



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

CONDUCTIVIDAD TÉRMICA EFECTIVA DE
UN COMPUESTO BINARIO PERIÓDICO EN ARREGLO
PARALELOGRÁMICO USANDO EL MÉTODO
ASINTÓTICO A DOS ESCALAS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO(A) EN CIENCIAS

P R E S E N T A

MIRELLA RAMÍREZ RAMÍREZ

DIRECTOR(A) DE LA TESINA: DR. FEDERICO J. SABINA

MÉXICO, D.F.

JUNIO 2009



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Conductividad térmica efectiva de un compuesto binario periódico en arreglo paralelográfico usando el método asintótico a dos escalas

Mirella Ramírez Ramírez

Posgrado en Ciencias Matemáticas, Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, UNAM

Resumen

En este trabajo se obtuvieron nuevas fórmulas analíticas para la conductividad térmica de un compuesto bifásico periódico en arreglo paralelográfico de estructura columnar utilizando el método asintótico de dos escalas. Los problemas de potencial que resultan se resuelven usando teoría de funciones doblemente periódicas debidas a Weierstrass. Los resultados muestran dependencia explícita de las conductividades de los constituyentes, el radio de la fibra de sección transversal circular, de la periodicidad a través de las sumas de la latiz y de los parámetros geométricos del paralelogramo. Se verifica analíticamente la relación de reciprocidad de Keller. Se incluyen casos particulares de las fórmulas, obtenidas por otros autores, para un arreglo cuadrado, rectangular y hexagonal. Los compuestos en que la fibra es perfectamente aislante y superconductor están comprendidos en esta formulación. Se llevan a cabo nuevos cálculos numéricos para dos tipos de paralelogramos, un rombo de lado 1 y un paralelogramo del tipo estudiado por Ling y Tsai, para los cuales las sumas de la latiz están tabuladas. Se muestran gráficas de menos el contraste térmico efectivo en la dirección del eje 1 y del eje 2 contra el contraste de los dos constituyentes como función de la fracción volumétrica ocupada por la fibra y el paralelogramo de ángulo agudo. En general el comportamiento es monótono decreciente. Se señalan propiedades extremas de ciertos compuestos. Se verifica también numéricamente la relación de reciprocidad de Keller. Se plantean al final cuestiones más generales que podrían ser tratadas mediante el método de dos escalas y que tienen interés en las aplicaciones.

1. Introducción

Fabricar materiales que reduzcan la pérdida de energía es de gran importancia sobre todo en estos tiempos donde se ha incrementado el costo de los combustibles y las autoridades han tomado conciencia del calentamiento global. De aquí que sea tan importante el papel de la aislación térmica. En cuanto a los materiales que son utilizados para este fin existe una gran variedad de éstos dependiendo de las temperaturas con las que se éste trabajando, la propiedad física que define estos materiales es la conductividad térmica, cuanto más baja sea ésta en un cuerpo, más se opone el mismo a la transferencia de calor, siendo entonces denominado “material aislante térmico”.

Como mencionamos anteriormente existen una gran variedad de materiales aislantes, pero se sigue tratando de obtener nuevos materiales con mejores características, la investigación en materiales compuestos es de suma importancia en la obtención de estos materiales. El objetivo de la investigación en materiales compuestos es determinar las propiedades efectivas del nuevo material con base en las propiedades físicas y geométricas. En lo que se refiere a propiedades geométricas, los materiales que poseen una estructura periódica son importantes para diferentes aplicaciones en la industria. Para la predicción de las propiedades efectivas existe el método de homogenización asintótica (MHA) que es una técnica basada en un desarrollo asintótico de dos escalas ([1], [2]). El problema fundamental del MHA es que los coeficientes efectivos dependen de la solución de los problemas canónicos sobre una celda periódica, es decir, se requiere la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de frontera periódicas y condiciones de conjugación en las interfases, por lo que para geometrías complicadas es necesario recurrir a los métodos numéricos ([3],[4],[5], entre otros). En el caso de compuestos laminados, es decir, de la homogenización unidimensional, los problemas locales sólo involucran derivadas ordinarias y se han obtenido fórmulas analíticas por diferentes autores. Los problemas bidimensionales sobre la celda son más complicados. Sin embargo, para compuestos fibrosos unidireccionales con fibras cilíndricas periódicamente distribuidas en arreglo cuadrado de una matriz isotrópica, se obtuvieron fórmulas exactas para los coeficientes efectivos ([6], [7]) utilizando la teoría de funciones elípticas. Estos fueron extendidos al caso de componentes con simetría hexagonal en Bravo et al. (1994) para obtener coeficientes efectivos básicos en las aplicaciones a transductores. En ese trabajo se realizan comparaciones con otras teorías y con resultados experimentales que ilustran la eficiencia de las fórmulas.

Se han estudiado diversos aspectos de materiales reforzados de fibras: elástico con simetría cuadrada ([8]); elástico con simetría hexagonal ([9]); piezoeléctrico y simetría cuadrada ([10]); piezoeléctrico y simetría hexagonal ([11]).

Más recientemente, Ley (2008) obtuvo los coeficientes de cizalladura en el caso elástico antiplano de un arreglo rectangular siguiendo la misma metodología. Aunque los constituyentes son isótropos, debido al arreglo periódico rectangular, las propiedades efectivas resultan ser anisótropas.

Nuestro objetivo en este trabajo es la obtención y su cálculo numérico de las propiedades de conductividad térmica de un compuesto periódico de un arreglo columnar de fibras en una matriz que no se ha considerado hasta ahora. El de una celda paralelogramática.

1. Conductividad térmica de un compuesto

Vamos a considerar un compuesto binario periódico de estructura columnar. Las fibras son cilindros muy largos paralelos de sección transversal circular de radio R . Están distribuidos en un arreglo paralelogramico cubriendo todo el espacio. La Figura 1 muestra la celda, es decir, un paralelogramo de base 1, lado b/l y ángulo agudo α , el cual incluye al origen y está en el plano y_1 y y_2 , esta celda se denota por Y . En este compuesto de dos constituyentes tiene lugar un problema de conductividad térmica en el cual κ_1 y κ_2 son las conductividades de la matriz y de la fibra, respectivamente.

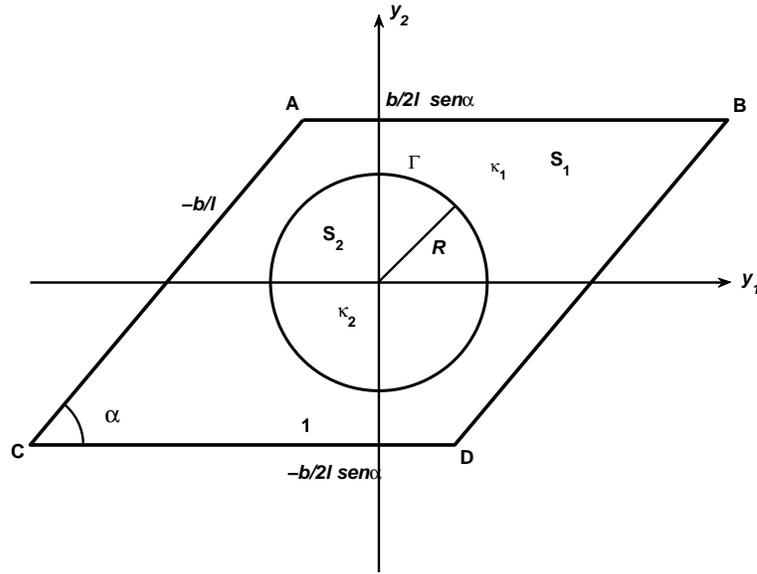


Figura 1: Celda periódica centrada en el origen. Paralelogramo ABCD de base uno, altura b/l y ángulo agudo α . Contiene dos regiones $S_1 \cup S_2$. La fibra ocupa la región S_2 un círculo de radio R . S_1 es el complemento de ABCD y Γ la interfase común. Las conductividades térmicas de cada fase (isótropa) son κ_1, κ_2 .

Vamos a considerar un medio no acotado con estructura periódica en una región Ω en R^3 , las propiedades del material están determinadas por $\kappa_{ij}(y)$, donde $y = x/\epsilon$ y $x = (x_1, x_2, x_3)$. Así que consideramos el siguiente problema de ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de contacto ideal entre ambos materiales ([12]). El problema es

$$A^\epsilon T_\epsilon = h \quad \text{en } \Omega \subset R^3, \quad (1)$$

donde

$$A^\epsilon = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\kappa_{ij} \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

es un operador elíptico que depende de un parámetro pequeño ϵ a través de los coeficientes de conductividad térmica $\kappa_{ij} = \kappa_{ij}(\frac{x}{\epsilon})$. Hay que notar que en el operador A^ϵ se ha utilizado la convención de suma de Einstein. Dado que $\epsilon \ll 1$, la dependencia espacial de ellos es muy rápida. La función h define las fuentes de calor en Ω . Se trata de un problema elíptico con coeficientes que varían rápidamente en la región Ω . Digamos que L es el diámetro de Ω ,

entonces $\epsilon = \frac{l}{L}$ y $\epsilon \ll 1$ esto quiere decir que estamos ante un problema de dos escalas. Se busca la temperatura T_ϵ que cumpla con (1). Además se deben cumplir las condiciones de contacto ideal entre la matriz y la fibra esto significa que la temperatura T_ϵ y el flujo de calor q_ϵ a través de la interfase Γ deben ser funciones continuas, es decir,

$$[[T_\epsilon]] = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (2)$$

$$[[q_\epsilon]] = 0 \quad \text{en } \Gamma. \quad (3)$$

La notación de doble paréntesis cuadrado usada en (2) y (3) expresa el salto de la función a través de la interfase Γ . Como se acostumbra en este tipo de problemas se introducen dos escalas: la variable lenta x y la variable rápida $y = \frac{x}{\epsilon}$. Se plantea el ansatz siguiente: La solución del sistema se va a suponer como una expansión asintótica de dos escalas, es decir,

$$T_\epsilon(x) = T_0(x, y) + \epsilon T_1(x, y) + \epsilon^2 T_2(x, y) + \dots \quad (4)$$

donde las funciones $T_i(x, y)$ son Y periódicas, es decir, periódicas en y . Tomando en cuenta la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial x_i},$$

el operador elíptico A^ϵ se escribe como

$$A^\epsilon = \epsilon^{-2} A_1 + \epsilon^{-1} A_2 + \epsilon^0 A_3, \quad (5)$$

donde

$$A_1 = -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\kappa_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad A_3 = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\kappa_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

$$A_2 = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\kappa_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right) - \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\kappa_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

De acuerdo al ansatz, (5) y (1), obtenemos una sucesión de problemas para T_i . Es decir

$$A_1 T_0 = 0, \quad (6)$$

$$A_1 T_1 + A_2 T_0 = 0, \quad (7)$$

$$A_1 T_2 + A_2 T_1 + A_3 T_0 = h, \quad (8)$$

⋮

Antes de seguir con el análisis del sistema, hay que hacer notar que la ecuación

$$A_1 u = F \quad \text{en } Y \quad (9)$$

para una función Y periódica tiene una única solución si ([?])

$$\langle F \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y F dy = 0,$$

donde $|Y|$ denota el volumen de la celda.

De la ecuación (6) se sigue que la temperatura promedio T_0 es una función que depende únicamente de x , es decir,

$$T_0 = T(x). \quad (10)$$

La substitución de (10) en (7) nos conduce a

$$A_1 T_1 = \frac{\partial \kappa_{ij}(y)}{\partial y_i} \frac{\partial T(x)}{\partial x_j}.$$

Entonces T_1 se puede escribir como una superposición de soluciones del tipo producto de la forma

$$T_1(x, y) = {}_j\Theta(y) \frac{\partial T(x)}{\partial x_j} + \bar{T}_1(x); \quad (11)$$

cada ${}_j\Theta(y)$ es la solución periódica a la ecuación canónica

$$A_1 {}_j\Theta = \frac{\partial \kappa_{ij}}{\partial y_i}(y) \quad \text{en } Y$$

y $\bar{T}_1(x)$ es una función que depende sólo de x cuyo promedio en la celda por (9) es nulo, por lo tanto vale cero.

