Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Acoplamiento y Teoría de Renovación.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
ACTUARIA

PRESENTA:
LETICIA GUADALUPE CIENFUEGOS BLANCAS

DIRECTOR DE TESIS:
ANA MEDA GUARDIOLA

2009

Cienfuegos
Blancas
Leticia
Guadalupe
56-56-19-03
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría

Dra.
Ana
Meda
Guardiola

Dr.
Luis
Antonio
Rincón
Solís

M. en C.
Gerardo
Rubio
Hernández.

M. en C.
Sergio
Iván
Ortega
Hernández

Act.
Jaime
Vázquez
Alamilla

Acoplamiento y Teoría de Renovación
57 p.
2009

Acoplamiento y Teoría de Renovación.

Cienfuegos Blancas Leticia Guadalupe.
Facultad de Ciencias UNAM
2009

Índice

Introducción

De manera informal, el *Teorema de Renovación de Blackwell* podríamos enunciarlo de la siguiente manera. Una habitación está iluminada por un foco. Cuando éste se funde, uno nuevo es instalado inmediatamente. Entonces, conforme pasa el tiempo, el número de focos instalados en un intervalo de tiempo de longitud h tenderá a $\frac{h}{m}$, donde m es el tiempo promedio de vida de un foco.

En el presente trabajo presentamos la prueba de dicho Teorema, la cual la haremos mediante la técnica de *Acoplamiento* lo que significa la construcción conjunta de dos o más variables aleatorias (o procesos), por lo general, con el fin de deducir las propiedades de las variables individuales o de conocer mejor las similitudes de la distribución o las relaciones entre ellas.

Un *acoplamiento* de una colección de variables aleatorias X_i con $i \in I$ (donde I es un conjunto cualquiera de índices) es una familia de variables $(\hat{X}_i;\ \ i \in I)$, tal que $X_i \stackrel{d}{=} \hat{X}_i$ con $i \in I$. Notemos que sólo $\hat{X}_i$ es copia de la X_i, mientras que toda la familia $(\hat{X}_i;\ \ i \in I)$ no es una copia de $(X_i;\ \ i \in I)$. En otras palabras, la distribución conjunta de $\hat{X}_i$ no necesariamente es la misma que la distribución conjunta de X_i.

Para llevar a cabo esta prueba, dividimos este trabajo en tres partes. La primera, el *Capítulo 1*, donde se concentra toda la teoría de Renovación necesaria para la prueba final, ésta visión general de la Teoría de Renovación la elaboramos apoyándonos en la bibliografía [Re], [Ho], básicamente.

En el *Capítulo 2*, presentamos la prueba del *Teorema de Blackwell*, con fundamentos de *Estacionariedad* y *Acoplamiento*, en base a [At] y con apoyo de [Br], [Ch], [Fe].

Finalmente en el *Capítulo 3* elaboramos una colección de resultado necesarios para el desarrollo de todo el trabajo presentado.

Capítulo 1

Preliminares: Teoría de Renovación

El objetivo de este capítulo es dar una visión general de la Teoría de Renovación, la cual nos permitirá conocer los conceptos necesarios para la demostración del Teorema de Blackwell que llevaremos a cabo en el siguiente capítulo para lo cual nos apoyamos principalmente en [Re] y [Ho].

Sea $\{Y_n \mid n \geqslant 0\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas ($v.a's\ i.$ e $i.d's$) que sólo toman valores no negativos y con distribución común $F(x)$. Suponemos que

$$F(0-) = 0 \quad y \quad F(0) < 1$$

Notación 1.0.1. *$F(0-) = \lim_{x \to 0^-} F(x)$; o de forma equivalente, para cada $n \geqslant 0$,*

$$P(Y_n < 0) = 0 \quad y \quad P(Y_n = 0) < 1.$$

Para cada $n \geqslant 0$, definimos

$$S_n = Y_0 + \cdots + Y_n \tag{1}$$

a $\{S_n\}_{n=o}^{\infty}$ lo llamaremos *proceso de renovación.*

Los procesos son llamados *retrasados* cuando $P(Y_0 > 0) > 0$, en otro caso son llamados *puros* , y $S_0 = 0 = Y_0$.

En esta sección revisaremos algunos puntos necesarios para el cálculo de cantidades relacionadas con los procesos de renovación. Sea $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una distribución tal que sucede uno y sólo uno de los siguientes puntos:

1) U es *absolutamente continua* (AC). Es decir, existe una densidad $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface que $u(x) \geqslant 0$ y es tal que $\int_0^\Gamma u(x)dx < \infty \ \ \forall \ \ \Gamma > 0$ y para $b > 0 \geqslant a$, *ocurre* $U(b) - U(a) = \int_a^b u(s)ds$. Entonces
$$\int_0^\infty g(x)U(dx) = \int_0^\infty g(x)dU(x) = \int_0^\infty g(x)u(x)dx.$$

2) U es *discreta*(d). Es decir, existen puntos $\{a_i\}$ y pesos $\{w_i\}$ con $w_i \leqslant \infty$, tal que
$$\lim_{h\to 0} [U(a_i + h) - U(a_i - h)] =: U(\{a_i\}) = w_i.$$
$U(x)$ satisface
$$U(x) = \sum_{i:0\leqslant a_i \leqslant x} w_i.$$
La distribución $U(x)$ es constante excepto en los puntos a_i, donde se presentan saltos de tamaño w_i. Entonces
$$\int g(x)U(dx) = \int g(x)dU(x) = \sum_i g(a_i)w_i.$$

3) U es una combinación de la forma
$$U(x) = \alpha U_{AC}(x) + \beta U_d(x)$$
donde $U_{AC}(x)$ es AC con densidad $u_{AC}(x)$ y U_d es discreta con puntos $\{a_i\}$ y pesos $\{w_i\}$ y $\alpha > 0, \beta > 0$. En este caso
$$\begin{aligned} \int g(x)U(dx) &= \int g(x)dU(x) \\ &= \alpha \int g(x)U_{AC}(dx) + \beta \int g(x)U(_d(dx)) \\ &= \alpha \int g(x)u_{AC}(x)dx + \beta \sum g(a_i)w_i. \end{aligned}$$

Durante el desarrollo de este trabajo utilizaremos variables como las antes mencionadas.

§ 1.1 Convoluciones

Sabemos que una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es *localmente acotada* si es acotada en intervalos finitos. por ejemplo: si g es una función continua, entonces g es localmente acotada y toda función escalonada es localmente acotada.

Definición 1.1.1. *Sea g localmente acotada y F una distribución. La* convolución *de F y g es la función*
$$(F * g)(t) = \int_0^t g(t-x)F(dx) = \int_0^t g(t-x)f(x)dx \quad para \quad t \geqslant 0 \quad y \quad F \quad con \quad densidad \quad f.$$

Algunas propiedades de la convolución son:

1) $(F * g)$ es localmente acotada; de hecho
$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t} \mid (F * g)(s) \mid \leqslant \left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} \mid g(s) \mid \right) F(t)$$
Sea $\| g \|_t := \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \mid g(s) \mid$ finita para todo t, pues g es localmente acotada.

Entonces para todo $s \leqslant t$

$$\begin{aligned} |\,(F*g)(s)\,| &= \left|\int_0^s g(s-x)F(dx)\right| \\ &\leqslant \int_0^s |\,g(s-x)F(dx)\,| \\ &\leqslant \|\, g\,\| \int_0^s F(dx) = \|\, g\,\|\, F(t) < \infty \end{aligned}$$

2) Si g es acotada y continua, entonces $F*g$ es continua, puesto que $(F*g)(t) = E(g(t-Y_1))$ donde Y_1 tiene distribución F. Luego, si t_n converge a t, por continuidad de g, $g(t_n - Y_1)$ converge a $g(t-Y_1)$ casi seguramente[1] y por ser g acotada y el Teorema de convergencia dominada[2] concluimos

$$E(g(t_n - Y_1)) = (F*g)(t_n) \to E(g(t-Y_1)) = (F*g)(t).$$

3) *(Convolución de dos distribuciones que corresponde a suma de v.a's)*:
Sean X_1 y X_2 independientes con F_i distribución de X_i, $i = 1, 2$. Entonces $X_1 + X_2$ tiene distribución $F_1 * F_2$ puesto que para $t \geqslant 0$

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 \leqslant t) &= P((x_1, x_2) \in \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x+y \leqslant t\}) \\ &= \int \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\leqslant t\}} F_1(dx)F_2(dy) \\ &= \int_0^t \left[\int_0^{t-x} F_2(dy)\right] F_1(dx) = \int_0^t F_2(t-x)F_1(dx) \end{aligned}$$

de donde $F_1 * F_2 = F_2 * F_1$
.

4) Sean $X_1, \ldots, X_n$ $i.$ e $i.d's$ con distribución común F. Entonces $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ tiene distribución F^{n*}
. Donde definimos F^{n*} como:
i) $F^{2*} = F_1 * F_2$
ii) $F^{n*} = F^{n-1*} * F_n$

5) Si F_i es AC con densidad f_i, $i = 1, 2$ entonces $F_1 * F_2$ es AC con densidad

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(t-y)f_2(y)dy = \int_0^t f_2(t-y)f_1(y)dy$$

[1]Véase definición 3.0.1 en el Apéndice
[2]Véase Teorema 3.0.9 en el Apéndice

Para revisar esto, observemos que:

$$\begin{aligned}
(F_1 * F_2)(t) &= \int \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\leqslant t\}} f_1(x)f_2(y)dxdy \\
&= \int_0^t \left[\int_0^{t-y} f_1(x)dx\right] f_2(y)dy \\
&= \int_0^t \left[\int_y^t f_1(u-y)du\right] f_2(y)dy \\
&= \int_0^t \left[\int_0^u f_2(y)f_1(u-y)dy\right] du \\
&= \int_0^t f_1 * f_2(y)dy
\end{aligned}$$

Más aún, si F es AC para alguna distribución G, $F * G$ es AC. Para verificar esta afirmación basta con reemplazar f_1 por f y $f_2(y)dy$ por $G(dy)$

$$\begin{aligned}
(F * G)(t) &= \int_0^t \left[\int_{y=0}^u f(u-y)G(dy)\right] du \\
&= \int_{u=0}^t G * f(u)du
\end{aligned}$$

§ 1.2 Transformada de Laplace

Definición 1.2.1. *Sea X una variable aleatoria no negativa con distribución F. La* transformada de Laplace *de X o F es la función definida en $\mathbb{R}^+$ por*

$$\widehat{F}(\lambda) := E(e^{-\lambda X}) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} F(dx), \quad para \quad \lambda > 0$$

Notemos que puesto que $e^{-\lambda X(\omega)} \leqslant 1$, entonces $e^{-\lambda x} \leqslant 1$ así $\widehat{F}(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda > 0$.

Algunas propiedades son:

1) Distintas distribuciones tienen distintas transformadas de Laplace; para revisar la afirmación hagamos $y = e^{-x}$ y notemos que conforme x va de 0 a ∞, y va de 1 a 0. Además definamos la función de probabilidad G en el intervalo $(0, 1]$ por $G(y) = 1 - F(x)$, de donde:

$$\widehat{F}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} F(dx) = \int_0^1 y^\lambda G(dy)$$

Por otro lado G está determinada de forma única por sus momentos, los cuales están dados por $\widehat{F}(k)$. Por tanto el conocimiento de $\widehat{F}(1), \widehat{F}(2), \ldots$ determina a G, y por consecuencia a F.

2) Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con funciones de distribución F_1 y F_2 respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}(\widehat{F_1 * F_2})(\lambda) &= E(e^{-\lambda(X_1+X_2)}) \\ &= E(e^{-\lambda X_1}e^{-\lambda X_2})\end{aligned}$$

por la independencia de X_1 y X_2 obtenemos que

$$\begin{aligned}E(e^{-\lambda X_1}e^{-\lambda X_2}) &= E(e^{-\lambda X_1})E(e^{-\lambda X_2}) \\ &= \widehat{F_1}(\lambda)\widehat{F_2}(\lambda)\end{aligned}$$

Por lo tanto $(\widehat{F_1 * F_2})(\lambda) = \widehat{F_1}(\lambda)\widehat{F_2}(\lambda)$.

Más aún, para todo $n \geqslant 0$ si F es una distribución ocurre

$$(\widehat{F^{n*}})(\lambda) = (\hat{F}(\lambda))^n.$$

La demostración la haremos por inducción sobre n.

