UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS CUASIHOMOGÉNEOS DE SL(2,$\mathbb{C}$)

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRA EN CIENCIAS

P R E S E N T A

MAYRA MÉNDEZ CARRERA

DIRECTOR DE TESIS: DR. ADOLFO GUILLOT SANTIAGO

MÉXICO, D.F. AGOSTO,2009

Agradezco a Adolfo Guillot por hacer matemáticas tan bellas, sus ideas me han maravillado, por la dedicación y la paciencia que me ha tenido, por su interés en que yo entienda más allá de lo estudiado en esta tesis y en que aprenda a desarrollar matemáticas, por estar siempre disponible para cualquier duda y encontrar las palabras adecuadas para transmitirme sus ideas, por haber revisado a fondo esta tesis y haberme señalado todo tipo de errores de los que yo no me percaté, por aceptar que este sea sólo el principio.

La claridad de las ideas de José Seade hacen que las matemáticas sean más sencillas de lo que parecen; le agradezco por estar siempre presente, por hacer que me diera cuenta de errores con sólo una pregunta, por ampliar mi panorama, por platicar de matemáticas conmigo, por su tiempo y dedicación a lo largo de este proceso y por hacer que fuera posible la realización de esta tesis por medio de su apoyo y de su proyecto; sus sugerencias y correcciones revistieron esta tesis de buen gusto.

Alberto Verjovsky, siempre encuentra una forma divertida de ver las matemáticas; le doy las gracias Alberto por llenarme de energía cada vez que lo veo, por su interés en que yo aprenda matemáticas, por conectárme esta tesis con muchas otras áreas y el trabajo de algunos de sus estudiantes, por ser tan accesible, por permitirme hacerle preguntas y siempre hacerme reír con sus respuestas: hiperbólico por dentro y proyectivo por fuera.

Con Antonio Lascurain estoy muy agradecida por el interés y el tiempo que le dedicó a la lectura, revisión y corrección de esta tesis.

Quiero agradecer a Santiago López de Medrano por su disponibilidad y por haber aceptado ser sinodal de esta tesis.

Agradezco a CONACYT por haberme otorgado una beca para realizar esta tesis, la cual fue financiada a través del Proyecto de Ciencia Básica 55084 DINÁMICA Y GEOMETRÍA COMPLEJA, del cual José Antonio Seade Kuri es responsable.

Le doy las gracias a Javier Méndez por ayudarme a hacer los dibujos en 3 dimensiones. A Tere Carrera, mi madre, a Javier Méndez, mi esposo, a Raquel Carrera mi tía, Ángel Carrera, mi abuelo, a León Méndez, mi hermano y a toda mi familia, les quiero decir que son lo más importante en mi vida, los adoro, les dedico este trabajo; les quiero dar las gracias por su apoyo incondicional y pedirles perdón por mi obsesión con las matemáticas y por no compartir más tiempo con ustedes. A todos mis amigos les quiero dar las gracias por ayudarme, apoyarme y hacerme la vida más divertida de lo que ya es.

A todos los investigadores del instituto de matemáticas de la unidad Cuernavaca les doy las gracias por formar un gran equipo, son una verdadera inspiración para nosotros los estudiantes y un ejemplo a seguir; la calidad de sus cursos, seminarios, coloquios, escuelas y congresos es de primer nivel, nos motiva a superarnos y es en gran parte el origen de nuestras ideas. Gracias por tener siempre la puerta abierta para que nosotros los estudiantes los consultemos e interesarse en ayudarnos.

A Margareta Boege y a Gabriela Hinojosa les agradezco ayudarme a estudiar la sección 5 de esta tesis, sin su ayuda probablemente seguiría confundida.

Quiero agradecer a la coordinación del posgrado en ciencias matemáticas de la UNAM por su eficiencia en su trabajo y por ayudarnos a todos los estudiantes con los trámites del posgrado, en especial agradezco a Laura Herrera y a Socorro Audiffred.

.

Índice

1. Resumen

En esta tesis estudiamos la construcción de Guillot en [6, pág. 277] de una variedad Z_Γ que compactifica a la variedad $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$ de dimensión compleja 3 y de una acción de $SL(2,\mathbb{C})$ en Z_Γ que extiende a la acción de multiplicación a la derecha de $SL(2,\mathbb{C})$ en $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$, donde $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ es un subgrupo discreto y sin torsión. Bajo estas condiciones decimos que Z_Γ es una *compactificación equivariante* de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$. Como la acción de Γ en $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$ es transitiva, entonces la acción de $SL(2,\mathbb{C})$ en Z_Γ identifica a la variedad $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$ con una órbita, esto es, tiene una órbita de la misma dimensión de Z_Γ, decimos entonces que Z_Γ es un *espacio cuasihomogéneo* de $SL(2,\mathbb{C})$.

El estudio de estos espacios es interesante ya que, como Guillot prueba en [6, pág. 255], si $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ es un grupo kleiniano no elemental y libre de torsión y si M es cualquier variedad que es una compactificación equivariante de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$, entonces existe una función continua y $SL(2,\mathbb{C})$-equivariante de M sobre Z_Γ; por lo que en este sentido la compactificación equivariante Z_Γ de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$ es la más pequeña de todas las compactificaciones equivariantes de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$.

En la segunda sección estudiamos condiciones suficientes para que el espacio de órbitas de una acción de un grupo de biholomorfismos sobre una variedad diferenciable compleja sea una variedad diferenciable compleja de dimensión igual a la de la variedad original, como ejemplo veremos la acción en un grupo de Lie G de un subgrupo discreto $\Gamma \subset G$ inducida por la multiplicación del grupo; veremos que de manera natural G actúa por la derecha en $\Gamma\backslash G$ mediante la acción inducida por la multiplicación del grupo.

En la sección 3 estudiamos la estructura de variedad diferenciable real de $SL(2,\mathbb{C})$ y encontramos algunas relaciones entre las acciones de un subgrupo $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ en $\mathbb{CP}^1, \mathbb{H}^3, \mathbb{CP}^1 \cup \mathbb{H}^3$ y $SL(2,\mathbb{C})$. Definimos el dominio de discontinuidad, a un grupo kleiniano y al conjunto límite.

En la sección 4 encajamos a $SL(2,\mathbb{C})$ en una cuádrica K de $\mathbb{CP}^4$ y definimos acciones derecha e izquierda de $SL(2,\mathbb{C})$ en K que extienden a la multiplicación por la derecha y por la izquierda en $SL(2,\mathbb{C})$, esto es, K es una compactificación biequivariante de $SL(2,\mathbb{C})$ y encontramos para cada grupo kleiniano $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ libre de torsión, un abierto $U_\Gamma \subset K$, invariante bajo la acción izquierda de Γ, tal que Γ actúa satisfaciendo las condiciones estudiadas en la sección 2 y el cociente $Z_\Gamma = \Gamma\backslash U_\Gamma$ es una variedad diferenciable de dimensión 3 compleja que contiene a la variedad $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$ como subespacio denso. Mostramos que $SL(2,\mathbb{C})$ actúa en Z_Γ extendiendo la acción de $SL(2,\mathbb{C})$ en $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$; bajo estas condiciones decimos que Z_Γ es una extensión equivariante de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$.

En la sección 5 encontramos condiciones suficientes en las acciones de Γ en $\mathbb{H}^3$ y en $\mathbb{CP}^1$ para que la extensión Z_Γ equivariante de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$, sea una compactificación equivariante de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$, para ello estudiamos la compactificación por puntas de

variedades diferenciables.

Finalmente en la sección 6 damos ejemplos en los que utilizando las condiciones encontradas en la sección 5, Z_Γ es compacta: el grupo generado por una transformación hiperbólica, cierto grupo fuchsiano y un grupo de Schottky.

2. Variedades Cociente

En esta sección estudiaremos condiciones que nos garantizan una estructura de variedad diferenciable compleja en el espacio de órbitas de una acción de un grupo de biholomorfismos sobre una variedad diferenciable compleja tal que el espacio de órbitas tenga la misma dimensión que la variedad original.

Como ejemplo estudiaremos la acción en un grupo de Lie de un subgrupo discreto inducida por la multiplicación del grupo; veremos que de manera natural el grupo actúa en el espacio de órbitas. De hecho, el objetivo principal de esta tesis es estudiar la construcción de Guillot en [6, pág. 277] de una compactificación de este espacio de oŕbitas (para $SL(2,\mathbb{C})$ y ciertos subgrupos discretos) y una extensión de la acción del grupo en él, esto es, estudiar espacios cuasihomogéneos de $SL(2,\mathbb{C})$ que sean compactos.

Durante toda esta sección, sea M una variedad diferenciable compleja de dimensión k, G un grupo de biholomorfismos de M, donde e es el biholomorfismo identidad. De manera natural G actúa por la izquierda en M mediante la acción $\phi : G \times M \to M,\ \phi(g,x) := g(x)$.

Las definiciones y resultados de las dos primeras subsecciones tienen su versión $\mathbb{R}$-diferenciable o simplemente topológica, esto es, existen resultados similares para el caso en el que sólo estemos interesados en la estructura $\mathbb{R}$-diferenciable o puramente topológica y no en la $\mathbb{C}$-diferenciable. También existen generalizaciones, por ejemplo por Lee en [8, pág. 153].

2.1. Condiciones para definir una estructura de variedad

Siguiendo a Thurston en [10, pág. 154], decimos que G actúa de manera *propiamente discontinua* en M si para todo $K \subset M$ compacto se tiene que para todo $g \in G$, excepto quizá para un número finito, $K \cap gK = \emptyset$. La definición anterior no es estándar, por ejemplo Beardon en [11, pág. 94], bajo las mismas condiciones dice que G actúa de manera discontinua en M.
Decimos que G es *libre de torsión* si no tiene elementos de orden finito. Decimos que G actúa de manera *libre* en M si para todo $x \in M$, el *estabilizador* $St(x) := \{g \in G : gx = x\} = \{e\}$.

Si G es libre de torsión y actúa de manera propiamente discontinua en M, entonces G actúa de manera libre en M, ya que si $x \in M,\ g \in St(x),\ g \neq e$, entonces como G es libre de torsión, $\{g^n\} \subset G$ es una sucesión de elementos distintos, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $g^n(x) = x$; pero si esto sucede, como los puntos son compactos, se contradice el hecho de que G actúa de manera propiamente discontinua en M.

Consideremos en M la relación de equivalencia $\sim$ definida de la siguiente manera: $x, y \in M,\ x \sim y$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $g(x) = y$; denotaremos por

$x \nsim y$ a dos elementos $x, y \in M$ que no están relacionados. Definimos el *espacio de órbitas* $G\backslash M$ como el conjunto de clases de equivalencia determinadas por $\sim$, esto es, $G\backslash M := \{[x] : x \in M\}$.

Durante ésta y la siguiente subsección supondremos que G actúa de manera libre en M.

Proposición 1 *Si G actúa de manera libre en M. Son equivalentes:*
1. *G actúa de manera propiamente discontinua en M.*
2. *Se tienen las siguientes dos condiciones:*
a) Para todo $x \in M$ existe $U \subset M$ abierto tal que $x \in U$ y para todo $g \in G$, $g \neq e$, tenemos que $U \cap gU = \emptyset$.
b) Para todos $x, y \in M$ en distintas G-órbitas existen abiertos $U, V \subset M$ que contienen a x y a y, respectivamente, tales que para todo $g \in G$ se tiene que $U \cap gV = \emptyset$.

Demostración:
$\Rightarrow$) Supongamos que G actúa de manera propiamente discontinua en M. Sea $x \in M$, como M es localmente compacto, existe $K \subset M$ compacto y $U \subset M$ abierto tal que $x \in U \subset K$, entonces como G actúa de manera propiamente discontinua en M, U interseca a lo más a un número finito de sus G-trasladados. Sean $g_1, g_2, \ldots, g_k \in G$ los únicos elementos de G, distintos de e, tales que para todo $j = 1, \ldots, k$, $U \cap g_jU \neq \emptyset$; como G actúa de manera libre en M y M es Hausdorff, para todo $j = 1, \ldots, k$, $g_jx \neq x$ y existen V_j, W_j abiertos ajenos que contienen a x y a g_jx, respectivamente, por lo que $U_j := V_j \cap g_j^{-1}W$ es un abierto que contiene a x tal que $U_j \cap g_jU_j = \emptyset$. Entonces $V := U \cap \cap_{j=1}^{k} U_i$ es un abierto que contiene a x tal que para todo $g \in G$, $g \neq e$, $\quad V \cap gV = \emptyset$; por lo que se satisface a).

Sean $x, y \in M$ dos puntos no relacionados; como M es localmente compacto y Hausdorff, existen abiertos ajenos U_1, U_2 que contienen a x y a y, respectivamente y un compacto $K \subset M$ tal que $U_1 \cup U_2 \subset K$, entonces para todo $g \in G$, excepto para un número finito, $U_2 \cap gU_1 \neq \emptyset$. Sean $g_1, \ldots, g_k \in G$ los únicos elementos no triviales de G tales que para todo $j = 1, \ldots, k$, $U_2 \cap g_jU_1 \neq \emptyset$; para cada $j = 1, \ldots, k$, sean $U_{1,j}, U_{2,j}$ abiertos ajenos de M tal que $g_jx \in U_{1,j}, y \in U_{2,j}$ (los cuales existen ya que M es Hausdorff y $x \nsim y$). Entonces $\widehat{U}_1 := U_1 \cap \cap_{j=1}^{k} g_j^{-1} U_{1,j}$ y $\widehat{U}_2 := U_2 \cap \cap_{j=1}^{k} U_{2,j}$ son abiertos de K que contienen a x y a y respectivamente, tales que $\widehat{U}_2$ no interseca a ningún trasladado de $\widehat{U}_1$; por lo que se cumple b).

$\Leftarrow$) Supongamos que se satisfacen los incisos a) y b) y que existe un compacto $K \subset M$ que lo intersecan un número infinito de sus G-trasladados; por lo que existe una sucesión $\{g_n\} \subset G$ de elementos distintos de G tales que $g_nx_n \in K \cap g_nK$ y por compacidad existen subsucesiones de $\{x_n\}$ y de $\{g_nx_n\}$ convergentes, supongamos $x_n \to x \in K$ y $g_nx_n \to y \in K$. Entonces $x \sim y$ o $x \nsim y$:

Si existe $g \in G$ tal que $y = gx$, entonces $x_n \to x$ y $g_nx_n \to gx$, por lo que por continuidad de ϕ y porque es una acción, $x_n \to x$ y $g^{-1}g_nx_n \to x$; sea U un abierto que contiene a x con la propiedad a), entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, $x_n \in U$, $g^{-1}g_nx_n \in U$, por lo que $g^{-1}g_nx_n \in U \cap g^{-1}g_nU$, en contradicción a como escogimos a U.

Si x y y no están en la misma G-órbita, sean $U, V \subset M$ abiertos ajenos con la propiedad b) que contienen a x y a y, respectivamente, como $x_n \to x$ y $g_n x_n \to y$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq \mathbb{N}$, $x_n \in U$, $g_n x_n \in V$, por lo que $g_n x_n \in V \cap g_n U$, en contradicción con b). Por lo que para todo compacto $K \subset M$, K no interseca a ninguno de sus G-trasladados. $\square$

Maskit en [2, pág. 15] dice que la acción ϕ es *libre y discontinua* si se satisface la condición 2, inciso a), de la Proposición anterior.
Si $x \in M$ y $U \subset M$ es un abierto que contiene a x con la propiedad a) de la Proposición anterior, decimos que U es un *buen abierto* para x; claramente para todo $g, h \in G$, $g \neq h$, $hU \cap gU = \emptyset$. Tenemos también que para todo $x \in M$ y $\{g_n\} \subset G$ sucesión de elementos distintos, $\{g_n x\}$ no converge en M, ya que si existe $y \in M$ tal que $g_n x \to y$, entonces existe $N > 0$ tal que para todo $n, k \geq N$, $g_k x \in U \cap g_k g_n^{-1} U$, contradiciendo nuestra elección de U.

En la siguiente subsección veremos que si G actúa de manera propiamente discontinua en M, entonces el espacio de órbitas es una variedad diferenciable compleja de dimensión igual a la de M; el inciso a) de la Proposición anterior nos permitirá definir las cartas coordenadas y el inciso b) lo utilizaremos para probar la condición de que el espacio sea Hausdorff.

Notemos que hasta ahora no hemos utilizado la estructura diferenciable de M.

En ciertas ocasiones, la condición de que G actúe de manera propiamente discontinua en M es equivalente a la condición a) de la Proposición anterior, daremos dos ejemplos donde esto sucede:

1) Si M admite una métrica riemanniana que hace que G actúe por isometrías, esto es, tal que para todo $g \in G$, $\phi_g : M \to M$, $\phi_g(x) := \phi(g, x)$ es una isometría; esto ya que si se satisface a), $x \nsim y$ y si para cualesquiera dos abiertos U y V de x y y, respectivamente, existe un G-trasladado de V que interseca a U, entonces podemos construir una sucesión $\{g_n\} \subset G$ de elementos distintos tales que $g_n y \to x$, contradiciendo a).

2) Si consideramos la acción por la izquierda de un subgrupo Γ de transformaciones de Möbius en un abierto $\Omega \subset \mathbb{CP}^1$ invariante bajo la acción del subgrupo. En [2, pág. 16], Maskit justifica este hecho recordando que las transformaciones de Möbius mandan círculos en círculos y que si $U \subset \Omega$ es una bola abierta con la propiedad a) y $\{g_n\} \subset PSL(2, \mathbb{C})$ cualquier sucesión de elementos distintos, como $\{g_n U\}$ son todos ajenos, entonces $\sum_n \text{Área}(g_n U) < \text{Área}(\mathbb{S}^2)$, por lo que $\text{lím}_{n\to\infty} \text{Área}(g_n U) = 0$; entonces si no se satisface b), podemos encontrar $x, y \in M$, $x \nsim y$ y una sucesión $\{g_n\} \subset PSL(2, \mathbb{C})$ de elementos distintos tal que $g_n y \to x$, contradiciendo a).

Sin embargo en general lo anterior no es cierto y el siguiente ejemplo nos ilustra esta situación.

Ejemplo. Consideremos en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ la acción del grupo de difeomorfismos $G = \{(x, y) \mapsto (2^n x, 2^{-n} y) : n \in \mathbb{Z}\}$. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, si $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $U \subset \mathbb{R}^2 - \{0\}$ es por ejemplo el rectángulo abierto con centro en (x, y), lado horizontal $|x|/8$ y lado vertical $|y|/8$, o si $x = 0$ y U es por ejemplo el cuadrado de centro $(0, y)$ y lado $|y|/8$, entonces para todo $g \in G$ distinto de la identidad, $U \cap gU = \emptyset$; el caso $y = 0$ es análogo; entonces se satisface la condición $a)$ de la Proposición anterior. Sin embargo si $(x, 0), (0, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, para cualesquiera dos abiertos ajenos U y V que contengan a $(x, 0), (0, y)$, respectivamente, existen iterados por la acción del grupo que van acercándose al origen y U se alarga horizontalmente y V verticalmente tanto como queramos, por lo que no se satisface la condición $b)$ de la Proposición anterior.

Proposición 2 *Si G actúa de manera libre y propiamente discontinua en $M \neq \emptyset$, entonces G es a lo más numerable; si M es compacto, G es finito.*

Demostración:
Supongamos que G actúa de manera libre y propiamente discontinua en $M \neq \emptyset$. Para toda $x \in K$, $\rho : G \to Gx$, $\rho(g) := gx$, es claramente sobreyectiva; si $g, h \in G$ tal que $gx = hx$, entonces $g^{-1}h \in St(x) = \{e\}$, esto es, $g = h$ y ρ es inyectiva; por lo que G está en correspondencia biyectiva con Gx. Como G actúa de manera libre, propia y discontinua en M, existe un buen abierto U que contiene a x tal que para todo $g \in G$, $g \neq e$, $U \cap gU = \emptyset$, por lo que Gx es un subespacio discreto de M y como un subespacio discreto de un espacio segundo numerable es a lo más numerable, entonces Gx, y por tanto G, es a lo más numerable.

Supongamos $G = \{g_1, \ldots, g_n, \ldots\}$, donde todos los g_i son distintos, supongamos que M es compacta; si G es infinito entonces $Gx = \{x, g_1x, g_2x, \ldots, g_nx, \ldots\}$ es infinito y todos los elementos de la sucesión son distintos elementos de un compacto, por lo que existe $y \in M$ y una subsucesión $\{g_{n_j}x\}$, tal que $\lim_{j\to\infty} g_{n_j}x = y$ y se contradice el inciso $a)$ de la Proposición anterior; por lo que G es finito. $\square$

2.2. El espacio de órbitas es una variedad

Consideramos en el espacio de órbitas $G\backslash M$ la topología cociente. Durante toda esta subsección supondremos que G actúa de manera libre y propiamente discontinua en M y que $\pi : M \to G\backslash M$ es la proyección usual definida por $\pi(x) := [x]$.

