UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE MODELOS DE POBLACIÓN MEDIANTE
ECUACIONES DISCRETAS Y CONTINUAS

REPORTE DE SEMINARIO

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

RAFAEL ORTIZ AMAYA

TUTOR:
DRA. MARÍA DE LOS ÁNGELES SANDOVAL ROMERO

2009

1.- Datos Del alumno

Autor:	Rafael Ortiz Amaya
Teléfono:	58445482
Universidad:	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad:	Facultad de Ciencias
Carrera:	Matemáticas
Nº de cuenta:	402043513

2.- Datos del Tutor	Dra. María de los Ángeles Sandoval Romero
3.- Datos del sinodal 1	Dr. Ricardo Berlanga Zubiaga
4.- Datos del sinodal 2	Dra. Diana Avella Alaminos
5.- Datos del sinodal 3	Dr. Sergio Hernández Castañeda
6.- Datos del sinodal 4	Dr. José Lino Samaniego Mendoza

Titulo del seminario:	Ecuaciones diferenciales
Titulo del reporte:	Estudio de modelos de población mediante ecuaciones discretas y continuas
Nº de páginas:	52
Año:	2009

A mi Dios
Por situarme en el contexto en que vivo
Por lo que tengo y lo que soy

A mi Abuela, Mamá y Hermana
Por su amor y sacrificio

A mi Tutora
Por su apoyo y paciencia en todo momento

A mis profesores
Por haber cambiaron mi forma de ver la realidad

A Yadira
Por ser el río que hace a mi tierra fértil
Por su aliento y apoyo

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Desde sus orígenes, el hombre ha tenido la necesidad de medir las cosas que lo rodean, ya sea medir longitudes, medir el tiempo, etc. Además de cuantificar sus recursos. Algunos de estos recursos son seres vivos que utiliza para su bienestar.

Todos los seres vivos se reproducen bajo cierto patrón, la pregunta que nos hacemos es: ¿Cuál es ese patrón?

Se ha observado que la cantidad de seres vivos (población) a través del tiempo depende de muchas cosas tales como la especie, los recursos en el ecosistema, el clima, etc. A la variación en la cantidad de individuos de una población a través del tiempo, bajo las variables antes mencionadas, se le conoce como "dinámica de población".

Conforme el tiempo ha transcurrido y conforme las matemáticas se han desarrollado, el hombre las ha utilizado como herramienta para entender dicha dinámica.

Fue a partir del siglo XVII con el surgimiento de las ecuaciones diferenciales cuando se empezaron a hacer modelos más elaborados para calcular la cantidad de individuos en cierto tiempo t. Entendiendo como modelo a una expresión matemática, en particular una función que arroja como resultado la cantidad de individuos en el tiempo t.

Las decisiones a tomar en el presente, muchas veces dependen de la cantidad de individuos con que se cuente en el futuro. Por eso la importancia de conocer la cantidad de individuos a futuro.

En las siguientes páginas trataremos algunos modelos de población tomando al tiempo como variable independiente, vista primero como variable discreta y posteriormente como variable continua.

CAPITULO 1

MODELOS DE POBLACION EN TIEMPO DISCRETO

1.1 CONCEPTOS PRELIMINARES

Entenderemos como población al conjunto de individuos vivos de cierta especie en un tiempo t. Dicha población varía conforme transcurre el tiempo (puede crecer, decrecer o permanecer constante).

Por consiguiente decimos que la población está en función del tiempo. A esta variación de la población se le denomina "Dinámica de población".

Es muy importante el estudio de la dinámica de población de ciertas especies, pues al conocer el comportamiento de la dinámica poblacional podemos inferir la cantidad de individuos en un futuro (corto, mediano o largo plazo), es decir, podemos predecir el comportamiento de la población (número de individuos).

Definición: Entenderemos como *ciclo reproductivo* al intervalo de tiempo que una hembra de cierta especie (puede ser un individuo bisexual o unicelular) tarda en reproducirse, dicho ciclo comprende desde el momento en que la hembra es fertilizada, incluyendo el periodo de gestación y la lactancia (si es que existen), hasta el momento en que la hembra está dispuesta y es capaz de volver a reproducirse.

La duración del ciclo reproductivo depende de la especie que estemos estudiando.

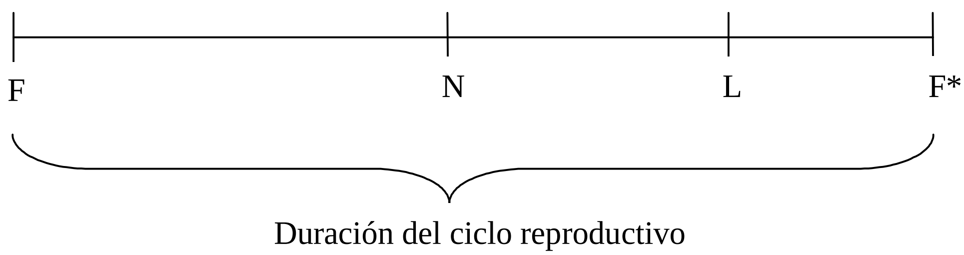
Ejemplos:

a) En organismos unicelulares (bacterias, protozoarios, celulas, etc) el ciclo dura desde unos minutos hasta horas.

b) En mamíferos pequeños (perros, gatos, etc) el ciclo es de semanas.

c) En mamíferos grandes (elefantes, ballenas, humanos, etc) el periodo tarda meses.

Geométricamente el ciclo reproductivo se puede observar de la siguiente forma:



F= La hembra es fertilizada y empieza la gestación
N= Nace el nuevo ser y empieza la lactancia (si es que la hay)
L= Finaliza la lactancia
F^*= La hembra es fertilizada nuevamente

Se tiene que $F<N\leq F^*$, ademas $N\leq L\leq F^*$. Si N=L se entiende que no se desarrolla la lactancia.

Al intervalo de tiempo que va del nacimiento de la nueva cría hasta el momento en que este es capaz de reproducirse será llamado *periodo de juventud*. Cuando finaliza el periodo de juventud se dice que el organismo es maduro (adulto), es decir, ya es capaz de reproducirse.

En resumen, observamos que la población está en función del tiempo, el cual empezará a transcurrir en nuestros modelos a partir de que iniciemos nuestras observaciones con una población inicial. El tiempo se medirá de forma discreta en intervalos iguales a la duración del ciclo reproductivo.

1.2 PRIMER MODELO

Para plantear el primer modelo de población aceptamos lo siguiente.

Definición:
P_n := Población de hembras al final del n-ésimo ciclo reproductivo (variable).
υ := Tasa promedio de nacimientos, $\upsilon > 0$, υ constante.
μ := Tasa promedio de mortalidad, $\mu \geq 0$, μ constante.
P_0 := Población inicial, $P_0 > 0$ (parametro)

Suponemos para este modelo que la población de machos (número de machos) es igual a la población de hembras, además, suponemos que el periodo de juventud de las crías es igual al intervalo tiempo que va desde su nacimiento hasta el final de ese mismo ciclo reproductivo. Al final del periodo de juventud las hembras serán capaces de reproducirse.

proponemos lo siguiente:

$$P_1 = P_0 + \nu P_0 - \mu P_0$$

factorizando P_o

$$P_1 = P_0(1 + \nu - \mu).$$

Sea $(1 + \nu - \mu) = \varphi$, entonces,

$$P_1 = \varphi P_0 \tag{1.1}$$

Suponemos que la población en el n-ésimo ciclo es propocional a la población del ciclo anterior,es decir, φ es constante, entonces tenemos el siguiente modelo:

$$P_n = \varphi P_{n-1} \tag{1.2}$$

Es claro que $\varphi \geq 0$ pues de lo contrario la población sería negativa, lo cual no tiene sentido.

Procedemos a encontrar una solución para este modelo:

Sabemos que

$$P_2 = \varphi P_1 = \varphi((\varphi)P_0)$$

así

$$P_2 = \varphi^2 P_0.$$

Análogo para P_3

$$P_3 = \varphi P_2 = \varphi((\varphi^2)P_0)$$

$$P_3 = \varphi^3 P_0.$$

Aplicando n veces este razonamiento recursivo tenemos la solución siguiente

$$P_n = \varphi^n P_0. \tag{1.3}$$

Analizamos a φ para encontrar la dinámica del modelo en los casos $\varphi < 1, \varphi > 1$ y $\varphi = 1$ cuando n $\to \infty$

Caso 1)

Sea $\varphi < 1$,tomando límites

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}(\varphi^n P_0) = P_0 \lim_{n\to\infty} \varphi^n = P_0(0) = 0$$

tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} P_n = 0.$$

Esto implica que la población tiende a extinguirse conforme el tiempo transcurre, esto se dá cuando

$$\begin{gathered} \varphi < 1 \\ 1 + \nu - \mu < 1 \\ \nu - \mu < 0 \\ \nu < \mu \end{gathered}$$

Concluimos que sí la tasa promedio de nacimientos es menor a la tasa promedio de muertes, la poblacion se extingue conforme n $\to \infty$.

Caso 2)
Sea $\varphi > 1$,análogo al caso anterior

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}(\varphi^n P_0) = P_0 \lim_{n\to\infty} \varphi^n = \infty$$

tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \infty.$$

Por lo tanto, la población tiende a poblar todo el espacio donde habita conforme el tiempo transcurre, esto se dá cuando

$$\begin{gathered}\varphi > 1 \\ 1 + \nu - \mu > 1 \\ \nu - \mu > 0 \\ \nu > \mu\end{gathered}$$

Concluimos que si la tasa promedio de nacimientos es mayor a la tasa promedio de muertes, la población satura su medio ambiente cuando n $\to \infty$.

Caso 3)

Sea $\varphi = 1$,tenemos

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}(\varphi^n P_0) = P_0 \lim_{n\to\infty} \varphi^n = P_0(1^n) = P_0(1) = P_0$$

tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0.$$

Esto nos dice que la población permanece constante (en equilibrio) conforme el tiempo transcurre, esto se da cuando

$$\begin{aligned} \varphi &= 1 \\ 1 + \nu - \mu &= 1 \\ \nu - \mu &= 0 \\ \nu &= \mu \end{aligned}$$

Se concluye que si la tasa promedio de nacimientos es igual a la tasa promedio de muertes, la población está en equilibrio cuando n $\to \infty$.

