



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE
MÉXICO**



FACULTAD DE INGENIERIA

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería

**DISERTACIÓN ACERCA DEL MODELO DEL SWING DE
LA MÁQUINA SÍNCRONA Y PROPUESTA DE UN
MODELO MECÁNICO ANALÓGICO**

**TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERÍA (ELÉCTRICA)**

PRESENTA

HUGO GERMÁN SERRANO MIRANDA

DIRIGIDA POR

RAFAEL GUERRERO CEPEDA

Ciudad Universitaria, marzo de 2009



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice

Tema o Capítulo	Página
Resumen	1
Antecedentes y motivaciones	2
Contexto y marco teórico	4
Objetivos	5
Diseño metodológico	6
1 El modelado básico de la máquina síncrona para el estudio de la estabilidad	
1.1 Características del modelo de dos ejes de la máquina síncrona	9
1.2 El modelo simplificado para el estudio de la estabilidad transitoria	12
1.3 La ecuación básica del subsistema mecánico de la máquina síncrona	15
1.4 La ecuación del <i>swing</i> de la máquina síncrona	17
2 Análisis cualitativo de la estabilidad transitoria en la máquina síncrona	
2.1 La secuencia de falla trifásica y las características de la estructura del sistema	23
2.2 La solución cualitativa de la ecuación del <i>swing</i>	28
3 El concepto de analogía, estructura y contexto de su empleo	
3.1 Las analogías como formas de representaciones en fenómenos físicos	37
3.2 Elementos que consituyen la estructura de una analogía	39
3.3 Estructura y mapeo de la analogía mecánica-electromagnética	40
3.4 Enfoque y perspectiva de estudio de la analogía Mecánica-Electromagnética	46

Tema o Capítulo	Página
4 Propuesta del sistema mecánico análogo	
4.1 Propuesta del modelo mecánico rotacional análogo y descripción de su funcionamiento	47
4.2 Análisis del mapeo en la analogía SMR y SEP para la falla trifásica	54
4.3 Diseño de los valores de los parámetros del sistema mecánico análogo	69
5 La estabilidad transitoria del SEP y del SMR desde una perspectiva de los sistemas hamiltonianos	
5.1 El modelo matemático del <i>swing</i> como un sistema hamiltoniano	75
5.2 El método de las áreas iguales como un caso particular de la aplicación de la función hamiltoniana	76
5.3 La función hamiltoniana para el sistema mecánico análogo	84
6 La simulación por computadora del SEP y del SMR analógico	
6.1 La solución de la ecuación del <i>swing</i> del SEP por medio de simulación analógica	91
6.2 La solución de la ecuación del <i>swing</i> para el SMR por medio de simulación analógica	96
7 El hamiltoniano del SMR, síntesis y resultados	
7.1 El comportamiento del hamiltoniano en el SMR durante los procesos de falla y posfalla	105
7.2 El modelo gráfico de la función de energía del SMR y su relación con la estabilidad	111

Tema o Capítulo	Página
8 Resultados del proceso experimental del Sistema Mecánico	
Analógico	
8.1 Metodología del registro de los datos experimentales	118
8.2 Procesamiento del registro de los datos experimentales	121
8.3 Comportamiento dinámico-experimental del SMR durante los procesos de falla y de posfalla	122
8.4 Descripción de las cantidades físicas obtenidas a partir de los resultados experimentales	124
Conclusiones	127
Bibliografía	133

Resumen

En este trabajo se propone un sistema mecánico rotacional formado por masas unidas a un conjunto polea-barra. Bajo ciertas condiciones dinámicas este conjunto simula el comportamiento del fenómeno transitorio de la estabilidad de la máquina síncrona conectada a un bus infinito en condiciones de una falla trifásica. Esta simulación se realiza por medio de una *analogía funcional* basada en la semejanza existente entre los cambios de la estructura mecánica del sistema rotacional en correspondencia con los cambios en la estructura eléctrica del subsistema eléctrico al que se encuentra ligado la máquina síncrona.

La analogía *mecánica-eléctrica* propuesta para estos dos sistemas se fundamenta por el hecho de tener similitudes y correspondencias entre sus modelos matemáticos y los parámetros que los componen. Estas correspondencias permiten analizar de manera cualitativa la estabilidad de la máquina síncrona a través del comportamiento experimental del sistema mecánico rotacional y de su modelo matemático.

El desarrollo de los comportamientos electromecánicos, dinámicos y energéticos de la máquina síncrona se realiza de manera paralela con el sistema mecánico a partir de consideraciones analógicas. El establecimiento de que el *método de las áreas iguales* constituye un caso particular de análisis de un sistema hamiltoniano es de interés en este trabajo, ya que la aplicación de la teoría de estos sistemas permite obtener resultados alternativos referentes a la estabilidad en ambos sistemas a partir de métodos más generales.

El estudio de este disturbio electromecánico se realiza desde una perspectiva de la teoría de los *Sistemas Dinámicos*, enfatizando el aspecto cualitativo de este fenómeno a partir de las soluciones que determinan el movimiento de la trayectoria de estados. Esta cualidad de las soluciones es notoria a lo largo de todo el trabajo ya que se facilitan las interpretaciones físicas y geométricas de manera general. Estos procesos se realizan por medio de simulación mediante el uso de **Matlab/Simulink** y **Mathematica**.

Antecedentes y motivaciones

Antecedentes

El aspecto de la semejanza parcial entre las leyes y principios de dos disciplinas diferentes, donde se pueden dar explicaciones de una a partir de la otra por medio de correspondencias y estructuras analógicas, constituye el núcleo del razonamiento por analogía. Este recurso metodológico lo han empleado personalidades reconocidas que fundaron las bases de la Mecánica y del Electromagnetismo. Especialistas e historiadores de estas ciencias ¹ hacen referencia acerca de la importancia de este proceso de razonamiento por analogía.

El referente más conocido acerca de la aplicación de este recurso es la forma en que Galileo Galilei obtuvo el comportamiento del péndulo ². La explicación de este fenómeno conocido actualmente como péndulo simple, la realizó a partir de una correspondencia analógica con el movimiento de un cuerpo en dos planos verticales inclinados ³; posteriormente, Christian Huyghens toma como base los resultados de Galileo para realizar la analogía estructural *péndulo simple-péndulo físico* ⁴, con el fin de explicar de manera más detallada las características del movimiento pendular de cuerpos rígidos. En estos dos casos resalta el hecho de que las explicaciones acerca del fenómeno, reguladas por el descubrimiento y la utilización de analogías, fueron en gran medida el resultado de comprender lo *no conocido* en términos de lo *conocido*.

En la actualidad, el péndulo continúa siendo el referente de aplicaciones en el contexto de analogías de sistemas dinámicos, y un caso muy especial que vale la pena mencionar,

¹**Ernest Nagel**, *La Estructura de la Ciencia*, 1961, página 152, edición en español, Ediciones Paidós Ibérica, S.A., Barcelona.

²**Barry Barnes**, *Thomas S. Khun y las ciencias sociales*, página 100, primera edición en español, 1984, Fondo de Cultura Económica, México.

³Los dos planos forman una V, el primero de bajada y en su parte inferior unido al otro plano, pero de subida.

⁴El péndulo simple lo componen dos modelos de cuerpos ideales, una partícula que representa a la péndola; y el hilo que la sostiene flexible, inextensible y sin masa. En cambio, el péndulo físico está constituido por elementos reales por ejemplo, una barra sostenida en su parte superior por un pasador y que puede oscilar libremente en un plano vertical.

dado que su representación puede caracterizar muchas aplicaciones de interés, es el modelo físico de la viga magneto-elástica ⁵ usado por Moon and Holmes (1979-1980). La construcción de este dispositivo es muy sofisticada y constituye un modelo de péndulo físico donde se tienen interacciones eléctricas-magnéticas y mecánicas y que, a partir del empleo inteligente de relaciones analógicas, el análisis de su modelo dinámico no lineal (ecuación de Duffin) tiene la potencialidad de dar explicaciones que van desde las más sencillas y didácticas, hasta las más complejas de la teoría moderna de los sistemas dinámicos.

Motivaciones

En este trabajo se seguirá teniendo como referente el péndulo físico, ya que uno de los propósitos de este trabajo es diseñar un sistema mecánico analógico que se comporta como un péndulo, cuya representación matemática y manipulación experimental sirven para simular y tener una mejor comprensión acerca de la estabilidad transitoria de la máquina síncrona. El diseño de esta representación física y de su comportamiento experimental está basado en dos modelos mecánicos analógicos que se presentan en dos textos clásicos de Análisis de Sistemas de Potencia; el primer texto de **Arthur R. Bergen**, *Power System Analysis* p283 ⁶, quien propone un modelo mecánico transaccional masa-resorte no lineal-amortiguador y en el segundo de **Olle I. Elgerd**, *Electric Energy Systems Theory, An introduction* ⁷ quien presenta en su sección de problemas propuestos un sistema mecánico rotacional. En ambos casos se establecen analogías muy ingeniosas del modelo no lineal de la estabilidad de la máquina síncrona, en el modelo de Bergen, sobresale la característica analógica del modelo matemático no lineal pero al mismo tiempo la imposibilidad de su construcción física; en cambio el modelo de Elgerd sirvió como punto de partida para el diseño del modelo físico rotacional propuesto en este trabajo.

⁵**Guckenheimer and Holmes**, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, 1983, Springer-Verlang, página 82.

⁶Referencia [3] de la bibliografía

⁷Referencia bibliográfica [6]

Contexto y Marco teórico

El enfoque moderno de las bases conceptuales de la estabilidad de la máquina síncrona se estudia, de manera formal y detallada en la teoría de los Sistemas Dinámicos no Lineales. En la actualidad, el dominio de conocimientos requeridos para abordar un estudio más riguroso de los Sistemas Eléctricos de Potencia exigen las bases teóricas de esta disciplina. El enfoque de la teoría de los Sistemas Dinámicos proporciona elementos de amplio alcance que permite el estudio más racional de sistemas que poseen estructuras matemáticas complejas. Al mismo tiempo, la estructura formal de esta teoría puede explicar los comportamientos de estos sistemas de manera integral y unificada.

El desarrollo analítico de este trabajo es descriptivo y relacional y tiene como sustento el estudio la estabilidad transitoria de la máquina síncrona a partir del modelado de sistemas físicos mediante analogías, donde concurren algunos aspectos teóricos de la Mecánica Newtoniana y los fundamentos clásicos de la teoría de los sistemas dinámicos no lineales. Estos aspectos constituyen los fundamentos principales en los que se basa la propuesta de la construcción del sistema mecánico rotacional analógico, teniendo como eje de análisis el tema de la estabilidad de la máquina síncrona conectada a un bus infinito.

Los elementos básicos conceptuales más significativos que se emplean en el desarrollo del presente trabajo son los siguientes:

- a) El concepto de analogía en el estudio de sistemas dinámicos equivalentes, como un recurso de análisis y síntesis para la comprensión integrada de diversas disciplinas.
- b) El modelado de sistemas dinámicos no lineales de segundo orden, los conceptos de puntos de equilibrios estables e inestables y su aplicación al análisis de estabilidad.
- c) El proceso de simulación numérica mediante el empleo de **Matlab/Simulink** y **Mathematica**.

Objetivos

El contexto y los elementos mediante el cual se desarrolla el estudio convencional de la estabilidad de la máquina síncrona, tales como el método de las áreas iguales y la solución numérica de la ecuación diferencial no lineal de segundo orden son procedimientos de análisis lo suficientemente conocidos, y los resultados que se obtienen al emplear esta metodología, sin lugar a dudas, son razonablemente aceptables, sin embargo:

¿Será posible establecer el estudio de este fenómeno de estabilidad teniendo como eje de análisis estructuras teóricas más generales y de mayor alcance, tales como las que aporta la teoría de los sistemas dinámicos?

¿El estudio de la estabilidad transitoria de la máquina síncrona conectada a un bus infinito tendrá correspondencia formal con la estabilidad de los sistemas mecánicos?, en caso afirmativo, ¿existe la posibilidad del diseño de un sistema mecánico, para que, a partir de una correspondencia analógica se pueda analizar cualitativamente el proceso de estabilidad de la máquina síncrona desde una perspectiva mecánica?

¿El modelado y los resultados cualitativos y cuantitativos de la simulación de este sistema mecánico analógico, podrán contribuir a facilitar y mejorar el entendimiento del comportamiento de este proceso electrodinámico?

¿Cuáles serán las ventajas y desventajas, del manejo experimental y del análisis de su correspondiente modelo matemático de este sistema analógico propuesto?

Las respuestas de estas preguntas es lo que se pretende obtener en el desarrollo de este trabajo. En síntesis, el objetivo general que se plantea en este trabajo se puede enunciar, a manera de hipótesis, de la siguiente forma:

El comportamiento cualitativo de la estabilidad transitoria de la máquina síncrona, bajo condiciones de falla trifásica, se puede analizar y sintetizar a partir del diseño de un modelo mecánico rotacional analógico compuesto por varios cuerpos.

Diseño metodológico

La estructura de este trabajo inicia con un análisis teórico de los elementos básicos que permiten delimitar el tipo de estabilidad de la máquina síncrona que se desea estudiar y las condiciones en que ésta ocurre para poder modelar este fenómeno. En una primera etapa se realiza una descripción de tipo cualitativo de la estabilidad transitoria para poder explicar la estructura y el comportamiento mecánico del sistema analógico y posteriormente mediante experimentación y simulación se obtienen los resultados cuantitativos del comportamiento dinámico del sistema mecánico propuesto.

Una parte importante de la metodología empleada en este trabajo está basada en el razonamiento analógico, ya que este proceso permite que la identificación y la formulación del problema planteado tengan como principal referente el reconocimiento de analogías entre dos sistemas. Este proceso se realiza a partir de la transferencia de relaciones estructurales semejantes en ambos sistemas, tanto en los elementos que lo componen como en los modelos matemáticos que determinan su comportamiento. El desarrollo de este trabajo bajo la línea de esta forma de pensamiento permite establecer los siguientes aspectos:

- a) Servir como guía para desarrollar tanto el análisis como la solución al problema de la estabilidad de la máquina síncrona por medio de un sistema mecánico análogo.
- b) Orientar la representación, la comprensión y la explicación del sistema electro-mecánico, teniendo como referente el comportamiento del sistema mecánico análogo. Esta orientación permite, de manera recíproca, ubicar el estudio del sistema mecánico análogo fuera del contexto convencional. Aspecto valioso que puede ser aprovechado como una herramienta didáctico-pedagógica para facilitar y potenciar el aprendizaje de estructuras conceptuales complejas; las cuales pueden contribuir, a obtener significados novedosos y de mayor alcance en campos disciplinares aparentemente inconexos ¹.

¹El hecho de que su comportamiento mecánico esté ligado al compromiso de dar explicaciones

c) Reducir la posible complejidad que pudiera presentarse en el análisis mediante el empleo del enfoque interdisciplinario, pero al mismo tiempo tener el cuidado de no relajar la formalidad de las disciplinas que intervienen, las técnicas experimentales y las herramientas de apoyo que se emplean ².

De manera conjunta a este razonamiento se emplean las siguientes técnicas para abordar y dar solución al problema planteado:

- a) El modelado de sistemas dinámicos no lineales con el fin de poder diseñar un sistema mecánico analógico en correspondencia con el comportamiento de la máquina síncrona.
- b) Las técnicas de simulación por medio del software ya mencionado con el fin de poder dar solución, tanto cualitativa como cuantitativamente, a los modelos matemáticos planteados.
- c) La presentación de los resultados de este proceso de simulación a través de gráficas con su correspondiente interpretación física y geométrica.

La analogía mecánica propuesta en este trabajo constituye un tipo de *simulador artificial* de la máquina síncrona y por lo tanto *un modelo analógico*, ya que imita la oscilación de los campos electromagnéticos en el estator y el rotor por otra situación más familiar que se puede *observar* de manera concreta en la oscilación de un sistema mecánico cuyo comportamiento es análogo. Al tomar en cuenta este aspecto, el producto de este trabajo, tanto teórico como experimental, puede extenderse como una herramienta didáctico-pedagógica para lograr una mejor comprensión de la estabilidad de sistemas no lineales en el laboratorio de Sistemas Eléctricos de Potencia de Posgrado de la Facultad de Ingeniería UNAM, o bien para estudiar experimentalmente las vibraciones mecánicas no lineales en licenciatura con el propósito de consolidar el estudio de la mecánica básica.

semejantes a las de un sistema electromecánico, ocasiona una descontextualización por la naturaleza diferente de este último, sin embargo este proceso propicia en el analista, una mayor capacidad creativa y fomentar el proceso de formación de conceptos y la resolución de problemas en contextos diferentes.

²Tales como los resultados de los procesos de simulación por computadora, uso de interfaces, programación, interpretación de las gráficas, diagramas, etc.

Capítulo 1

El modelado básico de la máquina síncrona para el estudio de la estabilidad

Los procesos de *modelado y simulación* constituyen dos actividades íntimamente ligadas que permiten la construcción de representaciones de sistemas del mundo real para poder interpretarlo y dar explicaciones. La práctica de estos procesos en toda actividad científica y tecnológica son fundamentales para poder desarrollar la capacidad de *análisis, síntesis y diseño*. En la actualidad, estas representaciones se realizan de manera conjunta mediante el auxilio de computadora.

En este capítulo se obtendrán los modelos matemáticos para estudiar la estabilidad transitoria de la máquina síncrona, y en los posteriores se desarrollarán los procesos de simulación para determinar las características cualitativas y cuantitativas de estos modelos.

1.1 Características del modelo de dos ejes de la máquina síncrona

Para estudiar el comportamiento de la máquina síncrona, tanto para condiciones estacionarias como transitorias, se empleará *el modelo de dos ejes para la máquina de polos salientes*. Las figuras 1.1 y 1.2 muestran dos representaciones alternativas de este modelo. Los modelos matemáticos que se derivan a partir de estas representaciones tienen la suficiente validez y capacidad predictiva como para poder lograr los propósitos que se desean en lo concerniente a los dos estados ya mencionados.

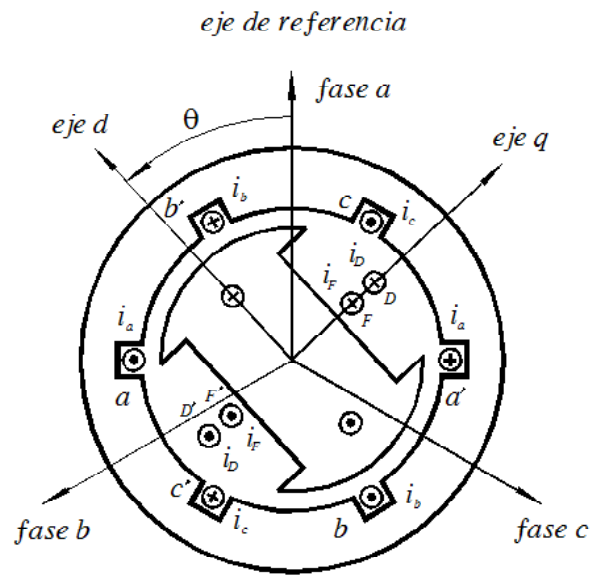


Figura 1.1

Circuitos en el estator y rotor
para el modelo de dos ejes

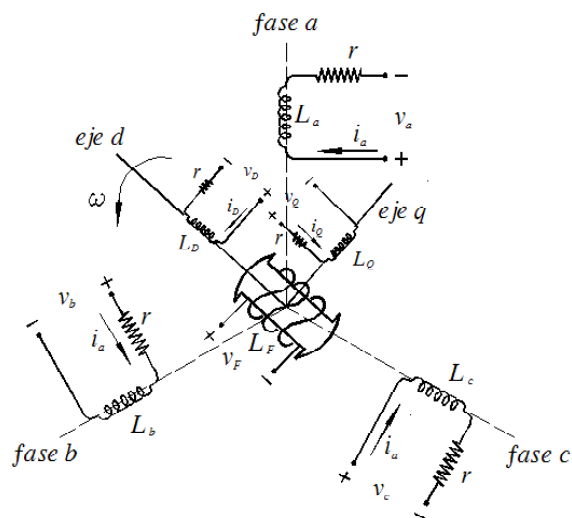


Figura 1.2

Modelo de la máquina de polos salientes
a partir de circuitos electromagnéticos

Estos modelos (Bergen, Arthur R. [3]) tienen la ventaja de poseer una generalidad aceptable, pues incluyen tanto el caso de las máquinas de rotor cilíndrico como las de rotor saliente. La descripción y características de los elementos que contienen estos modelos son las siguientes:

1. La máquina trifásica de dos ejes tiene tres devanados de armadura a , b y c distribuidos simétricamente, además de un devanado de campo F localizado sobre el rotor que produce, conforme gira el rotor, una distribución de flujo sinusoidal alrededor del entrehierro y mantiene, para cualquier posición, las mismas trayectorias magnetizantes en el entrehierro del estator. Es por esta razón que posee una inductancia propia \mathbf{L}_F constante. La saturación magnética se desprecia con el fin de mantener la linealidad y facilitar el modelo matemático en las relaciones de flujo-corriente.

2. Los tres devanados de cada fase aa' , bb' y cc' localizados en el estator se consideran de parámetros concentrados ¹, al igual que el devanado de campo FF' que se ubica en el rotor y es alimentado con una fuente de voltaje de corriente directa. También se incluyen los devanados amortiguadores DD' y QQ' ; el primero localizado a lo largo del eje directo y el segundo a lo largo del eje de cuadratura. La disposición de este conjunto puede verse en la figura 1.2. Es importante señalar que el modelo de la máquina de dos ejes mostrado en esta figura corresponde a una representación basada desde una perspectiva de la teoría de circuitos.

Los devanados fijos de las fases a , b y c están conectados en estrella tal como se construye en la mayoría de las máquinas síncronas; los de campo del rotor F y amortiguador D están ubicados en el eje directo, y el de amortiguador Q en el eje de cuadratura. Conviene recordar que todo el conjunto de embobinados ubicado en los ejes d y q giran a la velocidad angular ω del rotor.

Es importante señalar que en esta configuración los extremos de los devanados amortiguadores D y Q tienen conectadas fuentes de voltaje, es decir, sus extremos no apare-

¹En general el modelo es de parámetros concentrados.

cen *en corto circuito* como comúnmente deberían de estar. Esta disposición, aparentemente contradictoria, permite trabajar un modelo matemático más general. Para el caso particular del corto circuito en estos devanados, simplemente se fijan los voltajes v_D y v_Q al valor cero.

1.2 El modelo simplificado para el estudio de la estabilidad transitoria

El modelo matemático que rige el comportamiento eléctrico del circuito que se muestra en la figura 1.2 corresponde a una ecuación matricial de la siguiente forma.

$$\mathbf{V} = [R]\mathbf{I} - \frac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda} \quad (1.1)$$

Esta ecuación constituye un sistema de ecuaciones diferenciales de 6×6 lineal y de parámetros variables ya que el valor de las inductancias mutuas dependen del ángulo θ del rotor y, por lo tanto, del tiempo.

Como es sabido, la ecuación (1.1) puede simplificarse mediante el empleo de la transformación de Park; este proceso permite hacer el análisis de la máquina en un marco de referencia móvil arbitrario y que por razones simplificatorias en muchos casos se supone *anclado* al rotor. En este marco de referencia móvil, las variables transformadas son las cantidades equivalentes de armadura tal como las vería un *observador* en este marco de referencia. A esta transformación también se le conoce como transformación $\{a, b, c\} \Rightarrow \{0, d, q\}$ en donde las corrientes, voltajes y flujos del estator se sustituyen por cantidades equivalentes que giran a la velocidad del rotor (Fitzgerald, Kigsley, Stephen [7]). Para este caso, las tres corrientes de fase del estator i_a, i_b e i_c se sustituyen por las tres cantidades transformadas: La componente sobre el *eje directo* i_d , la componente sobre el *eje de cuadratura* i_q y la componente de *secuencia cero* i_0 que en condiciones balanceadas es cero.

La interpretación física de esta transformación supone el sentido de dos corrientes ficticias i_d e i_q que circulan por los devanados de dos bobinas localizadas en el rotor, una

alineada en el eje directo y la otra en el eje de cuadratura. Estas dos corrientes producen la mismas componentes de flujo que las que producirían por separado las corrientes de estator i_a , i_b e i_c . Conviene recordar que en condiciones de estado estacionario, estas corrientes balanceadas de estator producen un *flujo rotatorio síncrono constante* al observarlo desde el rotor, de aquí que deba entenderse la idea de *transformar corrientes de estator a corrientes de rotor* que ocasionen un flujo constante. Los detalles del proceso matemático para obtener las ecuaciones que rigen el comportamiento eléctrico de la máquina síncrona de la base $\{a, b, c\}$ a la base $\{0, d, q\}$ pueden consultarse en las referencias (Bergen, Arthur R. [3]) y (Meisel, Jerome [13]).

El modelo simplificado para la máquina de dos ejes se deduce de las ecuaciones obtenidas de la transformación $\{a, b, c\} \Rightarrow \{0, d, q\}$, y a pesar de que su representación matemática posee simplificaciones acentuadas, su validez y capacidad predictiva son lo suficientemente razonables como para dar cuenta acerca del comportamiento de la estabilidad transitoria que se desea estudiar en este trabajo. Las consideraciones simplificadoras realizadas en este modelo son las siguientes:

1. Se omite la saturación magnética
2. Se asume que no existen pérdidas
3. Únicamente se analiza el caso de la operación en condiciones de falla trifásica

El modelo simplificado de generador en condiciones transitorias se muestra en la figura 1.3

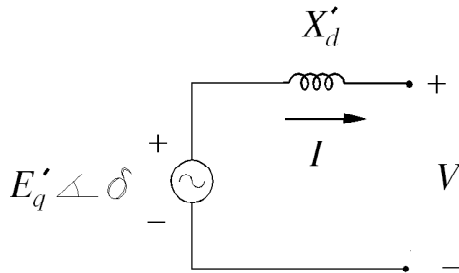


Figura 1.3

Modelo simplificado
en condiciones transitorias

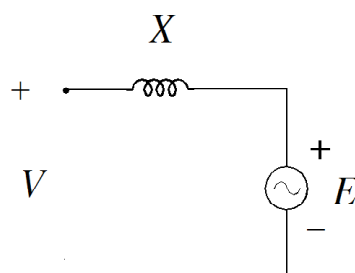


Figura 1.4

Equivalente de Thevenin
del sistema externo

En condiciones de falla trifásica se toman en cuenta las siguientes consideraciones: a) E'_q es el voltaje generado en lugar de E_f , b) La reactancia síncrona de eje directo X'_d se sustituye por X_d y c) La reactancia de cuadratura X'_q por X_q . Sin embargo, es importante recordar que típicamente $X'_d < X_d$, $X_q > X'_d$ y que $X'_d < X_q$.

Cuando se perturba el sistema eléctrico externo ² debido a una falla trifásica se presentan estados transitorios en los generadores conectados en esta red, y el generador más cercano a la falla es el que se ve más seriamente afectado por estos estados. En tales circunstancias, es posible reemplazar el sistema externo por su equivalente de Thevenin, tal como el que se muestra en la figura 1.4. Al interconectar los dos modelos anteriores en sus extremos se tiene el nuevo modelo que se muestra en la figura 1.5, el cual se empleará en este trabajo para poder relacionar los efectos electromagnéticos con los electromecánicos y así poder estudiar la estabilidad transitoria en el generador síncrono.

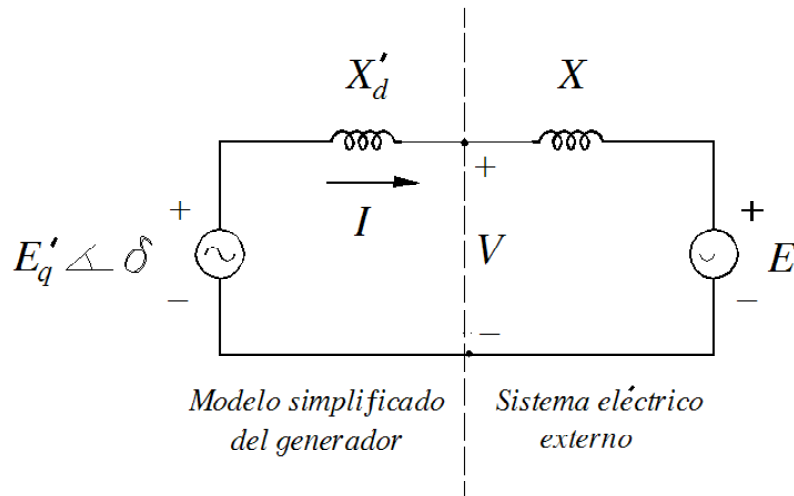


Figura 1.5

Modelo para el estudio de la estabilidad transitoria

A partir del modelo anterior se puede verificar que la potencia entregada por el

²El sistema eléctrico externo está constituido por otros generadores, transformadores y líneas de transmisión.

generador está dada por

$$P_e = \frac{E'_q E}{X'_d + X} \text{sen} \delta \quad (1.2)$$

1.3 La ecuación básica del subsistema mecánico de la máquina síncrona

En una máquina síncrona el campo magnético del rotor es producido por corrientes de directa que fluyen por sus devanados. Estos devanados giran junto con el rotor a una velocidad angular ω_m . Del mismo modo, el campo magnético del estator es producido por el efecto combinado de los voltajes trifásicos aplicados a cada una de las fases de los devanados del estator y giran a una velocidad síncrona dada por la ecuación

$$\omega_{syn} = \frac{2\pi f_e}{\left(\frac{N}{2}\right)}$$

Donde f_e es la frecuencia del sistema eléctrico en Hz y N es el número de polos del generador. En condiciones de estado estacionario los campos magnéticos del rotor y estator giran a una velocidad síncrona. La magnitud del par ³ y las expresiones fasoriales de los flujos magnéticos del rotor y estator determinan la separación angular δ entre estos dos campos (Elgerd I., Olle [6]). Cuando ocurren fallas en líneas, la magnitud y el desplazamiento angular de estos dos flujos cambia y se presentan *estados transitorios* en el intervalo de tiempo que dura este proceso.

El estudio de la estabilidad de sistemas eléctricos de potencia tiene por objeto el análisis y el comportamiento de estos estados transitorios. En lo concerniente a las máquinas síncronas se analizan fundamentalmente dos tipos de estabilidad, a saber:

a) La *estabilidad transitoria* que se encarga del estudio de la oscilación de un *swing* de los campos electromagnéticos cuando ocurre un disturbio de gran magnitud.

³El par puede ser mecánico o de origen eléctrico, según se comporte como generador o motor.

b) La *estabilidad dinámica* donde se estudian pequeños disturbios o bien irregularidades en los sistemas de control automáticos tales como el regulador de voltaje y el de velocidad. En este tipo de estabilidad se consideran períodos de tiempo más prolongados.

En el estudio del comportamiento básico de la máquina síncrona es común el empleo de modelos matemáticos que consideran las interacciones electromagnéticas en términos de flujos magnéticos giratorios ⁴ y corrientes que circulan en sus devanados ⁵. Cuando las perturbaciones son originadas por fallas se producen corrientes transitorias inducidas en los devanados del rotor y estator. Al tenerse presente este hecho en las máquinas de polos salientes se usan barras amortiguadoras para originar pares del tipo motor de inducción, con el propósito de disminuir las oscilaciones electromagnéticas del rotor del *fenómeno subtransitorio* que por lo regular tiene una duración de varias centésimas de segundos ⁶. Por otro lado, externamente a la máquina, la estructura de la red cambia cuando se presentan estos fenómenos, lo que ocasiona que también se presenten estados transitorios entre las líneas. En ambos casos, los transitorios asociados con estos fenómenos, tanto internos como externos, suceden en lapsos de tiempo muy cortos ⁷ en comparación con el fenómeno del *swing* de la máquina.

Cuando se estudia la estabilidad transitoria de la máquina síncrona sujeta a una falla trifásica, el análisis del intervalo que dura el *primer swing* es considerado el más relevante y este lapso de tiempo normalmente ocupa varias décimas de segundo (Del Toro, Vincent [5]), pero siempre menor a un segundo, por lo que los fenómenos transitorios electromagnéticos que duran menos de un período de décimas de segundo no se

⁴Flujos magnéticos que se originan en el entrehierro de la máquina.

⁵Corrientes que se originan debido a los voltajes inducidos.

⁶Las máquinas de rotor liso por lo general no se construyen con devanados amortiguadores; sin embargo, las corrientes que se inducen directamente en todo el cuerpo del rotor a consecuencia de los transitorios juegan el mismo papel que las de las máquinas de polos salientes, de hecho, a estas corrientes inducidas se les conoce como *corrientes amortiguadoras*.

⁷Las constantes de tiempo asociadas a este fenómeno son extremadamente pequeñas, tal es el caso de los transitorios que ocurren en los devanados del estator y otras componentes eléctricas de la máquina.

consideran en este trabajo.

Es importante señalar que, a pesar de que la falla trifásica es el disturbio más severo que puede ocurrirle a la máquina síncrona, el análisis teórico de este caso particular presenta ciertas ventajas y una de ellas es la simetría asociada al modelo matemático de esta falla. Esta característica matemática simplifica la complejidad del análisis (Anderson, P.M. [1]).

1.4 La ecuación del *swing* de la máquina síncrona

La ecuación del *swing* normalmente se obtiene a partir de la ecuación de Newton, aunque también se puede obtener a partir del principio de la conservación de la energía, tal como se describe, de manera simplificada, en el siguiente desarrollo.

Durante el transitorio debido a una falla trifásica, la flecha que acopla la turbina con el generador se acelera y se tiene que la expresión de la conservación de la potencia instantánea en el acoplamiento *turbina-generador* esta dada por

$$P_m - P_e(\delta) - P_k = \frac{d}{dt}W_k \quad (1.3)$$

Donde

- P_m : Es la potencia mecánica de la flecha, la cual prácticamente permanece constante durante el disturbio
- $P_e(\delta)$: Potencia eléctrica trifásica generada
- P_k : Pérdidas debido a la fricción viscosa e histéresis
- ω_r : Velocidad angular de la flecha del rotor
- W_k : Energía cinética de todas las partes rotatorias del sistema

$$P_k = T_B\omega_r = (D\omega_r)\omega_r = D\omega_r^2 \quad (1.4)$$

$$W_k = \frac{1}{2}J\omega_r^2$$

En donde

D : Coeficiente de amortiguamiento asociado a las pérdidas por fricción viscosa e histéresis

J : Momento de inercia de todas las partes giratorias del sistema

Al cambiar la referencia fija con la que se miden las velocidades angulares ω_r y ω_s a la referencia móvil que tiene una velocidad angular ω_{ref} , tal como lo muestran los fasores de los campos del rotor y estator en la figura 1.6.

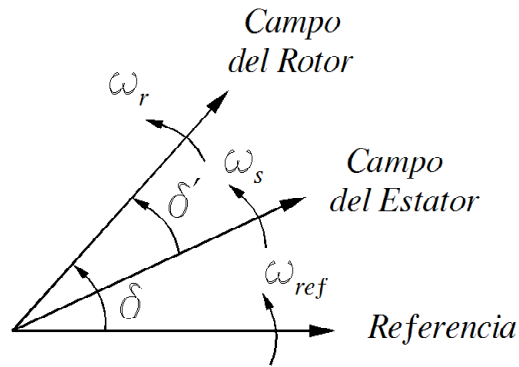


Figura 1.6

Fasores de los campos del rotor y estator

Se tiene que la cantidad angular

$$\omega = \frac{d\delta}{dt} = \omega_r - \omega_{ref} \quad (1.5)$$

Esta variable establece que en condiciones de estado permanente cuando $\omega_{ref} = \omega_r$, los ángulos δ y δ' permanecen constantes y la variación en ambos es nula, por otro lado, durante un disturbio ocasionado por una falla, bajo las mismas condiciones donde $\omega_{ref} = \omega_s$ se tiene $\omega_r > \omega_{ref}$ y los ángulos δ y δ' tendrán una variación diferente de cero, la cual es justamente la que se desea analizar. La variación del ángulo δ , la cual se conoce como *swing* de la máquina síncrona en condiciones de falla trifásica.

La variación de la energía cinética en todas las partes rotatorias del sistema se expresa

$$\frac{d}{dt}W_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \omega_r^2 \right) = J \omega_r \frac{d\omega_r}{dt}$$

Al despejar ω_r de (1.5) y sustituir este resultado en la ecuación anterior

$$\frac{d}{dt}W_k = J (\omega + \omega_{ref}) \frac{d}{dt} (\omega + \omega_{ref})$$

Dado que

$$\omega_{ref} \gg \omega$$

$$\frac{d}{dt}W_k = J \omega_{ref} \frac{d}{dt} (\omega + \omega_{ref}) \quad (1.6)$$

De la misma forma, al sustituir ω_r en la expresión (1.4)

$$P_k = D \omega_r^2 = D (\omega + \omega_{ref})^2 = D (\omega^2 + 2\omega\omega_{ref} + \omega_{ref}^2)$$

Pero

$$2\omega\omega_{ref} + \omega_{ref}^2 \gg \omega^2$$

$$P_k = D (2\omega\omega_{ref} + \omega_{ref}^2) \quad (1.7)$$

Al sustituir (1.6) y (1.7) en (1.3)

$$P_m - P_e(\delta) - D (2\omega\omega_{ref} + \omega_{ref}^2) = J \omega_{ref} \frac{d}{dt} (\omega + \omega_{ref})$$

Al definir

$$\bar{P}_m = P_m - D \omega_{ref}^2$$

Como la potencia mecánica en la turbina después de las pérdidas por fricción, la cual experimentalmente tiene la característica de que prácticamente $\bar{P}_m = P_m$ ya que

$$P_m \gg D \omega_{ref}^2$$

La ecuación queda

$$P_m - P_e(\delta) - 2D\omega\omega_{ref} = J\omega_{ref}\frac{d}{dt}(\omega + \omega_{ref})$$

Al normalizar la ecuación anterior y dividiéndola entre la potencia trifásica generada

$$\frac{P_m}{S_{3\phi}} - \frac{P_e(\delta)}{S_{3\phi}} - \frac{2D\omega_{ref}\omega}{S_{3\phi}} = \frac{J\omega_{ref}}{S_{3\phi}}\frac{d}{dt}(\omega + \omega_{ref}) \quad (1.8)$$

Pero la energía cinética rotacional antes de la falla está dada por

$$W_k = \frac{1}{2}J\omega_{syn_m}^2$$

Donde ω_{syn_m} es la rapidez angular de la flecha en estado estacionario. Al despejar el momento de inercia en la ecuación anterior se tiene

$$J = \frac{2W_k}{\omega_{syn_m}^2}$$

Al sustituir este valor en (1.8)

$$P_{mpu} - P_e(\delta)_{pu} - \left(\frac{2D\omega_{ref}}{S_{3\phi}}\right)\omega = \left(\frac{2W_k}{\omega_{syn_m}^2}\right)\frac{\omega_{ref}}{S_{3\phi}}\frac{d}{dt}(\omega + \omega_{ref})$$

Por otro lado al introducir la constante llamada *energía cinética normalizada*

$$H = \frac{W_k}{S_{3\phi}}$$

$$P_{mpu} - P_e(\delta)_{pu} - \left(\frac{2D\omega_{ref}}{S_{3\phi}}\right)\omega = \left(\frac{2H}{\omega_{syn_m}^2}\right)\omega_{ref}\frac{d}{dt}(\omega + \omega_{ref})$$

Ahora bien, si se considera que la referencia

$$\omega_{ref} = \omega_{syn_m} = \text{constante}$$

$$P_{mpu} - P_e(\delta)_{pu} - \left(\frac{2D\omega_{syn-m}}{S_{3\phi}} \right) \omega = \left(\frac{2H}{\omega_{syn-m}} \right) \frac{d\omega}{dt}$$

Por último

$$\omega_{syn-m} = 2\pi f_{syn-m}$$

$$P_{mpu} - P_{epu} - \left(\frac{4\pi D f_{syn-m}}{S_{3\phi}} \right) \omega = \left(\frac{H}{\pi f_{syn-m}} \right) \frac{d\omega}{dt}$$

Al llamar

$$B = \frac{4\pi D f_{syn-m}}{S_{3\phi}}, \quad M = \left(\frac{H}{\pi f_{syn-m}} \right) \quad \text{y dado que } \omega = \frac{d\delta}{dt}$$

$$P_m - P_u - B \frac{d\delta}{dt} = M \frac{d^2\delta}{dt^2} \quad ^8$$

$$M \frac{d^2\delta}{dt^2} + B \frac{d\delta}{dt} = P_m - P_u$$

La cual se puede expresar como un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{M} (P_m - P_u) - \frac{B}{M} \omega \end{cases}$$

Luego

$$P_u = P_e = \frac{E'_q E}{X'_d + X} \text{sen} \delta \quad \text{y al definir } K \triangleq \frac{E'_q E}{X'_d + X}$$

Se tiene

$$\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{M} (P_m - K \text{sen} \delta) - \frac{B}{M} \omega \end{cases}$$

Sistema no lineal de ecuaciones diferenciales que determina el comportamiento del ángulo δ . A este modelo comúnmente se le conoce como el modelo matemático del *swing*, el cual se empleará en el próximo capítulo para determinar las propiedades cualitativas de su solución durante el proceso de las tres etapas de la falla trifásica, a saber: *Prefalla*, *falla* y *posfalla*.

⁸Por comodidad se sustituye P_{mpu} y $P_e(\delta)_{pu}$ por: $P_m - P_e(\delta)$

Capítulo 2

Análisis cualitativo de la estabilidad transitoria de la máquina síncrona

Este capítulo tiene como objetivo fundamental dar contexto al análisis de la estabilidad transitoria de la máquina síncrona al estar sujeta bajo condiciones de falla trifásica, desde una perspectiva cualitativa de los sistemas dinámicos no lineales.

2.1 La secuencia de falla trifásica y las características de la estructura del sistema

En este apartado se tomará como referencia un Sistema Eléctrico de Potencia (**SEP**) conectado a un bus infinito con el objeto de analizar una falla trifásica en un punto p ¹, ubicado entre los buses 1 y 2, tal como el que se ilustra en la figura 2.1. Los parámetros que caracterizan el sistema son

$$P_m, H, f, V, E_f, X_{TL}, X_t, \text{ y } X_s$$

A continuación, se realizará un bosquejo del comportamiento cualitativo del modelo matemático de la máquina síncrona, al estar sujeta a una falla trifásica con libramiento de línea durante un intervalo de tiempo finito. Se tomará en consideración el concepto de equivalencia topológica de una red para poder aplicar la ecuación del flujo de

¹La distancia a la que se localiza el punto p con relación al extremo izquierdo de la línea es k veces la longitud total de la línea, donde $0 < \alpha < 1$.

potencia real entre los nodos de la máquina síncrona y el bus infinito.

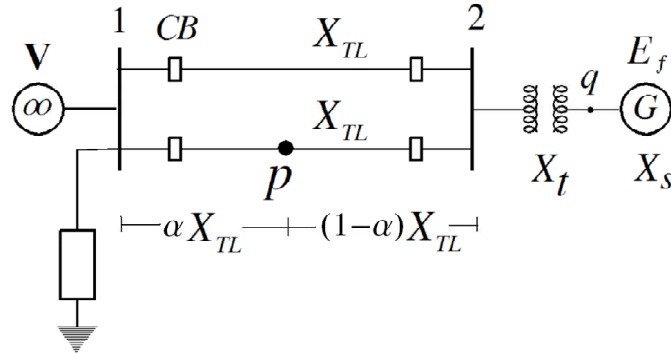


Figura 2.1

SEP conectado a un bus infinito

El modelo clásico de segundo orden a partir del cual se estudia este fenómeno considera que el sistema se encuentra en un estado inicial permanente de equilibrio denominado *estado de prefalla*. Posteriormente aparece el disturbio en el **SEP** que perturba este estado de equilibrio, generalmente este disturbio es ocasionado por diversas causas tales como cambios repentinos en la entrada, en la carga, en la estructura de la red o una secuencia combinada de tales cambios. En este trabajo únicamente se considerará que el disturbio se debe a cambios en la estructura de la red debido a una falla trifásica, ya que estos cambios ocasionan un desequilibrio en el par mecánico de la turbina y el par de origen eléctrico en el generador. La secuencia de este disturbio está dado por los siguientes estados:

Estado 1 *Equilibrio o prefalla*

Se asumen las siguientes consideraciones en este estado: a) Todos los generadores giran a la velocidad síncrona, b) Todos los voltajes y corrientes son sinusoidales, c) Todas las corrientes de campo i_F son constantes, d) Todas las cargas son constantes y e) Todas las potencias mecánicas de entrada en los generadores son constantes.