Ahora nos falta resolver la ecuación (8), para esto tomamos en cuenta que esta tiene solución única si

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y (A_2 T_1 + A_3 T_0) dy = h.$$

Esta condición combinada con (11) da la siguiente ecuación de homogenización para $T(x)$

$$-\bar{\kappa}_{ij} \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_i \partial x_j} = h \quad \text{en } \Omega,$$

donde las cantidades constantes

$$\bar{\kappa}_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(\kappa_{ij}(y) + \kappa_{ik}(y) \frac{\partial {}_j\Theta}{\partial y_k} \right) dy \quad (12)$$

son los coeficientes efectivos para el operador homogenizado

$$\bar{A} = -\bar{\kappa}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (13)$$

Con solo resolver la ecuación (7) se han encontrado los coeficientes efectivos, que es el objetivo de este trabajo. Por lo tanto no es necesario resolver para T_2 en adelante. Hasta este momento sólo se ha considerado el ansatz aplicado a la ecuación de gobierno (1). Pero como se puede ver en la ecuación (12) los coeficientes efectivos dependen de la solución de los problemas canónicos. En nuestro caso columnar sólo hay que resolver dos casos, el caso en la dirección del eje 1 y el caso en la dirección del eje 2. Las condiciones de interfase (2) y (3) son tratadas de la misma manera, es decir, la substitución de ansatz, la regla de la cadena y agrupamiento en términos de potencias iguales de ϵ . En la siguiente sección se plantean los dos problemas canónicos que se obtienen. Son problemas armónicos definidos en una celda con condiciones periódicas en los lados del paralelogramo y con condiciones de interfase dadas. Dado que nuestro objetivo principal es la obtención de las propiedades efectivas del compuesto procedemos a plantear los problemas y resolverlos usando la teoría de funciones armónicas. En particular, usaremos las funciones doblemente periódicas debidas a Weierstrass. Ellas conducen de una forma natural a expresiones analíticas para los coeficientes de conductividad térmica anisótropos .

1. Solución de los problemas canónicos

1.1. Problema canónico 1

Se busca una solución doblemente periódica ${}_1\Theta^\Upsilon$, $\Upsilon = 1, 2$ que cumpla con las siguientes condiciones

$$\nabla^2 {}_1\Theta^\Upsilon = 0 \quad \text{en } S_\Upsilon, \quad (1)$$

$$[[{}_1\Theta^\Upsilon]] = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (2)$$

$$[[\kappa_\Upsilon({}_1\Theta_{,1}^\Upsilon n_1 + {}_1\Theta_{,2}^\Upsilon n_2)]] = -[[\kappa_\Upsilon]]n_1 \quad \text{en } \Gamma, \quad (3)$$

$$\langle {}_1\Theta \rangle = 0.$$

Donde $\kappa_{ij}^\Upsilon = \kappa_\Upsilon \delta_{ij}$ que es la conductividad térmica que ocupa la región S_Υ , el vector unidad normal exterior a la interfase Γ es $n = (n_1, n_2) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Como mencionamos anteriormente el doble paréntesis cuadrado indica el salto de la función a través de la interfase, es decir,

$$[[{}_1\Theta^\Upsilon]] = {}_1\Theta^1 - {}_1\Theta^2.$$

La función buscada debe ser par pues el lado derecho de la ecuación (3) lo es. Para encontrar la solución de este problema se va a hacer uso de la teoría de funciones elípticas. Se propone una solución dada por la combinación lineal completa de estas funciones, así

$$\begin{aligned} {}_1\Theta^1(z) &= \text{Re} \left\{ a_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \frac{\zeta^{k-1}(z)}{(k-1)!} \right\} \quad \text{en } S_1, \\ {}_1\Theta^2(z) &= \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} {}^o b_k z^k \right\} \quad \text{en } S_2. \end{aligned}$$

Aquí $z = y_1 + iy_2$, ζ es la función Zeta de Weierstrass la es cual cuasiperiódica con períodos ω_1, ω_2 y ζ^k indica la k -ésima derivada de esta función la cual es doblemente periódica. Los coeficientes a_k y b_k son reales y desconocidos. El superíndice o en el signo de suma indica que sólo suma sobre los índices impares. Ahora el objetivo es encontrar estos coeficientes. Ya que tanto ${}_1\Theta^1$ y ${}_1\Theta^2$ satisfacen (1). Se puede encontrar una relación entre a_0 y a_1 usando la cuasiperiodicidad de la función $\zeta(z)$. Como ${}_1\Theta^1(z)$ es doblemente periódica

$${}_1\Theta^1(z + \omega_1) - {}_1\Theta^1(z) = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Re} \left\{ a_0(z + \omega_1) + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \frac{\zeta^{k-1}(z + \omega_1)}{(k-1)!} \right\} - \text{Re} \left\{ a_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \frac{\zeta^{k-1}(z)}{(k-1)!} \right\} \\ &= \text{Re} \{ a_0 \omega_1 + a_1 [\zeta(z + \omega_1) - \zeta(z)] \}. \end{aligned} \quad (4)$$

La cuasiperiodicidad de la función $\zeta(z)$, es decir ([13]),

$$\zeta(z + \omega_1) - \zeta(z) = \delta_1,$$

y (4) llevan a

$$a_0 \omega_1 + a_1 \delta_1 = 0,$$

donde $\delta_1 = \zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$. Sin pérdida de generalidad, tomamos $\omega_1 = 1$ y por lo tanto $\delta_1 = \pi$, que son reales. Usando esta relación ${}_1\Theta^1(z)$ se puede escribir como

$${}_1\Theta^1(z) = \operatorname{Re} \left\{ -\pi a_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \frac{\zeta^{k-1}(z)}{(k-1)!} \right\}.$$

Haciendo el desarrollo de Laurent alrededor del origen de ${}_1\Theta^1(z)$ obtenemos

$${}_1\Theta^1(z) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} {}^o a_m z^{-m} - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \sum_{m=1}^{\infty} {}^o k \eta'_{km} z^m \right\},$$

$$\eta'_{km} = \frac{(k+m-1)!}{k!m!} S_{k+m}, \quad (5)$$

$$S_k = \sum_{l,n} '(l\omega_1 + n\omega_2)^{-k} \quad k = 4, 6, \dots,$$

donde S_k es la suma de la latiz asociada a la celda de períodos $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = \frac{b}{\tau} e^{i\alpha}$. En la suma anterior se excluye el caso $l = n = 0$ denotando esto con la prima en el signo suma. Nótese que la matriz η'_{km} es simétrica. Definimos aquí

$$S_2 = \delta_1, \quad (6)$$

por lo tanto en (5) se incluye el caso $k = m = 1$, así $\eta'_{11} = S_2$. El contexto distingue la región que ocupa la matriz de la componente η'_{11} , así que no debe causar confusión.

Para calcular los valores de a_k y b_k se va a hacer uso de las ecuaciones (2) – (3). Primeramente usando la ecuación (2) se tiene,

$$\sum_{m=1}^{\infty} {}^o a_m R^{-m} \cos m\theta - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \sum_{m=1}^{\infty} {}^o k \eta'_{km} R^m \cos m\theta = \sum_{m=1}^{\infty} {}^o b_m R^m \cos m\theta,$$

es decir, se tiene una serie de cosenos nula

$$\sum_{m=1}^{\infty} {}^o \cos m\theta (R^{-m} a_m - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o k a_k R^m \eta'_{km} - b_m R^m) = 0,$$

o sea,

$$R^{-m} a_m - R^m \sum_{k=1}^{\infty} {}^o k a_k \eta'_{km} = b_m R^m. \quad (7)$$

Ahora se considera la segunda condición de interfase pero antes vamos a dar unas definiciones sólo para hacer más fácil el manejo de las funciones. Sean

$$B_1 = -\frac{\delta_1}{\omega_1} a_1 = -\pi a_1, \quad (8)$$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}, \quad (9)$$

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} {}^o b_k z^k. \quad (10)$$

Hacemos uso de las ecuaciones (8) – (10) y de la condición (3) para obtener

$$\kappa_1 B_1 n_1 + \operatorname{Re} \{ \kappa_1 f'(z) - \kappa_2 g'(z) \} n_1 - \operatorname{Im} \{ \kappa_1 f'(z) - \kappa_2 g'(z) \} n_2 = -[[\kappa_\Upsilon]] n_1. \quad (11)$$

Esta ecuación se parametriza usando coordenadas polares, es decir,

$$y_1 = R \cos \theta, \quad y_2 = R \sin \theta; \quad (12)$$

entonces

$$n_1 = \cos \theta = \frac{1}{R} \frac{\partial y_2}{\partial \theta}, \quad n_2 = \sin \theta = \frac{1}{R} \frac{\partial y_1}{\partial \theta}. \quad (13)$$

Si definimos

$$v = \operatorname{Im} \{ \kappa_1 f(z) - \kappa_2 g(z) \}. \quad (14)$$

y hacemos uso de las ecuaciones anteriores, la ecuación (11) se escribe como

$$\kappa_1 B_1 \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial y_1} \left(-\frac{\partial y_1}{\partial \theta} \right) = -[[\kappa_\Upsilon]] \cos \theta.$$

Esto se puede integrar con respecto a θ obteniendo

$$\kappa_1 B_1 \sin \theta + \frac{1}{R} v = -[[\kappa_\Upsilon]] \sin \theta + C, \quad (15)$$

donde C es una constante de integración que es cero por la periodicidad de v . Entonces de la ecuación anterior se obtiene

$$[[\kappa_\Upsilon]] R \sin \theta - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \kappa_1 [a_m R^{-m} + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k k \eta'_{km} R^m] + \kappa_2 b_m R^m \right\} \sin m\theta = 0, \quad (16)$$

que es una serie de Fourier nula. Estudiemos con más detalle esta serie, es decir, los casos $m = 1$ y $m \neq 1$. Primero consideramos el caso con $m = 1$

$$\left\{ [[\kappa_\Upsilon]] R - \kappa_1 [a_1 R^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o k \eta'_{k1} R] - \kappa_2 b_1 R \right\} \sin \theta = 0, \quad (17)$$

luego el coeficiente de $\sin \theta$ es nulo, es decir,

$$[[\kappa_\Upsilon]] R - \kappa_1 [a_1 R^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o k \eta'_{k1} R] = \kappa_2 b_1 R. \quad (18)$$

Cuando $m \neq 1$

$$\sum_{m=3}^{\infty} \left\{ \kappa_1 [-a_m R^{-m} - R^m \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k k \eta'_{km}] - \kappa_2 b_m R^m \right\} \sin m\theta = 0; \quad (19)$$

entonces el coeficiente de $\sin m\theta$ es nulo, es decir,

$$-\kappa_1 [a_m R^{-m} + R^m \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k k \eta'_{km}] = \kappa_2 b_m R^m. \quad (20)$$

Ahora reescribimos (18) y (20) en una sola ecuación,

$$[[\kappa_{\Upsilon}]]R\delta_{1m} - \kappa_1[a_m R^{-m} + R^m \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k k \eta'_{km}] = \kappa_2 b_m R^m. \quad (21)$$

Se han obtenido dos ecuaciones (7) y (21) para los coeficientes a_m y b_m . Se va eliminar b_m para tener todo en términos de a_m . Al despejar b_m de (7) y sustituir en la ecuación (21) se obtiene

$$R\delta_{m1} [[\kappa_{\Upsilon}]] - (\kappa_1 + \kappa_2)a_m R^{-m} - [[\kappa_{\Upsilon}]] R^m \sum_{k=1}^{\infty} {}^o k a_k \eta'_{km} = 0. \quad (22)$$

Escribámosla en términos de $\chi = \frac{[[\kappa_{\Upsilon}]]}{\kappa_1 + \kappa_2}$, un coeficiente de contraste relativo,

$$R^{-m} a_m + \chi R^m \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k k \eta'_{km} = \chi R \delta_{m1}. \quad (23)$$

Con un reescalamiento, este sistema se puede escribir en una forma más conveniente, entonces $a'_m = \sqrt{m} a_m R^{-m}$ y definiendo una matriz W con componentes

$$w_{km} = \frac{(k+m-1)!}{(k-1)!(m-1)!} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{m}} R^{k+m} S_{k+m}. \quad (24)$$

