



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

RESOLUCIÓN TÓRICA DE IDEALES NEWTON NO-DEGENERADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO(A) EN CIENCIAS ()

P R E S E N T A

LIC. EN MAT. MIRNA LISSETTE GÓMEZ MORALES

DIRECTOR(A) DE TESIS: DRA. FUENSANTA AROCA BISQUERT.

MÉXICO, D.F.

SEPTIEMBRE, 2009.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

RESOLUCIÓN TÓRICA DE IDEALES
NEWTON NO-DEGENERADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO(A) EN CIENCIAS

P R E S E N T A

LIC. EN MAT. MIRNA LISSETTE GÓMEZ MORALES

DIRECTOR(A) DE TESIS: DRA. FUENSANTA AROCA BISQUERT.

MÉXICO, D.F.

SEPTIEMBRE, 2009.

Agradecimientos.

A mis padres **Martín Gómez Castro** y **María Isabel Morales O.** por su infinito cariño y su apoyo incondicional. Todos mis logros han sido posibles gracias a ustedes.

A mis hermanos **Ivert** y **Rosario** por ser mis compañeros de juego y mis amigos desde siempre.

A mi mejor amigo y compañero **Edgardo Roldán** por su apoyo en todo momento.

A mis **familiares** y **amigos** por creer en mí y apoyarme incluso en la distancia.

A la familia **Roldán Pensado** por recibirme, confiar en mí y apoyarme sin exigir nada a cambio.

A mi asesora **Dra. Fuensanta Aroca** por sus valiosas observaciones, por su estricta supervisión y la dedicación brindada a este trabajo.

A los **honorables miembros del jurado**: Dra. Fuensanta Aroca, Dr. José Antonio Seade K., Dr. Jawad Snoussi, Dr. Pedro Luis del Ángel R. y Dr. Javier Elizondo Huerta por sus valiosas correcciones y por su orientación en la elaboración de esta tesis.

Quisiera agradecer a CONACyT por el apoyo brindado para realizar mis estudios de maestría.

Índice general

Introducción	VI
1. Polinomios y series con exponentes en un grupo.	1
1.1. Series con exponentes en un grupo.	1
1.2. Órdenes en anillos de series.	3
1.3. El ω -orden.	6
1.4. El poliedro de Newton.	9
2. Poliedros, conos y abanicos.	14
2.1. Conos poliédricos.	14
2.2. Abanicos.	19
2.3. Abanicos asociados a poliedros.	20
3. Abanico de Groebner y tropicalización.	22
3.1. El abanico de Groebner.	22
3.2. Campos valorados.	28
3.3. Tropicalización de un ideal.	29
4. Variedades Newton no-degeneradas.	35
4.1. Hipersuperficies no-degeneradas: Un resultado de Kouchnirenko.	35
4.2. Variedades no-degeneradas de intersección completa.	37
4.3. Variedades en \mathbb{K}^n Newton no-degeneradas.	39
5. Resolución tórica de variedades no-degeneradas.	41
5.1. Morfismos racionales monomiales y conos.	41
5.2. Variedad tórica asociada a un abanico regular.	43
5.3. Divisores asociados a conos.	45
5.4. La modificación asociada a un cono.	48

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	v
5.5. La modificación tórica asociada a un abanico.	50
5.6. Resolución tórica de singularidades Newton no-degeneradas. .	53
A. Cálculos.	62
A.1. Cálculo del abanico de Groebner global del ejemplo 3.11. . . .	62
A.2. Cálculo de la dimensión de los ideales ω -iniciales.	65
Bibliografía	70

Introducción

La noción de singularidad de hipersuperficie Newton no-degenerada fue introducida a mediados de los 70's por F. Ehlers [4] y A. Kouchnirenko [12]. Propiedades de estas singularidades se estudian en varios artículos, por ejemplo [11]. En el artículo [12] Kouchnirenko demuestra que el número de Milnor de una superficie se puede calcular en función del poliedro de Newton de la función que la define.

La noción de singularidad intersección completa Newton no-degenerada fue introducida por Khovanskii [10] a finales de los 70's. Varios resultados sobre este tipo de singularidades fueron publicados en las últimas décadas del siglo XX [14, 18]. En el libro [17], M. Oka hace un compendio de resultados sobre este tipo de singularidades.

Una de las propiedades más importantes de las singularidades no-degeneradas es que su resolución se puede describir en función del abanico de Groebner asociado a los generadores de la variedad [13, 17, 18].

Las singularidades de intersección completa siguen siendo un objeto de estudio en la actualidad, autores como C. Biviá-Ausina, M. Ruas, M. Saia y W. Zuñiga-Galindo [1, 19, 20] han publicado diversos resultados recientemente.

En este trabajo extendemos la noción de Newton no-degenerado a variedades no necesariamente de intersección completa describiendo su resolución en términos del abanico de Groebner del ideal que la define.

Demostramos que nuestra definición es en verdad una extensión. Demostramos que un ideal Newton no-degenerado según las definiciones anterior-

res es no-degenerado para nuestra definición y damos ejemplos que son no-degenerados para nuestra definición y que no lo son para las definiciones anteriores.

En el teorema 5.17, probaremos un resultado sobre la desingularización de variedad Newton no-degenerada extendiendo un resultado conocido en el caso de intersecciones completas probado en [17].

Más precisamente, demostramos que si $V = Z(I)$ es la variedad definida por un ideal Newton no-degenerado y Σ es un refinamiento regular del abanico de Groebner de I , entonces se satisface que

- 1.- La transformada estricta \tilde{V} de V por la modificación tórica asociada a Σ es no singular (Teorema 5.17); y
- 2.- Un cono $\sigma \in \Sigma$ está contenido en la variedad tropical asociada a I si y sólo si la transformada estricta de V interseca al toro canónico contenido en el divisor asociado a σ (Teorema 5.18).

Capítulo 1

Polinomios y series con exponentes en un grupo.

1.1. Series con exponentes en un grupo.

Sea $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ un anillo y sea (Γ, \otimes) un grupo. Denotaremos por $\Gamma_{\mathcal{A}}$ al conjunto de las aplicaciones de Γ en \mathcal{A} ,

$$\Gamma_{\mathcal{A}} := \{f : \Gamma \longrightarrow \mathcal{A}; f \text{ aplicación}\}.$$

El conjunto $\Gamma_{\mathcal{A}}$ tiene estructura de grupo con la suma definida como sigue:

Si $f, g \in \Gamma_{\mathcal{A}}$, la suma de f y g es $f + g : \Gamma \longrightarrow \mathcal{A}, \gamma \mapsto f(\gamma) + g(\gamma)$.

Cada elemento $f : \Gamma \longrightarrow \mathcal{A}$ de $\Gamma_{\mathcal{A}}$, se puede identificar con una serie

$$f(\underline{x}) := \sum_{\gamma \in \Gamma} a_{\gamma} \underline{x}^{\gamma} \tag{1.1}$$

donde $a_{\gamma} := f(\gamma) \in \mathcal{A}$. Usando esta identificación, llamaremos a los elementos de $\Gamma_{\mathcal{A}}$, **series con coeficientes en \mathcal{A} y exponentes en Γ** .

Definición 1.1. Sea $f \in \Gamma_{\mathcal{A}}$. El **soporte** de f (en Γ) es el subconjunto de Γ dado por

$$\varepsilon(f) := \{\gamma \in \Gamma : f(\gamma) \neq 0\}.$$

Si identificamos f con la serie 1.1, se tiene

$$\varepsilon(f) := \{\gamma \in \Gamma : a_{\gamma} \neq 0\}.$$

El subconjunto de $\Gamma_{\mathcal{A}}$ dado por

$$Fin(\Gamma_{\mathcal{A}}) := \{f \in \Gamma_{\mathcal{A}} : f \text{ tiene soporte finito}\}$$

es un subgrupo de $(\Gamma_{\mathcal{A}}, \otimes)$.

Los elementos de $Fin(\Gamma_{\mathcal{A}})$ se llaman **polinomios con coeficientes en \mathcal{A} y exponentes en Γ** y se puede expresar como

$$f(x) = \sum_{\gamma \in \Lambda} a_{\gamma} x^{\gamma}, \quad |\Lambda| < \infty, \quad a_{\gamma} \in \mathcal{A}.$$

El **producto** de dos elementos $f, g \in Fin(\Gamma_{\mathcal{A}})$ se define como la aplicación

$$\begin{aligned} f \cdot g : \Gamma &\longrightarrow \mathcal{A}, \\ \gamma &\longmapsto \sum_{\alpha \otimes \beta = \gamma} f(\alpha) \cdot g(\beta). \end{aligned}$$

Con esta definición $(Fin(\Gamma_{\mathcal{A}}), +, \cdot)$ tiene estructura de anillo.

Ejemplo 1.2. Sea $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ y \mathcal{A} un anillo.

1.- A las aplicaciones en $Fin(\mathbb{Z}_{\mathcal{A}}^n)$ se les denomina **Polinomios de Laurent con coeficientes en \mathcal{A}** en n variables con coeficientes en \mathcal{A} . El conjunto de estas aplicaciones se denota por

$$\mathcal{A}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}].$$

2.- Sea $\mathcal{A}[x_1, \dots, x_n]$ el subconjunto de $Fin(\mathbb{Z}_{\mathcal{A}}^n)$ dado por

$$\mathcal{A}[x_1, \dots, x_n] := \{f \in Fin(\mathbb{Z}_{\mathcal{A}}^n); \varepsilon(f) \subset \mathbb{N}^n\}.$$

A los elementos de $\mathcal{A}[x_1, \dots, x_n]$ se les llama **Polinomios** en n variables con coeficientes en \mathcal{A} .

3.- El subconjunto de $Fin(\mathbb{Q}_{\mathcal{A}}^n)$ dado por

$$\mathcal{A}[x_1, \dots, x_n]^P := \{f \in Fin(\mathbb{Q}_{\mathcal{A}}^n); \varepsilon(f) \subset (\mathbb{Q}_{\geq 0})^n\}$$

es un subgrupo de $\mathbb{Q}_{\mathcal{A}}^n$. Los elementos de $\mathcal{A}[x_1, \dots, x_n]^P$ son llamados **Polinomios de Puiseux** en n variables con coeficientes en \mathcal{A} .

Otros ejemplos de series son:

Ejemplo 1.3. 1.- El anillo de **series formales** en n variables con coeficientes en \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A}[[x_1, \dots, x_n]] := \{f \in \mathbb{Z}_{\mathcal{A}}^n; \varepsilon(f) \subset \mathbb{N}^n\}.$$

6.- El anillo de **Series de Puiseux** en n variables con coeficientes en \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A}[[x_1, \dots, x_n]]^P := \{f \in \mathbb{Q}_{\mathcal{A}}^n; \exists k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \varepsilon(f) \subset \frac{1}{k}(\mathbb{Z}_{\geq \alpha})^n\}. \quad (1.2)$$

1.2. Órdenes en anillos de series.

Sea (Γ, \leq) un conjunto ordenado.

Se dice que un conjunto $C \subset \Gamma$ está **acotado inferiormente** si y sólo si existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma \leq c$ para toda $c \in C$.

Observación 1.4. Si C está acotado inferiormente, entonces todo subconjunto de C está acotado inferiormente.

Un conjunto $C \subset \Gamma$ es **bien ordenado** si para todo subconjunto $C' \subset C$ acotado inferiormente, existe un elemento $c_0 \in C'$ tal que $c_0 \leq c$ para toda $c \in C'$. En este caso se dice que \leq es un **buen orden** para C y que c_0 es el **mínimo** de C' .

Diremos que un conjunto $C \subset \Gamma$ es **casi bien ordenado** si para todo subconjunto $C' \subset C$ acotado inferiormente, existen elementos $c_1, \dots, c_r \in C'$ no comparables entre sí tales que $c_i \leq c$ para toda $c \in C' \setminus \{c_1, \dots, c_r\}$. En este caso diremos que \leq es un **casi buen orden** para C . El conjunto $\{c_1, \dots, c_r\}$ es el **conjunto minimal** de C' .

Observación 1.5. Si (Γ, \leq) es un conjunto totalmente ordenado, entonces todo conjunto $C \subset \Gamma$ casi bien ordenado es bien ordenado.

Si C es bien ordenado (respectivamente casi bien ordenado), todo subconjunto suyo es bien ordenado (respectivamente casi bien ordenado).

Observación 1.6. Si $C, D \subset \Gamma$ son casi bien ordenados (respectivamente bien ordenados), entonces

- 1) $C \cup D$ es casi bien ordenado (respectivamente bien ordenado),
- 2) $C \otimes D := \{c \otimes d; c \in C, d \in D\}$ es casi bien ordenado (respectivamente bien ordenado),
- 3) Si C y D están acotados inferiormente, entonces para toda $\gamma \in C \otimes D$ el conjunto $\{(c, d) \in C \otimes D; c \otimes d = \gamma\}$ es finito.

Sea (Γ, \otimes, \leq) un grupo ordenado. Llamaremos **series con soporte casi bien ordenado** y exponentes en Γ al conjunto

$$Ac(\Gamma_{\mathcal{A}}, \leq) := \{f \in \Gamma_{\mathcal{A}} : \varepsilon(f) \text{ es casi bien ordenado y acotado inferiormente}\}$$

y llamaremos **series con soporte bien ordenado** y exponentes en Γ al conjunto

$$AcBo(\Gamma_{\mathcal{A}}, \leq) := \{f \in \Gamma_{\mathcal{A}} : \varepsilon(f) \text{ es bien ordenado y acotado inferiormente}\}.$$

Como consecuencia de la proposición 1.6 inciso 1), los conjuntos $Ac(\Gamma_{\mathcal{A}}, \leq)$, $AcBo(\Gamma_{\mathcal{A}}, \leq)$ son subgrupos de $\Gamma_{\mathcal{A}}$. Además, por los incisos 2) y 3) de la observación 1.6, tiene sentido definir el producto de la misma manera que se definió en (1.1). Teniéndose que

$$Ac(\Gamma_{\mathcal{A}}, \leq), AcBo(\Gamma_{\mathcal{A}}, \leq) \text{ son anillos.} \quad (1.3)$$

Observación 1.7. Para cualquier orden definido en Γ , se tiene que

$$Fin(\Gamma_{\mathcal{A}}) \subset AcBo(\Gamma_{\mathcal{A}}, \leq) \subset Ac(\Gamma_{\mathcal{A}}, \leq).$$

Ejemplo 1.8. Sea $\Gamma = \mathbb{Z}$ con el orden usual \leq . En este caso por la observación 1.5 todo conjunto casi-bien ordenado de \mathbb{Z} es bien ordenado por lo que $Ac(\mathbb{Z}_{\mathcal{A}}, \leq) = AcBo(\mathbb{Z}_{\mathcal{A}}, \leq)$.

1.- Las series formales en 1 variable con coeficientes en un anillo \mathcal{A} son series con soporte bien ordenado. Es decir,

$$\mathcal{A}[[x]] \subset AcBo(\mathbb{Z}_{\mathcal{A}}, \leq).$$

2.- Sea \mathbb{K} un campo. El campo de fracciones de las series en una variable con coeficientes en \mathbb{K} coincide con el anillo de series con soporte bien ordenado. Es decir,

$$\mathbb{K}((x)) = AcBo(\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}).$$

3.- El anillo de las series de Puiseux en 1 variable con coeficientes en \mathcal{A} está contenido propiamente en las series con soporte casi bien ordenado con coeficientes en \mathbb{Q} . Es decir,

$$\mathcal{A}[[x]]^P \subset Ac(\mathbb{Q}_{\mathcal{A}}, \leq) \tag{1.4}$$

Definición 1.9. Sea $f = \sum_{\alpha \in \varepsilon(f)} a_{\alpha} x^{\alpha}$ una serie con soporte casi bien ordenado y coeficientes en Γ . La restricción de f al subconjunto minimal de su soporte se denomina **parte inicial** de f . Es decir,

$$In(f) := \sum_{\alpha \in \varepsilon(f) \text{ elemento minimal}} a_{\alpha} x^{\alpha}.$$

Si $f \in AcBo(\Gamma_{\mathcal{A}})$, es decir f tiene soporte bien ordenado, la parte inicial $In(f) = a_{\alpha} x^{\alpha}$ es un monomio al que se le llama el **primer término** de f . El **orden** de f se define como

$$Ord(f) := \min \varepsilon(f) \in \Gamma.$$

1.3. El ω -orden.

Un vector $\omega \in \mathbb{R}^n$ define de forma natural una relación de orden en \mathbb{R}^n :

$$\alpha \leq_{\omega} \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta, & \text{ó} \\ \omega \cdot \alpha < \omega \cdot \beta. \end{cases}$$

Se tiene que $(\mathbb{R}^n, +, \leq_{\omega})$ es un grupo ordenado.

Observación 1.10. El orden definido por $\omega \in \mathbb{R}^n$ es el mismo que el orden definido por $\omega' \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $\omega = \lambda\omega'$.

Sea \mathbb{K} un campo.

Si $\omega \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ se tiene que \mathbb{N}^n es casi bien ordenado y acotado inferiormente como subconjunto de $(\mathbb{R}^n, \leq_{\omega})$, por lo tanto,

$$\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]] \subset \bigcap_{\omega \in (\mathbb{R}_{>0})^n} \text{Ac}(\mathbb{R}_{\mathbb{K}}^n, \leq_{\omega}).$$

Ejemplo 1.11. Sea $\varphi(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x^i y^i \in \mathbb{R}[[x, y]]$. Sea $\omega = (-1, -1)$. El conjunto, $\varepsilon(f) = \{(i, i); i \in \mathbb{N}\}$ no es acotado inferiormente bajo el ω -orden, es decir, $\varphi \notin \text{Ac}(\mathbb{R}_{\mathbb{K}}^n, \leq_{(-1, -1)})$.

Definición 1.12. Sea f un polinomio en n variables con coeficientes en \mathbb{K} y sea $\omega \in \mathbb{R}^n$. La ω -**parte inicial de f** es la parte inicial de f como elemento de $\text{Ac}(\mathbb{R}_{\mathbb{K}}^n, \leq_{\omega})$. Si $f(\underline{x}) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \underline{x}^{\alpha}$, se tiene como consecuencia,

$$In_{\omega} f := \sum_{\{\omega \in \varepsilon(f) \subset \mathbb{R}^n; \omega \cdot \alpha = \nu_{\omega} f\}} a_{\alpha} \underline{x}^{\alpha}, \quad (1.5)$$

donde

$$\nu_{\omega}(f) := \min\{\omega \cdot \alpha : \alpha \in \varepsilon(f) \subset \mathbb{R}^n\} \quad (1.6)$$

es llamado el ω -orden de f .

Observación 1.13. Si $\varepsilon(f)$ está bien ordenado, $\nu_\omega(f) = \omega \cdot \text{Ord}(f)$ y en general $In_\omega f = In(f)$.

Ejemplo 1.14. Sea $f(x, y) = x^2 + xy + y^7 + y^2 \in \mathbb{R}[x, y] \subset \mathbb{R}_\mathbb{R}^2$. Si $\omega = (1, 0)$, entonces $\nu_\omega(f) = 0$ y $In_\omega f = y^7 + y^2$.