Estado 2 *Falla*

La falla ocurre en $t = 0$ seguida de una apertura instantánea en los relevadores ubicados

en los extremos de la línea donde ocurre el fallo. Esta acción de apertura ocasiona el libramiento de la falla antes de que ocurra el recierre en los relevadores.

Estado 3 *Posfalla*

Los relevadores reestablecen la línea en un tiempo $t = T$ y permanecen cerrados después de este tiempo.

Los diagramas monofásicos de la red para cada una de estas condiciones se muestran en las figuras 2.2, 2.3 y 2.4.

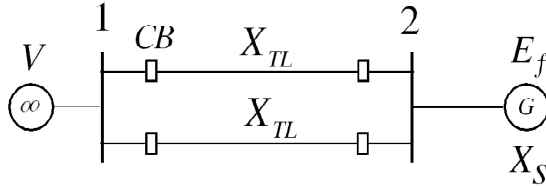


Figura 2.2 *Prefalla*

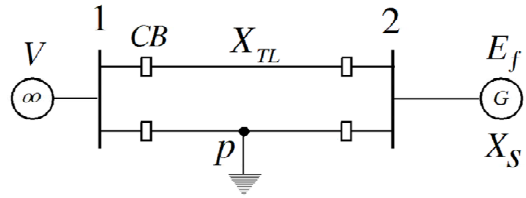


Figura 2.3 *Falla*

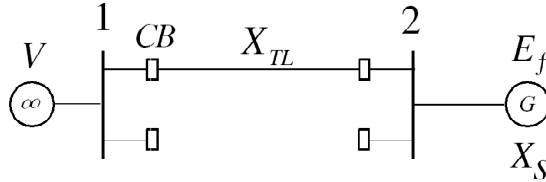


Figura 2.4 *Posfalla*

Después de esta secuencia se plantea el problema de analizar si el sistema regresa a un nuevo punto de equilibrio, es decir, el problema de encontrar el tiempo crítico T_c para el cual el sistema es transitoriamente estable (obtención de $T < T_c$) y de manera complementaria el tiempo $T > T_c$ para la cual no lo es.

Para el estudio de la estabilidad transitoria del **SEP** es necesario analizar el comportamiento del sistema dinámico cuyo modelo matemático no lineal se repite a continuación.

$$\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{M}(P_m - K \text{sen}\delta - B\omega) \end{cases}, \text{ sujeta a } \begin{bmatrix} \delta(0) \\ \omega(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Durante el proceso de este disturbio se tienen cambios en la estructura de la red debido al cambio en el parámetro K ², por lo que la respuesta del modelo matemático dependerá de los valores que adquiera este valor y de las condiciones iniciales en cada estado.

Las características de los estados de prefalla, falla y posfalla están determinados por las características de la magnitud de K ³ del modelo matemático (2.1), por lo que es necesario reducir los diagramas de las figuras 2.5, 2.6 y 2.7 y obtener la impedancia (o admitancia) total equivalente entre los nodos 1 y 3 por el método de *Kron* o por el de *Thevenin* (Anderson, P.M. [1]).

Los diagramas de impedancias para las condiciones de prefalla, falla y posfalla son los siguientes.

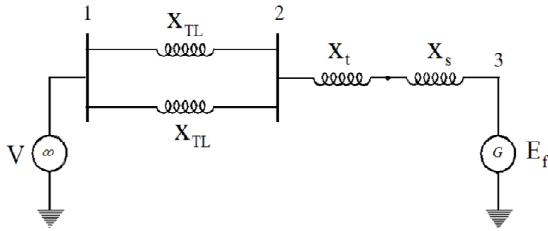


Figura 2.5 Z_{bus} de Prefalla

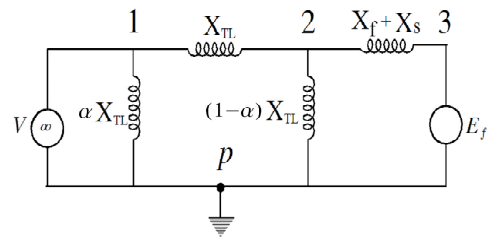


Figura 2.6 Z_{bus} de Falla

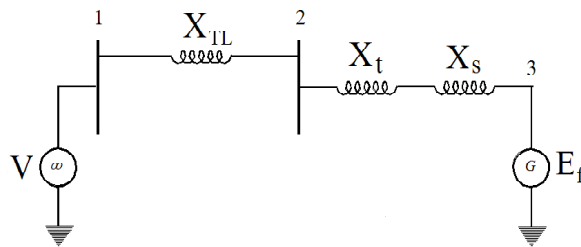


Figura 2.7 Z_{bus} de Posfalla

²Recordar que $P_e = \frac{E'_d E}{X'_d + X} \text{sen} \delta$ de donde $K = \frac{E'_d E}{X'_d + X}$. En el intervalo que dura el disturbio los parámetros X'_d y X , cambian.

³En lo sucesivo el subíndice empleado en la variable denota al estado a que se hace referencia, por ejemplo P_{pre} denota la potencia eléctrica máxima bajo condiciones de prefalla, del mismo modo K_f y Y_f denotarían, respectivamente, los valores de K y Y durante la etapa de falla.

Al comparar la secuencia entre dos estados consecutivos se puede observar el cambio de estructura en la red. Después de realizar la reducción para cada uno de estos diagramas y obtener los valores de las reactancias equivalentes entre los nodos 1 y 3 se pueden verificar las siguientes desigualdades.

$$X_f > X_{pos} > X_{pre}$$

De manera reciproca las admitancias cumplen

$$Y_{pre} > Y_{pos} > Y_f$$

Puesto que el valor del parámetro K se define

$$K \triangleq Y E_f V = \frac{E_f V}{X}$$

Las expresiones de K para cada uno de los valores de X_{pre} , X_{pos} y X_f correspondientes a los estados de *prefalla*, *falla* y *posfalla* se definen

$$K_{pre} \triangleq \frac{E_f V}{X_{pre}}, \quad K_{pf} \triangleq \frac{E_f V}{X_{pf}} \quad \text{y} \quad K_f \triangleq \frac{E_f V}{X_f}$$

Los cuales también cumplen con las desigualdades

$$K_{pre} > K_{pf} > K_f$$

Por lo que las potencias eléctricas reales en cada uno de estos estados están dadas por

$$P_{pre} = K_{pre} \text{sen} \delta, \quad P_f = K_f \text{sen} \delta \quad \text{y} \quad P_{pf} = K_{pf} \text{sen} \delta$$

Al comparar estas magnitudes con la potencia mecánica de la turbina siempre se cumple que $P_f < P_m$. Luego el bosquejo de las gráficas $\frac{P_m}{M}$, $\frac{K_{pre}}{M} \text{sen} \delta$, $\frac{K_f}{M} \text{sen} \delta$ y $\frac{K_{pf}}{M} \text{sen} \delta$ se muestran, de manera conjunta, en la figura 2.8. En esta misma gráfica las trayectorias

orientadas con flechas señalan la secuencia del inicio y del final en que aparecen cada una de ellas acorde a cada una de las etapas de la falla.

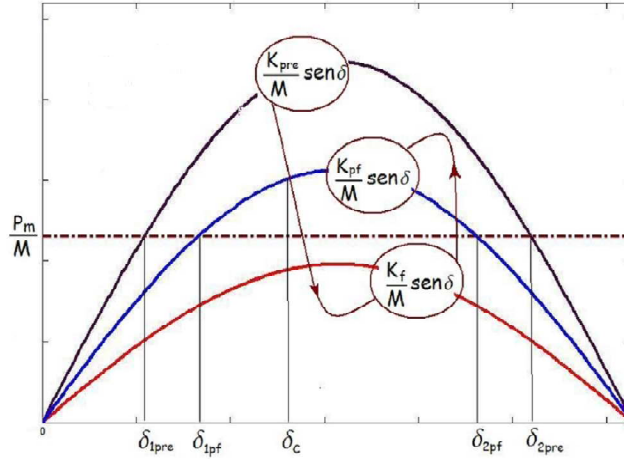


Figura 2.8

Secuencia del fallo en el SEP

2.2 La solución cualitativa de la ecuación del *swing*

En este apartado se bosquejará una representación cualitativa de las soluciones del modelo matemático del *swing*. Las representaciones se realizarán mediante las gráficas de la solución en términos de sus trayectorias y campos de dirección para cada uno de los estados de prefalla, falla y posfalla.

Análisis de la condición de equilibrio o prefalla

Para estas condiciones el modelo matemático del *swing* queda representado

$$\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{M}(P_m - K_{pre}\text{sen}\delta - B\omega) \end{cases}, \text{ sujeto a } \begin{bmatrix} \delta(0^-) \\ \omega(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}$$

Con los puntos de equilibrio

$$\mathbf{Xe}_{1pre} = \begin{cases} \delta_{1pre} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{P_m}{K_{pre}}\right) \\ \omega_{1pre} = 0 \end{cases} \text{ y } \mathbf{Xe}_{2pre} = \begin{cases} \delta_{2pre} = \pi - \text{sen}^{-1}\left(\frac{P_m}{K_{pre}}\right) \\ \omega_{2pre} = 0 \end{cases}$$

Y dominio de definición $0 \leq \delta \leq \pi$.

La figura 2.9 muestra en la intersecciones de la recta $\frac{P_m}{M}$ con la curva $\frac{K_{pre}}{M} \text{sen} \delta$, los ángulos de equilibrio estable δ_{1pre} e inestable δ_{2pre} en el estado de prefalla. Las soluciones cualitativas de este sistema en torno a los puntos de equilibrio $\mathbf{X}e_{1pre}$ y $\mathbf{X}e_{2pre}$ para diferentes valores del vector de condiciones iniciales $\begin{bmatrix} \delta_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}$ se representan en las figuras 2.10 y 2.11 por medio de las *trayectorias de estado* con sus respectivos *campos de direcciones*.

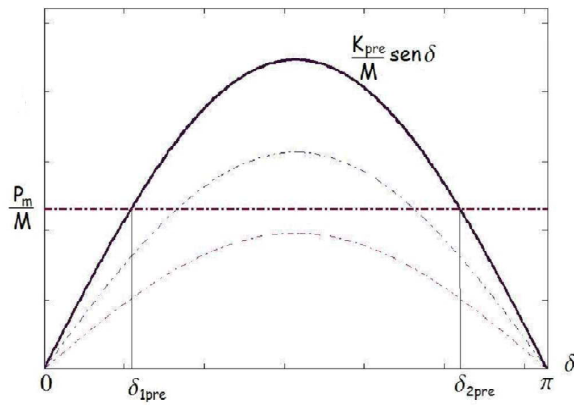


Figura 2.9, Puntos de equilibrio en Prefalla

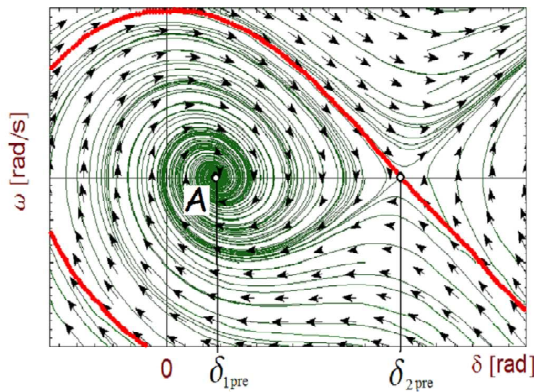


Figura 2.10 $B \neq 0$

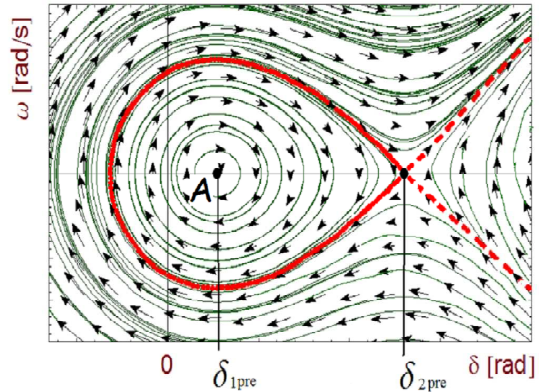


Figura 2.11 $B = 0$

En las figuras 2.10 y 2.11 pueden observarse dos aspectos importantes:

- a) El bosquejo de las trayectorias estables al ser delimitadas con un trazo grueso ⁴, presentan las siguientes características. Para $B \neq 0$ la familia de trayectorias estables

⁴El trazo constituye un estimado del *dominio de estabilidad* del sistema.

están contenidas en una *región abierta* y para $B = 0$ están contenidas en una *región cerrada*.

b) En todos los estados cercanos al punto de equilibrio \mathbf{X}_{1pre} , indicado por el punto A y en donde el sistema opera en condiciones normales, se tiene un *holgado* margen de estabilidad. Para el caso de $B \neq 0$ presenta *estabilidad asintótica* en virtud de tenerse un *atractor espiral* y simplemente estable para el caso de $B = 0$.

Observación:

En condiciones de prefalla la operación del sistema ocurre muy cerca del primer punto de equilibrio, ya que en este estado las variaciones que puede tener el flujo de potencia eléctrico son causadas por cambios moderados en la carga del sistema ($P_m \approx K_{pre}$) y no por cambios drásticos en los parámetros de la red. En contrapartida, la operación en el segundo punto de equilibrio en condiciones de prefalla es *técnicamente imposible*. Obviamente esto no sucede en las transiciones que tiene el sistema al pasar de los estados de *prefalla* \rightarrow *falla* y *falla* \rightarrow *posfalla*, que son los casos que se analizarán a continuación.

Análisis de la condición de falla

En la transición del sistema del estado de prefalla a falla, la cual se considera que ocurre en $t = 0^+$ [s]⁵, la estructura de la red cambia tal como lo muestran las figuras 2.3 o su equivalente 2.6. El cambio de valor de la componente Y_{12} al pasar de Y_{12pre} a Y_{12f} , va acompañado simultáneamente del cambio del valor de K al pasar de K_{pre} a K_f . El inicio de este estado de falla supone el inicio de la primera transición del sistema al cambiar drásticamente el valor del parámetro K , ya que al sustituir los valores de $K = K_f$ con $P_m > K_f$ y conservarse constantes B , P_m y M , el modelo matemático queda

$$\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{M}(P_m - K_f \text{sen}\delta - B\omega) \end{cases}, \text{ sujeta a } \begin{bmatrix} \delta(0^+) \\ \omega(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}$$

⁵La nomenclatura empleada en este apartado denota a $t = 0^-$ *inmediatamente antes* de que ocurra la falla y $t = 0^+$ *inmediatamente después* de que ocurre la falla.

cuyo dominio de definición está dado por $0 \leq \delta \leq \pi$.

En este estado se tiene que $P_m > K_f + B\omega$, por lo que la solución cualitativa del sistema, para diferentes valores del vector $\begin{bmatrix} \delta_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}$ es tal como se indica en las siguientes gráficas.

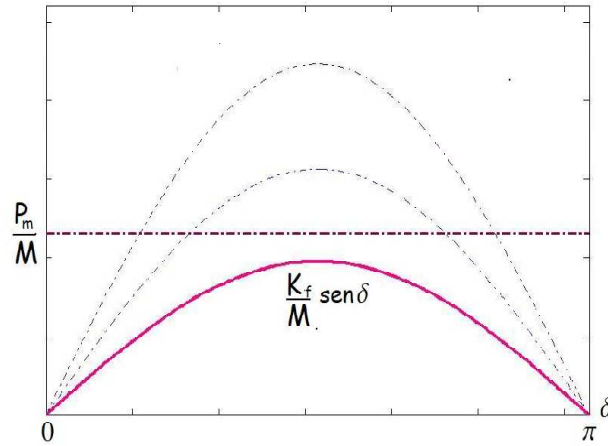


Figura 2.12

Ausencia de puntos de equilibrio en falla

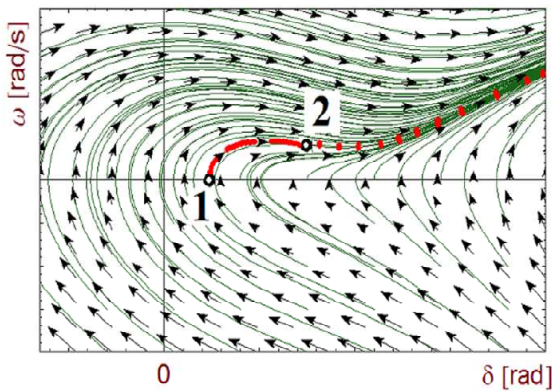


Figura 2.13 $B \neq 0$

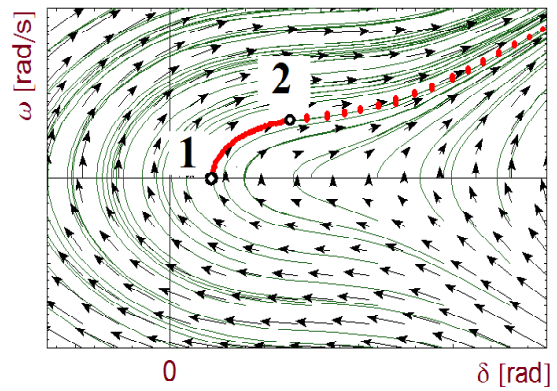


Figura 2.14 $B = 0$

En la figura 2.12 se puede observar que el sistema de ecuaciones *no tiene puntos de equilibrio* y las soluciones representadas por las trayectorias de las figuras 2.13 y 2.14 crecen indefinidamente a partir de cualquier condición inicial, tal como puede verse en

las trayectorias de trazo continuo que inician en 1 ⁶. En tales condiciones el sistema no debe operar más allá de un cierto tiempo crítico $t_c = T$ cuyo estado está indicado por el punto 2, ya que puede existir el riesgo de pérdida de sincronismo en la máquina. Por lo que el *esquema de protección* debe desconectar la línea en los extremos laterales del punto p ⁷, tal como se muestra en la figura 2.4, a fin de que el sistema no opere más allá de dicho estado. El esquema de protección debe diseñarse para obligar al sistema a entrar a una *condición de recuperación*, de tal suerte que transite de un período temporal de operación inestable ⁸ a otro de operación estable general en el menor tiempo posible $t_f < T$. Esta transición ocurre del estado de *falla* al estado de *posfalla*, la cual se analizará a continuación.

Análisis de la condición de posfalla

Cuando el sistema entra en la transición del estado de falla a posfalla el sistema de protección debe operar oportunamente para que no ocurra la pérdida de sincronismo. Esto ocurre después de que los relevadores desconectan la línea en un tiempo no mayor al tiempo crítico $t_f < t_c = T$, por lo regular $T < 1$ [s]. Después de que ocurre la desconexión de la línea, la estructura de la red cambia de nuevo tal como se muestra en la figura 2.4 o 2.7. Al cambiar la componente del valor Y_{12f} de falla al valor Y_{12pf} de posfalla, también lo hace el valor de K al pasar K_f a K_{pf} (con $K_{pf} > K_f$ y $P_m > K_{pos}$). De esta forma, el inicio de este estado de posfalla, supone la segunda transición del sistema al cambiar el valor del parámetro K manteniéndose constantes los parámetros B , P_m y M . El modelo matemático en estas condiciones tiene el siguiente conjunto de

⁶Las cuales son las mismas del estado inmediato anterior de prefalla $\begin{bmatrix} \delta(0^+) \\ \omega(0^+) \end{bmatrix}$.

⁷Se admite el supuesto de que esta acción se realiza mediante una apertura instantánea de los relevadores en el intervalo $0 < t < T_c$ antes de que ocurra el tiempo crítico T_c . Obviamente que esta es una condición ideal ya que debe transcurrir un intervalo de tiempo muy pequeño para que todos los residuos de aire ionizado, productos de la falla, puedan extinguirse antes de que los relevadores reestablezcan la línea, es decir, antes de que ocurra el recierre.

⁸Marcado con el número 2 en la figura anterior

ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{M}(P_m - K_{pf}\text{sen}\delta - B\omega) \end{cases}, \text{ sujeta a } \begin{bmatrix} \delta(t_f^+) \\ \omega(t_f^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_f(t_f^-) \\ \omega_f(t_f^-) \end{bmatrix}$$

Con los puntos de equilibrio

$$\mathbf{Xe}_{1pf} = \begin{cases} \delta_{1pf} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{P_m}{K_{pf}}\right) \\ \omega_{1pf} = 0 \end{cases} \text{ y } \mathbf{Xe}_{2pf} = \begin{cases} \delta_{2pf} = \pi - \text{sen}^{-1}\left(\frac{P_m}{K_{pf}}\right) \\ \omega_{2pf} = 0 \end{cases}$$

Y dominio de definición $0 \leq \delta \leq \pi$.

La solución cualitativa de este sistema de ecuaciones durante el estado de posfalla se ilustra en las siguientes gráficas.

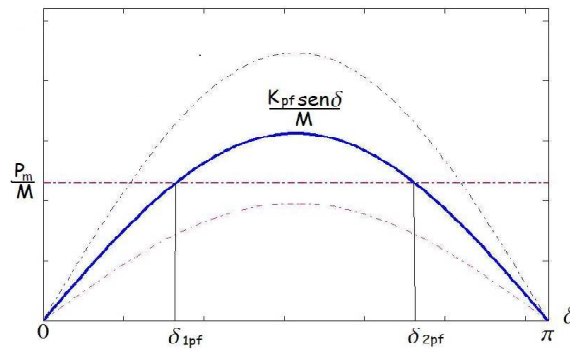


Figura 2.15, Puntos de equilibrio en posfalla

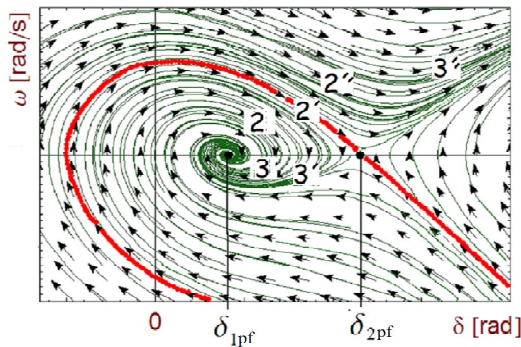


Figura 2.16 $B \neq 0$

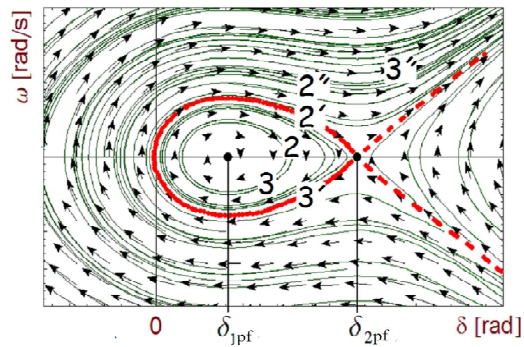


Figura 2.17 $B = 0$

En la figura 2.15 se muestra la representación analítica de los puntos de equilibrio

ubicados en las intersecciones de la recta $\frac{P_m}{M}$ con la curva $\frac{K_{pf}}{M} \text{sen}\delta$, mientras que las figuras 2.16 y 2.17 muestran las trayectorias que determinan la solución cualitativa en torno a los puntos de equilibrio $\mathbf{X}e_{1pf}$ y $\mathbf{X}e_{2pf}$.

Las curvas de la solución en torno a las vecindades del primer punto de equilibrio $\mathbf{X}e_{1pf}$ pueden ser estables, siempre y cuando el estado final para cualquier lugar geométrico que se genere durante el proceso falla ⁹ esté ubicado dentro de las región estimada de máxima estabilidad que se muestra con trazo grueso ¹⁰; los estados 2 y 3 corresponden a este caso. Desde luego que el estado final de la falla puede tener un lugar geométrico lo más cercano posible a la trayectoria umbral de estabilidad, tal como lo muestran los estados marcados por 2' y 3', en tales circunstancias, el sistema operará en una trayectoria crítica donde el ángulo δ adquiere su valor máximo $\delta = \delta_c$ localizado muy cerca del punto de equilibrio inestable \mathbf{X}_{2pf} . Esta situación no es nada afortunada, ya que el sistema será candidato a *entrar* a un estado muy cercano a la inestabilidad ante cualquier pequeño disturbio, tal como lo muestran los estados marcados con 2'' y 3''. Con respecto a este último señalamiento vale la pena observar que, para el caso de la figura 2.17 cuando $B = 0$, el ángulo δ oscila muy cerca de la trayectoria umbral que define la región cerrada de máxima estabilidad, también denominada *trayectoria homoclínica* o *trayectoria de unión punto silla-centro* (Golubitsky, Martin, Dellnitz, Michael [9]). A esta oscilación se le conoce como el *máximo swing* de estabilidad en la máquina síncrona.

A manera de resumen, el problema de la estabilidad de la máquina síncrona conectada a un bus infinito y sujeta a una falla trifásica puede analizarse cualitativamente a partir de las trayectorias de solución de la ecuación (2.1), y el principal problema a resolver es el de librar la falla lo más oportunamente posible para que el sistema opere en la *región estimada de atracción* en el estado de posfalla. La secuencia del fallo, en consonancia con los cambios del valor de K , impone una condición de encadenamiento

⁹El cual corresponderá ahora a las condiciones iniciales para el estado de posfalla.

¹⁰Para el caso de $B \neq 0$ corresponde a la región abierta y para el caso de $B = 0$, corresponde a una región cerrada.

de las condiciones finales de un estado con las iniciales de otro ¹¹ que deben emplearse en la ecuación (2.1). La conjunción gráfica de los estados de prefalla, falla y posfalla se presentan en los *planos de fase* de las figuras 2.18 y 2.19.

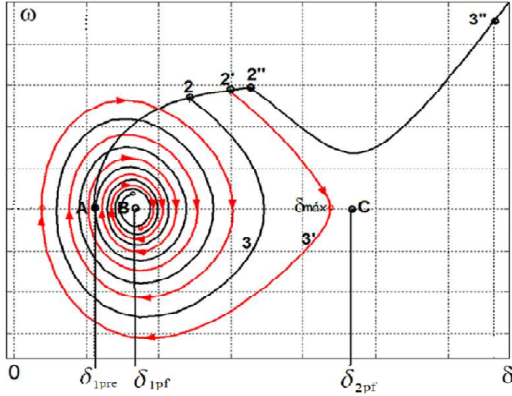


Figura 2.18

Encadenamiento de estados, $B \neq 0$

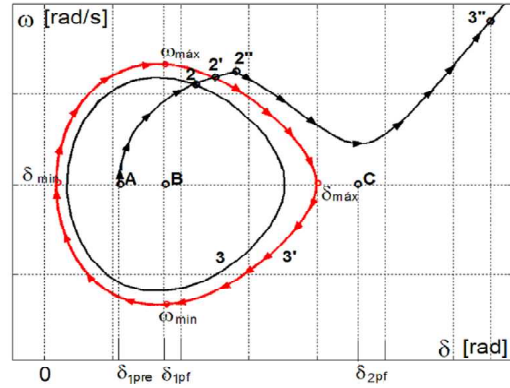


Figura 2.19

Encadenamiento de estados, $B = 0$

Observación:

Los tiempos en los que ocurren sucesivamente los encadenamientos de estos procesos se indican a continuación:

A de inicio de prefalla ocurre en $t = 0^-$

1 de inicio de falla ocurre en $t = 0^+$

2 de final de falla inicia en $t_f^- = t_c^-$, con $t_c = T$

2 de inicio de posfalla en $t_f^+ = t_c^+$

En $t = 0^-$ el sistema opera en estado estable en torno al punto de equilibrio $\mathbf{X}e_{1pre}$ ubicado en el punto A ¹² (punto 1 de la figura 2.10 o 2.11); en $t = 0^+$ ocurre la falla y este proceso tiene como trayectoria de estados la sucesión de puntos que va desde el punto 1 hasta el punto 2 (figuras 2.13 o 2.14) que es el final de la falla y ocurre en $t = t_f^-$; inmediatamente después en $t = t_f^+$ se tiene el inicio del estado de posfalla, este estado puede desarrollarse a lo largo de tres trayectorias posibles $2 \rightarrow 3$, $2' \rightarrow 3'$ o

¹¹La condición final de equilibrio (la de inicio de prefalla) con la inicial de falla y la final de este estado con la inicial de posfalla.

¹²Por lo regular se considera que en el estado inicial, el de prefalla, $\omega_{1pre} = 0$.

$2'' \rightarrow 3''$ (figuras 2.16 o 2.17).

- a) $A \rightarrow 2 \rightarrow 3$, trayectoria de estabilidad (asintótica para $B \neq 0$) en torno al punto de equilibrio $\mathbf{X}e_{1pf}$
- b) $A \rightarrow 2' \rightarrow 3'$, trayectoria umbral o de estabilidad crítica en torno al punto de equilibrio $\mathbf{X}e_{1pf}$
- c) $A \rightarrow 2'' \rightarrow 3''$, trayectoria inestable, para todos los estados fuera de la región acotada por la trayectoria umbral.

El encadenamiento de las condiciones *fnales* con *iniciales* de la secuencia *prefalla* \rightarrow *falla* \rightarrow *posfalla* en el modelo matemático dado por (2.1) es importante para poder simular su comportamiento dinámico mediante software de propósito específico ¹³.

La obtención cuantitativa de los tiempos de desconexión, magnitudes de los ángulos y de las velocidades angulares, será el tema a tratar en los capítulos 5 y 6.

¹³El software que se empleó para la solución de modelos matemáticos y sus representaciones gráficas a lo largo de este trabajo fue **Simulink/Matlab** y **Mathematica**.

Capítulo 3

El concepto de analogía, estructura y contexto de su empleo

En este capítulo se expondrán los elementos necesarios que componen la estructura del proceso de razonamiento analógico que se empleará en lo sucesivo de este trabajo, con el fin de representar y poder estudiar el comportamiento de la máquina síncrona en condiciones de falla trifásica a través de un sistema mecánico rotacional análogo.

3.1 Las analogías como formas de representación en fenómenos físicos

Las analogías son *representaciones* utilizadas con el objeto de comprender una información nueva por medio de una *correspondencia*. Esta correspondencia se establece de los elementos que contiene esta nueva idea con los elementos de otra idea que ya se conoce (Hesse, M. B. [11]). La construcción y el manejo de las analogías constituyen una habilidad en reconocer que *una cosa es como semejante a otra*.

El empleo del concepto de *analogía* entraña aspectos muy importantes en la formulación y solución de problemas, sobre todo en lo referente a las interpretaciones y sus significados, ya que puede considerarse como un mediador entre dos campos semánticos que permite dar sentido a un contenido novedoso a partir de significados extraídos de otro campo ya conocido.

Existen una gran variedad de definiciones de este concepto y es muy probable que la más conocida sea la siguiente.

Analogía es toda semejanza existente entre dos cosas a pesar de su diversidad y sirve principalmente como elemento de comparación por muy diferentes que sean los conceptos que se comparan.

Otra definición que es importante por el hecho de quien la establece es la del filósofo Emmanuel Kant, en su obra **Prolegómenos a toda Metafísica Futura**.

Una analogía es una semejanza perfecta de dos relaciones entre cosas completamente desemejantes.

Sin embargo, en el contexto de este trabajo se empleará la siguiente definición de lo que es una analogía.

*Una analogía es una **comparación** entre dos dominios, uno más familiar llamado **f fuente** o **análogo** y otro dominio menos conocido denominado **concepto** o **meta**. Los cuales comparten información de tipo relacional con el objeto de **interpretar** o aclarar una **característica compartida** (Godoy, L. A. [8]). El establecimiento de conexiones en este proceso de comparación entre estos dos dominios se denomina **mapeo** o **transferencia**.*

Una de las razones principales por lo cual se elige esta definición es que permite el manejo de características metodológicas *completamente relacionales* en los elementos involucrados, y este aspecto metodológico pertenece en gran medida a la lógica y a la matemática por lo que es posible llevarlo y manejarlo en el ámbito de estas disciplinas.

Cuando se establecen las relaciones en los elementos de una analogía, es importante aclarar que es posible hablar de igualdad de relación, ya que tal igualdad es necesaria concebirla en el contexto analógico tomando en cuenta la diversidad de esencia entre dos objetos, dos conceptos, dos fenómenos etc.. Esta igualdad de relación mediante la cual se concibe a la analogía es uno de los aspectos principales que la caracterizan, sin lugar a dudas, como un concepto diferenciador, crítico y polémico. Lo anterior permite efectuar un mapeo funcional del modelo fuente al modelo meta

3.2 Elementos que consituyen la estructura de una analogía

Una analogía toma su *identidad* de la *estructura* que poseen los dominios que la determinan (análogo y meta). La estructura está formada por *entidades y relaciones entre entidades*. Las entidades pueden ser conceptos, términos, variables, datos, etc. los cuales pueden ser de distinta naturaleza (vectorial o escalar); y las relaciones entre entidades son las que permiten realizar operaciones, pueden ser ecuaciones de muy diversas características inclusive pueden contener diferentes operadores matemáticos. Así pues, para poder establecer una analogía es necesario comprender la estructura de lo que se toma en ambos *dominios de contenido* (Godoy, L. A. [8]).

El empleo de las analogías en el contexto básico de la enseñanza de algunas disciplinas como son la teoría de circuitos, mecánica, hidráulica entre otras, se limitan a relacionar problemas entre *dominios* relativamente sencillos para facilitar el análisis y la solución de problemas. En otros casos más complejos las analogías pueden establecerse sobre otros *dominios* más abstractos y elaborados, como son los conceptos, comportamientos de fenómenos, experimentos, métodos, teorías, etc.. Esto quiere decir que los *aspectos* de una analogía pueden contener dominios complejos de diversa índole y que necesariamente su elección dependerá de muchos factores, tales como el contexto, el marco de análisis, las relaciones internas empleadas, suposiciones, etc..

Con relación a lo planteado en el párrafo anterior, conviene aclarar estas ideas mediante algunos ejemplos. a) Si se toma como dominio un *problema*, entonces un *aspecto* puede ser la metodología de solución de ese problema. b) Si se toma como dominio un *concepto*, un *aspecto* puede ser la caracterización de ese concepto o bien su identificación experimental, entre otros. Si en lugar de aspectos, los dominios relacionados pueden visualizarse mediante *estructuras internas*, entonces también se puede hablar de entidades y de relaciones entre entidades, esta situación es particularmente sobresaliente en este trabajo, ya que para poder establecer relaciones entre entidades en ambos dominios fue necesario emplear herramientas conceptuales de la *Dinámica de*

Sistemas. En esta disciplina se estudian las estructuras genéricas que pueden identificarse en sistemas de naturaleza muy diferente y que además se pueden transferir de un sistema a otro ¹. Esta es una de las principales razones que permite construir diversas analogías entre diferentes sistemas tal como es el caso de la analogía Sistema Mecánico Rotacional (**SMR**) y Sistema Eléctrico de Potencia(**SEP**) que se pretende realizar en este trabajo.

3.3 Estructura y mapeo de la analogía mecánica-electromagnética

Con el fin de aclarar y establecer cuáles son elementos más importantes que caracterizan la analogía que se empleará en este trabajo es conveniente establecer, en primer lugar, los dominios en los que se efectúa la comparación entre estos dos sistemas. El *dominio fuente o análogo* que supone un problema más familiar y que corresponde *-al problema de la estabilidad de un SMR-* y el otro *dominio, concepto o meta*, al que se supone un problema menos conocido *-el problema de la estabilidad de un SEP-*. Toda vez que se tienen definidos los dominios de comparación en la analogía, se procede a establecer los siguientes aspectos fundamentales:

- a) Las propiedades, características y estructuras necesarias que deben definirse en el **SMR** para que pueda funcionar como modelo analógico del **SEP**.
- b) Las relaciones conceptuales que existen entre la estabilidad mecánica del **SMR** propuesto con los de la estabilidad electromagnética del **SEP**.

¹La idea de estructura transferible es importante en Dinámica de Sistemas porque le permite estimar el comportamiento de sistemas de disciplinas diferentes, a través de entender el comportamiento de sus estructuras genéricas subyacentes (Forrester et al, 1995).

La figura 3.1. muestra la naturaleza de esta comparación.

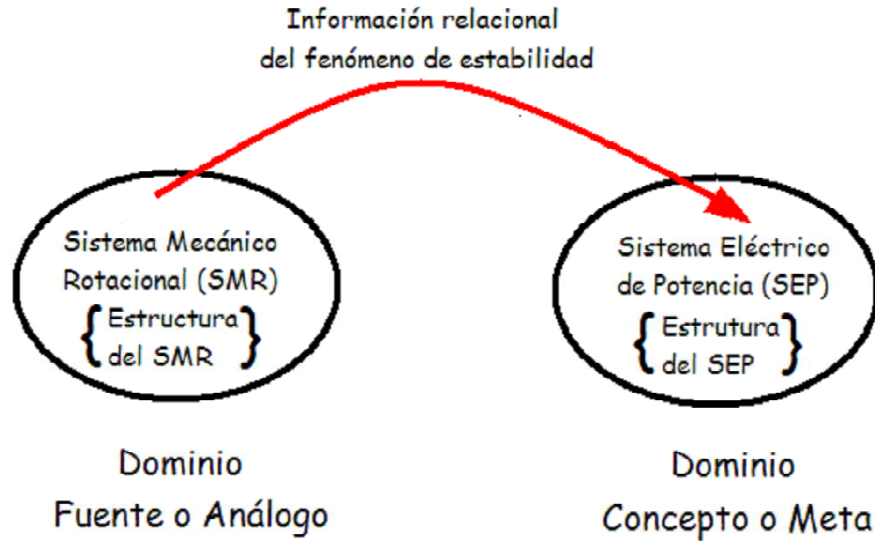


Figura 3.1

Partes esenciales de la analogía SMR y SEP

La metodología del análisis conceptual en ambos sistemas se obtiene de la *Dinámica de Sistemas no Lineales* y la del análisis de comparación, tanto cualitativo como cuantitativo, constituye el aspecto principal de los resultados de la analogía.

A continuación se señalan algunas de las características comunes que muestran ambos sistemas en lo referente a entidades (fenómenos, variables, conceptos, etc.) así como de la relación común que existe entre ellas. Estas características comunes determinan la *estructura* que contiene tanto el **SMR** como el **SEP**.

En el **Sistema Mecánico Rotacional** se tienen los siguientes fenómenos y relaciones entre entidades.

Entidades involucradas (conceptos y variables)	
a) Masa de un cuerpo	m
b) Atracción mecánica debida al campo gravitacional	g
c) Aceleración lineal y angular	$a, \ddot{\theta}$
d) Velocidad lineal y angular	v, ω
e) Fuerza de tensión en una cuerda	T
f) Momento de Inercia de una polea	I
g) Coeficiente de fricción viscosa en el eje de una polea	B

Relaciones entre entidades mecánicas	
a) Energía potencial gravitatoria	mgh
b) Energía cinética translacional	$\frac{1}{2}mv^2$
c) Energía cinética rotacional	$\frac{1}{2}I\omega^2$
d) Fricción viscosa en el eje de una polea	$B\omega$
e) Par mecánico resultante debido a la acción conjunta de cuerpos conectados a una polea	$T_m = M_m gr = (m_2 - m_0 - m_1 - m_3) gr$
f) Par mecánico restaurador debido a la rotación no baricéntrica de una barra	$T_B = \frac{1}{2}m_B gl_B \text{sen}\theta = K_m \text{sen}\theta,$ donde $K_m = \frac{1}{2}m_B gl_B$
g) Modelo matemático no lineal que determina el comportamiento del sistema mecánico	$I\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = M_m gr - K_m \text{sen}\theta$

Fenómenos mecánicos asociados con el proceso de estabilidad mecánica
a) De disturbio mecánico: Acción de cortar un hilo para eliminar una fuerza de tensión
b) De conexión mecánica: Acción de conectar una masa al sistema después de un disturbio mecánico.
c) De cambio en la estructura: Comportamiento mecánico de una nueva configuración del SMR debido al cambio de los elementos mecánicos que lo componen

Mientras que en el **Sistema Eléctrico de Potencia** se tienen los siguientes conceptos, fenómenos y entidades:

Entidades involucradas (conceptos y variables)	
a) Ángulo de fase entre los campos electromagnéticos del estator y rotor	δ
b) Voltajes de generación y de bus infinito	E_f y V
c) Variación angular entre los campos electromagnéticos del estator y del rotor	$\dot{\delta}$
d) Momento de Inercia de las partes rotatorias del sistema electromecánico turbina-generator	J
e) Coeficiente de fricción viscosa rotacional en el entrehierro del generador	D

Relaciones entre entidades	
a) Energía cinética de las partes rotatorias del sistema turbina-generator	$W_k = \frac{1}{2} J \omega_{syn-m}^2$
b) Energía cinética normalizada	$H = \frac{W_k}{S_{3\phi}}$
c) Constantes que relacionan las entidades	$D = \frac{4\pi D f_{syn-m}}{S_{3\phi}}$ y $M = \left(\frac{H}{\pi f_{syn-m}} \right)$
d) Potencia mecánica de la turbina proporcionada al generador	P_m
f) Potencia eléctrica del generador proporcionada a la línea de transmisión	$P_u = \frac{VE}{X} \text{sen}\delta = K \text{sen}\delta$ donde $K = \frac{VE}{X}$
g) Modelo matemático no lineal que determina el comportamiento del <i>swing</i> del generador	$M \frac{d^2\delta}{dt^2} + D \frac{d\delta}{dt} = P_m - K \text{sen}\delta$

Fenómenos eléctricos asociados con el proceso de estabilidad eléctrica

- a) De disturbio eléctrico: Falla trifásica en un punto determinado de una línea de transmisión
- b) Mecanismo de libramiento de la falla: Acción de desconectar una línea en sus extremos por medio de relevadores
- c) Cambio en la estructura de los elementos que componen el **SEP**
 - Estado prefalla
 - Estado de falla
 - Estado de posfalla

El *mapeo* o *transferencia* de algunas conexiones que se establecen en el proceso de comparación entre los dominios del **SMR** y el **SEP** se establece de la siguiente forma. El símbolo \implies debe leerse *es como*.

Mapeo entre variables			
θ	\implies	δ	$I \implies J$
ω^2	\implies	$\dot{\delta}$	$B \implies D$

²Es importante distinguir en este mapeo que ω es una propiedad *cinemática absoluta* de un cuerpo, mientras que $\dot{\delta}$ es una *variación angular relativa* entre las fases de dos campos electromagnéticos.

Mapeo entre fenómenos (acciones, cambios, estados, etc.)	
Acción de cortar un hilo entre dos masas conectadas	$\left. \vphantom{\text{Acción de cortar un hilo}} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Falla trifásica en un punto} \\ \text{determinado de una línea} \\ \text{de transmisión} \end{array} \right.$
Acción de conectar una masa después del disturbio mecánico	$\left. \vphantom{\text{Acción de conectar una masa}} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Acción de desconectar una línea} \\ \text{de transmisión en sus extremos} \\ \text{por medio de relevadores} \end{array} \right.$
Cambio en la estructura de los elementos que componen el sistema mecánico	$\left. \vphantom{\text{Cambio en la estructura}} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio en la estructura} \\ \text{de los elementos que} \\ \text{componen el sistema eléctrico} \end{array} \right.$
Estado de equilibrio mecánico, Estado de falla mecánica y Estado de posfalla mecánica	$\left. \vphantom{\text{Estado de equilibrio mecánico}} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Estado prefalla eléctrica} \\ \text{Estado de falla eléctrica y} \\ \text{Estado de posfalla eléctrica} \end{array} \right.$

Mapeo entre estructuras matemáticas	
La ecuación diferencial no lineal del comportamiento dinámico del SMR $I\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = M_m g r - K_m \text{sen}\theta$	$\left. \vphantom{\text{La ecuación diferencial no lineal del}} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{La ecuación diferencial no lineal del} \\ \text{swing de la máquina síncrona} \\ \\ M \frac{d^2\delta}{dt^2} + D \frac{d\delta}{dt} = P_m - K \text{sen}\delta \end{array} \right.$

Es importante aclarar que algunos modelos matemáticos que aparecen en los cuadros de los mapeos de entidades y de estructuras matemáticas se determinarán en los capítulos siguientes.

3.4 Enfoque y perspectiva de estudio de la analogía Mecánica-Electromagnética

Como ya se mencionó, uno de los propósitos fundamentales de esta propuesta de analogía, es asimilar lo *nuevo* en términos de *cosas más conocidas*. Tratando siempre de que las *premisas explicatorias* no resulten *demasiado extrañas*, y que las respuestas investigadas en el sistema electromagnético sean más aceptables a partir de un modelo mecánico análogo. Bajo esta perspectiva, la analogía propuesta tiene un propósito fundamental de carácter *explicativo* basado en el *razonamiento analógico*, es decir, una manera de argumentar, dirigir y fundamentar explicaciones de fenómenos a partir del concepto de analogía.

