UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

# POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

# FACULTAD DE CIENCIAS

## D-MÓDULOS ALGEBRAICOS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

JERÓNIMO MONDRAGÓN SUÁREZ

DIRECTOR DE LA TESINA: DR. ROBERTO MARTÍNEZ VILLA.

MÉXICO, D.F. ABRIL, 2009

# D-módulos Algebraicos

**Jerónimo Mondragón Suárez**

« *En esta vida muy pocas cosas conmutan, a pesar de que se repitan.* »

*A mi hermana Guadalupe*

# Índice

**1. Dimensión de Módulos Sobre Anillos Filtrados** **1**

**2. Álgebra Homológica Sobre el Anillo de Polinomios** **14**

**3. Álgebra Homológica Sobre Anillos Filtrados** **19**

**4. Módulos Sobre el Anillo de Operadores Diferenciales** **34**

**5. Variedad Característica** **43**

**Bibliografía** **48**

# Introducción

El surgimiento de los $D$-módulos según [Coutinho] comienza a partir de los años 60's, cuando numerosos investigadores, entre los que destacan I.N. Bernstein, I.M. Gelfand, I.S. Gelfand, B. Malgrange, comenzaron a deducir propiedades de las ecuaciones diferenciales a partir de estructuras algebraicas que se les pueden asociar a éstas. Como ejemplo tenemos los trabajos de Malgrange, quien consideró el $D$-módulo asociado a una ecuación diferencial con coeficientes constantes para deducir propiedades de la ecuación. Posteriormente en 1971 M. Kashewara en su tesis doctoral "Estudio Algebraico de Sistemas de Ecuaciones en Derivadas Parciales", aplicó sistemáticamente los argumentos utilizados por Malgrange para ecuaciones diferenciales con coeficientes analíticos. Por otra parte en la Unión Soviética Bernstein desarrollo la teoría de los módulos sobre el álgebra de Weyl. Teoría que aplicó de forma inteligente para responder a una pregunta que planteó I.M. Gelfand en el Congreso Internacional de Matemáticas, Ámsterdam 1954, donde se cuestionaba si cierta función $\Gamma_f(z)$ (que se relaciona con la ecuación funcional) podía ser extendida a una función meromorfa definida en todo el plano complejo. La respuesta que ofreció Bernstein en 1972 se concentraba en las propiedades algebraicas de las álgebras de Weyl. Esta respuesta se consideraba "elemental" comparada con las respuestas que ya habían dado M.F. Atiyah y el mismo Bernstein en colaboración con I.S. Gelfand en 1968, las cuales usaban argumentos bastante complicados como la resolución de singularidades de H. Hironaka. Así fue como este tipo de argumentos algebraicos comenzó a ser una fuente de respuestas a diversos problemas que tienen su raíz en el Análisis o en Ecuaciones Diferenciales.

La teoría general de los $D$-módulos como se puede checar en [Björk] y [Malgrange] se da entre una mezcla de Álgebra, Geometría Algebraica, Análisis y Ecuaciones Diferenciales; donde los temas que destacan son sucesiones espectrales, categorías derivadas, esquemas, gavillas, sistemas dinámicos, etc. Pero donde la idea principal es utilizar argumentos de tipo algebraico para solucionar problemas de tipo analítico. Es por esto que la temática de los $D$-módulos es bastante amplia y requiere de un profundo conocimiento de diversas áreas de la Matemática. Debido a nuestro poco entendimiento y muchas limitaciones nosotros únicamente estudiaremos los $D$-módulos desde el punto de vista algebraico.

El propósito del presente trabajo es analizar las notas [Miličić] de las cuales se han extraído la mayoría de los resultados que aquí se exponen. Estudiaremos las propiedades principalmente homológicas de módulos que en principio no tendrían que ser módulos sobre el Anillo de Operadores Diferenciales, sino de módulos que están sobre un anillo que tiene una buena filtración y posteriormente nos concentramos en las propiedades que cumplen los módulos sobre el Anillo de Operadores Diferenciales.

A manera de introducción para los temas que desarrollaremos en las siguientes secciones haremos un breve recuento sobre algunos teoremas que fueron analizados en [Tesis] y que serán de gran utilidad en este trabajo.

Comenzamos recordando la definición de álgebra de Weyl. Para un dominio entero $R$, la *$n$-álgebra de Weyl*, $n \geq 1$, se define como la $R$-álgebra libre en los generadores $X_1, \ldots, X_n, \delta_1, \ldots, \delta_n$ con las relaciones $X_iX_j - X_jX_i = 0$, $\delta_i\delta_j - \delta_j\delta_i = 0$ y la de anti conmutatividad $\delta_i X_j - X_j\delta_i = \Delta_{ij}$, donde $\Delta_{ij}$ es la delta de Kronecker. En símbolos

$$\mathscr{A}_n(K) = \frac{R < X_1, \dots, X_n, \delta_1, \dots, \delta_n >}{(X_iX_j - X_jX_i, \delta_i\delta_j - \delta_j\delta_i, \delta_iX_j - X_j\delta_i - \Delta_{ij})}.$$

Para $K$ un campo de característica cero, $\mathscr{A}_n(K)$ también se le conoce como *Anillo de Operadores Diferenciales*. Recibe este nombre debido a que ésta es isomorfa a la $K$-subálgebra de $\mathrm{End}_K(K[X_1, \dots, X_n])$ generada por los operadores lineales $X_1, \dots, X_n$, $\frac{\partial}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial X_n}$, donde $X_i$ denota el operador multiplicar por la variable $X_i$ y $\frac{\partial}{\partial X_i}$ es la derivada formal con respecto a la variable $X_i$. Por la regla de Leibnitz para la derivada de un producto se deduce que estos operadores satisfacen la relación

$$\frac{\partial}{\partial X_i}X_j - X_j\frac{\partial}{\partial X_i} = \Delta_{ij}.$$

Todo elemento $a \in \mathscr{A}_n(K)$ lo podemos expresar de manera única en la forma $a = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}\delta_1^{\beta_1}\cdots\delta_n^{\beta_n}$, para $a_{\alpha,\beta} \in K$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$. En términos más generales, lo que estamos afirmando es que la colección de monomios $\{X^\alpha\delta^\beta\}_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n}$ es una $K$-*base de Poincaré-Birkhoff* para $\mathscr{A}_n(K)$. El producto de dos elementos $a, b \in \mathscr{A}_n(K)$ se define como sigue

$$\begin{aligned} ab &= (\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}\delta_1^{\beta_1}\cdots\delta_n^{\beta_n})(\sum_{\gamma,\epsilon} a_{\gamma\epsilon}X_1^{\gamma_1}\cdots X_n^{\gamma_n}\delta_1^{\epsilon_1}\cdots\delta_n^{\epsilon_n}) \\ &= \sum_{\alpha,\beta}\sum_{\gamma,\epsilon} a_{\alpha\beta}b_{\gamma\epsilon}\sum_{r_1\geq 0}\cdots\sum_{r_n\geq 0} r_1!\cdots r_n!\binom{\beta_1}{r_1}\binom{\gamma_1}{r_1}\cdots\binom{\beta_n}{r_n}\binom{\gamma_n}{r_n} \\ &\quad X_1^{\alpha_1+\gamma_1-r_1}\cdots X_n^{\alpha_n+\gamma_n-r_n}\delta_1^{\beta_1+\epsilon_1-r_1}\cdots\delta_n^{\beta_n+\epsilon_n-r_n}. \end{aligned}$$

Definimos el *grado* de un elemento $a \in \mathscr{A}_n(K)$ no nulo como $\deg(a) = \text{máx}\{|\alpha + \beta|\}$, donde $\alpha, \beta$ son subíndices de la expresión canónica de $a$ y $\deg(0) = -\infty$. La función deg satisface:

1. $\deg(a + b) \leq \text{máx}\{\deg(a), \deg(b)\}$.
2. $\deg(ab) = \deg(a) + \deg(b)$, para $a, b$ no nulos.

De esta forma, cualesquiera dos elementos $a, b \in \mathscr{A}_n(K)$ cumplen $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$, es decir $\mathscr{A}_n(K)$ es un *dominio entero*. El *conmutador* se define como

$$[a, b] = ab - ba, \quad a, b \in \mathscr{A}_n(K).$$

Por la forma en que se definió el producto en $\mathscr{A}_n(K)$, podemos observar rápidamente que en la expresión $ab - ba$ se cancelan los términos principales, entonces

$$\deg([a, b]) \leq \deg(a) + \deg(b) - 1. \tag{1a}$$

Realizando los cálculos explícitos, se puede probar que $\deg([a, b]) \leq \deg(a) + \deg(b) - 2$. Supongamos que $I$ es un ideal propio no trivial de $\mathscr{A}_n(K)$, consideremos $c \in I$ un elemento no nulo de grado mínimo, entonces $\deg(c) > 1$. Luego, $[c, \delta_i], [c, X_i] \in I$, $i = 1, \dots, n$, y al menos uno de estos conmutadores es distinto de cero. Sin pérdida de generalidad supongamos que $[c, \delta_{i_0}] \neq 0$, entonces $\deg([c, \delta_{i_0}]) \leq \deg(c) - 1$, lo cual contradice el hecho de que $c$ es de grado mínimo, por lo tanto $\mathscr{A}_n(K)$ es *simple*.

Ahora definimos $F\mathscr{A}_n(K)$, una filtración en $\mathscr{A}_n(K)$ dada por los conjuntos $F_p\mathscr{A}_n(K) = \{a \in \mathscr{A}_n(K) | \deg(a) \leq p\}$, $p \in \mathbb{Z}$. Veamos que propiedades cumple esta familia de $K$-espacios vectoriales. Cada $F_p\mathscr{A}_n(K)$ es isomorfo al $K$-espacio vectorial generado por $\{X^\alpha \delta^\beta : |\alpha + \beta| \leq p\}$, $p \in \mathbb{Z}$. Además la dimensión $\dim_K F_p\mathscr{A}_n(K) = \binom{2n+p}{2n}$, $p \in \mathbb{Z}$, es decir, cada $F_p\mathscr{A}_n(K)$ es de $K$-dimensión finita. Para $p < 0$, $F_p\mathscr{A}_n(K)$ consta tan sólo del elemento cero y $F_0\mathscr{A}_n(K) = K$, lo cual implica que $1 \in F_0\mathscr{A}_n(K)$. La unión $\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} F_p\mathscr{A}_n(K) = \mathscr{A}_n(K)$. Por la forma en que se definió el producto en $\mathscr{A}_n(K)$ tenemos que para $p, q \in \mathbb{Z}$, $F_p\mathscr{A}_n(K) \cdot F_q\mathscr{A}_n(K) \subset F_{p+q}\mathscr{A}_n(K)$ y por la propiedad (1a) se cumple que $[F_p\mathscr{A}_n(K), F_q\mathscr{A}_n(K)] \subset F_{p+q-1}\mathscr{A}_n(K)$. Definimos el *anillo graduado asociado* por $\mathrm{Gr}\mathscr{A}_n(K) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} F_p\mathscr{A}_n(K)/F_{p-1}\mathscr{A}_n(K)$ con el producto dado por la regla

$$(a + F_{p-1}\mathscr{A}_n(K))(b + F_{q-1}\mathscr{A}_n(K)) = ab + F_{p+q-1}\mathscr{A}_n(K),$$

para $a \in F_p\mathscr{A}_n(K)$, $b \in F_q\mathscr{A}_n(K)$. De la propiedad (1a) tenemos que $ab$ y $ba$ están en la misma clase en $\mathrm{Gr}\mathscr{A}_n(K)$, es decir $\mathrm{Gr}\mathscr{A}_n(K)$ es conmutativo. Además $\mathrm{Gr}\mathscr{A}_n(K)$ es el anillo de polinomios en las variables $X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n$, donde la clase de $\delta_i$ la estamos denotando por $\xi_i$, $i = 1, \ldots, n$. Las variables $X_1, \ldots, X_n, \delta_1, \ldots, \delta_n$ de $\mathscr{A}_n(K)$ tienen grado 1, es decir están contenidas en $F_1\mathscr{A}_n(K)$, entonces $X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n$ están contenidas en $\mathrm{Gr}_1\mathscr{A}_n(K)$ y generan a $\mathrm{Gr}\mathscr{A}_n(K)$ como $K$-álgebra. Si resumimos las propiedades anteriores en una lista, tenemos:

1. $F_q\mathscr{A}_n(K) = \{0\}$, para $q < 0$.
2. $\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} F_p\mathscr{A}_n(K) = \mathscr{A}_n(K)$.
3. $1_{\mathscr{A}_n(K)} \in F_0\mathscr{A}_n(K)$.
4. $F_p\mathscr{A}_n(K) \cdot F_q\mathscr{A}_n(K) \subset F_{p+q-1}\mathscr{A}_n(K)$, para cualesquiera $p, q \in \mathbb{Z}$.
5. $[F_p\mathscr{A}_n(K), F_q\mathscr{A}_n(K)] \subset F_{p+q-1}\mathscr{A}_n(K)$, para cualesquiera $p, q \in \mathbb{Z}$.
6. $\mathrm{Gr}\mathscr{A}_n(K)$ es un anillo noetheriano.
7. $\mathrm{Gr}_1\mathscr{A}_n(K)$ genera $\mathrm{Gr}\mathscr{A}_n(K)$ como $F_0\mathscr{A}_n(K)$-álgebra.

Posteriormente veremos que $1, \ldots, 7$ son las condiciones para que un anillo tenga una buena filtración, así $\mathscr{A}_n(K)$ se convierte en el primer ejemplo para el cual se cumplen todos los resultados que serán expuestos a lo largo de este trabajo.

# 1. Dimensión de Módulos Sobre Anillos Filtrados

En esta sección estudiaremos los módulos sobre anillos filtrados. Definiremos el concepto de buena filtración y estableceremos los criterios para que un $D$-módulo pueda tener una buena filtración en términos del $\mathrm{Gr}D$-módulo graduado asociado. Definiremos la $d_\lambda$-dimensión y la $e_\lambda$-multiplicidad a partir del polinomio de Hilbert asociado al crecimiento de una función aditiva $\lambda$ sobre una buena filtración. Posteriormente analizaremos la buena filtración dada por el grado en el anillo de polinomios, calcularemos la $d_\lambda$-dimensión y la $e_\lambda$-multiplicidad, para $\lambda$ la función aditiva dada por $\dim_K$. Al final probaremos que la $d_\lambda$-dimensión de un módulo finitamente generado $M$ coincide con la altura del $\mathrm{Ann}(M)$, la cual es igual a $\dim \mathcal{V}(\mathrm{Ann}(M))$. En particular tenemos que la $d_\lambda$-dimensión del anillo de polinomios coincide con la dimensión de Krull de éste, teniendo como consecuencia que la $d_\lambda$-dimensión generaliza la dimensión de Krull y tiene importantes aplicaciones para el caso de anillos simples como las álgebras de Weyl.

Una *graduación* $\mathrm{G}A$ de un anillo $A$, es una sucesión de grupos abelianos aditivos $(A_i; i \in \mathbb{Z})$, tales que

**G1**. $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$.

**G2**. $A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$.

Todo anillo que admita una graduación diremos que es un *anillo graduado*. En general, podemos establecer graduaciones que estén indexadas por un grupo o $\mathbb{N} \cup \{0\}$. En ésta ocasión consideraremos graduaciones indexadas por $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

**Proposición 1.1.** *Sea $A$ un anillo con identidad $1_A$. Si $\mathrm{G}A$ es una graduación de $A$, entonces $1_A \in A_0$.*

*Demostración.* Como $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$, existe $h \in \mathbb{Z}$, tal que $1_A \in A_h$. Sea $a \in A_j$ distinta de cero, entonces $a1_A \in A_{j+h}$, así $a1_A = a \in A_j \cap A_{j+h}$, de donde h=0. Por lo tanto $1_A \in A_0$. □

**Lema 1.2.** *Sea $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ un anillo graduado noetheriano. Entonces se cumple:*

1. *$A_0$ es un anillo noetheriano con identidad.*

2. *$A$ es una $A_0$-álgebra finitamente generada.*

*Demostración.*

1. Sea $A^* = \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces $A^*$ es un ideal bilateral de $A$ y $A_0 \cong A/A^*$, como cociente de noetheriano es noetheriano, tenemos que $A_0$ es noetheriano. Además $\bar{1}_A = 1_{A_0}$.

2. $A^*$ es finitamente generado. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_s \in A^*$ un conjunto de generadores homogéneos, con $d_i = \deg x_i$. Sea $B$ la $A_0$-subálgebra generada por $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Probaremos por inducción que $A_n \subset B$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Claramente $A_0 \subset B$. Sea $n > 0$ y $z \in A_n$. Entonces $z \in A^*$, es decir $z = \sum_{i=1}^{s} z_i x_i$, donde $z_i \in A_{n-d_i}$. Por la hipótesis de inducción cada $z_i \in B$, de esta forma concluimos que $z \in B$.

□

Sea $D$ un anillo con identidad, una *filtración creciente* de $D$, es una sucesión $(D_n; n \in \mathbb{Z})$ de subgrupos abelianos aditivos de $D$ que cumplen:

**F1**. $D_n = 0$, para $n < 0$;

**F2**. $\cup_{n\in\mathbb{Z}} D_n = D$;

**F3**. $1 \in D_0$;

**F4**. $D_n \cdot D_m \subset D_{n+m}$, para $n, m \in \mathbb{Z}$;

**F5**. $[D_n, D_m] \subset D_{n+m-1}$, para $n, m \in \mathbb{Z}$.

Entonces $\mathrm{Gr}D = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} D_n/D_{n-1}$ es un anillo graduado con identidad. **F5** implica que $\mathrm{Gr}D$ es conmutativo, en particular $D_0$ es un anillo conmutativo con identidad. Por lo tanto, $\mathrm{Gr}D$ es una $D_0$-álgebra. También pediremos que la filtración de $D$ cumpla:

**F6**. $\mathrm{Gr}D$ es un anillo noetheriano;

**F7**. $\mathrm{Gr}_1 D$ genera $\mathrm{Gr}D$ como $D_0$-álgebra.

Esto implica que $D_0$ es un anillo noetheriano. Así, podemos seleccionar un número finito de elementos $x_1, x_2, \ldots, x_s \in \mathrm{Gr}_1 D$ tales que generan a $\mathrm{Gr}D$ como $D_0$-álgebra. Por **F7** tenemos:

$$\mathrm{Gr}_{n+1}D = \mathrm{Gr}_1 D \cdot \mathrm{Gr}_n D, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

de donde

$$D_{n+1} = D_1 \cdot D_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Sea $M$ un $D$-módulo. Una filtración $FM = (F_nM; n \in \mathbb{Z})$ de $M$ dada por subgrupos aditivos es una filtración de $D$-módulos, si $D_n \cdot F_mM \subset F_{n+m}M$, para $m, n \in \mathbb{Z}$. En particular, cada $F_nM$ es un $D_0$-módulo. Una filtración de $D$-módulos es llamada *estable*, si existe $m_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $D_n \cdot F_mM = F_{n+m}M$, para toda $n \in \mathbb{Z}_+$ y $m \geq m_0$. Una filtración de $D$-módulos $FM$ se llama *buena* si:

**BF1**. $FM$ es *hausdorff*, es decir, $F_nM = \{0\}$ para $n \in \mathbb{Z}$ suficientemente negativa.

**BF2**. La filtración $FM$ es *exhaustiva*, es decir, $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_nM = M$.

**BF3**. $F_nM$, $n \in \mathbb{Z}$, es un $D_0$-módulo finitamente generado.

**BF4**. La filtración $FM$ es estable.

Ahora que tenemos la definición de una buena filtración, estudiaremos las condiciones para que un $D$-módulo pueda tener una buena filtración.

**Lema 1.3.** *Sea $FM$ una filtración de $D$-módulos exhaustiva y hausdorff de $M$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$FM$ es una buena filtración;*

2. *$\mathrm{Gr}M$ es un $\mathrm{Gr}D$-módulo finitamente generado.*

*Demostración.* 1. $\Rightarrow$ 2. Existe $m_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $D_n \cdot F_{m_0}M = F_{n+m_0}M$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Entonces $\mathrm{Gr}_nD \cdot \mathrm{Gr}_{m_0}M = \mathrm{Gr}_{n+m_0}M$ para toda $n \in \mathbb{Z}_+$, de esto se sigue que $\bigoplus_{n\leq m_0} \mathrm{Gr}_nM$ genera $\mathrm{Gr}M$ como $\mathrm{Gr}D$-módulo. Como $F_nM$ es un $D_0$-módulo finitamente generado, $\mathrm{Gr}_nM$ es un $D_0$-módulo finitamente generado. Así, $F_nM = \{0\}$ para $n \in \mathbb{Z}$ suficientemente negativo, y $\bigoplus_{n\leq m_0} \mathrm{Gr}_nM$ es un $D_0$-módulo finitamente generado.

2. $\Rightarrow$ 1. Como $FM$ es hausdorff, $\mathrm{Gr}_nM = \{0\}$ para $n \in \mathbb{Z}$ suficientemente negativa. Cada $\mathrm{Gr}_nM$ es un $D_0$-módulo finitamente generado. La sucesión exacta

$$0 \to F_{n-1}M \to F_nM \to \mathrm{Gr}_nM \to 0,$$

implica que $F_nM = F_{n-1}M$, para $n$ suficientemente negativa. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{Z}$, tal que $\cap_{n\in\mathbb{Z}}F_nM = F_{n_0}M$. Como la filtración es hausdorff, $F_{n_0}M = \{0\}$. Por inducción en $n$, cada $F_nM$ es un $D_0$-módulo finitamente generado. Sea $m_0 \in \mathbb{Z}$, tal que $\bigoplus_{n\leq m_0} \mathrm{Gr}_nM$ genera $\mathrm{Gr}M$ como $\mathrm{Gr}D$-módulo. Sea $m \geq m_0$, entonces

$$\mathrm{Gr}_{m+1}M = \bigoplus_{k\leq m_0} \mathrm{Gr}_{m+1-k}D \cdot \mathrm{Gr}_kM = \bigoplus_{k\leq m_0} \mathrm{Gr}_1D \cdot \mathrm{Gr}_{m-k}D \cdot \mathrm{Gr}_kM \subset \mathrm{Gr}_{m+1}M,$$

es decir, $\mathrm{Gr}_1D \cdot \mathrm{Gr}_mM = \mathrm{Gr}_{m+1}M$. Esto implica que

$$F_{m+1}M = D_1 \cdot F_mM + F_mM = D_1 \cdot F_mM,$$

por inducción en $n$,

$$F_{m+n}M = D_1 \cdot D_1 \cdots D_1 \cdot F_mM = D_n \cdot F_mM \subset F_{n+m}M.$$

Por lo tanto $FM$ es una buena filtración.

□

En particular $(D_n; n \in \mathbb{Z})$ es una buena filtración de $D$ considerado como un $D$-módulo.

**Lema 1.4.** *Sea $M$ un $D$-módulo con una buena filtración $FM$. Entonces $M$ es finitamente generado.*

*Demostración.* Por definición $\cup_{n\in\mathbb{Z}}F_nM = M$ y $F_{n+m_0}M = D_n \cdot F_{m_0}M$, para $n \in \mathbb{Z}_+$ y $m_0 \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande. Entonces $F_{m_0}M$ genera $M$ como $D$-módulo. Luego, $F_{m_0}M$ es finitamente generado como $D_0$-módulo, de donde concluimos que $M$ es un $D$-módulo finitamente generado. □

**Lema 1.5.** *Sea $M$ un $D$-módulo finitamente generado. Entonces $M$ admite una buena filtración.*

*Demostración.* Sea $U$ un $D_0$-módulo finitamente generado, que genera a $M$ como $D$-módulo. Definimos $F_nM = \{0\}$ para $n < 0$ y $F_nM = D_nU$ para $n \geq 0$. Entonces $U = \mathrm{Gr}_0 M$, y

$$\mathrm{Gr}_n M = \frac{F_nM}{F_{n-1}M} = \frac{D_nU}{D_{n-1}U} = \mathrm{Gr}_n D \cdot \mathrm{Gr}_0 M,$$

de donde $\mathrm{Gr}M$ es un $\mathrm{Gr}D$-módulo finitamente generado. Por el lema 1.3 concluimos que $FM$ es una buena filtración. □

Por los lemas 1.4, 1.5 concluimos que los únicos $D$-módulos que admiten una buena filtración son los finitamente generados.

**Proposición 1.6.** *$D$ es un anillo noetheriano izquierdo y derecho.*

*Demostración.* Sea $I$ un ideal izquierdo de $D$. La filtración de $D$ induce una filtración $(I_n = I \cap D_n; n \in \mathbb{Z})$ en $I$. Por ser $I$ un ideal izquierdo, la filtración resulta ser de $D$-módulos. El módulo graduado asociado $\mathrm{Gr}I$ es un ideal de $\mathrm{Gr}D$. Como $\mathrm{Gr}D$ es un anillo noetheriano, $\mathrm{Gr}I$ es finitamente generado. Por 1.3, la filtración de $I$ es una buena filtración, y por 1.4 $I$ es finitamente generado. Por lo tanto $D$ es noetheriano.