Ejemplo 1.15. Sea $f(x, y, z) = x^2z + xyz^2 + y^2 + y^7 \in \mathbb{R}[x, y, z]$.

Se tiene $In_{(0,1,0)} f(x, y, z) = x^2z$ y $In_{(1,0,1)} f(x, y, z) = y^2 + y^7$, mientras que $In_{(1,1,3)} f(x, y, z) = y^2$. \square

Proposición 1.16. Sea $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ y sea $\omega \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$. Si $a \in \mathbb{R}_{>0}$, entonces

$$In_\omega(f) = In_{a\omega}(f).$$

Demostración.

El soporte de $In_\omega(f)$ es igual al conjunto

$$\{\mu \in \varepsilon(f); \mu \cdot \omega \leq \beta \cdot \omega \quad \forall \beta \in \varepsilon(f)\}.$$

Como $a \in \mathbb{R}_{>0}$, se tiene

$$\varepsilon(In_\omega(f)) = \{\mu \in \varepsilon(f); \mu \cdot \omega \leq \beta \cdot \omega \quad \forall \beta \in \varepsilon(f)\} \quad (1.7)$$

$$= \{\mu \in \varepsilon(f); \mu \cdot a\omega \leq \beta \cdot a\omega \quad \forall \beta \in \varepsilon(f)\} \quad (1.8)$$

$$=: \varepsilon(In_{a\omega}(f)). \quad \square \quad (1.9)$$

Lema 1.17. Sea $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ y sea $\omega = e^{r+1} + \dots + e^n \in \mathbb{R}^n$ donde e^j es el j -ésimo elemento de la base canónica de \mathbb{R}^n . Existe $g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ con $g(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) = 0$ tal que

$$In_\omega(f) + g = f.$$

8CAPÍTULO 1. POLINOMIOS Y SERIES CON EXPONENTES EN UN GRUPO.

Demostración.

Sea $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ el polinomio dado por $f(x) = \sum_{\alpha \in \varepsilon(f)} a_\alpha x^\alpha$ donde $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$.

El soporte de $In_\omega(f)$ es igual al conjunto

$$\begin{aligned} \varepsilon(In_\omega(f)) &= \{\mu \in \varepsilon(f); \mu \cdot \omega \leq \beta \cdot \omega \ \forall \beta \in \varepsilon(f)\} \\ &= \{\mu \in \varepsilon(f); \mu_{r+1} + \dots + \mu_n \leq \beta_{r+1} + \dots + \beta_n \ \forall \beta \in \varepsilon(f)\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede expresar como la unión

$$\begin{aligned} \varepsilon(f) &= \varepsilon(f) \setminus \varepsilon(In_\omega(f)) \cup \\ &\cup \{\alpha \in \varepsilon(In_\omega(f)); \alpha_i = 0, \ i \geq r+1\} \cup \\ &\cup \{\alpha \in \varepsilon(In_\omega(f)); \exists j \geq r+1 \text{ tal que } \alpha_j > 0\}. \end{aligned}$$

Sea

$$g = \sum_{\{\alpha \in \varepsilon(In_\omega(f)) \setminus \varepsilon(In_\omega(f))\}} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_r^{\alpha_r}.$$

Separando los exponentes en la expansión de f se tiene que

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) &= g(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) \\ &+ \sum_{\{\alpha \in \varepsilon(In_\omega(f)); \alpha_i=0, \ i \geq r+1\}} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_r^{\alpha_r} \\ &+ \sum_{\{\alpha \in \varepsilon(In_\omega(f)); \exists j \geq r+1 \text{ con } \alpha_j > 0\}} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_r^{\alpha_r} \\ &= g(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) + In_\omega(f). \quad \square \end{aligned}$$

Si $\alpha \in \varepsilon(f) \setminus \varepsilon(In_\omega(f))$, entonces existe $j \geq r+1$ tal que $\alpha_j > 0$, por lo que $g(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) = 0$. Con esto termina la demostración.

Notemos que como consecuencia se tiene

$$f(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) = In_{e^{r+1} + \dots + e^n}(f)(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0). \quad (1.10)$$

Definición 1.18. Se dice que un vector $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ **tiene coordenadas racionalmente independientes** si y sólo si $\sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i = 0$ con $\lambda_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \dots, n \implies \lambda_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Proposición 1.19. Si $\omega \in \mathbb{R}^n$ tiene coordenadas racionalmente independientes, entonces $(\mathbb{Q}^n, \leq_\omega)$ es un grupo totalmente ordenado.

Demostración.

Supongamos que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tales que $\omega \cdot \alpha = \omega \cdot \beta = \nu_\omega(f)$. Como consecuencia $(\alpha - \beta) \cdot \omega = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) \omega_i = 0$ con $\alpha_i - \beta_i \in \mathbb{Q}$ para toda i .

Como ω es racionalmente independiente, esto implica que $\alpha_i - \beta_i = 0$ para toda i , es decir, $\alpha = \beta$. \square

Por la observación 1.5 si ω es racionalmente independiente, entonces el soporte de $f \in \text{Ac}(\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}^n, \leq_\omega)$ es bien ordenado. Por lo tanto, $In_\omega f$ es siempre un monomio.

1.4. El poliedro de Newton.

Sea \mathbb{K} un campo algebraicamente cerrado.

Sea f una serie formal en n variables con coeficientes en \mathbb{K} .

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha x^\alpha,$$

$$\text{donde } x = (x_1, \dots, x_n), \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n} \quad (1.11)$$

y $a_\alpha \in \mathbb{K}$.

El **poliedro de Newton analítico** $\Gamma_+(f)$ de f es la envolvente convexa del conjunto de exponentes de f más el primer ortante. Es decir,

$$\Gamma_+(f) := \text{Conv} \left(\bigcup_{\{\alpha \in \varepsilon(f); a_\alpha \neq 0\}} \{\alpha + (\mathbb{R}_{\geq 0})^n\} \right).$$

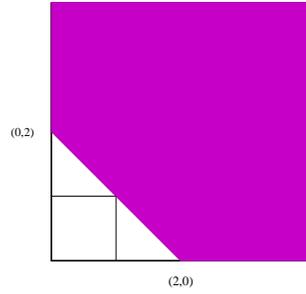


Figura 1.1: El poliedro de Newton $\Gamma_+(f)$ del polinomio $f = x^2 + y^2 + xy^3$.

Ejemplo 1.20. En las figuras 1.1 y 1.2 aparecen los poliedros de Newton de $f = x^2 + y^2 + xy^3$ y $f = x^3 + 2x^2y^2 - 3xy + y^3$ respectivamente.

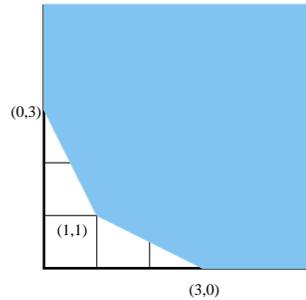


Figura 1.2: El poliedro de Newton $\Gamma_+(f)$ de $f = x^3 + 2x^2y^2 - 3xy + y^3$.

La **frontera de Newton** $\Gamma(f)$ de f se define como la unión de las caras compactas del poliedro de Newton $\Gamma_+(f)$.

NOTA. Cuando se trabaja en geometría global se considera la envolvente convexa del conjunto de exponentes de f sin sumar el primer ortante. Llamaremos a este poliedro, el **poliedro global** de f .

Ejemplo 1.21. En las figuras 1.3 y 1.4 aparecen los poliedros de Newton de $f = x + x^3y - 2xy^3 + x^2y^5 - x^4y^4 - 3y^3$ y $f = x^2 + y^2 + xy^3$ respectivamente.

Sea $P \subset (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ un poliedro convexo.

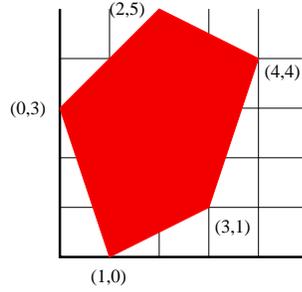


Figura 1.3: El polígono de Newton global de $f = x + x^3y - 2xy^3 + x^2y^5 - x^4y^4 - 3y^3$.

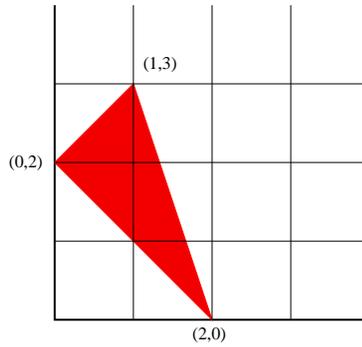


Figura 1.4: El polígono de Newton global de $f = x^2 + y^2 + xy^3$.

Definición 1.22. Dado $\omega \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ llamaremos ω -**hiperplano soporte** de P al hiperplano dado por

$$\pi_\omega(P) = \{z \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n : \omega \cdot z = k\} \text{ donde } k := \min\{\omega \cdot \alpha; \alpha \in P\}. \quad (1.12)$$

El ω -hiperplano soporte es el único hiperplano ortogonal a ω que toca a P y tal que P queda del lado positivo.

Llamaremos ω -**cara** de P al conjunto

$$\Delta_\omega(P) := P \cap \pi_\omega(P).$$

Se tiene, $Ord_{\underline{0}}(P) = \min\{\alpha \cdot \underline{0}; \alpha \in P\} = 0$, por lo que

$$\pi_{\underline{0}}(P) = \{z \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n : \underline{0} \cdot z = 0\} = (\mathbb{R}_{\geq 0})^n.$$

Por lo tanto, la $\underline{0}$ -cara de todo poliedro P es $\Delta_{\underline{0}}(P) = P$.

Ejemplo 1.23. Sea $f = x^2 + y^2 + xy^3$ y sea $\Gamma_+(f)$ el poliedro de Newton de f . La $(1, 1)$ -cara $\Delta_{(1,1)}(\Gamma_+(f))$ es igual a la frontera de Newton $\Gamma(f)$. Es decir,

$$\Gamma(f) = \Delta_{(1,1)}(\Gamma_+(f))$$

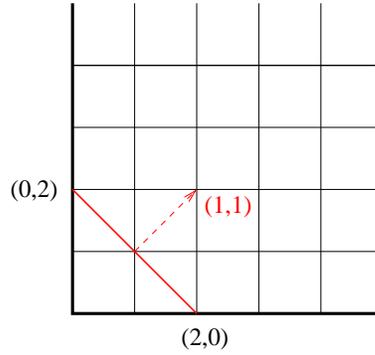


Figura 1.5: La frontera de Newton $\Gamma(x^2 + y^2 + xy^3)$.

Ejemplo 1.24. Sea $f = x^3 + 2x^2y^2 - 3xy + y^3$ y sea $\Gamma_+(f)$ el poliedro de Newton de f . La unión de las caras $\Delta_{(1,2)}(\Gamma_+(f))$ y $\Delta_{(2,1)}(\Gamma_+(f))$ es igual a la frontera de Newton $\Gamma(f)$. Es decir,

$$\Gamma(f) = \Delta_{(1,2)}(\Gamma_+(f)) \cup \Delta_{(2,1)}(\Gamma_+(f)).$$

Observación 1.25. Sea $f(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}x^{\alpha}$ una serie formal en n variables con coeficientes en \mathbb{K} . La ω -parte inicial de f es igual a la serie f restringida a la ω -cara de $\Gamma_+(f)$. Es decir,

$$In_{\omega}(f) = \sum_{\alpha \in \Delta_{\omega}(\Gamma_+(f))} a_{\alpha}x^{\alpha}, \quad (1.13)$$

teniéndose que variando $\omega \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ se obtiene un número finito de posibles partes iniciales de f . Estas partes iniciales están en correspondencia con las caras del poliedro $\Gamma_+(f)$.

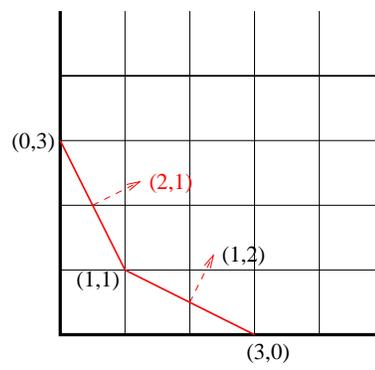


Figura 1.6: La frontera de Newton $\Gamma(x^3 + 2x^2y^2 - 3xy + y^3)$.

Capítulo 2

Poliedros, conos y abanicos.

2.1. Conos poliédricos.

Definición 2.1. Decimos que un vector $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$ es **primitivo** si el máximo común divisor de sus entradas es 1.

Ejemplo 2.2. El vector $(2, 8, 4) \in \mathbb{Z}^3$ no es primitivo, pero $(-3, 7, 8) \in \mathbb{Z}^3$ sí lo es.

Observación 2.3. Un vector $v \in \mathbb{Z}^n$ es primitivo si el segmento abierto $\{\lambda v ; \lambda \in (0, 1)\}$ no tiene puntos con coordenadas enteras.

Definición 2.4. Sean $v^1, \dots, v^k \in \mathbb{R}^n$. El **cono** $Cono(v^1, \dots, v^k)$ generado por los vectores v^1, \dots, v^k es $\langle v^1, \dots, v^k \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$, es decir,

$$Cono(v^1, \dots, v^k) := \{t_1 v^1 + \dots + t_k v^k; t_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, i = 1, \dots, k\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Un conjunto $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ es un **cono poliédrico** si existen $v^1, \dots, v^k \in \mathbb{R}^n$ tales que $\sigma = Cono(v^1, \dots, v^k)$.

La **dimensión** de σ es la dimensión del mínimo subespacio lineal que lo contiene y se denota por $dim(\sigma)$.

Ejemplo 2.5. El cono $\text{Cono}((1,0)) \subset \mathbb{R}^2$ corresponde al semieje $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0\}$, por lo que tiene dimensión igual a 1.

Ejemplo 2.6. El cono $\text{Cono}((1,0,0), (0,1,0)) \subset \mathbb{R}^3$ está contenido en el plano $\{(a,b,0); a,b \in \mathbb{R}\}$ pero no está contenido en ningún subespacio lineal de dimensión 1. Por lo tanto, $\text{Cono}((1,0,0), (0,1,0))$ tiene dimensión igual a 2.

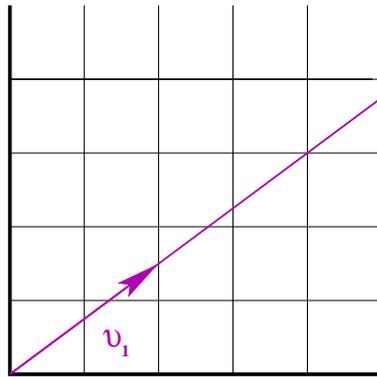


Figura 2.1: El cono generado por v_1 .

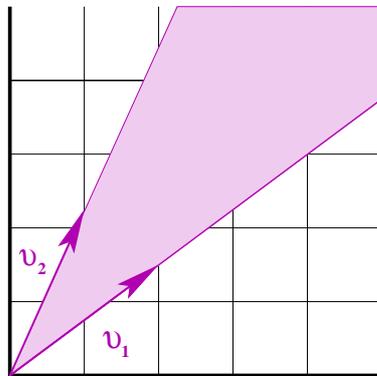


Figura 2.2: El cono generado por v_1, v_2 .

Sea $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ un cono poliédrico, **el interior relativo** $\text{Int}_{rel}(\sigma)$ de σ es el interior de σ como subconjunto del subespacio lineal de \mathbb{R}^n generado por σ .

Definición 2.7. Sea $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ un cono poliédrico. El **cono dual** del cono σ es

$$\sigma^\vee := \{\beta \in \mathbb{R}^n : \beta \cdot v \geq 0, \forall v \in \sigma\}. \quad (2.1)$$

Si $\sigma = \text{Cono}(P^1, \dots, P^n)$, entonces $\beta \in \sigma^\vee \Leftrightarrow \beta \cdot P^j \geq 0$ para toda $j = 1, \dots, n$.

Existen vectores $Q^1, \dots, Q^n \in \mathbb{Z}^n$ tales que $\sigma^\vee = \langle Q^1, \dots, Q^n \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$, es decir, σ^\vee es un cono (Ver por ejemplo [8]).

Ejemplo 2.8. Sea $\tau_1 = \text{Cono}((0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)) \subset \mathbb{R}^3$. Se tiene

$$\begin{aligned} \tau_1^\vee &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; b \geq 0, c \geq 0, a + b + c \geq 0\} \\ &= \{b(-1, 1, 0) + c(-1, 0, 1) + (a + b + c)(1, 0, 0); a \in \mathbb{R}, b, c \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \\ &= \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 0, 0) \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}. \end{aligned}$$

Definición 2.9. Sea $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ un cono poliédrico.

- i) El cono σ es **racional** si se pueden elegir vectores $v^1, \dots, v^k \in \mathbb{Z}^n$ tales que $\sigma = \text{Cono}(v^1, \dots, v^k)$.
- ii) El cono σ es **fuertemente convexo** si no contiene ningún subespacio lineal no trivial, es decir, si $\sigma \cap (-\sigma) = \{\underline{0}\}$.

Si $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ es un cono poliédrico racional, existen $v^1, \dots, v^k \in \mathbb{Z}^n$ primitivos tales que $\sigma = \text{Cono}(v^1, \dots, v^k)$. Este conjunto se puede elegir minimal en el sentido de que $\text{Cono}(\{v^1, \dots, v^{i-1}, v^{i+1}, \dots, v^k\}) \subsetneq \sigma$.

Si además σ es fuertemente convexo, este conjunto minimal de generadores $\{v^1, \dots, v^k\}$ está unívocamente determinado y sus elementos reciben el nombre de **vértices** de σ . Denotaremos por $\text{Vert}(\sigma)$ al conjunto de vértices de σ .

Si un cono racional σ está contenido en el primer ortante $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$, es necesariamente fuertemente convexo y tiene sentido hablar de su conjunto de vértices.

Ejemplo 2.10. El cono $\sigma = \text{Cono}((2, 8, 4), (-3/2, 7/2, 4), (-1, 15, 12)) \subset \mathbb{R}^3$ es fuertemente convexo y tiene como vértices a los vectores $(1, 4, 2)$ y $(-3, 7, 8)$.

En lo que sigue σ será un cono fuertemente convexo contenido en \mathbb{R}^n .

Definición 2.11. Se dice que $\tau \subset \sigma$ es una **cara** de σ si y sólo si existe una forma lineal no negativa en todo σ tal que $\tau = \{l = 0\} \cap \sigma$.

Si $\tau \neq \{0\}$ es una cara de $\sigma = \text{Cono}(v^1, \dots, v^k)$, entonces existe un subconjunto $\{i_1, \dots, i_t\} \subset \{1, \dots, k\}$ tal que $\tau = \text{Cono}(v^{i_1}, \dots, v^{i_t})$.

Ejemplo 2.12. Sean $\sigma = (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ el primer ortante y $e^1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e^2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e^n = (0, \dots, 0, 1)$ los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^n . Para cada subconjunto $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, el cono simplicial

$$E_I := \text{Cono}(e^{i_1}, \dots, e^{i_k}) \quad (2.2)$$

es una cara de σ .

