Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Anillos de Funciones y Teoría K

TESIS

que para obtener el título de:

MATEMÁTICO

presenta:

Isaac Ortigoza Suárez

Director de tesis: Dr. Marcelo Alberto Aguilar González de la Vega

Septiembre 2009

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Anillos de Funciones y Teoría K

TESIS

que para obtener el título de:

MATEMÁTICO

presenta:

Isaac Ortigoza Suárez

Director de tesis: Dr. Marcelo Alberto Aguilar González de la Vega

Septiembre de 2009

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
   Apellido paterno: Ortigoza
   Apellido materno: Suárez
   Nombre(s): Isaac
   Teléfono: 53 44 42 35
   Universidad: Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad: Facultad de Ciencias
   Carrera: Matemáticas
   Número de cuenta: 4-0306183-1
2. Datos del tutor
   Grado: Dr.
   Nombre(s): Marcelo Alberto
   Apellido paterno: Aguilar
   Apellido materno: González de la Vega
3. Datos del sinodal 1
   Grado: Dr.
   Nombre(s): Armando
   Apellido paterno: García
   Apellido materno: Martínez
4. Datos del sinodal 2
   Grado: Dr.
   Nombre(s): Adalberto
   Apellido paterno: García Máynez
   Apellido materno: Cervantes
5. Datos del sinodal 3
   Grado: Dr.
   Nombre(s): Israel
   Apellido paterno: Moreno
   Apellido materno: Mejía
6. Datos del sinodal 4
   Grado: Dr.
   Nombre(s): Ricardo
   Apellido paterno: Strausz
   Apellido materno: Santiago

FACULTAD DE CIENCIAS
Secretaría General
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Anillo de Funciones y Teoría K

realizado por **Ortigoza Suárez Isaac** con número de cuenta **4-0300585-5** quien ha decidido titularse mediante la opción de **tesis** en la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario	Dr. Armando García Martínez
Propietario	Dr. Adalberto García Máynez Cervantes
Propietario Tutor	Dr. Marcelo Alberto Aguilar González de la Vega
Suplente	Dr. Israel Moreno Mejía
Suplente	Dr. Ricardo Strausz Santiago

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU "
Ciudad Universitaria, D. F., a 21 de agosto de 2009
EL COORDINADOR DEL COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

M. EN C. FRANCISCO DE JESÚS STRUCK CHÁVEZ

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

A mis padres

A Lupita Reyes

Agradecimientos

Quiero agradecer a:

A mis padres antes que a nadie: José Luis Ortigoza y Lucia Teresa Suárez; porque me han dado amor, consejos, apoyo, comprensión a pesar de los momentos difíciles que hemos pasado y por haber sido un ejemplo en mi vida; ellos me han formado como un ser de valores y principios lo que es la parte más difícil en la educación.

A mi hermana: Ingrid Ortigoza quien siempre me ha dado su respaldo de manera incondicional, y a quien además admiro por sus logros.

A mi tía Tey por su ayuda en diversos aspectos de mi vida, por sus comentarios constructivos; además siempre la he considerado un ejemplo de esfuerzo y determinación.

A mi tío Mauricio Ortigoza, un modelo éxito y desarrollo integral, quien me ha mostrado que los actuarios no tienen que hacer matemáticas y por sus consejos espirituales.

Al resto de mi familia por su contribución a mi formación brindadas a lo largo de los años.

A Marcelo A. Aguilar, quien fue un excelente maestro que supo motivarme y entusiasmarme por la topología algebráica, así como por su apoyo para obtener el título de licenciatura.

A Adalberto García-Maynez, Armando García, Israel Moreno, Ricardo Strausz por sus consejos, su tiempo y por los conocimientos complementarios a este trabajo, ya que sin ellos no habría notado ni disfrutado muchas de las posibles conexiones y ramificaciones del mismo.

Además no puedo dejar de mencionar a Cesar Rincón, Carlos Prado, al Roli (en algún momento se llamó Javier Bracho), Emilio Lluis (papá), Omar Antolín, Julieta Verdugo, Ernesto Rosales, Laura Ortiz, Francisco Marmolejo por ser mis maestros y personas que me ayudaron a descubrir, jugar y gozar las matemáticas.

A mis grandes amigos que se convirtieron en hermanos Edmundo Moyo, Rex (Daniel Vázquez), Roberto Fierros, Duck (Francisco Leandro), con quienes crecí y con quienes me gustaría tratar el resto de mi vida.

A Sonia Guerrero, con la que he tenido pláticas interesantes y por hacer del trabajo una aventura. Siempre una amiga fiel.

A mis amigos y compañeros de armas (plumas, papel, gis y pizarrón) de la facultad: Valente Santiago, Rodrigo Hernández,Marta Peña, Norberto Ordoñez, Tzolkin Garduño con quienes he aprendido, platicado y reído y cafeteado matemáticas, de no ser por ellos la vida en la facultad no tendría el sentido que tiene.

A Leonid, Yadira, Ken, Melisa, Julio, Álvaro, Juan José, Israel, Daniel, Claudio, Toño con quienes he compartido no sólo pláticas interesantes sobre cine, teatro, vacaciones, etétera sino que además hemos profundizado en algunas de las ideas de la reina de las ciencias.

A mi amiga Nadia Huerta quien me ha ayudado a navegar entre los mares de burocracia que rigen mi vida y adem’as fu’e una grata compañ’ia durante los lentos trayectos en el perif’erico, me gustaría desearle un buen viaje y pr’ospero futuro profesional.

De manera muy especial a Yannick de Icaza, no sólo por ser un amigo que se ha convertido en un hermano, que siempre ha estado apoyándome en muchos aspectos, y con quien he pasado momentos muy agradables. Extrañaré las largas e interesantes conversaciones nocturnas que solíamos tener sobre tensores. Y por supuesto a su esposa Anaid, espero nuestra amistad dure muchos años, con todo y que a veces la desespero. Les deseo lo mejor en su vida.

Por último quiero expresarle mi más sincera gratitud a Lupita Reyes, por ser un breve cielo en la tierra, así mismo quiero que sepas que eres el amor de mi vida y que espero compartamos el resto de mis años en el mundo. Siempre tendrás el lugar más especial en mis pensamientos y mi historia.

.

Índice general

Introducción

Si buscamos invariantes topológicos contravariantes, los más sencillos serían el grupo de funciones continuas del espacio X al grupo abeliano G denotado $Map(X, G)$ (asociándole a G la topología discreta). Este invariante nos mide la cantidad de componentes conexas de X cuando éste es localmente conexo. Entonces es muy natural que consideremos grupos con una estructura topológica diferente, y los primeros que se nos vienen a la mente son los grupos de los reales y complejos.

No nos vayamos confundir y pensemos que como los reales o los complejos son los primeros grupos topológicos abelianos con los que trabajamos, resulte que dichos invariantes asociados sean triviales. Esto no sucede, ya que tanto los reales como los complejos tienen más estructura que la de un simple grupo topológico discreto, y es esta estructura adicional la que nos permite recobrar la información de los espacios. Para el caso en el que los espacios topológicos son compactos y Hausdorff se tiene un Teorema hermoso que dice: "dos espacios son homeomorfos si y sólo si sus anillos de funciones continuas son isomorfos". Lo cual nos lleva al primer problema de la tesis, ya que con este resultado tenemos que, estudiar los espacios se vuelve tan difícil como estudiar sus anillos asociados. El resultado es de *Gelfand y Kolmogorov*, y lo desarrollan *Gillman* y *Jerison* en su libro –Rings of Continuous Functions–.

Entonces lo que vamos a hacer a lo largo de las siguientes páginas es estudiar las acciones de esos anillos de funciones. Lo que da pie a la investigación de los módulos proyectivos finitamente generados con coeficientes en el anillo de funciones continuas.

En la búsqueda de módulos y las relaciones que tienen con respecto al espacio original, encontramos algunos resultados entre ellos y los haces vectoriales cuando el espacio base es compacto y Hausdorff. Dichos resultados se obtienen al estudiar un funtor de la categoría de haces vectoriales a los módulos de secciones. Para ampliar la información presentada en la tesis uno puede recurrir al artículo *Richard G. Swan* llamado –Vector Bundles and Projective Modules–, y el libro de Marcelo Aguilar, Samuel Gitler y Carlos Prieto titulado –Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint.

Juntando estas ideas surge la necesidad de comparar la teoría K topológica y la teoría K algebráica. Las cuales están muy relacionadas entre sí. Como veremos más adelante.

Cabe mencionar que este trabajo está escrito pensando en que el lector tiene estudios básicos en Topología y Álgebra.

.

Capítulo 1

Espacio estructural de un anillo y módulos proyectivos

En este capítulo, se desarrollaran algunos conceptos generales sobre anillos conmutativos con uno, así como un espacio asociado a ellos, llamado espacio estructural. Después estudiaremos los módulos proyectivos, y algunas de sus propiedades.

1.1. Espacio estructural

Trabajaremos con anillos conmutativos con 1 y homomorfismos entre los anillos que siempre mandan el uno en el uno.

Definición 1.1.1 (Ideal primo) *$\mathfrak{P}$ es un "ideal primo" o "primo" si $\mathfrak{P}$ es ideal y $\mathfrak{P} \subsetneq A$ y si $xy \in \mathfrak{P}$ entonces $x \in \mathfrak{P}$ o $y \in \mathfrak{P}$.*

Definición 1.1.2 (Ideal maximal) *$\mathfrak{M}$ es un "ideal maximal" si $\mathfrak{M}$ es ideal, $\mathfrak{M} \subsetneq A$ y no existe $\mathfrak{a}$ ideal tal que $\mathfrak{M} \subsetneq \mathfrak{a} \subsetneq A$.*

tesis

Lema 1.1.1
Sea $\mathfrak{P}$ un ideal en el anillo A. Entonces $\mathfrak{P}$ es un ideal primo si y sólo si $A/\mathfrak{P}$ es un dominio entero.

.

Lema 1.1.2
Sea $\mathfrak{M}$ un ideal en el anillo A. Entonces $\mathfrak{M}$ es un ideal máximal si 0 y sólo si $A/\mathfrak{M}$ es un campo.

Demostración. Sea $0 \neq \bar{x} \in A/\mathfrak{M} \Longleftrightarrow x \notin \mathfrak{M} \Longleftrightarrow 1 = ax + m$ para alguna $a \in A$ y una $m \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{x} = 1$.
$\Longleftrightarrow \therefore A/\mathfrak{M}$ es campo. ■

Lema 1.1.3
Sea $\mathfrak{M}$ un ideal maximal. Entonces $\mathfrak{M}$ es un ideal primo.

Demostración 1. $\mathfrak{M}$ es maximal $\Longleftrightarrow A/\mathfrak{M}$ es campo, en particular dominio entero $\Rightarrow \mathfrak{M}$ es ideal primo. ■

Demostración 2. Sean $x, y \in A$ tal que $x \cdot y \in \mathfrak{M}$. Supóngamos que x no pertenece a $\mathfrak{M} \Longleftrightarrow \exists a \in A, m \in \mathfrak{M}$ tal que $1 = ax + m$.

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow y = axy + my \text{ pero } xy \in \mathfrak{M} \Rightarrow axy \in \mathfrak{M} \\ \text{y } m \in \mathfrak{M} \Rightarrow ym \in \mathfrak{M}. \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow y \in \mathfrak{M}$.
$\therefore \mathfrak{M}$ es primo. ■

Proposición 1.1.4
Sea A es un anillo no trivial($A \neq 0$). Entonces A tiene un ideal maximal.

Demostración. Sea $\Sigma = \{\mathfrak{a} \subset A | \mathfrak{a} \text{ ideal y } \mathfrak{a} \neq A\}$. Le damos a Σ el orden parcial estándar (por contención). Claramente $\Sigma \neq \emptyset$ ya que 0 es un ideal y $0 \neq A$.

Sea $(\mathfrak{a}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una cadena ascendente, esto es,que para cualesquiera $\alpha_0, \alpha_1 \in \Lambda$ se tiene que $\mathfrak{a}_{\alpha_0} \subset \mathfrak{a}_{\alpha_1}$ o que $\mathfrak{a}_{\alpha_1} \subset \mathfrak{a}_{\alpha_0}$.

Sea $\mathfrak{a} = \cup_{\alpha \in \Lambda} \mathfrak{a}_\alpha$ es un ideal, porque trivialmente es un grupo abeliano y si $a \in \mathfrak{a}$ y $x \in A$ tenemos que $xa \in \mathfrak{a}$ ya que existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $a \in \mathfrak{a}_\alpha$, lo cual implica que $xa \in \mathfrak{a}_\alpha$. Además $\mathfrak{a} \neq A$ ya que $1 \notin \mathfrak{a}_\alpha \forall \alpha \in \Lambda \Rightarrow 1 \notin \cup_{\alpha \in \Lambda} \mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{a}$. por lo tanto Σ tiene elementos maximales. Claramente si $\mathfrak{a} \in \Sigma$ es un elemento maximal $\Rightarrow \mathfrak{a}$ es un ideal maximal de A. ■

Corolario 1.1.5
Sea $\mathfrak{a}$ un ideal diferente del anillo A entonces existe $\mathfrak{M}$ maximal tal que $\mathfrak{a}$ está contenido en $\mathfrak{M}$.

.

Demostración. Considéremos $\phi : A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$, la proyección cociente. Observemos que $\ker(\phi) = \mathfrak{a}$. Como $\mathfrak{a} \neq A \Rightarrow A/\mathfrak{a} \neq 0$. Entonces existe $\bar{\mathfrak{M}} \subset A/\mathfrak{a}$ ideal maximal.

Defínimos $\mathfrak{M} = \phi^{-1}(\bar{\mathfrak{M}})$. Tenemos que $\mathfrak{M}$ es trivialmente es un ideal y además $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{M}$ ya que $\mathfrak{a} = \phi^{-1}(0) = \ker(\phi)$.

$\mathfrak{M}$ es maximal ya que si $\mathfrak{M} \subsetneq \sigma$ es ideal entonces $\exists r \in \sigma$ tal que $r \notin \mathfrak{M} \Rightarrow \phi(r) = \bar{r} \notin \bar{\mathfrak{M}} \Rightarrow \exists \bar{b} \in A/\mathfrak{a}$ tal que $\bar{1} = \bar{b}\bar{r} + \bar{m}$ con $\bar{m} \in \bar{\mathfrak{M}}$.

Se sigue que $\phi(\sigma) = A/\mathfrak{a}$. Entonces $\sigma = A$ ya que si $\sigma \neq A \Rightarrow 1 \notin \sigma$ pero $\phi(\sigma) = A/\mathfrak{a} \Rightarrow \exists a \in \sigma$ tal que $\phi(a) = \bar{1} \Longleftrightarrow 1 - a \in \mathfrak{a}$ pero $\mathfrak{a} \subset \sigma \Rightarrow 1 - a \in \sigma \Longleftrightarrow 1 \in \sigma$. Esto es un absurdo, la contradicción viene de suponer que $\sigma \neq A$. ■

Corolario 1.1.6
Si a es un elemento del anillo A y no es unidad entonces existe $\mathfrak{M}$ (ideal maximal) contenido en A tal que a pertenece a $\mathfrak{M}$.

Sea A un anillo y sea $S_{max}(A)$ el conjunto de todos los ideales maximales. Si $E \subset A$ entonces se denota $V(E)$ el conjunto de todos los ideales maximales de A tales que contienen a E.

Observemos que si $E \subset A$ y $\mathfrak{a}$ es el ideal generado por E ($\mathfrak{a} \equiv < E >$) entonces $V(E) = V(\mathfrak{a})$. Es claro ya que $E \subset \mathfrak{a} \Rightarrow V(E) \supset V(\mathfrak{a})$; y si $I \supset E$ es ideal maximal, esto implica que ($\mathfrak{M} \supset \mathfrak{a} \Rightarrow V(E) \subset V(\mathfrak{a})$ por lo tanto $V(E) = V(\mathfrak{a})$.