Si remplazamos $D^{op}$ por $D$ y repetimos el argumento, obtenemos que $D$ es noetheriano derecho. □

Si tenemos dos filtraciones $FM$ y $F'M$ de un $D$-módulo $M$, decimos que $FM$ es más *fina* que $F'M$, si existe un número $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $F_nM \subset F'_{n+k}M$, para toda $n \in \mathbb{Z}$. Si $FM$ es más fina que $F'M$ y $F'M$ es más fina que $FM$, decimos que son *equivalentes*.

**Lema 1.7.** *Sea $FM$ una buena filtración de $M$ un $D$-módulo. Entonces $FM$ es más fina que cualquier otra filtración exhaustiva de $D$-módulos de $M$.*

*Demostración.* Sea $m_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $D_n \cdot F_{m_0}M = F_{n+m_0}M$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Sea $F'M$ otra filtración exhaustiva de $D$-módulos de $M$. Como $F_{m_0}M$ es un $D_0$-módulo finitamente generado y $F'M$ es exhaustiva, entonces existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $F_{m_0}M \subset F'_pM$. $FM$ en particular es hausdorff, es decir, existe $n_0$ tal que $F_{n_0}M = \{0\}$. Sea $k = p + |n|$. Entonces, para $n_0 \leq m \leq m_0$, tenemos

$$F_mM \subset F_{m_0}M \subset F'_pM \subset F'_{m+k}M,$$

y para $m > m_0$,

$$F_mM = D_{m-m_0} \cdot F_{m_0}M \subset D_{m-m_0} \cdot F'_kM \subset F'_{m-m_0+k}M \subset F'_{m+k}M.$$

□

**Corolario 1.8.** *Cualesquiera dos buenas filtraciones en un $D$-módulo finitamente generado son equivalentes.*

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de módulos. Sea $\lambda$ una función definida sobre $\mathcal{C}$ que toma valores en $\mathbb{Z}_+$. La función $\lambda$ es llamada *aditiva* si para cualquier sucesión exacta en $\mathcal{C}$,

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

se tiene

$$\lambda(M) = \lambda(M') + \lambda(M'').$$

Como ejemplo de funciones aditivas tenemos:

1. Si denotamos por $\mathcal{M}_{lf}(D)$ la categoría de $D$-módulos de longitud finita, $\lambda :=$ longitud es una función aditiva.

2. Si denotamos por $\mathcal{M}_{df}(K)$ la categoría de $K$-espacios vectoriales de dimensión finita, $\lambda := \dim_K$ es una función aditiva.

3. Si denotamos por $\mathcal{M}_{rf}(D)$ la categoría de $D$-módulos libres de rango finito, $\lambda :=$ rango es una función aditiva.

Sea $\lambda$ una función aditiva en la categoría de los $D_0$-módulos finitamente generados $\mathcal{M}_{fg}(D_0)$. Consideremos $M$ un $D$-módulo finitamente generado y $FM$ una filtración de $M$. La serie de Poincaré de $M$ con respecto a $\lambda$, se define como

$$P(M,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda(F_nM)t^n \in \mathbb{Z}((t)).$$

El siguiente teorema describe la forma en que puede ser expresada $P(M,t)$.

**Teorema 1.9** (Hilbert-Serre). *$P(M,t)$ es una función racional en $t$ de la forma*

$$\frac{f(t)}{\prod_{i=1}^{s}(1-t^{k_i})},$$

*donde $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$.*

*Demostración.* [Atiyah-Macdonald] página 117. □

Denotamos por $d$ el orden del polo de $P(M,t)$ en $t=1$.

**Teorema 1.10.** *Si cada $k_i = 1$ (en el teorema anterior), entonces para $n$ suficientemente grande, $\lambda(F_nM)$ es un polinomio en $n$ de grado $d-1$. El término principal de éste polinomio está dado por $(\sum a_k)n^{d-1}/(d-1)!$, donde $a_k$ son los coeficientes de $f(t)$.*

*Demostración.* [Atiyah-Macdonald] página 117. □

El polinomio $\lambda(F_nM)$, para $n \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande, es llamado el *polinomio de Hilbert* de $M$ con respecto a $\lambda$.

Sea $M$ un $D$-módulo no nulo finitamente generado con dos buenas filtraciones $FM$ y $F^{'}M$, por 1.8 sabemos que existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$F_nM \subset F^{'}_{n+k}M \subset F_{n+2k}M,$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. Esto implica que los polinomios de Hilbert $\lambda(F_nM)$ y $\lambda(F^{'}_nM)$, para $n$ suficientemente grande, tienen los mismos términos principales. Denotamos el grado común de estos polinomios por $d_\lambda(M)$ y lo llamamos la *dimensión* de $M$ con respecto a $\lambda$ ($d_\lambda$-dimensión). Por 1.10, el coeficiente líder de estos polinomios tiene la forma $e_\lambda(M)/d_\lambda(M)!$, donde $e_\lambda(M) \in \mathbb{N}$. Llamamos a $e_\lambda(M)$ la *multiplicidad* de $M$ con respecto a $\lambda$ ($e_\lambda$-multiplicidad).

Ahora veremos como se comporta $d_\lambda$ y $e_\lambda$ con respecto a una sucesión exacta corta.

**Lema 1.11.** *Sea*

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

*una sucesión exacta de D-módulos. Si $FM$ es una buena filtración en $M$, entonces ésta induce buenas filtraciones para $M'$ y $M''$.*

*Demostración.* Definamos $FM' = (f^{-1}(f(M') \cap F_nM); n \in \mathbb{Z})$ y $FM'' = (g(F_nM); n \in \mathbb{Z})$, las cuales resultan ser de $D$-módulos. Como $\mathrm{Ker}g = \mathrm{Im}f$, entonces $\mathrm{Ker}g \cap F_nM = \mathrm{Im}f \cap F_nM$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces la sucesión

$$0 \to F_nM' \xrightarrow{f_*} F_nM \xrightarrow{g_*} F_nM'' \to 0$$

es exacta, para toda $n \in \mathbb{Z}$. Lo cual implica que la sucesión

$$0 \to \mathrm{Gr}_nM' \xrightarrow{\mathrm{Gr}f_*} \mathrm{Gr}_nM \xrightarrow{\mathrm{Gr}g_*} \mathrm{Gr}_nM'' \to 0$$

es exacta, para toda $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto la sucesión

$$0 \to \mathrm{Gr}M' \xrightarrow{\mathrm{Gr}f} \mathrm{Gr}M \xrightarrow{\mathrm{Gr}g} \mathrm{Gr}M'' \to 0$$

es exacta. Si la filtración $FM$ es buena, entonces $\mathrm{Gr}M$ es un $\mathrm{Gr}D$-módulo finitamente generado y como consecuencia $\mathrm{Gr}M'$ y $\mathrm{Gr}M''$ también son finitamente generados. Por 1.3 $FM'$ y $FM''$ son buenas filtraciones. □

**Proposición 1.12.** *Sea*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

*una sucesión exacta de D-módulos finitamente generados. Entonces*

1. $d_\lambda(M) = \max\{d_\lambda(M'), d_\lambda(M'')\}$;
2. *Si* $d_\lambda(M) = d_\lambda(M') = d_\lambda(M'')$, *entonces* $e_\lambda(M) = e_\lambda(M') + e_\lambda(M'')$.

*Demostración.* Como $M$ es finitamente generado, entonces $M$ tiene una buena filtración $FM$, por lo discutido en el lema anterior $FM$ induce buenas filtraciones $FM'$, $FM''$ en $M'$ y $M''$ respectivamente. Como $\lambda$ es una función aditiva,

$$\lambda(\mathrm{Gr}_nM) = \lambda(\mathrm{Gr}_nM') + \lambda(\mathrm{Gr}_nM''), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Por inducción en $n$, se deduce

$$\lambda(F_nM) = \lambda(F_nM') + \lambda(F_nM''), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Para $n$ suficientemente grande, la igualdad anterior resulta ser una igualdad de polinomios, de donde se deduce (1) y (2). □

Consideremos $\phi$ un automorfismo de $D$ tal que $\phi(D_0) = D_0$. A partir de $\phi$, podemos definir un funtor $\widehat{\phi}$ de $\mathcal{M}(D)$ en si misma que manda cada $D$-módulo $M$ al $D$-módulo $\widehat{\phi}(M)$ que es isomorfo a $M$ como grupo abeliano y la acción de $D$ está dada por $(T, m) \mapsto \phi(T)m$, $T \in D$, $m \in M$. Claramente $\widehat{\phi}$ es una auto equivalencia en $\mathcal{M}(D)$ que preserva $D$-módulos finitamente generados.

**Proposición 1.13.** *Sea $M$ un $D$-módulo finitamente generado. Entonces*

$$d_\lambda(\widehat{\phi}(M)) = d_\lambda(M).$$

*Demostración.* Sean $T_1, T_2, \ldots, T_s \in D_1$ tales que sus clases en $\mathrm{Gr}_1 D$ generan a $\mathrm{Gr} D$ como $D_0$-álgebra. Entonces existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(T_i) \in D_d$ para $1 \leq i \leq s$. Como $T_1, T_2, \ldots, T_s$ y 1 generan $D_1$ como $D_0$-módulo, tenemos $\phi(D_1) \subset D_d$. Sea $FM$ una buena filtración de $M$. Definimos una filtración $F\widehat{\phi}(M)$ por

$$F_p\widehat{\phi}(M) = F_{dp}M, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Claramente, $F\widehat{\phi}(M)$ es una filtración creciente de $\widehat{\phi}(M)$ por $D_0$-submódulos finitamente generados. Además,

$$D_1 \cdot F_m\widehat{\phi}(M) = \phi(D_1) \cdot F_{dm}M \subset D_d \cdot F_{dm}M \subset F_{d(m+1)}M = F_{m+1}\widehat{\phi}(M),$$

para $m \in \mathbb{Z}$. Por inducción, tenemos

$$D_n \cdot F_m\widehat{\phi}(M) = D_1 \cdot D_{n-1} \cdot F_m\widehat{\phi}(M) \subset D_1 \cdot F_{m+n-1}\widehat{\phi}(M) \subset F_{n+m}\widehat{\phi}(M),$$

para toda $n, m \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $F\widehat{\phi}(M)$ es una filtración de $D$-módulos. Por 1.5, existe una buena filtración $F'\widehat{\phi}(M)$ que es más fina que esta filtración, es decir, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$F'_n\widehat{\phi}(M) \subset F_{n+k}\widehat{\phi}(M) = F_{d(n+k)}M, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Así,

$$\lambda(F'_n\widehat{\phi}(M)) \leq \lambda(F_{d(n+k)}M), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Para $n \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande, $\lambda(F_{d(n+k)}M)$ es igual a un polinomio en $n$ con término principal igual a

$$\frac{e_\lambda(M) d^{d_\lambda(M)}}{d_\lambda(M)!} n^{d_\lambda(M)}.$$

Como $\lambda(F'_n\widehat{\phi}(M))$ está dado por un polinomio de grado $d_\lambda(\widehat{\phi}(M))$, para $n \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande. Por lo tanto $d_\lambda(\widehat{\phi}(M)) \leq d_\lambda(M)$. Aplicando el mismo razonamiento para $\phi^{-1}$, tenemos $d_\lambda(M) = d_\lambda(\widehat{\phi^{-1}}(\widehat{\phi}(M))) \leq d_\lambda(M)$, de donde se sigue el teorema. □

Ahora analizaremos la $d_\lambda$-dimensión y la $e_\lambda$-multiplicidad del anillo de polinomios y recordaremos su relación con la dimensión de Krull.

Sea $A = K[X_1, \ldots, X_n]$ con $K$ un campo algebraicamente cerrado. Podemos filtrar $A$ a través del grado, es decir, $A_m = \{\sum_\alpha a_\alpha X^\alpha \,|\, |\alpha| \leq m\}$. Entonces $\mathrm{Gr}A = K[X_1, \ldots, X_n]$. Así, $A$ satisface las propiedades **F1**,…,**F7**. Como $A_0 = K$, podemos considerar la función aditiva $\lambda$ dada por $\dim_K$. Para cualquier $p \in \mathbb{Z}_+$, tenemos

$$\dim_K(A_p) = \binom{n+p}{n} = \frac{p^n}{n!} + \text{términos de grado menor},$$

esto nos dice, $d_\lambda(A) = n$ y $e_\lambda(A) = 1$. Además para $M$ un $A$-módulo finitamente generado tenemos la sucesión exacta

$$0 \to K \to A^p \to M \to 0,$$

por 1.12, $d(M) \leq n$.

Recordemos un poco los conceptos de dimensión que conocemos.

1. Para $X$ un espacio topológico, se define la *dimensión* de $X$, que se denota por $\dim X$; como el supremo de todos los enteros $r$ tales que existe una cadena $Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_r$ de cerrados irreducibles distintos de $X$.

2. Para $R$ un anillo. El supremo de todos los $r$, tomado sobre todas las cadenas decrecientes $\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_r$ de ideales primos de $R$, es llamado la *dimensión de Krull* de $R$, y se denota por $\mathrm{Kdim}R$. De los teoremas de álgebra conmutativa sabemos que para $R$ un anillo conmutativo con unidad, $X = \mathrm{Spec}(R)$ el espectro de $R$, es un espacio topológico que satisface $\dim(\mathrm{Spec}(R)) = \mathrm{Kdim}(R)$.

3. Para un ideal primo $\mathfrak{p}$ de $R$, el supremo de todas las longitudes, tomado sobre todas las cadenas de ideales primos estrictamente decrecientes que comienzan en $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_r$, es llamada la *altura* de $\mathfrak{p}$, lo denotamos por $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$. Si $R$ es noetheriano, se puede probar que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) < \infty$. De manera informal $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ correspondería con la dimensión de Krull de $\mathfrak{p}$, la cual coincide con la dimensión de la variedad asociada a $\mathfrak{p}$ (pensando que R=A, el anillo de polinomios).

Teniendo en cuenta que la dimensión como variedad y como ideal coinciden, es natural preguntarnos cómo se relacionan estas dimensiones con la $\lambda$-dimensión, para $M$ un $A$-módulo finitamente generado. Un resultado sorprendente 1.17 que posteriormente enunciaremos, nos muestra que estas tres dimensiones coinciden. Antes de enunciar otro resultado ajustemos la notación.

Sea $x \in K^n$ y denotemos por $\mathfrak{m}_x$ el ideal maximal en $K[X_1, \ldots, X_n]$ de todos los polinomios que se anulan en $x$. Luego, $A_x$ es un anillo local $n$-dimensional con ideal maximal $\mathfrak{n}_x = (\mathfrak{m}_x)_x$ que consiste de todas las funciones racionales $K$-valuadas en $K^n$ regulares en $x$. Sea $M$ un $A$-módulo, su localización $M_x$ en $x$ es un $A_x$-módulo. Definimos el *soporte* de $M$ en $K^n$ por $\mathrm{supp}(M) = \{x \in K^n | M_x \neq 0\}$, y definimos el *aniquilador* de $M$ en $A$ por $\mathrm{Ann}(M) = \{x \in A |\, xm = 0, \text{para toda } m \in M\}$. De aquí en adelante denotaremos la $\lambda$-dimensión y la $\lambda$-multiplicidad de un módulo $M$ simplemente por $d(M)$ y $e(M)$ respectivamente.

**Lema 1.14.** *Sea*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

*una sucesión exacta de $A$-módulos. Entonces* $\mathrm{supp}(M) = \mathrm{supp}(M') \cup \mathrm{supp}(M'')$.

*Demostración.* Como la localización es exacta, tenemos que

$$0 \to M'_x \to M_x \to M''_x \to 0$$

es una sucesión exacta de $A_x$-módulos. Luego, $M_x = \{0\}$ si y sólo si $M'_x = \{0\}$ y $M''_x = \{0\}$. Por lo tanto se cumple la igualdad. □

Para $I$ un ideal en $K[X_1, \ldots, X_n]$, denotamos por $\mathcal{V}(I)$ al conjunto $\{x \in K^n |\, f(x) = 0, \text{ para toda } f \in I\}$.

**Proposición 1.15.** *Sea $M$ un $A$-módulo finitamente generado e $I$ su aniquilador en $A$. entonces* $\mathrm{supp}(M) = \mathcal{V}(I)$.

*Demostración.* Por inducción en el número de generadores de $M$. Si $M$ tiene sólo un generador, $M$ es de la forma $A/I$. Entonces $M_x = (A/I)_x = A_x/I_x$. Sea $x \in \mathcal{V}(I)$, entonces $I \subset \mathfrak{m}_x$ y $I_x \subset \mathfrak{n}_x$. Entonces $I_x \neq A_x$, de donde $(A/I)_x \neq 0$ y con esto $x \in \operatorname{supp}(M)$. Inversamente, si $x \notin \mathcal{V}(I)$, existe $f \in I$ tal que $f(x) \neq 0$, es decir $f \notin \mathfrak{m}_x$. Así, $f(g+I) = 0$ para todo $g \in A$. Entonces $(A/I)_x = 0$ y $x \notin \operatorname{supp}(A/I)$. Por lo tanto $\operatorname{supp}(A/I) = \mathcal{V}(I)$.

Ahora supongamos que $m_1, m_2 \ldots, m_p$ es un conjunto de generadores de $M$. Denotamos por $M^{'}$ el $A$-submódulo generado por $m_1, m_2, \ldots, m_{p-1}$, y consideremos la sucesión exacta

$$0 \to M^{'} \to M \to M^{''} \to 0.$$

Por 1.14, $\operatorname{supp}(M) = \operatorname{supp}(M^{'}) \cup \operatorname{supp}(M^{''})$. Por la hipótesis de inducción $\operatorname{supp}(M) = \mathcal{V}(I^{'}) \cup \mathcal{V}(I^{''})$, donde $I^{'}$, $I^{''}$ son los aniquiladores de $M^{'}$, $M^{''}$ respectivamente. Denotamos por $I$ el aniquilador de $M$. Entonces $I^{'} \cdot I^{''} \subset I \subset r(I^{'} \cap I^{''})$. Esto implica que $\mathcal{V}(I^{'} \cap I^{''}) \subset \mathcal{V}(I) \subset \mathcal{V}(I^{'} \cdot I^{''}) \subset \mathcal{V}(I^{'}) \cup \mathcal{V}(I^{''}) = \mathcal{V}(I^{'} \cap I^{''})$, es decir $\operatorname{supp}(M) = \mathcal{V}(I)$. □

El siguiente resultado es indispensable para la prueba de los teoremas del final de esta sección, debemos tener cuidado con las implicaciones de este lema, pues pareciera que se concluye que todo módulo finitamente generado tiene una serie de composición, pero no es así, la filtración que se obtiene no satisface que los cocientes consecutivos sean simples.

**Lema 1.16.** *Sea $R$ un anillo noetheriano conmutativo y $N$ un $R$-módulo finitamente generado. Entonces existe una filtración $0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_{s-1} \subset N_s = N$ de $N$ dado por $R$-submódulos que satisfacen $N_i/N_{i-1} \cong R/I_i$, $0 \leq i \leq s$, donde cada $I_i$ es un ideal primo de $R$.*

*Demostración.* Para $y \in N$, denotamos el anulador de $y$ por $\operatorname{Ann}(y) = \{r \in R | \, ry = 0\}$, el cual es un ideal de $R$. Sea $\Delta$ la familia de todos los ideales $\operatorname{Ann}(y)$, $y \in N$ no cero. Como $R$ es un anillo noetheriano, $\Delta$ tiene elementos maximales. Sea $J$ un elemento maximal de $\Delta$, probaremos que $J$ es también un ideal primo. Sea $y \in N$ tal que $J = \operatorname{Ann}(y)$. Luego, $ab \in J$, significa que $aby = 0$. Supongamos que $b \notin J$, es decir $by \neq 0$. Así, $J \subset \operatorname{Ann}(by)$ y $a \in \operatorname{Ann}(by)$. Por la maximalidad de $J$, $a \in J = \operatorname{Ann}(by)$. Entonces $J$ es primo. Por lo tanto, existe $x \in N$ tal que $J_k = \operatorname{Ann}(x)$ es un ideal primo. Si llamamos $N_1 = Rx$, el $R$-submódulo de $N$ generado por $x$, entonces

$$N_1 \cong R/J_k.$$

Ahora denotamos por $\Gamma$ la familia de todos los $R$-submódulos de $N$ que tienen filtración $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{k-1} = M$, con $M_i/M_{i-1} \cong R/J_i$, para algún ideal primo $J_i$ de $R$. Como $N$ es finitamente generado, $N$ es noetheriano. Entonces $\Gamma$ tiene un elemento maximal $T$. Supongamos $T \neq N$ y consideremos la sucesión exacta

$$0 \to T \to N \to T^{'} \to 0.$$

$T^{'}$ es un $R$-módulo no nulo finitamente generado, entonces existe $M^{''}$ un $R$-submódulo de $T^{'}$ que satisface $M^{''} = R/J_k$. Por el teorema de la correspondencia, existe $M^{'}$ un $R$-submódulo de $N$ tal que

$$T \leq M^{'} \leq N.$$

Además $M^{'}/T = M^{''} = R/J_k$, lo cual contradice la maximalidad de $T$. Por lo tanto $T = N$. Esto prueba la existencia de una filtración con la propiedad señalada. □

La localización $A_x$ de $A$ en $x \in K^n$ es un anillo local noetheriano. Su ideal maximal $\mathfrak{n}_x$ es el ideal generado por los polinomios $X_i - x_i$, $1 \leq i \leq n$. Las clases de estos polinomios generan a $\mathfrak{n}_x/\mathfrak{n}_x^2$ como $K$-espacio vectorial. Para cualquier $A$-módulo $M$ finitamente generado, su localización $M_x$ es un $A_x$-módulo finitamente generado, entonces podemos considerar su dimensión $d(M_x)$. Para $V$ una variedad algebraica en $K^n$ y $x \in V$, denotamos por $\dim_x V$ la dimensión local de $V$ en $x$.

**Teorema 1.17.** *Sea $M$ un $A$-módulo finitamente generado, entonces:*

1. $d(M) = \dim \operatorname{supp}(M)$.
2. $d(M_x) = \dim_x \operatorname{supp}(M)$, *para* $x \in \operatorname{supp}(M)$.

*Demostración.* Por 1.16 existe una filtración $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_s = M$ de $M$, con $M_i/M_{i-1} \cong R/I_i$. Las pruebas de (1),(2) las haremos de forma simultanea, por inducción en la longitud de la filtración.