Este enfoque deben tomarse como guía para establecer caracterizaciones de modelado analógico con el fin de poder realizar, de manera razonable, algunas predicciones, validaciones y generalizaciones del fenómeno electromagnético estudiado. También es importante señalar que otro enfoque potencial que pudiera analizarse en la analogía propuesta de este trabajo, es el de *carácter cognitivo*, ya que bajo esta perspectiva se pretende comprender los mecanismos de aprehensión del conocimiento al considerar los aspectos estructurales de las disciplinas que entran en juego en este proceso.

Capítulo 4

Propuesta del sistema mecánico análogo

En este capítulo se propone una analogía mecánica del comportamiento de la máquina síncrona al estar sujeta a una falla trifásica. Esta propuesta constituye un tipo de *simulador artificial* de la máquina síncrona y por lo tanto *un modelo analógico*, ya que imita la oscilación de los campos electromagnéticos en el estator y el rotor por otra situación más familiar que se puede *observar* de manera concreta en la oscilación de un sistema mecánico cuyo comportamiento es análogo.

4.1 Propuesta del modelo mecánico rotacional análogo y descripción de su funcionamiento

De entre la gran variedad de modelos empleados en el campo de las teorías físicas destacan los *modelos analógicos* denominados de esta forma porque contienen la idea de *representación analógica*, o de otro modo, modelos que imitan ciertas situaciones que pueden ser familiares de un *sistema* u *objeto concreto* (Hesse, M. B. [11]). Tal es el caso de un *simulador*, el cual constituye un tipo de modelo analógico que copia de un determinado sistema ciertas características como pueden ser la *forma* en que trabaja o *función* que desarrolla. Un simulador puede ser *artificial* o *conceptual*. Los simuladores también se denominan análogos o modelos del sistema original ¹.

¹Se utiliza el término modelo como sinónimo de análogo para dar el significado que es similar en función pero que difiere en estructura y origen de aquello que es modelado. L. D. Harmon y E.R. Lewis, "Neuring modeling", *Physiological Review*, 46, 513 (1966).

Es importante señalar que el modelo mecánico análogo que se propone en este trabajo está basado en el problema propuesto 12-2, página 493, del libro *Electric Energy Systems Theory, an introduction*, de Olle I. Elgerd. En este problema se presenta un sistema mecánico que contiene implícitamente la idea básica del *modelo mecánico análogo de la máquina síncrona*.

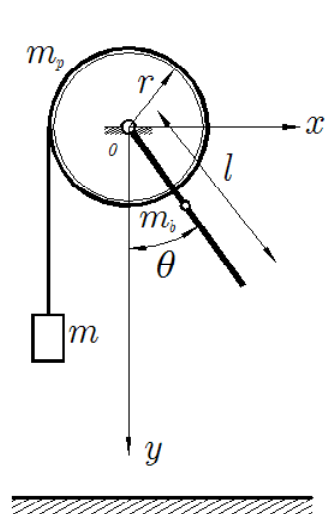


Figura 4.1

Modelo Mecánico Rotacional
propuesto por Olle I. Elgerd

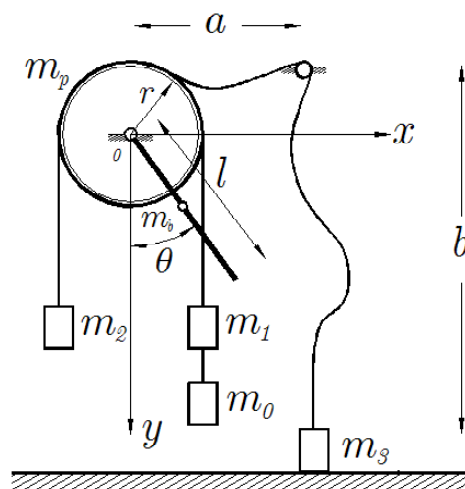


Figura 4.2

Modelo Mecánico Rotacional Análogo
con elementos mecánicos adicionales

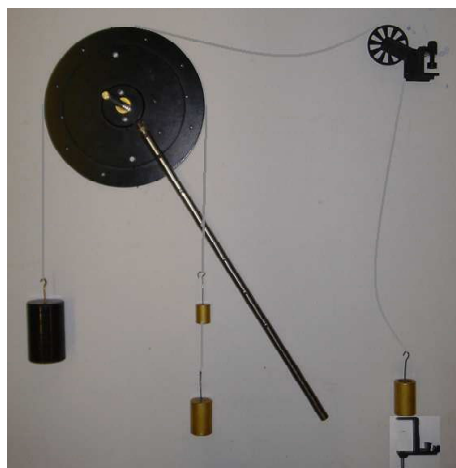


Figura 4.3

Dos configuraciones del modelo físico análogo

El esquema de este modelo, tal como la presenta el autor en su libro, se muestra en la figura 4.1. En este trabajo, además de rescatar el contenido de esta original e ingeniosa idea, se presenta una versión modificada de este modelo mecánico, ver figura 4.2, o bien la figura 4.3 que muestra la fotografía del modelo real.

Como puede observarse en la figura 4.1, al modelo mecánico de Elgerd se le han añadido tres cuerdas y tres masas como se muestra en la figura 4.2 con el fin de lograr dos propósitos fundamentales:

- 1) Brindar la posibilidad de manipularlo experimentalmente con el objeto de representar analógicamente la falla trifásica en una máquina síncrona, ya que en el modelo original no es posible hacer esta representación ².
- 2) Ubicar el estudio de este modelo físico para el caso concreto del fenómeno de la estabilidad mecánica en el contexto teórico del análisis de los sistemas dinámicos no lineales. Asociando, tanto al aspecto conceptual como a la aplicación mecánica experimental, el recurso de la analogía.

La descripción del modelo mecánico propuesto en la figura 4.2 (o la figura 4.3) es la siguiente. El sistema mecánico consta de cuatro bloques, tres de los cuales están sujetos por cuerdas independientes enrolladas a la polea, y que impiden su deslizamiento relativo sobre su periferia. La barra y la polea están unidas rígidamente y pueden girar de manera conjunta con *rotación no baricéntrica* en torno a un eje fijo perpendicular que pasa por su centro en "0". En las posiciones mostradas el sistema se encuentra en condiciones de equilibrio estático.

Si por alguna razón ocurre un pequeño disturbio mecánico que ocasione un desplazamiento angular al *subsistema barra-polea*, esta pareja de cuerpos rígidamente unidos podrá oscilar libremente. Es importante resaltar que el bloque m_3 se encontrará *desacoplado* de este subsistema, en tanto el tramo de cuerda sobrante $L_s = r\theta =$

²El autor expone de manera muy clara y explícita en el enunciado del problema las razones de esta imposibilidad.

$L_T - (a + b)$ no se enrolle sobre la periferia de la polea al girar en la dirección antihoraria ³.

Ahora bien, si de manera intencional se desconecta la masa m_0 del sistema al cortar el hilo que la sostiene, el conjunto barra-polea girará en sentido antihorario ⁴, la masa m_1 ascenderá y m_2 descenderá y poco después de que se origine este proceso la masa m_3 se *acoplará* al sistema. Este acoplo de m_3 se realizará después de que la polea ha girado un cierto ángulo $\theta = \frac{L_s}{r}$, obviamente que el sistema seguirá moviéndose en la misma dirección antihoraria pero ahora en conjunción con las masas m_1 , m_2 y m_3 . Después de transcurrir un cierto intervalo de tiempo en el que sucede este evento, el sistema pueden tener dos posibles estados mecánicos:

- a) Una oscilación sostenida en torno a un nuevo punto de equilibrio, la cual corresponde a una situación de *estabilidad transitoria*, o
- b) Girar completamente de manera continua en el sentido antihorario, lo cual constituye una situación de *inestabilidad mecánica*.

Los procesos dinámicos descritos en el sistema mecánico pueden simular los tres estados consecutivos de *equilibrio-falla-posfalla*, de un proceso de falla trifásica en una máquina síncrona conectada a un bus infinito, por lo que este modelo mecánico propuesto puede constituir de manera razonable un *simulador artificial*; ya que su funcionamiento, por el momento desde una perspectiva cinemática, imita este tipo de disturbio electromecánico para cada una de las condiciones señaladas. A continuación, se describen estos procesos con mayor detalle.

Con el propósito de introducir una correspondencia (mapeo) de los tres estados de prefalla, falla y posfalla que imita el sistema mecánico rotacional del sistema eléctrico de potencia, es conveniente introducir ciertas propiedades y nomenclatura acerca del

³ L_T es la longitud total de la cuerda que une a la polea y a la masa m_3 .

⁴ Esta situación dinámica es posible para ciertos valores de las masas que componen el sistema, más adelante se analizará con detalle esta situación.

carácter análogo de este sistema mecánico, tales como estados de prefalla, falla y posfalla mecánicas asociados al sistema mecánico rotacional por **SMR**.

Estado de prefalla mecánica

La figura 4.4 ó 4.5 muestra una cierta posición del **SMR** en estado de equilibrio mecánico estable, este estado se puede lograr para ciertos valores de las masas m_0 , m_1 , m_2 , m_p y m_B del sistema incluyendo los valores de la longitud l de la barra y el radio r de la polea. La magnitud del ángulo θ que forma la barra con la vertical se puede obtener al aplicar las ecuaciones de equilibrio de la Estática ⁵. Si en este estado mecánico se ocasionan pequeños disturbios mecánicos debido condiciones iniciales ⁶ de tal suerte que la masa m_3 no se incorpore a la polea, el sistema oscilará en torno a este punto de equilibrio en condiciones de *estabilidad* mecánica.

Estado de falla mecánica

Con relación a la figura 4.7 ó 4.8, si al cortar la cuerda que une los cuerpos m_0 y m_1 , y si el sistema se diseña de tal manera que se cumplan las condiciones

$$m_2 r > m_1 r + \frac{1}{2} m_B l_B \sin \theta$$

Después de esta acción de corte se garantiza el *desequilibrio* del sistema y en estas condiciones la polea tiene la posibilidad de girar con velocidad angular creciente en la dirección antihoraria (incremento de la energía cinética total del sistema). En estas condiciones el **SMR** no tiene ninguna posibilidad de oscilar y se puede decir que presenta un estado de *inestabilidad* mecánica, al menos durante el período en el que se enrolla la longitud de cuerda $L_s = r\theta = L_T - (a + b)$.

La descripción anterior equivale a decir que después de desacoplar m_0 en el **SMR** se ha producido una transición de un estado de equilibrio mecánico estable (*estado*

⁵Al considerar la suma vectorial de fuerzas y momentos iguales a cero, es decir: $\sum \vec{F} = \vec{0}$ y $\sum \vec{M} = \vec{0}$.

⁶Por ejemplo que un desplazamiento o velocidad inicial hacia abajo de la masa m_2 no sean lo suficientemente grandes y ocasionen que el enrollamiento de la cuerda que une a la masa m_3 la incorpore al sistema mecánico. O bien una situación equivalente, como un desplazamiento o velocidad angular muy grande a la barra que ocasione el mismo efecto señalado.

de prefalla) a un estado dinámico rotacional con aceleración angular en la dirección antihoraria (*estado de falla mecánica*).

Estado de posfalla

Desde luego que si se desea que el sistema mecánico no opere permanentemente en el estado de falla mecánica, dando lugar a que la polea junto con la barra giren como rehilete, es necesario acoplar la masa m_3 al sistema lo más rápidamente por medio de la cuerda que se enrolla en la periferia de la polea. Si esta acción se lleva a cabo en un intervalo de tiempo razonable, no más allá de un cierto tiempo crítico t_{cm} , se podrá impedir que las partes rotatorias del sistema giren de manera continua en la dirección antihoraria, tal como se ilustra en la figura 4.10 ó 4.13. Esta situación deseable dependerá de la magnitud de la masa m_3 y de la longitud de cuerda sobrante que se enrolla a la polea, en otras palabras; existe la posibilidad de que el sistema pueda oscilar en torno a otro punto de equilibrio (diferente al del estado de prefalla) y de este modo, conservar la *estabilidad*. En caso contrario, se presenta una rotación continua de la polea en torno a su eje fijo. A esta transición mecánica del **SMR** de un estado de inestabilidad a otro de estabilidad (o inestabilidad) se le conoce como estado de *posfalla mecánica* tal como se muestra en la figura 4.14.

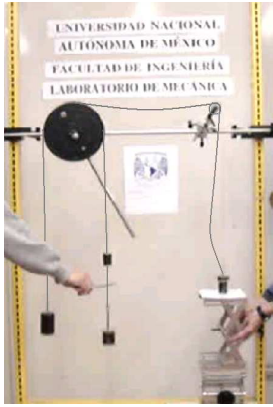


Figura 4.4
Antes de cortar el hilo

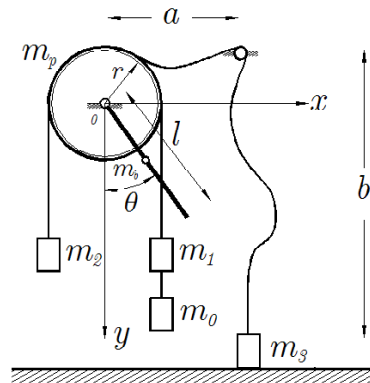


Figura 4.5
Prefalla mecánica

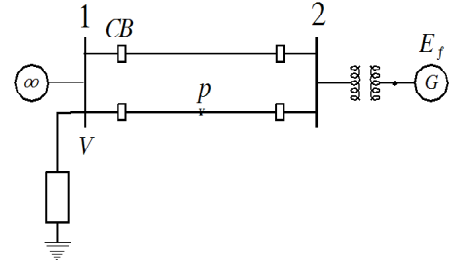


Figura 4.6
Prefalla eléctrica
Antes de aterrizar el punto p

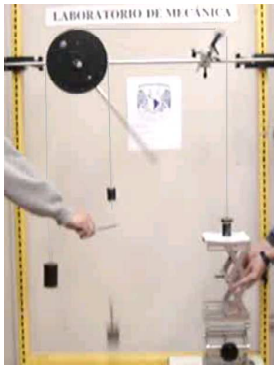


Figura 4.7
Después de cortar el hilo

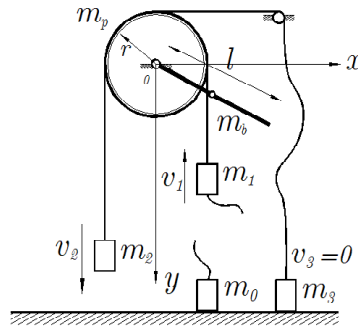


Figura 4.8
Falla mecánica

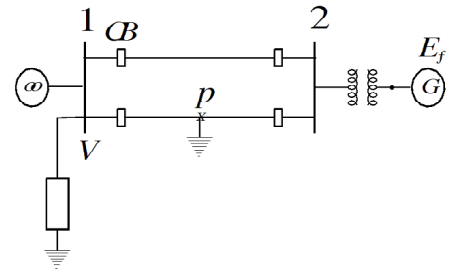


Figura 4.9
Falla eléctrica
En el momento de aterrizar p



Figura 4.10
Después de acoplarse m_3

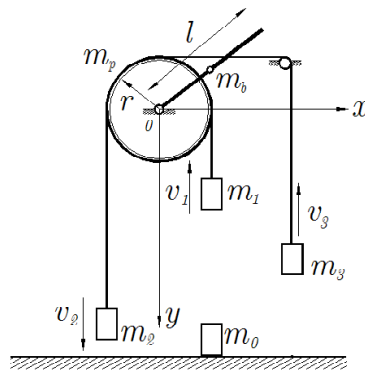


Figura 4.11
Posfalla mecánica

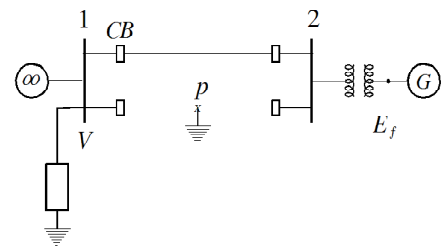


Figura 4.12
Posfalla eléctrica
Después de desconectar la línea

Posibles estados después del proceso de falla.



Figura 4.13
Regreso a un nuevo
punto de equilibrio



Figura 4.14
Girar continuamente
(condición de inestabilidad)

4.2 Análisis del mapeo en la analogía SMR y SEP para la falla trifásica

La descripción del funcionamiento del **SMR** propuesto en el subtema anterior únicamente está sustentada desde un punto de vista cinemático. En este apartado se incorporarán elementos formales desde la perspectiva de la mecánica de Lagrange, con el fin de obtener el modelo matemático general que determina el comportamiento dinámico del **SMR** análogo. Posteriormente, a partir de la formulación de este modelo general se obtendrán los modelos matemáticos particulares que pueden simular los tres estados de un proceso de falla trifásica en una máquina síncrona conectada a un bus infinito.

El desarrollo y los detalles de la obtención del modelo matemático general que determina el comportamiento del **SMR** está representado por la siguiente ecuación diferencial no lineal de segundo grado.

$$I\ddot{\theta} + B_m\dot{\theta} + K_m\text{sen}\theta = M_m g r$$

Al normalizar la ecuación anterior

$$\ddot{\theta} + \frac{B_m}{I}\dot{\theta} + \frac{K_m}{I}\text{sen}\theta = \frac{1}{I}M_m g r \quad (4.1)$$

Los términos I , M_m y K_m están definidos de la siguiente manera

$$I \triangleq \frac{1}{2}m_p r^2 + \frac{1}{12}m_B l_B^2 + \frac{1}{4}m_B l_B^2 + (m_0 + m_1 + m_2 + m_3)r^2 \quad (4.2)$$

$$M_m \triangleq m_2 - m_0 - m_1 - m_3 \quad (4.3)$$

$$K_m \triangleq \frac{1}{2}m_B g l_B$$

Las expresiones $I_{p_c} = \frac{1}{2}m_p r^2$ e $I_{B_c} = \frac{1}{12}m_B l_B^2$ constituyen los momentos de inercia centroidales de la polea y de la barra respectivamente.

La ecuación (4.1) se puede expresar en términos del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineal.

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{I}(M_m g r - B_m \dot{\theta} - K_m \text{sen}\theta) \end{cases}, \text{ con las CI } \begin{bmatrix} \theta(t_0) \\ \omega(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}$$

A partir de este modelo se obtendrán los procesos que simulan los estados mecánicos de prefalla, falla y posfalla; estableciendo sus correspondientes mapeos en la analogía *mecánica-eléctrica* para cada uno de estos casos.

Estado 1 Condición de prefalla mecánica o estado de equilibrio del SMR

Con relación a la figura 4.4 ó 4.5 si en $t = 0^-$ se considera que inicia la condición de prefalla cuando el sistema está en equilibrio, es decir, cuando la masa m_3 todavía no se acopla al sistema, se debe tener

$$m_3 = 0$$

Con este valor de la masa m_3 es posible redefinir los parámetros I y M_m en las

ecuaciones (4.2) y (4.3), denominándolas como I_{pre} y M_{pre} , de la siguiente manera

$$I_{pre} \triangleq \frac{1}{2}m_p r^2 + \frac{1}{12}m_B l_B^2 + (m_0 + m_1 + m_2)r^2 \quad (4.4)$$

$$M_{pre} \triangleq m_2 - m_0 - m_1 \quad (4.5)$$

Al sustituir estas relaciones en la ecuación (4.1) se tiene para la condición de prefalla

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{B_m}{I_{pre}}\dot{\theta} = \frac{1}{I_{pre}}(M_{pre}gr - K_m \text{sen}\theta) \quad (4.6)$$

Este último modelo se puede expresar de manera equivalente mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{I_{pre}}(M_{pre}gr - K_m \text{sen}\theta - B_m\dot{\theta}) \end{cases}, \text{ con las CI } \begin{bmatrix} \theta(0^-) = \theta_0 \\ \omega(0^-) = \omega_0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Al comparar las ecuaciones (4.2) y (4.4) se tiene que $I_{pre} < I$, del mismo modo al comparar las ecuaciones (4.3) y (4.5) se tiene $M_{pre} < M_m$.

De la ecuación (4.6) o de su equivalente (4.7) se pueden obtener los *puntos de equilibrio* o *soluciones constantes* del modelo matemático, esto sucede cuando

$$\theta = \theta_{1pre} \text{ y } \omega = \frac{d\theta_{1pre}}{dt} = \omega_{1pre} = 0$$

De la ecuación (4.7) se tiene

$$0 = \frac{1}{I_{pre}}(M_{pre}gr - K_m \text{sen}\theta_{1pre}) \quad (4.8)$$

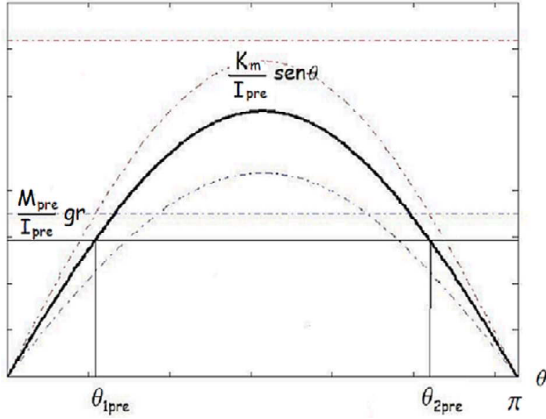


Figura 4.15

Puntos de equilibrio en el estado de prefalla para el **SMR**

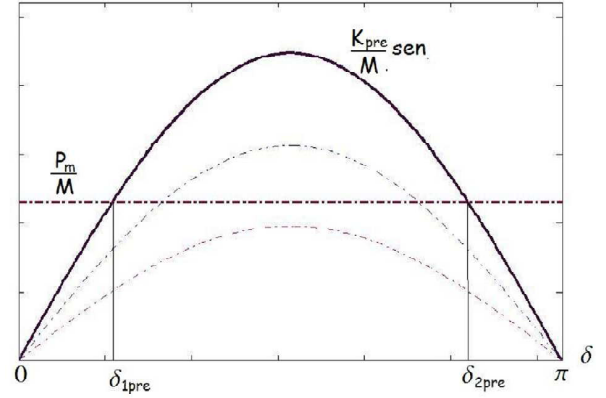


Figura 4.16

Puntos de equilibrio en el estado de prefalla para el **SEP**

La figura 4.15 muestra las gráficas de los dos miembros del lado derecho que contiene la ecuación (4.8) en el intervalo $0 \leq \theta_{1pre} \leq \pi$, de esta misma ecuación se obtienen los dos valores de θ_{1pre} y θ_{2pre} correspondientes a los puntos de equilibrio mecánico. Luego los puntos de equilibrio se definen de la siguiente manera

$$\mathbf{Xm}_{1pre} \triangleq \begin{cases} \theta_{1pre} = \text{sen}^{-1} \left[\frac{2(m_2 - m_0 - m_1)r}{m_B l_B} \right] \\ \omega_{1pre} = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\text{y } \mathbf{Xm}_{1pre} \triangleq \begin{cases} \theta_{2pre} = \pi - \text{sen}^{-1} \left[\frac{2(m_2 - m_0 - m_1)r}{m_B l_B} \right] \\ \omega_{2pre} = 0 \end{cases}$$

Donde

$\mathbf{Xm}_{1pre} \triangleq$ Punto de equilibrio *estable* de *prefalla mecánica*

$\mathbf{Xm}_{1pre} \triangleq$ Punto de equilibrio *inestable* de *prefalla mecánica*

Observaciones:

a) Para que las expresiones de los puntos de equilibrio tengan un significado apegado a la realidad, las relaciones de los parámetros en las ecuaciones que expresan a θ_{1pre} y

θ_{2pre} necesariamente deben cumplir las siguientes restricciones

$$m_2 > m_0 + m_1, \frac{2(m_2 - m_0 - m_1)r}{m_B l_B} < 1 \text{ y } M_{pre}gr = \text{constante} > 0 \quad (4.10)$$

b) La interpretación física de la condición de equilibrio en la ecuación (4.8) es la siguiente. Antes de cortar el hilo que sostiene el bloque m_0 se tiene para $\theta = \theta_{1pre} = \text{constante}$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{I_{pre}} (M_{pre}gr - K_m \text{sen}\theta_{1pre}) \\ M_{pre}gr &= K_m \text{sen}\theta_{1pre} \\ (m_2 - m_0 - m_1)gr &= \frac{1}{2} m_B g l_B \text{sen}\theta_{1pre} \\ m_2 r &= (m_0 + m_1)r + \frac{1}{2} m_B l_B \text{sen}\theta_{1pre} \end{aligned}$$

Lo cual significa que el par mecánico debido al peso de la masa m_2 que actúa en la polea, debe ser igual a la suma de los pares de los pesos de las masas m_0 y m_1 en adición con el par producido por el peso de la barra.

Al comparar el sistema de ecuaciones (4.7) con el correspondiente de la máquina síncrona, obtenida en el capítulo 2 y que se repite a continuación

$$\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{M} (P_m - K_{pre} \text{sen}\delta - B\omega) \end{cases}, \text{ sujeta a } \begin{bmatrix} \delta(0) \\ \omega(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}$$

Con los siguientes puntos de equilibrio

$$\mathbf{Xe}_{1pre} \triangleq \begin{cases} \delta = \text{sen}^{-1} \left(\frac{P_m}{K_{pre}} \right) \\ \omega = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathbf{Xe}_{2pre} \triangleq \begin{cases} \delta = \pi - \text{sen}^{-1} \left(\frac{P_m}{K_{pre}} \right) \\ \omega = 0 \end{cases}$$

se puede observar la correspondencia analógica formal para las condiciones de prefalla entre los **SMR** y **SEP**.

Estado 2 Condición de falla mecánica del SMR

Con relación a la figura 4.7 ó 4.8, si en $t = 0^+[s]$ se corta la cuerda que sostiene

al bloque m_0 se tiene como resultado el desequilibrio del sistema, y tanto las masas translacionales como rotatorias unidas a él presentan un incremento en sus energías cinéticas. Este proceso no debe permanecer más allá del intervalo $0^+ < t < t_f^-$, en tanto no se incorpore la masa m_3 al **SMR**. Después de acoplarse m_3 al sistema es posible que se logre disminuir este incremento de energía y el sistema pueda regresar a un nuevo punto de equilibrio. Dado que durante este proceso se tiene

$$m_0 = m_3 = 0$$

Con estos valores de las masas m_0 y m_3 es posible redefinir los parámetros I y M_m en las ecuaciones (4.2) y (4.3), definiéndolos como I_f y M_f , de la siguiente manera

$$I_f \triangleq \frac{1}{2}m_p r^2 + \frac{1}{12}m_B l_B^2 + (m_1 + m_2)r^2 \quad (4.11)$$

$$M_f \triangleq m_2 - m_1 \quad (4.12)$$

Al llevar estas expresiones a la ecuación (4.1) se tiene la siguiente ecuación diferencial no lineal para las condiciones de falla

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{B_m}{I_f}\dot{\theta} = \frac{1}{I_f}(M_f g r - K_m \text{sen}\theta) \quad (4.13)$$

O su modelo equivalente

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{I_f}(M_f g r - K_m \text{sen}\theta - B_m \dot{\theta}) \end{cases}, \text{ con las CI } \begin{cases} \theta(0^+) = \theta_0 \\ \omega(0^+) = \omega_0 \end{cases}$$

Es importante señalar que después de que se verifica esta bifurcación mecánica *prefalla-falla*, en las ecuaciones (4.2), (4.4) y (4.11) se cumple la desigualdad

$$I_f < I_{pre} < I$$

También de (4.3), (4.5) y (4.12) se cumple

$$M_m < M_{pre} < M_f$$

Si los parámetros del sistema mecánico son tales que se cumple la siguiente condición en el miembro derecho de (4.13) se tiene

$$\begin{aligned} M_f gr &> K_m \text{sen} \theta, \text{ con } M_f gr = \text{constante} \\ (m_2 - m_1)gr &> \frac{1}{2} m_B g l_B \text{sen} \theta \\ m_2 r &> m_1 r + \frac{1}{2} m_B l_B \text{sen} \theta \end{aligned} \quad (4.14)$$

La ecuación (4.13) no tendrá puntos de equilibrio ya que su miembro derecho

$$\frac{1}{I_f} (M_f gr - K_m \text{sen} \theta) > 0$$

Tal como se ilustra en la gráfica de la figura 4.17

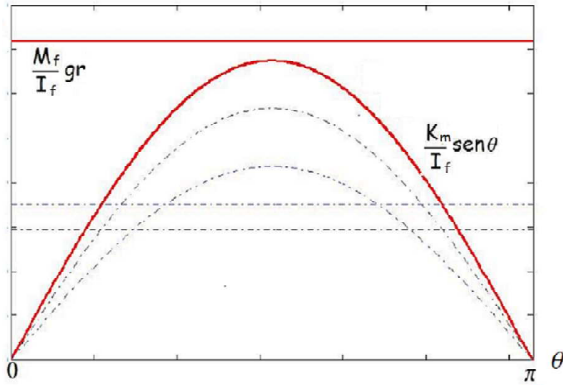


Figura 4.17

*Ausencia de puntos de equilibrio en el estado de falla mecánica para el **SMR***

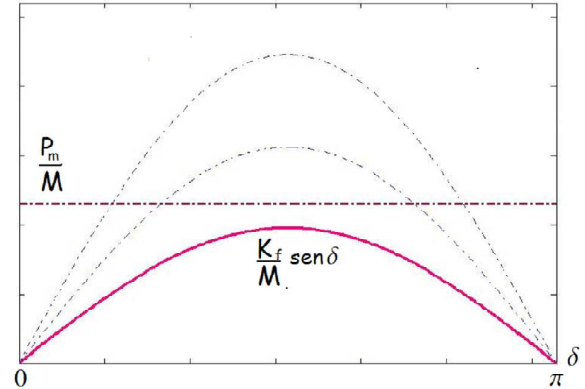


Figura 4.18

*Ausencia de puntos de equilibrio en el estado de falla eléctrica para la **SEP***

La interpretación física de la desigualdad (4.14) establece la existencia de un par resultante en la dirección antihoraria, es decir, la masa m_2 contribuye a un par que supera al

par producido por la acción conjunta de la masa m_1 y la de la barra m_B . La existencia de este par resultante le provoca al sistema mecánico una aceleración angular en la dirección antihoraria, incrementando su energía cinética en tanto no se acople la masa m_3 en un determinado tiempo $t_{cm} < T_m$. Este proceso mecánico del **SMR** es análogo al estado de falla de la máquina síncrona.

Como se analizará en el siguiente punto, el acoplamiento de la masa m_3 al **SMR** ocasionará una nueva configuración del sistema mecánico con la intención de reestablecer al sistema mecánico a un estado oscilatorio en torno a un nuevo punto de equilibrio. Esta situación de acoplamiento mecánico es análoga a la acción que desempeñan los relevadores al desconectar la línea colapsada, con el fin de reestablecer el sistema y evitar la salida de sincronismo del rotor.

La figura 4.18 muestra las gráficas de las expresiones $\frac{P_m}{M}$ y $\frac{K_f}{M} \text{sen} \delta$ del **SEP** en el estado de falla, donde se puede observar la ausencia de intersecciones geométricas en la conjunción de estas gráficas lo cual indica, como ya se mencionó, ausencia de puntos de equilibrio.

Estado 3 Condición de posfalla mecánica del SMR

Como ya se indicó, después de que se corta la cuerda que sujeta al bloque m_0 el **SMR** se desequilibra, esta condición provoca un incremento de la velocidad angular de la polea en la dirección antihoraria. De manera simultánea en la medida en que se realiza este proceso, la cuerda que une a la masa m_3 se enrolla sobre la periferia de la polea hasta que en un cierto instante se acopla al sistema e inicia su ascenso. Esta acción de acoplamiento sucede cuando la longitud de cuerda enrollada tiene el valor $L_s = r\theta = L_T - (a + b)$, tal como se indica en la figura 4.10 ó 4.11.

Es importante señalar que la acción de acoplamiento de la masa m_3 al **SMR** equivale a la acción de libramiento de la línea del **SEP** entre sus puntos 1 y 2 ⁷. Este proceso

⁷Como se analizará posteriormente, librar la línea en condición de posfalla equivale a incrementar la impedancia entre los buses 1 y 2. Del mismo modo en el sistema mecánico análogo, al colocar la masa m_3 al sistema equivale a incrementar la tensión en la cuerda del extremo derecho.

ocurre en el intervalo $t > t_f^+$ cuando se acopla m_3 al **SMR**. Desde luego que m_0 ha estado desacoplada al sistema desde que ocurrió el proceso anterior, lo que equivale fijar $m_0 = 0$. Dado que

$$m_0 = 0$$

Con este valor de la masa m_0 es posible redefinir los parámetros I y M_m en las ecuaciones (4.2) y (4.3), denominándolas como I_{pf} y M_{pf}

$$\begin{aligned} I_{pf} &\triangleq \frac{1}{2}m_p r^2 + \frac{1}{12}m_B l_B^2 + (m_1 + m_2 + m_3)r^2 \\ M_{pf} &\triangleq m_2 - m_1 - m_3 \end{aligned}$$

Al sustituir estas expresiones en el modelo general 4.1 se tiene

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{B_m}{I_{pf}}\dot{\theta} = \frac{1}{I_{pf}}(M_{pf}gr - K_m \text{sen}\theta) \quad (4.15)$$

O su modelo equivalente de sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{I_{pf}}(M_{pf}gr - K_m \text{sen}\theta - B_m\dot{\theta}) \end{cases}, \text{ con las CI } \begin{cases} \theta(t_f^-) = \theta_f \\ \omega(t_f^-) = \omega_f \end{cases}$$

Para este caso se tiene que $I_{pf} < I_{pre}$ pero $I_{pf} > I_f$, además $M_f < M_{pf} < M_{pre}$ y al cumplirse las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} M_{pf}gr &< K_m \\ M_{pf} &> M_{pre} \end{aligned}$$

De la primera desigualdad se tiene

$$(m_2 - m_1 - m_3)r < \frac{1}{2}m_B l_B \quad (4.16)$$

Y de la segunda

$$(m_2 - m_1 - m_3)gr > (m_2 - m_1 - m_0)gr \quad (4.17)$$

Después de simplificar en (4.16) y (4.17) se tiene

$$m_3 < m_0$$

En estas condiciones el sistema tiene soluciones constantes o puntos de equilibrio, cuando

$$\theta = \theta_{pf} = \text{constante}$$

Al sustituir esta solución constante en (4.15) se tiene

$$0 = \frac{1}{I_{pf}} (M_{pf}gr - K_m \text{sen}\theta_{pf})$$

Al despejar θ_{pf} se tienen los siguientes puntos de equilibrio, que se definen de la siguiente manera

$$\mathbf{Xm}_{1pf} \triangleq \begin{cases} \theta_{1pf} = \text{sen}^{-1} \left[\frac{2(m_2 - m_1 - m_3)r}{m_B l_B} \right] \\ \omega_{1pf} = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathbf{Xm}_{2pf} \triangleq \begin{cases} \theta_{1pf} = \pi - \text{sen}^{-1} \left[\frac{2(m_2 - m_1 - m_3)r}{m_B l_B} \right] \\ \omega_{2pf} = 0 \end{cases}$$

Estos puntos de equilibrio se localizan en la intersección de los lugares geométricos de

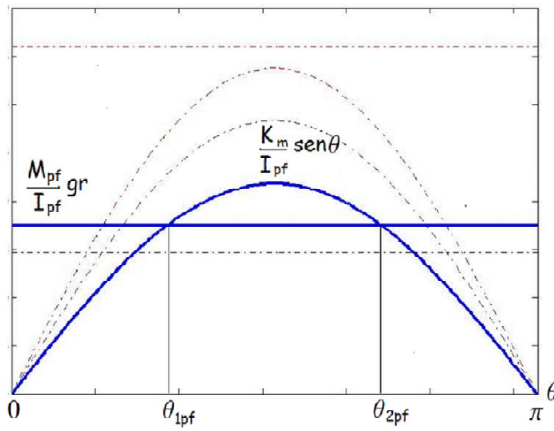


Figura 4.19 Puntos de equilibrio en el estado de posfalla para el **SMR**

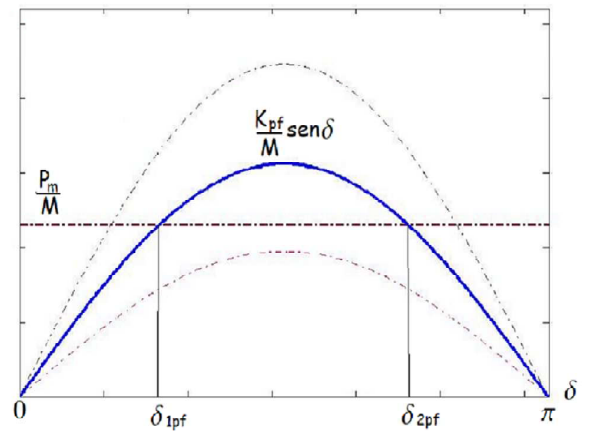
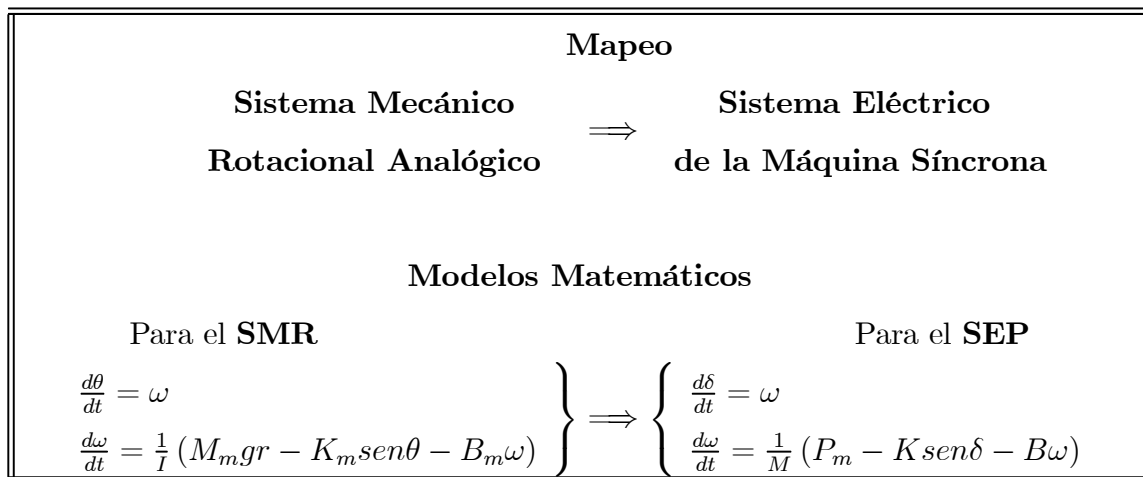


Figura 4.20 Puntos de equilibrio en el estado de posfalla para la **SEP**

la recta $\frac{M_{pf}}{I_{pf}}$ y la curva $\frac{K_m}{I_{pf}} \text{sen}\theta$, tal como se muestra en la figura 4.19.

El primero \mathbf{Xm}_{1pf} estable y el segundo \mathbf{Xm}_{2pf} inestable. Dado que el inicio del análisis del estado mecánico de posfalla depende de las condiciones finales del estado de falla, entonces el problema de analizar la *estabilidad transitoria* del **SMR** consiste esencialmente en controlar la *inestabilidad* en el proceso mecánico *falla-posfalla*. Para esto es muy importante que después de cortar el hilo que sostiene a la masa m_0 y entrar el sistema en un estado de rotación angular creciente durante el intervalo $t_0^+ < t < t_{cm}$, sea necesario impedir, mediante el acoplamiento de la masa m_3 , que la polea del sistema gire completamente y pueda regresar a un estado de oscilación estable. Si esta acción se realiza en un tiempo t_{cm} tal que $t_{cm} < T_m$, el **SMR** será estable y la polea oscilará en torno a un nuevo punto de equilibrio \mathbf{Xm}_{1pf} . En cambio, si $t_{cm} > T_m$ el **SMR** será inestable y la polea girará, como ya se dijo, con una rapidez angular creciente en la dirección antihoraria. La figura 4.20 muestra los correspondientes puntos de equilibrio en el estado de posfalla para el **SEP**.

La siguiente tabla muestra un resumen de las condiciones analizadas en el **SMR** y el correspondiente modelo en el **SEP**, o de otro modo, el *mapeo* de estas correspondencias formales.



Mapeo

Prefalla mecánica \implies *Prefalla eléctrica*

Condiciones para el estado de prefalla

Mecánica para el **SMR** Electromecánica para el **SEP**

$$M_{pre}gr = K_m \text{sen}\theta \implies P_m = K_{pre} \text{sen}\delta$$

Puntos de equilibrio del SMR

Puntos de equilibrio del SEP

$$\mathbf{Xm}_{1\text{pre}} = \begin{cases} \delta = \text{sen}^{-1} \left(\frac{M_{pre}}{K_m} gr \right) \\ \omega = 0 \end{cases} \implies \mathbf{Xe}_{1\text{pre}} = \begin{cases} \delta = \text{sen}^{-1} \left(\frac{P_m}{K_{pre}} \right) \\ \omega = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{Xm}_{2\text{pre}} = \begin{cases} \delta = \pi - \text{sen}^{-1} \left(\frac{M_{pre}}{K_m} gr \right) \\ \omega = 0 \end{cases} \implies \mathbf{Xe}_{2\text{pre}} = \begin{cases} \delta = \pi - \text{sen}^{-1} \left(\frac{P_m}{K_{pre}} \right) \\ \omega = 0 \end{cases}$$

Mapeo

Falla mecánica \implies *Falla eléctrica*

Condiciones para el estado de falla

Mecánica para el **SMR** Electromecánica para el **SEP**

$$M_f gr > K_m \implies P_m > K_f$$

Ausencia de puntos de equilibrio para ambos sistemas

Mapeo

Posfalla mecánica \implies *Posfalla eléctrica*

Condiciones para el estado de posfalla

Mecánica para el **SMR** Electromecánica para el **SEP**

$$M_{pf}gr = K_m \text{sen}\theta \implies P_m = K_{pf} \text{sen}\delta$$

Puntos de equilibrio del SMR

Puntos de equilibrio del SEP

$$\mathbf{Xm}_{1pf} = \begin{cases} \delta = \text{sen}^{-1} \left(\frac{M_{pf}}{K_m} gr \right) \\ \omega = 0 \end{cases} \implies \mathbf{Xe}_{1pf} = \begin{cases} \delta = \text{sen}^{-1} \left(\frac{P_m}{K_{pf}} \right) \\ \omega = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{Xm}_{2pf} = \begin{cases} \delta = \pi - \text{sen}^{-1} \left(\frac{M_{pf}}{K_m} gr \right) \\ \omega = 0 \end{cases} \implies \mathbf{Xe}_{2pf} = \begin{cases} \delta = \pi - \text{sen}^{-1} \left(\frac{P_m}{K_{pf}} \right) \\ \omega = 0 \end{cases}$$

La representación gráfica conjunta de estos tres estados y sus correspondencias se muestran en las siguientes figuras

Mapeo de la secuencia de eventos

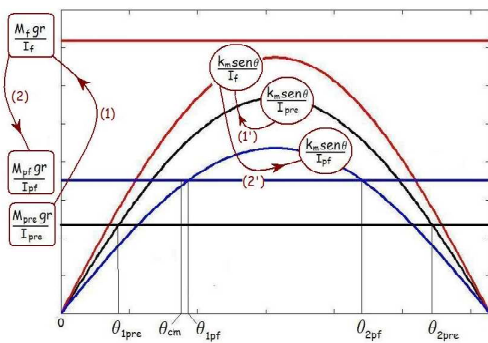


Figura 4.21

Secuencia de la falla mecánica

\implies

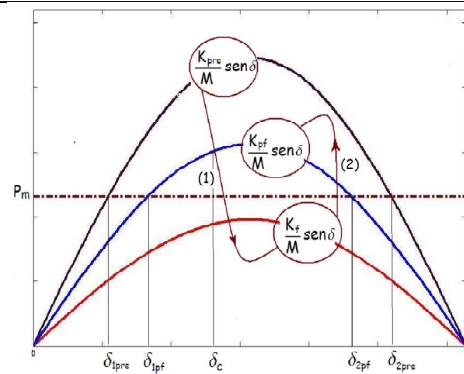


Figura 4.22

Secuencia de la falla eléctrica

Observación:

Es importante señalar que en el mapeo formal de la analogía **SMR** \implies **SEP** no se tiene una correspondencia *uno a uno* en los modelos matemáticos. Esta situación se puede explicar teniendo como base los modelos matemáticos generales del **SMR** y del **SEP**.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{I} (M_m gr - K_m \text{sen}\theta) - B_m \dot{\theta} \end{array} \right.$$

Variable
Variable

$I_{pre} \quad I_f \quad I_{pf}$
 $M_{pre} \quad M_f \quad M_{pf}$

Figura 4.23

Parámetros constantes
y variables en el **SMR**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\delta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{M} (P_m - K \text{sen}\delta - B\omega) \end{array} \right.$$

Variable
Variable

$K_{pre} \quad K_f \quad K_{pf}$

Figura 4.24

Parámetros constantes y
variables en el **SEP**

En el **SMR** la transición de los estados *prefalla-falla* está asociado al cambio de los parámetros M_m e I de tal forma que ⁸.

$$\frac{M_{pre}}{I_{pre}} \rightsquigarrow \frac{M_f}{I_f} \quad \text{y} \quad \frac{K_m \text{sen}\theta}{I_{pre}} \rightsquigarrow \frac{K_m \text{sen}\theta}{I_f}$$

De manera similar en la transición de los estados *falla-posfalla* se tiene

$$\frac{M_f}{I_f} \rightsquigarrow \frac{M_{pf}}{I_{pf}} \quad \text{y} \quad \frac{K_m \text{sen}\theta}{I_f} \rightsquigarrow \frac{K_m \text{sen}\theta}{I_{pf}}$$

Esto supone que en la gráfica de la figura 4.21 se tenga la secuencia de aparición de *tres rectas horizontales* que representan las magnitudes constantes de $\frac{M_{pre}}{I_{pre}} gr$, $\frac{M_f}{I_f} gr$ y $\frac{M_{pf}}{I_{pf}} gr$ ⁹; de manera simultánea y en correspondencia con las tres porciones sinusoidales $\frac{K_m \text{sen}\theta}{I_{pre}}$, $\frac{K_m \text{sen}\theta}{I_f}$ y $\frac{K_m \text{sen}\theta}{I_{pf}}$ ($K_m = \frac{1}{2} m_B g l_B = \text{constante}$), tal como se muestra en las secuencias señaladas por las líneas (1') y (2') de la misma figura.