Proposición 3 *Si G actúa de manera libre y propiamente discontinua en M, entonces $G\backslash M$ admite una estructura de variedad diferenciable compleja que hace que la proyección sea un cubriente y un biholomorfismo local entre variedades complejas.*

Demostración

Por la Proposición 2, G es a lo más numerable. Sea $G = \{g_1, \ldots, g_n, \ldots\}$ y sea $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m, \ldots, \}$ una base numerable de M tal que para toda $m \in \mathbb{N}$, B_m es un buen abierto; si $\widehat{B_m} := \sqcup_n g_n B_m / \sim$, entonces $\widehat{\mathcal{B}} = \{\widehat{B_1}, \ldots, \widehat{B_m}, \ldots, \}$ es una base numerable de $G\backslash M$.

Mostraremos ahora que $G\backslash M$ es Hausdorff; si $[x], [y] \in G\backslash M$, $[x] \neq [y]$, entonces por la Proposición 1 existen $U, V \subset M$ abiertos que contienen a x y a y respectivamente, tales que para todo $h, g \in G$, $h \neq g$, $gU \cap hV = \emptyset$; entonces $\widehat{U} := \sqcup_n g_n U / \sim$, $\widehat{V} := \sqcup_n g_n V / \sim$ son abiertos ajenos de $G\backslash M$ que contienen a $[x]$ y a $[y]$, respectivamente.

Definamos $\mathcal{B} := \{(V, \phi_V)\}$ atlas de $G\backslash M$ de la siguiente manera: Sea $\mathcal{A} := \{(U, \phi_U)\}$ atlas de M, podemos suponer que $\mathcal{A}$ es tal que para toda $U \in \mathcal{A}$, U es un buen abierto; si $\mathcal{A}$ no cumpliera con esto, consideramos el atlas obtenido al intersecar los abiertos de $\mathcal{A}$ con abiertos que satisfagan esta condición y las restricciones de las cartas a estos abiertos. Para cada $(U, \phi_U) \in \mathcal{A}$, sea $V := \sqcup_{n\in\mathbb{N}}\, g_n U/\sim$. Claramente para toda $n \in \mathbb{N}$, $\pi|_{g_nU} : g_nU \to V$ es homeomorfismo y por tanto, $\pi : M \to G\backslash M$ es un cubriente. Entonces $\phi_V := \phi_U \circ \pi|_U^{-1}$ es un homeomorfismo.

Para ver que los cambios de coordenadas son biholomorfos, basta notar que si (V_2, ϕ_{V_2}) es otra carta de $G\backslash M$, correspondiente a la carta (U_2, ϕ_{U_2}) de M, que interseca a (V, ϕ), entonces hay dos posibilidades:

La primera es que $U \cap U_2 \neq \emptyset$, en cuyo caso $\phi_V \circ \phi_{V_2}^{-1} = \phi_U \circ \phi_{U_2}^{-1}$ es biholomorfo (ya que M es variedad diferenciable compleja y $\phi_U \circ \phi_{U_2}^{-1}$ es un cambio de coordenadas).

La otra posibilidad es que $U \cap U_2 = \emptyset$; entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g_kU \cap U_2 \neq \emptyset$ y $\phi_V \circ \phi_{V_2}^{-1} = \phi_U \circ g_k^{-1} \circ \phi_{U_2}^{-1}$ es biholomorfa, ya que G es un grupo de biholomorfismos de M.

Por último, $\pi : M \to G\backslash M$ es un biholomorfismo local, ya que si $(U, \phi_{|U}) \in \mathcal{A}$ y $(V, \phi_{|V})$ es la carta en $G\backslash M$ correspondiente, entonces $\phi_V \circ \pi \circ \phi_U^{-1} = \phi_U^{-1} \circ \phi_U = I$ es biholomorfa. $\square$

Si la variedad M tiene frontera, bajo las mismas hipótesis de Proposición anterior, la demostración anterior nos dice que $G\backslash M$ es una variedad de dimensión igual a la de M con frontera $G\backslash \delta M$.

2.3. El Ejemplo

En esta subsección daremos el ejemplo mencionado al principio de esta sección. Consideremos como variedad diferenciable compleja a un grupo de Lie complejo G de dimensión k, esto es, un grupo que sea también una variedad diferenciable tal que la función producto y la función inversa sean diferenciables; consideremos la acción suave por la izquierda inducida por la multiplicación a la izquierda de un subgrupo de Lie $\Gamma \subset G$, $\phi : \Gamma \times G \to G$, $\phi(\gamma, g) := \gamma \cdot g$. Claramente como Γ es un subgrupo de G, Γ actúa de manera libre en G.

Sabemos que en G siempre podemos definir una métrica riemanniana invariante bajo multiplicación a la izquierda por cualquier elemento del grupo, denotémosla por d, por lo que Γ actúa por isometrías en G y por lo comentado en la subsección anterior, la condición de que Γ actúe de manera propiamente discontinua en G es equivalente a la condición $a)$ de la Proposición 1.

Proposición 4 *$\Gamma \subset G$ es un subgrupo discreto si y sólo si Γ actúa de manera propiamente discontinua en G.*

Demostración:
$\Rightarrow$) Sea $g \in G$, $r := 1/4 \cdot \inf_{\gamma\in\Gamma,\gamma\neq e}\{d(g, \gamma g)\}$, si $r = 0$ existiría una sucesión $\{g_n\} \subset \Gamma$ de elementos distintos tales que $g_n g \to g$ y por continuidad de la acción ϕ tendríamos

que $g_n \to e$, contradiciendo que Γ es discreto, por lo que $r > 0$; además la bola de centro g y radio r no interseca a ninguno de sus Γ-trasladados; por lo que se cumple la condición a).

$\Leftarrow$) Si $e \in G$ entonces existe $U \subset G$ tal que $e \in U$ y para todo $g, h \in \Gamma$, $g \neq h$, $gU \cap hU = \emptyset$, en particular, para todo $g \in \Gamma$, $gU \cap \Gamma = \{g\}$, esto es Γ es discreto. $\square$

Entonces por la Proposición 3, si $\Gamma \subset G$ es discreto, $\Gamma \backslash G$ admite una estructura de variedad diferenciable compleja que hace que la proyección $\pi : G \to \Gamma \backslash G$, $\pi(x) := [x]$ sea un cubriente y un biholomorfismo local entre variedades complejas. En lo que resta de esta subsección supondremos que este es el caso.

Afirmamos que G actúa por la derecha en $\Gamma \backslash G$ de manera suave y transitiva mediante

$$\lambda : \Gamma \backslash G \times G \to \Gamma \backslash G, \ \lambda([h], g) := [hg]. \tag{1}$$

donde $h, g \in G$. Para convencernos de esto notemos que λ está bien definida, ya que si $\widehat{h} \in G$, $\widehat{h}h^{-1} \in \Gamma$ si y sólo si $\widehat{h}gg^{-1}h^{-1} \in \Gamma$; es acción ya que $\lambda([h], e) = [h]$ y si $\widehat{g} \in G$, $\lambda(\lambda([h], g), \widehat{g}) = \lambda([hg], \widehat{g}) = [hg\widehat{g}] = \lambda([h], g\widehat{g})$; es holomorfa ya en cartas es el producto del grupo de Lie G; si $[h], [s] \in \Gamma / G$ entonces $\lambda([h], h^{-1}s) = [s]$. Por lo que $\Gamma \setminus G$ es un espacio homogéneo de G, esto es, λ es transitiva.

Como mencionamos al principio de esta sección estamos interesados en estudiar la construcción de Guillot en [6, pág. 277] de una variedad Z_Γ que contenga a la variedad $\Gamma \backslash SL(2, \mathbb{C})$ como subespacio denso y una acción $\widehat{\lambda}$ de G en Z_Γ que extienda a λ, esto es, tal que para todo $[x] \in \Gamma \backslash G$, $g \in G$ se tiene que $i \circ \lambda([x], g) = \widehat{\lambda}(i([x]), g)$, donde $i : \Gamma \backslash G \to Z_\Gamma$ es la inclusión. En este caso decimos que Z_Γ es una *extensión equivariante* de $\Gamma \backslash G$, si Z_Γ es compacto decimos entonces que Z_Γ es una *compactificación equivariante* de $\Gamma \backslash SL(2, \mathbb{C})$. Bajo estas condiciones, como λ es transitiva y Z_Γ y $\Gamma \backslash G$ tienen la misma dimensión, se tiene de forma inmediata que existe una órbita de la acción $\widehat{\lambda}$ de la misma dimensión que Z_Γ, decimos entonces que Z_Γ es un *espacio cuasihomogéneo* de $SL(2, \mathbb{C})$ o un *espacio cuasihomogéneo compacto* de $SL(2, \mathbb{C})$, según sea el caso.

3. $SL(2,\mathbb{C})$

En esta sección estudiamos la estructura de variedad diferenciable real de $SL(2,\mathbb{C})$, le damos una estructura de variedad diferenciable real a $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$, estudiamos las acciones izquierdas de un subgrupo $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ en $SL(2,\mathbb{C})/SU(2), \mathbb{CP}^1$ y en $\mathbb{H}^3$ y algunas relaciones entre estas acciones y la acción en $SL(2,\mathbb{C})$ estudiada en la sección anterior. En particular, vemos que la proyección usual $SL(2,\mathbb{C}) \to SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$ es un fibrado trivial con fibras compactas y conexas, Γ-equivariante, resultado que utilizamos en esta sección para probar que Γ actúa de manera propiamente discontinua en $SL(2,\mathbb{C})$ si y sólo si Γ actúa de manera propiamente discontinua en $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$; con la anterior encontraremos en la sección 4 una variedad Z_Γ que contenga a $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$ como subespacio denso.

Veremos también que $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C}) \to \Gamma\backslash(SL(2,\mathbb{C})/SU(2))$ es un fibrado con fibras compactas y conexas, resultado que utilizaremos en la sección 4 para calcular el espacio de puntas de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$ y encontrar condiciones bajo las cuales Z_Γ es compacto.

Estudiamos también acciones de grupos kleiniano en $\mathbb{CP}^1$, $\mathbb{H}^3$ y en $\mathbb{CP}^1 \cup \mathbb{H}^3$ y la relación entre los dominios de discontinuidad, conjuntos límite y variedades cociente correspondientes.

3.1. Acción de $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ en $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$

Sea $SL(2,\mathbb{C})$ el *grupo especial lineal*, esto es, el grupo de matrices de 2×2 con entradas complejas y determinante 1; sabemos por topología diferencial que es un grupo de Lie de dimensión 3 compleja; sea $SU(2) \subset SL(2,\mathbb{C})$ el *grupo especial unitario*, subgrupo de matrices que preservan el producto hermitiano en $\mathbb{C}^2$, por álgebra lineal sabemos que

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}) \right\}.$$

Sea $\mathcal{A}$ el *grupo afín* definido por

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a^{-\frac{1}{2}} & b \\ 0 & a^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}) : a \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Al ser $SU(2)$ y $\mathcal{A}$ subgrupos cerrados con las topologías de subespacio de $SL(2,\mathbb{C})$, de acuerdo con el Teorema del subgrupo cerrado, enunciado por Lee en [8, pg. 392], son subgrupos de Lie encajados en $SL(2,\mathbb{C})$ (visto como grupo de Lie real). Es claro que tanto $SU(2)$ como $\mathcal{A}$ tienen dimensión real 3.

Proposición 5 *El grupo $SL(2,\mathbb{C})$ es difeomorfo como variedad diferenciable real a $\mathcal{A} \times SU(2)$.*

Demostración:
Podemos escribir toda matriz en $SL(2,\mathbb{C})$ como producto de una matriz en $\mathcal{A}$ multi-

plicada por una matriz en $SU(2)$, a saber, si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$$

entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a_1| & \frac{b_1 a_1}{|a_1|} \\ 0 & |a_1|^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{|a_1|}{a_1} & 0 \\ 0 & \frac{|a_1|}{\bar{a_1}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}^{-1} \tag{2}$$

donde si $c \neq 0$, entonces $\beta = (|\frac{d}{c}|^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$, $\alpha = d\beta c^{-1}$, $a_1 = a\alpha - b\beta$, $b_1 = a\beta + b\bar{\alpha}$ y si $d \neq 0$, entonces $\alpha = (|\frac{c}{d}|^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$, $\beta = \bar{c}\bar{\alpha}\bar{d}^{-1}$, $a_1 = a\alpha - b\bar{\beta}$, $b_1 = a\beta + b\bar{\alpha}$.

Como la $\mathcal{A} \cap SU(2)$ es sólo la matriz identidad, toda matriz en $SL(2,\mathbb{C})$ se escribe de forma única como el producto de una matriz en $\mathcal{A}$ por una matriz en $SU(2)$, entonces está bien definida la transformación $\Phi : SL(2,\mathbb{C}) \to \mathcal{A} \times SU(2)$, $\Phi(A) := (B, C)$, si $A \in SL(2,\mathbb{C}),\ A = BC,\ B \in \mathcal{A},\ C \in SU(2)$; además como los coeficientes de las matrices B y C dependen $\mathbb{R}$-diferenciablemente de los coeficientes de la matriz A, Φ es suave. Claramente su inversa $\Phi^{-1} : \mathcal{A} \times SU(2) \to SL(2,\mathbb{C})$ definida por la multiplicación de matrices, es también suave; por lo que Φ es un difeomorfismo. $\square$

Existen teoremas que generalizan los resultados de la sección 1 (ver [8, págs. 153, 160]) dándonos condiciones para definir de manera única una estructura de variedad diferenciable en el espacio de órbitas de una acción suave $G \times M \to M$, donde G es un grupo de Lie (de dimensión no necesariamente 0, como lo supusimos en la sección 1) sobre una variedad diferenciable M, tal que la proyección $\pi : M \to G\backslash M$ sea una submersión. A continuación encontraremos de una manera más directa esta estructura diferenciable para el espacio de órbitas $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$ de la acción suave $SL(2,\mathbb{C}) \times SU(2) \to SL(2,\mathbb{C})$ inducida por el producto en el grupo y mostraremos que la proyección $\bar{\pi} : SL(2,\mathbb{C}) \to SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$ es un fibrado trivial con fibras compactas y conexas; lo que nos servirá para mostrar que si $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ es un subgrupo, entonces Γ actúa por la izquierda mediante la multiplicación del grupo de manera propiamente discontinua en $SL(2,\mathbb{C})$ si y sólo si Γ actúa por la izquierda en $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$ de manera propiamente discontinua mediante la acción inducida por la multiplicación del grupo.

Si H es un grupo que actúa por la derecha en las variedades diferenciales M y N y $f : M \to N$ es una función; decimos que f es *H-equivariante* si para todo $a \in M,\ u \in H$ se tiene que $f(a \cdot u) = f(a) \cdot u$

Proposición 6 *Bajo las condiciones del párrafo anterior la función* $\widehat{f} : M/H \to N/H$, $\widehat{f}([x]) := [f(x)]$ *está bien definida.*
1) *Si f es inyectiva entonces $\widehat{f}$ es inyectiva.*
Además si H es un grupo de homeomorfismos de M y de N
2) *Si f es continua y H actúa de manera propiamente discontinua en N, entonces H*

actúa de manera propiamente discontinua en M.
3) *Si f es sobre y propia y H actúa de manera propiamente discontinua en M, entonces H actúa de manera propiamente discontinua en N.*
4) *Si f es sobre y continua, entonces $\widehat{f}$ es sobre y continua. Si f es un homeomorfismo, entonces $\widehat{f}$ es un homeomorfismo y H actúa de manera propiamente discontinua en M si y sólo si H actúa de manera propiamente discontinua en N.*
5) *Si H es un grupo de difeomorfismos de M y de N y H actúa de manera libre, propiamente discontinua en M y f es un difeomorfismo, entonces $\widehat{f}$ es un difeomorfismo.*

Demostración:
$\widehat{f}$ está bien definida ya que si $a, b \in M,\ u \in H,\ b = a \cdot u$, entonces $f(b) = f(a \cdot u) = f(a) \cdot u$.

1) Si f es inyectiva y $f(b) = f(a) \cdot u$, entonces $f(b) = f(au)$ y $b = au$; esto es, $\widehat{f}$ es inyectiva.

2) Si existe un compacto $K \subset M$ que interseca a un número infinito de sus H-trasladados, entonces $f(K)$ es un compacto que interseca a un número infinito de sus H-trasladados.

3) Si existe un compacto $K \subset M$ que interseca a un número infinito de sus H-trasladados, entonces como $f^{-1}(K) \cdot u = f^{-1}(K \cdot u)$, tenemos que $f^{-1}(K)$ es un compacto que interseca a un número infinito de sus H-trasladados.

4) Se sigue de la definición de topología cociente y del hecho de que f sea continua o homeomorfismo.

5) Por la Proposición 3, M/H y N/H son variedades diferenciables. Si $[x] \in M/H$, (U, ϕ_U) es una carta de M que contiene a x y $(\widehat{U}, \phi_{\widehat{U}})$ una carta de N que contiene a $f(x)$, sean (V, ϕ_V) y $(\widehat{V}, \phi_{\widehat{V}})$ las cartas correspondientes de M/H y N/H que contienen a $[x]$ y a $[f(x)]$, respectivamente estudiadas en la sección anterior; entonces $\phi_V^{-1} \circ \widehat{f} \circ \phi_{\widehat{V}} = \phi_U^{-1} \circ f \circ \phi_{\widehat{U}}$ es un difeomorfismo. $\square$.

Si H es un grupo que actúa por la izquierda en las variedades diferenciables M y N, $f : M \to N$ una función, definimos de manera análoga a como lo hicimos para acciones derechas, el que f sea H-equivariante; claramente la Proposición anterior es válida en este caso.

Notemos que $SU(2)$ actúa por la derecha en $\mathcal{A} \times SU(2)$ de manera natural por

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A} \times SU(2)) \times SU(2) \to \mathcal{A} \times SU(2)\\ &(a, s), t \mapsto (a, st)\end{aligned}$$

Consideremos a los espacios de órbitas correspondientes de las acciones derechas de Γ en $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$ y en $(\mathcal{A} \times SU(2))/SU(2)$ con la topología cociente. Afirmamos que el difeomorfismo Φ de la Proposición 5 es $SU(2)$-equivariante, ya que si $u \in SU(2)$, $a, b \in SL(2,\mathbb{C}),\ b = au$, entonces $\phi(b) = \phi(a) \cdot u$; por lo que por la Proposición anterior

$$\widehat{\Phi} : SL(2,\mathbb{C})/SU(2) \to (\mathcal{A} \times SU(2))/SU(2),\ \widehat{\Phi}([x]) := [\Phi(x)]$$

es un homeomorfismo.

La función proyección $\pi : \mathcal{A} \times SU(2) \to \mathcal{A}$, para toda $x \in SU(2)$, $a \in \mathcal{A}$, $\pi(a,x) = a$, es un fibrado trivial con fibra compacta $SU(2)$, por lo que si identificamos las fibras, obtenemos el homeomorfismo

$$\widehat{\pi} : (\mathcal{A} \times SU(2))/SU(2) \to \mathcal{A}, \widehat{\pi}((B,C)\ SU(2)) := \pi(B,C) = B, \tag{3}$$

si $B \in \mathcal{A}, C \in SU(2)$.

Definamos en $(\mathcal{A} \times SU(2))/SU(2)$ la estructura de variedad diferenciable de $\mathcal{A}$, esto es, si (U,ϕ) es una carta de $\mathcal{A}$, entonces $(\widehat{\pi}^{-1}(U), \phi \circ \widehat{\pi})$ es una carta de $(\mathcal{A} \times SU(2))/SU(2)$, de la misma manera podemos definir en $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$ una estructura diferenciable declarando que $\widehat{\Phi}$ es un difeomorfismo, por lo que $\bar{\pi} : SL(2,\mathbb{C}) \to SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$, $\bar{\pi}(g) := gSU(2)$ es un fibrado trivial con fibra compacta y conexa (ya que $\bar{\pi}$ y π son isomorfos como fibrados y $SU(2)$ es compacto y conexo).