Ejemplo 2.13. Sea σ como en el ejemplo 2.10.

Las caras de dimensión 1 de σ son $\text{Cono}((1, 4, 2))$ y $\text{Cono}((-3, 7, 8))$. El cono σ tiene una única cara de dimensión 0 dada por $\{(0, 0, 0)\}$.

Definición 2.14. Un cono σ es **simplicial** si el conjunto de sus vértices $\{v^1, \dots, v^k\}$ es linealmente independiente, es decir, σ es simplicial si

$$\# \text{ vértices de } \sigma = \dim(\sigma).$$

Ejemplo 2.15. El cono

$$\tau = \text{Cono}((1, 1, 0), (-1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, -1)) \subset \mathbb{R}^3$$

no es simplicial.

Ejemplo 2.16. El cono $\sigma = \text{Cono}((1, 4), (2, 3)) \subset \mathbb{R}^2$ es simplicial.

Sean $P^1, \dots, P^k \in \mathbb{Z}^n$. El **determinante** de $\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^k$ se define como el máximo común divisor del valor absoluto de los determinantes de los menores $k \times k$ de la matriz entera $n \times k$, (P^1, \dots, P^k) y se denota por $\det(P^1, \dots, P^k)$.

Observación 2.17. En el caso $k = n$, el $\det(P^1, \dots, P^k)$ es igual al determinante estándar módulo signo. Además, $\det(P^1) = 1$ si y sólo si P^1 es primitivo.

Ejemplo 2.18. Sean $P^1 = (1, 2, 5)$, $P^2 = (3, 4, 5) \in \mathbb{Z}^3$. La matriz

$$(P^1, P^2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \text{ tiene como menores } 2 \times 2 \text{ a las matrices}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $\det(P^1, P^2) = \text{mcd}\{2, 10, 10\} = 2$.

Ejemplo 2.19. Sean $Q^1 = (1, 1, 5)$, $Q^2 = (1, 2, 8) \in \mathbb{Z}^3$. La matriz

$$(Q^1, Q^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \text{ tiene como menores } 2 \times 2 \text{ a las matrices}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $\det(Q^1, Q^2) = \text{mcd}\{1, 3, 2\} = 1$.

Diremos que un cono σ es **regular** si es simplicial y el determinante de sus vértices es igual a 1.

Ejemplo 2.20. El cono $\sigma = \text{Cono}((1, 2, 5), (2, 4, 5)) \subset \mathbb{R}^3$ no es regular. (Ver el ejemplo 2.18)

Ejemplo 2.21. El cono $\sigma = \text{Cono}(Q^1, Q^2) \subset \mathbb{R}^3$ con Q^1, Q^2 como en el ejemplo 2.19 es regular.

2.2. Abanicos.

Definición 2.22. Se dice que una colección Σ de conos poliédricos en \mathbb{R}^n es un **abanico** si:

- i) Cada cara de un cono poliédrico en Σ es un cono poliédrico perteneciente a Σ ;
- ii) La intersección de cualesquiera dos conos poliédricos $\sigma, \tau \in \Sigma$ es una cara de σ y de τ .

Si Σ es un abanico y $\sigma, \tau \in \Sigma$, entonces $\sigma \cap \tau = \langle Vert(\sigma) \cap Vert(\tau) \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$.

Sea $Vert(\Sigma)$ la unión de los conjuntos de vértices de los conos en Σ . Llamaremos a $Vert(\Sigma)$ el conjunto de **vértices** de Σ .

Definición 2.23. Diremos que un abanico Σ es **completo** si

$$(\mathbb{R}_{\geq 0})^n = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma.$$

NOTA. La noción de completo se utiliza en general para abanicos Σ tales que $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma = \mathbb{R}^n$. Nosotros utilizamos sólo el primer ortante porque vamos a hacer un estudio local.

Definición 2.24. Un abanico Σ es **completo regular** si es completo y todo cono $\sigma \in \Sigma$ es regular.

Algunos autores [Oka] utilizan el nombre *subdivisión cónica simplicial regular* para designar a un abanico completo regular.

Ejemplo 2.25. Sea E_I como en el ejemplo 2.12. $\Sigma_* = \{E_I; I \subset \{1, 2, \dots, n\}\}$ es un abanico completo regular llamado el *abanico completo regular trivial* de $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$.

Ejemplo 2.26. El abanico $\Sigma \subset (\mathbb{R}_{\geq 0})^3$ formado por la unión de los conos

$$\tau_1 = \text{Cono}(e^2, e^3, P), \quad \tau_2 = \text{Cono}(P, e^1, e^3), \quad \tau_3 = \text{Cono}(P, e^1, e^2),$$

donde $P = (1, 1, 1)$ y e^1, e^2, e^3 son los vectores de la base canónica, es un abanico completo regular.

Definición 2.27. Un abanico Υ es un **refinamiento de** un abanico Σ si cada cono de Σ es unión de conos en Υ .

El abanico Υ es un **refinamiento regular de** Σ si Υ es un refinamiento de Σ y todo cono de Υ es regular.

El siguiente resultado se puede ver en [17, Cap. 2].

Teorema 2.28. *Todo abanico tiene un refinamiento regular.*

2.3. Abanicos asociados a poliedros.

Sea $P \subset (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ un poliedro convexo con $P = \text{Conv}(\{\alpha_i + (\mathbb{R}_{\geq 0})^n\})$ para algún conjunto finito $\{\alpha_i\} \subset \mathbb{N}^n$.

Definición 2.29. Para cada cara C de P , la cerradura del conjunto

$$\sigma(C) := \{\omega \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n : \text{la } \omega\text{-cara de } P \text{ es } C\}$$

es un cono.

El conjunto de conos dado por

$$\Sigma(P) := \{\overline{\sigma(C)} : C \text{ es cara de } P\}$$

es un abanico llamado el **abanico dual de P**.

El **i- esqueleto** $\Sigma_i(P)$ del abanico $\Sigma(P)$ es

$$\Sigma_i(P) := \bigcup \{\sigma \in \Sigma(P) : \dim \sigma := i\}.$$

Sea $P \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ un poliedro y sea $\Sigma(P)$ el abanico dual asociado a P . Si $\sigma \in \Sigma(P)$ es un cono y ω, ω' pertenecen al interior relativo de σ , entonces $\Delta_\omega(P) = \Delta_{\omega'}(P)$, por lo tanto, tiene sentido definir la σ -cara $\Delta_\sigma(P)$ de P como

$$\Delta_\sigma(P) := \Delta_\omega(P) \quad (2.3)$$

con $\omega \in \text{Int}_{rel}(\sigma)$.

Existe un mapeo natural biyectivo entre

$$\{\text{Conos del abanico dual } \Sigma(P) \text{ de } P\} \longrightarrow \{\text{Caras de } P\}$$

definido de la siguiente manera:

$$\sigma \in \Sigma(P) \mapsto \Delta_\sigma(P).$$

Notemos que $\dim(\sigma) = \text{codim}_{\mathbb{R}^n}(\Delta_\sigma(P))$.

Observación 2.30. El cono $\tau \in \Sigma(P)$ es una cara de $\sigma \in \Sigma(P)$ si y sólo si $\Delta_\sigma(P)$ es cara de $\Delta_\tau(P) \subset P$.

Notación 2.31. Si P es el poliedro de Newton $\Gamma_+(f)$ de $f \in \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$, denotaremos por $\pi_\omega(f)$ a $\pi_\omega(P)$ y por $\Sigma(f)$ al abanico dual $\Sigma(P)$ de P .

Sea $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Como consecuencia de (2.3), si $\sigma \in \Sigma(f)$ y $\omega, \omega' \in \text{Int}_{rel}(\sigma)$, entonces $In_\omega(f) = In_{\omega'}(f)$, teniendo sentido definir

$$In_\sigma(f) = In_\omega(f) \quad \text{con } \omega \in \text{Int}_{rel}(\sigma).$$

Es decir, las posibles partes iniciales de f variando $\omega \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ se corresponden con los conos del abanico dual de f .

Observación 2.32. Por la observación 2.30 se tiene que:

$$\text{Si } \sigma \in \Sigma(f) \text{ y } \tau \text{ es una cara de } \sigma, \text{ entonces } \varepsilon(In_\sigma(f)) \subset \varepsilon(In_\tau(f)). \quad (2.4)$$

Capítulo 3

Abanico de Groebner y tropicalización.

3.1. El abanico de Groebner.

En esta sección definimos el abanico de Groebner. Este abanico es la extensión natural del abanico dual del poliedro de Newton de una función para ideales arbitrarios.

Sea \mathbb{K} un campo algebraicamente cerrado.

Sea $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. Dado $\omega \in \mathbb{R}^n$, el **ideal ω -inicial** de I se define como el ideal generado por las ω -partes iniciales de los polinomios en I , es decir,

$$\mathfrak{In}_\omega I = \langle In_\omega f : f \in I \rangle. \quad (3.1)$$

Se define en $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ una relación de equivalencia de la siguiente manera:

$$\omega \sim \omega' \Leftrightarrow \mathfrak{In}_\omega I = \mathfrak{In}_{\omega'} I.$$

Dado $\omega \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$, la cerradura $\overline{C_\omega(I)}$ en \mathbb{R}^n de su clase de equivalencia

$$C_\omega(I) := \{u \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n; \mathfrak{In}_u I = \mathfrak{In}_\omega I\}$$

es un cono poliédrico y el conjunto

$$\{\overline{C} : C \text{ es clase de equivalencia } \sim \text{ de } (\mathbb{R}_{\geq 0})^n\}$$

es un abanico. [15, 21]

El **abanico de Groebner** (en $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$) del ideal I se define como

$$\Sigma(I) = \{\bar{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \text{ es clase de equivalencia } \sim \text{ de } (\mathbb{R}_{\geq 0})^n\} \cup \{E_I; I \subset \{1, 2, \dots, n\}\},$$

donde E_I es como en el ejemplo 2.12.

Ejemplo 3.1. Sea $I = \langle f \rangle$ donde $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Los conos de dimensión maximal 3 del abanico de Groebner de I están dados por

$$\tau_1 := \text{Cono}(e^2, e^3, P), \quad \tau_2 := \text{Cono}(e^1, e^3, P), \quad \tau_3 := \text{Cono}(e^1, e^2, P),$$

donde $e^1 = (1, 0, 0)$, $e^2 = (0, 1, 0)$, $e^3 = (0, 0, 1)$, $P = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. En cada cono, las partes iniciales de f están dadas por

$$\text{In}_{\tau_1}(f) = x^2, \quad \text{In}_{\tau_2}(f) = y^2, \quad \text{In}_{\tau_3}(f) = z^2.$$

Los conos de $\Sigma(I)$ de dimensión 2 están dados por

$$\begin{aligned} \tau_{3,P} &:= \text{Cono}(e^3, P), & \tau_{1,P} &:= \text{Cono}(e^1, P), & \tau_{2,P} &:= \text{Cono}(e^2, P), \\ \tau_{1,3} &:= \text{Cono}(e^1, e^3), & \tau_{1,2} &:= \text{Cono}(e^1, e^2), & \tau_{2,3} &:= \text{Cono}(e^2, e^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In}_{\tau_{3,P}}(f) &= x^2 + y^2, & \text{In}_{\tau_{1,P}}(f) &= y^2 + z^2 \\ \text{En estos conos, } \text{In}_{\tau_{2,P}}(f) &= x^2 + z^2, & \text{In}_{\tau_{1,3}}(f) &= y^2 \\ \text{In}_{\tau_{1,2}}(f) &= z^2, & \text{In}_{\tau_{2,3}}(f) &= x^2. \end{aligned}$$

Los conos de $\Sigma(I)$ de dimensión 1 están dados por

$$\sigma_1 = \text{Cono}(e^1), \quad \sigma_2 = \text{Cono}(e^2), \quad \sigma_3 = \text{Cono}(e^3), \quad \sigma_4 = \text{Cono}(P).$$

En estos conos,

$$\begin{aligned} \text{In}_{\sigma_1}(f) &= x^2 + y^2, & \text{In}_{\sigma_2}(f) &= y^2 + z^2, \\ \text{In}_{\sigma_3}(f) &= x^2 + z^2, & \text{In}_{\sigma_4}(f) &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Observación 3.2. Sea $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. Si $\sigma \in \Sigma(I)$ es un cono y $\omega, \omega' \in \text{Int}_{rel}(\sigma)$, entonces para toda $f \in I$ se tiene

$$\text{In}_\omega(f) = \text{In}_{\omega'}(f), \quad (3.2)$$

teniendo sentido definir para cada $f \in I$,

$$\text{In}_\sigma(f) = \text{In}_\omega(f) \quad \text{con } \omega \in \text{Int}_{rel}(\sigma).$$

Es decir, el abanico de Groebner $\Sigma(I)$ es un refinamiento del abanico $\Sigma(f)$ para cada $f \in I$.

Si $I = \langle f \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal principal, entonces $\mathfrak{In}_\omega I = \langle \text{In}_\omega f \rangle$. Por lo tanto, dos vectores $\omega, \omega' \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ satisfacen $\omega \sim \omega'$ si y sólo si pertenecen al mismo cono del abanico $\Sigma(f)$. De lo anterior se tiene la siguiente observación.

Observación 3.3. Si I es un ideal principal generado por $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, entonces el abanico de Groebner $\Sigma(I)$ coincide con el abanico dual $\Sigma(f)$ de $\Gamma_+(f)$, es decir,

$$\Sigma(\langle f \rangle) = \Sigma(\Gamma_+(f)).$$

Observación 3.4. El cono $\tau \in \Sigma(I)$ es una cara de $\sigma \in \Sigma(I)$ si y sólo si para toda $f \in I$ se tiene

$$\varepsilon(\text{In}_\sigma(f)) \subset \varepsilon(\text{In}_\tau(f)). \quad (3.3)$$

Como consecuencia se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.5. Si $\sigma \in \Sigma(I)$ es un cono con vértices P^1, \dots, P^k , entonces para toda $f \in I$ se tiene

$$\bigcap_{i=1}^k \varepsilon(\text{In}_{P^i}(f)) \neq \emptyset. \quad (3.4)$$

Observación 3.6. Sean $v^1, \dots, v^s \in \sigma$ con $\sigma \in \Sigma(I)$ un cono. Para toda $f \in I$, se tiene

$$\bigcap_{i=1}^s \varepsilon(In_{v^i}(f)) \neq \emptyset. \quad (3.5)$$

Demostración.

Sea $f \in I$. Sean $v_1, \dots, v_s \in \sigma$ con $\sigma \in \Sigma(f)$.

- i) Si $v_i \in \text{Int}_{rel}(\sigma)$, entonces $\varepsilon(In_\sigma(f)) = \varepsilon(In_{v_i}(f))$.
- ii) Si existe τ cara de σ tal que $v_i \in \tau$, entonces $\varepsilon(In_\sigma(f)) \subset \varepsilon(In_{v_i}(f))$.

Por lo tanto,

$$\bigcap_{i=1}^s \varepsilon(In_{v_i}(f)) \supset \varepsilon(In_\sigma(f)) \neq \emptyset.$$

Como el abanico de Groebner $\Sigma(I)$ es un refinamiento de $\Sigma(f)$, entonces para cada $f \in I$

$$\bigcap_{i=1}^s \varepsilon(In_{v_i}(f)) \supset \varepsilon(In_\sigma(f)) \neq \emptyset. \quad \square$$

Lema 3.7. Sea $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ y supongamos que $v_1, \dots, v_s \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ son vectores dados tales que $\bigcap_{i=1}^s \varepsilon(In_{a_i v_i}(f)) \neq \emptyset$ para toda $(a_1, \dots, a_s) \in (\mathbb{R}_{> 0})^r$. Se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^s \varepsilon(In_{a_i v_i}(f)) = \varepsilon(In_{a_1 v_1 + \dots + a_s v_s}(f)). \quad (3.6)$$

Demostración.

El resultado es inmediato de la linealidad

$$(a_1 v_1 + \dots + a_s v_s) \cdot \alpha = a_1 v_1 \cdot \alpha + \dots + a_s v_s \cdot \alpha. \quad \square$$

Proposición 3.8. Sean $v_1, \dots, v_s \in \sigma$ con $\sigma \in \Sigma(I)$ un cono. Si $\omega \in \text{Int}_{rel}(\text{Cono}(v_1, \dots, v_s))$, entonces para toda $f \in I$ se tiene

$$\bigcap_{i=1}^s \varepsilon\left(\text{In}_{v_i}(f)\right) = \varepsilon\left(\text{In}_{\omega}(f)\right). \quad (3.7)$$

Demostración.

Por la observación 3.6 para toda $f \in I$ se tiene

$$\bigcap_{i=1}^s \varepsilon\left(\text{In}_{v_i}(f)\right) \neq \emptyset.$$

Sea $\omega \in \text{Int}_{rel}(\text{Cono}(v_1, \dots, v_s))$. Existen $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que $\omega = a_1 v_1 + \dots + a_s v_s$. Por la proposición 1.16 se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^s \varepsilon\left(\text{In}_{v_i}(f)\right) = \bigcap_{i=1}^s \varepsilon\left(\text{In}_{a_i v_i}(f)\right). \quad (3.8)$$

Por último, aplicando el lema 3.7 se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^s \varepsilon\left(\text{In}_{v_i}(f)\right) = \varepsilon\left(\text{In}_{\omega}(f)\right). \quad \square$$

Proposición 3.9. Sea Σ un abanico regular que refina a $\Sigma(I)$ y $\tau \in \Sigma$ un cono con vértices P^1, \dots, P^r . Si $\omega \in \text{Int}_{rel}(\tau)$, entonces para toda $f \in I$ se tiene

$$\bigcap_{i=1}^r \varepsilon\left(\text{In}_{P^i}(f)\right) = \varepsilon\left(\text{In}_{\omega}(f)\right).$$

Demostración.

Como Σ es un refinamiento de $\Sigma(I)$, existe un cono $\sigma \in \Sigma(I)$ tal que $\tau \subset \sigma$. Por lo tanto, los vértices de τ están contenidos en σ , es decir, $P^1, \dots, P^r \in \sigma$. Si $\omega \in \text{Int}_{rel}(\tau)$, entonces por la proposición 3.8 se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^r \varepsilon\left(\text{In}_{P^i}(f)\right) = \varepsilon\left(\text{In}_{\omega}(f)\right)$$

para toda $f \in I$. \square

NOTA. Cuando un ideal I está contenido en el anillo de polinomios, las definiciones anteriores tienen sentido para toda $\omega \in \mathbb{R}^n$, no sólo para ω en el primer ortante. Al abanico que resulta de tomar las clases de equivalencia en \mathbb{R}^n lo llamaremos *abanico de Groebner global* del ideal I .

Ejemplo 3.10. Vamos a calcular el Abanico de Groebner global del ideal $I = \langle f \rangle \subset \mathbb{R}[x, y]$ donde $f = x + x^3y - xy^3 + x^2y^5 - x^4y^4 \in \mathbb{R}[x, y]$.