⁸En las siguientes relaciones, interpretar el símbolo \rightsquigarrow como sinónimo de la frase **cambia a**

⁹Recordar que M_{pre} , M_f , M_{pf} , $g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2} \right]$ y el radio r de la polea son constantes.

En cambio, para el **SEP** se tiene que el parámetro K es el único que cambia durante los procesos eléctricos de *prefalla-falla* y *falla-posfalla* con la secuencia

$$K_{pre} \rightsquigarrow K_f \quad \text{y de} \quad K_f \rightsquigarrow K_{pf}$$

Esto supone la aparición de tres porciones sinusoidales en correspondencia con los valores del parámetro K , pero siempre con $P_m = \text{constante}$.

$$K_{pre} \text{sen} \delta \rightsquigarrow K_f \text{sen} \delta \quad \text{y de} \quad K_f \text{sen} \delta \rightsquigarrow K_{pf} \text{sen} \delta$$

Tal como se muestra en las secuencias señaladas por las líneas (1) y (2) de la figura 4.22.

Con el fin de poder justificar la consistencia analógica del **SMR** es necesario diseñar los valores de los parámetros que lo componen acordes con las restricciones impuestas en los procesos mecánicos de prefalla, falla y posfalla expresadas en las ecuaciones (4.10), (4.14), (4.16) y (4.17). Toda vez que se cumplen estas restricciones se deberán sustituir los valores de estos parámetros en los respectivos modelos matemáticos para que posteriormente sea posible realizar un proceso de *simulación* de la estabilidad del **SMR**. Por último, se deberá realizar un análisis comparativo de estos resultados con los del proceso de simulación del **SEP**, con el fin de verificar que el mapeo de los resultados de la simulación en ambos sistemas sea cualitativamente congruente.

El diseño de los parámetros será tema del próximo subtema, y en el próximo capítulo se realizará el proceso de simulación de estabilidad mediante el empleo de los paquetes **Matlab/Simulink** y **Mathematica** para analizar el comportamiento de ambos sistemas a través de diversos modelos gráficos.

4.3 Diseño de los valores de los parámetros del sistema mecánico análogo

Para que el sistema mecánico propuesto cumpla con el propósito de un simulador artificial e imite lo mejor posible desde una perspectiva funcional el comportamiento del sistema eléctrico, es necesario que los modelos matemáticos de ambos sistemas tengan la mejor cualidad de *semejanza*. Este aspecto será uno de los compromisos principales a los que estarán sujetos dichos modelos con el fin de lograr su cometido. A continuación, se procederá a la etapa del diseño de los parámetros que componen la ecuación que determina su comportamiento dinámico.

La primera condición que debe satisfacer el sistema mecánico es la característica análoga referente a las cualidades de su comportamiento *par mecánico contra ángulo* con las correspondientes *potencia contra ángulo* del sistema eléctrico, es decir.

Sistema mecánico		Sistema eléctrico
Gráficas del comportamiento	\implies	Gráficas del comportamiento
<i>Par mecánico-ángulo de rotación θ</i>		<i>Potencia eléctrica-ángulo eléctrico δ</i>

A partir de este criterio ¹⁰ los modelos matemáticos del sistema mecánico deberán satisfacer las cualidades análogas en cada uno de los estados de prefalla, falla y posfalla mecánicas ¹¹, y dado que estas características están asociadas con la configuración física de los elementos que componen a dicho modelo mecánico, es necesario definir las dimensiones geométricas de sus componentes esenciales, por lo que primeramente se deberá atender a las dimensiones físicas de la polea y de la barra, las cuales deben restringirse a longitudes y pesos que puedan manejarse razonablemente durante el proceso experimental.

¹⁰Es importante destacar en este punto, que la correspondencia análoga que se realizará es de diferente género, es decir las variables en el sistema mecánico son *par mecánico-ángulo de rotación*, mientras que en el **SEP** son *potencia eléctrica-ángulo relativo de rotación*.

¹¹Estos procesos del sistema mecánico serán analizados posteriormente en este apartado con mayor detenimiento.



Figura 4.25

Componentes del SMR

En la figura 4.25 se muestran los componentes del **SMR**; la masa m_p de la polea y su radio r_p así como de la masa m_B de la barra y su longitud l_B , tienen los siguientes valores ¹² :

$$m_p = 1.484 \text{ [kg]} \quad r = 0.1 \text{ [m]}$$

$$m_B = 0.386 \text{ [kg]} \quad l_B = 0.438 \text{ [m]}$$

Con estos valores se tiene que los momentos de inercia centroidales para cada uno de estos cuerpos son

$$I_{cp} = \frac{1}{2}m_p r^2 = 7.42 \times 10^{-3} \text{ [kg.m}^2\text{]}$$

$$I_{cB} = \frac{1}{12}m_B l_B^2 = 6.17 \times 10^{-3} \text{ [kg.m}^2\text{]}$$

Atendiendo a las restricciones que deben de cumplir las condiciones de prefalla, falla y posfalla analizadas con anterioridad, los siguientes valores propuestos de las masas

¹²La polea y la barra seleccionadas para el **SMR** son parte del equipo de laboratorio que se emplean en prácticas de Estática, obviamente que su uso está orientado para diferente propósito al empleado en este trabajo.

para el sistema mecánico cumplen con estas condiciones señaladas:

$$m_0 = 0.4641 [kg], m_1 = 0.1 [kg], m_2 = 1 [kg], m_3 = 0.221 [kg]$$

Naturalmente que existe un número infinito de valores que cumplen esta restricción, pero la selección de estos valores proporciona la gran ventaja de que la medición de las variables de interés en este sistema, tales como desplazamientos tanto lineales como angulares y los tiempos en que se realizan estos procesos, sea relativamente sencilla.

Teniendo en cuenta estos valores se calculan los valores de los siguientes parámetros, para los momentos de inercia

$$\begin{aligned} I &= 4.995 \times 10^{-2} [kg.m^2], I_{pre} = 2.923 \times 10^{-2} [kg.m^2], \\ I_f &= 2.459 \times 10^{-2} [kg.m^2], I_{pf} = 2.680 \times 10^{-2} [kg.m^2] \end{aligned}$$

Y para las masas:

$$M = 0.2149 [kg], M_{pre} = 0.4359 [kg], M_f = 0.9 [kg], M_{pf} = 0.679 [kg]$$

Así como el valor de

$$K_m = 0.8292 [N.m]$$

Con los valores numéricos:

$$\begin{aligned} m_0 &= 0.4641 [kg], m_1 = 0.1 [kg], m_2 = 1 [kg], m_3 = 0.221 [kg] \\ m_p &= 1.484 [kg], m_B = 0.386 [kg], r = 0.1 [m], l_B = 0.438[m], g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right] \end{aligned}$$

Por último, se procede a verificar que efectivamente cumplen con las condiciones restrictivas para las condiciones de prefalla, falla y posfalla.

a) Para la condición de prefalla

De las desigualdades expresadas en (4.10)

$$m_2 > m_0 + m_1, \frac{2(m_2 - m_0 - m_1)r}{m_B l_B} < 1 \text{ y } M_{pre}gr = \text{constante} > 0$$

Después de sustituir y efectuar cálculos

$$1 > 0.5641, \quad 0.5156 < 1 \quad 0.4276 > 0$$

b) Para la condición de falla

Con referencia a las desigualdades expresadas en (4.14)

$$M_{fgr} > K_m, \quad m_2 r > m_1 r + \frac{1}{2} m_B l_B$$

$$0.1 > 0.0945$$

c) Para la condición de posfalla

Deberán cumplirse las dos condiciones dadas por (4.16) y (4.17)

$$M_{pfgr} < K_m \text{ y } M_{pf} > M_{pre}$$

$$(m_2 - m_1 - m_3)r < \frac{1}{2} m_B l_B \text{ y } m_3 < m_0$$

$$0.679 < 0.0845 \text{ y } 0.221 < 0.4641$$

Obtención de los puntos de equilibrio y de los modelos matemáticos

Al verificarse estas condiciones se procede a calcular los puntos de equilibrio para la condición de prefalla. Se tienen los siguientes valores numéricos

$$\text{Estable : } \theta_{1pre} = \text{sen}^{-1} \left[\frac{2(m_2 - m_0 - m_1)r}{m_B l_B} \right] = 0.5417 \text{ [rad]}$$

$$\text{e inestable : } \theta_{2pre} = \pi - \text{sen}^{-1} \left[\frac{2(m_2 - m_0 - m_1)r}{m_B l_B} \right] = 2.6 \text{ [rad]}$$

$$\text{en ambos casos : } \omega_{1pre} = \omega_{2pre} = 0 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Y para la condición de posfalla

$$\begin{aligned}
 \text{estable} & : \theta_{1pf} = \text{sen}^{-1} \left[\frac{2(m_2 - m_1 - m_3)r}{m_B l_B} \right] = 0.932 \text{ [rad]} \\
 \text{e inestable} & : \theta_{2pf} = \pi - \text{sen}^{-1} \left[\frac{2(m_2 - m_1 - m_3)r}{m_B l_B} \right] = 2.208 \text{ [rad]} \\
 \text{en ambos casos} & : \omega_{1pf} = \omega_{2pf} = 0 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]
 \end{aligned}$$

Al sustituir los valores numéricos de los parámetros en los modelos matemáticos para cada una de las condiciones señaladas, sus expresiones quedan determinadas de la siguiente manera:

Para la condición de prefalla

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = 14.629 - 28.368 \text{sen}\theta - 34.209 B_m \dot{\theta} \end{cases}, \text{ con las CI } \begin{bmatrix} \theta(0^-) = \theta_0 \\ \omega(0^-) = \omega_0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Para el proceso de falla

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = 35.9033 - 32.722 \text{sen}\theta - 40.665 B_m \dot{\theta} \end{cases}, \text{ con las CI } \begin{bmatrix} \theta(0^+) = \theta_0 \\ \omega(0^+) = \omega_0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Y por último para el proceso de posfalla

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = 24.853 - 30.942 \text{sen}\theta - 37.312 B_m \dot{\theta} \end{cases}, \text{ con las CI } \begin{bmatrix} \theta(t_f^-) = \theta_f \\ \omega(t_f^-) = \omega_f \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Para determinar el comportamiento dinámico del **SMR** es necesario resolver numéricamente de manera concatenada y acorde a los intervalos en los que se definen los procesos de falla y de posfalla del sistema, tal como se analizó para el caso de la máquina síncrona. El bosquejo de la solución, su análisis e interpretación será el tópico a tratar en el próximo capítulo.

Capítulo 5

La estabilidad transitoria del SEP y del SMR desde una perspectiva de los sistemas hamiltonianos

Cuando se omiten las pérdidas en la máquina síncrona ocasionadas por efectos mecánicos y eléctricos, el análisis de su estabilidad se simplifica considerablemente y uno de los métodos clásicos mediante los cuales se analiza este fenómeno es el método de las áreas iguales. El empleo de este método contiene implícitamente la idea conceptual de un sistema dinámico al que también se le conoce como *sistema hamiltoniano*. En este apartado se analizará el proceso de estabilidad de ambos sistemas desde la perspectiva de un sistema hamiltoniano.

5.1 El modelo matemático del *swing* como un sistema hamiltoniano

Como es sabido, la esencia del método de las áreas iguales para el análisis de estabilidad transitoria de la máquina síncrona está basado en consideraciones energéticas que resultan de relacionar la energía potencial eléctrica y la energía cinética rotacional del conjunto turbina-rotor (Anderson, P.M. [1]). Estas consideraciones son necesarias para determinar el ángulo crítico de desconexión T durante el inicio de la transición *falla*→*posfalla*, de tal manera que se garantice la estabilidad del sistema. El método consiste simplemente en relacionar estas dos energías bajo ciertas condiciones asociadas con la situación física del disturbio. Después de establecer estas relaciones energéticas, el modelo matemático se emplea mediante el auxilio de la interpretación geométrica

del concepto de área como resultado del proceso de integrar la ecuación diferencial del *swing*. De allí el nombre de este popular método.

Si el modelo matemático del **SEP** se considera como un sistema dinámico sin pérdidas, entonces puede analizarse bajo el esquema de la teoría de los *sistemas hamiltonianos* (Hale and Koçak [10]). Esta teoría está relacionada íntimamente con la *dinámica de Lagrange* (Meisel, Jerome [13]) y su aplicación además de facilitar considerablemente el análisis matemático arroja resultados de amplio alcance. A continuación, se procederá a desarrollar el análisis de la estabilidad del **SEP** y posteriormente el del **SMR**.

5.2 El método de las áreas iguales como un caso particular de la aplicación de la función hamiltoniana

Con los elementos matemáticos de un sistema hamiltoniano es posible fundamentar el método de las áreas iguales para determinar la estabilidad transitoria del **SEP**. Con el fin de lograr este propósito se procederá a efectuar este estudio a partir de los modelos gráficos de las potencias eléctricas que se tienen en cada uno de los procesos de prefalla, falla, posfalla y de la potencia mecánica suministrada por la turbina.

Sean $P_{pre} = K_{pre}sen\delta$, $P_f = K_fsen\delta$, $P_{pf} = K_{pf}sen\delta$ y $P_m = cte$; las potencias que intervienen en cada uno de estos procesos con $K_{pre} > K_{pf} > K_f$. Al tener en cuenta la magnitud de estos parámetros se tiene el siguiente bosquejo tradicional de superposición de gráficas que se emplean en este método (Del Toro, Vincent [5]). La intersección de las gráficas de las funciones sinusoidales $\frac{K_{pre}}{M}sen\delta$ y $\frac{K_{pf}}{M}sen\delta$ con la constante $\frac{P_m}{M}$ determina los ángulos de los estados de equilibrio del sistema. A continuación y mediante el auxilio de la figura 5.1 se procederá a evaluar la función hamiltoniana en cada una de las bifurcaciones *prefalla* \rightarrow *falla* y *falla* \rightarrow *posfalla* que determinan el proceso de la

falla trifásica.

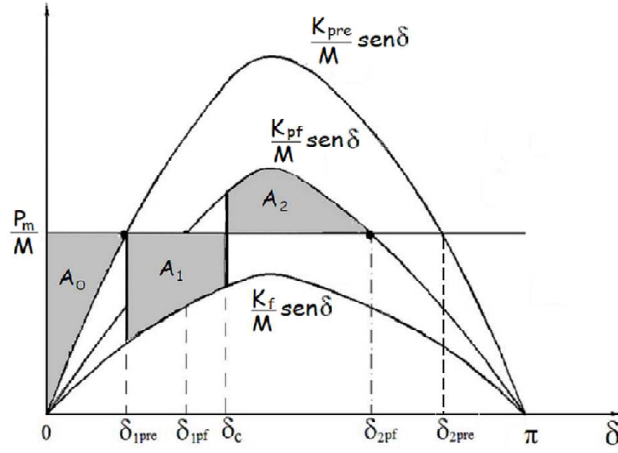


Figura 5.1

Curvas de potencia para los diferentes estados de prefalla, falla y posfalla.

De la ecuación correspondiente al hamiltoniano

$$H(\delta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{M}[K(\cos \delta_0 - \cos \delta) + P_m(\delta_0 - \delta)]$$

La cual puede obtenerse a partir del modelo dinámico de la máquina síncrona se tiene que, al evaluar esta ecuación en la posición de equilibrio de prefalla con las siguientes condiciones

$$H(\delta, \omega)|_{\substack{\delta=\delta_{1pre} \\ \omega=\omega_{1pre}}} = H(\delta_{1pre}, \omega_{1pre}) \text{ con } K = K_{pre}, \delta_0 = 0, \delta = \delta_{1pre} \text{ y } \omega_{1pre} = 0$$

$$H(\delta_{1pre}, \omega_{1pre}) = \frac{1}{2}\omega_{1pre}^2 + \frac{K_{pre}}{M}(1 - \cos \delta_{1pre}) - \frac{P}{M}\delta_{1pre}$$

Conviene identificar los términos de las energías cinética y potencial en este estado

$$EC(\omega_{1pre}) = \frac{1}{2}\omega_{1pre}^2 \text{ y } EP(\delta_{1pre}) = \frac{K_{pre}}{M}(1 - \cos \delta_{1pre}) - \frac{P}{M}\delta_{1pre}$$

El área bajo la curva en el intervalo $0 \leq \delta \leq \delta_{1pre}$ es el resultado de la integral definida

$$A_0 = \frac{1}{M} \int_0^{\delta_{1pre}} (P - K_{pre} \cos \delta) d\delta = \frac{P}{M} \delta_{1pre} + \frac{K_{pre}}{M} (\cos \delta_{1pre} - 1)$$

Resultado que corresponde a la energía potencial en el punto de equilibrio estable de prefalla, pero con signo menos

$$EP(\delta_{1pre}) = -A_0$$

Con relación a la figura 1.5, la energía potencial en este punto de equilibrio tiene una interpretación muy importante.

La energía potencial en el punto de equilibrio de prefalla corresponde al valor del área bajo la curva definida en el intervalo $0 \leq \delta \leq \delta_{1pre}$ con el signo negativo

Dado que $\omega_{1pre} = 0$, lo cual implica que $EC(\omega_{1pre}) = 0$, el hamiltoniano en la posición de equilibrio del estado de prefalla tiene el valor

$$H(\delta_{1pre}, \omega_{1pre}) = -A_0 \quad (5.1)$$

Después del fallo cuando se tiene la bifurcación *prefalla* \rightarrow *falla* el ángulo δ crece al igual que la velocidad angular ω , por lo que el sistema de protección debe desconectar la línea colapsada antes de que la máquina quede fuera de sincronismo, es decir, antes de que el ángulo δ tenga un valor más allá del valor de umbral δ_c denominado ángulo crítico de desconexión a fin de garantizar la estabilidad del sistema. En esta posición, que es el inicio de la transición *falla* \rightarrow *posfalla*, se tiene que al evaluar la función hamiltoniana

$$H(\delta_c, \omega_c) = EC(\omega_c) + EP(\delta_c) \quad (5.2)$$

La expresión

$$EC(\omega_c) = \frac{1}{2} \omega_c^2$$

Es la energía cinética en el ángulo crítico de desconexión, y al tomar en cuenta el intervalo $0 \leq \delta \leq \delta_c$ de la gráfica de la figura 5.1 se tiene

$$EP(\delta_c) = -\frac{1}{M} \left[\int_0^{\delta_{1pre}} (P - K_{pre} \cos \delta) d\delta + \int_{\delta_{1pre}}^{\delta_c} (P - K_f \cos \delta) d\delta \right]$$

Expresión que determina la energía potencial acumulada en los intervalos $0 \leq \delta \leq \delta_{1pre}$ y $\delta_{1pre} \leq \delta \leq \delta_c$, los cuales corresponden a los estados de prefalla y falla respectivamente. De manera similar a como se interpretó geoméricamente $EP(\delta_{1pre})$ se tiene la ecuación

$$EP(\delta_c) = -A_0 - A_1$$

Por lo que la función hamiltoniana dada por (5.2) queda

$$H(\delta_c, \omega_c) = \frac{1}{2} \omega_c^2 - A_0 - A_1 \quad (5.3)$$

Después de desconectar la línea en la condición de estabilidad límite se debe esperar que el sistema opere en condiciones estables críticas alrededor del punto de equilibrio estable de la condición de posfalla, δ_{1pf} ($\omega_{1pf} = 0$), tal como lo muestran las figuras 2.15 y 2.17 correspondientes al capítulo 2, las cuales se repiten a continuación

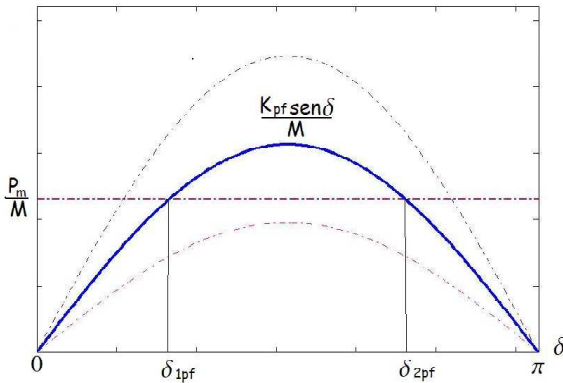


Figura 5.2

Puntos de equilibrios de posfalla δ_{1pf} y δ_{2pf}

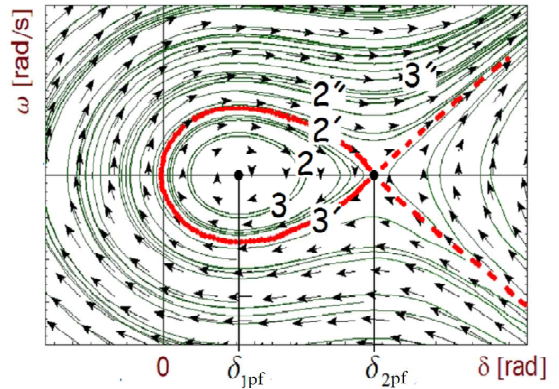


Figura 5.3

Oscilación alrededor de δ_{1pf}

El ángulo δ oscilará muy cerca de la trayectoria umbral que define la región cerrada de máxima estabilidad, también denominada *trayectoria homoclínica* o *trayectoria de unión punto silla-centro*, a esta oscilación se le conoce como el *máximo swing* de estabilidad en la máquina síncrona. Así pues, *muy cerca*¹ de la posición de equilibrio inestable δ_{2pf} la evaluación del hamiltoniano esta dada por la ecuación

$$H(\delta_{2pf}, \omega_{2pf}) = EC(\omega_{2pf}) + EP(\delta_{2pf}) \quad (5.4)$$

En este punto de equilibrio, debe verificarse que

$$EC(\omega_{2pf}) = 0$$

La energía potencial acumulada en el intervalo $0 \leq \delta \leq \delta_{2pf}$ corresponderá a la suma de las energías potenciales de los tres intervalos $0 \leq \delta \leq \delta_{1pre}$, $\delta_{1pre} \leq \delta \leq \delta_c$ y $\delta_c \leq \delta \leq \delta_{2pf}$ cuya interpretación geométrica está dada por la ecuación

$$EP(\delta_{2pf}) = -A_0 - A_1 - A_2$$

Al sustituir las ecuaciones de $EC(\omega_{2pf})$ y $EP(\delta_{2pf})$ en (5.4)

$$H(\delta_{2pf}, \omega_{2pf}) = -A_0 - A_1 - A_2 \quad (5.5)$$

Por el Principio de la Conservación de la Energía, las ecuaciones (5.1), (5.3) y (5.5) deben cumplir

$$H(\delta_{1pre}, \omega_{1pre}) = H(\delta_c, \omega_c) = H(\delta_{2pf}, \omega_{2pf}) = C \quad (5.6)$$

¹ *Muy cerca* en lugar de *en este punto* ya que para alcanzar este estado la solución del sistema bajo este supuesto requiere que $t \rightarrow \infty$.

Al considerar la primera igualdad de (5.6)

$$\begin{aligned} H(\delta_{1pre}, \omega_{1pre}) &= H(\delta_c, \omega_c) \\ -A_0 &= \frac{1}{2}\omega_c^2 - A_0 - A_1 \end{aligned}$$

Se tiene

$$0 = \frac{1}{2}\omega_c^2 - A_1 \quad (5.7)$$

Al considerar la segunda igualdad de (5.6)

$$\begin{aligned} H(\delta_c, \omega_c) &= H(\delta_{2pf}, \omega_{2pf}) \\ \frac{1}{2}\omega_c^2 - A_0 - A_2 &= -A_0 - A_1 - A_2 \end{aligned}$$

De donde

$$\frac{1}{2}\omega_c^2 = -A_2 \quad (5.8)$$

De (5.7) y (5.8)

$$A_1 + A_2 = 0 \quad (5.9)$$

Resultado que concuerda con la interpretación geométrica del método de las áreas iguales, cuya interpretación física puede establecerse de la manera siguiente.

Con relación a la figura 5.1, al obtener por medio de integración lo que se señala en la ecuación (5.9)

$$\frac{1}{M} \left[\int_{\delta_{1pre}}^{\delta_c} (P - K_f \text{sen} \delta) d\delta + \int_{\delta_c}^{\delta_{2pf}} (P - K_{pf} \text{sen} \delta_0) d\delta \right] = 0$$

De manera equivalente

$$EP(\delta_c) - EP(\delta_{1pre}) + [EP(\delta_{2pf}) - EP(\delta_c)] = 0 \quad (5.10)$$

$$H(\delta, \omega) = EC(\omega) + EP(\delta) = C$$

La cual debe cumplirse para cualquier estado del sistema. Al expresar las energías potenciales en función de las energías cinéticas

$$\begin{aligned} EP(\delta_c) &= C - EC(\omega_c), \quad EP(\delta_{1pre}) = C - EC(\omega_{1pre}) \\ EP(\delta_{2pf}) &= C - EC(\omega_{2pf}) \quad \text{y} \quad EP(\delta_c) = C - EC(\omega_c) \end{aligned}$$

Y sustituir estas expresiones en (5.10) se tiene

$$C - EC(\omega_c) - C + EC(\omega_{1pre}) + C - EC(\omega_{2pf}) - C + EC(\omega_c) = 0$$

Después de simplificar

$$EC(\omega_{1pre}) - EC(\omega_c) + EC(\omega_c) - EC(\omega_{2pf}) = 0$$

Y al definir

$$\Delta EC_f = EC(\omega_c) - EC(\omega_{1pre}) \quad \text{y} \quad \Delta EC_{pf} = EC(\omega_{2pf}) - EC(\omega_c)$$

Se tiene

$$\Delta EC_f + \Delta EC_{pf} = 0 \tag{5.11}$$

La interpretación física de la ecuación anterior es la siguiente

El resultado de la variación de la energía cinética del rotor durante el intervalo de falla en adición con su variación de la energía potencial durante el intervalo de posfalla, debe ser cero; o de otra forma, el área definida en el intervalo $\delta_{1pre} \leq \delta \leq \delta_c$ debe ser igual al negativo del área definida en el intervalo $\delta_c \leq \delta \leq \delta_{2pf}$

La situación física relevante que hay que señalar con relación al resultado de (5.11) es que durante el intervalo de falla, la variación de la energía cinética del rotor debe ser

positiva. Este resultado es obvio en virtud de que $EC(\omega_c) > EC(\omega_{1pre}) = 0$, lo que significa que el rotor incrementa su rapidez angular. En cambio, durante el proceso de posfalla se tiene que $EC(\omega_{2pf}) = 0 < EC(\omega_c)$ lo cual significa que, inmediatamente después de que ocurre la desconexión en la línea durante la etapa de posfalla, la rapidez angular del rotor decrece, de aquí que sea necesario equilibrar estos dos procesos para garantizar la estabilidad.

También es posible aplicar la función hamiltoniana para determinar el ángulo crítico de desconexión δ_c que garantiza la estabilidad del sistema, así como la rapidez angular ω_c para esta posición angular, entre otros resultados tales como el valor de la amplitud del *swing* al operar el sistema en esta trayectoria de estados. Los resultados que se obtienen son los siguientes:

Ángulo crítico δ_c

$$\cos \delta_c = \frac{P(\delta_{2pf} - \delta_{1pre}) + K_f \cos \delta_{1pre} - K_{pf} \cos \delta_{2pf}}{(K_f - K_{pf})} \quad (5.12)$$

Al conocer los valores de K_f , K_{pf} y los ángulos de equilibrio δ_{1pre} y δ_{2pf} se puede conocer el ángulo crítico δ_c .

Obtención de la rapidez angular del *swing* $\omega = \dot{\delta}$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{2}{M} [P(\delta_c - \delta_{1pre}) + K_f(\cos \delta_c - \cos \delta_{1pre})]}$$

Amplitud $\Delta\delta$ del *swing*

Al desarrollar y resolver la ecuación trascendental $H(\delta_c, \omega_c) = H(\delta, \omega_\delta) = C$ en el intervalo $0 \leq \delta \leq \delta_{2pf}$, se obtienen las raíces para los valores de $\delta_1 = \delta_{\min}$ y $\delta_2 = \delta_{\max}$. Con estos valores se tiene que la amplitud de la oscilación del *swing* en el intervalo $\delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}$, es tal que

$$\Delta\delta = \delta_{\max} - \delta_{\min}$$

5.3 La función hamiltoniana para el sistema mecánico análogo

También es posible obtener la función hamiltoniana para **SMR**.

$$H(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{I}[K_m(\cos \theta_0 - \cos \theta) + M_m g r(\theta_0 - \theta)] \quad (5.13)$$

Como puede observarse estas expresiones tienen una correspondencia analógica formal con la función hamiltoniana del **SEP** expresada por

$$H(\delta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{M}[K(\cos \delta_0 - \cos \delta) + P_m(\delta_0 - \delta)]$$

A continuación se procederá a obtener el ángulo crítico de conexión θ_{cm} , la velocidad angular en esta posición y la amplitud máxima del *swing* para el **SMR** mediante la aplicación de esta ecuación.

Obtención del ángulo crítico de conexión θ_{cm} y de su velocidad angular

La determinación del ángulo crítico de conexión θ_{cm} de la masa m_3 del sistema mecánico se puede obtener aplicando la función de Hamilton al igual que en el caso del **SEP**. Simplemente se evalúa esta ecuación en los puntos de interés correspondientes a donde suceden las dos transiciones *prefalla-falla* y *falla-posfalla* en el punto de equilibrio mecánico inestable del estado de posfalla, es decir cuando $\theta = \theta_{2pf}$ y $\omega_{1pre} = 0$.

Con relación a la figura 5.4

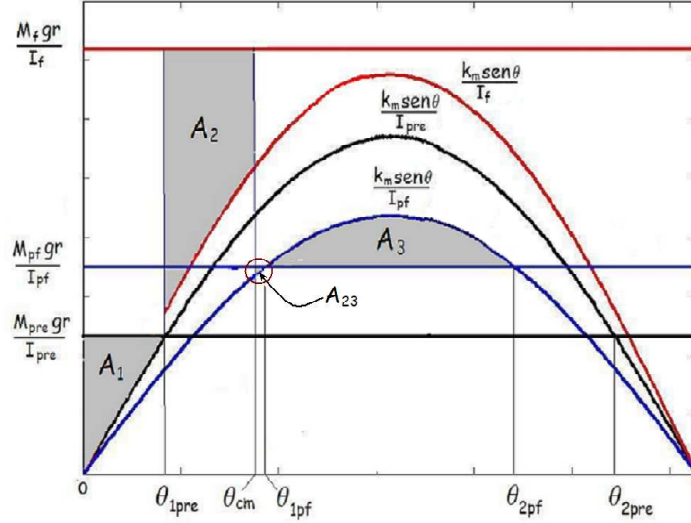


Figura 5.4

Curvas de aceleración angular

Donde se muestran las gráficas de las funciones $\frac{K_m}{I_{pre}} \text{sen}\theta$ y $\frac{M_{pre}}{I_{pre}} gr$. Los puntos de equilibrio mecánico para estos estados son

$$\mathbf{Xm}_{1pre} \triangleq \begin{cases} \theta_{1pre} = \text{sen}^{-1} \left[\frac{2(m_2 - m_0 - m_1)r}{m_B l_B} \right] \\ \omega_{1pre} = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathbf{Xm}_{2pre} \triangleq \begin{cases} \theta_{2pre} = \pi - \text{sen}^{-1} \left[\frac{2(m_2 - m_0 - m_1)r}{m_B l_B} \right] \\ \omega_{2pre} = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{Xm}_{1pf} \triangleq \begin{cases} \theta_{1pf} = \text{sen}^{-1} \left[\frac{2(m_2 - m_1 - m_3)r}{m_B l_B} \right] \\ \omega_{1pf} = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathbf{Xm}_{2pre} \triangleq \begin{cases} \theta_{2pf} = \pi - \text{sen}^{-1} \left[\frac{2(m_2 - m_1 - m_3)r}{m_B l_B} \right] \\ \omega_{2pf} = 0 \end{cases}$$

Donde \mathbf{Xm}_{1pre} y \mathbf{Xm}_{1pf} son puntos de equilibrio estables, mientras que \mathbf{Xm}_{2pre} y \mathbf{Xm}_{2pre} inestables. Al aplicar la ecuación (??) en el punto de equilibrio mecánico de prefalla

$$H(\theta_{1pre}, \omega_{pre}) = EC(\omega_{pre}) + EP(\theta_{1pre})$$

$$H(\theta_{1pre}, \omega_{pre}) = 0 + \frac{1}{I_{pre}} [K_m(1 - \cos \theta_{1pre}) + M_{pre} gr(0 - \theta_{1pre})]$$

Al igual que en el **SEP**, la energía potencial en este punto de equilibrio tiene la siguiente interpretación geométrica

$$\begin{aligned}
 EP(\theta_{1pre}) &= -\frac{1}{I_{pre}} \int_0^{\theta_{1pre}} [K_m \text{sen}\theta - M_{pre}gr] d\theta \\
 EP(\theta_{1pre}) &= -\frac{1}{I_{pre}} [K_m (\cos \theta_{1pre} - 1) + M_{pre}gr(\theta_{1pre})] = -A_1
 \end{aligned}$$

La energía potencial en el punto de equilibrio de prefalla es igual al negativo del área A_1 dividida entre el término I_{pre} , por lo que la función de Hamilton en este punto queda definida por la ecuación

$$H(\theta_{1pre}, \omega_{pre}) = -A_1 \quad (5.14)$$

Del mismo modo, después de que se produce la falla mecánica, al evaluar el hamiltoniano en el ángulo crítico θ_{cm} se tiene

$$\begin{aligned}
 H(\theta_{cm}, \omega_{cm}) &= EC(\omega_{cm}) + EP(\theta_{cm}) \\
 H(\theta_{cm}, \omega_{cm}) &= \frac{1}{2}\omega_{cm}^2 - A_1 - A_2
 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Como se podrá observar en la figura 5.4 la energía potencial en este punto corresponde a la energía acumulada durante el intervalo $0 < \theta < \theta_{cm}$.

En el punto de equilibrio mecánico estable de posfalla se tiene

$$H(\theta_{1pf}, \omega_{1pf}) = EC(\omega_{1pf}) + EP(\theta_{1pf})$$

en este punto de equilibrio la rapidez angular debe ser nula, por lo que $EC(\omega_{1pf}) = 0$ y la energía potencial en este punto, corresponde a la energía acumulada durante el intervalo $0 < \theta < \theta_{1pf}$, es decir $EP_{2pf} = -A_1 - A_2 - A_3$, de esta forma

$$H(\theta_{1pf}, \omega_{1pf}) = -A_1 - A_2 - A_{12} \quad (5.16)$$

Por último, en el punto de equilibrio mecánico inestable de posfalla se tiene

$$H(\theta_{2pf}, \omega_{2pf}) = EC(\omega_{2pf}) + EP(\theta_{2pf})$$

Por ser un punto de equilibrio se debe cumplir que $EC(\omega_{2pf}) = 0$ y la energía potencial en este punto es la energía acumulada durante el intervalo $0 < \theta < \theta_{2pf}$

$$EP_{2pf} = -A_1 - A_2 - A_{12} - A_3$$

De esta forma

$$H(\theta_{2pf}, \omega_{2pf}) = -A_1 - A_2 - A_{12} - A_3 \quad (5.17)$$

De las ecuaciones (5.14) y (5.17) se tiene por el Principio de la Conservación de la Energía

$$\begin{aligned} H(\theta_{1pre}, \omega_{pre}) &= H(\theta_{2pf}, \omega_{2pf}) \\ -A_2 - A_{12} - A_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

El desarrollo de cada uno de estos términos es el siguiente

$$\begin{aligned} -A_2 &= \frac{K_m}{I_f} (\cos \theta_{1pre} - \cos \theta_{cm}) + \frac{M_f}{I_f} gr (\theta_{1pre} - \theta_{cm}) \\ -A_2 &= \frac{K_m}{I_{pf}} (\cos \theta_{cm} - \cos \theta_{1pf}) + \frac{M_{pf}}{I_{pf}} gr (\theta_{cm} - \theta_{1pf}) \\ -A_{12} &= \frac{K_m}{I_{pf}} (\cos \theta_{1pf} - \cos \theta_{2pf}) + \frac{M_{pf}}{I_{pf}} gr (\theta_{1pf} - \theta_{2pf}) \end{aligned}$$

Después de sustituir A_2 , A_{12} y A_3 en (5.18) y simplificar

$$\begin{aligned} \frac{1}{I_f} (K_m \cos \theta_{1pre} + M_f gr \theta_{1pre}) - \frac{1}{I_{pf}} (K_m \cos \theta_{2pf} + M_{pf} gr \theta_{2pf}) + \\ \left(\frac{M_{pf}}{I_{pf}} - \frac{M_f}{I_f} \right) gr \theta_{cm} + \left(\frac{1}{I_{pf}} - \frac{1}{I_f} \right) K_m \cos \theta_{cm} = 0 \end{aligned}$$

Las expresiones que contienen parámetros conocidos se pueden definir de la siguiente

manera

$$\begin{aligned}
 T_1 &\triangleq \frac{1}{I_f} (K_m \cos \theta_{1pre} + M_f gr \theta_{1pre}) - \frac{1}{I_{pf}} (K_m \cos \theta_{2pf} + M_{pf} gr \theta_{2pf}) \\
 T_2 &\triangleq \left(\frac{M_{pf}}{I_{pf}} - \frac{M_f}{I_f} \right) gr \\
 T_3 &\triangleq \left(\frac{1}{I_{pf}} - \frac{1}{I_f} \right) K_m
 \end{aligned}$$

Luego la ecuación queda

$$T_1 + T_2 \theta_{cm} + T_3 \cos \theta_{cm} = 0$$

Ecuación trascendental de donde puede obtenerse el valor del ángulo crítico θ_{cm} de la polea. Con el valor del ángulo crítico θ_{cm} se puede obtener la expresión para calcular la velocidad angular crítica ω_{cm} , de (5.14) y (5.15) se tiene

$$H(\theta_{1pre}, \omega_{pre}) = H(\theta_{2pf}, \omega_{2pf})$$

$$0 = \frac{1}{2} \omega_{cm}^2 - A_2$$

$$0 = \frac{1}{2} \omega_{cm}^2 - \frac{K_m}{I_f} (\cos \theta_{1pre} - \cos \theta_{cm}) + \frac{M_f}{I_f} gr (\theta_{1pre} - \theta_{cm})$$

$$\omega_{cm} = \sqrt{\frac{2K_m}{I_f} (\cos \theta_{cm} - \cos \theta_{1pre}) + \frac{2M_f}{I_f} gr (\theta_{cm} - \theta_{1pre})}$$

También se puede obtener la amplitud del *swing* mecánico, conociendo los valores del ángulo θ para la cual se tiene $\omega = 0$. Al evaluar

$$H(\theta_{cm}, \omega_{cm}) = \frac{1}{2} \omega_{cm}^2 - A_1 - A_2$$

y

$$H(\theta, 0) = -A_1 - A_2 - A_{23} - A_3$$

$H(\theta, 0)$ se evalúa en un ángulo θ comprendido en el intervalo $\theta_{1pf} < \theta < \theta_{2pf}$ donde

$\omega = 0$, al establecer la igualdad

$$\begin{aligned} H(\theta_{cm}, \omega_{cm}) &= H(\theta, 0) \\ \frac{1}{2}\omega_{cm}^2 &= -A_{23} - A_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\omega_{cm}^2 &= \frac{K_m}{I_{pf}} (\cos \theta_{cm} - \cos \theta_{1pf}) + \frac{M_{pf}}{I_{pf}} gr (\theta_{cm} - \theta_{1pf}) + \\ &\frac{K_m}{I_{pf}} (\cos \theta_{1pf} - \cos \theta) + \frac{M_{pf}}{I_{pf}} gr (\theta_{1pf} - \theta) \end{aligned}$$

Después de agrupar

$$\left(\frac{K_m}{I_{pf}} \cos \theta_{cm} + \frac{M_{pf}}{I_{pf}} gr \theta_{cm} - \frac{1}{2}\omega_{cm}^2 \right) - \frac{K_m}{I_{pf}} \cos \theta - \frac{M_{pf}}{I_{pf}} gr \theta = 0$$

Al resolver esta ecuación trascendental se tienen dos valores para θ , uno máximo θ_{\max} y otro mínimo θ_{\min} . Con estos dos valores se obtiene la amplitud del *swing*

$$\Delta\theta = \theta_{\max} - \theta_{\min}$$

En resumen, los modelos matemáticos vistos en este capítulo sirven para determinar:

- 1) Puntos de equilibrio de prefalla mecánica
- 2) Puntos de equilibrio de posfalla mecánica
- 3) Ángulo crítico de conexión de la masa m_3
- 4) Velocidad angular en el ángulo crítico de conexión de la masa m_3
- 5) Ángulos donde la rapidez angular es nula para determinar el *swing* máximo
- 6) Velocidades angulares máximas y los respectivos ángulos donde ocurren

Capítulo 6

La simulación por computadora del SEP y del SMR analógico

En el Capítulo 2 se introdujeron algunas ideas básicas desde un punto de vista cualitativo acerca de la estabilidad del **SEP** bajo condiciones de una falla trifásica. Se obtuvieron las gráficas de las trayectorias y sus campos de direcciones a partir de la solución de su modelo matemático no lineal. En este apartado se continuará con el análisis del mismo fenómeno, pero ahora las soluciones numéricas de los modelos matemáticos se emplearán para darle interpretaciones cuantitativas a este fenómeno y realizar un mapeo, a partir de las representaciones gráficas, de la estructura analógica del **SMR** y del **SEP**.

6.1 La solución de la ecuación del *swing* del SEP por medio de simulación analógica

Para realizar la solución numérica del sistema no lineal de ecuaciones diferenciales del *swing* de la máquina síncrona

$$\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{M}(P_m - Ksen\delta - B\omega) \end{cases}$$

Se empleará un programa de simulación realizado en **Matlab/Simulink**.

La salida del programa consiste en determinar la solución durante los procesos de *falla* y *posfalla* por medio de la generación de tres vectores. El primer vector contiene a la

variable independiente t , y los otros dos las variables de estado δ y ω . A partir de estos vectores se generan las gráficas y se obtienen los valores numéricos de ciertas cantidades físicas que son indispensables para poder analizar este fenómeno. Los parámetros que se emplearán para realizar este proceso son los siguientes ¹.

$$P_m = 1.15 [pu], H = 3 [s], K_f = 0.975 [pu], K_{pf} = 1.5606 [pu], E_f = 1.3 [pu],$$

$$M = \frac{H}{\pi f_e} = 1.59 \times 10^{-2} [s^2], V = 1 [pu], B = 0.01 [s]$$

El análisis y la interpretación de la solución numérica de las ecuaciones se realizará para dos casos, primeramente para $B = 0.01$ y después para $B = 0$.