Si $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ es un subgrupo, entonces Γ actúa por la izquierda en $SL(2,\mathbb{C})$ y en $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$ mediante la acción inducida por la multiplicación del grupo $\rho : \Gamma \times (SL(2,\mathbb{C})/SU(2)) \to SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$, $\rho(\gamma,[g]) := [\gamma g]$, ya que $[g] = [\widehat{g}]$ implica que $[\gamma g] = [\gamma \widehat{g}]$ y $\rho(\widehat{\gamma}, \rho(\gamma,[g])) = \rho(\widehat{\gamma},[\gamma g]) = [\widehat{\gamma}\gamma g] = \rho(\widehat{\gamma}\gamma,[g])$; además como $\bar{\pi}(\gamma g) = \gamma g SU(2) = \gamma \bar{\pi}(g)$, $\bar{\pi}$ es un fibrado Γ-equivariante y por la Proposición 6, Γ actúa de manera propiamente discontinua en $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$ si y sólo si Γ es un subgrupo discreto de $SL(2,\mathbb{C})$. Por lo anterior y por la Proposición 4, obtenemos la siguiente Proposición:

Proposición 7 *Si* $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ *es un subgrupo, entonces*

$$\bar{\pi} : SL(2,\mathbb{C}) \to SL(2,\mathbb{C})/SU(2),$$

$\bar{\pi}(g) := [g]$ *es un fibrado trivial con fibra compacta y conexa,* Γ*-equivariante; si* Γ *es discreto y libre de torsión entonces* $\Gamma \backslash (SL(2,\mathbb{C})/SU(2))$ *es una variedad diferenciable.*

Proposición 8 *Si* $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ *es un subgrupo discreto y libre de torsión, entonces* $\widetilde{\pi} : \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C}) \to \Gamma \backslash (SL(2,\mathbb{C})/SU(2))$ *es un fibrado con fibra compacta y conexa.*

Demostración:
Observemos primero que como $\bar{\pi}$ es Γ-equivariante, sobre y continua, por la Proposición 6, $\widetilde{\pi}$ está bien definida, es sobreyectiva y continua; por la Proposición 3, tenemos que las funciones $\pi_1 : SL(2,\mathbb{C}) \to \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$, $\pi_1(x) := [x]$, $x \in SL(2,\mathbb{C})$ y $\pi_2 : SL(2,\mathbb{C})/SU(2) \to \Gamma\backslash(SL(2,\mathbb{C})/SU(2))$, $\pi_2(y) := [y]$, $y \in SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$ son cubrientes; además tenemos que $\widetilde{\pi}^{-1}([y]) = \cup_{x\in\bar{\pi}^{-1}(y)}[x] = \pi_1(\bar{\pi}^{-1}(y))$. Como Γ actúa de manera libre y propiamente discontinua en $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$, entonces existe U abierto de $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$ que contiene a $[y]$ tal que no interseca a ninguno de sus Γ-trasladados; por lo que $\bar{\phi}^{-1}(y)$ contiene a lo más un representante de cada punto, esto es, si $x, z \in \bar{\pi}^{-1}(y)$ entonces $x \nsim z$, por lo que $\pi_1|_{\bar{\pi}^{-1}(y)}$ es inyectivo y como π_1 es un difeomorfismo local entonces $\pi_1|_{\bar{\pi}^{-1}(y)}$ es un difeomorfismo e identificamos a y con $[y]$, por lo que $\widetilde{\pi}^{-1}([y]) = \pi_1(\bar{\pi}^{-1}(y)) \approx \bar{\pi}^{-1}(y) = ySU(2) \approx \{y\} \times SU(2) = \{[y]\} \times SU(2)$.

Como Γ actúa de manera propiamente y discontinua en $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$, si $[y] \in \Gamma\backslash(SL(2,\mathbb{C})/SU(2))$, entonces existe $U \subset SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$, $y \in U$ abierto que no interseca a ningún Γ-trasladado, por lo que $V := \cup_{g\in\Gamma} gU/\sim$ es un abierto de $\Gamma\backslash(SL(2,\mathbb{C})/SU(2))$ que contiene a $[y]$; por la misma razón que para la fibra de un punto, $\pi_1|_{\bar{\pi}^{-1}(U)}$ son difeomorfismos, por lo que $U \approx V$ y $\widetilde{\pi}^{-1}(V) = \pi_1(\bar{\pi}^{-1}(U)) \approx \bar{\pi}^{-1}(U) = U \times SU(2) \approx V \times SU(2)$ $\square$

3.2. Acciones en $\mathbb{CP}^1$ y en $\mathbb{H}^3$, grupos kleinianos

Claramente $\{I, -I\} \subset SL(2,\mathbb{C})$ es un subgrupo discreto, entonces por la sección 1 sabemos que $PSL(2,\mathbb{C}) := SL(2,\mathbb{C})/\{I,-I\}$ es una variedad de dimensión 3 compleja tal que $\pi : SL(2,\mathbb{C}) \to PSL(2,\mathbb{C})$ es un cubriente 2 a 1 y un biholomorfismo local entre variedades complejas; como $\{I,-I\}$ es un subgrupo normal en $SL(2,\mathbb{C})$, entonces $PSL(2,\mathbb{C})$ es un grupo. Además el producto es diferenciable ya que en coordenadas se ve como el producto en $SL(2,\mathbb{C})$, por la misma razón, la transformación inversa $[g] \mapsto [g^{-1}]$ es diferenciable. Por lo que $PSL(2,\mathbb{C})$ es un grupo de Lie y π es un homomorfismo de grupos de Lie.

Identificamos a $PSL(2,\mathbb{C})$ con el grupo $\text{Möb}(\mathbb{S}^2)$ de transformaciones de Möbius mediante el isomorfismo $\rho : PSL(2,\mathbb{C}) \to \text{Möb}(\mathbb{S}^2)$ definido por

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] \to \frac{az+b}{cz+d}$$

La acción por la izquierda de $SL(2,\mathbb{C})$ en $\mathbb{CP}^1$, $\phi : SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$, definida por

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, [z:1]\right) := [az+b : cz+d]$$

define una acción por la izquierda de $PSL(2,\mathbb{C})$ en $\mathbb{CP}^1$ por biholomorfismos de $\mathbb{CP}^1$ (transformaciones de Möbius), $\widehat{\phi} : PSL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1, \widehat{\phi}([g],[z:1]) := \phi(g,[z:1])$, $[g] \in PSL(2,\mathbb{C})$, $[z:1] \in \mathbb{CP}^1$.

Si $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ es un subgrupo libre de torsión, entonces como $\pi|_\Gamma$ es un difeomorfismo local inyectivo, es un difeomorfismo entonces, Γ es isomorfo como grupo de Lie a $\pi(\Gamma)$. Además la acción ϕ de Γ en $\mathbb{CP}^1$ es igual a la acción $\widehat{\phi}$ de $\pi(\Gamma)$ en $\mathbb{CP}^1$; por lo tanto utilizaremos a Γ y $\pi(\Gamma)$ y a ϕ y $\widehat{\phi}$ indistintamente. Existe un resultado recíproco a este, que nos garantiza el levantamiento de subgrupos kleinianos de $\text{Möb}(\mathbb{S}^2)$ a $SL(2,\mathbb{C})$, hablaremos de esto en el capítulo 5.

Sea $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ un subgrupo, estudiaremos ahora la acción de Γ en $\mathbb{H}^3$. La inversión clásica en $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ con centro en 0 y radio 1, es la función definida por $x \mapsto 1/x$, donde asumimos $1/0 = \infty, 1/\infty = 0$. Podemos definir también la inversión en intervalos de arbitrario centro c y radio r, mediante $x \to c + r^2/(x-c)$.

Definimos para $n = 2, 3$, las inversiones en $\mathbb{S}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ en arbitrarias $(n-1)$-esferas en $\mathbb{S}^n$, considerando todos los rayos que emanan del centro de la esfera y definiendo la inversión en cada rayo justo como lo hicimos en dimensión 1.

De acuerdo con Seade y Ramírez en [5, pág. 16] , toda inversión en una $(n-1)$-esfera en $\mathbb{S}^n$ es un difeomorfismo de $\mathbb{S}^n$ que preserva ángulos (conforme) y esferas de todas las dimensiones.

Por variable compleja sabemos que Möb($\mathbb{S}^2$) es el grupo formado por todas las composiciones pares de inversiones en círculos en $\mathbb{CP}^1$. Definimos de manera análoga a Möb($\mathbb{S}^3$) como el grupo formado por todas las composiciones pares de inversiones en esferas y a su subgrupo Möb($\mathbb{B}^3$) como el grupo formado por todas las composiciones pares de inversiones en esferas que preservan a $\mathbb{B}^2$, de acuerdo con Seade y Cano en [5, pág. 16], estas son esferas ortogonales a $\mathbb{S}^2$. Toda esfera ortogonal a $\mathbb{S}^2$ determina un único círculo en $\mathbb{S}^2$ y viceversa, hemos dado una idea de la prueba del muy conocido Teorema de extensión de Poincaré [5, pág. 17].

Teorema 9 Möb($\mathbb{B}^3$) $\simeq$ Möb($\mathbb{S}^2$).

En particular Möb($\mathbb{S}^2$) actúa en $\mathbb{B}^3 \cup \mathbb{S}^2$ por difeomorfismos conformes, dejando a $\mathbb{B}^3$ y a $\mathbb{S}^2$ invariantes.

Por geometría hiperbólica sabemos que $\mathbb{B}^3$ y $\mathbb{H}^3$ admiten una métrica riemanniana, llamada *métrica hiperbólica* cuyas isometrías son precisamente Möb($\mathbb{S}^2$) $= PSL(2,\mathbb{C})$. Además existe un difeomorfismo conforme entre $\mathbb{B}^3 \cup \mathbb{S}^2$ y $\mathbb{H}^3 \cup \mathbb{CP}^1$ (composición de dos proyecciones estereográficas), que manda isométricamente a $\mathbb{B}^3$ en $\mathbb{H}^3$; por lo que podemos definir una única acción de $PSL(2,\mathbb{C})$ en $\mathbb{H}^3 \cup \mathbb{CP}^1$ tal que el difeomorfismo entre $\mathbb{B}^3 \cup \mathbb{S}^2$ y $\mathbb{H}^3 \cup \mathbb{CP}^1$ sea $PSL(2,\mathbb{C})$-equivariante. Sea $\bar{\rho} : PSL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3$ esta acción restringida a $\mathbb{H}^3$. Sea $\rho : SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3$ la acción suave de $SL(2,\mathbb{C})$ en $\mathbb{H}^3$, definida por $\rho(g, x) := \bar{\rho}(\pi(g), x)$, donde $g \in SL(2,\mathbb{C})$, $x \in \mathbb{H}^3$, $\pi : SL(2,\mathbb{C}) \to PSL(2,\mathbb{C})$ es el cubriente anterior.

Por la misma razón que para $\mathbb{CP}^1$, si $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ es libre de torsión, identificamos la acción de ρ de Γ en $\mathbb{H}^3$ con la acción $\bar{\rho}$ de $\pi(\Gamma)$ en $\mathbb{H}^3$. Es bien sabido que ρ es transitiva y con subgrupo de isotropía $SU(2)$, entonces por [8, pág. 162], $\widehat{\rho} : SL(2,\mathbb{C})/SU(2) \to \mathbb{H}^3$, $\widehat{\rho}([B]) = \widehat{\rho}([A]) := \rho(B, (0,0,1)) = \rho(A, (0,0,1)) \in \mathbb{H}^3$, donde $B = AU \in SL(2,\mathbb{C})$, $U \in SU(2)$ y

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}, a > 0, \tag{4}$$

es un difeomorfismo. Como $\widehat{\rho}$ es la evaluación de la transformación de Möbius determinada por A en el punto $(0,0,1)$ y la transformación de Möbius correspondiente a A es $T_A(z) = a^2 z + ab$, se extiende a $\mathbb{H}^3$ como una homotecia por a^2 seguida de una traslación en por $(ab, 0) \in \mathbb{H}^3$, por lo que $\widehat{\rho}([B]) = T_A((0,0,1)) = (ab, a^2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$.

Proposición 10 *Para todo subgrupo* $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ *libre de torsión, el difeomorfismo* $\widehat{\rho} : SL(2,\mathbb{C})/SU(2) \to \mathbb{H}^3$, $\widehat{\rho}([A]) = (ab, a^2)$, *donde* A *es como en (4), es* Γ*-equivariante.* Γ *es discreto si y sólo si* Γ *actúa de manera propia discontinua en* $\mathbb{H}^3$*. Si* $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ *es un subgrupo discreto libre de torsión, entonces* $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ *es una* *variedad diferenciable de dimensión real* 3*, la función* $\bar{\rho} : \Gamma\backslash(SL(2,\mathbb{C})/SU(2)) \to \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$, $\bar{\rho}([x]) := [\widehat{\rho}(x)]$, $x \in SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$ *es un difeomorfismo y la función* $\Psi : \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C}) \to \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$, $\Psi([y]) := \bar{\rho}\circ\widetilde{\pi}([y])$, $y \in SL(2,\mathbb{C})$*, donde* $\widetilde{\pi}$ *es como en la Proposición 8 (pág. 16), es un fibrado con fibras compactas y conexas.*

Demostración:
Es Γ-equivariante ya que

$$\rho(\gamma,\widehat{\rho}([B])) = \rho(\gamma,\widehat{\rho}([A])) = \rho(\gamma,\rho(A,(0,0,1))) =$$

$$= \rho(\gamma A,(0,0,1)) = \widehat{\rho}([\gamma A]) = \widehat{\rho}(\gamma[A]) = \widehat{\rho}(\gamma[B]).$$

Como por 7 la proyección $\bar{\pi} : SL(2,\mathbb{C}) \to SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$ es un fibrado trivial con fibras compactas y conexas, $\widehat{\rho}\circ\bar{\pi}$ es sobre, continua y propia, entonces por la Proposición 6, Γ actúa de manera propiamente discontinua en $SL(2,\mathbb{C})$ si y sólo si Γ actúa de manera propiamente discontinua en $\mathbb{H}^3$, y por la sección 1, sabemos que Γ actúa de manera propiamente discontinua si y sólo si Γ es discreto.

Como $\widehat{\rho}$ es un difeomorfismo Γ-equivariante, por el inciso (5) de la Proposición 6 (pág. 14), $\bar{\rho}$ es un difeomorfismo; además por la Proposición 8, $\widetilde{\pi}$ es un fibrado con fibras compactas y conexas, por lo que Ψ es un fibrado con fibras compactas y conexas. $\square$

Sea $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ subgrupo libre de torsión. Definimos el *dominio de discontinuidad* de la acción $\phi : \Gamma\times\mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$, denotado por Ω, como el conjunto de todos los puntos $x \in \mathbb{CP}^1$ tales que existe un abierto $U \subset \mathbb{CP}^1, x \in U$ que no interseca a ninguno de sus Γ-trasladados; cabe mencionar que esta definición no aplica si hay torsión en el subgrupo Γ. Notemos que Ω es un abierto de $\mathbb{CP}^1$, ya que si $x \in \mathbb{CP}^1$ y U es el abierto de la definición anterior, entonces $U \subset \Omega$, por lo que Ω es una variedad de dimensión 1 compleja. Además Ω es Γ-invariante, esto es $\phi(\Gamma\times\Omega) = \Omega$, ya que si $g \in \Gamma, x \in \Omega$, entonces existe U abierto de Ω tal que $x \in U$ y para todo $h \in \Gamma, h \neq e$, $U \cap hU = \emptyset$, entonces gU es abierto de Ω que contiene a gx y para todo $l \in \Gamma$, $l \neq e$, $gU \cap lgU = \emptyset$, por lo que $gx \in \Omega$; si $x \in \Omega$ y $g \in \Gamma$, como $gx \in \Omega$, entonces $x = g^{-1}gx$, por lo que $x \in \phi(\Gamma\times\Omega)$. Entonces Γ actúa en Ω, $\phi|_{\Gamma\times\Omega} : \Gamma\times\Omega \to \Omega$ satisfaciendo la condición $a)$ de la sección 1, por lo que por los resultados de la sección 1, Γ actúa de manera propiamente discontinua en Ω; además Ω es el abierto Γ-invariante más grande contenido en $\mathbb{CP}^1$ con tal propiedad y $\Gamma\backslash\Omega$ es una variedad diferenciable de dimensión compleja 1.

Estamos interesados en considerar subgrupos $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$, tales que su dominio de discontinuidad Ω sea no vacío, en este caso diremos que Γ es un *grupo kleiniano*; un enfoque moderno (que no adoptamos en esta tesis) es definir a un grupo kleiniano como un subgrupo discreto de $SL(2,\mathbb{C})$.

Proposición 11 *Si* Γ *es un grupo kleiniano entonces* Γ *es un subgrupo discreto de* $SL(2,\mathbb{C})$.

Demostración:
Siguiendo a Maskit en [2, pág. 18], supongamos Γ kleiniano y no es discreto, entonces

existe una sucesión $\{g_n\}$ de elementos todos distintos de Γ, tales que $g_n \to e$; entonces para toda $z \in \mathbb{CP}^1$, $g_n z \to z$, por lo que toda vecindad de z contiene infinitos trasladados, en particular $z \notin \Omega$. Concluimos que $\Omega = \emptyset$. $\square$.

Proposición 12 *Para todo $g \in SL(2,\mathbb{C})$, Γ y $g\Gamma g^{-1}$ son isomorfos como grupos de Lie. Más aún, Γ es un grupo kleiniano libre de torsión con dominio de discontinuidad Ω en $\mathbb{CP}^1$ si y sólo si $g\Gamma g^{-1}$ es un grupo kleiniano libre de torsión con dominio de discontinuidad $g(\Omega)$ en $\mathbb{CP}^1$ y $\Gamma\backslash\Omega$ es biholomorfo a $g\Gamma g^{-1}\backslash g(\Omega)$.*

Demostración:
Identifiquemos a $g \in SL(2,\mathbb{C})$ con $\pi(g) \in PSL(2,\mathbb{C})$. Como la multiplicación por g es un difeomorfismo de $SL(2,\mathbb{C})$ en si mismo y la conjugación es un isomorfismo, entonces Γ y $g\Gamma g^{-1}$ son isomorfos como grupos de Lie. Notemos que si $\phi : \Gamma \times \Omega \to \Omega$, $\phi(\gamma, x) := \gamma(x)$, $\gamma \in \Gamma$, $x \in \Omega$ es la acción de Γ en su dominio de discontinuidad Ω, entonces Γ actúa $g(\Omega)$ mediante $\widehat{\phi} : \Gamma \times g(\Omega) \to g(\Omega)$, $\widehat{\phi}(\gamma, x) := g \circ \gamma \circ g^{-1}(x)$, $\gamma \in \Gamma$, $x \in g(\Omega)$, por lo que por construcción, el biholomorfismo $g : \Omega \to g(\Omega)$ es Γ-equivariante; por los resultados de esta sección Γ actúa de manera propiamente discontinua en $g(\Omega)$ y por la Γ-equivarianza de g y por definición de Ω, $g(\Omega)$ es el abierto más grande con tal propiedad, por lo que $g(\Omega)$ es el dominio de discontinuidad de $\widehat{\phi}$ y $\Gamma\backslash\Omega$ es biholomorfo a $\Gamma\backslash g(\Omega)$. Además la acción $\widehat{\phi}$ es exactamente igual a la acción de $g\Gamma g^{-1}$ en $g(\Omega)$ definida por $\bar{\phi} : g\Gamma g^{-1} \times g(\Omega) \to g(\Omega)$, $\bar{\phi}(g\gamma g^{-1}, x) := g \circ \gamma \circ g^{-1}(x)$, $\gamma \in \Gamma$, $x \in g(\Omega)$, por lo que $g\Gamma g^{-1}$ es un grupo kleiniano con dominio de discontinuidad $g(\Omega)$ en $\mathbb{CP}^1$ y $\Gamma\backslash\Omega$ es biholomorfo a $g\Gamma g^{-1}\backslash g(\Omega)$.

Por lo que estudiar la acción ϕ es lo mismo que estudiar la acción $\bar{\phi}$. En particular como toda transformación de Möbius tiene uno o dos puntos fijos, entonces $\Omega \neq \mathbb{CP}^1$, por lo que si $b \in \mathbb{CP}^1$, podemos suponer que $b \notin \Omega$, ya que si Ω contuviera a b, entonces si $c \notin \Omega$ y g es una transformación de Möbius tal que $g(c) = b$ (la cual siempre existe), considerar al grupo kleiniano Γ con dominio de discontinuidad Ω es igual a considerar al grupo kleiniano $g\Gamma g^1$ con dominio de discontinuidad $g(\Omega)$. En ocasiones simplificaremos los cálculos suponiendo que $\infty \notin \Omega$. $\square$

Decimos que un punto $x \in \mathbb{CP}^1$ es un *punto límite* del grupo kleiniano Γ si existe $z \in \Omega$ y existe $\{g_n\} \subset \Gamma$ todos distintos, tales que $g_n z \to x$. El conjunto de puntos límites correspondiente a Γ lo denotamos por $\Lambda = \Lambda(\Gamma)$ y lo llamamos *conjunto límite* de Γ en $\mathbb{CP}^1$. Claramente $\Omega \cap \Lambda = \emptyset$, ya que si $z \in \Omega$, existe un abierto que contiene a lo más un Γ-trasladados de cualquier punto, mientras que si $w \in \Lambda$ todo abierto que contiene a w contiene infinitos Γ-trasladados de algún punto. Es muy bien sabido que $\mathbb{CP}^1 = \Lambda \cup \Omega$ (Maskit en [2], pág. 24).

Decimos que un dominio $\Delta \subset \Omega$ es un *dominio fundamental* de la acción ϕ de Γ en Ω si:
1) Para todo $z \in \Omega$ existe $g \in \Gamma, w \in \bar{\Delta}$ tal que $\phi(g, w) = z$.
2) Si $z, w \in \Delta$ y $g \in \Gamma$ tal que $\phi(g, w) = z$, entonces g es la identidad.
Decimos que el grupo kleiniano Γ es *cocompacto* si $\Gamma\backslash\Omega$ es compacto.