Para $n = 2$ tenemos que

$$(\widehat{F^{2*}})(\lambda) = (\widehat{F * F})(\lambda) = \hat{F}(\lambda)\hat{F}(\lambda) = \hat{F}(\lambda)^2$$

por la afirmación anterior.

Ahora supongamos cierta la proposición para $n = k$, es decir $\widehat{F^{k*}}(\lambda) = \hat{F}(\lambda)^k$. Luego

$$\begin{aligned}(\widehat{F^{(k+1)*}})(\lambda) &= (\widehat{F^{k*} * F})(\lambda) \\ &\underset{n=2}{=} \widehat{F^{k*}}(\lambda)\hat{F}(\lambda) \\ &\underset{H.I.}{=} \hat{F}(\lambda)^k\hat{F}(\lambda) \\ &= \hat{F}(\lambda)^{k+1}\end{aligned}$$

3) Para $\lambda > 0$, por el Lema de Fubini[3] y dado que tenemos argumentos positivos:

$$(-1)^n \frac{d^n}{d\lambda^n}\hat{F}(\lambda) = \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x} F(dx)$$

Luego por convergencia monótona[4]

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} (-1)^n \frac{d^n}{d\lambda^n}\hat{F}(\lambda) = \int_0^\infty x^n F(dx) \leqslant \infty$$

En particular si F es distribución de X entonces $E(X) = -\hat{F}'(0)$ y $E(X^2) = \hat{F}''(0)$, y así sucesivamente.

[3] Véase el Lema 3.0.15

[4] Véase en el apéndice 3.0.8

4) Para una distribución F, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda x}F(x)dx &= \int_0^\infty e^{-\lambda x}\left[\int_{u=0}^x F(du)\right]dx\\ &= \int_{u=0}^\infty \left[\int_{x=u}^\infty e^{-\lambda x}dx\right]F(du)\\ &= \int_{u=0}^\infty \frac{e^{-\lambda u}}{\lambda}F(du)\\ &= \frac{\hat{F}(\lambda)}{\lambda}\end{aligned}$$

De donde $\int_0^\infty e^{-\lambda x}(1-F(x))dx = \frac{1-\hat{F}(\lambda)}{\lambda}$

Ahora podemos extender estas notaciones a distribuciones arbitrarias y medidas U en $\mathbb{R}_+$. Supongamos entonces que $U(x)$ es no-decreciente en $[0,\infty)$ y sea $U(\infty) := \lim\limits_{x\to\infty} U(x)$; notemos que quizá $U(\infty) > 1$. Si existe $a \geqslant 0$ tal que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}U(dx) < \infty$$

para toda $\lambda > a$, entonces

$$\hat{U}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda x}U(dx), \qquad \lambda > a$$

es llamada la transformada de Laplace de U. Y si no existe tal a, entonces decimos que la transformada de Laplace es indefinida.

§ 1.3 Contando Renovaciones

Esta sección se enfoca en propiedades de variables aleatorias $N(t)$, donde $N(t)$ es la función que cuenta el número de renovaciones en el periodo $[0,t]$. Tomemos S_n como se definió en (1).

$$N(t) = \sum_{n=0}^\infty 1_{[0,t]}(S_n)$$

Donde $N(t)$ la podemos escribir como $\text{máx}\{k : S_k \leqslant t\}$. $E(N(t))$ es llamada una *función de renovación*. Notemos que si $S_0 = 0$, entonces $t = 0$ es contado como una renovación. En este caso

$$U(t) := E\left(\sum_{n=0}^\infty 1_{[0,t]}(S_n)\right) \underset{=}{{}_{Fubini}{}^7} \sum_{n=0}^\infty P(S_n \leqslant t) = \sum_{n=0}^\infty F^{n*}(t). \tag{2}$$

En el caso de un proceso retrasado, si $S_0 = Y_0$ con distribución G, entonces la función de renovación es:

$$V(t) = \sum_{n=0}^\infty P(S_n \leqslant t) = \sum_{n=0}^\infty (G * F^{(n-1)*})(t) = G * U(t).$$

Con $U(t)$ como definimos en (2). Las siguientes relaciones entre S_n y $N(t)$ permite caracterizar $N(t)$ para determinar el comportamiento de $\{S_n\}$

$$\{N(t) \leqslant n\} = \{S_n > t\},$$

$$S_{N(t)-1} \leqslant t < S_{N(t)} \qquad \text{cuando} \quad N(t) \geqslant 1,$$

$$\{N(t) = n\} = \{S_{n-1} \leqslant t < S_n\} \quad \text{si} \qquad n \geqslant 1.$$

Notemos que $[N(t) \leqslant n]$ depende únicamente de $S_0, \ldots, S_n$ y no de los siguientes $S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots$.

Teorema 1.3.1. *Sea F una función de distribución. Para todo $t \geqslant 0$*

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma^n F^{n*}(t) < \infty$ *para* $\gamma < \frac{1}{F(0)}$.

2) Para $t > 0$ la función generadora de momentos de $N(t)$ existe, en particular todos los momentos de $N(t)$ son finitos y $U(t) < \infty$

Demostración.

1) Sea $\gamma < \frac{1}{F(0)}$ fijo. Entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to\infty} \hat{F}(\lambda) &= \lim_{\lambda\to\infty} \left([F(0) - F(0^-)] \cdot 1 + \textstyle\int_0^\infty e^{-\lambda x} F(dx)\right) \\ &= F(0) + \lim_{\lambda\to\infty} \textstyle\int_0^\infty e^{-\lambda x} F(dx) \\ &= F(0) \end{aligned}$$

Por tanto para todo λ grande es posible elegir $\gamma\hat{F}(\lambda) < 1$, dado que $\lim\limits_{\lambda\longrightarrow\infty} \hat{F}(\lambda) = F(0)$ para todo $\varepsilon > 1$ podemos encontrar $L \in \mathbb{R}$ tal que si $\lambda > L$ entonces $\hat{F}(\lambda) < \varepsilon F(0)$. Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{\gamma F(0)} > 1$, entonces:

$$\gamma\hat{F}(\lambda) < \gamma\varepsilon F(0) = \gamma\left(\frac{1}{\gamma F(0)}\right) F(0) = 1$$

Por lo tanto, para toda $\lambda > L$ tenemos que $\gamma\hat{F}(\lambda) < 1$

Luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n F^{n*}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n P(S_n \leqslant t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n P(e^{-\lambda S_n} \geqslant e^{-\lambda t})$$

donde $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $S_0 = Y_0 = 0$.

Por la desigualdad de Markov[8] para variables aleatorias no-negativas

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma^n P(e^{-\lambda S_n}\geqslant e^{-\lambda t}) &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\gamma^n \frac{E(e^{-\lambda S_n})}{e^{-\lambda t}}\\ &= e^{\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma^n E(e^{-\lambda S_n})\end{aligned}$$

y por la independencia de las Y_i

$$e^{\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma^n E(e^{-\lambda S_n}) = e^{\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\gamma\hat{F}(\lambda)\right]^n = e^{\lambda t}\left(\frac{1}{1-\gamma\hat{F}(\lambda)}\right) < \infty$$

puesto que $\gamma\hat{F}(\lambda) < 1$.

2) Por el Lema 3.0.4 es suficiente demostrar que $P(N(t) > n)$ es exponencialmente acotada. Sea $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{F(0)} > \gamma > 1$, como el inciso anterior, de donde tenemos que

$$\lim_{n\longrightarrow 0}\gamma^n F^{n*}(t) = 0$$

Así existe n_0 tal que para $n \geqslant n_0$

$$F^{n*}(t) \leqslant \gamma^{-n} = e^{-n\ln\gamma}.$$

Por otro lado $[N(t)\geqslant n] = [S_n > t]$, entonces con $Y_0 = 0$ tenemos que para $n \geqslant n_0$,

$$P(N(t) > n) = P(S_n \leqslant t) = F^{n*}(t) \leqslant e^{-n\ln\gamma}$$

Y con $k = 1$ tenemos que

$$P(N(t) > n) \leqslant ke^{-cn}. \blacksquare$$

Teorema 1.3.2. *Supongamos $E(Y_1) = \mu = \int_0^\infty xF(dx) < \infty$. La media del tiempo entre arribos tal que,*

1) Si $P(Y_0 < \infty) = 1$ entonces

$$\frac{N(t)}{t} \longrightarrow \frac{1}{\mu},\ \textit{cuando } t\longrightarrow\infty \textit{ casi seguramente.}$$

2) Si $var(Y_1) = \sigma^2 < \infty$, entonces $N(t) \sim N\left(\frac{\mu}{t}, \frac{t\sigma 2}{\mu^3}\right)$; es decir

$$\lim_{t\to\infty} P\left[\frac{N(t)-\frac{t}{\mu}}{\left(\frac{t\sigma^2}{\mu^3}\right)^{\frac{1}{2}}} \leqslant x\right] = N_x(0,1)(x)$$

donde $N_x(0,1)$ es la función de distribución normal estándar.

Demostración.

[8]Véase Desigualdad 3.0.3 en el Apéndice

1) Por la Ley Fuerte de los Grandes Números [9]

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \tfrac{S_n}{n} &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{Y_0}{n} + \tfrac{Y_1+\cdots+Y_n}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{Y_0}{n} + \lim_{n\to\infty} \tfrac{Y_1+\cdots+Y_n}{n} = 0+\mu=\mu \end{aligned}$$

Por otro lado, $N(t)$ tiende a ∞ cuando t tiende a ∞; puesto que para cualquier natural n y G la distribución de Y_0

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{t\to\infty}(G * F^n)(t) \\ &= \lim_{t\to\infty} P(S_n \leqslant t) = \lim_{t\to\infty} P(N(t) > n) \\ &= P\left(\lim_{t\to\infty} N(t) > n\right). \end{aligned}$$

dado que $N(t)$ tiende a t y es monótona no decreciente. Por tanto $1 = P\left(\lim_{t\to\infty} N(t) > n\right)$ para cualquier natural n, donde tenemos que $P\left(\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty\right) = 1$. Por tanto $N(t)$ tiende a ∞ cuando t tiende a ∞.

Entonces

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{Y_0}{N(t)} + \sum_{i=0}^{N(t)} \frac{Y_i}{N(t)}\right] = \mu$$

pero

$$S_{N(t)-1} \leqslant t < S_{N(t)} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{S_{N(t)-1}}{N(t)-1}\tfrac{N(t)-1}{N(t)} \leqslant \tfrac{t}{N(t)} < \tfrac{S_{N(t)}}{N(t)}$$

cuando $t \longrightarrow \infty$, los extremos de la desigualdad convergen a μ casi seguramente[10] y por lo tanto $\frac{t}{N(t)} \longrightarrow \mu$, cuando $t \longrightarrow \infty$, de donde

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

2) Recordemos que $\{N(t) \leqslant n\} = \{S_n > t\}$ y que por el Teorema Central del Límite [11]

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) = N_X(0,1)(x).$$

donde $N_x(0,1)$ es una distribución Normal con media 0 y varianza 1. Luego

$$P\left(\frac{N(t)-\frac{t}{\mu}}{\left(\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}\right)^{\frac{1}{2}}} \leqslant x\right) = P\left(N(t) \leqslant x\left(\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{t}{\mu}\right).$$

---

[9] Véase 3.0.2

[10] Véase definición 3.0.1

[11] Véase 3.0.5

Si hacemos $g(t) = x\left(\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{t}{\mu}$, tenemos que

$$P\left(N(t) \leqslant g(t)\right) = P(S_{g(t)} > t) = P\left(\frac{S_{g(t)} - \mu g(t)}{\sigma g^{\frac{1}{2}}(t)} > \frac{t - \mu g(t)}{\sigma g^{\frac{1}{2}}(t)}\right).$$

Así será suficiente demostrar que si $g(t)$ tiende a ∞ entonces $Z(t) := \frac{t-\mu g(t)}{\sigma g^2(t)}$ tiende a $-x$ puesto que en este caso la convergencia uniforme en el Teorema del Límite Central[12] implica

$$P\left(\frac{t - \mu g(t)}{\sigma g^{\frac{1}{2}}(t)} > Z(t)\right) \longrightarrow 1 - N_{-z}(0,1) = N_x(0,1)$$

Luego $g(t) = x\left(\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{t}{\mu} \approx \frac{t}{\mu}$ cuando $t \longrightarrow \infty$. Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} Z(t) &= \frac{t-\mu g(t)}{\sigma g^2(t)} = \frac{t-\mu\left(x\left(\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{t}{\mu}\right)}{\sigma g^{\frac{1}{2}}(t)} \\ &= -\frac{\mu x(\sigma^2\mu^{-3}t)^{\frac{1}{2}}}{\sigma g^{\frac{1}{2}}(t)} \approx -\frac{\mu x(\sigma^2\mu^{-3}t)^{\frac{1}{2}}}{\sigma\left(\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}} = -x \end{aligned}$$

Por lo tanto $\underset{n\to\infty}{lim} P\left(\frac{N(t)-t\mu^{-1}}{(t\sigma^2\mu^{-3})^{\frac{1}{2}}} \leqslant x\right) = N_x(0,1)$. ∎

Teorema 1.3.3 *(Elemental de renovación). Sea $E(Y_1) = \mu \leqslant \infty$. Entonces*

$$\underset{t\to\infty}{lim}\frac{V(t)}{t} = \underset{t\to\infty}{lim}\frac{U(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

con $Y_0 < \infty$.

