental como la de Euclides porque implica la equivalencia de muchos problemas geométricos como problemas algebraicos, y con esto, la capacidad de abstracción y cómputo se diversifica y aumenta.

3.1.2. Sobre la imposibilidad y posibilidad de ciertos problemas

Es aquí donde dos brechas de las matemáticas que no participaban una de la otra toman por fin un camino común. Existían problemas que desde su proposición permanecían abiertos (v.g. la trisección del triángulo) y la existencia de su solución comenzaba a dudarse, lo que proponía ahora el problema de demostrar que justamente dicha solución no existía.

En el álgebra, Gauss en 1799 demuestra el teorema fundamental del álgebra, en el que garantiza la existencia de soluciones para cualquier ecuación algebraica de grado n . No hay duda de la existencia de soluciones, pero todos los matemáticos hasta antes del siglo XIX habían fallado en encontrar un método para obtener las raíces de una ecuación en base a los coeficientes de ésta y combinaciones de ellos con operaciones elementales si el grado de la ecuación era mayor a 4.

Ruffini, Abel y Galois son los encargados de emprender el camino hacia la demostración de que dicho problema no tenía solución, generando una revolución en el álgebra. Uno de los ejemplos de la aplicación de tal avance es la demostración de la imposibilidad de algunas construcciones geométricas, caracterizando completamente los problemas para los que se puede generar una construcción geométrica mediante un número finito de pasos y haciendo ver que problemas como construir un heptágono regular no cumplen con tal caracterización.

Sin embargo también se había caminado en el sentido contrario, Gauss demostró que un p -ágono regular es construible para p primo, si y sólo si, p es un número de Fermat, es decir,

$$p = 2^{2^n} + 1.$$

Se demostró la constructibilidad de dicho problema, pero nunca se trató so-

bre el modo más fácil de realizarla o de los instrumentos con que se realiza y si se podría reducir el número de pasos.

3.1.3. El estudio de la complejidad

Así pues, las construcciones geométricas según el sistema axiomático de Euclides son realizadas tradicionalmente con regla y compás, lo que no las hace precisamente breves y el número de pasos requerido para terminarlas puede ser comparativamente grande en función de la información sobre la que se parte (¡Euclides resolvió el problema de los círculos de Apolonio en 508 pasos! El hecho de que solamente es necesario dar los centros y radios de las circunferencias evidencía la complejidad).

Ciertos matemáticos después de Euclides tenían el pasatiempo de ir encontrando construcciones que cada vez fueran más sencillas, pero es en 1902 cuando, al fin, Emile Lemoine reescribe los axiomas euclidianos como: 1) Colocar una pierna del compás en un punto, 2) Colocar una pierna del compás sobre una línea, 3) Producir un círculo, 4) Colocar la regla en un punto dado y 5) Producir una línea. Y con esta reescritura, llama “simplificidad” al número necesario de operaciones que resuelven una construcción. Lemoine trabaja en tratar de reducir la cantidad de pasos necesarios para las construcciones geométricas.

La idea de Lemoine, aunque muy aproximada ya a nuestra idea de complejidad, no toma en cuenta la cantidad de datos que se recibe, más aún, dicha pregunta no era tomada muy seriamente durante la primera mitad del siglo XX y no es sino hasta la aparición de las computadoras que toma la relevancia que tiene hoy en día.

3.1.4. La geometría como sistema de representación del mundo real

Habiendo trabajado sobre la demostración de la existencia o no de ciertas construcciones geométricas y considerar después la “simplicidad” de dicha construcción ya representa un avance significativo. Sin embargo, buscar algoritmos que procuren la solución correcta de un problema, nos lleva a unificar criterios sobre las instancias particulares de cada versión del problema (distancias, cantidad de puntos, *et cetera*) y tratarlos como las variables de entrada. Es en base a ellas que, con la cantidad de operaciones realizadas, se maneja la complejidad del algoritmo.

Al trasladar a una computadora un problema del mundo real se debe de tener en consideración que las capacidades de cómputo por parte de la máquina son finitas. Todo lo que se ha mencionado hasta ahora no es sino el camino recorrido para llegar a representar y resolver computacionalmente problemas para los cuales la solución sea tan importante como el método para obtenerla y el tiempo en el que se obtiene.

Para ejemplificar, considérese la siguiente situación. Un individuo se encuentra en una ciudad y requiere hacer una llamada desde un teléfono público. En el supuesto de que el individuo conociera su posición en la ciudad y la posición de los teléfonos públicos en ella, el individuo desearía ir al más cercano. Teniendo un mapa en el que se señalaran dichas posiciones, la ciudad quedaría subdividida en regiones para cada teléfono público, cada una de las cuales sería la porción de la ciudad para la cual el teléfono en cuestión es el más cercano posible.

Asignemos entonces a cada punto p del plano las coordenadas (p_x, p_y) . Recordemos que la distancia euclidiana entre dos puntos es

$$d(p, q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2},$$

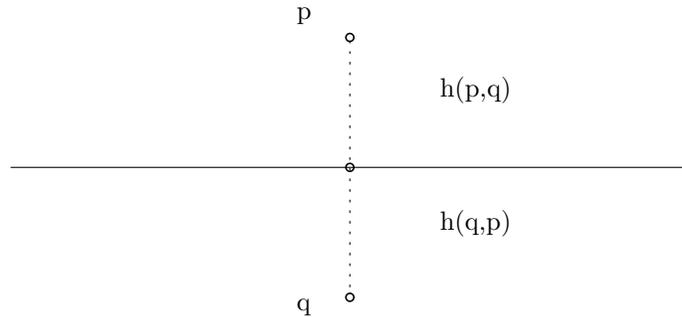


Figura 3.1: El diagrama de Voronoi para los puntos p y q

y tomemos a $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ un conjunto de n puntos los cuales serán las ubicaciones de los teléfonos. Usaremos entonces una herramienta matemática conocida como diagrama de Voronoi de P y será la subdivisión del plano en n regiones tales que si tengo un punto p' en la región correspondiente al punto p_i , $d(p', p_i) \leq d(p', p_j)$, con $p_j \in P$ e $i \neq j$.

Si nos fijamos en las regiones en las que queda partido el plano considerando solamente dos puntos p y q , tendríamos que la línea que separa al plano con la condición requerida es el bisector de la línea que une a los puntos p y q . El plano queda partido entonces en dos semiplanos, al que contiene a p lo llamaremos $h(p, q)$ y al que contiene a q , $h(q, p)$. Si denotamos $\mathcal{V}(p)$ a la region del plano que corresponde a p , tenemos lo siguiente.

Observación 1. $\mathcal{V}(p_i) = \bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} h(p_i, p_j)$.

Así, la pregunta inmediata sería,

Problema 1. *Dado un punto p' y un conjunto de puntos P , obtener el diagrama de Voronoi de p' .*

Entonces, la solución del problema es construir adecuadamente las regiones que resultan de las intersecciones de los semiplanos, productos a su vez, de las combinaciones en parejas del punto p' con el resto. El problema ha sido resuelto computacionalmente y se puede referir a distintos libros

de Geometría Computacional en los que se demuestra y exhibe que existe un algoritmo que resuelve el problema con $O(n \log n)$ operaciones y requiere $O(n)$ en capacidad de memoria cuando n es el número de puntos.

Así, se parte de un problema propuesto en el mundo real (acudir al teléfono más cercano), se abstrae en un sistema de representación (el sistema de coordenadas cartesianas) de un espacio matemático bien definido en el cual podemos trabajar con operaciones básicas (el sistema axiomático de Euclides) y se resuelve en una cantidad finita de pasos exhibiendo la solución (construyendo el diagrama de Voronoi) dado un caso con instancias particulares. El sistema de representación del mundo real a través de la geometría queda por tanto, bien construido.

Se debe reconocer que el espíritu de las matemáticas nunca ha sido plenamente pragmático, y gran parte de su desarrollo ha sido gracias a que el hombre mantiene un continuo cuestionamiento acerca de sus bases y los límites que puede alcanzar. La Geometría Computacional trata los problemas geométricos cuando además de su solución, es necesario responder acerca de su computabilidad y la fehacibilidad de esta. Sin embargo, es un área que mantiene una simbiosis constante y evidente con problemas del mundo real.

3.2. Geometría combinatoria

La Geometría Combinatoria es –valga la redundancia– la combinación de los principios de las áreas de la Geometría y la Combinatoria. También puede quedar entendida como el área encargada de caracterizar a los objetos geométricos en términos de propiedades de subconjuntos finitos, es decir, las combinaciones y arreglos de objetos geométricos y las propiedades discretas de estos.

Los albores de la Geometría Combinatoria se pueden remontar hasta 1611 cuando Kepler enuncia la formulación de un problema sobre empaque-

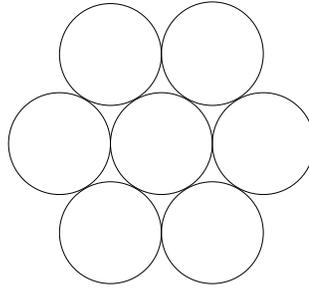


Figura 3.2: Un acomodamiento hexal visto desde arriba.

tamientos.

Problema 2 (Kepler). *Considerando un conjunto de esferas del mismo radio ¿Cuál es el empaquetamiento más denso (no necesariamente periódico) con respecto al volumen?*

Kepler conjetura que el empaquetamiento hexal (con densidad $\pi/(3\sqrt{2}) \simeq 74\%$) en el que las esferas se agolpan tangencialmente es el óptimo. Es decir, teniendo el total de las esferas ya empaquetadas, podríamos visualizar este empaquetamiento como el hacinamiento de niveles cada uno de los cuales forma una aglomeración hexagonal en un plano.

Si visualizáramos desde una posición vertical uno de estos niveles formarían un patrón como el de la figura 3.2.