3.3. Acción de grupos kleinianos en $\mathbb{H}^3 \cup \mathbb{CP}^1$

Supongamos que $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ es un grupo kleiniano libre de torsión. Como mencionamos en la subsección anterior, podemos pensar a Γ como subgrupo de Möb($\mathbb{S}^2$) y hacerlo actuar en $\mathbb{B}^3 \cup \mathbb{S}^2$ por difeomorfismos que preservan ángulos, círculos y esferas, donde $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{B}^3$ son subespacios invariantes y las restricciones de $\beta : \Gamma \times \mathbb{B}^3 \cup \mathbb{S}^2 \to \mathbb{B}^3 \cup \mathbb{S}^2$ a estos subespacios invariantes son las acciones en $\mathbb{CP}^1$ y $\mathbb{B}^3$ estudiadas en la sección anterior (ϕ y $\bar{\rho}$).

Teorema 13 *Si $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ es un grupo kleiniano libre de torsión y $\Omega \subset \mathbb{CP}^1$ es el dominio de discontinuidad de la acción de Γ en $\mathbb{CP}^1$, entonces Γ actúa de manera propiamente discontinua en $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$ y el cociente $\Gamma \backslash (\mathbb{B}^3 \cup \Omega)$ es una 3-variedad con frontera $\Gamma \backslash \Omega$.*

Demostración:
Mostraremos que se satisfacen las condiciones 2.a) y 2.b) de la Proposición 1 (pág. 8) para los puntos en $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$. Como Γ actúa de manera libre y propiamente discontinua en $\mathbb{B}^3$, la condición a) se satisface para todos los puntos en $\mathbb{B}^3$ y la condición b) se satisface para cualquier pareja de puntos no relacionados en $\mathbb{B}^3$.

Para ver que la condición a) se satisface para puntos en Ω, sea $x \in \Omega$, sea S una bola abierta en Ω con centro en x que sea un buen abierto de Γ en $\mathbb{CP}^1$, sea B la bola euclidiana abierta de $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$ con centro en x y que interseca a $\mathbb{CP}^1$ en B, entonces como Γ manda esferas ortogonales a $\mathbb{S}^2$ en esferas ortogonales a $\mathbb{S}^2$ y Ω es invariante, B es un abierto de $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$ que no interseca a ninguno de sus Γ-trasladados.

Para ver que la condición b) se satisface para cualquier pareja de puntos en Ω; si $x, y \in \Omega$ son dos puntos no relacionados, entonces como Γ actúa de manera libre y propiamente discontinua en el espacio β-invariante Ω, existen dos bolas abiertas $S_1, S_2 \subset \Omega$ que contienen a x y a y, respectivamente, tales que S_1 no interseca a ningún Γ-trasladado de S_2; sean B_1 y B_2 las bolas euclidianas abiertas de $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$ con centro en x y y, que intersecan a $\mathbb{CP}^1$ en S_1 y en S_2, respectivamente; entonces por lo anterior y como Γ manda esferas ortógonales a $\mathbb{S}^2$ en esferas ortógonales a $\mathbb{S}^2$, B_1 no interseca a ningún Γ-trasladado de B_2.

Para ver que la condición b) se satisface para cualquier pareja de puntos que consistan de un punto en Ω y otro en $\mathbb{B}^3$; si $x \in \Omega, y \in \mathbb{B}^3$, si suponemos que para cualesquiera dos abiertos $U \subset \Omega \cup \mathbb{B}^3$, $V \subset \mathbb{B}^3$, $x \in U, y \in V$ existe un trasladado de V que interseca a U, entonces un número infinito de trasladados de V intersecan a U, ya que si sólo un número finito lo hacen podemos definir otros abiertos $\widehat{U} \subset U, \widehat{V} \subset V$, $x \in \widehat{U}, y \in \widehat{V}$ tales que ningún trasladado de $\widehat{V}$ interseque a $\widehat{U}$. Escojamos bolas euclidianas $\{U_n\}$ en $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$ con centro en x y radio euclidiano que tienda a 0 y bolas hiperbólicas $\{V_n\}$ con centro en y y radio hiperbólico tendiendo a 0. Sea $\{g_n\} \subset \Gamma$ una sucesión de elementos distintos tales que $U_n \cap g_n V_n \neq \emptyset$, entonces como toda bola hiperbólica es una bola euclidiana y Γ actúa por isometrías hiperbólicas en $\mathbb{B}^3$, $\{g_n V_n\}$ es una sucesión de bolas euclidianas que se acercan a la frontera de $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$, por lo que el radio euclidiano es más chico que el radio hiperbólico de $g_n V_n$ a medida que n crece y, como el radio hiperbólico tiende a 0, el radio euclidiano tiende a 0 y $g_n y \to x$ con la métrica euclidiana; por lo que $y \notin \Omega$, ya que como hemos probado,

existe un abierto en $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$ que contiene a x que no interseca a ninguno de sus Γ trasladados, en particular este abierto contiene a lo más un trasladado de cualquier punto.
Entonces por la Proposición 3 (pág. 10), $\Gamma \backslash (\mathbb{B}^3 \cup \Omega)$ es una 3 variedad con frontera $\Gamma \backslash \Omega$. $\square$

Decimos que un grupo kleiniano $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ es *convexo cocompacto* si $\Gamma \backslash (\mathbb{B}^3 \cup \Omega)$ es compacto.

4. Espacios cuasihomogéneos de $SL(2,\mathbb{C})$

A partir de ahora y el resto de esta tesis, estudiaremos algunos de los resultados de Guillot en [6]. En esta sección estudiamos la construcción de Guillot en [6] de una extensión equivariante Z_Γ de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$, donde $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ es un subgrupo discreto, libre de torsión. En la siguiente sección estudiaremos condiciones suficientes para que Z_Γ sea compacto y daremos algunos ejemplos. Guillot prueba en [6, 225] que si $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ es un subgrupo discreto, libre de torsión, no elemental (esto es, $|\Lambda| \geq 3$) y M es cualquier compactificación equivariante de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$, entonces existe una transformación sobre y $SL(2,\mathbb{C})$-equivariante $M \to Z_\Gamma$; esto es la compactificación Z_Γ de Guillot. En este sentido la más chica de todas las compactificaciones equivariantes de $SL(2,\mathbb{C})$, de ahí la importancia de tal construcción.

4.1. Una compactificación biequivariante de $SL(2,\mathbb{C})$

El grupo $SL(2,\mathbb{C})$ actúa en $SL(2,\mathbb{C})$ por la derecha y por la izquierda por biholomorfismos mediante las acciones inducidas por el producto en el grupo; $SL(2,\mathbb{C})$ no es compacto, en particular la sucesión

$$A_n = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$$

no contiene ninguna subsucesión convergente.

En esta subsección encajamos a $SL(2,\mathbb{C})$ en $\mathbb{CP}^4$ y estudiamos una compactificación K de $SL(2,\mathbb{C})$ y una extensión de las acciones de $SL(2,\mathbb{C})$ en $SL(2,\mathbb{C})$ a K, esto es, estudiaremos una compactificación biequivariante de $SL(2,\mathbb{C})$ en $\mathbb{CP}^4$.

Consideremos en $\mathbb{CP}^4$, la cuádrica, definida por $K := \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in \mathbb{CP}^4 : x_1x_4 - x_2x_3 - x_0^2 = 0\}$, observemos que K está bien definida como subconjunto de $\mathbb{CP}^4$, ya que el polinomio $x_1x_4 - x_2x_3 - x_0^2$ es homogéneo. A continuación mostraremos lo prometido en el párrafo anterior y la demostración constituye lo que resta de esta subsección.

Proposición 14 *Se tiene lo siguiente:*
a) K es una subvariedad diferenciable encajada cerrada en $\mathbb{CP}^4$ de dimensión compleja 3, por lo tanto compacta.
b) Podemos encajar a $SL(2,\mathbb{C})$ en K mediante la función $f : SL(2,\mathbb{C}) \to K$ definida por

$$A \mapsto [1 : x : y : z : w]$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}).$$

Además $SL(2,\mathbb{C})$ es abierto y denso en K.
c) $B := K - SL(2,\mathbb{C})$ es una subvariedad diferenciable encajada en K de dimensión compleja 2, biholomorfa a $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$.

d) Las acciones de $SL(2,\mathbb{C})$ en $SL(2,\mathbb{C})$ inducidas por el producto por la derecha y por la izquierda del grupo se extienden de manera natural a acciones derecha e izquierda, por biholomorfismos, de $SL(2,\mathbb{C})$ en K, esto es, K es una compactificación biequivariante de $SL(2,\mathbb{C})$. $SL(2,\mathbb{C})$ y B son invariantes bajo tales acciones.

Demostración:
Supongamos $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in K$, como no todos los x_i pueden ser cero, supongamos que $x_4 \neq 0$, sea (U, ψ_U), $U := \{[y_0 : y_1 : y_2 : y_3 : 1] \in \mathbb{CP}^4$, $\psi : U \to \mathbb{C}^4$, $\psi([y_0 : y_1 : y_2 : y_3 : 1]) := (y_0, y_1, y_2, y_3)$ la carta usual del proyectivo tal que $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in U$. Consideremos la función $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, $f(y_0, y_1, y_2, y_3) := (y_0, y_1 - y_2y_3 - y_0^2, y_2, y_3)$; como para todo $Y \in \mathbb{C}^4$ $\det(D_Y f) = 1$, entonces f un biholomorfismo local, mas aún, su inversa es $f^{-1}(z_0, z_1, z_2, z_3) := (z_0, z_1 + z_2z_3 + z_0^2, z_2, z_3)$; por lo que f es un biholomorfismo.

Entonces $\rho : U \to \mathbb{C}$, $\rho := f \circ \psi$, es claramente un biholomorfismo, además $\rho(U \cap K) = \rho(U) \cap \{y_1 = 0\}$; por lo que K es una subvariedad encajada de $\mathbb{CP}^4$ de dimensión compleja 3 y $\rho|_{U\cap K} : U \cap K \to \mathbb{C}^3$, $\rho|_{U\cap K}([y_0 : y_1 : y_2 : y_3 : 1]) = (y_0, y_2, y_3)$ es una carta de K; una parametrización de un abierto de K que contiene a $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$, $x_4 \neq 0$ está dada por

$$j : \mathbb{C}^3 \to K, \qquad j(y_0, y_2, y_3) = [y_0 : y_2y_3 + y_0^2 : y_2 : y_3 : 1]. \tag{5}$$

Otras parametrizaciones de abiertos que contienen a $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$ están dadas por

$$\begin{aligned}
k(y_1, y_2, y_3) &= [1 : y_1 : y_2 : y_3 : \frac{1 + y_2y_3}{y_4}], && x_0 \neq 0.\\
l(y_1, y_2, y_3) &= [y_0 : 1 : y_2 : y_3 : y_2y_3 - y_0^2], && x_1 \neq 0.\\
m(y_1, y_2, y_3) &= [y_0 : y_1 : 1 : y_1y_4 - y_0^2 : y_4], && x_2 \neq 0.\\
n(y_1, y_2, y_3) &= [y_0 : y_1 : y_1y_4 - y_0^2 : 1 : y_4], && x_3 \neq 0.
\end{aligned}$$

Sea $p : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}$, $p(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) := x_1x_4 - x_2x_3 - x_0^2$ y $\sim$ la relación de equivalencia en $\mathbb{C}^5$ dada por estar en la misma recta compleja que pase por el origen, por lo que como $p^{-1}(0)$ es saturado, $K = p^{-1}(0)\backslash \sim$ es cerrado en $\mathbb{CP}^4$, por lo que, K es compacto. Por lo que probamos en inciso a).

Encajemos a $SL(2,\mathbb{C})$ en K de la siguiente manera, consideremos la función $f : SL(2,\mathbb{C}) \to K$ definida por

$$A \mapsto [1 : x : y : z : w]$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$$

Notemos que f está bien definida, ya que si $xw - yz = 1$, entonces $[1 : x : y : z : w] \in K$; además f en unas coordenadas que contienen a A (si suponemos $x \neq 0$) se expresa de la siguiente manera: (las otras coordenadas son similares):

$$(x, y, z) \to (x, y, z, \frac{1 + yz}{x}) \to [1 : x : y : z : \frac{1 + yz}{x}] \to (x, y, z).$$

Claramente f es una inmersión inyectiva y vista en cartas es homeomorfismo sobre su imagen, por lo que es un encaje, esto es, un biholomorfismo sobre su imagen.

Como $\{[1 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in \mathbb{CP}^4\}$ es abierto en $\mathbb{CP}^4$ y $SL(2,\mathbb{C}) = \{[1 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in \mathbb{CP}^4\} \cap K$, entonces $SL(2,\mathbb{C})$ es abierto en K.

K es una compactificación de $SL(2,\mathbb{C})$, ya que si $x := [0 : x_1 : x_2 : x_3 : 1] \in B$, entonces de acuerdo con la definición de $\rho|_{U\cap K}$, toda vecindad de x en K contiene elementos en K cuya primera coordenada homogénea no es nula, por lo que interseca a $SL(2,\mathbb{C})$; esto es $SL(2,\mathbb{C})$ es denso en K. Por lo que probamos b).

Sea $\Theta := f(SL(2,\mathbb{C})) \approx SL(2,\mathbb{C}),\ B := K - \Theta$. Entonces $B = \{[0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] : x_1x_4 - x_2x_3 - 0^2 = 0\} = \{[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] : x_1x_4 - x_2x_3 = 0\}$. Ya que $K = \{[0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] : x_1x_4 - x_2x_3 - 0^2 = 0\} \cup \{[1 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] : x_1x_4 - x_2x_3 - 1^2 = 0\}$ y este último conjunto es exactamente Θ. A lo largo de esta tesis identificaremos a Θ con $SL(2,\mathbb{C})$.

Probaremos ahora que $B := K - \Theta$ es una subvariedad diferenciable encajada en K de dimensión 2 compleja biholomorfa a $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$.

Si $[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in B, x_4 \neq 0$, entonces $\{[y_1 : y_2 : y_3 : y_4] \in B\} \cap \{y_4 \neq 0\} = \{[y_1 : y_2 : y_3 : 1] \in B\} = \{[y_2y_3 : y_2 : y_3 : 1]\}$, entonces si $[0 : x_1 : x_2 : x_3 : 1] \in B$, siguiendo la notación del inciso a), $\rho : U \to \mathbb{C}^4,\ \rho(U \cap B) = \rho(U) \cap \{y_0 = 0, y_1 = 0\}$, B es una subvariedad encajada en K (y en $\mathbb{CP}^4$) de dimensión compleja 2 y $\phi_4 : B \cap \{y_4 \neq 0\} \to \mathbb{C}^2$, definida por

$$[y_1 : y_2 : y_3 : 1] \to (y_1 - y_2y_3, y_2, y_3) \to (y_2, y_3)$$

es una carta coordenada que contiene a $[0 : x_1 : x_2 : x_3 : 1] \in B$. $\phi_2 : B \cap \{y_2 \neq 0\} \to \mathbb{C}^2, \phi_2([y_1 : 1 : y_3 : y_4]) := (y_1, y_4)$ es otra carta coordenada y $\phi_4 \circ \phi_2^{-1} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \phi_4 \circ \phi_2^{-1}(y_1, y_4) = (1/y_4, y_1)$ es un cambio de coordenadas.

Construiremos ahora un biholomorfismo entre B y $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$. Sea $\Lambda : \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \to B,\ \Lambda([z : w], [s : t]) := [zs : zt : ws : wt]$. Observemos que Λ está bien definida ya que $(zs)(wt) - (zt)(ws) = 0$ y $\Lambda([\lambda z : \lambda w], [\epsilon s : \epsilon t]) = [\lambda z\epsilon s : \lambda z\epsilon t : \lambda w\epsilon s : \lambda w\epsilon t] = [zs : zt : ws : wt] = \Lambda([z : w], [s : t])$. Además Λ es inyectiva ya que si $[\widetilde{z} : \widetilde{w}], [\widetilde{s} : \widetilde{t}] \in \mathbb{CP}^1$ tal que $[zs : zt : ws : wt] = [\widetilde{zs} : \widetilde{zt} : \widetilde{ws} : \widetilde{wt}]$ entonces si suponemos que $z, s, \widetilde{z}, \widetilde{s} \neq 0$ (los otros casos son similares), existe $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ tal que

$$z = \frac{\lambda\widetilde{s}}{s}\widetilde{z}, \quad w = \frac{\lambda\widetilde{s}}{s}\widetilde{w}, \quad s = \frac{\lambda\widetilde{z}}{z}\widetilde{s}, \quad t = \frac{\lambda\widetilde{z}}{z}\widetilde{t},$$

por lo que $[z : w] = [\widetilde{z} : \widetilde{w}]$ y $[s : t] = [\widetilde{s} : \widetilde{t}]$. Λ es sobreyectiva, ya que si $[0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in B$, si suponemos $x_4 \neq 0$ entonces $[0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] = [0 : x_2x_3/x_4 : x_2 : x_3 : x_4]$ y $\Lambda([x_2/x_4 : 1], [x_3 : x_4]) = [0 : (x_2x_3)/x_4) : x_2 : x_3 : x_4]$. Además Λ en coordenadas se ven de la siguiente manera:

$$(z, s) \to (z, s), \quad (z, t) \to (z, t), \quad (w, s) \to (s, w), \quad (w, t) \to (t, w).$$

Por lo que como para toda $p \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1,\ det(D_p\Lambda) \neq 0$ entonces, Λ es biholomorfismo local biyectivo y por tanto un biholomorfismo. Por lo que hemos probado

c). A lo largo de esta tesis identificaremos a B con $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$.

Las acciones de $SL(2,\mathbb{C})$ sobre $SL(2,\mathbb{C})$ inducidas por la multiplicación a la izquierda y a la derecha del grupo, se extienden de manera natural a una acción izquierda $\bar{\phi}$ de $SL(2,\mathbb{C})$ sobre K y a una acción derecha $\widehat{\phi}$ de $SL(2,\mathbb{C})$ en K:

$$\bar{\phi} : SL(2,\mathbb{C}) \times K \to K, \qquad \widehat{\phi} : K \times SL(2,\mathbb{C}) \to K \tag{6}$$

$\bar{\phi}(A, [z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4]) = [z_0 : az_1 + bz_3 : az_2 + bz_4 : cz_1 + dz_3 : cz_2 + dz_4]$
$\widehat{\phi}([z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4], \widehat{A}) = [z_0 : \widehat{a}z_1 + \widehat{c}z_2 : \widehat{b}z_1 + \widehat{d}z_2 : \widehat{a}z_3 + \widehat{c}z_4 : \widehat{b}z_3 + \widehat{d}z_4]$
si

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ \widehat{A} := \begin{pmatrix} \widehat{a} & \widehat{b} \\ \widehat{c} & \widehat{d} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}), \ [z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4] \in K.$$

Afirmamos que $\bar{\phi}$ y $\widehat{\phi}$ son acciones bien definidas y $SL(2,\mathbb{C})$ y B son subvariedades invariantes bajo estas acciones.

Para ver que $\bar{\phi}$ es una función bien definida, notemos que si $A \in SL(2,\mathbb{C})$ fijo y llamamos $\bar{\phi}_A := \bar{\phi}|_{\{A\}\times K}$, si $[z_0 : z_1, z_2, z_3, z_4] \in \Theta$, entonces, como el producto de matrices de determinante uno tiene determinante uno, $\bar{\phi}_A([z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4]) \in \Theta$.

Si $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4] \in B$, verifiquemos carta a carta que $\bar{\phi}_A([z_0 : z_1, z_2, z_3, z_4]) \in B$; $\bar{\phi}_A$ se ve en una carta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (z,s) \to ([z:1],[s:1]) \ &\to \ [0 : zs : z : s : 1] \\ &\to [0 : s(az+b) : az+b : s(cz+d) : cz+d] \in B, \end{aligned}$$

ya que $s(az+b)(cz+d) - ((az+b)s(cz+d) = 0$. En las otras cartas, ocurre algo similar

$$\begin{aligned} &(w,t) \to [0 : a+bw : t(a+bw) : c+dw : t(c+dw)], \\ &(z,t) \to [0 : az+b : t(az+b) : cz+d : t(cz+d)], \end{aligned}$$

Por lo que efectivamente $\bar{\phi}$ está bien definida y $SL(2,\mathbb{C})$ y B son invariantes; lo mismo sucede para $\widehat{\phi}$.