Existen muchas formas para proceder con esta demostración, una es usar el Teorema de Renovación de Blackwell, el cuál será demostrado más tarde. Sin embargo; la siguiente es una demostración basada en truncación.

Demostración. Por el Lema de Fatou[13] y el Teorema 1.3.2 tenemos

$$\frac{1}{\mu} = E\left(\liminf_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}\right) \leqslant \liminf_{t\to\infty}\frac{E(N(t))}{t} = \liminf_{t\to\infty}\frac{V(t)}{t}$$

Por otro lado, si $Y_0^* = 0$, $Y_i^* = Y_i \wedge b$, $S_0^* = 0$, $S_n^* = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^*$, $N^*(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathfrak{X}_{[0,t]} S_n^*$, $V^*(t) = E(N^*(t))$. Entonces dado que $Y_i^* = Y_i \wedge b$ tenemos que $S_n \geqslant S_n^*$ y $N^*(t) \geqslant N(t)$.

[12]Véase 3.0.5
[13]Véase 3.0.6

Ahora observemos que $E(S^*_{N^*(t)}) = E(Y^*_1)E(N^*(t)) = E(Y^*_1)V^*(t)$ por la identidad de Wald [14], por lo tanto, usando el Lema de Fatou [15]

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty}\tfrac{V(t)}{t} &\leqslant \limsup_{t\to\infty}\tfrac{V^*(t)}{t}\\
&= \limsup_{t\to\infty}\tfrac{E\left(S^*_{N^*(t)}\right)}{tE(Y^*_1)}\\
&= \limsup_{t\to\infty}\tfrac{E\left(S^*_{N^*(t)-1}+Y^*_{N^*(t)}\right)}{tE(Y^*_1)}\\
&= \limsup_{t\to\infty}\tfrac{E\left(S^*_{N^*(t)-1}\right)+E\left(Y^*_{N^*(t)}\right)}{tE(Y^*_1)}\\
&= \limsup_{t\to\infty}\tfrac{E\left(S^*_{N^*(t)-1}\right)}{tE(Y^*_1)} + \tfrac{E\left(Y^*_{N^*(t)}\right)}{tE(Y^*_1)}\\
&\leqslant \limsup_{t\to\infty}\tfrac{t}{tE(Y^*_1)} + \tfrac{E\left(Y_{N(t)}\wedge b\right)}{tE(Y_1\wedge b)}\\
&= \tfrac{1}{E(Y^*_1)}.
\end{aligned}$$

Hagamos tender b a ∞, así que por el Teorema de Convergencia Monótona[16] $E(Y_1 \wedge b) \longrightarrow E(Y_1) = \mu$. Por tanto

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{V(t)}{t} \leqslant \frac{1}{\mu},$$

luego

$$\frac{1}{\mu} \leqslant \liminf_{t\to\infty}\frac{V(t)}{t} \leqslant \limsup_{t\to\infty}\frac{V(t)}{t} \leqslant \frac{1}{\mu}.$$

Por lo tanto $\limsup_{t\to\infty}\frac{V(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$. ■

---

[14] Véase 3.0.7
[15] Véase 3.0.6
[16] Véase 3.0.8

Capítulo 2

Acoplamiento y Teorema de Renovación.

El Teorema de Renovación nos habla acerca del número esperado de visitas de una caminata aleatoria en un conjunto. En los años 1970's aparece una interesante técnica llamada "Acoplamiento". Esta técnica permite hacer directas y elegantes pruebas del teorema ergódico de cadenas de Markov. En este sentido, permitiremos al proceso evolucionar hasta que se aproxime a un proceso "agradable", cuyo comportamiento es conocido, entonces se "aparean" los dos procesos de tal forma que sus distribuciones marginales no son perturbadas. Consecuentemente podemos formar conclusiones sobre el proceso marginal.

En vista de la estrecha relación entre el teorema ergódico y los teoremas de renovación, no es sorprendente que los argumentos de Acoplamiento den también lugar a una prueba directa del Teorema de Renovación, y el propósito de este trabajo es dar la prueba. Los argumentos son naturales, y accesibles.

Una novedad de la prueba aquí mostrada es que utiliza acoplamiento y estacionariedad directamente para producir los dos lados del teorema de renovación. Aunque se utilizan las tradicionales variables, lo hacemos en una forma más sencilla que la del habitual argumento que extiende el caso de un lado al caso de dos lados.

En la última parte de este capítulo demostraremos el *Teorema de Renovación de Blackwell* que es una generalización del Teorema 1.3.3, probado en el capítulo anterior. La prueba será autocontenida, apoyándonos en textos como [Fe], [Ba], [Ch] y [Ho]. De ahora en adelante tengamos presente que nuestro objetivo será la demostración del Teorema de Blackwell que presentaremos más a adelante.

§ 2.1 Contando Medidas

Sean $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de $v.a's\ i.\ e\ i.d's$, no aritméticas tal que $E(|X_1|) < \infty$ y a menos que se indique lo contrario $E(X_1) = \mu > 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$,

$S_0 = 0$. Donde entenderemos como *distribución aritmética*[1], una distribución de probabilidad discreta concentrada en un conjunto de puntos de la forma $\pm nh$, donde $h > 0$ y $n = 1, 2, \ldots$. Es decir, es aquella donde su conjunto de posibles valores son múltiplos enteros de algún número. Además supongamos que $P(X_1 > 0) = 1$. Para algún conjunto A de *Borel*[2], sea $\pi(A) = \|\mathfrak{S} \cap A\|$ donde $\mathfrak{S} = (S_0, S_1, \ldots)$ es un conjunto de puntos aleatorios en $\mathbb{R}$. Si $A = (\alpha, \beta)$ con $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ escribiremos $\pi(\alpha, \beta)$.

Sea

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(S_n) = \begin{cases} 1 & si \quad S_n \in A \\ 0 & si \quad S_n \notin A. \end{cases}$$

Entonces el número de renovaciones en A estará dado por $\pi(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_A(S_n)$, también definida como el número de puntos en $\mathfrak{S} \cap A$.

Teorema 2.1.1. Teorema de Renovación de Blackwell
Si $E(X_1) = \mu$, entonces:

$$E(\pi(\alpha + t, \beta + t)) = \begin{cases} \frac{\alpha-\beta}{\mu} & cuando \quad t \longrightarrow \infty \\ 0 & cuando \quad t \longrightarrow -\infty. \end{cases}$$

Los siguientes son conceptos que nos serán de mucha utilidad para la demostración de nuestra versión del Teorema de Blackwell.

Teorema 2.1.2. Transitoriedad
Dadas la hipótesis antes mencionadas, supongamos además que $E(X_1) \neq 0$, entonces $E(\pi(\alpha, \beta)) < \infty$.

Demostración. Por la Ley Fuerte de los Grandes Números[3] sabemos que $\frac{S_n}{n}$ tiende a $E(X_1)$ cuando n tiende a ∞ *c.p.*1. Además por hipótesis $E(X_1) \neq 0$ de donde:

$$P(S_n \in (\alpha, \beta) \ \ para \ \ una \ \ infinidad \ \ de \ \ valores \ \ de \ \ n) = P(\pi(\alpha, \beta) = \infty) = 0$$

Luego $A = (\alpha, \beta)$ es transitorio, de donde se sigue que $P(\pi(\alpha, \beta) = \infty) = 0$ y $E(\pi(\alpha, \beta)) = \frac{\rho_{BA}}{1-\rho_{AA}}$ (donde ρ_{BA} es la probabilidad de ir del conjunto inicial B al conjunto A en un número finito de pasos). Para verificar esto, sabemos que $0 \leqslant \rho_{AA} < 1$[4] por ser A transitorio, luego:

$$\begin{aligned} P(\pi(\alpha, \beta) = \infty) &= \lim_{n \longrightarrow \infty} P(\pi(A) \geqslant n) \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \rho_{BA} \rho_{AA}^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

Por otro lado

---

[1] *A.V. Prokhorov* Encyclopedia of Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York ISBN 1-4020-0609-8

[2] Véase apéndice definición 3.0.10

[3] Véase Teorema 3.0.2 en apéndice

[4] Rick Durrett, *Essentials of Stochastics Processess*, Springer-Verlag New York, p.p.41

$$\begin{aligned} E(\pi(\alpha,\beta)) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(\pi(A)=n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\rho_{BA}\rho_{AA}^{n-1}(1-\rho_{AA}) \\ &= \tfrac{\rho_{BA}}{1-\rho_{AA}} < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto $E(\pi(\alpha,\beta)) < \infty$. ■

Teorema 2.1.3. Recurrencia
Dadas la hipótesis antes mencionadas, si $E(X_1) = 0$, entonces $(\alpha,\beta)\cap\mathfrak{S}\neq\varnothing$ c.p.1.

Demostración. Por la Ley Fuerte de los Grandes Números[5] $\frac{S_n}{n}$ tiende a $E(X_1)$ cuando n tiende a ∞, pero $E(X_1) = 0$ entonces

$$P(S_n \in (\alpha,\beta) \;\; para \;\; una \;\; infinidad \;\; de \;\; valores \;\; de \;\; n) = P(\pi(\alpha,\beta)=\infty) = 1,$$

por tanto $A = (\alpha,\beta)$ es recurrente. Entonces, $E(\pi(\alpha,\beta)) = \infty$ para verificar esto, recordemos que $\rho_{AA} = 1$[6] , es decir, la probabilidad de ir de A a A en un número finito de pasos es 1. Así:

$$\begin{aligned} P(\pi(A)=\infty) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} P(\pi(A)\geqslant n) \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \rho_{BA}\rho_{AA}^{n-1} \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \rho_{BA} = \rho_{BA} \end{aligned}$$

en particular $P(\pi(A) = \infty) = 1$. Luego si una v.a. no negativa tiene probabilidad positiva de ser infinita entonces su esperanza es infinita, asi $E(\pi(A)) = \infty$. Así, si $E(X) = 0$, el número esperado de visitas de S_n al intervalo $A = (\alpha,\beta)$ es infinito, por tanto $A\cap\mathfrak{S}\neq\varnothing$. ■

Podemos pensar intuitivamente que el siguiente Lema, nos permitirá acotar la probabilidad de que el número de renovaciones en un intervalo dado sea mayor que una constante k. Antes definimos la *traslación* de un conjunto A como $A - a = \{x : x = y - a \;\; \forall \;\; y \in A\}$ donde $A = (\alpha,\beta)$.

Lema 2.1.4. *Sea $A = (\alpha,\beta)$ con $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. Existe $\lambda < \infty$ tal que*

$$P(\pi(A-a)\geqslant k) \leqslant P(\pi(-\lambda,\lambda)\geqslant k)$$

Demostración. Sea

$$N_a = \begin{cases} inf\{n : S_n \in A-a\} & si \;\; S_n \in A-a \; p.a. \; n\in\mathbb{N} \\ \infty & si \;\; S_n \notin A-a \; \forall \; n\geqslant 0. \end{cases}$$

[5] Véase 3.0.2en el Apéndice
[6] Rick Durrett, *Essentials of Stochastics Processess*, Springer-Verlag New York, p.p.41

Entonces

$$\pi(A-a) = \begin{cases} 1 + \sum\limits_{n=N_a+1}^{\infty} \mathcal{X}_{A-a}(S_n) & si \quad N_a < \infty \\ 0 & si \quad N_a = \infty \end{cases}$$

Así, para $k \geqslant 1$, tomemos $\lambda' = max\{S_{N_a}, b-a+S_{N_a}\}$, pero $b < a$ por tanto, sea $\lambda' = b - a + S_{N_a}$. Sea $\lambda > \lambda'$

$$\begin{aligned} P(\pi(A-a) \geqslant k) &= P\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_{A-a}(S_n) \geqslant k, N_a < \infty\right) + P(0 \geqslant k, N_a = \infty) \\ &= P\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_{A-a-S_{N_a}}(S_n - S_{N_a}) \geqslant k, N_a < \infty\right) \\ &\leqslant P\left(\sum_{n=N_a}^{\infty} \mathcal{X}_{(-\lambda,\lambda)}(S_n - S_{N_a}) \geqslant k, N_a < \infty\right) \\ &\leqslant P\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_{(-\lambda,\lambda)}(S_n) \geqslant k\right) \\ &= P(\pi(-\lambda,\lambda) \geqslant k) \end{aligned}$$

■

Como $\{S_n - S_{N_a} \mid n \geqslant N_a\}$ según la definición 3.0.11 es una copia en distribución de $\{S_n \mid n \geqslant 0\}$ y dada la existencia de $0 < \lambda < \infty$ tal que $A - a - S_{N_a} \subset (-\lambda, \lambda)$ pues $S_{N_a} \in A - a$ y A es acotado, derivamos la siguiente proposición.