Este modelo es limitado, dado que no toma en cuenta aspectos tales como la tasa de nacimientos según la edad de las hembras, la tasa de mortalidad de acuerdo a la edad de los individuos, etc.

Algunos de estos aspectos serán utilizados en modelos posteriores.

1.3 SEGUNDO MODELO

Es importante tomar en cuenta que la tasa promedio de nacimientos de las hembras está en función de su edad, es decir, una hembra ya madura tiene más crías que una hembra que acaba de salir de la juventud o que una hembra que está a punto de dejar de reproducirse.

También es importante observar que la tasa promedio de mortalidad de individuos recién nacidos es diferente a la tasa de mortalidad de los adultos.

Parámetros como los anteriores son utilizados en el siguiente modelo.

De ahora en adelante, se entenderá por hembras adultas a las hembras con capacidad de reproducirse y por hembras jóvenes, a las hembras que aún no pueden reproducirse.

Igual que en el primer modelo, suponemos que la población de machos es igual a la población de hembras, y que el periodo de juventud de las crías es igual al intervalo de tiempo que va desde su nacimiento hasta el final de ese mismo ciclo.

Definición:

$P_{j,n}$:= número de hembras jóvenes al final del n-ésimo ciclo.

$P_{a,n}$:= número de hembras adultas al final del n-ésimo ciclo.

k := cantidad promedio de hembras nacidas de una hembra adulta en un ciclo.

α' := tasa promedio de mortalidad de las hembras jóvenes, $0 < \alpha' < 1$.

β' := tasa promedio de mortalidad de las hembras adultas, $0 < \beta' < 1$.

$\alpha = 1 - \alpha'$ = tasa promedio de sobrevivencia de las hembras jóvenes.

$\beta = 1 - \beta'$ = tasa promedio de sobrevivencia de las hembras adultas.

α, β y k son constantes.

Utilizando la información anterior proponemos el siguiente modelo expresado por un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, donde las incógnitas son series de tiempo (funciones evaluadas en tiempo discreto).

$$\begin{gathered} P_{j,n} = kP_{a,n-1} \\ P_{a,n} = \alpha P_{j,n-1} + \beta P_{a,n-1} \end{gathered} \tag{1.4}$$

Expresando el modelo en forma matricial, tenemos:

$$\bar{P}_n = A\bar{P}_{n-1} \tag{1.5}$$

donde

$$\bar{P}_n = \begin{pmatrix} P_{j,n} \\ P_{a,n} \end{pmatrix} \qquad A = \left(\begin{array}{cc} 0 & k \\ \alpha & \beta \end{array} \right).$$

$\bar{P}_0 = \begin{pmatrix} P_{j,0} \\ P_{a,0} \end{pmatrix}$ = población inicial de hembras jovenes y adultas. Procedemos como en (1.1) y (1.2) para llegar a (1.3):

$$\begin{gathered} \bar{P}_1 = A\bar{P}_0 \\ \bar{P}_2 = A\bar{P}_1 = A(A\bar{P}_0) = A^{\,2}\bar{P}_0 \\ . \\ . \\ . \\ \bar{P}_n = A\bar{P}_{n-1} = A(A^{n-1}\bar{P}_0) = A^{\,n}\bar{P}_0 \end{gathered}$$

Así

$$\bar{P}_n = A^{\,n}\bar{P}_0. \tag{1.6}$$

La ecuación (1.6) es como la ecuación (1.3), excepto que hemos sido capaces de distinguir entre las tasas promedio de sobrevivencia de jóvenes y adultas.

Ejemplo 1: Tomemos una especie de aves, donde cada hembra adulta produce tres crias hembras por año (recordar que suponemos que el número de machos es igual al número de hembras, además aquí el ciclo reproductivo dura un año), suponemos $\alpha = 0.4$ y $\beta = 0.6$. Como un ave joven no tiene tantas probabilidades de sobrevivir como una adulta, tenemos que $\alpha < \beta$. Así :

$$A = \left(\begin{array}{cc} 0 & 3 \\ 0.4 & 0.6 \end{array} \right).$$

Asumiremos que inicialmente hay diez hembras adultas (y diez machos) y no hay jóvenes, utilizaremos un programa para calcular hasta el ciclo 20 (el programa utilizado es Scientific Workplace), además redondearemos las cantidades al mayor entero menor o igual de la cantidad obtenida.

$$\bar{P}_1 = \left(\begin{array}{cc} 0 & 3 \\ 0.4 & 0.6 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ 10 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 30 \\ 6 \end{array} \right).$$

Así que $P_{j,1} = 30$, $P_{a,1} = 6$, el total de hembras después de un año es 36 y la razón entre jóvenes y adultas es 5 a 1.

En el segundo año,

$$\bar{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 15.6 \end{pmatrix}, \text{ lo cual se redondea a } \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

En la tabla siguiente hemos evaluado la razon $\dfrac{P_{j,n}}{P_{a,n}}$ y la razón $\dfrac{T_n}{T_{n-1}}$, donde T_n es el total de hembras al final del n-ésimo año.

n	$P_{j,n}$	$P_{a,n}$	T_n	$\frac{P_{j,n}}{P_{a,n}}$	$\frac{T_n}{T_{n-1}}$
0	0	10	10	0	–
1	30	6	36	5.0	3.6
2	18	15	33	1.2	0.91
3	45	16	61	2.81	1.84
4	48	27	65	1.77	1.06
5	81	35	116	2.31	1.78
6	105	53	158	1.98	1.36
7	159	73	232	2.17	1.46
8	219	107	236	2.04	1.01
9	321	151	472	2.12	2.0
10	453	219	672	2.06	1.42
11	657	312	969	2.10	1.44
12	936	450	1386	2.08	1.43
13	1350	644	1944	2.09	1.40
14	1932	926	2858	2.08	1.47
15	2778	1328	4116	2.09	1.44
16	3984	1908	5892	2.08	1.43
17	5724	2702	8426	2.11	1.43
18	8106	3910	12016	2.07	1.42
19	11730	5588	17318	2.08	1.43
20	16764	8044	24808	2.08	1.43

De la tabla podemos conjeturar que la razón $\dfrac{P_{j,n}}{P_{a,n}}$ se está aproximando a la constante 2.08, mientras que la población total se va incrementando en 43% cada año, procederemos a determinar si esto está sucediendo realmente.

Primero, veamos al caso general (1.6). Procedemos a calcular los valores propios de la matriz A pues se puede ver a la matriz como un operador de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$, es decir, $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$|A - I\lambda| = \begin{vmatrix} -\lambda & k \\ \alpha & \beta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \beta\lambda - \alpha k = 0$$

Resolviendo para λ

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha k}}{2}.$$

Por la naturaleza de α, β y k tenemos que $\sqrt{\beta^2 + 4\alpha k} > \beta$, así los valores propios son reales y distintos, uno es positivo y otro es negativo, ademas, $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ donde λ_1 es el valor propio positivo.

A estos valores propios se les asocia un vector propio V_1 y V_2 respectivamente, los cuales forman un conjunto linealmente independiente, puesto que vectores propios asociados a distintos valores propios forman un conjunto linealmente independiente, además en este caso como el dominio de A tiene dimensión dos tenemos que el conjunto de estos dos vectores propios son una base para $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, podemos poner al vector inicial como combinación lineal de los vectores propios, en símbolos matemáticos:

$$\bar{P}_0 = a_1 V_1 + a_2 V_2.$$

Donde a_1 y a_2 son números reales. Luego (1.6) se puede ver como

$$\bar{P}_n = A^{\,n}(a_1 V_1 + a_2 V_2) \tag{1.7}$$

Lo siguiente es demostrar que A define un operador lineal.

P.D. que $A(cX+Y)=cAX+AY$, donde $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ y $c\in\mathbb{R}$.

Sea

$$A(cX+Y)=\begin{pmatrix} 0 & k \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cx_1+y_1 \\ cx_2+y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ckx_2+ky_2 \\ c\alpha x_1+\alpha y_1+c\beta x_2+\beta y_2 \end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} ckx_2 \\ c\alpha x_1+c\beta x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ky_2 \\ \alpha y_1+\beta y_2 \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} kx_2 \\ \alpha x_1+\beta x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ky_2 \\ \alpha y_1+\beta y_2 \end{pmatrix}=$$
$$c\begin{pmatrix} 0 & k \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & k \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=cAX+AY.$$

$\therefore$ la matriz A define un operador lineal.

Como

$$AV_1=\lambda_1 V_1$$

$$A^2V_1=A\ (AV_1)=A(\lambda_1 V_1)=\lambda_1 AV_1=\lambda_1(\lambda_1 V_1)=\lambda_1^2 V_1.$$

Aplicando el metodo anterior n pasos llegamos a

$$A^nV_1=\lambda_1^n V_1,\ A^nV_2=\lambda_2^n V_2$$

sustituyendo esto en (1.7) y utilizando la linealidad de A obtenemos

$$\bar{P}_n=a_1\lambda_1^n V_1+a_2\lambda_2^n V_2 \tag{1.8}$$

Podemos escribir (1.8) como

$$\bar{P}_n = \lambda_1^n (a_1 V_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n a_2 V_2). \tag{1.9}$$

Como $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$, se tiene que $\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n$ se hace muy pequeño conforme n se hace grande. Así para n grande,

$$\bar{P}_n \approx a_1 \lambda_1^n V_1. \tag{1.10}$$

Esto significa que conforme el tiempo transcurre la distribución de edades se estabiliza y es proporcional a V_1. Cada grupo de edad cambiará por un factor λ_1 cada año. Así mientras el tiempo tiende a infinito la ecuación (1.6) actúa como la ecuación (1.3). En el corto plazo, antes de la "estabilidad" hay numerosas oscilaciones. La magnitud de estas oscilaciones depende de la magnitud de $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ la cual es negativa y esto explica las oscilaciones.