Si $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4] \in K$, $\bar{\phi}(I, [z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4]) = \widehat{\phi}([z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4], I) = [z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4]$; si $A, \widehat{A} \in SL(2,\mathbb{C})$, si $z := [z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4] \in SL(2,\mathbb{C})$ entonces $\bar{\phi}(A, \bar{\phi}(\widehat{A}, z)) = \bar{\phi}(A\widehat{A}, z)$ y $\widehat{\phi}(\widehat{\phi}(z, A), \widehat{A}) = \widehat{\phi}(z, A\widehat{A})$ ya que el producto en $SL(2,\mathbb{C})$ es asociativo; si $z := [0 : zs : z : s : 1] \in B$, notemos que la función $\bar{\phi}$ vista en una carta coordenada se ve de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &(z,s) \to ([z:1],[s:1]) \to [0 : zs : z : s : 1] \to \left[0, s\frac{az+b}{cz+d} : \frac{az+b}{cz+d} : s : 1\right] \\ &\to \left(\left[\frac{az+b}{cz+d} : 1\right], [s:1]\right) \to \left(\frac{az+b}{cz+d}, s\right), \end{aligned}$$

por lo que $\bar{\phi}$ en B, en la primera coordenada es la acción ϕ de $SL(2,\mathbb{C})$ en $\mathbb{CP}^1$ en coordenadas vista en la sección anterior y, en la segunda coordenada es la identidad; por lo tanto si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}),\ \widehat{A} = \begin{pmatrix} \widehat{a} & \widehat{b} \\ \widehat{c} & \widehat{d} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}),$$

y T_A y $T_{\widehat{A}}$ las transformaciones de Möbius correspondientes, entonces $\bar{\phi}$ en coordenadas de B satisface

$$\bar{\phi}(A, \bar{\phi}(\widehat{A}, (z,s))) = \bar{\phi}(A, (T_{\widehat{A}}(z), s)) = (T_A \circ T_{\widehat{A}}(z), s) = (T_{A\widehat{A}}(z), s) = \bar{\phi}(A\widehat{A}, (z,s)).$$

$\widehat{\phi}$ en cartas en B se ve de la siguiente manera

$$\widehat{\phi}((z,s), \widehat{A}) = \left(z, \frac{\widehat{a}s + \widehat{c}}{\widehat{b}s + \widehat{d}}\right).$$

Sin embargo esta representación de $\widehat{\phi}$ no nos revela su carácter se acción; con el objetivo de obtener una expresión de $\widehat{\phi}$ en B que sí lo haga, consideremos el cambio de coordenadas $\rho : (z,s) \to (z, -1/s)$, entonces $\widehat{\phi}$ visto en estas nuevas coordenadas se ve

$$\widehat{\phi}((z,s), \widehat{A}) = \rho\left(\left(z, \frac{\widehat{c}s - \widehat{a}}{\widehat{d}s - \widehat{b}}\right)\right) = \left(z, \frac{\widehat{d}s - \widehat{b}}{-\widehat{c}s + \widehat{a}}\right);$$

por lo que como $SL(2,\mathbb{C})$ actúa por la derecha en $\mathbb{CP}^1$ mediante $\beta : \mathbb{CP}^1 \times SL(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{CP}^1$, $\beta([z:1], A) := [T_A^{-1}(z) : 1]$, si $A \in SL(2,\mathbb{C})$ y T_A su transformación de Möbius correspondiente, entonces como la acción $\widehat{\phi}$ en coordenadas de B se ve en la primera coordenada como la identidad y en la segunda coordenada como la acción β, por la misma razón que para $\bar{\phi}$, $\widehat{\phi}$ es acción.

Sea $\bar{\phi}_2$ la acción $\bar{\phi}$ vista en coordenadas, esto es si $i : \mathbb{C}^3 \to SL(2,\mathbb{C})$

$$i((b,c,d)) = \begin{pmatrix} \frac{bc+1}{d} & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$$

es una parametrización de $SL(2,\mathbb{C})$, por (5) sabemos que $j : \mathbb{C}^3 \to K, j(y_0, y_2, y_3) = [y_0 : y_2y_3 + y_0^2 : y_2 : y_3 : 1]$ es una parametrización de K entonces $(i \times j) : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to SL(2,\mathbb{C}) \times K$ es una parametrización de $SL(2,\mathbb{C}) \times K$, por lo que $\bar{\phi}_2 = (i \times j)^{-1} \circ \bar{\phi} \circ (i \times j)$ y

$$\begin{aligned} &\bar{\phi}((b,c,d),(y_0,y_2,y_3)) = (i \times j)^{-1}\bar{\phi}(A, [y_0 : y_2y_3 + y_0^2 : y_2 : y_3 : 1]) = \\ &(i \times j)^{-1}\left(\left[\frac{y_0}{cy_2+d} : \frac{1}{cy_2+d}\left(a(y_2y_3+y_0^2) + by_3\right) : \frac{ay_2+b}{cy_2+d} : y_3 + \frac{cy_0^2}{cy_2+d} : 1\right]\right) \\ &\left(\frac{y_0}{cy_2+d}, \frac{ay_2+b}{cy_2+d}, y_3 + \frac{cy_0^2}{cy_2+d}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

donde
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}), a = \frac{bc+1}{d}$$
y como cada una de las tres funciones coordenadas anteriores es holomorfa, la acción $\bar{\phi}$ es holomorfa. Más aún, si $A \in SL(2,\mathbb{C})$ fijo, entonces $\bar{\phi}_{A^{-1}} : K \to K$ es por la misma razón holomorfa y claramente es inversa de $\bar{\phi}_A$, por lo que $\bar{\phi}_A$ es un biholomorfismo, lo mismo sucede con $\widehat{\phi}_A := \widehat{\phi}|_{K\times\{A\}}$. Hemos demostrado $d)$ □

4.2. Un abierto donde Γ actúa de manera propiamente discontinua

Para cada grupo kleiniano $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ libre de torsión, construimos en esta subsección un abierto $U_\Gamma \subset K$ donde Γ actúa, vía ϕ, de manera propiamente discontinua (y por tanto libre), vemos también que U_Γ es el abierto más grande con tal propiedad; de esta manera utilizando los resultados de la sección 1, $Z_\Gamma := \Gamma\backslash U_\Gamma$ será una variedad diferenciable de dimensión 3 compleja. Sea Ω el dominio de discontinuidad de Γ en $\mathbb{CP}^1$; abusaremos un poco de la notación y denotaremos por $\bar{\phi}$ a cualquier restricción de la acción $\bar{\phi} : SL(2,\mathbb{C}) \times K \to K$ estudiada en la subsección anterior.

Proposición 15 $U_\Gamma := SL(2,\mathbb{C}) \cup (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$ *es abierto de* K*,* Γ*-invariante donde* Γ *actúa, vía* $\bar{\phi}$*, de manera propiamente discontinua.*

Demostración:
Como $\Lambda \times \mathbb{CP}^1$ es un compacto contenido en el espacio K que es Hausdorff, entonces $\Lambda \times \mathbb{CP}^1$ es cerrado, por lo que su complemento U_γ es abierto. En las secciones 1 y 2 definimos acciones de Γ en $SL(2,\mathbb{C})$, en $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$, en $\mathbb{H}^3$ y en $\mathbb{CP}^1$, por las proposiciones 7 y 10, las funciones $\bar{\pi}$ y $\widehat{\rho}$ son continuas y Γ-equivariantes, donde $\bar{\pi} : SL(2,\mathbb{C}) \to SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$, $\bar{\pi}(g) := [g]$ y $\widehat{\rho} : SL(2,\mathbb{C})/SU(2) \to \mathbb{H}^3$, $\widehat{\rho}([A]) := (ab, a^2)$, si
$$g \in SL(2,\mathbb{C}),\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}.$$

Además la acción de Γ en $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ definida mediante la acción ϕ (la acción de Γ en $\mathbb{CP}^1$ por transformaciones de Möbius) en el primer factor y la identidad en el segundo, hace a la proyección $\beta : \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$, $\beta([z:1],[w:1]) := [z:1], ([z:1],[w:1]) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ una función Γ-invariante con respecto a β y a ϕ.

Por lo que la función $\delta : K \to \mathbb{H}^3 \cup \mathbb{CP}^1$
$$\delta(g) := \begin{cases} \widehat{\rho} \circ \pi(\bar{g}) & g \in SL(2,\mathbb{C}), \\ [z:1] & ([z:1],[w:1]) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1, \end{cases}$$
es continua por pedazos en $SL(2,\mathbb{C})$ y en $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$. Además δ es Γ-equivariante en los subespacios Γ-invariantes $SL(2,\mathbb{C})$ y $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, por lo que δ es Γ-equivariante.

Mostraremos ahora que δ es continua; supongamos que $a_{y_0} := [y_0 : y_2y_3 + y_0^2 : y_2 : y_3 : 1] = [1 : \frac{y_2y_3}{y_0} + y_0 : \frac{y_2}{y_0} : \frac{y_3}{y_0} : \frac{1}{y_0}] \in SL(2,\mathbb{C})$, tal que $a_{y_0} = [y_0 : y_2y_3 + y_0^2 : y_2 : y_3 :$

$1] \to [0 : y_2y_3 : y_2 : y_3 : 1] = ([y_2 : 1], [y_3 : 1]) = (y_2, y_3) =: a \in B$ (esto último es en coordenadas). Queremos probar que lo anterior implica que $\delta(a_{y_0}) \to \delta(a) = y_2$.

Siguiendo lo calculado en (2) en la página 14 y por la definición de $\widehat{\rho}$, si $y_3 \neq 0$,

$$\delta(a_{y_0}) = \widehat{\rho} \circ \left(\left[\begin{pmatrix} |a_1| & \frac{b_1 a_1}{|a_1|} \\ 0 & |a_1|^{-1} \end{pmatrix} \right] \right) = (b_1 a_1, |a_1|^2)$$

donde

$$|a_1| = \frac{|y_0|}{|y_3|\sqrt{\frac{1}{|y_3|^2} + 1}}, \qquad y a_1 b_1 = \frac{y_0}{y_3\sqrt{\frac{1}{|y_3|^2} + 1}} + y_2;$$

por lo que $a_{y_0} \to a$ implica que $y_0 \to 0$, esto es, $\delta(a_{y_0}) \to (y_2, 0)$.

Entonces δ es continua y Γ-equivariante; además como $\mathbb{H}^3 \cup \Omega$ es abierto en $\mathbb{H}^3 \cup \mathbb{CP}^1$, entonces $U_\Gamma = \delta^{-1}(\mathbb{H}^3 \cup \Omega)$ es abierto en K y como $\delta(SL(2,\mathbb{C}) \cup (\Omega \times \mathbb{CP}^1)) = \mathbb{H}^3 \cup \Omega$ y Γ actúa de manera propiamente discontinua en $\Omega \cup \mathbb{H}^3$, tenemos por la Proposición 6, que Γ actúa de manera propiamente discontinua en $U_\Gamma = SL(2,\mathbb{C}) \cup (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$. $\square$

4.3. Una extensión equivariante de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$

Sea $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ un grupo kleiniano libre de torsión, sea Ω el dominio de discontinuidad de Γ en $\mathbb{CP}^1$, en la subsección anterior demostramos que $U_\Gamma := SL(2,\mathbb{C}) \cup (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$ es un abierto de K, Γ-invariante, vía $\bar{\phi}$, donde Γ actúa de manera propiamente discontinua. Por lo que Γ actúa de manera libre y propiamente discontinua en la variedad U_Γ y por la Proposición 3, $\Gamma\backslash U_\Gamma$ es variedad diferenciable de dimensión 3 compleja. Además, como $SL(2,\mathbb{C})$ y $\Omega \times \mathbb{CP}^1$ son invariantes bajo Γ, y como Γ actúa en B en el primer factor y como la identidad en el segundo, entonces $\psi : \Gamma\backslash(\Omega \times \mathbb{CP}^1) \to (\Gamma\backslash\Omega) \times \mathbb{CP}^1, \psi([x,y]) := ([x], y)$ es un biholomorfismo. Por lo que $\Gamma\backslash U_\Gamma = \Gamma\backslash\Big(SL(2,\mathbb{C}) \cup (\Omega \times \mathbb{CP}^1)\Big) = \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C}) \cup \Gamma\backslash(\Omega \times \mathbb{CP}^1) \approx \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C}) \cup (\Gamma\backslash\Omega \times \mathbb{CP}^1)$, en particular $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C}) \subset \Gamma\backslash U_\Gamma$. Además como $SL(2,\mathbb{C})$ es denso en U_Γ (ya U_Γ es abierto y denso en K), entonces $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$ es abierto y denso en $\Gamma\backslash U_\Gamma$. $\square$

Sean $\bar{\phi}$ y $\widehat{\phi}$ las acciones por la izquierda y por la derecha, respectivamente, de $SL(2,\mathbb{C})$ en K, estudiadas en las subsecciones anteriores

$$\bar{\phi} : SL(2,\mathbb{C}) \times K \to K, \qquad \widehat{\phi} : K \times SL(2,\mathbb{C}) \to K$$

Proposición 16 *El grupo $SL(2,\mathbb{C})$ actúa por la derecha en $\Gamma\backslash U_\Gamma$, mediante $\widehat{\lambda} : \Gamma\backslash U_\Gamma \times SL(2,\mathbb{C}) \to \Gamma\backslash U_\Gamma$, definida por $\widehat{\lambda}([Z], A) := [\widehat{\phi}(Z, A)]$, para toda $A \in SL(2,\mathbb{C})$, $Z = [z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4] \in U_\Gamma$.*

Demostración:
Observemos primero que U_Γ es invariante bajo la acción $\widehat{\phi}$ ya que si $Z := [z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4] \in U_\Gamma$; si $Z \in SL(2,\mathbb{C})$, para todo $A \in SL(2,\mathbb{C})$, $\widehat{\phi}(A, Z) \in SL(2,\mathbb{C}) \subset U_\Gamma$;

si $Z \in B$, entonces $Z = (z,s) \in \Omega \times \mathbb{C}$ (visto en coordenadas), por lo que para todo $A \in SL(2,\mathbb{C})$

$$\widehat{\phi}((z,s),A) = (z, \frac{ds-b}{-cs+a}) \in \Omega \times \mathbb{C} \subset U_\Gamma.$$

Afirmamos que $\bar{\phi} : \Gamma \times U_\Gamma \to U_\Gamma$ y $\widehat{\phi} : U_\Gamma \times SL(2,\mathbb{C}) \to U_\Gamma$ conmutan, ya que si $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4] \in SL(2,\mathbb{C})$, es sólo la asociatividad de matrices y si $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4] \in B$ y

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}),\ \widehat{A} = \begin{pmatrix} \widehat{a} & \widehat{b} \\ \widehat{c} & \widehat{d} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}),$$

en coordenadas de B tenemos que

$$\bar{\phi}(A, \widehat{\phi}((z,s),\widehat{A})) = \widehat{\phi}(\phi(A,(z,s)),\widehat{A}) = \left(\frac{az+b}{cz+d}, \frac{\widehat{d}s-\widehat{b}}{-\widehat{c}s+\widehat{a}} \right).$$

Notemos que $\widehat{\lambda}$ está bien definida; si $Z, \widetilde{Z} \in U_\Gamma,\ Z \sim \widetilde{Z}$, entonces existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\bar{\phi}(\gamma, Z) = \widetilde{Z}$, por lo que

$$\bar{\phi}(\gamma, \widehat{\phi}(Z,A)) = \widehat{\phi}(\bar{\phi}(\gamma,Z),A) = \widehat{\phi}(\widetilde{Z},A),$$

esto es, $\widehat{\phi}(Z,A) \sim \widehat{\phi}(\widetilde{Z},A)$.

Finalmente observemos que $\widehat{\lambda}$ es acción ya que

$$\lambda([Z],e) = [\widehat{\phi}(Z,e)] = [Z]$$
$$\lambda(\lambda([Z],A),\widehat{A}) = \lambda([\widehat{\phi}(Z,A)],\widehat{A}) = [\widehat{\phi}(\widehat{\phi}(Z,A),\widehat{A})] = [\widehat{\phi}(Z,A\widehat{A})] = \lambda([Z],A\widehat{A}).$$

□

Proposición 17 *La variedad* $\Gamma \backslash SL(2,\mathbb{C}) \cup (\Gamma \backslash \Omega \times \mathbb{CP}^1)$ *es una extensión equivariante del espacio homogéneo* $\Gamma \backslash SL(2,\mathbb{C})$ *y un espacio cuasihomogéneo de* $SL(2,\mathbb{C})$.

Demostración:
Sea $i : \Gamma \setminus SL(2,\mathbb{C}) \to \Gamma \setminus SL(2,\mathbb{C}) \cup (\Gamma \setminus \Omega \times \mathbb{CP}^1)$ la inclusión; por las definiciones de las acciones λ y $\widehat{\lambda}$ de $SL(2,\mathbb{C})$ en $\Gamma \backslash SL(2,\mathbb{C})$, si $Z, A \in SL(2,\mathbb{C})$

$$i \circ \lambda([Z],A) = i([ZA]) = \Big[\ [1 : az_1 + cz_2 : bz_1 + dz_2 : az_3 + cz_4 : bz_3 + dz_4]\ \Big] =$$

$$\widehat{\lambda}([Z],A) = \widehat{\lambda}(i([Z]),A).$$

Por que la variedad $Z_\Gamma := \Gamma \backslash SL(2,\mathbb{C}) \cup (\Gamma / \Omega \times \mathbb{CP}^1)$ es una extensión equivariante de $\Gamma \backslash SL(2,\mathbb{C})$ y un espacio cuasihomogéneo de $SL(2,\mathbb{C})$. □

Ahora buscaremos subgrupos $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ kleinianos y libres de torsión, tales que $\Gamma \backslash U_\Gamma$ sea compacto; para esto estudiaremos la compactificación por puntas de variedades diferenciables y encontraremos condiciones suficientes para que esto suceda.

5. Compactificación por puntas

A continuación, durante toda esta sección, estudiaremos las ideas y resultados de Guillot en [6] y de Raymond en [7].

Las variedades diferenciables compactas presentan una serie de facilidades para trabajar con ellas en matemáticas; tales espacios tienen una multitud de propiedades útiles, las cuales se utilizan a la hora de demostrar teoremas o cuando se realizan construcciones. Por ello estamos interesados en encontrar condiciones bajo las cuales la variedad Z_Γ, construida por Guillot en [6] y estudiada por nosotros en la sección anterior, es compacta.

Sabemos que un espacio topológico Hausdorff, localmente compacto, que no sea compacto, siempre se puede compactificar por un punto; sin embargo estamos interesados en saber cuándo la variedad $Z_\Gamma = \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C}) \cup (\Gamma\backslash\Omega \times \mathbb{CP}^1)$ es una compactificación de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$ y, como $\Gamma\backslash\Omega \times \mathbb{CP}^1$ tiene más de un punto, la compactificación por un punto no nos sirve.

Por otro lado, la compactificación por puntas de variedades diferenciables, estudiada en esta sección nos dará condiciones suficientes para que nuestra variedad Z_Γ sea compacta.

La idea geométrica intuitiva de una punta en un espacio topológico es muy sencilla, sin embargo, formalizarla no lo es tanto. Intuitivamente puede pensarse de la siguiente manera: si $\mathcal{K} := \{K_n\}$ es una sucesión creciente de compactos anidados (que cumplen ciertas propiedades que veremos más adelante), a medida que la sucesión de compactos crece, las componentes conexas de $M - K_n$ van haciéndose más chicas y posiblemente dividiéndose o desapareciendo; de esta manera formamos un árbol en el que cada componente conexa de $M - K_n$ representa una arista que se ramifica en más aristas si $M - K_{n+1}$ consta de más componentes conexas contenidas en $M - K_n$ y cada rama infinita representa a una punta.

Por ejemplo, como el complemento de cualquier compacto contenido en $\mathbb{R}$ tiene dos componentes conexas, el árbol que se forma tiene dos ramas infinitas, por lo que $\mathbb{R}$ tiene dos puntas; mientras que como el complemento de cualquier compacto contenido en $\mathbb{C}$ es conexo, el árbol que se forma tiene sólo una rama infinita, por lo que $\mathbb{C}$ tiene una punta.

Durante toda la sección M y N serán arbitrarias variedades diferenciables, sin frontera y conexas.

En esta sección formalizaremos la definición de punta de M dada en el párrafo anterior, daremos una topología en el espacio M unión el espacio de puntas de M, mostraremos que este espacio es una compactificación de M y que esta construcción siempre la podemos hacer. Veremos que M es compacto si y sólo si no tiene puntas; que si K es una subvariedad encajada compacta de M y $M-K$ tiene un número finito de puntas entonces, M es compacta si y sólo si el número de puntas de $M-K$ es igual al número de componentes conexas de K. Este último resultado nos dará la respuesta a lo que buscamos (ver el final de la sección anterior), ya que si $\Gamma\backslash\Omega$ es compacto y $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$ tiene un número finito de puntas, entonces como $\Gamma\backslash\Omega \times \mathbb{CP}^1$ es una subvariedad encajada compacta de Z_Γ, bajo estas condiciones, Z_Γ será compacto si y sólo si el número de puntas de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$ es igual al número de componentes conexas de $\Gamma\backslash\Omega$.

Finalmente veremos que si existe un fibrado entre las variedades M y N con fibras conexas y compactas entonces, el espacio de puntas de M es igual al espacio de puntas de N y recordando el fibrado de la Proposición 10, pág. 18, entre $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$ y $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$, podremos calcular el espacio de puntas de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$ y compararlo con el número de componentes compactas de $\Gamma\backslash\Omega$; es aquí donde el estudio de variedades de dimensión real 2 y 3 nos da información sobre el estudio de variedades de dimensión 3 compleja.

En la siguiente sección daremos ejemplos de grupos kleinianos libres de torsión para los cuales, utilizando estos argumentos, la variedad Z_Γ es compacta.

5.1. Existencia de la compactificación por puntas

La siguiente Proposición nos dará más adelante la existencia de la compactificación por puntas de variedades diferenciables.