Al ir apilando los niveles, el acomodo se realiza de tal modo que los mismos niveles aprovechen los huecos que van quedando de colocar en posición hexal a las esferas. Cada nivel formaría un patrón hexagonal pero reacomodado de manera que la altura también se minimice, es decir, no irían esfera sobre esfera, sino cada esfera sobre otras tres.

Si visualizáramos desde una posición vertical el apilamiento de dos niveles, se formaría un patrón como el de la figura 3.3, en donde las circunferencias de trazo interrumpido representan a las esferas del segundo nivel.

En 2002, Hales propone la demostración a partir de una verificación

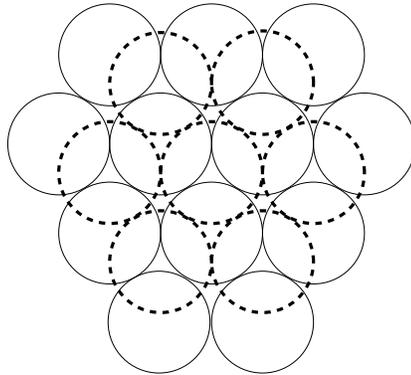


Figura 3.3: Acomodamiento hexal de dos niveles

computacional [Hal02], sin embargo la cantidad de información contenida en ella es ingente, a tal punto que la revisión de la prueba no se ha terminado, aunque se está seguro en un 99% de su correctez.

Un problema en el cual ya se observa una enunciación más parecida a la que presentan los problemas en el área hoy en día sería el teorema de Pick [Cox69], para el cual se trabaja con polígonos en una retícula entera.

Teorema 1. *Sea A el área de un polígono simple cerrado con sus vértices en la retícula, B el número de puntos de la retícula sobre las aristas del polígono, e I el número de puntos al interior del polígono, entonces,*

$$A = I + \frac{1}{2}B - 1.$$

Como se ve, la información tratada es meramente sobre propiedades discretas de los objetos (número de esferas por volumen, o número de puntos de la retícula al interior del polígono).

La Geometría Combinatoria tuvo un avance y un impulso notable durante el siglo XX, con Paul Erdős como su principal promotor.

La Geometría Computacional trata sobre problemas enunciados en términos de objetos geométricos básicos y sus propiedades discretas, buscando

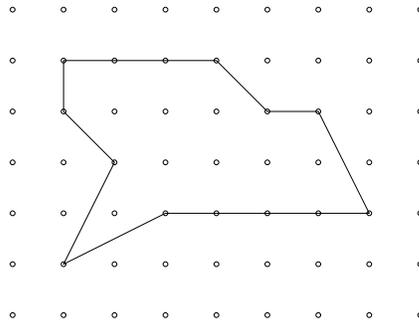


Figura 3.4: Un polígono simple y cerrado en una retícula.

desarrollar algoritmos y estructuras de datos como solución al problema, importando a su vez, la complejidad y correctez de estos.

Así, la frontera entre la Geometría Computacional y la Geometría Combinatoria queda un tanto desdibujada ante la naturaleza de los problemas que interesan a una y a otra. Antes de intentar buscar la solución a un problema, es sensato cuestionarse acerca de la existencia de la solución, y una vez demostrada la existencia de un elemento geométrico, tiene sentido cuestionarse acerca del método de su construcción. Para un estudio más completo sobre ambas materias, se sugiere acudir a libros especializados como [Pre85] y [dBea00].

El trabajo de investigación que se realizó para esta tesis, giró en torno a una idea simple: el estudio de la existencia, y en dado caso, la computabilidad de islas con pesos particulares para conjuntos de puntos.

3.3. El problema a tratar

Sea S un conjunto de puntos en posición general etiquetados con valores $1, 2, \dots, n$, si se quisiera dar un algoritmo para hallar y construir islas convexas con un cierto peso dado, sería necesario analizar primero qué valores son siempre construibles y qué valores no.

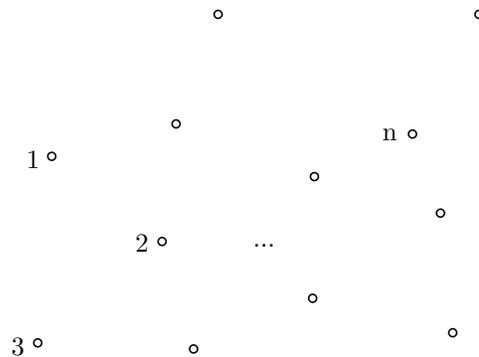


Figura 3.5: Ejemplo de puntos en posición general etiquetados del 1 al n

Es inmediato ver que todo el conjunto de valores $\{1, 2, \dots, n\}$ es fácilmente construible: si se desea al conjunto con peso i , $i = 1, \dots, n$, entonces se busca al punto que ha sido etiquetado con dicho número, y dado que cada punto es una isla, resulta inmediato.

Los siguientes valores siempre garantizables son el conjunto $\{n+1, n+2, \dots, 2n-1\}$ a estos se les construye tomando parejas de puntos que sumen lo deseado. El modo más fácil de verlo es tomar al punto n y unirlo con algún otro del conjunto $\{1, \dots, n-1\}$ con una línea, como suponemos posición general (ningún otro punto residirá sobre la línea que una cualesquiera dos) cualquier par de vértices es una isla.

Así, siguiendo con el análisis, la pregunta correspondiente sería: ¿Qué valores a partir de $2n-1$ son siempre construibles? Claramente, otro caso fácilmente reconocible es $\binom{n+1}{2}$, el de la suma de todos los puntos, dado que el conjunto mismo de puntos S es una isla; pero fuera de él, la respuesta resulta ser poco clara, por lo que queda propuesto el siguiente:

Problema 3 (Sakai, 2007). *Sea S un conjunto de n puntos en posición general “suficientemente grande”, con puntos etiquetados $1, 2, \dots, n$. ¿Tal conjunto siempre contiene una isla de peso exactamente $2n$?*

Sea pues, este, el problema a tratar.

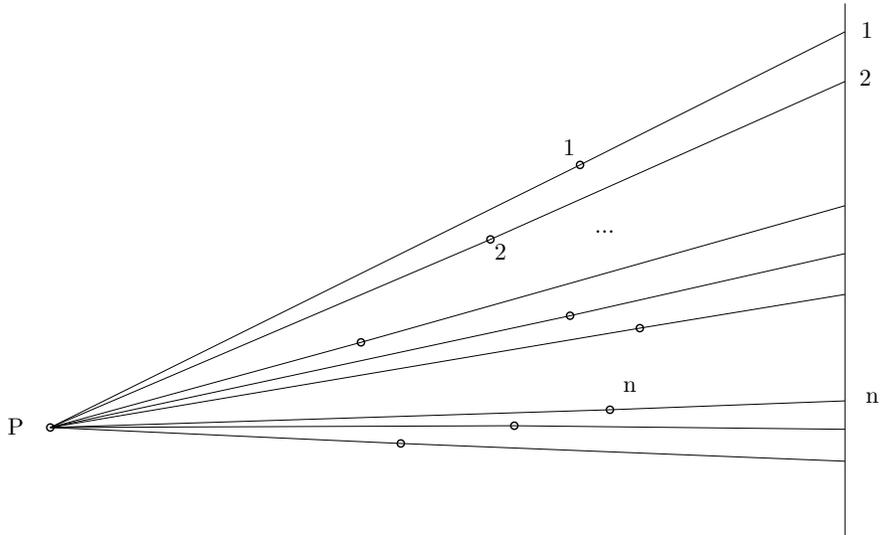


Figura 3.6: Puntos proyectados sobre una recta.

El análisis se puede comenzar directamente en \mathbb{R}^2 , pero las dificultades resultan al poco. Sin embargo, existe una simplificación del problema que ayuda a obtener, al menos, una idea sobre la existencia de las islas de cierto peso.

3.4. Proyecciones

Considérese a S el conjunto de puntos que se desea manejar en el plano. Desde alguna posición fuera del cierre convexo, se escoge un punto P de tal forma que no quede alineado con cualesquiera dos del conjunto y una recta *del otro lado del conjunto* sobre la que se proyectarán los puntos.

La proyección de los puntos sobre la línea escogida y desde el punto P , genera una permutación de los números del 1 al n , la cual varía dependiendo de la posición del punto P desde el cual se proyectó. Si se escogiera un intervalo de elementos en la permutación, de tal forma que los elementos del intervalo sumaran el peso deseado, en particular $2n$, entonces se podría dar

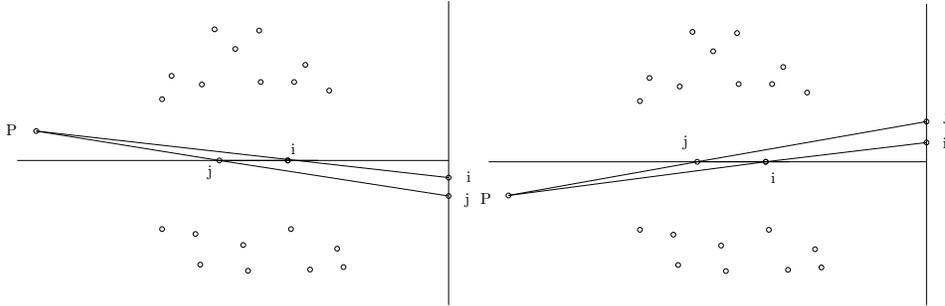


Figura 3.7: Los puntos i y j invierten su posición en la proyección.

como conjunto convexo al conjunto que queda encerrado entre las líneas de proyección de los extremos del intervalo con el punto P .

Dos proyecciones generan permutaciones distintas si se encuentran en distintas posiciones con respecto a alguna línea que una dos puntos del conjunto S . De hecho, el orden de los puntos en la permutación proyectada se invierte si se pasa de un lado a otro de la recta que une a los puntos en cuestión. Así como el orden de tres puntos en la permutación proyectada igualmente queda determinado por la posición del punto de proyección P con respecto a las rectas que formen por parejas los puntos; y sucesivamente con mayor cantidad de puntos. Entonces, la cantidad de permutaciones posiblemente generables queda en función de las rectas que formen por parejas los puntos del conjunto y las regiones en las que estas partan al plano.