Construcción de una topología al espacio $S_{max}(A)$. Ahora queremos dar una topología al espacio $S_{max}(A)$.

1. Nótemos que si $E_i \subset A$ para toda i en I (conjunto de índices) entonces

$$V(\bigcup_{i \in I} E_i) = \bigcap_{i \in I} V(E_i)$$

ya que si

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \in V(\bigcup_{i \in I} E_i) &\Longleftrightarrow \mathfrak{M} \supset \bigcup_{i \in I} E_i \Longleftrightarrow \mathfrak{M} \supset E_i \forall i \in I \Longleftrightarrow \\ \mathfrak{M} \in V(E_i), \forall i \in I &\Longleftrightarrow \mathfrak{M} \in \bigcap_{i \in I} V(E_i) \end{aligned}$$

2. Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son ideales de A. Entonces $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. Ya que si $\mathfrak{M} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \Rightarrow \mathfrak{M} \in V(\mathfrak{a})$ ó $\mathfrak{M} \in V(\mathfrak{b}) \Rightarrow \mathfrak{M} \supset \mathfrak{a}$ ó $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{b}$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \mathfrak{M} \supset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{M} \in V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \\ &\Rightarrow \quad \mathfrak{M} \supset \mathfrak{a}\mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{M} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}). \end{aligned}$$

   Si $\mathfrak{M} \in V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \Rightarrow \mathfrak{M} \supset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Supongamos $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{M} \in V(\mathfrak{a}) \Rightarrow \mathfrak{M} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

   Ahora supongamos que $\mathfrak{M} \not\supset \mathfrak{a} \Rightarrow \exists a \in \mathfrak{a}$ tal que $a \notin \mathfrak{M}$ pero $\forall b \in \mathfrak{b}$ se tiene que $ab \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{M} \Rightarrow b \in \mathfrak{M}, \forall b \in \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{M} \supset \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{M} \in V(\mathfrak{b}) \Rightarrow \mathfrak{M} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$. De manera análoga $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

3. $V(A) = \emptyset$ porque, si $\mathfrak{M}$ es maximal entonces $\mathfrak{M} \not\subset A$.

   $V(< 0 >) = V(\{0\}) = S_{max}(A)$ ya que, para todo $\mathfrak{M}$ ideal maximal de A, $0 \in \mathfrak{M}$.

Luego, se puede definir una topología a $S_{max}(A)$ cuyos cerrados son

$$\mathcal{T}^* = \{V(\mathfrak{a}) | \mathfrak{a} \subset A\} \tag{1.1}$$

y cuyos abiertos son:

$$\mathcal{T} = \{V(\mathfrak{a})^c | \mathfrak{a} \subset A\}. \tag{1.2}$$

Definición 1.1.3 ($S_{max}(A)$) *Al espacio $(S_{max}(A), \mathcal{T})$ se le llama espacio estructural del anillo A y lo denotamos simplemente como* $\mathbf{S_{max}(A)}$. *También lo denotaremos como X por ser un espacio topológico.*

Sea $E \subset A$, denotaremos por $X_E = V(E)^c = \{\mathfrak{M} \subset X | \mathfrak{M} \not\supset E, E \supset A\}$.

Lema 1.1.7
Sea $\{X_f | f \in A\}$ es una base de los abiertos $S_{max}(A)$.

Demostración.

1. $X_f \cap X_g = X_{fg}$ ya que

$$\begin{aligned} X_f \cap X_g &= V(< f >)^c \cap V(< g >)^c = (V(< f >) \cup V(< g >))^c \\ &= V(< fg >)^c = X_{fg} \end{aligned}$$

.

2. $X_1 = V(A)^c = X$

■

Corolario 1.1.8
$\{V_f | f \in A\}$ son una base de la familia de cerrados del $S_{max}(A)$. NOTACIÓN:

$$V(f) = X_f^c = \{\mathfrak{M} \in S_{max}(A) | f \in \mathfrak{M}\} \tag{1.3}$$

Demostración. *La demostración es inmediata del Lema anterior.* ■

Proposición 1.1.9
Sea A es anillo conmutativo con 1. Entonces $S_{max}(A)$ es compacto.

Demostración. Sea $\{X_{f_i}\}_{i\in I}$ un cubierta abierta de X.

Entonces $X = \cup_{i\in I} X_{f_i} = \cup_{i\in I} V(< f_i >)^c = (\cap_{i\in I} V(< f_i >))^c$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \phi = \cap_{i\in I} V(< f_i >) \quad &\Longleftrightarrow \quad \nexists\, \mathfrak{M} \in X | \mathfrak{M} \supset < f_i > \forall i \in I \\
&\Longleftrightarrow \quad \nexists\, \mathfrak{M} \in X | \mathfrak{M} \supset f_i \forall i \in I \\
&\Longleftrightarrow \quad \nexists\, \mathfrak{M} \in X | \mathfrak{M} \supset \{f_i | i \in I\} = E \\
&\Longleftrightarrow \quad < E >= A \Longleftrightarrow
\end{aligned}$$

existe una combinación lineal de elementos de E que es 1.

Sean $\{f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_n} | i \in I\}$ los que dan esa combinación lineal entonces $V(< f_{i_1} >) \cap V(< f_{i_2} >) \cap \ldots V(< f_{i_n} >) = \emptyset \leftrightarrow$

$$\cup_{j=1}^{n} V(< f_{i_j} >) = X.$$

Por lo tanto $S_{max}(A)$ es compacto. ■

Proposición 1.1.10 (Algunas propiedades del $S_{max}(A)$.)

1. $X = X_f \Longleftrightarrow f$ es unidad.

2. $\phi = X_f \Longleftrightarrow f$ es nilpotente.

Demostración.

1. $X = X_f = V(< f >^c) \Longleftrightarrow V(< f >)\emptyset \Longleftrightarrow f$ es unidad.

.

2. $\phi = X_f = V(< f >)^c \Longleftrightarrow V(< f >) = X \Longleftrightarrow \exists n | f^n = 0 \Longleftrightarrow f$ es nilpotente.

■

Teorema 1.1.11 (Invariancia algebráica de S_{max})
Sean A, B anillos conmutativos con uno. Si A es isomorfo a B entonces $S_{max}(A)$ es homeomorfo a $S_{max}(B)$.

Demostración. Supongamos que $\Psi : A \longrightarrow B$ es un isomorfismo de anillos conmutativos. Definimos $\Psi^* : S_{max}(B) \longrightarrow S_{max}(A)$ como $\Psi^*(\mathfrak{M}) = \Psi^{-1}(\mathfrak{M})$. A continuación necesitamos demostrar que:

1. Ψ^* ESTÁ BIEN DEFINIDA.

   Consideremos
   $$A \xrightarrow{\Psi} B \xrightarrow{\pi} B/\mathfrak{M}, \tag{1.4}$$
   donde $\pi : B \longrightarrow B/\mathfrak{M}$ es la proyección al cociente. Luego entonces $\pi^\circ\Psi(A) = B/\mathfrak{M}$, pero el $\ker(\pi^\circ\Psi) = \Psi^{-1}(\mathfrak{M})$ ya que Ψ es isomorfismo. Por lo tanto $B/\mathfrak{M}$ es isomorfo a $A/\Psi^{-1}(\mathfrak{M})$.

2. Ψ^* ES CONTINUA.

   Supongamos que $\mathfrak{M} \in \Psi^{*-1}(V(f)) \Longleftrightarrow \Psi^*(\mathfrak{M}) \in V(f) \Longleftrightarrow$

   $$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \Psi^{-1}(\mathfrak{M}) \in V(f) \\ &\Longleftrightarrow f \in \Psi^{-1}(\mathfrak{M}) \\ &\Longleftrightarrow \Psi(f) \in \mathfrak{M} \\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{M} \in V(\Psi(f)) \end{aligned}$$

   $$\Longleftrightarrow \Psi^{*-1}(V(f)) = V(\Psi(f)) \tag{1.5}$$

   Luego entonces Ψ^* es continua y de manare análoga $(\Psi^{-1})^*$ es continua la cual es la inversa de Ψ^*.

Finalmente por 1 y 2 se tiene que $S_{max}(A)$ es homeomorfo $S_{max}(B)$.

■

.

1.2. Módulos proyectivos

1.2.1 Recordemos *que un R-módulo A es libre, si es isomorfo a una suma directa de copias de R.*

Nota 1.2.2 *Sea A un R-módulo libre, si $Ra_i \cong R$ y si $A = \bigoplus_{i \in I} Ra_i$, entonces $\{a_i \in A | i \in I\}$ es base de A.*

Entonces decimos que los elementos de A se escriben como sumas de combinaciones lineales de elementos de su base, es decir

$$a = \sum_{i \in I} r_i a_i$$

donde las r_i son casi todas iguales a cero. Entonces a se puede escribir de forma única por elementos de una de sus bases, de manera análoga a lo que se hace en álgebra lineal con la suma de vectores.

Proposición 1.2.1
Sea $X = \{a_i \in A | i \in I\}$ una base de un A R-módulo libre. Si B es un R-módulo y $f : X \to B$ hay un único morfismo $\tilde{f} : A \to B$ que extiende a f.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dashed, "\exists ! \tilde{f}"] & \\ X \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Diagrama 1.1: Base de modulos libres

Demostración. La demostración es completamente rutinaria, se define $f_i : Ra_i \to B$ como $ra_i \longmapsto rf(a_i)$, claramente f_i es morfismo. Como $A = \coprod_{i \in I} Ra_i$, entonces definimos $\tilde{f} : A \to B$ como $\tilde{f} = \bigoplus_{i \in I} f_i : \coprod_{i \in I} Ra_i \to B$, y claramente este es un morfismo así que si $a = \sum_{i \in I} r_i a_i$ entonces $\tilde{f}(a) = \sum_{i \in I} f_i(r_i a_i) = \sum_{i \in I} r_i f(a_i)$ por lo que $\tilde{f}$ sí extiende a f. La unicidad está en que si $g : A \to B$, que extiende a f entonces $g(a) = g(\sum_{i \in I} r_i a_i) = \sum_{i \in I} r_i g(a_i) = \sum_{i \in I} r_i f(a_i) = \tilde{f}(a)$. ■

La Proposición anterior es conocida por algunos autores como la propiedad universal de los módulos libres. Pero para fines del proyecto usaremos otra que es muy importante.

Corolario 1.2.2
Sea $X = \{a_i \in A | i \in I\}$ una base de un A R-módulo libre. Si $f, g : A \to B$, son morfismos de R-módulos tales que $f(a_i) = g(a_i)$ entonces $f = g$.

Proposición 1.2.3
Cada R-módulo M es cociente de un R-módulo libre.

Demostración. Consideremos a F como el módulo libre generado por la base de los elementos M (olvidandonos de la estructura aditiva y multiplicativa por escalares, a este conjunto se le conoce como UM donde U es "el funtor olvidadizo"), entonces $F = \coprod_{m \in UM} Rm$. Sea $f : UM \to M$ definida como $f(m) = m$ esto implica, por la Proposición 1.2.1, hay un morfismo de M $:\tilde{f}:F \to M$ el cual extiende a f, pero f es sobreyectiva, entonces $\tilde{f}$ también lo es. Por el primer Teorema de isomorfismos tenemos que $\tilde{f}(F)/\ker(\tilde{f}) \cong M$. ■

Proposición 1.2.4
Sea F un R-módulo libre, $g : B \to C$ es un morfismo suprayectivo y $f : F \to C$ es un morfismo. Entonces existe $\phi : F \to B$ tal que $g^\circ\phi = f$. Es decir el

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[d, "f"] & \\ B \arrow[r, two heads, "g"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Diagrama 1.2: Proyectividad de módulos libres

Diagrama 1.2 conmuta.

Demostración. Sea $X = \{x_i \in F | i \in I\}$ una base de F. Como g es suprayectiva para cada x_i en X, existe b_i en B, tal que $g(b_i) = f(x_i)$ entonces definimos $\psi : X \to B$ como $\psi(x_i) = b_i$. Entonces por la Propocisión 1.2.1 tenemos que existe $\phi : F \to B$ morfismo de R-módulos tal que extiende a ψ. Pero $g^\circ\phi(x_i) = g^\circ\psi(x_i) = g(b_i) = f(x_i)$, por el Corolario anterior tenemos que $g^\circ\phi = f$. ■

Definición 1.2.3 *Sea P un R-módulo decimos que P es proyectiv1o si cada que $g : B \to C$ sea un morfismo suprayectivo, y si $f : P \to C$ es un morfismo , entonces existe $\phi : P \to B$ tal que $g^\circ\phi = f$.*

Corolario 1.2.5
Sea F un R-módulo libre. Entonces F es un R-módulo proyectivo.

.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[d, "f"] & \\ B \arrow[r, two heads, "g"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Diagrama 1.3: Módulo proyectivo

Proposición 1.2.6
Sea P un R-módulo proyectivo. Si $P_1 \subset P$ es un sumando directo, entonces P_1 es R-módulo proyectivo.

Demostración. Consideremos los Diagramas 1.4 y 1.5: como P_1 es sumando

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[d, "f"] & \\ B \arrow[r, two heads, "g"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Diagrama 1.4: Diagrama de la Proposición 1.2.6

directo P, entonces podemos extender a f de la siguiente manera:

$\bar{f} : P = P_1 \oplus P_2 \to C$

como $(p_1, p_2) \longmapsto f(p_1)$, pero P es proyectivo entonces

$$\begin{tikzcd} & P_1 \oplus P_2 \arrow[dl, "\bar{\phi}"'] \arrow[d, "\bar{f}"] & \\ B \arrow[r, two heads, "g"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Diagrama 1.5: Suma directa de módulos proyectivos

Luego existe $\phi : P \to B$ la cual hace conmutar el Diagrama 1.5, pero $\phi|_{P_1} : P_1 \to B$ hace conmutar el Diagrama 1.4. Entonces P_1 es proyectivo. ■

Proposición 1.2.7
Sea P un R-módulo proyectivo, $f : B \to P$ es un morfismo suprayectivo de R-módulos. Entonces $B = \ker(f) \oplus P'$, donde $P' \cong P$.

Demostración. Para esta demostración podríamos usar muchas cosas,por ejemplo el Teorema de retractos, pero lo probaremos usando la definición. Consideremos el Diagrama 1.6:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl] \arrow[d] & \\ B \arrow[r, two heads, "f"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Diagrama 1.6: Diagrama de la Proposición 1.2.7

como Id_P es biyectiva en particular es inyectiva, entonces ϕ es inyectiva. Sea $P' =)Im(\phi) \cong P$ (por ser ϕ inyectiva).

1. $P' \cap \ker(f) = 0 \in B$. Si $b \in P' \cap \ker(f) \Longrightarrow f(b) = 0$, pero $b \in P' \cong P$ y $f_{P'} = \phi^{-1}$ (por la conmutatividad del diagrama)$\Longrightarrow b = 0$.

2. $P' + \ker(f) = B$, como f es suprayectiva tenemos que $B/\ker(f) \cong P$ con el isomorfismo inducido por f. Sea $b \in B$, entonces $\bar{f}([b]) = p \in P$. Pero $\phi(p) = p' \in P'$, y además $f^\circ\phi(p) = p$, lo cual implica que $[b-p'] \in \ker(f)$, entonces $b - p' = k \in \ker(f) \Longrightarrow b = p' + k \in P' + \ker(f)$.

Por lo anterior tenemos que $B = \ker(f) \oplus P'$. ■

Proposición 1.2.8
P es un R-módulo proyectivo si y sólo si es sumando directo de un R-módulo libre.