Caso 1: Solución de la ecuación del *swing* para el SEP cuando $B = 0.01$

La figura 6.1 muestra las características de δ y ω del *swing* en función del tiempo en la trayectoria límite de estabilidad. Después de que ocurre la falla en $t = 0^+$ se puede observar al final del intervalo $0^+ \leq t \leq T$ el comportamiento del ángulo δ del *swing* tiende a la posición de equilibrio del estado de posfalla. Del listado del programa se tienen los siguientes resultados. Tiempo máximo de libramiento de la falla para condición de estabilidad $T = t_c = 0.24 [s]$, para este instante se tiene: Ángulo del *swing* $\delta(t_c) = 1.44 [rad]$, velocidad angular del *swing* $\omega(t_c) = 5.94 [\frac{rad}{s}]$. En el instante $t = 0.61 [s]$ ocurre el valor máximo del *swing* $\delta_{m\acute{a}x} = 2.25 [rad]$ y su velocidad vale $\omega = 0.70 [\frac{rad}{s}]$, el estado para estas variables se encuentra en el límite de la trayectoria de estabilidad, muy cercano al punto silla del sistema donde se encuentra el punto de equilibrio inestable de posfalla

$$\mathbf{Xe}_{2pf} = \begin{cases} \delta_{2pf} = 2.31 [rad] \\ \omega_{2pf} = 0 \end{cases}$$

Las propiedades para δ y ω del *swing* en la trayectoria inestable se muestran en la figura 6.2. Después del período del transitorio de falla, cuando $t > t_c^+$, su comportamiento crece indefinidamente, en el instante $t = 1.18 [s] > t_c$ el ángulo del *swing* vale $\delta = \pi$

¹Valores tomados del ejemplo numérico de la referencia **Bergen, Arthur R [3]**

[rad] y la velocidad angular en este mismo instante es de $\omega = 7.35 \left[\frac{rad}{s} \right]$.

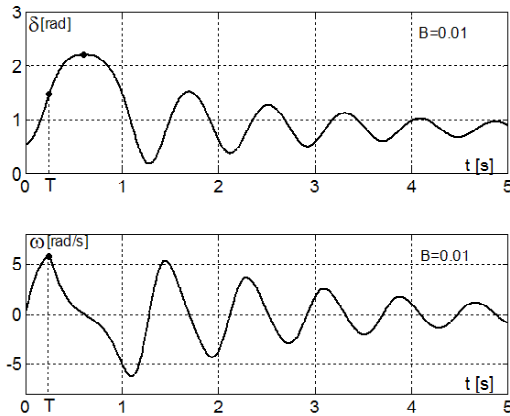


Figura 6.1

Swing estable para el SEP en la trayectoria límite de estabilidad

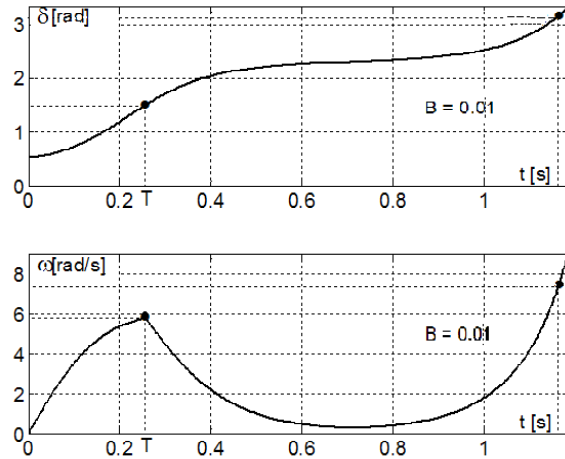


Figura 6.2

Swing inestable para el SEP

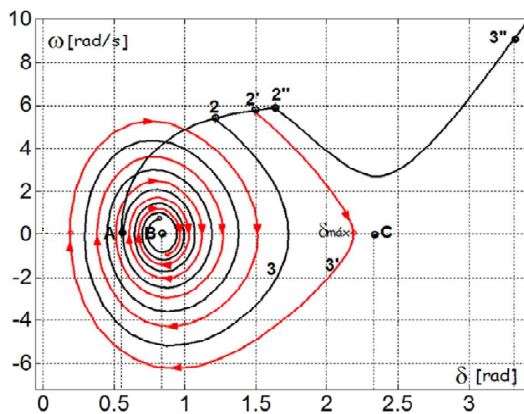


Figura 6.3

Plano de fase para el SEP

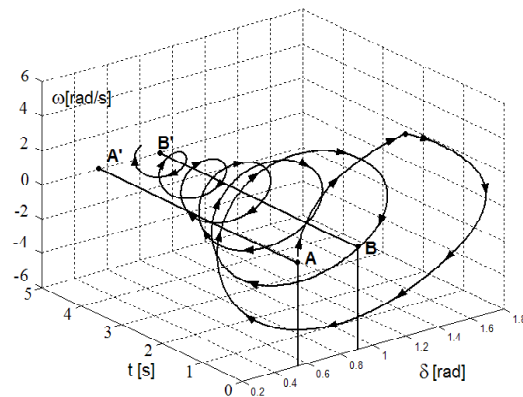


Figura 6.4

Trayectoria de estados 3D para el SEP

En la figura 6.3 se muestra el plano de fase para tres trayectorias de interés, la trayectoria $A \rightarrow 2 \rightarrow 3$ que contiene los estados de *estabilidad asintótica* cuando el tiempo de desconexión en la línea es $t < T$; la trayectoria estable $A \rightarrow 2' \rightarrow 3'$ para el tiempo límite de desconexión $t_c = T = 0.24$ [s] y la trayectoria inestable $A \rightarrow 2'' \rightarrow 3''$ para un tiempo $t > t_c = 0.24$ [s]. El punto A es el punto de equilibrio de prefalla mientras que B y C corresponden a los puntos de equilibrio estable e inestable en condiciones

de posfalla.

La figura 6.4 muestra la gráfica del espacio de estados en el límite de operación estable, los segmentos de rectas que determinan los puntos AA' y BB' determinan los lugares geométricos de solución constante que definen los puntos de equilibrios estables de prefalla y posfalla, respectivamente. En el instante $t = 0$ inicia el proceso de falla en el punto A , posteriormente para $t \geq t_c$ la trayectoria de estados *gira* en forma de espiral decreciente en torno a la línea BB' , acercándose a ella conforme $t \rightarrow \infty$. Este comportamiento geométrico de la trayectoria de estados tridimensional ilustra el concepto de *estabilidad asintótica* que tiene el sistema.

Caso 2: Solución de la ecuación del *swing* para el SEP cuando $B = 0$

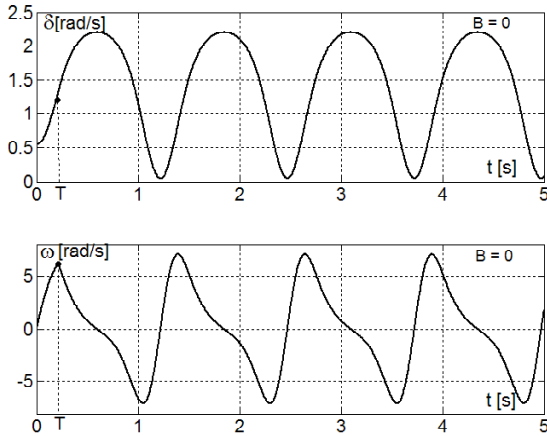


Figura 6.5

Swing estable para el SEP

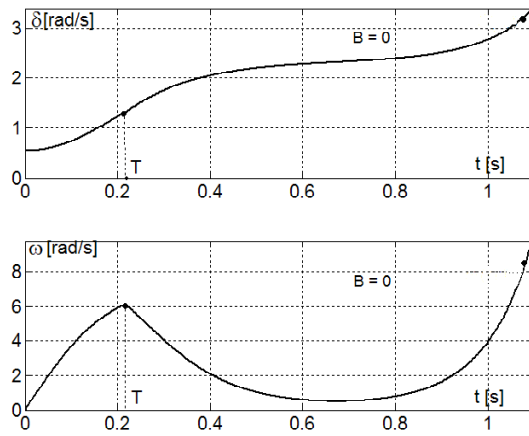


Figura 6.6

Swing inestable para el SEP

El comportamiento del ángulo y de la velocidad angular del *swing* se muestran en la figura 6.5. Después del período de falla estas propiedades presentan oscilaciones sostenidas en virtud de no existir pérdidas. Algunos resultados relevantes son los siguientes. Tiempo máximo de libramiento de la falla $T = t_c = 0.21$ [s], para este instante se tienen los siguientes valores: Ángulo del *swing* $\delta(t_c) = 1.31$ [rad] y su velocidad angular $\omega(t_c) = 6.10$ [$\frac{rad}{s}$]. Otros resultados numéricos importantes son los siguientes: Ángulos máximo y mínimo del *swing* $\delta_{m\acute{a}x}(t = 0.6) = 2.19$ [rad], $\delta_{m\acute{i}n}(t = 1.22) = 0.046$

[rad], amplitud del *swing* $\Delta\delta = \delta_{m\acute{a}x} - \delta_{m\acute{i}n} = 2.15$ [rad]; velocidades angulares máxima y mínima $\omega_{m\acute{a}x}(t = 1.39) = 7.05$ [$\frac{rad}{s}$], $\omega_{m\acute{i}n}(t = 1.05) = -7.05$ [$\frac{rad}{s}$].

Para un tiempo estimado de libramiento de la falla de $t = 0.217$ [s] $> T$, el sistema presenta inestabilidad como lo muestra la figura 6.6. Cuando $t = 0.674$ [s] se tiene el valor mínimo de la velocidad angular $\omega = 0.49$ [rad/s] y el ángulo vale $\delta = 2.31$ [rad], en este instante el estado está lo más cercano al punto silla del sistema, es decir el punto de equilibrio de posfalla inestable

$$\mathbf{Xe}_{2pf} = \begin{cases} \delta_{2pf} = 2.31 \text{ [rad]} \\ \omega_{2pf} = 0 \end{cases}$$

En el instante $t = 1.069$ [s] el ángulo del *swing* es $\delta = \pi$ [rad] y la velocidad angular tiene un valor de $\omega = 8.6$ [$\frac{rad}{s}$]

La figura 6.7 muestra el plano de fase para tres trayectorias. La trayectoria estable $A \rightarrow 2 \rightarrow 3$ para cualquier instante $t < T$. La trayectoria $A \rightarrow 2' \rightarrow 3'$ correspondiente al límite de estabilidad, cuando la desconexión de la falla se realiza para tiempos posteriores a $t_c = T = 0.21$ [s] y la trayectoria inestable $A \rightarrow 2'' \rightarrow 3''$ cuando la desconexión se realiza para $t > T = 0.217$ [s].

La gráfica del diagrama de estados tridimensional, cuando el sistema opera en el límite de estabilidad, se muestra en la figura 6.8. La secuencia de estos estados sucede cuando la línea se desconecta en $T = t_c = 0.21$ [s]. Los segmentos de rectas que unen los puntos AA' y BB' corresponden a los lugares geométricos de solución constante que definen los puntos de equilibrios estables de prefalla y posfalla, respectivamente. En $t = 0$ inicia el proceso de falla en el punto A , y al transcurrir el tiempo la trayectoria de estados *gira* en torno a la línea BB' , en este caso la trayectoria de estados no tiene el comportamiento asintótico del caso anterior, pues la trayectoria no tiende a la línea BB' conforme $t \rightarrow \infty$. Esta situación geométrica ilustra la ausencia de *estabilidad asintótica*, sin embargo el sistema sera estable en el sentido menos estricto que impone

la definición convencional.

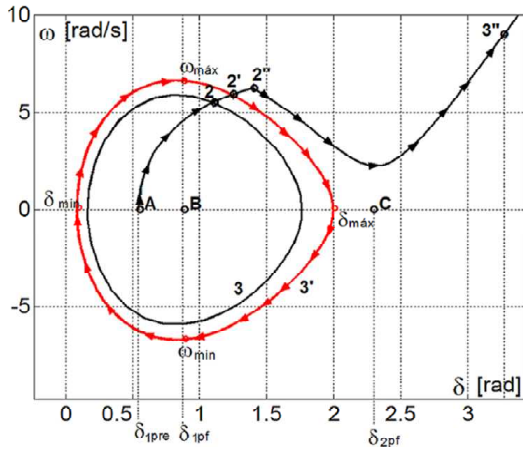


Figura 6.7

Plano de fase: dos trayectorias estables y una inestable para el **SEP**

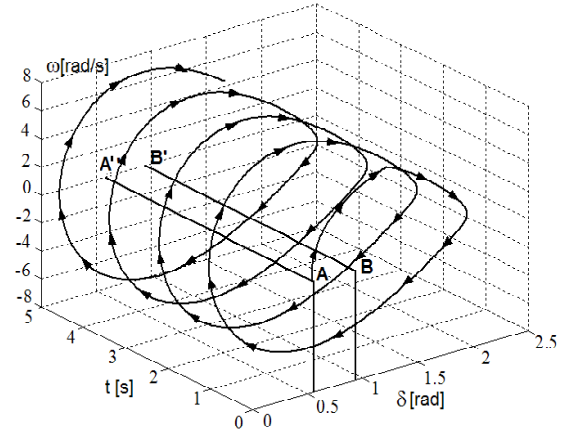


Figura 6.8

Diagrama de estados **3D** en la región umbral de estabilidad para el **SEP**

6.2 La solución de la ecuación del *swing* para el **SMR** por medio de simulación analógica

Al igual que en el **SEP** la solución numérica del sistema no lineal de ecuación diferenciales para el **SMR**

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{I} (M_m g r - K_m \text{sen}\theta - B_m \omega) \end{cases}$$

Se resuelve con un programa de **Matlab/Simulink**.

Los valores numéricos de las masas y las dimensiones geométricas de la polea y la barra que se emplean en este programa son los que corresponden al diseño efectuado en el subcapítulo 4.3.

$$m_1 = 0.1 [kg], m_2 = 1 [kg], m_3 = 0.221 [kg], m_p = 1.484 [kg], m_B = 0.386 [kg]$$

$$r = 0.1 [m], \quad l_B = 0.438 [m]$$

Tomando en cuenta la definición de los siguientes parámetros

$$M_f = m_2 - m_1, \quad K_m = \frac{1}{2}m_B g l_B \quad \text{e} \quad I_f = \frac{1}{2}m_p r^2 + \frac{1}{12}m_B l_B^2 + (m_1 + m_2)r^2$$

$$M_{pf} = m_2 - m_1 - m_3 \quad \text{e} \quad I_{pf} = \frac{1}{2}m_p r^2 + \frac{1}{12}m_B l_B^2 + (m_1 + m_2 + m_3)r^2$$

Se tienen los siguientes resultados numéricos

$$M_f = 0.9 [kg], \quad M_{pf} = 0.679 [kg], \quad K_m = 0.8292 [N.m]$$

$$I_{cp} = \frac{1}{2}m_p r^2 = 7.42 \times 10^{-3} [kg.m^2], \quad I_{cB} = \frac{1}{12}m_B l_B^2 = 6.17 \times 10^{-3} [kg.m^2]$$

$$I_f = 2.459 \times 10^{-2} [kg.m^2], \quad I_{pf} = 2.680 \times 10^{-2} [kg.m^2]$$

Al sustituir estos valores en el sistema de ecuaciones diferenciales y realizar la simulación se tienen los siguientes resultados.

Caso 1: Solución de la ecuación del *swing* mecánico cuando $B = 0.02$

Las características cinemáticas del *swing mecánico* de la polea en función del tiempo se muestran en la figura 6.9.

Después de que ocurre la falla mecánica al final del período $0 \leq t \leq T_m$, el comportamiento del *swing* tiende al punto de equilibrio de posfalla $\theta_{1pf} = 0.932[rad]$ y $\omega_{1pf} = 0$. Del listado del programa se tienen los siguientes resultados.

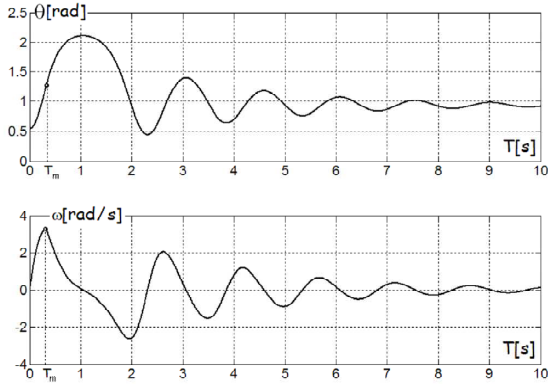


Figura 6.9

Swing estable para el **SMR**

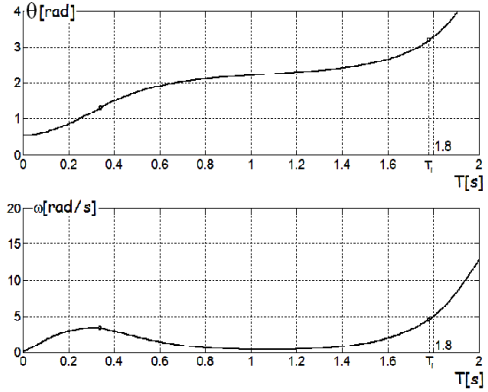


Figura 6.10

Swing inestable para el **SMR**

Tiempo máximo de acoplo de la masa m_3 al sistema $T_m = t_{cm} = 0.32$ [s], para este instante se tienen los siguientes valores: Ángulo máximo del *swing mecánico* $\theta(t_{cm}) = 1.24$ [rad], velocidad del *swing* $\omega(t_{cm}) = 3.35$ [$\frac{rad}{s}$], amplitud máxima del *swing* $\theta_{m\acute{a}x} = 2.24$ [rad] en $t = 1.02$ [s]. La figura 6.10 muestra el *swing mecánico* inestable de la polea para instantes $t > 0.36$ [s], se puede observar que después del período del transitorio de falla mecánica, cuando la masa m_3 se incorpora al sistema en $T_m = 0.36$ [s], el comportamiento del ángulo y de la velocidad angular de la polea crecen indefinidamente. Por ejemplo, para $t = 1.77$ [s] el ángulo de la polea ha dado media vuelta, y la velocidad angular tiene el valor de $\omega(1.77) = 4.39$ [$\frac{rad}{s}$].

En la figura 6.11 se muestra el plano de fase para tres trayectorias. La trayectoria estable $A \rightarrow B \rightarrow C$ cuando el acoplo de la masa m_3 se efectúa en $t_{cm} < T_m$, la trayectoria límite de estabilidad $A \rightarrow B' \rightarrow C'$ cuando el tiempo de acoplo $t_{cm} = T_m = 0.32$ [s] y la trayectoria inestable $A \rightarrow B'' \rightarrow C''$ para un tiempo $t > t_{cm}$ cercano a $T_m = 0.32$ [s].

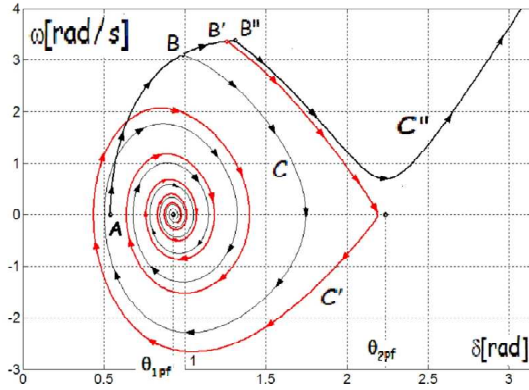


Figura 6.11

Plano de fase para el **SMR**

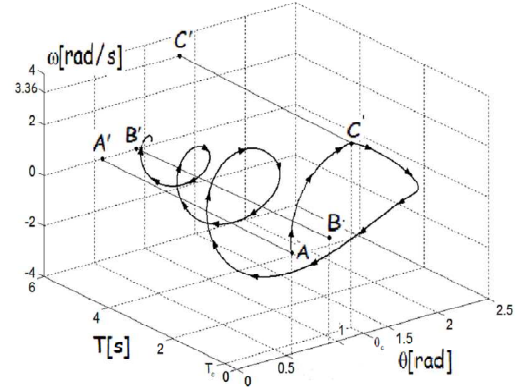


Figura 6.12

Trayectoria de estados **3D** para el **SMR**

La gráfica de la figura 6.12 muestra la trayectoria de estados tridimensional del **SMR**, el proceso de falla inicia en $t = 0$ en el punto de equilibrio A de prefalla mecánica, en este instante se verifica la transición mecánica *prefalla-falla* y la trayectoria que une a los puntos A y C , determina el movimiento de los estados del sistema mecánico durante este proceso; posteriormente, cuando se acopla la masa m_3 al sistema mecánico en el tiempo crítico $T_m = t_{cm} = 0.32$ [s] se inicia el proceso mecánico *falla-posfalla*. Se puede observar que el lugar geométrico de los estados *gira* a modo de espiral decreciente en torno al segmento de recta BB' acercándose a ella conforme $t \rightarrow \infty$, esta situación geométrica del comportamiento de la trayectoria de estados tridimensional ilustra el concepto de *estabilidad asintótica* que tiene el **SMR**. Los segmentos de rectas $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ corresponden a los lugares geométricos de solución constante que definen los puntos de equilibrios estables de prefalla mecánica $\theta_{1pre} = 0.54$ [rad] y $\omega_{1pre} = 0$, y de posfalla mecánica $\theta_{1pf} = 0.93$ [rad] y $\omega_{1-pf} = 0$, respectivamente.

Caso 2: Ecuación del *swing* cuando $B = 0$

El comportamiento estable del *swing* del sistema mecánico se muestra en la figura 6.13, después de que transcurre el período de falla mecánica y se acopla la masa m_3 en el tiempo crítico T_m , las propiedades cinemáticas del sistema mecánico presentan oscilaciones sostenidas en virtud de no existir pérdidas. Del listado del programa de

simulación se tienen los siguientes resultados.

Tiempo máximo de acoplamiento de la masa m_3 , $T_m = t_{cm} = 0.214$ [s]. Para este instante se tienen los valores de las siguientes variables: Ángulo del *swing* mecánico $\theta(t_{cm}) = 0.91$ [rad], velocidad angular de la polea $\omega(t_{cm}) = 3.17$ [rad/s]. Otros resultados son los siguientes, valores máximo y mínimo del ángulo del *swing* $\delta_{m\acute{a}x}(t = 0.6) = 2.19$ [rad] y $\delta_{m\acute{i}n}(t = 1.223) = 0.046$ [rad], amplitud del *swing* $\Delta\delta = \delta_{m\acute{a}x} - \delta_{m\acute{i}n} = 2.151$ [rad]. El sistema presenta inestabilidad para $t > T_{cm}$, por ejemplo para un tiempo de libramiento de la falla de $t = 0.22$ [s] se presenta inestabilidad como lo muestra la figura 6.14. En el supuesto de que el proceso de inestabilidad se mantuviera, la polea habría girado media vuelta con una velocidad angular de 4.63 [rad/s] para el instante $t = 1.57$ [s].

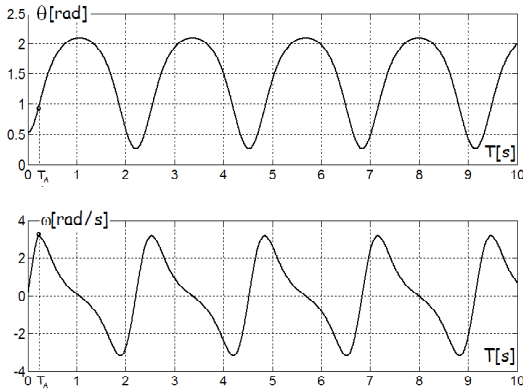


Figura 6.13

Swing estable para el **SMR**

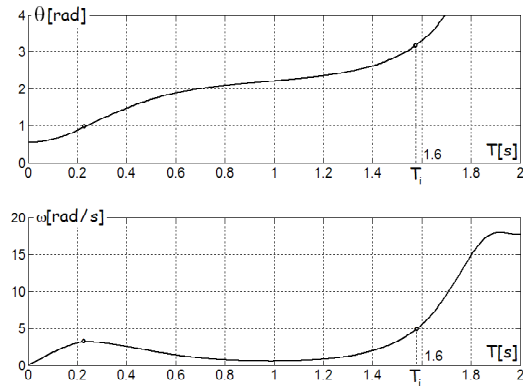


Figura 6.14

Estado de inestabilidad para el **SMR**

El plano de fase para tres trayectorias de interés se muestra en figura 6.15. La trayectoria estable $A \rightarrow B \rightarrow C$ para cualquier instante $t < T_m = 0.21$ [s] de acoplamiento de la masa m_3 al sistema; la trayectoria de estabilidad crítica $A \rightarrow B' \rightarrow C'$, cuando el acoplo de la masa m_3 se efectúa en el instante estimado $t_{cm} = T_m = 0.21$ [s] y la trayectoria inestable $A \rightarrow B'' \rightarrow C''$ cuando el acoplo de la masa m_3 se efectúa en $t = 0.23$ [s] $> T_m$.

La figura 6.16 muestra la gráfica de la trayectoria de estabilidad crítica cuando la masa m_3 se acopla al sistema en $T_m = t_{cm} = 0.21$ [s]. Como ya se explicó, las líneas rectas que determinan los puntos AA' y BB' corresponden a los lugares geométricos de solución constante que definen los puntos de equilibrios mecánicos estables de prefalla y posfalla. En $t = 0$ inicia el proceso de falla mecánica en el punto A y al transcurrir el tiempo la trayectoria de estados *gira* en torno a la línea BB' , pero en este caso la trayectoria de estados no tiene el comportamiento asintótico del caso anterior cuando $B = 0.02$, pues no se *acercas* a esta línea conforme $t \rightarrow \infty$. Esta situación geométrica ilustra la ausencia de *estabilidad asintótica* del sistema mecánico, sin embargo el sistema será estable en el sentido menos estricto.

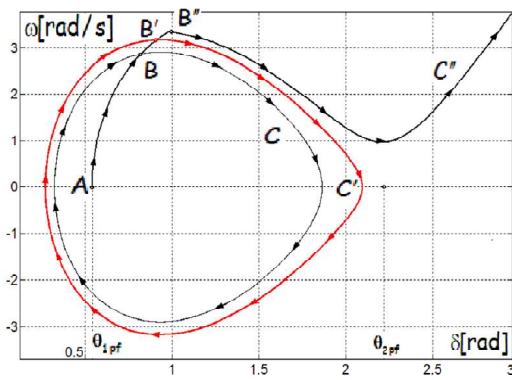


Figura 6.15

Plano de fase para el **SMR**

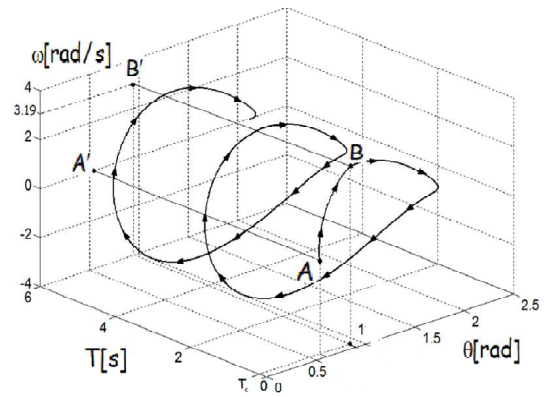
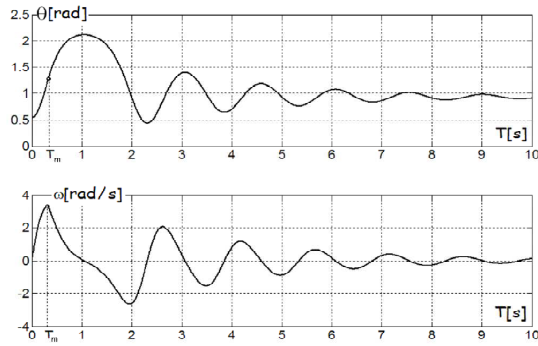


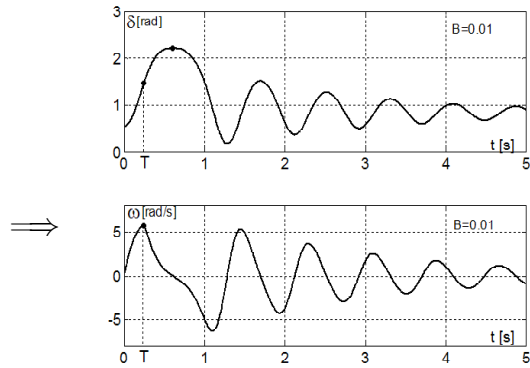
Figura 6.16

Trayectoria de estados **3D** para el **SMR**

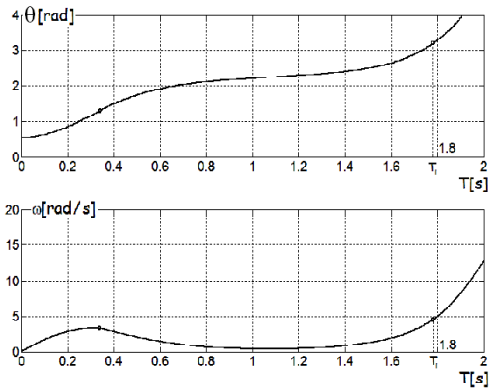
A continuación, se ilustra el mapeo de los modelos gráficos del **SMR** y del **SEP**. Las gráficas de la izquierda corresponden al **SMR** y las de la derecha al del **SEP**, el comportamiento cualitativo de las variables de estados que se muestran en estas gráficas sustentan la analogía establecida en ambos sistemas. Recordar que el símbolo \implies debe leerse: *es como*.



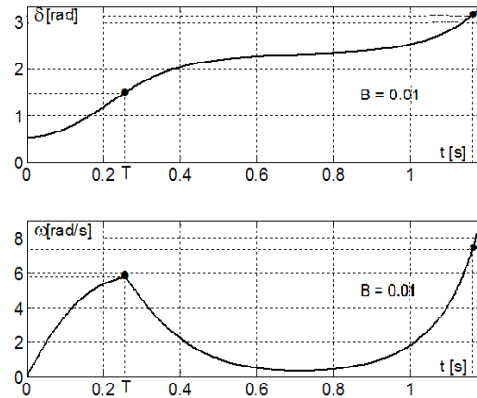
*Estabilidad en el SMR $B \neq 0$
 θ y ω en función de t*



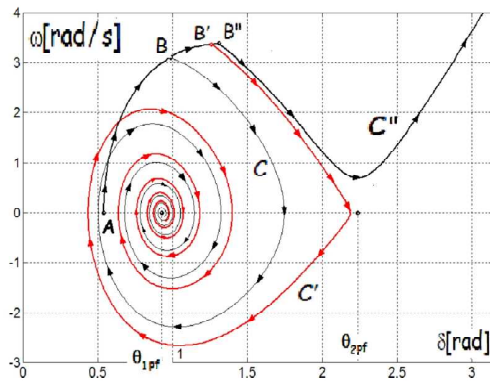
*Estabilidad en el SMR $B \neq 0$
 δ y ω en función de t*



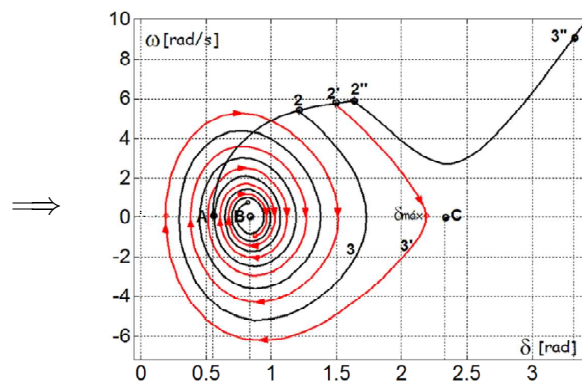
*Inestabilidad en el SMR $B \neq 0$
 θ y ω en función de t*



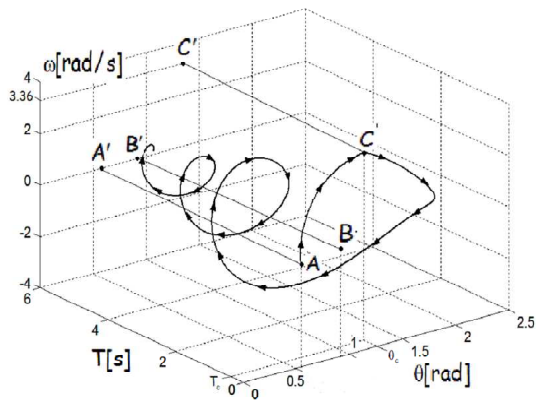
*Inestabilidad en el SEP $B \neq 0$
 δ y ω en función de t*



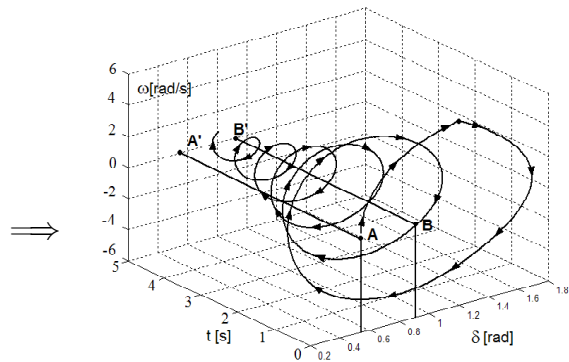
Plano de fase SMR $B \neq 0$



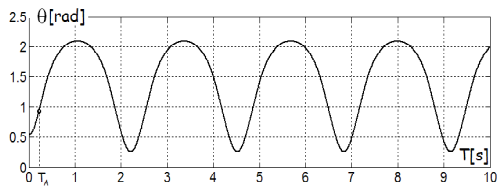
Plano de fase SEP $B \neq 0$



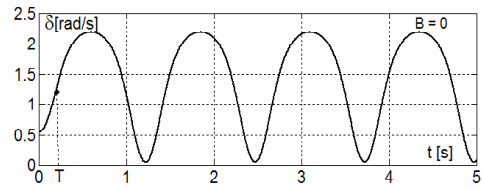
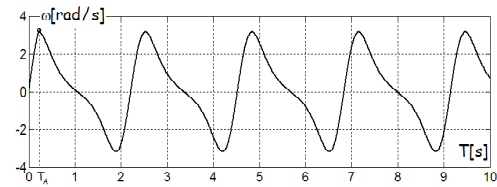
Trayectoria 3D
de estados **SMR** $B \neq 0$



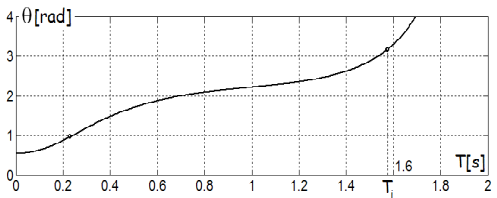
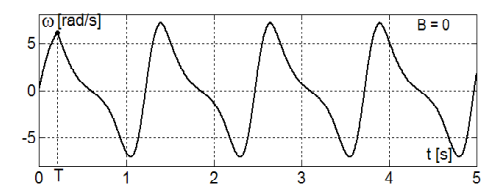
Trayectoria 3D
de estados **SEP** $B \neq 0$



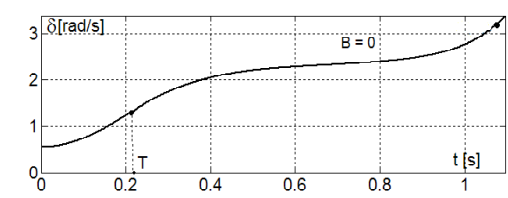
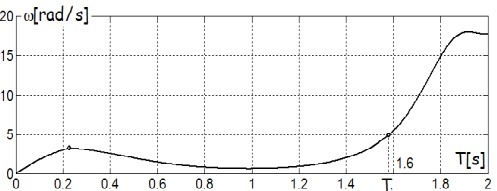
Estabilidad en el SMR $B = 0$
 θ y ω en función de t



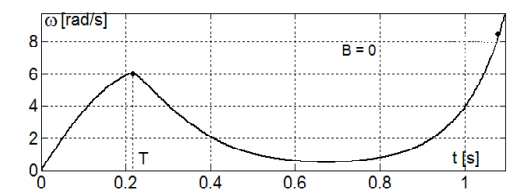
Estabilidad en el SEP $B = 0$
 δ y ω en función de t

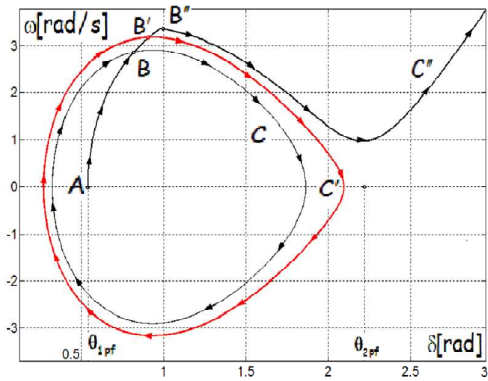


Inestabilidad en el SMR $B = 0$
 θ y ω en función de t

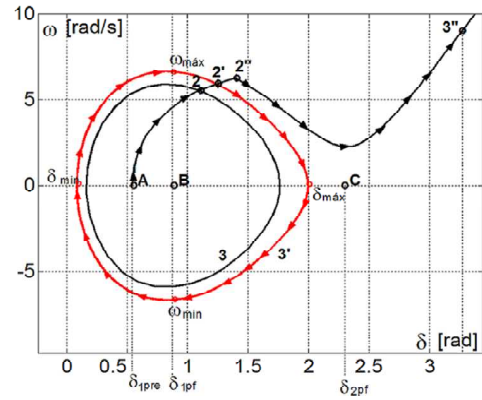


Inestabilidad en el SMR $B = 0$
 δ y ω en función de t

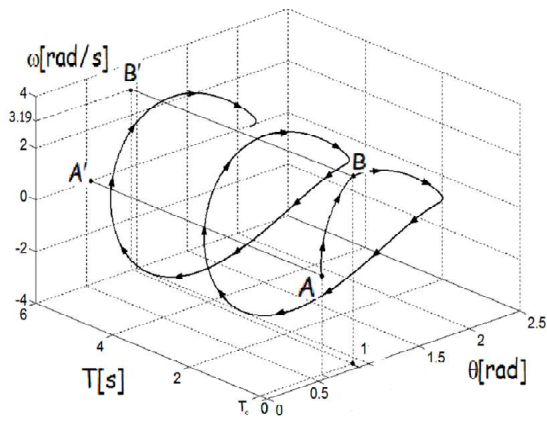




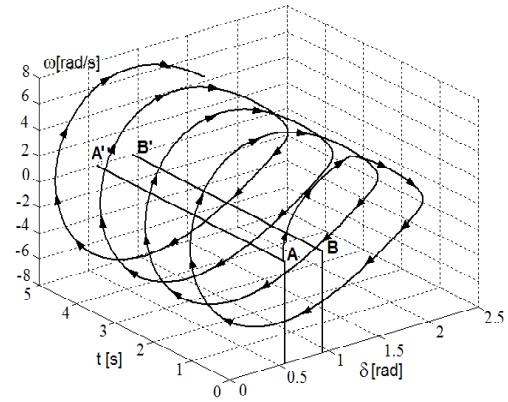
Plano de fase **SMR** $B = 0$



Plano de fase **SEP** $B = 0$



Trayectoria **3D**
de estados **SMR** para $B = 0$



Trayectoria **3D**
de estados **SEP** para $B = 0$

Capítulo 7

El hamiltoniano del SMR, síntesis y resultados

El análisis de la estabilidad para el **SMR** a partir de la función hamiltoniana es particularmente importante, ya que este modelo matemático incorpora consideraciones energéticas en términos de las variables de estado θ y ω , las cuales son necesarias para estudiar el fenómeno de estabilidad. En este capítulo se analizará esta misma función pero relacionándola con la variable temporal t .

7.1 El comportamiento del hamiltoniano en el SMR durante los procesos de falla y posfalla

En el capítulo 5 se analizó las aplicaciones del modelo matemático de la función $H(\theta, \omega)$ relacionándola con el concepto de estabilidad. En este apartado se analizarán algunos resultados asociados con las componentes de esta función de energía después de que ocurre el proceso de falla, teniendo como base los resultados numéricos de los procesos de simulación realizados en **Mathematica** y **Matlab/Simulink**.

En los procesos de simulación descritos en el capítulo anterior se obtuvieron los vectores correspondientes a las variables de estado θ y ω en función del tiempo. A continuación, se procederá a realizar los modelos gráficos de la energía cinética y de la energía potencial a partir de estas variables de estado con el fin de realizar el mapeo de la estructura analógica que guardan entre sí los sistemas mecánico y eléctrico.

Como ya se explicó, el proceso de falla mecánica se presenta en el instante de desconectar la masa m_0 del **SMR** y después de transcurrir un intervalo razonable, debe acoplarse

la masa m_3 lo más rápidamente al sistema con el fin de que regrese al nuevo punto de equilibrio estable de posfalla $\mathbf{Xm}_{1pf} = (\theta_{1pf}, 0)$. Al evaluar el hamiltoniano durante el proceso de falla

$$H_f(\theta, \omega) = EC_f(\theta) + EP_f(\theta)$$

Para un ángulo θ comprendido en el intervalo $\theta_{1pre} < \theta < \theta_{cm}$ ¹ se tienen las siguientes expresiones de la energía cinética y potencial, en términos de θ

$$EC_f(\theta) = \left(\frac{K_m}{I_f} \right) (\cos \theta - \cos \theta_{1pre}) + \frac{M_f}{I_f} gr (\theta - \theta_{1pre}), \quad \theta_{1pre} \leq \theta \leq \theta_{cm} \quad (7.1)$$

$$EP_f(\theta) = \frac{K_m}{I_{pre}} + \left(\frac{1}{I_f} - \frac{1}{I_{pre}} \right) K_m \cos \theta_{1pre} + \left(\frac{M_f}{I_f} - \frac{M_{pre}}{I_{pre}} \right) gr \theta_{1pre} - \frac{K_m}{I_f} \cos \theta - \frac{M_f}{I_f} gr \theta \quad (7.2)$$

Del mismo modo al evaluar el hamiltoniano durante el proceso de posfalla

$$H_{pf}(\theta, \omega) = EC_{pf}(\theta) + EP_{pf}(\theta)$$

Para un ángulo θ comprendido en el intervalo $\theta_{cm} \leq \theta \leq \theta_{2pf}$, se tienen las expresiones de las energías cinética y potencial

$$EC_{pf}(\theta) = \left(\frac{K_m}{I_{pf}} \right) (\cos \theta - \cos \theta_{1pf}) + \frac{M_{pf}}{I_{pf}} gr (\cos \theta - \theta_{1pf}) \quad (7.3)$$

$$EP_{pf}(\theta) = \frac{K_m}{I_{pre}} + \left(\frac{1}{I_f} - \frac{1}{I_{pre}} \right) K_m \cos \theta_{1pre} + \left(\frac{M_f}{I_f} - \frac{M_{pre}}{I_{pre}} \right) gr \theta_{1pre} + \left(\frac{1}{I_{pf}} - \frac{1}{I_f} \right) K_m \cos \theta_{cm} + \left(\frac{M_{pf}}{I_{pf}} - \frac{M_f}{I_f} \right) gr \theta_{cm} - \frac{K_m}{I_{pf}} \cos \theta - \frac{M_{pf}}{I_{pf}} gr \theta \quad (7.4)$$

Ahora bien, en el capítulo anterior se analizó la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales del **SMR** y se obtuvieron los vectores de estado de las variables θ y ω como funciones del tiempo t . Estos vectores de estado se evaluaron para dos intervalos; el de falla mecánica $0^+ \leq t \leq t_{cm}^-$ y el de posfalla mecánica

¹Recordar que θ_{cm} es el ángulo en el que se conecta la masa m_3 con el propósito de que el sistema mecánico regrese al nuevo punto de equilibrio de posfalla.

$t_{cm}^+ \leq t \leq t_f$. Al sustituir los vectores de estado que contienen a θ y ω en función del tiempo en la ecuaciones (7.1) (7.2), (7.3) y (7.4) se puede obtener las características temporales que tienen las energías cinética y potencial. Después de realizar esta sustitución se pueden construir las gráficas que determinan el comportamiento en el tiempo de estas energías, tal como se indica a continuación.

La figura 7.1 y 7.2 muestran el comportamiento gráfico de la energía cinética normalizada del **SMR**. La primera como función del tiempo, y la segunda en función de θ y ω . Del mismo modo se pueden realizar las gráficas para la energía potencial, tal como se muestran las figuras 7.3 y 7.4.

La gráfica de la figura 7.5 muestra el comportamiento simultáneo de las energías cinética y potencial, mientras que la figura 7.6 indica la verificación del *principio de la conservación de la energía* en el que se cumple $H(\theta, \omega) = EC + EP = \text{Constante}$.

Es importante destacar que en estas gráficas la transferencia de energía cinética a potencial y viceversa, ocurre de manera cíclica a frecuencia constante después de que ocurre el proceso de falla.