Proposición 2.1.5. *$E(\pi(-\lambda,\lambda)) < \infty$ para alguna $0 < \lambda < \infty$*

Demostración. Como dijimos al principio $E(X_1) > 0$, entonces por Transitoriedad[7] tenemos que $E(\pi(-\lambda,\lambda)) < \infty$ ■

Proposición 2.1.6.

$$\lim_{a\to\infty} E(\pi(A-a)) = 0 \quad c.p.1.$$

Demostración. Por definición de Integrabilidad Uniforme[8], ya que S_n converge a ∞ y A es acotado, entonces $E(\pi(A-a))$ tiende a 0 cuando a tiende a ∞. ■

[7]Véase el resultado 2.1.2
[8]Véase definición 3.0.13 en el apéndice

Ahora definamos:

$$\begin{aligned}
\mu(a,A) &= E(\pi(A-a)) \\
N &= inf(n : S_n > 0), \\
Z &= S_n \textit{ donde } S_n > 0 \\
\nu(a,A) &= E(\sum_{n=1}^{N-1} \mathcal{X}_A(a+S_n)).
\end{aligned}$$

$\nu(a,A)$ es el número esperado de visitas al intervalo $A-a$ antes que S_n sea positivo.

Lema 2.1.7. *$\mu(a,A) = \nu(a,A) + E(\mu(a+Z,A))$ donde $Z = S_N$ y $A = (\alpha,\beta)$ con $-\infty \leqslant \alpha < \beta < \infty$.*

Demostración.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_A(a+S_n) = \sum_{n=1}^{N-1} \mathcal{X}_A(a+S_n) + \sum_{n=N}^{\infty} \mathcal{X}_A(a+S_n)$$

Tomando valor esperado de ambos lados

$$\begin{aligned}
\mu(a,A) &= \nu(a,A) + E\left(\sum_{n=N}^{\infty} \mathcal{X}_A(a+S_n)\right) \\
&= \nu(a,A) + E\left(\sum_{n=N}^{\infty} \mathcal{X}_A(a+S_n+S_N-S_N)\right) \\
&= \nu(a,A) + E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_A(a+S_n+S_N)\right)
\end{aligned}$$

pues $\{S_n - S_N : n = N,\ldots,N+1\}$ tiene la misma distribución que $\{S_n : n = 0,1,\ldots\}$ luego es independiente de N y S_N.

Por lo tanto $\mu(a,A) = \nu(a,A) + E(\mu(a+Z,A))$. ■

Ahora bien, sea

$$Z_i = S_N \text{ donde } N = inf(n : S_n > 0)$$

es decir, $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$ son n copias de S_N. Entonces, $T_k = Z_1 + \cdots + Z_k$ donde $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ son $i.$ e $i.d's$ y positivas.

Lema 2.1.8. $\mu(a,A) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \nu(a+T_k,A)\right)$

Demostración. Es suficiente demostrar que:

$$\mu(a,A) = E\left(\sum_{k=0}^{n-1} \nu(a+T_k,A)\right) + E(\mu(a+T_n,A))$$

por inducción sobre n

Si $n = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{k=0}^{n-1} \nu(a+T_k)\right) + E(\mu(a+T_n, A)) &= E(\nu(a, A)) + E(\mu(a+T_1, A)) \\ &= E(\nu(a, A)) + E(\mu(a+Z, A)) \end{aligned}$$

que por el Lema 2.1.7, se cumple y dado que $T_1 = Z_1 = Z$.

Hipótesis de Inducción
Supongamos cierto para n, entonces se cumple que

$$\mu(a, A) = E\left(\sum_{k=0}^{n-1} \nu(a+T_k, A)\right) + E(\mu(a+T_n, A))$$

P.D.

$$\mu(a, A) = E\left(\sum_{k=0}^{n} \nu(a+T_k, A)\right) + E(\mu(a+T_{n+1}, A)).$$

Ahora, bien:

$$E\left(\sum_{k=0}^{n} \nu(a+T_k, A)\right) + E(\mu(a+T_{n+1}, A)) =$$
$$E\left(\sum_{k=0}^{n-1} \nu(a+T_k, A)\right) + E\left(\nu(a+T_n, A)\right) + E(\mu(a+T_{n+1}, A))$$

dado que $\nu(a+T_n, A) = E\left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X}_A(a+T_n+S_k)\right)$ y

$$\mu(a+T_{n+1}, A) = E(\pi(A-(a+T_{n+1}))) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{X}_A(a+T_n+S_k)\right)$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} & E\left(\sum_{k=0}^{n} \nu(a+T_k, A)\right) + E(\mu(a+T_{n+1}, A)) \\ = \quad & E\left(\sum_{k=0}^{n-1} \nu(a+T_k, A)\right) + E(\nu(a+T_n, A)) + E(\mu(a+T_{n+1}, A)) \\ = \quad & E\left(\sum_{k=0}^{n-1} \nu(a+T_k, A)\right) \\ + \quad & E\left(E\left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X}_A(a+T_n+S_k)\right)\right) \\ + \quad & E\left(E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{X}_A(a+T_{n+1}+S_k)\right)\right) \end{aligned}$$

Por otro lado, por el Teorema de Fubini[9] y dado que los argumentos son positivos,

$$E\left(E\left(\sum_{k=0}^{N-1}\mathcal{X}_A(a+T_n+S_k)\right)\right)+E\left(E\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{X}_A(a+T_{n+1}+S_k)\right)\right)$$

$$=E\left(E\left(\sum_{k=0}^{N-1}\mathcal{X}_A(a+T_n+S_k)+\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{X}_A(a+T_{n+1}+S_k)\right)\right)$$

entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{X}_A(a+T_{n+1}+S_k) &= \mathcal{X}_A(a+T_{n+1}+S_0)+\mathcal{X}_A(a+T_{n+1}+S_1)+\cdots\\ &= \mathcal{X}_A(a+T_n+Z_{n+1}+S_0)+\mathcal{X}_A(a+T_n+Z_{n+1}+S_1)+\cdots\end{aligned}$$

pero $Z_{n+1}=S_N$, $S_0=0$, ademas

$$S_1\sim S_{N+1}, S_2\sim S_{N+2}, S_3\sim S_{N+3},\ldots$$

De donde

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{X}_A(a+T_{n+1}+S_k) &= \mathcal{X}_A(a+T_n+S_N)+\mathcal{X}_A(a+T_n+S_{N+1})+\cdots\\ &= \sum_{k=N}^{\infty}\mathcal{X}_A(a+T_n+S_k)\end{aligned}$$

Entonces

$$E\left(E\left(\sum_{k=0}^{N-1}\mathcal{X}_A(a+T_n+S_k)+\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{X}_A(a+T_{n+1}+S_k)\right)\right)$$

$$=E\left(E\left(\sum_{k=0}^{N-1}\mathcal{X}_A(a+T_n+S_k)+\sum_{k=N}^{\infty}\mathcal{X}_A(a+T_n+S_k)\right)\right)$$

$$=E\left(E\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{X}_A(a+T_n+S_k)\right)\right)=E(\mu(a+T_n,A))$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}&E\left(\sum_{k=0}^{n}\nu(a+T_k,A)\right)+E\left(\mu(a+T_{n+1},A)\right)\\ =\;&E\left(\sum_{k=0}^{n-1}\nu(a+T_k)\right)+E\left(\mu(a+T_n,A)\right)\\ \overset{H.I.}{=}\;&\mu(a,A)\end{aligned}$$

[9] Véase 3.0.15

Por el Lema 2.1.4 $\mu(\cdot, A)$ es acotada; ya que:

$$
\begin{aligned}
\mu(a,A) &= E(\pi(A-a)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} kP(\pi(A-a)=k) \\
&= P(\pi(A-a)=1) \\
&+ P(\pi(A-a)=2)+P(\pi(A-a)=2) \\
&+ P(\pi(A-a)=3)+P(\pi(A-a)=3)+P(\pi(A-a)=3) \\
&\vdots \\
&= P(\pi(A-a)\geqslant 1)+P(\pi(A-a)\geqslant 2)+P(\pi(A-a)\geqslant 3)+\cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(\pi(A-a)\geqslant k) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} P(\pi(A-a)\geqslant k) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} P(\pi(-\lambda,\lambda)\geqslant k) \\
&= E(\pi(-\lambda,\lambda)) < \infty \text{ por la Proposición 2.1.5}
\end{aligned}
$$

Por la Proposición 2.1.6 $\mu(a, A)$ tiende a 0 cuando a tiende a ∞. Así cuando T_n tiende a ∞, $E(\mu(a + T_n, A))$ tiende a 0

Por tanto cuando n tiende a ∞

$$\mu(a,A) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \nu(a+T_k)\right) + E(\mu(a+T_n,A)) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \nu(a+T_k)\right)$$

Ahora sean: ■

Z_0	$v.a.$ positiva con distribución F_0
F	la distribución de Z_i, $i \geqslant 1$
F^{*k}	la distribución de T_k $k \geqslant 1$ entonces
$F_0 * F^{*k}$	es la distribución de $Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_k$ y
U_0	la "Medida de Renovación"asociada donde $U_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(F_0 * F^{*k}(t)\right)$

Lema 2.1.9.

$$E(\mu(Z_0, A)) = \int_0^{\infty} \nu(s, A) U_0(ds)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
E(\mu(Z_0,A)) &= E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \nu(Z_0+T_k,A)\right) && \text{Por el Lema 2.1.8}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\nu(Z_0+T_k,A)\right) && \text{Por el teorema de Fubini}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\nu(Z_0+Z_1+\cdots+Z_k,A)\right) &&\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \nu(s,A)\left(F_0 * F^{*k}\right)(ds) &&\\
&= \int_0^{\infty} \nu(s,A) \sum_{k=0}^{\infty} \left(F_0 * F^{*k}\right)(ds) && \text{Por el Teorema de Fubini}\\
&= \int_0^{\infty} \nu(s,A) U_0(ds) &&
\end{aligned}$$

Notemos que los argumentos de las ecuaciones anteriores son todos positivos, es por ello que podemos utilizar el Teorema de Fubini[10]. Por lo tanto $E(\mu(Z_0,A)) = \int_0^{\infty} \nu(s,A)U_0(ds)$ ■

§ 2.2 Estacionariedad

Considere el proceso de renovación $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x)$ y ecuaciones de la forma $Z = z + F * Z$; i.e. $Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-x)dF(x)$ donde suponemos que z esta acotada sobre intervalos acotados, es decir,

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |z(t)| < \infty \ \ \forall \ \ T < \infty$$

Teorema 2.2.1. *(Ecuación de Renovación)*

1) $U(t) < \infty$ para todo t.
2) $Z = U * z$ es la única solución con soporte en $\mathbb{R}^+$ que está acotada sobre intervalos acotados.