Demostración. Por la Proposición 1.2.3 tenemos que P es cociente de un módulo libre y por la Proposición anterior tenemos que P es sumando directo de cualquier módulo del cual sea cociente.▲

Para el regreso suponemos que P es un sumando directo de un módulo libre. Pero todo módulo libre es proyectivo, entonces por la Proposición 1.2.6 P es proyectivo.▲ ■

Capítulo 2

Anillo de funciones

En este capítulo veremos que cuando un espacio es compactos y Hausdorff entonces se puede reconstruir a partir de su anillo de funciones continuas (con valores reales o complejos). Para fines prácticos, consideraremos que $\mathbb{K}$ es el campo de los números reales o de los complejos, tomando en cuenta que éstos son espacios topológicos con la métrica euclidiana.

2.1. Anillo de funciones

Definición 2.1.1 *Sea X un espacio topológico no vacío. Denotamos por $C(X)$ el anillo de funciones continuas a $\mathbb{K}$, es decir,*

$$C(X) = \{f | f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{K}, \}$$

tal que f es continua.

Le queremos dar estructura de anillo conmutativo a $C(X)$ por lo que necesitamos definir las operaciones suma y producto.

Definición 2.1.2 *Definiremos las operaciones "+" y "·" que van de:*

$$\begin{array}{lccc} + : & C(X) \times C(X) & \longrightarrow & C(X) \\ \cdot : & C(X) \times C(X) & \longrightarrow & C(X) \end{array} \tag{2.1}$$

como:

.

1. $f+g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ *como* $f+g(x) = f(x)+g(x)$,
2. $f \cdot g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ *como* $f \cdot g(x) = f(x)g(x)$

Dichas operaciones están bien definidas ya que claramente son funciones continuas, porque la suma y el producto son continuas en $\mathbb{K}$*, y estas operaciones son una composición de funciones continuas. También utilizaremos la siguiente notación* $f^{\cdot}g = fg$

Lema 2.1.1
Sea X *un espacio topológico.* $(C(X), +, ^{\circ})$ *es un anillo conmutativo con 1*

Demostración. Sean $f, g, h \in C(X)$

1. $(C(X), +)$ es grupo abeliano:
   a) $(f+g)+h = f+(g+h)$, por la asociatividad de $\mathbb{K}$;
   b) $f+g = g+f$, por la conmutatividad de $\mathbb{K}$;
   c) $\bar{0} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ como $\bar{0}(x) = 0 \forall x \in X$ (la función constante, por lo tanto continua),$\bar{0} \in C(X)$; $f+\bar{0}(x) = f(x)+\bar{0}(x) = f(x)+0 = f(x), \bar{0}$ es el neutro.
   d) Sea $f \in C(X)$ entonces definimos $-f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ como $x \longmapsto -f(x)$ entonces $f+-f(x) = f(x)+(-f(x)) = 0 \forall x$, $x \in X. \Rightarrow f+-f = \bar{0}$.

   por lo tanto $(C(X), +)$ es grupo abeliano.
2. $(fg)h = f(gh)$ por la asociatividad de $\mathbb{K}$;
3. $fg = gf$ por la conmutatividad de $\mathbb{K}$;
4. $\bar{1} : X \longrightarrow \mathbb{K}$, como $\bar{1}(x) = 1 \forall x$, $x \in X$ (la función constante 1, por lo tanto continua); $f\bar{1}(x) = f(x)\bar{1}(x) = f(x)1 = f(x)$ lo que quiere decir que tiene neutro multiplicativo;
5. $f(g+h) = fg+fh$ por la distributividad de $\mathbb{K}$ tenemos que $\mathbb{C}(X)$ es un elemento de $AnC1$.

■

Definición 2.1.3 *Sea* $\phi : X \longrightarrow Y$ *una función continua. Definimos* $\phi^* : C(Y) \longrightarrow C(X)$ *como* $\phi^*(f) : f^{\circ}\phi$*. La función* $\phi^*(f)$ *está en* $C(X)$ *pues es la composición de funciones continuas.*

.

Lema 2.1.2
Sean X, Y espacios topológicos y $\phi : X \longrightarrow Y$ una función continua. Entonces $\phi^* : C(Y) \longrightarrow C(X)$ es un homomorfismo de anillos.

Demostración. Sea $f, g \in C(Y)$.

$$\begin{aligned} \phi^*(f+g)_{(x)} = f + g(\phi(x)) &= f(\phi(x) + g(\phi(x)) = f^\circ\phi(x) + g^\circ\phi(x) \\ &= \phi^*(f)_{(x)} + \phi^*(g)_{(x)} = (\phi^*(f) + \phi^*(g))_{(x)} \end{aligned}$$

por lo tanto ϕ^* es morfismo de grupos.

$$\begin{aligned} \phi^*(fg)_{(x)} &= fg(\phi(x)) = f(\phi(x))g(\phi(x)) \\ &= f^\circ\phi(x)g^\circ\phi(x) = \phi^*(f)_{(x)}\phi^*(g)_{(x)} \\ &= \phi^*(f)\phi^*(g)_{(x)} \end{aligned}$$

por lo tanto ϕ^* es morfismo de anillos conmutativos.

Sea $\bar{1} \in C(X)$ (la función constante 1) entonces $\phi^*(\bar{1})(x) = \bar{1}(\phi(x)) = 1$. Por lo tanto ϕ^* es morfismo de anillos conmutativos con 1. ■

Proposición 2.1.3
Tenemos un funtor contravariante de la categoría de espacios topológicos a la categoría de anillos conmutativos con 1, que asocia a $X \longmapsto C(X)$ y a $\phi : X \longrightarrow Y, \phi^* : C(Y) \longrightarrow C(X)$.

Demostración. Sean X, Y, Z espacios topológicos y $\phi : X \longrightarrow Y$ y $\psi : Y \longrightarrow Z$ continuas. Entonces $\phi^* : C(Y) \longrightarrow C(X)$ y $\psi^* : C(Z) \longrightarrow C(Y)$ implican que $\phi^{*\circ}\psi^* : C(Z) \longrightarrow C(X)$ si $f \in C(Z)$ entonces

$$\begin{aligned} \phi^* \circ \psi^*(f) &= \phi^*(\psi^*(f)) = \phi^*(f^\circ\Psi) \\ &= (f^\circ\psi)^\circ\phi = f^\circ(\psi^\circ\phi) = (\psi^\circ\phi)^*(f) \end{aligned}$$

claramente manda $Id : X \longrightarrow X$ en $Id : C(X) \longrightarrow C(X)$. ■

Luego, el funtor de la Proposición 2.1.3 es un invariante topológico, es decir, $X \cong Y \Rightarrow C(X) \simeq C(Y)$.

.

Notemos que si $f^{-1}(0) = \emptyset \iff f$ es invertible o unidad ya que si $f(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ está definido en $\mathbb{K}$. Entonces sea $f^{-1} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ como $f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ y esta función es continua ya que $\frac{1}{t}$ es continua y f^{-1} es la composición de funciones continuas.

Tenemos que $C(X)$ es un conjunto con muchas propiedades ya que le podemos dar estructura de $\mathbb{K}$ espacio vectorial definiendo la multiplicación por escalar como la multiplicación en la imagen.

Si $\mathbb{K}$ son los números reales le podemos construir un orden parcial de la siguiente manera $f \geq g$ si y sólo si $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el espacio, esta relación de orden se sigue del orden de los números reales. Además esta relación no varía bajo traslaciones. Es decir, $f \geq g \iff f + h \geq g + h$ para toda h en $C(X)$. Tiene una clase positiva la cual es cerrada bajo producto, si $f \geq \bar{0}$ y $g \geq \bar{0}$ implica que $fg \geq \bar{0}$.

2.2. Ceros de funciones

Definición 2.2.1 *Sea f en $C(X)$, definimos los ceros de f como $f^{-1}(0) = Z(f) = Z_X(f) = \{x \in X | f(x) = 0\}$. Si Y subconjunto de X, es un nulo si existe f en $C(X)$ tal que $Z_X(f) = Y$. Usaremos la siguiente notación, si E esta contenido en $C(X)$*

$$Z[E] = \bigcap_{f \in E} Z(f).$$

Proposición 2.2.1
X es completamente regular si y sólo si $\{Z(f) \subset X | f \in C(X)\}$ es una base de cerrados para la topología.

Demostración.

$\Rightarrow$ Sea $E \subset X$ un cerrado, entonces para toda x en el complemento de E existe f_x en $C(X)$ tal que $E \subset Z(f_x)$ y $f_x(x) = 1$ – por ser X completamente regular. Esto implica que $x \notin Z(f_x)$ entonces $E = \bigcap_{x \in E^c} Z(f_x)$.▲

$\Leftarrow$ Si E es un cerrado y x pertenece E^c entonces $E = \bigcap_{i \in I} Z(f_i)$ entonces existen i en I y f_i en $C(X)$ tales que $f_i(x) = a \neq 0$ y $f_i(E) = 0$.

Por lo tanto X es completamente regular.▲

.

■

Proposición 2.2.2
Sea X un espacio topológico, f, g en $C(X)$;

1. $Z(f) = Z(f^2) = Z(f^n) = Z(|f|)$ *para toda* n *en* $\mathbb{N}$, *para compleja* $Z(f) = Z(f^-)$;
2. $Z(\bar{0}) = X$;
3. $Z(\bar{1}) = \emptyset$;
4. $Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$;
5. $Z(ff^- + gg^-) = Z(|f| + |g|) = Z(f) \cap Z(g) = Z(ff^-) \cap Z(gg^-)$.

Demostración.

4. Supongamos que x pertenece a $Z(fg)$, entonces $fg(x) = f(x)g(x) = 0$ y como K es un campo tenemos que $f(x) = 0$ o $g(x) = 0$, por lo tanto x está en $Z(f)$ o $Z(g)$ con lo cual x pertenece a $Z(f) \cup Z(g)$.

Supongamos que $x \in Z(f) \cup Z(g)$, entonces x pertenece a $Z(f)$ o $Z(g)$ lo que quiere decir que $f(x) = 0$ o $g(x) = 0$, por lo tanto $fg(x) = 0$ lo cual significa x está en $Z(fg)$.

1. Por inducción sobre n. Si $n = 1$ es trivial. Supongamos que $Z(f) = Z(f^{n-1})$. Entonces por la 4, $Z(f^n) = Z(ff^{n-1}) = Z(f) \cup Z(f^{n-1}) = Z(f)$ por la hipótesis de inducción.

Si x pertenece a $Z(f^-)$, si y sólo si $f^-(x) = 0 = f(x)$ si y sólo si x está en $Z(f)$.

5. Supongamos que $x \in Z(ff^- + gg^-)$, entonces $ff^- + gg^-(x) = ff^-(x) + gg^-(x)$, pero $ff^-(x)$ y $gg^-(x)$ son mayores o iguales que cero (en los reales), así que $ff^-(x) = gg^-(x) = 0$ y por 1) x pertenece a $Z(f) \cap Z(g)$. La otra contención está dada porque si x está en $Z(f) \cap Z(g)$, entonces x se encuentra en $Z(ff^-) \cap Z(gg^-)$ con lo cual tenemos que $ff^-(x) + gg^-(x) = 0$, por lo tanto x pertenece a $Z(ff^- + gg^-)$

Supongamos x pertenece a $Z(|f| + |g|)$, entonces $|f| + |g|(x) = |f|(x) + |g|(x)$, pero $|f|(x)$ y $|g|(x)$ son mayores o iguales que cero (en los reales), así que $|f|(x) = |g|(x) = 0$ pero ésto pasa si y sólo si $f(x) = g(x) = 0$ si y sólo si x está en $Z(f) \cap Z(g)$ con lo que queda demostrado el Teorema.

.

■

Proposición 2.2.3
Sea X compacto e $I \subsetneq C(X)$ un ideal. Entonces $\mathrm{Z}[I] \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $f_1, f_2, \ldots, f_n \in I$; $\mathrm{Z}(f_1) \cap \mathrm{Z}(f_2) \ldots \cap \mathrm{Z}(f_n) = \mathrm{Z}(f_1 f_1^- + f_2 f_2^- + \ldots + f_n f_n^-)$ donde $g \in I$ entonces $\mathrm{Z}(g) \neq \emptyset$, luego $\{Z(f), f \in I\}$ tiene la propiedad de la intersección finita.Ésto implica que $\mathrm{Z}[I] \neq \emptyset$. ■

Definición 2.2.2 *Sean X un espacio topológico, y p un punto en X, denotamos M_p al conjunto de todas las funciones que se anulan en p es decir:*

$$\mathfrak{M}_p = \{f \in C(X) | f(p) = 0\}. \tag{2.2}$$

Lema 2.2.4
Sea X un espacio topológico y p un punto en X. Entonces $\mathfrak{M}_p$ es un ideal de $C(X)$.

Demostración. Si f y g están en $\mathfrak{M}_p$ entonces $f(p) = g(p) = 0$ con lo que $f - g(p) = f(p) - g(p) = 0$ por lo tanto $f - g$ está en $\mathfrak{M}_p$.

Supongamos que f está en $\mathfrak{M}_p$ y que $g \in C(X)$ entonces p pertenece a $Z(fg)$ por la Proposición 2.2.2. Con lo que concluimos que $\mathfrak{M}_p$ es ideal. ■

Proposición 2.2.5
Sea p en X. Entonces $\mathfrak{M}_p$ es un ideal maximal de $C(X)$.

Demostración. Definimos $\phi : C(X)/\mathfrak{M}_p \longrightarrow \mathbb{K}$.[1] de la siguiente manera $\phi(f + \mathfrak{M}_p) = f(p)$, esta función está bien definida ya que si

$$\begin{aligned} f \sim h &\iff f - h \in \mathfrak{M}_p \\ &\iff (f - h)(p) = 0 \\ &\iff f(p) - h(p) = 0 \\ &\iff f(p) = h(p). \end{aligned}$$

Luego ϕ es homomorfismo entre anillos dado que

1. $\phi(f + g + \mathfrak{M}_p) = (f + g)(p) = f(p) + g(p) = \phi(f + \mathfrak{M}_p) + \phi(g + \mathfrak{M}_p)$,

[1] $C(X)/\mathfrak{M}_p = \{f + \mathfrak{M}_p | f \in C(X)\}$

.

2. $\phi(f \cdot g + \mathfrak{M}_p) = (f \cdot g)(p) = f(p)g(p) = \phi(f + \mathfrak{M}_p)\phi(g + \mathfrak{M}_p)$,

3. $\phi(\bar{1} + \mathfrak{M}_p) = \bar{1}(p) = 1$;

Además ϕ es inyectiva ya que si

$$\begin{aligned}\phi(\bar{f}) = \phi(\bar{h}) &\iff f(p) = h(p)\\ &\iff f - h(p) = 0\\ &\iff f \sim h.\end{aligned}$$

Y ϕ es sobre ya que si se toma un elemento r en $\mathbb{K}$ entonces ϕ evaluada en la clase de equivalencia de $\bar{r}$[2] es igual a r, es decir $\phi(\bar{r} + \mathfrak{M}_p) = r$. Luego ϕ es isomorfismo. Por lo tanto $\mathfrak{M}_p$ es maximal. ■

Proposición 2.2.6
Sea X compacto y Hausdorff, $\mathfrak{M}$ un ideal maximal de $C(X)$. Entonces $Z[\mathfrak{M}]$ consiste de un sólo elemento de X.

Demostración. Supongamos que $p \neq q$ y que p, q en $Z[\mathfrak{M}]$ entonces existe f en $\mathfrak{M}_p$ tal que $f(p) = 0$ y $f(q) = 1$ por ser X completamente regular. Luego $\mathfrak{M}_p \supsetneq \mathfrak{M}$ ya que $f(q) \neq 0$. ■

Corolario 2.2.7
Definimos

$$\begin{aligned}&\Psi : X \longrightarrow S_{max}(C(X)) \quad \text{como}\\ &p \longmapsto \mathfrak{M}_p\end{aligned} \tag{2.3}$$

Si X es compacto la función Ψ es biyectiva.