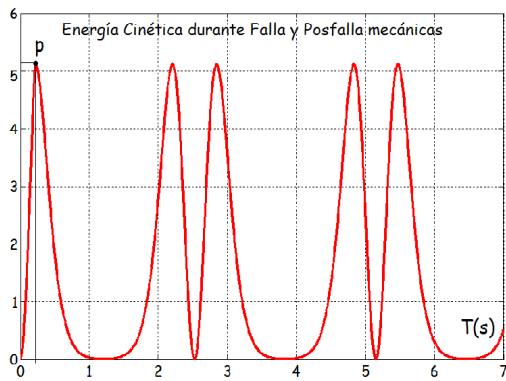


Figura 7.1

Energía cinética en función de t

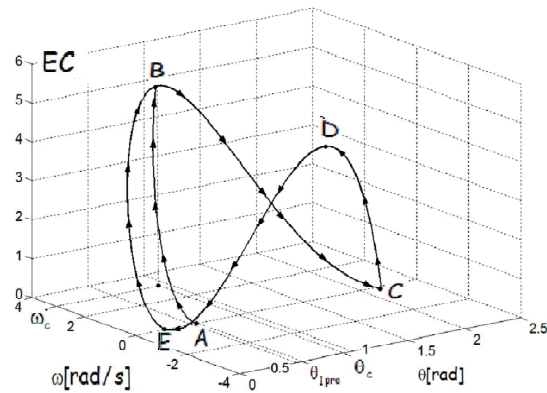


Figura 7.2

Energía cinética en función de θ y ω

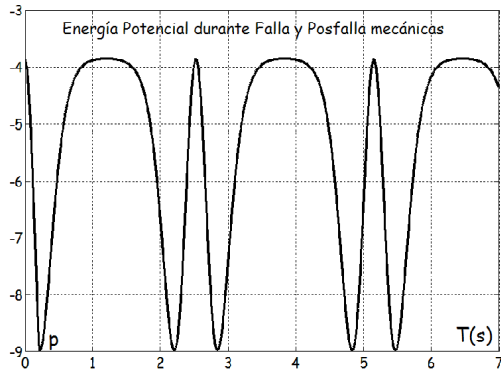


Figura 7.3

Energía potencial en función de t

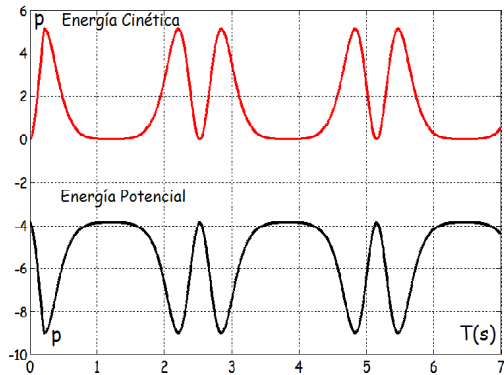


Figura 7.5

Energías cinética y potencial

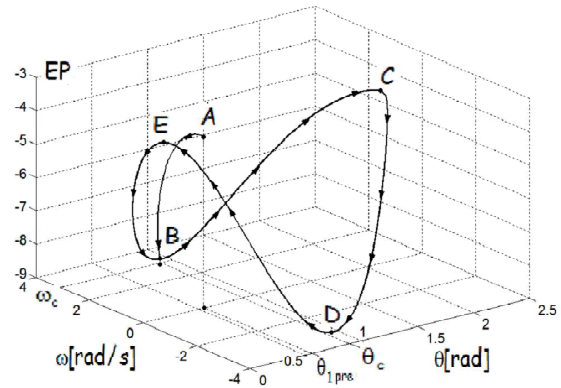


Figura 7.4

Energía potencial en función de θ y ω

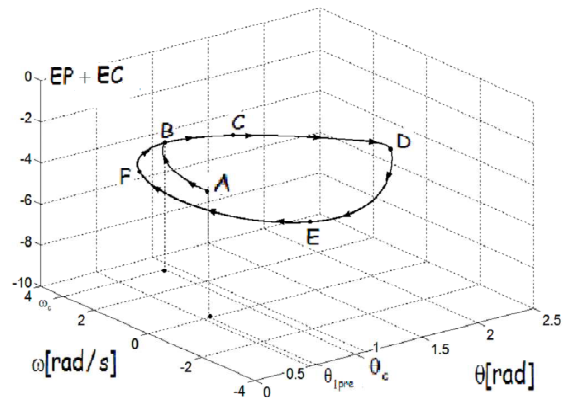


Figura 7.6

Suma de energías cinética y potencial

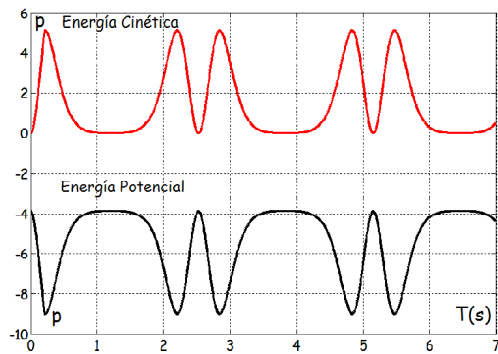
Con relación al comportamiento de estas energías en R^3 , figuras 7.2, 7.4 y 7.6, donde las variables del dominio corresponden a los estados ω y θ del sistema mecánico destacan las siguientes observaciones:

a) La trayectoria $A \rightarrow B$ de la figura 7.4 determina el comportamiento de la energía potencial durante el estado de falla mecánica cuando se desconecta m_0 del **SMR**. El punto A corresponde al estado de energía potencial máxima, pero al mismo tiempo donde la energía cinética es nula, tal como se ilustra en la figura 7.2; además, la proyección de este punto en el plano de estados (θ, ω) corresponde al estado de equilibrio estable de prefalla mecánica θ_{1pre} .

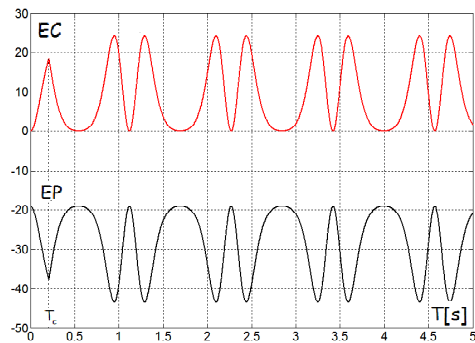
b) El punto B de la figura 7.6 representa el estado en donde ocurre el acoplamiento de la masa m_3 al sistema mecánico, dado que el sistema presenta estabilidad, la trayectoria de estados después de este punto, describe un proceso cíclico de estados en la dirección $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B\dots$, este movimiento se realiza siguiendo un proceso tal que la suma de estas dos energías tiene un valor constante pues todos los estados referidos por los puntos A, B, C, D, E y F están localizados en un plano horizontal con cota constante.

El mismo procedimiento aplicado al **SMR** para determinar su comportamiento dinámico se puede aplicar a la función $H(\delta, \omega)$ del **SEP**. Las gráficas de la siguiente página muestran la correspondencia análoga entre estos dos sistemas.

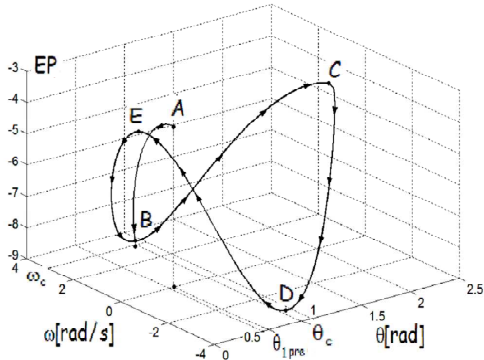
Cuando en el modelo matemático del *swing* del **SMR** se considera la fricción viscosa, parte de las energías potencial y cinética se transforma en calor durante el proceso dinámico. El análisis de esta situación presenta algunas consideraciones particulares de interés que relacionan el principio de la conservación de la energía con la estabilidad del **SMR**.



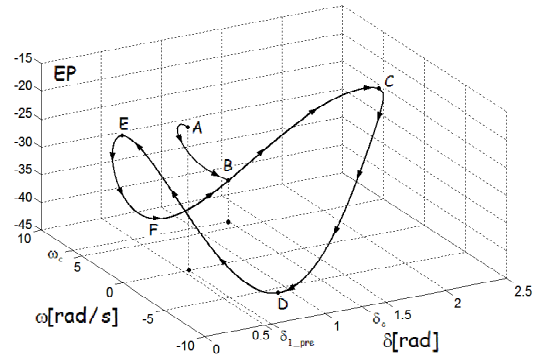
$EC(t)$ y $EP(t)$ para el **SMR**



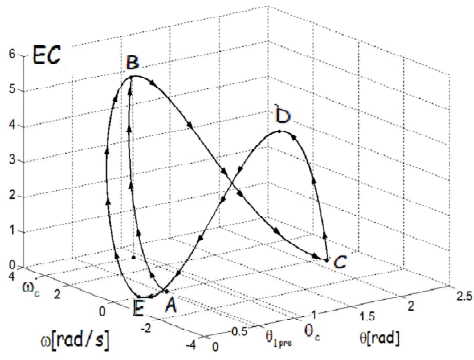
$EC(t)$ y $EP(t)$ para el **SEP**



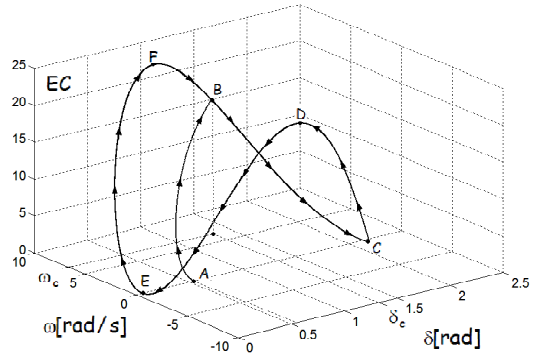
$EP(\theta, \omega)$ para el SMR



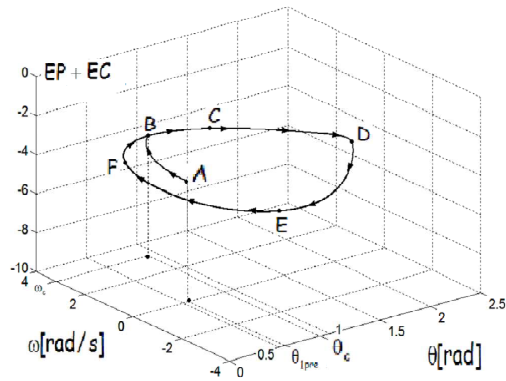
$EP(\delta, \omega)$ para el SEP



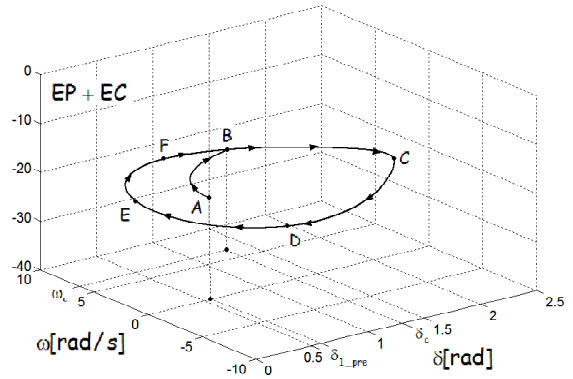
$EC(\theta, \omega)$ para el SMR



$EC(\delta, \omega)$ para el SEP



$EC(\theta, \omega) + EP(\theta, \omega)$ para el SMR



$EC(\delta, \omega) + EP(\delta, \omega)$ para el SEP

7.2 El modelo gráfico en la función de energía del SMR y su relación con la estabilidad

En este apartado se analizará la función hamiltoniana con el propósito de estudiar su estabilidad relacionando el plano de fase del sistema con las curvas de nivel en \mathbf{R}_2 que se generan a partir de la grafica de la superficie $H(\theta, \omega)$ en \mathbf{R}_3 . También se introducen algunas ideas de geometría diferencial con el fin de dilucidar, a partir de consideraciones geométricas, los conceptos de estabilidad. Por último, y sin entrar en una detallada formalización se relaciona esta idea conceptual con el método indirecto de Liapunov para el análisis de los sistemas no lineales.

La formulación de la función hamiltoniana del SMR para el punto de equilibrio estable de posfalla $(\theta_{1pf}, 0)$ está dada por la siguiente ecuación

$$H(\theta_{1pf}, 0) = \frac{K_m}{I_{pre}} + \left(\frac{1}{I_f} - \frac{1}{I_{pre}} \right) K_m \cos \theta_{1pre} + \left(\frac{M_f}{I_f} - \frac{M_{pre}}{I_{pre}} \right) gr \theta_{1pre} + \left(\frac{1}{I_{pf}} - \frac{1}{I_f} \right) K_m \cos \theta_{cm} + \left(\frac{M_{pf}}{I_{pf}} - \frac{M_f}{I_f} \right) gr \theta_{cm} - \frac{K_m}{I_{pf}} \cos \theta - \frac{M_{pf}}{I_{pf}} gr \theta$$

Para cualquier posición angular θ comprendida en el intervalo $\theta_{1pf} < \theta < \theta_{2pf}$ del proceso de posfalla, se tiene.

$$H_{pf}(\theta, \omega) = \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{K_m}{I_{pre}} + \left(\frac{1}{I_f} - \frac{1}{I_{pre}} \right) K_m \cos \theta_{1pre} + \left(\frac{M_f}{I_f} - \frac{M_{pre}}{I_{pre}} \right) gr \theta_{1pre} + \left(\frac{1}{I_{pf}} - \frac{1}{I_f} \right) K_m \cos \theta_{cm} + \left(\frac{M_{pf}}{I_{pf}} - \frac{M_f}{I_f} \right) gr \theta_{cm} - \frac{K_m}{I_{pf}} \cos \theta - \frac{M_{pf}}{I_{pf}} gr \theta$$

Al definir la diferencia de estas dos expresiones como la función energía $V(\theta, \omega)$

$$V(\theta, \omega) = H_{pf}(\theta, \omega) - H(\theta_{1pf}, 0)$$

$$V(\theta, \omega) = \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{K_m}{I_{pf}} (\cos \theta_{1pf} - \cos \theta) + \frac{M_{pf}}{I_{pf}} gr (\theta_{1pf} - \theta)$$

Después de sustituir los valores numéricos

$$M_{pf} = 0.679 [kg], M_{pfg}r = 0.666 [N.m], I_{pf} = 2.680 \times 10^{-2} [kg.m^2]$$

$$K_m = 0.8269 [N.m], \theta_{1pf} = 0.932 [rad] \text{ y } \omega_{1pf} = 0$$

Y considerando los dos puntos de equilibrio estable e inestable de posfalla

$$\mathbf{Xm}_{pf1} = (\theta_{1pf} = 0.932, \omega_{1pf} = 0) \text{ y } \mathbf{Xm}_{pf2} = (\theta_{2pf} = 2.2, \omega_{2pf} = 0)$$

Se tiene la representación gráfica de la función $V(\theta, \omega)$ mostrada en la figura 7.14 para la región $\mathbf{R} = \{(\theta, \omega) / 0 < \theta < \theta_{2pf}, -4.5 < \omega < 4.5\}$ mientras que en la figura 7.15 se muestran las curvas de nivel $V_i(\theta, \omega) = C_i$, para $i = 1, 2$ y 3 , que al ser evaluadas tienen los valores $V_1(\theta, \omega) = 1.18[pu]$, $V_2(\theta, \omega) = 2.81[pu]$, $V_3(\theta, \omega) = 4.53[pu]$.

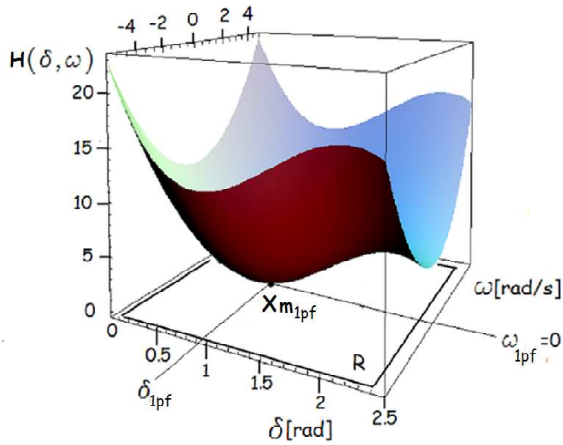


Figura 7.14

Gráfica de la función $V(\theta, \omega)$

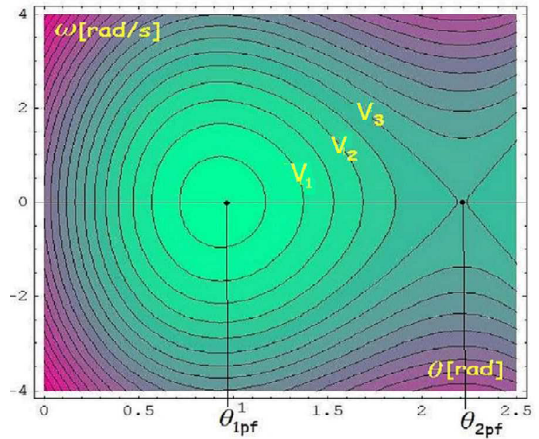


Figura 7.15

Gráfica de las curvas de nivel $V(\theta, \omega)$

Con relación a estas dos representaciones geométricas se tienen las siguientes observaciones:

- a) Las curvas de nivel $V_i(\theta, \omega) = C_i$, corresponden al plano de fase durante la etapa de posfalla mecánica del SMR cuando $B = 0$. Después de que se le acopla la masa m_3 puede observarse que las trayectorias estables estarán

acotadas hasta la curva de nivel V_3 que toca al punto silla localizado en el punto de equilibrio inestable de posfalla. Esta curva de nivel contiene al máximo swing del SMR.

b) La gráfica $V(\theta, \omega)$ es continua en toda vecindad \mathfrak{D}_e en torno al punto de equilibrio \mathbf{Xm}_{pf1} y diferenciable en $\mathfrak{D}_e - \{\mathbf{Xm}_{pf1}\}$

c) Tiene un mínimo local en el punto de equilibrio \mathbf{Xm}_{pf1} , ya que $V(\delta_{pf1}, 0) = 0$ y $V(\delta, \omega) > 0$ para $\mathfrak{D}_e - \{\mathbf{Xm}_{pf1}\}$

d) $\frac{dV(\delta, \omega)}{dt} \leq 0, \forall t \geq 0$ sobre cualquier solución diferenciable con condiciones iniciales \mathbf{X}_0 .

La propiedad d) se puede verificar al obtener la derivada con respecto al tiempo de la función

$$V(\omega, \theta) = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{K_m}{I_{pf}} (\cos \theta_{pf} - \cos \theta) + \frac{M_{pf}}{I_{pf}} (\theta_{pf} - \theta) \quad (7.5)$$

De las ecuaciones diferenciales que modelan al sistema en condiciones de posfalla

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \text{ y } \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{I_{pf}} (M_{pf}gr - B_m\omega - K_{pf}\text{sen}\theta) \quad (7.6)$$

Al obtener las derivadas parciales de la ecuación (7.5)

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{K_m}{I_{pf}} \text{sen}\theta - \frac{M_{pf}}{I_{pf}} \text{ y } \frac{\partial V}{\partial \omega} = \omega$$

al sustituir en la derivada y simplificar

$$\frac{d}{dt}V(\delta, \omega) = \nabla V \cdot \frac{d\bar{\mathbf{X}}}{dt} = - \left(\frac{B_m}{I_{pf}} \right) \omega^2 < 0$$

Las ideas anteriores contienen de manera implícita del teorema de Liapunov que expresa: Si $\frac{d}{dt}V(\delta, \omega) < 0$, en toda la vecindad \mathfrak{D}_e el punto de equilibrio \mathbf{Xm}_{1pf} es asintóticamente estable. El resultado de la ecuación anterior tiene una interpretación gráfica sencilla, significa que en todos los puntos P de la región $\mathfrak{D}_e - \{(\delta_{pf}, 0)\}$, los

vectores del campo gradiente ∇V de las curvas de nivel de la función $H(\delta, \omega)$ y los vectores del campo de direcciones $\frac{d\bar{x}}{dt}$ de las trayectorias del sistema dinámico dado por las ecuaciones (7.6), forman un ángulo mayor a $\frac{\pi}{2}$.

Las figuras 7.16 y 7.17 del plano de fase del **SMR**, para dos trayectorias de posfalla, una estable ABC y la otra inestable $ABDE$

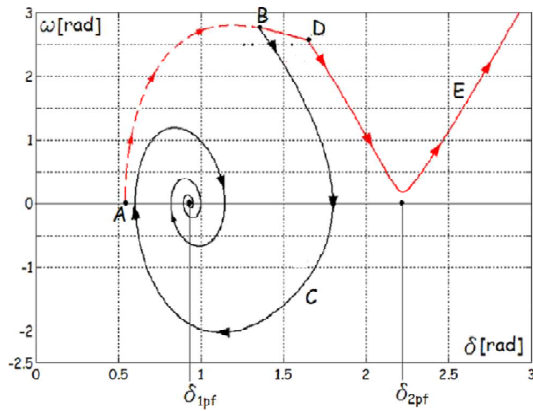


Figura 7.16

*Trayectorias estable e inestable
para $B \neq 0$*

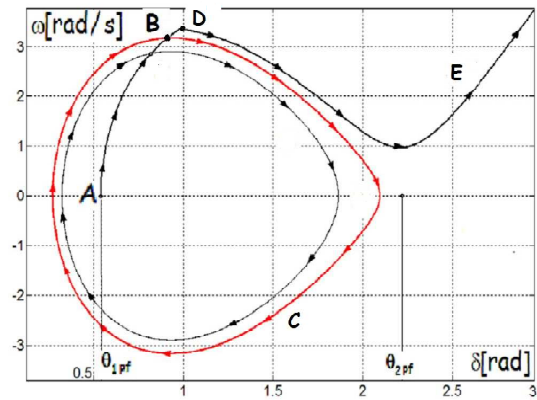


Figura 7.17

*Trayectorias estable e inestable
para $B = 0$*

En la figura 7.18 se muestran, de manera conjunta, las curvas de nivel de la ecuación escalar $V(\delta, \omega)$ de la figura 7.15 y la trayectoria estable de la figura 7.16

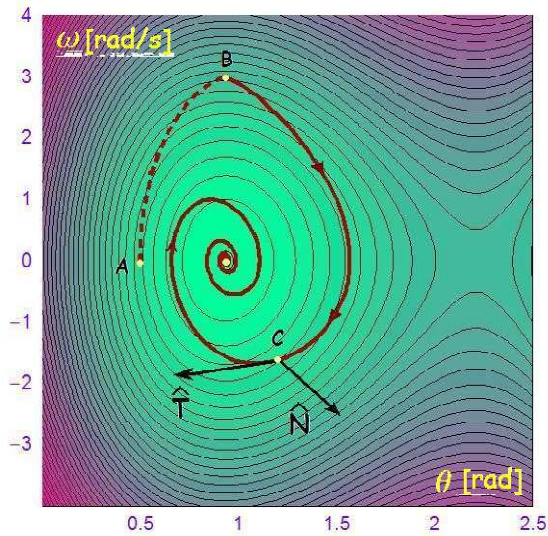


Figura 7.18

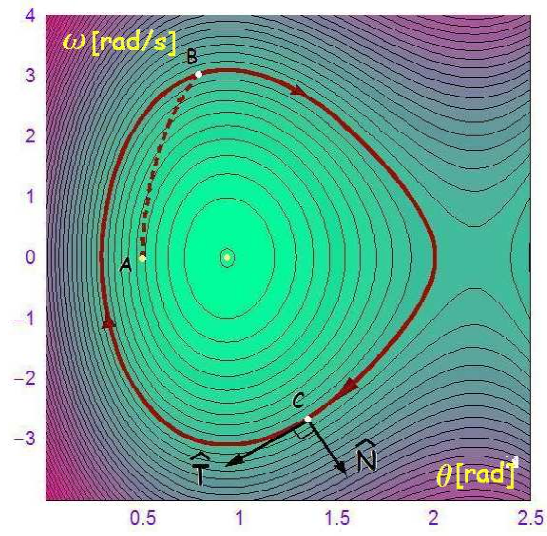


Figura 7.19

Con relación a la figura 7.18, para cada punto de la trayectoria del plano de fase, excepto para el punto de equilibrio $(\delta_{1pf}, 0)$, se tienen asociados dos vectores unitarios: a) Un vector normal \hat{N} a la curva de nivel, el cual se obtiene evaluando el *gradiente* de la ecuación $V(\delta, \omega)$ en dicho punto P y proyectándolo sobre el plano (δ, ω) y b) Un vector tangente \hat{T} a la trayectoria del plano de fase, el cual se obtiene a partir de la evaluación del campo vectorial que tienen todos los puntos de estado que pertenecen a dicha trayectoria.

Por ejemplo en la misma figura 7.18, para el punto C puede observarse que los vectores \hat{N} y \hat{T} forman un ángulo $\phi > \frac{\pi}{2}$ ², esta propiedad es extensiva para cualquier trayectoria de estados estables que inicie en la región de atracción. La interpretación geométrica de los vectores \hat{N} y \hat{T} contiene, de manera implícita el concepto de *estabilidad asintótica*, ya que las trayectorias orientadas del plano de fase que son estables, tales como BC , *crucan hacia adentro* a las curvas de nivel de la superficie $V(\theta, \omega)$ conforme $t \rightarrow \infty$; de esta forma, el movimiento de las trayectorias del plano de fase tienden hacia el punto de equilibrio estable de posfalla. Las trayectorias inestables no convergen al punto de

²De la propiedad $\nabla V \cdot \frac{d\bar{x}}{dt} = |\nabla V| \left| \frac{d\bar{x}}{dt} \right| \cos \phi < 0$ para $\phi > \frac{\pi}{2}$

equilibrio y además la magnitud del ángulo ϕ deberá ser $\phi < \frac{\pi}{2}$.

En el plano de fase de la figura 7.17 se muestran tres trayectorias. Dos de ellas cerradas y estables, la trayectoria ABC y la que se encuentra ubicada en el interior de esta última; y la trayectoria inestable ADE . Estas tres trayectorias cerradas corresponden a las curvas de nivel de la superficie $V(\delta, \omega)$.

En la figura 7.19 se muestran las curvas de nivel de $V(\delta, \omega)$ y de manera sobrepuesta la trayectoria con su campo vectorial asociado. Puede observarse que para cualquier punto de la trayectoria del plano de fase, los vectores \hat{N} y \hat{T} siempre forman un ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ ³, esta propiedad geométrica es extensiva para toda trayectoria de estados estables y contiene de manera implícita el concepto de estabilidad uniforme en el sentido de Liapunov. Como se puede observar, las trayectorias orientadas del plano de fase *coinciden* con las trayectorias de las curvas de nivel de $V(\delta, \omega)$; sin embargo, conforme $t \rightarrow \infty$, las trayectorias únicamente circundan el punto de equilibrio estable de posfalla sin acercarse a él, a esta propiedad se le denomina estabilidad uniforme.

³ $\nabla V \cdot \frac{d\bar{\mathbf{X}}}{dt} = |\nabla V| \left| \frac{d\bar{\mathbf{X}}}{dt} \right| \cos \phi = 0$ para $\phi = \frac{\pi}{2}$

Capítulo 8

Resultados del proceso experimental del Sistema Mecánico Analógico

En el capítulo 2 se analizó de manera cualitativa la solución del sistema de ecuaciones diferenciales que determina el comportamiento del **SMR**, y en el capítulo 6 se analizó el proceso matemático complementario, es decir la solución cuantitativa del mismo sistema de ecuaciones diferenciales. Ambos procesos de solución se pudieron efectuar gracias al conocimiento previo del modelo matemático del sistema y de los parámetros que lo conforman, por lo que los resultados obtenidos en estos dos procesos de solución constituyen entidades teóricas que deben ser contrastadas con el funcionamiento real de sistema mecánico.

En este capítulo se realizará una síntesis de la dinámica que tiene el comportamiento del **SMR** analógico en el laboratorio. Para poder estudiar este aspecto experimental del modelo analógico se emplearán, como punto de partida, las mediciones de las variables cinemáticas de posición contra tiempo que se realizaron de manera directa a uno de sus elementos durante su operación mecánica. La primera parte de este proceso de síntesis consiste en el acopio sistematizado de las mediciones experimentales. Estas mediciones se efectuaron de manera automatizada por medio de una interfaz electroacústica conectada a una computadora, posteriormente este conjunto de datos se sometió a un proceso de selección, con el fin de poder aplicar métodos numéricos y así poder obtener relaciones y comportamientos de otras variables de interés como son: la velocidad angular, el plano de fase, la energía cinética, entre otras.

8.1 Metodología del registro de los datos experimentales

Una de las variables de mayor interés que intervienen en el proceso de estabilidad del **SMR** es, sin lugar a dudas, la variable angular θ de la polea. Esta variable puede obtenerse, de manera indirecta, a partir de la medición de la posición lineal de la masa m_2 en función del tiempo. Todavía más, gracias a que el sistema posee un grado de libertad, a partir de la medición de posición de la masa m_1 o de la masa m_2 se puede determinar la coordenada angular θ para cualquier instante.

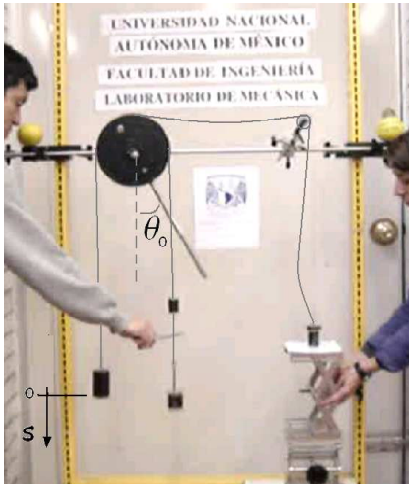


Figura 8.1

Condición de prefalla del **SMR**

Antes de cortar el hilo que une a las masas m_0 y m_1 el sistema se encuentra en reposo en la posición de equilibrio de prefalla, tal como se muestra en la figura 8.1. El ángulo que forma la barra con respecto a la vertical se considera $\theta_{pre1} = \theta_0$ y en esta posición la velocidad angular inicial $\omega_{pre1} = 0$, es decir el sistema se encuentra en el primer punto de equilibrio de prefalla estable ¹.

$$\mathbf{Xm}_{1pre} = \begin{cases} \theta_{1pre} = \theta_0 \\ \omega_{1pre} = 0 \end{cases}$$

¹Se puede verificar que se cumple con mucha aproximación que $\theta_0 = \text{sen}^{-1} \left[\frac{2(m_2 - m_0 - m_1)r}{m_B l_B} \right]$

Si la variable s es la posición de la masa m_3 de acuerdo a la referencia establecida, se tiene que, independientemente ² del estado en que se encuentre el **SMR** siempre se cumplirá para la variable angular

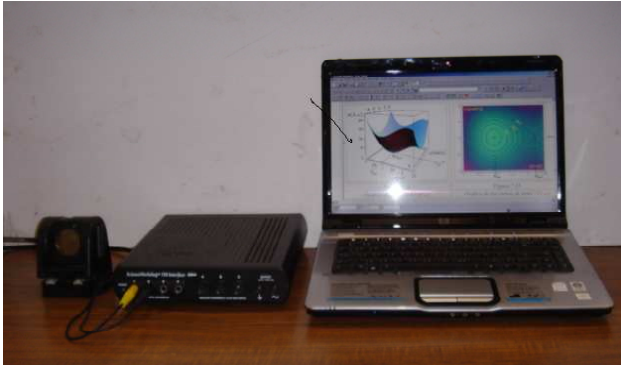
$$\theta = \frac{s}{r} + \theta_0 \quad (8.1)$$

La ecuación anterior proporciona el registro de la variable θ en función de la variable s que determina la posición de la masa m_3 , del ángulo inicial θ_0 y del radio r de la polea. Sin embargo, para poder estudiar la dinámica del **SMR** no basta con determinar las relaciones que tienen las variables lineales y angulares del sistema, también es necesario establecer la manera de cómo se obtienen los registros la variable dependiente θ y de la variable independiente tiempo t . La medición de estas dos variables físicas son esenciales para estudiar de manera completa el comportamiento dinámico del sistema.

En el instante en el que se corta el hilo que unen a las masas m_0 y m_1 , el sistema entra al estado de falla mecánica, y es a partir de este instante en el que se inicia el registro de la medición de las variables físicas. El registro de estas lecturas se realiza por medio de la interfaz **Science Workshop 750 Interface** conectada a una computadora tal como se muestra en la figura 8.2. La interfaz tiene como sensor de entrada un sonar que al emitir su señal sonora en dirección de la masa m_2 detecta su altura h_i y le asocia a este registro el valor del instante τ_i en el que ocurre este suceso. La figura 8.3 muestra la forma en que se debe acoplar el sensor al sistema, así como la referencia empleada

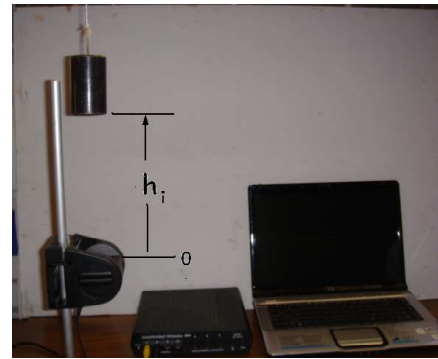
²Ya sea en condición mecánica de prefalla antes de cortar el hilo que une a las masas m_0 y m_1 ; de falla mecánica cuando se corta el hilo pero antes de que m_3 se acople al sistema o de posfalla después de que m_3 se acopla al sistema.

para la lectura de la variable h_i



*Componentes de la interfaz
Science Workshop 750 Interface*

Figura 8.2



*Acoplamiento del sonar a la masa
 m_2 para la medición de h_i y τ_i*

Figura 8.3

Por medio de este dispositivo se registran las parejas (τ_i, h_i) correspondientes a las alturas en función del tiempo que tiene la masa m_2 al moverse de los estados mecánicos de falla a posfalla. Es importante aclarar que los registros de estas parejas de variables se realizó en el contexto de funcionamiento de estabilidad mecánica del **SMR**.

Dado que interesa conocer la posición s_i de la masa m_2 en función del tiempo t_i con relación al sistema de coordenadas que se muestra en la figura 8.3, es necesario transferir el registro primario de las variables

$$(\tau_i, h_i) \Rightarrow (t_i, s_i)$$

y posteriormente

$$(t_i, s_i) \Rightarrow (t_i, \theta_i)$$

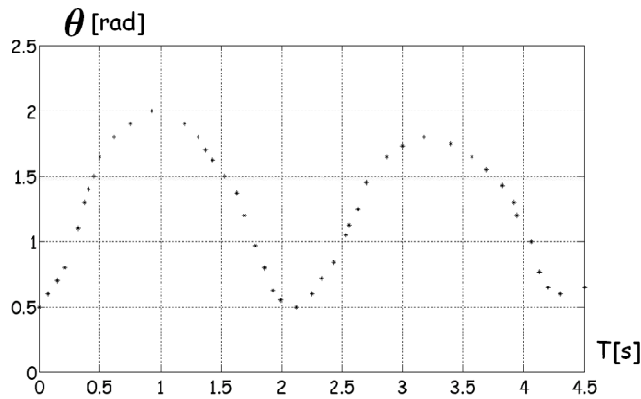
Este cambio de coordenadas se realiza al aplicar a todas las parejas (τ_i, h_i) el siguiente proceso de transformación lineal. Sea i la i ésima lectura

$$\begin{aligned}
t_i &= \tau_i - t_0 \\
s_i &= h_i - h_0 \\
\theta_i &= \frac{s_i}{r} + \theta_0
\end{aligned}
\tag{8.2}$$

Donde t_0 corresponde al instante que la interfaz registra el inicio del movimiento ³ en este instante $h_0 = h(t_0)$ corresponde a la altura inicial que tiene m_2 ⁴, por último, mediante el empleo de la ecuación (8.1) se obtiene la posición angular θ_i de la polea con respecto a la vertical.

8.2 Procesamiento del registro de los datos experimentales

Los datos recolectados experimentalmente constituyen 51 registros de parejas (t_i, θ_i) de un total de 93, este conjunto de datos es el resultado final de la aplicación de la regla de transformación de coordenadas dadas por las ecuaciones (8.2) al conjunto de datos primarios (τ_i, h_i) registrados por el sensor acústico. A partir de este registro de 51 mediciones experimentales se puede obtener la gráfica discreta del comportamiento de la variable angular θ de la polea en función del tiempo t , tal como lo muestra la figura 8.4.



Comportamiento de los datos experimentales (t, θ)

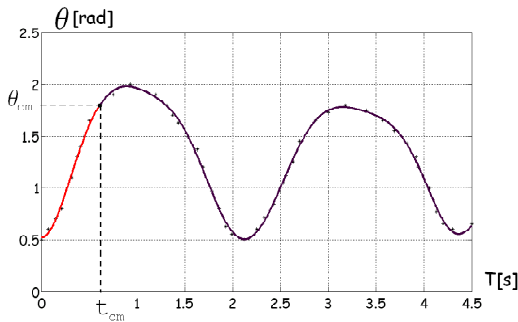
Figura 8.4

³Para $i = 1$ se tiene la primera lectura, por lo que $\tau_1 = t_0$ y $t_1 = t_0$.

⁴Para la primera lectura $h_1 = h(t_0)$ y $s_1 = 0$.

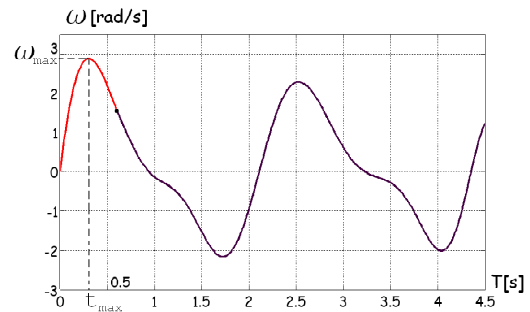
8.3 Comportamiento dinámico-experimental del SMR durante los procesos de falla y de posfalla

Con el conjunto de datos de la tabla 8.1 se realiza un proceso de ajuste a una función polinómica de grado ocho, este proceso de ajuste se realiza dividiendo el dominio del tiempo total en dos partes, el primero durante el intervalo del proceso de falla y el segundo para el intervalo de posfalla. Estos procedimientos numéricos se realizan por medio de las funciones definidas en **Matlab**. La figura 8.5 muestra, de manera conjunta, tanto la gráfica de los datos experimentales (t_i, θ_i) como el ajuste a una función polinómica continua de grado 8 para estos datos, también se distingue la separación de los dos intervalos el de falla $[0, t_{cm}]$ y el de posfalla $(t_{cm}, 4.5]$, donde $t_{cm} = 0.6$ [s] corresponde al acoplamiento de la masa m_2 al **SMR**.



Ajuste de los datos experimentales (t, θ) a una función continua

Figura 8.5



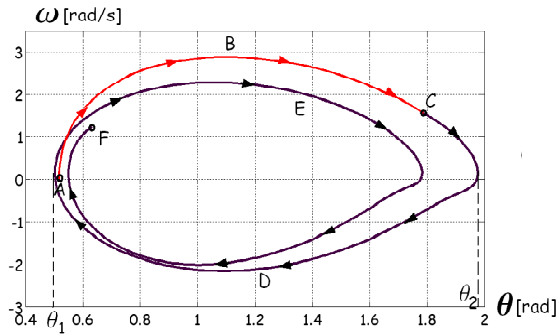
Gráfica de la velocidad angular de la polea a partir de la función ajustada (t, θ)

Figura 8.6

Posteriormente, a la función polinómica ajustada que determina la posición angular θ en términos del tiempo se aplica un método numérico implementado en **Matlab** para obtener la derivada de esta función. El resultado de esta operación corresponde a la obtención de la velocidad angular ω en función del tiempo. Después de evaluar esta función para el mismo dominio de la variable tiempo se obtiene la gráfica que determina el comportamiento cinemático de esta variable en función del tiempo.

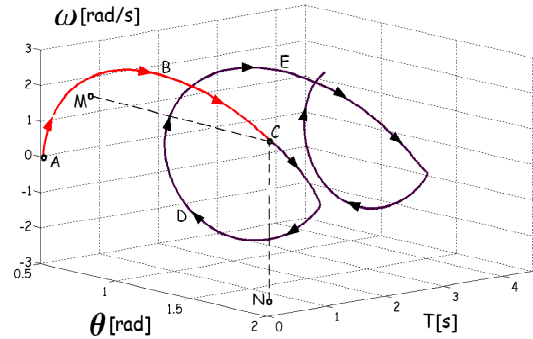
Luego teniendo como base el conjunto de datos ajustados (t_i, θ_i) y (t_i, ω_i) se pueden

obtener las gráficas del plano de fase y del espacio de estados, tal como se ilustra en las figuras 8.7 y 8.8.



Plano de fase (θ, ω) a partir de las funciones ajustadas (t, θ) y (t, ω)

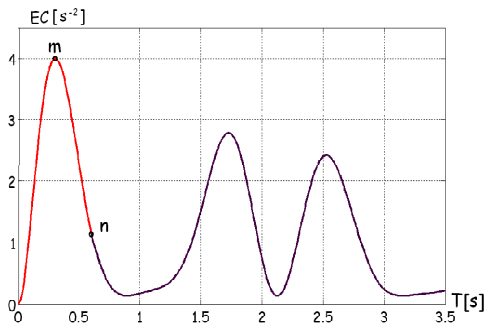
Figura 8.7



Espacio de estados en R_3 para (θ, t, ω)

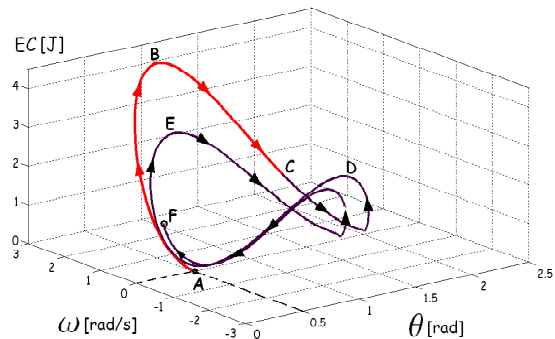
Figura 8.8

Las propiedades de la energía cinética *normalizada*⁵ en función del tiempo y, en función de la posición y de la velocidad angular se muestran en las figuras 8.9 y 8.10



Gráfica de la energía cinética en función del tiempo

Figura 8.9



Gráfica de la energía cinética en R_3 en función de θ y ω

Figura 8.10

⁵La energía cinética normalizada dada por el término $\frac{1}{2}\omega^2$, donde ω corresponde a la rapidez angular de la polea, se puede transferir a cualquier cuerpo del **SMR**. Por ejemplo para obtener la energía cinética de la masa m_2 simplemente se multiplica este término $\frac{1}{2}\omega^2$ por $m_2 r^2$ donde r es el radio de la polea.

8.4 Descripción de las cantidades físicas obtenidas a partir de los resultados experimentales

Los valores de las masas empleados en el **SMR** son los que se calcularon en el proceso de diseño efectuado en subcapítulo 6.2.

$$m_1 = 0.1 [kg], m_2 = 1 [kg], m_3 = 0.221 [kg], m_p = 1.484 [kg], m_B = 0.386 [kg]$$

$$r = 0.1 [m], l_B = 0.438 [m]$$

En las gráficas de la figura 8.5 y 8.6 se incluyen algunos datos experimentales de interés, tales como:

<p>Punto de equilibrio de prefalla estable</p> $\theta_{pre} = 0.51[rad] \text{ y } \omega_{pre} = 0[\frac{rad}{s}]$ <p>Tiempo de conexión de la masa m_3 al SMR</p> $t_c = 0.6[s] \text{ en este instante } \theta = 1.78[rad]$ <p>Magnitud máxima del <i>swing</i> mecánico</p> $\theta_{min} = 0.5[rad] \text{ y } \theta_{max} = 1.9[rad]$ $\therefore \Delta\theta = \theta_{max} - \theta_{min} = 1.4[rad]$

En la figura 8.6 se pueden observar que para $t_c = 0.6[s]$, instante el que se conecta la masa m_3 al **SMR**, se tiene $\omega_c = 1.58[\frac{rad}{s}]$ así como el instante $t = 0.3[s]$ para la cual sucede la rapidez máxima de la polea $\omega_{max} = 2.8[\frac{rad}{s}]$.

Con relación al plano de fase de la figura 8.7 se muestra la trayectoria $A \rightarrow B \rightarrow C$ correspondiente al proceso de falla mecánica antes del acoplo de la masa m_3 al sistema, seguida de la trayectoria $C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F$ del proceso de posfalla mecánica. Estas mismas trayectorias se muestran en el espacio de estados de la figura 8.8, los puntos M y N corresponden a la velocidad y posición angular en el instante en el que se produce la bifurcación *falla*→*posfalla* en el estado correspondiente al punto C de dicha trayectoria.