El abanico de Groebner de $I = \langle f \rangle$ es regular y tiene como vértices a los vectores $(-3, 1)$, $(-1, -2)$, $(1, -1)$, $(3, 1)$, $(-1, 2)$.

Los conos de dimensión 2 de este abanico son $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$. Los conos de dimensión 1 son $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5$. (Ver la figura 3.1)

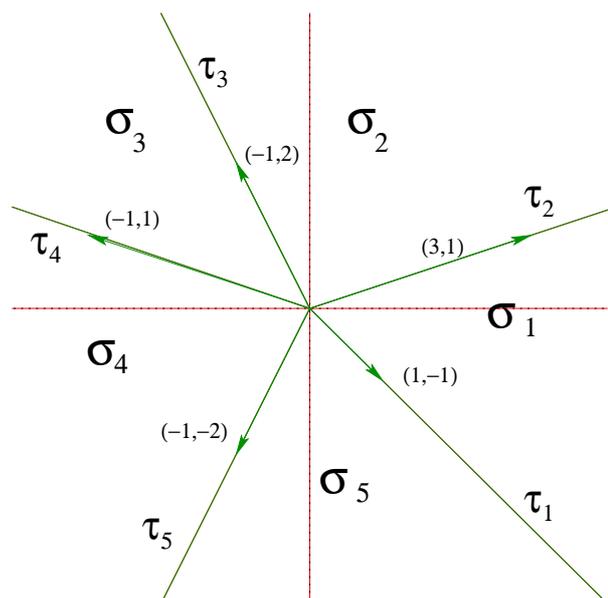


Figura 3.1: El abanico de Groebner de $I = \langle f \rangle \subset \mathbb{R}[x, y]$ con $f = x + x^3y - xy^3 + x^2y^5 - x^4y^4$.

En cada uno de los casos las partes iniciales están dadas por

$$\begin{aligned}
 In_{\tau_1}(f) &= y^3 + x^2y^5, \\
 In_{\tau_2}(f) &= x + y^3, \\
 In_{\tau_3}(f) &= x + x^3y, \\
 In_{\tau_4}(f) &= x^3y - x^4y^4, \\
 In_{\tau_5}(f) &= x^2y^5 - x^4y^4, \\
 &\qquad\qquad\qquad \text{y} \\
 In_{\sigma_1}(f) &= y^3, \\
 In_{\sigma_2}(f) &= x, \\
 In_{\sigma_3}(f) &= x^3y, \\
 In_{\sigma_4}(f) &= -x^4y^4, \\
 In_{\sigma_5}(f) &= x^2y^5
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.11. Sea $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z, w]$ donde

$$f_1(x, y, z, w) = xy + xw - yw, f_2 = xz - w^2, f_3 = yz - yw - w^2.$$

Con ayuda del programa Gfan [9] fue posible calcular el abanico de Groebner global de este ideal. El resultado obtenido se puede encontrar en el Apéndice A.1.

3.2. Campos valorados.

Definición 3.12. Dado un campo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ y un grupo ordenado (Γ, \leq) , una aplicación $v : \mathbb{K} \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ es una **valoración de \mathbb{K}** en Γ si satisface:

- i) $v(a \cdot b) = v(a) + v(b)$,
- ii) $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$.
- iii) $v(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$.

Decimos que (\mathbb{K}, v) es un **campo valorado** con grupo de valores contenido en Γ si $v : \mathbb{K} \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ es una valoración.

Ejemplo 3.13. Sea \mathbb{K} un campo. La aplicación

$$\begin{aligned} v : \quad \mathbb{K} &\longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\} \\ a \in \mathbb{K}^* &\mapsto 0, \\ 0 &\mapsto \infty. \end{aligned}$$

es una valoración llamada la **valoración trivial**.

Observación 3.14. La única valoración $v : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definida de \mathbb{C} a \mathbb{R} es la trivial.

Ejemplo 3.15. Si \mathbb{K} es un campo contenido en $AcBo(\Gamma_A) \subset \Gamma_A$, la aplicación orden $Ord : \mathbb{K} \longrightarrow \Gamma$, es una valoración.

Ejemplo 3.16. Sea $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ el campo de fracciones de las series formales en n variables. Dado $\omega \in \mathbb{R}^n$, la aplicación

$$v : \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad (3.9)$$

$$\frac{P(\underline{x})}{Q(\underline{x})} \mapsto \nu_\omega P - \nu_\omega Q \quad (3.10)$$

donde ν_ω es como en (1.6) es una valoración.

3.3. Tropicalización de un ideal.

En $T = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, se definen las operaciones $a \oplus b = \min(a, b)$ y $a \odot b = a + b$ para $a, b \in T$. Se tiene que (T, \oplus) y (T, \odot) son semigrupos conmutativos. Mas aún T es idempotente, es decir $a \oplus a = a$, para toda $a \in T$.

Sea $a \in T$. Se tiene $a \oplus \infty = a$ y $a \odot 0 = a$, es decir, existen elementos neutros para las operaciones \oplus, \odot definidas en T . Como la distributividad también se cumple, se tiene que (T, \oplus, \odot) es un semianillo.

Definición 3.17. Un polinomio de Laurent con coeficientes en T dado por $F(\underline{x}) = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^n} a_\alpha \odot \underline{x}^\alpha \in T[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$ con $|\Lambda| < \infty$ y $a_\alpha \in \mathbb{R}$, induce una aplicación $F^T : \mathbb{R}^n \rightarrow T$ definida de la siguiente manera :

$$\begin{aligned} \underline{x} \mapsto \bigoplus_{\alpha \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^n} a_\alpha \odot \underline{x}^\alpha &:= \bigoplus_{\alpha \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^n} a_\alpha \odot x_1^{\alpha_1} \odot \dots \odot x_n^{\alpha_n} \\ &= \min \{ a_\alpha \odot x_1^{\alpha_1} \odot \dots \odot x_n^{\alpha_n}; \alpha \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^n \} \\ &= \min \{ a_\alpha + \alpha \cdot \underline{x}; \alpha \in \Lambda \}, \end{aligned}$$

donde $+$, \cdot denotan a la suma usual y el producto interno en \mathbb{R} y \mathbb{R}^n , respectivamente.

A esta aplicación F^T se le llama la **función tropical definida por F** .

Dada $\alpha \in \Lambda$, definimos

$$\mathcal{C}_\alpha := \{ z \in \mathbb{R}^n; a_\alpha + \alpha \cdot z \leq a_{\alpha'} + \alpha' \cdot z, \forall \alpha' \in \Lambda \},$$

la restricción $F^T|_{\mathcal{C}_\alpha} : \mathcal{C}_\alpha \rightarrow T$ de F^T está definida por $z \mapsto a_\alpha + \alpha \cdot z$. Teniéndose que F^T es una función lineal a trozos.

Definición 3.18. La **hipersuperficie tropical** $\mathcal{VT}(F)$ asociada a F es el lugar de no linealidad de la función tropical F^T , es decir,

$$\mathcal{VT}(F) := \bigcup_{\{\alpha, \alpha' \in \Lambda, \alpha \neq \alpha'\}} \{ z \in \mathbb{R}^n; a_\alpha + \alpha \cdot z = a_{\alpha'} + \alpha' \cdot z \leq a_{\alpha''} + \alpha'' \cdot z, \forall \alpha'' \in \Lambda \},$$

La hipersuperficie tropical $\mathcal{VT}(F)$ está contenida en la unión de un número finito de hiperplanos de \mathbb{R}^n .

Ejemplo 3.19. Sea $F = 0 \odot x \oplus 0 \odot x^3 y \oplus 0 \odot x y^3 \oplus 0 \odot x^2 y^5 \oplus 0 \odot x^4 y^4 \in T[x, y]$. Sean $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5$ como en la figura 3.1.

Si $(z_1, z_2) \in \text{Int}_{rel}(\tau_1)$, se tiene que $f(z) = z_2^3 = z_1^2 z_2^5$,
 Si $(z_1, z_2) \in \text{Int}_{rel}(\tau_2)$, se tiene que $f(z) = z_1 = z_2^3$,
 Si $(z_1, z_2) \in \text{Int}_{rel}(\tau_3)$, se tiene que $f(z) = z_1 = z_1^3 z_2$,
 Si $(z_1, z_2) \in \text{Int}_{rel}(\tau_4)$, se tiene que $f(z) = z_1^3 z_2 = z_1^4 z_2^4$,
 Si $(z_1, z_2) \in \text{Int}_{rel}(\tau_5)$, se tiene que $f(z) = z_1^2 z_2^5 = z_1^4 z_2^4$.

Por lo tanto, la hipersuperficie tropical $\mathcal{VT}(F)$ de

$$F = 0 \odot x \oplus 0 \odot x^3 y \oplus 0 \odot xy^3 \oplus 0 \odot x^2 y^5 \oplus 0 \odot x^4 y^4$$

es la unión de los conos $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5$. (Ver la figura 3.1)

Sea (\mathbb{K}, ν) un campo valorado y sea f un polinomio en n variables con coeficientes en \mathbb{K} de la forma $f(x) = \sum_{\alpha \in \varepsilon(f)} \varphi_\alpha x^\alpha$. La **tropicalización de f** es la aplicación

$$\mathcal{T}f := \bigoplus_{\alpha \in \varepsilon(f)} \nu(\varphi_\alpha) \odot x^\alpha : T^n \longrightarrow T. \quad (3.11)$$

La **variedad tropical** asociada a f se define como

$$\mathcal{VT}(f) := \mathcal{VT}(\mathcal{T}f).$$

Ejemplo 3.20. Sea $f = (7t^3 + t^5 + t^{40})x^2 + (2+t)xy + (2t^{-2} + 4+t)y^3 \in \mathbb{K}[x, y]$ con $\mathbb{K} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Consideremos la valoración $\nu : \mathbb{C}[t, t^{-1}] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_\alpha \mapsto \text{Ord}(\varphi_\alpha)$. La tropicalización de f es

$$\mathcal{T}f = 3 \odot x^2 \oplus 0 \odot xy \oplus (-2) \odot y^3.$$

La variedad tropical asociada a f es el lugar de no linealidad de $\mathcal{T}f$ y corresponde a la unión de las tres rectas que se muestran en la figura 3.2.

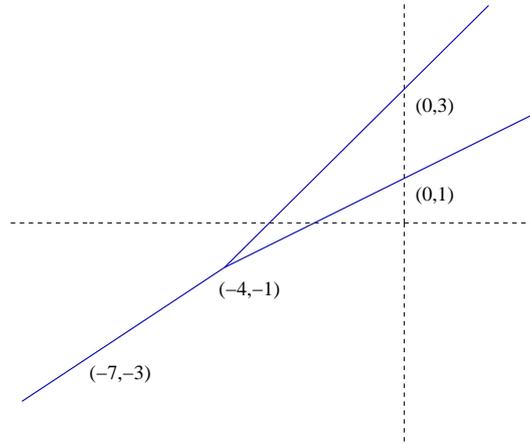


Figura 3.2: La variedad tropical asociada a $f = (7t^3 + t^5 + t^{40})x^2 + (2+t)xy + (2t^{-2} + 4 + t)y^3$.

Ejemplo 3.21. Sea $f(x, y) = \sum_{\{(i,j) \in \varepsilon(f)\}} a_{ij}x^i y^j \in \mathbb{C}[x, y]$ donde $a_{ij} \in \mathbb{C}^*$.

Si $v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ es la valoración trivial, la tropicalización de f es

$$\mathcal{T}f = \bigoplus_{(i,j) \in \varepsilon(f)} 0 \odot x^i y^j \in T[x, y].$$

Por lo tanto, la tropicalización de f se puede ver como una aplicación $\mathcal{T}f|_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \bigoplus_{(i,j) \in \varepsilon(f)} 0 + i\gamma_1 + j\gamma_2 &= \min\{(i, j) \cdot (\gamma_1, \gamma_2); (i, j) \in \varepsilon(f)\} \\ &= \text{Ord}_{(\gamma_1, \gamma_2)}(f). \end{aligned}$$

En lo que sigue nos restringiremos al caso en el que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Procediendo de manera análoga al ejemplo anterior, si f es un polinomio en n variables con coeficientes en \mathbb{C} , entonces se tendrá que la tropicalización de f corresponde a la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{T}f : T^n &\rightarrow T, \\ \gamma &\mapsto \text{ord}_\gamma f. \end{aligned}$$

Sea $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Como $In_\omega(f)$ es un monomio si y sólo si ω pertenece al interior relativo de un cono maximal σ , se tiene que

$$\omega \in \mathcal{VT}(f) \iff In_\omega(f) \text{ no es un monomio.} \quad (3.12)$$

Por lo tanto, $\mathcal{VT}(f)$ es el $(n-1)$ -esqueleto $\Sigma_{n-1}(f)$ del abanico dual del poliedro de Newton de f .

Definición 3.22. Sea $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. La **variedad tropical asociada a I** se define como

$$\mathbf{VT}(I) := \bigcap_{f \in I} \mathcal{VT}(f) \subset \mathbb{R}^n.$$

Por la relación (3.12),

$$\mathbf{VT}(I) = \{\omega \in \mathbb{R}^n : In_\omega(f) \text{ no es un monomio } \forall f \in I\}.$$

Proposición 3.23. Sea $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. Sea $\omega \in Int_{rel}(\sigma)$ con $\sigma \subset \Sigma(I)$ un cono, se tiene que

$$\omega \in \mathbf{VT}(I) \iff \sigma \subset \mathbf{VT}(I).$$

Demostración.

\Rightarrow] Supongamos que $\sigma \subset \mathbf{VT}(I)$.

Como $Int_{rel}(\sigma) \subset \sigma$, si $\omega \in Int_{rel}(\sigma)$, entonces $\omega \in \mathbf{VT}(I)$.

\Leftarrow] Sea $\sigma \subset \Sigma(I)$ un cono. Sea $\omega \in Int_{rel}(\sigma)$ y supongamos que $\omega \in \mathbf{VT}(I)$, es decir, para toda $f \in I$ la ω -parte inicial $In_\omega(f)$ no es un monomio.

Si $\omega' \in Int_{rel}(\sigma)$, entonces para toda $f \in I$ se tiene

$$In_\omega(f) = In_{\omega'}(f).$$

Por lo tanto, $\omega' \in \mathbf{VT}(I)$.

Sea $v \in \sigma \setminus Int_{rel}(\sigma)$. Existe $\tau \in \Sigma(I)$ cara de σ tal que $v \in \tau$. Por la observación 3.4, para toda $f \in I$ se tiene que

$$\varepsilon(In_\omega(f)) = \varepsilon(In_\sigma(f)) \subset \varepsilon(In_\tau(f)) = \varepsilon(In_v(f)).$$

Por lo tanto, para toda $f \in I$ existe $g_f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tal que

$$In_v(f) = In_\omega(f) + g_f.$$

Luego, para toda $f \in I$ el polinomio $In_v(f)$ no es monomial. Es decir, $v \in \mathbf{VT}(\mathbf{I})$.

Por lo anterior, se tiene que $\sigma = \text{Int}_{rel}(\sigma) \cup (\sigma \setminus \text{Int}_{rel}(\sigma)) \subset \mathbf{VT}(\mathbf{I})$. \square

La siguiente proposición nos ayudará a expresar la variedad tropical asociada a un ideal en función de los ideales ω -iniciales.

Proposición 3.24. El ideal $J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ no tiene monomios si y sólo si $V(J) \cap (\mathbb{C}^*)^n \neq \emptyset$.

Demostración.

\Leftarrow] Si $ax^\alpha \in J$ y $z \in V(J)$, entonces $az_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n} = 0$ por lo que existe i tal que $z_i = 0$. Luego, $z \notin (\mathbb{C}^*)^n$.

\Rightarrow] Supongamos que $V(J) \cap (\mathbb{C}^*)^n = \emptyset$. Entonces $V(J) \subset \bigcup_{i=1}^n \{x_i = 0\}$. El monomio $x^{(1, \dots, 1)}$ satisface $V(x^{(1, \dots, 1)}) \supset V(J)$ y por el *Nullstellensatz*, existe k tal que $x^{(k, \dots, k)} \in J$, es decir, J contiene un monomio. \square

Como consecuencia de la proposición 3.24, para todo ideal $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{VT}(\mathbf{I}) &= \{\omega \in \mathbb{R}^n : \mathfrak{In}_\omega(I) \text{ no contiene ningún monomio}\} = \\ &= \{\omega \in \mathbb{R}^n : \mathfrak{In}_\omega(I) \text{ tiene ceros fuera de los hiperplanos coordenados}\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{VT}(\mathbf{I}) = \{\omega \in \mathbb{R}^n : Z(\mathfrak{In}_\omega(I)) \cap (\mathbb{C}^*)^n \neq \emptyset\}. \quad (3.13)$$

Capítulo 4

Variedades Newton no-degeneradas.

4.1. Hipersuperficies no-degeneradas: Un resultado de Kouchnirenko.

Sea \mathbb{K} un campo algebraicamente cerrado y sea $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Sean $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. El **conjunto de ceros** de f_1, f_2, \dots, f_n es el lugar donde se anulan simultáneamente estos polinomios. Es decir,

$$Z(f_1, f_2, \dots, f_n) := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n; f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x) = 0\}.$$

Sea $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. La **variedad algebraica definida por I** es

$$Z(I) := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n; f(x) = 0, \forall f \in I\} = \bigcap_{f \in I} Z(f).$$

Observación 4.1. Si $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$, entonces $Z(I) = Z(f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Sea $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ con $f(x) = \sum_{\alpha \in \varepsilon(f)} a_\alpha x^\alpha$ y sea $\Gamma_+(f)$ el poliedro de Newton de f . Definimos la **parte poligonal principal** de f al infinito

como el polinomio $f_0 = \sum_{\alpha \in \Gamma(f)} a_\alpha x^\alpha$. El polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ es **conveniente** si para toda $i = 1, 2, \dots, n$ existe $n_i \geq 1$ tal que el monomio $x_i^{n_i}$ tiene coeficiente diferente de cero en f .

Dado un polinomio conveniente f , el conjunto $\Gamma_-(f)$ se define como la envolvente convexa de $\underline{0}$ unión el soporte de f . Es decir,

$$\Gamma_-(f) := \text{Conv}\left(\{\underline{0}\} \cup \varepsilon(f)\right).$$

El conjunto $\Gamma_-(f) \subset (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ es un poliedro.

Sea P un poliedro compacto en \mathbb{R}^n . El **número de Newton del poliedro** P se define como :

$$v(P) = n! \text{vol}_n(P) - (n-1)! \text{vol}_{n-1}(P) + \dots + (-1)^{n-1} \text{vol}_1(P) + (-1)^n,$$

donde $\text{vol}_n(P)$ es el volumen n -dimensional del poliedro P y $\text{vol}_k(P)$ es la suma de los volúmenes k -dimensionales de las intersecciones de P con todos planos de la forma

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = 0, \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Dado un polinomio conveniente $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, se define el **número de Newton de f** como

$$\nu(f) = v(\Gamma_-(f)).$$

Si f es un polinomio no necesariamente conveniente, el polinomio $f + \beta_1 x_1^m + \dots + \beta_n x_n^m$ es conveniente para alguna $m \geq 1$. En este caso se define el **número de Newton de f** como

$$\nu(f) = \sup\{\nu(f + \beta_1 x_1^m + \dots + \beta_n x_n^m); m \geq 1\}.$$

Definición 4.2. Un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ es **Newton no-degenerado** si para cada cara $\Delta \subset \Gamma(f)$ del poliedro de Newton los polinomios $(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1})|_\Delta, \dots, (x_n \frac{\partial f}{\partial x_n})|_\Delta$ no se anulan simultáneamente en $(\mathbb{K} \setminus \{0\})^k$.