Esta matriz es simétrica y los índices k corren sobre los impares. El sistema (23) queda como

$$\chi^{-1} a'_m + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o w_{mk} a'_k = R \delta_{1m}; \quad (25)$$

o equivalentemente,

$$(\chi^{-1} I + W)D = U \quad (26)$$

con

$$(I)_{ij} = \delta_{ij}, \quad D = (a'_1, a'_2, a'_3, \dots)^T, \quad y \quad U = (R, 0, 0, \dots)^T. \quad (27)$$

De la misma forma, de (7) se obtiene la forma matricial para los coeficientes b'_k donde $b'_k = \sqrt{k} b_k R^k$

$$(I - W)D = E, \quad (28)$$

donde

$$E = (b'_1, b'_2, \dots)^T. \quad (29)$$

1.2. Problema canónico 2

Se está buscando una función ${}_2\Theta^{\Upsilon}$, $\Upsilon = 1, 2$ que cumpla con la siguientes condiciones

$$\nabla^2 {}_2\Theta^{\Upsilon} = 0 \quad \text{en } S_{\Upsilon}, \quad (30)$$

$$[{}_2\Theta^{\Upsilon}] = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (31)$$

$$[[\kappa_{\Upsilon}({}_2\Theta_{,1}^{\Upsilon} n_1 + {}_2\Theta_{,2}^{\Upsilon} n_2)]] = -[[\kappa_{\Upsilon}]] n_2 \quad \text{en } \Gamma, \quad (32)$$

$$\langle {}_2\Theta \rangle = 0.$$

A diferencia del primer problema en éste la función buscada es impar pues el lado derecho de la ecuación (32) lo es. También debe ser doblemente periódica, por esto se propone que la solución sea de la forma,

$${}_2\Theta^1(z) = \text{Im} \left\{ a_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \frac{\zeta^{k-1}(z)}{(k-1)!} \right\} \quad \text{en } S_1, \quad (33)$$

$${}_2\Theta^2(z) = \text{Im} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} {}^o b_k z^k \right\} \quad \text{en } S_2. \quad (34)$$

Los coeficientes son reales, desconocidos y son distintos de los que se encontraron en el problema 1, pues representan otra función. Al igual que en el problema 1, aquí también es posible encontrar una relación entre a_1 y a_0 usando la cuasiperiodicidad de la función ζ de Weierstrass relativa al periodo ω_2 . Como ${}_2\Theta^1(z)$ es doblemente periódica

$${}_2\Theta^1(z + \omega_2) - {}_2\Theta^1(z) = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Im} \left\{ a_0(z + \omega_2) + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \frac{\zeta^{k-1}(z + \omega_2)}{(k-1)!} \right\} - \text{Im} \left\{ a_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \frac{\zeta^{k-1}(z)}{(k-1)!} \right\} \\ &= \text{Im} \{ a_0 \omega_2 + a_1 [\zeta(z + \omega_2) - \zeta(z)] \} = a_0 \text{Im } \omega_2 + a_1 \text{Im } \delta_2, \end{aligned} \quad (35)$$

aquí δ_2 es la segunda constante de cuasiperiodicidad y está dada por $\delta_2 = \zeta\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$ ([?])

$$\zeta(z + \omega_2) - \zeta(z) = \delta_2.$$

La relación que hay entre a_0 y a_1 es

$$a_0 = -\frac{\text{Im } \delta_2}{\text{Im } \omega_2} a_1. \quad (36)$$

Usamos esta relación para escribir a ${}_2\Theta^1$ como

$${}_2\Theta^1(z) = \text{Im} \left\{ -\frac{\delta_2}{\omega_2} a_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \frac{\zeta^{k-1}(z)}{(k-1)!} \right\}. \quad (37)$$

Haciendo la expansión en series de Laurent de ${}_2\Theta^1(z)$ alrededor del origen, obtenemos

$${}_2\Theta^1(z) = \text{Im} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} {}^o a_m z^{-m} - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \sum_{m=1}^{\infty} {}^o k \eta'_{km} z^m \right\}. \quad (38)$$

Donde η'_{km} está dada por la ecuación (5) excepto por

$$\eta'_{11} = S_2 = \frac{\text{Im } \delta_2}{\text{Im } \omega_2}. \quad (39)$$

Para obtener un par de sistemas de ecuaciones para a_m y b_m , se va a proceder de forma similar que en el problema 1. Usando la ecuación (31) se obtiene

$$\sum_{m=1}^{\infty} \circ \text{sen } m\theta \left\{ R^{-m} a_m + \left[\sum_{k=1}^{\infty} \circ a_k k \eta'_{km} + b_m \right] R^m \right\} = 0, \quad (40)$$

que es una serie seno de Fourier nula. Por lo tanto los coeficientes son nulos, es decir,

$$-R^{-m} a_m - R^m \sum_{k=1}^{\infty} \circ k \eta'_{km} a_k = R^m b_m. \quad (41)$$

Por medio de la ecuación (32) se llega a

$$\kappa_1 B_2 n_2 + \text{Im} \{ \kappa_1 f'(z) - \kappa_2 g'(z) \} n_1 + \text{Re} \{ \kappa_1 f'(z) - \kappa_2 g'(z) \} n_2 = -[[\kappa\Upsilon]] n_2, \quad (42)$$

donde $f(z)$ y $g(z)$ se definen como en la sección anterior y $B_2 = -\frac{\text{Im } \delta_2}{\text{Im } \omega_2} a_1$. Ahora se introduce

$$u = \text{Re} \{ \kappa_1 f(z) - \kappa_2 g(z) \}.$$

Utilizando esta definición y coordenadas polares se tiene que

$$\kappa_1 B_2 \text{sen } \theta + \left(-\frac{\partial u}{\partial y_2} \frac{1}{R} \frac{\partial y_2}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial u}{\partial y_1} \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial y_2}{\partial \theta} \right) = -[[\kappa\Upsilon]] \text{sen } \theta.$$

Al integrar la ecuación anterior con respecto a θ se llega a lo siguiente

$$-\kappa_1 B_2 \cos \theta - \frac{1}{R} u = [[\kappa\Upsilon]] \cos \theta + C,$$

donde C es una constante de integración, esta constante C es cero por la periodicidad de u . Reescribiendo la ecuación anterior se tiene la siguiente serie de cosenos,

$$[[\kappa\Upsilon]] R \cos \theta + \sum_{m=1}^{\infty} \circ \{ \kappa_1 [a_m R^{-m} - R^m \sum_{k=1}^{\infty} \circ a_k k \eta'_{km}] - \kappa_2 b_m R^m \} \cos m\theta = 0,$$

que es equivalente a decir que

$$[[\kappa\Upsilon]] R \delta_{m1} + \kappa_1 [a_m R^{-m} - R^m \sum_{k=1}^{\infty} \circ a_k k \eta'_{km}] = \kappa_2 b_m R^m. \quad (43)$$

Para encontrar los valores de a_m y b_m se hace uso de las ecuaciones (41) y (43) para obtener,

$$\chi R^m \sum_{k=1}^{\infty} \circ a_k k \eta'_{km} - R^{-m} a_m = \chi R \delta_{1m}. \quad (44)$$

Reescalando como en el problema 1 se obtiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \circ (\chi^{-1} \delta_{mk} - w_{mk}) a'_k = -R \delta_{1k}, \quad (45)$$

o en la forma

$$(\chi^{-1} I - W) D = -U, \quad (46)$$

donde las matrices W, D, U están definidas en el problema 1 excepto la componente $w_{11} = R^2 S_2$ con S_2 dado por (39). Para encontrar los valores de b_k se utiliza (41) y de la misma forma que en el problema 1 se llega a un sistema de la forma,

$$(I - W) D = -E, \quad (47)$$

con E dado en (29).

1. Propiedades efectivas y relaciones de reciprocidad

1.1. Propiedades efectivas

En esta sección se van a calcular las propiedades efectivas del arreglo paralelográfico. La conductividad térmica de cada constituyente es la de un material isótropo, es decir, que depende de una sola constante. Así, definimos los elementos de la matriz en términos de ese parámetro κ_{Υ} ,

$$\kappa_{ij}^{\Upsilon} = \kappa_{\Upsilon} \delta_{ij}. \quad (1)$$

La conductividad térmica efectiva depende de las conductividades κ_{Υ} de cada material y de la función solución de cada problema canónico. La expresión que se obtuvo en (12) del capítulo 2 es:

$$\bar{\kappa}_{ij} = \langle \kappa_{ij}^{\Upsilon} + \kappa_{ip}^{\Upsilon} \Theta_{,j} \rangle. \quad (2)$$

El primer sumando da lugar a una expresión que corresponde al promedio aritmético de las conductividades de los constituyentes, es decir,

$$\kappa_v = \frac{\kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_2}{V} \quad (3)$$

y

$$V = V_1 + V_2 \quad (4)$$

donde $\frac{V_1}{V}$ y $\frac{V_2}{V}$ son las fracciones volumétricas por unidad de longitud de la matriz y la fibra respectivamente.

Es claro que, debido a (1), la expresión (2) también es una matriz diagonal. Sólo que en este caso, el de un paralelogramo, es en general anisotrópa, es decir, sus componentes diagonales son diferentes entre sí. Por lo tanto la ecuación (2) adopta la forma siguiente para las componentes no nulas

$$\bar{\kappa}_{11} = \kappa_v + \langle \kappa_{11} \Theta_{,1} \rangle, \quad (5)$$

$$\bar{\kappa}_{22} = \kappa_v + \langle \kappa_{22} \Theta_{,2} \rangle, \quad (6)$$

$$\bar{\kappa}_{33} = \kappa_v. \quad (7)$$

Observamos que los problemas canónicos 1 y 2 dan respectivamente, la contribución a la propiedad efectiva en la dirección 1 y 2 solamente. Mientras que la conductividad a lo largo del eje del cilindro (eje 3) la conductividad efectiva es el promedio aritmético.

Para tener una expresión explícita de $\bar{\kappa}_{11}$, vamos a calcular $\langle \kappa_{11} \Theta_{,1} \rangle$ por medio del Teorema de Gauss y la continuidad de la temperatura a través de la interfase. Se tiene

$$V \langle \kappa_{11} \Theta_{,1} \rangle = \kappa_1 \int_{S_1} \Theta_{,1}^1 dy + \kappa_2 \int_{S_2} \Theta_{,1}^2 dy, \quad (8)$$

$$= -[[\kappa_{\Upsilon}]] \int_{\Gamma} \Theta^2 dy_2. \quad (9)$$

Como Γ es la circunferencia de radio R, entonces podemos parametrizar en coordenadas polares, es decir, hacer

$$y_2 = R \sen \theta, \quad dy_2 = R \cos \theta d\theta.$$

Entonces

$$\int_{\Gamma} \Theta^2 dy_2 = R \int_0^{2\pi} \Theta^2 \cos \theta d\theta.$$

Recordemos que

$${}_1\Theta^2 = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} {}^o b_k z^k \right\}.$$

Por esto y por la ortogonalidad de las funciones $\cos m\theta$ y $\cos n\theta$ se tiene que

$$\int_{\Gamma} {}_1\Theta^2 dy_2 = R^2 \pi b_1. \quad (10)$$

De la condición (7) del capítulo 3

$$b_1 = R^{-2} a_1 - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o k a_k \eta'_{k1}, \quad (11)$$

por lo tanto

$$\bar{\kappa}_{11} = \kappa_v - \frac{[[\kappa_{\Upsilon}]]}{V} \left\{ \pi a_1 - \pi R^2 \sum_{k=1}^{\infty} {}^o k a_k \eta'_{k1} \right\}. \quad (12)$$

De la ecuación (23) del capítulo 3 se tiene la siguiente relación

$$\sum_{k=1}^{\infty} {}^o k a_k \eta'_{k1} = 1 - \frac{a_1}{\chi R^2},$$

entonces

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_{11} &= \kappa_v - \frac{[[\kappa_{\Upsilon}]]}{V} \left\{ \pi a_1 - \pi R^2 \left(1 - \frac{a_1}{\chi R^2} \right) \right\} \\ &= \kappa_v - \frac{[[\kappa_{\Upsilon}]]}{V} \left\{ -\pi R^2 + \frac{2\pi \kappa_1}{[[\kappa_{\Upsilon}]]} a_1 \right\} \\ &= \kappa_v - \frac{2\pi}{V} \kappa_1 a_1 + \pi \frac{1}{V} R^2 [[\kappa_{\Upsilon}]]. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que

$$k_v = \kappa_1 - \frac{[[\kappa_{\Upsilon}]]}{V} V_2 \quad y \quad V_2 = \pi R^2. \quad (13)$$

tenemos

$$\bar{\kappa}_{11} = \kappa_1 \left(1 - 2\pi \frac{a_1}{V} \right). \quad (14)$$