Proposición 18 *Existe una sucesión creciente de compactos*
$\{K_n : K_n \subset M,\ K_n \text{ compacto} : \text{para toda } n \in \mathbb{N},\ K_n \subset K_{n+1}\}$*, tal que:*
1) $M = \cup_n K_n = \cup_n K_n^\circ$ *y* $K_n \subset K_{n+1}^\circ$.
2) Para toda $n \in \mathbb{N}$, $M - K_n$ *tiene un número finito de componentes conexas.*
3) Se tiene que M *es compacta si y sólo si esta unión es finita*

Demostración:
Sabemos por topología diferencial que para toda variedad diferenciable M existe una función suave y propia $f : M \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$; por el Lema de Sard sabemos que Lebesgue-casi todo punto en $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ es valor regular, sea $n_1 \in \mathbb{R}^+\cup\{0\}$ valor regular de f, tal que $f^{-1}(n_1) \neq \emptyset$. Como $f^{-1}([0,n_1))$ y $f^{-1}((n_1,\infty))$ son abiertos en M, son subvariedades encajadas de M de dimensión igual a la de M y sin frontera, por lo que todos los puntos son interiores, por lo que $Fr(f^{-1}([0,n_1])) \subset f^{-1}(n_1)$; como n_1 es valor regular, $f^{-1}(n_1)$ es subvariedad encajada compacta de codimensión 1.

Si $z \in f^{-1}(n_1) - Fr(f^{-1}([0,n_1]))$ entonces existe $U \subset M$, $z \in U$ tal que para todo $u \in U$, $f(z) \leq n_1$, pero esto no puede suceder ya que z sería un punto crítico, en contradicción a como escogimos a n_1. Sea $K_1 := f^{-1}([0,n_1])$. Por lo anterior $Fr(f^{-1}([0,n_1])) = f^{-1}(n_1)$, entonces K_1 es una subvariedad encajada compacta de M con frontera $f^{-1}(n_1)$ y como $f^{-1}(n_1)$ tiene un número finito de componentes conexas (porque si no lo fuera se contradiciría el hecho de que es una subvariedad encajada compacta), entonces $M - K_1$ tiene un número finito de componentes conexas, una por cada componente de $f^{-1}(n_1)$.

Notemos que M es compacta si y sólo si f es acotada .

$\Rightarrow$) $f(M) \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ compacto, por tanto acotado.

$\Leftarrow$) Si f es acotada, entonces existe $H \in \mathbb{R}^+$ tal que $M = f^{-1}([0,H])$, por lo que, como f es propia, M es compacto.

Sea $\{n_l\}$ una sucesión estrictamente creciente de valores regulares de f, tales que $\lim_{l\to\infty} n_l = \infty$, entonces como M es conexa, pueden suceder dos cosas, la primera es exista $L \in \mathbb{N}$, tal que para todo $l \ \geq L, f^{-1}(n_l) = \emptyset$ (si M es compacto) y la segunda es que para todo $l \in \mathbb{N},\ f^{-1}(n_l) \neq \emptyset$ (si M no es compacto).

Para todo $l \in \mathbb{N}$ Sea $K_{n_l} := f^{-1}([0, n_l])$. Entonces por los mismos argumentos que para n_1, si $f^{-1}(n_l) \neq \emptyset$, tenemos que K_{n_l} es una subvariedad compacta con frontera $f^{-1}(n_l)$ compacta y con un número finito de componentes conexas, por lo que $M - K_{n_l}$ tiene un numero finito de componentes conexas; si $f^{-1}(n_l) = \emptyset$, entonces $f^{-1}([0, n_l]) = M$. Por lo que se cumple 2.

Claramente, $M = f^{-1}(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) = f^{-1}(\cup_l [0, n_l]) = \cup_l K_{n_l} = f^{-1}(\cup_l [0, n_l)) \subset \cup_l K^\circ_{n_l}$, $K_{n_l} = f^{-1}([0, n_l]) \subset f^{-1}([0, n_{l+1}))$, esto es, se cumple 1).

Claramente M es compacto si y sólo si la unión anterior es finita (se cumple 3). $\square$

Supongamos $K \subset M$ compacto. Si $C \subset M - K$ es una componente conexa, diremos que C es una *componente conexa acotada* si $\bar{C}$ es compacta o equivalentemente, C es una componente conexa no acotada si $\bar{C}$ no es compacta.

Dada una sucesión creciente de compactos $\{K_\alpha : K_\alpha \subset M\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$, diremos que la sucesión *tiene la propiedad A* si cumple lo siguiente:
1) $M = \cup_\alpha K_\alpha = \cup_\alpha K^\circ_\alpha$ y $K_\alpha \subset K^\circ_{\alpha+1}$.
2) Para toda $\alpha \in \mathbb{N}$, $M - K_\alpha$ tiene un número finito de componentes conexas.

Observemos que la Proposición 18 nos dice que en una variedad diferenciable, siempre existen sucesiones crecientes de compactos con la propiedad A.

Proposición 19 *Sea $\mathcal{K} := \{K_\alpha\}$ sucesión creciente de compactos con la propiedad A. Entonces se tiene que*
1) Para todo $K \subset M$ compacto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_n$.
2) M es compacta si y sólo si existe $L \in \mathbb{N}$ tal que $M = K_L$.
3) Si $F \subset M$ es cerrado, F es compacto si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F \subset K_n$.

Demostración:
1) Si $K \subset M$ compacto y no es cierto que exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_n$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $K - K_n$ tiene infinitos elementos.

Sea $x_1 \in K - K_1,\ x_2 \in K - K_2, x_2 \neq x_1$; para toda $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in K - K_n, x_n \neq x_j$ para todo $j < n$; como K es compacto y $\{x_n\} \subset K$, existe una subsucesión convergente, supongamos $x_n \to x$; por definición de la propiedad A existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in K^\circ_m$, esto es, existe U abierto que contiene a x tal que $U \subset K_m$ y como $x_n \to x$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N,\ x_n \in U \subset K_m$. Por lo que para toda $n \geq max\{N, m\},\ x_n \in K^c_n \subset K^c_m$ y $x_n \in U \subset K_m$, lo cual es evidentemente una contradicción.

2) $\Rightarrow$) Se sigue directamente del inciso 1. $\Leftarrow$) Es trivial.

3) $\Rightarrow$) Es sólo el inciso 1). $\Leftarrow$) si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F \subset K_n$, entonces F es compacto. $\square$

Bajo las condiciones de la Proposición anterior, si $F \subset M$ es un compacto, diremos entonces que la sucesión de compactos $\mathcal{K}$ con la propiedad A *eventualmente se come* a F.

5.2. El Espacio de Puntas

Fijemos por el momento una sucesión $\mathcal{K} := \{K_n\}$ de compactos con la propiedad A. En esta subsección definimos un conjunto B al que llamamos espacio de puntas de M, que depende de la sucesión de compactos $\mathcal{K}$, y una topología en B que lo hace compacto. En la siguiente subsección definiremos una topología en $X := M \cup B$ que extenderá a la de M y a la de B, esto es, tal que las topologías de M y B como subespacios de X sean justo las que teníamos y mostraremos que el espacio topológico X no depende de la sucesión de compactos $\mathcal{K}$, lo que nos facilitara el cálculo de este espacio.

Para toda $\alpha \in \mathbb{N}$, sea $A_\alpha := \{A^i_\alpha\}_{i=1}^{n_\alpha}$ la colección de todas las componentes conexas no acotadas de $M - K_\alpha$. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{N},\ \alpha < \beta$, entonces por definición de la sucesión de compactos $\{K_\alpha\}$ con la propiedad A, $K_\alpha \subset K_\beta$, sea $\pi^\beta_\alpha : A_\beta \to A_\alpha$ el mapeo natural que manda cada componente no acotada A^i_β de $M - K_\beta$ a la única componente no acotada A^i_α de $M - K_\alpha$ que contiene a A^i_β. Entonces el sistema $\{A_\alpha, \phi^\beta_\alpha\}$ define un límite inverso de conjuntos:

$$
\begin{aligned}
B := \varprojlim A_\alpha &:= \{(A^{i_\alpha}_\alpha)_\alpha :\ \forall\ \alpha \quad A^{i_\alpha}_\alpha \in A_\alpha,\ \forall\ \gamma, \beta,\ \gamma < \beta \quad A^{i_\beta}_\beta \subset A^{i_\gamma}_\gamma\} \\
&= \ \{(A^{i_\alpha}_\alpha)_\alpha :\ \forall\ \alpha \quad A^{i_\alpha}_\alpha \in A_\alpha,\ \forall\ \gamma, \beta,\ \gamma < \beta \quad \pi^\beta_\gamma(A^{i_\beta}_\beta) = A^{i_\gamma}_\gamma\}
\end{aligned}
$$

que es claramente un subconjunto de $\prod_\alpha A_\alpha$; los elementos de B los llamamos *puntas* de M y el conjunto B lo llamamos el *espacio de puntas* de M.

Si $a \in B$, para toda $\alpha \in \mathbb{N}$, sea $\pi_\alpha : B \to A_\alpha$ la proyección en la α- ésima coordenada, entonces claramente para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N},\ \alpha < \beta,\ \pi^\beta_\alpha \circ \pi_\beta = \pi_\alpha$.

Proposición 20 *Sea A^i_α una componente conexa de $M - K_\alpha$; A^i_α es una componente conexa acotada si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^i_\alpha \subset K_n$*

Demostración:
$\Rightarrow$) es justo la Proposición 19.
$\Leftarrow$) Si $A^i_\alpha \subset K_n$ entonces, $\bar{A}^i_\alpha \subset K_n$, por lo que $\bar{A}^i_\alpha$ es compacto.

Proposición 21 *Para todo $\alpha \in \mathbb{N}$ consideremos a A_α con la topología discreta, $\prod_\alpha A_\alpha$ con la topología producto de Tychonoff y a B con la topología de subespacio (denotémosla τ_{B1}), entonces B es compacto con respecto a τ_{B1}.*

Demostración:
Sabemos que para todo $\alpha \in \mathbb{N}$, A_α es finito. Supongamos $\mathcal{F} := \{\mathcal{V}_\eta\}_\eta$ cubierta abierta de B, tomemos arbitrario $\mathcal{V}_\beta \in \mathcal{F}$, entonces existe básico $\prod_\alpha U_\alpha \cap B \in \tau_{B_1},\ \prod_\alpha U_\alpha \cap B \subset V$, tal que para todo $\alpha \in \mathbb{N}$, excepto para un numero finito, $U_\alpha = A_\alpha$. Entonces, como $\prod_\alpha U_\alpha$ cubre a todos excepto a un número finito de puntos en $\prod_\alpha A_\alpha$, $\prod_\alpha U_\alpha \cap B$,

y por lo tanto V, cubre a todos excepto a un número finito de elementos en B; tomemos un elemento de $\mathcal{F}$ por cada elemento en B no contenido en V; entonces formamos una subcubierta finita de $\mathcal{F}$. $\square$

Proposición 22 *Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N},\ \alpha < \beta,\ \pi_\alpha^\beta : A_\beta \to A_\alpha$ es sobre.*

Demostración:
Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{N},\ \alpha < \beta$ y A_α^i una componente conexa no acotada de $M - K_\alpha$, esto es, $\bar{A}_\alpha^i$ no es compacto; sean $A_\beta^1, \ldots, A_\beta^s$ todas las componentes conexas de $M - K_\beta$ contenidas en A_α^i. Si para todo $j = 1, \ldots, s$ se tiene que A_β^j es acotada, entonces como $A_\alpha^i \subset K_\beta \cup A_\beta^1 \cup \ \ldots \ \cup A_\beta^s$, tenemos que $\bar{A}_\alpha^i \subset K_\beta \cup \bar{A}_\beta^1 \cup \ \ldots \ \cup \bar{A}_\beta^s$; por lo que $\bar{A}_\alpha^i$ es un cerrado contenido en un compacto, por tanto es compacto. Por lo tanto habría una contradicción. $\square$

5.3. Compactificación por puntas

Definiremos ahora una topología en $X = M \cup B$, veremos que esta topoloía extenderá las topologías que tenemos definidas en M y B; mostraremos que X es una compactificación de M y que, M es compacto si y sólo si no tiene puntas.

Veremos también que esta compactificación no depende de la sucesión de compactos con la propiedad A que escojamos, que si K es una subvariedad encajada compacta de M, el espacio de puntas de $M - K$ es igual al espacio de puntas de M más k puntos aislados, donde k es el número de componentes conexas de K y finalmente mostraremos que si $\pi : M \to N$ es un fibrado diferenciable entre variedades diferenciables con fibras compactas y conexas entonces, los espacios de puntas de M y N son homeomorfos.

Para todo $a \in B,\ \alpha \in \mathbb{N}$, sea $A_\alpha^{\alpha(a)} := \pi_\alpha(a)$, la componente no acotada de A_α que es la α-ésima coordenada de a, sea $B^{\alpha(a)}$ el conjunto de puntas de $b \in B$ tales que $\pi_\alpha(b) = A_\alpha^{\alpha(a)}$. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todos los abiertos de M y de todos los conjuntos de la forma $N_a^\alpha := A_\alpha^{\alpha(a)} \cup B^{\alpha(a)}$.

Proposición 23 *La colección $\mathcal{B}$ es una base para una topología en X que extiende la topología de M y la de B.*

Demostración:
Claramente la intersección de dos abiertos de M es abierto de M y $\mathcal{B}$ cubre a X; si $N_a^\alpha, N_b^\beta \in \mathcal{B}$ no tienen puntas en común, entonces la intersección es abierto de M y por tanto elemento de $\mathcal{B}$. Para todo $\alpha \in \mathbb{N}$, sea $A_\alpha := \{A_\alpha^i : i = 1, \ldots, n_\alpha\}$ la colección de todas las componentes conexas no acotadas de $M - K_\alpha$; por propiedades de conexidad para todo $\alpha, \beta,\ \alpha \neq \beta$, para todo $i = 1, \ldots, n_\alpha, j = 1, \ldots, n_\beta$, $A_\alpha^i \subset A_\beta^j$, $A_\beta^j \subset A_\alpha^i$ ó $A_\alpha^i \cap A_\beta^j = \emptyset$. Esto es, para cualesquiera dos componentes conexas no acotadas no ajenas, una está contenida en la otra. Por lo anterior, si $a, b \in B$ son puntas distintas y $N_a^\alpha := A_\alpha^{\alpha(a)} \cup B^{\alpha(a)}$, $N_b^\beta := A_\beta^{\beta(a)} \cup B^{\alpha(a)}$ son dos elementos no ajenos de $\mathcal{B}$, si suponemos que $\alpha \leq \beta$, entonces $N_b^\beta \subset N_a^\alpha$, por lo que $N_a^\alpha \cap N_b^\beta = N_b^\beta$.

Claramente la topología en X extiende a la de M; de igual manera la topología en X extiende a la de B, ya que una base de B con la topología de subespacio de X es la coleccin $\{N_\alpha^a \cap B\}_{\alpha\in\mathbb{N},a\in B}$, una base de la topología τ_{B1} es $\{B^{\alpha(a)}\}_{\alpha\in\mathbb{N},a\in B}$ y $N_\alpha^a \cap B = B^{\alpha(a)}$. $\square$

Teorema 24 *El espacio X es Hausdorff y compacto.*

Demostración:
Probaremos primero que X es Hausdorff; sean $a, b \in B$ puntas distintas, sea $\alpha := min\{n \in \mathbb{N} : \pi_\alpha(a) \neq \pi_\alpha(b)\}$, entonces $A_\alpha^{\alpha(a)} \cup B^{\alpha(a)}$ y $A_\alpha^{\alpha(b)} \cup B^{\alpha(b)}$ son dos abiertos ajenos de X que contienen a a y a b, respectivamente.

Supongamos que $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta de básicos de X; como B es compacto, existe una subcolección finita $\mathcal{C}_1 := \{A_{n_1}^{n_1(a_1)} \cup B^{n_1(a_1)}, \dots, A_{n_k}^{n_k(a_k)} \cup B^{n_k(a_k)}\}$ de $\mathcal{C}$ que cubre a B, donde $a_1, \dots, a_k \in B$, para toda $i = 1, \dots k$, sea $C_{1,i} := A_{n_i}^{n_i(a_i)} \cup B^{n_i(a_i)}$, sea $U := \cup_{i=1}^k C_{1,i}$, $\alpha := max\{n_j : j = 1, \dots, k\}$, queremos ver que $X - U$ es compacto.

Si U contiene a todas las componentes conexas de $M - K_\alpha$, entonces terminamos (ya que sólo faltaría por cubrir un compacto). Si existe una componente conexa A de $M - K_\alpha$ no contenida en U, entonces como las componentes conexas o son ajenas o una está contenida en la otra, A no interseca a U, como para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}, \alpha < \beta$, $\pi_\alpha^\beta : A_\beta \to A_\alpha$ es sobre, si A fuese no acotada existiría una punta en B cuya α-ésima coordenada es A y que no está contenida en U; lo cual es una contradicción; entonces A es acotada.

Por lo que $X - U$ es un cerrado y es la unión de K_α con un número finito de componentes conexas acotadas de $M - K_\alpha$, por lo que $X - U$ es la unión de K_α con un número finito de compactos (las cerraduras de algunas componentes conexas acotadas de $M - K_\alpha$), por lo tanto $X - U$ es compacto y podemos encontrar una subcolección finita de $\mathcal{C}$ que lo cubra y unirla con $\mathcal{C}_1$ y así encontrar subcubierta finita de X. $\square$

Teorema 25 *La variedad M es compacta si y sólo si no tiene puntas ($B = \emptyset$).*

Demostración:
$\Rightarrow$) Supongamos que M compacto, entonces por la Proposición 19 existe $L \in \mathbb{N}$ tal que $M = K_L$. Por lo que para toda $\alpha \geq L$ la única componente conexa de $M - K_\alpha$ es $\emptyset$, por lo que no hay componentes conexas no acotadas y por lo tanto no hay puntas, esto es $B = \emptyset$.

$\Leftarrow$) Si no hay puntas, entonces para toda $\alpha \in \mathbb{N}$, $A_\alpha = \emptyset$, ya que si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A_\alpha^i \in A_\alpha$, como para toda γ, β, $\gamma < \beta$, π_γ^β es sobre, por lo que existiría una punta; entonces M es igual a K_1 unión las componentes conexas $M - K_1$ (todas acotadas), por lo tanto, M es compacto. $\square$

Teorema 26 *Si $\mathcal{K} := \{K_n\}$ y $\widehat{\mathcal{K}} := \{\widehat{K}_n\}$ son dos sucesiones crecientes de compactos en M con la propiedad A, B y $\widehat{B}$ los espacios de puntas correspondientes y $X := M \cup B$ y $\widehat{X} := M \cup \widehat{B}$ las compactificaciones por puntas correspondientes; entonces $X \approx \widehat{X}$.*

Demostración:
Sea $a \in B, a = \{A_1^{a_1}, A_2^{a_2}, \dots A_n^{a_n}, \dots\}$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n^{a_n}$ es una componente conexa no acotada de $M - K_n$, deseamos definir una punta $\widehat{a} \in \widehat{B}$. Para

todo $j \in \mathbb{N}$, sea $n_j := \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : \widehat{K}_j \subset K_n\}$, sea $\widehat{A}_j^{\widehat{a}_j}$ la única componente conexa de $M - \widehat{K}_j$ que contiene a $A_{n_j}^{a_{n_j}}$; entonces como para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n^{a_n}$ es una componente conexa no acotada, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{A}_n^{\widehat{a}_n}$ es una componente conexa no acotada. Como para todo $j \in \mathbb{N}$, $\widehat{A}_j^{\widehat{a}_j} \supset A_{n_j}^{a_{n_j}} \supset A_{n_{j+1}}^{a_{n_{j+1}}}$ y $\widehat{A}_{j+1}^{\widehat{a}_{j+1}} \supset A_{n_{j+1}}^{a_{n_{j+1}}}$, entonces $\widehat{A}_j^{\widehat{a}_j} \cap \widehat{A}_{j+1}^{\widehat{a}_{j+1}} \neq \emptyset$ y como todas las componentes conexas determinadas por $\widehat{\mathcal{K}} := \{\widehat{K}_n\}$ son ajenas o una está contenida en la otra, $\widehat{A}_{j+1}^{\widehat{a}_{j+1}} \subset \widehat{A}_j^{\widehat{a}_j}$. Por lo que $\widehat{a} := \{\widehat{A}_{n_1}^{\widehat{a}_{n_1}}, \ldots, \widehat{A}_{n_j}^{\widehat{a}_{n_j}}, \ldots\} \in \widehat{B}$. Sea $F : X \to \widehat{X}$, $F(x) := x$ si $x \in M$, $F(a) := \widehat{a}$ si $a \in B$. Por lo anterior F está bien definida; adems es inyectiva, ya que si $a, b \in B$, $a \neq b$, sea $n_1 := \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : \widehat{K}_1 \subset K_n \ y \ A_n^{a_n} \neq A_n^{b_n}\}$, sea $l_1 := \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : K_{n_1} \subset \widehat{K}_n\}$, entonces $\widehat{A}_{l_1}^{\widehat{a}_{l_1}} \neq \widehat{A}_{l_1}^{\widehat{b}_{l_1}}$ por lo que $\widehat{a} \neq \widehat{b}$.