Demostración. Si el proceso es puro tenemos que $Y_0 \cong 0$, luego $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Entonces $\forall\ x \in \mathbb{R}^+$ existe n tal que $P(S_n < x) < 1$, es decir, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ existe r tal que $F^{*r} < 1$. Es evidente que F^{*k} tiende a 0 cuando r tiende a ∞. Entonces

[10] Véase Teorema 3.0.15

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x) \leqslant r \sum_{k=0}^{\infty} F^{*rk}(x)$$

porque $F^{*(r(k-1)+1)}(t) + \cdots + F^{*rk}(t) \leqslant rF^{*(r(k-1)+1)}(t)$. Ahora $F^{*k}(t) = P(S_k \leqslant t)$ tiende a 0 cuando k tiende a ∞, entonces

$$U(t) \leqslant (r(1 - F^{*r}(t)) \frac{\sum_{k=0}^{\infty} F^{*rk}(t)}{1 - F^{*r}(t)} \leqslant \frac{r}{1 - F^{*r}(t)} < \infty$$

Proponemos la solución $Z(t) = U * z(t)$ y revisamos que:

$$F * Z = F * U * z = F * \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n} * z = F * z + F^{*2} * z + \cdots = U * z - z$$

es decir, Z es una solución acotada sobre intervalos acotados por que:

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in [0,t]} |U * z(x)| &= \sup_{x \in [0,t]} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t z(x-y) dF^{*n}(y) \right| \\
&\leqslant \sup_{x \in [0,t]} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t k dF^{*n}(y) \right| \\
&= k \cdot U(t) < \infty
\end{aligned}$$

donde $k = \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |z(s)|$. Para verificar la unicidad, tomemos V otra solución acotada sobre intervalos acotados. Entonces $V = z + F * V$ y $Z - V = z + F * (Z - V)$ de donde $\forall \ n$ ocurre:

$$Z - V = z + F^{*n} * (Z - V)$$

$Z - V$ está acotada sobre intervalos acotados, entonces $Z - V$ esta acotada en $[0, t]$, luego:

$$\begin{aligned}
|(Z - V)(t)| &= \left| \int_0^t (Z - V)(t - x) dF^{*n}(x) \right| \\
&\leqslant \int_0^t |Z - V|(t - x) dF^{*n}(x) \\
&\leqslant \int_0^t k dF^{*n}(x)
\end{aligned}$$

tiende a 0 cuando n tiende a 0.

■

Sea $N(t)$ el número de visitas de la secuencia $\{Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n \mid n \geqslant 0\}$ al intervalo $[0, t]$; entonces:

$$N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_{[0,t]}(Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n)$$

de donde,

$$\begin{aligned}
E(N(t)) &= E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_{[0,t]}(Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\mathcal{X}_{[0,t]}(Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(Z_0 + T_n \leqslant t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_0 * F^{*(n-1)}\right)(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(F_0 * F^{*(n)}\right)(t) \\
&= U_0(t).
\end{aligned}$$

Por lo tanto la función $U_0(t)$ es igual al valor esperado de $N(t)$.
Por otro lado,

$$\begin{aligned}
U_0(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(F_0 * F^{*(n)}\right)(t) \\
&= F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_0 * F^{*(n)}\right)(t) \\
&= F_0 + F * \sum_{n=0}^{\infty} \left(F_0 * F^{*(n)}\right)(t) \\
&= F_0 + F * U_0(t).
\end{aligned}$$

De donde $U_0(t)$ cumple la Ecuación de Renovación 2.2.1. Por tanto:

$$U_0(t) = F_0(t) + \int_0^t U_0(t-y)F(dy)$$

Es la única solución, la cual es acotada en conjuntos acotados. En particular si tomamos

$$F_0 = \frac{1}{E(Z_1)} \int_0^t [1 - F(y)]dy$$

podemos ver que $U_0(t) = \frac{t}{E(Z_1)}$ es la solución.

Puesto que

$$\begin{aligned} F_0 + \int_0^t U_0(t-y)F(dy) &= \tfrac{1}{E(Z_1)}\int_0^t [1-F(y)]dy + \int_0^t \tfrac{t-y}{E(Z_1)}F(dy) \\ &= \tfrac{1}{E(Z_1)}\int_0^t dy + \tfrac{1}{E(Z_1)}\int_0^t (-F(y) + tf(y) - yf(y))\,dy \\ &= \tfrac{t}{E(Z_1)} + \tfrac{1}{E(Z_1)}\int_0^t (-F(y) + (t-y)f(y))\,dy \end{aligned}$$

Sea $g(y) = (t-y)\cdot F(y)$ entonces $g'(y) = (t-y)\cdot f(y) - F(y)$ y así

$$\begin{aligned} \tfrac{t}{E(Z_1)} + \tfrac{1}{E(Z_1)}\int_0^t (-F(y) + f(t-y)f(y))\,dy &= \tfrac{t}{E(Z_1)} + \tfrac{1}{E(Z_1)}\int_0^t \tfrac{dg(y)}{dy}dy \\ &= \tfrac{t}{E(Z_1)} + \tfrac{1}{E(Z_1)}[g(t) - g(0)] \\ &= \tfrac{t}{E(Z_1)} \\ &= U_0 \end{aligned}$$

Debido a que $g(0) = (t-0)\cdot F(0) = t\cdot F(0) = 0$ dado que $F(0) = 0$ entonces $g(t) = (t-t)\cdot F(t) = 0$. Por lo tanto si $F_0 = \frac{1}{E(Z_1)}\int_0^t [1-F(y)]dy$ entonces $U_0(t) = \frac{t}{E(Z_1)}$ es la única solución a la ecuación de Renovación $U_0(t) = F_0(t) + F * U_0(t)$.

Así

$$U_0(\beta+t) - U_0(\alpha+t) = \frac{\beta+t}{E(Z_1)} - \frac{\alpha+t}{E(Z_1)} = \frac{\beta-\alpha}{E(Z_1)} \quad \textit{con} \quad 0 < \alpha < \beta$$

es decir, el valor esperado del número de visitas de $\{Z_0 + \cdots + Z_n\}$ depende sólo de la longitud del intervalo y no de su localización. En este sentido el proceso de Renovación $(Z_0 + \cdots + Z_n; n \geqslant 0)$ es llamado *Estacionario*.

Comenzando con un punto Z_0, que ya no es un punto constante sino variable aleatoria tenemos, análogamente,

Lema 2.2.2. *Si Z_0 tiene función de distribución F_0 tal que*

$$F_0 = \frac{1}{E(Z_1)}\int_0^t [1-F(y)]dy$$

entonces

$$E(\mu(Z_0, A)) = \frac{1}{E(Z_1)}\int_0^\infty \nu(s,A)ds$$

Demostración. Sabemos que por el Lema 2.1.9

$$E(\mu(Z_0, A)) = \frac{1}{E(Z_1)}\int_0^\infty \nu(s,A)U_0(ds)$$

y por el hecho de que $U_0(t) = \frac{t}{E(Z_1)}$ tenemos que

$$E(\mu(Z_0, A)) = \int_0^{\infty} \nu(s, A)\frac{ds}{E(Z_1)} = \frac{1}{E(Z_1)}\int_0^{\infty} \nu(s, A)ds$$

■

Lema 2.2.3.

$$E(\mu(Z_0, A)) = \frac{1}{E(Z_1)} E\left(\sum_{n=0}^{N-1} m[(A - S_n) \cap \mathbb{R}^+]\right)$$

Demostración. Sabemos que

$$\nu(a, A) = E\left(\sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(a + S_n)\right)$$

y por el Lema 2.2.2

$$\begin{aligned}
E(\mu(Z_0, A)) &= \tfrac{1}{E(Z_1)} \textstyle\int_0^{\infty} \nu(s, A)ds \\
&= \tfrac{1}{E(Z_1)} \textstyle\int_0^{\infty} E\left(\sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{X}_A(s + S_n)\right) ds \\
&= \tfrac{1}{E(Z_1)} \textstyle\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} E(\mathcal{X}_A(s + S_n))ds \\
&= \tfrac{1}{E(Z_1)} \textstyle\sum_{n=0}^{N-1} \int_0^{\infty} E(\mathcal{X}_A(s + S_n))ds \\
&= \tfrac{1}{E(Z_1)} E\left(\textstyle\sum_{n=0}^{N-1} \int_0^{\infty} \mathcal{X}_A(s + S_n)ds\right)
\end{aligned}$$

puesto que los argumentos son todos positivos, por el Teorema de Fubini[11] se cumple lo anterior. Pero

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(s + S_n) = \begin{cases} 1 & si \quad s + S_n \in A \\ 0 & si \quad s + S_n \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1 & si \quad s \in A - S_n \\ 0 & si \quad s \notin A - S_n \end{cases}$$

entonces $\int_0^{\infty} \mathcal{X}_A(s+S_n)ds = m\left[(A - S_n) \cap \mathbb{R}^+\right]$ donde $m(\cdot)$ es la *medida de Lebesgue*[12]. Por tanto

$$E(\nu(Z_0, A)) = \frac{1}{E(Z_1)} E\left(\sum_{n=0}^{N-1} m\left[(A - S_n) \cap \mathbb{R}^+\right]\right)$$

■

[11]Véase el Teorema 3.0.15
[12]Véase definición 3.0.16

Lema 2.2.4. *Si* $A \subset \mathbb{R}^+$, *entonces*

$$E(\mu(Z_0, A)) = \frac{m(A)}{\mu}$$

Demostración.
Como $n < N$ tenemos que $S_n \leqslant 0$ y dado $A \subset \mathbb{R}^+$ tenemos que $A - S_n \subset \mathbb{R}^+$; por tanto $m\left[(A - S_n) \cap \mathbb{R}^+\right] = m(A - S_n)$.
Por el Lema 2.2.3

$$\begin{aligned} E(\mu(Z_0, A)) &= \tfrac{1}{E(Z_1)} E\left(\sum_{n=0}^{N-1} m\left[(A - S_n) \cap \mathbb{R}^+\right]\right) \\ &= \tfrac{1}{E(Z_1)} E\left(\sum_{n=0}^{N-1} m(A - S_n)\right) \end{aligned}$$

Luego, por la Identidad de Wald[13] tenemos que

$$E(\mu(Z_0, A)) = \frac{1}{E(Z_1)} E(N) E(m(A - S_n))$$

y dado que la medida de Lebesgue es invariante bajo traslaciones tenemos que

$$E(m(A - S_n)) = m(A).$$

de donde

$$E(\mu(Z_0, A)) = E(N) \cdot \frac{m(A)}{E(Z_1)}$$

pero sabemos que $E(X_1) = \mu$ y además $Z_1 = S_N$, por tanto

$$E(\mu(Z_0, A)) = E(N) \cdot \frac{m(A)}{E(S_N)}$$

Y por la Identidad de Wald[14] podemos ver que:

$$E(\mu(Z_0, A)) = E(N) \cdot \frac{m(A)}{E(N)E(X_1)} = \frac{m(A)}{E(X_1)} = \frac{m(A)}{\mu}$$

■

§ 2.3 Acoplamiento

Sea $\xi_n = a + S_n$ y $\eta_n = Z_0 + \tilde{S}_n$ con $n = 0, 1, \ldots$, donde $\tilde{S}_k = \tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_k$, con $\{X_i\}$ y $\{\tilde{X}_i\}$ i. e i.d's e independientes de Z_0 como las definimos antes.

[13] Véase 3.0.7
[14] Véase 3.0.7

Sabemos que por el Lema 2.2.4, que para t suficientemente grande

$$
\begin{aligned}
E(\tilde{\mu}(Z_0, A+t)) &\equiv E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_{A+t}(\eta_n)\right) \\
&= \tfrac{m(A+t)}{\mu} \\
&= \tfrac{m(A)}{\mu}
\end{aligned}
$$

Queremos mostrar entonces que

Lema 2.3.1.

$$
\mu(a, A+t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_{A+t}(\xi_n) \longrightarrow \begin{cases} \frac{m(A)}{\mu} & \textit{cuando } \ t \textit{ tiende a } \infty \\ 0 & \textit{cuando } \ t \textit{ tiende a } -\infty \end{cases}
$$

donde $m(\cdot)$ denota la medida de Lebesgue, como hasta ahora.

Demostración.