Esta ecuación está en términos sólo de a_1 . La ecuación (26) del capítulo 3 se puede descomponer en las siguientes dos ecuaciones,

$$(\chi^{-1} + w_{11})a'_1 + \mathcal{V}^T D' = -R, \quad (15)$$

$$\mathcal{V} a'_1 + (\chi^{-1} I + W') D' = 0. \quad (16)$$

donde la matriz W y el vector D se descompone de la siguiente manera

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & \mathcal{V}^T \\ \mathcal{V} & W' \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} a_1 \\ D' \end{pmatrix}.$$

Donde D' y \mathcal{V} son vectores y W' es una matriz. Esto se hace con el fin de encontrar una expresión para a_1 y poder sustituirla en la ecuación anterior. Al despejar D' de la ecuación (16) y sustituir en (15) obtenemos

$$[(\chi^{-1} + w_{11}) - \mathcal{V}^T(\chi^{-1} + W')\mathcal{V}]a'_1 = -R,$$

y de aquí se tiene

$$\begin{aligned} a'_1 &= -R\chi[1 + w_{11}\chi - \chi^2\mathcal{V}^T(I + \chi W')^{-1}\mathcal{V}]^{-1} \\ &= -R\chi[1 + w_{11}\chi - \chi^2\mathcal{V}^T {}_1M^{-1}\mathcal{V}]^{-1}, \end{aligned} \quad (17)$$

con

$${}_1M = I + \chi W'. \quad (18)$$

Sustituimos a'_1 en (14) para obtener

$$\bar{\kappa}_{11} = \kappa_1 \left\{ 1 - 2\pi R^2 \frac{1}{V} \chi [1 + {}_1w_{11}\chi - \chi^2\mathcal{V}^T {}_1M^{-1}\mathcal{V}]^{-1} \right\}. \quad (19)$$

Esta ecuación para $\bar{\kappa}_{11}$ sólo depende χ , W , R y V . Nótese que se ha incorporado el préndice 1 en la componente de w_{11} en (19).

Calculamos $\langle \kappa_{2 \ 2}\Theta_{,2} \rangle$ de una forma similar a la de $\langle \kappa_{1 \ 1}\Theta_{,1} \rangle$; obteniendo la siguiente expresión para $\bar{\kappa}_{22}$,

$$\bar{\kappa}_{22} = \kappa_{\Upsilon} + \frac{[[\kappa_{\Upsilon}]]}{V} \left\{ \pi a_1 + \pi R^2 \sum_{k=1}^{\infty} {}^o k a_k \eta'_{k1} \right\}.$$

De la ecuación (44) del capítulo 3 se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} {}^o k a_k \eta'_{k1} = \chi^{-1} R^{-2} a_1 + 1,$$

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_{22} &= \kappa_v + \frac{[[\kappa_v]]}{V} \left\{ \pi a_1 + \pi R^2 \left[\frac{a_1}{\chi R^2} + 1 \right] \right\} \\ &= \kappa_v + \frac{[[\kappa_{\Upsilon}]]}{V} \left\{ \frac{2\pi\kappa_1 a_1}{[[\kappa_{\Upsilon}]]} + \pi R^2 \right\} \\ &= \kappa_v + \frac{2\pi}{V} \kappa_1 a_1 + \frac{\pi}{V} R^2 [[\kappa_{\Upsilon}]]; \end{aligned}$$

usando (13), se llega a,

$$\bar{\kappa}_{22} = \kappa_1 \left(1 + 2 \frac{\pi}{V} a_1 \right). \quad (20)$$

La ecuación (46) del capítulo 3 se descompone en

$$\begin{aligned} (\chi^{-1} - w_{11})a'_1 - \mathcal{V}^T D' &= -R. \\ -\mathcal{V}a'_1 + (\chi^{-1} - W')D' &= 0. \end{aligned}$$

Para encontrar la siguiente expresión de a'_1

$$a'_1 = -R\chi[1 - w_{11}\chi - \chi^2\mathcal{V}^T {}_2M^{-1}\mathcal{V}]^{-1}, \quad (21)$$

con

$${}_2M = I - \chi W'. \quad (22)$$

Si sustituimos este valor en (20) e incorporamos el preíndice 2 en w_{11} , nos da

$$\bar{\kappa}_{22} = \kappa_1 \left\{ 1 - 2\pi R^2 \frac{1}{V} \chi [1 - {}_2w_{11}\chi - \chi^2 \mathcal{V}^T {}_2M^{-1} \mathcal{V}]^{-1} \right\} \quad (23)$$

Recapitulando, hemos obtenido la matriz de conductividad térmica efectiva para un compuesto de dos constituyentes que tiene una periodicidad paralelográmica con períodos ω_1 y ω_2 ; esta matriz tiene como componentes, las fórmulas (5), (6) y (7). O en su forma final (19) y (23) y (7).

Las fórmulas obtenidas en esta sección son válidas para una celda periódica en forma de paralelogramo. En particular cuando $\alpha = \pi/2$, es decir, la celda es rectangular, se recobran los datos analíticos de [16]. Por lo tanto, incluyen el caso de un arreglo cuadrado de [9] (con una notación ligeramente diferente) y [14]. Así en estos casos límites hemos comprobado analíticamente nuestras fórmulas.

Es interesante destacar que estas fórmulas muestran una dependencia explícita de χ la cual contiene la información física del compuesto; del radio de la fibra, de δ_1 y δ_2 y los S_k que dependen de los períodos del paralelogramo. La dependencia de δ_1 y δ_2 esta en ${}_1w_{11}$ y ${}_2w_{11}$, la dependencia de los S_k está en M y en \mathcal{V} .

1.2. Relaciones de reciprocidad

Las fórmulas analíticas (19) y (23) que derivamos en la sección anterior dan lugar a expresiones explícitas para las conductividades térmicas en las direcciones de los ejes 1 y 2, respectivamente. La dependencia de la conductividad térmica de cada constituyente (κ_1 y κ_2) aparece explícita, es decir,

$$\bar{\kappa}_{11} = \bar{\kappa}_{11}(\kappa_1, \kappa_2),$$

$$\bar{\kappa}_{22} = \bar{\kappa}_{22}(\kappa_1, \kappa_2).$$

Hace más de cincuenta años, Keller ([1]) probó, en forma general la siguiente relación de reciprocidad, que en nuestra notación se expresa como

$$\bar{\kappa}_{11}(\kappa_1, \kappa_2) \bar{\kappa}_{22}(\kappa_2, \kappa_1) = \kappa_1 \kappa_2. \quad (24)$$

Este resultado es cierto para un arreglo doblemente periódico de una celda con dos constituyentes de geometría arbitraria. En particular nuestras expresiones (19) y (23) deben estar relacionadas entre sí de esta manera. Esto nos proporciona una forma de comprobar que las derivaciones que hicimos son correctas.

Procedemos

$$\frac{\bar{\kappa}_{11}}{\kappa_1} = \frac{1 + {}_1w_{11}\chi - \chi^2 \mathcal{V}^T {}_1M^{-1} \mathcal{V} - \frac{2\pi}{V} \chi R^2}{1 + {}_1w_{11}\chi - \chi^2 \mathcal{V}^T {}_1M^{-1} \mathcal{V}},$$

el valor de ${}_1w_{11}$ está dado por

$${}_1w_{11} = {}_1\eta'_{11} R^2, \quad {}_1\eta'_{11} = \delta_1 = \pi.$$

Recuérdese que el preíndice 1 está asociado al problema canónico 1.

$$\frac{\bar{\kappa}_{11}(\kappa_1, \kappa_2)}{\kappa_1} = \frac{1 + \pi R^2 \chi - \chi^2 \mathcal{V}^T {}_1M^{-1} \mathcal{V} - \frac{2\pi}{V} \chi R^2}{1 + \pi R^2 \chi - \chi^2 \mathcal{V}^T {}_1M^{-1} \mathcal{V}}. \quad (25)$$

Dado el período $\omega_2 = \frac{b}{l} e^{i\alpha}$, el valor de δ_2 se obtiene de la relación de Legendre

$$\delta_1 \omega_2 - \delta_2 \omega_1 = i2\pi, \quad (26)$$

entonces

$$\frac{\text{Im}\delta_2}{\text{Im}\omega_2} = \delta_1 - \frac{2\pi}{V}. \quad (27)$$

Ahora reescribiendo (19)

$$\frac{\bar{\kappa}_{22}(\kappa_1, \kappa_2)}{\kappa_1} = \frac{1 - {}_2w_{11}\chi - \chi^2\mathcal{V}^T {}_2M^{-1}\mathcal{V} - \frac{2\pi}{V}R^2\chi}{1 - {}_2w_{11}\chi - \chi^2\mathcal{V}^T {}_2M^{-1}\mathcal{V}}, \quad (28)$$

donde el valor de ${}_2w_{11}$ está dado por

$${}_2w_{11} = \frac{\text{Im}\delta_2}{\text{Im}\omega_2} R^2 = R^2\pi\left(1 - \frac{2}{V}\right).$$

Al sustituir este valor en (28) se tiene

$$\frac{\bar{\kappa}_{22}(\kappa_1, \kappa_2)}{\kappa_1} = \frac{1 - \pi R^2\chi - \chi^2\mathcal{V}^T {}_2M^{-1}\mathcal{V}}{1 - \pi R^2\chi - \chi^2\mathcal{V}^T {}_2M^{-1}\mathcal{V} - 2\pi\chi\frac{R^2}{V}}. \quad (29)$$

Ahora se hace un intercambio de κ_1 y κ_2 en la ecuación (29) para obtener

$$\frac{\bar{\kappa}_{22}(\kappa_2, \kappa_1)}{\kappa_2} = \frac{1 + \pi R^2\chi - \chi^2\mathcal{V}^T {}_2M^{-1}\mathcal{V}}{1 + \pi R^2\chi - \chi^2\mathcal{V}^T {}_2M^{-1}\mathcal{V} + 2\pi\chi\frac{R^2}{V}}, \quad (30)$$

Observando (18) y (22) se tiene que

$${}_2M(\kappa_2, \kappa_1) = {}_1M(\kappa_1, \kappa_2), \quad (31)$$

entonces,

$$\frac{\bar{\kappa}_{22}(\kappa_2, \kappa_1)}{\kappa_2} = \frac{\kappa_1}{\bar{\kappa}_{11}(\kappa_1, \kappa_2)}, \quad (32)$$

que es la relación que se quería verificar.

Una expresión menos conocida de la relación de reciprocidad de Keller se da a continuación en función de los contrastes efectivos relativos a la matriz $\bar{\chi}_{11}$ y $\bar{\chi}_{22}$ que están definidos por

$$\bar{\chi}_{11} = \bar{\chi}_{11}(\chi) = \frac{1 - \frac{\bar{\kappa}_{11}}{\kappa_1}}{1 + \frac{\bar{\kappa}_{11}}{\kappa_1}}, \quad (33)$$

$$\bar{\chi}_{22} = \bar{\chi}_{22}(\chi) = \frac{1 - \frac{\bar{\kappa}_{22}}{\kappa_1}}{1 + \frac{\bar{\kappa}_{22}}{\kappa_1}}, \quad (34)$$

$$\chi(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}. \quad (35)$$

Nótese que

$$\chi(\kappa_2, \kappa_1) = -\chi(\kappa_1, \kappa_2). \quad (36)$$

Sustituimos los valores de $\bar{\kappa}_{11}$ y $\bar{\kappa}_{22}$ en $\bar{\chi}_{11}$ y $\bar{\chi}_{22}$, respectivamente, así obtenemos

$$\bar{\chi}_{11}(\chi) = \frac{\frac{\pi R^2}{V}\chi}{1 + R^2\chi\left(\delta_1 - \frac{\pi}{V}\right) - \chi^2\mathcal{V}^T {}_1M^{-1}\mathcal{V}}, \quad (37)$$

$$\bar{\chi}_{22}(\chi) = \frac{\frac{\pi R^2}{V} \chi}{1 - \chi R^2 (\delta_2 + \frac{\pi}{V}) - \chi^2 \mathcal{V}^T {}_2 M \mathcal{V}}, \quad (38)$$

Al hacer un cambio de κ_1 por κ_2 y viceversa en (37) en (38) obtenemos

$$\bar{\chi}_{11}(-\chi) = -\frac{\pi \chi \frac{R^2}{V}}{1 - R^2 \chi (\delta_1 - \frac{\pi}{V}) - \chi^2 \mathcal{V}^T {}_1 M^{-1} \mathcal{V}}; \quad (39)$$

al sustituir el valor de δ_2 en (38) y teniendo en cuenta (31) se obtiene

$$\bar{\chi}_{22}(\chi) = \frac{\pi \chi \frac{R^2}{v}}{1 - R^2 \chi (\delta_1 - \frac{\pi}{V}) - \chi^2 \mathcal{V}^2 {}_1 M^{-1} \mathcal{V}}. \quad (40)$$

Por lo tanto se llegó a

$$\bar{\chi}_{11}(-\chi) = -\bar{\chi}_{22}(\chi). \quad (41)$$

Esta es otra forma de expresar la relación de reciprocidad de Keller.