Dados n puntos en posición general en el plano, el número de rectas que se puede tomar por parejas es $\binom{n}{2}$. Además, el máximo número de regiones en las que n líneas pueden dividir al plano son $N(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$. Si con esto se calculara el número máximo de regiones en el que un conjunto de puntos en el plano lo divide con rectas, tendríamos $O(n^4/2)$ regiones. Comparado asintóticamente $n^4/2$ con el número total de permutaciones $n!$, $n^4/2$ resulta ser considerablemente más chico. Es decir, las permutaciones que se pueden generar con proyecciones son asintóticamente muy pocas en

comparación con las totales.

Además, después de esto, aún hay que buscar, dentro de la permutación proyectada, un intervalo de peso $2n$, el cual, no toda permutación tiene. Tómese por ejemplo la permutación de $n = 10$ elementos $(5,1,2,3,4,9,8,7,6,10)$.

¿Qué motivaría por tanto esta dirección? La cantidad de permutaciones con intervalos de peso $2n$.

3.5. Permutaciones con tercias de peso adecuado

Enlístense (como se muestra a continuación) todas las tercias con suma de sus elementos igual a $2n$ que se pueden ir generando por orden.

$$\begin{array}{ccc}
 1 & n & n-1 \\
 1 & n-1 & n \\
 \\
 2 & n & n-2 \\
 2 & n-1 & n-1 \\
 2 & n-2 & n \\
 \\
 3 & n & n-3 \\
 3 & n-1 & n-2 \\
 3 & n-2 & n-1 \\
 3 & n-3 & n \\
 \\
 \dots & \dots & \dots \\
 \\
 n & n & 0 \\
 n & n-1 & 1 \\
 n & n-2 & 2 \\
 \dots & \dots & \dots \\
 n & 0 & n
 \end{array}$$

Para todo número par p se genera una tercia en la que se repite el número $n - p/2$ en la segunda y tercera posición, las cuales se descontarán. Ahora, contando las tercias válidas que se van generando para cada $i, 1 \leq i \leq n$, y salvo un número constante de casos a omitir (cuando para un número i

lo suficientemente grande, este sale repetido en la lista de las tercias en el segundo sitio –y por ende en el tercero pero en el sentido contrario de orden– lo que ocurre a lo más 2 veces por cada i grande) el conteo de las tercias sigue, en general, el siguiente patrón:

i	# de tercias
1	2
2	2
3	4
4	4
...	...
$n - 1$	n
n	n

Entonces:

$$2 + 2 + 4 + 4 + \dots + n + n = (2 + 4 + \dots + n) + (2 + 4 + \dots + n) =$$

$$= 2 \left(2 \left(\sum_{k=1}^{n/2} k \right) \right) = n \left(\frac{n}{2} + 1 \right)$$

Si se denota con T al conjunto de tercias que suman $2n$, $O(\#T) = \frac{n^2}{2}$.

Por cada tercia de peso $2n$, las permutaciones que la contienen se generan del siguiente modo: se consideran n huecos con los que se llenará con números la permutación; a cada tercia se le puede colocar en $n - 2$ posiciones distintas y el resto de los huecos se llena con alguna permutación de los $n - 3$ números restantes. En cuentas, sacando la proporción de las permutaciones que contienen alguna tercia de peso $2n$ con todas las permutaciones generables se obtiene:

$$\frac{n(\frac{n}{2} + 1)(n - 2)(n - 3)!}{n!} = \frac{\frac{n}{2} + 1}{n - 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

Denótese por P_3 al conjunto de todas las permutaciones que se han contado con tercia de peso $2n$ (de esta manera), y por $P_3(i)$ al conjunto de permutaciones que contienen exactamente a i tercias de peso $2n$. Del conteo previo, el conjunto de las permutaciones que contienen dos tercias $P_3(2)$, ha sido contado 2 veces, el conjunto de las permutaciones que contienen 3 tercias $P_3(3)$ fue contado 3 veces, y así sucesivamente, de modo que:

$$P_3 = P_3(1) + 2P_3(2) + 3P_3(3) + \dots + kP_3(k) + \dots$$

Para eliminar el sobreconteo, se estimará primero la cantidad del conjunto de permutaciones que contienen dos tercias con suma $2n$, se estimará después la cantidad del conjunto que contiene tres, cuatro y así consecutivamente el caso en general, cuando se tienen i tercias con suma $2n$ al interior de la permutación.

En el primer caso, hay $n(\frac{n}{2} + 1)$ posibles elecciones para cada una de las dos tercias, $n - 2$ posiciones para colocar a la primera, $n - 5$ para colocar a la segunda y $n - 6$ huecos para permutar al resto de los números. En cuentas, sacando la proporción de las permutaciones que contienen dos tercias con todas las permutaciones generables se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{n(\frac{n}{2} + 1)n(\frac{n}{2} + 1)(n - 2)(n - 5)(n - 6)!}{n!} &= \frac{n(\frac{n}{2} + 1)(\frac{n}{2} + 1)}{(n - 1)(n - 3)(n - 4)} = \\ &= \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})}{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{3}{n})(1 - \frac{4}{n})} \simeq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

El caso para las permutaciones con i tercias es análogo. Por simplicidad, la cantidad de tercias de peso $2n$ se considera de orden $\frac{n^2}{2}$. Tenemos enton-

ces, $\frac{n^2}{2}$ posibilidades de escoger cada una, luego se irán acomodando según se vayan colocando en las posiciones que queden disponibles y se termina permutando el resto de los elementos que no formaron parte de las tercias. En cuentas, sacando la proporción de las permutaciones que contienen i tercias con todas las permutaciones generables, se obtiene:

$$\frac{\left(\frac{n^{2i}}{2^i}\right) \prod_{k=1}^i (n - 3k + 1)(n - 3i)!}{n!} = \frac{\left(\frac{n^{2i}}{2^i}\right)}{\prod_{\substack{k \neq n-3l+1 \\ k > n-3i}} (n - k)}$$

con $1 \leq l \leq i$. Tanto arriba como abajo hay i elementos, entonces

$$\frac{\left(\frac{n^{2i}}{2^i}\right)}{\prod_{\substack{k \neq n-3l+1 \\ k > n-3i}} (n - k)} = \frac{\left(\frac{1}{2^i}\right)}{\prod_{\substack{k \neq n-3l+1 \\ k > n-3i}} \left(1 - \frac{k}{n}\right)} \simeq \frac{1}{2^i}$$

con $1 \leq l \leq i$.

Se conoce entonces la cantidad proporcional de permutaciones con i tercias de peso $2n$.

Antes de seguir con el desarrollo, se considerarán dos proposiciones que ayudarán a demostrar lo consecutivo.

Proposición 3. Para $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = 1$$

Demostración. Para demostrarlo, se divide en casos

- n par. Se recurre a la proposición 2.

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \dots + \binom{n}{n-1} - \binom{n}{n}$$

se descomponen los primeros $n - 1$ términos según la proposición:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = \\ & = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} - \binom{n-1}{1} - \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} - \dots + \\ & \quad - \binom{n-1}{n-3} - \binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1} - \binom{n}{n} \end{aligned}$$

pero $\binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{n}$, entonces:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{0} = 1.$$

- n impar. Se recurre a la proposición 1.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} &= \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \dots + \binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \\ &= \binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \binom{n}{n} = 1. \end{aligned}$$

Lo que termina la demostración. \square

Proposición 4. Para $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$:

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{n^i} = \frac{n-1}{n^2-1}$$

Demostración. Para demostrarlo nótese lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{n^i} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^6} + \dots \\ &= \frac{n-1}{n^2} + \frac{n-1}{n^4} + \frac{n-1}{n^6} + \dots = \sum_1^{\infty} \frac{n-1}{n^{2i}} = \\ &= (n-1) \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{2i}} \end{aligned}$$

En el último elemento de la igualdad se encuentra una serie geométrica a la que le falta el primer elemento de su suma;

$$\begin{aligned} (n-1) \left(\sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)^i - \left(\frac{1}{n^2} \right)^0 \right) &= (n-1) \left(\sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)^i - 1 \right) = \\ &= (n-1) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}} - 1 \right) = (n-1) \left(\frac{n^2}{n^2-1} - \frac{n^2-1}{n^2-1} \right) = \\ &= \frac{n-1}{n^2-1} \end{aligned}$$

Lo que termina la demostración. □

Consideremos ahora el proceso de sumar las permutaciones con k tercias dentro de ellas, alineando la suma por columnas del siguiente modo:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{2} & \binom{1}{1}P_1 + \binom{2}{1}P_2 + \binom{3}{1}P_3 + \binom{4}{1}P_4 + \binom{5}{1}P_5 + \binom{6}{1}P_6 + \dots & \\
-\frac{1}{4} & -\binom{2}{2}P_2 - \binom{3}{2}P_3 - \binom{4}{2}P_4 - \binom{5}{2}P_5 - \binom{6}{2}P_6 - \dots & \\
\frac{1}{8} & \binom{3}{3}P_3 + \binom{4}{3}P_4 + \binom{5}{3}P_5 + \binom{6}{3}P_6 + \dots & \\
-\frac{1}{16} & -\binom{4}{4}P_4 - \binom{5}{4}P_5 - \binom{6}{4}P_6 - \dots & \\
\frac{1}{32} & \binom{5}{5}P_5 + \binom{6}{5}P_6 + \dots & \\
-\frac{1}{64} & -\binom{6}{6}P_6 - \dots &
\end{array}$$

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{2^i} \qquad P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + \dots$$

El primer renglón se refiere al primer conteo total que ya se había realizado de las permutaciones con al menos una terna, el segundo renglón resta el sobreconteo que se realizó de las permutaciones con dos ternas adecuadas. Sin embargo, al restar este sobreconteo, igualmente se quitan las permutaciones con tres ternas adecuadas, las que son de nuevo agregadas y se comienza a alternar entonces entre sumar las permutaciones de cantidad impar y restar las de cantidad par.