Observación 4.3. Si f es un polinomio Newton no-degenerado, entonces f no tiene singularidades fuera de los hiperplanos coordenados.

Una **hipersuperficie** algebraica $V \subset \mathbb{K}^n$ es **Newton no-degenerada** si el polinomio que la define es Newton no-degenerado.

Dado $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, el **número de Milnor de** f se define como

$$\mu(f) := \dim \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] / \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

El número de Milnor de un polinomio es finito si y sólo si el conjunto de los puntos críticos de f en $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ es finito. En el caso analítico complejo y en el algebraico, $\mu(f) = \infty$ significa que el punto $\underline{0}$ es una singularidad no aislada de $Z(f)$.

En el artículo [12, Teo. 1,15, p,6], Kouchnirenko demuestra lo siguiente.

Teorema 4.4. Sea $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio conveniente. Se tiene

- i) Si \mathbb{K} es un campo algebraicamente cerrado de característica 0, entonces $\mu(f) \leq \nu(f)$.
- ii) Si la parte poligonal principal de f al infinito es no degenerada, entonces $\mu(f) = \nu(f)$. En particular, $\mu(f) < \infty$.

4.2. Variedades no-degeneradas de intersección completa.

Definición 4.5. Una variedad algebraica $V \subset \mathbb{K}^n$ de dimensión $n - k$ es una **intersección completa** si existen polinomios $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ con $i = 1, \dots, k$ tales que $V = Z(f_1, \dots, f_k)$.

Ejemplo 4.6. Una hipersuperficie siempre es una variedad de intersección completa.

La siguiente definición fue introducida por Khovanskii en [11].

Definición 4.7. Una aplicación $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k$ dada por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^k \\ x &\mapsto (f_1(x), \dots, f_k(x)) \end{aligned}$$

con $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ para $i = 1, 2, \dots, k$ es **Newton no-degenerada para** $\omega \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ si la variedad $Z(In_\omega f_1, \dots, In_\omega f_k)$ es intersección completa y no tiene singularidades fuera de los hiperplanos coordenados.

La aplicación f es **Newton no-degenerada** si $Z(f_1, \dots, f_k)$ es una variedad intersección completa y f es Newton no-degenerada para toda $\omega \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$.

Ejemplo 4.8. Sea

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, y) \end{aligned} \text{ y sea}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x^5 + y^5 + xy^3 + x^3y - 2x^2y^2, \quad xy^3 + x^3y - 2x^2y^2). \end{aligned}$$

Para cada vector $\omega \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^2$, la ω -parte inicial de f tienen sus ceros dentro de los hiperplanos coordenados, por lo tanto la función f es una aplicación Newton no-degenerada.

La aplicación g no es Newton no-degenerada ya que para el vector $\omega = (1, 1)$, la variedad $Z(In_\omega g)$ tiene singularidades en los hiperplanos coordenados.

Definición 4.9. Se dice que una **variedad intersección completa** V de dimensión $n - k$ es **Newton no-degenerada** si existen $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ con $V = Z(f_1, \dots, f_k)$ tales que la aplicación dada por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^k \\ x &\mapsto (f_1(x), \dots, f_k(x)) \end{aligned}$$

es Newton no-degenerada.

Observación 4.10. La definición de variedad de intersección completa Newton no-degenerada depende de aplicaciones Newton no-degeneradas. Si “nos equivocamos” eligiendo el sistema de generadores, una variedad no degenerada puede “parecer” degenerada.

Ejemplo 4.11. Sean f y g como en el ejemplo 4.8. Se tiene que

$$Z(f) = \{(0, 0)\} = Z(g),$$

por lo que la variedad $V = Z(g)$ puede parecer degenerada aunque sea no degenerada.

4.3. Variedades en \mathbb{K}^n Newton no-degeneradas.

En esta sección introduciremos la noción de variedad (no necesariamente de intersección completa) Newton no-degenerada. Esta definición, a diferencia de aquella dada por Khovanskii no depende de la existencia de un sistema de generadores con las propiedades dadas del ideal que define a la variedad.

Definición 4.12. Decimos que un **ideal** $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ es **Newton no-degenerado** si para toda $\omega \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$,

- i) La variedad $Z(\mathfrak{J}_{\mathbf{n}_\omega} I)$ definida por el ideal $\mathfrak{J}_{\mathbf{n}_\omega} I$ no tiene singularidades en $(\mathbb{K}^*)^n$ y
- ii) La dimensión de $Z(I)$ es igual a la dimensión de $Z(\mathfrak{J}_{\mathbf{n}_\omega} I)$, es decir,

$$\dim Z(I) = \dim Z(\mathfrak{J}_{\mathbf{n}_\omega} I).$$

Si $\omega = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, entonces la variedad $Z(\mathfrak{J}_{\mathbf{n}_\omega} I)$ es llamada el *cono tangente* a la variedad $Z(I)$ y se cumple que $\dim Z(I) = \dim Z(\mathfrak{J}_{\mathbf{n}_\omega} I)$. Hasta el momento no hemos podido demostrar que para toda variedad $Z(I)$ y para toda $\omega \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ esta condición se satisfaga.

Ejemplo 4.13. Las distintas partes iniciales de $x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{C}[x, y, z]$ son $x^2, y^2, z^2, x^2 + y^2, x^2 + z^2, y^2 + z^2$ y $x^2 + y^2 + z^2$. Estos polinomios no tienen singularidades fuera de los hiperplanos coordenados.

Por lo tanto, el ideal $I = \langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z]$ es un ideal Newton no-degenerado.

Definición 4.14. La variedad $V = Z(I) \subset \mathbb{K}^n$ es **Newton no-degenerada** si el ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ es Newton no-degenerado.

Ejemplo 4.15. Sea $I = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z, w]$ donde $f_1(x, y, z, w) = xz, f_2(x, y, z, w) = xw, f_3(x, y, z, w) = yz, f_4(x, y, z, w) = yw$.

La variedad $V = Z(I) \subset \mathbb{C}^4$ es una variedad algebraica de dimensión 2 formada por dos planos en \mathbb{C}^4 que se intersectan en un punto. Esta variedad tiene una singularidad aislada en $\underline{0}$ y no tiene singularidades en $(\mathbb{C}^*)^4$.

Para cada $\omega \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^4$, se tiene que

$$In_\omega f_i = f_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Esto sucede porque cada polinomio $f_i, i = 1, 2, 3, 4$ es monomial. Por lo tanto, para toda $\omega \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^4$ se tiene que $\dim Z(\mathfrak{I}_\omega I) = \dim Z(I)$.

La variedad definida por I no es intersección completa ya que una variedad compleja de intersección completa de dimensión 2 con singularidades aisladas es necesariamente normal. La variedad V no es normal ya que su normalización es la unión disjunta de los dos planos.

Por lo anterior, la variedad V es Newton no-degenerada con nuestra definición.

Ejemplo 4.16. Sea $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z, w]$ donde $f_1(x, y, z, w) = xy + xw - yw, f_2 = xz - w^2, f_3 = yz - yw - w^2$. La variedad $Z(I) \subset \mathbb{C}^4$ no es de intersección completa y tiene dimensión igual a 2.

El abanico de Groebner del ideal I se calculó en el ejemplo 3.11. Usando el programa Gfan [9] se pudieron calcular los distintos ideales iniciales de I (Ver Apéndice A.2).

Con la ayuda del programa Singular [7] se pudo comprobar que estos ideales iniciales definían variedades algebraicas de dimensión compleja igual a 2 sin singularidades en $(\mathbb{C}^*)^4$.

Por lo tanto, $Z(I) \subset \mathbb{C}^4$ es Newton no-degenerada bajo nuestra definición.

Capítulo 5

Resolución tórica de variedades no-degeneradas.

En el siguiente capítulo construiremos la modificación tórica $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^n$ asociada a Σ . Esta aplicación es un morfismo birracional que nos permite desingularizar a la variedad V . Más información sobre este tipo de aplicaciones se puede encontrar en [2, 3, 16].

5.1. Morfismos racionales monomiales y conos.

Dada una matriz $\mathcal{M} = (M_{i,j}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Z})$. Utilizaremos la notación

$$M_j^* := (M_{j,1}, \dots, M_{j,n}) \in \mathbb{Z}^n \quad \text{y} \quad M^j := (M_{1,j}, \dots, M_{n,j}) \in \mathbb{Z}^n$$

para sus filas y columnas respectivamente.

A cada matriz $\mathcal{M} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Z})$ le asociaremos un morfismo racional $\hat{\psi}_{\mathcal{M}} : \mathbb{C}^n \dashrightarrow \mathbb{C}^n$ que no siempre está definido en todo \mathbb{C}^n . Su restricción,

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{M}} &:= \hat{\psi}_{\mathcal{M}}|_{(\mathbb{C}^*)^n} : (\mathbb{C}^*)^n \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^n \\ x &\mapsto (x^{M^1}, x^{M^2}, \dots, x^{M^n}) \end{aligned}$$

es un mapeo regular bien definido.

Proposición 5.1. El morfismo $\psi_{\mathcal{M}}$ es bi-regular (isomorfismo) si y sólo si el cono generado por las filas de \mathcal{M} es regular.

Demostración.

Sean $\mathcal{M}, \mathcal{P} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Z})$. Se tiene

$$\psi_{\mathcal{M}} \circ \psi_{\mathcal{P}} = \psi_{\mathcal{M}\mathcal{P}}$$

donde $\mathcal{M}\mathcal{P}$ es el producto de matrices en $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Z})$. Por lo tanto, el morfismo $\psi_{\mathcal{M}}$ es bi-regular si y sólo si existe $\mathcal{M}^{-1} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Z})$, es decir si y sólo si $\det \mathcal{M} = \pm 1$. \square

Sea σ el cono generado por las filas de \mathcal{M} . Utilizaremos la notación ψ_{σ} para designar al morfismo $\psi_{\mathcal{M}}$. Es decir,

$$\begin{aligned} \psi_{\sigma} : \mathbb{C}^n &\dashrightarrow \mathbb{C}^n \\ y &\mapsto \psi_{\mathcal{M}}(y). \end{aligned}$$

Observación 5.2. Sea $\mathcal{M} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Z})$ y sea $J \subset \{1, \dots, n\}$ el conjunto de subíndices j para los que la fila j -ésima de \mathcal{M} tiene entradas no negativas, es decir, $J = \{j \in \{1, \dots, n\}; M_j^* \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n\}$. El morfismo $\psi_{\mathcal{M}}$ es regular en y si y sólo si

$$y \in \mathbb{C}^n(*J^c) := \{y \in \mathbb{C}^n : y_i \neq 0, i \in J^c\}, \quad (5.1)$$

donde J^c denota al complemento de J en el conjunto $\{1, \dots, n\}$.

Ejemplo 5.3. Sean τ_1, τ_2 y τ_3 los conos que aparecen en el ejemplo 2.26. Es decir,

$$\tau_1 = \text{Cono}(e^2, e^3, P), \quad \tau_2 = \text{Cono}(P, e^1, e^3), \quad \tau_3 = \text{Cono}(P, e^1, e^2),$$

donde $P = (1, 1, 1)$ y e^1, e^2, e^3 son los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^3 .

Sean $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ y \mathcal{M}_3 las matrices 3×3 dadas por

$$\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} e^2 \\ e^3 \\ P \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} P \\ e^1 \\ e^3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_3 = \begin{pmatrix} P \\ e^1 \\ e^2 \end{pmatrix}.$$

Para cada cono τ_1, τ_2, τ_3 los morfismos ψ_{τ_i} están definidos como

$$\psi_{\tau_1}(t_1, t_2, t_3) = \psi_{\mathcal{M}_1}(t_1, t_2, t_3) = (t_3, t_1 t_3, t_2 t_3);$$

$$\psi_{\tau_2}(t_1, t_2, t_3) = \psi_{\mathcal{M}_2}(t_1, t_2, t_3) = (t_1 t_2, t_1, t_1 t_3); \text{ y}$$

$$\psi_{\tau_3}(t_1, t_2, t_3) = \psi_{\mathcal{M}_3}(t_1, t_2, t_3) = (t_1 t_2, t_1 t_3, t_1).$$

Como los conos τ_1, τ_2, τ_3 son regulares se tiene que los morfismos $\psi_{\tau_1}, \psi_{\tau_2}, \psi_{\tau_3}$ son birracionales. Además, estos morfismos son regulares en todo \mathbb{C}^3 ya que τ_1, τ_2 y τ_3 están contenidos en el primer ortante.

Los morfismos inversos están dados por

$$\psi_{\tau_1}^{-1}(t_1, t_2, t_3) = \psi_{\mathcal{M}_1}^{-1}(t_1, t_2, t_3) = (t_1^{-1} t_2, t_1^{-1} t_3, t_1);$$

$$\psi_{\tau_2}^{-1}(t_1, t_2, t_3) = \psi_{\mathcal{M}_2}^{-1}(t_1, t_2, t_3) = (t_2, t_1 t_2^{-1}, t_2^{-1} t_3); \text{ y}$$

$$\psi_{\tau_3}^{-1}(t_1, t_2, t_3) = \psi_{\mathcal{M}_3}^{-1}(t_1, t_2, t_3) = (t_3, t_1 t_3^{-1}, t_2 t_3^{-1})$$

y son bi-regulares en

$$\mathbb{C}^n(*\{1\}) = \{y \in \mathbb{C}^n : y_1 \neq 0\}, \quad (5.2)$$

$$\mathbb{C}^n(*\{2\}) = \{y \in \mathbb{C}^n : y_2 \neq 0\}, \quad (5.3)$$

$$\mathbb{C}^n(*\{3\}) = \{y \in \mathbb{C}^n : y_3 \neq 0\}, \quad (5.4)$$

respectivamente.

5.2. Variedad tórica asociada a un abanico regular.

Sea Σ un abanico completo regular. En esta sección construiremos la variedad tórica $X = X_\Sigma$ asociada a Σ .

En lo que sigue, \mathfrak{M} denotará al conjunto de conos de dimensión maximal n en Σ y σ será un cono en \mathfrak{M} con vértices P^1, \dots, P^n . Denotaremos por \mathbb{C}_σ^n al espacio afín de dimensión n con coordenadas $y_\sigma = (y_{\sigma,1}, \dots, y_{\sigma,n})$.

En la unión disjunta

$$\bigsqcup_{\sigma \in \mathfrak{M}} \mathbb{C}_\sigma^n$$

definimos una relación de equivalencia de la siguiente manera:

Dados $u_\sigma \in \mathbb{C}_\sigma^n$ y $u_\tau \in \mathbb{C}_\tau^n$, $u_\sigma \sim u_\tau$ si:

- i) El morfismo birracional $\psi_\tau^{-1}\psi_\sigma : \mathbb{C}_\sigma^n \rightarrow \mathbb{C}_\tau^n$ es bi-regular en $u_\sigma \in \mathbb{C}_\sigma^n$ y además
- ii) $u_\tau = \psi_\tau^{-1}\psi_\sigma(u_\sigma)$.

La **variedad tórica X_Σ asociada a Σ** es el espacio cociente de $\bigsqcup_{\sigma \in \mathfrak{M}} \mathbb{C}_\sigma^n$ por la relación de equivalencia anterior. Es decir,

$$X_\Sigma := \bigsqcup_{\sigma \in \mathfrak{M}} \mathbb{C}_\sigma^n / \sim .$$

Como los morfismos de pegado son biholomorfismos, X_Σ es una variedad compleja (Ver por ejemplo [17]) con cartas coordenadas determinadas por los elementos de \mathfrak{M} . Cada carta $(\mathbb{C}_\sigma^n, y_\sigma)$ se llama la **carta coordenada tórica** asociada a $\sigma \in \mathfrak{M}$.

Dados $\sigma = \text{Cono}(P^1, \dots, P^n) \in \mathfrak{M}$ y $\tau = \text{Cono}(Q^1, \dots, Q^n) \in \mathfrak{M}$, el morfismo $\psi_\tau^{-1}\psi_\sigma$ de cambio de cartas satisface

$$\psi_\tau^{-1}\psi_\sigma = \psi_{\mathcal{Q}^t}^{-1}\psi_{\mathcal{P}^t} = \psi_{(\mathcal{Q}^t)^{-1}}\psi_{\mathcal{P}^t} = \psi_{(\mathcal{Q}^{-1})^t}\psi_{\mathcal{P}^t} = \psi_{(\mathcal{P}\mathcal{Q}^{-1})^t} = \psi_{((\mathcal{Q}\mathcal{P}^{-1})^{-1})^t},$$

donde \mathcal{Q} y \mathcal{P} son las matrices $n \times n$ que tienen como columnas a P^1, \dots, P^n y Q^1, \dots, Q^n respectivamente.

Por lo tanto $\psi_\tau^{-1}\psi_\sigma$ se corresponde con el morfismo $\psi_{(\lambda_{ij})}$ donde

$$P^j = \sum_{k=1}^n \lambda_{kj} Q^k. \quad (5.5)$$

La variedad X_Σ es una variedad algebraica suave (Ver por ejemplo [17, Cap. 2]) y recibe el nombre de variedad tórica porque existe un encaje natural $\iota : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow X$ del toro $(\mathbb{C}^*)^n$ compatible con la identificación \sim . Este

morfismo es un encaje canónico $\iota_\sigma : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow (\mathbb{C}_\sigma^n)^*$ en cada carta y está definido por $\iota_\sigma(z) = \psi_\sigma^{-1}(z)$. La imagen de ι es un abierto denso en X_Σ al que llamamos **toro maximal** y lo denotamos por T_{max} .

5.3. Divisores asociados a conos.

Sea Σ un abanico completo regular y sea \mathfrak{M} el conjunto de conos de dimensión maximal n en Σ .

Dados $\tau, \sigma \in \mathfrak{M}$, sea $\{P^1, \dots, P^s\} = Vert(\sigma) \cap Vert(\tau)$, es decir, $\tau \cap \sigma = Cono(P^1, \dots, P^s)$.