Ya que $E(|X_i|) < \infty$, dado $\varepsilon > 0$, por Recurrencia[15], aplicada a la secuencia $\{X_i - \tilde{X}_i\}$:

$$
M \equiv inf\{n : |\xi_n - \eta_n| < \varepsilon\} < \infty \quad c.p.1
$$

Ahora bien, sea

$$
\tilde{\xi}_n = \begin{cases} \xi_n & para \ \ n \leqslant M \\ \xi_{M} - \eta_{M} + \eta_n & para \ \ n > M \end{cases}
$$

De donde $\{\tilde{\xi}_n\} \stackrel{D}{=} \{\xi_n\}$ puesto que

para $n \leqslant M$ $\tilde{\xi}_n = \xi_n$ de donde $\tilde{\xi}_n \sim \xi_n$ para $n \leqslant M$

para $n > M$ $\tilde{\xi}_n = \xi_{M} - \eta_{M} + \eta_n$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\xi}_n &= a + S_{M} - Z_0 - \tilde{S}_{M} + Z_0 + \tilde{S}_n \\
&= a + S_{M} + \tilde{X}_{M+1} + \tilde{X}_{M+2} + \cdots + \tilde{X}_n \quad con \ \ n > M
\end{aligned}
$$

y dado que $\{X_i\} \sim \{\tilde{X}_i\}$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\tilde{\xi}_n &\stackrel{d}{=} a + S_{M} + X_{M+1} + X_{M+2} + \cdots + X_n \quad con \ \ n > M \\
&\stackrel{d}{=} a + S_n \\
&= \xi_n
\end{aligned}
$$

---

[15]Véase Teorema 2.1.3

Luego

$$\begin{aligned}
\mu(a,A) &= E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{X}_A(\xi_n)\right)\\
&\overset{d}{=} E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{X}_A(\tilde{\xi}_n)\right)\\
&= E\left(\sum_{n=0}^{M}\mathcal{X}_A(\tilde{\xi}_n)\right)+E\left(\sum_{n=M+1}^{\infty}\mathcal{X}_A(\tilde{\xi}_n)\right)\\
&= E\left(\sum_{n=0}^{M}\mathcal{X}_A(\tilde{\xi}_n)\right)+E\left(\sum_{n=M+1}^{\infty}\mathcal{X}_A(\Delta+\eta_n)\right)
\end{aligned}$$

donde $\Delta=\xi_{_M}-\eta_{_M}$ y además $|\Delta|<\varepsilon$. Y puesto que

$$E(\tilde{\mu}(Z_0,A))=E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{X}_A(\eta_n)\right)$$

y además

$$E\left(\sum_{n=M}^{\infty}\mathcal{X}_A(\Delta+\eta_n)\right)=E\left(\sum_{n=M}^{\infty}\mathcal{X}_{A-\Delta}(\eta_n)\right)$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
&|\mu(a,A)-E(\tilde{\mu}(Z_0,A))|\\
=\;&\left|E\left(\sum_{n=0}^{M}\mathcal{X}_A(\tilde{\xi}_n)\right)+E\left(\sum_{n=M+1}^{\infty}\mathcal{X}_{A-\Delta}(\eta_n)\right)-E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{X}_A(\eta_n)\right)\right|\\
=\;&\left|E\left(\sum_{n=0}^{M}\mathcal{X}_A(\tilde{\xi}_n)\right)+E\left(\sum_{n=M+1}^{\infty}\mathcal{X}_{A-\Delta}(\eta_n)\right)+E\left(\sum_{n=0}^{M}\mathcal{X}_{A-\Delta}(\eta_n)\right)\right.\\
&\left.-E\left(\sum_{n=0}^{M}\mathcal{X}_{A-\Delta}(\eta_n)\right)-E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{X}_A(\eta_n)\right)\right|\\
\leqslant\;&\left|E\left(\sum_{n=0}^{M}\mathcal{X}_A(\tilde{\xi}_n)\right)-E\left(\sum_{n=0}^{M}\mathcal{X}_{A-\Delta}(\eta_n)\right)\right|\\
&+\left|E\left(\sum_{n=0}^{M}\mathcal{X}_{A-\Delta}(\eta_n)\right)+E\left(\sum_{n=M+1}^{\infty}\mathcal{X}_{A-\Delta}(\eta_n)\right)-E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{X}_A(\eta_n)\right)\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \left|E\left(\sum_{n=0}^{M}\mathcal{X}_A(\tilde{\xi}_n)\right)-E\left(\sum_{n=0}^{M}\mathcal{X}_{A-\Delta}(\eta_n)\right)\right| \\
&\quad +\left|E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{X}_{A-\Delta}(\eta_n)\right)-E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{X}_A(\eta_n)\right)\right| \\
&= \left|E\left(\sum_{n=0}^{M}\mathcal{X}_A(\tilde{\xi}_n)\right)-E\left(\sum_{n=0}^{M}\mathcal{X}_{A-\Delta}(\eta_n)\right)\right| \\
&\quad +|E(\tilde{\mu}(Z_0,A-\Delta))-E(\tilde{\mu}(Z_0,A))|
\end{aligned}$$

Ahora tomamos $A=(\alpha,\beta)$ con $-\infty<a<b<\infty$ y puesto que $|\Delta|<\varepsilon$ tenemos que $-\varepsilon<\Delta<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon>-\Delta>-\varepsilon$, luego

$$a+\varepsilon>a-\Delta>a-\varepsilon$$

y

$$b+\varepsilon>b-\Delta>b-\varepsilon$$

Por tanto

$$A^{-}\equiv[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\subset A-\Delta\subset[a-\varepsilon,b+\varepsilon]\equiv A^{+}$$

Luego

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{X}_{A^-}(\eta_n)\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{X}_{A-\Delta}(\eta_n)\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{X}_{A^+}(\eta_n)$$

Así

$$\begin{aligned}
\left|E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{X}_{A-\Delta}(\eta_n)\right)-E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{X}_A(\eta_n)\right)\right| &= |E(\mu(\eta_n,A-\Delta))-E(\mu(\eta_n,A))| \\
&\leqslant |E(\mu(\eta_n,A^{+}))-E(\mu(\eta_n,A))| \\
&= \left|\tfrac{m(A^{+})}{\mu}-\tfrac{m(A)}{\mu}\right| \quad \text{Por el Lema 2.2.4} \\
&= \left|2\tfrac{m(\Delta)}{\mu}\right| \\
&\leqslant \tfrac{2\varepsilon}{\mu}
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$
\begin{aligned}
& \left| E\left(\sum_{n=0}^{M} \mathcal{X}_A(\tilde{\xi}_n)\right) - E\left(\sum_{n=0}^{M} \mathcal{X}_{A-\Delta}(\eta_n)\right)\right| \\
= & \left| E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_A(\tilde{\xi}_n)\right) - E\left(\sum_{n=M+1}^{\infty} \mathcal{X}_A(\tilde{\xi}_n)\right) - E\left(\sum_{n=0}^{M} \mathcal{X}_{A-\Delta}(\eta_n)\right)\right| \\
= & \left| E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_A(\tilde{\xi}_n)\right) - E\left(\sum_{n=M+1}^{\infty} \mathcal{X}_A(\Delta+\eta_n)\right) - E\left(\sum_{n=0}^{M} \mathcal{X}_{A-\Delta}(\eta_n)\right)\right| \\
= & \left| E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_A(\tilde{\xi}_n)\right) - E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_{A-\Delta}(\eta_n)\right)\right| \\
= & \left| E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_A(\tilde{\xi}_n)\right) - E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_{A}(\xi_n)\right)\right| \\
\stackrel{d}{=} & \left| E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_A(\tilde{\xi}_n)\right) - E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_{A}(\tilde{\xi}_n)\right)\right| = 0
\end{aligned}
$$

Pues notemos que:

$$
\begin{aligned}
& \Delta + \eta_n \\
= & (\xi_{M+1} - \eta_{M+1}) + (Z_0 + S_n) \\
= & [(a + S_{M+1}) - (Z_0 + \tilde{S}_{M+1})] + (Z_0 + \tilde{S}_n) \\
= & a + S_{M+1} - \tilde{S}_{M+1} + \tilde{S}_n \\
= & a + X_1 + \cdots + X_{M+1} - \tilde{X}_1 - \cdots - \tilde{X}_{M+1} + \tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_{M+1} + \cdots + \tilde{X}_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & \; a + X_1 + \cdots + X_{M+1} + \tilde{X}_M + \cdots + \tilde{X}_n \\
= & \; a + X_1 + \cdots + X_{M+1} + X_M + \cdots + X_n) \\
= & \; a + S_n = \xi_n
\end{aligned}
$$

Y si reemplazamos A por $A + t$ tenemos que

$$\left|\mu(a, A+t) - \frac{m(A)}{\mu}\right| \leqslant \frac{2\varepsilon}{\mu}$$

Esto prueba la primera parte del Lema 2.3.1 (La segunda parte la probaremos por la Proposición 2.1.6).

Tenemos que:

$$\begin{aligned} E(\pi(A+t-a)) &= \mu(a, A+t) \\ &= E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_{A+t}(\xi_n)\right) \\ &= E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_{A+t}(a+S_n)\right) \\ &= E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_{A+t-a}(S_n)\right) \\ &= \mu(a-t, A) \end{aligned}$$

De donde, cuando t tiende a $-\infty$, entonces $(a-t)$ tiende a ∞ y por la Proposición 2.1.6, $E(\pi(A+t-a)) = E(\pi(A+a'))$ tiende a 0 cuando a' tiende a ∞ con $a' = a-t$. Por lo tanto:

$$\mu(a, A+t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_{A+t}(\xi_n) \longrightarrow \begin{cases} \frac{m(A)}{\mu} & \textit{cuando } \ t \textit{ tiende a } \infty \\ 0 & \textit{cuando } \ t \textit{ tiende a } -\infty \end{cases}$$

Esto completa la demostración del Teorema

■

Capítulo 3

Apéndice.

Esta sección es un compendio de los teoremas, lemas, proposiciones y definiciones básicas, necesarios para el desarrollo del presente trabajo; se presentan por orden de aparición.

***Definición 3.0.1**.* (Convergencia casi segura)
Se dice que una sucesión X_n de variables aleatorias converge casi seguramente a la variable aleatoria X si $P\left(\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} X_n = X\right) = 1$. En este caso se escribirá $X_n \xrightarrow{c.s.} Y$ Claramente si una sucesión X_n converge casi seguramente a X, entonces cualquier subsucesión de X_n también converge casi seguramente a X.

***Teorema 3.0.2**.* (Ley Fuerte de los Grandes Números)
***Kolmogorov**. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de v.a's independientes, de varianza finita, esperanza nula y tales que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$, donde σ_n^2 es la varianza de X_n. Entonces:*

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{c.s.} 0$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ y, para cada $\varepsilon > 0$, sea:

$$A_\varepsilon = \left\{\omega \in \Omega : \left|\frac{S_n(\omega)}{n} > \varepsilon\right| \ \ para \ \ una \ \ infinidad \ \ de \ \ valores \ \ de \ \ valores \ \ de \ \ n\right\}$$

Definamos:

$$B_{n,\varepsilon} = \left\{\omega \in \Omega : \left|\frac{S_k(\omega)}{k} > \varepsilon\right| \ \ para \ \ alguna \ \ k \ \in \mathbb{N} \ \ tal \ \ que \ \ 2^{n-1} < k < 2^n\right\}$$

Evidentemente se tiene:

$$A_\epsilon = \{\omega \in \Omega : \omega \in B_{n,\varepsilon} \ \ para \ \ una \ \ infinidad \ \ de \ \ valores \ \ de \ \ n\}$$

Utilizando la desigualdad de Kolmogorov [1] se tiene:

$$\begin{aligned}
P(B_{n,\varepsilon}) &= P\left[\max_{2^{n-1}<k<2^n} |\tfrac{S_k}{k}| > \varepsilon\right] \\
&= P\left[\max_{2^{n-1}<k\leqslant 2^n} |S_k| > k\varepsilon\right] \\
&= P\left[\max_{2^{n-1}<k\leqslant 2^n} |S_k| > \varepsilon 2^{n-1}\right] \\
&\leqslant P\left[\max_{1\leqslant k\leqslant 2^n} |S_k| > \varepsilon 2^{n-1}\right] \\
&\leqslant \tfrac{1}{\varepsilon^2 2^{2n-2}} var(S_{2^n}) = \tfrac{4}{\varepsilon^2 2^{2n}} \sum_{k=1}^{2^n} \sigma_k^2
\end{aligned}$$

Así que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(B_{n,\varepsilon}) \leqslant \frac{4}{\varepsilon^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \sum\limits_{k=1}^{2^n} \sigma_k^2 = \frac{4}{\varepsilon^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 \sum\limits_{\{n\in\mathbb{N}|k\leqslant 2^n\}} \frac{1}{2^{2n}}$. Sea n_0 el más pequeño número natural tal $k \leqslant 2^{n_0}$, entonces

$$\sum_{\{n\in\mathbb{N}|k\leqslant 2^n\}} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{4}{2^{2n_0}} \leqslant \frac{4}{k^2}$$

Así que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 \sum_{\{n\in\mathbb{N}|k\leqslant 2^n\}} \frac{1}{2^{2n}} \leqslant 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{k^2} < \infty.$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_{n,\varepsilon}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 \cdot \sum_{\{n\in\mathbb{N}|k\leqslant 2^n\}} \frac{1}{2^{2n}} < \infty.$$

Luego $P(A_\varepsilon) = 0$, por Lema de Borel-Cantelli [2]; por otro lado sabemos que si X_n una sucesión de $v.a's$ entonces $X_n \xrightarrow{c.s.} 0$ si y sólo si

$$P\left(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega)| > \varepsilon \; para\ una\ infinidad\ de\ valores\ de\ n\}\right) = 0,$$

por lo tanto, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s.} 0$.