Después, el lado derecho de la suma se obtiene por la proposición 3, y con la proposición 4 se llega a que:

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{2^i} = \frac{2-1}{2^2-1} = \frac{1}{3}$$

Así que la proporción de permutaciones con al menos una terna de peso $2n$ es de $\frac{1}{3}$.

Para contar las permutaciones que contienen una cuarteta con peso $2n$

se procede de manera similar, sin embargo, el nivel de las cuentas aumenta en complejidad considerablemente.

3.6. Algoritmo para identificar intervalos

De tenerse una permutación, algorítmicamente ¿cómo se podría identificar si esta permutación tiene un intervalo de un determinado peso w ?

Para responder eso se tiene el siguiente algoritmo:

Considerando a P como una permutación de los primeros n números naturales, como p_k al k -ésimo elemento de la permutación, y a $w > 0$ como el peso de intervalo buscado:

```

INTERVALO( $P, w, i, j$ )
1   $i \leftarrow 0$ 
2   $j \leftarrow 0$ 
3   $p_i \leftarrow 0$ 
4   $p_j \leftarrow 0$ 
5   $S \leftarrow 0$ 
6  while( $S < w$ )
7       $j = j + 1$ 
8       $S = S + p_j - p_i$ 
9   $j = j + 1$ 
10  $S = S + p_j - p_i$ 
11 if( $S = w$ )
12     return 1
13 else
14     while( $S > w$ )
15          $i = i + 1$ 
16          $S = S + p_j - p_i$ 
17      $i = i + 1$ 
18      $S = S + p_j - p_i$ 
19     if( $S = w$ )
20         return 1

```

```

21     else
22         if(j=n)
23             return 0
24     else
25         INTERVALO( $P, w, i, j$ )

```

Grosso modo, lo que el algoritmo hace es ir corriendo dos índices, uno derecho y otro izquierdo, sobre la permutación y va realizando las sumas acumuladas de los elementos de la permutación que se encuentran entre los dos índices. Se corre primero el índice derecho, si se encuentra el peso buscado devuelve un 1, si la suma acumulada supera al peso buscado, comienza a correr el otro índice hasta que sucedan cualesquiera tres cosas: se encuentre el peso buscado; el valor de la suma acumulada sea menor al peso buscado y, entonces, el índice derecho siga corriendo; o bien, si se ha llegado con el índice derecho al último elemento de la permutación, se devuelve un 0.

Los índices solamente recorren una vez los valores de la permutación cada uno, por lo que el algoritmo es de tiempo lineal.

3.7. Resultados estadísticos

Utilizando este algoritmo, se realizaron muestras sobre permutaciones para ver si contenían un intervalo de peso $2n$. Se corrió para todas las posibles permutaciones de hasta 12 elementos. Para permutaciones de más allá de 13 elementos, el tiempo de ejecución comienza a ser considerablemente mayor y no operante, esto debido al crecimiento tan grande que tiene la función factorial (la cual nos indica el número de permutaciones totales).

El conteo de permutaciones se realiza en la siguiente tabla, $I(2n)$ se refiere a un intervalo de peso $2n$

n	sin $I(2n)$	con $I(2n)$	$n!$
1	1	0	1
2	2	0	2
3	0	6	6
4	12	12	24
5	28	92	120
6	265	455	720
7	2388	2652	5040
8	18230	22090	40320
9	171380	191500	362880
10	1776438	1852362	3628800
11	20127503	19789297	39916800
12	249508413	229493187	479001600

Con esto, las propociones quedan del siguiente modo:

n	sin $I(2n)$	con $I(2n)$
1	1	0
2	1	0
3	0	1
4	0.5	0.5
5	0.23	0.77
6	0.37	0.63
7	0.47	0.53
8	0.45	0.55
9	0.47	0.53
10	0.49	0.51
11	0.5	0.5
12	0.52	0.48

Así, al menos hasta las permutaciones de 12 elementos, se observa tangi-

blemente que existe una proporción positiva de permutaciones que contienen un intervalo de peso $2n$. Obviamente considerar los casos para un número de elementos tan bajo en una permutación no aporta más que confirmación empírica de lo que esperamos, sin embargo, más adelante se presentará otra confirmación empírica con la que se calculará la proporción de permutaciones con un $I(2n)$ para permutaciones con un número mayor de elementos a través de algoritmos aleatorios.

Capítulo 4

Teoría de Números

4.1. Introducción

La teoría de números se entiende, en principio, como el estudio o tratado de los números naturales. Los primeros resultados se remontan a la época clásica de los griegos y como la geometría, es un área para la cual las ideas y conceptos fundamentales bastan para al menos comprender el planteamiento de una gran cantidad de problemas sobre los que se investiga.

El salón de la fama de la teoría de números tiene entre sus filas a personajes que se remontan hasta Euclides y pasan por Diofanto de Alejandría, Pierre Fermat, Euler, Dirichlet, Legendre, Riemman, Ramanujan... La lista se podría extender bastante y no es lo que se pretende, sin embargo, en ella se habría de incluir a Gauss, quien opinara que si bien “La matemática es la reina de las ciencias, la teoría de números en la reina de las matemáticas”.

Dada la naturaleza de nuestro sistema numérico, el estudio de los números naturales da pauta para preguntarse por la relación entre los números con respecto a las operaciones elementales con que se cuenta.

El resultado elemental más conocido, y que quizá representa una de las cartas de presentación no sólo de la teoría de números, sino de las ma-

temáticas enteras, es el teorema fundamental de la aritmética: todo entero N mayor que 1 puede descomponerse en factores primos de manera única. Los números primos comparten una propiedad elemental, y dado el teorema fundamental de la aritmética, su importancia resalta de manera natural. Esto podría llevar a pensar que el estudio de los números naturales se reduce al estudio de los números primos.

Aún cuando sí, la investigación y el desarrollo de la teoría se encuentren preponderantemente sustentados en el estudio de los números primos, queda aún la pregunta que se podría hacer en otra dirección elemental, i.e. sobre la representación de un número n como el resultado de la suma de otros números naturales; o más formalmente, expresar a n como la suma de enteros a_i , elementos de un conjunto A en los naturales.

En este sentido, y debido a las propiedades mismas de la suma, no existe un teorema tan representativo como lo hay para el producto. La representación de un número n como sumandos no es única y no se conoce una propiedad notable que puedan tener los números con respecto a la suma como la primalidad lo es con respecto al producto. Esto, que aunque en principio podría lucir restrictivo o limitante, en realidad abre la oportunidad a que la participación del área combinatoria de las matemáticas se manifieste plenamente. Y al área de la teoría de números dedicada a la pregunta en cuestión se le llama teoría aditiva de los números.

4.1.1. Hacia la teoría aditiva

Es en 1770 que Lagrange resuelve el siguiente problema que había sido propuesto por Diofanto, que se consolida como el problema arquetípico y además el más importante en la teoría y se enuncia como teorema.

Teorema 2 (Lagrange). *Cada entero no negativo es la suma de a lo más cuatro cuadrados.*

Como se dijo, nos fijamos en que un número n se exprese como la suma de elementos de un conjunto A , a ese conjunto A , formalmente hablando, se le llama la *base aditiva de orden h* si cada entero no negativo puede ser escrito como la suma de h elementos (no necesariamente distintos) de A . El teorema de Lagrange nos dice que los cuadrados son una base aditiva de orden cuatro. Si tomamos un número natural finito h , entonces a A se le llama *base aditiva de orden finito* y es ahí sobre lo que descansa gran parte de la teoría aditiva de números: en el estudio de bases aditivas de orden finito.

Dos bases aditivas clásicas que llevan a los problemas más famosos son las potencias de los números naturales (cuadrados, cubos, *et cetera...*) y los números primos.

De la primera podemos referir al problema que, igualmente en 1770, Edward Waring propusiera al respecto.

Problema 4. *Para todo entero $k \geq 2$, las potencias k -ésimas no negativas forman una base de orden finito.*

Por ejemplo, todo número es la suma de a lo más cuatro cuadrados, o 9 cubos, o 19 números de potencia 4, *et cetera*. La demostración a este problema fue dada por Hilbert en 1909. Y es a partir de ahí que se conoce como el teorema de Hilbert-Waring.

De la otra opción viene uno de los problemas abiertos en matemáticas más antiguos. En 1742, el matemático prusiano Christian Goldbach escribe a Euler conjeturando que “al menos, parece que cada número mayor a 2 es la suma de 3 primos”¹. Euler lo reescribe como

Conjetura 1 (Goldbach). *Cada entero par mayor a 3 puede ser escrito como la suma de dos primos.*

¹recordad que Goldbach consideraba al 1 como primo.

En 1930, el ruso Lev Shnirelman demostró que los primos forman una base de orden finito h . En su momento lo demostró para $h = 300'000$ y se ha trabajado y demostrado hasta para $h = 6$ (Ramaré, 1995), lo que aún deja camino por recorrer en las tentativas de demostración de la conjetura de Goldbach.

Finalmente, se podría decir que aún cuando la teoría aditiva de números es una gran y bella parte de las matemáticas y con problemas de fácil comprensión en el enunciado para el lector profano, su desarrollo históricamente se ha mantenido al margen y ha sido del dominio de un puñado muy pequeño de especialistas quienes a su vez se especializan en su propia subrama de la teoría aditiva, cuando lo deseable sería una revaloración del área (muestras de su unidad y coherencia son, por ejemplo, los libros recientes² de Melvin B. Nathanson [Nat96]) y el uso en otras áreas cercanas de la matemática, aún cuando sea básico, de los teoremas y herramientas que presenta.

Se trabajará en lo sucesivo con la base aditiva A de los naturales, sin restricciones de finitud y se revisarán las propiedades de los conceptos de partición, lo que ayudará a dar un acercamiento al problema propuesto por Sakai desde otra perspectiva, desde la de la teoría aditiva de los números.