La gráfica de la figura 8.9 muestra el comportamiento de la energía cinética normalizada durante el período $0 \leq t \leq 4$ [s]. El punto m corresponde al instante en que ocurre el valor máximo de esta propiedad física y el punto n donde se produce a bifurcación *falla*→*posfalla*. La figura 8.10 muestra esta misma propiedad energética asociadas a las trayectorias de falla y posfalla descritas en función de θ y ω .

A continuación se consignan algunas mediciones y cantidades físicas de interés

Punto de equilibrio de prefalla estable

$$\theta_{pre} = 0.51[rad] \text{ y } \omega_{pre} = 0[\frac{rad}{s}]$$

Tiempo de conexión de la masa m_3 al **SMR**

$$t_c = 0.6[s] \text{ para este instante } \begin{cases} \theta = 1.78[rad] \\ \omega = 1.58[\frac{rad}{s}] \end{cases}$$

Con relación al *swing* mecánico

$$\theta_{min} = 0.5[rad] \text{ y } \theta_{max} = 1.9[rad] \therefore \Delta\theta = \theta_{max} - \theta_{min} = 1.4[rad]$$

Velocidad angular máxima de la polea

$$\omega_{max} = 2.8 [\frac{rad}{s}] \text{ en } t = 0.3[s]$$

De donde se obtiene la energía cinética máxima de la polea

$$EC_{max} = 4 [s^{-2}] \text{ en } t = 0.3[s]$$

Conclusiones

El proceso de análisis de los elementos conceptuales que intervienen en el fenómeno de estabilidad de los dos sistemas, **SMR** y **SEP**, permitió acotar el alcance explicativo de la estructura analógica establecida entre ellos, reducir al mínimo sus elementos constitutivos y lograr una representación, relativamente sencilla del modelado matemático, para poder explicar la estabilidad transitoria del **SEP** por medio del **SMR**. La dinámica de sistemas no lineales permitió estudiar conexiones en ambos sistemas aparentemente distantes e inconexos y contribuyó a la aplicación de una variante de estudio interdisciplinario con la que fue posible esclarecer la correspondencia analógica entre estos dos modelos.

El proceso de diseño del **SMR** se efectuó considerando las cualidades del modelo matemático del **SEP** en correspondencia con los cambios de los parámetros que intervienen en las etapas de prefalla, falla y posfalla. El análisis en cada una de estas etapas indicó el tipo de modificaciones que debían efectuarse al modelo mecánico de Elgerd, con el fin de proporcionar la mejor semejanza posible con las condiciones del proceso de falla trifásica del **SEP**. Es importante mencionar que estas modificaciones efectuadas no estuvieron sujetas a un método específico ni mucho menos una lógica que guiara este proceso. Estas modificaciones, constituyen la clave del **SMR** propuesto y fueron las siguientes:

- a) La condición de equilibrio o de prefalla al añadir las dos masas m_0 y m_1
- b) El efecto de falla al cortar el hilo que sostiene la masa m_0 , y
- c) La condición de posfalla al adicionar la masa m_3 un poco después del evento anterior.

El resultado de estos cambios, en consonancia con un análisis de comparaciones y similitudes en ambos modelos matemáticos, permitió representar de manera satisfactoria las causas y los efectos externos que se presentan en el fenómeno de estabilidad del **SEP**, desde la perspectiva de un fenómeno mecánico.

Es importante reconocer que el carácter *explicativo* de la analogía propuesta basado en el *razonamiento analógico* tiene algunas limitaciones que son muy importantes de aclarar, ya que tiene que ver con los conceptos de correspondencias estructurales analógicas *isomórfica* y *equivalente*. La primera correspondencia significa que los parámetros involucrados en los modelos matemáticos guardan una relación *uno a uno* y la segunda quiere decir que los resultados obtenidos en el modelo analógico sean *equivalentes* a los obtenidos en la máquina síncrona. La carencia de estos dos tipos de correspondencias entre el **SEP** y el **SMR** se fundamenta en las siguientes razones:

a) La operación oscilatoria experimental del **SMR** corresponde a un hecho perceptual, observable y hasta cierto punto medible *directamente*; de ninguna manera constituye una *equivalencia* del referente conceptual de la oscilación que ocurre entre los campos magnéticos del estator y del rotor cuando sucede el *swing* de la máquina síncrona en condiciones de falla trifásica. Creer que estas dos oscilaciones son equivalentes implica sobrevalorar la analogía. Por otro lado, la *semejanza* que presenta la oscilación mecánica del **SMR** con el *swing* de la máquina síncrona, subyace en la estructura analógica que ambos sistema presentan en cuanto a la *forma* de sus modelos matemáticos y el *orden* en que cambian sus parámetros durante el disturbio.

b) El **SMR** propuesto no puede tener una correspondencia analógica *isomórfica* de sus parámetros con el modelo el **SEP** en condiciones de falla trifásica. Esto en virtud de que, durante las etapas de prefalla, falla y posfalla, el parámetro K del **SEP** es el único que varía debido al cambio en la estructura de la red eléctrica; los parámetros restantes M , B y P_m permanecen constantes. En contraparte, cuando el **SMR** simula por analogía estas tres etapas del disturbio eléctrico, se tiene que sus parámetros I y M_m varían para cada una de estas condiciones del fallo, mientras que K_m permanece constante, tal como se explica en el subcapítulo 4.2. Esta situación al no satisfacerse hace imposible tener, de manera estricta, una correspondencia *isomórfica*, también conocida como *uno a uno*.

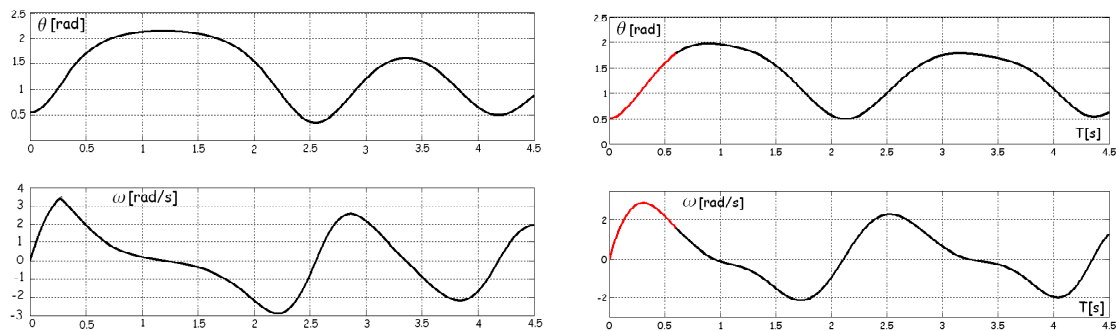
c) Las variables físicas que intervienen en la representación analógica tienen diferencias en la conotación conceptual, este argumento es razonablemente convincente ya que los

postulados y objetos de estudio que rigen los comportamientos del **SEP** y del **SMR** son *totalmente diferentes*, difícilmente se puede aceptar que las leyes de Newton sean equivalentes a las leyes de Maxwell que gobiernan los sistemas electromagnéticos. Por lo que puede afirmarse que la analogía presentada en este trabajo es *aproximada*, como todas las analogías sustentadas en sistemas reales ¹.

Al someter a un proceso de comparación las representaciones gráficas de las soluciones de los modelos matemáticos, tal como se expuso en los subcapítulos 2.2, 6.2 y 7.2, se verificó que los mapeos de la analogía para los diferentes modelos matemáticos de estos dos sistemas guardan una correspondencia cualitativa satisfactoria. .

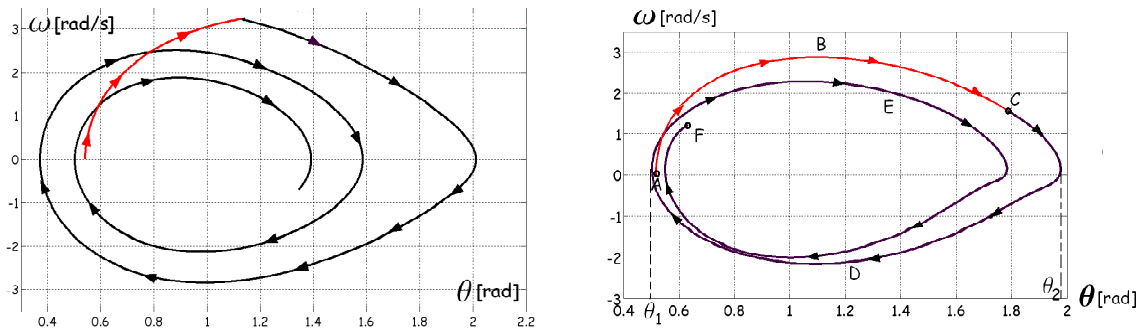
Con relación al funcionamiento experimental del **SMR**, las figuras que se muestran a continuación sirven para realizar un proceso comparativo de las representaciones gráficas más relevantes de este sistema.

La parte izquierda de las figuras corresponde al comportamiento del modelo teórico propuesto, y la parte derecha a las gráficas obtenidas de los datos experimentales. Como se puede observar, las gráficas indican la diferencia de los resultados cuantitativos entre estos dos modelos. Al respecto pueden señalarse las siguientes observaciones:

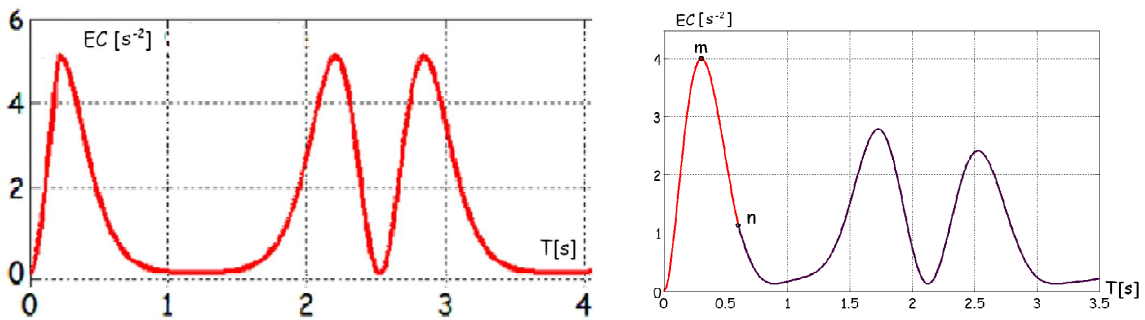


Gráficas de θ y ω en función del tiempo para el **SMR**

¹En toda analogía por el simple hecho de señalar algunas diferencias, sin importar la gran cantidad de coincidencias que puedan existir, se tiene una correspondencia estructural que no es *uno a uno* o *isomórfica*.



Gráficas del plano de fase para el **SMR**



Gráficas de la Energía Cinética para el **SMR**

- a) El efecto de la fricción seca por contacto en el balero del **SMR** es lo suficientemente relevante en el fenómeno como para poder despreciarla.
- b) Los hilos que se enrollan en el canal de la periferia de la polea, deben ser delgados para que puedan enrollarse (o desenrollarse) de manera holgada y, cuando el **SMR** oscila, es muy difícil de mantener el movimiento vertical rectilíneo en las masas translacionales, esta situación provoca que el hilo roce en los bordes del canal de la polea y se genere otro efecto adicional de fricción por contacto al descrito en el inciso a).

Con relación a los resultados cualitativos del comportamiento real del **SMR**, la gráfica generada a partir de los datos experimentales (t_i, θ_i) posee la suficiente coherencia como para poder explicar los resultados que deben esperarse en esta variable angular. Con relación a la gráfica de las parejas (t_i, ω_i) , a pesar de que se obtuvo por medio de métodos numéricos, puede expresarse la misma argumentación. A partir de este proceso comparativo puede concluirse que los *resultados cualitativos* que arroja

el modelo real del **SMR**, son lo suficientemente aceptables como para dirigir y fundamentar explicaciones del fenómeno de estabilidad del **SEP** a partir del concepto de analogía.

Una de las dificultades que quedaron pendientes de resolver en este trabajo fue la carencia de elementos y patrones que permitieran dar un criterio de valoración a la analogía propuesta. La búsqueda de estos aspectos que permiten discriminar la analogía que sea de mayor utilidad dentro del conjunto posible de analogías que puedan establecerse entre dos sistemas, constituye todavía un problema abierto. La gran mayoría de los argumentos encontrados que valoran la calidad de una analogía, contienen un rigor muy relajado y poco convincente. Probablemente el más representativo de todos estos argumentos sea el enunciado por James F. Brulé & Alexander Blount ²: *Una buena analogía es aquella que tan sólo sugiere la información necesaria para que se produzca el nivel de abstracción adecuado que una lo nuevo con lo desconocido.*

²*Knowledge Acquisition, Artificial Intelligence Series*, McGraw Hill, 1989. p62.

Referencias bibliográficas

[1] **Anderson, P.M.**

Power System Protection, IEEE Press Marketing, McGraw-Hill, 1999 by The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. New York, pp 1305.

[2] **Arrillaga, J & Arnold C.P.**

Computer Modelling of electrical power systems, John Wiley & Sons, 1983, reimpresión de junio 1996, pp426.

[3] **Bergen, Arthur R.**

Power System Analysis, Prentice Hall Series in Electrical and Computer Engineering, sf, pp 529.

[4] **Dabney, James B., Harman, Thomas L.**

Mastering Simulink 2, The Matlab Curriculum Series, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 1a edición, 1998, pp150.

[5] **Del Toro, Vincent**

Electric Power Systems, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1a edición, 1992, pp 498.

[6] **Elgerd I., Olle**

Electric Energy Systems Theory, An Introduction, Mc Graw Hill Series in Electrical Engineering, Inc., USA, 2a edición en inglés de 1982, pp 533.

[7] **Fitzgerald, A. E., Kigsley, Charles Jr., D. Umans, Stephen**

Máquinas Eléctricas, Mc Graw Hill, Inc., USA, 5a edición en inglés de 1990, traducido por Virgilio González Pozo, 2a edición en español Mc Graw Hill Interamericana de México, S.A., de C.V.

[8] **Godoy, L. A.**

Sobre la Estructura de las Analogías en Ciencias, Interciencia, Vol. 27, No 8, agosto 2002.

[9] **Golubitsky, Martin, Dellnitz, Michael**

Álgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales con uso de Matlab, Thomson Learning, México, D.F., traducido por Jorge Romo, de la edición de Brooks Cole Publishing Company, 1999, pp 564.

[10] **Hale and Koçak**

Dinamics and Bifurcations, Spring Verlang, New York 1a edición, 1991, pp 568.

[11] **Hesse, M. B.**

Models and Analogies in Science, University of Notre Dame Prees. Notre Dame. IL 148pp

[12] **Hirsch, Morris W., Smale, Stephen**

Differential Equations, Dinamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, A Hercourt Science and Technology Company, San Diego, Cal. USA, 1974, pp 354.

[13] **Meisel, Jerome,**

Principios de Conversión de Energía Electromecánica, Mc Graw-Hill de México S.A.,de CV., traducido y adaptado de *Principles of Electromechanical Energy Conversion*, edición de 1966 Mc Graw Hill inc., USA, por Carlos Navarro Garrido y José María Bañeres Barril, edición de 1975 en español, pp 647.

[14] **Sastry, Shankar.**

Nonlinear System Analysis, Stability and Control, Berkeley California, 1999, pp 667

Anexo del Capítulo 1

En este apartado se determinarán dos modelos matemáticos: a) el modelo simplificado de la máquina síncrona conectada al sistema eléctrico externo, b) el modelo del *swing* para analizar la estabilidad transitoria.

A1.1 El modelo simplificado para la máquina de dos ejes

Este modelo constituye un modelo para el generador síncrono y el sistema externo basado en las siguientes consideraciones:

1. Se omite la saturación magnética
2. Se asume que no existen pérdidas
3. Únicamente se analiza el caso de la operación en condiciones de falla trifásica

En estado de régimen balanceado trifásico, el diagrama fasorial de la máquina de dos ejes se muestra en la figura A1.1.

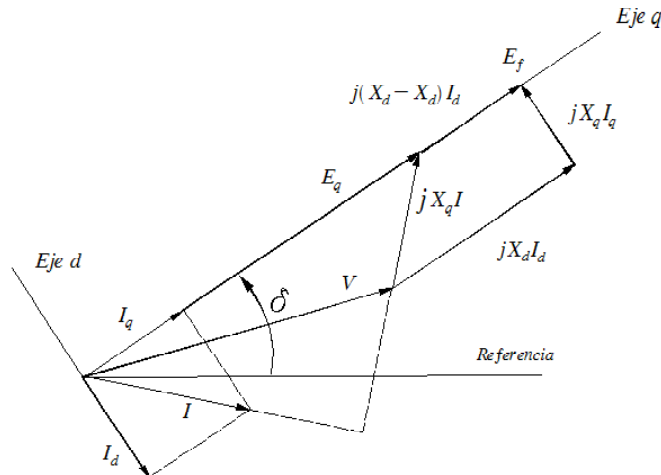


Figura A1.1

Diagrama fasorial para el estado permanente
del generador síncrono

$$\begin{aligned}\tilde{E}_f &= \tilde{V} + jX_q\tilde{I}_q + jX_d\tilde{I}_d \\ \tilde{I} &= \tilde{I}_d + \tilde{I}_q\end{aligned}$$

Donde

- \tilde{E}_f : Fasor del voltaje interno generado, localizado en el eje q
- \tilde{V} : Fasor del voltaje en las terminales del generador
- \tilde{I} : Fasor de la corriente en las terminales del generador
- \tilde{I}_d : Componente fasorial de la corriente \tilde{I} en el eje directo
- \tilde{I}_q : Componente fasorial de la corriente \tilde{I} en el eje de cuadratura
- X_d : Reactancia síncrona de eje directo
- X_q : Reactancia síncrona de eje de cuadratura

Todos los voltajes están en pu y las corrientes y voltajes son de secuencia positiva.

Si el voltaje \tilde{V} y la corriente \tilde{I} son conocidas, un procedimiento para determinar las otras propiedades eléctricas restantes es el siguiente

$$\begin{aligned}\tilde{E}_f &= \tilde{V} + jX_q\tilde{I}_q + jX_d\tilde{I}_d \\ &= \tilde{V} + jX_q(\tilde{I} - \tilde{I}_d) + jX_d\tilde{I}_d\end{aligned}$$

Al definir

$$\tilde{E}_q = \tilde{V} + jX_q\tilde{I} \tag{1}$$

Se tiene

$$\tilde{E}_f = \tilde{E}_q + j(X_d - X_q)\tilde{I}_d$$

Características del cálculo :

\tilde{E}_q puede ser calculado directamente a partir de (1) con \tilde{V} e \tilde{I} conocidos.

\tilde{E}_q es colineal y tiene la misma orientación con \tilde{E}_f , es decir está localizado en el eje q ,

por lo tanto tiene el mismo ángulo de fase δ , es decir $\tilde{E}_q = E_q \angle \delta$.

Con el fasor \tilde{E}_q conocido se determina el ángulo δ , la corriente \tilde{I}_d puede ser calculada y por lo tanto \tilde{E}_f determinado.

En condiciones transitorias la reactancia transitoria de eje directo X'_d se utiliza en lugar de X_d , donde $X'_d < X_d$, en estas mismas condiciones se considera $X'_q \approx X_q$. Al cambiar de magnitud X_d , se tiene el siguiente diagrama fasorial en la figura A1.2.

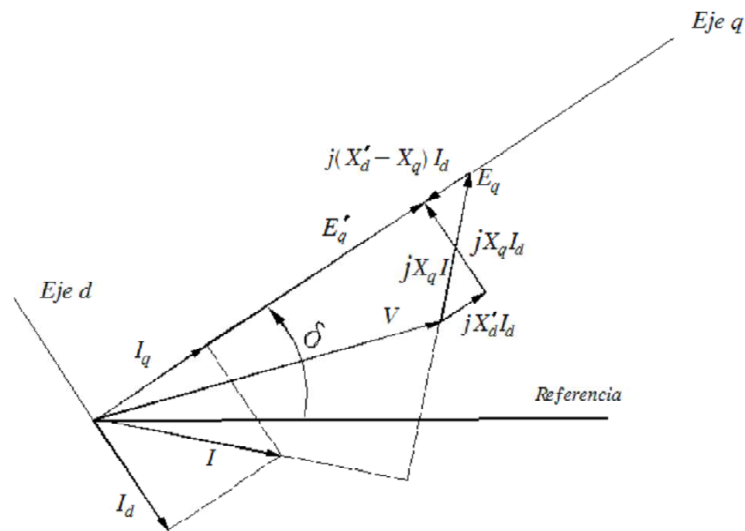


Figura A1.2

Diagrama fasorial para el estado transitorio
del generador síncrono

Los cálculos para la determinación de \tilde{E}'_q se indican a continuación.

$$\tilde{E}'_q = \tilde{V} + jX_q \tilde{I}_q + jX'_d \tilde{I}_d$$

Pero

$$\tilde{I}_q = \tilde{I} - \tilde{I}_d$$

$$\tilde{E}'_q = \tilde{V} + jX_q (\tilde{I} - \tilde{I}_d) + jX'_d \tilde{I}_d$$

$$= \tilde{V} + jX_q\tilde{I} + j(X'_d - X_q)\tilde{I}_d$$

Al sustituir la ecuación (1) en la ecuación anterior

$$\tilde{E}'_q = \tilde{E}_q + j(X'_d - X_q)\tilde{I}_d$$

Recordar que

$$X_q > X'_d$$

Es por esta razón que $j(X'_d - X_q)\tilde{I}_d$ tiene la dirección contraria tanto a \tilde{E}'_q como a \tilde{E}_q , para el caso particular en el cual $X'_d = X_q$

$$\begin{aligned} \tilde{E}'_q &= \tilde{E}_q \\ &= \tilde{V} + jX_q\tilde{I} \\ &= \tilde{V} + jX'_d\tilde{I} \end{aligned}$$

Esta ecuación se deriva del circuito equivalente que se muestra en la figura A1.3, el cual corresponde al modelo simplificado de generador en condiciones transitorias.

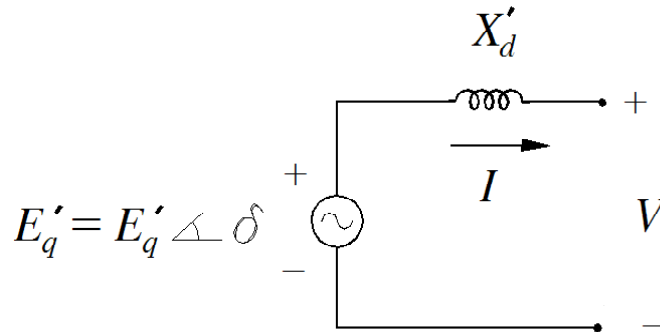


Figura A1.3

Circuito equivalente del modelo simplificado

A1.2 La ecuación del *swing* de la máquina síncrona

Durante el transitorio debido a una falla trifásica, la flecha que acopla la turbina con el generador se acelera y se tiene que la expresión de la conservación de la potencia instantánea en el acoplamiento *turbina-generador* esta dada por

$$P_m - P_e(\delta) - P_k = \frac{d}{dt}W_k \quad (2)$$

Donde

- P_m : Es la potencia mecánica de la flecha, la cual prácticamente permanece constante durante el disturbio
- $P_e(\delta)$: Potencia eléctrica trifásica generada
- P_k : Pérdidas debido a la fricción viscosa e histéresis
- ω_r : Velocidad angular de la flecha
- W_k : Energía cinética en todas las partes rotatorias del sistema

$$P_k = T_B\omega_r = (D\omega_r)\omega_r = D\omega_r^2 \quad (3)$$

$$W_k = \frac{1}{2}J\omega_r^2$$

Al cambiar la referencia fija con la que se miden las velocidades angulares ω_r y ω_s a la referencia móvil que tiene una velocidad angular ω_{ref} , tal como lo muestran los fasores

de los campos del rotor y estator en la figura A1.4.

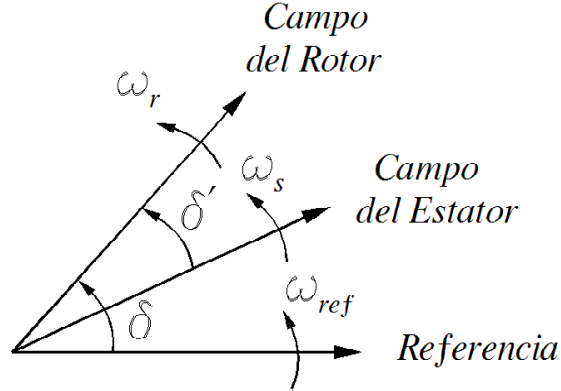


Figura A1.4

Fasores de los campos del rotor y estator

Se tiene que la cantidad angular

$$\omega = \frac{d\delta}{dt} = \omega_r - \omega_{ref} \quad (4)$$

Esta variable establece que en condiciones de estado permanente cuando $\omega_{ref} = \omega_r$, los ángulos δ y δ' permanecen constantes y la variación en ambos es nula, por otro lado, durante un disturbio ocasionado por una falla, bajo las mismas condiciones donde $\omega_{ref} = \omega_s$ se tiene $\omega_r > \omega_{ref}$ y los ángulos δ y δ' tendrán una variación diferente de cero, la cual es justamente la que se desea analizar. La variación del ángulo δ , la cual se conoce como *swing* de la máquina síncrona en condiciones de falla trifásica.

La variación de la energía cinética en todas las partes rotatorias del sistema se expresa

$$\frac{d}{dt}W_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \omega_r^2 \right) = J \omega_r \frac{d\omega_r}{dt}$$

Al despejar ω_r de (4) y sustituir este resultado en la ecuación anterior

$$\frac{d}{dt}W_k = J (\omega + \omega_{ref}) \frac{d}{dt} (\omega + \omega_{ref})$$

Dado que

$$\omega_{ref} \gg \omega$$

$$\frac{d}{dt}W_k = J\omega_{ref}\frac{d}{dt}(\omega + \omega_{ref}) \quad (5)$$

De la misma forma, al sustituir ω_r en la expresión (3)

$$P_k = D\omega_r^2 = D(\omega + \omega_{ref})^2 = D(\omega^2 + 2\omega\omega_{ref} + \omega_{ref}^2)$$

Pero

$$2\omega\omega_{ref} + \omega_{ref}^2 \gg \omega^2$$

$$P_k = D(2\omega\omega_{ref} + \omega_{ref}^2) \quad (6)$$

Al sustituir (5) y (6) en (2)

$$P_m - P_e(\delta) - D(2\omega\omega_{ref} + \omega_{ref}^2) = J\omega_{ref}\frac{d}{dt}(\omega + \omega_{ref})$$

Al definir

$$\bar{P}_m = P_m - D\omega_{ref}^2$$

Como la potencia mecánica en la turbina después de las pérdidas por fricción, la cual experimentalmente tiene la característica de que prácticamente $\bar{P}_m = P_m$ ya que

$$P_m \gg D\omega_{ref}^2$$

La ecuación queda

$$P_m - P_e(\delta) - 2D\omega\omega_{ref} = J\omega_{ref}\frac{d}{dt}(\omega + \omega_{ref})$$

Al normalizar la ecuación anterior y dividiéndola entre la potencia trifásica generada

$$\frac{P_m}{S_{3\phi}} - \frac{P_e(\delta)}{S_{3\phi}} - \frac{2D\omega_{ref}\omega}{S_{3\phi}} = \frac{J\omega_{ref}}{S_{3\phi}}\frac{d}{dt}(\omega + \omega_{ref}) \quad (7)$$

Pero la energía cinética rotacional antes de la falla está dada por

$$W_k = \frac{1}{2} J \omega_{syn_m}^2$$

Donde ω_{syn_m} es la rapidez angular de la flecha en estado estacionario. Al despejar el momento de inercia en la ecuación anterior se tiene

$$J = \frac{2W_k}{\omega_{syn_m}^2}$$

Al sustituir este valor en (7)

$$P_{mpu} - P_e(\delta)_{pu} - \left(\frac{2D\omega_{ref}}{S_{3\phi}} \right) \omega = \left(\frac{2W_k}{\omega_{syn_m}^2} \right) \frac{\omega_{ref}}{S_{3\phi}} \frac{d}{dt} (\omega + \omega_{ref})$$

Por otro lado al introducir la constante llamada *energía cinética normalizada* [s]

$$H = \frac{W_k}{S_{3\phi}}$$

$$P_{mpu} - P_e(\delta)_{pu} - \left(\frac{2D\omega_{ref}}{S_{3\phi}} \right) \omega = \left(\frac{2H}{\omega_{syn_m}^2} \right) \omega_{ref} \frac{d}{dt} (\omega + \omega_{ref})$$

Ahora bien, si se considera que la referencia

$$\omega_{ref} = \omega_{syn_m} = \text{constante}$$

$$P_{mpu} - P_e(\delta)_{pu} - \left(\frac{2DB\omega_{syn_m}}{S_{3\phi}} \right) \omega = \left(\frac{2H}{\omega_{syn_m}} \right) \frac{d\omega}{dt}$$

Por último

$$\omega_{syn_m} = 2\pi f_{syn_m}$$

$$P_{mpu} - P_{epu} - \left(\frac{4\pi D f_{syn_m}}{S_{3\phi}} \right) \omega = \left(\frac{H}{\pi f_{syn_m}} \right) \frac{d\omega}{dt}$$

Al llamar

$$B = \frac{4\pi D f_{syn_m}}{S_{3\phi}}, \quad M = \left(\frac{H}{\pi f_{syn_m}} \right) \quad \text{y dado que } \omega = \frac{d\delta}{dt}$$

$$P_m - P_u - B \frac{d\delta}{dt} = M \frac{d^2\delta}{dt^2} \quad 1$$

$$M \frac{d^2\delta}{dt^2} + B \frac{d\delta}{dt} = P_m - P_u$$

La cual se puede expresar como un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{M} (P_m - P_u) - \frac{B}{M} \omega \end{cases}$$

Luego $P_u = P_e = \frac{E'_q E}{X'_d + X} \text{sen} \delta$ y al definir $K = \frac{E'_q E}{X'_d + X}$ se tiene

$$\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{M} (P_m - K \text{sen} \delta) - \frac{B}{M} \omega \end{cases}$$

Anexo del Capítulo 2

A2.1 Sistema dinámicos lineales y no lineales

Se asume que el lector tiene cierta familiaridad con los conceptos básicos relacionados con el estudio los *sistemas dinámicos no lineales* (Sastry, Shankar [14]), tales como puntos de equilibrio hiperbólico y no hiperbólico, sistema autónomo, campo vectorial, trayectoria o flujo, plano de fase y sus representaciones gráficas para sistemas lineales de segundo orden como: nodo, focos atractores y repulsores, centro, puntos silla y ciclos límite; así como algunas definiciones matemáticas importantes de estabilidad uniforme y asintótica.

Como es sabido, el modelo matemático de la máquina síncrona lo determina una ecuación *no lineal de segundo orden*. Con el fin de dar contexto a las ideas que se expondrán más adelante y establecer su alcance, es necesario poner en claro algunas diferencias que existen entre los sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden lineales y no lineales.

La distinción entre las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales de segundo orden se pueden establecer a partir de muchos criterios (Hirsch, Morris W., Smale, Stephen [12]), por ejemplo, en lo relativo a los puntos de equilibrio de los sistemas lineales puede asegurarse que en todos los casos prácticos siempre existe *un sólo punto de equilibrio*; mientras que para el caso no lineal, pueden existir hasta un número infinito. En lo referente a las *trayectorias del plano de fase* para el caso lineal, aunque pueden tenerse *trayectorias cíclicas*, no existen *ciclos límite* mientras que para el caso no lineal es posible la existencia de uno o varios. Ahora bien, en el caso muy especial de sistemas de segundo orden lineales de parámetros constantes las trayectorias están debidamente *tipificadas* por las características del único punto de equilibrio que pueden poseer; mientras que para los no lineales no sucede esta situación sencilla y esquemática, ya que

las trayectorias del plano de fase asociados a los diferentes puntos de equilibrio, tienen la necesidad de *compartir lugares geométricos* entre sí. Sin embargo, a pesar de estas diferencias, también existen coincidencias afortunadas, y una de ellas es que el *estudio preliminar* de los sistemas no lineales es necesario efectuarlo ¹ a partir de sistemas lineales, ya que al poder efectuar un proceso de linealización del sistema no lineal cerca de los puntos de equilibrio es posible deducir, en algunos casos, características cualitativas acerca del *tipo de estabilidad* y propiedades locales acerca de las denominadas *variedades estables*, siempre y cuando sea posible ponderar si la linealización preserva localmente la estructura de las trayectorias del sistema no lineal (Hirsch, Morris W., Smale, Stephen, [12]).

A2.2 Bifurcaciones en un sistema dinámico

En un contexto general el modelado matemático de una gran cantidad de sistemas físicos *autónomos* lineales y no lineales (Hirsch, Morris W., Smale, Stephen [12]), se realiza por medio del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en \mathbf{R}_2 , cuya expresión vectorial esta dada por

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\end{aligned}$$

Las funciones f y g forman parte de un espacio vectorial de funciones que deben de satisfacer las condiciones de *Lipschitz*, es decir, que tengan solución única en cada punto, contínuas y dos veces diferenciable. estas propiedades garantizan que la representación de sus soluciones en el plano de fase tengan trayectorias que *no se crucen entre sí*.

Las *variables dinámicas* asociadas al sistema anterior son x_1 y x_2 , mientras que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son parámetros que al cambiar gradualmente inciden también en el cambio de la representación del plano de fase. Ahora bien, cuando el cambio de uno o varios de

¹Quizá el criterio mas racional sea de índole didáctico.

estos parámetros ocasiona un cambio drástico en el comportamiento del plano de fase del sistema, a este cambio abrupto se denomina *bifurcación*. Para el caso particular del modelo de la máquina síncrona se tiene que las variables dinámicas son la posición δ y la velocidad angular ω del rotor, mientras que M , B , K y P_m son los parámetros.

Durante el intervalo de tiempo en el que sucede la falla trifásica la respuesta del sistema eléctrico es mucho más rápida que la del sistema mecánico ². Tomando en cuenta este aspecto, durante este proceso de falla prácticamente se tiene que la velocidad angular en el generador $\omega_{syn} = cte$. Los momentos de inercia de todas las partes rotatorias del sistema y el parámetro M también se consideran constantes, obviamente el número de polos y la potencia base también permanecen constantes. El parámetro P_m constituye la potencia mecánica que suministra la turbina a la máquina síncrona, la cual también se considera constante dado que los dispositivos de control de la turbina tienen respuestas en intervalos de tiempo mucho mayores cuando sucede el disturbio eléctrico. El parámetro B también puede considerarse constante y por último, el parámetro K constituye la excepción, *no puede considerarse constante* ya que este término está contenido en la ecuación del flujo de potencia a través de la reactancia X que une el bus infinito con la máquina síncrona, cuyo valor va a depender del cambio que se tenga en la estructura de la red durante el proceso del fallo. Así pues, el cambio en el parámetro K será determinante en lo referente a la estabilidad del sistema, por lo que tendrá que analizarse de manera conjunta con el análisis de la ecuación diferencial que modela a este sistema. En otras palabras, la estabilidad del sistema dependerá de los valores que adquiera el parámetro K durante la falla así como de las condiciones iniciales propias del sistema, por lo que el planteamiento, el análisis y la solución de este fenómeno tendrá su fundamento en el contexto de un *sistema dinámico de segundo orden con bifurcaciones*.

El problema de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales del *swing* conjuntamente

²En un sistema eléctrico de potencia convencional el proceso de una falla trifásica tiene una duración menor a un segundo, en este intervalo de tiempo, la velocidad angular mecánica de la máquina se ve alterada en un porcentaje del 1% al 2%, por lo que prácticamente puede considerarse constante.

con los cambios del parámetro K consiste en dar respuesta a un modelo matemático de un *sistema dinámico con bifurcaciones*; es decir, analizar las cualidades de la solución específica acorde a las variaciones posibles de este parámetro. Para esto deberán considerarse las siguientes posibilidades: a) $P_m < K$, b) $P_m = K$ y c) $P_m > K$, se excluyen las posibilidades de que $K = 0$ o $P_m = 0$, o bien que estos valores sean negativos ya que carecen de sentido físico en el modelo de la máquina síncrona.

A2.3 Obtención de K y Z entre los buses en los estados de *prefalla, falla y posfalla*

Para el estado de prefalla

Con relación a la figura A2.1, el voltaje de Thevenin en el nodo 3 se obtiene calculando el voltaje de circuito abierto en el nodo 3

$$V_{th} = V$$

La impedancia equivalente de Thevenin en los extremos del generador se obtiene de la siguiente manera: se pone en corto circuito el nodo 1 y posteriormente se calcula $Z_{th} = Z_{pre}$ entre los extremos del generador, es decir entre el nodo 3 y tierra.

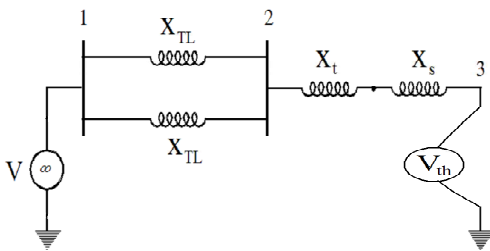


Figura A2.1

Voltaje e impedancia de Thevenin para estado de prefalla

$$Z_{th} = Z_{TL} // Z_{TL} + Z_t + Z_s = \frac{1}{2} Z_{TL} + Z_t + Z_s = \left(\frac{1}{2} X_{TL} + X_t + X_s \right) i$$

De donde

$$X_{th} = \left(\frac{1}{2} X_{TL} + X_t + X_s \right)$$

Por otro lado

$$K_{pre} = \frac{V_{th} E_f}{X_{th}} = \frac{V E_f}{\left(\frac{1}{2} X_{TL} + X_t + X_s \right)} \quad (1)$$

Luego

$$X_{pre} = \frac{1}{2} X_{TL} + X_t + X_s \quad (2)$$

Para el estado de falla

Se procede de manera análoga a como se indicó en el estado de prefalla

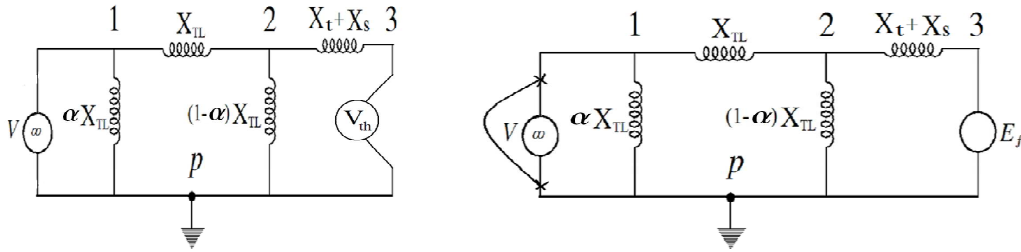


Figura A2.2

Voltaje e impedancia de Thevenin para estado de falla

Con relación a la figura A2.2 de la parte izquierda, el voltaje de circuito abierto en el nodo 3

$$V_{th} = \left(\frac{V}{Z_{TL} + Z_{TL}(1-\alpha)} \right) Z_{TL}(1-\alpha) = \frac{(1-\alpha)}{(2-\alpha)} V$$

La impedancia de Thevenin, después de poner en corto circuito el nodo 1, en el circuito de la parte derecha

$$Z_{th} = Z_{TL} // (1-\alpha) Z_{TL} + Z_t + Z_s = \frac{(1-\alpha) Z_{TL} Z_{TL}}{(1-\alpha) Z_{TL} + Z_{TL}} + Z_t + Z_s$$

$$Z_{th} = \frac{(1-\alpha) Z_{TL}}{(2-\alpha)} + Z_t + Z_s = \frac{(1-\alpha) Z_{TL} + (2-\alpha)(Z_t + Z_s)}{(2-\alpha)}$$

Por lo que

$$X_{th} = \frac{(1-\alpha) X_{TL} + (2-\alpha)(X_t + X_s)}{(2-\alpha)}$$

Luego

$$K_f = \frac{V_{th} E_f}{X_{th}} = \frac{(1 - \alpha)}{(1 - \alpha) X_{TL} + (2 - \alpha) (X_t + X_s)} V E_f$$

De donde

$$K_f = \frac{1}{X_{TL} + \frac{(2-\alpha)}{(1-\alpha)} (X_t + X_s)} V E_f \quad (3)$$

Y

$$X_f = X_{TL} + \frac{(2 - \alpha)}{(1 - \alpha)} (X_t + X_s) \quad (4)$$

Para el estado de posfalla

Con relación a la figura A2.3 de la parte izquierda

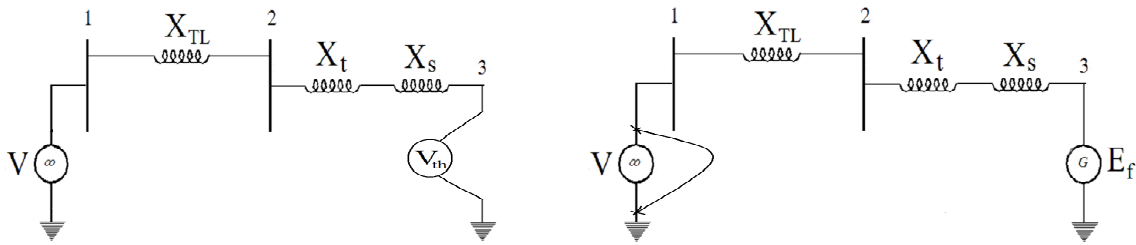


Figura A2.3

Voltaje e impedancia de Thevenin para estado de posfalla

$$V_{th} = V$$

$$X_{th} = X_{TL} + X_t + X_s$$

$$K_{pf} = \frac{V_{th} E_f}{X_{th}} = \frac{V E_f}{X_{TL} + X_t + X_s} \quad (5)$$

De donde

$$X_{pf} = X_{TL} + X_t + X_s \quad (6)$$

Al comparar las ecuaciones (2) y (6)

$$X_{pre} = \frac{1}{2} X_{TL} + X_t + X_s \quad \text{y} \quad X_{pf} = X_{TL} + X_t + X_s$$

Se puede establecer que

$$X_{pf} > X_{pre} \quad (7)$$

Al comparar las ecuaciones (2) y (4)

$$X_{pre} = \frac{1}{2}X_{TL} + X_t + X_s \quad \text{y} \quad X_f = X_{TL} + \frac{(2-\alpha)}{(1-\alpha)}(X_t + X_s)$$

$$X_{TL} > \frac{1}{2}X_{TL} \quad \text{y} \quad \frac{(2-\alpha)}{(1-\alpha)}(X_t + X_s) > X_t + X_s \quad \text{ya que} \quad \frac{(2-\alpha)}{(1-\alpha)} > 1$$

Por lo que

$$X_f > X_{pre} \quad (8)$$

Por otro lado al comparar las ecuaciones (6) y (4)

$$X_{pf} = X_{TL} + (X_t + X_s) \quad \text{y} \quad X_f = X_{TL} + \frac{(2-\alpha)}{(1-\alpha)}(X_t + X_s)$$

$$X_{TL} = X_{TL}, \text{ pero } \frac{(2-\alpha)}{(1-\alpha)} > 1$$

$$X_f > X_{pf} \quad (9)$$

De las desigualdades (7), (8) y (9) se puede concluir que las reactancias en los tres estados cumplen que

$$X_f > X_{pf} > X_{pre}$$

De manera recíproca, a partir de estas desigualdades, también se verifica que los valores de K dados por (1), (3) y (5)

$$K_{pre} > K_{pf} > K_f$$

Anexo del Capítulo 4

A4.2 Obtención del modelo matemático del Sistema Mecánico Rotacional (SMR)

En este apartado se obtendrá el modelo matemático que determina el comportamiento dinámico del **SMR** propuesto para que a través de este modelo matemático se pueda establecer una correspondencia analógica funcional con el **SEP**. En este desarrollo se obtendrá un modelo matemático general a partir de la aplicación de la ecuación de Lagrange (Meisel, Jerome [13]) y posteriormente deducir, como casos particulares, los modelos matemáticos para los tres estados mecánicos de *prefalla*, *falla* y *posfalla*. Este procedimiento tiene una ventaja simplificatoria, ya que no es necesario obtener el modelo matemático por separado para cada uno de estos estados.

Con relación al sistema mecánico que se muestra en la figura A4.1

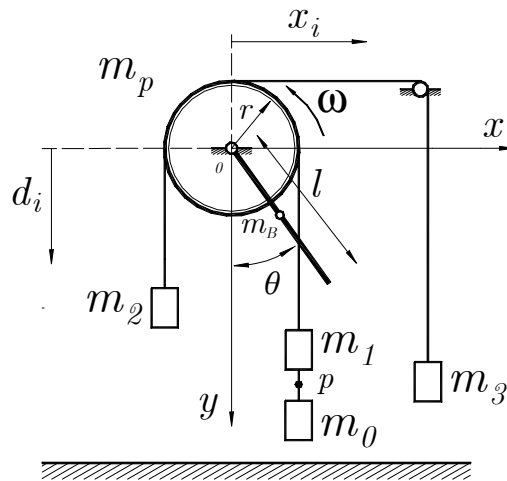


Figura A4.1

Modelo mecánico general

se aplicará la ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{\xi}, \xi, t)}{\partial \dot{\xi}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{\xi}, \xi, t)}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}_k} = \mathbb{Q}_k \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, 3$$

para obtener la ecuación de la la dinámica del sistema mecánico.