■

[1] Véase la desigualdad 3.0.17

[2] Véase el Lema 3.0.18

Proposición 3.0.3. *(Desigualdad de Markov)*
Sea X es una variable aleatoria que toma sólo valores no negativos, entonces para cualquier valor $a > 0$

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty xF(dx) \\ &= \int_0^a xF(dx) + \int_a^\infty xF(dx) \\ &\geqslant \int_a^\infty xF(dx) \\ &\geqslant \int_a^\infty aF(dx) \\ &= aP(X \geqslant a) \end{aligned}$$

Por tanto $E(X) \geqslant aP(X \geqslant a)$ ■

Lema 3.0.4. *(Existencia de funciones generadoras de momentos)*
Una variable aleatoria Z tiene una función generadora de momentos si y sólo si para algún $k > 0, c > 0$ y para todo $x > 0$ se tiene que

$$P(Z > x) \leqslant ke^{-cx}$$

Demostración. Podemos verificar esto notando que si la función generadora de momentos existe en $(0, \theta_0)$, entonces para $\theta < \theta_0$ tenemos

$$P(Z > x) = P(e^{\theta Z} > e^{\theta x}) \leqslant E(e^{\theta Z})e^{-\theta x}$$

por la desigualdad de Markov [3]. Para $k = E(e^{\theta Z})$ entonces $P(Z > x) \leqslant ke^{-\theta x}$.
Para el regreso, supongamos que la distribución Z está acotada exponencialmente, *i.e.*

$$P(Z < x) \leqslant ke^{-cx}$$

Entonces para $\theta < c$

$$E(e^{\theta Z}) < \infty \Leftrightarrow E(e^{\theta Z} - 1) < \infty$$

[3]Véase 3.0.3

Sin embargo,

$$\begin{aligned} E(e^{\theta Z}-1) &= E\left(\int_0^\infty \theta e^{\theta u} 1_{[u\leqslant Z]} du\right) \\ &\overset{Fubini}{=} \int_0^\infty \theta e^{\theta u} P(u\leqslant Z) du \\ &\leqslant \int_0^\infty \theta e^{\theta u} k e^{-cu} du \\ &= \theta k \int_0^\infty e^{\theta u} e^{-cu} du \\ &= \theta k \int_0^\infty e^{(\theta-c)u} du < \infty. \end{aligned}$$

Lo anterior es válido dado que todos los argumentos son positivos, así podemos aplicar el Lema de Fubini[4] ■

Teorema 3.0.5. (Teorema del Límite Central)
Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas de varianza finita. Entonces:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

donde μ y σ^2 son la media y la varianza común respectivamente de $X_1, X_2, \cdots$

Demostración. Supondremos que la función generadora de momentos de X_i existe en una vecindad de 0. Sea $Z_n = \frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ y φ la función generadora de momentos común de $X_1, X_2, \ldots$ entonces:

$$M_{Z_n}(t)=E(e^{tZ_n})=E\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(X_1+\cdots+X_n-n\mu)}\right)=\left[\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n e^{\left(-\frac{tn\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)}$$

Así que

$$\ln\left(M_{Z_n}(t)\right)=n\ln\left[\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]-\frac{tn\mu}{\sigma\sqrt{n}}=n\left\{\ln\left[\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]-\frac{t\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right\}$$

[4]Véase el Lema 3.0.15

Utilizando la regla de L'Höpital se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty} \ln\left(M_{Z_n}(t)\right) &= \tfrac{t}{2\sigma}\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt{n}\left\{\tfrac{1}{\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)}\varphi\prime\left(\tfrac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-\mu\right\}\\
&= 2\left(\tfrac{t}{2\sigma}\right)^2\lim_{n\longrightarrow\infty}\left\{\tfrac{1}{\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)}\varphi\prime\prime\left(\tfrac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-\tfrac{1}{\varphi^2\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)}\left[\varphi\prime\left(\tfrac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^2\right\}\\
&= 2\left(\tfrac{t}{2\sigma}\right)^2\{\varphi\prime\prime(0)-[\varphi\prime(0)]^2\}\\
&= 2\left(\tfrac{t}{2\sigma}\right)^2\sigma^2=\tfrac{1}{2}t^2
\end{aligned}$$

De lo cual concluimos que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} M_{Z_n}(t)=e^{\frac{1}{2}t^2}$$

Así que Z_n converge en distribución a una variable aleatoria con función generadora de momentos dada por $M(t)=e^{\frac{1}{2}t^2}$, es decir, una variable aleatoria X con distribución normal estándar. Lo que significa que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

■

Lema 3.0.6*. (Lema de Fatou)*

1) Si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces

$$\int \underline{\lim} f_k \leqslant \underline{\lim}\int f_k$$

2) Si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones medibles no positivas, entonces

$$\int \overline{\lim} f_k \geqslant \overline{\lim}\int f_k$$

Demostración.

1) Sea $g_m=\inf\{f_m,f_{m+1},\ldots\}$, entonces $g_m\leqslant f_n$ cuando $m\leqslant n$; por consiguiente $\int g_m d\mu\leqslant\int f_n d\mu$ para $m\leqslant n$. Así que

$$\int g_m d\mu\leqslant \liminf\int f_m d\mu.$$

Puesto que la sucesión g_n es creciente y converge a $\liminf f_n$, el Teorema de la Convergencia Monótona 3.0.8 implica que

$$\int(\liminf f_n)d\mu=\lim\int g_m d\mu\leqslant\liminf\int f_n d\mu$$

2) Sea $g_m = \sup\{f_m, f_{m+1}, \ldots\}$, entonces $g_m \geqslant f_n$ cuando $m \geqslant n$ por consiguiente $\int g_m d\mu \geqslant \int f_n d\mu$ para $m \geqslant n$. Así que

$$\int g_m d\mu \geqslant \limsup \int f_m d\mu$$

Puesto que la sucesión g_n es decreciente y converge a $\limsup f_n$, el Teorema de la Convergencia Monótona 3.0.8 implica que

$$\int (\limsup f_n) d\mu = \lim \int g_m d\mu \geqslant \limsup \int f_n d\mu$$

■

***Proposición 3.0.7**. (Identidad de Wald)*
Supongamos $\{X_n : n \geqslant 1\}$ *i. e i.d.'s, con* $0 < E(X_1) < \infty$ *y* $N = \inf\{n : S_n > 0\}$ *entonces* $E(N) < \infty$ *y*

$$E(S_N) = E\left(\sum_{n=1}^{N} X_n\right) = E(N)E(X_1)$$

Demostración. Sea

$$\mathcal{X}_n(N) = \begin{cases} 1 & si \quad N \leqslant n \\ \\ 0 & si \quad N > n. \end{cases}$$

De donde $\sum\limits_{n=1}^{N} X_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n \;\; \mathcal{X}_n(N)$
Puesto que $[i \leqslant N] = [N < i]^c = [N \leqslant i-1]^c$, depende sólo de $X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}$ se tiene que X_i y $\mathcal{X}_i(N)$ son independientes. Por tanto:

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} E(X_i)E(\mathcal{X}_i(N)) \\ &= E(X_1)\sum_{i=1}^{\infty} E(\mathcal{X}_i(N)) \\ &= E(X_1)\sum_{i=1}^{\infty} P\left(N \leqslant i\right) \\ &= E(X_1)\sum_{i=0}^{\infty} P\left(N > i\right) \\ &= E(X_1)\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty} P\left(N = j\right) \\ &= E(X_1)\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{j+1} P\left(N = j\right) \\ &= E(X_1)\sum_{i=1}^{\infty} jP\left(N = j\right) \\ &= E(X_1)E(N) \end{aligned}$$

■

Teorema 3.0.8. (Convergencia Monótona)
Sea f_n una sucesión monótona creciente, convergente a f, entonces:

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

Demostración. Puesto que $f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant f$ entonces

$$\int f_n d\mu \leqslant \int f_{n+1} d\mu \leqslant \int f d\mu$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, tenemos

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} \int f_n d\mu \leqslant \int f d\mu$$

Por otro lado, sea $\alpha \in (0,1)$ y φ una función medible que satisface que $0 \leqslant \varphi \leqslant f$. Definamos, para cada n, a:

$$A_n = \{x \in X | f_n(x) \geqslant \alpha\varphi(x)\}$$

Así que $A_n \subseteq X$, $A_n \subseteq A_{n+1}$ y $X = \bigcup A_n$, de donde

$$\int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leqslant \int_{A_n} f_n d\mu \leqslant \int f d\mu$$

Puesto que A_n es monótona creciente y su unión es X:

$$\int \varphi d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{A_n} \varphi d\mu$$

Luego

$$\alpha \int \varphi d\mu \leqslant \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{A_n} f_n d\mu \leqslant \lim_{n \longrightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

Como esto se cumple para todo α con $0 < \alpha < 1$, entonces $\int \varphi d\mu \leqslant \lim_{n \longrightarrow \infty} \int f_n d\mu$. Como φ es una función arbitraria que satisface que $0 \leqslant \varphi \leqslant f$, concluimos que:

$$\int f_n d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi d\mu \leqslant \lim_{n \longrightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

Por lo tanto

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

■

Teorema 3.0.9. Teorema de Convergencia Dominada

Sea f_n una sucesión de funciones integrables la cual converge casi en todas partes a *una función real f medible. Si existe una función integrable g tal que $|f_n| \leqslant g$ para todo n, entonces f es integrable y*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

Demostración. Redefiniendo las funciones f_n, f sobre un conjunto de medida 0 podemos asumir que la convergencia toma lugar en todo X entonces f es integrable. Como $g + f_n \geqslant 0$, podemos aplicar el Lema de Fatou 3.0.6 para obtener

$$\begin{aligned}
\textstyle\int g d\mu + \int f d\mu &= \textstyle\int (g+f) d\mu \leqslant \liminf \int (g+f_n) d\mu \\
&= \liminf \left(\textstyle\int g d\mu + \int f_n d\mu\right) \\
&= \textstyle\int g d\mu + \liminf \left(\int f_n d\mu\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int f d\mu \leqslant \liminf \left(\int f_n d\mu\right)$$

Puesto que $g - f_n \geqslant 0$, la otra parte del Lema de Fatou 3.0.6

$$\begin{aligned}
\textstyle\int g d\mu - \int f d\mu &= \textstyle\int (g-f) d\mu \leqslant \limsup \int (g-f_n) d\mu \\
&= \limsup \left(\textstyle\int g d\mu - \int f_n d\mu\right) \\
&= \textstyle\int g d\mu + \limsup \left(\int f_n d\mu\right)
\end{aligned}$$

de donde

$$\int f d\mu \geqslant \limsup \left(\int f_n d\mu\right)$$

entonces

$$\limsup \left(\int f_n d\mu\right) \leqslant \int f d\mu \leqslant \liminf \left(\int f_n d\mu\right)$$

Por lo tanto

$$\int f d\mu = \lim \left(\int f_n d\mu\right)$$

■

Definición 3.0.10. (Conjunto de Borel) *Sea B un conjunto de números reales. Una σ-álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos (α, β) en $\mathbb{R}$. La σ-álgebra de Borel es también generada por todos los intervalos cerrados $[\alpha, \beta]$ en $\mathbb{R}$. A los conjuntos de B se les llama Conjuntos de Borel. A una medida definida en la σ-álgebra de todos los conjuntos de Borel se le conoce como medida de Borel*

A una media definida en la σ-álgebra de todos los conjuntos de Borel se le conoce como medida de Borel.