Supongamos que $M \cong A/I$, con $I$ ideal primo. Si $A/I$ es un $K$-espacio vectorial de dimensión finita. Entonces $A/I$ es un dominio entero sobre $K$, es decir $A/I$ es una extensión algebraica de $K$. Como $K$ es algebraicamente cerrado $A/I \cong K$ y por tanto $I$ es un ideal maximal. Por el teorema de los ceros de Hilbert, $\operatorname{supp}(M) = \mathcal{V}(I)$ es un punto $x \in K^n$, es decir, $\dim \operatorname{supp}(M) = 0$. Por otro lado, como $M_x$ es un espacio lineal de dimensión uno, $d(M_x) = 0$. Así, el teorema se cumple en este caso. Supongamos que $I$ no es un ideal maximal de $A$. Sea $I_1$ ideal primo de $A$ diferente de $I$, tal que $I_1 \supset I$. Consideremos $f \in I_1$, $f \notin I$. Así $I \subset I + (f) \subset I_1$ y $I \neq I + (f)$. Por lo tanto, $A/I_1$ es un cociente de $A/(I + (f))$, y $A/(I + (f))$ es un cociente de $A/I$. Observemos que $A/(I+(f)) \cong M/fM$. Consideremos el endomorfismo de $M$ dado por $m \mapsto fm$, $m \in M$. Si $g + I$ está en el kernel de este morfismo, $0 = f(g + I) = fg + I$, es decir $fg \in I$. Como $f \notin I$ e $I$ es ideal primo, $g \in I$, $g + I = 0$. Por lo tanto el morfismo es inyectivo. Así, tenemos la sucesión exacta de $A$-módulos

$$0 \to M \xrightarrow{f} M \to M/fM \to 0.$$

Entonces $d(M/fM) \leq d(M)$. Si $d(M/fM) = d(M)$, entonces $e(M) = e(M) + e(M/fM)$, de donde $e(M/fM) = 0$. Esto es posible sólo si $d(M/fM) = 0$, lo cual implica $d(M) = 0$. Esto contradice el hecho de que $M$ no es de K-dimensión finita. Por lo tanto $d(M/fM) < d(M)$. Como $A/I_1$ es un cociente de $M/fM$, se cumple $d(A/I_1) < d(A/I)$. Sea $x \in \mathcal{V}(I_1)$, como la localización es exacta,

$$0 \to M_x \xrightarrow{f} M_x \to M_x/fM_x \to 0$$

es una sucesión exacta de $A_x$-módulos. Entonces $d(M_x/fM_x) \leq d(M_x)$. Si $d(M_x/fM_x) = d(M_x)$, tenemos $e(M_x) = e(M_x) + e(M_x/fM_x)$, de donde $e(M_x/fM_x) = 0$. Esto es posible sólo si $d(M_x/fM_x) = 0$, en este caso tenemos $\mathfrak{m}_x(M_x/fM_x) = M_x/fM_x$. Por el lema de Nakayama $M_x/fM_x = 0$. Entonces la multiplicación por $f$ es sobreyectiva en $M_x$, es decir $fM_x = M_x$. Como $f \in \mathfrak{m}_x$, por el lema de Nakayama, $M_x = 0$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $d(M_x/fM_x) < d(M_x)$. Así obtenemos $d((A/I_1)_x) < d((A/I)_x)$. Consideremos

$$\{x\} = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset E_n = K^n,$$

una cadena maximal de subconjuntos cerrados irreducibles de $K^n$, entonces

$$\mathcal{I}(E_0) = \mathfrak{m}_x \supset \mathcal{I}(E_1) \supset \cdots \supset \mathcal{I}(E_{n-1}) \supset \mathcal{I}(E_n) = \{0\}$$

es una cadena maximal de ideales primos en $A$. Entonces tenemos la sucesión de desigualdades estrictas

$$0 \leq d(A/\mathcal{I}(E_0)) < d(A/\mathcal{I}(E_1)) < \cdots < d(A/\mathcal{I}(E_n)) = d(A) = n$$

y

$$0 \leq d((A/\mathcal{I}(E_0))_x) < d((A/\mathcal{I}(E_1))_x) < \cdots < d((A/\mathcal{I}(E_n))_x) = d(A_x) = n$$

Por lo tanto,

$$d((A/\mathcal{I}(E_j))_x) = d(A/\mathcal{I}(E_j)) = j = \dim E_j, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Sabemos que cualquier subconjunto cerrado irreducible $E$ de $K^n$, puede ser parte de una cadena maximal. Así, tenemos $d((A/\mathcal{I}(E))_x) = d(A/\mathcal{I}(E)) = \dim E$, $x \in E$. Esto implica $d((A/I)_x) = d(A/I) = \dim(\mathcal{V}(I))$, para todo ideal primo $I$ de $A$ y $x \in \mathcal{V}(\mathcal{I})$.

Supongamos que $M$ tiene una filtración como la de 1.16 de longitud $n$. Sea $M^{'} \neq 0$ un submódulo de $M$ que está en la filtración, entonces

$$0 \to M^{'} \to M \to M^{''} \to 0$$

es una sucesión exacta de $A$-módulos. Así, $M^{'}, M^{''}$ tienen filtraciones de longitud estrictamente menor que $n$. Por la hipótesis de inducción $M^{'}, M^{''}$ satisfacen (1) y (2). Luego,

$$\begin{aligned} d(M) &= \text{máx}\{d(M^{'}), d(M^{''})\} = \text{máx}\{\dim \operatorname{supp}(M^{'}), \dim \operatorname{supp}(M^{''})\} \\ &= \dim(\operatorname{supp}(M^{'}) \cup \operatorname{supp}(M^{''})) = \dim \operatorname{supp}(M). \end{aligned}$$

Para $x \in \operatorname{supp}(M)$, como la localización es exacta,

$$0 \to M^{'}_x \to M_x \to M^{''}_x \to 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} d(M_x) &= \text{máx}\{d(M^{'}_x), d(M^{''}_x)\} = \text{máx}\{\dim_x \operatorname{supp}(M^{'}), \dim_x \operatorname{supp}(M^{''})\} \\ &= \dim_x(\operatorname{supp}(M^{'}) \cup \operatorname{supp}(M^{''})) = \dim_x \operatorname{supp}(M). \end{aligned}$$

□

Un resultado inmediato de este teorema es el siguiente.

**Corolario 1.18.** *Sea $M$ un $A$-módulo finitamente generado, entonces*

$$d(M) = \sup_{x \in \operatorname{supp}(M)} d(M_x).$$

*Demostración.* Por inducción en la longitud de la filtración dada por 1.16. Si $M = A/I$, para $I$ ideal primo de $A$, por lo discutido en la prueba de 1.17, $d(M) = d(M_x)$, $x \in \mathrm{supp}(M)$. Si $M$ tiene una filtración de longitud $n$, sea $M^{'} \neq 0$ un $A$-submódulo de $M$ que forma parte de la filtración. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \to M^{'} \to M \to M^{''} \to 0.$$

Por hipótesis de inducción, $d(M^{'}) = \sup_{x \in \mathrm{supp}(M')} d(M^{'}_x)$ y $d(M^{''}) = \sup_{x \in \mathrm{supp}(M'')} d(M^{''}_x)$. Entonces

$$\begin{aligned} d(M) &= \text{máx}\{d(M^{'}), d(M^{''})\} = \text{máx}\{\sup_{x \in \mathrm{supp}(M')} d(M^{'}_x), \sup_{x \in \mathrm{supp}(M'')} d(M^{''}_x)\} \\ &= \sup_{x \in \mathrm{supp}(M)} d(M_x). \end{aligned}$$

□

Observemos que la dimensión de Krull para un anillo simple $D$ es trivial, sin embargo, si a $D$ le asociamos una buena filtración $FD$ que cumpla **F1,. . . ,F7**, y podemos definir una función aditiva $\lambda$ en la categoría $\mathcal{M}_{fg}(D_0)$. Entonces podemos hablar de $d(D)$ y $e(D)$. Por la forma en que se define $\mathrm{Gr}D$, tenemos

$$0 \to F_{p-1}D \to F_pD \to \mathrm{Gr}_pD \to 0.$$

es exacta para todo $p \in \mathbb{Z}$. Como $\lambda$ es aditiva, entonces

$$\lambda(F_pD) = \lambda(\mathrm{Gr}_pD) + \lambda(F_{p-1}D).$$

Por inducción en $p$, obtenemos

$$\lambda(F_pD) = \sum_{l \leq p} \lambda(\mathrm{Gr}_lD).$$

Por otro lado, $F\mathrm{Gr}D = (F_p\mathrm{Gr}D = \sum_{l\leq p} \mathrm{Gr}_lD; p \in \mathbb{Z})$ es una filtración en $\mathrm{Gr}D$ que cumple $\mathbf{F1}, \ldots, \mathbf{F7}$. Luego,

$$0 \to F_{p-1}\mathrm{Gr}D \to F_p\mathrm{Gr}D \to \mathrm{Gr}_pD \to 0$$

es una sucesión exacta para todo $p \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\lambda(F_p\mathrm{Gr}D) = \lambda(\mathrm{Gr}_pD) + \lambda(F_{p-1}\mathrm{Gr}D).$$

Nuevamente por inducción en $p$ obtenemos

$$\lambda(F_p\mathrm{Gr}D) = \sum_{l \leq p} \lambda(\mathrm{Gr}_lD).$$

De esta forma $\lambda(F_pD) = \lambda(F_p\mathrm{Gr}D)$, para todo $p \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto

(2a) $$d(D) = d(\mathrm{Gr}D) \quad \text{y} \quad e(D) = e(\mathrm{Gr}D).$$

En el caso $D = \mathscr{A}_n(K)$, la $n$ álgebra de Weyl sobre un campo $K$ de característica cero. Tenemos: el grado induce una filtración $F\mathscr{A}_n(K) = (F_p\mathscr{A}_n(K) = \{a \in \mathscr{A}_n(K) | \, \partial(a) \leq p\}; p \in \mathbb{Z})$ que satisface $\mathbf{F1}, \ldots, \mathbf{F7}$, $F_0\mathscr{A}_n(K) = K$, $\lambda := \dim_K$ es una función aditiva en $\mathcal{M}_{fg}(F_0\mathscr{A}_n(K))$ y $\mathrm{Gr}\mathscr{A}_n(K)$ es el anillo de polinomios en $2n$-variables. Por (2a) $d(\mathscr{A}_n(K)) = d(\mathrm{Gr}\mathscr{A}_n(K)) = 2n$ y $e(\mathscr{A}_n(K)) = e(\mathrm{Gr}\mathscr{A}_n(K)) = 1$.

Con el mismo razonamiento con el que obtuvimos (2a) se puede probar que para $M$ un $D$-módulo finitamente generado se cumple $d(M) = d(\mathrm{Gr}M)$ y $e(M) = e(\mathrm{Gr}M)$. Entonces la dimensión y multiplicidad de los $\mathscr{A}_n(K)$-módulos están en correspondencia con la dimensión y multiplicidad de los $\mathrm{Gr}\mathscr{A}_n(K)$-módulos asociados.

Como nos podemos dar cuenta, en el álgebra de Weyl, a pesar de que la dimensión de Krull es trivial, pues $\mathscr{A}_n(K)$ es una álgebra simple, podemos obtener bastante información a partir de la $d_\lambda$-dimensión. En [Krause-Lenagan] la $d_\lambda$-dimensión se corresponde con la dimensión de Gelfand-Kirillov.

# 2. Álgebra Homológica Sobre el Anillo de Polinomios

Los esfuerzos de esta sección están concentrados en probar el teorema 2.10, el cual establece la forma en que se relacionan la dimensión $d(M)$ ($d_\lambda$-dimensión) y los funtores derivados $\mathrm{Ext}_A^j(-, A)$. Comenzamos con una serie de resultados que nos establecen criterios para encontrar cotas para la dimensión homológica de anillos noetherianos. La prueba de estos resultados la omitimos, pues se puede deducir de los teoremas expuestos en la sección 9 del libro [Rotman]. Posteriormente analizamos el isomorfismo dado entre $\mathrm{Ext}_A^j(A/\mathfrak{m}_x, A)$ y $A/\mathfrak{m}_x$, éste isomorfismo acompañado de una serie de argumentos de álgebra conmutativa nos da una prueba del teorema 2.9, el cual es una versión local del teorema 2.10

**Teorema 2.1.** *Sea $R$ un anillo noetheriano y $n \in \mathbb{Z}_+$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathrm{hd}(R) \leq n$ *(*$\mathrm{hd} =$ *dimensión homológica).*

2. *Para cualesquiera dos $R$-módulos $M$, $N$ finitamente generados,* $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, N) = 0$.

**Teorema 2.2.** *Sea $K$ un campo, entonces* $\mathrm{hd}(K[x_1, \ldots, x_n]) = n$

**Teorema 2.3.** *Sea $R$ un anillo noetheriano con* $\mathrm{hd}(R) < \infty$ *y $n \in \mathbb{Z}_+$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\mathrm{hd}(R) \leq n$.

2. $\mathrm{Ext}_R^j(M, R) = 0$*, para $j > n$ y cualquier $R$-módulo izquierdo $M$ finitamente generado.*

**Teorema 2.4.** *Sea $R$ un anillo noetheriano izquierdo con* $\mathrm{hd}(R) < \infty$ *y $M$ un $R$-módulo izquierdo finitamente generado. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $M = 0$.

2. $\mathrm{Ext}_R^j(M, R) = 0$*, para toda $j \in \mathbb{Z}_+$.*

**Proposición 2.5.** *Sea $M$ un $A$-módulo finitamente generado (recordemos que $A$ denota al anillo de polinomios en $n$ variables), entonces*

1. $\mathrm{Ext}_A^j(M, A)$*, $0 \leq j \leq n$, son $A$-módulos finitamente generados.*

2. $\mathrm{supp}(M) = \bigcup_{j=0}^n \mathrm{supp}(\mathrm{Ext}_A^j(M, A))$.

*Demostración.* 1. Es clara.

2. Sea $P_\circ$ una resolución proyectiva de $M$. Llamemos $I$ al aniquilador de $M$. Para cada $f \in I$, el morfismo $m \mapsto fm$, induce el morfismo nulo en cada $\mathrm{Ext}_A^j(M, A)$. Entonces $I$ está contenido en el aniquilador de $\mathrm{Ext}_A^j(M, A)$, $0 \leq j \leq n$. Entonces $\bigcup_{j=1}^n \mathrm{supp}(\mathrm{Ext}_A^j(M, A)) \subset \mathrm{supp}(M)$. Sea $x \in K^n$ tal que $x \notin \mathrm{supp}(\mathrm{Ext}_A^j(M, A))$, para $j = 1, \ldots, n$. Entonces $\mathrm{Ext}_A^j(M, A)_x = \mathrm{Ext}_{A_x}^j(M_x, A_x)$=0, para $j = 1, \ldots, n$. Esto quiere decir que $M_x = 0$, por lo tanto $x \notin \mathrm{supp}(M)$.

□

Para $M$ un $A$-módulo finitamente generado, definimos

$$j(M) = \min\{j \in \mathbb{Z}_+ \mid \operatorname{Ext}_A^j(M, A) \neq 0\},$$

y para $x \in \operatorname{supp}(M)$

$$\begin{aligned} j(M_x) &= \min\{j \in \mathbb{Z}_+ \mid \operatorname{Ext}_{A_x}^j(M_x, A_x) \neq 0\} \\ &= \min\{j \in \mathbb{Z}_+ \mid \operatorname{Ext}_A^j(M, A)_x \neq 0\} \end{aligned}$$

**Lema 2.6.** *Sea $x \in K^n$, $M_p = A/(X_1 - x_1, \ldots, X_p - x_p)$, entonces*

1. $\operatorname{Ext}_A^j(M_p, A) = 0$, *para* $j \neq p$.
2. $\operatorname{Ext}_A^p(M_p, A) \cong M_p$.

*Demostración.* Por inducción en $p$. Como $A = M_0$, la afirmación es cierta para $p = 0$. Supongamos que se cumple el lema para $p - 1 \geq 0$. Entonces tenemos

$$0 \to M_{p-1} \xrightarrow{X_p - x_p} M_{p-1} \to M_p \to 0.$$

Por la sucesión exacta de $\operatorname{Ext}_A^\circ(-, A)$, tenemos

$$0 \to \operatorname{Ext}_A^{p-1}(M_p, A) \to \operatorname{Ext}_A^{p-1}(M_{p-1}, A) \xrightarrow{X_p - x_p} \operatorname{Ext}_A^{p-1}(M_{p-1}, A) \to \operatorname{Ext}_A^p(M_p, A) \to 0$$

Por la hipótesis de inducción, $\operatorname{Ext}_A^{p-1}(M_{p-1}, A) \cong M_{p-1}$. Como la sucesión es exacta, $\operatorname{Ext}_A^{p-1}(M_p, A) \cong \operatorname{Ker}(X_p - x_p)$ y $\operatorname{Ext}_A^p(M_p, A) \cong \operatorname{Coker}(X_p - x_p)$. Por lo tanto $\operatorname{Ext}_A^{p-1}(M_p, A) = 0$ y $\operatorname{Ext}_A^p(M_p, A) \cong M_p$. □

**Corolario 2.7.** *Sea $x \in K^n$, entonces*

1. $\operatorname{Ext}_A^j(A/\mathfrak{m}_x, A) = 0$, *para* $0 \leq j < n$.
2. $\operatorname{Ext}_A^n(A/\mathfrak{m}_x, A) \cong A/\mathfrak{m}_x$.

**Teorema 2.8.** *Para $x \in K^n$, tenemos*

$$\operatorname{hd}(K[X_1, \ldots, X_n]_x) = n.$$

*Demostración.* Sabemos que $\operatorname{hd}(K[X_1, \ldots, X_n]) = n$. Como la localización es exacta, tenemos que $\operatorname{hd}(K[X_1, \ldots, X_n]_x) \leq n$. Por 2.7,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}_{A_x}^n(A_x/\mathfrak{n}_x, A_x) &= \operatorname{Ext}_{A_x}^n(A_x/(\mathfrak{m}_x)_x, A_x) = \operatorname{Ext}_{A_x}^n((A/\mathfrak{m}_x)_x, A_x) \\ &= \operatorname{Ext}_A^n(A/\mathfrak{m}_x, A)_x \cong (A/\mathfrak{m}_x)_x = A_x/(\mathfrak{m}_x)_x \\ &= A_x/\mathfrak{n}_x \neq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\operatorname{hd}(K[X_1, \ldots, X_n]_x) = n$. □

**Teorema 2.9.** *Sea $M$ un $A$-módulo finitamente generado y $x \in \operatorname{supp}(M)$, entonces*

1. $\operatorname{Ext}_A^j(M, A)_x = 0$, *para* $j < n - d(M_x)$.

*2.* $d(\mathrm{Ext}^j_A(M,A)_x) \leq n-j$*, para todo* $0 \leq j \leq n$*.*

*3.* $\mathrm{Ext}^{n-d(M_x)}_A(M,A)_x \neq 0$ *y* $d(\mathrm{Ext}^{n-d(M_x)}_A(M,A)_x) = d(M_x)$*. En particular*

$$d(M_x) + j(M_x) = n.$$

*Demostración.* La demostración de (1) y (2) están muy relacionadas. El método a seguir es inducción sobre $d(M)$ y utilizaremos propiedades de la sucesión exacta larga $\mathrm{Ext}^{\circ}_A(-,A)$, así como la versión localizada de esta sucesión.

Supongamos que $d(M) = 0$. Entonces $M$ es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $K$. Si $\dim_K M = 1$, por 2.7 tenemos que (1), (2) es cierto para $M$. Supongamos que (1), (2) se cumplen para $M$, si $\dim_K(M) \leq p-1$. Luego, $M$ tiene un $A$-submódulo $M^{'}$ de dimensión uno, que está dado por algún ideal maximal que contenga al $\mathrm{Ann}(M)$. Entonces $0 \to M^{'} \to M \to M^{''} \to 0$. Por hipótesis de inducción (1), (2) se cumplen para $M^{'}, M^{''}$. De la sucesión larga de $\mathrm{Ext}^{\circ}_A(-,A)$,

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^j_A(M^{''},A) \to \mathrm{Ext}^j_A(M,A) \to \mathrm{Ext}^j_A(M^{'},A) \to \cdots,$$

localizando

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^j_{A_x}(M^{''}_x,A_x) \to \mathrm{Ext}^j_{A_x}(M_x,A_x) \to \mathrm{Ext}^j_{A_x}(M^{'}_x,A_x) \to \cdots.$$

Así, (1), (2) se cumple para $M$. Esto prueba el caso $d(M) = 0$.

Ahora probaremos el paso inductivo. Supongamos que (1), (2) es cierto para todo $A$-módulo $N$ con $d(N) < p$ y $p > 0$. Sea $M$ un $A$-módulo finitamente generado con $d(M) = p$. Por 1.16, $M$ tiene una filtración $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_s = M$, tal que $M_i/M_{i-1} \cong A/J_i$, para $J_i$, $i = 1,\ldots,s$ ideales primos de $A$. Además $\mathcal{V}(J_i) \subset \mathrm{supp}(M)$, $i = 1,\ldots,s$. De esto se sigue $d(A/J_i) \leq p$ y tenemos la sucesión exacta

$$0 \to M_{i-1} \to M_i \to A/J_i \to 0,$$

para $i = 1,\ldots,s$. Supongamos que (1),(2) son ciertos para $A/I$, con $I$ ideal primo y $d(\mathcal{V}(I)) = p$, por la hipótesis de inducción y por inducción en $i$, (1),(2) son ciertos para $M$.

Esto reduce a probar el paso inductivo para $M$ de la forma $A/I$. Sea $x \in \mathcal{V}(I)$. $\mathcal{V}(I)$ es irreducible y de dimensión $p$. Por lo analizado en 1.17, $\dim_x \mathcal{V}(I) = p = d(M_x)$. Como $\dim \mathcal{V}(I) > 0$, $\mathfrak{m}_x \neq I$. Luego $f$ induce el morfismo en $M$, dado por $m \mapsto fm$. Por lo analizado en la prueba de 1.17, este morfismo resulta ser inyectivo. Así,

$$0 \to M \xrightarrow{f} M \to M/fM \to 0 \tag{3a}$$

es una sucesión exacta. Entonces $d(M/fM) \leq d(M)$. Si $d(M/fM) = d(M)$, esto implica $e(M/fM) = 0$, $d(M/fM) = d(M) = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $d(M/fM) < d(M) = p$. Por hipótesis de inducción $M/fM$ satisface (1) y (2).

1. De la sucesión larga de $\mathrm{Ext}^{\circ}_A(-,A)$, aplicada a (3a), tenemos

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^j_A(M/fM,A) \to \mathrm{Ext}^j_A(M,A) \xrightarrow{f} \mathrm{Ext}^j_A(M,A) \to \mathrm{Ext}^{j+1}_A(M/fM,A) \to \cdots.$$

Como la localización es exacta,

$$\begin{aligned}\cdots \to \mathrm{Ext}^j_A(M/fM, A)_x &\to \mathrm{Ext}^j_A(M, A)_x \xrightarrow{f} \mathrm{Ext}^j_A(M, A)_x \to \\ &\to \mathrm{Ext}^{j+1}_A(M/fM, A)_x \to \cdots .\end{aligned}$$

(1) se cumple para $M/fM$, entonces $\mathrm{Ext}^j_A(M/fM, A)_x = 0$, para $j < n-p+1$. Para $j < n-p$, $f$ induce un automorfismo en $\mathrm{Ext}^j_A(M, A)$. Dado que $f \in \mathfrak{m}_x$, tenemos $\mathfrak{n}_x \mathrm{Ext}^j_A(M, A)_x = \mathrm{Ext}^j_A(M, A)_x$. Por el lema de Nakayama $\mathrm{Ext}^j_A(M, A)_x = 0$.

2. Si $j = n$, $\mathrm{Ext}^{n+1}_A(M/fM, A) = 0$, pues $\mathrm{hd}(A) = \mathrm{hd}(A_x) = n$. Entonces el morfismo $\mathrm{Ext}^n_A(M, A) \xrightarrow{f} \mathrm{Ext}^n_A(M, A)$ es sobreyectivo, de donde $\mathrm{Ext}^n_A(M, A)_x \xrightarrow{f} \mathrm{Ext}^n_A(M, A)_x$ es también sobreyectivo. Como $f \in m_x$, $n_x \mathrm{Ext}^n_A(M, A)_x = \mathrm{Ext}^n_A(M, A)_x$. Por el lema de Nakayama $\mathrm{Ext}^n_A(M, A)_x = 0$. Por lo tanto (2) es cierto en este caso.

   Sea $j < n$. Por hipótesis de inducción,

$$d(\mathrm{Ext}^j_A(M/fM, A)_x) \leq n - j \quad \text{y} \quad d(\mathrm{Ext}^{j+1}_A(M/fM, A)_x) \leq n - j - 1.$$

   Para facilitar la notación, llamemos $H = \mathrm{Ext}^j_A(M, A)$, $T = \mathrm{Ker} f$, $CT = \mathrm{Coker} f$ y $I = \mathrm{Im} f$. Entonces

$$0 \to T \to H \xrightarrow{f} H \to CT \to 0,$$

   la correspondiente versión local queda

$$0 \to T_x \to H_x \xrightarrow{f} H_x \to CT_x \to 0.$$

   Como (2) es cierto para $M/fM$, tenemos $d(T_x) \leq n - j$ y $d(CT_x) \leq n - j - 1$. Llamemos $I_x = \mathrm{Im} f_x$. Entonces

$$I_x \cap \mathfrak{n}_x^l H_x \supset f(\mathfrak{n}_x^{l-1} H_x) = \mathfrak{n}_x^{l-1} I_x, \quad \mathfrak{n}_x = (\mathfrak{m}_x)_x, l \in \mathbb{Z}_+.$$

   De aquí, $\dim_K(I_x/I_x \cap \mathfrak{n}_x^{l-1}) \leq \dim_K(I_x/\mathfrak{n}_x^l \cap I_x)$, $l \in \mathbb{Z}_+$.