Proposición 5.4. La matriz $\Lambda = (\lambda_{ij})$ correspondiente al morfismo de cambio de carta $\psi_\tau^{-1}\psi_\sigma$ es de la forma $\Lambda = \begin{pmatrix} I_s & * \\ 0 & \Lambda' \end{pmatrix}$ donde I_s es la matriz identidad $s \times s$ y Λ' es una matriz unimodular. El morfismo $\psi_\tau^{-1}\psi_\sigma$ está dado por

$$\psi_\tau^{-1}\psi_\sigma : \mathbb{C}_\sigma^n \longrightarrow \mathbb{C}_\tau^n \\ y_\sigma \longmapsto (w_1, \dots, w_n)$$

donde

$$w_i = \begin{cases} y_{\sigma,i} \prod_{j=s+1}^n y_{\sigma,j}^{\lambda_{i,j}}, & \text{si } i \leq s \\ \prod_{j=s+1}^n y_{\sigma,j}^{\lambda_{i,j}}, & \text{si } s+1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (5.6)$$

Sea $J = \{1, \dots, s\}$. Por la observación 5.2, el morfismo $\psi_\tau^{-1}\psi_\sigma$ es regular en $\mathbb{C}_\sigma^n(*J^c)$ para $J = \{1, \dots, s\}$ y

$$\psi_\tau^{-1}\psi_\sigma(\mathbb{C}_\sigma^n(*J^c)) = \mathbb{C}_\tau^n(*J^c). \quad (5.7)$$

La demostración de esta proposición es consecuencia de (5.5).

Por (5.7), si $P^1 \in \tau \cap \sigma$, dentro de los divisores $\{y_{\sigma,1} = 0\}$ en $(\mathbb{C}_\sigma^n)^*$ y $\{y_{\tau,1} = 0\} \subset (\mathbb{C}_\tau^n)^*$, los conjuntos

$$\mathbb{C}_\sigma^n(*J^c) \cap \{y_{\sigma,1} = 0\} = \{y_{\sigma,1} = 0; y_{\sigma,j} \neq 0, j > s\} \text{ y}$$

$$\mathbb{C}_\tau^n(*J^c) \cap \{y_{\tau,1} = 0\} = \{y_{\tau,1} = 0; y_{\tau,j} \neq 0, j > s\}$$

se identifican en la variedad tórica asociada a Σ .

Ejemplo 5.5. Sean τ_1, τ_2 y τ_3 los conos del ejemplo 2.26:

$$\tau_1 = \text{Cono}(e^2, e^3, P), \quad \tau_2 = \text{Cono}(P, e^1, e^3), \quad \tau_3 = \text{Cono}(P, e^1, e^2).$$

Los morfismos $\psi_{\tau_2}^{-1}\psi_{\tau_3}$, $\psi_{\tau_1}^{-1}\psi_{\tau_3}$ de cambio de carta están definidos por

$$\psi_{\tau_2}^{-1}\psi_{\tau_3} : \mathbb{C}_{\tau_3}^3 \longrightarrow \mathbb{C}_{\tau_2}^3,$$

$$\psi_{\tau_2}^{-1}\psi_{\tau_3}(t_1, t_2, t_3) = \psi_{\tau_2}^{-1}(t_1t_2, t_1t_3, t_1) = (t_1t_3, t_2t_3^{-1}, t_3^{-1}) \quad \text{y}$$

$$\psi_{\tau_1}^{-1}\psi_{\tau_3} : \mathbb{C}_{\tau_3}^3 \longrightarrow \mathbb{C}_{\tau_1}^3,$$

$$\psi_{\tau_1}^{-1}\psi_{\tau_3}(t_1, t_2, t_3) = \psi_{\tau_1}^{-1}(t_1t_2, t_1t_3, t_1) = (t_3t_2^{-1}, t_2^{-1}, t_1t_2).$$

Dado $\sigma = \text{Cono}(P^1, \dots, P^n) \in \mathfrak{M}$, para cada vértice P^i de σ consideramos el divisor en \mathbb{C}_σ^n dado por

$$\widehat{E}(P^i; \sigma) := \{y_\sigma \in \mathbb{C}_\sigma^n : y_{\sigma,i} = 0\} \subset \mathbb{C}_\sigma^n. \quad (5.8)$$

Dado $P \in \text{Vert}(\Sigma)$, la unión

$$\widehat{E}(P) := \bigcup_{\substack{\sigma \in \mathfrak{M} \\ P \in \text{Vert}(\sigma)}} \widehat{E}(P; \sigma) \quad (5.9)$$

forma un divisor en X_Σ al que llamaremos **el divisor excepcional asociado a P** . Este divisor es localmente una hipersuperficie irreducible por lo que es irreducible en X_Σ .

Ejemplo 5.6. Sean τ_1, τ_2 y τ_3 los conos del ejemplo 2.26. Es decir,

$$\tau_1 = \text{Cono}(e^2, e^3, P), \quad \tau_2 = \text{Cono}(P, e^1, e^3), \quad \tau_3 = \text{Cono}(P, e^1, e^2).$$

En el cono regular $\tau_3 = \text{Cono}(P, e^1, e^2)$ se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{E}(P; \tau_3) &= \{(0, y_{\tau_3,2}, y_{\tau_3,3}) \in \mathbb{C}_{\tau_3}^3\}, \\ \widehat{E}(e^1; \tau_3) &= \{(y_{\tau_3,1}, 0, y_{\tau_3,3}) \in \mathbb{C}_{\tau_3}^3\}, \\ \widehat{E}(e^2; \tau_3) &= \{(y_{\tau_3,1}, y_{\tau_3,2}, 0) \in \mathbb{C}_{\tau_3}^3\}. \end{aligned}$$

El pegado es

$$\begin{aligned} \psi_{\tau_2}^{-1} \psi_{\tau_3} : \widehat{E}(P; \tau_3) &\longrightarrow \widehat{E}(P; \tau_2) \\ (0, y_{\tau_3,2}, y_{\tau_3,3}) &\mapsto (0, y_{\tau_3,2} y_{\tau_3,3}^{-1}, y_{\tau_3,3}^{-1}) \quad y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{\tau_1}^{-1} \psi_{\tau_3} : \widehat{E}(P; \tau_3) &\longrightarrow \widehat{E}(P; \tau_1) \\ (0, y_{\tau_3,2}, y_{\tau_3,3}) &\mapsto (y_{\tau_3,3} y_{\tau_3,2}^{-1}, y_{\tau_3,2}^{-1}, 0). \end{aligned}$$

El divisor $\widehat{E}(P)$ interseca a las cartas $\mathbb{C}_{\tau_1}^3, \mathbb{C}_{\tau_2}^3, \mathbb{C}_{\tau_3}^3$ y no está contenido en ninguna de ellas.

Dados $P^1, \dots, P^k \in \text{Vert}(\Sigma)$, **el divisor asociado a $\text{Cono}(P^1, \dots, P^k)$** se define como

$$\widehat{E}(P^1, \dots, P^k) := \bigcap_{i=1}^k \widehat{E}(P^i). \quad (5.10)$$

El **toro canónico** asociado a $\text{Cono}(P^1, \dots, P^k)$ contenido en el divisor $\widehat{E}(P^1, \dots, P^k)$ es

$$\widehat{E}(P^1, \dots, P^k)^* := \bigcap_{i=1}^k \widehat{E}(P^i) - \bigcup_{P \in \text{Vert}(\Sigma) \setminus \{P^1, \dots, P^k\}} \widehat{E}(P). \quad (5.11)$$

Dado un cono $\tau \in \Sigma$ de dimensión arbitraria, usaremos la notación

$$\widehat{E}(\tau) := \bigcap_{P \in \text{Vert}(\tau)} \widehat{E}(P) \text{ y}$$

$$\widehat{E}(\tau)^* := \bigcap_{P \in \text{Vert}(\tau)} \widehat{E}(P) \setminus \bigcup_{P \in \text{Vert}(\Sigma) \setminus \{P^1, \dots, P^k\}} \widehat{E}(P).$$

Si $\sigma \in \mathfrak{M}$, entonces $\widehat{E}(\sigma)^*$ es igual al origen de coordenadas de la carta \mathbb{C}_σ^n .

5.4. La modificación asociada a un cono.

Sea $\sigma \subset (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ un cono regular de dimensión n .

Sea \mathcal{P} la matriz que tiene como columnas a los vértices P^1, \dots, P^n de σ . En la sección 5.2 definimos el morfismo $\psi_\sigma : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ como

$$\begin{aligned} \psi_\sigma : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n, \\ y &\mapsto \psi_{\mathcal{P}^t}(y), \end{aligned}$$

donde \mathcal{P}^t denota a la matriz transpuesta de \mathcal{P} .

Observación 5.7. Sea $f(x) = \sum_{\mu \in \varepsilon(f)} a_{\mu, f} x^\mu \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ donde $x^\mu = x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}$. Se tiene

$$f \circ \psi_\sigma(x) = \sum_{\mu \in \varepsilon(f)} a_{\mu, f} (x^{P^1})^{\mu_1} \cdots (x^{P^n})^{\mu_n} \quad (5.12)$$

$$= \sum_{\mu \in \varepsilon(f)} a_{\mu, f} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{P_i^1} \right)^{\mu_1} \cdots \left(\prod_{i=1}^n x_i^{P_i^n} \right)^{\mu_n} \quad (5.13)$$

$$= \sum_{\mu \in \varepsilon(f)} a_{\mu, f} x_1^{P^1 \mu} \cdots x_n^{P^n \mu} = \sum_{\mu \in \varepsilon(f)} a_\mu x^{\mathcal{P}^t \mu}. \quad (5.14)$$

Dado $v \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$, de la ecuación (5.14) se sigue que,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\text{In}_v(f \circ \psi_\sigma)) &= \{\mathcal{P}^t \mu \in \mathcal{P}^t(\varepsilon(f)) ; (\mathcal{P}^t \mu) \cdot v \leq (\mathcal{P}^t \delta) \cdot v, \forall \delta \in \varepsilon(f)\} \\ &= \{\mathcal{P}^t \mu \in \mathcal{P}^t(\varepsilon(f)) ; \mu \cdot (\mathcal{P}v) \leq \delta \cdot (\mathcal{P}v), \forall \delta \in \varepsilon(f)\} \\ &= \mathcal{P}^t \cdot \{\mu \in \varepsilon(f) ; \mu \cdot (\mathcal{P}v) \leq \delta \cdot (\mathcal{P}v), \forall \delta \in \varepsilon(f)\} \\ &= \mathcal{P}^t \cdot \varepsilon(\text{In}_{\mathcal{P}v}(f)). \end{aligned}$$

Luego,

$$\text{In}_v(f \circ \psi_\sigma) = \text{In}_{\mathcal{P}v}(f) \circ \psi_\sigma. \quad (5.15)$$

Tomando $v = e^i$ el i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n se tiene que

$$\text{In}_{e^i}(f \circ \psi_\sigma) = (\text{In}_{P^i}(f)) \circ \psi_\sigma.$$

Por la ecuación (5.14) se tiene

$$f \circ \psi_\sigma(y) = \left(\sum_{\mu \in \varepsilon(f)} a_{\mu,f} y_1^{P^1 \cdot \mu - \nu_{P^1}(f)} \dots y_n^{P^n \cdot \mu - \nu_{P^n}(f)} \right) \prod_{i=1}^n y_i^{\nu_{P^i}(f)}.$$

Denotaremos por $h_{\sigma,f}$ al polinomio

$$h_{\sigma,f}(y) := \sum_{\mu \in \varepsilon(f)} a_{\mu,f} y_1^{P^1 \cdot \mu - \nu_{P^1}(f)} \dots y_n^{P^n \cdot \mu - \nu_{P^n}(f)}. \quad (5.16)$$

Es decir,

$$f \circ \psi_\sigma(y) = h_{\sigma,f}(y) \prod_{i=1}^n y_i^{\nu_{P^i}(f)}.$$

El polinomio $h_{\sigma,f}$ no es divisible por y_i para ninguna $i = 1, 2, \dots, n$ ya que $\nu_{P^i}(f) = \min\{P^i \cdot \alpha : \alpha \in \varepsilon(f) \subset \mathbb{R}^n\}$.

Dado un vector P en σ , definimos el polinomio $h_{P,\sigma,f}$ mediante la siguiente ecuación:

$$\text{In}_P(f) \circ \psi_\sigma(y) = h_{P,\sigma,f}(y) \cdot \prod_{i=1}^n y_i^{\nu_{P^i}(f)}.$$

Es decir,

$$h_{P,\sigma,f}(y) := \sum_{\mu \in \varepsilon(\text{In}_P(f))} a_{\mu,f} y_1^{P^1 \cdot \mu - \nu_{P^1}(f)} \cdots y_n^{P^n \cdot \mu - \nu_{P^n}(f)}. \quad (5.17)$$

Observación 5.8. Dado un vértice P^j de σ , el polinomio $h_{P^j,\sigma,f}$ es de la forma

$$h_{P^j,\sigma,f}(y) := \sum_{\mu \in \varepsilon(\text{In}_{P^j}(f))} a_{\mu,f} y_1^{P^1 \cdot \mu - \nu_{P^1}(f)} \cdots y_n^{P^n \cdot \mu - \nu_{P^n}(f)}. \quad (5.18)$$

En cada monomio de $h_{P^j,\sigma,f}(y)$ el exponente de y_j es $P^j \mu - \nu_{P^j}(f) = 0$, por lo tanto el polinomio $h_{P^j,\sigma,f}(y)$ no contiene a la variable y_j .

Ejemplo 5.9. El cono $\sigma = \langle P, e^1, e^2 \rangle \subset (\mathbb{R}_{\geq 0})^3$ es un cono regular. Sea $f = x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Se tiene

$$f \circ \psi_\sigma(x, y, z) = f(xy, xz, x) = x^2 y^2 + x^2 z^2 + x^2 = x^2(y^2 + z^2 + 1).$$

Por lo tanto, $h_{f,\sigma}(x, y, z) := y^2 + z^2 + 1$.

5.5. La modificación tórica asociada a un abanico.

Sea Σ un abanico completo regular de $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ y sea \mathfrak{M} el conjunto de los conos de dimensión maximal en Σ . Sea X_Σ la variedad tórica asociada a Σ . Vamos a definir una proyección de X_Σ en \mathbb{C}^n .

Dado $u \in X_\Sigma$, sea $\sigma \in \Sigma$ tal que $u \in \mathbb{C}_\sigma^n$ y sean $(u_{\sigma,1}, \dots, u_{\sigma,n})$ las coordenadas de u en \mathbb{C}_σ^n . Definimos

$$\begin{aligned} \pi : X_\Sigma &\rightarrow \mathbb{C}^n, \\ u &\mapsto \psi_\sigma(u_{\sigma,1}, \dots, u_{\sigma,n}). \end{aligned}$$

La aplicación π está bien definida ya que si $u \in \mathbb{C}_\sigma^n \cap \mathbb{C}_\tau^n$ se tiene que

$$\psi_\sigma(u_{\sigma,1}, \dots, u_{\sigma,n}) = \psi_\tau \psi_\tau^{-1} \psi_\sigma(u_{\sigma,1}, \dots, u_{\sigma,n}) = \psi_\tau(u_{\tau,1}, \dots, u_{\tau,n}).$$

Definición 5.10. El morfismo $\pi : X_\Sigma \rightarrow \mathbb{C}^n$ es llamado la **modificación tórica** asociada a Σ .

Teorema 5.11. *El morfismo $\pi : X_\Sigma \rightarrow \mathbb{C}^n$ es un morfismo propio birracional.*

La demostración de este teorema se puede encontrar por ejemplo en [17, Cap.2]. El morfismo π es bi-regular fuera de los hiperplanos coordenados de \mathbb{C}^n .

Definición 5.12. Dada una variedad $V \subset \mathbb{C}^n$, la **transformada total** de V bajo la proyección π se define como $\pi^{-1}(V)$.

Sea $V^* \subset V$ el conjunto de puntos en V que se encuentran fuera de los hiperplanos coordenados, es decir,

$$V^* := V - Z(x_1 \cdots x_n)$$

La **transformada estricta** de V bajo la proyección π se define como

$$\tilde{V} := \overline{\{\pi^{-1}(V^*)\}},$$

donde \overline{A} denota la cerradura algebraica de A .

Dado $P \in \text{Vert}(\Sigma)$ y el correspondiente divisor excepcional $\widehat{E}(P)$ de P bajo la modificación tórica $\pi : X_\Sigma \rightarrow \mathbb{C}^n$, definimos el **divisor estricto asociado** a P como

$$E_V(P) := \widehat{E}(P) \cap \tilde{V}.$$

Observación 5.13. Sea f un polinomio en n variables con coeficientes en \mathbb{C} . El polinomio f no es divisible por ningún monomio no trivial, si y sólo si

$$Z(f) = \overline{Z(f)^*}. \quad (5.19)$$

Sea σ un cono maximal de Σ y sea $(\mathbb{C}_\sigma^n, y_\sigma)$ la carta coordenada tórica asociada a σ . Se tiene

$$\pi^{-1}((\mathbb{C}^n)^*) \cap \mathbb{C}_\sigma^n = (\pi^{-1}(\mathbb{C}^n) \cap \mathbb{C}_\sigma^n)^*.$$

Por lo tanto, en cada carta \mathbb{C}_σ^n , la transformada estricta es

$$\tilde{V} \cap \mathbb{C}_\sigma^n = \overline{\psi_\sigma^{-1}(V)^*}. \quad (5.20)$$

Como consecuencia se tiene:

Observación 5.14. Si $V = Z(I) \subset \mathbb{C}^n$ es una variedad, se tiene

$$\tilde{V} \cap \mathbb{C}_\sigma^n = \{y_\sigma \in \mathbb{C}_\sigma^n : h_{\sigma,f}(y_\sigma) = 0, \text{ para toda } f \in I\}. \quad (5.21)$$

Ejemplo 5.15. Sea $V = Z(f)$ con $f = x^2 + y^2 + z^2$ como en el ejemplo 5.9 y sea $\sigma = \text{Cono}(P, e^1, e^2)$. En la carta $(\mathbb{C}_\sigma^3, y_\sigma)$, se tiene

$$\begin{aligned} E_V(P) \cap \mathbb{C}_\sigma^3 &= \{(0, y_{\sigma,2}, y_{\sigma,3}) \in \mathbb{C}_\sigma^3 : y_{\sigma,2}^2 + y_{\sigma,3}^2 + 1 = 0\}, \\ E_V(e^1) \cap \mathbb{C}_\sigma^3 &= \{(y_{\sigma,1}, 0, y_{\sigma,3}) \in \mathbb{C}_\sigma^3 : y_{\sigma,3}^2 + 1 = 0\}, \\ E_V(e^2) \cap \mathbb{C}_\sigma^3 &= \{(y_{\sigma,1}, y_{\sigma,2}, 0) \in \mathbb{C}_\sigma^3 : y_{\sigma,2}^2 + 1 = 0\}. \end{aligned}$$

$$\tilde{V} \cap \mathbb{C}_\sigma^3 = \{y_\sigma \in \mathbb{C}_\sigma^3 : y_{\sigma,2}^2 + y_{\sigma,3}^2 + 1 = 0\}.$$

5.6. Resolución tórica de singularidades Newton no-degeneradas.

Sea $V \subset \mathbb{C}^n$ una variedad Newton no-degenerada con una singularidad aislada en $\underline{0}$ y sea $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ el ideal que define a V .

Sea Σ un abanico regular que es un refinamiento del abanico de Groebner de I que por lo tanto es completo. Sea $\pi_\Sigma : X_\Sigma \rightarrow \mathbb{C}^n$ la modificación tórica asociada a Σ .