Demostración. En base a las proposiciones 2.2.6 y 2.2.5 la demostración es inmediata. ■

2.2.8 Teorema
Sean X y Y espacios topológicos compactos y Hausdorff, X es homeomorfo a Y si y sólo si los anillos $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos.

Demostración.

[2] $\bar{r} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ definida como $\bar{r}(x) = r$

$\Rightarrow$ Un sentido de la doble implicación es claro, ya que si X es homeomorfo a Y por la Proposición 2.1.3 tenemos que un funtor contravariante de la categoría de espacios topológicos a la de anillos conmutativos con uno, por lo que espacios homeomorfos se les asocian anillos isomorfos.▲

$\Leftarrow$ Por el Corolario 2.2.7 la función $\Psi : X \longrightarrow S_{max}(C(X))$, ver ecuación 2.3, es una biyección. Demostraremos que Ψ es un homomorfismo:

1. Ψ ES CONTINUA. Sea $V(f)$ un elemento de la base de cerrados (ver 1.1.7) entonces demostraremos que $\Psi^{-1}(V(f)) = Z(f)$. Supongamos que $p \in \Psi^{-1}(V(f)) \Longleftrightarrow \Psi(p) \in V(f) \Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \mathfrak{M}_p \in V(f) \\ &\Longleftrightarrow f \in \mathfrak{M}_p \\ &\Longleftrightarrow f(p) = 0 \\ &\Longleftrightarrow p \in Z(f) \end{aligned}$$

2. Ψ ES CERRADA. Como Ψ es biyectiva entonces basta con probar que Ψ manda elementos básicos cerrados en cerrados. Como X es compacto y Hausdorff, X es completamente regular.
   Sea $f \in C(X)$ entonces $\mathfrak{M}_p \in \Psi(Z(f)) \Longleftrightarrow p \in Z(f) \Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow f(p) = 0 \\ &\Longleftrightarrow f \in \mathfrak{M}_p \\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{M}_p \in V(f). \end{aligned}$$

   Por lo tanto:

$$\Psi(Z(f)) = V(f). \tag{2.4}$$

Por lo tanto Ψ es homeomorfismo. Por el Teorema 1.1.11 $S_{max}(C(X))$ es homomorfo a $S_{max}(C(Y))$. Luego se concluye que X es homeomorfo a Y.▲■

.

Capítulo 3

Haces vectoriales y módulos de secciones

La idea de haces vectoriales viene de generalizar el concepto de haz tangente de una variedad. En este capítulo definiremos y estudiaremos los haces vectoriales y los morfismos que hay en esta categoría. Daremos condiciones suficientes para poder construir una métrica Riemanniana, y veremos algunas propiedades del módulo de seccioón de los haces vectoriales, incluyendo una caracterización de los segundos en términos de los primeros. Al igual que en el capítulo anterior $\mathbb{K}$ denota a los $\mathbb{R}$ o a los $\mathbb{C}$.

3.1. Morfismos entre haces vectoriales

Definición 3.1.1 *Un $\mathbb{K}$-**haz vectorial** ξ sobre un espacio topológico X consta de un espacio $E(\xi)$ (**espacio total**), una función continua y sobre $p : E(\xi) \to X$ (llamada **proyección**) , y que en cada fibra $p^{-1}(x) = F_x(\xi)$ (denotada como F_x si no es necesario especificar el haz), tiene una estructura de espacio vectorial de dimensión finita. Estos objetos necesitan satisfacer las siguientes condiciones:*

1. *Para cada x en X, existe una vecindad U_x de x, un número natural n y un homeomorfismo $\phi_x : p^{-1}(U_x) \to U_x \times \mathbb{K}^n$ tal que el siguiente diagrama conmuta[1] Al conjunto $\{(U_x, \phi_x) | x \in X\}$ se le conoce como sistema trivializador y a los abiertos del sistema se les conoce como cubierta trivializadora.*

[1]Se denot/'o $\mathrm{Res}(p) = p|_{p^{-1}(U)}$

$$
\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_x) \arrow[rr, "\phi", "x"'] \arrow[dr, "\mathrm{Res}(p)"'] & & U_x \times \mathbb{K}^n \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& U_x &
\end{tikzcd}
$$

Diagrama 3.1: Diagrama de haces.

2. *Para cada y en U_x, $\phi_x|_{p^{-1}(y)} : p^{-1}(y) \longrightarrow \{y\} \times \mathbb{K}^n$ es un isomorfismo de $\mathbb{K}$ espacios vectoriales.*

La dimensión de cada fibra es localmente constante, así que es constante en cada componente conexa de X. Si X es conexo entonces es constante.

Definición 3.1.2 *Un subhaz vectorial de ξ consta de un subconjunto $E_1 \subset E(\xi)$ tal que para cada x en X, la $E_1 \cap F_x(\xi)$ es un $\mathbb{K}$-subespacio vectorial. Además se tiene que $p|_{E_1}$ es un haz vectorial con la estructura de subespacio vectorial en cada fibra inducida por ξ.*

Definición 3.1.3 *Un morfismo de $\mathbb{K}$-haces vectoriales $f : \xi \to \eta$ se define como una función continua de $f : E(\xi) \to E(\eta)$ tal que el siguiente diagrama conmuta y $f|_{F_x(\xi)} : F_x(\xi) \to F_x(\eta)$ es una función lineal de $\mathbb{K}$ espacio vectorial.*

$$
\begin{tikzcd}
E(\xi) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E(\eta) \arrow[dl, "p'"] \\
& X &
\end{tikzcd}
$$

Diagrama 3.2: Morfismo de $\mathbb{K}$-haces vectoriales.

Definición 3.1.4 *Una sección de ξ sobre $A \subset X$ subconjunto, es un función continua $s : A \to E(\xi)$ tal que $p^\circ s(x) = Id_X(x) = x$*

Definición 3.1.5 *Sea ξ un haz vectorial, decimos que una familia de secciones $\{s_1, \dots, s_n\}$ son una base local sobre x, si existe una vecindad U de x tal que para cada y en U, se tiene que $\{s_1(y), \dots, s_n(y)\}$ es una base $F_y(\xi)$.*

Siempre existe una base local sobre cada punto x, ya que hay una vecindad U y un homeomorfismo $\phi : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{K}^n$ de manera que tomando las secciones $\sigma_i(y) = (y, e_i)$ con $i = 1, \dots, n$; donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{K}^n$. Se puede definir $s_i = \phi^{-1\circ}\sigma_i$ formando una base local.

.

Entonces si s es una sección de ξ sobre U se tiene que $s(y) = a_1(y)s_1(y) + \ldots + a_n(y)s_n(y)$ donde $a_i(y) \in \mathbb{K}$ y la suma está definida en el $\mathbb{K}$-haz vectorial de $F_y(\xi)$, además como s es continua se tiene que a_i es continua.

Lema 3.1.1 (Cambio de coordenadas)
Si $\{s_1, \ldots, s_n\}_U$ *es una base local de* x *y* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *es la base canónica* $\Longrightarrow$ $\exists A : U \to \mathbb{GL}_n\mathbb{K}$ *continua tal que* $s_j = A \cdot e_j$

Demostración. $S_i(y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(y)e_j(y)$ entonces $y \xrightarrow{A} (a_{ij}(y))$ pero $(a_{ij}(y)) \in \mathbb{GL}_n\mathbb{K}$ por lo tanto$A$ es continua tal que entrada por entrada es continua. ∎

Observemos que de la demostración anterior se deduce que A^{-1} también es continua porque $\mathbb{GL}_n\mathbb{K}$ es un grupo topológico. De manera análoga si $s_1, \ldots, s_n$ es una base local de ξ en x y $t_1, \ldots, t_n$ es una base local de η en x y $f : \xi \to \eta$ es lineal en fibras entonces es una vecindad de x, $f(s_i(y)) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(y)t_j(y)$ y si f es continua entonces a_{ij} son continuas. Si además $f : \xi \to \eta$ es biyectiva entonces tenemos que $A(y) = (a_{ij}) \in \mathbb{GL}_n\mathbb{K}$. Lo cual generaliza el Lema de Cambio de Coordenadas a isomorfismos entre haces vectoriales.

Entoces se tiene que existe $A^{-1} : U \cap V \to \mathbb{GL}_n\mathbb{K} \Longrightarrow f^{-1}(t_i(y)) = \sum_{j=1}^{n} a *_{ij}(y)s_j(y)$ y $a*_{ij}$ es continua $\forall i, j \Longrightarrow f^{-1}|_{U\cap V}$ es continua y como $f^{-1}|_{U\cap V}$ es continua en una cubierta, $\Longrightarrow f^{-1}$ es continua.

Lema 3.1.2
Sean $t_1, \ldots, t_k$ *secciones de* ξ *sobre* U *vecindad de* x *tal que* $t_1(x), \ldots, t_k(x)$ *son linealmente independientes, entonces existe una vecindad* V *de* x *tal que para toda* y *en* V, $t_1(y), \ldots, t_k(y)$ *son linealmente independientes.*

Demostración. Sean $s_1, \ldots, s_n$ una base local de x entonces $t_i(y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(y)s_j(y)$ para toda y en una vecindad de x. Ésto implica que hay una submatriz $A'(x)$ de (a_{ij}) de dimensión $k\times k$ no es singular (*i.e.* $\det A' \neq 0$). Entonces como el determinante es una función continua tenemos que existe V, vecindad de x tal que $\det A'(y) \neq 0, \forall y, y \in V$. Luego se deduce que $t_1(y), \ldots, t_k(y)$ es linealmente independiente sí $y \in V$. ∎

3.1.3 Teorema
Sea $f : \xi \to \eta$ *un morfismo de haz vectoriales entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $\mathrm{Im} f$ *es un subhaz de* η.

.

2. $\ker f$ *es un subhaz de* ξ*.*

3. La dimensión de las fibras de la $\mathrm{Im} f$ *es localmente constante.*

4. La dimensión de las fibras de el $\ker f$ *es localmente constante.*

Demostración.

3) $\Leftrightarrow$ 4)**:** Tenemos que $F_x(\xi)$ y $F_x(\eta)$ son espacio vectoriales y $f|_{F_x(\xi)}$ es lineal. Entonces

$$\dim(F_x(\xi)) = \dim(\mathrm{Im}(f|_{F_x(\xi)})) + \dim(\ker(f|_{F_x(\xi)})) \tag{3.1}$$

Como $\dim(E(\xi))$ es localmente constante luego $\dim(\mathrm{Im}) f$ es localmente constante si y sólo si $\dim(\ker(f))$ es localmente constante de manera análoga el regreso. ▲

1) $\Rightarrow$ 3) **y** 4)**:** Como la $\mathrm{Im} f$ es un subhaz de η entonces la $\dim(\mathrm{Im}(f))$ es localmente constante de manera análoga 2) $\Rightarrow$ 3) y 4). ▲

3) $\Rightarrow$ 1) : Primero vamos a demostrar que para toda x en X existe una base local de $\mathrm{Im} f$. Sean $s_1, \ldots, s_m$ una base local de x en ξ. Sea k la dimensión de la fibra de $\mathrm{Im}(f)$ en x. Supongamos $f(s_1(x)), \ldots, f(s_k(x))$ son linealmente independientes en $F_x(\mathrm{Im}(f))$. Sea $t_1, \ldots, t_n$ una base local de η en x y que están ordenadas tal que $f^\circ s_1(x), \ldots, f^\circ s_k(x), t_{k+1}(x), \ldots, t_n(x)$ son linealmente independientes, por el Lema 3.1.2 existe una vecindad de x donde son una base local sobre el haz η. Entonces $fs_1, \ldots, fs_k$ son una base local de $\mathrm{Im}(f)$ restringidas a una vecindad de x y con esto es claro que $\mathrm{Im}(f)$ es un subhaz de η. ▲

3) $\Rightarrow$ 2) : Sean $s_1, \ldots, s_n$ la base local de x en ξ como en la parte anterior (i.e. $f^\circ s_1, \ldots, f^\circ s_k$ son una base local de x en V de la imagen de f). Entonces $f(s_i)(x) = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(x)^\circ f(s_j(x)), \forall i, i > k$. Notemos que $s_i^* = s_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} s_j$ está en el $\ker(f)$ porque $f(s_i^*(y)) = f(s_i - \sum a_{ij} s_j(y)) \forall y \in V$ pero f es un morfismo de haces vectoriales $\Rightarrow$ f es lineal en fibras $\Rightarrow$ $f(s_i^*(y)) = f(s_i(y)) - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(y) f(s_j(y)) \forall y \in V$ y $\forall i > k$. Por lo tanto s_i^* si $i > k$ está en el kernel de f.

Ahora bien $s_{k+1}^*, \ldots, s_m^*$ son linealmente independientes $\forall y$. Ya que si $y \in V$ se tiene $\alpha_{k+1}(y) s_{k+1}^*(y) + \ldots + \alpha_m(y) s_m^*(y) = 0$. Con lo que

.

tendríamos que:

$$\bar{0} = \alpha_{k+1}(y)s_{k+1}(y) - \sum_{j=1}^{k} a_{k+1}\alpha_{k+1}(y)s_j(y) + \ldots + \alpha_m(y)s_m(y)$$
$$- \sum_{j=1}^{k} a_{mj}(y)\alpha_m(y)s_j(y).$$

Después ordenamos y reagrupamos y obtenemos que

$$\bar{0} = \beta_1(y)s_1(y) + \ldots + \beta_k(y)s_k(y) + \alpha_{k+1}(y)s_{k+1}(y) + \ldots + \alpha_m(y)s_m(y)$$

donde $\beta_j(y) = \sum_{i=k+1}^{m} a_{ij}^{(y)}\alpha_i(y)$ pero 0 está en combinación lineal en $F_y(\xi)$ y $\{s_i\}_{i=1}^{m}$ es linealmente independiente $\Rightarrow$ $\alpha_i = 0 \forall i > k$ y $\beta_j = 0 \forall j \leq k$ además esto es para toda $y \in V$. Por lo tanto $s_{k+1}^*, \ldots, s_m^*$ son linealmente independientes.

Luego, como $\dim F_y(\xi) = \dim(\Im f) + \dim(\ker f)$ entonces $\{s_j^*(y)\}_{j=k+1}^{m}$ generan el $\ker f(y) \forall y \in V$. Por lo tanto $s_{k+1}^*, \ldots, s_m^*$ son una base local X en el $\ker f$. Con lo que concluimos f es un subhaz vectorial de ξ.

▲ ■

Corolario 3.1.4
Sean ξ, η haces vectoriales, si $f : \xi \to \eta$ es un morfismo de haces vectoriales que hace conmutar el diagrama 3.2, tal que $dim_{\mathbb{K}} F_x(Im(f)) = k$. Entonces la $dim_{\mathbb{K}} F_y(Im(f)) \geq k$ para toda y en alguna vecindad de x.

Demostración. Por 3) $\Rightarrow$ 1) del Teorema 3.1.3 tenemos que $f^\circ s_1(x), ... f^\circ s_k(x)$, son linealmente independientes y se pueden extender a una base de $F_x(\eta)$. Entonces $f^\circ s_1(x), ... f^\circ s_k(x), t_{k+1}(x), ... t_n(x)$ son una base, la cual por el Lema 3.1.2 son una base local. Por lo que la $dim_{\mathbb{K}} F_y(Im(f)) \geq k$ si y está en el abierto donde las secciones anteriores son base. ■

En general, no es cierto que un morfismo de haces vectoriales tiene al kernel y a la imagen en la categoría de haces vectoriales. Por ejemplo si $X = I$ donde, $I = [0, 1]$, $\xi = I \times \mathbb{K}$ con $p(x, y) = x$, y considérese la función $f : \xi \longrightarrow \xi$ definida de la siguiente forma $f(x, y) = (x, xy)$. Claramente el diagrama de la Figura 3.3 conmuta, pero la imagen de f en cada fibra es de dimensión 1, excepto en $x = 0$ donde la dimensión de la fibra de la imagen es cero. Entonces Imf no puede ser un subhaz vectorial porque la Imf tendría que tener estructura de haz y la dimensión no es localmente constante.