   Consideremos la sucesión exacta

$$0 \to I_x \to H_x \to CT_x \to 0,$$

   que induce la sucesión exacta

$$0 \to I_x/(I_x \cap \mathfrak{n}_x^l H_x) \to H_x/\mathfrak{n}_x^l H_x \to CT_x/\mathfrak{n}_x^l CT_x \to 0, \quad l \in \mathbb{Z}_+.$$

   Entonces

$$\begin{aligned}\dim_K(H_x/\mathfrak{n}_x^l H_x) &= \dim_K(CT_x/\mathfrak{n}_x^l CT_x) + \dim_K(I_x/(I_x \cap \mathfrak{n}_x^l N_x)) \\ &\leq \dim_K(CT_x/\mathfrak{n}_x^l CT_x) + \dim_K(I_x/\mathfrak{n}_x^{l-1} N_x),\end{aligned}$$

   para toda $l \in \mathbb{Z}_+$. De manera similar,

$$0 \to T_x \to H_x \to I_x \to 0,$$

induce

$$0 \to T_x/(T_x \cap \mathfrak{n}_x^l H_x) \to H_x/\mathfrak{n}_x^l H_x \to I_x/\mathfrak{n}_x^l I_x \to 0.$$

Así,

$$\dim_K(H_x/\mathfrak{n}_x^l H_x) = \dim_K(I_x/\mathfrak{n}_x^l I_x) + \dim_K(T_x/(T_x \cap \mathfrak{n}_x^l)).$$

Relacionando las formulas obtenemos,

$$\begin{aligned} \dim_K(H_x/\mathfrak{n}_x^l H_x) - \dim_K(H_x/\mathfrak{n}_x^{l-1} H_x) &\leq \dim_K(CT_x/\mathfrak{n}_x^l CT_x) \\ &- \dim_K(T_x/T_x \cap \mathfrak{n}_x^{l-1} H_x), \end{aligned}$$

para $l \in \mathbb{N}$. El lado izquierdo de esta desigualdad nos describe un polinomio de grado mayor o igual a cero, mientras que el lado derecho describe un polinomio de grado menor o igual a $n-j$. Entonces la $d(T_x) = n - j$ y su coeficiente principal es $-e(T_x)\frac{q^{n-j}}{(n-j)!}$, el cual toma valores negativos para $l \in \mathbb{Z}_+$. Lo cual es una contradicción. Entonces $d(T_x) \leq n - j - 1$, es decir, el polinomio descrito por $\dim_K(H_x/\mathfrak{n}_x^l H_x) - \dim_K(H_x/\mathfrak{n}_x^{l-1} H_x)$ tiene grado menor o igual a $n - j - 1$. Por lo tanto $d(H_x) \leq n - j$.

3. Por (2), $d(\operatorname{Ext}_A^{n-d(M_x)}(M, A)_x) \leq d(M_x)$. Si suponemos que $d(\operatorname{Ext}_A^{n-d(M_x)}(M, A)_x) < d(M_x)$. Para $j < n - d(M_x)$, por (1), $0 = d(\operatorname{Ext}_A^{n-d(M_x)}(M, A)_x) < d(M_x)$. Para $j > n - d(M_x)$, por (2), $d(\operatorname{Ext}_A^{n-d(M_x)}(M, A)_x) < d(M_x)$ lo cual contradice a 2.5 y 1.17.

□

**Teorema 2.10.** *Sea $M$ un $A$-módulo finitamente generado, entonces*

1. $\operatorname{Ext}_A^j(M, A) = 0$, *para* $j < n - d(M)$.
2. $d(\operatorname{Ext}_A^j(M, A)) \leq n - j$, *para todo* $0 \leq j \leq n$.
3. $d(\operatorname{Ext}_A^{n-d(M)}(M, A)) = d(M)$.

*Además, si $M \neq 0$, entonces $\operatorname{Ext}_A^{n-d(M)}(M, A) \neq 0$, es decir*

$$d(M) + j(M) = n.$$

*Demostración.* Se sigue de 1.17 y 2.9. □

Si recordamos un poco el final de la sección anterior, dijimos que la $n$-álgebra de Weyl $\mathscr{A}_n(K)$ tiene una filtración (dada por el grado) que cumple que $\mathrm{Gr}\mathscr{A}_n(K)$ es el anillo de polinomios en $2n$-variables. Si $M$ es un $\mathscr{A}_n(K)$-módulo finitamente generado, entonces $\mathrm{Gr}M$ es un $\mathrm{Gr}\mathscr{A}_n(K)$-módulo finitamente generado. El teorema anterior garantiza que los respectivos $\mathrm{Gr}\mathscr{A}_n(K)$-módulos $\operatorname{Ext}^j_{\mathrm{Gr}\mathscr{A}_n(K)}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}\mathscr{A}_n(K))$ satisfacen (1),(2),(3). Las preguntas son: ¿qué sucede con los $\mathscr{A}_n(K)$-módulos $\operatorname{Ext}^j_{\mathscr{A}_n(K)}(M, \mathscr{A}_n(K))$?, ¿cuáles son las propiedades que se conservan?. La respuesta es que existe un teorema 4.5 análogo a 2.10, que muestra que se cumplen propiedades similares para $\operatorname{Ext}^j_{\mathscr{A}_n(K)}(M, \mathscr{A}_n(K))$. La prueba de este teorema requiere de más teoría, por ello en la siguiente sección introduciremos el concepto de sucesión espectral y desarrollaremos herramientas que nos ayudaran a probar dicho teorema.

# 3. Álgebra Homológica Sobre Anillos Filtrados

Comenzamos esta sección estableciendo una filtración $F\mathrm{Hom}_D(M,N)$ de $\mathrm{Hom}_D(M,N)$ para la cual deducimos las propiedades de ser exhaustiva y hausdorff a partir de ciertas condiciones en las filtraciones $FM$ y $FN$. También establecemos un criterio para saber cuándo el mapeo canónico $\mathrm{GrHom}_D(M,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}N)$ es un isomorfismo. Este criterio nos conduce a la prueba de un interesante teorema el cual afirma que los $D$-módulos proyectivos son libres, siempre y cuando $\mathrm{Gr}D$ sea isomorfo al anillo de polinomios. Posteriormente nos concentraremos en estudiar la correspondencia que existe entre complejos de $\mathrm{Gr}D$-módulos graduados y complejos de $D$-módulos filtrados, estableceremos las condiciones para decir cuando un complejo filtrado es exacto a partir del complejo graduado asociado. Este resultado lo aplicamos directamente para obtener una desigualdad entre las dimensiones homológicas de $D$ y $\mathrm{Gr}D$, $\mathrm{hd}(D) \leq \mathrm{hd}(\mathrm{Gr}D)$. Después equiparemos a $\mathrm{Hom}_D(M,D)$ con una buena filtración, dando pie al análisis de los funtores derivados $\mathrm{Ext}^j_D(-,D)$, y $\mathrm{Ext}^j_{\mathrm{Gr}D}(-,\mathrm{Gr}D)$. Al final, construiremos una sucesión espectral $\mathbf{E}$ que nos mostrara la relación que existe entre los módulos de cohomología $\mathrm{Ext}^j_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}D)$ y $\mathrm{GrExt}^j_D(M,D)$.

Sea $D$ un anillo con una filtración creciente $(D_q : q \in \mathbb{Z})$, donde los $D_q$ son subgrupos abelianos que satisfacen las propiedades **F1**,...,**F7**. Sean $M$, $N$ dos $D$-módulos izquierdos con filtraciones $FM$ y $FN$ respectivamente. Con estas condiciones podemos definir una filtración creciente $F\mathrm{Hom}_D(M,N)$ de $\mathrm{Hom}_D(M,N)$ dada por los subgrupos abelianos

$$F_p\mathrm{Hom}_D(M,N) = \{\phi \in \mathrm{Hom}_D(M,N) |\, \phi(F_qM) \subset F_{q+p}N, q \in \mathbb{Z}\},$$

para todo $p \in \mathbb{Z}$. En los siguientes resultados veremos bajo que condiciones esta filtración es exhaustiva y hausdorff.

**Lema 3.1.** *Supongamos:*

1. *$M$ es un $D$-módulo finitamente generado con filtración $FM$ exhaustiva.*
2. *El $D$-módulo $N$ con la propiedad $F_qN = 0$, para algún $q \in \mathbb{Z}$.*

*Entonces existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $F_p\mathrm{Hom}_D(M,D) = 0$.*

*Demostración.* Sean $m_1, m_2, \ldots, m_r$ los generadores de $M$. Como $FM$ es exhaustiva, existen $F_{l_i}M$, $1 \leq i \leq r$, tales que $m_i \in F_{l_i}M$. Sea $m = \max\{l_i : 1 \leq i \leq r\}$, entonces $F_mM$ genera $M$ como $D$-módulo. Por otra parte, para cualquier $\phi \in F_{q-m}\mathrm{Hom}_D(M,N)$ tenemos $\phi(F_mM) \subset F_qN = 0$, es decir $\phi = 0$. Así, $p = q-m$ satisface que $F_p\mathrm{Hom}_D(M,N) = 0$. $\square$

**Lema 3.2.** *Supongamos:*

1. *$M$ un $D$-módulo finitamente generado con una buena filtración $FM$.*
2. *$N$ un $D$-módulo con $FN$ una filtración exhaustiva.*

*Entonces la filtración $F\mathrm{Hom}_D(M,N)$ de $\mathrm{Hom}_D(M,N)$ es exhaustiva.*

*Demostración.* Consideremos $\phi \in \mathrm{Hom}_D(M, N)$. Como $FM$ es una buena filtración, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $F_{t+m}M = D_t \cdot F_m M$, para todo $t \in \mathbb{Z}_+$. Además, se cumple que $F_m M$ es un $D_0$-módulo finitamente generado. Entonces $\phi(F_m M)$ es un $D_0$-submódulo de $N$ finitamente generado. Sea $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi(F_m M) \subset F_k N$. Esto implica que para $t \geq m$,

$$\phi(F_t M) = \phi(D_{t-m} \cdot F_m M) = D_{t-m} \cdot \phi(F_m M) \subset D_{t-m} \cdot F_k N \subset F_{t-m+k}N.$$

Como $FM$ en particular es hausdorff, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $F_q M = 0$. Para $q \leq t \leq m$, tenemos

$$\phi(F_t M) \subset \phi(F_m M) \subset F_k \subset F_{t+k-q}N.$$

En cualquier caso $\phi(F_t M) \subset F_{t+k-q}N$, es decir $\phi \in F_{k-q}\mathrm{Hom}_D(M, N)$. Como $\phi$ es arbitraria, concluimos que la filtración es exhaustiva. $\square$

Resulta natural preguntarse sobre la estructura de $\mathrm{GrHom}_D(M, N)$. Sea $\phi$ un homomorfismo en $F_p\mathrm{Hom}_D(M, N)$, es decir $\phi(F_t M) \subset F_{t+p}N$, para todo $t \in \mathbb{Z}$. Entonces $\phi$ induce un morfismo de $\mathrm{Gr}D$-módulos graduados $\phi_p : \mathrm{Gr}M \to \mathrm{Gr}N$ de grado $p$. Se cumple $\phi_p = 0$ si y sólo si $\phi \in F_{p-1}\mathrm{Hom}_D(M, N)$, por lo que el mapeo aditivo dado por la regla $\phi \mapsto \phi_p$ resulta ser un morfismo inyectivo de $\mathrm{Gr}_p\mathrm{Hom}_D(M, N)$ en el subgrupo de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}N)$ que consiste de los homomorfismos graduados de grado $p$. Esto define un encaje de $\mathrm{GrHom}_D(M, N)$ en $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}N)$. Ahora analicemos algunas propiedades funtoriales de la filtración que hemos definido. Sea $N$ un $D$-módulo filtrado y consideremos $M$, $M'$ dos $D$-módulos equipados con filtraciones $FM$, $FM'$ respectivamente. Sea $f : M \to M'$ un morfismo compatible con la filtración, es decir $f(F_t M) \subset F_t M'$, $t \in \mathbb{Z}$. Entonces la regla $\phi \mapsto \phi \circ f$ nos define un morfismo de $\mathrm{Hom}_D(M', N)$ en $\mathrm{Hom}_D(M, N)$, el cual resulta compatible con la filtración de $\mathrm{Hom}_D(M, N)$ y $\mathrm{Hom}_D(M', N)$, pues para $\phi \in F_p\mathrm{Hom}_D(M', N)$, tenemos

$$(\phi \circ f)(F_t M) \subseteq \phi(F_t M') \subseteq F_{t+p}N, \quad t \in \mathbb{Z};$$

es decir, $\phi \circ f \in F_p\mathrm{Hom}_D(M, N)$. Además, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GrHom}_D(M', N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}M', \mathrm{Gr}N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{GrHom}_D(M, N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}N) \end{array}$$

es conmutativo.

El siguiente paso es encontrar las condiciones para las cuales el mapeo canónico de $\mathrm{GrHom}_D(M, N)$ en $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}N)$ es sobreyectivo, para ello un resultado previo.

**Lema 3.3.** *Sea $M$ un $D$-módulo finitamente generado con buena filtración $FM$, tal que $\mathrm{Gr}M$ es un $GrD$-módulo libre con base $e_1, \dots, e_s$, formada por elementos homogéneos de grado $r_1, \dots, r_s$ respectivamente. Sean $m_1, \dots, m_s$ elementos de $M$ tales que $\overline{m}_i = e_i$, para $1 \leq i \leq s$. Entonces $M$ es un $D$-módulo libre con base $m_1, \dots, m_s$. Además, tenemos*

$$F_p M = \bigoplus_{i=1}^{s} D_{p-r_i} m_i, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

*Demostración.* Primero probaremos, por inducción en $p$, que $F_pM \subset \sum_{i=1}^{s} D_{p-r_i}m_i$. Como $F_pM = 0$, para $p \in \mathbb{Z}$ suficientemente negativo, tenemos el pie de inducción. Supongamos que la afirmación es cierta para $p-1$. Consideremos $v \in F_pM$, entonces $\bar{v} \in \mathrm{Gr}_pM$ y $\bar{v} = \sum_{i=1}^{s} \bar{d}_i e_i$ con $d_i \in D_{p-r_i}$, de esto se sigue que $v - \sum_{i=1}^{s} d_i m_i \in F_{p-1}M \subset \sum_{i=1}^{s} D_{p-1-r_i}m_i$. Por consiguiente $v \in \sum_{i=1}^{s} D_{p-r_i}m_i$. La contención obtenida realmente es una igualdad, pues para cada $i$ los elementos $D_{p-r_i}m_i$ tienen grado $p$. Por lo tanto $F_pM = \sum_{i=1}^{s} D_{p-r_i}m_i$. Como la filtración de $M$ en particular es exhaustiva, tenemos que $m_1, \ldots, m_s$ generan $M$.

Ahora mostraremos que $m_1, \ldots, m_s$ son generadores libres. Sea $\sum d_i m_i = 0$, $d_i \in D_{p_i}$, $d_i \notin D_{p_i-1}$ una relación no trivial. Consideremos $p = \mathrm{máx}_{1 \leq i \leq s}(p_i + r_i)$. Entonces $\sum \bar{d}_i e_i$, donde la suma se toma sobre los índices $i$ que satisfacen $p_i + r_i = p$. Esto implica que para tales $i$, $\bar{d}_i = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $(m_i, 1 \leq i \leq s)$ es un sistema de generadores libres de $M$.

Así, concluimos que $M$ es un $D$-módulo libre y que $F_pM = \bigoplus_{i=1}^{s} D_{p-r_i}m_i$, para $p \in \mathbb{Z}$. $\square$

Una aplicación inmediata pero a la vez sorprendente del lema anterior es el siguiente resultado.

**Teorema 3.4.** *Si* $\mathrm{Gr}D$ *es el anillo de polinomios, entonces los* $D$*-módulos proyectivos finitamente generados son libres.*

*Demostración.* Sea $P$ un $D$-módulo proyectivo finitamente generado, por definición $P$ es sumando de un $D$-módulo libre de rango finito, digamos $D^p = P \oplus P'$. $D$ tiene una buena filtración $FD$, si definimos $FD^p = (F_qD^p = F_qD \oplus \cdots \oplus F_qD; q \in \mathbb{Z})$, tenemos que $FD^p$ es una buena filtración para $D^p$. Como la sucesión

$$0 \to P' \xrightarrow{i} D^p \xrightarrow{\pi} P \to 0 \tag{4a}$$

es exacta, $FP' = (i^{-1}(i(P') \cap F_qD^p); q \in \mathbb{Z})$ y $FP = (\pi(F_qD^p); q \in \mathbb{Z})$ son buenas filtraciones para $P'$ y $P$ respectivamente. Como $\mathrm{Ker}\pi = \mathrm{Im}i$, entonces $\mathrm{Ker}\pi \cap F_qD^p = \mathrm{Im}i \cap F_qD^p$, para toda $q \in \mathbb{Z}$. Entonces la sucesión

$$0 \to F_qP' \xrightarrow{i_*} F_qD^p \xrightarrow{\pi_*} F_qP \to 0$$

es exacta, para toda $q \in \mathbb{Z}$. Lo cual implica que la sucesión

$$0 \to \mathrm{Gr}_qP' \xrightarrow{\mathrm{Gr}i_*} \mathrm{Gr}_qD^p \xrightarrow{\mathrm{Gr}\pi_*} \mathrm{Gr}_qP \to 0$$

es exacta, para toda $q \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto la sucesión

$$0 \to \mathrm{Gr}P' \xrightarrow{\mathrm{Gr}i} \mathrm{Gr}D^p \xrightarrow{\mathrm{Gr}\pi} \mathrm{Gr}P \to 0$$

es exacta. Como (4a) se escinde, es decir, existe $\delta : P \to D^p$ tal que $\pi \circ \delta = 1_P$, en este caso se cumple $\mathrm{Gr}\pi \circ \mathrm{Gr}\delta = 1_{\mathrm{Gr}P}$, por lo tanto $\mathrm{Gr}D^p = \mathrm{Gr}P \oplus \mathrm{Gr}P'$.

Luego, $\mathrm{Gr}D^p \cong (\mathrm{Gr}D)^p$, entonces $\mathrm{Gr}P$ es sumando de un $\mathrm{Gr}D$-módulo libre, es decir $\mathrm{Gr}P$ es proyectivo. Como $GrD$ es el anillo de polinomios, el teorema de Quillen-Suslin (página 149 de [Rotman]), afirma que todo módulo proyectivo finitamente generado sobre el anillo de polinomios es libre. Entonces $\mathrm{Gr}P$ es un $\mathrm{Gr}D$-módulo libre, por el lema 3.3 $P$ es un $D$-módulo libre. $\square$

Ahora retomemos el estudio del morfismo $\mathrm{GrHom}_D(M,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}N)$. A todo Gr$D$-módulo libre que tenga una base de elementos homogéneos lo llamaremos Gr$D$-módulo *libre homogéneo.*

**Lema 3.5.** *Sea $M$ un $D$-módulo finitamente generado con $FM$ una buena filtración, tal que* Gr$M$ *es un* Gr$D$*-módulo libre graduado. Entonces el mapeo canónico definido antes* $\mathrm{GrHom}_D(M,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}N)$ *es un isomorfismo.*

*Demostración.* Como Gr$M$ es un $GrD$-módulo libre graduado, éste tiene una base $e_1$, $e_2 \ldots, e_s$ de generadores libres homogéneos de grado $r_1, \ldots, r_s$ respectivamente. Entonces

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}M, GrN) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}D}(\bigoplus_{i=1}^{s} \mathrm{Gr}De_i, \mathrm{Gr}N) = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}De_i, \mathrm{Gr}N).$$

Luego, el mapeo $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}De_i, \mathrm{Gr}N) \to \mathrm{Gr}N$ dado por $T \mapsto T(e_i)$ es un isomorfismo lineal, el cual mapea los homomorfismos de grado $p - r_i$ en los elementos homogéneos de grado $p$, para $p \in \mathbb{Z}$. De esto deducimos que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}De_i, \mathrm{Gr}N)$ es una suma directa de espacios que constan de homomorfismos graduados de grado $p$, para todo $p \in \mathbb{Z}$. Lo mismo es cierto para $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}N)$.

Ahora mostraremos que el mapeo es sobreyectivo. Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}N)$ un morfismo graduado de grado $q$. Se cumple $\varphi(e_i) \in \mathrm{Gr}_{r_i+q}N$, $1 \leq i \leq s$. Sean $w_i \in F_{r_i+q}N$, tales que $\varphi(e_i) = \overline{w}_i$. Llamamos $\phi \in \mathrm{Hom}_D(M,N)$ al morfismo definido por $\phi(m_i) = w_i$, para $1 \leq i \leq s$. Por 3.3,

$$\phi(F_pM) \subset \sum_{i=1}^{s} D_{p-r_i} w_i \subset F_{p+q}N, \quad p \in \mathbb{Z},$$

es decir $\phi \in F_q\mathrm{Hom}_D(M,N)$. De esta forma tenemos $\phi_q = \varphi$. Por lo tanto, el mapeo canónico es un isomorfismo. $\square$

Ya que sabemos cuales son las condiciones necesarias para que el morfismo canónico $\mathrm{GrHom}_D(M,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}N)$ sea un isomorfismo, nos concentraremos en entender un poco mejor la relación que existe entre los $D$-módulos filtrados y los Gr$D$-módulos graduados, para ello, veremos de qué manera las sucesiones de Gr$D$-módulos graduados se corresponden con sucesiones de $D$-módulos filtrados. Antes de ver esta relación analicemos los siguientes lemas.

**Lema 3.6.** *Sea $M$ un $D$-módulo filtrado, $L$ un* Gr$D$*-módulo libre graduado y $f : L \to$* Gr$M$ *un morfismo de* Gr$D$*-módulos. Entonces existe un $D$-módulo libre filtrado $P$, un morfismo $g : P \to M$ de $D$-módulos filtrados y un isomorfismo $j :$* Gr$P \to$ Gr$L$ *de $GrD$-módulos graduados, tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gr}P \arrow[r, "\mathrm{Gr}g"] \arrow[d, "j"'] & \mathrm{Gr}M \arrow[d, equal] \\ L \arrow[r, "f"] & \mathrm{Gr}M \end{tikzcd}$$

*conmuta.*

*Demostración.* Observemos que $L$ no necesariamente es finitamente generado. Sea $(l_i : i \in I)$ una base de $L$ que consta de elementos homogéneos de grado $r_i, i \in I$. Sea $P$ el $D$-módulo libre con base $(p_i : i \in I)$, y definimos su filtración por $F_qP = \sum_{i\in I} D_{q-r_i}p_i, q \in \mathbb{Z}$. Sea $(m_i : i \in I)$ una familia de elementos de $M$ que cumple que $m_i \in F_{r_i}M$ y $\overline{m}_i = f(l_i)$, $i \in I$. Llamamos $g$ al único morfismo que satisface $g : P \to M$ y $g(p_i) = m_i$, $i \in I$. Entonces $g$ es un morfismo de $D$-módulos filtrados que tiene la propiedad

$$g(F_pP) = \sum_{i\in I} D_{q-r_i}g(p_i) \subset F_qM,$$

para todo $q \in \mathbb{Z}$. Luego, $\mathrm{Gr}P = \sum_{i\in I} \mathrm{Gr}D\bar{p}_i$ y $\mathrm{Gr}P = \sum_{i\in I} \mathrm{Gr}_{n-r_i}D\bar{p}_i$. Esto implica que el morfismo $j : \mathrm{Gr}P \to L$ definido por $j(\bar{p}_i) = l_i$, $i \in I$, es un isomorfismo de $\mathrm{Gr}D$-módulos. También se cumple,

$$(\mathrm{Gr}g)(\bar{p}_i) = \overline{m}_i = f(l_i) = (f \circ j)(\bar{p}_i),$$

de donde $\mathrm{Gr}g = f \circ j$. □

El siguiente resultado es indispensable para establecer la correspondencia entre sucesiones de $\mathrm{Gr}D$-módulos graduados y sucesiones de $D$-módulos filtrados, además nos dice cuando un complejo de $D$-módulos filtrados es exacto.

**Lema 3.7.** *Sea*

$$N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$$

*una sucesión en la categoría de $D$-módulos filtrados con $g \circ f = 0$. Supongamos que la filtración de $N$ es exhaustiva y $F_qN = 0$, para $q \in \mathbb{Z}$ suficientemente negativa. Si la sucesión*

$$\mathrm{Gr}N' \xrightarrow{\mathrm{Gr}f} \mathrm{Gr}N \xrightarrow{\mathrm{Gr}g} \mathrm{Gr}N''$$

*de $\mathrm{Gr}D$-módulos es exacta, la sucesión original también es exacta.*

*Demostración.* Por hipótesis, tenemos $g \circ f = 0$, es decir $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Ker}g$. Entonces

$$\mathrm{Im}f \cap F_pN \subset \mathrm{Ker}g \cap F_pN, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Probaremos por inducción en $p$ que la contención anterior realmente es una igualdad. Como $F_pN = 0$, para $p \leq q$ y $q$ suficientemente negativo, tenemos que la afirmación es cierta para todo $p$ menor a $q$. Supongamos que la afirmción se cumple para $p - 1$. Sea $x \in \mathrm{Ker}g \cap F_pN$. Como la sucesión de $\mathrm{Gr}D$-módulos es exacta, existe $y \in F_pN'$ tal que $\mathrm{Gr}f(\bar{y}) = \bar{x}$. Entonces $f(y) - x \in F_{p-1}M$. Además $g(f(y) - x) = g(f(y)) - g(x) = 0$, de donde $f(y) - x \in \mathrm{Ker}g$. Por hipótesis de inducción $x - f(y) \in \mathrm{Im}f$, entonces existe $z \in N'$ tal que $x - f(y) = f(z)$, $x = f(y - z)$. Por lo tanto $x \in \mathrm{Im}f$. □

**Lema 3.8.** *Sea $M$ un $D$-módulo finitamente generado con una buena filtración $FM$. Sea $L_\circ$ una resolución izquierda de $\mathrm{Gr}M$ en la categoría de $\mathrm{Gr}D$-módulos graduados que consta de $\mathrm{Gr}D$-módulos libres de rango finito. Entonces existe una resolución izquierda $P_\circ$ de $M$ en la categoría de $D$-módulos filtrados tal que:*

1. *Los $D$-módulos $P_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$ son libres.*

*2. El complejo* $\mathrm{Gr}P_\circ$ *es isomorfo a* $L_\circ$.