Extrapolando lo antes dicho a nuestro ejemplo inicial

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Tenemos $\lambda^2 - (0.6)\lambda - 1.2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{0.6 \pm \sqrt{0.36 + 4.8}}{2} = \frac{0.6 \pm \sqrt{5.16}}{2},$$

así que $\lambda_1 = 1.435$ y $\lambda_2 = -0.835$. Esto explica el 43% en el incremento de la población, lo cual se observa en la última columna de la tabla.

Correspontiente al valor propio $\lambda_1 = 1.435$, calculamos

$$(A - 1.435I)V_1 = \begin{pmatrix} -1.435 & 3 \\ 0.4 & -0.835 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

resolviendo el sistema, tenemos que $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.478 \end{pmatrix}$ es un vector propio.

similiarmente para V_2, $(A + 0.835)V_2 = \begin{pmatrix} 0.835 & 3 \\ 0.4 & 1.435 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

resolviendo el sistema, tenemos que $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.278 \end{pmatrix}$ es otro vector propio.

Si se desea trabajar con una matriz diagonal D equivalente a A, sabemos por conocimientos previos de álgebra lineal que la matriz $D = B^{-1}AB$, donde B es la matriz formada por los vectores propios, es decir:

$$\begin{pmatrix} 1.435 & 0 \\ 0 & -0.835 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.478 & -0.278 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.478 & -0.278 \end{pmatrix}.$$

Note que en V_1 tenemos $\frac{1}{0.478} \approx 2.08$. Esto explica la razón $\dfrac{P_{j,n}}{P_{a,n}}$ en la quinta columna de la tabla.

Analizamos a λ_1 para encontrar equilibrios en el modelo en los casos $\lambda_1 < 1, \lambda_1 > 1$ y $\lambda_1 = 1$, pues sabemos que $\bar{P}_n \approx a_1 \lambda_1^n V_1$.

Caso 1)

Sea $\lambda_1 < 1$.

$$\lambda_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha k}}{2} < 1,\ \sqrt{\beta^2 + 4\alpha k} < 2 - \beta,\ \beta^2 + 4\alpha k < (2 - \beta)^2$$

simplificando $4\alpha k < 4 - 4\beta$, despejando k,

$$k < \frac{1 - \beta}{\alpha} \tag{1.11}$$

Concluimos que sí $k < \dfrac{1-\beta}{\alpha}$, la población se extingue cuando n $\to \infty$.

Caso 2)

Sea $\lambda_1 > 1$,análogo al caso 1 despejamos k:

$$k > \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

Se concluye que sí $k > \dfrac{1-\beta}{\alpha}$, la población satura su medio ambiente cuando $n \to \infty$.

Caso 3)

Sea $\lambda_1 = 1$,del mismo modo tenemos que $k = \dfrac{1-\beta}{\alpha}$

Se concluye que sí $k = \dfrac{1-\beta}{\alpha}$, la población permanece constante conforme el tiempo transcurre.

En nuestro ejemplo: tenemos $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.6$, así se satisface lo siguiente:

$$3 = k > \frac{0.4}{0.4} = 1.$$

De esta forma queda argumentado que la población crece conforme el tiempo trascurre.

Este modelo es limitado, dado que no toma en cuenta aspectos, tales como la tasa de nacimientos según la edad de las hembras no obstante sean fértiles o no, la tasa de mortalidad también según la edad de los individuos, etc.

El siguiente modelo es la generalización del segundo modelo, a este modelo se le conoce como modelo de Leslie.

1.4 TERCER MODELO (Modelo de Leslie)

En el modelo de Leslie de crecimiento de población, las hembras son divididas en m grupos de edad, en lugar de solo dos. Se asume que todos los intervalos de edad son de igual longitud. Así si M años es la edad fertil máxima (teoricamente) alcanzable por una hembra de la especie, entonces cada grupo de edad representa un intervalo de M/m años. Nombramos los m grupos de edad por $G_1, G_2, G_3, ..., G_m$. Entonces tenemos:

Grupo	Edad representada en terminos de un intervalo
G_1	$[0, \frac{M}{m})$
G_2	$[\frac{M}{m}, \frac{2M}{m})$
G_3	$[\frac{2M}{m}, \frac{3M}{m})$
.	.
.	.
.	.
G_{m-1}	$[\frac{(m-2)M}{m}, \frac{(m-1)M}{m})$
G_m	$[\frac{(m-1)M}{m}, M]$

Las hipótesis que haremos son muy similares a las hechas en el modelo anterior:

Definición (Tiempo de observación):
Observamos a la población en intervalos de tiempo, los cuales son iguales a la longitud de los grupos de edades. Así

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ t_1 &= \tfrac{M}{m} \\ t_2 &= \tfrac{2M}{m} \\ &. \\ &. \\ &. \\ t_n &= \tfrac{nM}{m} \end{aligned}$$

Definición (Variables de población):
$P_{i,n}$ = Número de hembras en el i-ésimo grupo de edad G_i, despues del n-esimo periodo de tiempo.

Definición (Nacimientos):

k_i = Número promedio de crías hembras nacidas en un solo periodo de tiempo de una hembras en G_i.

Suponemos que $k_i \geq 0 \in \forall\ i \in \{1, 2, ..., m\}$

Definición (Hipotesis de sobrevivencia):

β_i = proporción de hembras en G_i que sobreviven para entrar al $(i+1)$-ésimo grupo de edad, G_{i+1}.

Observamos que,

$$0 \leq \beta_i \leq 1.$$

Suponemos que $\beta_i > 0$ pues de otra forma no habría hembras en el $(i+1)$-ésimo grupo de edad.

Ahora ponemos todos estos hechos juntos. Primero, ¿cuántas hembras hay en G_1 despues del n-ésimo periodo?. Es decir, ¿cuál es $P_{1,n}$?.

Se tiene que,

$$P_{i,n} = k_1 P_{1,n-1} + k_2 P_{2,n-1} + ... + k_m P_{m,n-1} \tag{1.12}$$

Además el número de hembras en G_{i+1} en el tiempo t_n es igual al número de hembras en G_i en el tiempo t_{n-1} quienes sobreviven para entrar a G_{i+1}. Así,

$$P_{i+1,n} = \beta_i P_{i,n-1} \tag{1.13}$$

Ahora definimos

$$\overline{P}_n = \begin{pmatrix} P_{1,n} \\ P_{2,n} \\ . \\ . \\ . \\ P_{m,n} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & . & . & . & k_m \\ \beta_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \beta_{m-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces las ecuaciones (1.12) y (1.13) pueden ser escritas en la forma compacta como

$$\overline{P}_n = A\overline{P}_{n-1} \tag{1.14}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} P_{1,n} \\ P_{2,n} \\ . \\ . \\ . \\ P_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & . & . & . & k_m \\ \beta_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \beta_{m-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{1,n-1} \\ P_{2,n-1} \\ . \\ . \\ . \\ P_{m,n-1} \end{pmatrix}$$

Dicha expresión matricial, es nuestro modelo. Si P_0 es un vector dado que representa el número inicial de hembras en cada grupo de edad, vemos inmediatamente de (1.14) que:

$$\begin{array}{c} \overline{P}_1 = A\overline{P}_0 \\ \overline{P}_2 = A\overline{P}_1 = A^2\overline{P}_0 \\ \overline{P}_3 = A\overline{P}_2 = A^3\overline{P}_0 \\ . \quad\quad . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \quad\quad . \end{array}$$

$$\overline{P}_n = A\overline{P}_{n-1} = A^n\overline{P}_0$$

Así

$$\overline{P}_n = A^n \overline{P}_0 \tag{1.15}$$

Note la similaridad entre la ecuación (1.15) y la ecuación (1.6).

Como dijimos en un principio, en el caso de la matriz A de 2 x 2, tiene dos valores propios λ_1 y λ_2 con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ y $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.

Cuando esto sucede decimos que λ_1 es un valor propio estrictamente dominante. Desafortunadamente, este hecho no siempre sucede para una matriz A_{mxm} si $m > 2$. Varias cosas pueden ser desfavorables. Primero, la matriz A, definida en (1.14), puede, y frecuentemente, tener valores propios complejos. Segundo, si λ_i es el valor propio con el valor absoluto más grande, podemos tener otro valor propio λ_j, con $|\lambda_i| = |\lambda_j|$. Sin embargo, el siguiente teorema (el cual es demostrado en el apendice), resuelve la mayoría de las dificultades.

TEOREMA 1.

Sea A definida por (1.14), además suponemos lo siguiente:

(i) $k_i \geq 0 \quad \forall\ i = 1, 2, 3, ..., m.$

(ii) por lo menos dos sucesivos k_i´s son estrictamente positivos, es decir, hay un

número j tal que $k_j > 0$ y $k_{j+1} > 0$.

(iii) $0 < \beta_i \leq 1 \quad \forall\ i = 1, 2, 3, ..., m.$

Entonces:

(a) La matriz A tiene un único valor propio positivo λ_1.

(b) λ_1 es simple, es decir, λ_1 tiene multiplicidad algebraica uno.

(c) El correspondiente vector propio V_1 de λ_1, es un vector con componentes

positivos (reales).

(d) Cualquier otro valor propio λ_i de A, con $i \neq 1$, satisface $|\lambda_i| < \lambda_1$.