.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I}\times\mathbb{K} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathrm{I}\times\mathbb{K} \arrow[dl, "p"] \\ & \mathrm{I} & \end{tikzcd}$$

Diagrama 3.3: Diagrama del ejemplo

Proposición 3.1.5
Sean V, W espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente. Consideremos $L(V,W)$ el espacio vectorial de las funciones lineales de V en W con su topología natural. Sea X un espacio topológico. Entonces una función $A : X \to L(V,W)$ es continua si y sólo si la función $a : X \times V \longrightarrow W$ es continua donde $a(x,v) = A(x)(v)$.

Demostración.

$\Rightarrow$ Supongamos que A es continua y consideremos la composición

$$X \times V \to L(V,W) \times V \to V$$

definidas como:

$$(x,v) \to (A(x),v) \to A(x)(v).$$

Entonces la primera es continua por hipótesis y la segunda es continua por la bilinealidad. Por lo tanto a es continua.▲

$\Leftarrow$ Supongamos que a es continua y sean $\{v_1,\dots,v_n\}$ una base de V y $\{w_1,\dots,w_m\}$ una base de W. Luego $A : X \to L(V,W)$ es continua si las entradas de A en la representación matricial de cada $A(x)$ es continua. Consideremos una pareja (i,j) y la función de X en K dada por

$$x \to < a(x,u_j), w_i > = < A(x)(u_j), w_i >,$$

donde $<,>$ es el producto interior en W definido por la base $\{w_1,\dots,$ $w_m\}$ y la entrada (i,j) de la matriz $A(x)$ es $< A(x)(u_j), w_i >$. Pero dado que a es continua entonces cada entrada es continua. Por lo tanto A es continua. ▲

■

Proposición 3.1.6 (Isomorfismo de haces)
Sean $\xi = (E(\xi), p, X)$ y $\eta = (E(\eta), q, X)$ $\mathbb{K}$-haces vectoriales y $f : \xi \longrightarrow \eta$ un morfismo de haces. Si f es un isomorfismo en cada fibra entonces f es un isomorfismo de haces.

.

Demostración. Sean

$$\begin{array}{rcl} \phi : p^{-1}(U) & \xrightarrow{\cong} & U \times \mathbb{K}^n \\ \psi : q^{-1}(U) & \xrightarrow{\cong} & U \times \mathbb{K}^n \end{array} \tag{3.2}$$

trivializaciones locales de ξ y η respectivamente. Consideremos $\psi \cdot f \cdot \phi^{-1} : U \times \mathbb{K}^n \longrightarrow U \times \mathbb{K}^n$ que es de la forma $(x, w) \longmapsto (x, a(x, w))$ donde $a : U \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$.

Entonces tenemos que $f|_{p^{-1}(U)}$ es continua si y sólo si $\psi \cdot f \cdot \phi^{-1}$ es continua, que a su vez es contina si y sólo si a lo es. Entonces como ϕ, ψ y f son isomorfismos lineales en cada fibra entonces la restricción $a_x := a|_{\{x\}\times U} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ es un isomorfismo. Por lo tanto la función asociada a $A : U \longrightarrow \mathbb{GL}_n\mathbb{K} \subset L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$. Entonces por la Proposición 3.1.5 a es continua si y sólo si A es continua. Por ser $\mathbb{GL}_n\mathbb{K}$ un grupo topológico la función inversa es continua. Supongamos $U \xrightarrow{A} \mathbb{GL}_n\mathbb{K} \xrightarrow{-1} \mathbb{GL}_n\mathbb{K}$ es una función continua que representa al morfismo f^{-1}. Con lo que podemos concluir que f^{-1} es continua. ■

Definición 3.1.6 *Sean ξ y η $\mathbb{K}$-haces vectoriales. La suma de Whitney de ξ y η, que se denota como $\xi \oplus \eta$, es el haz vectorial cuyo espacio total es $E(\xi \oplus \eta) = \{(e_1, e_2) \in E(\xi) \times E(\eta) | p_\xi(e_1) = p_\eta(e_2)\}$. La proyección $p : E(\xi \oplus \eta) \longrightarrow X$ está definida como $p(e_1, e_2) = p_\xi(e_1) = p_\eta(e_2)$. Claramente $F_x(\xi \oplus \eta) = F_x(\xi) \times F_x(\eta)$, que es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.*

Para ver que es localmente trivial *tomemos $(U_\xi, \phi_\xi), (U_\eta, \phi_\eta)$, trivializaciones de ξ y η alrededor x respectivamente. Entonces:*

$$\begin{array}{rcl} \phi_\xi : p_\xi^{-1}(U_\xi) & \longrightarrow & U_\xi \times \mathbb{K}^n \quad \text{y} \\ \phi_\eta : p_\eta^{-1}(U_\eta) & \longrightarrow & U_\eta \times \mathbb{K}^m, \end{array} \tag{3.3}$$

que están definidas como:

$$\begin{array}{rcl} e_\xi & \longmapsto & (p_\xi(e_\xi), \tilde{\phi}_\xi(e_\xi)) \quad \text{y} \\ e_\eta & \longmapsto & (p_\eta(e_\eta), \tilde{\phi}_\eta(e_\eta)). \end{array} \tag{3.4}$$

Entonces $\tilde{\phi}_\xi$ y $\tilde{\phi}_\eta$ son continuas.

Definimos $\phi_\xi \times \phi_\eta : p_\xi^{-1}(U_\xi \cap U_\eta) \times p_\eta^{-1}(U_\xi \cap U_\eta) \longrightarrow (U_\xi \cap U_\eta)^2 \times \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$ *como* $(e_1, e_2) \longmapsto (p_\xi(e_1), p(e_2), \tilde{\phi}_\xi(e_\xi), \tilde{\phi}_\eta(e_\eta))$.

$\phi_\xi \times \phi_\eta$ es continua.

.

Entonces $\phi_\xi \times \phi_\eta|_{p^{-1}(U_\xi \cap U_\eta)} : p^{-1}(U_\xi \cap U_\eta) \longrightarrow (U_\xi \cap U_\eta)^2 \times \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$ *pero la imagen está en* $\triangle(U_\xi \cap U_\eta) \times \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$ *ya que si* $(e_1, e_2) \in E(\xi \oplus \eta)$ *entonces* $p_\xi(e_1) = p_\eta(e_2)$ *consideremos* $\pi^1 : \triangle(U_\xi \cap U_\eta) \times \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \longrightarrow U_\xi \cap U_\eta \times \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$ *como la proyección en las últimas tres coordenadas.*

Definimos $\phi_\xi \oplus \phi_\eta := \pi^1 \cdot (\phi_\xi \times \phi_\eta)$ *la cual es continua, por lo que* $\phi_\xi \oplus \phi_\eta$ *es un homeomorfismo y su inversa está dada por* $(x, v_1, v_2) \longmapsto \left(\phi_\xi^{-1}(x, v_1), \phi_\eta^{-1}(x, v_2)\right)$ *que es continua, dado que es continua entrada por entrada. Y claramente cumple con* $p|_{p^{-1}(U_\xi \cap U_\eta)} = \pi_1^\circ(\phi_\xi \oplus \phi_\eta)$. *Si* (e_1, e_2) *y* $(e_3, e_4) \in F_x(\xi \oplus \eta)$ *y* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tenemos que*

$$\begin{aligned}
\phi_\xi \oplus \phi_\eta\Big((e_1, e_2) + \lambda(e_3 + e_4)\Big) &= \phi_\xi \oplus \phi_\eta\Big((e_1 + \lambda e_3, e_2 + \lambda e_4)\Big) \\
&= \Big(x, \tilde{\phi}_\xi(e_1 + \lambda e_3), \tilde{\phi}_\eta(e_2 + \lambda e_4)\Big) \\
&= (x, \tilde{\phi}_\xi(e_1) + \lambda\tilde{\phi}_\xi(e_3), \tilde{\phi}_\eta(e_2) + \lambda\tilde{\phi}_\eta(e_4)) \\
&= \Big(x, \tilde{\phi}_\xi(e_1), \tilde{\phi}_\eta(e_2)\Big) + \Big(x, \lambda\tilde{\phi}_\xi(e_3), \lambda\tilde{\phi}_\eta(e_4)\Big) \\
&= \Big(x, \tilde{\phi}_\xi(e_1), \tilde{\phi}_\eta(e_2)\Big) + \lambda\Big(x, \tilde{\phi}_\xi(e_3), \tilde{\phi}_\eta(e_4)\Big) =
\end{aligned}$$

$$\phi_\xi \oplus \phi_\eta(e_1, e_2) + \lambda\phi_\xi \oplus \phi_\eta(e_3, e_4). \tag{3.5}$$

Por lo tanto $\phi_\xi \oplus \phi_\eta|_{F_x(\xi\oplus\eta)}$ *es* $\mathbb{K}$ *lineal pero* $\phi_\xi \oplus \phi_\eta|_{F_x(\xi\oplus\eta)}$ *es biyectiva, entonces es un isomorfismo de* $\mathbb{K}$ *espacios vectoriales.*

Definición 3.1.7 *Una métrica Riemanniana en un* $\mathbb{K}$*-haz vectorial* ξ *es una función continua* $(\ , \ ) : E(\xi \oplus \xi) \to \mathbb{K}$ *que tiene la propiedad de que* $(\ , \ )|_{F_x \times F_x} : F_x \times F_x \to \mathbb{K}$ *es un producto interior (o hermitiano). Es decir, que está dado por un producto interior* $(\ , \ )_x : F_x \times F_x \to \mathbb{K}$ *el cual varía continuamente en* x.

Lema 3.1.7
Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $(\ , \ ) : V \times V \to \mathbb{K}$ y $\langle \ , \ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ productos interiores (o hermitiano para el caso en el que $\mathbb{K}$ sea el campo de los complejos) definido positivo y sea α un real positivo entonces:

I. $\alpha(\ , \ ) : V \times V \to \mathbb{K}$ es un producto interior (o hermitiano)

II. $(\ , \ ) + \langle \ , \ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ es un producto interior (o hermitiano)

Demostración. Sean u, v, w en V, k en $\mathbb{K}$ y α un real positivo.

I.1. $(\alpha(v, w))^- = \alpha(v, w)^- = \alpha(w, v)$,

.

I.2. $\alpha(v, w+u) = \alpha((v,w)+(v,u)) = \alpha(v,w)+\alpha(v,u)$,

I.3. $\alpha(kv,w) = \alpha k(v,w) = k\alpha(v,w)$ y $\alpha(v,kw) = \alpha k^{-}(v,w) = k^{-}\alpha(v,w)$,

I.4. $\alpha(v,v) \geq 0$ ya que $\alpha > 0$, $(v,v) \geq 0$ y $\alpha(v,v) = 0$ si y sólo si $(v,v) = 0$ si y sólo si $v = 0$.

II.1. $((v,w)+\langle v,w\rangle)^{-} = (v,w)^{-} + \langle v,w\rangle^{-} = (w,v)+\langle w,v\rangle$,

II.2. $(v,w+u)+\langle v,w+u\rangle = (v,w)+(v,u)+\langle v,w\rangle+\langle v,u\rangle = (v,w)+(v,u)+\langle v,w\rangle+\langle v,u\rangle$,

II.3. $(kv,w)+\langle kv,w\rangle = k(v,w)+k\langle v,w\rangle = k((v,w)+\langle v,w\rangle)$ y $(v,kw)+\langle v,kw\rangle = k^{-}(v,w)+k^{-}\langle v,w\rangle = k^{-}((v,w)+\langle v,w\rangle)$,

II.4. $(v,v)+\langle v,v\rangle \geq 0$ ya que $(v,v) \geq 0$, $\langle v,v\rangle \geq 0$ y $(v,v)+\langle v,v\rangle = 0$ si y sólo si $(v,v) = 0$ y $\langle v,v\rangle = 0$ si y sólo si $v = 0$.

De manera inductiva podemos generalizar II del Lema 3.1.7) a una cantidad finita y posteriormente a una combinación lineal con escalares todos positivos. ■

Proposición 3.1.8
Sea ξ un $\mathbb{K}$-haz vectorial sobre un espacio paracompacto X. Entonces ξ tiene una métrica Riemanniana.

Demostración. Sea $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ un sistema trivializador de ξ. Definimos un producto interno en cada $p^{-1}(U_\alpha)$ de la siguiente manera:

Tenemos un homeomorfismo $\phi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^n$, que manda fibras en fibras mediante un isomorfismo $\mathbb{K}$ lineal. Sean v_1, v_2 vectores en $p^{-1}(x)$. Definimos $<v_1, v_2>_{\alpha,x} = <\pi\phi_\alpha(v_1), \pi\phi_\alpha(v_2)>$, donde $<,>$ es el producto interno estándar en $\mathbb{K}^n$ y $\pi : U_\alpha \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ es la proyección. Este producto interno es continuo ya que la función γ de

$$E(\xi \oplus \xi)_\alpha = \{(v_1, v_2) \in p^{-1}(U_\alpha) \times p^{-1}(U_\alpha) | p(v_1, v_2)\}$$

en $\mathbb{K}$ dada por $\gamma(v_1, v_2) = <v_1, v_2>_{\alpha, p(v_1)}$ es continua, pues es la composición de

$$E(\xi \oplus \xi)_\alpha \xrightarrow{f} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \xrightarrow{<1>} \mathbb{K},$$

.

donde $f(v_1, v_2) = (\pi\phi_\alpha(v_1), \pi\phi_\alpha(v_2))$ es claramente continua y $<,>$ es continua por ser bilineal.

Como X es paracompacto, podemos suponer que la cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es localmente finita y que tenemos una partición de la unidad $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, subordinada a esta cubierta. Definimos $<v_1, v_2>_\alpha = \sum_\alpha \lambda_\alpha(p(v_1))<v_1, v_2>_{\alpha,x}$. Para ver que este producto es continuo, veamos que sucede con un punto $x_o \in X$, entonces hay una vecindad V de x_0 que sólo intersecta a un número finito de soportes $sop(\lambda_{\alpha_i}) \subset U_{\alpha_i}, i = 1, \ldots, r$. Consideremos $V \cap U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_r} \equiv U$, entonces en el subespacio

$$E(\xi \oplus \xi)_U = \{(v_1, v_2) \in p^{-1}(U) \times p^{-1}(U) | p(v_1) = p(v_2)\}$$

tenemos que $<v_1, v_2> \sum_{i=1}^r \lambda_{\alpha_i} p(v_1)<v_1, v_2>_{\alpha_i,x}$, que por el Lema 3.1.7 es un producto interior y que es continuo, pues es una suma de funciones continuas. Como los abiertos $E(\xi \oplus \xi)_U$ cubren a $E(\xi \oplus \xi)$ el producto interno es continuo. ■

Definición 3.1.8 *Si ξ es un $\mathbb{K}$ haz vectorial sobre X con un producto interior $(\, , \,)$, y $\{s_1, s_2 : U \to E(\eta)\}$ son secciones tales que $(s_1, s_2) : U \to \mathbb{K}$ es la función constante cero, es decir $(s_1, s_2) = (s_1, s_2)(y) = 0$ para toda y en U entonces decimos que s_1, s_2 son secciones ortogonales.*

Definición 3.1.9 *Sea ξ un $\mathbb{K}$ haz vectorial sobre X con una métrica riemaniana $(\, , \,)$, y $\{v_i : U \to E(\eta) | 0 \leq i \leq n\}$ son una base local de x en X, decimos que $\{v_i : U \to E(\eta) | 0 \leq i \leq n\}$, son una base local ortogonal de x, si para todo $i \neq j$ se tiene que v_i, v_j son secciones ortogonales.*

3.2. Módulos de secciones y métricas riemannianas

Sea X un espacio y consideremos $C(X) = C_K(X)$ el anillo de funciones continuas de X al campo $\mathbb{K}$.