4.2. $Q(n)$

Como se mencionó en el capítulo de definiciones, trabajaremos con $Q(n)$ la cual será llamada **función partición Q** y denota al número de formas en las que se puede particionar al número n en sumandos distintos.

Ahora, ampliaremos un poco más la definición y consideraremos a $Q(n, k)$ el número de formas en las que se puede particionar a n en exactamente k partes distintas. Por ejemplo, $Q(10, 2) = 4$ pues existen cuatro particiones de 10 en dos distintas partes: $\{9, 1\}$, $\{8, 2\}$, $\{7, 3\}$ y $\{6, 4\}$.

²entendiendo por recientes no más de 20 años desde su aparición.

Los primeros valores de $Q(n, k)$ son fácilmente calculables y se muestran en la siguiente tabla:

$n \setminus k$	1	2	3	4
1	1			
2	1			
3	1	1		
4	1	1		
5	1	2		
6	1	2	1	
7	1	3	1	
8	1	3	2	
9	1	4	3	
10	1	4	4	1

4.3. $P(n)$

Recuérdese que $P(n)$, la **función partición \mathbf{P}** denota el número de particiones en general.

Para la función partición \mathbf{P} existe una ampliación en la definición hacia $P(n, k)$ es el número de formas en las que se puede escribir a n como suma de exactamente k términos. Por ejemplo, $P(6, 2) = 3$, con las particiones $\{5, 1\}$, $\{4, 2\}$, $\{3, 3\}$ de 6 en 2 elementos. Además, también puede ser visto como el número de formas en que se puede particionar un número en sumandos dados los cuales, el mayor sea k .

$P_k(n)$ representa el número de particiones de n en sumandos tales que ninguno de ellos excede a k . Por ejemplo, $P_2(6) = 4$, ya que $\{2, 2, 2\}$, $\{2, 2, 1, 1\}$, $\{2, 1, 1, 1, 1\}$, $\{1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ son las particiones de 6 con el elemento mayor o igual a 2.

Teorema 3 (Ferrer). *Para todo entero positivo n , $P_k(n) - P_{k-1}(n) = P(n, k)$*

Demostración. Para demostrarlo, se observa que $P_k(n) - P_{k-1}(n)$ representa al número de particiones de n en sumandos que contienen a su elemento mayor k . Para cada partición con elemento mayor k , la partición conjugada tiene k partes y viceversa. Entonces, el número de particiones de n en k partes es igual al número de particiones que contienen como elemento mayor a k . Y similarmente, el número de particiones de n en a lo más k partes es igual al número de particiones de n en sumandos el mayor de los cuales sea k . Lo que concluye la demostración. \square

Además, $P(n, k)$ puede ser calculada recursivamente con ayuda del siguiente

Teorema 4 (Euler). $P(n, k) = P(n - 1, k - 1) + P(n - k, k)$

con $P(n, k) = 0$ para $k > n$, $P(n, n) = 1$, y $P(n, 0) = 0$.

Demostración. Según el teorema de Ferrer, el número de particiones en exactamente k partes es el número de particiones de n con el mayor de los sumandos k . Sea C el conjunto de las particiones con sumando mayor igual a k . $|C| = P(n, k)$. Sea D el conjunto unión de: A , el conjunto de particiones de $n - 1$ con sumando mayor igual a $k - 1$ y B , el conjunto de particiones de $n - k$ con parte mayor igual a k . Dado que A y B son disjuntos, $|D| = |A| + |B| = P(n - 1, k - 1) + P(n - k, k)$.

Cualquier partición en C tiene la forma $x_1 + x_2 + \dots + x_{r-1} + x_r = n$, con $k \geq x_1 \geq \dots \geq x_r$. Si $k = x_1 > x_2$, asociamos a esa partición con $(x_1 - 1) + x_2 + \dots + x_r = n - 1$, un elemento de A (es una partición de $n - 1$ en $k - 1$ términos, por el teorema de Ferrer). Si $k = x_1 = x_2$, asociamos a esa partición con $x_2 + x_3 + \dots + x_r = n - x_1 = n - k$, un elemento de B (como el sumando mayor es k , su partición conjugada será de k sumandos para $n - k$). Así, se tiene una relación uno a uno de C en D . Así $|C| \leq |D|$.

Cualquier partición en D es de la forma $\alpha = u_1 + u_2 + \dots + u_r = n - 1$ con $k - 1 = u_1 \geq \dots \geq u_r$, o $\beta = v_1 + v_2 + \dots + v_s$ con $k = v_1 \geq \dots \geq v_s$. A

cualquier partición de la forma α la asociamos con la partición $(u_1 + 1) + \dots + u_r = n$, y dado que $u_1 + 1 = k$, entonces la partición pertenece a C ; si la partición es de la forma β , la asociamos con la partición $k + v_1 + \dots + v_s = n$ que es un elemento de C . Lo que nos da una relación uno a uno entre los conjuntos D y C , entonces $|D| \leq |C|$. Entonces $|C| = |D|$, lo que termina la demostración. \square

La tabla de primeros valores para $P(n, k)$ es:

n/k	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	1	1	1				
4	1	2	1	1			
5	1	2	2	1	1		
6	1	3	3	2	1	1	
7	1	3	4	3	2	1	1

La relación de recurrencia que nos da el teorema de Euler puede ser resuelta explícitamente y arroja las siguientes primeras fórmulas:

- Para un sumando,

$$P(n, 1) = 1.$$

- Para dos sumandos,

$$P(n, 2) = P(n - 1, 1) + P(n - 2, 2) = 1 + P(n - 3, 1) + P(n - 4, 2)$$

$$= 2 + P(n - 5, 1) + P(n - 6, 2) = \dots$$

$$= \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{n}{2} - \frac{1}{2} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} = \frac{1}{2}[n + O(1)].$$

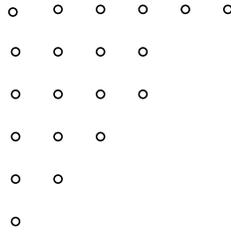


Figura 4.1: Diagrama de Ferrer para una partición de $n = 20$.

- Para tres sumandos,

$$P(n, 3) = \frac{1}{72}[6n^2 + O(n)]$$

donde $O(1)$ y $O(n)$ denotan términos de orden constante y lineal respectivamente.

Lo que asintóticamente nos deja que

$$P(n, 2) \approx \frac{1}{2}n$$

$$P(n, 3) \approx \frac{1}{12}n^2,$$

una aproximación bastante útil.

4.4. Una fórmula para $P(n, 3)$

Para probar que $P(n, 3) = \frac{n^2}{12}$ se utilizará la representación en diagramas de Ferrer. Así, en el diagrama D , cada sumando de la partición será una fila con igual número de puntos y ordenados de manera no creciente. Si se forman las filas de puntos, una debajo de la otra y hacia la izquierda, se crearán también columnas de puntos ordenadas de manera no creciente.

Con esto, si se tiene un diagrama D , el *diagrama conjugado* D' , es el que

se obtiene de intercambiar filas y columnas. Los diagramas conjugados cumplen con la propiedad de que $D = (D)'$, y cada diagrama tiene exactamente un conjugado. Así, al tomar los diagramas conjugados de cada diagrama de Ferrer en un conjunto S , el conjunto de diagramas conjugados tiene una correspondencia uno a uno con los diagramas del conjunto S .

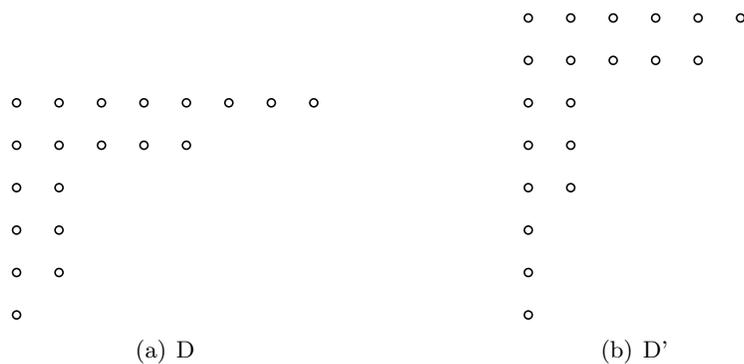


Figura 4.2: Diagrama de Ferrer de la partición de $n = 20$ y su conjugado.

Entonces, para un cierto n , se cuentan los diagramas de las particiones que son contadas con la función partición $P(n, 3)$ y estos diagramas deberán tener únicamente 3 filas, lo que significa que el conjugado no tendrá filas de más de 3 puntos. Así que los diagramas conjugados representan particiones del número n en donde solamente aparecen los números 1, 2 y 3, siempre con al menos un 3.

Como $P(n, 3)$ me cuenta todas las particiones que contienen exactamente 3 elementos, todas las posibles configuraciones de puntos que representen los sumandos de n se dan, y se dan en un sentido y otro, es decir, también se cuentan todas las particiones de n que solamente contienen elementos de $\{1, 2, 3\}$ con al menos un 3. Entonces, por la correspondencia de los diagramas, existe también una correspondencia uno a uno entre las particiones formadas por elementos $\{1, 2, 3\}$ con al menos un 3 y las contadas por la función partición.

Si el 3 obligatorio se remueve de una partición conjugada, obtenemos una partición de $n - 3$ en unos, dos y quizá treses. Si se realiza con todas las particiones conjugadas de n , la relación uno a uno se preserva. Se denotará como $P_{\{A\}}(k)$ a la cantidad de particiones de k en elementos del conjunto A . Entonces

$$P(n, 3) = P_{\{1,2,3\}}(n - 3)$$

lo que nos deja en una expresión más fácil de manejar.