Con este teorema, podemos analizar este sistema más complicado. Además podemos suponer que A tiene n vectores propios linealmente independientes, (sin embargo, si A no es diagonalizable, es necesario obtener los vectores propios generalizados y posteriormente obtener la forma canónica de Jordan), es decir, suponemos que A es diagonalizable. Sean $V_1, V_2, ..., V_m$ los vectores propios de A. Entonces como $\overline{P}_0 \in \mathbb{R}^m$, y $\{V_1, V_2, ..., V_m\}$ es una base en $\mathbb{R}^m$, existen constantes $C_1, C_2, ..., C_m$, tales que

$$\overline{P}_0 = C_1V_1 + C_2V_2 + \cdots + C_mV_m. \tag{1.16}$$

Aplicando la definición de vector propio,

$$A^n V_i = \lambda_i^n V_i, \qquad \forall i = 1, 2, 3, ..., m \tag{1.17}$$

sustituyendo (1.16) y (1.17) en (1.15), obtenemos

$$\overline{P}_n = A^n \overline{P}_0 = A^n (C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots + C_m V_m)$$

$$\overline{P}_n = C_1 \lambda_1^n V_1 + C_2 \lambda_2^n V_2 + \cdots + C_m \lambda_m^n V_m. \tag{1.18}$$

Factorizando λ_1^n,

$$\overline{P}_n = \lambda_1^n \left[C_1 V_1 + C_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n V_2 + \cdots + C_m \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1} \right)^n V_m \right] \tag{1.19}$$

Pero, del teorema 1 (d), tenemos que $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1$, asi que $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, $\forall i = 2, 3, ..., m$. Luego, para n grande se tiene,

$$\overline{P}_n \approx C_1 \lambda_1^n V_1. \tag{1.20}$$

Observamos que al transcurrir el tiempo la distribución de edades se estabiliza y es proporcional a V_1. Cada grupo de edad cambiará por un factor λ_1 cada año. Además si normalizamos V_1, es decir, que sus componentes sumen uno, dichos componentes nos dirán el (eventual) porcentaje de hembras en cada uno de los m grupos de edad. Finalmente analizaremos a λ_1.

Caso 1) Si $\lambda_1 > 1$, la población eventualmente crecerá.
caso 2) Si $\lambda_1 = 1$, la población es estable y.
caso 3) Si $\lambda_1 < 1$, la población eventualmente decrecerá.

Ejemplo 2: Apliquemos esto a un modelo de crecimiento de población humana. Para simplificar el ejemplo, asumimos que ninguna mujer menor a 15 años y mayor a 45 puede tener hijos. Además tomaremos solo los siguiente grupos de edades:

$$\begin{aligned} G_1 &: \quad [0, 15) \\ G_2 &: \quad [15, 30) \\ G_3 &: \quad [30, 45). \end{aligned}$$

Entonces obviamente $k_1 = 0$. Además supondremos que $k_2 = 2$, $k_3 = 0.5$, $\beta_1 = 0.8$ y $\beta_2 = 0.7$. Luego la matriz A está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0.5 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \end{pmatrix}$$

Para obtener los valores propios, calculamos las raíces del polinomio característico dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0.5 \\ 0.8 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0.7 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1.6\lambda + 0.28 = 0.$$

Las raíces de este polinomio son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1.3447 \\ \lambda_2 &= -0.17856 \\ \lambda_3 &= -1.1661 \end{aligned}$$

notemos que

$$|\lambda_1| = 1.3447 > |\lambda_2| = 0.17856 \ \text{ y } |\lambda_1| = 1.3447 > |\lambda_3| = 1.1661.$$

Para encontrar V_1, resolveremos el siguiente sistema

$$(A-\lambda_1 I)\ V_1 = \begin{pmatrix} -1.3447 & 2 & 0.5 \\ 0.8 & -1.3447 & 0 \\ 0 & 0.7 & -1.3447 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1.\,3447x_1 + 2x_2 + 0.5x_3 \\ 0.8x_1 - 1.\,3447x_2 \\ 0.7x_2 - 1.\,3447x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una solución al sistema homogéneo cuando damos el valor $x_3 = 1$ es $x_1 = 3.228$ y $x_2 = 1.921$. Como $x_1 + x_2 + x_3 = 6.\,149$, mutiplicamos por $\dfrac{1}{6.\,149}$ a V_1 para obtener el vector propio normalizado U_1

$$U_1 = \frac{1}{6.\,149} V_1 = \frac{1}{6.\,149} \begin{pmatrix} 3.228 \\ 1.921 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3.228}{6.\,149} \\ \dfrac{1.921}{6.\,149} \\ \dfrac{1}{6.\,149} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.524\,96 \\ 0.312\,41 \\ 0.162\,63 \end{pmatrix}.$$

Así concluimos lo siguiente:

(i) Después de muchos años la población crecerá con una tasa de crecimiento aproximada de 34.47 porciento en cada periodo de tiempo de 15 años.

(ii) El porcentaje de mujeres menores de 15 años será, eventualmente de 52.49, menores de 30 y hasta 15 años representarán el 31.24 porciento, y las mujeres de entre 30 y 45 años representarán el 16.26 porciento.

Con el ejemplo anterior concluimos este capítulo, observamos que los tres modelos tratados anteriormente aún tienen sus limitaciones, una de ellas es que se supone que los organismos se reproducen en intervalos de tiempo discreto. Aunque existen muchas especies que se comportan de esta forma (ejemplo: Las tortugas que se reproducen en un solo ciclo anual y en masa, etc.) existen otras poblaciones que se reproducen de forma continua, es decir, en periodos de tiempo continuo. En el capítulo siguiente se extrapolan los tres modelos anteriores utilizando el concepto de intervalos de tiempo continuo.

CAPITULO 2

MODELOS DE POBLACION EN TIEMPO CONTINUO

En este capítulo desarrollaremos tres modelos de crecimiento de población a tiempo continuo, estos modelos son muy parecidos a los del capítulo uno, pero con ciertas variantes de importancia que los hacen más eficientes.

2.1 PRIMER MODELO (Continuo)

Para plantear el primer modelo de población tenemos lo siguiente.

Definición:
$P(t) :=$ Población de individuos en el tiempo t.
$\upsilon :=$ Tasa de nacimientos, $\upsilon > 0$.
$\mu :=$ Tasa de mortalidad, $\mu \geq 0$.
$P(0) :=$ Población inicial, $P(0) = P_0$, $P(0) > 0$.

proponemos lo siguiente:

$$\frac{dP}{dt} = \upsilon P - \mu P$$

factorizando P

$$\frac{dP}{dt} = P(\nu - \mu)$$

sea $(\nu - \mu) = \varphi > 0$, llamada tasa de crecimiento que se supone constante para toda $t > 0$, entonces,

$$\frac{dP}{dt} = \varphi P \tag{2.1}$$

Esta es una ecuación diferencial muy conocida. Aunque a simple vista sea una ecuación sencilla que se puede solucionar por el método de separación de variables, es muy útil como modelo de varios fenómenos (decaimiento radioactivo, tasas de interes, etc.). Dicha ecuación es el modelo planteado.

Procedemos a solucionar la ecuación (2.1)

$$\frac{dP}{dt} = \varphi P,$$

separando variables

$$\frac{dP}{P} = \varphi dt,$$

integrando

$$\int \frac{dP}{P} = \int \varphi dt,$$

de donde

$$\log P + k_1 = \varphi t + k_2,$$

despejando P

$$\log P = \varphi t + k_2 - k_1$$

$$P = e^{\varphi t + k_2 - k_1} = e^{\varphi t + k},$$

donde $k_2 - k_1 = k$, así

$$P(t) = e^k e^{\varphi t}. \tag{2.2}$$

Utilizando la condición inicial, esto es, $P(0) = P_0$

$$P(0) = e^k e^{\varphi(0)} = e^k = P_0$$

por lo tanto

$$e^k = P_0 \tag{2.3}$$

Sustituiyendo (2.3) en (2.2) llegamos a lo siguuente

$$P(t) = P_0 e^{\varphi t}. \tag{2.4}$$

Esta última ecuación es la solución a nuestro modelo, muchas veces llamado modelo logístico. A continuación procedemos a analizar el comportamiento de (2.4) para encontar la dinámica del modelo a partir de la naturaleza de φ la tasa de crecimiento, tomada como un parámetro.

Caso 1)

Sea $\varphi < 0$,tomando límites

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} P_0 e^{\varphi t} = P_0 \lim_{t\to\infty} e^{\varphi t} = P_0(0) = 0$$

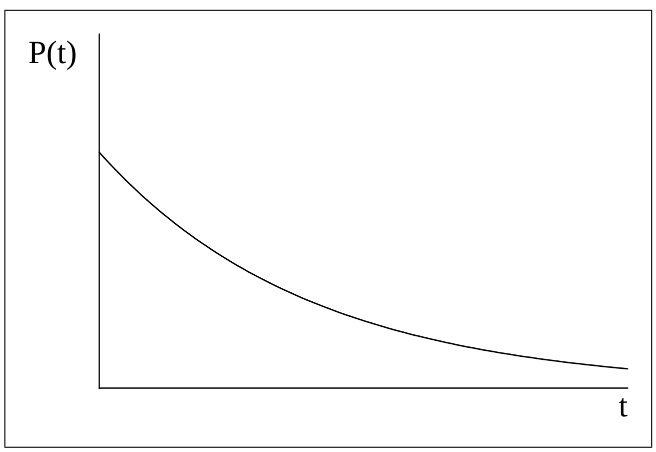
tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = 0$$

Por lo tanto, la población tiende a extiguirse conforme el tiempo transcurre, esto se da cuando $\varphi < 0$, es decir,

$$\nu - \mu < 0$$
$$\nu < \mu$$

Concluimos que cuando la tasa de nacimientos es menor a la tasa de muertes, la población se extingue cuando $t \to \infty$. Geométricamente el comportamiento se observa de la siguiente manera:



Caso 2)

Sea $\varphi > 0$, análogo al caso anterior

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} P_0 e^{\varphi t} = P_0 \lim_{t\to\infty} e^{\varphi t} = P_0(\infty) = \infty$$

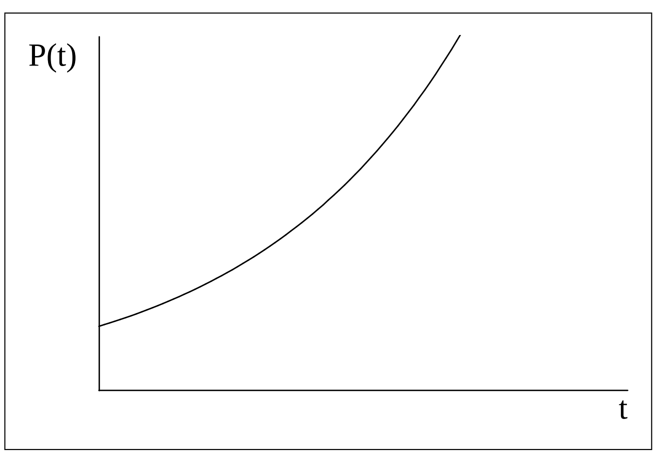
tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \infty.$$