*Demostración.* La prueba la desarrollaremos por inducción en la longitud de $L_\circ$. El lema 3.6 nos da la base de inducción, ya que podemos construir un $D$-módulo filtrado libre $P_0$ y un morfismo de $D$-módulos filtrados $d_0 : P_0 \to M$, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gr}P_0 \arrow[r, "\mathrm{Gr}d_0"] \arrow[d] & \mathrm{Gr}M \arrow[d, equal] \\ L \arrow[r] & \mathrm{Gr}M \end{tikzcd}$$

conmuta. Por 1.3 la filtración $FP_0$ es una buena filtración, y por 3.3 $P_0$ es un $D$-módulo libre de rango finito. Además $\mathrm{Gr}d_0$ es sobreyectiva, por 3.3 $d_0$ también lo es. Supongamos que podemos construir $D$-módulos $P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}$ y morfismos $d_0, d_1, \ldots, d_{k-1}$, tales que

$$P_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} P_{k-2} \xrightarrow{d_{k-2}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

es una sucesión exacta de $D$-módulos de rango finito, que además satisface

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Gr}P_{k-1} \arrow[r, "\mathrm{Gr}d_{k-1}"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Gr}P_{k-2} \arrow[r, "\mathrm{Gr}d_{k-2}"] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{Gr}d_1"] & \mathrm{Gr}P_0 \arrow[r, "\mathrm{Gr}d_0"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Gr}M \arrow[d, equal] \\ L_k \arrow[r] & L_{k-1} \arrow[r] & L_{k-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & L_0 \arrow[r] & \mathrm{Gr}M. \end{tikzcd}$$

Ahora construiremos un módulo $P_k$ y un morfismo $d_k : P_k \to P_{k-1}$, tal que $\mathrm{Gr}P_k$ y $\mathrm{Gr}d_k$ completen la esquina superior izquierda del diagrama anterior. La forma en la que obtendremos el módulo y el morfismo va a ser por medio del lema 3.6, solamente necesitamos reunir las hipótesis.

Sea $T$ el kernel de $d_{k-1}$ equipado con la filtración inducida. Entonces $\mathrm{Gr}T$ está identificado con un submódulo de $\mathrm{Gr}P_{k-1} \cong L_{k-1}$. Además, con esta identificación $\mathrm{Gr}T \subset \mathrm{Ker}\mathrm{Gr}d_{k-1}$. Para poder aplicar 3.6 sólo nos resta probar que la contención anterior es realmente una igualdad. Sea $t \in \mathrm{Ker}\mathrm{Gr}d_{k-1}$, y $x \in F_pP_{k-1}$ tal que $\bar{x} = t$. Entonces $(\mathrm{Gr}d_{k-1})(\bar{x}) = 0$ y $d_{k-1}(x) \in F_{p-1}P_{k-2}$. Sea $S$ el conjunto de todas las $s \in \mathbb{Z}$, $s \leq p-1$, tal que existe $x \in F_pP_{k-1}$ con la propiedad de que $\bar{x} = t$, $d_{k-1}(x) \in F_sP_{k-2}$. Sea $q \in S$ y consideremos $x^{'}$ que satisface $\bar{x}^{'} = t$, $d_{k-1}(x^{'}) \in F_qP_{k-2}$. Sea $y = d_{k-1}(x^{'})$, como $\bar{x}^{'} = t \in \mathrm{Ker}\mathrm{Gr}d_{k-1}$, entonces $d_{k-1}(x^{'})$ realmente se encuentra en $F_{q-1}P_{k-2}$. Luego, $d_{k-2}(y) = (d_{k-2} \circ d_{k-1})(x^{'}) = 0$, es decir, $\bar{y} \in \mathrm{Ker}\mathrm{Gr}d_{k-2} = \mathrm{Im}\mathrm{Gr}d_{k-1}$. Así, podemos encontrar $z \in F_{q-1}P_{k-1}$ tal que $\bar{y} = \mathrm{Gr}d_{k-1}(\bar{z})$, es decir $y - d_{k-1}(z) \in F_{q-1}P_{k-2}$. Ahora, si llamamos $x^{''} = x^{'} - z$, tenemos $\bar{x}^{''} = \bar{x}^{'} = t$. Además,

$$d_{k-1}(x^{''}) = d_{k-1}(x^{'}) - d_{k-1}(z) = y - d_{k-1}(z) \in F_{q-1}P_{k-2}.$$

Lo cual quiere decir que $q-1 \in S$. Por lo tanto $S = \{q \in \mathbb{Z} |\, q \leq p-1\}$. Como $F_qP_{k-2} = 0$ para $q$ suficientemente negativo, concluimos que existe $x \in F_pP_{k-1}$ con la propiedad de que $\bar{x} = t$ y $d_{k-1}(x) = 0$, es decir $t \in \mathrm{Gr}T$.

Como $\mathrm{Gr}P_{k-1}$ es isomorfo a $L_{k-1}$, entonces $\mathrm{Gr}T \cong \mathrm{Ker}\mathrm{Gr}d_{k-1}$ se corresponde con la imagen de $L_k$ en $L_{k-1}$. Por 3.6 podemos construir $P_k$ y $d_k : P_k \to P_{k-1}$ tales que:

1. $P_k$ es un $D$-módulo libre filtrado.
2. $d_k$ es un morfismo de $D$-módulos filtrados.
3. $\mathrm{Im} d_k \subset T$.
4. El diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gr}P_k \arrow[r, "\mathrm{Gr}d_k"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Gr}P_{k-1} \arrow[d, "\cong"] \\ L_k \arrow[r] & \mathrm{Gr}L_{k-1} \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Luego, 3.7 implica que $\mathrm{Im}d_k = \mathrm{Ker}d_{k-1}$ y la sucesión

$$P_k \xrightarrow{d_k} P_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

es exacta. □

Sea $M$ un $D$-módulo finitamente generado con buena filtración $FM$. Entonces $\mathrm{Gr}M$ es un $\mathrm{Gr}D$-módulo finitamente generado. Como $\mathrm{Gr}M$ se descompone en una suma directa, podemos encontrar generadores homogéneos $e_1, \ldots, e_s$ de $GrM$ con grados $r_1, \ldots, r_s$ respectivamente. Sea $L_0$ el $\mathrm{Gr}D$-módulo libre graduado con base $l_1, \ldots, l_s$ que consiste de elementos homogéneos de grado $r_1, \ldots, r_s$. Llamemos $f$ al morfismo sobreyectivo $f : L_0 \to \mathrm{Gr}M$ de $\mathrm{Gr}D$-módulos dado por la regla $l_i \mapsto e_i$, $1 \le i \le s$. Como $\mathrm{Gr}D$ es un anillo noetheriano y $L_0$ es finitamente generado, $\mathrm{Ker}f$ es un $\mathrm{Gr}D$-módulo finitamente generado. Por inducción podemos construir una resolución libre

$$\cdots \to L_n \to \cdots \to L_1 \to L_0 \to \mathrm{Gr}M \to 0,$$

donde cada $L_i$ es de rango finito. Por 3.8, existe una resolución en la categoría de $D$-módulos filtrados

$$\cdots \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0,$$

donde cada $P_i$ es un $D$-módulo libre filtrado. Además

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathrm{Gr}P_n \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Gr}P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Gr}P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Gr}M \arrow[d, equal] \\ \cdots \arrow[r] & L_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & L_1 \arrow[r] & L_0 \arrow[r] & \mathrm{Gr}M. \end{tikzcd}$$

Como cada $\mathrm{Gr}P_i$ resulta ser un $\mathrm{Gr}D$-módulo finitamente generado, entonces $FP_i$ es una buena filtración para $P_i$.

Sea $N$ un $D$-módulo finitamente generado con buena filtración $FN$. Consideremos el complejo $T^\circ = \mathrm{Hom}_D(P_\circ, N)$, entonces

$$\mathrm{H}^j(T^\circ) = \mathrm{Ext}^j_D(M, N), \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Por 3.1 y 3.2 $T^j, j \in \mathbb{Z}_+$ tiene una filtración exhaustiva y hausdorff. Por las propiedades homológicas de la filtración, ésta resulta ser compatible con la diferencial del complejo $T^\circ$. Luego, el complejo $\mathrm{Gr}T^\circ = \mathrm{GrHom}_D(P_\circ, N)$ por 3.5 es isomorfo a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}P_\circ, \mathrm{Gr}N)$, el que a su vez es isomorfo a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}D}(L_\circ, \mathrm{Gr}N)$. Por lo tanto, para cada $j \in \mathbb{Z}_+$, $\mathrm{H}^j(\mathrm{Gr}T^\circ) = \mathrm{Ext}^j_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}N)$.

Antes de que pasemos a analizar la relación que guardan los grupos de cohomología de los complejos $T^\circ$ y $\mathrm{Gr}T^\circ$, probaremos el siguiente resultado el cual establece una cota para la dimensión homológica de $D$.

**Teorema 3.9.** $\mathrm{hd}(D) \leq \mathrm{hd}(\mathrm{Gr}D)$.

*Demostración.* Supongamos $\mathrm{hd}(\mathrm{Gr}D) = n$. Sean $M$, $N$ dos $D$-módulos finitamente generados con $FM$, $FN$ buenas filtraciones. Por la discusión anterior, $\mathrm{Ext}^j_D(M, N) = \mathrm{H}^j(T^\circ)$ y $\mathrm{Ext}_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}N) = \mathrm{H}^j(\mathrm{Gr}T^\circ)$. Entonces $\mathrm{H}^j(\mathrm{Gr}T^\circ) = 0$, para $j > n$. Así, la sucesión

$$\mathrm{Gr}T^1 \to \cdots \to \mathrm{Gr}T^j \to \mathrm{Gr}T^{j+1} \to \mathrm{Gr}T^{j+2} \to \cdots,$$

es exacta para $j > n$. Por 3.7, la sucesión

$$T^1 \to \cdots \to T^j \to T^{j+1} \to T^{j+2} \to \cdots,$$

es exacta para $j > n$, es decir $\mathrm{Ext}^j_D(M, N) = 0$ para $j > n$. Por lo tanto $\mathrm{hd}(D) \leq \mathrm{hd}(\mathrm{Gr}D)$. □

Consideremos $N = D$ equipado con la filtración natural. Podemos darle estructura de $D$-módulo derecho a $\mathrm{Hom}_D(M, D)$, $(\phi t)(m) = \phi(m)t$, para todo $\phi \in \mathrm{Hom}_D(M, D)$, $t \in D$, $m \in M$. Así, $\mathrm{Hom}_D(-, D)$ resulta ser un funtor contravariante de la categoría de los $D$-módulos izquierdos en la categoría de los $D$-módulos derechos. Si $M$ es un $D$-módulo izquierdo finitamente generado, lo podemos cubrir por $D^p \to M \to 0$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_D(-, D)$, $0 \to \mathrm{Hom}_D(M, D) \to \mathrm{Hom}_D(D^p, D)$ resulta ser exacta izquierda. Luego, $\mathrm{Hom}_D(D^p, D) \cong D^p$ como $D$-módulos derechos. De donde se deduce que $\mathrm{Hom}_D(M, D)$ es finitamente generado como $D$-módulo derecho. Sea $FM$ una filtración de $M$. Entonces para $\phi \in F_p\mathrm{Hom}_D(M, D)$ y $t \in D_q$, tenemos

$$(\phi t)(F_m M) = \phi(F_m M)t \subset D_{m+p}t \subset D_{m+p+q},$$

es decir $\phi t \in F_{p+q}\mathrm{Hom}_D(M, D)$. Por lo tanto, $F\mathrm{Hom}_D(M, D)$ es una filtración de $D$-módulos.

**Lema 3.10.** *Sea $M$ un $D$-módulo izquierdo finitamente generado con buena filtración $FM$. Entonces la filtración $F\mathrm{Hom}_D(M, D)$ de $\mathrm{Hom}_D(M, D)$ es buena.*

*Demostración.* Por 3.1 y 3.2 sabemos que $F\mathrm{Hom}_D(M, D)$ es exhaustiva y hausdorff. $M$ es un $D$-módulo finitamente generado, entonces $\mathrm{Gr}M$ es un $\mathrm{Gr}D$-módulo finitamente generado. Como $\mathrm{Gr}D$ es noetheriano, todo $\mathrm{Gr}D$-submódulo de $\mathrm{Gr}M$ es finitamente generado, en particular $\mathrm{GrHom}_D(M, D)$ es finitamente generado. Por 1.3 concluimos $F\mathrm{Hom}_D(M, D)$ es una buena filtración. □

Sea $M$ un $D$-módulo izquierdo finitamente generado, consideremos $P_\circ$ una resolución proyectiva de $M$. Por el lema anterior, el complejo $T^\circ = \mathrm{Hom}_D(P_\circ, D)$ consta de $D$-módulos derechos finitamente generados. Los $D$-módulos de cohomología del complejo $T^\circ$ están dados por $H^j(T^\circ) = \mathrm{Ext}^j_D(M, D), j \in \mathbb{Z}_+$. La filtración inducida de $\mathrm{Hom}_D(P_j, D)$ en $H^j(T^\circ)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, es una buena filtración, entonces $\mathrm{Gr}H^j(T^\circ) = \mathrm{GrExt}^j_D(M, D)$ es un $\mathrm{Gr}D$-módulo finitamente generado. Por otro lado, tenemos el complejo graduado asociado $\mathrm{Gr}T^\circ$ que tiene módulos de cohomología $H^j(\mathrm{Gr}T^\circ) = \mathrm{Ext}^j_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}D)$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Resulta natural preguntarse que relación existe entre $\mathrm{Ext}^j_{\mathrm{Gr}D}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}D)$ y $\mathrm{GrExt}^j_D(M, D)$. La respuesta es un poco complicada, lo que tenemos es que $H^j(\mathrm{Gr}T^\circ)$ se relaciona con $\mathrm{Gr}H^j(T^\circ)$ por medio de una sucesión espectral.

Ahora pasamos a analizar de forma muy superficial las sucesiones espectrales. En sentido abstracto, según [Weibel], en una categoría abeliana $\mathcal{A}$ una *sucesión espectral* $\mathbf{E}$ que comienza en $E_a$ consta de los siguientes elementos:

**SE1**. Una familia de objetos $\{E_r^{pq}\}$ de $\mathcal{A}$, para $p, q, r \in \mathbb{Z}$, con $r \geq a$.

**SE2**. Funciones diferenciales $d_r^{pq} : E_r^{pq} \to E_r^{p-r,q+r+1}$, que satisfacen $d_r \circ d_r = 0$.

**SE3**. $E_{r+1}^{pq} \cong \mathrm{Ker}(d_r^{pq})/\mathrm{Im}(d_r^{p+r,q-r-1})$.

Como la definición resulta un poco complicada vale la pena analizar como [Hatcher] interpreta las sucesiones espectrales.

Uno puede pensar que una sucesión espectral es un libro cuyas páginas se encuentran indexadas por el subíndice $r$ y los superíndices $p, q$ en cada página nos definen una retícula. En el lugar $(p, q)$ de la página $r$ se encuentra el objeto $E_r^{pq}$. Las diferenciales $d_r^{pq} : E_r^{pq} \to E_r^{p-r,q+r+1}$, son morfismos en la página $r$ que van del objeto que se encuentra en la posición $(p, q)$ al objeto que se encuentra en la posición $(p-r, q+r+1)$, se desplazan $r$-lugares a la izquierda y $(r+1)$-lugares arriba. La propiedad **SE3**, nos dice que la hoja $r+1$ está determinada por la homología de la hoja $r$. Una representación gráfica de esto lo podemos ver en la figura 1.

Entendido lo que es una sucesión espectral, pasaremos a definir la sucesión espectral que nos va relacionar los $\mathrm{Gr}D$-módulos $H^j(\mathrm{Gr}T^\circ)$ y $\mathrm{Gr}H^j(T^\circ)$.

Sea $T^\circ$ un complejo filtrado que consta de $D$-módulos $T^j$, $j \in \mathbb{Z}_+$ finitamente generados y diferencial $d$ compatible con la filtración de cada $T^j$, es decir $d(F_pT^j) \subset F_pT^{j+1}$. Como es costumbre en álgebra homológica, los *ciclos* en $T^j$ se definen como $Z^j(T^\circ) = \{x \in T^j \,|\, d(x) = 0\}$ y las *fronteras* en $T^j$ se definen por $B^j(T^\circ) = \{y \in T^j \,|\, y = d(x), x \in T^{j-1}\}$. Ahora pasamos a definir una serie de conjuntos que serán como los ciclos y las fronteras relativas del complejo $T^\circ$.

$$Z_r^{pq} = \{x \in F_pT^{p+q} \,|\, d(x) \in F_{p-r}T^{p+q+1}\}$$

y

$$B_r^{pq} = \{y \in F_pT^{p+q} \,|\, y = d(x), x \in F_{p+r}T^{p+q-1}\} = d(Z_r^{p+r,q-r-1}).$$

Claramente

$$F_pT^{p+q} = Z_0^{pq} \supset Z_1^{pq} \supset Z_2^{pq} \supset \cdots \supset Z_r^{pq} \supset \cdots \supset Z_\infty^{pq} = Z^{p+q}(T^\circ) \cap F_pT^{p+q},$$

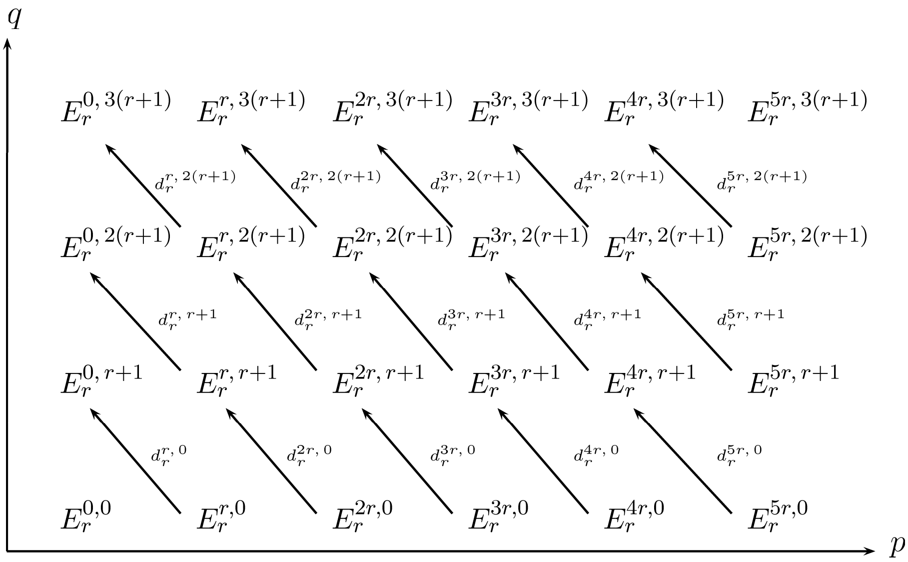


Figura 1: La $r$-hoja de $\mathbf{E}$

también

$$B^{p+q}(F_pT^\circ) = B_0^{pq} \subset B_1^{pq} \subset \cdots \subset B_r^{pq} \subset \cdots \subset B_\infty^{pq} = B^{p+q}(T^\circ) \cap F_pT^{p+q}.$$

De donde podemos observar que $Z_\infty^{pq} = \bigcap_r Z_r^{pq}$ y $B_\infty^{pq} = \bigcup_r B_r^{pq}$. Definimos el $E_r$-término de la sucesión $\mathbf{E}$ asociada al complejo filtrado $T^\circ$ como

(5a) $$E_r^{pq} = (Z_r^{pq} + F_{p-1}T^{p+q})/(B_{r-1}^{pq} + F_{p-1}T^{p+q}).$$

Como la diferencial $d$ del complejo $T^\circ$ es compatible con la filtración, entonces $d$ induce funciones

(6a) $$d_r^{pq} : E_r^{pq} \to E_r^{p-r,q+r+1},$$

que satisfacen $d_r \circ d_r = 0$. Para analizar la homología en $E_r^{pq}$ es necesario el siguiente lema.

**Lema 3.11.** *El morfismo*

$$\frac{Z_r^{pq} + F_{p-1}T^{p+q}}{Z_{r+1}^{pq} + F_{p-1}T^{p+q}} \longrightarrow \frac{B_r^{p-r,q+r+1} + F_{p-r-1}T^{p+q+1}}{B_{r-1}^{p-r,q+r+1} + F_{p-r-1}T^{p+q+1}}$$

*inducido por $d$ es un isomorfismo.*

*Demostración.* La demostración es muy técnica y requiere de mucho cuidado al realizar los cálculos numéricos. Comenzamos analizando las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned} d(Z_r^{pq}) &= d(\{x \in F_pT^{p+q} |\, d(x) \in F_{p-r}T^{p+q+1}\}) \\ &= \{y \in F_{p-r}T^{p+q+1} |\, d(x) = y, x \in F_pT^{p+q}\} \\ &= B_r^{p-r,q+r+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(Z_r^{pq}) \cap F_{p-r-1}T^{p+q+1} &= B_r^{p-r,q+r+1} \cap F_{p-r-1}T^{p+q+1} \\ &= \{y \in F_{p-r}T^{p+q+1} |\, d(x) = y, x \in F_pT^{p+q}\} \cap F_{p-r-1}T^{p+q+1} \\ &= \{y \in F_{p-r-1}T^{p+q+1} |\, d(x) = y, x \in F_pT^{p+q}\} \\ &= d(Z_{r+1}^{pq}). \end{aligned}$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned} B_r^{p-r,q+r+1} + F_{p-r-1}T^{p+q+1} &= \frac{B_r^{p-r,q+r+1}}{B_r^{p-r,q+r+1} \cap F_{p-r-1}T^{p+q+1}} \\ &= \frac{d(Z_r^{pq})}{d(Z_r^{pq}) \cap F_{p-r-1}T^{p+q+1}} \\ &= \frac{d(Z_r^{pq})}{d(Z_{r+1}^{pq})}, \end{aligned}$$

de manera similar

$$B_{r-1}^{p-r,q+r+1} + F_{p-r-1}T^{p+q+1} = \frac{d(Z_{r-1}^{p-1,q+1})}{d(Z_r^{p-1,q+1})}.$$

Entonces

$$\frac{B_r^{p-r,q+r+1} + F_{p-r-1}T^{p+q+1}}{B_{r-1}^{p-r,q+r+1} + F_{p-r-1}T^{p+q+1}} = \frac{d(Z_r^{pq})/d(Z_{r+1}^{pq})}{d(Z_{r-1}^{p-1,q+1})/d(Z_r^{p-1,q+1})} \cong \frac{d(Z_r^{pq})}{d(Z_{r+1}^{pq}) + d(Z_{r-1}^{p-1,q+1})}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} Z_r^{pq} \cap F_{p-1}T^{p+q} &= \{x \in F_pT^{p+q} |\, d(x) \in F_{p-r}T^{p+q+1}\} \cap F_{p-1}T^{p+q} \\ &= \{x \in F_{p-1}T^{p+q} |\, d(x) \in F_{p-r}T^{p+q+1}\} \\ &= Z_{r-1}^{p-1,q+1}. \end{aligned}$$

Así, tenemos

$$Z_r^{pq} + F_{p-1}T^{p+q} = \frac{Z_r^{pq}}{Z_r^{pq} \cap F_{p-1}T^{p+q}} = \frac{Z_r^{pq}}{Z_{r-1}^{p-1,q+1}},$$

de manera similar

$$Z_{r+1}^{pq} + F_{p-1}T^{p+q} = \frac{Z_{r+1}^{pq}}{Z_r^{p-1,q+1}}.$$

Entonces

$$\frac{Z_r^{pq} + F_{p-1}T^{p+q}}{Z_{r+1}^{pq} + F_{p-1}T^{p+q}} = \frac{Z_r^{pq}/Z_{r-1}^{p-1,q+1}}{Z_{r+1}^{pq}/Z_r^{p-1,q+1}} \cong \frac{Z_r^{pq}}{Z_{r+1}^{pq} + Z_{r-1}^{p-1,q+1}}.$$