Mostraremos ahora que F es un homeomorfismo; supongamos N_a^α básico que contiene a la punta $a = (a_n) \in B$ definida como antes, $N_a^\alpha = A_\alpha^{a_\alpha} \cup B^{a_\alpha}$, Sea $m_1 := \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : K_\alpha \subset \widehat{K}_n\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad (sólo para simplificar la notación) que hay 3 componentes conexas no acotadas de $M - \widehat{K}_{m_1}$ contenidas en $A_\alpha^{a_\alpha}$, entonces existen $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c} \in \widehat{B}$, con m_1-ésima coordenadas las componentes conexas no acotadas de $M - \widehat{K}_{m_1}$ contenidas en $A_\alpha^{a_\alpha}$, denotadas por $\widehat{A}_{m_1}^{\widehat{a}_{m_1}}, \widehat{A}_{m_1}^{\widehat{b}_{m_1}}, \widehat{A}_{m_1}^{\widehat{c}_{m_1}}$. Entonces $F(N_a^\alpha) = A_\alpha^{a_\alpha} \cup \widehat{B}^{\widehat{a}_{m_1}} \cup \widehat{B}^{\widehat{b}_{m_1}} \cup \widehat{B}^{\widehat{c}_{m_1}} = A_\alpha^{a_\alpha} \cup N_{\widehat{b}}^{m_1} \cup N_{\widehat{a}}^{m_1} \cup N_{\widehat{c}}^{m_1}$ es abierto es $\widehat{X}$, ya que $\widehat{B}^{\widehat{a}_{m_1}} := \{x \in \widehat{B} : \pi_{m_1}(x) = \widehat{A}_{m_1}^{\widehat{a}_{m_1}}\}$ es abierto en $\widehat{B}$, (al igual que $\widehat{B}^{\widehat{b}_{m_1}}$ y $\widehat{B}^{\widehat{c}_{m_1}}$) y $N_{\widehat{a}}^{m_1} := \widehat{A}_{m_1}^{\widehat{a}_{m_1}} \cup \widehat{B}^{\widehat{a}_{m_1}}$ es básico en $\widehat{X}$ (al igual que $N_{\widehat{b}}^{m_1}$ y $N_{\widehat{c}}^{m_1}$) . Por lo que F es abierta e inyectiva. Definamos ahora $G : \widehat{X} \to X$ de la misma manera en que definimos F, sólo intercambiando los papeles de B y $\widehat{B}$, entonces G es abierta e inyectiva por la misma razón que F lo fue. Deseamos ver que F y G son inversas. Si $a \in B$ definida como antes, sea $b := G \circ F(a) \in B$, $b = \{A_1^{b_1}, A_2^{b_2}, \ldots\}$, supongamos que $a \neq b$, sea $l \in \mathbb{N}$ tal que $A_b^{b_l} \neq A_a^{a_l}$, sea $m := \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : K_l \subset \widehat{K}_n\}$, entonces si como antes, $\widehat{a} := F(a)$, $\pi_m(\widehat{a}) := A_{\widehat{a}}^{\widehat{a}_m} \subset A_a^{a_l}$, entonces por construcción de $G \circ F(a)$, la coordenada l-ésima de $G \circ F(a)$ es la única componente conexa de $M - K_l$ que contiene a $A_{\widehat{a}}^{\widehat{a}_m}$, es $A_a^{a_l}$, contradicción. Entonces $G \circ F$ es la identidad, de la misma manera se muestra que $F \circ G$ es la identidad. Por lo que F es un homeomorfismo. $\square$

Proposición 27 *Si $K \subset M$ es una subvariedad encajada compacta y conexa. Entonces el espacio de puntas de $M - K$ es homeomorfo a la unión del espacio de puntas de M más un punto aislado.*

Demostración:
Sea B_M el espacio de puntas de M, B_{M-K} el espacio de puntas de $M - K$; daremos una función $F : B_M \to B_{M-K}$, mostraremos que es un homeomorfismo sobre su imagen y que $B_{M-K} - F(B_M)$ es un punto aislado.

Sea $\mathcal{A} := \{K_n\}$ una sucesión de compactos en M con la propiedad A; como K es una subvariedad encajada compacta de M, por topología diferencial sabemos que existe en M una vecindad tubular UK de K de radio $\epsilon > 0$ (para algún $\epsilon > 0$), tal que $\bar{UK} \subset M$; para toda $n \in \mathbb{N}$, sea UK_n vecindad tubular de K de radio $\frac{\epsilon}{n}$; $K_n' := K_n \cap (M - UK_n)$ es compacto y como $\cap_n UK_n = \cap_n \bar{UK}_n = K$, entonces $M - K = \cup_n (M - UK_n)$, $M - K = \cup_n (M - \bar{UK}_n) = \cup_n (M - UK_n)^\circ$.

Afirmamos que $M-K=\cup_n\Big(K_n\cap(M-UK_n)\Big)=\cup_n\Big(K_n\cap(M-UK_n)\Big)^\circ$. Para probar esta última afirmación observemos de manera trivial que es suficiente probar que $M-K\subset\cup_n(M-UK_n)^\circ$. Supongamos $x\in M-K$, entonces por lo anterior y recordando que $\mathcal{A}$ es una sucesión de compactos con la propiedad A, tenemos que $\exists\ n,m\in\mathbb{N}$ y U,V abiertos de M, tal que $x\in U\subset M-UK_n$, $x\in V\subset K_m$ y, como $M-UK_n\subset M-UK_{n+1},\ K_n\subset K_{n+1}$, si $k:=\text{máx}\{n,m\}$, entonces $x\in U\cap V\subset K_k\cap(M-UK_k)$.

Por lo que $\{K_n^{'}\}$ es una sucesión creciente de compactos en $M-K$ con la propiedad A.

Si $a:=(a_\alpha)=(A_\alpha^{\alpha(a)})_\alpha\in B_M$; definiremos $F(a)\in B_{M-K}$; como $\bar{UK}$ es compacto, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\bar{UK}\subset K_N$, entonces $\alpha\geq N$, $A_\alpha^{\alpha(a)}=\pi_\alpha(a)$ es también una componente conexa no acotada de $M-K_\alpha^{'}$, entonces $\forall\ \alpha\geq N$ sea $(F(a))_\alpha:=A_\alpha^{\alpha(a)}$. Para toda $\alpha<N$, sea $(F(a))_\alpha$ la única componente conexa no acotada de $M-K_\alpha^{'}$ que contiene a $A_N^{N(a)}$; claramente $F(a)\in B_{M-K}$.

Supongamos $a\in B$ y $B^{\alpha(a)}=\{b\in B:\pi_\alpha(b)=\alpha(a)\}$ básico de B_M que contiene a a; si $\alpha\geq N$, entonces $F(B^{\alpha(a)})=B^{\alpha(F(a))}$; si $\alpha<N$, sean $A_{a_1}^{N(a_1)},\ldots,A_{a_k}^{N(a_k)}$ todas las componentes conexas no acotadas contenidas en $A_a^{\alpha(a)}$, para algunas $a_1,\ldots,a_k\in B_M$, entonces $B^{\alpha(a)}=\cup_{i=1}^k B^{N(a_i)}$ y $F(B^{\alpha(a)})=\cup_{i=1}^k B^{N(F(a_i))}$, por lo que F es abierta; sea $F(a)\in F(B)$, $B^{\alpha(F(a))}$ un básico de M_{M-K} que contiene a $F(a)$, si $\alpha\geq N$, entonces $F^{-1}(B^{\alpha(F(a))})=B^{\alpha(a)}$, si $\alpha<N$, sean $A_{F(a_1)}^{N(F(a_1))},\ldots,A_{F(a_k)}^{N(F(a_k))}$ todas las componentes conexas no acotadas contenidas en $A_{F(a)}^{\alpha(F(a))}$, para algunas $F(a_1),\ldots,F(a_k)\in F(B_M)$, entonces $B^{\alpha(F(a))}=\cup_{i=1}^k B^{N(F(a_i))}$ y $F^{-1}(B^{\alpha(F(a))})=\cup_{i=1}^k B^{N(a_i)}$, por lo que F es continua; por tanto es un homeomorfismo sobre su imagen.

Como para todo $\alpha\geq N$ hay exactamente una componente no acotada de $M-K_\alpha^{'}$ distinta de las provenientes de M, a saber, $UK_\alpha-K$, entonces $c:=\{UK_\alpha-K\}_\alpha$ es una punta de $M-K$ y $(UK_N-K)\cap B^{N(c)}$ es un básico de B_{M-K} tal que la única punta que contiene es a c, por lo tanto c es aislada.

Por lo que el espacio de puntas de $M-K$ es igual al espacio de puntas de M unión un punto aislado. $\square$

Proposición 28 *Si en la Proposición anterior, K tiene k componentes conexas, entonces, el espacio de puntas de $M-K$ es igual al espacio de puntas de M más k puntos aislados.*

Demostración:
Para cada componente conexa compacta de K escojamos vecindades tubulares ajenas y utilicemos la misma idea de la Proposición anterior. $\square$

Proposición 29 *Si K es una subvariedad encajada compacta de M, tal que $M-K$ tiene un número finito de puntas. Entonces, M es compacta si y sólo si el número de puntas de $M-K$ es igual al número de componentes conexas de K.*

Demostración:
Por la Proposición 28, si $N_{M-K}<\infty$ es el número de puntas de $M-K$, entonces M tiene un número finito de puntas, sea N_M el número de puntas de M; como toda

subvariedad encajada compacta K tiene un número finito de componentes conexas, si C_K el número de componentes conexas de K se tiene por la Proposición 28 que $P_{M-K} = P_M + C_K$.

Por lo que $P_{M-K} = C_K$ si y sólo si $P_M = 0$ si y sólo si M es compacto (Proposición 25). $\square$

Proposición 30 *Si $\pi : M \to N$ es un fibrado diferenciable entre variedades diferenciables, con fibras compactas y conexas, entonces los espacios de puntas de M y de N son homeomorfos.*

Demostración :
Mostraremos primero que π es abierta; utilizando el hecho de que toda variedad es localmente conexa y la hipótesis, existe una cubierta abierta $\{U_\beta\}$ de N y un compacto K tal que para todo $\beta \quad \pi^{-1}(U_\beta) \approx U_\beta \times K$ y que U_β es conexo. Sea $\pi_\beta := \pi|_{\pi^{-1}(U_\beta)}$; como $\pi_\beta : U_\beta \times K \to U_\beta$ es una proyección, entonces es abierta, por lo que si es cualquier abierto $U \subset M$, $U = \cup_\beta(\pi^{-1}(U_\beta) \cap U)$, $\pi(U) = \cup_\beta \pi_\beta(\pi^{-1}(U_\beta) \cap U)$ es abierto; por lo que π es abierta. Mostraremos ahora que π es una función propia y que la preimagen de conexos es conexa.

Supongamos que $L \subset N$ es un compacto, sea $\{z_n\} \subset \pi^{-1}(L)$, entonces $\{\pi(z_n)\} \subset L$, por lo que existe subsucesión convergente, supongamos $\pi(z_n) \to x \in L$, entonces existe $U \subset N$ abierto, tal que $x \in U$ y $\pi^{-1}(U) \approx U \times K$ y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N,\ z_n \in \pi^{-1}(U) \approx U \times K$; sean $x_n \in U, y_n \in K$ tal que $z_n = (x_n, y_n)$, entonces para todo $n \geq N, x_n \in U$; como $\{y_n\} \subset K$ existe subsucesin convergente, supongamos $y_n \to y \in K$, entonces claramente $z_n = (x_n, y_n) \to (x, y) \in U \times K$ y $(x, y) \in \pi^{-1}(L)$. Por lo que $\pi^{-1}(L)$ es compacto.

Supongamos que $A \subset N$ es conexo, entonces para todo $\beta,\ C_\beta := U_\beta \cap A$ es conexo, por lo que $A = \cup_\beta C_\beta$, para toda $\beta,\ \pi^{-1}(C_\beta) \approx C_\beta \times K$ es conexo y $\pi^{-1}(A) = \cup_\beta \pi^{-1}(C_\beta)$. Por todo lo anterior, una separación de $\pi^{-1}(A)$ induce bajo π una separación en A, por lo que $\pi^{-1}(A)$ es conexo.

Supongamos $\{K_n\}$ una sucesión creciente de compactos de N con la propiedad A, entonces como π es propia, $\{\pi^{-1}(K_n)\}$ es una sucesión creciente de compactos. Queremos ver que tiene la propiedad A; tenemos que
$M = \pi^{-1}(N) = \pi^{-1}(\cup_n K_n) = \cup_n \pi^{-1}(K_n)$, $M = \pi^{-1}(N) = \pi^{-1}(\cup_n K_n^\circ) = \cup_n \pi^{-1}(K_n^\circ)$, $\pi^{-1}(K_n^\circ) \subset (\pi^{-1}(K_n))^\circ$, por lo que $M = \cup_n(\pi^{-1}(K_n))^\circ$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, $\pi^{-1}(K_n) \subset (\pi^{-1}(K_{n+1}))^\circ$.

Además para toda $n \in \mathbb{N}$, si $A_1^n, \ldots, A_k^n$ son las componentes conexas de $M - K_n$, entonces como preimagen de conexos es conexo, $\pi^{-1}(A_1^n), \ldots, \pi^{-1}(A_k^n)$ son conexos, además de ser ajenos y como conexos van en conexos, si $\pi^{-1}(A_i^n) \cup \pi^{-1}(A_j^n)$ es conexo, entonces $A_i^n \cup A_j^n$ sería conexo, por lo que $\pi^{-1}(A_1^n), \ldots, \pi^{-1}(A_k^n)$ son las componentes conexas de $M - \pi^{-1}(K_n)$. En particular, si $K_n' := \pi^{-1}(K_n)$, entonces $\{K_n'\}$ es una sucesión creciente de compactos en M con la propiedad A.

Afirmamos que $\pi^{-1}(\bar{A}) = \overline{\pi^{-1}(A)}$. Si $x \in \overline{\pi^{-1}(A)}$, sea V abierto que contiene a $\pi(x)$, entonces por continuidad, $\pi^{-1}(V)$ es un abierto que contiene a x, por lo que existe $y \in \pi^{-1}(V) \cap \pi^{-1}(A)$, por lo que $\pi(y) \in V \cap A$, esto es $x \in \pi^{-1}(\bar{A})$. Si

$x \in \pi^{-1}(\bar{A})$, sea U abierto que contiene a x, entonces como π es abierta, $F(U)$ es un abierto que contiene a $\pi(x)$, por lo que existe $a \in A \cap \pi(U)$, esto es, existe $u \in U$, tal que $a = \pi(u)$, por lo que $u \in U \cap \pi^{-1}(A)$, esto es, $x \in \overline{\pi^{-1}(A)}$.

Por lo que como π es propia y continua y, por el párrafo anterior, para todo $n \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, k$; $\bar{A}_j^n$ es compacta si y sólo si $\pi^{-1}(\bar{A}_j^n) = \overline{\pi^{-1}(A_j^n)}$ es compacto. Con todo esto A_j^n es una componente conexa no acotada de $N - K_n$ si y sólo si $\pi^{-1}(A_j^n)$ es una componente conexa no acotada de $M - K_n^{'}$; por lo que tenemos de manera natural una biyección entre las puntas, si B_M, B_N son los espacios de puntas de M y N, respectivamente, $a := \{A_a^{n(a)}\}_n \in B_N \leftrightarrow \widehat{a} := \{\pi^{-1}(A_a^{n(a)})\}_n \in B_M$ que induce una biyección entre los básicos (y por tanto entre los abiertos) de los espacios de puntas B_M, B_N, $B^{n(a)} \leftrightarrow B^{n(\widehat{a})}$. □

5.4. Condiciones bajo las cuales la variedad $Z_\Gamma := \Gamma \backslash U_\Gamma$ es compacta

En esta breve subsección continuamos el estudio de la construcción de Guillot en [6] de una compactificación Z_Γ equivariante de $\Gamma \backslash SL(2, \mathbb{C})$, un espacio cuasihomogéneo compacto de $SL(2, \mathbb{C})$.

Supongamos, como en la sección 4, que $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{C})$ es un grupo kleiniano libre de torsión con dominio de discontinuidad Ω en $\mathbb{CP}^1$, sea $Z_\Gamma = \Gamma \backslash U_\Gamma = \Gamma \backslash SL(2, \mathbb{C}) \cup (\Gamma \backslash \Omega \times \mathbb{CP}^1)$ la variedad diferenciable construida en la sección 4, la cual mostramos que es una extensión equivariante de $\Gamma \backslash SL(2, \mathbb{C})$. A continuación utilizaremos los resultados de la sección 3 y de la subsección anterior para encontrar condiciones suficientes bajo las cuales la variedad Z_Γ es compacta.

Proposición 31 *Supongamos que $\Gamma \backslash \Omega$ es compacto y que $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ tiene un número finito de puntas. El número de puntas de $\Gamma \setminus \mathbb{H}^3$ es igual al número de componentes conexas de $\Gamma \setminus \Omega$ si y sólo si la variedad Z_Γ es compacta.*

Demostración:
Es muy bien sabido que $SL(2, \mathbb{C})$ es conexo, por lo que $\Gamma \backslash SL(2, \mathbb{C})$ es conexa. Como $\mathbb{H}^3$ es conexo, entonces $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ es conexo; además como $SL(2, \mathbb{C})$ es denso en U_Γ (porque lo era en K) entonces U_Γ, y por tanto Z_Γ es conexo. Por lo que tiene sentido hablar del espacio de puntas de $\Gamma \backslash SL(2, \mathbb{C})$ y de $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$.

Supongamos que $\Gamma \backslash \Omega$ es compacto y que $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ tiene un número finito de puntas; por la Proposición 10 en la pág. 18, existe un fibrado $\Psi : \Gamma \backslash SL(2, \mathbb{C}) \to \Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ con fibras compactas y conexas, por lo que por la Proposición 30 en la página 39, el espacio de puntas de $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ es homeomorfo al espacio de puntas de $\Gamma \backslash SL(2, \mathbb{C})$ y como $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ tiene un número finito de puntas, entonces el número de puntas de $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ es igual al número de puntas de $\Gamma \backslash SL(2, \mathbb{C})$. Como $(\Gamma \backslash \Omega) \times \mathbb{CP}^1$ es una subvariedad encajada compacta de Z_Γ y como $\Gamma \backslash SL(2, \mathbb{C})$ tiene un número finito de puntas, por lo anterior y por la Proposición 29 en la página 38, Z_Γ es compacto si y sólo si el número de puntas de $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ es igual al número de componentes conexas de $\Gamma \backslash \Omega$. □

Notemos que si Γ es cocompacto y el número de puntas de $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ es igual al número de componentes conexas de $\Gamma \backslash \Omega$ entonces, Γ es convexo cocompacto; ésto se sigue de la Proposición 29, de que $\Gamma\backslash\Omega$ es una subvariedad encajada compacta de $\Gamma\backslash(\mathbb{B}^3 \cup \Omega)$ y de que $\Gamma\backslash(\mathbb{B}^3 \cup \Omega) = \Gamma\backslash\mathbb{B}^3 \cup \Gamma\backslash\Omega$.

6. Espacios cuasihomogéneos de $SL(2,\mathbb{C})$ que son compactos

Supongamos, como en la sección 3 y 4, que $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ es un grupo kleiniano sin torsión. Hemos encontrado en la sección anterior condiciones suficientes para que la extensión equivariante Z_Γ de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$, dada por la construcción de Guillot en [6] y estudiada en la sección 3, sea compacta; en esta sección estudiamos ilustramos esta situación, esto es, estudiamos subgruppos $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ kleinianos y libres de torsión en los que se tiene que $\Gamma\backslash\Omega$ es compacto, $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ tiene un nuúmero finito de puntas y el número de puntas de $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ es igual al número de componentes conexas de $\Gamma\backslash\Omega$; por lo que por la Proposición 31, Z_Γ es compacto.