Se observa que la población tiende a poblar todo el espacio donde habita conforme el tiempo transcurre, esto se da cuando

$$\begin{gathered} \varphi > 0 \\ \nu - \mu > 0 \\ \nu > \mu \end{gathered}$$

Concluimos que la población satura su medio ambiente conforme $t \to \infty$ y cuando la tasa de nacimientos es mayor a la tasa de muertes. Geométricamente el comportamiento se observa de la siguiente manera:



Caso 3)

Sea $\varphi = 0$, tenemos

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} P_0 e^{\varphi t} = P_0 \lim_{t\to\infty} e^{\varphi t} = P_0(1) = P_0$$

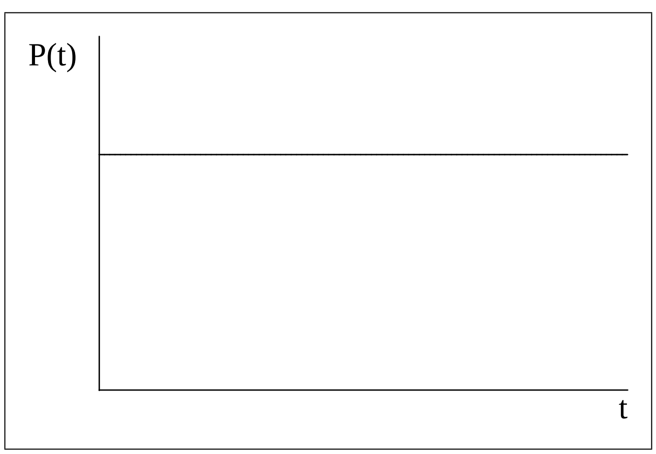
luego

$$\lim_{t\to\infty} P_n = P_0.$$

Esto nos dice que la población permanece constante (en equilibrio) conforme el tiempo transcurre, esto se da cuando

$$\begin{gathered} \varphi = 0 \\ \nu - \mu = 0 \\ \nu = \mu. \end{gathered}$$

Se concluye que la población está en equilibrio cuando $t \to \infty$ y la tasa de nacimientos es igual a la tasa de muertes.Gráficamente



2.2 SEGUNDO MODELO (Continuo)

Tomando ahora en consideración al igual que el segundo modelo discreto, que la tasa de nacimientos depende de la edad de las hembras, así como la tasa de sobrevivencia, procedemos a plantear el modelo utilizando los mismos conceptos de ciclo reproductivo del capitulo uno.

Definición:

$P_j(t) :=$ Población de hembras jóvenes en el tiempo t.
$P_a(t) :=$ Población de hembras adultas en el tiempo t.
$k :=$ Tasa de nacimiento de las hembras adultas, $k > 0$.
$\alpha' :=$ Tasa de mortalidad de las hembras jóvenes, $0 < \alpha' < 1$.
$\beta' :=$ Tasa de mortalidad de las hembras adultas, $0 < \beta' < 1$.
$\alpha = 1 - \alpha' =$ Tasa de sobrevivencia de las hembras jóvenes.
$\beta = 1 - \beta' =$ Tasa de sobrevivencia de las hembras adultas.
$P_j(0) = P_{j,0}$ =Población inicial de hembras jóvenes.
$P_{a,0}(0) = P_{a,0}$ =Población inicial de hembras adultas.

Utilizando la información anterior proponemos el siguiente modelo expresado por un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con dos incógnitas, donde las incógnitas son funciones que dependen del tiempo.

$$\begin{aligned} \frac{dP_j}{dt} &= kP_a \\ \frac{dP_a}{dt} &= \alpha P_j + \beta P_a \end{aligned} \tag{2.5}$$

En términos matriciales tenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{dP_j}{dt} \\ \frac{dP_a}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_j \\ P_a \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Donde $A = \begin{pmatrix} 0 & k \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes asociada al sistema, procedemos a encontrar la solución de la misma forma que en el modelo discreto y bajo el mismo análisis de la matriz A.

$$|A - I\lambda| = \begin{vmatrix} -\lambda & k \\ \alpha & \beta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \beta\lambda - \alpha k = 0$$

Resolviendo para λ

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha k}}{2}.$$

Tenemos por la naturaleza de α, β y k que los valores propios son reales y distintos, $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$, además, $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ donde λ_1 es el valor propio positivo.

La solución general de $P_j(t)$ es:

$$P_j(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Para algunos $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Sustituimos esta expresión en la primera ecuación de (2.5) para obtener $P_a(t)$. (Cuando escribamos P_a entenderemos que P_a esta en funcion del tiempo, es decir, $P_a(t)$, análogo para P_j).

$$\begin{aligned} \frac{dP_j}{dt} &= kP_a \\ C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} &= kP_a. \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución para P_a es

$$P_a(t) = \frac{C_1\lambda_1}{k} e^{\lambda_1 t} + \frac{C_2\lambda_2}{k} e^{\lambda_2 t}.$$

Esto significa que podemos escribir la solución general de (2.5) como

$$\begin{aligned} P_j(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \\ P_a(t) &= \frac{C_1\lambda_1}{k} e^{\lambda_1 t} + \frac{C_2\lambda_2}{k} e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Aplicamos las condiciones iniciales para encontar los valores de C_1 y C_2 obtenemos

$$P_j(0) = P_{j,0} = C_1 + C_2$$

$$P_a(0) = P_{a,0} = \frac{C_1\lambda_1}{k} + \frac{C_2\lambda_2}{k}.$$

Despejando C_1 de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda

$$P_{a,0} = \frac{(P_{j,0} - C_2)\lambda_1}{k} + \frac{C_2\lambda_2}{k}$$

Luego

$$C_2 = \frac{kP_{a,0} - P_{j,0}\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1},\ C_1 = P_{j,0} - \frac{kP_{a,0} - P_{j,0}\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \tag{2.8}$$

Ya que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$, tenemos que cuando $t \to \infty$, resulta que

$$C_2e^{\lambda_2 t} \to 0, \quad \frac{C_2\lambda_2}{k}e^{\lambda_2 t} \to 0$$

y

$$\begin{aligned} P_j(t) &\approx C_1e^{\lambda_1 t} \\ P_a(t) &\approx \frac{C_1\lambda_1}{k}e^{\lambda_1 t} \end{aligned} \tag{2.9}$$

A continuación hacemos el cociente $\dfrac{P_j}{P_a}$ para saber en que proporción se encuentran las jóvenes y las adultas cuando $t \to \infty$.

$$\frac{P_j}{P_a} \approx \frac{C_1e^{\lambda_1 t}}{\frac{C_1\lambda_1}{k}e^{\lambda_1 t}} = \frac{C_1}{\frac{C_1\lambda_1}{k}} = \frac{C_1k}{C_1\lambda_1} = \frac{k}{\lambda_1}.$$

$$\frac{P_j}{P_a} \approx \frac{k}{\lambda_1}. \tag{2.10}$$

Así la proporción en que se encuentran los dos grupos de edad es de $\dfrac{k}{\lambda_1}$. A continuación realizamos un ejemplo para este segundo modelo continuo.

Ejemplo 3:
Tomaremos la misma problemática del ejemplo uno del primer capitulo con los mismos valores, para comparar y observar la diferencia y el funcionamiento de los dos modelos.

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes asociada al sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y $P_{j,0} = 0$, $P_{a,0} = 10$ son las condiciones iniciales. A continuación calculamos las raíces del polinomio característico que no son otra cosa que los valores propios.

$$|A - I\lambda| = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 0.4 & 0.6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (0.6)\lambda - 1.2 = 0 \ .$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{0.6 \pm \sqrt{0.36 + 4.8}}{2} = \frac{0.6 \pm \sqrt{5.16}}{2}.$$

Obtenemos $\lambda_1 = 1.435$ y $\lambda_2 = -0.835$. Luego sustimos estos y las condiciones iniciales en (2.8) para encontar los valores de las constantes de la solución general.

$$C_1 = 0 - \frac{3(10) - 0(1.435)}{-0.835 - 1.435}, \ \ C_2 = \frac{3(10) - 0(1.435)}{-0.835 - 1.435}$$
$$C_1 = C_2 = 13.216.$$

Ahora sustituimos en (2.7) para obtener la solución general

$$P_j(t) = 13.216e^{1.435t} + 13.216e^{-0.835t}$$
$$P_a(t) = \frac{(13.216)(1.435)}{3}e^{1.435t} + \frac{(13.216)(-0.835)}{3}e^{-0.835t}$$

Por lo tanto la solución general es

$$\begin{aligned} P_j(t) &= 13.216e^{1.435t} + 13.216e^{-0.835t} \\ P_a(t) &= 6.321\,7e^{1.435t} - 3.678\,5e^{-0.835t} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Si t tiende a infinito llegamos a (2.9) para este ejemplo y tenemos que la población se comporta de la siguiente manera

$$\begin{aligned} P_j(t) &\approx 13.216e^{1.435t} \\ P_a(t) &\approx 6.321\,7e^{1.435t}. \end{aligned}$$

A continuación sustituimos los valores correspondientes en (2.10) para saber la proporción en que se encuentran las hembras jovenes y las adultas.

$$\frac{P_j}{P_a} \approx \frac{k}{\lambda_1} = \frac{3}{1.435} = 2.090\,6.$$

Esto significa que hay aproximadamente 2 hembras jovenes por cada hembra adulta.

En lo siguiente calculamos los vectores propios asociados a los valores propios λ_1 y λ_2.

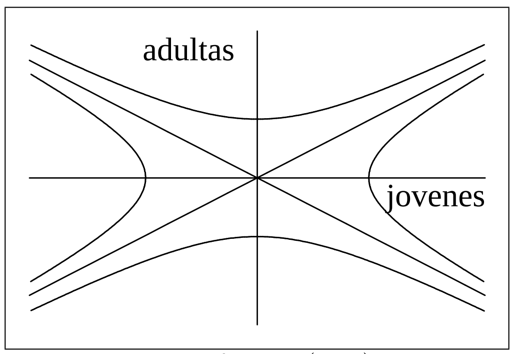
$$(A - 1.435I)V_1 = \begin{pmatrix} -1.435 & 3 \\ 0.4 & -0.835 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

resolviendo el sistema. $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.478 \end{pmatrix}$ es el vector propio asociado a λ_1.