Definición 3.2.1 *Si ξ es un $\mathbb{K}$-haz vectorial sobre X, definimos $\Gamma(\xi)$ como el conjunto de todas las secciones de ξ sobre X.*

Proposición 3.2.1
$\Gamma(\xi)$ *es un* $C(X)$*-módulo.*

.

Demostración. Dadas s_1, s_2 secciones ξ, definimos $(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x)$. Para ver que $s_1 + s_2$ es una sección de ξ, observemos que *un sistema trivializador* $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ para ξ. Consideremos la composición $\phi_\alpha^\circ s_i|_{U_\alpha} : U_\alpha \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^n$, que es de la forma $\phi_\alpha^\circ s_i(x) = (x, \tilde{s}_i(x))$. Entonces tenemos funciones continuas:

$$U_\alpha \xrightarrow{\psi} U_\alpha \times \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \xrightarrow{id_{U_\alpha} \times S} U_\alpha \times \mathbb{K}^n, \tag{3.6}$$

donde $\psi(x) = (x, \tilde{s}_1(x), \tilde{s}_2(x))$ y S es la suma en $\mathbb{K}^n$. Por otro lado $\phi_\alpha^\circ(s_1+s_2)|_{U_\alpha} : U_\alpha \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^n$, está dado por

$$\begin{aligned} \phi_\alpha^\circ(s_1 + s_2)(x) &= \phi_\alpha(s_1(x) + s_2(x)) = \phi_\alpha s_1(x) + \phi_\alpha s_2(x) \\ &= (x, \tilde{s}_1(x)) + (x, \tilde{s}_2(x)) = (x, \tilde{s}_1(x) + \tilde{s}_2(x)) \\ &= (id_{U_\alpha} \times S)^\circ \psi(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\phi_\alpha \cdot (s_1 + s_2)|_{U_\alpha} \tag{3.7}$$

es continua. Como ϕ_α es un homeomorfismo $(s_1 + s_2)|_{U_\alpha}$ es continuo, entonces $s_1 + s_2$ es continua. ■

Proposición 3.2.2
Sea ξ un $\mathbb{K}$-haz vectorial sobre X. Sea $<,> : E(\xi \oplus \xi) \longrightarrow \mathbb{K}$ una métrica Riemanniana. Entonces existe

$$(,) : \Gamma(\xi) \times \Gamma(\xi) \longrightarrow C(X) \tag{3.8}$$

donde

$$(s_1, s_2) : X \longrightarrow \mathbb{K} \tag{3.9}$$

está definida como

$$\Big(s_1, s_2\Big)(x) = \Big(s_1(x), s_2(x)\Big)_x \tag{3.10}$$

Demostración. *Sean $s_1, s_2 \in \Gamma(\xi)$, consideremos $s : x \longrightarrow E(\xi \oplus \xi)$ como $x \longmapsto \Big(s_1(x), s_2(x)\Big)$. s es continua ya que es continua en $E(\xi) \times E(\xi)$. Tenemos que s es una sección de $\xi \oplus \xi$. Consideremos la siguiente composición*

$$X \xrightarrow{s} E(\xi \oplus \xi) \xrightarrow{<,>} \mathbb{K} \tag{3.11}$$

pues γ es continua y la composición es continua. Por lo tanto (s_1, s_2) es continua. ■

Proposición 3.2.3
Sea ξ un $\mathbb{K}$-haz vectorial sobre X. Sea $<,> : E(\xi \oplus \xi) \longrightarrow \mathbb{K}$ una métrica Riemanniana. Sean s_1, s_2, s_3 en $\Gamma(\xi)$ y $a(x)$ en $C(X)$. Entonces la ecuación 3.8 tiene las siguientes propiedades:

.

1. *$(s_1, s_2) = (s_2, s_1)^-$,*

2. *$(s_1, s_2 + s_3) = (s_1, s_2) + (s_1 + s_3)$,*

3. *$(as_1, s_2) = a(s_1, s_2)$ y $(s_1, as_2) = a^-(s_1, s_2)$,*

4. *Si s está en $\Gamma(\xi)$ tal que $s(x) \neq 0$ para toda x en X entonces $(s, s) \in C_{\mathbb{R}}(X)$ y $(s, s)(x) \geq 0$*

Demostración.

1. Sea x en X entonces $(s_1, s_2)(x) = (s_1(x), s_2(x))_x = (s_2(x), s_1(x))_x^- = (s_2, s_1)^-(x)$,

4. Sea x en X entonces $(s, s)(x) = (s(x), s(x))_x$, dado que es un producto interior (o hermitiano) está en $\mathbb{R}$ y es mayor igual que cero.

■

Lema 3.2.4
Γ es un funtor entre la categoría de $\mathbb{K}$-haces vectoriales sobre X y la categoría de $C(X)$-módulos

Demostración. Claramente Γ manda objetos en objetos, sólo falta ver que respeta las reglas de composición de dichas categorías.

1. Si $f : \xi \to \eta$ entonces se define $\Gamma(f) : \Gamma(\xi) \to \Gamma(\eta)$ de la siguiente manera
$$\Gamma(f)(s) = f^\circ s$$
la cual es claramente una sección ya que f es continua y manda fibras en fibras entonces $s(x) \in F_x(\xi)$ y $f(s(x)) \in F_x(\eta)$. Sea $a \in C(X)$, y $s_1, s_2 \in \Gamma(\xi)$ entonces $\Gamma(f)(as_1 + s_2)(x) = f(as_1 + s_2)(x) = f(a(x)s_1(x) + s_2(x)) = a(x)f(s_1(x)) + f(s_2(x)) = a(x)\Gamma(f)(s_1)(x) + \Gamma(f)(s_2)(x) = a(\Gamma(f)(s_1)) + \Gamma(f)(s_2)(x)$ por ser f lineal en fibras. Así que Γ manda morfismos en morfismos

2. Si $f : \xi \to \eta$ y $g : \eta \to \varsigma$ entonces $\Gamma(f^\circ g) : \Gamma(\xi) \to \Gamma(\varsigma)$ y por definición aplicado a una sección s en $\Gamma(\xi)$ tenemos que: $\Gamma(f^\circ g)(s) = (f^\circ g)^\circ s = f^\circ(g^\circ s) = f^\circ(\Gamma(g)(s)) = \Gamma(f)(\Gamma(g)(s)) = \Gamma(f)^\circ\Gamma(g)(s)$, así que respeta las reglas de composición.

.

3. Si $Id_\xi : \xi \to \xi$ es la identidad entonces $\Gamma(Id_\xi) : \Gamma(\xi) \to \Gamma(\xi)$ aplicada a una sección s sobre X tenemos que $\Gamma(Id_\xi)(s) = Id_\xi \circ s = s = Id_{\Gamma(\xi)}(s)$. Así que manda la identidad en la identidad.

■

Observación. Si ξ es el producto sobre X, es decir, $E(\xi) = X \times K^n$ entonces $\Gamma(\xi)$ es un $C(X)$-módulo libre con generadores $\bar{e}_i = (x, e_i)$ con $0 \leq i \leq n$, y e_i es el i-ésimo vector canónico de K^n. Si ξ es un haz trivial, ξ es isomorfo al haz producto y por el Lema 3.2.4 $\Gamma(\xi)$ es un $C(X)$-módulo libre.

Lema 3.2.5
Sea X un conjunto paracompacto y ξ es un $\mathbb{K}$ haz vectorial. Entonces para cada x en X existe una vecindad U de x y secciones $\{s_i : U \to E(\xi) | 0 \leq i \leq n\}$ *las cuales forman una base local ortonormal.*

Demostración. Sea (,) una méetrica riemaniana de ξ; si x está en X entonces, existe U vecindad de x y secciones $\{s_i : U \to E(\xi) | 1 \leq i \leq n\}$ las cuales forman una base local. Definimos el siguiente conjunto de funciones $\{s'_i : U \to E(\xi) | 0 \leq i \leq n\}$:

$$\begin{aligned}
s'_1 &= s_1, \\
s'_2 &= s_2 - \frac{(s_2, s'_1)}{(s'_1, s'_1)} s'_1, \\
s'_3 &= s_3 - \frac{(s_3, s'_2)}{(s'_2, s'_2)} s'_2 - \frac{(s_3, s'_1)}{(s'_1, s'_1)} s'_1, \\
\vdots &= \vdots \\
s'_n &= s_n - \frac{(s_n, s'_{n-1})}{(s'_{n-1}, s'_{n-1})} s'_n - \ldots - \frac{(s_n, s'_1)}{(s'_1, s'_1)} s'_1.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Primero tenemos que demostrar que estas funciones están bien definidas, que para toda y en U , $s'_i(y) \neq 0$, que $\{s'_i(y) | 1 \leq i \leq n\}$ es linealmente independiente y $s'_i(y)$ es una combinación lineal de $\{s_i, s_{i-1}, ...s_1\}$, para esto lo haremos de manera inductiva:

s'_1 claramente está bien definida ya que $s'_1 = s_1$, ademáses evidente que s_1 es linealmente independiente para toda y en U, lo cual implica que $s_1(y) \neq 0$. y $s'_1(y)$ es una combinación lineal de s_1.

s'_2 está bien definida ya que si y esta en U entonces $(s'_1, s'_1)(y) = (s'_1(y), s'_1(y)) = (s_1(y), s_1(y)) \neq 0$ el producto interior del haz vectorial es un producto interior definido positivo para cada fibra, y como $s_1(y)$ esta en la base del espacio F_y tenemos que $s_1(y) \neq 0$.

Además $s_2'(y) \neq 0$ ya que si no

$$0 = s_2'(y) = s_2(y) - \frac{(s_2, s_1')}{(s_1', s_1')}(y)s_1'(y) = s_2(y) - \frac{(s_2, s_1')}{(s_1', s_1')}(y)s_1(y),$$

sería una combinación lineal del cero en F_y y esto contradice al hecho de que s_1, s_2 son linealmente independientes en F_y.

Si λ_1, λ_2 están en $\mathbb{K}$ y se tiene que $0 = \lambda_1 s_1'(y) + \lambda_2 s_2'(y)$ es una combinación lineal entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 s_1(y) + \lambda_2(s_2(y) - \frac{(s_2, s_1')}{(s_1', s_1')}s_1(y)) \\ &= \lambda_1 s_1(y) + \lambda_2 s_2(y) - \lambda_2 \frac{(s_2, s_1')}{(s_1', s_1')}(y)s_1(y) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2 \frac{(s_2, s_1')}{(s_1', s_1')}(y))s_1(y) + \lambda_2 s_2(y) \end{aligned}$$

es una combinación lineal de cero en términos de s_1 y s_2. Por lo que podemos decir que $\lambda_1 - \lambda_2 \frac{(s_2, s_1')}{(s_1', s_1')}(y)$, $\lambda_2 = 0$. Lo cual implica que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$. Entonces el conjunto $\{s_1(y), s_2(y)\}$ es linealmente independiente.

Y claramente $s_2'(y)$ es una combinación lineal de $s_1(y)$ y $s_2(y)$.

Suponemos que el Teorema es cierto para las $i \leq n-1$; Es decir que s_i' está0 bien definida, $(s_i'(y), s_i'(y)) \neq 0$, y que $\{s_i'(y) | i \leq n-1\}$ es linealmente independiente para toda y en U.

Entonces como $(s_i'(y), s_i'(y)) \neq 0$ está bien definida s_n'.

$s_n'(y) \neq 0$ ya que si

$$\begin{aligned} 0 &= s_n'(y) = s_n(y) - \frac{(s_n, s_{n-1}')}{(s_{n-1}', s_{n-1}')}(y)s_{n-1}'(y) - \ldots - \frac{(s_n, s_1')}{(s_1', s_1')}(y)s_1'(y) \\ &= s_n(y) + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{n-1,j}(y)s_j(y) + \ldots + \lambda_{1,1}(y)s_1(y) = s_n(y) + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i(y)s_i(y) \end{aligned}$$

.

la cual sería una combinación lineal de cero con elemento de $\{s_n(y), s_{n-1}(y), ..., s_1(y)\}$ no trivial ya que el coeficiente de $s_n(y)$ es uno.

Como $s'_n(y)$ esta en F_y claramente es una combinación lineal de elementos de $\{s_n(y), s_{n-1}(y), ..., s_1(y)\}$. y como $s_n(y) \neq 0$ tenemos que $(s'_n(y), s'_n(y)) \neq 0$

Si λ_i son escalares en $\mathbb{K}$ tales que

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s'_i(y) = \lambda_n s'_n(y) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i s'_i(y) \\
&= \lambda_n (s_n(y) - \frac{(s_n, s'_{n-1})}{(s'_{n-1}, s'_{n-1})}(y) s'_{n-1}(y) - ... - \frac{(s_n, s'_1)}{(s'_1, s'_1)}(y) s'_1(y)) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i s'_i(y) \\
&= \lambda_n s_n(y) + \lambda_n \frac{(s_n, s'_{n-1})}{(s'_{n-1}, s'_{n-1})}(y) s'_{n-1}(y) - ... - \lambda_n \frac{(s_n, s'_1)}{(s'_1, s'_1)}(y) s'_1(y) \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \sum_{j=1}^{i} \delta_j(y) s_j(y) \\
&= \lambda_n s_n(y) + \sum_{i=1}^{n-1} \tau(\lambda_i, y) s_i(y),
\end{aligned}
$$

con $\tau(\lambda_i, y)$, $\delta_j(y)$ en $\mathbb{K}$. Lo cual implica que $\lambda_n = 0$ ya que $\{s_n(y), s_{n-1}(y), ..., s_1(y)\}$ es linealmente independiente en F_y. Entonces tenemos que $0 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i s'_i(y)$ pero por hipótesis de inducción $\{s'_{n-1}(y), s'_{n-2}(y), ..., s'_1(y)\}$ son un conjunto linealmente independiente. Se sigue que $\lambda_i = 0$ para $i \leq n-1$, y como $\lambda_n = 0$, tenemos que $\{s'_n(y), s'_{n-1}(y), \ldots, s'_1(y)\}$ es linealmente independiente.

El $\{s'_i : U \to E(\xi) | 0 \leq i \leq n\}$ son secciones ya que (,) es una función continua, son combinaciones lineales de s_i las cuales eran secciones.