1. Resultados numéricos

En esta sección se lleva a cabo el análisis de los resultados del cálculo de las propiedades efectivas del compuesto. Resulta conveniente la presentación de las gráficas de menos el contraste térmico efectivo relativo a la matriz del compuesto en la dirección del eje 1 (o bien del eje 2) $-\bar{\chi}_{11}$ (ó $-\bar{\chi}_{22}$) como función del contraste relativo de los constituyentes χ . Este contraste relativo es cero cuando ambos materiales tienen la misma conductividad, cuando es positivo la fibra es más conductiva que la matriz. En el límite cuando la conductividad de la fibra es infinita (un superconductor), $\chi = 1$. Análogamente, si el contraste es negativo, la fibra es menos conductiva que la matriz. En el límite cuando la fibra es totalmente aislante ($\kappa_2 = 0$), $\chi = -1$. Así $-\bar{\chi}_{11}$ está definido en el intervalo de $\chi \in [-1, 1]$ y tomará valores también en $[-1, 1]$, esto nos será útil para comentar las gráficas más adelante.

Queremos señalar que las fórmulas de la sumas de la latiz S_k que aparecen en la matriz W , son absolutamente convergentes ([15]). Mas aún dos de ellas S_4 y S_6 son las únicas que son necesarias calcular puesto que el resto se pueden obtener por una relación de recurrencia. Las sumas S_4 y S_6 son directamente proporcionales a las dos invariantes de la función $\mathcal{P}(z)$ ([13], [15]). Estos aparecen en la ecuación diferencial no lineal de primer orden que satisface la $\mathcal{P}(z)$ ([13], [15]). De esta ecuación y el desarrollo de Laurent de $\mathcal{P}(z)$ alrededor del origen se obtiene la relación de recurrencia siguiente ([13], [15])

$$S_{2k} = \frac{3}{(2k+1)(2k-1)(k-3)} \sum_{m=2}^{k-2} (2m-1)(2k-2m-1)S_{2m}S_{2(k-m)}, \quad k = 4, 5, \dots$$

Así dados S_4 y S_6 , obtenemos

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{3}{7}S_4^2, \\ S_{10} &= \frac{5}{11}S_4S_6, \\ S_{12} &= \frac{1}{143}(18S_4^3 + 25S_6^2), \\ S_{14} &= \frac{30}{143}S_4^2S_6, \\ S_{16} &= \frac{3}{2431}(33S_4^4 + 100S_4S_6^2), \end{aligned}$$

etc. Son expresiones polinomiales en S_4 y S_6 ([13], [15]). Las sumas S_4 y S_6 son notoriamente de convergencia muy lenta. Cuando el paralelogramo es cuadrado, un rectángulo o un rombo de lado unidad y ángulo 60° (equivalente una celda hexagonal), las sumas se conocen pues se han transformado en otras sumas rápidamente convergentes. Se ha usado en ([9], [16] y [10]), por ejemplo, para problemas con materiales elásticos equivalentes al tratado aquí.

Hasta donde sabemos hay expresiones tabuladas sólo para otros dos paralelogramos especiales: un rombo de lado uno y ángulo agudo α ([?]) y un paralelogramo de ángulo α y altura $c = \frac{1}{2}\tan(\alpha)$ ([18]). Cada tipo de paralelogramo incluye un caso ya conocido. El primero, es un cuadrado cuando $\alpha = 90^\circ$ y el segundo, es un rombo de lado uno y ángulo $\alpha = 60^\circ$. Por simplicidad nos referiremos al primer caso como rombo α y al segundo como paralelogramo $LT\alpha$ o, simplemente, $LT\alpha$.

Es conveniente introducir la notación V_m/V para el máximo de la fracción volumétrica de la figura. Hacemos notar que V_m/V depende de α de hecho $V_m/V = \frac{b}{l} \frac{\pi}{4} \sin^2(\alpha)$.

Para cada α se tomaron 7 valores diferentes de V_2/V , estos aparecen en la leyenda de cada figura. Como se puede apreciar los valores son diferentes para cada α , esto se debe a la dependencia que tienen de V_m/V . La dependencia está dada de la siguiente forma:

$$V_2/V(k) = \frac{1}{7} \frac{V_m}{V} k, \quad k = 1, 2, \dots, 7.$$

1.1. Rombo α

A continuación vamos a mostrar tres grupos de figuras de tres en tres para un α fijo. El primero es la repetición de 5×5 de la celda en el origen. Es un rombo de ángulo α que se distingue por una línea más gruesa. También se dibuja el círculo inscrito que corresponde al radio máximo.

El primer grupo de las figuras se refiere a la geometría de la celda periódica para cada rombo considerado y son las figuras de 1 – 4 para los α correspondientes.

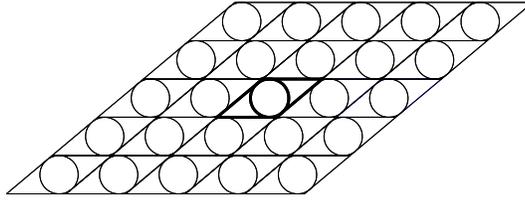


Figura 1: Arreglo paralelogramático para la celda con $\alpha = 40^\circ$.

En el segundo son las gráficas de $-\bar{\chi}_{11}$ contra χ variando V_2/V para α fijo. Es decir, muestran las gráficas de menos el contraste térmico efectivo del compuesto relativo a la matriz como función del contraste térmico relativo a la matriz χ en la dirección del eje 1, para el valor de α correspondiente y son las figuras de 5 – 8.

Ahora pasamos a comentar las figuras de este segundo grupo. Se observa que $-\bar{\chi}_{11}$, como función de χ con V_2/V y α fijos son monótonas decrecientes, es decir, el valor de la conductividad efectiva en la dirección de eje 1 disminuye pasando de muy conductor a muy aislante a medida que la fibra pasa de superconductora a totalmente aislante. Observamos que si tomamos una fibra fija más conductora que la matriz, es decir, $\chi < 0$ la conductividad efectiva crece monótonamente como función de V_2/V . El valor máximo se alcanza en V_m/V . En cambio para una fibra menos conductora que la matriz la conductividad efectiva decrece monótonamente como función V_2/V alcanzando su valor mínimo en V_m/V . Todas las curvas pasan por el origen de tal forma que el abanico de curvas intercambia su orden relativo al pasar χ de negativo a positivo y viceversa. La gráfica correspondiente a $V_2/V = 0$ ó ausencia de fibra no aparece en ninguna de las figuras. Es la recta de pendiente cero.

Las gráficas de $-\bar{\chi}_{11}$ son cóncavas, pero no todas poseen el mismo tipo de concavidad. Por ejemplo, para $\alpha = 40^\circ$, la concavidad es hacia abajo mientras que para $\alpha = 80^\circ$ o 90° la concavidad es hacia arriba. El caso de $\alpha = 60^\circ$ las gráficas son casi rectas con pendiente aproximada a V_2/V .

Del análisis de la concavidad de las curvas se puede obtener una aproximación de la propiedad efectiva. Un ejemplo es suficiente. En la Figura 5 la curva correspondiente a $V_2/V = 0.504$ y $\chi > 0$, la secante a ella que pasa por el origen

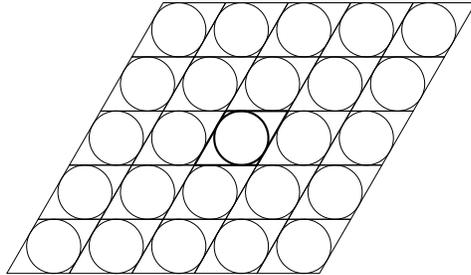


Figura 2: Arreglo paralelogramico para la celda con $\alpha = 60^\circ$.

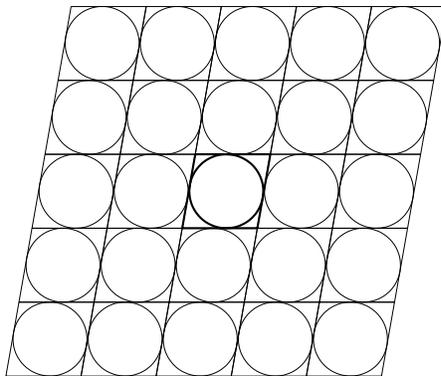


Figura 3: Arreglo paralelogramico para la celda con $\alpha = 80^\circ$.

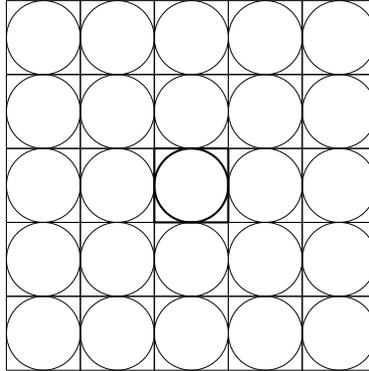


Figura 4: Arreglo paralelogramático para la celda con $\alpha = 90^\circ$.

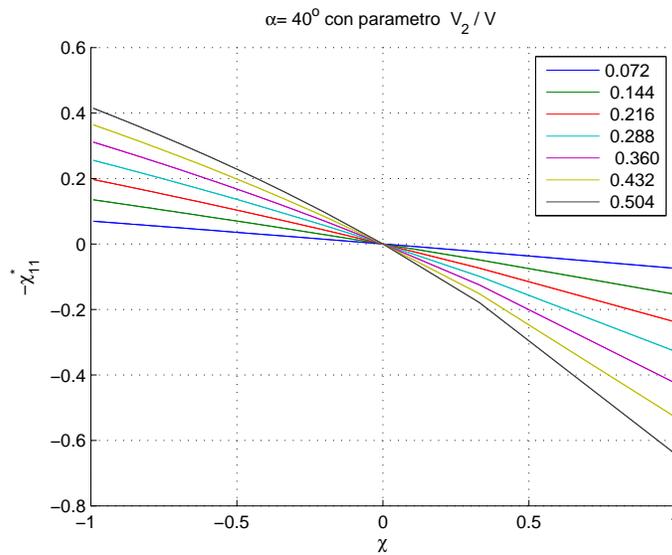


Figura 5: Gráfica de menos el contraste térmico efectivo relativo a la matriz en la dirección del eje 1, $-\bar{\chi}_{11}$ como función del contraste térmico de los dos constituyentes χ tomando como parámetro la fracción volumétrica ocupada por la fibra V_2/V para un rombo de lado uno y ángulo en el vértice $\alpha = 40^\circ$.

y la ordenada de la curva en $\chi = 1$ es tal aproximación por ser la curvatura poco pronunciada. Además es una cota inferior de valores de $-\bar{\chi}_{11}$ y es cota inferior para todo compuesto con $\alpha = 40^\circ$.

Estas y otras observaciones análogas son válidas en menor o mayor grado para los compuestos estudiados en este trabajo.

Si fijamos V_2/V , el contraste térmico efectivo, $-\bar{\chi}_{11}$ para una χ fija y como función del ángulo es monótona creciente. Como se observa en la Figura 9.