Similiarmente para V_2, $V_2 = (A + 0.835I) = \begin{pmatrix} 0.835 & 3 \\ 0.4 & 1.435 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.278 \end{pmatrix}$.

Por último, si tomamos los vectores propios, como los vectores de dirección de dos rectas que pasan por el origen del plano con ejes P_j y P_a (población de jovenes y adultas) se obtiene el plano fase del incremento $\dfrac{dP_j}{dP_a}$ de hembras jóvenes respecto a las adultas.

Las órbitas dadas por (2.11) son hipérbolas, vemos que si $t \to \infty$, entonces $x \to \infty$ al mismo tiempo que $y \to \infty$. La siguiente figura ilustra el plano fase de (2.11) y algunas órbitas que dependen de la población inicial. Además se sabe que si tenemos valores propios de signos contrarios se trata de un punto silla. Es importante decir que sólo nos interesa el primer cuadrante de nuestro plano fase, dado que no existen poblaciones negativas.

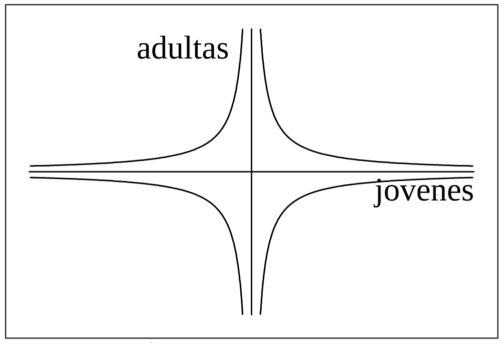


Plano fase de (2.11)

Si se desea trabajar con una matriz diagonal D equivalente a A, podemos calcularla. Sabemos por conocimientos previos de álgebra lineal que la matriz $D = B^{-1}AB$, donde B es la matriz formada por los vectores propios, es decir:

$$\begin{pmatrix} 1.435 & 0 \\ 0 & -0.835 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.478 & -0.278 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.478 & -0.278 \end{pmatrix},$$

Así tenemos un sistema ortogonal y en este caso el plano fase se observa en la figura siguiente:



Plano fase delsistema ortogonal

2.3 TERCER MODELO (Continuo)

En la sección 1.4, las hembras son divididas en m grupos de edad, en lugar de sólo dos. Seguiremos la misma lógica que en el modelo de dicha sección. Se asumirá que todos los intervalos de edad son de igual longitud. Nombramos los m grupos de edad por $G_1, G_2, G_3, ..., G_m$.

Las hipótesis que haremos son muy similares a las hechas en el tercer modelo discreto:

Definición (Tiempo de observación):
Observamos a la población en intervalos de tiempo, los cuales son iguales a la longitud de los grupos de edades.

Definición (Variables de población):
$P_i(t) =$ Número de hembras en el i-ésimo grupo de edad G_i en el tiempo t.

Definición (Nacimientos):
$k_i =$ Tasa de nacimiento de crías hembras nacidas de hembras en G_i.
Suponemos que $k_i \geq 0 \in \forall\ i \in \{1, 2, ..., m\}$

Definición (Hipótesis de sobrevivencia):
$\beta_i =$ Tasa de sobrevivencia de hembras en G_i que sobreviven para entrar al $(i+1)$-ésimo grupo de edad, G_{i+1}.

Tenemos,

$$0 \leq \beta_i \leq 1.$$

Suponemos que $\beta_i > 0$ pues de otra forma no habría hembras en el $(i+1)$-ésimo grupo de edad.

El incremento de hembras que hay en G_1 en el tiempo t quedan expresadas por la ecuación

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = k_1 P_1(t) + k_2 P_2(t) + ... + k_m P_m(t) \tag{2.12}$$

Además el incremento de hembras en G_{i+1} en el tiempo t es proporcional al número de hembras en G_i en el tiempo t . Así

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \beta_i P_{i+1}(t) \tag{2.13}$$

Ahora definimos

$$\frac{d\overline{P}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dP_1(t)}{dt} \\ \frac{dP_2(t)}{dt} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{dP_m(t)}{dt} \end{pmatrix}, \quad \overline{P}(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ P_m(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{y} \quad A = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & . & . & . & k_m \\ \beta_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \beta_{m-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces las ecuaciones (2.12) y (2.13) se expresan de forma compacta como

$$\frac{d\overline{P}(t)}{dt} = A\overline{P}(t) \tag{2.14}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} \frac{dP_1(t)}{dt} \\ \frac{dP_2(t)}{dt} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{dP_m(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & . & . & . & k_m \\ \beta_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \beta_{m-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ P_m(t) \end{pmatrix}$$

A esta última expresión matricial la tomaremos como nuestro modelo. Se tiene que esta expresión es un sistema lineal de m ecuaciones diferenciales de primer orden, al cual le daremos solución en los siguientes renglones. Sea P_0 un vector dado que representa el número inicial de hembras en cada grupo de edad.

Basándonos en [4] cap. 5 tenemos por definición que $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{A^k}{k!}$, esta serie es absolutamente convergente. Además enunciamos el siguiente teorema, también de [4] cap. 5 cuya demostración se encuentra en la referecia antes mencionada.

TEOREMA 2.
Sea A un matriz vista como un operador en $\mathbb{R}^m$, entonces, la solución del problema de valor inicial $\dfrac{d\overline{P}(t)}{dt} = A\overline{P}(t)$, $P(0) = P_0 \in \mathbb{R}^m$ es $P_0 e^{tA}$ y es una solución única.

Para facilitar el calculo de e^{tA} procedemos a diagonalizar A. Pero si no se pudiera diagonalizar buscamos su forma canónica de Jordan como en [3] cap 6. Para lo cual mencionamos el teorema siguiente.

TEOREMA 3.
Para cualquier operador A en $\mathbb{R}^m$ hay operadores únicos S, N en $\mathbb{R}^m$ tales que A=S+N, SN=NS, N es semisimple, es decir, su polinomio característico tiene raíces distintas, y N es nilpotente de orden n, es decir, $N^n = 0$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, supongamos que A está en su forma canónica de Jordan, y sea A_{λ_k} un λ_k-bloque de Jordan de tamaño $p \ x \ p$, entonces el sistema $\dfrac{d\overline{P}(t)}{dt} = A\overline{P}(t)$ se observa de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} P_1' \\ P_2' \\ \vdots \\ P_k' \\ \vdots \\ P_{k+p}' \\ \vdots \\ P_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & & & \\ 1 & \ddots & & & & & & & & & \\ & 1 & \lambda_1 & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & \lambda_k & & & & & & \\ & & & & 1 & \ddots & & & & & \\ & & & & & 1 & \lambda_k & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & \lambda_q & & \\ & & & & & & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 & \lambda_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_k \\ \vdots \\ P_{k+p} \\ \vdots \\ P_m \end{pmatrix}$$

Luego, si en cada λ_k-bloque de Jordan aplicamos el teorema 3, tenemos

$$A_{\lambda_k} = \begin{pmatrix} \lambda_k & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & \lambda_k \end{pmatrix} = \lambda_k I + N_{\lambda_k}.$$

Donde

$$N_{\lambda_k} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & . & & & \\ & \ddots & . & & \\ & & & . & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $\overline{P_{\lambda_k}} = \begin{pmatrix} P_k \\ \vdots \\ P_{k+p} \end{pmatrix}$, $\quad \dfrac{d\overline{P}_{\lambda_k}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} P_k^{'} \\ \vdots \\ P_{k+p}^{'} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$, las entradas k hasta $k+p$ de $\overline{P}(t)$ y $\overline{\dfrac{dP(t)}{dt}}$.

Además, sea $\overline{C}_{\lambda_k} = \overline{P_{\lambda_k}}(0) = \begin{pmatrix} P_k(0) \\ \vdots \\ P_{k+p}(0) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} C_{\lambda_k,1} \\ \vdots \\ C_{\lambda_k,p} \end{pmatrix}$, aplicando el teorema 2 a A_{λ_k}, tenemos que

$$\overline{P_{\lambda_k}} = e^{tA}\overline{C}_{\lambda_k} = e^{t\lambda_k I}e^{tN}\overline{C}_{\lambda_k} = \overline{C}_{\lambda_k}(e^{t\lambda_k I}\textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \dfrac{t^j N^j}{j!}) =$$

$$\overline{C}_{\lambda_k} e^{t\lambda_k I} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ t & & & & \\ \dfrac{t^2}{2!} & & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ \dfrac{t^{n-1}}{n!} & \dots & \dfrac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix} =$$

$$e^{t\lambda_k I} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ t & & & & \\ \dfrac{t^2}{2!} & & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ \dfrac{t^{n-1}}{n!} & \dots & \dfrac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{\lambda_k,1} \\ \vdots \\ C_{\lambda_k,p} \end{pmatrix}.$$

Dado que N es nilpotente de grado n. En coordenadas las solución de $P_{\lambda_k}(t) = \begin{pmatrix} P_k(t) \\ P_{k+1}(t) \\ . \\ . \\ . \\ P_{k+p}(t) \end{pmatrix}$ se observa como sigue

$$P_j(t) = e^{t\lambda_k} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{t^i}{i!} C_{\lambda_k, j-i} \tag{2.15}$$

$\forall\ j \in \{k, ..., k+p\}, \forall\ \lambda_k,\ k \in \{1, ..., q\}$.