Ahora, recurriremos al uso de funciones generatrices. Si se considera al producto:

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots),$$

cuando se multiplican las series, se obtienen términos del tipo x^i , en donde i se realiza a través de la suma de exponentes de las x 's que se van multiplicando. Por ejemplo, x^9 resultaría de tomar

$$\begin{array}{ll} x & \text{de la primer serie} \\ x^2 & \text{de la segunda serie} \\ x^6 & \text{de la tercer serie} \end{array}$$

es decir,

$$9 = 1 + 2 + 6 = 1(1) + 1(2) + 2(3) = 1 + 2 + 3 + 3.$$

El coeficiente que se obtenga al desarrollarse el producto de las series para cada elemento x^i nos denotará entonces, el número de formas en las que se puede particionar el término i en sumandos del conjunto $\{1, 2, 3\}$, y además, $P_{\{1,2,3\}}(n - 3)$ será también el coeficiente de x^{n-3} en $f(x)$.

Si se desarrollase el binomio $(1 - x^k)^{-1}$ se tiene

$$(1 - x^k)^{-1} = 1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \dots$$

lo que nos permite, por tanto, poder reescribir a $f(x)$ como

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-1} \\ &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} \end{aligned}$$

Ahora, si se desarrolla la expresión en fracciones parciales, se llega a que para un desarrollo del tipo

$$f(x) = \frac{A}{(1-x)^3} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x^2)} + \frac{D}{(1-x^3)}$$

los coeficientes serían $A = 1/6$, $B = 1/4$, $C = 1/4$ y $D = 1/3$.

La parte importante viene aquí, porque el coeficiente que se busca para x^{n-3} sería la suma de los coeficientes de x^{n-3} que se obtienen del desarrollo de los cuatro elementos en que se descompuso a $f(x)$. Analizando uno a uno con el teorema del binomio y utilizando la fórmula para determinar los coeficientes, lo que se obtendría sería:

- Del primer elemento

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \frac{(-3)(-4)\dots[-3-(n-3)+1]}{(n-3)!} (-1)^{n-3} &= \frac{1}{6} \frac{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1)}{(n-3)!} \\ &= \frac{1}{6} \frac{(n-2)(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

- Del segundo elemento se llegaría a

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{(-2)(-3)(-4)\dots[-2-(n-3)+1]}{(n-2)!} (-1)^{n-2} &= \frac{1}{4} \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1)}{(n-2)!} \\ &= \frac{1}{4}(n-2). \end{aligned}$$

- Para el tercer elemento, sólo las potencias pares pueden ocurrir, lo que

nos arroja un 0 como coeficiente si $n - 3$ es impar y $1/4$ si es par.

- Lo mismo ocurre con el cuarto, podemos tener un 0 como coeficiente o un $1/3$ dependiendo de su paridad.

Entonces, la suma de los coeficientes (y el número buscado de particiones) sería

$$P(n, 3) = \frac{1}{6} \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{1}{4}(n-2) \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{3}$$

$$P(n, 3) = \frac{(n^2 - 3n + 2) + (3n - 6) \pm 3 \pm 4}{12} = \frac{n^2 - 4 \pm 3 \pm 4}{12}.$$

Con los elementos ± 3 y ± 4 se obtienen valores entre 0 y 7. Con lo que nos queda

$$\frac{n^2 - 4}{12} \leq P(n, 3) \leq \frac{n^2 + 3}{12}$$

lo que lo hace el entero más cercano a $\frac{n^2}{12}$ al no diferir más de $1/3$ de él.

El modo de justificar $P(n, 2)$ es similar.

Con esta fórmula, y el suficiente cuidado en las cuentas, se puede encontrar la proporción teórica que corresponde al número de permutaciones que tienen una cuarta con peso $2n$ y las totales.

$P(n)$ es importante porque con ella se obtiene la fórmula para $Q(n)$ (número de particiones con elementos distintos).

4.5. Relación entre $P(n)$ y $Q(n)$

Con las particiones, y en particular, con las que presentan diferencia en todos sus términos, de tener una fórmula explícita que las contara; contar el número de permutaciones que contienen un intervalo de peso k , aquí en particular $k = 2n$, simplificaría el trabajo. La fórmula existe, y la relación es la siguiente:

$$Q(n, k) = P\left(n - \binom{k}{2}, k\right)$$

en donde $\binom{n}{k}$ es el coeficiente binomial (o las combinaciones de n en k).

Lo que, con los comportamientos asintóticos que ya se habían referido para $P(n, k)$, nos ofrece la siguiente aproximación:

$$Q(n, 2) \approx \frac{1}{2}\left(n - \binom{2}{2}\right) = \frac{1}{2}n$$

Lo que sustenta la cuenta hecha para las tercias con peso $2n$ en el capítulo pasado.

$$Q(n, 3) \approx \frac{1}{12}\left(n - \binom{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}(n - 3)^2$$

Lo que ayudará a realizar la cuenta para las permutaciones con cuartas que contienen algún intervalo de peso determinado.

4.6. Aplicaciones

A partir de aquí utilizaremos las particiones en l sumandos distintos de un número para un peso dado p .

De la última fórmula de la sección anterior se puede establecer finalmente que

$$Q(n, 3) \approx \frac{1}{12}n^2,$$

de manera asintótica.

Con esto, podemos enunciar el siguiente teorema en el cual se aprecia la utilidad de las fórmulas que hemos construido.

Teorema 5. *Sea $\{\sigma(n)\}$ el conjunto de permutaciones de n elementos. El número proporcional de permutaciones con un intervalo de peso p y longitud*

l tenderá asintóticamente a

$$\frac{Q(p, l)}{n^{l-1}}$$

Demostración. La demostración sigue un argumento que ya se había utilizado antes. Como $Q(p, l)$ cuenta el número de l -túplas de números naturales que suman p y cada una de ellas me representa un intervalo. Se cuenta el número de posiciones que cada intervalo puede ocupar en la permutación de n elementos $(n - l + 1)$ y se multiplica por las permutaciones posibles que pueden realizar los demás $n - l$ elementos. Esto último para calcular el número de permutaciones que contiene a alguno de los intervalos. Finalmente se compara con el total de las permutaciones existentes.

$$\frac{Q(p, l) \cdot (n - l + 1) \cdot (n - l)!}{n!} \approx \frac{Q(p, l)}{(n)(n - 1) \cdots (n - l + 2)} \approx \frac{Q(p, l)}{n^{l-1}}$$

Al realizar las cuentas, con el factorial del numerador se cancelaron $n - l$ factores del denominador, más uno, que se canceló por el factor que se colocó en el numerador a razón de la posición del intervalo.

$$n - (n - l) - 1 = l - 1.$$

El comportamiento asintótico del denominador tiende a que cada factor en él sea tratado como un elemento de orden lineal, lo que se traduce en manejar a cada factor simplemente como una n , siendo precisamente $l - 1$ de ellas, lo que concluye la demostración. \square

Corolario 1. *El número proporcional de permutaciones de n elementos con al menos un intervalo de peso $2n$ y 3 elementos tenderá asintóticamente a $\frac{1}{3}$.*

Con la fórmula del teorema,

$$\frac{Q(2n, 3)}{n^2} \approx \frac{\frac{1}{12}(2n)^2}{n^2} = \frac{\frac{1}{12}4n^2}{n^2} = \frac{1}{3}.$$

Esto corrobora la información que habíamos obtenido al contar las tercias en el capítulo anterior, sólo que esta vez se obtiene con un método más claro y directo.

Capítulo 5

Algoritmos aleatorios

[...] *the theory of probabilities – that theory to which the most glorious objects of human research are indebted for the most glorious of illustration.*

E.A.P.

Dentro de este capítulo se realizará el análisis probabilístico de algunas proposiciones.

5.1. Preámbulo

Durante la edad media y previo al siglo XVII, la palabra latina *probabilis* significaba *aprobable*, y se utilizaba para calificar las acciones u opiniones que el sentido común haría escoger dadas las circunstancias.

Dicha interpretación ya dista mucho de lo que se entiende formalmente por probabilidad hoy en día, que es la rama de las matemáticas encargada de estudiar los fenómenos aleatorios. Sin embargo, en términos coloquiales, lo *probable* sigue calificando a aquello que es viable o puede suceder con cierta facilidad.

Las herramientas de la probabilidad, y la simulación de eventos aleatorios

es de gran utilidad en la teoría de algoritmos hoy en día. Los últimos 20 años han presenciado un crecimiento notable en el área, aún cuando varios de sus algoritmos arquetípicos tengan un poco más de tiempo (aquí se presenta uno de ellos). Partiendo de la aplicación en la teoría computacional de números, la aplicación de dichos algoritmos se ha extendido profusamente a varios tipos de algoritmos. Véase [Mot95].

Utilizando algoritmos aleatorios se obtienen dos grandes ventajas: simplicidad y rapidez.

5.2. Generar una permutación aleatoria

Consideremos ahora el problema de calcular una *permutación* aleatoria de t objetos; llamaremos a este el *problema de barajeo*, ya que barajar un mazo de cartas no es más que someterlo a una permutación aleatoria.

A pesar del resultado de Erdős según el cual bastarían 7 barajeadas con un mazo para que la distribución de las cartas fuera óptimamente aleatoria [Aig04], toma reflexionar tan sólo un momento para convencerse de que el modo en el que barajamos usualmente las cartas resulta bastante malo e inadecuado; la esperanza de obtener cada una de las $t!$ permutaciones con probabilidades similares es poca. La esencia del concepto muestra es, precisamente, el hecho que se pueda inferir información sobre toda la población en base a ella.

Para un número pequeño de objetos, obtener una permutación aleatoria es fácil; digamos, por ejemplo, una colección de orden no más de 5. En el caso de el 3, se tienen $3!$ opciones de permutaciones. Entonces, se puede escoger aleatoriamente un número entre 1 y 6 y, habiéndose listado las posibles permutaciones justamente con números entre 1 y 6, se obtendría el proceso deseado. Sin embargo, la función factorial crece demasiado rápido como para pensar en preservar este método, pero el que lo sustituyera debiera ser

igualmente efectivo.