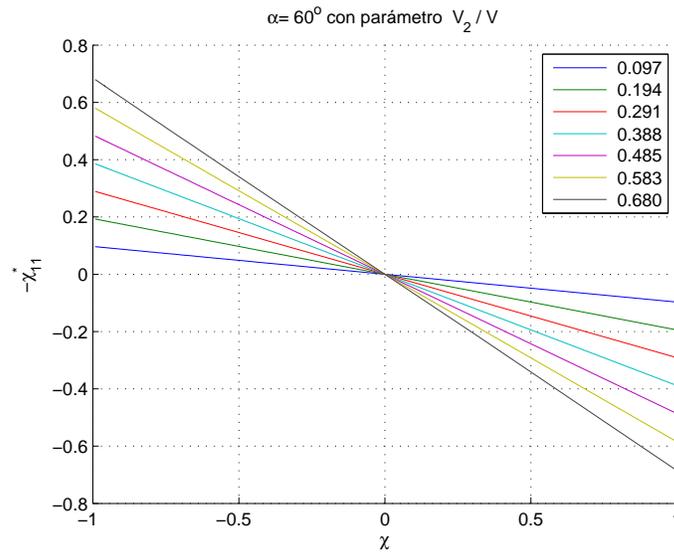


Figura 6: Análogo a la Figura 5 sólo que aquí $\alpha = 60^\circ$.

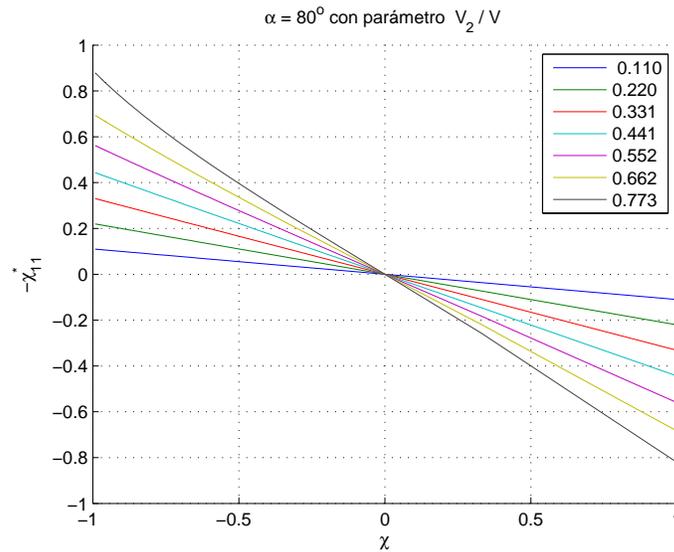


Figura 7: Análogo a la Figura 5 sólo que aquí $\alpha = 80^\circ$.

El tercer grupo de figuras se refiere a $-\bar{\chi}_{22}$ contra χ cuando variamos V_2/V y fijando α . Es decir, muestra las gráficas de menos el contraste térmico relativo a la matriz como función del contraste térmico relativo a la matriz en la dirección del eje 2, para el valor de α correspondiente y son las figuras 10 – 13.

Por último analizamos este tercer grupo de figuras. Se observa que $-\bar{\chi}_{22}$ como función de χ con V_2/V y α fijos

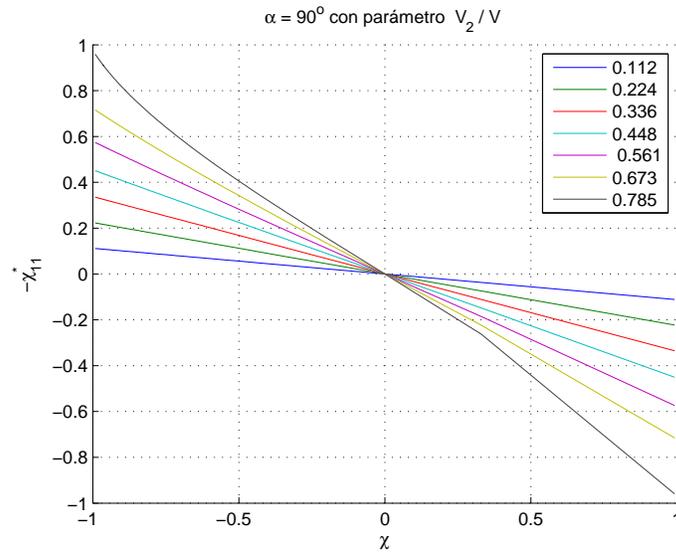


Figura 8: Análogo a la Figura 5 sólo que aquí $\alpha = 90^\circ$.

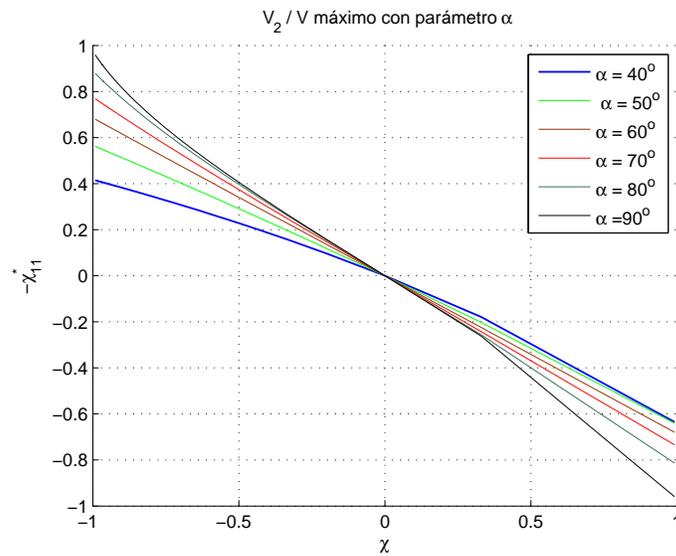


Figura 9: Gráfica de menos el contraste térmico efectivo relativo a la matriz como función del contraste de los constituyentes relativo a la matriz con parámetro α para el V_2/V máximo.

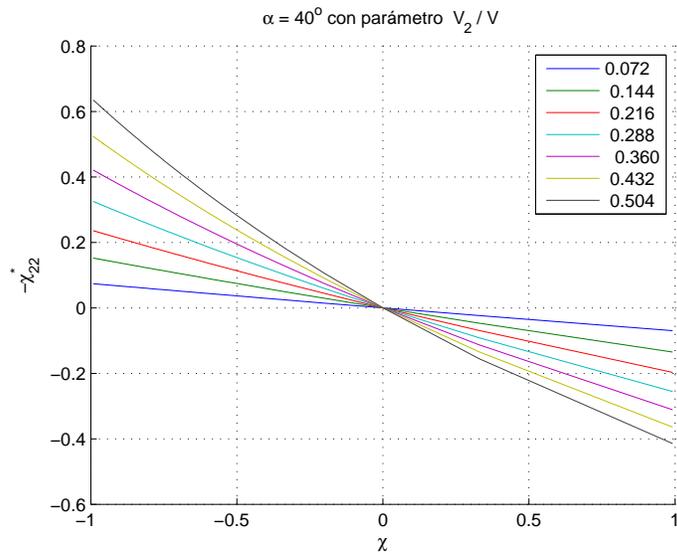


Figura 10: Análogo a la Figura 5 sólo que aquí la dirección es el eje 2.

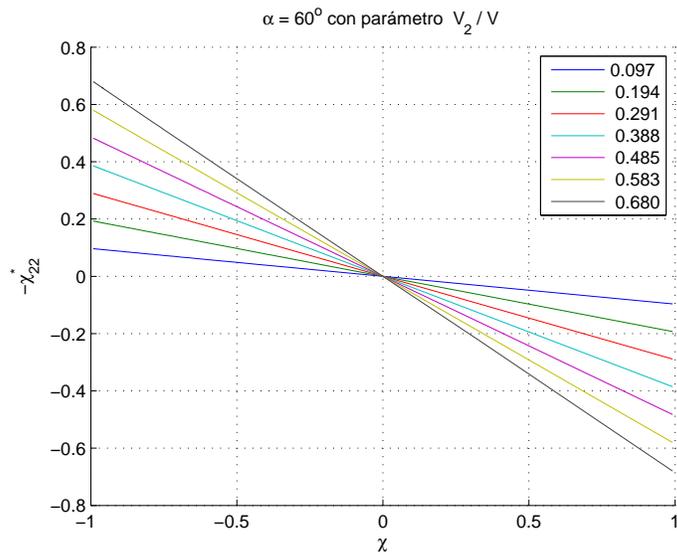


Figura 11: Análogo a la Figura 5 sólo que aquí $\alpha = 60^\circ$ y la dirección es en el eje 2.

tiene el mismo comportamiento que $-\bar{\chi}_{11}$. Para los casos en que la fibra es más o menos conductiva que la matriz tiene un comportamiento análogo a $\bar{\chi}_{11}$. La diferencia se encuentra en las concavidades pues en este caso para cualquier α se tienen concavidades hacia arriba excepto en $\alpha = 60^\circ$ pues en este grupo como en el anterior las gráficas son rectas con pendiente aproximadamente igual V_2/V .

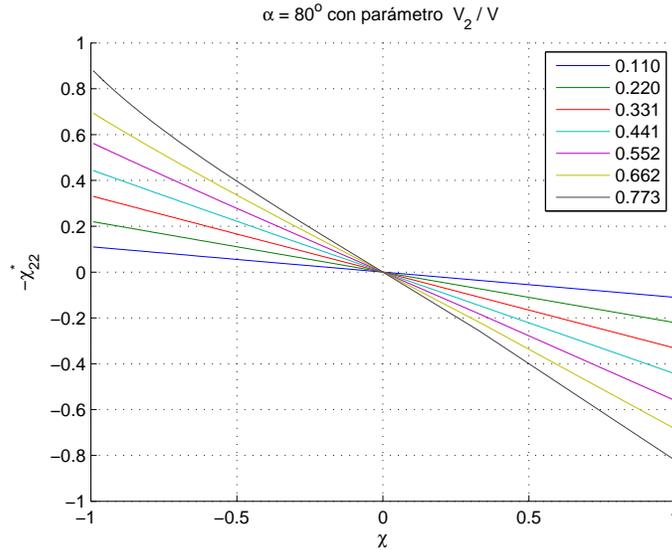


Figura 12: Análogo a la Figura 5 sólo que aquí $\alpha = 80^\circ$ y la dirección es en el eje 2.

Hay que notar que para el caso con $\alpha = \pi/2$, es decir, cuando se tiene un cuadrado unitario figuras 8 y 13, las funciones $\bar{\chi}_{11}$ y $\bar{\chi}_{22}$ son las mismas y son antisimétricas. El valor máximo es muy cercano a 1 en $\chi = -1$ y el valor mínimo es muy cercano a -1 en $\chi = 1$, estos son los valores más alto y más bajo, respectivamente, que alcanza $\bar{\chi}_{11}$ al variar α . Los valores 1 y -1 no se pueden alcanzar porque la fibra nunca ocupa todo el volumen de la matriz. Las gráficas aquí mostradas son la mismas que las obtenidas por Ley en ([16]) lo cual indica que nuestras gráficas son correctas.

En la Figura 14 se muestra a $-\bar{\chi}_{11}$ contra $-\chi$ para un ángulo de 40° , es decir, la gráfica de menos el contraste térmico efectivo relativo a la matriz en la dirección del eje 1 como función de menos el contraste térmico relativo a la matriz, para un ángulo de 40° . Entonces en esta gráfica se han intercambiado las conductividades κ_1 y κ_2 . Comparando esta figura con la Figura 10 vemos que se está cumpliendo la relación de Keller. Para los otros ángulos pasa lo mismo pero aquí sólo hemos incluido esta gráfica por brevedad.

1.2. Paralelogramo LT_α

Ahora trataremos el segundo caso, el paralelogramo de ángulo agudo α y altura $c = \frac{1}{2}\tan(\alpha)$. Los valores de las sumas de las latices están tabuladas para $\alpha = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, \dots, 45^\circ$. Aquí solo consideraremos tres de ellos $\alpha = 20^\circ, 30^\circ$ y 45° . Al igual que lo hicimos para el rombo vamos a definir 3 grupos de figuras.

El primer grupo está formado por la figuras 15 – 17, recordemos que éste se refiere a la repetición de la celda sólo que en este caso ya no es un rombo sino el paralelogramo LT_α .