Ejemplo 4:

Con la misma logica del ejemplo tres, tomamos los mismos valores y los mismos supuestos del ejemplo dos del primer capitulo, para comparar y observar la diferencia y el funcionamiento de los dos modelos.

$$\begin{array}{rcl} G_1 & : & [0,15) \\ G_2 & : & [15,30) \\ G_3 & : & [30,45). \end{array}$$

Entonces obviamente $k_1 = 0$. Además supondremos que $k_2 = 2$, $k_3 = 0.5$, $\beta_1 = 0.8$ y $\beta_2 = 0.7$. Luego la matriz A está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0.5 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \end{pmatrix}$$

El modelo se observa de la forma siguiente

$$\frac{dP_1}{dt} = k_2P_2 + k_3P_3$$
$$\frac{dP_2}{dt} = \beta_1 P_1$$
$$\frac{dP_3}{dt} = \beta_2 P_2$$

Las raíces del polinomio caracteristico calculadas anteriormente estan dadas por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0.8 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0.7 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1.6\lambda + 0.28 = 0.$$

$$\lambda_1 = 1.3447$$
$$\lambda_2 = -0.17856$$
$$\lambda_3 = -1.1661$$

Los vectores propios V_1, V_2 y V_3 asociados a λ_1, λ_2 y λ_3 respectivamente son

$$\begin{pmatrix} 0.83050 \\ 0.49409 \\ 0.2572 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.055084 \\ -0.24679 \\ 0.9675 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0.78082 \\ -0.53566 \\ 0.32154 \end{pmatrix}$$

Sea B la base $\{ V_1, V_2 , V_3 \}$ de $\mathbb{R}^3$ y sea T= S+N como en el Teorema 3, en B-coordenadas S tiene la matriz

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1.3447 & 0 & 0 \\ 0 & -0.17856 & 0 \\ 0 & 0 & -1.1661 \end{pmatrix}$$

Sea S_0 la matriz de S en coordenadas estándar, entonces

$$S_1 = PS_0P^{-1}.$$

Donde P es la transpuesta inversa de la matriz cuyos renglones son V_1, V_2 y V_3. Por lo tanto

$$(P^{-1})^t = \begin{pmatrix} 0.83050 & 0.49409 & 0.2572 \\ 0.055084 & -0.24679 & 0.9675 \\ 0.78082 & -0.53566 & 0.32154 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0.8305 & 0.055084 & 0.78082 \\ 0.49409 & -0.24679 & -0.53566 \\ 0.2572 & 0.9675 & 0.32154 \end{pmatrix}$$
$$P = \begin{pmatrix} 0.56927 & 0.95687 & 0.21167 \\ -0.38476 & 0.085880 & 1.0774 \\ 0.70236 & -1.0238 & -0.30114 \end{pmatrix}.$$

Así

$$S_0 = P^{-1} S_1 P =$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0.00003\,935\,5 & 2.\,000\,0 & 0.499\,99 \\ 0.799\,98 & 0.00003\,270\,8 & 0.00001\,025\,6 \\ 0.000008\,977\,8 & 0.699\,98 & -0.00001\,099\,5 \end{pmatrix}.$$

Podemos ahora encontar la matriz N_0 de N en la base estandar de $\mathbb{R}^3$,

$$N_0 = A - S_0 =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0.5 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.00003\,935\,5 & 2.\,000\,0 & 0.499\,99 \\ 0.799\,98 & 0.00003\,270\,8 & 0.00001\,025\,6 \\ 0.000008\,977\,8 & 0.699\,98 & -0.00001\,099\,5 \end{pmatrix} =$$

$$N_0 = \begin{pmatrix} -0.00003\,935\,5 & 0 & 0.000\,01 \\ 0.000\,02 & -0.00003270\,8 & -0.00001\,025\,6 \\ -0.000008\,977\,8 & 0.000\,02 & 0.00001\,099\,5 \end{pmatrix}$$

Redondeando para simplificar los calculos

$$N_0 \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se observa que a N_0 la podemos tomar como nilpotente de orden uno , pues $N_0 \approx 0$.

Ademas

$$e^{S_0} = e^{P^{-1}S_1P} = P^{-1}e^{S_1}P =$$

$$e^{S_0} = \begin{pmatrix} 0.830\,5 & 0.05\,508\,4 & 0.780\,82 \\ 0.494\,09 & -0.246\,79 & -0.535\,66 \\ 0.257\,2 & 0.967\,5 & 0.321\,54 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{1.\,344\,7} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-0.178\,56} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1.\,166\,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.569\,27 & 0.956\,87 & 0.211\,67 \\ -0.384\,76 & 0.08\,588\,0 & 1.\,077\,4 \\ 0.702\,36 & -1.\,023\,8 & -0.301\,14 \end{pmatrix}$$

El producto de estas tres matrices da como resultado, la matriz cuyas columnas son las siguientes,

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0.548417e^{-1.1661} - 0.0211941e^{-0.17856} + 0.472779e^{1.3447} \\ -0.376226e^{-1.1661} + 0.0949549e^{-0.17856} + 0.281271e^{1.3447} \\ 0.225837e^{-1.1661} - 0.372255e^{-0.17856} + 0.146416e^{1.3447} \end{pmatrix}$$
$$C_2 = \begin{pmatrix} -0.799404e^{-1.1661} + 0.00473061e^{-0.17856} + 0.794681e^{1.3447} \\ 0.548409e^{-1.1661} - 0.0211943e^{-0.17856} + 0.47278e^{1.3447} \\ -0.329193e^{-1.1661} + 0.0830889e^{-0.17856} + 0.246107e^{1.3447} \end{pmatrix}$$
$$C_3 = \begin{pmatrix} -0.235136e^{-1.1661} + 0.0593475e^{-0.17856} + 0.175792e^{1.3447} \\ 0.161309e^{-1.1661} - 0.265892e^{-0.17856} + 0.104584e^{1.3447} \\ -0.0968286e^{-1.1661} + 1.04238e^{-0.17856} + 0.0544415e^{1.3447} \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos $e^{N_0} = I + N_0$ por definición de exponencial y por que N_0es nilpotente de orden uno, así,

$$e^{N_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, obtenemos

$$e^A = e^{S_0+N_0} = e^{S_0}e^{N_0} = (C_1, C_2, C_3)I = (C_1, C_2, C_3).$$

ES más dificil calcular e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$. reemplazando A por tA convierte a S_0 en tS_0, N_0 en tN_0 y así sucesivamente; el punto es que la misma matriz P es usada para todos los valores de t. Obtenemos

$$e^{tA} = e^{tS_0}e^{tN_0} = (C_1^t, C_2^t, C_3^t)I$$

Esto nos da como resultado la matriz cuyas columnas son las siguientes

$$C_1^t = \begin{pmatrix} 0.548417e^{-1.1661t} - 0.0211941e^{-0.17856t} + 0.472779e^{1.3447t} \\ -0.376226e^{-1.1661t} + 0.0949549e^{-0.17856t} + 0.281271e^{1.3447t} \\ 0.225837e^{-1.1661t} - 0.372255e^{-0.17856t} + 0.146416e^{1.3447t} \end{pmatrix}$$
$$C_2^t = \begin{pmatrix} -0.799404e^{-1.1661t} + 0.00473061e^{-0.17856t} + 0.794681e^{1.3447t} \\ 0.548409e^{-1.1661t} - 0.0211943e^{-0.17856t} + 0.47278e^{1.3447t} \\ -0.329193e^{-1.1661t} + 0.0830889e^{-0.17856t} + 0.246107e^{1.3447t} \end{pmatrix}$$
$$C_3^t = \begin{pmatrix} -0.235136e^{-1.1661t} + 0.0593475e^{-0.17856t} + 0.175792e^{1.3447t} \\ 0.161309e^{-1.1661t} - 0.265892e^{-0.17856t} + 0.104584e^{1.3447t} \\ -0.0968286e^{-1.1661t} + 1.04238e^{-0.17856t} + 0.0544415e^{1.3447t} \end{pmatrix}$$

La solución a nuestro sistema de tres por tres esta dado en terminos de e^{tA}.

APENDICE

A.1. TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS

En esta sección, demostraremos el Teorema central del Capítulo uno, para lo cual, definimos lo siguiente.

Definición:
Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ matrices:

$$A \leq B \text{ si } a_{ij} \leq b_{ij} \ \forall i, j.$$
$$A < B \text{ si } a_{ij} < b_{ij} \ \forall i, j.$$

Definición:
Sea A_{nxn} una matriz, $A_T = TAT^{-1}$ donde T es una matriz cuadrada de nxn.

Definición:
Sea $A = (a_{ij})$, denotamos por A^* a la matriz $A^* = (|a_{ij}|)$.

Definición:
Una matriz de permutación Π es obtenida al permutar las columnas de una matriz identidad.

Definición:
Una matriz cuadrada A_{nxn}, $(n \geq 2)$ es *irreducible* si no existe una matriz de permutación Π tal que $A_\Pi = \Pi A \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ donde A_{11} y A_{22} son cuadradadas.

TEOREMA:

Sea $A \geq 0$ irreducible. Entonces

1.- A tiene una raíz $r > 0$.
2.- r puede ser asociada a un vector propio $x_0 > 0$.
3.- Si α es cualquier otro valor propio de A, $|\alpha| \leq r$..
4.- r es una raíz simple.

DEMOSTRACIÓN:

1) Para mostrar que A tiene una raíz característica $r > 0$ primero mostraremos lo

siguiente:

1a) P.D. Sí c, $x \neq \overline{0}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A_{nxn} \geq 0_{nxn}$ entonces $Ax \geq 0$.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ entonces $Ax = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i \end{pmatrix}$.

Supongamos que $Ax = \overline{0}$ entonces $\sum_{i=1}^n a_{ki}x_i = 0$ $\forall k \in \{1, ..., n\}$.
Además como $x \neq \overline{0}$ implica que existe $x_j \neq 0$ y como $Ax = \overline{0}$, tenemos en

particular que $a_{1k} = a_{2k} = \cdots = a_{nk} = 0$ lo que implica que la columna $k-$ésima de A es una columna de ceros, esto conduce a que A no es irreducible, lo cual es una contradiccion. Por lo tanto $Ax \geq 0$.

Ahora procedemos a demostrar lo siguiente.

1b) P.D. A tiene una raíz característica $r > 0$.

Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x \geq 0, \sum x_i = 1\}$. Si $x \in S$ definimos $T(x) = \dfrac{1}{\rho(x)}Ax$ donde

$\rho(x) \in \mathbb{R}$, $\rho(x) > 0$ y $\rho(x)$ determina que $T(x) \in S$.

Se observa que $\rho(x) = |Ax|$, pues $Ax \in \mathbb{R}$ y al multiplicar a Ax por $\frac{1}{|Ax|} = \frac{1}{\rho(x)}$ lo

que se obtiene es un vector de norma uno esto implica que $T(x) \in S$.
(Por (1a) $\rho(x)$ existe para cada $x \in S$ pues $Ax \geq 0$).

Como $T(x) \in S$ se tiene que $T(x)$ es una transformación continua de S en sí

mismo. Así por el Teorema del punto fijo de Brower (Ver [3]), hay un $x_0 \in S$ con

$x_0 = T(x_0) = \frac{1}{\rho(x_0)} Ax_0$. Tomamos $r = \rho(x_0)$. Sabemos que si $T(x) = \lambda x$ esto

implica que λ es un valor propio y como $r = \rho(x_0)$ cumple esta propiedad r es

una raíz característica de A, $r > 0$.

2) P.D. A r se le puede asociar un vector propio $x_0 > 0$.

Supongamos que después de aplicar una apropiada matriz de permutación Π,

tenemos $\widetilde{x_0} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi \in \mathbb{R}^k$, $k < n$, $\xi > 0$ y x_0 como en (1b).
Sea $A_\Pi \widetilde{x_0}$, tenemos que lo siguiente:

$A_\Pi \widetilde{x_0} = \Pi A \Pi^{-1} \widetilde{x_0} = \Pi A \Pi^{-1} \Pi x_0 = \Pi A x_0 = \Pi \rho(x_0) x_0$ dado que x_0 es punto fijo.

Así $A_\Pi \widetilde{x_0} = \rho(x_0) \Pi x_0 = r \widetilde{x_0}$, en forma matricial se tiene.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\xi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donde A_{11} y A_{22} son submatrices cuadradas. Al realizar el producto que esta del

lado izquierdo de la igualdad se tiene que $A_{21}\xi = 0 \Rightarrow A_{21} = 0$, lo cual contradice

la irreducibilidad de A. Por lo tanto $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $x_0 > 0$.

3) P.D. Si α es cualquier raíz característica de A, $|\alpha| \leq r$.

Sea A_{nxn}, B_{nxn}, $0 \leq B \leq A$. Mostraremos primero que si β es una raíz característica de B, entonces, $|\beta| \leq r$.
Sabemos que si A^T es irreducible tiene una raíz característica $r_1 > 0$ con un vector propio $x_1 > 0$ tal que $A^T x_1 = r_1 x_1$.
Sea β una raíz característica de B. Entonces $\beta y = By$.

Tomando valores absolutos y usando la desigualdad del triángulo tenemos:

(i) $|\beta|\, y^* \leq By^* \leq Ay^*$ así
(ii) $|\beta|\, x_1^T y^* \leq x_1^T A y^* = r_1 x_1^T y^*$

Dado que $x_1^T A = (A^T x_1)^T = (r_1 x_1)^T = r_1 x_1^T$.

Por lo tanto $|\beta|\, x_1^T y^* \leq r_1 x_1^T y^* \Longrightarrow |\beta| \leq r_1$.

Poniendo $B = A$ obtenemos $|\alpha| \leq r_1$, α raíz característica de A. En particular $r \leq r_1$ y similarmente $r_1 \leq r$, luego $r_1 = r$.

4) P.D. r es raíz simple.

Para mostrar esto primero comprobaremos los siguiente:

4a) P.D. Si B es una submatriz propia de A y β una raíz característica de B, $|\beta| < r$.

β es también una raíz característica de la matriz $\overline{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, es decir, sólo aumentamos renglones y columnas a B para hacerla de las mismas dimensiones que A.
Como A es irreducible, $\overline{B} \leq A_\Pi$ para alguna Π apropiada y $|\beta| < r$ (por 3).

por lo tanto si B es submatriz principal de A entonces $|\beta| < r$.

4b) P.D. r es raíz simple de $\psi(t) = \det(A - It) = 0$.

Sea $\psi'(r)$ la derivada de $\psi(r)$ la cual se puede ver como la suma de los menores de $(n-1)x(n-1)$ del determinante $\det(A-Ir)$ si al detterminante lo ponemos en terminos de sus menores desplazandonos por la diagonal principal.

Sea A_i una de las submatrices principales de orden $(n-1)x(n-1)$ de A.

Por (4a) $\det(A_i - It)$ no puede desaparecer para $t \geq r$, de donde $\det(A_i - Ir) > 0$ y $\psi'(r) > 0$. Así no puede haber otra raíz del mismo valor que r. Por lo tanto r es raíz simple.

A.2 Polinomio característico de grado n.

A menudo nos encontramos con el problema de encontrar las raíces de un polinimio de grado n, lo cual la mayoria de las veces resulta complicado si dicho polinomio no tiene raices enteras y mucho menos raices reales.

Por consiguiente necesitamos metodos numéricos para aproximarnos a dichas soluciones.

A continuación damos el algoritmo y un ejemplo en el programa *Mathematica 6* para encontrar raices de polinomios para una matriz de 12 x 12.

En los siguientes renglones se define el tipo de matriz.

```
L = Table[0, {12}, {12} ];
Clear[a];
Do[Part[L, 1, j] = a[j] , {j, 1, 12}];
Clear[b];
Do[Part[L, j + 1, j] = b[j], {j, 1, 11} ];
L // MatrixForm
```

Se construye el polinomio característico y un polinomio auxiliar que nos uyudara a encontar los valores propios.

```
p[\[λ]_] = Det[\[λ]*IdentityMatrix[12] - L]
```

```
Clear[c]; Do[c[j] = Product[b[i], {i, 1, j}], {j, 1, 11}];
q[\[λ]_] =
a[1]/\[λ] + Sum[a[j]*c[j - 1]/\[λ]^j, {j, 2, 12}]
```

Asignamos las tasas de sobrevivencia

```
{a[1], a[2], a[3], a[4], a[5], a[6], a[7], a[8], a[9], a[10], a[11],
a[12]}
= {0, 0.045, 0.391, 0.472, 0.484, 0.546, 0.543,
        0.502, 0.468, 0.459, 0.433, 0.421};
{b[1], b[2], b[3], b[4], b[5], b[6], b[7], b[8], b[9], b[10], b[11]}
= {0.845, 0.975, 0.965, 0.950, 0.926,
        0.895, 0.850, 0.786, 0.691, 0.561, 0.370};
```

Se grafican tanto el polinomio característico como la función auxiliar

```
Plot[q[\[Lambda]], {\[Lambda], 0, 2}, PlotRange -> {0, 10}];
Plot[p[\[Lambda]], {\[Lambda], -2, 2}, PlotRange -> {-2, 2}];
```

Por último obtenemos los valores propios

```
Eigenvalues[L].
```

CONCLUSIONES

Antes que nada cabe mencionar la importancia de la tasa de crecimiento. Aunque la utilizamos no señalamos explícitamente como obtenerla. La mayoría de las veces se obtiene mediante el análisis estadístico cuya principal herramienta es la observación. La obtención de esta tasa depende de la técnica estadística que se esté aplicando.

Por otra parte, la observación no sólo nos sirve para realizar muestras y realizar el análisis antes mencionado, sino también para tomar en cuenta una gran cantidad de factores o variables de las cuales depende la dinámica de la población.

Y mientras más y mejor se observe a la población que se este estudiando, más y mejor será la comprensión de las variables que influyen en el número de individuos, y así diferenciar las variables más importantes del resto de ellas.

A lo largo de este trabajo y conforme fuimos avanzando en el desarrollo de los modelos fuimos tomando en cuenta más variables tales como la fertilidad de las hembras, la edad, la mortalidad, etc. Y por consiguiente obteniendo modelos más elaborados que representan y asemejan mejor la dinámica de una población real.

La solución y comprensión de estos modelos sería casi imposible sin la ayuda de herramientas matemáticas. Y así como se fueron complicando los modelos nos vimos en la necesidad de utilizar matemáticas más elaboradas como lo fueron el álgebra matricial, la teoría de vectores propios, el teorema de Perron-Frobenius, métodos para solucionar sistemas de ecuaciones diferenciales de nxn, etc.

Estos modelos tienen en la actualidad una enorme importancia en la industria alimenticia, pero estos modelos no sólo se pueden aplicar en este ramo para saber la cantidad de individuos de una especie, sino para saber la cantidad de individuos con ciertas características.

Podemos extrapolar nuestro trabajo al sector médico para saber la cantidad de personas con cierta enfermedad, donde la tasa de nacimiento será sustituida por la tasa de contagio o tasa de nuevos casos por llamarla de alguna manera.

Finalmente cabe recalcar que el tercer modelo continuo que se encuentra en el capitulo dos de este trabajo, es un modelo no publicado hasta el día de hoy en ninguna literatura conocida.

BIBLIOGRAFÍA:

[1]Cooke D. A 2x2 Matrix Model of Population Growth, The Mathematical Gazette, Vol.61, No 416 (Jun 1977), pp. 120-123.

[2] Cooke D. and Leon J. Stability of Population Growth Determined by 2x2 Leslie Matrix With Density-Dependent, Biometrics, Vol. 32, No 2(Jun. 1976), pp 435-442.

[3] Friedberg S. Álgebra Lineal, Publicaciones Cultural, México 1982.

[4] Hirsh M. Smale, S. Differential Equations, Dynamical System , and Linear Álgebra. Academic Press, New York, 1974.

[5]Histein I. N. Nondegative Square Matrices, Econometrica, Vol. 21, No 4 (Oct. 1953), pp. 597-607.

[5] Jordan, D.W. Smith P. Nonlinear Ordinary Differential Equations, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, Oxford University Press, 1977

[6] Ortega J.M. Matrix Theory A second Course, Plenum Press New York, 1987.

[7]Perko L. Differential equations and dynamical systems, New York Springer, 2001

[8] Seneta E. Non-negative Matrices and Markov Chains, Springer, Third Edition 2006.