Debemos a Donald Knuth [Knu98] el siguiente algoritmo.

Siendo $\{X_1, \dots, X_t\}$ el conjunto de t números a barajar:

PERMUTACION(t)

```
1   $j \leftarrow t$ 
2   $k \leftarrow 0$ 
3  while  $j > 1$ 
4       $U \leftarrow \text{RANDOM}(0,1)$ 
5       $k \leftarrow \lfloor jU \rfloor + 1$ 
6       $X_k \leftrightarrow X_j$ 
7       $j = j - 1$ 
```

Lo que el algoritmo realiza es

- Toma a j para contar el número de elementos y con eso las operaciones de intercambio a realizar entre los elementos de la permutación y a un número k que será un número aleatorio entre 1 y j .
- Genera un número aleatorio, uniformemente distribuido entre el cero y el uno. Es decir, todos los números en el intervalo $(0,1)$ tienen la misma probabilidad de ser elegidos.
- Cuando multiplica al número de elementos por el número aleatorio, está obteniendo un número “aleatorio” de la permutación, suma uno y se lo asigna a k con lo que este se convierte en un número aleatorio entre 1 y j .
- Finalmente, intercambia los elementos de la permutación tantas veces como t .

El algoritmo únicamente realiza tantas operaciones como una proporción constante de la cantidad de elementos de la permutación, por lo que es de orden lineal, $O(n)$.

Para demostrar la correctez del algoritmo se ha de demostrar que toda permutación de tamaño n es igualmente probable de obtener (con probabilidad $\frac{1}{n!}$) y se puede realizar mediante inducción sobre el tamaño de la permutación.

- El caso base ocurre cuando la permutación es de tamaño $t = 1$. La única permutación realizable es la del mismo elemento X_1 y la probabilidad de obtenerla es de $\frac{1}{1!} = 1$.
- La hipótesis de inducción será que para cuando la permutación es de tamaño $t = n$, todas las permutaciones obtenidas mediante el algoritmo son igualmente probables de obtener con probabilidad $\frac{1}{n!}$
- El paso inductivo aduce al hecho de que cuando se agrega un nuevo elemento, se toma una de las permutaciones que se había considerado de tamaño n y que se había obtenido con probabilidad $\frac{1}{n!}$. Al agregar al nuevo elemento, la lista de números pasa de $t = n$ a $t = n + 1$ y el algoritmo realiza una nueva operación para el elemento $n + 1$ -ésimo, intercambiando a dicho elemento por alguno elegido uniformemente entre el primero y el último (el $n + 1$), con lo que se obtienen $n + 1$ posibilidades de intercambio para generar la nueva permutación de tamaño $n + 1$. Así, la probabilidad de obtener cualquier permutación de tamaño $n + 1$ será de

$$\frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!},$$

lo que concluye la demostración.

5.3. Análisis estadístico

Recordemos el algoritmo $\text{INTERVALO}(P, w, i, j)$ (sección 3.6), con él, en tiempo lineal se reconocía si existía algún intervalo dentro de la permutación, tal que la suma de los números contenidos fuera el peso requerido.

Ahora al utilizar el algoritmo de generación aleatoria de permutaciones podemos, además, utilizar el de reconocimiento de intervalo.

Computacionalmente, al utilizarlos los dos, con la suficiente cantidad de ejecuciones, la proporción de permutaciones de distintos tamaños que contienen algún intervalo de peso $2n$ tiende a 0,9.

Ya se demostró (sección 3.5) que al menos $1/3$ de esta cantidad de permutaciones sería dada gracias a las tercias. Considérese además, que no se contaron las permutaciones que pudieran tener las tercias traslapadas (es decir, que el último elemento de una tercia, corresponda con el primer elemento de otra tercia).

Por la forma en la que se escribieron las cuentas con las tercias, sería intuitivo pensar que la cantidad de permutaciones con al menos una cuarta de peso $2n$ sería menor en proporción. Contrario a esto, estadísticamente se encontró que la proporción aumenta con las cuartas y a partir de ahí comienza a disminuir.

Capítulo 6

Convexos, bandas y pesos

De el estudio realizado sobre las permutaciones y tratar de encontrar los pesos deseados, algunos resultados han ido saliendo sobre el proceso. Uno de ellos es sobre la posible cantidad de pesos que se pueden asegurar.

En nuestro problema original en \mathbb{R}^2 ya habíamos analizado sobre los pesos siempre realizables, todos casos secillos. Ahora podemos ver los que se pueden ir eliminando de la lista de pesos realizables.

La suma de todos los números, menos uno, $\sum_{i=0}^n i - 1$, no es siempre realizable. Si el punto con etiqueta 1 se encuentra al interior del casquete convexo, entonces no es posible realizarlo, ya que intentar quitarlo me “desconectaría” forzosamente al conjunto. Lo mismo pasa con $\sum_{i=0}^n i - 2$.

Los valores $\sum_{i=0}^n i - k$ comenzarán a ser realizables si alguna de las particiones del número k se encuentra distribuida entre los elementos del casquete convexo.

Así como en \mathbb{R}^2 , es inmediata la pregunta sobre qué pesos son siempre realizables al considerar solamente las permutaciones sobre la línea. Tenemos los inmediatos del conjunto $1, 2, \dots, n$ y la suma total de los números.

Casos como la suma total, menos 1 ($\sum_{i=1}^n i - 1$) no es realizable si el elemento 1 se encuentra al interior de la permutación, es decir, no es ninguno

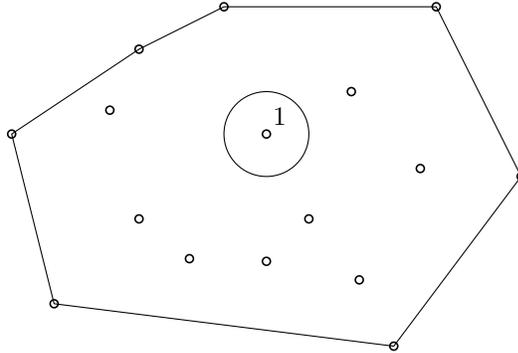


Figura 6.1: La suma de todos los puntos menos la unidad no siempre realizable.

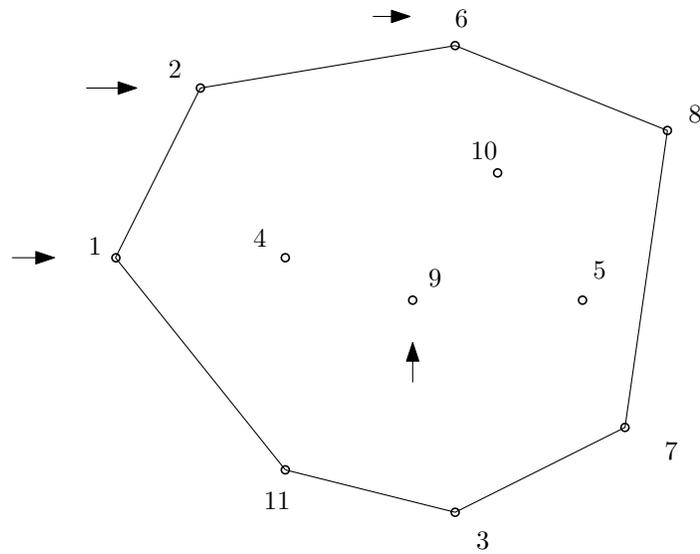


Figura 6.2: Ejemplo de un peso al interior del casquete convexo pero con una partición de dicho número repartida en el casquete.

de los dos elementos extremos. El valor $\sum_{i=1}^n i - 2$ tampoco es siempre realizable por el mismo motivo. Así mismo, el primer valor que presenta más posibilidades bajo este seguimiento, sería el de $\sum_{i=1}^n i - 3$, aquí, aunque pueda suceder que el 3 se encuentre al interior de la permutación, los elementos 2 y 1 pueden estar en los extremos y al dejarlos fuera obtendríamos un intervalo del peso requerido. En general, para $k > 2$, el peso $\sum_{i=1}^n i - k$ se realiza si los elementos de alguna de sus particiones sin repetición de elementos se encuentra distribuida en los extremos de la permutación.

6.1. Intervalos distintos

Entonces, la existencia de ciertos pesos de intervalo específicos no está siempre garantizada. Lo que también es prudente preguntar es: ¿cuántos pesos distintos se podrían garantizar al menos? Se intentaría buscar una respuesta en función de la entrada de números que se diera para construir la permutación.

Sorprendentemente, dicha respuesta existe y la cantidad no es despreciable. Se presenta lo siguiente.

Proposición 5. *Dada una permutación de los primeros n enteros positivos, existen al menos $n^{3/2}$ posibles pesos de intervalos distintos.*

Demostración. Para demostrarla se procede del siguiente modo:

Dado un peso cualquiera w , se pueden exhibir en la recta real n intervalos que contienen a w , tales que, sus extremos se realizan con intervalos de la permutación y son, además, de longitud a lo más n .

Para esto, y por simplicidad, considérese que la permutación se colocará en un círculo.

Se elige cualquier elemento x de la permutación y se avanza hacia la derecha (ya en el círculo no nos importa llegar al final de la permutación

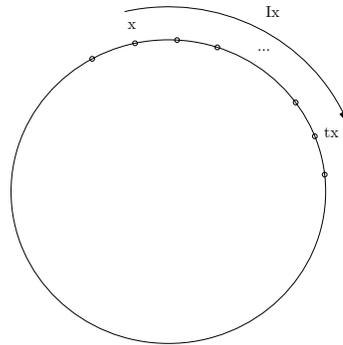


Figura 6.3: Permutación sobre el círculo y el intervalo I_x para un elemento x de la permutación.

porque los números se ciclan). Los elementos se irán sumando conforme se avance hasta que se sobrepase el peso w

Denotaremos por t_x al elemento en el que la suma ha superado al valor w y a la suma desde x hasta un elemento antes de t_x se le llamará I_x . El intervalo de valores $[I_x, I_x + t_x]$ tiene como uno de sus elementos a w , además, tiene tamaño $t_x \leq n$.