El segundo grupo está formado por las figuras 18 – 20 y muestra las gráficas de $-\bar{\chi}_{11}$ contra χ como función de V_2/V y α fija. Se observó que $-\bar{\chi}_{11}$ es una función monótona decreciente de χ para α y V_2/V fijos. Lo que

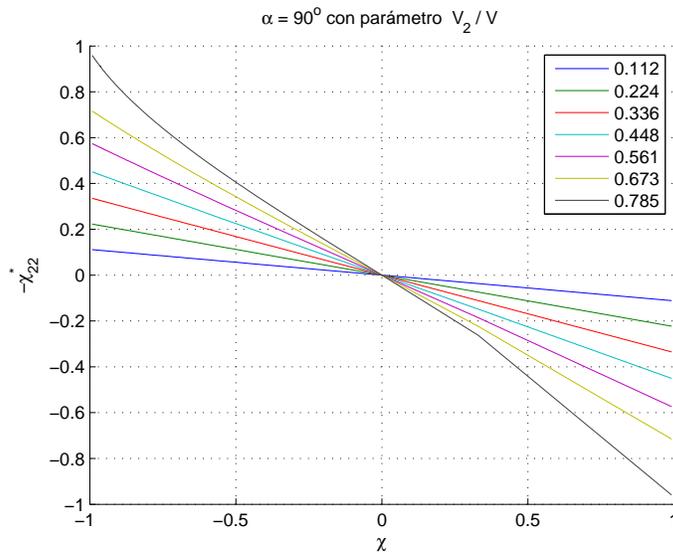


Figura 13: Análogo a la Figura 5 sólo que aquí $\alpha = 90^\circ$ y la dirección es en el eje 2.

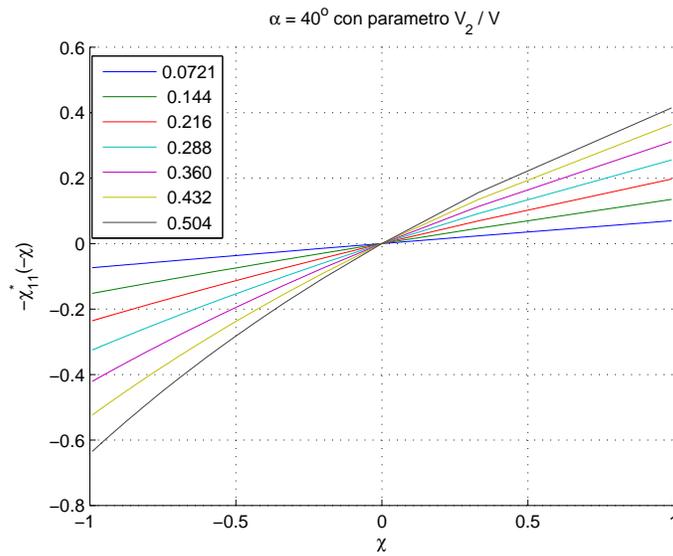


Figura 14: Análogo a la Figura 5 sólo que aquí las conductividades de la fibra y la matriz han sido intercambiadas.

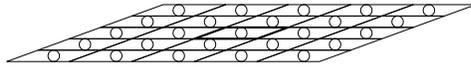


Figura 15: Arreglo paralelogramico para la celda con $\alpha = 20^\circ$.

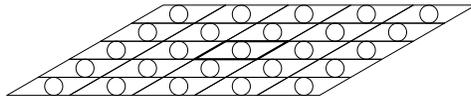


Figura 16: Arreglo paralelogramico para la celda con $\alpha = 30^\circ$.

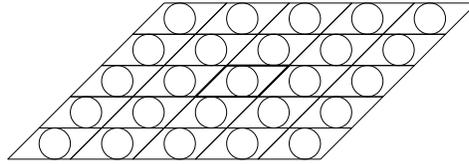


Figura 17: Arreglo paralelogramático para la celda con $\alpha = 45^\circ$.

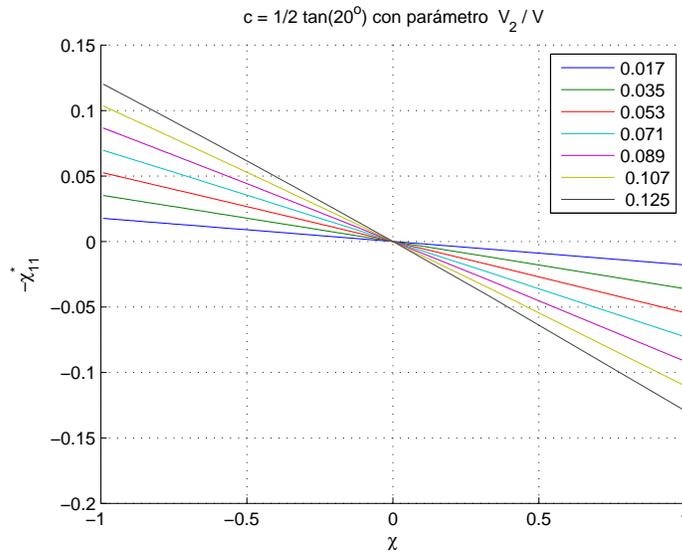


Figura 18: Gráfica de menos contraste térmico efectivo relativo a la matriz en la dirección del eje 1, $-\bar{\chi}_{11}$ como función del contraste térmico de los dos constituyentes χ tomando como parámetro la fracción volumétrica ocupada por la fibra V_2/V para un paralelogramo de base uno y altura $\alpha = 20^\circ$.

significa que pasa lo mismo que en el caso del rombo. La conductividad efectiva disminuye a medida que lo hace la conductividad de la fibra.

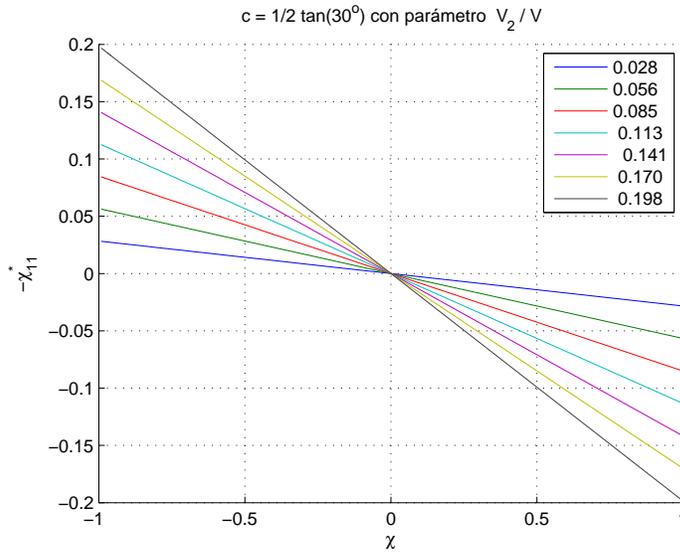


Figura 19: Análogo a la Figura 18 sólo que aquí $\alpha = 30^\circ$.

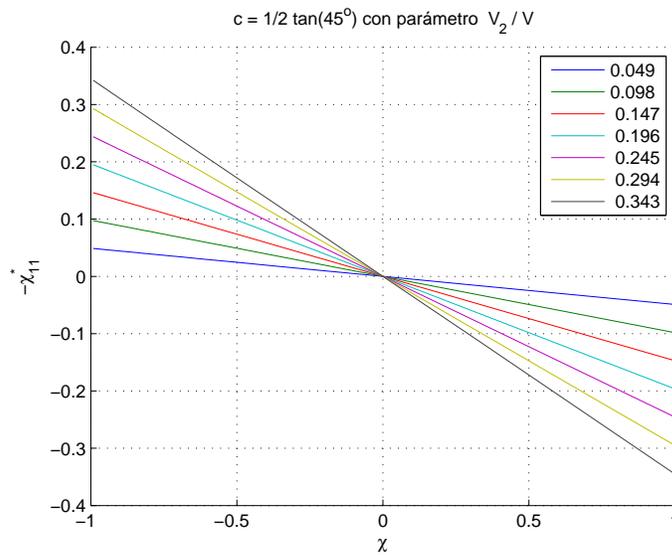


Figura 20: Análogo a la Figura 18 sólo que aquí $\alpha = 45^\circ$.

Si la conductividad de la fibra es mayor que la de la matriz es decir $\chi < 0$ y para una χ fija, $-\bar{\chi}_{11}$ crece monótonamente; alcanza su máximo en V_m/V . En cambio si la conductividad de la fibra es menor $\chi > 0$ y χ es

fija $-\bar{\chi}_{11}$ decrece monótonamente, alcanza su mínimo en V_m/V .

Todas las curvas pasan por el origen de tal forma que el abanico de curvas V_2/V intercambia su orden relativo al pasar χ de negativo a positivo y viceversa.

Para este segundo grupo sólo hay un tipo de concavidad y es hacia abajo cuando $\alpha = 20^\circ$. En los otros casos las gráficas de $-\bar{\chi}_{11}$ son rectas con pendiente aproximadamente igual a V_2/V .

El tercer grupo está formado por las figuras 21 – 23 y muestra gráficas análogas a las del primer grupo de esta subsección excepto que éstas son en la dirección del eje 2.

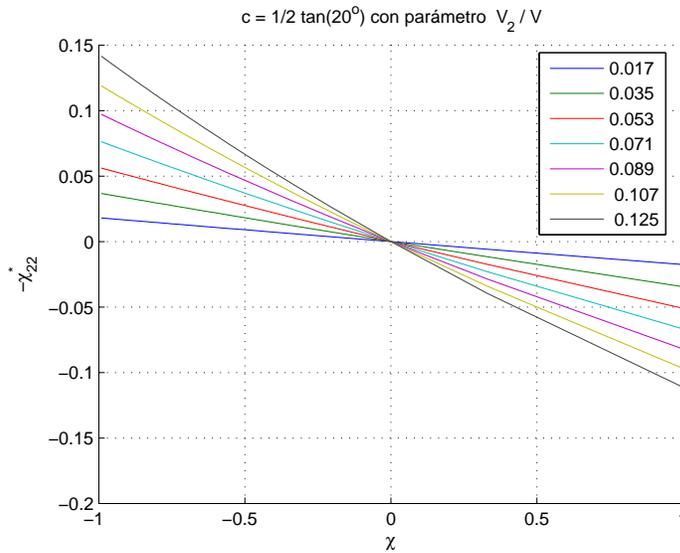


Figura 21: Análogo a la Figura 18 sólo que aquí la dirección es el eje 2.

Para este grupo de figuras el comportamiento de $-\bar{\chi}_{22}$ como función de χ para α y V_2/V fijos es el mismo que para $-\bar{\chi}_{11}$. Si se toma una fibra más o menos conductora que la matriz, el comportamiento de $-\bar{\chi}_{22}$ es el mismo que el de $-\bar{\chi}_{11}$. En este caso para cualquier α , las gráficas de $-\bar{\chi}_{22}$ tienen una concavidad hacia arriba.

En la Figura 24 se puede observar que si fijo la fracción volumétrica $V_2/V = V_m/V$ y χ , el contraste térmico efectivo relativo a la matriz, $-\bar{\chi}_{22}$ es monótona creciente como función del ángulo. El crecimiento de $-\bar{\chi}_{22}$ como función de α es más rápido que en el caso el rombo.

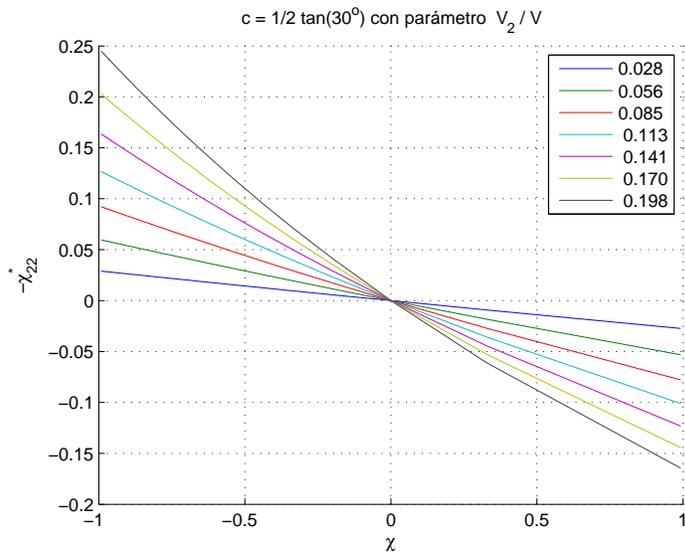


Figura 22: Análogo a la Figura 18 sólo que aquí $\alpha = 30^\circ$ y la dirección es el eje 2.