Como $\{s'_i : U \to E(\xi) | 0 \leq i \leq n\}$ son n secciones linealmente independientes forman una base local, y además ésta es ortogonal ya que $(s'_i, s'_j) = 0$ si $i \neq j$. Lo cual también lo probaremos por inducción sobre el número de elementos:

.

si $n = 1$ claramente son una base ortogonal, si $n = 2$ tenemos que,

$$\begin{aligned}(s'_1, s'_2) &= (s'_1, s_2 - \frac{(s_2, s'_1)}{(s'_1, s'_1)} s'_1) = (s'_1, s_2) - (\frac{(s_2, s'_1)}{(s'_1, s'_1)})^{-}(s'_1, s'_1) \\ &= (s'_1, s_2) - (s_2, s'_1)^{-} = (s'_1, s_2) - (s'_1, s_2) = 0.\end{aligned}$$

Suponemos que $\{s'_i : U \to E(\xi) | 1 \leq i \leq n-1\}$ son secciones ortogonales dos a dos. Entonces consideramos $i \leq n-1$,

$$\begin{aligned}(s'_n, s'_i) &= s_n - \frac{(s_n, s'_{n-1})}{(s'_{n-1}, s'_{n-1})} s'_n - \ldots - \frac{(s_n, s'_1)}{(s'_1, s'_1)}(s'_1, s'_i) \\ &= (s_n, s'_i) - \frac{(s_n, s'_{n-1})}{(s'_{n-1}, s'_{n-1})}(s'_2, s'_i) - \ldots - \frac{(s_n, s'_1)}{(s'_1, s'_1)}(s'_1, s'_i) \\ &= (s_n, s'_i) - \frac{(s_n, s'_i)}{(s'_i, s'_i)}(s'_i, s'_i) = (s_n, s'_i) - (s_n, s'_i) = 0.\end{aligned}$$

Se sigue que $\{s'_i : U \to E(\xi) | 1 \leq i \leq n\}$ son una base local ortogonal en U. Definimos $\tilde{s}_i : U \to E(\xi)$ como $\tilde{s}_i = \frac{s'_i}{\sqrt{(s'_i, s'_i)}}$, $\tilde{s}_i$, que está bien definida porque $(s'_i, s'_i) \neq 0$. Por lo tanto $\{\tilde{s}_i : U \to E(\xi) | 1 \leq i \leq n\}$ son una base ortonormal en U. ■

Teorema 3.2.6
Si X es paracompacto, cualquier η subhaz vectorial de $\xi = (E(\xi, p, X))$ es un sumando directo.

Demostración. Sea $(\, , \,)$ una métrica Riemanniana de ξ. Entonces podemos definir una función $\pi : E(\xi) \to E(\eta)$ como $\pi_x : F_x(\xi) \to F_x(\eta)$ la proyección ortogonal. Supongamos que las secciones $\{s_i | s_i : U \to E(\eta), 1 \leq i \leq n\}$ forman una base local ortonormal en x. Entonces tenemos que si $p(v)$ esta en U, entonces $\pi(v)$ esta definido de la siguiente manera:

$$\pi(v) = \sum_{i=1}^{n} (v, s_i(p(v)))_{p(v)} s_i(p(v)) \tag{3.13}$$

Pero esta funcion varían continuamente en v, ya que solamente depende de la $(\, , \,)$ y de las secciones las cuales varían continuamente en U.

.

Además π es lineal en fibras y cumple que $p^\circ\pi = p$. Por lo tanto es un morfismo de $\mathbb{K}$-haces vectoriales, tenemos como $\Pi : \xi \to \eta$ es suprayectiva entonces por el Teorema 3.1.3 $\eta^+ = \ker(\pi)$ es un subhaz vectorial de ξ. Además es claro que $\xi = \eta \oplus \eta^+$ ya que $p' : E(\eta \oplus \eta^+) \to X$, definida como $p'(e_1, e_2) = p(e_1) = p(e_2)$ y claramente $F_x(\eta \oplus \eta^+) = F_x(\eta) \oplus F_x(\eta^+) = F_x(\xi)$ ya que tenemos que $F_x(\eta^+) = \ker(\pi_x)$. ■

3.3. Módulos de secciones sobre espacios normales y Hausdorff

El objetivo de esta sección es probar que si X es normal y Hausdorff, Γ induce un isomorfismo entre $Hom(\xi, \eta) \approx Hom_{C(X)}(\Gamma(\xi), \Gamma(\eta))$

Lema 3.3.1
Sea X un espacio normal y Hausdorff. Sea U una vecindad de x, y sea s una sección de ξ sobre U. Entonces hay una sección s' de ξ sobre X y W vecindad de x, $W \subset U$, tal que $s'|_W = s|_W$.

Demostración. Por ser X normal y Hausdorff existen abiertos V, W que son vecindades de x tales que $\bar{V} \subset U$, $\bar{W} \subset V$. Por el Lema de Urysohn existe $f : X \to [0, 1]$ continua tal que $f(\bar{W}) = 1$ y $f(X - V) = 0$, entonces definimos $s' : X \to E(\xi)$ como

$$s'(x) = \begin{cases} f(x)s(x) & \text{si} \quad x \in U \\ \bar{0}(x) = 0 & \text{si} \quad x \in X - \bar{V}. \end{cases}$$

Además $\bar{V} \subset U$, entonces tenemos que si x está en $U \cap X - \bar{V} = U - \bar{V}$, se sigue que $f(x)s(x) = 0 = \bar{0}(x)$, por el Lema del pegado tenemos que s' es continua y por como está definida tenemos que s' es una sección sobre X. Si x está en W, se tiene que $s'(x) = f(x)s(x) = 1s(x) = s(x)$ que es lo que queríamos. ■

Corolario 3.3.2
Sea X un espacio normal y Hausdorff. Para cada x en X, existen secciones $s_1, s_2, ..., s_n$ en $\Gamma(\xi)$ tales que alguna vecindad de x forman una base local de x.

.

Demostración. Por el Lema 3.3.1 existe una sección $\tilde{s}_i \in \Gamma(\xi)$ y una vecindad $U_i \subset U$ tal que $\tilde{s}_i|_{U_i} = s_i$. Entonces las secciones $\tilde{s}_i$ forman una base local en $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$. ■

Corolario 3.3.3
Sea X un espacio normal y Hausdorff, $f, g : \xi \to \eta$ morfismos de haces. Si $\Gamma(f) = \Gamma(g) : \Gamma(\xi) \to \Gamma(\eta)$, entonces $f = g$.

Demostración. Sea $e \in E(\xi)$, si $p(e) = x$ entonces existen $a_1, ..., a_n \in K$ tales que $a_1 s_1(x) + ... + a_n s_n(x) = e$, con $s_1 ..., s_n$ una base local de x en U. Definimos $s : U \to E(\xi)$ de la siguiente manera: $s(y) = a_1 s_1(y) + ... + a_n s_n(y)$, notemos que s es una sección sobre U. Pero $s(x) = a_1 s_1(x) + ... + a_n s_n(x) = e$, por el Lema 3.3.1 tenemos que existe $W \subset U$ vecindad de x y $s' : X \to E(\xi)$, sección de ξ sobre X, tal que $s\prime|_W = s|_W$, entonces $s'(x) = e$. Pero $f(e) = f^\circ s'(x) = \Gamma(f)(s')(x) = \Gamma(g)(s')(x) = g^\circ s'(x) = g(e)$. ■

Lema 3.3.4
Sea X un espacio normal y Haussdorff. Sea s en $\Gamma(\xi)$, supóngamos que $s(x) = 0$. Entonces hay secciones $s_1, ..., s_k$ en $\Gamma(\xi)$, y funciones $a_{1,}..., a_k$ en $C(X)$, tales que $a_i(x) = 0$, para toda i en $\{1, ...k\}$ y $s = a_1 s_1 + ... + a_k s_k$.

Demostración. Por el Corolario 3.3.2 tenemos que existen $s_1, ..., s_n \in \Gamma(\xi)$, que forman una base local para una vecindad U_1 de X. Entonces si $y \in U_1$ tenemos que $s(y) = \sum_{i=1}^{n} b_i(y) s_i(y)$. Consideremos el haz producto $X \times K$, notemos que las secciones del haz producto $\Gamma(X \times \mathbb{K})$ están en biyección con $C(X)$. La biyección manda una función $a : X \longrightarrow \mathbb{K}$ en la sección $s_a(x) = (x, a(x))$. De esta manera las funciones $b_i : U_i \longrightarrow \mathbb{K}$ se pueden poner como secciones sobre U_1 del haz $X \times \mathbb{K}$ y por el Lema 3.3.1, se pueden extender a funciones $a_i : X \longrightarrow \mathbb{K}$, de manera que $a_i|_{U_2} = b_i|_{U_2}$ con $U_2 \subset U_1$ vecindad de x, además $a_i(x) = b_i(x) = 0$, ya que $s_1(x), ..., s_n(x)$ son linealmente independientes en $F_x(\xi)$. Definimos: $s\prime : X \to E(\xi)$ como:

$$s'(y) = s(y) - \sum_{i=1}^{n} a_i(y) s_i(y).$$

Notemos que s' se anula en U_2.

Entonces por ser X espacio de Tychonoff, tenemos que existe V vecindad abierta de x, tal que $\bar{V} \subset U_2$, y $a \in C(X)$, tal que $a(x) = 0$ y $a(X - V) = 1$. Con

.

lo que

$$s = as' + \sum_{i=1}^{n} a_i s_i,$$

ya que; si $y \in V$, entonces tenemos que $a(y)s'(y) + \sum_{i=1}^{n} a_i(y)s_i(y) = \sum_{i=1}^{n} a_i(y)s_i(y) = s(y)$, ya que $V \subset U_2$; si $y \in X - V$ entonces $a(y)s'(y) + \sum_{i=1}^{n} a_i(y)s_i(y) = 1s'(y) + \sum_{i=1}^{n} a_i(y)s_i(y) = s(y) - \sum_{i=1}^{n} a_i(y)s_i(y) + \sum_{i=1}^{n} a_i(y)s_i(y) = s(y)$. Y como $a(x) = 0$, entonces tenemos lo que queríamos. ■

Corolario 3.3.5
Sea X un espacio normal y Hausdorff. $\mathfrak{M}_x$ el ideal de $C(X)$ formado por las funciones que se anulan en x un punto fijo del espacio. Entonces $\Gamma(\xi)/\mathfrak{M}_x\Gamma(\xi) \cong F_x(\xi)$, y el isomorfismo está dado por $s \longmapsto s(x)$.

Demostración. Definimos $\varphi : \Gamma(\xi) \to F_x(\xi)$ como $s \overset{\varphi}{\longmapsto} s(x)$. Notemos que φ es morfismo de $C(X)$-módulos ya que $\varphi(s_1 + as_2) = (s_1 + as_2)(x) = s_1(x) + a(x)s_2(x) = \varphi(s_1) + a(x)\varphi(s_2) = \varphi(s_1) + a\varphi(s_2)$, y se baja al cociente por el Lema 3.3.4. Entonces $\bar{\varphi} : \Gamma(\xi)/\mathfrak{M}_x\Gamma(\xi) \to F_x(\xi)$ es suprayectiva ya que φ lo es por la demostración del Corolario 3.3.3. Falta ver que $\bar{\varphi}$ es inyectiva; si $\bar{\varphi}([s_1]) = \bar{\varphi}([s_2]) \iff s_1(x) = s_2(x) \iff s_1 - s_2(x) = 0 \in F_x \iff [s_1 - s_2] \in \mathfrak{M}_x\Gamma(\xi) \iff [s_1] = [s_2]$. Por lo tanto $\bar{\varphi}$ es una biyección. ■

Teorema 3.3.6
Sea X un espacio normal y Hausdorff. Si $F : \Gamma(\xi) \to \Gamma(\eta)$ es un morfismo de $C(X)$-módulos, entonces hay un único morfismo $\mathbb{K}$-haces vectoriales $f : \xi \to \eta$ tal que $F = \Gamma(f)$.

Demostración. La existencia está dada por la siguiente construcción:

$$\Gamma(\xi) \xrightarrow{F} \Gamma(\eta) \to \Gamma(\eta)/\mathfrak{M}_x\Gamma(\eta)$$

para un x en X. Ahora notemos que si $s(x) = 0 \in F_x(\xi)$ entonces $F(s)(x) = 0 \in F_x(\eta)$, lo que implica que podemos bajar a F al cociente, es decir, induce una función en el cociente.

$$\bar{F} : \Gamma(\xi)/\mathfrak{M}_x\Gamma(\xi) \to \Gamma(\eta)/\mathfrak{M}_x\Gamma(\eta)$$

pero por el Corolario 3.3.5 tenemos que hay una función $f_x : F_x(\xi) \to F_x(\eta)$ y como es un morfismo de $C_K(X)$-módulos tenemos que es $\mathbb{K}$-lineal. Entonces

.

la colección de todas estas funciones nos da una función $f : E(\xi) \to E(\eta)$ la cual es lineal en fibras. Ahora bien si s pertenece a $\Gamma(\xi)$, entonces $(f^\circ s)(x) = f_x s(x) = F(s)(x)$ por construcción entonces $F = \Gamma(f)$.

Para ver la continuidad de f, sea e en $E(\xi)$. Por el Corolario 3.3.2 existen secciones $s_1, ..., s_n \in \Gamma(\xi)$ que son una base local en una vecindad U de $p(e)$, entonces tenemos que $e = \sum_{i=1}^{n} a_i(p(e))s_i(p(e))$ donde $a_i \in C(X)$. Por lo tanto $f(e) = f(\sum_{i=1}^{n} a_i(p(e))s_i(p(e))) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i(p(e))s_i(p(e))) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p(e))f(s_i(p(e)))$, pero $f(s_i) = F(s_i)$, lo que quiere decir que $f(s_i)$ es una sección de η sobre X, y como todos los términos son continuos en e, tenemos que f es continua en $p^{-1}(U)$. Como los abiertos U cubren a X, los abiertos $p^{-1}(U)$ cubren a $E(\xi)$ y entonces f es continua.

La unicidad está dada por el Corolario 3.3.3. ■

Corolario 3.3.7
Sean X un espacio normal, Hausdorff y ξ, η $\mathbb{K}$-haces vectoriales sobre X. Entonces ξ es isomorfo a η si y sólo si $\Gamma(\xi)$ es isomorfo a $\Gamma(\eta)$.

Demostración. Si $\xi \cong \eta$, por ser Γ un funtor, tenemos que $\Gamma(\xi) \cong \Gamma(\eta)$.

Si $F : \Gamma(\xi) \to \Gamma(\eta)$ es morfismo, entonces existe un único morfismo de $\mathbb{K}$-haces vectoriales $f : \xi \to \eta$ tal que $F = \Gamma(f)$, y como F es isomorfismo, entonces $F^{-1} : \Gamma(\eta) \to \Gamma(\xi)$ también es morfismo, y además induce un único morfismo de $\mathbb{K}$-haces vectoriales $f' : \eta \to \xi$, pero $Id_{\Gamma(\xi)} = F^{-1\circ}F = \Gamma(f')^\circ\Gamma(f) = \Gamma(f'^\circ f)$, y Id_ξ cumple esta condición entonces $f'^\circ f = Id_\xi : \xi \to \xi$, de manera análoga $f^\circ f' = Id_\eta : \eta \to \eta$. Por lo tanto $f^{-1} = f'$ lo cual implica que $\xi \cong \eta$. ■

3.4. Módulos proyectivos de secciones

Aquí probaremos que si X es compacto y Hausdorff, los $C(X)$-módulos que pueden verse como $\Gamma(\xi)$, para algún haz ξ, son exactamente los módulos proyectivos finitamente generados.

Proposición 3.4.1
Sea X un espacio compacto y Hausdorff. Sea ξ un $\mathbb{K}$-haz vectorial sobre X. Entonces hay un epimorfismo $f : \epsilon^n \to \xi$, donde ϵ^n es el haz producto de

.

dimensión n sobre X.

Demostración.