La diferencial

$$d : Z_r^{pq} \longrightarrow \frac{d(Z_r^{pq})}{d(Z_{r+1}^{pq}) + d(Z_{r-1}^{p-1,q+1})}$$

tiene kernel $Z_{r+1}^{pq} + Z_{r-1}^{p-1,q+1}$. Por lo tanto

$$\frac{Z_r^{pq} + F_{p-1}T^{p+q}}{Z_{r+1}^{pq} + F_{p-1}T^{p+q}} \cong \frac{B_r^{p-r,q+r+1} + F_{p-r-1}T^{p+q+1}}{B_{r-1}^{p-r,q+r+1} + F_{p-r-1}T^{p+q+1}}.$$

□

Si en el lema anterior reemplazamos $p$ por $p+r$ y $q$ por $q-r-1$, tenemos

$$\frac{Z_r^{p+r,q-r-1}+F_{p+r-1}T^{p+q-1}}{Z_{r+1}^{p+r,q-r-1}+F_{p+r-1}T^{p+q-1}} \cong \frac{B_r^{pq}+F_{p-1}T^{p+q}}{B_{r-1}^{pq}+F_{p-1}T^{p+q}}. \tag{7a}$$

Ahora analicemos el kernel de $d_r^{pq}$,

$$d_r^{pq}: E_r^{pq} \longrightarrow E_r^{p-r,q+r+1}.$$

Simplificando un poco las expresiones de $E_r^{pq}$ y $E_r^{p-r,q+r+1}$, tenemos

$$E_r^{pq} = \frac{Z_r^{pq}+F_{p-1}T^{p+q}}{B_{r-1}^{pq}+F_{p-1}T^{p+q}} = \frac{Z_r^{pq}}{B_{r-1}^{pq}+F_{p-1}T^{p+q}\cap Z_r^{pq}} = \frac{Z_r^{pq}}{B_{r-1}^{pq}+Z_{r-1}^{p-1,q+1}},$$

de forma similar

$$E_r^{p-r,q+r+1} = \frac{Z_r^{p-r,q+r+1}}{B_{r-1}^{p-r,q+r+1}+Z_{r-1}^{p-r-1,q+r+2}}.$$

Entonces

$$d_r^{pq}: \frac{Z_r^{pq}}{d(Z_{r-1}^{p+r-1,q-r})+Z_{r-1}^{p-1,q+1}} \longrightarrow \frac{Z_r^{p-r,q+r+1}}{d(Z_{r-1}^{p-1,q+1})+Z_{r-1}^{p-r-1,q+r+2}},$$

de esta forma

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker} d_r^{pq} &= \frac{(d_r^{pq})^{-1}(d(Z_{r-1}^{p-1,q+1})+Z_{r-1}^{p-r-1,q+r+2})}{d(Z_{r-1}^{p+r-1,q-r})+Z_{r-1}^{p-1,q+1}} \\
&= \frac{\{x\in Z_r^{pq} \mid d(z)\in (d(Z_{r-1}^{p-1,q+1}+Z_{r-1}^{p-r-1,q+r+2}))\}}{d(Z_{r-1}^{p+r-1,q-r})+Z_{r-1}^{p-1,q+1}} \\
&= \frac{Z_{r+1}^{pq}+Z_{r-1}^{p-1,q+1}}{d(Z_{r-1}^{p+r-1,q-r})+Z_{r-1}^{p-1,q+1}} = \frac{Z_{r+1}^{pq}+Z_r^{pq}\cap F_{p-1}K^{p+q}}{d(Z_{r-1}^{p+r-1,q+r})+Z_r^{pq}\cap F_{p-1}T^{p+q}} \\
&\cong \frac{Z_{r+1}^{pq}+F_{p-1}T^{p+q}}{B_{r-1}^{pq}+F_{p-1}T^{p+q}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Ker} d_r^{pq} = \frac{Z_{r+1}^{pq}+F_{p-1}T^{p+q}}{B_{r-1}^{pq}+F_{p-1}T^{p+q}}.$$

Ahora analicemos la imagen de $d_r^{p+r,q-r-1}: E_r^{p+r,q-r-1} \longrightarrow E_r^{pq}$. Utilizaremos un argumento muy propio de las categorías abelianas, a la función $d_r^{p+r,q-r-1}$ la factorizaremos por $i\circ\pi$, donde $\pi$ es sobre y $i$ es mono. Sabemos que $B^j(T^\circ)\subset Z^j(T^\circ)$, para toda $j\in\mathbb{Z}_+$, entonces $B_{r-1}^{p+r,q-r-1}\subset Z_{r+1}^{p+r,q-r-1}$ y $B_r^{pq}\subset Z_r^{pq}$. Definimos

$$\pi: \frac{Z_r^{p+r,q-r-1}+F_{p+r-1}T^{p+q-1}}{B_{r-1}^{p+r,q-r-1}+F_{p+r-1}T^{p+q-1}} \longrightarrow \frac{Z_r^{p+r,q-r-1}+F_{p+r-1}T^{p+q-1}}{Z_{r+1}^{p+r,q-r-1}+F_{p+r-1}T^{p+q-1}}$$

como la proyección natural, y definimos

$$i: \frac{B_r^{pq}+F_{p-1}T^{p+q}}{B_{r-1}^{pq}+F_{p-1}T^{p+q}} \longrightarrow \frac{Z_r^{pq}+F_{p-1}T^{p+q}}{B_{r-1}^{pq}+F_{p-1}T^{p+q}}$$

la inclusión. Si llamamos $\gamma$ al isomorfismo dado en (7a), tenemos que $d_r^{p+r,q-r-1} = i \circ \gamma \circ \pi$. Por lo tanto

$$\mathrm{Im} d_r^{p+r,q-r-1} \cong \frac{B_r^{pq} + F_{p-1}T^{p+q}}{B_{r-1}^{pq} + F_{p-1}T^{p+q}}.$$

La homología en $E_r^{pq}$ está dada por

$$\text{(8a)} \qquad \frac{\mathrm{Ker} d_r^{pq}}{\mathrm{Im} d_r^{p+r,q-r-1}} = \frac{(Z_{r+1}^{pq} + F_{p-1}T^{p+q})/(B_{r-1}^{pq} + F_{p-1}T^{p+q})}{(B_r^{pq} + F_{p-1}T^{p+q})/(B_{r-1}^{pq} + F_{p-1}T^{p+q})} \cong E_{r+1}^{pq}$$

Por (5a), (6a) y (8a) concluimos que la sucesión $\mathbf{E}$ asociada al complejo filtrado $T^\circ$ es realmente una sucesión espectral, para nuestros intereses consideraremos $E_1$ como el primer término de $\mathbf{E}$. Analicemos un poco éste término,

$$\begin{aligned} E_1^{pq} &= \frac{Z_1^{pq} + F_{p-1}T^{p+q}}{B_0^{pq} + F_{p-1}T^{p+q}} \cong \frac{\{\bar{x} \in \mathrm{Gr}_p T^{p+q} |\, d(x) \in F_{p-1}T^{p+q+1}\}}{\{\bar{y} \in \mathrm{Gr}_p T^{p+q} |\, y = d(x), x \in F_p T^{p+q-1}\}} \\ &= \frac{\mathrm{Ker}\mathrm{Gr}_p d_{p+q}}{\mathrm{Im}\mathrm{Gr}_p d_{p+q-1}} = H^{p+q}(\mathrm{Gr}_p T^\circ). \end{aligned}$$

Entonces $\oplus_{p+q=j} E_1^{pq} = H^j(\mathrm{Gr}T^\circ)$, es decir en $E_1$ está contenida la cohomología del complejo graduado $\mathrm{Gr}T^\circ$.

Supongamos que la filtración $FT^j$ de cada $T^j, j \in \mathbb{Z}_+$ es una buena filtación, entonces el complejo $\mathrm{Gr}T^\circ$ consta únicamente de $\mathrm{Gr}D$-módulos finitamente generados. Luego, $\oplus_{p+q=j} E_r^{pq}$ son $\mathrm{Gr}D$-módulos y las funciones $d_r : \oplus_{p+q=j} E_r^{pq} \to \oplus_{p+q=j+1} E_r^{pq}$ son morfismos de $\mathrm{Gr}D$-módulos. Por inducción en $r$, se puede probar que $\oplus_{p+q=j} E_r^{pq}, j \in \mathbb{Z}_+$ son $\mathrm{Gr}D$-módulos finitamente generados. La filtración $FT^j$ induce una filtración $FH^j(T^\circ)$ dada por $F_p H^j(T^\circ) = Z^j(T^\circ) \cap F_p T^j / B^j(T^\circ) \cap F_p T^j$, $p \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\text{(9a)} \qquad E_\infty^{pq} = F_p H^j(T^\circ)/F_{p-1}H^j(T^\circ),$$

así $\oplus_{p+q=j} E_\infty^{pq}$ es el $\mathrm{Gr}D$-módulo asociado al $D$-módulo filtrado $H^j(T^\circ)$. Como $\oplus_{p+q=j} E_\infty^{pq}$ es un $\mathrm{Gr}D$-módulo finitamente generado, entonces la filtración $FH^j(T^\circ)$ es una buena filtración.

Como nos podemos dar cuenta, el término $E_\infty$ de $\mathbf{E}$ contiene los $\mathrm{Gr}D$-módulos asociados a los $D$-módulos filtrados $H^j(T^\circ)$, $j \in \mathbb{Z}_+$.

**CONVERGENCIA.**

1. Decimos que una sucesión espectral $\{E_r^{pq}\}$ en $\mathcal{A}$ *converge débilmente* a una familia de objetos $H^* = \{H^j\}$ de $\mathcal{A}$, si para cada $H^j$ existe una filtración

$$\cdots \subset F_{p-1}H^j \subset F_p H^j \subset F_{p+1}H^j \subset \cdots \subset H^j,$$

tal que $E_\infty^{pq} \cong F_p H^{p+q}/F_{p-1}H^{p+q}$, para todo $p, q$.

2. Decimos que una sucesión espectral $\{E_r^{pq}\}$ se *aproxima* a $H^* = \{H^j\}$, si ésta converge débilmente $H^*$ y además $H^j = \bigcup_p F_p H^j$, $\bigcap_p F_p H^j = 0$, para cada $j$.

3. Decimos que la sucesión espectral $\{E_r^{pq}\}$ *converge* a $H^* = \{H^j\}$, si ésta se aproxima a $H^*$ y además $H^j = \varprojlim (H^j/F_pH^j)$, para cada $j$.

Como la filtración $FH^j(T^\circ)$ es buena y además se cumple (9a), entonces la sucesión espectral $\mathbf{E}$ asociada al complejo $T^\circ$ se aproxima a $H^* = \{H^j(T^\circ), j \in \mathbb{Z}_+\}$. Para el sistema dirigido $\{H^j/F_pH^j, \pi_l^h\}$, donde $l \leq h$, $\pi_l^h : H^j(T^\circ)/F_lH^j(T^\circ) \to H^j(T^\circ)/F_hH^j(T^\circ)$ es la función proyección, se cumple $\varprojlim\{H^j(T^\circ)/F_pH^j(T^\circ), \pi_l^h\} = \bigoplus_p H^j(T^\circ)/F_pH^j(T^\circ)$. Consideremos el morfismo

$$\Phi : H^j(T^\circ) \to \bigoplus_p H^j(T^\circ)/F_pH^j(T^\circ),$$

definido por $\Phi = (\ldots, \phi_{p-1}, \phi_p, \phi_{p+1}, \ldots)$, donde $\phi_p : H^j(T^\circ) \to H^j(T^\circ)/F_pH^j(T^\circ)$ es la proyección canónica. Claramente $\Phi$ es un epimorfismo, luego el $\mathrm{Ker}\Phi = \bigcap_p F_pH^j(T^\circ) = 0$, pues $FH^j(T^\circ)$ es una buena filtración. De esta forma hemos probado que $H^j(T^\circ) = \varprojlim\{H^j(T^\circ)/F_pH^j(T^\circ), \pi_l^h\}$, para cada $j \in \mathbb{Z}_+$. Por lo tanto la sucesión espectral $\mathbf{E}$ converge a $H^* = \{H^j(T^\circ), j \in \mathbb{Z}_+\}$.

Si existe $r_0 \geq a$, tal que para toda $r > r_0$ se cumple $E_r^{pq} \cong E_{r+1}^{pq}$, entonces decimos que $E_\infty^{pq}$ es el *valor estable* de $E_r^{pq}$. El siguiente lema nos ayudara a probar que en la sucesión espectral $\mathbf{E}$, para cada pareja $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, con $p+q \in \mathbb{Z}_+$, $E_\infty^{pq}$ es el valor estable de $E_r^{pq}$.

**Lema 3.12.** *Sean $M$, $N$ dos $D$-módulos con buenas filtraciones $FM$, $FN$ y $f : M \to N$ un morfismo de $D$-módulos filtrados. Definimos*

$$\mathrm{Z}_r^p = \{x \in F_pM \,|\, f(x) \in F_{p-r}N\}$$

*y*

$$\mathrm{B}_r^p = \{x \in F_pN \,|\, x = f(y), y \in F_{p+r}M\}.$$

*Entonces existe $r_0$ tal que para toda $r \geq r_0$, se tiene*

$$\mathrm{Z}_r^p + F_{p-1}M = (\mathrm{Ker}f \cap F_pM) + F_{p-1}M,$$

*para todo $p \in \mathbb{Z}$, y*

$$\mathrm{B}_r^p = \mathrm{Im}f \cap F_pN,$$

*para todo $p \in \mathbb{Z}$.*

*Demostración.* El $D$-submódulo $\mathrm{Im}f$ de $N$ tiene dos buenas filtraciones $FN \cap \mathrm{Im}f$ y $f(FM)$. Por 1.8, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$F_pN \cap \mathrm{Im}f \subset f(F_{p+k}N), \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Si $r \geq k$,

$$\mathrm{B}_r^p = F_pN \cap f(F_{p+r}M) \supset F_pN \cap \mathrm{Im}f \supset F_pN \cap f(F_{p+r}M),$$

es decir $\mathrm{B}_r^p = F_pN \cap \mathrm{Im}f$. Además, si consideramos $r \geq k+1$, tenemos

$$F_{p-r}N \cap \mathrm{Im}f \subset f(F_{p+k-r}M) \subset f(F_{p-1}M), \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Sea $x \in \mathrm{Z}_r^p$, de acuerdo a las contenciones anteriores,

$$f(x) \in F_{p-r}N \cap \mathrm{Im} f \subset f(F_{p-1}M).$$

Entonces existe $y \in F_{p-1}M$ tal que $f(x) = f(y)$. Luego, $x + F_{p-1}M = x - y + F_{p-1}M$ y $x - y \in \mathrm{Ker} f \cap F_pM$. Así,

$$\mathrm{Z}_r^p + F_{p-1}M \subset (\mathrm{Ker} f \cap F_pM) + F_{p-1}M.$$

La contención inversa se sigue de la definición de $\mathrm{Z}_r^p$, por lo tanto se tiene la igualdad. $\square$

Aplicando este lema a las fronteras y ciclos relativos asociados al complejo $T^\circ$, tenemos: para cada $p, q \in \mathbb{Z}$ podemos encontrar $r_0(p+q)$ tal que, para $r \geq r_0$ se cumple

$$Z_r^{pq} + F_{p-1}T^{p+q} = Z^{p+q}(T^\circ) \cap F_pT^{p+q} + F_{p-1}T^{p+q}$$

y

$$B_{r-1}^{pq} + F_{p-1}T^{p+q} = B^{p+q}(T^\circ) \cap F_pT^{p+q} + F_{p-1}T^{p+q}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} E_r^{pq} &= (Z^{p+q}(T^\circ) \cap F_pT^{p+q} + F_{p-1}T^{p+q})/(B^{p+q}(T^\circ) \cap F_pT^{p+q} + F_{p-1}T^{p+q}) \\ &= F_pH^{p+q}(T^\circ)/F_{p-1}H^{p+q}(T^\circ), \end{aligned}$$

para toda $r \geq r_0$. Por lo tanto $E_\infty^{pq}$ es el valor estable de $E_r^{pq}$.

# 4. Módulos Sobre el Anillo de Operadores Diferenciales

En esta sección estudiaremos algunas propiedades que tienen los módulos sobre el anillo de operadores diferenciales $D(n)$. Comenzamos estableciendo una cota superior y otra inferior para la dimensión de los $D(n)$-módulos finitamente generados, para esto equiparemos al anillo $D(n)$ con la filtración de Bernstein. Despues veremos cómo se relaciona la dimensión de los $D(n)$-módulos finitamente generados y los funtores derivados $\mathrm{Ext}^j_{D(n)}(-, D(n))$, relación que comprende la construcción y análisis de una sucesión espectral. Posteriormente nos concentraremos en analizar una familia muy importante de $D(n)$-módulos conocidos como módulos holonómicos. Estableceremos criterios para saber cuando un $D(n)$-módulo es holonómico en términos de los funtores derivados $\mathrm{Ext}^j_{D(n)}(-, D(n))$. También construiremos un mecanismo que nos permita obtener más $D(n)$-módulos holonómicos a partir de los ya conocidos, y explicaremos un poco la importancia que tienen los $D(n)$-módulos holonómicos desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales.

Como el objetivo es estudiar $D(n)$-módulos, tenemos que señalar que la categoría de $D(n)$-módulos derechos es equivalente a la categoría de $D(n)$-módulos izquierdos. Esta equivalencia la obtenemos del isomorfismo que existe entre $D(n)$ y $D(n)^{op}$, el cual está dado por $\Phi : D(n)^{op} \to D(n), X_i \mapsto X_i, \delta_i \mapsto -\delta_i$. Es por esta razón que consideramos de forma indistinta $D(n)$-módulos derechos o izquierdos y especificamos el lado sobre el cual actúa $D(n)$ sólo cuando la omisión de esto cause ambigüedad en los resultados. Denotamos por $\mathcal{M}(D(n))$ la categoría de todos los $D(n)$-módulos y por $\mathcal{M}_{fg}(D(n))$ la subcategoría plena de $\mathcal{M}(D(n))$ que consta de todos los $D(n)$-módulos finitamente generados.

El anillo $D(n)$ lo equiparemos con la filtración de Bernstein, la cual está dada por la sucesión $D_q(n) = \{\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} X^\alpha \delta^\beta | \ |\alpha + \beta| \leq q\}, q \in \mathbb{Z}$. Por lo analizado en la introducción $(D_q(n); q \in \mathbb{Z})$ satisface $\mathbf{F1}, \ldots, \mathbf{F7}$; es decir, es una buena filtración para $D(n)$, donde $D_0(n) = K$ y $\mathrm{Gr}D(n)$ es el anillo de polinomios en $2n$-variables. Definimos la dimensión de un módulo $M \in \mathcal{M}_{fg}(D(n))$ usando la función aditiva $\lambda = \dim_K$, la dimensión $d(M)$ y la correspondiente multiplicidad $e(M)$ las llamaremos *dimensión* y *multiplicidad de Bernstein* del módulo $M$. El siguiente resultado nos establece cotas para la dimensión $d(M)$ de todo módulo no nulo $M \in \mathcal{M}_{fg}(D(n))$.

**Teorema 4.1.** *Sea $M \neq 0$ un $D(n)$-módulo finitamente generado, entonces $n \leq d(M) \leq 2n$.*

*Demostración.* Como $M$ es finitamente generado, lo podemos cubrir por

$$D^q(n) \xrightarrow{\pi} M \to 0,$$

$q$ es igual al número de generadores de $M$. Entonces $d(M) \leq d(D(n))$. Como $d(D(n)) = d(\mathrm{Gr}D(n)) = 2n$, de donde $d(M) \leq 2n$.

Por 1.5 $M$ tiene una buena filtración $FM$ y podemos suponer $F_0M \neq 0$, $F_pM = 0$, para $p < 0$. Luego, para $p \in \mathbb{Z}$ consideremos el mapeo lineal $D_p(n) \to \mathrm{Hom}_K(F_pM, F_{2p}M)$ que manda cada $T \in D_p(n)$ al morfismo $m \mapsto Tm$. Probaremos que para cada $p$ este mapeo es inyectivo. Para $p \leq 0$ es inmediato. Supongamos que es cierto para $(p-1) > 0$ y consideremos $T \in D_p(n)$ que satisface $Tm = 0$, para todo $m \in F_pM$. Sea $v \in F_{p-1}M$, entonces $x_iv \in F_pM$ y $\delta_iv \in F_pM$, $1 \leq i \leq n$. Observemos

$$[x_i, T]v = x_iTv - Tx_iv = 0$$

y

$$[\delta_i, T]v = \delta_iTv - T\delta_iv = 0.$$

Pero $[x_i, T], [\delta_i, T] \in D_{p-1}(n)$. Por la hipótesis de inducción, $[x_i, T] = 0$ y $[\delta_i, T] = 0$, para $1 \leq i \leq n$. Entonces $T$ está en el centro de $D(n)$. Como el centro de $D(n)$ es $K$, el campo, concluimos $T = 0$. Ahora, si consideramos las dimensiones,

$$\dim_K(D_p(n)) \leq \dim_K(\mathrm{Hom}_K(F_pM, F_{2p}M)) = \dim_K(F_pM) \cdot \dim_K(F_{2p}M), \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Luego, para $p \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande, el lado izquierdo de la desigualdad se comporta como un polinomio en $p$ de grado $2n$. Mientras que el lado derecho se comporta como un polinomio en $p$ de grado $2d(M)$. Esto sólo puede suceder si $d(M) \geq n$. □

El teorema anterior nos garantiza que todo $D(n)$-módulo no nulo $M$ satisface $d(M) \geq n$, esta desigualdad se le conoce como la *desigualdad de Bernstein*.

**Definición 4.2.** *Decimos que un $D(n)$-módulo finitamente generado $M$ es holonómico, si $M = 0$ o $d(M) = n$.*

Existen $D(n)$-módulos holonómicos distintos de cero. Por ejemplo, el anillo de polinomios $K[X_1, \ldots, X_n]$ con la acción $(T, f) = T(f)$, $T \in D(n)$, $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$, es un $D(n)$-módulo finitamente generado. La filtración dada por el grado es una buena filtración. Además, $d(K[X_1, \ldots, X_n]) = n$. Por lo tanto $K[X_1, \ldots, X_n]$ es un $D(n)$-módulo holonómico.

Si $\phi$ es un automorfismo de $D(n)$, entonces podemos definir un endofuntor $\hat{\phi}$ en $\mathcal{M}(D(n))$, que manda a cada $D(n)$-módulo $M$ al $D(n)$-módulo $M^{\phi}$, el cual es isomorfo a $M$ como grupo abeliano, pero la acción de $D(n)$ está dada por $(T, m) = \phi(T)m, T \in D(n), m \in M$. Por la proposición 1.13 $d(M) = d(\hat{\phi}(M))$. Entonces si $M$ holonómico, $\hat{\phi}(M)$ también es holonómico.

**Lema 4.3.** *Sea $M$ un $D(n)$-módulo izquierdo, no necesariamente finitamente generado. Si $M$ tiene una filtración $FM$ exhaustiva y hausdorff tal que* $\dim_K(F_tM) \leq c_1t^n + c_2(t+1)^{n-1}$, *para $t \in \mathbb{Z}$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}_+$. Entonces $d(M) \leq n$ y $e(M) \leq n!c_1$.*

*Demostración.* Sea $M_0$ un $D(n)$-submódulo de $M$ finitamente generado, por 1.4 existe $\Gamma M_0$ una buena filtración para $M_0$. Luego $(F_tM_0 = F_tM \cap M_0; t \in \mathbb{Z})$ es una filtración exhaustiva y hausdorff para $M_0$. Por 1.7 existe $q \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\Gamma_tM_0 \subset F_{t+q}M_0$, para todo $t \in \mathbb{Z}$. Entonces $\dim_K(\Gamma_tM_0) \leq \dim_K(F_{t+q}M_0) \leq c_1(t+q)^n + c_2(t+q+1)^{n-1} \leq c_1t^n + c_3(t+1)^{n-1}$, donde $c_3$ es un entero positivo suficientemente grande. Entonces $d(M_0) \leq n$ y $e(M_0) \leq n!c_1$. Así, todo $D(n)$-submódulo finitamente generado de $M$ es holonómico y tiene multiplicidad menor o igual a $n!c_1$. Sea $\gamma : 0 \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \cdots$ una cadena estrictamente creciente de $D(n)$-submódulos de $M$ finitamente generados. Para $l \geq 1$, la sucesión

$$0 \to M_l \to M_{l+1} \to M_{l+1}/M_l \to 0$$

es exacta. Como $d(M_{l+1}) = d(M_l) + d(M_{l+1}/M_l)$, por 1.12 $e(M_l) < e(M_{l+1}) \leq n!c_1$. Entonces, $0 < e(M_1) < e(M_2) < e(M_3) < \cdots$ es una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos que se encuentra acotada por $n!c_1$, además $t \leq e(M_t) \leq n!c_1$. Así, $\gamma$ es una cadena que se encuentra acotada, digamos que por $M'$ (un $D(n)$-submódulo finitamente generado de M), y tiene longitud a lo más $n!c_1$. Sea $a \in M$, consideremos el $D(n)$-submódulo $M'' = M' + D(n)a$. Entonces tenemos que $M' \subset M''$, pero esta contención no puede ser propia, pues contradiría el hecho de que $M'$ acota a $\gamma$. En consecuencia $M'' = M'$, es decir $a \in M'$. Por lo tanto $d(M) \leq n$ y $e(M) \leq n!c_1$. □

Sea $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ un polinomio no nulo, consideremos el anillo de fracciones $\{TP^{-1} | \, T \in K[X_1, \ldots, X_n], l \in \mathbb{Z}_+\}$ que se obtiene al localizar sobre el conjunto multiplicativo $\{P^l | \, l \in \mathbb{Z}_+\}$, denotémoslo por $K[X, P^{-1}]$. Definimos la acción de los operadores $\delta_i, X_i$, $i = 1, \ldots, n$ en $K[X, P^{-1}]$ de la siguiente forma:

1. $\delta_i \cdot TP^{-l} = \frac{\partial(TP^{-l})}{\partial x_i} = (\frac{\partial T}{\partial x_i})P^{-l} - (lT\frac{\partial P}{\partial x_i})P^{-l-1} \in K[X, P^{-1}]$.
2. $X_i \cdot TP^{-l} = (x_i T)P^{-l} \in K[X, P^{-1}]$.