Si $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ es un grupo kleiniano libre de torsión y $g \in SL(2,\mathbb{C})$, donde $U_\Gamma = SL(2,\mathbb{C}) \cup (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$ es el abierto, considerando en la sección 3, Γ-invariante más grande contenido en K donde Γ actúa de manera propiamente discontinua, entonces por la Proposición 12, pág. 20, $g\Gamma g^{-1}$ es un grupo kleiniano sin torsión con dominio de discontinuidad $g(\Omega)$, $U_{g\Gamma g^{-1}} = SL(2,\mathbb{C}) \cup (g(\Omega) \times \mathbb{CP}^1)$ y U_Γ es biholomorfo a $U_{g\Gamma g^{-1}}$. Sabemos que Γ actúa en U_Γ por la izquierda vía $\bar{\phi}$ (definida en la sección 3). Existe además una única acción de Γ en $U_{g\Gamma g^{-1}}$ que hace al biholomorfismo $\bar{\phi}_g : U_\Gamma \to U_{g\Gamma g^{-1}}$, $\bar{\phi}_g(Z) := \bar{\phi}(g, Z)$ sea Γ-equivariante con respecto a esta acción y $\bar{\phi}$, a saber, esta acción esta dada por $\bar{\phi}^* : \Gamma \times U_{g\Gamma g^{-1}} \to U_{g\Gamma g^{-1}}$, $\bar{\phi}^*(\gamma, Z) := \bar{\phi}(g\gamma g^{-1}, Z)$, por lo que por la Proposición 6, pág. 14, $\bar{\phi}^*_g : \Gamma\backslash U_\Gamma \to \Gamma\backslash U_{g\Gamma g^{-1}}$, $\bar{\phi}^*_g([Z]) := [\bar{\phi}_g(Z)]$ es un biholomorfismo; claramente $\Gamma\backslash U_{g\Gamma g^{-1}}$ es igual al espacio cociente resultante de la acción $\bar{\phi} : g\Gamma g^{-1} \times U_{g\Gamma g^{-1}} \to U_{g\Gamma g^{-1}}$, por lo que $\Gamma\backslash U_\Gamma$ es biholomorfo a $g\Gamma g^{-1}\backslash U_{g\Gamma g^{-1}}$. Además sabemos que $SL(2,\mathbb{C})$ actúa por la derecha en $\Gamma\backslash U_\Gamma$ y en $g\Gamma g^{-1}\backslash(g\Gamma g^{-1})$ y como $\bar{\phi}$ y $\widehat{\phi}$ conmutan, el biholomorfismo $\bar{\phi}^*_g$ es $SL(2,\mathbb{C})$-equivariante. Por lo que la extensión equivariante de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$, dada en la construcción de Guillot en [6], de subgrupos kleinianos conjugados, es la misma.

Por los resultados de la sección 1 y 2, $\pi : SL(2,\mathbb{C}) \to PSL(2,\mathbb{C})$, $\pi(g) := [g]$, $g \in SL(2,\mathbb{C})$ es un cubriente 2 a 1, un biholomorfismo local y un homomorfismo de grupos de Lie. Siguiendo a Kra en [9], sabemos que todo grupo kleiniano $\widehat{\Gamma} \subset PSL(2,\mathbb{C})$ libre de torsión se puede levantar a un grupo kleiniano $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ libre de torsión. Por lo que estudiaremos ciertos grupos kleinianos $\widehat{\Gamma} \subset PSL(2,\mathbb{C})$ libres de torsión tales que el número de puntas de $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ sea igual al número de componentes conexas de $\Gamma\backslash\Omega$ y con el levantamiento dado por [9], obtendremos así, grupos kleinianos $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ libres de torsión, tales que la extensión equivariante Z_Γ de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$ sea compacta.

Decimos que una transformación de Möbius $g \in$Möb$(\mathbb{S}^2)$ es *loxodrómica* si tiene exactamente dos puntos fijos, uno atractor y otro repulsor.

Proposición 32 *([3] pág. 2)*
Si $g \in$Möb$(\mathbb{S}^2)$, son equivalentes:
1) *g es loxodrómica.*

2) *g es conjugada a $z \mapsto \lambda^2 z$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$.*
3) *Si t es la traza de la transformación (esto es, la traza de la matriz asociada a la transformación g), entonces $t \in \mathbb{C} \setminus [-2,2]$.*

Si $g \in \mathbb{M}$ es loxodrómica, decimos que es *hiperbólica* si la λ de la Proposición 32 es real, esto es, $\lambda \in \mathbb{R}$. Cabe mencionar que algunos autores llaman hiperbólicas a todas las transformaciones loxodrómicas.

Consideremos una colección de $g \geq 1$ pares de círculos mutuamente disjuntos en $\mathbb{CP}^1$, $\{C_1, C_1', \ldots, C_g, C_g'\}$, con interiores mutuamente disjuntos. Para cada índice i, escojamos una transformación $A_i \in$Möb$(\mathbb{S}^2)$ que mande C_i a su pareja C_i' y mande el interior de C_i al exterior de su pareja. El grupo $\Gamma := \langle A_1, \ldots, A_g \rangle$ finitamente generado, es llamado un grupo de Schottky de género g. El muy conocido Lema del ping pong (consultar a Beardon en [11, págs. 102,103 y 104]) nos dice que todo grupo de Schottky es un grupo *libre*, esto es, no tiene relaciones.

Si $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{C})$ es kleiniano tal que el conjunto limite de la acción de Γ en $\mathbb{CP}^1$ está contenido en algún círculo en $\mathbb{CP}^1$, entonces decimos que Γ es *fuchsiano*.

A continuación daremos 3 ejemplos en los que $\Gamma\backslash\Omega$ es compacto y el número de puntas de $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ es igual al número de componentes conexas de $\Gamma\backslash\Omega$, por lo que por la Proposición 31, Z_Γ es compacto

Ejemplo 33 *Grupo generado por una transformación hiperbólica.*

Siguiendo a Seade y a Ramírez en [4], consideremos $g \in$Möb$(\mathbb{S}^2)$ hiperbólica, supongamos que los puntos fijos son -1 y 1, con -1 repulsor y 1 atractor, supongamos $g \in PSL(2,\mathbb{R})$, digamos $g = f \circ h \circ f^{-1}$, $h(z) := \lambda^2 z$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| > 1$, $f(z) := (z-1)/(z+1)$. Sabemos que g fija el semiplano superior $\mathbb{H}^2$ y que la dinámica del semiplano inferior $\mathbb{H}^2_-$ es la misma que la de $\mathbb{H}^2$ reflejada en el eje real. Así que estudiaremos primero a $\Gamma := \langle g \rangle$ actuando en $\mathbb{H}^2$ y luego en $\mathbb{CP}^1$. Sea E la única geodésica hiperbólica en $\mathbb{H}^2$ que une los puntos -1 y 1; para cada punto $x \in E$ existe una única geodésica C_x ortogonal a E que pasa por el punto x; la familia $\mathcal{C} := \{C_x\}_{x \in E}$ es ajena y $\cup_{x \in E} C_x = \mathbb{H}^2$. Como además las transformaciones de Möbius mandan círculos en círculos (en particular geodésicas hiperbólicas en geodésicas hiperbólicas), son conformes y g fija a -1 y 1, E es invariante bajo g y g manda geodésicas de la familia $\mathcal{C}$ en geodésicas de la misma familia. E es llamado el eje de la transformación hiperbólica ya que para cada $z \in \mathbb{H}^2$ existe un único $x \in E$ y un único $w \in C_{g(x)}$, consistente con el hecho de que las transformaciones de Möb$(\mathbb{S}^2)$ preservan la orientación, tal que $z \in C_x$, $w \in C_{g(x)}$ y $d(z,x) = d(w, g(x))$ (donde d es la distancia hiperbólica), por lo que $w = g(z)$; lo anterior se ilustra en la figura 1.

Actuando Γ en $\mathbb{CP}^1$, como la órbita de cualquier punto distinto de 0 e ∞ bajo la transformación h está contenida en un rayo que emana del 0, entonces la órbita de cualquier punto distinto de -1 y 1 bajo g está contenida en algún círculo que une -1 y 1.

Por lo que podemos imaginar a g como una transformación que aleja círculos que contienen a -1, acercándolos a 1, agrandándolos y luego encogiéndolos.

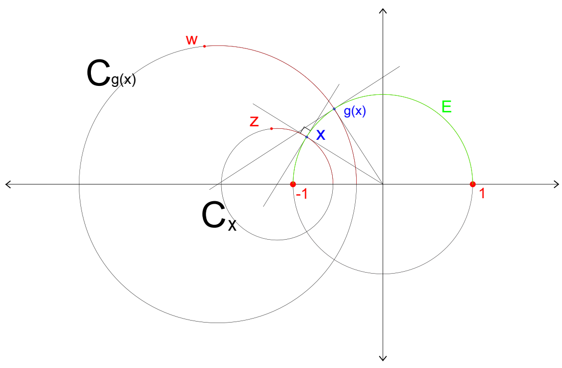

Figura 1: Dinámica de la transfirmación hiperbólica g.

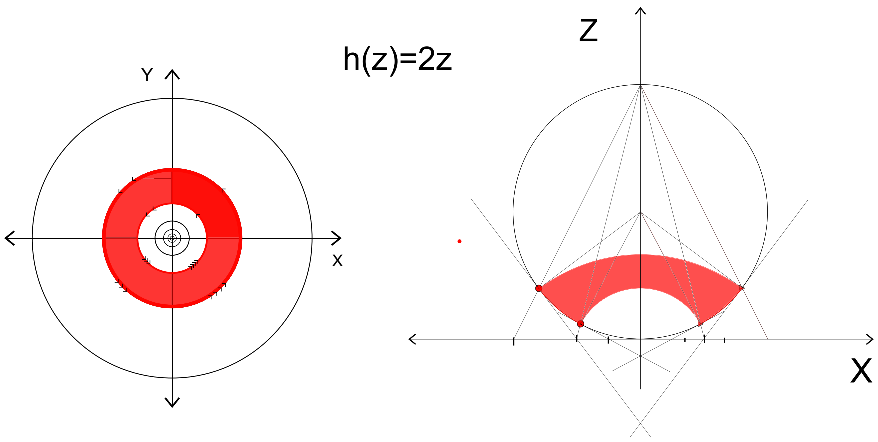

Figura 2: Dinámica de la transfirmación hiperbólica h en $\mathbb{CP}^1$ y en $\mathbb{CP}^1 \cup \mathbb{B}^3$.

Lo más natural sería que, si $\widehat{E}$ es la semiesfera en $\mathbb{H}^3$ de diámetro determinado por E, g represente en Möb($\mathbb{B}^3$) a la transformación que manda esferas ortogonales a $\widehat{E}$ en esferas ortogonales a $\widehat{E}$, alejándolas de -1 y acercándolas a -1.

De hecho este es el caso, para convencernos de esto basta normalizar la transformación g para obtener la transformación hiperbólica $h(z) := k^2 z, |k| > 1, k \in \mathbb{R}$ (ver figura 2), por lo que si $f_1(z) := 1/\bar{z},\ f_2(z) := k^2/\bar{z}$, entonces $h = f_2 \circ f_1$, por lo que por el Teorema de extensión de Poincaré, $h \in$Möb($\mathbb{B}^3$) es la inversión en el la esfera de radio 1 seguida de la inversión en la esfera de radio k, por lo que la dinámica de h es la igual en cualquier rayo que emane del 0. Componiendo con el difeomorfismo conforme entre $\mathbb{B}^3 \cup \mathbb{S}^2$ y $\mathbb{H}^3 \cup \mathbb{CP}^1$, imaginamos a g actuando en $\mathbb{B}^3 \cup \mathbb{S}^2 - \{polos\}$ alejando semibolas en $\mathbb{B}^3 \cup \mathbb{S}^2 - \{polos\}$ ortogonales a $\mathbb{S}^2$ de centro un polo y acercándolas al otro polo (ver figura 2).

Entonces Γ tiene como dominio de discontinuidad $\Omega = \mathbb{CP}^1 - \{-1, 1\}$ en $\mathbb{CP}^1$, un

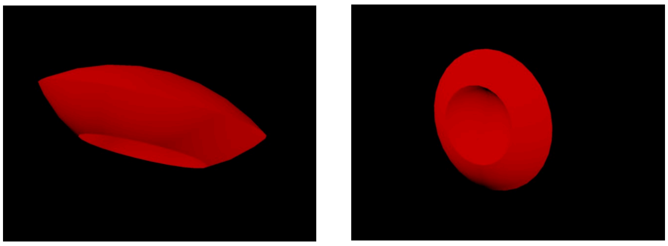

Figura 3: Dominio fundamental del grupo Γ generado por una transformación hiperbólica en $\mathbb{B}^3 \cup \mathbb{CP}^1$.

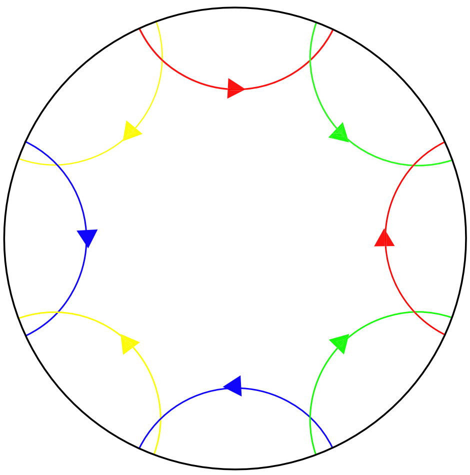

Figura 4: Construcción de la superficie compacta orientable de género 2

dominio fundamental un anillo A, es cocompacto ya que $\Gamma \backslash \Omega = \mathbb{T}^2$ (El toro), el cual tiene una componente conexa, $\Gamma \backslash \mathbb{B}^3$ es un toro sólido abierto, el cual tiene una punta y $\Gamma \backslash (\mathbb{B}^3 \cup \Omega)$ es un toro sólido cerrado (ver figura 3).

Ejemplo 34 *Fuchsiano de Genero $g \geq 2$.*

Consideremos en $\mathbb{H}^2$ un octágono regular, con lados formados por geodésicas hiperbólicas, tal que la suma de sus ángulos interiores sea 2π, enumeremos los lados en sentido contrario a las manecillas del reloj (ver figura 4), sea g_1 la transformación hiperbólica que manda el lado 1 en el lado 3, g_2 la que manda el lado 2 en el lado 4, g_5 la que manda el lado 5 en el 7 y g_6 la que manda el 6 en el 8. Sea $\Gamma := \langle g_1, g_2, g_5, g_6 \rangle$ acta en $\mathbb{CP}^1$ con dominio de discontinuidad Ω igual a $\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{H}^2_-$, un dominio fundamental en $\mathbb{CP}^1$ igual al octágono y $\Gamma \backslash \Omega = \mathbb{T}^2 \cup \mathbb{T}^2$ (donde $\mathbb{T}^2$ es el Toro) es compacto y tiene dos componentes conexas; Beardon formaliza lo anterior en [11, págs. 268-270].

Por como vimos que se extendían las transformaciones hiperbólicas a $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$, sean $C_1, \ldots, C_8$ las semibolas abiertas contenidas en $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$ determinadas por los lados del

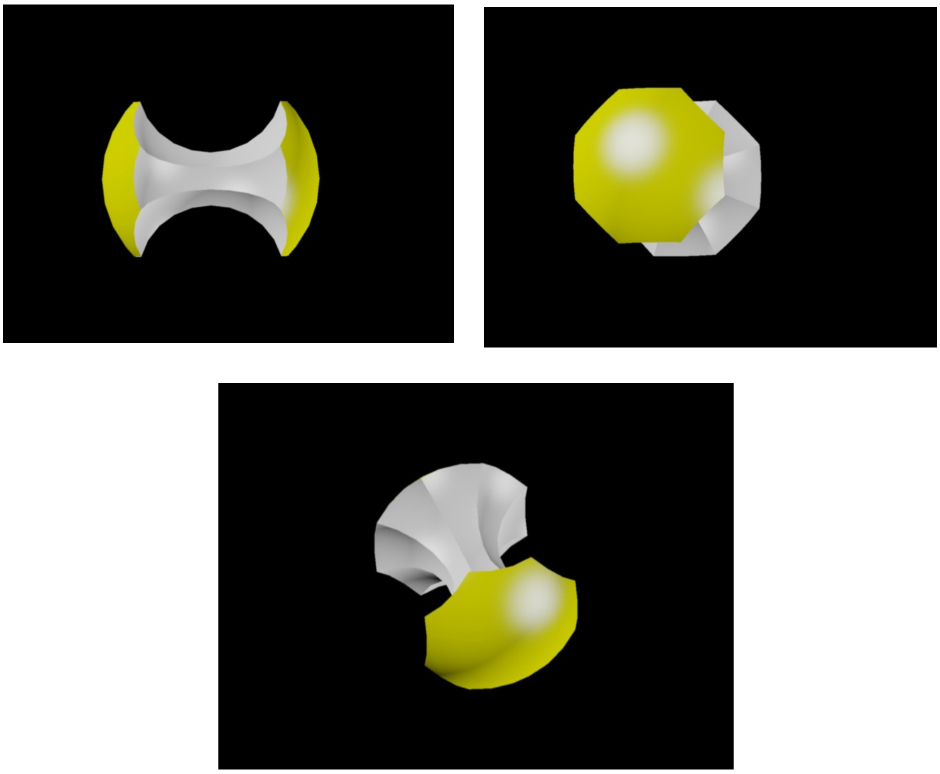

Figura 5: Dominio fundamental de la acción del grupo fuchsiano en $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$

octágono, entonces $D := (\mathbb{B}^3 \cup \Omega) - \cup_{i=1}^{8} C_i$ es un dominio fundamental de la acción en $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$ (ver figura 5), e imaginamos a D bajo la acción de Γ en $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$ trasladándose por todo $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$ viajando por los ejes de traslación determinados por los generadores de Γ, por lo que $\Gamma \backslash \mathbb{B}^3 \approx \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, que como fibra sobre $\mathbb{R}$ con fibras compactas y conexas $\mathbb{T}^2$, tiene dos puntas, y $\Gamma \backslash (\mathbb{B}^3 \cup \Omega) \approx \mathbb{T}^2 \times [0, 1]$; Marden formaliza lo anterior en [3, pág. 74]

Tomando un $4g$-ágono, podemos generar un grupo $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{C})$ con dominio de discontinuidad $\Omega = \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{H}^2_-$, tal que $\Gamma \setminus \Omega$ sean dos superficies compactas orientables de genero g y $\Gamma \backslash (\mathbb{B}^3 \cup \Omega)$ igual al producto de la superficie compacta orientable de género g por $\mathbb{R}$.

Ejemplo 35 *Schottky de Género* $p \geq 1$

Consideremos un grupo de Schottky de genero p; supongamos que los círculos de la familia

$$\mathcal{C} := \{C_1, C_1^{'}, \ldots, C_p, C_p^{'}\}$$

son como en la definición de grupo de Schottky y las transformaciones A_i de la definición son hiperbólicas. Entonces Γ actúa en $\mathbb{CP}^1$ con dominio de discontinuidad $\Omega = \mathbb{CP}^1 \setminus K$, donde K es un conjunto de Cantor; un dominio fundamental de

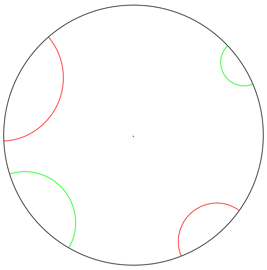 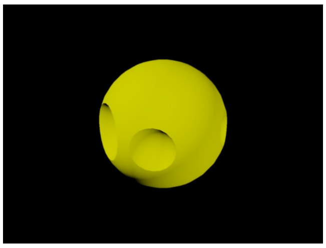

Figura 6: Dominio fundamental del grupo de Schottky en el disco de Poincaré y en $\mathbb{B}^3 \cup \mathbb{CP}^1$.

Γ en $\mathbb{CP}^1$ es $\mathbb{CP}^1$ menos los interiores de todos los elementos de $\mathcal{C}$, $\Gamma \setminus \Omega$ es una superficie compacta orientable de género p, el cual tiene una componente conexa. Si $\widehat{\mathcal{C}} := \{\widehat{C}_1, \widehat{C}_1', \ldots, \widehat{C}_p, \widehat{C}_p'\}$ es la colección de todas las esferas en $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$ determinadas por todos los círculos de $\mathcal{C}$, entonces, un dominio de fundamental de Γ en $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$ es igual a $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$ menos los interiores de todas las esferas de $\widehat{\mathcal{C}}$, $\Gamma \setminus \mathbb{B}^3$ igual a un g-toro sólido abierto, el cual tiene una punta y $\Gamma \setminus (\mathbb{B}^3 \cup \Omega)$ es igual a un g-tóro sólido cerrado; ver figura 6.

Referencias

[1] Memorias, CIMAT, Guanajuato, Mexico, IV Escuela de Veranos de Geometría y Sistemas Dinámicos, Omegar Calvo, Renato Iturriaga, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 1998.

[2] Bernard Maskit, kleinian Groups, Germany, Springer-Verlag, 1988.

[3] Albert Marden; Outer Circles, An introduction to Hyperbolic 3-manifolds; New York, Cambridge University Press, 2007 ;

[4] Ana Irene Ramírez-Galarza, José Seade Kuri; Introducción a la geometría avanzada; México; Coordinación de Servicios Editoriales, Facultad de Ciencias, UNAM, 2005

[5] Ángel Cano, Juan-Pablo Navarrete, José Seade; Complex kleinian Groups; 2008.

[6] Adolfo Guillot; Sur les équations d'Halphen et les actions de $SL_2(\mathbb{C})$; Publications Mathématiques (N. 105); págs. 221-294; octubre 2007.

[7] Frank Raymond; The end point compactification of manifolds; Pacific J. Math. Volume 10, Number 3 (1960), 947-963.

[8] John M. Lee; Introduction to Smooth Manifolds; University of Washington, Department of Mathematics; Seattle, USA; Springer; 2000; capítulo 7, Lie Group Actions, págs. 145-170.

[9] I. Kra; On lifting kleinian groups to $SL(2, \mathbb{C})$; in Differential Geometry and Complex Analysis; Springer; Berlin (1985); págs. 181-193.

[10] William P- Thurston; Three-Dimensional Geometry and Topology, volumen 1; Princeton, New Jersey, Princeton University press, 1997.

[11] Alan F. Beardon; Graduate Text in Mathematics, The Geometry of Discrete Groups; Sringer.