Para cada x en X, sean $s_{x,1}, ..., s_{x,k_x} \in \Gamma(\xi)$ secciones de ξ que forman una base local sobre una vecindad abierta U_x de x. Por ser X compacto hay un número finito de U_x que forman una cubierta abierta. Luego entonces hay un número finito de secciones $s_1, ..., s_n \in \Gamma(\xi)$ tales que $s_1(x), ..., s_n(x)$ generan $F_x(\xi)$ para toda x en X. Sea ϵ^n el haz vectorial producto $E(\epsilon^n) = X \times K^n$, sabemos que $\Gamma(\epsilon^n)$ es libre y que tiene n generadores dados por $\bar{e}_i = (x, e_i)$. Entonces definimos $\tilde{f} : Y \to \Gamma(\xi)$ donde $Y = \{\bar{e}_i = (x, e_i) | e_i \in K^n, 1 \leq i \leq n\}$ y e_i es el i-ésimo vector canónico de K^n como: $\tilde{f}(e_i) = s_i$, entonces $\tilde{f}$ se puede extender a $\Gamma(\epsilon^n)$ dándonos un morfismo de $C(X)$-módulos. Por el Teorema 3.3.6, éste induce un morfismo de $\mathbb{K}$-haces vectoriales $f : \epsilon^n \to \xi$. y como $f(\bar{e}_i) = s_i$, entonces tenemos que f es sobre. ∎

En esta demostración probamos un poco más $s_1, ..., s_n \in \Gamma(\xi)$ generan a $\Gamma(\xi)$. Lo cual es bastante importante, ya que m'as adelante lo utilizaremos.

Corolario 3.4.2
Sea X un espacio compacto y Hausdorff y ξ un $\mathbb{K}$-haz vectorial sobre el espacio. Entonces ξ es sumando directo de algún haz trivial ϵ.

Demostración. Por la Proposición anterior (3.4.1) tenemos que existe ϵ haz trivial y un morfismo de haces $f : \epsilon \to \xi$ que es sobreyectivo. Como la dimensión de las fibras es localmente constate entonces por Teorema 3.1.3 el $\ker f$ es un $\mathbb{K}$-subhaz vectorial de ϵ, y por el Teorema 3.2.6 (como X es compacto) es un sumando directo de ϵ. Así que $\epsilon = \eta \oplus \xi'$, con $\eta = \ker f$. Entonces $f|_{\xi'} : \xi' \to \xi$ es inyectiva y como f era sobre, entonces $f|_{\xi'}$ es isomorfismo. Lo cual quiere decir que $\xi' \cong \xi$. ∎

Corolario 3.4.3
Sea X compacto, Hausdorff y ξ un $\mathbb{K}$-haz vectorial sobre X. Entonces $\Gamma(\xi)$ es finitamente generado y proyectivo como $C(X)$-módulo.

Demostración. Por el Corolario 3.4.2 tenemos que $\Gamma(\xi)$ es sumando directo de $\Gamma(\epsilon)$ que es un $C(X)$-módulo libre. Por el Corolario 1.2.5 $\Gamma(\epsilon)$ es un módulo proyectivo y por la Proposición 1.2.6 $\Gamma(\xi)$ es un módulo proyectivo, pero por la demostración de la Proposición 3.4.1 es finitamente generado. ∎

.

Teorema 3.4.4
Sea X un espacio compacto y Hausdorff. Sea P un $C(X)$-módulo, P es isomorfo a algún $\Gamma(\xi)$ (módulo de secciones de un $\mathbb{K}$-haz vectorial) si y solo si P es finitamente generado y proyectivo.

Demostración. Si P es isomorfo a $\Gamma(\xi)$, entonces por el Corolario anterior (3.4.3) P es finitamente generado y proyectivo.

Supongamos ahora que P es finitamente generado y proyectivo. Entonces P es un sumando directo de un $C(X)$-módulo libre F por el Teorema 1.2.8. Lo que implica que hay un endomorfismo $g : F \to F$ tal que $Im(g) = P$ y $g|_P = P$ (una retracción de F a P). Por otro lado $F \cong \Gamma(\epsilon)$ con ϵ un $\mathbb{K}$-haz vectorial trivial. Por el Teorema 3.3.6 hay un único morfismo $f : \epsilon \to \epsilon$ tal que $\Gamma(f) = g$. Como $g^\circ g = g$ entonces, por el Teorema 3.3.6, tenemos que $f^\circ f = f$. Sea $\xi = Imf$, para ver que ξ es un $\mathbb{K}$-subhaz vectorial basta con probar que $\dim_K F_x(\xi)$ es localmente constante. Entonces $\epsilon = \xi \oplus \eta$ donde $\eta = \ker(f)$ lo cual implicaría que $P \cong Im\Gamma(f) = \Gamma(\xi)$.

Como $f^\circ f = f$, entonces $\eta = \ker(f) = Im(Id_\epsilon - f)$. En efecto si e pertenece al $\ker(f)$ entonces $Id_\epsilon - f(e) = Id_\epsilon(e) = e$, por lo tanto $\ker(f) \subset Im(Id_\epsilon - f)$. Si e pertenece a la $Im(Id_\epsilon - f)$, entonces existe un e_1 en ϵ tal que $Id_\epsilon - f(e_1) = e$. Pero:

$$\begin{aligned} f(Id_\epsilon - f(e_1)) &= f(e) \\ f(Id_\epsilon)(e_1) - f^\circ f(e_1) &= f(e) \\ f(e_1) - f(e_1) &= f(e) \\ 0 &= f(e) \end{aligned}$$

donde 0 está en $F_x(p(e))$ (con $x = p(e)$). Así que $\ker(f) = Im(Id_\epsilon - f)$. Claramente como $F_x(\epsilon) = F_x(\xi) \oplus F_x(\eta)$ (suma directa de espacios vectoriales). Supongamos que $\dim_K F_x(\xi) = h$ y que $\dim_K F_x(\eta) = k$. Entonces $\epsilon \xrightarrow{f} \epsilon$ por el Corolario 3.4.3, aplicado a f y a $Id_\epsilon - f$, tenemos la $\dim_K F_y(\xi) \geq h$, y la $\dim_K F_x(\eta) \geq k$ para toda y en una vecindad de x. Pero

$$\dim_K F_y(\epsilon) = \dim_K F_y(\xi) + \dim_K F_x(\eta) = h + k \qquad (3.14)$$

por lo que concluimos que h y k son localmente constantes en esa vecindad de x. Entonces la dimensión de las fibras de la $Im(f)$ es localmente constante. Entonces ξ es un $\mathbb{K}$ subhaz vectorial y $P \cong Im\Gamma(f)$. ■

.

Capítulo 4

La teoría K

En este capítulo relacionaremos las ideas vistas en los capítulos 2 y 3, dando pie a estudiar la teoría K topológica y la teoría K algebráica.

4.1. Construcción de Grothendieck

En el capítulo anterior vimos $\mathbb{K}$ haces vectoriales y los morfismos que hay en esta categoría, lo que estudiaremos ahora es un funtor el cual se le asocia a la categoría de haces vectoriales que consiste en darle una estructura de semigrupo a las clases de isomorfismo de $\mathbb{K}$ haces vectoriales sobre X.

A continuación le asociaremos a un semigrupo abeliano un grupo abeliano de manera similar a como se le asocia a los números naturales, los números enteros.

Definición 4.1.1 *Sea A un semigrupo abeliano. Definimos una relación en $A\times A$ de la siguiente manera: $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Longleftrightarrow \exists\, c$ tal que $a_1 + b_2 + c = a_2 + b_1 + c$, con a_1, a_2, b_1, b_2, c en A. Se verifica fácilmente que es una relación de equivalencia.*

Definición 4.1.2 *Sea A un semigrupo abeliano y sea $A' = A \times A/_{\sim}$. La suma se define como $[a, b] + [a', b'] = [a + a', b + b']$.*

Lema 4.1.1
Sea A un semigrupo abeliano. Entonces$(A', +)$ es un grupo abeliano.

.

Demostración. Primero, veamos que la operación está bien definida. Ésto es porque si $a + \beta + c_1 = \alpha + b + c_1$, y $a' + \beta' + c_2 = \alpha' + b' + c_2$ entonces $a + a' + \beta + \beta' + c_1 + c_2 = \alpha + \alpha' + b + b' + c_1 + c_2$. Lo cual implica que $+$ esta bien definida.

La asociatividad se sigue de que A es asociativo.

Claramente el neutro está dado por $[0, 0]$.

Si $[a, b] \in A'$ entonces $[a, b] + [b, a] = [a + b, b + a] = [0, 0]$ ya que $a + b + 0 = b + a + 0$, pues comunta, por lo tanto existen los inversos

Como A es abeliano, es claro que A' es abeliano. ■

Lema 4.1.2
Sea $\phi : A \to A'$ definida como $a \longmapsto [a, 0]$. Entonces ϕ es morfismo de semigrupos.

Demostración. $\phi(a+b) = [a+b, o] = [a, 0]+[b, 0] = \phi(a)+\phi(b)$. Y $\phi(0) = [0, 0]$ ■

Nota 4.1.3 *A la pareja $(A\prime, \phi)$ se le conoce como la construcción de Grothendieck del semigrupo A.*

Proposición 4.1.3
Sea A un semigrupo abeliano, entonces la construcción de Grothendieck $(A\prime, \phi)$ cumple con la siguiente propiedad universal.

Si G es un grupo abeliano y si $\gamma : A \to G$ es un morfismo de semigrupos, entonces existe un único homeomorfismo de grupos $\gamma' : A' \to G$ que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ A' \arrow[r, dashed, "\gamma'"'] & G \end{tikzcd}$$

Diagrama 4.1: Propiedad Universal de Grothendieck

Demostración. Definamos $\gamma' : A' \to G$ como $\gamma'([a, b]) = \gamma(a) - \gamma(b)$, γ' está

.

bien definida ya que si $[a,b]=[\alpha,\beta]$ entonces

$$\begin{aligned}
a+\beta+c &= \alpha+b+c\\
\gamma(a+\beta+c) &= \gamma(\alpha+b+c)\\
\gamma(a)+\gamma(\beta)+\gamma(c) &= \gamma(\alpha)+\gamma(b)+\gamma(c)\\
\gamma(a)+\gamma(\beta) &= \gamma(\alpha)+\gamma(b)\\
\gamma(a)-\gamma(b) &= \gamma(\alpha)-\gamma(\beta)\\
\gamma'([a,b]) &= \gamma'([\alpha,\beta])
\end{aligned}$$

por lo tanto γ' es función. Claramente es un homomorfismo de grupos y hace conmutar el diagrama anterior.

Supongamos que $\varphi : A' \longrightarrow G$ es un homomorfismo tal que $\varphi\circ\phi = \gamma$, entonces $\varphi([a,0]) = \gamma(a)$, y $\varphi([0,b]) = \varphi(-[b,0]) = -\gamma(b)$ con lo que

$$\begin{aligned}
\varphi([a,b]) &= \varphi([a,0]+[0,b])\\
&= \varphi([a,0])+\varphi([0,b])\\
&= \gamma(a)-\gamma(b)\\
&= \gamma'([a,b])
\end{aligned}$$

por lo tanto $\varphi=\gamma'$. ■

4.2. Haces vectoriales y teoría K

Definición 4.2.1 *Sea $\mathbb{K}^\infty$ el límite directo o colímite de los espacios vectoriales $\mathbb{K}^n$. Dado un espacio X consideremos el producto $X\times\mathbb{K}^\infty$ y la proyección $\Pi : X\times\mathbb{K}^\infty \longrightarrow X$. A esta proyección la podemos considerar como el haz producto de dimensión infinita sobre X y se denota por ϵ^∞.*

Supongamos ahora que X es compacto y Hausdorff y consideremos un $\mathbb{K}$-haz vectorial ξ sobre X. Por el Crolario 3.4.2 sabemos un haz η tal que $\xi\oplus\eta \cong \epsilon \subset \epsilon^\infty$. De manera que ϵ es isomorfo a un subhaz de ϵ^∞. Por lo tanto las clases de isomorfismo de $\mathbb{K}$-haz vectorial sobre X forman un conjunto que denotaremos $Vect(X)$.

Definición 4.2.2 *Definimos una suma en $Vect(X)$ como*

$$[\xi]+[\eta]=[\xi\oplus\eta]$$

.

Esta suma está bien definida, ya que si $\xi \cong \xi'$ *y* $\eta \cong \eta'$ *entonces* $\xi \oplus \eta \cong \xi' \oplus \eta'$*. Hay un elemento neutro que es la clase* $[\epsilon^0]$*, donde* ϵ^0 *es el haz producto de dimensión cero. Así* $Vect(X)$ *es un semigrupo abeliano pues* $xi \oplus \eta \cong \eta \oplus \xi$*.*

Definición 4.2.3 *Sea* X *un espacio compacto y Hausdorff, entonces* $K(X)$ *se define como el grupo abeliano dado por la construcción de Grothendieck aplicado a* $Vect(X)$*.*

A $K(X)$ se le llama la teoría K topológica del espacio X

4.2.1. La teoría K de un anillo

Sea A un anillo conmutativo con 1 y consideremos los A-módulos proyectivos finitamente generados. Si P es un A-módulo proyectivo finitamente generado, entonces es un sumando directo de un módulo libre finitamente generado. Es decir existe Q tal que $P \oplus Q \cong A^n$ está contenido en A^∞, donde A^∞ es igual al colímite de A^n. De esta manera cada clase de isomorfismo de módulos proyectivos finitamente generados $[P]$, tiene un representante que es un submódulo de A^∞. Por lo tanto las clases de isomorfismo forman un conjunto que denotamos por $Proy(A)$.

Definición 4.2.4 *Sea* A *un anillo conmutativo con 1. Definimos una suma en* $Proy(A)$ *como*

$$[M] + [N] = [M \oplus N].$$

Esta suma está bien definida y el elemento neutro es la clase $[\{0\}]$*.*

Definición 4.2.5 *Sea* A *un anillo conmutativo con 1, definimos* $K(A)$ *como el grupo abeliano dado por la construcción de Grothendieck aplicado a* $Proy(A)$*. Al grupo abeliano* $K(A)$ *se le llama la teoría K algebráica de* A *(en dimensión cero).*

Nota 4.2.6 *Sea* X *un espacio compacto y Hausdorff; consideremos el anillo* $A = C(X)$*. Entonces tenemos definidos* $K(C(X))$ *y* $K(X)$*, que están relacionados en el siguiente resultado.*

Teorema 4.2.1
Sea X *un espacio topológico compacto y Hausdorff. Entonces* $K(X) \cong K(C(X))$*.*

Demostración. Por el Teorema 3.4.4 y el Corolario 3.3.7 existe la función $f : Vect(X) \to Proy(C(X))$ dada por $[\xi] \longmapsto [\Gamma(\xi)]$ la cual, en clases, es una

.

biyección. Entonces basta con probar que es un homomorfismo, para que tengamos un isomorfismo de semigrupos.

$f([\zeta^0 = X]) = [0]$, por el Teorema 3.4.4.

$$\begin{aligned} f([\xi \oplus \eta]) &= [\Gamma(\xi \oplus \eta)] = [\Gamma(\xi) \oplus \Gamma(\eta)] \\ &= [\Gamma(\xi)] + [\Gamma(\eta)] = f[\xi] + f[\eta] \end{aligned}$$

Por la propiedad universal de la construcción de Grothendieck tenemos que f induce un isomorfismo $\bar{f} : K(X) \xrightarrow{\cong} K(C(X))$ ■

Nota 4.2.7 *Este teorema nos da realmente dos resultados. Uno para haces reales que da un isomorfismo $K(C_{\mathbb{R}}(X)) \cong KO(X)$, donde $KO(X)$ es la teoría K topológica definida con haces reales. Y otro para haces complejos $K(C_{\mathbb{C}}(X)) \cong K(X)$, donde $K(X)$ es la teoría K topológica definida en haces complejos.*

.

.

Índice de diagramas

Bibliografía

[1] Richard G. **Swan**. *Vector Bundles and Projective Modules*. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 105, No. 2 (Nov., 1962), pp. 264-277 (article consists of 14 pages)

[2] **M. Aguilar** y **S. Gitler**, *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*, Springer (2002)

[3] **M. F. Atiyah**, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison Wesley Publishing Compan (1969)

[4] **L. Gillman, M. Jerison**, *Rings of Continuous Functions*, Springer (1976)

[5] **S. Willard**, *General Topology*, Dover Publications (1998)