Así, $K[X, P^{-1}]$ tiene estructura de $D(n)$-módulo. Notemos que no es obvio que $K[X, P^{-1}]$ es un $D(n)$-módulo finitamente generado.

**Teorema 4.4.** *Sea $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ un polinomio no nulo de grado $m$. Entonces $K[X, P^{-1}]$ es un $D(n)$-módulo holonómico.*

*Demostración.* Construiremos una filtración que cumpla las hipótesis del lema 4.3. Sea $FK[X, P^{-1}]$ la filtración dada por $F_l K[X, P^{-1}] = \{TP^{-l} | \deg(T) \leq l(m+1)\}$, $l \in \mathbb{Z}$. Por la forma en que está definida la acción de $D(n)$ en $K[X, P^{-1}]$, para $i = 1, \ldots, n$ y $TP^{-l} \in F_l K[X, P^{-1}]$, tenemos

$$\delta_i \cdot (TP^{-l}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(TP^{-l}) = (\frac{\partial T}{\partial x_i}P - lT\frac{\partial P}{\partial x_i})P^{-l-1} =: Q_1 P^{-l-1}$$

y

$$X_i \cdot (TP^{-l}) = (X_i T)P^{-l} = (X_i TP)P^{-l-1} =: Q_2 P^{-l-1},$$

donde $\deg(Q_1) \leq l(m+1) + m - 1 \leq (l+1)(m+1)$ y $\deg(Q_2) \leq l(m+1) + m + 1 = (l+1)(m+1)$. Entonces $\delta_i \cdot (TP^{-l}), X_i \cdot (TP^{-l}) \in F_{l+1}[X, P^{-1}]$, para $i = 1, \ldots, n$. De esta forma $D_1(n) \cdot F_l K[X, P^{-1}] \subset F_{l+1} K[X, P^{-1}]$. Por inducción en $t$, $D_t(n) \cdot F_l K[X, P^{-1}] \subset F_{t+l} K[X, P^{-1}]$, para toda $t \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $FK[X, P^{-1}]$ es una filtración de $D(n)$-módulos.

Observemos que $F_l K[X, P^{-1}] = 0$, para todo $l \leq 0$, lo cual implica que $FK[X, P^{-1}]$ es hausdorff.

Sea $TP^{-l} \in K[X, P^{-1}]$ un elemento cualquiera con $\deg(T) = s$ y $l \geq 0$, entonces $\deg(TP^s) = s + ms \leq (l+s)(m+1)$, de donde $TP^{-l} = (TP^s)P^{-(l+s)} \in F_{l+s} K[X, P^{-1}]$. Por lo tanto $\bigcup_{l \in \mathbb{Z}} F_l K[X, P^{-1}] = K[X, P^{-1}]$, es decir $FK[X, P^{-1}]$ es exhaustiva.

Por la forma en que se definió $F_lK[X,P^{-1}]$, $\dim_K F_lK[X,P^{-1}]$ es igual a la dimensión del $K$-espacio vectorial generado por todos los polinomios en $n$-variables de grado menor o igual a $l(m+1)$. Entonces $\dim_K(F_lK[X,P^{-1}]) \leq (m+1)^n l^n/n! + c_2(l+1)^{n-1}$, para $l \in \mathbb{Z}_+$ y $c_2$ un entero positivo suficientemente grande. Así, $FK[X,P^{-1}]$ cumple las hipótesis del lema 4.3. Por lo tanto $K[X,P^{-1}]$ es un $D(n)$-módulo holonómico. $\square$

De acuerdo con [Björk] la colección de todos los $D(n)$-módulos no nulos es llamada la *clase de Bernstein*, la denotamos por $\mathscr{B}(D(n))$. Los $D(n)$-módulos holonómicos de multiplicidad 1 son llamados $D(n)$-módulos *holonómicos irreducibles*. En general, diremos que un $D(n)$-módulo es *irreducible* si éste es simple.

Ahora estudiaremos algunas propiedades homológicas de $D(n)$. Por 3.9 sabemos que $\mathrm{hd}(D(n)) \leq \mathrm{hd}(\mathrm{Gr}D(n))$. Como el anillo graduado asociado a $D(n)$ con respecto a la filtración de Bernstein es $K[X_1,\ldots,X_n,\xi_1,\ldots,\xi_n]$, por 2.2 concluimos $\mathrm{hd}(D(n)) \leq 2n$.

Si hablamos de propiedades homológicas, no podemos olvidarnos de los funtores derivados $\mathrm{Ext}^j_{D(n)}(-,D(n))$, así que estudiaremos un poco la relación que existe entre la dimensíon de Bernstein y esta familia de funtores.

Sea $M$ un $D(n)$-módulo no nulo finitamente generado, por 2.4 sabemos que existe $j \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\mathrm{Ext}^j_{D(n)}(M,D(n)) \neq 0$. Definimos

$$j(M) = \mathrm{mín}\{j \in \mathbb{Z}_+ |\, \mathrm{Ext}^j_{D(n)}(M,D(n)) \neq 0\}.$$

El siguiente resultado relaciona la dimensión de Bernstein con los funtores derivados $\mathrm{Ext}^j_{D(n)}(-,D(n))$.

**Teorema 4.5.** *Sea $M$ un $D(n)$-módulo izquierdo finitamente generado. Entonces*

1. $\mathrm{Ext}^j_{D(n)}(M,D(n)) = 0$, *para* $j < 2n - d(M)$.
2. $d(\mathrm{Ext}^j_{D(n)}(M,D(n))) \leq 2n - j$, *para todo* $0 \leq j \leq 2n$.
3. $d(\mathrm{Ext}^{2n-d(M)}_{D(n)}(M,D(n))) = d(M)$.

*En particular, si $M \neq 0$, $\mathrm{Ext}^{2n-d(M)}_{D(n)}(M,D(n)) \neq 0$, es decir*

$$d(M) + j(M) = 2n.$$

*Demostración.* Sea $FM$ una buena filtración para $M$. Sea $P_\circ$ una resolución proyectiva de $M$ que consta de $D(n)$-módulos $P_i$, $i \in \mathbb{Z}_+$ finitamente generados. Cada $P_i$ lo equipamos con una buena filtración $FP_i$ que sea compatible con la diferencial de $P_\circ$. Sea $T^\circ = \mathrm{Hom}_{D(n)}(P_\circ, D(n))$. Entonces $T^\circ$ es un complejo de $D(n)$-módulos filtrados, por 3.10 la filtración de cada $T^j$ es una buena filtración. Definimos la sucesión espectral $\mathbf{E}$ asociada al complejo filtrado $T^\circ$ de la misma forma que en la Sección 3. El término $E_1$ está dado por $E_1^{pq} = \mathrm{Gr}_p\mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathrm{Gr}D(n)}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}D(n))$, y el término $E_\infty$ está dado por $E_\infty^{pq} = \mathrm{Gr}_p\mathrm{Ext}^{p+q}_{D(n)}(M,D(n))$.

1. Como $\mathrm{Gr}D(n) = K[X_1,\ldots,X_n,\xi_1,\ldots,\xi_n]$, por 2.10(1) sabemos que los módulos $\mathrm{Ext}^j_{\mathrm{Gr}D(n)}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}D(n)) = 0$, para $j < 2n - d(\mathrm{Gr}M) = 2n - d(M)$. Entonces $E_1^{pq} = 0$, $E_\infty^{pq} = 0$, para $p+q < 2n + d(M)$. Por lo tanto $\mathrm{Ext}^{p+q}_{D(n)}(M,D(n)) = 0$, para $p+q < 2n - d(M)$.

2. Como $\oplus_{p+q=j}E_r^{pq}$ son Gr$D(n)$-módulos finitamente generados y $\oplus_{p+q=j}E_{r+1}^{p+q}$ es el cociente de un submódulo de $\oplus_{p+q=j}E_r^{pq}$. Por 1.11 $d(\oplus_{p+q=j}E_{r+1}^{pq}) \leq d(\oplus_{p+q=j}E_r^{pq})$, $r \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\begin{aligned} d(\mathrm{Ext}^j_{\mathrm{Gr}D(n)}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}D(n))) &= d(\oplus_{p+q=j}E_1^{pq}) \geq d(\oplus_{p+q=j}E_\infty^{pq}) \\ &= d(\mathrm{GrExt}^j_{D(n)}(M, D(n))) \\ &= d(\mathrm{Ext}^j_{D(n)}(M, D(n))), \end{aligned}$$

para todo $j \in \mathbb{Z}_+$. Por 2.10(2) $d(\mathrm{Ext}^j_{\mathrm{Gr}D(n)}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}D(n))) \leq 2n - j$, para $0 \leq j \leq 2n$. Por lo tanto $d(\mathrm{Ext}^j_{D(n)}(M, D(n))) \leq 2n - j$, para $0 \leq j \leq 2n$.

3. La diferencial $d_r : \oplus_{p+q=j}E_r^{pq} \to \oplus_{p+q=j+1}E_r^{pq}$ es un morfismo de Gr$D(n)$-módulos, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Si $j = 2n - d(M)$, por lo analizado en (1), $\oplus_{p+q=j+1}E_r^{pq} = 0$, para $r \in \mathbb{N}$. En consecuencia $d_r : \oplus_{p+q=j-1}E_r^{pq} \to \oplus_{p+q=j}E_r^{pq}$ es la función cero. Entonces $E_{r+1}^{pq} \subset E_r^{pq}$, para todo $p + q = j$, $r \in \mathbb{N}$. Por otro lado, tenemos $d(\oplus_{p+q=j+1}E_r^{pq}) \leq 2n - j - 1$. Por 2.10(3),

$$d(\oplus_{p+q=j}E_1^{pq}) = d(\mathrm{Ext}^j_{\mathrm{Gr}D(n)}(\mathrm{Gr}M, \mathrm{Gr}D(n))) = d(\mathrm{Gr}M) = d(M) = 2n - j.$$

Por inducción en $r$, $d(\oplus_{p+q=j}E_r^{pq}) = 2n-j$, para $r \in \mathbb{N}$. Así, $d(\mathrm{Ext}^j_{D(n)}(M, D(n))) = 2n - j = d(M)$.

Si $M \neq 0$, entonces $d(\mathrm{Ext}^{2n-d(M)}_{D(n)}(M, D(n))) = d(M) \neq 0$. Por lo analizado en (1), $\mathrm{Ext}^j_{D(n)}(M, D(n)) = 0$, para $j < 2n - d(M)$. Entonces $j(M) = 2n - d(M)$.

□

Observemos que el teorema anterior es válido para cualquier $K$-álgebra $B$ y cualquier buena filtración $FB$, cuya álgebra graduada asociada sea el álgebra de polinomios. Ahora analizaremos una serie de implicaciones que marcan la importancia de este teorema.

**Corolario 4.6.** *Sea $M$ un $D(n)$-módulo finitamente generado. Entonces*

1. $\mathrm{Ext}^j_{D(n)}(M, D(n)) = 0$, *para* $j > n$.

2. $\mathrm{Ext}^n_{D(n)}(M, D(n))$ *es holonómico.*

*Demostración.* 1. Por 4.5(2), $d(\mathrm{Ext}^j_{D(n)}(M, D(n))) \leq 2n - j$, para $j > n$, es decir $d(\mathrm{Ext}^j_{D(n)}(M, D(n))) < n$. Pero todo $D(n)$-módulo no nulo tiene dimensión mayor o igual a $n$. Por lo tanto $\mathrm{Ext}^j_{D(n)}(M, D(n)) = 0$, para $j > n$.

2. Por 4.5(2), $d(\mathrm{Ext}^n_{D(n)}(M, D(n))) \leq 2n - n = n$, es decir $\mathrm{Ext}^n_{D(n)}(M, D(n))$ es holonómico.

□

**Corolario 4.7.** *Sea $M$ un $D(n)$-módulo izquierdo finitamente generado. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$M$ es holonómico.*

2. $\operatorname{Ext}^j_{D(n)}(M, D(n)) = 0$, *para* $j \neq n$.

*Demostración.* Supongamos (1). Por 4.5(1) $\operatorname{Ext}^j_{D(n)}(M, D(n)) = 0$, para $j < n$ y por 4.6 $\operatorname{Ext}^j_{D(n)}(M, D(n)) = 0$, para $j > n$. Por lo tanto (2).

Supongamos (2). Entonces $d(\operatorname{Ext}^j_{D(n)}(M, D(n))) = 0$, para $j \neq n$. Por 4.5 (2), tenemos $d(\operatorname{Ext}^n_{D(n)}(M, D(n))) \leq n$. Así, $d(M) = d(\operatorname{Ext}^{2n-d(M)}_{D(n)}(M, D(n))) \leq n$. Por lo tanto (1). $\square$

**Teorema 4.8.** hd*(D(n))=n.*

*Demostración.* Por 4.5(2) sabemos $\operatorname{Ext}^j_{D(n)}(M, D(n)) = 0$, para $j > n$, $M \in \mathcal{M}_{fg}(D(n))$. Aplicando 2.3, obtenemos $\operatorname{hd}(D(n)) \leq n$. Por 4.7, existen $M's \in \mathcal{M}_{fg}(D(n))$ tales que $\operatorname{Ext}^n_{D(n)}(M, D(n)) \neq 0$. Por lo tanto $\operatorname{hd}(D(n)) = n$. $\square$

**Teorema 4.9.** *Sea $\mathcal{F} : \mathcal{M}_{fg}(D(n)) \to \mathcal{M}_{fg}(D(n))$ una equivalencia de categorías aditivas. Entonces $d(M) = d(\mathcal{F}(M))$.*

*Demostración.* Si $\mathcal{F}$ es una equivalencia de categorías, $M \neq 0$ es equivalente $\mathcal{F}(M) \neq 0$. Por lo tanto, podemos considerar $j(M)$ y $j(\mathcal{F}(M))$ y por 4.5 es suficiente mostrar $j(M) = j(\mathcal{F}(M))$.

Observemos que los objetos proyectivos en $\mathcal{M}_{fg}(D(n))$ son exactamente los $D(n)$-módulos proyectivos finitamente generados. Así, para $M \in \mathcal{M}_{fg}(D(n))$

$$\begin{aligned}
j(M) &= \min\{j \in \mathbb{Z}_+ | \operatorname{Ext}^j_{D(n)}(M, D(n)) \neq 0\} \\
&= \min\{j \in \mathbb{Z}_+ | \operatorname{Ext}^j_{D(n)}(M, F) \neq 0, F \text{ libre de rango finito}\} \\
&= \min\{j \in \mathbb{Z}_+ | \operatorname{Ext}^j_{D(n)}(M, P) \neq 0, P \text{ proyectivo finitamente generado}\}
\end{aligned}$$

Sea $P_\circ$ una resolución proyectiva de $M$ que consta de $D(n)$-módulos proyectivos finitamente generados. Como $\mathcal{F}$ preserva objetos proyectivos en $\mathcal{M}_{fg}(D(n))$, entonces $\mathcal{F}(P_\circ)$ es una resolución izquierda de $\mathcal{F}(M)$, que consta de $D(n)$-módulos proyectivos finitamente generados. Esto implica que para cualquier $D(n)$-módulo $N$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}^j_{D(n)}(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N)) &= \operatorname{H}^j(\operatorname{Hom}_{D(n)}(\mathcal{F}(P_\circ), \mathcal{F}(N))) \\
&\cong \operatorname{H}^j(\operatorname{Hom}_{D(n)}(P_\circ, N)) = \operatorname{Ext}^j_{D(n)}(M, N),
\end{aligned}$$

para todo $j \in \mathbb{Z}_+$. En particular,

$$\begin{aligned}
j(M) &= \min\{j \in \mathbb{Z}_+ | \operatorname{Ext}^j_{D(n)}(M, P) \neq 0, P \text{ proyectivo finitamente generado}\} \\
&= \min\{j \in \mathbb{Z}_+ | \operatorname{Ext}^j_{D(n)}(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(P)) \neq 0, P \text{ proyectivo finitamente generado}\} \\
&\geq \min\{j \in \mathbb{Z}_+ | \operatorname{Ext}^j_{D(n)}(\mathcal{F}(M), Q) \neq 0, Q \text{ proyectivo finitamente generado.}\} \\
&= j(\mathcal{F}(M))
\end{aligned}$$

De manera análoga $j(M) \leq j(\mathcal{F}(M))$. $\square$

Como nos podemos dar cuenta, el teorema 4.5 según los resultados 4.6, 4.7, 4.9 se puede aplicar para encontrar más $D(n)$-módulos holonómicos a partir de los ya dados o, para caracterizar estos módulos. Ahora, ¿para qué estudiar módulos holonómicos?, ¿por qué son importantes los módulos holonómicos?. El principal interés por estudiar los $D(n)$-módulos holonómicos viene de las ecuaciones diferenciales, pues se tiene una correspondencia entre los $D(n)$-módulos y los sistemas de ecuaciones diferenciales. Analicemos un poco esta relación.

Sea $P$ un operador en $D(n)$, éste puede ser representado de la forma $\sum_\alpha g_\alpha \delta^\alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $g_\alpha \in K[X_1, \ldots, X_n]$ y $\delta^\alpha = \delta_1^{\alpha_1} \cdots \delta_n^{\alpha_n}$. Este operador diferencial induce una ecuación

$$P(f) = \sum_\alpha g_\alpha \delta^\alpha(f) = 0,$$

donde $f$ puede ser un polinomio o, en el caso $K = \mathbb{R}$, una función de clase $C^\infty$ en las variables $X_1, \ldots, X_n$. De manera general, $P_1, \ldots, P_m \in D(n)$ induce un sistema de ecuaciones diferenciales

$$P_1(f) = P_2(f) = \cdots = P_m(f) = 0. \tag{10a}$$

A este sistema le podemos asociar el $D(n)$-módulo $D(n)/\sum_{i=1}^m D(n)P_i$ y lo llamaremos el $D(n)$-módulo *asociado* al sistema (10a). En el lenguaje de las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (EDP), los sistemas de ecuaciones cuyo $D(n)$-módulo asociado es holonómico reciben el nombre de *sistemas maximales sobredeterminados*. Los $D(n)$-módulos holonómicos están relacionados con el problema de estabilidad del sistema, ver la sección 19 de [Coutinho]. Otra sorprendente aplicación que tienen los $D(n)$-módulos holonómicos a las ecuaciones diferenciales es que, éstos pueden ser usados para encontrar ecuaciones diferenciales que sean satisfechas por cierto tipo de funciones. Los $D(n)$-módulos holonómicos tambén son usados para determinar si una identidad dada es cierta, ver la sección 20 de [Coutinho].

Es por este tipo de aplicaciones que el interés por entender los $D(n)$-módulos holonómicos desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales es muy grande.

Otra motivación que se tiene para estudiar los $D(n)$-módulos holonómicos es porque, como ya se dijo antes, los $D(n)$-módulos holonómicos de multiplicidad 1 son irreducibles. Así, la ilusión del Álgebra es encontrar todos los $D(n)$-módulos irreducibles y de esta forma tratar de encontrar las representaciones del Anillo de Operadores Diferenciales $D(n)$. Vale la pena mencionar en este apartado que existen ejemplos de $D(n)$-módulos que no son holonómicos pero que son irreducibles, el primer ejemplo se debe a J. T. Stafford en 1985. En el artículo [Stafford] se prueba que para $n \geq 2$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$, el operador

$$S = \delta_1 + (\sum_{i=2}^n \lambda_i X_1 X_i \delta_i - X_i) + \sum_{i=2}^n (X_i - \delta_i), \tag{11a}$$

genera un ideal izquierdo máximo en $D(n)$. Entonces $M = D(n)/D(n)S$ es un $D(n)$-módulo irreducible que tiene dimensión $2n-1$. Una prueba detallada de estas afirmaciones también la podemos revisar en [Krause-Lenagan] corolario 8.6 y teorema 8.7. Posteriormente en 1988, J. Bernstein y V. Lunts encontraron una forma de construir $D(n)$-módulos irreducibles no holonómicos basados en argumentos geométricos [Bernstein-Lunts]. Con estos ejemplos queda claro que la tarea de encontrar todos los $D(n)$-módulos irreducibles es muy complicada y hasta la fecha sigue siendo un tema abierto.

Retomando el estudio de los $D(n)$-módulos holonómicos tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.10.** *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Todo módulo holonómico es de longitud finita.*
2. *Submódulos, cocientes y extensiones de módulos holonómicos son holonómicos.*

*Demostración.* 1. Sea $M$ un $D(n)$-módulo holonómico diferente de cero. Por definición $d(M) = n$ y $e(n) \in \mathbb{N}$. Como $M$ es finitamente generado y $D(n)$ es un anillo noetheriano, existe un $D(n)$-submódulo maximal $M^{'}$ diferente de $M$. Así,

$$0 \to M^{'} \to M \to M/M^{'} \to 0.$$

Por (2), $M^{'}$ y $M/M^{'}$ son holonómicos. Además, $M/M^{'}$ es simple. Si $M^{'} \neq 0$, por 1.12 tenemos que $e(M^{'}) < e(M)$. Por inducción en $e(M)$, $M$ tiene longitud finita.

2. En una sucesión exacta

$$0 \to M^{'} \to M \to M^{''} \to 0,$$

se cumple que $d(M) = \max\{d(M^{'}), d(M^{''})\}$. Supongamos que $M$ es holonómico,

$$\begin{aligned} d(M^{'}) \leq d(M) &= n \\ d(M^{''}) \leq d(M) &= n. \end{aligned}$$

Por lo tanto $d(M^{'}) \leq n$, $d(M^{''}) \leq n$, es decir, submódulo y cociente de holonómico es holonómico. Si suponemos $M^{'}$ y $M^{''}$ holonómicos, entonces $d(M) \leq n$, por lo tanto $M$ es holonómico.

□

Observemos que (1), en el teorema anterior, implica que los $D(n)$-módulos holonómicos tienen serie de composición de longitud finita (a lo más la multiplicidad del módulo), es decir, los $D(n)$-módulos holonómicos son artinianos y noetherianos.

Sea $M$ un $R$-módulo, para $R$ un anillo cualquiera. Un elemento $m \in M$ se dice que es de *torsión* si $\mathrm{Ann}(m) \neq \{0\}$, decimos que $M$ es de *torsión* si $\mathrm{Ann}(m) \neq \{0\}$, para todo $m \in M$. Observemos que el anillo de polinomios $K[X_1, \ldots, X_n]$ es un $D(n)$-módulo de torsión. De forma más general tenemos que todo $D(n)$-módulo holonómico es de torsión. Otro resultado que se conoce, es que todo $D(n)$-módulo holonómico es cíclico, es decir, está generado por un solo elemento. Una prueba de estos resultados se puede ver en la sección 10 de [Coutinho].

Denotamos por $\mathcal{M}_{lf}(D(n))$, $\mathcal{H}ol(D(n))$ las subcategorías plenas de $\mathcal{M}_{fg}(D(n))$ que consisten de $D(n)$-módulos de longitud finita y $D(n)$-módulos holonómicos, respectivamente. El teorema 4.10 nos muestra que $\mathcal{H}ol(D(n))$ es una subcategoría plena de $\mathcal{M}_{lf}(D(n))$. Ya que por medio del operador $S$ expresado en (11a) se pueden construir

$D(n)$-módulos irreducibles que no son holonómicos, para $n \geq 2$ la categoría $\mathcal{H}ol(D(n))$ es estrictamente más pequeña que $\mathcal{M}_{fg}(D(n))$.