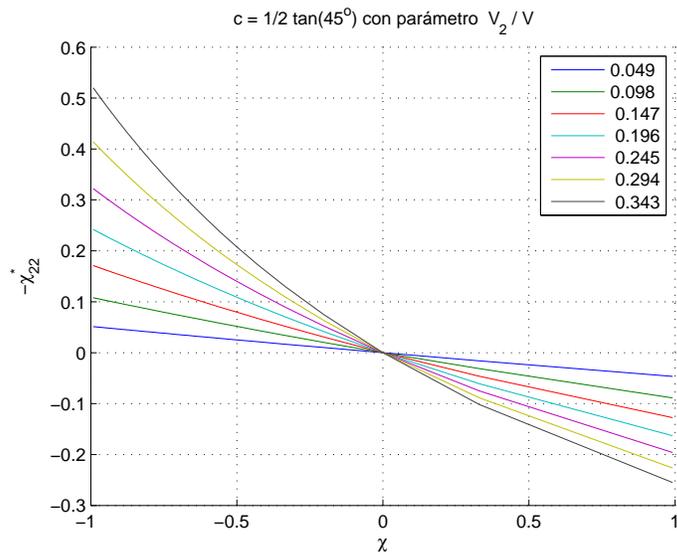


Figura 23: Análogo a la Figura 18 sólo que aquí $\alpha = 45^\circ$ y la dirección es el eje 2.

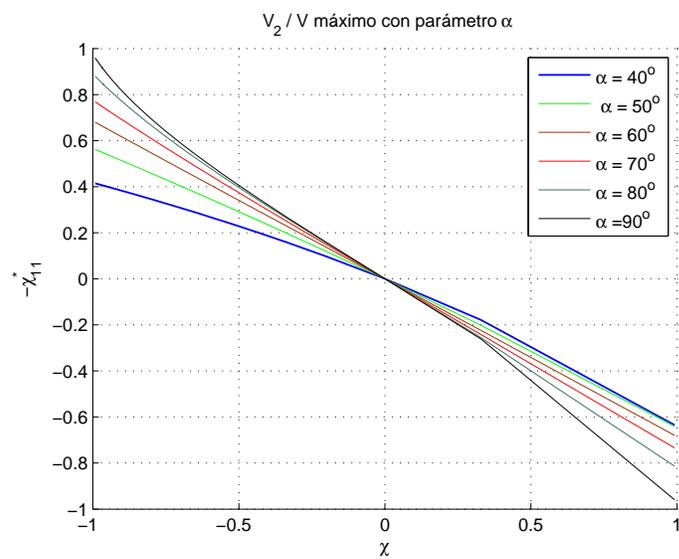


Figura 24: Gráfica de menos el contraste térmico efectivo relativo a la matriz, en la dirección 1, $\bar{\chi}_{22}$ como función del contraste relativo de los dos constituyentes χ teniendo como parámetro el ángulo para V_m/V .

1. Conclusiones

En esta sección se resumen los resultados obtenidos en forma analítica y numérica. Primeramente los analíticos

- Se obtuvieron fórmulas analíticas en forma cerrada para la conductividad térmica en la dirección del eje 1 y el eje 2, es decir, para $\bar{\kappa}_{11}$ y $\bar{\kappa}_{22}$, en general, para un paralelogramo de base 1.

$$\bar{\kappa}_{11} = \kappa_1 \left\{ 1 - 2\pi R^2 \frac{1}{V} \chi [1 + {}_1w_{11}\chi - \chi^2 \mathcal{V}^T {}_1M^{-1} \mathcal{V}]^{-1} \right\}. \quad (1)$$

$$\bar{\kappa}_{22} = \kappa_1 \left\{ 1 - 2\pi R^2 \frac{1}{V} \chi [1 - {}_2w_{11}\chi - \chi^2 \mathcal{V}^T {}_2M^{-1} \mathcal{V}]^{-1} \right\}. \quad (2)$$

- Los resultados muestran dependencia explícita de las conductividades de los constituyentes, el radio de la fibra de sección transversal circular, la periodicidad del arreglo a través de las sumas de la latiz y los parámetros geométricos, es decir,

$$\bar{\kappa}_{11} = \bar{\kappa}_{11}(\chi, R^2, S_4, S_6, V).$$

Análogamente $\bar{\kappa}_{22}$

$$\bar{\kappa}_{22} = \bar{\kappa}_{11}(\chi, R^2, S_4, S_6, V).$$

- Se verificó que las fórmulas cumplen con la relación de reciprocidad de Keller.
- Una forma alternativa de la relación de reciprocidad de Keller en función de contrastes relativos es

$$\bar{\chi}_{11}(\chi) = -\bar{\chi}_{22}(-\chi)$$

- Para el caso en que el paralelogramo es un cuadrado unitario se obtuvieron los mismos resultados obtenidos en ([16]) (2008).

Los cálculos numéricos se realizaron para dos casos un rombo de ángulo α con base 1 y un paralelogramo de ángulo α y altura $c = \frac{1}{2}\tan(\alpha)$.

- Las gráficas de $-\bar{\chi}_{11}$ y $-\bar{\chi}_{22}$ son monótonas decrecientes como función de χ cuando se fija una fracción volumétrica y un α .
- Para una fibra con una conductividad fija:
Se tiene que $-\bar{\chi}_{11}$ y $-\bar{\chi}_{22}$ son monótonas crecientes como función de la fracción volumétrica, si la conductividad es mayor que la de la matriz, es decir, $\chi < 0$.
Pero $-\bar{\chi}_{11}$ y $-\bar{\chi}_{22}$ son monótonas decrecientes como función de la fracción volumétrica, si la conductividad es menor, es decir, $\chi > 0$.
- Fijando la fracción volumétrica, $-\bar{\chi}_{11}$ y $-\bar{\chi}_{22}$ van a ser monótonas decrecientes como función del ángulo.
- La concavidad de $-\bar{\chi}_{11}$ cambia en función de α , mientras que para $-\bar{\chi}_{22}$ la concavidad siempre es hacia arriba.
- Se verificó numéricamente la relación de reciprocidad de Keller.

Quedan cuestiones pendientes sobre este trabajo, una de las cuales es el cálculo numérico para un paralelogramo arbitrario distinto de los estudiados aquí. Para esto se requiere sumar S_4 y S_6 . Otra cuestión es la que surgió en los cálculos numéricos para paralelogramos con ángulo menor a 40° pues éstos nos decían que la conductividad térmica efectiva siempre era igual a la conductividad térmica de la matriz sin importar la fracción volumétrica, ni el ángulo que se estuviera tomando lo cual es físicamente improbable, esta cuestión no ha sido aclarada, probablemente se debe a que las sumas de latiz son muy grandes y por tanto se requiera un programa diferente que tome en cuenta esto. Sin embargo no hay dudas de este tipo en el cálculo con ángulos mayores a 40° . Un tercer pendiente sería la comprobación con datos experimentales. Hasta donde se sabe no los hay para los arreglos paralelogramáticos de este trabajo.

Para terminar daremos un breve resumen del trabajo que se tiene pensado realizar en un futuro.

El proceso industrial de manufactura de un compuesto puede presentar una situación en la que el contacto entre las dos fases no sea como la estudiada aquí, es decir, que no haya continuidad de la temperatura y el flujo de calor. Esta situación de contacto imperfecto cambia las propiedades efectivas del compuesto y tiene mucha importancia en la predicción de tales propiedades. En este caso, la aplicación, del método asintótico de dos escalas utilizado aquí puede usarse cuando las condiciones de contacto entre las dos fases son por ejemplo, la continuidad del flujo del calor y una nueva condición de proporcionalidad entre el flujo de calor de uno de los materiales y una función de la diferencia de temperatura en la interfase. Cuando la función es lineal, la aplicación del método de dos escalas es directo. Una pregunta que puede ser respondida es la del efecto de esta condición sobre las propiedades. Para saber su importancia y si puede ser determinada habría que analizar los resultados. Más interesante sería considerar una función no lineal y estudiar la influencia y relevancia de la imperfección ya sea de la condición arriba mencionada o alguna otra físicamente posible tomando como punto de partida el término lineal arriba mencionado.

Referencias

- [1] Milton G. W., 2002. The Theory of Composites. Cambridge: Cambridge University Press.
- [2] Bakhvalov N., Panasenko G., 1984. Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- [3] Bourgat J. 1977. Numerical Experiments of the Homogenization Method for Operator With Periodic Coefficients. Dold, A. Eckmann, B. (eds.). Lectures Notes in Mathematics, 704, 330-356.
- [4] Hollister, S. J., Kikuchi, N., 1994. A Comparison of Homogenization and Standar Mechanics Analyses for Periodic Poraus Composites. *Comp. Mech.* 10, 73-95.
- [5] Lagache, M. Agbossou, A., Pastor, J., Muller D., 1994. Role of Interface on the Elastic Behavior of Composite Materials: Theoretical and Experimental Analysis. *J. Comp. Mat.* 28, 1140-1157.
- [6] Pobodrya, B.E., 1984. Mechanics of Composite Materials. Moscow, in Rusia.
- [7] Meguid, S.A., Kalamkarov, A.L., 1994. Asymptotic Homogenization of Elastic Composite Materials With Regular Structure. *Int. J. Solids Struc.* 31, 303-316.
- [8] Rodríguez-Ramos R., Sabina F. J., Guinovart-Díaz R., Bravo-Castillero J., 2001. Closed-Form Expressions for the Effective Coefficients of a Fiber-Reinforced Composite With Transversely Isotropic Constituents I. Elastic and Square Symmetry. *Mechanics of Materials*, 33 223-235.
- [9] Guinovart-Díaz R., Bravo Castillero, J., Rogríguez-Ramos, R., Sabina, F.J., 2001. Closed-Form Expressions for Effective Coefficients of a Fiber-reinforced Composite With Transversality Isotropic Constituents-II. Piezoelectric and Square Symmetry. *Mech. Phys. Solids* 49, 1145-1462.
- [10] Bravo-Castillero, J. Guinovart Díaz R., Sabina, F.J., 2001. Closed-Form Expressions for Effective Coefficients of a Fiber-Reinforced Composite With Transversality Isotropic Constituents-I. Elastic and Hexagonal Symmetry. *Mech. Mater.* 33, 327-248.
- [11] Sabina F.J., Bravo Castillero J. , Guinovart-Díaz R. , Rogríguez-Ramos R. , 2002. Overall electromechanical properties of binary composite with 622 symmetry constituens. Antiplane Shear Piezoelectric State. *International Journal of Solids and Structures*, 39 483-497.
- [12] Parton V Z , Kudryavtsev BA, 1993. Engineering Mechanics of Composite Structures. Boca Raton, CRC Press.
- [13] Abramowitz M., Stegun I., 1960. Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York, Dover.
- [14] López López E., Sabina F.J., Bravo Castillero J., Guinovart-Díaz R., Rogríguez-Ramos R., Valdiviezo-Mijangos O.C., 2005. Overall Electromechanical Properties of Binary Composite With 622 Symmetry Constituens. Antiplane shear piezoelectric state. *International Juornal of Solids and Structures*, 42 5765-5777.
- [15] Chandrasekharan K., 1985. Elliptic Functions. New York, Springer-Verlag. 26 –33,48–50.
- [16] Ley Mandujano J., 2008. Las Propiedades de Transporte de Compuestos Birrefringentes Calculadas Usando el Método de Homogeneización. Tesis de Licenciatura Facultad de Ciencias. UNAM.
- [17] Chih Bing Ling, 1965. Evaluation at Half Periods of Weierstrass' Elliptic Functions With Double Periods 1 and $e^{i\alpha}$. *Mathematics of Computation*, 19 , 658–661.
- [18] Ling C.B., Tsai C.P., 1964. Evaluation at Half Periods of Weierstrass' Elliptic Function With Rhombic Primitive Period-Parallelogram. *Math. Comp.*, 18, 433-440.