Definición 3.0.11. (Convergencia en distribución)
Se dice que una sucesión X_n de variables aleatorias converge en distribucion *a la variable aleatoria X si $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} F_{Xn}(x) = F_X(x)$ para cualquier numero real x en el cual F_X es continua. En este caso escribiremos $X_n \xrightarrow{D} X$.*

Obviamente si una sucesión X_n converge en distribución a X, entonces cualquier subsucesión de X_n también converge en distribución a X

Proposición 3.0.12. *Sea X_n una sucesión de variables aleatorias tal que $X_n \xrightarrow{D} X$ y $X_n \xrightarrow{D} Y$ entonces $F_X = F_Y$*

Demostración. De la definición 3.0.11 de convergencia en distribución se sigue inmediatamente que $F_X(z) = F_Y(z)$ para cualquier número real z tal que F_X y F_Y son continuas en z. Pero como el conjunto de discontinuidades de F_X y de F_Y es a lo más numerable, entonces el conjunto de números reales z para los cuales tanto F_X como F_Y son continuas en z es denso en $\mathbb{R}$. El resultado se sigue entonces de la continuidad por la derecha de F_X y F_Y. ■

Definición 3.0.13. (Integrabilidad Uniforme)
Sean X_t una familia de v.a′s, con $t \in T$, donde T es un conjunto arbitrario de índices, es llamada uniformemente integrable *si y sólo si*

$$\lim_{A\longrightarrow\infty} \int_{|X_t|>A} |X_t| dP = 0 \qquad uniformemente\ \ en\ \ T$$

Teorema 3.0.14. *La familia X_t es uniformemente integrable si y sólo si las siguientes condiciones se satisfacen:*

1) $E(|X_t|)$ es acotada en T
2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $E \in \mathfrak{F}$, donde $\mathfrak{F}$ es la $\sigma-$álgebra generada por el espacio de probabilidad.

$$si P(E) < \delta(\varepsilon) \quad entonces \quad \left\{ \int_E (|X_t|) dP \right\}_{t\in T} \quad es\ \ acotada$$

Teorema 3.0.15. (Fubini)
Sea f una función continua con dominio rectangular $A = [a, b] \times [c, d]$. Entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int\int_R f(x,y)dA$$

Demostración. Primero demostraremos que

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int\int_R f(x,y)dxdy$$

Sea $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$ una partición de $[c,d]$ en n partes iguales. Definamos

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

Entonces

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x,y)dy$$

Usando el Teorema de valor medio para integrales, para cada x fija y cada k, tenemos

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x,y)dy = f(x, y_k(x))(y_{k+1} - y_k),$$

donde el punto $y_k(x)$ pertenece a $[y_k, y_{k+1}]$ que puede depender de x, k y m. Hemos demostrado hasta ahora que

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x, y_k(x))(y_{k+1} - y_k).$$

Por definición de integral

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j)(x_{j+1} - x_j)$$

donde $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ una partición de $[a,b]$ en n partes iguales y p_j es cualquier punto en $[x_j, x_{j+1}]$. Luego, hacemos $c_{jk} = (p_J, y_k(p_j)) \in R_{jk}$, y tenemos que:

$$F(p_j) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{jk})(y_{k+1} - y_k).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx &= \textstyle\int_a^b F(x)dx \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j)(x_{j+1} - x_j) \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{jk})(y_{k+1} - y_k)(x_{j+1} - x_j) \\
&= \textstyle\int\int_R f(x,y)dxdy.
\end{aligned}$$

Así hemos demostrado que

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int\int_R f(x,y)dydx$$

Análogamente para

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int\int_R f(x,y)dxdy$$

■

Definición 3.0.16. Medida de Lebesgue
La medida de Lebesgue *es la forma estándar de asignar una longitud, área, o volumen a los subconjuntos del espacio euclideano. A los conjuntos que se les puede asignar un tamaño se denominan* Lebesgue-medibles.

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ tiene las siguientes propiedades:

1) $m(A) \geqslant 0$ para todo conjunto Lebesgue-medible A
2) Si A es un producto cartesiano de intervalos $l_1 \times l_2 \times ... \times l_n$, es Lebesgue-medible y $m(A) = |l_1| \cdot |l_2| \cdots |l_n|$, donde $|l|$ denota la longitud del intervalo l.
3) Si A es una unión disjunta de conjuntos finitos o contables Lebesgue-medibles entonces A es Lebesgue-medible y $m(A)$ es igual a la suma (o serie infinita) de las medidas de los conjuntos correspondientes.
4) Si A es Lebesgue-medible, A^c también lo es.
5) Si A y B son Lebesgue-medibles, y $A \subseteq B$, entonces $m(A) \leqslant m(B)$
6) Las uniones e intersecciones contables de conjuntos Lebesgue-medibles son asimismo Lebesgue-medibles
7) Si A es un subconjunto abierto o cerrado de $\mathbb{R}^n$ entonces es Lebesgue-medible.
8) Si A es un conjunto Lebesgue-medible con $m(A) = 0$ (o conjunto nulo), todo subconjunto de A es también un conjunto nulo.
9) Si A es Lebesgue-medible y a es un elemento de $\mathbb{R}^n$, la traslación definida por $A + a = \{x + a : x \in A\}$ es también Lebesgue-medible y, más aún, tiene la misma medida que A.

Proposición 3.0.17. Desigualdad de Kolmogorov
Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n v.a's independientes de varianza finita y ε cualquier número real positivo, entonces:

$$P\left[\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |S_j - E(S_j)| > \varepsilon\right] \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} var(S_n),$$

en donde, para $j \in 1, 2, \ldots, n$, $S_j = \sum_{i=1}^{j} X_i$.

Demostración. Primero supongamos que $E(X_k) = 0$ para cualquier $k \in 1, 2, \ldots, n$. Entonces también se tiene $E(S_k) = 0$ para cualquier $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Sea

$$A_k = \left\{\omega \in \Omega : \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k(\omega)| < \varepsilon\right\}$$

y, para $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$A = \left\{\omega \in \Omega : \max_{1 \leqslant j \leqslant k-1} |S_j(\omega)| < \varepsilon, \quad |S_k(\omega)| > \varepsilon\right\}$$

en donde $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 0}|S_j(\omega)| \equiv 0$. Entonces los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente excluyentes y $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Así que:

$$
\begin{aligned}
E(S_n^2 I_A) &= E\left(S_n^2 \sum_{k=1}^{n} \mathcal{X}_{A_k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} E\left(S_n^2 \mathcal{X}_{A_k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} E\left((S_k + S_n - S_k)^2 \mathcal{X}_{A_k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} E\left((S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k) + (S_n - S_k)^2)\mathcal{X}_{A_k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} E(S_k^2 \mathcal{X}_{A_n}) + 2\sum_{k=1}^{n} E(S_k(S_n - S_k)\mathcal{X}_{A_k}) + \sum_{k=1}^{n} E((S_n - S_k)^2 \mathcal{X}_{A_n})
\end{aligned}
$$

Pero como $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes y de esperanza finita, tenemos que $S_k \mathcal{X}_{A_k}$ y $A_n - S_k$ son independientes y tienen esperanza finita, de manera que:

$$E(S_k(S_n - S_k)\mathcal{X}_{A_k}) = E(S_k \mathcal{X}_{A_k})E(S_n - S_k) = 0$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
var(S_n) &= E(S_N^2) \geqslant E(S_n^2 \mathcal{X}_A) = \sum_{k=1}^{n} E(S_k^2 \mathcal{X}_{A_k}) + \sum_{k=1}^{n} E((S_n - S_k)^2 \mathcal{X}_{A_k}) \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n} E(S_k^2 \mathcal{X}_{A_k}) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^2 E(\mathcal{X}_{A_k}) = \varepsilon^2 \sum_{k)1}^{n} P(A_k) = \varepsilon^2 P(A)
\end{aligned}
$$

de donde se sigue el resultado. Para el caso general, sea $Y_k = X_k - E(X_k)$ para $k \in \{1, 2, \ldots \ , n\}$. Entonces las $v.a\prime s$ $Y_1, Y_2 \ldots, Y_n$ son independientes, tienen varianza finita $\sum\limits_{i=1}^{j} Y_i = \sum\limits_{i=1}^{j}(X_i - E(X_i))$ y $E(Y_j) = 0$ para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots n\}$. de manera que si ε es cualquier número real positivo y $S_j = \sum\limits_{i=1}^{j} X_i$ para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots n\}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
P\left[\max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j - E(S_j)| > \varepsilon\right] &= P\left[\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{j} Y_i\right| > \varepsilon\right] \\
&\leqslant \tfrac{1}{\varepsilon^2} var\left(\sum_{i=1}^{j} Y_i\right) = \tfrac{1}{\varepsilon^2} var(S_n)
\end{aligned}
$$

■

Lema 3.0.18. de Borel- Cantelli
Sean $A_1, A_2, \ldots$ una sucesión de conjuntos tales que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, entonces:

$$P\left(\{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \; para \; una \; infinidad \; de \; valores \; de \; n\}\right) = 0$$

Demostración.

Sea $A = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \; para \; una \; infinidad \; de \; valores \; de \; n\}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $B_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$. entonces la sucesión de eventos B_m es monótona decreciente y $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$, así que:

$$P(A) = P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m\right) = \lim_{m \longrightarrow \infty} P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) \leqslant \lim_{m \longrightarrow \infty} \sum_{n=m}^{\infty} P(A_n) = 0$$

■

Conclusiones

El teorema de Blackwell fue primero probado por Blackwell (1948) aunque casos especiales fueron también tratados por Täcklind (1985) y Doob (1948). Muchas pruebas han sido propuestas desde entonces, y la menos complicada prueba analítica llegó ha ser una basada en el Teorema de Choquet. La primera prueba probabilística es presentada por Lindvall (1977). Esta cubre el caso de la media finita y fue basado en una versión de épsilon-acoplamiento de Hewitt-Savage.

Athreya, McDonald y Ney (1978) consideran los dos casos y proponen el establecimiento de la exitosa técnica de acoplamiento aplicando recurrencia de una variable con media cero, a la diferencia de dos variables aleatorias independientes, el problema es que es necesario que esta diferencia no se retícula. Berbe (1979) añade un número geométrico de longitud 0, para hacer esta diferencia no retícula. Thorrison (1987) extiende el trabajo de Lindvall a el caso de media infinita.

Lindvall y Rogue (1996) dan a la prueba un elegante toque introduciendo la idea de suma geométrica.

Una simple consecuencia del Teorema de Blackwell es el también llamado Teorema Fundamental de Renovación, que es también usado para derivar resultados de convergencia en distribución. La primera extensión completa del Teorema de Blackwell al proceso de renovación de Markov es dada por Shirenkov (1984); basado en Análisis de Fourier, donde presenta dos pruebas probabilísticas con acoplamiento como un ingrediente principal.

Tabla de notaciones

$v.a's$	variables aleatorias
$v.a.i's$	variables aleatorias independientes
$i.$ e $i.d's$	independientes e idénticamente distribuidas
AC	variable aleatoria absolutamente continua
d	variable aleatoria discreta
$\hat{F}(\lambda)$	la transformada de Laplace de la distribución F
$E(X)$	esperanza de la variable aleatoria X
$F * g$	convolución de F y g
S_n	el tiempo a la n-ésima renovación
$N(t)$	número de renovaciones en el periodo $[0,t]$
$U(t)$	esperanza de $N(t)$ para un proceso puro
$V(t)$	esperanza de $N(t)$ para un proceso retrasado
$\pi(A)$	número de renovaciones en el conjunto $[0,t]$
$\mu(a,A)$	número esperado de renovaciones dentro del intervalo $A-a$
$\nu(a,A)$	número esperado de visitas al intervalo $A-a$, antes de que S_n sea positivo
$m(\cdot)$	medida de Lebesgue
$c.p.1$	con probabilidad 1
$\mathcal{X}_A(S)$	función característica de S sobre el intervalo A

Bibliografía

[At] K. Athreya, D. McDonald, P. Ney *Coupling and the Renewal Theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 85, No. 20 (Dec., 1978), pp. 809-914.

[Ba] Bartle Robert G., *The elements of integration*, John Wiley & Sons, Inc, New York.

[Br] Breiman L., *Probability*, Addison-Wesley, Reading Mass., 1968

[Ch] Chung Kai Lai, *A course in probability Theory*, Academic Press, Tercera edición, 2001.

[Fe] Feller W., *An Introduction to Problability Theory and Its Applications*, Wiley, New York, 1972.

[Ho] Paul G. Hoel, Sidney C. Port, Charles J. Stone, *Introduction to Stochastic Processes*, Houghton Mifflin Company, Boston, 1972.

[Li] T. Lindvall, *A probabilistic proof of Blackwell's theorem*, Ann. Prob. 5 (1977) pp. 482-485.

[Re] Resnick Sidney I., *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhäuser Boston, Tercera edición 2002.

[Sh] Ross Sheldom M., *Introduction to Probability Models*, Academic Press, 1997. Sixth Edition

Índice alfabético