Por 4.7 y la sucesión exacta larga de $\mathrm{Ext}^{\circ}_{D(n)}(-, D(n))$, tenemos que el funtor contravariante $M \to M^* = \mathrm{Ext}^n_{D(n)}(M, D(n))$ de $\mathcal{H}ol^L(D(n))$ en $\mathcal{H}ol^R(D(n))$ es exacto. Denotamos por el mismo símbolo al funtor análogo que va de $\mathcal{H}ol^R(D(n))$ en $\mathcal{H}ol^L(D(n))$. La composición de estos dos funtores $M \to M^{**}$ es un funtor exacto covariante sobre $\mathcal{H}ol^L(D(n))$.

**Teorema 4.11.** *El funtor $M \to M^{**}$ es isomorfo al funtor identidad en $\mathcal{H}ol^L(D(n))$.*

*Demostración.* Sea $P$ un $D(n)$-módulo proyectivo finitamente generado, entonces $D^q(n) \cong P \oplus P^{'}$. Observemos

$$\begin{aligned} D^q(n) &\cong \mathrm{Hom}_{D(n)}(D^q(n), D(n)) \cong \mathrm{Hom}_{D(n)}(P \oplus P^{'}, D(n)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{D(n)}(P, D(n)) \oplus \mathrm{Hom}_{D(n)}(P^{'}, D(n)). \end{aligned}$$

Así, $\mathrm{Hom}_{D(n)}(P, D(n))$ es un $D(n)$-módulo proyectivo finitamente generado.

Para cualquier $D(n)$-módulo izquierdo $N$, tenemos el morfismo natural

$$\Psi_N : N \to \mathrm{Hom}_{D(n)}(\mathrm{Hom}_{D(n)}(N, D(n)), D(n)),$$

definido por $\Psi_N(m)\phi = \phi(m)$, para $\phi \in \mathrm{Hom}_{D(n)}(N, D(n))$, $m \in N$. $\Psi_F$ resulta ser un isomorfismo para $F$ un $D(n)$-módulo libre de rango finito. Usando nuevamente el hecho de que proyectivo es sumando de libre, para $P$ proyectivo finitamente generado, tenemos

$$\Psi_P : P \to \mathrm{Hom}_{D(n)}(\mathrm{Hom}_{D(n)}(P, D(n)), D(n)) \text{ es un isomorfismo.}$$

Sea $M$ un $D(n)$-módulo finitamente generado. Por 4.8 existe una resolución proyectiva izquierda $P_\circ$ de $M$ que tiene longitud $n$. Esta se ve de la forma

$$0 \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0.$$

Aplicando el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{D(n)}(-, D(n))$, tenemos

$$\text{(12a)} \qquad \mathrm{Hom}_{D(n)}(P_0, D(n)) \xrightarrow{d_1^*} \cdots \xrightarrow{d_n^*} \mathrm{Hom}_{D(n)}(P_n, D(n)) \xrightarrow{\pi} M^* \to 0,$$

donde $M^* = \mathrm{Hom}_{D(n)}(P_n, D(n))/d_n^*(\mathrm{Hom}_{D(n)}(P_{n-1}, D(n))) = \mathrm{Ext}^n_{D(n)}(M, D(n))$. Por 4.7 sabemos que $\mathrm{Ext}^j_{D(n)}(M, D(n)) = 0$, $j \neq n$. Entonces (12a) es una sucesión exacta de $D(n)$-módulos proyectivos derechos, por tanto una resolución proyectiva de $M^*$. Denotamos por $L^\circ = \mathrm{Hom}_{D(n)}(\mathrm{Hom}_{D(n)}(P_\circ, D(n)), D(n))$. Aplicando nuevamente el argumento, vemos que el complejo $L^\circ$ es una resolución proyectiva izquierda de $M^{**}$. Luego $\Psi$ induce un isomorfismo entre $L^\circ$ y $P_\circ$. Por lo tanto $M \cong M^{**}$. $\square$

# 5. Variedad Característica

Esta sección la dedicaremos al estudio de las propiedades geométricas que se le pueden asociar a $D(n)$ a partir de $\mathrm{Gr}D(n)$, para ello consideraremos a $D(n)$ con una filtración dada por el grado del operador diferencial, la cual nos permite visualizar de forma natural la estructura de $K[X_1, \ldots, X_n]$-módulo que tiene todo $D(n)$-módulo. Luego a todo $D(n)$-módulo $M$ le podemos asociar un ideal $I$ que es el aniquilador de $\mathrm{Gr}M$ en $K[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$, para el cual su radical $J(M)$ queda invariante de la filtración de $M$. Así la variedad asociada a $J(M)$ en $K^{2n}$ la llamaremos variedad característica de $M$. Posteriormente analizaremos algunas de las propiedades de esta variedad, entre las que destaca la dimensión, pues resulta que la dimensión de la variedad característica de $M$ coincide con $d(M)$.

Recordemos que todo elemento $a \in D(n)$ tiene una expresión canónica de la forma $a = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} \delta_1^{\beta_1} \cdots \delta_n^{\beta_n}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $a_{\alpha\beta} \in K$. Entonces podemos pensar a los elementos de $D(n)$ como polinomios en $\delta_1, \ldots, \delta_n$, con coeficientes en el anillo de polinomios $K[X_1, \ldots, X_n]$. De esta forma, si $M$ es un $D(n)$-módulo, entonces $M$ también es un $K[X_1, \ldots, X_n]$-módulo. Sabemos que a todo $K[X_1, \ldots, X_n]$-módulo $M$, le podemos asociar una variedad afín $\mathcal{V}(\mathrm{Ann}(M))$, donde $\mathrm{Ann}(M)$ denota el anulador de $M$ en $K[X_1, \ldots, X_n]$.

Pensando en lo anterior, a $D(n)$ lo equiparemos con una filtración $\Gamma D(n)$ que nos permita entender un poco mejor la relación módulo-variedad. Sea $p \in \mathbb{Z}$, definimos

$$\Gamma_p D(n) = \{\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} \delta_1^{\beta_1} \cdots \delta_n^{\beta_n} \mid |\beta| \leq p\},$$

y denotamos por $\Gamma D(n) = (\Gamma_p D(n); p \in \mathbb{Z})$. Observemos que esta filtración satisface:

**$\Gamma$1**. $\Gamma_p D(n) = \{0\}$, para $p < 0$.

**$\Gamma$2**. $\bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \Gamma_p D(n) = D(n)$.

**$\Gamma$3**. $1 \in \Gamma_0 D(n) = K[X_1, \ldots, X_n]$.

**$\Gamma$4**. $\Gamma_p D(n) \cdot \Gamma_q D(n) \subset \Gamma_{p+q} D(n)$, para cualesquiera $p, q \in \mathbb{Z}$.

**$\Gamma$5**. $[\Gamma_p D(n), \Gamma_q D(n)] = \Gamma_p D(n) \cdot \Gamma_q D(n) - \Gamma_q D(n) \cdot \Gamma_p D(n) \subset \Gamma_{p+q-1} D(n)$, para cualesquiera $p, q \in \mathbb{Z}$.

**$\Gamma$6**. $\mathrm{Gr}D(n) = K[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ es un anillo noetheriano.

**$\Gamma$7**. $\mathrm{Gr}_1 D(n) = \sum_{i=1}^n K[X_1, \ldots, X_n]\xi_i$, genera a $K[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ como una $K[X_1, \ldots, X_n]$-álgebra.

Por **$\Gamma$1**$, \ldots,$ **$\Gamma$7**, concluimos que $\Gamma D(n)$ es una buena filtración para $D(n)$.

**Proposición 5.1.** *Sea $M$ un $D(n)$-módulo finitamente generado. Entonces $M$ tiene estructura de $K[X_1, \ldots, X_n]$-módulo y* $\mathrm{supp}(M)$ *es una subvariedad cerrada de $K^n$.*

*Demostración.* Sea $FM$ una buena filtración de $M$ compatible con $\Gamma D(n)$. Recordemos que $\mathrm{supp}(M) = \{x \in K^n \,|M_x \neq 0\}$. El localizar es exacto, de esta forma $(\mathrm{Gr}M)_x = (\oplus_{p\in\mathbb{Z}} F_pM/F_{p-1}M)_x \cong \oplus_{p\in\mathbb{Z}}(F_pM)_x/(F_{p-1}M)_x$. Como $FM$ es una buena filtración de $M$, $M_x = 0$ es equivalente a $(F_pM)_x = 0$, para todo $p \in \mathbb{Z}$. Así, $M_x = 0$ es equivalente a $(\mathrm{Gr}M)_x = 0$.

Sea $I_p$ el anulador del $K[X_1,\ldots,X_n]$-módulo $\mathrm{Gr}_pM$, $p \in \mathbb{Z}$. Cada $F_pM$ es un $\Gamma_0D(n) = K[X_1,\ldots,X_n]$-módulo finitamente generado, entonces $\mathrm{Gr}_pM$ es un $K[X_1,\ldots,X_n]$-módulo finitamente generado. Por 1.15, $\mathrm{supp}(\mathrm{Gr}_pM) = \mathcal{V}(I_p)$. Esto implica que $\mathrm{supp}(M) = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \mathcal{V}(I_p)$. Sean $m_1,\ldots,m_s$ generadores homogéneos de $\mathrm{Gr}M$ como $\mathrm{Gr}D(n)$-módulo. Sea $I$ el aniquilador de $m_1,\ldots,m_s$ en $K[X_1,\ldots,X_n]$, entonces $I \subset \mathrm{Ann}(M)$. Llamemos $S = \{p_i \in \mathbb{Z}|\, m_i \in \mathrm{Gr}_{p_i}M\}$. De esta forma $\bigcap_{p\in S} I_p = I \subset I_q$, para todo $q \in \mathbb{Z}$. Así obtenemos, $\bigcup_{p\in S}\mathcal{V}(I_p) = \mathcal{V}(I) \supset \mathcal{V}(I_q)$, para todo $q \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $\mathrm{supp}(M) = \mathcal{V}(I)$. □

Sea $D$ un anillo con una buena filtración $FD$. Sea $M$ un $D$-módulo finitamente generado y $FM$ una buena filtración para $M$. Entonces $\mathrm{Gr}M$ es un $\mathrm{Gr}D$-módulo finitamente generado. Sea $I$ el aniquilador de $\mathrm{Gr}M$ en $\mathrm{Gr}D$. Ahora veamos que $I$ es un ideal graduado. Consideremos $f \in I$, esta $f$ la podemos expresar de la forma $f = \sum_{i=1}^r f_i$, con $f_i \in \mathrm{Gr}_{p_i}D$. Sea $m = \sum_{j=1}^s m_j \in \mathrm{Gr}M$, con $m_j \in \mathrm{Gr}_{p_j}M$. Si multiplicamos $f$ y $m$, tenemos

$$0 = fm = (\sum_{i=1}^r f_i)(\sum_{j=1}^s m_j) = \sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^s f_im_j.$$

Esto implica que $f_im_j = 0$, para $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$. Así, $f_im = 0$, para $1 \leq i \leq r$, es decir $f_i \in M$, para $1 \leq i \leq r$. Por lo tanto $I$ es un ideal graduado, además $\mathrm{Gr}I = (I \cap \mathrm{Gr}_pD; p \in \mathbb{Z})$ es una graduación de $I$. De igual forma $r(I)$, el radical de $I$, es un ideal graduado. Debemos notar que en general, $I$ depende de la buena filtración de $M$. Para eliminar esta dependencia, tenemos el siguiente resultado.

**Lema 5.2.** *Sea $M$ un $D$-módulo finitamente generado y $FM, F^{'}M$ dos buenas filtraciones de $M$. Sean $I, I^{'}$ los aniquiladores de* $\mathrm{Gr}M$*,* $\mathrm{Gr}^{'}M$ *en* $\mathrm{Gr}D$ *respectivamente. Entonces* $r(I) = r(I^{'})$.

*Demostración.* Sea $T \in r(I) \cap \mathrm{Gr}_pD$. Entonces existe $s \in \mathbb{Z}_+$, tal que $T^s \in I$. Si consideramos $Y \in F_pD$, tal que su clase $Y + F_{p-1}D = T$, tenemos $Y^sF_qM \subset F_{q+sp}M$. Como $T^s \in I$ y $\mathrm{Ann}(\mathrm{Gr}M) = I$, se cumple $Y^sF_qM \subset F_{q+sp-1}M$. Por inducción en $m$, tenemos

$$Y^{ms}F_qM \subset F_{q+msp-m}M,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, $FM$ y $F^{'}M$ son equivalentes. Entonces existe $l \in \mathbb{Z}_+$ tal que $F^{'}_qM \subset F_{q+l}M \subset F^{'}_{q+2l}M$, para todo $q \in \mathbb{Z}$. Así,

$$Y^{ms}F^{'}_qM \subset Y^{ms}F_{q+l}M \subset F_{q+l+msp-m}M \subset F^{'}_{q+2l+msp-m}M,$$

para todo $q \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Si consideramos $m > 2l$, tenemos que

$$Y^{ms}F^{'}_qM \subset F^{'}_{q+2l+msp-m}M \subset F^{'}_{q+msp-1}M,$$

para toda $q \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Esto implica que $T^{ms} \in I^{'}$, es decir $T \in r(I^{'})$. Por lo tanto $r(I) \subset r(I^{'})$. La contención inversa se obtiene intercambiando los papeles de $I$ y $I^{'}$. Así concluimos que $r(I) = r(I^{'})$. □

Entonces el radical del aniquilador de Gr$M$ es independiente de la elección de una buena filtración en $M$. A este ideal que queda invariante de la filtración lo llamamos *ideal característico* de $M$ y lo denotamos por $J(M)$.

Como Gr$D(n) = K[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$, entonces $J(M)$ es un ideal en el anillo de polinomios. Así, podemos definir un conjunto algebraico cerrado

$$\mathcal{C}h(M) = \mathcal{V}(J(M)) \subset K^{2n},$$

que llamaremos la *variedad característica* de $M$. Los siguientes resultados nos hablan un poco sobre las propiedades de $\mathcal{C}h(M)$.

**Lema 5.3.** *La variedad característica $\mathcal{C}h(M)$ de un $D(n)$-módulo finitamente generado $M$ cumple con la siguiente propiedad; si $(x,\xi) \in \mathcal{C}h(M)$, para $x, \xi \in K^n$, entonces $(x, \lambda\xi) \in \mathcal{C}h(M)$, para todo $\lambda \in K^n$.*

*Demostración.* Recordemos que $I = \mathrm{Ann}(\mathrm{Gr}M)$, el aniquilador de Gr$M$ en Gr$D(n)$ es un ideal graduado, con graduación Gr$I = (I \cap \mathrm{Gr}_p D(n); p \in \mathbb{Z})$. Como la filtración que estamos considerando sobre $D(n)$ es el grado como operador diferencial (grado sobre $\delta_i$, $i = 1, \ldots, n$). Entonces $I$ es un ideal homogéneo en las últimas $n$-variables. Como el radical de un ideal homogéneo es homogéneo, tenemos que $r(I) = J(M)$ es un ideal homogéneo en las últimas $n$-variables. Por lo tanto, si $(x,\xi) \in \mathcal{C}h(M)$, entonces $(x, \lambda\xi) \in \mathcal{C}h(M)$, para toda $\lambda \in K$. $\square$

Ahora veamos de qué manera se comporta $\mathcal{C}h$ en una sucesión exacta corta.

**Proposición 5.4.** *Sea*

$$0 \to M^{'} \to M \to M^{''} \to 0$$

*una sucesión exacta corta de $D(n)$-módulos finitamente generados. Entonces*

$$\mathcal{C}h(M) = \mathcal{C}h(M^{'}) \cup \mathcal{C}h(M^{''}).$$

*Demostración.* Sea $FM$ una buena filtración de $M$. Entonces $FM$ induce buenas filtraciones $FM^{'}, FM^{''}$ en $M^{'}, M^{''}$ respectivamente. Además, la sucesión

$$0 \to \mathrm{Gr}M^{'} \to \mathrm{Gr}M \to \mathrm{Gr}M^{''} \to 0,$$

es una sucesión exacta corta de Gr$D(n)$-módulos finitamente generados. Luego,

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Gr}M^{'}) \cdot \mathrm{Ann}(\mathrm{Gr}M^{''}) \subset \mathrm{Ann}(\mathrm{Gr}M) \subset \mathrm{Ann}(\mathrm{Gr}M^{'}) \cap \mathrm{Ann}(\mathrm{Gr}M^{''}).$$

Como el radical satisface la propiedad $r(I \cdot J) = r(I \cap J) = r(I) \cap r(J)$, entonces

$$J(M^{'}) \cap J(M^{''}) \subset J(M) \subset J(M^{'}) \cap J(M^{''}).$$

Por lo tanto $\mathcal{C}h(M) = \mathcal{C}h(M^{'}) \cup \mathcal{C}h(M^{''})$. $\square$

Es de natural interés saber que dimensión tiene la variedad característica, para ello el siguiente resultado.

**Teorema 5.5.** *Sea $M$ un $D(n)$-módulo finitamente generado. Entonces*

$$\dim \mathcal{C}h(M) = d(M).$$

*Demostración.* Por la parte (1) del teorema 1.17 sabemos que

$$\dim \mathcal{V}(\mathrm{Ann}(\mathrm{Gr}M)) = d(\mathrm{Gr}M).$$

Al final de la sección 1 probamos que $d(\mathrm{Gr}M) = d(M)$. Por lo tanto

$$\dim \mathcal{C}h(M) = d(M).$$

□

Por la desigualdad de Bernstein y el teorema anterior, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 5.6.** *Si $M$ es un $D(n)$-módulo finitamente generado. Entonces $\mathcal{C}h(M) \geq n$*

Sea $\pi : K^{2n} \to K^n$ la función proyección dada por $\pi(x, \xi) = x$, para cualesquiera $x, \xi \in K^n$.

**Proposición 5.7.** *Sea $M$ un $D(n)$-módulo finitamente generado. Entonces $\mathrm{supp}(M) = \pi(\mathcal{C}h(M))$. Estamos pensando $\mathrm{supp}(M)$ en $K^n$, es decir $\mathrm{supp}(M) = \{x \in K^n | \, M_x \neq 0\}$.*

*Demostración.* Como $M$ es finitamente generado, entonces $M$ tiene una buena filtración $FM$, de tal forma que $\mathrm{Gr}M$ es un $\mathrm{Gr}D$-módulo finitamente generado. Sean $m_1, \ldots, m_s$ un conjunto de generadores homogéneos de $\mathrm{Gr}M$. Como en la prueba de 5.1, el aniquilador $I$ de $m_1, \ldots, m_s$ en $K[X_1, \ldots, X_n]$, cumple que $\mathrm{supp}(M) = \mathcal{V}(I)$. Por otro lado, si $J$ es el aniquilador de $m_1, \ldots, m_s$ en $K[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$, éste es un ideal homogéneo en $\xi_1, \ldots, \xi_n$, que además satisface $I = K[X_1, \ldots, X_n] \cap J$, $\mathcal{V}(J) = \mathcal{C}h(M)$. Entonces es equivalente tener $x \in \mathcal{V}(I)$ a tener $(x, 0) \in \mathcal{V}(J)$, lo cual se cumple porque $J$ es un ideal homogéneo en las últimas $n$-variables. Por lo tanto $\pi(\mathcal{C}h(M)) = \mathrm{supp}(M)$. □

Consideremos $M$ un $D(n)$-módulo finitamente generado. Definimos el *soporte singular* de $M$ como

$$\mathrm{supp\,sing}(M) = \{x \in K^n | \, (x, \xi) \in \mathcal{C}h(M), \text{para algún } \xi \neq 0\}$$

Es claro que $\mathrm{supp\,sing}(M) \subset \mathrm{supp}(M)$.

Una variedad $U$ es *completa* siempre que la proyección $U \times V \to V$ sea una función cerrada, para $V$ otra variedad cualquiera. Estamos considerando la topología de Zariski en $U \times V$. Las variedades proyectivas resultan ser completas. Esta afirmación nos será de utilidad en la siguiente proposición.

**Proposición 5.8.** *Sea $M$ un $D(n)$-módulo finitamente generado. Entonces $\mathrm{supp\,sing}(M)$ es una subvariedad cerrada de $\mathrm{supp}(M)$.*

*Demostración.* Sea $p : K^n - \{0\} \to \mathbb{P}^{n-1}(K)$ la proyección natural. Entonces

$$1 \times p : K^n \times (K^n - \{0\}) \to K^n \times \mathbb{P}^{n-1}(K)$$

proyecta $\mathcal{C}h(M) - (K^n - \{0\})$ sobre la subvariedad cerrada que corresponde al ideal $J(M)$ en $K^n \times \mathbb{P}^{n-1}(K)$, es decir, $\mathrm{Im}(1 \times p) = \mathcal{V}(J(M))$ en $K^n \times \mathbb{P}^{n-1}(K)$. La proyección de $\mathcal{V}(J(M)) \subset K^n \times \mathbb{P}^{n-1}(K)$ al primer factor es justamente el $\operatorname{supp}\operatorname{sing}(M)$. Como $\mathbb{P}^n(K)$ es una variedad completa, esto implica que la proyección $K^n \times \mathbb{P}^{n-1}(K) \to K^n$ es una función cerrada. Así tenemos que $\operatorname{supp}\operatorname{sing}(M)$ es una subvariedad cerrada de $\operatorname{supp}(M)$. $\square$

En el caso en el que $M$ sea un $D(n)$-módulo holonómico se puede decir un poco más.

**Corolario 5.9.** *Sea $M$ un $D(n)$-módulo holonómico. Entonces* $\dim \operatorname{supp}\operatorname{sing}(M) \leq n-1$.

*Demostración.* Para $M = 0$, el resultado es trivial. Supongamos que $M \neq 0$ holonómico. Por 5.5 $J(M)$ define una variedad de dimensión $n$ en $K^{2n}$. Como $J(M)$ es homogéneo en las últimas $n$-variables, entonces $J(M)$ en $K^n \times \mathbb{P}^{n-1}(K)$ define una variedad de dimensión a lo más $n-1$. Así, la proyección de $\mathcal{V}(J(M)) \subset K^n \times \mathbb{P}^{n-1}(K)$ en $K^n$ es una variedad de dimensión a lo más $n-1$. $\square$

# Referencias


[Atiyah-Macdonald] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to Commutatie Algebra.* Addison-Wesley. 1969.

[Bernstein-Lunts] J. Bernstein, V. Lunts. On Non-Holonimic Irreducible D-modules, *Inventiones Mathematicae*, 94, 223-285. 1988.

[Björk] J. E. Björk, *Rings of Differential Operators.* North-Holland. 1979.

[Cannas da Silva] Ana Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry.* Lecture Notes in Mathematics 1764, Springer-Verlang. 2001.

[Coutinho] S. C. Coutinho, *A Primer of Algebraic D-modules.* Cambridge University Press. 1995.

[Dixmier] Jacques Dixmier, *Enveloping Algebras.* Graduate Studies in Matematics Vol. 11, American Mathematical Society. 1996.

[Hartshorne] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlang. 1977.

[Hatcher] Allen Hatcher, *Spectral Sequence.* Prepint. Cornell University. 2004.

[Krause-Lenagan] Gunter R. Krause, Thomas H. Lenagan, *Growth of Algebras and Gelfand-Kirillov Dimension.* Graduate Studies in Mathematics Vol. 22, American Mathematical Society. 1999.

[Lam] T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings.* Graduate Texts in Matematics 131, Springer-Verlang. 2001.

[Malgrange] Bernard Malgrange, *Écuations Différentielles à Coefficients Polynomiaux.* Birkhäuser. 1991.

[Matzumura] Hideyuki Matzumura, *Commutative Ring Theory.* Cambridge University Press. 1986.

[McConnell-Robson] J. C. McConnell, J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings.* Graduate Studies in Mathematics Vol. 30, American Mathematical Society. 2000.

[Miličić] Dagan Miličić, Lectures on Algebraic Theory of $D$-Modules. University of Utah. 1986.

[Milne] J. S. Milne, *Algebraic Geometry.* Preprint. University of Michigan. 2008.

[Mitchell] Barry Mitchell, *Theory of Categories.* Academic Press. 1965.

[Năstăsescu-Van Oystaeyen] C. Năstăsescu, F. Van Oystaeyen, *Graded and Filtered Rings and Modules.* Lectures Notes in Mathematics 758, Springer-Verlang. 1979.

[Rotman] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*. Academic Press. San Diego, California, 1979.

[Rowen] Louis Halle Rowen, *Graduate Algebras: Commutative View*. Graduate Studies in Matematics Vol. 73, American Mathematical Society. 2006.

[Stafford] J. T. Stafford, Non-holonomic Modules Over Weyl Algebras and Enveloping Algebras. *Inventiones Mathematicae*, 79, 619-638.

[Tesis] J. Mondragón S., Tesis Para Obtener el Título de Lic. en Matemáticas, *Álgebras de Weyl y su Grupo de Automorfismos*. Universidad Autónoma del Estado de México. 2007.

[Weibel] Charles A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge University Press. New York, 1994.