Dado un cono $\sigma \in \Sigma$ con vértices P^1, \dots, P^n , por la observación 3.6 para toda $f \in I$ se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^n \varepsilon(In_{P^i}(f)) \neq \emptyset. \quad (5.22)$$

Proposición 5.16. Sea Σ un abanico regular que refina a $\Sigma(I)$ y $\tau \in \Sigma$ un cono con vértices P^1, \dots, P^r . Sea $\sigma \in \Sigma$ un cono de dimensión maximal que contiene a τ . Si ω es un vector en el interior relativo $Int_{rel}(\tau)$, entonces para toda $f \in I$ el polinomio

$$h_{\omega, \sigma, f}(y) \quad (5.23)$$

no contiene a las variables y_1, \dots, y_r .

Demostración.

Sea $f \in I$ un polinomio de la forma $f(x) = \sum_{\mu \in \varepsilon(f)} a_{\mu, f} x^\mu$. Como $\tau \subset \sigma \in \Sigma$, entonces existen $P^{r+1}, \dots, P^n \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ tales que $\sigma = Cono(P^1, \dots, P^n)$. El polinomio $h_{\omega, \sigma, f}$ es de la forma

$$h_{\omega, \sigma, f}(y) := \sum_{\mu \in \varepsilon(In_\omega(f))} a_{\mu, f} y_1^{P^1 \cdot \mu - \nu_{P^1}(f)} \dots y_n^{P^n \cdot \mu - \nu_{P^n}(f)}.$$

Si $\omega \in \text{Int}_{rel}(\tau)$ es de la forma $a_1 P^1 + \cdots + a_r P^r$, por la proposición 3.8, se tiene

$$\varepsilon\left(\text{In}_\omega(f)\right) = \bigcap_{i=1}^r \varepsilon\left(\text{In}_{a_i P^i}(f)\right) = \bigcap_{i=1}^r \varepsilon\left(\text{In}_{P^i}(f)\right)$$

para toda $f \in I$.

Es decir, los exponentes $\mu \in \varepsilon\left(\text{In}_\omega(f)\right)$, y por consiguiente los exponentes de $h_{\omega,\sigma,f}$, satisfacen

$$\mu \cdot P^j = \nu_{P^j}(f), \quad j = 1, \dots, r,$$

donde $\nu_{P^j}(f)$ denota al P^j -orden de f .

Por lo tanto,

$$h_{\omega,\sigma,f}(y) := \sum_{\mu \in \varepsilon(\text{In}_\omega(f))} a_{\mu,f} y_{r+1}^{P^{r+1} \cdot \mu - \nu_{P^{r+1}}(f)} \cdots y_n^{P^n \cdot \mu - \nu_{P^n}(f)}. \quad \square$$

El siguiente resultado es una extensión del teorema enunciado en [17] para variedades intersección completa Newton no-degeneradas.

Teorema 5.17. *Sea $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal y sea Σ un refinamiento regular del abanico de Groebner de I . Si $V = Z(I)$ es una variedad Newton no-degenerada, entonces la transformada estricta \tilde{V} de V por la modificación tórica π asociada a Σ es no singular.*

Demostración del Teorema.

Supongamos que $\dim(V) = n - k$.

Sea $\sigma = \text{Cono}(P^1, \dots, P^n)$ un cono de dimensión n en Σ y sea $\psi_\sigma : \mathbb{C}_\sigma^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ la restricción de π a la carta $(\mathbb{C}_\sigma^n, y_\sigma)$.

Sea $u \in \tilde{V} \cap \mathbb{C}_\sigma^n$. Por la observación 5.14,

$$\tilde{V} \cap \mathbb{C}_\sigma^n = \{y_\sigma \in \mathbb{C}_\sigma^n : h_{\sigma,f}(y_\sigma) = 0, \text{ para toda } f \in I\}.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos reordenar las coordenadas de \mathbb{C}^n de manera que

$$u = (u_1, \dots, u_r, 0, \dots, 0) \text{ con } u_i \neq 0, i = 1, \dots, r \text{ para alguna } 1 \leq r \leq n.$$

Sea u' el punto de $(\mathbb{C}_\sigma^n)^*$ dado por $u' = (u_1, \dots, u_r, 1, \dots, 1)$. Como los vértices de σ tienen coordenadas no negativas, es decir $P^1, \dots, P^n \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$, se tiene que $\psi_\sigma(u') \in (\mathbb{C}^*)^n$.

Sea P el vector en $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ dado por

$$P := P^{r+1} + P^{r+2} + \dots + P^n.$$

Sean $f_1, \dots, f_s \in I$ tales que

$$\mathfrak{In}_\omega I = \langle \text{In}_P f_1, \dots, \text{In}_P f_s \rangle.$$

Estos polinomios existen porque el anillo $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ es Noetheriano.

Por hipótesis, la variedad $Z(I)$ es Newton no-degenerada, es decir, la variedad $Z(\mathfrak{In}_P I)$ tiene dimensión $n - k$ y no tiene singularidades en $(\mathbb{C}^*)^n$. Por lo tanto, existe $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, s\}$ tal que la matriz jacobiana

$$\text{Jac}\left(\text{In}_P(f_{i_1}), \dots, \text{In}_P(f_{i_k})\right)(\psi_\sigma(u')) \text{ tiene rango igual a } k.$$

Dado $f(x) = \sum_{\mu \in \varepsilon(f)} a_{\mu, f} x^\mu \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, se tiene

$$\text{In}_P(f) \circ \psi_\sigma(y_\sigma) = h_{P, \sigma, f}(y_\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n y_{\sigma, i}^{\nu_{P^i}(f)}.$$

Por el lema 3.7, se tiene

$$h_{P, \sigma, f}(y_\sigma) = \sum_{\mu \in \bigcap_{i=r+1}^n \varepsilon(\text{In}_{P^i}(f))} a_{\mu, f} y_{\sigma, 1}^{P^1 \cdot \mu - \nu_{P^1}(f)} \cdot \dots \cdot y_{\sigma, r}^{P^r \cdot \mu - \nu_{P^r}(f)}. \quad (5.24)$$

Es decir, para toda $f \in I$ el polinomio $h_{P,\sigma,f}(y_\sigma)$ no contiene a las variables $y_{\sigma,r+1}, \dots, y_{\sigma,n}$. Por lo tanto

$$\frac{\partial h_{P,\sigma,f}}{\partial y_{\sigma,i}}(u) = \frac{\partial h_{P,\sigma,f}}{\partial y_{\sigma,i}}(u') = 0, \quad i = r+1, \dots, n \quad (5.25)$$

Sea $v := e^{r+1} + e^{r+2} + \dots + e^n$. Por (5.15), para toda $f \in I$ se tiene que

$$In_v(f \circ \psi_\sigma) = In_P(f) \circ \psi_\sigma.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n y_{\sigma,i}^{\nu_{P^i}(f_j)} In_v(h_{\sigma,f_j})(y_\sigma) &= In_v\left(h_{\sigma,f_j}(y_\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n y_{\sigma,i}^{\nu_{P^i}(f_j)}\right) = In_v(f_j \circ \psi_\sigma)(y_\sigma) \\ &= In_P(f_j) \circ \psi_\sigma(y_\sigma) \quad \text{para toda } j = i_1, \dots, i_k. \end{aligned}$$

De donde,

$$k = \text{Rango}\left(\text{Jac}\left(In_P(f_{i_1}), \dots, In_P(f_{i_k})\right)\right)(\psi_\sigma(u')) = \text{Rango}\left(\frac{\partial In_v h_{\sigma,f_j}}{\partial y_{\sigma,i}}\right)(u')$$

Dado $f \in I$, el soporte de $h_{\sigma,f}$ es igual a

$$\varepsilon(h_{\sigma,f}) = \{(P^1 \cdot \mu - \nu_{P^1}(f), \dots, P^n \cdot \mu - \nu_{P^n}(f)); \mu \in \varepsilon(f)\}.$$

Los elementos $(P^1 \cdot \mu - \nu_{P^1}(f), \dots, P^n \cdot \mu - \nu_{P^n}(f))$ en el soporte de $In_v(h_{\sigma,f})$ satisfacen que

$$\left(P^1 \cdot \mu - \nu_{P^1}(f), \dots, P^n \cdot \mu - \nu_{P^n}(f)\right) \cdot v = \sum_{i=r+1}^n (P^i \cdot \mu - \nu_{P^i}(f)) \text{ es m\u00ednimo.}$$

Como $\bigcap_{i=r+1}^n \varepsilon(In_{P^i}(f)) \neq \emptyset$, existe $\mu \in \varepsilon(f)$ tal que

$$P^j \cdot \mu = \nu_{P^j}(f)$$

para toda $j \geq r + 1$, es decir, $\nu_v(In_v h_{\sigma,f}) = 0$. Por lo tanto, se tiene que

$$In_v h_{\sigma,f}(y_{\sigma,1}, \dots, y_{\sigma,n}) = In_v h_{\sigma,f}(y_{\sigma,1}, \dots, y_{\sigma,r}, 0, \dots, 0)$$

para toda $f \in I$. En particular para cada $f_{i_l} \in I$ con $l = 1, \dots, k$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial (In_v h_{\sigma,f_{i_l}})}{\partial y_{\sigma,i}}(u') &= \frac{\partial (In_v h_{\sigma,f_{i_l}}(y_{\sigma,1}, \dots, y_{\sigma,r}, 0, \dots, 0))}{\partial y_{\sigma,i}}(u') \\ &= \frac{\partial (In_v h_{\sigma,f_{i_l}}(y_{\sigma,1}, \dots, y_{\sigma,r}, 0, \dots, 0))}{\partial y_{\sigma,i}}(u) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned}$$

Por el lema 1.16, para cada polinomio f_{i_l} con $l = 1, \dots, k$ existe un polinomio $g_{h_{\sigma,f_{i_l}}}$ tal que

$$In_v(h_{\sigma,f_{i_l}}) + g_{h_{\sigma,f_{i_l}}} = h_{\sigma,f_{i_l}}.$$

Por (1.10), se tiene que $g_{h_{\sigma,f_{i_l}}}(y_{\sigma,1}, \dots, y_{\sigma,r}, 0, \dots, 0) = 0$. Luego, para $l = 1, 2, \dots, k$ y para $i = 1, \dots, r$ se tiene

$$\frac{\partial (In_v h_{\sigma,f_j}(y_{\sigma,1}, \dots, y_{\sigma,r}, 0, \dots, 0))}{\partial y_{\sigma,i}}(u) = \frac{\partial h_{\sigma,f_j}(y_{\sigma,1}, \dots, y_{\sigma,r}, 0, \dots, 0)}{\partial y_{\sigma,i}}(u).$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial (In_v h_{\sigma,f_{i_l}})}{\partial y_{\sigma,i}}(u') = \frac{\partial h_{\sigma,f_j}}{\partial y_{\sigma,i}}(u) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, r. \quad (5.26)$$

Sustituyendo las igualdades (5.25) y (5.26) se sigue que

$$\begin{aligned}
 k &= \text{Rango}\left(\text{Jac}(In_P(f_{i_1}), \dots, In_P(f_{i_k}))\right)(\pi_\sigma(u')) = \text{Rango}\left(\frac{\partial In_\nu h_{\sigma, f_{i_j}}}{\partial y_{\sigma, i}}(u')\right) \\
 &= \text{Rango}\left(\begin{array}{cccccc}
 \frac{\partial In_\nu h_{\sigma, f_{i_1}}}{\partial y_{\sigma, 1}}(u') & \dots & \frac{\partial In_\nu h_{\sigma, f_{i_1}}}{\partial y_{\sigma, r}}(u') & \frac{\partial In_\nu h_{\sigma, f_{i_1}}}{\partial y_{\sigma, r+1}}(u') & \dots & \frac{\partial In_\nu h_{\sigma, f_{i_1}}}{\partial y_{\sigma, n}}(u') \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \frac{\partial In_\nu h_{\sigma, f_{i_k}}}{\partial y_{\sigma, 1}}(u') & \dots & \frac{\partial In_\nu h_{\sigma, f_{i_k}}}{\partial y_{\sigma, r}}(u') & \frac{\partial In_\nu h_{\sigma, f_{i_k}}}{\partial y_{\sigma, r+1}}(u') & \dots & \frac{\partial In_\nu h_{\sigma, f_{i_k}}}{\partial y_{\sigma, n}}(u')
 \end{array}\right) \\
 &= \text{Rango}\left(\begin{array}{cccccc}
 \frac{\partial h_{\sigma, f_{i_1}}}{\partial y_{\sigma, 1}}(u) & \dots & \frac{\partial h_{\sigma, f_{i_1}}}{\partial y_{\sigma, r}}(u) & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \frac{\partial h_{\sigma, f_{i_k}}}{\partial y_{\sigma, 1}}(u) & \dots & \frac{\partial h_{\sigma, f_{i_k}}}{\partial y_{\sigma, r}}(u) & 0 & \dots & 0
 \end{array}\right) \\
 &= \text{Rango}\left(\begin{array}{cccc}
 \frac{\partial h_{\sigma, f_{i_1}}}{\partial y_{\sigma, 1}}(u) & \dots & \frac{\partial h_{\sigma, f_{i_1}}}{\partial y_{\sigma, r}}(u) & \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \\
 \frac{\partial h_{\sigma, f_{i_k}}}{\partial y_{\sigma, 1}}(u) & \dots & \frac{\partial h_{\sigma, f_{i_k}}}{\partial y_{\sigma, r}}(u) &
 \end{array}\right).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada carta $(\mathbb{C}_\sigma^n, y_\sigma)$ los puntos $u \in \tilde{V} \cap \mathbb{C}_\sigma^n$ son puntos no singulares. Es decir, la transformada estricta \tilde{V} es no singular. \square

Teorema 5.18. *Sea $V = Z(I)$ la variedad compleja singular definida por un ideal I Newton no-degenerado. Sea Σ un abanico regular completo que refina al abanico de Groebner de I . Se satisface:*

$$\tilde{V} \cap \widehat{E}(P^1, \dots, P^r)^* \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{Cono}(P^1, \dots, P^r) \subset \mathbf{VT}(\mathbf{I}) \cap (\mathbb{R}_{\geq 0})^n \quad (5.27)$$

Demostración del Teorema.

\Rightarrow] Supongamos que $\tilde{V} \cap \widehat{E}(P^1, \dots, P^r)^* \neq \emptyset$.

Por la igualdad (3.13), se tiene

$$\mathbf{VT}(\mathbf{I}) \cap (\mathbb{R}_{\geq 0})^n = \{\omega \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n : Z(\mathfrak{Jn}_\omega(I)) \cap (\mathbb{C}^*)^n \neq \emptyset\}.$$

Sea $\omega \in \text{Int}_{rel}(\widehat{\text{Cono}}(P^1, \dots, P^r))$, es decir, $\omega = a_1 P^1 + \dots + a_r P^r$ con $a_1, \dots, a_r \in (\mathbb{R}_{>0})$. Vamos a demostrar que existe un punto $y \in (\mathbb{C}^*)^n$ tal que

$$\text{In}_\omega f(y) = 0, \quad \forall f \in I.$$

Sea $\sigma \in \Sigma$ un cono de dimensión maximal n tal que $P^1, \dots, P^r \in \text{Vert}(\sigma)$, es decir, $\sigma = \text{Cono}(P^1, \dots, P^r, P^{r+1}, \dots, P^n)$ con $P^{r+1}, \dots, P^n \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$. Por el lema 5.14, se tiene

$$\tilde{V} \cap \mathbb{C}_\sigma^n = \{y_\sigma \in \mathbb{C}_\sigma^n : h_{\sigma, f}(y_\sigma) = 0, \text{ para toda } f \in I\}. \quad (5.28)$$

Por hipótesis, en la carta $(\mathbb{C}_\sigma^n, y_\sigma)$ asociada al cono σ existe un vector $u = (0, \dots, 0, u_{r+1}, \dots, u_n) \in \widehat{E}(P^1, \dots, P^r)^*$ con $u \in \tilde{V}$. Es decir,

$$h_{\sigma, f}(u) = \sum_{\mu \in \varepsilon(f)} a_{\mu, f} u_{r+1}^{P^{r+1} \cdot \mu - \nu_{P^{r+1}}(f)} \dots u_n^{P^n \cdot \mu - \nu_{P^n}(f)} = 0 \quad \text{para toda } f \in I.$$

Si $f \in I$ es de la forma $f(x) = \sum_{\mu \in \varepsilon(f)} a_{\mu, f} x^\mu$, entonces

$$\text{In}_\omega(f) \circ \psi_\sigma(y_\sigma) = h_{\omega, \sigma, f}(y_\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n y_{\sigma, i}^{\nu_{P^i}(f)},$$

donde aplicando la proposición 5.16 el polinomio $h_{\omega, \sigma, f}$ es de la forma

$$h_{\omega, \sigma, f}(y_\sigma) = \sum_{\mu \in \bigcap_{i=1}^r \varepsilon(\text{In}_{P^i}(f))} a_{\mu, f} y_{\sigma, r+1}^{P^{r+1} \cdot \mu - \nu_{P^{r+1}}(f)} \dots y_{\sigma, n}^{P^n \cdot \mu - \nu_{P^n}(f)} \quad (5.29)$$

Por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= h_{\sigma, f}(u) = \sum_{\mu \in \varepsilon(f)} a_{\mu, f} u_{r+1}^{P^{r+1} \cdot \mu - \nu_{P^{r+1}}(f)} \dots u_n^{P^n \cdot \mu - \nu_{P^n}(f)} \\ &= \sum_{\mu \in \bigcap_{i=1}^r \varepsilon(\text{In}_{P^i}(f))} a_{\mu, f} u_{r+1}^{P^{r+1} \cdot \mu - \nu_{P^{r+1}}(f)} \dots u_n^{P^n \cdot \mu - \nu_{P^n}(f)} \\ &= h_{\omega, \sigma, f}(u). \end{aligned}$$

Sea u' el punto de $(\mathbb{C}_\sigma^n)^*$ dado por $u' = (1, \dots, 1, u_{r+1}, \dots, u_n)$. Por la definición de ψ_σ se tiene que $\psi_\sigma(u') \in (\mathbb{C}^n)^*$. Por la proposición 5.16, el polinomio $h_{\omega, \sigma, f}$ no depende de las coordenadas $y_{\sigma, 1}, \dots, y_{\sigma, r}$. Luego, se tiene que

$$h_{\omega, \sigma, f}(u') = h_{\omega, \sigma, f}(u) = 0 \text{ para toda } f \in I.$$

Por lo tanto, $(In_\omega(f)) \circ \psi_\sigma(u') = h_{\omega, \sigma, f}(u') \cdot \prod_{i=1}^n u_i^{\nu_{P^i}(f)} = 0$. Es decir, hemos demostrado que

$$Int_{rel}(Cono(P^1, \dots, P^r)) \subset \mathbf{VT}(\mathbf{I}) \cap (\mathbb{R}_{\geq 0})^n.$$

Por la proposición 3.23, se tiene que

$$Cono(P^1, \dots, P^r) \subset \mathbf{VT}(\mathbf{I}) \cap (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$$

con lo que demostramos la primera implicación.