Los valores I_x e $I_x + t_x$ son realizables como intervalos de la permutación en el círculo.

Luego, si consideráramos el mismo proceso para todos los n números de la permutación, para cada i entre 1 y n se construye a ese intervalo que contiene a w ; es decir, se tienen n intervalos del estilo $[I_i, I_i + t_i]$ en donde podemos encontrar a w . Ahora, no necesariamente se tienen n inicios y fines de intervalo, pero de tener k inicios y k finales, la cantidad total de intervalos sería k^2 . Así que al haber n intervalos, debieran existir, al menos, $n^{1/2}$ inicios y finales de intervalo.

Finalmente, si se considera al peso w como alguno de la lista

$$\{1, n, 2n, 3n, \dots, n^2\},$$

cada uno tiene $n^{1/2}$ pesos de intervalos distintos, siendo n pesos, en total se

tendrán $n^{3/2}$ intervalos. □

6.2. Bandas

La siguiente idea, además de ser sencilla, presenta una aproximación a la solución del problema “dado un peso w y un conjunto de puntos S en posición general, ¿existe una isla en S de peso w ?” a través de un algoritmo.

Se toma un conjunto de puntos y se proyecta perpendicularmente sobre una línea (esta vez no tiene que estar necesariamente fuera del casquete convexo). A los puntos de proyección los etiquetamos con el número que corresponde a la etiqueta del punto en el plano. Si se toman las bandas que se forman de tomar el espacio entre las líneas de proyección de las posibles parejas de puntos en la proyección, es fácil ver que forman conjuntos convexos.

Esta vez no se está proyectando con respecto a un punto, simplemente se toma una línea en el plano y se trabaja sobre ella. Sin embargo, el número de posibles proyecciones que se pueden realizar son tantas como el número de rectas que se pueden formar por parejas de puntos del conjunto.

La manera de ver esto es como sigue: si se encierra a un conjunto de puntos S con una circunferencia que rodee también a su cierre convexo y se toma una línea tangente al círculo sobre la cual proyectar a los puntos del conjunto, se obtiene una permutación de los primeros n números. Girando al círculo sobre su centro -y a la línea tangente junto con él- se van obteniendo distintas permutaciones, pero se pasa de una intercambiando elementos consecutivos de dos en dos. Y esto sucede únicamente cuando la recta tangente se convierte también en una recta perpendicular a la recta que pasa por una pareja de puntos de S en el plano. Los puntos proyectados que corresponden a los puntos etiquetados en el plano se intercambian en ese momento en la permutación. Nunca sucede que tres elementos intercambien su posición si-

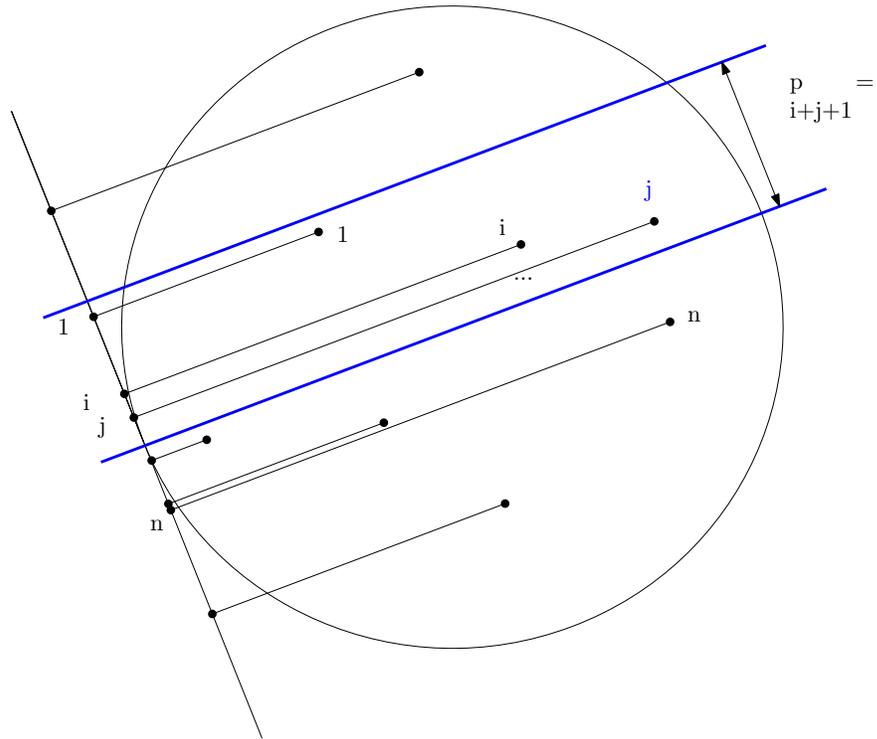


Figura 6.4: Un convexo formado de tomar la banda de peso $i + j + 1$ en un conjunto de n puntos.

multáneamente en la permutación, dado que eso implicaría colinearidad en el plano, y por estar colocados en posición general, el caso no puede ocurrir.

Los intercambios en los puntos de S son tantos como parejas de puntos, es decir, tantas como combinaciones de n en 2,

$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}.$$

Así, se puede proponer lo siguiente.

Proposición 6. *Dado un entero k y un conjunto S de n puntos en el plano, colocados en posición general y etiquetados positivamente, existe un algoritmo que calcula la banda con peso más cercano a k con $O(n^2 \log n)$ operaciones.*

Demostración. Considerese el siguiente algoritmo.

APROXIMACIÓN(S, k)

- Inicialización.

Se calculan y ordenan las pendientes inducidas por parejas de puntos en $\Theta(n^2)$ pasos.

- 1^{er} paso.

Dada la pendiente más pequeña, proyectar todos los puntos sobre una línea perpendicular a ella. Después, en $\Theta(n)$ operaciones, encontrar el intervalo con peso más cercano a k al que corresponde la banda paralela a esa pendiente con peso más cercano a k .

- 2^{do} paso.

Visitar cada pendiente en orden y actualizar la banda óptima en tiempo $O(\log n)$.

La actualización del segundo paso se puede realizar con búsqueda binaria. Dado que, como ya se había mencionado, los puntos proyectados

sobre la recta perpendicular sólo intercambian posiciones cuando se atraviesa perpendicularmente la pendiente que corresponde a los puntos que se intercambian.

Los intervalos que contienen a ambos puntos o no los contienen en absoluto, no sufren modificación alguna. Por lo que sólo es necesario revisar los intervalos que inician o finalizan en dichos puntos. Para realizarlo, se toman las nuevas posiciones de los puntos y a partir de ellos se realiza una búsqueda binaria a la derecha (y posteriormente a la izquierda) para encontrar los intervalos con peso más cercano a k y comparar con el óptimo que se tiene hasta ese momento.

Al final del segundo paso se han revisado todas las posibles direcciones de las bandas, y para cada dirección se buscó por la más cercana a k , lo que demuestra la correctez del algoritmo.

La complejidad se comprueba dado que para cada una de las posibles $\frac{n^2}{2}$ pendientes, se realiza una búsqueda binaria que se completa con $O(\log n)$ operaciones.

Con esto queda demostrada la proposición. □

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo posterior

El trabajo y los esfuerzos que se dirigieron a la resolución del problema, aún cuando no terminaron con una respuesta determinista, sí nos permitieron mentalizar la idea de que, si es que sobre la línea podemos encontrar “casi siempre” un intervalo adecuado, con las libertades adicionales que permite el plano (como componer la suma de dos intervalos obtenidos mediante proyecciones, intersectándolos, para la generación de un convexo que se encuentre propiamente en \mathbb{R}^2) debería de aumentar la cantidad de posibles subconjuntos de puntos que cumplan con la condición.

Además, la imposibilidad hasta el momento de haber podido encontrar un algoritmo determinista que resuelva el problema ha dado pauta a considerar que se podría tratar de un problema NP -completo, aún cuando tampoco se concluyera o encontrara un problema adecuado a partir del cual dar una reducción.

Salvo que se presente una idea nueva que vea al problema desde otra perspectiva, la demostración de la NP -completez y la continuación sobre el desarrollo de las herramientas que presenta la Teoría Aditiva de Números

es el camino para la continuación del trabajo de investigación más inmediato.

Bibliografía

- [Aig04] Martin Aigner. *Proofs from the Book*. Springer, Berlin, 3th edition, 2004.
- [Cox69] H. S. M. Coxeter. *Introduction to Geometry*. Wiley, New York, 2nd edition, 1969.
- [dBea00] Mark de Berg [et al.]. *Computational geometry : algorithms and applications*. Springer, Berlin, 2nd edition, 2000.
- [ea90] Thomas H. Cormen [et al.]. *Introduction to algorithms*. McGraw-Hill, New York, 2nd edition, 1990.
- [EM88] Herbert Edelsbrunner and Ernst Peter Mücke. Simulation of simplicity: a technique to cope with degenerate cases in geometric algorithms. In *Proceedings of the Fourth Annual Symposium on Computational Geometry (Urbana, IL, 1988)*, pages 118–133, New York, 1988. ACM.
- [gen] Génesis 1,2. In *Biblia de Jerusalén*.
- [Hal02] T. C. Hales. A computer verification of the kepler conjecture. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II. Invited lectures.*, pages 795–804, Beijing, 2002. Higher Education Press.

- [Hur] Ferrán Hurtado. Comunicación personal.
- [Knu98] Donald Ervin Knuth. *The art of computer programming*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1998.
- [Mot95] Rajeev Motwani. *Randomized Algorithms*. Cambridge University, Cambridge, 1995.
- [Nat96] Melvyn Bernard Nathanson. *Additive number theory : the classical bases*. Springer, New York, 1996.
- [Pre85] Franco P. Preparata. *Computational geometry : An introduction*. Springer, New York, 1985.