\Leftarrow] Sea $\tau := Cono(P^1, \dots, P^r)$ un cono contenido en la variedad tropical asociada a I .

Dada $\omega \in \tau$, por (3.13), se tiene

$$Z(\mathfrak{I}_{\mathbf{n}_\omega}(f)) \cap (\mathbb{C}^*)^n \neq \emptyset$$

para cada $f \in I$.

Sea $P = P^1 + \dots + P^r$. Como $P \in \tau \subset \mathbf{VT}(\mathbf{I})$, se tiene que existe $z \in (\mathbb{C}^*)^n$ tal que

$$In_\omega(f)(z) = 0$$

para cada $f \in I$.

Sea $\sigma = Cono(P^1, \dots, P^r, \dots, P^n)$ un cono simplicial de dimensión maximal del abanico Σ . Sea $y = (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{C}_\sigma^n)^*$ tal que $\psi_\sigma(y) = z$.

Como

$$0 = In_P(f)(z) = In_P(f) \circ \psi_\sigma(y) = h_{P, \sigma, f}(y) \cdot \prod_{i=1}^n y_i^{\nu_{P^i}(f)}$$

con $y \in (\mathbb{C}_\sigma^n)^*$, se sigue que $h_{P,\sigma,f}(y) = 0$ para toda $f \in I$.

Por lo tanto, existe $y = (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{C}_\sigma^n)^*$ tal que

$$0 = h_{P,\sigma,f}(y) = \sum_{\mu \in \bigcap_{i=1}^r \varepsilon(I_{n_{P^i}}(f))} a_{\mu,f} y_{r+1}^{P^{r+1} \cdot \mu - \nu_{P^{r+1}}(f)} \cdot \dots \cdot y_n^{P^n \cdot \mu - \nu_{P^n}(f)}$$

para toda $f \in I$.

Sea $u = (0, \dots, 0, y_{r+1}, \dots, y_n)$. Vamos a demostrar que $h_{\sigma,f}(u) = 0$ para toda $f \in I$.

Si $f \in I$, entonces

$$\begin{aligned} h_{\sigma,f}(u) &= \sum_{\mu \in \bigcap_{i=1}^r \varepsilon(I_{n_{P^i}}(f))} a_{\mu,f} u_{r+1}^{P^{r+1} \cdot \mu - \nu_{P^{r+1}}(f)} \cdot \dots \cdot u_n^{P^n \cdot \mu - \nu_{P^n}(f)} \\ &+ \sum_{\mu \in \varepsilon(f) - \{\bigcap_{i=1}^r \varepsilon(I_{n_{P^i}}(f))\}} a_{\mu,f} 0^{P^1 \cdot \mu - \nu_{P^1}(f)} \cdot \dots \cdot u_n^{P^n \cdot \mu - \nu_{P^n}(f)} \\ &= \sum_{\mu \in \bigcap_{i=1}^r \varepsilon(I_{n_{P^i}}(f))} a_{\mu,f} y_{r+1}^{P^{r+1} \cdot \mu - \nu_{P^{r+1}}(f)} \cdot \dots \cdot y_n^{P^n \cdot \mu - \nu_{P^n}(f)} \\ &= h_{P,\sigma,f}(y) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que para la carta asociada a $\sigma \supset \tau$, existe un punto $u \in \tilde{V} \cap \mathbb{C}_\sigma^n \cap \widehat{E}(P^1, \dots, P^r)^*$. Como consecuencia,

$$\tilde{V} \cap \widehat{E}(P^1, \dots, P^r)^* \neq \emptyset. \quad \square$$

Hay que observar que en este último resultado no usamos la hipótesis de que para toda $\omega \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$, el ideal $Z(\mathfrak{J}_{\mathbf{n}_\omega}(I))$ tiene dimensión igual a la dimensión de $Z(I)$.

Apéndice A

Cálculos.

A.1. Cálculo del abanico de Groebner global del ejemplo 3.11.

Sea $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z, w]$ donde

$$f_1(x, y, z, w) = xy + xw - yw, f_2 = xz - w^2, f_3 = yz - yw - w^2.$$

Para calcular el abanico de Groebner global asociado a I , es necesario calcular las bases de Groebner reducidas del ideal I . Para obtener las bases de Groebner reducidas del ideal I se ejecuta el siguiente comando en el programa Gfan [9]:

```
gfan  
 $\mathbb{Q}[x, y, z, w]$   
{ $xy + xw - yw, xz - w^2, yz - yw - w^2$ }
```

Los datos obtenidos fueron los siguientes. La bases de Groebner reducidas se guardaron en el archivo *BasesGroebner.txt*.

```
 $\mathbb{Q}[x, y, z, w]\{$   
{ $yw + w^2 - yz, xz - w^2, xy + w^2 - yz + xw$ },  
  
{ $w^2 - xz, yw - yz + xz, xy - yz + xw + xz$ },  
  
{ $yz - w^2 - yw, xw - yw + xy, xz - w^2$ },
```

$$\{w^2 - xz, yw - yz + xz, xw - yz + xz + xy, x^2z + y^2z - 2xyz - xy^2\},$$

$$\{w^2 + yw - yz, xw - yw + xy, xz + yw - yz\},$$

$$\{w^2 - xz, yw - yz + xz, xw - yz + xz + xy, xy^2 - y^2z + 2xyz - x^2z\},$$

$$\{w^2 - xz, yw - yz + xz, y^2z - 2xyz - xy^2 + x^2z, xw - yz + xz + xy\},$$

$$\{yw - xw - xy, yz - w^2 - xw - xy, xz - w^2\},$$

$$\{w^2 - xz, yw - xw - xy, yz - xw - xz - xy\},$$

$$\{yz - w^2 - yw, xy - yw + xw, xz - w^2\}$$

Para calcular el abanico de Groebner global del ideal I se introduce el siguiente comando:

```
gfan < BasesGroebner.txt | gfan_topolyhedralfan
```

Aplicando este procedimiento a cada una de las bases de Groebner reducidas de I , se tuvo el mismo resultado. Los datos de salida fueron los siguientes:

```
-application PolyhedralFan
-version 2.2
-type PolyhedralFan
```

```
AMBIENT DIM: 4
```

```
DIM: 4
```

```
LINEALITY SPACE: (1,1,1,1)
```

```
LINEALITY DIM: 1
```

```
RAYS:
```

```
(1, 0, 0, 0) #0
(-1, -1, 0, 0) #1
(0, 1, 0, 0) #2
```

A.1. CÁLCULO DEL ABANICO DE GROEBNER GLOBAL DEL EJEMPLO ??65

$(-1, -1, -1, 0)$ #3

$(-1, 0, -1, 0)$ #4

$(0, 0, 1, 0)$ #5

$(1, 0, -1, 0)$ #6

$(-1, -1, 1, 0)$ #7

CONES:

Dimension 1

{}

Dimension 2

{0}

{1}

{2}

{3}

{4}

{5}

{6}

{7}

Dimension 3

{0 2}

{4 6}

{0 6}

{0 5}

{0 7}

{3 6}

{1 4}

{1 7}

{5 7}

{1 3}

{1 6}

{3 4}

{2 4}

{2 5}

{2 6}

{2 7}

Maximal Dimension

{2 4 6}

{2 5 7}

{1 3 4}

{1 3 6}

{3 4 6}

{0 5 7}

{0 2 6}

{0 2 5}

{1 2 4 7}

{0 1 6 7}

Significado de los datos del archivo de salida. Esta información se puede encontrar en la página:

<http://www.math.tu-berlin.de/~jensen/software/gfan/gfan.html>

AMBIENT DIM: La dimensión del espacio vectorial en el que se encuentra el abanico.

LINEALITY SPACE: El generador del espacio lineal común entre los conos del abanico.

LINEALITY DIM: La dimensión del espacio lineal común entre los conos del abanico.

RAYS: Cada línea denota un cono de dimensión una más grande que la del Lineality Space, generado por $(1, 1, 1, 1)$ y el vector respectivo.

CONES: Cada línea representa un cono en el abanico. Cada línea muestra el conjunto de vértices del cono al cual hay que agregarle el vértice $(1, 1, 1, 1)$.

A.2. Cálculo de la dimensión de los ideales ω -iniciales.

En el archivo *Base1Groebner.txt* se guardó la primera base de Groebner reducida del ideal I junto con vector $(1, 1, 1, 1)$:

A.2. CÁLCULO DE LA DIMENSIÓN DE LOS IDEALES ω -INICIALES.67

$$\mathbb{Q}[x, y, z, w]$$
$$\{yw + w^2 - yz, xz - w^2, xy + w^2 - yz + xw\}$$
$$[1, 1, 1, 1]$$

Para calcular los generadores del ideal $(1, 1, 1, 1)$ -inicial y guardarlos en el archivo *IdealIni.txt*, se ejecuta el comando:

```
gfan_initialforms --ideal < Base1Groebner.txt > IdealIni.txt
```

Los datos obtenidos fueron los siguientes:

$$\mathbb{Q}[x, y, z, w]$$
$$\{yz - w^2 - yw, xz - w^2, xy - yw + xw\}$$

Con ayuda del programa *Singular* [7], es posible calcular la dimensión sobre el campo de los complejos de un ideal dado. El siguiente comando permite obtener tal información.

```
ring r = (complex), (x, y, z, w), dp;
ideal I = y * z - w^2 - y * w, x * z - w^2, x * y - y * w + x * w;
dim(std(I));
```

El dato de salida es: 2.

El procedimiento descrito en esta sección se desarrolló para los vectores en (\mathbb{R}_{\geq}) en el interior relativo de cada cono del abanico de Groebner de I y para cada base reducida de I . En cada caso, la dimensión obtenida fue igual a 2. Por lo que concluimos que la variedad $Z(I)$ es una variedad Newton no-degenerada.

Índice alfabético

- $Ac(\Gamma_{\mathcal{A}}, \leq)$, 4
 $AcBo(\Gamma_{\mathcal{A}}, \leq)$, 4
 $C_{\omega}(I)$, 22
 $Cono(v^1, \dots, v^k)$, 14
 E_I , 17
 $E_V(P)$, 52
 F^T , 30
 $Fin(\Gamma_{\mathcal{A}})$, 2
 $In(f)$, 5
 $In_{\omega} f$, 6
 $Int_{rel}(\sigma)$, 15
 $Ord(f)$, 5
 V^* , 52
 $Vert(\sigma)$, 16
 $Z(I)$, 35
 $Z(f_1, f_2, \dots, f_n)$, 35
 $\mathbb{C}_{\sigma}^n(*J^c)$, 43
 $\Delta_{\omega}(P)$, 11
 $\Delta_{\sigma}(P)$, 21
 $\Gamma(f)$, 10
 $\Gamma_+(f)$, 9
 $\Gamma_-(f)$, 36
 $\Gamma_{\mathcal{A}}$, 1
 $\Sigma(I)$, 23
 $\Sigma(P)$, 20
 $\Sigma_i(P)$, 20
 $\hat{\psi}_{\mathcal{M}}$, 42
 \leq_{ω} , 6
VT(I), 33
 ω -hiperplano soporte, 11
 ω -parte inicial de un polinomio, 6
 $\mathcal{A}[[x_1, \dots, x_n]]$, 3
 $\mathcal{A}[[x_1, \dots, x_n]]^P$, 3
 $\mathcal{A}[x_1, \dots, x_n]$, 2
 $\mathcal{A}[x_1, \dots, x_n]^P$, 2
 $\mathcal{A}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$, 2
 \mathcal{C}_{α} , 30
 $\mathcal{T}f$, 31
 $\mathcal{VT}(F)$, 30
 $\mathfrak{Jn}_{\omega}I$, 22
 $\nu_{\omega} f$, 6
 $\pi : X_{\Sigma} \rightarrow \mathbb{C}^n$, 51
 $\pi_{\omega}(P)$, 11
 $\psi_{\mathcal{M}}$, 42
 ψ_{σ} , 43, 49
 $\sigma(C)$, 20
 σ^v , 16
 $\varepsilon(f)$, 1
 $\hat{E}(P)$, 47
 $\hat{E}(P^1, \dots, P^k)$, 48
 $\hat{E}(P^1, \dots, P^k)^*$, 48
 $\hat{E}(P^i; \sigma)$, 47
 $\hat{E}(\tau)^*$, 49
 \tilde{V} , 52
 $det(P^1, \dots, P^k)$, 18
 $dim(\sigma)$, 14
 $h_{P, \sigma, f}$, 51
 $h_{P^j, \sigma, f}$, 51
 $h_{\sigma, f}$, 50

- i -esqueleto, 20
- $u_\sigma \sim u_\tau$, 45
- $v(P)$, 36
- $v(f)$, 36
- x^α , 9
- Abanico, 19
 - completo, 19
 - completo regular, 19
 - de Groebner, 23
 - de Groebner global, 27
 - dual, 20
- Aplicación
 - Newton no-degenerada, 38
 - Newton no-degenerada para un vector, 38
- Campo valorado, 29
- Cara
 - ω - cara, 11
 - de un cono, 17
- Carta coordenada tórica, 45
- Conjunto acotado inferiormente, 3
- Conjunto de ceros de polinomios, 35
- Cono, 14
 - dual, 16
 - fuertemente convexo, 16
 - poliédrico, 14
 - racional, 16
 - regular, 18
 - simplicial, 17
- Coordenadas racionalmente independientes, 9
- Determinante, 18
- Dimensión, 14
- Divisor
 - asociado a un cono, 48
 - estricto asociado a un vértice, 52
 - excepcional asociado a un vértice, 47
- Elemento mínimo, 3
- Frontera de Newton, 10
- Función tropical definida por un polinomio, 30
- Hipersuperficie
 - Newton no-degenerada, 37
 - tropical asociada a un polinomio, 30
- Ideal
 - ω -inicial, 22
 - Newton no-degenerado, 39
- Interior relativo de un cono, 15
- Modificación tórica asociada a un abanico, 52
- Número de Milnor de un polinomio, 37
- Número de Newton
 - de un poliedro, 36
 - de un polinomio, 36
 - de un polinomio conveniente, 36
- Orden
 - ω -orden, 6
 - buen orden, 3
 - casi buen orden, 3
 - conjunto bien ordenado, 3
 - conjunto casi bien ordenado, 3
 - de una serie, 5
- Parte
 - poligonal principal de un polinomio, 35

- Parte inicial de una serie, 5
- Poliedro
 - de Newton analítico, 9
 - global de un polinomio, 10
- Polinomio
 - con coeficientes en \mathcal{A} , 2
 - conveniente, 36
 - de Laurent, 2
 - de Puiseux con coeficientes en \mathcal{A} , 2
 - en n variables con coeficientes en \mathcal{A} , 2
 - Newton no-degenerado, 36
- Primer término de una serie, 5
- Refinamiento
 - de un abanico, 20
 - regular de un abanico, 20
- Series
 - con soporte bien ordenado, 4
 - con soporte casi bien ordenado, 4
 - de Puiseux con coeficientes en \mathcal{A} , 3
 - formales con coeficientes en \mathcal{A} , 3
- Soporte, 1
- Toro canónico asociado a un cono, 48
- Transformada
 - estricta de una variedad, 52
 - total de una variedad, 52
- Tropicalización de un polinomio, 31
- Vértices
 - de un abanico, 19
 - de un cono, 16
- Valoración, 28
 - trivial, 29
- Variedad
 - algebraica definida por un ideal, 35
 - intersección completa, 37
 - intersección completa Newton no-degenerada, 38
 - Newton no-degenerada, 40
 - tórica asociada a un abanico, 45
 - tropical asociada a un ideal, 33
 - tropical asociada a un polinomio, 31
- Vector primitivo, 14

Bibliografía

- [1] C. Bivià-Ausina, *Jacobian ideals and the Newton non-degeneracy condition. (English summary)* Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 48, no. 1, 21–36, 2005
- [2] S. Collart, D. Mall, *Toric Degenerations of Polynomial Ideal and Geometric Localization of Fans*, Journal of Symbolic Computation, Volume 24, Number 3-4, pp. 443-464(22), Academic Press, 1997.
- [3] D. Cox, *What is a toric variety?*, Topics in algebraic geometry and geometric modeling, 203-223, Contemp. Math., vol. 334, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [4] F. Ehlers, *Eine Klasse komplexer Mannigfaltigkeiten und die Auflösung einer isolierter Singularitäten*, Math. Ann., 218, 127-156, 1975.
- [5] K. Fukuda, A. Jensen, R. Thomas, *Computing Groebner Fans*, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne and Zürich, Switzerland, 2005.
- [6] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies 131, Princeton University Press, 1993.
- [7] G. Greuel, G. Pfister, and H. Schönemann, SINGULAR 3.1.0 — A computer algebra system for polynomial computations. <http://www.singular.uni-kl.de>, 2009.
- [8] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.
- [9] A. Jensen, *Gfan, a software system for Gröbner fans and tropical varieties*. <http://www.math.tu-berlin.de/~jensen/software/gfan/gfan.html>, 2009.

- [10] A. Khovanskii, *Newton polyhedra and the genus of complete intersections*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 12 , no. 1, 51-61, 1977.
- [11] A. Khovanskii, *Newton polyhedra and toroidal varieties*, Funktsional. Anal. i Prilozhen, 11, No. 4 (1977). English translation Funct. Anal. Appl, 11, 289-296, 1978.
- [12] A. Kouchnirenko, *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*, Springer Berlin / Heidelberg, Invent. Math. 32, 1–31. 1976.
- [13] M. Merle, *Polyèdre de Newton, eventail et desingularisation. (D’après A. N. Varchenko)*, Semin. sur les singularites des surfaces, Cent. Math. Ec. Polytech., Palaiseau 1976-77, Lect. Notes Math. 777, 289-294, 1980.
- [14] M. Morales, *Polyèdre de Newton et genre géométrique d’une singularité intersection complète*, Bull. Soc. Math. France 112, 325–341, 1984.
- [15] T. Mora and L. Robbiano, *The Groebner Fan of an Ideal*, Journal of Symbolic Computation, Vol. 6, 183-228, 1988.
- [16] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry: An introduction to the theory of toric varieties*, Springer-Verlag, Éditeurs des Sciences et Des Arts, 1988.
- [17] M. Oka, *Non-Degenerate Complete Intersection Singularity*, Hermann, Éditeurs des Sciences et Des Arts, 1997.
- [18] M. Oka, *Principal zeta-function of nondegenerate complete intersection singularity*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 37, no. 1, 11–32, 1990.
- [19] M. Ruas, C. Gutierrez, *Indices of Newton non-degenerate vector fields and a conjecture of Loewner for surfaces in \mathbb{R}^4* , Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Vol.232, 245–253, 2003.
- [20] M. Saia, W. Zuñiga-Galindo, *Local zeta function for curves, non-degeneracy conditions and Newton polygons*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 357, 59–88, 2005.
- [21] B. Sturmfelds, *Groebner bases and Convex Polytopes*, (University Lecture Series 8), American Mathematical Society, 1996 .