El sistema se encuentra inicialmente en reposo, y el ángulo de equilibrio θ_0 puede obtenerse, como ya se mencionó, aplicando las ecuaciones de la Estática.

$$\theta_0 = \text{angsen} \left(\frac{2[m_2 - (m_0 + m_1)r]}{m_B l_B} \right)$$

Para poder determinar la ecuación de movimiento es necesario desequilibrar el sistema mediante un disturbio mecánico, esta perturbación mecánica puede realizarse suponiendo que la masa m_2 se desplaza hacia abajo y luego se suelta sin velocidad inicial. En estas condiciones el sistema se moverá adquiriendo una *energía cinética*, la cual puede expresarse en términos de las coordenadas cartesianas ¹ que determinan la variación de la posición de cada uno de los centros de masa de los cuerpos que componen el sistema. La función de energía cinética está dada por la expresión

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} I_{pc} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{Bc} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \\ & \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{1}{2} m_b (\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2) \end{aligned} \quad (1)$$

Del mismo modo se procede a obtener la función de *energía potencial* dada por la suma de las energías potenciales individuales de cada uno de los cuerpos

$$V = m_B g y_B + m_0 g y_0 + m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + m_3 g y_3 \quad (2)$$

Y la función de *disipación de Raileigh* debido al efecto de fricción viscosa en el eje de

¹Los subíndices de cada una de las coordenadas indica la referencia del cuerpo en cuestión, excepto la variable x_r y la coordenada angular θ . Los términos I_{pc} e I_{Bc} , se refieren a los momentos de inercia centroidales de la polea y de la barra respectivamente.

rotación

$$\mathfrak{F}(\theta) = \frac{1}{2}B_m\dot{\theta}^2 \quad (3)$$

al no existir *fuerzas generalizadas exteriores* se tiene

$$\mathbb{Q}_k = 0 \quad (4)$$

A continuación es necesario expresar las ecuaciones anteriores en términos de coordenadas generalizadas junto con sus derivadas

$$\begin{aligned} y_B &= d_B = \frac{l_B}{2} \cos \theta, & \dot{y}_B &= -\dot{\theta} \frac{l_B}{2} \operatorname{sen} \theta \\ x_B &= \frac{l_B}{2} \operatorname{sen} \theta, & \dot{x}_B &= \dot{\theta} \frac{l_B}{2} \cos \theta \\ x_0 &= x_1 = r, & \dot{x}_0 &= \dot{x}_1 = 0 \\ x_2 &= -r & \dot{x}_2 &= 0 \\ y_0 &= d_0 - r\theta, & \dot{y}_{m_0} &= -r\dot{\theta} \\ y_1 &= d_1 - r\theta, & \dot{y}_{m_1} &= -r\dot{\theta} \\ y_2 &= d_2 + r\theta, & \dot{y}_2 &= r\dot{\theta} \\ y_3 &= d_3 - r\theta, & \dot{y}_3 &= -r\dot{\theta} \end{aligned}$$

Al sustituir estas relaciones en (1), (2) y después de simplificar estas expresiones se obtienen, tanto la energía cinética como la potencial en función de la variable generalizada θ y su derivada $\dot{\theta}$

$$T(\dot{\theta}) = \left[\frac{1}{2}(I_{pc} + I_{Bc}) + \frac{1}{8}m_B l_B^2 + \frac{1}{2}(m_0 + m_1 + m_2 + m_3)r^2 \right] \dot{\theta}^2$$

$$V(\theta) = m_0 g(d_0 - r\theta) + m_1 g(d_1 - r\theta) + m_2 g(d_2 + r\theta) + m_3 g(d_3 - r\theta) + m_B g \frac{l_B}{2} \cos \theta$$

La función lagrangiana en términos de la única coordenada generalizada se expresa por

$$\mathfrak{L}(\dot{\theta}, \theta) = T(\dot{\theta}) - V(\theta)$$

$$\mathcal{L}(\dot{\theta}, \theta) = \left[\frac{1}{2}(I_{pc} + I_{Bc}) + \frac{1}{8}m_B l_B^2 + \frac{1}{2}(m_0 + m_1 + m_2)r^2 \right] \dot{\theta}^2 -$$

$$g \left[m_0(d_0 - r\theta) + m_1(d_1 - r\theta) + m_2(d_2 + r\theta) + m_3(d_3 - r\theta) + m_B \frac{l_b}{2} \cos \theta \right]$$

Dado que la ecuación de Lagrange se define de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{\theta}, \theta)}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{\theta}, \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} = \mathbb{Q}_k \quad (5)$$

Para obtener cada uno de los términos que la componen se realizan las siguientes operaciones:

a) Para el primer término

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{\theta}, \theta)}{\partial \dot{\theta}} \right) = \left[(I_{pc} + I_{Bc}) + \frac{1}{4}m_B l_B^2 + (m_0 + m_1 + m_2 + m_3)r^2 \right] \ddot{\theta} \quad (6)$$

b) Para el segundo

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{\theta}, \theta)}{\partial \theta} = -m_B g \frac{l_B}{2} \text{sen} \theta + (-m_0 - m_1 + m_2 - m_3)gr \quad (7)$$

c) Para el tercero

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} = B_m \dot{\theta} \quad (8)$$

Al sustituir (6), (7) y (8) en (5) y ordenar algunos términos se tiene

$$\left[(I_{pc} + I_{Bc}) + \frac{1}{4}m_B l_B^2 + (m_0 + m_1 + m_2 + m_3)r^2 \right] \ddot{\theta} + \frac{1}{2}m_B g l_B \text{sen} \theta +$$

$$(m_0 + m_1 - m_2 + m_3)gr + B_m \dot{\theta} = 0 \quad (9)$$

Dado que los momentos de inercia centroidales de la polea y de la barra están dadas por las expresiones

$$I_{pc} = \frac{1}{2}m_p r^2 \text{ e } I_{Bc} = \frac{1}{12}m_B l_B^2$$

Y con el objeto de simplificar la extensión de la ecuación 9 se definen los siguientes parámetros

$$I \triangleq \frac{1}{2}m_p r^2 + \frac{1}{12}m_B l_B^2 + \frac{1}{4}m_B l_B^2 + (m_0 + m_1 + m_2 + m_3)r^2 \quad (10)$$

$$K_m \triangleq \frac{1}{2}m_B g l_B$$

$$M_m \triangleq m_2 - m_0 - m_1 - m_3 \quad (11)$$

Por lo que la ecuación (9) queda

$$I\ddot{\theta} + B_m\dot{\theta} + K_m \text{sen}\theta = M_m g r$$

Que al normalizarla se tiene

$$\ddot{\theta} + \frac{B_m}{I}\dot{\theta} + \frac{K_m}{I}\text{sen}\theta = \frac{1}{I}M_m g r \quad (12)$$

Al expresarla en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{I}(M_m g r - B_m \dot{\theta} - K_m \text{sen}\theta) \end{cases}, \text{ con las CI } \begin{bmatrix} \theta(t_0) \\ \omega(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}$$

Como puede observarse este sistema no lineal de ecuaciones diferenciales del sistema mecánico muestra, por el momento y a simple vista, una correspondencia analógica con el sistema eléctrico de potencia, tanto en el modelo matemático en general como con los parámetros que lo configuran, es decir:

$$I\ddot{\theta} + B_m\dot{\theta} + K_m \text{sen}\theta = M_m g r \Leftrightarrow M\delta + B\dot{\theta} + K \text{sen}\theta = P_m$$

$$I \Leftrightarrow M$$

$$B_m \Leftrightarrow B$$

$$K_m \Leftrightarrow K$$

$$M_{mgr} \Leftrightarrow P_m$$

Al tomar como base el modelo dado por (12) se pueden determinar los modelos matemáticos para los estados de *prefalla*, *falla* y *posfalla*.

Anexo del Capítulo 5

A5.1 La función hamiltoniana del SEP y del SMR analógico

Definición (de sistema hamiltoniano): Si el modelo matemático de un sistema dinámico tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g(x_1, x_2)\end{aligned}$$

Y se desea saber si es un sistema hamiltoniano, debe verificarse si existe una función escalar $H(x_1, x_2)$, llamada función hamiltoniana, tal que para toda pareja (x_1, x_2) se cumpla

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial H}{\partial x_2} \text{ y } g(x_1, x_2) = -\frac{\partial H}{\partial x_1}$$

Al aplicar el teorema de Schwarz a estas dos condiciones se tiene

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_1}$$

Esta última igualdad sirve como base para construir la función hamiltoniana, ya que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_1} = -\frac{\partial g}{\partial x_2}$$

Para saber si el sistema es hamiltoniano, es suficiente verificar este último resultado, es decir

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{\partial g}{\partial x_2} \tag{1}$$

Si esta condición no se cumple para todos los valores de (x, y) , entonces el sistema no es hamiltoniano.

Construcción de la función hamiltoniana

En el supuesto de que se cumple a la igualdad (1) la función puede construirse de la siguiente manera

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

Al integrar con respecto a x_2 se tiene

$$H(x_1, x_2) = \int_{x_{2i}}^{x_2} f(x_1, \xi_2) d\xi_2 + \phi(x_1) \quad (2)$$

Para encontrar $\phi(x_1)$, se obtiene la derivada parcial de $H(x_1, x_2)$ con respecto a x_1 y el resultado se relaciona con $-g(x_1, x_2)$, es decir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} H(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\int_{x_{2i}}^{x_2} f(x_1, \xi_2) d\xi_2 + \phi(x_1) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\int_{x_{2i}}^{x_2} f(x_1, \xi_2) d\xi_2 \right] + \phi'(x_1) = -g(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Al despejar $\phi'(x_1)$ se tiene

$$\phi'(x_1) = -g(x_1, x_2) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\int_{x_{2i}}^{x_2} f(x_1, \xi_2) d\xi_2 \right]$$

Después de integrar esta última ecuación se obtiene la función $\phi(x_1)$, que al ser sustituida en (2) proporciona la función $H(x_1, x_2)$

Para el caso particular del modelo del *swing* de la máquina síncrona

$$\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{M} (P_m - K \operatorname{sen} \delta) \end{cases}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= f(\delta, \omega) = \frac{\partial H}{\partial \omega} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= g(\delta, \omega) = -\frac{\partial H}{\partial \delta} = \frac{1}{M} (P_m - K \operatorname{sen} \delta) \end{aligned}$$

Dado que se cumple

$$\frac{\partial f}{\partial \delta} = -\frac{\partial g}{\partial \omega} = 0$$

Entonces

$$f(\delta, \omega) = \frac{\partial H(\delta, \omega)}{\partial \omega} = \omega$$

Al integrar por variables separables la ecuación anterior

$$H(\delta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 + \phi(\delta) \quad (3)$$

Y al derivarla con respecto a δ

$$\frac{\partial H(\delta, \omega)}{\partial \delta} = \frac{\partial \phi(\delta)}{\partial \delta} = \frac{1}{M} (K \text{sen} \delta - P_m)$$

De donde

$$\begin{aligned} \phi(\delta) &= \frac{1}{M} \int_{\delta_0}^{\delta} (K \text{sen} \delta - P_m) d\delta = \frac{1}{M} (-K \cos \delta - P_m \delta) \Big|_{\delta_0}^{\delta} \\ &= -\frac{1}{M} [K(\cos \delta - \cos \delta_0) + P_m(\delta - \delta_0)] \end{aligned}$$

Al sustituir en (3)

$$H(\delta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{M} [K(\cos \delta_0 - \cos \delta) + P_m(\delta_0 - \delta)] \quad (4)$$

Este modelo matemático expresado por (4) se le conoce como *hamiltoniano* o *función hamiltoniana* del *swing*, y constituye un modelo básico de gran importancia para estudiar el comportamiento dinámico de la máquina síncrona, ya que permite establecer de una manera más general el *principio de la conservación de la energía* mediante el auxilio de los conceptos de las energías cinética y potencial (Meisel, Jerome [13]).

Si los términos que componen la ecuación (4), se denotan de la siguiente manera

$$EC = \frac{1}{2}\omega^2 \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
EP_{elec} &= \frac{K}{M}(\cos \delta_0 - \cos \delta) \\
EP_{mec} &= \frac{P_m}{M}(\delta_0 - \delta)
\end{aligned}$$

Dentro de un marco de convención general a EC se le conoce como la *energía cinética normalizada* asociada a las partes giratorias del sistema, mientras que a EP_{elec} y EP_{mec} las energías potenciales asociadas a la parte eléctrica suministrada por el generador y mecánica asociada al par mecánico que suministra la turbina, respectivamente. De esta manera al definir de manera general a la energía potencial

$$EP \triangleq EP_{elec} + EP_{mec}$$

La ecuación (4) queda expresada de la siguiente forma

$$H(\delta, \omega) = EC + EP$$

Esta ecuación llamada, como ya se dijo, función hamiltoniana del *swing* de la máquina síncrona, es un caso especial del *principio de la conservación de la energía*. La suma de las energías potencial y cinética proporciona la *energía total del sistema* y se puede demostrar matemáticamente que esta energía total permanece constante, ya que al derivarla con respecto al tiempo se tiene

$$\frac{d}{dt}H(\delta, \omega) = \omega \frac{d\omega}{dt} - \frac{\omega}{M} (-K \text{sen} \delta + P_m \delta) \quad (6)$$

Del sistema de ecuaciones diferenciales del *swing*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\delta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{M} (P_m - K \text{sen} \delta) \end{array} \right.$$

Se tiene que al sustituir la segunda ecuación

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{M} (P_m - K \operatorname{sen} \delta) \quad (7)$$

en (6)

$$\frac{d}{dt} H(\delta, \omega) = 0$$

Lo que significa que

$$H(\delta, \omega) = \text{constante} \quad (8)$$

La energía cinética dada por la ecuación (5) puede ser expresada en términos del ángulo δ de la siguiente forma. De (7) se tiene

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega d\omega}{d\delta} = \frac{1}{M} (P_m - K \operatorname{sen} \delta)$$

Al separar variables e integrar

$$\begin{aligned} \int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega &= \frac{1}{M} \int_{\delta_0}^{\delta} (P_m - K \operatorname{sen} \delta) d\delta \\ \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2) &= \frac{1}{M} [P_m(\delta - \delta_0) + K(\cos \delta - \cos \delta_0)] \end{aligned}$$

Al despejar el término

$$\frac{1}{2}\omega^2 = EC = \frac{1}{M} (P_m \delta + K \cos \delta) + \frac{1}{2}\omega_0^2 - \frac{1}{M} (P_m \delta_0 + K \cos \delta_0)$$

Dado que el término $EC_0 = \frac{1}{2}\omega_0^2 = C$, corresponde a la energía cinética inicial en δ_0 , se tiene

$$\begin{aligned} EC &= \frac{1}{M} [P_m(\delta - \delta_0) + K(\cos \delta - \cos \delta_0)] + C \\ EC &= -EP + C \end{aligned}$$

Lo que significa que la energía cinética EC es igual al negativo de la energía potencial

más una constante, o de otra forma

$$EC + EP = C \quad (9)$$

$$H(\delta, \omega) = C$$

Lo cual concuerda con el mismo resultado obtenido en (8).

Al igual a como se obtuvo la función hamiltoniana del sistema eléctrico también es posible obtener esta función para el caso del **SMR**. Para este caso se omitirá la deducción por ser muy semejante. Del resultado de este proceso se obtiene la siguiente función para el **SMR**

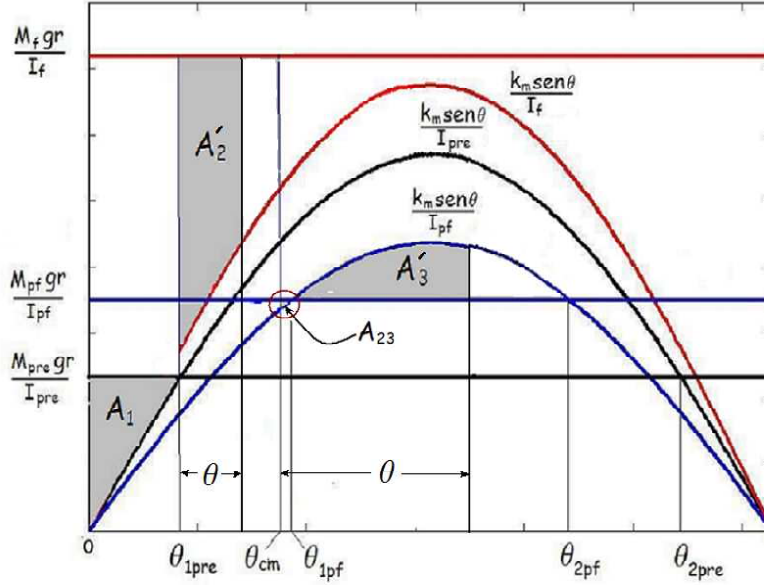
$$H(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{I}[K_m(\cos \theta_0 - \cos \theta) + M_m gr(\theta_0 - \theta)]$$

$$H(\theta, \omega) = EC + EP$$

Función que tiene una correspondencia analógica formal con la función hamiltoniana dada por la ecuación (4), la cual se repite a continuación

$$H(\delta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{M}[K(\cos \delta_0 - \cos \delta) + P_m(\delta_0 - \delta)]$$

A5.2 Evaluación de la función hamiltoniana durante los procesos de falla y de posfalla para el SMR



Al evaluar el hamiltoniano durante el proceso de falla para un ángulo θ comprendido en el intervalo $\theta_{1pre} < \theta < \theta_{cm}$ se tiene

$$H_f(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 - A_1 - A_2'$$

A_2' denota el área comprendida en el intervalo $\theta_{1pre} \leq \theta \leq \theta_{cm}$, luego

$$EC_f(\omega) = \frac{1}{2}\omega^2 \text{ y } EP_f(\theta) = -A_1 - A_2'$$

El subíndice f denota la cantidad física evaluada en el estado de falla mecánica, al evaluar

$$EP_f(\theta) = -A_1 - A_2'$$

Se tiene

$$EP_f(\theta) = \frac{K_m}{I_{pre}} + \left(\frac{1}{I_f} - \frac{1}{I_{pre}} \right) K_m \cos \theta_{1pre} + \left(\frac{M_f}{I_f} - \frac{M_{pre}}{I_{pre}} \right) gr \theta_{1pre} - \frac{K_m}{I_f} \cos \theta - \frac{M_f}{I_f} gr \theta$$

La expresión para la energía cinética $EC_f(\omega)$ tiene el dominio de definición

$\omega_{1pf} < \omega < \omega_{cm}$ y la energía potencial $EP_f(\theta)$, $\theta_{1pre} < \theta < \theta_{cm}$

La energía cinética EC_f se puede expresar en términos de θ al establecer la igualdad

$$H(\theta_{1pre}, \omega_{1pre}) = H(\theta, \omega)$$

Donde $H(\theta, \omega)$ deberá estar definida en la región $\theta_{1pre} < \theta < \theta_{cm}$ y $\omega_{1pre} < \omega < \omega_{cm}$, al evaluar la ecuación anterior se tiene

$$-A_1 = EC_f(\theta) - A_1 - A'_2$$

$$0 = EC_f(\theta) + \left(\frac{K_m}{I_f} \right) (\cos \theta_{1pre} - \cos \theta) + \frac{M_f}{I_f} gr (\theta_{1pre} - \theta)$$

Después de despejar $EC_f(\theta)$

$$EC_f(\theta) = \left(\frac{K_m}{I_f} \right) (\cos \theta - \cos \theta_{1pre}) + \frac{M_f}{I_f} gr (\cos \theta - \cos \theta_{1pre}), \quad \theta_{1pre} \leq \theta \leq \theta_{cm} \quad (10)$$

Del mismo modo, al evaluar el hamiltoniano durante el proceso de posfalla, para un ángulo θ comprendido en el intervalo $\theta_{cm} \leq \theta \leq \theta_{2pf}$ se tiene

$$H_{pf}(\theta, \omega) = \frac{1}{2} \omega^2 - A_1 - A_2 - A_{23} - A'_3$$

A'_3 denota el área comprendida en el intervalo $\theta_{cm} \leq \theta \leq \theta_{cm}$, luego

$$EC_{pf}(\theta) = \frac{1}{2} \omega^2 \text{ y } EP_f(\theta) = -A_1 - A_2 - A_{23} - A'_3$$

Donde

$$EC_{pf}(\omega) = \frac{1}{2} \omega^2, \quad \omega_{cm} < \omega < \omega_{2pf}$$

Después de evaluar la suma de las áreas $-A_1 - A_2 - A_{23} - A'_3$

$$EP_f(\theta) = \frac{K_m}{I_{pre}} + \left(\frac{1}{I_f} - \frac{1}{I_{pre}} \right) K_m \cos \theta_{1pre} + \left(\frac{M_f}{I_f} - \frac{M_{pre}}{I_{pre}} \right) gr \theta_{1pre} +$$

$$\left(\frac{1}{I_{pf}} - \frac{1}{I_f}\right) K_m \cos \theta_{cm} + \left(\frac{M_{pf}}{I_{pf}} - \frac{M_f}{I_f}\right) gr \theta_{cm}$$

$$-\frac{K_m}{I_{pf}} \cos \theta - \frac{M_{pf}}{I_{pf}} gr \theta, \theta_{cm} \leq \theta \leq \theta_{2pf}$$

La energía cinética EC_{pf} se puede evaluar en términos de θ de la siguiente manera

$$H(\theta_{1pre}, \omega_{1pre}) = H(\theta, \omega)$$

$H(\theta, \omega)$ deberá estar definida en la región $\theta_{cm} < \theta < \theta_{2pf}$ y $\omega_{cm} < \omega < \omega_{2pf}$, al evaluar la ecuación anterior se tiene

$$-A_1 - A_2 - A_{23} = EC_{pf} - A_1 - A_2 - A_{23} - A'_3$$

$$0 = EC_{pf} - A'_3$$

$$EC_{pf}(\theta) = \left(\frac{K_m}{I_{pf}}\right) (\cos \theta - \cos \theta_{1pf}) + \frac{M_{pf}}{I_{pf}} gr (\theta - \theta_{1pf}), \theta_{cm} \leq \theta \leq \theta_{2pf}$$

A5.3 Obtención del ángulo crítico de desconexión δ_c , rapidez angular ω_c en esta posición angular y amplitud máxima del *swing* para el SEP

En este apartado se aplicará la función hamiltoniana para determinar el ángulo crítico de desconexión δ_c que garantiza la estabilidad del sistema, así como la rapidez angular ω_c para esta posición angular entre otros resultados; tales como el valor de la amplitud del *swing* al operar el sistema en esta trayectoria de estados.

Obtención del ángulo crítico δ_c

Uno de los parámetros de interés que se obtienen en el análisis de estabilidad mediante la aplicación del método de las áreas iguales es la determinación del ángulo crítico, al aplicar la ecuación se tiene

$$A_1 + A_2 = 0$$

Se tiene

$$\int_{\delta_{1pre}}^{\delta_c} (P - K_f \text{sen} \delta) d\delta + \int_{\delta_c}^{\delta_{2pf}} (P - K_{pf} \text{sen} \delta) d\delta = 0$$

$$[P(\delta_c - \delta_{1pre}) + K_f(\cos \delta_c - \cos \delta_{1pre})] + [P(\delta_{2pf} - \delta_c) + K_{pf}(\cos \delta_{2pf} - \cos \delta_c)] = 0$$

Después de agrupar y despejar

$$\cos \delta_c = \frac{P(\delta_{2pf} - \delta_{1pre}) + K_f \cos \delta_{1pre} - K_{pf} \cos \delta_{2pf}}{(K_f - K_{pf})}$$

Al conocer los valores de K_f , K_{pf} y los ángulos de equilibrio δ_{1pre} y δ_{2pf} se puede conocer el ángulo crítico δ_c .

Obtención de la rapidez angular del swing $\omega = \dot{\delta}$

Con relación a la ecuación

$$A_1 = \frac{1}{2} \omega_c^2 = EC_c$$

Después de desarrollar la integral para obtener A_1

$$EC(\omega_c) = \frac{1}{2} \omega_c^2 = \frac{1}{M} [P(\delta_c - \delta_{1pre}) + K_f(\cos \delta_c - \cos \delta_{1pre})]$$

De esta expresión se puede obtener la rapidez angular del *swing* en el momento de desconectar la línea, dado que ya se conoce δ_c

$$\omega_c = \sqrt{\frac{2}{M} [P(\delta_c - \delta_{1pre}) + K_f(\cos \delta_c - \cos \delta_{1pre})]}$$

Amplitud $\Delta\delta$ del *swing*

También es posible aplicar este procedimiento para determinar el valor de la amplitud del *swing*, basta con conocer las posiciones angulares donde las energías cinéticas valen cero, y para esto se evalúa el hamiltoniano en dos posiciones consecutivas, una de ellas puede ser en el estado donde ocurre la desconexión de la línea, es decir en la posición crítica donde $\delta = \delta_c$ y $\omega = \omega_c$; y la otra donde sucede este evento, es decir en una

posición tal que $\delta_c \leq \delta \leq \delta_{2pf}$ donde $\omega_\delta = 0$

$$H(\delta_c, \omega_c) = H(\delta, \omega_\delta) = C \quad (11)$$

En la posición crítica

$$H(\delta_c, \omega_c) = \frac{1}{2}\omega_c^2 - \frac{1}{M}(A_0 + A_1)$$

Y en la posición en la que sucede $\omega_\delta = 0$

$$H(\delta, \omega_\delta) = -\frac{1}{M} \left[A_0 + A_1 + \int_{\delta_c}^{\delta} (P_m - K_{pf} \text{sen} \delta) d\delta \right]$$

Al llevar estas dos expresiones a (11) y simplificar

$$\frac{1}{2}\omega_c^2 = -\frac{1}{M} \int_{\delta_c}^{\delta} (P_m - K_{pf} \text{sen} \delta) d\delta$$

Después de integrar

$$\frac{1}{2}\omega_c^2 = -\frac{1}{M} [P_m(\delta - \delta_c) + K_{pf}(\cos \delta - \cos \delta_c)]$$

Al agrupar

$$\cos \delta + \frac{P_m}{K_{pf}}\delta + \left(\frac{M}{K_{pf}}\omega_c^2 - \frac{P_m}{K_{pf}}\delta_c - \cos \delta_c \right) = 0$$

Después de resolver esta ecuación trascendental en el intervalo $0 \leq \delta \leq \delta_{2pf}$, se obtienen las raíces para los valores de $\delta_1 = \delta_{\min}$ y $\delta_2 = \delta_{\max}$. De esta forma se tiene que la amplitud de la oscilación del *swing* está limitada a los valores $\delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}$, tal que

$$\Delta\delta = \delta_{\max} - \delta_{\min}$$

Resalta a la vista que en los procedimientos de análisis efectuados en este apartado la variable tiempo no aparece de manera explícita. Este aspecto no debe causar asombro ya que la función hamiltoniana es una función *atemporal*, pues únicamente depende de las variables de estado (δ, ω) ; sin embargo, es posible hacer intervenir a dicha variable

mediante un artificio matemático muy sencillo, por ejemplo, para obtener el tiempo crítico en el que sucede δ_c se procede de la siguiente manera.

El hamiltoniano en el punto de equilibrio estable de prefalla ya fue obtenido con anterioridad y esta dado por

$$H(\delta_{1pre}, \omega_{1pre}) = -\frac{1}{M}A_0$$

Por otro lado, para cualquier posición δ , comprendida en el intervalo de falla $\delta_{1pre} \leq \delta \leq \delta_c$, se tiene la expresión del hamiltoniano

$$H_f(\delta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{M} [A_0 + K_f(\cos \delta_{1pre} - \cos \delta) + P_m(\delta_{1pre} - \delta)]$$

Al establecer la igualdad de estas dos ecuaciones y después de simplificar se tiene

$$\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{1}{M} [K_f(\cos \delta_{1pre} - \cos \delta) + P_m(\delta_{1pre} - \delta)]$$

Al efectuar el siguiente cambio de variable

$$\omega = \frac{d\delta}{dt}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\delta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{M} [K_f(\cos \delta_{1pre} - \cos \delta) + P_m(\delta_{1pre} - \delta)]$$

Después de realizar algunas operaciones, separar variables en la ecuación diferencial e integrar en los intervalos $0 \leq t \leq t_c$ y $\delta_{1pre} \leq \delta \leq \delta_c$

$$\int_0^{t_c} dt = \int_{\delta_{1pre}}^{\delta_c} \frac{d\delta}{\sqrt{\frac{2}{M} [K_f(\cos \delta_{1pre} - \cos \delta) + P_m(\delta_{1pre} - \delta)]}}$$

La integral del lado derecho no es posible integrarla a partir de funciones reales ya que corresponde a una *integral elíptica de segundo orden*, por fortuna, al conocerse los límites de integración δ_c y δ_{1pre} es fácil resolverla a partir de un procedimiento

numérico, para esto se puede recurrir a **Matlab** y aplicar la siguiente función

$$quad(función, x_{inf}, x_{sup})$$

Este procedimiento puede emplearse para determinar cualquier instante en el que suceda un ángulo determinado que este comprendido durante el intervalo de falla. También pueden obtenerse tiempos para el intervalo de posfalla efectuando de manera razonable los cambios en los parámetros que conforman el integrando así como también en los límites de integración.

Extendiendo un poco más esta idea, no es difícil pensar que si este proceso de integración numérica se incorpora a un programa de **Matlab** con los comandos adecuados, para realizar las iteraciones necesarias y el control de flujo numérico para generar vectores de salida, es posible obtener las gráficas de las variables de estado en función del tiempo y posteriormente los planos de fase de la pareja δ - ω , entre otras gráficas de interés.

Anexo del capítulo 6

En este apartado se describe la estructura del programa de computadora que determina el tiempo crítico de desconexión de la línea del **SEP**, así como la conexión de la masa m_3 en el **SMR**.

A6.2 Estructura del programa de simulación

Para el sistema eléctrico

Para obtener el tiempo crítico $t_c = T$ de desconexión de la línea, correspondiente al momento en el que el sistema empieza a operar en la trayectoria de estados que limita la región de máxima estabilidad, es necesario resolver numéricamente el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales del *swing* de la máquina síncrona

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{M}(P_m - K \text{sen} \delta - B\omega) \end{aligned} \quad (1)$$

Tomando en cuenta que al variar el parámetro K cambia la estructura de la solución en las etapas por las que transcurre la falla trifásica. Para esto, es necesario definir los intervalos en el dominio de interés en el que deberá resolverse este sistema acorde a los procesos *prefalla* \rightarrow *falla* \rightarrow *posfalla*, tal como se indica a continuación.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0^+ \leq t \leq t_c^- \text{ para } K = K_f < P_m \text{ y } CI \quad \begin{bmatrix} \delta(0^-) \\ \omega(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}^{-1}\left(\frac{P_m}{K_{pre}}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \\ t_c^+ < t < t_{sim} \text{ para } K = K_{pf} > P_m \text{ y } CI \quad \begin{bmatrix} \delta_c \\ \omega_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(t_f^-) \\ \omega(t_f^-) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

El primer intervalo $0^+ \leq t \leq t_c^-$ corresponde al proceso de transición *prefalla* \rightarrow *falla*, mientras que el segundo $t_c^+ < t < t_{sim}$ al de *falla* \rightarrow *posfalla*. La incógnita de mayor

interés en la solución de este problema es la obtención el tiempo de desconexión $t_c = T$ en el que debe desconectarse la línea colapsada del **SEP** con el fin de poder conocer el tiempo de umbral de estabilidad. La solución a este problema equivale a conocer el margen de rapidez de operación con el que debe trabajar el sistema de protección con el fin de garantizar la estabilidad del sistema.

A continuación, se presenta la propuesta de un método relativamente sencillo y práctico para determinar esta variable temporal. El método consiste en resolver numéricamente el sistema (1) mediante el empleo de un proceso de simulación matemática con **Matlab/Simulink**.

El programa principal calcula el valor de t_c mediante aproximaciones sucesivas, para esto se fija $t_c = 0$, y se propone un valor Δt_c muy pequeño, del orden de centésimas de segundos, se valúa en la primera iteración a $t_c = t_c + \Delta t_c$ con el fin de garantizar la operación del sistema en la región estable par los dos intervalos de definición. Con este valor propuesto de t_c y con las condiciones iniciales en el estado de prefalla

$$\begin{bmatrix} \delta(0^-) \\ \omega(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}^{-1}\left(\frac{P_m}{K_{pre}}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones en el intervalo $0^+ \leq t \leq t_c^-$ para $K = K_f < P_m$, posteriormente, con las condiciones iniciales

$$\begin{bmatrix} \delta_c \\ \omega_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(t_c^-) \\ \omega(t_c^-) \end{bmatrix}$$

Se resuelve el sistema en el intervalo $t_c^+ < t < t_{sim}$ para $K = K_{pf} > P_m$. Para las iteraciones posteriores se incrementa el valor de t_c a $t_c = t_c + \Delta t_c$, de tal manera que en un determinado momento del proceso iterativo, dos valores consecutivos de t_c deberán quedar dentro de un cierto intervalo de tolerancia definido como

$$\Delta Tol = \|t_c(2) - t_c(2'')\|$$

Donde $t_c(2)$ corresponde al tiempo de desconexión en la región estable que se muestra en la trayectoria $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ de la figura A6.1.

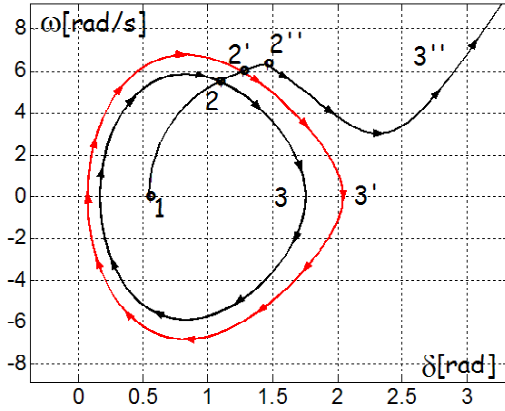


Figura A6.1

Trayectorias estables e inestables

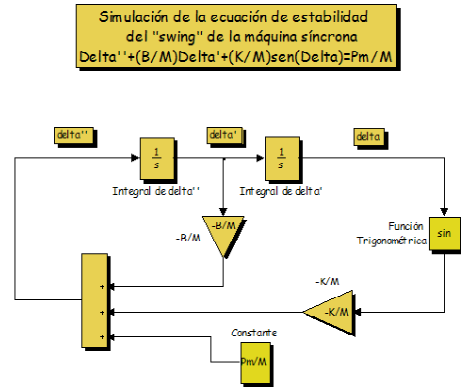


Figura A6.2

Diagrama de la simulación

Y $t_c(2'')$ al de la región inestable que se muestra en la trayectoria $1 \rightarrow 2'' \rightarrow 3''$ de la misma figura ¹. El valor intermedio de estas dos magnitudes corresponderá, de manera aproximada, al tiempo de desconexión $t_c = T$ que se busca.

La simulación consiste básicamente de un programa de **Matlab** que controla, mediante el proceso numérico explicado con anterioridad, la solución analógica del sistema de ecuaciones dado por (1) cuyo diagrama de bloques básico en **Simulink** (Dabney, James B., Harman, Thomas L. [4]) se muestra en la figura A6.2. Las salidas de la simulación serán los siguientes vectores:

1. $tout1$: vector que contiene los tiempos definidos en el intervalo de falla $0 \leq t \leq t_c^-$
2. $tout2$: vector que contiene los tiempos definidos en el intervalo de posfalla

¹La detección de estos dos valores de t_f se justifica en la medida que después de calcular $t_f = t_f(2)$, el valor máximo que se tenga para δ en el intervalo $t_f^+ < t < t_{sim}$, debe ser siempre menor al valor de δ correspondiente al del punto de equilibrio inestable, por otro lado, después de calcular $t_f = t_f(2'')$, los valores calculados de δ y ω en el mismo intervalo, deberán ser crecientes en la parte última del intervalo citado.

$$t_c^+ \leq t \leq t_{sim}^2$$

3. $tout = [tout1, tout2]$: vector que contiene los tiempos que encadena $tout1$ y $tout2$ definido en $0 \leq t \leq t_{sim}$
4. $salida1$: vector que contiene a los estados ω y δ en el intervalo de falla $0 \leq t \leq t_c^-$, esto es, $\omega = salida1[0 : t_c^-, 1]$ y $\delta = salida1[0 : t_c^-, 2]$
5. $salida2$: vector que contiene a los estados ω y δ en el intervalo de posfalla $t_c^+ \leq t \leq t_{fin}$, es decir, $\omega = salida2[t_c^+ : t_{sim}, 1]$ y $\delta = salida2[t_c^+ : t_{sim}, 2]$
6. $salida = [salida1, salida2]$ es el vector que encadena los vectores de estado $salida1$ y $salida2$ en el intervalo $0 \leq t \leq t_{sim}$

Para el sistema mecánico:

El procedimiento de simulación para analizar la estabilidad mecánica del **SMR** es muy similar al anterior. En este caso se desea obtener el tiempo crítico $t_{cm} = T_m$ en el que debe acoplarse la masa m_3 al sistema mecánico y poder estimar las características geométricas de la trayectoria que limita la región de máxima estabilidad, por lo que es necesario resolver el sistema de ecuaciones diferenciales del *swing* mecánico

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{I_m}(M_m g r - B_m \omega - K_m \text{sen}\theta) \end{aligned} \quad (2)$$

A diferencia del **SEP** este sistema de ecuaciones diferenciales presenta dos *bifurcaciones* en cada etapa de su solución, ya que al cambiar la estructura del conjunto de cuerpos del **SMR** en el período en el que dura el proceso de la falla mecánica también lo hacen de manera simultánea los parámetros M_m e I_m . De manera adicional a estos cambios es necesario definir los intervalos de interés para los que se resuelve este sistema de

² t_{sim} corresponde al tiempo total en el cual se realiza la simulación, este tiempo deberá ser lo *suficientemente grande*, por ejemplo, mayor a dos segundos.

ecuaciones diferenciales acorde, tanto a las transiciones mecánicas *prefalla*→*falla* como a las de *falla*→*posfalla*.

A continuación, se definen dichos intervalos en el modelo (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} 0^+ \leq t \leq t_{cm}^- \text{ para } M_m = M_f, I_m = I_f \text{ y } CI \quad \begin{bmatrix} \delta(0^-) \\ \omega(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}^{-1}\left(\frac{M_{pre}}{K_m}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \\ t_{cm}^+ < t < t_{sim} \text{ para } M_m = M_{pf}, I_m = I_{pf} \text{ y } CI \quad \begin{bmatrix} \delta_c \\ \omega_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(t_f^-) \\ \omega(t_f^-) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (3)$$

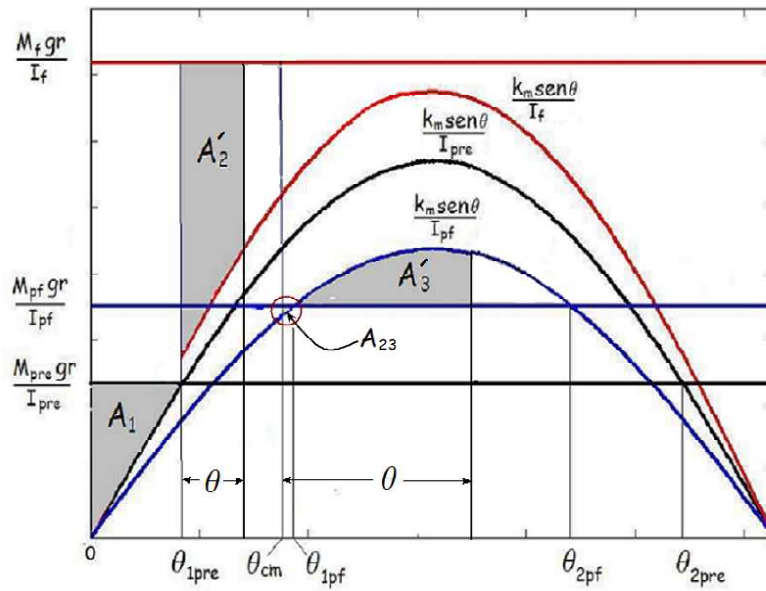
En $t = 0^+$ ocurre la transición *prefalla*→*falla*, durante el primer intervalo $0^+ \leq t \leq t_{cm}^-$ se tiene al proceso de falla mecánica, posteriormente en $t = t_{cm}^+$ ocurre la transición *falla*→*posfalla* y durante el segundo intervalo $t_{cm}^+ < t < t_{sim}$ se tiene el proceso de posfalla.

La estructura del programa de **Matlab/Simulink** que se emplea para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales es muy parecido al que se utilizó para resolver el *swing* del rotor de la máquina síncrona ³, así como también la metodología y el algoritmo para la determinación del tiempo crítico o tiempo de acoplo $t_{cm} = T_m$ de la masa m_3 al **SMR**.

³Desde luego que se tienen algunas variantes con relación al sistema eléctrico, ya que en el caso del sistema mecánico análogo es necesario incorporar algunos datos adicionales en virtud de que las bifurcaciones *prefalla-falla* y *falla-posfalla* presentan cambios tanto en las masas como en los momentos de inercia en este sistema.

Anexo del Capítulo 7

En este apartado se determinará la evaluación de la función $H(\theta, \omega)$ en diferentes estados de interés, tales como los puntos de equilibrio y otros estados comprendidos durante los estados de falla y posfalla, así como también la evaluación de las energías cinéticas en función de la posición angular. Con base en la siguiente figura que determina las curvas de los estados mecánicos de prefalla, falla y posfalla para el **SMR**.



Se define y evalúa a los siguientes términos:

A_1 área comprendida en el intervalo $0 \leq \theta \leq \theta_{1pre}$

$$-A_1 = \frac{K_m}{I_{pre}} (1 - \cos \theta_{1pre}) - \frac{M_{pre}}{I_{pre}} gr \theta_{1pre}$$

A_2 área comprendida en el intervalo $\theta_{1pre} \leq \theta \leq \theta_{cm}$

$$-A_2 = \frac{K_m}{I_f} (\cos \theta_{1pre} - \cos \theta_{cm}) + \frac{M_f}{I_f} gr (\theta_{1pre} - \theta_{cm})$$

A_{23} área comprendida en el intervalo $\theta_{cm} \leq \theta \leq \theta_{1pf}$

$$-A_{23} = \frac{K_m}{I_{pf}} (\cos \theta_{cm} - \cos \theta_{1pf}) + \frac{M_f}{I_f} gr (\theta_{cm} - \theta_{1pf})$$

A_3 área comprendida en el intervalo $\theta_{1pf} \leq \theta \leq \theta_{2pf}$

$$-A_3 = \frac{K_m}{I_f} (\cos \theta_{1pf} - \cos \theta_{2pf}) + \frac{M_f}{I_f} gr (\theta_{1pf} - \theta_{2pf})$$

A'_2 área comprendida en un ángulo θ tal que $\theta_{1pre} < \theta < \theta_{cm}$

$$-A_2 = \frac{K_m}{I_f} (\cos \theta_{1pre} - \cos \theta) + \frac{M_f}{I_f} gr (\theta_{1pre} - \theta)$$

A'_3 área comprendida en un ángulo θ tal que $\theta_{1pf} < \theta < \theta_{2pf}$

$$-A'_3 = \frac{K_m}{I_f} (\cos \theta_{1pf} - \cos \theta) + \frac{M_f}{I_f} gr (\theta_{1pf} - \theta)$$

A7.1 Evaluación de la función hamiltoniana para el SMR en los puntos de equilibrio y otros puntos de interés

Con base en los resultados anteriores, se obtiene la función $H(\theta, \omega)$ en los siguientes puntos:

1) Para el punto de equilibrio de prefalla estable $(\theta_{1pre}, \omega_{1pre})$

En este punto de equilibrio se tiene $\omega_{1pre} = 0$ y la evaluación de la función hamiltoniana está dada por

$$H(\theta_{1pre}, 0) = -A_1 \tag{1}$$

$$H(\theta_{1pre}, 0) = \frac{K_m}{I_{pre}} (1 - \cos \theta_{1pre}) - \frac{M_{pre}}{I_{pre}} gr \theta_{1pre}$$

2) Para el punto de equilibrio de posfalla estable $(\theta_{1pf}, \omega_{1pf})$

Se tiene que $\omega_{1pf} = 0$

$$H(\theta_{1pf}, 0) = -A_1 - A_2 - A_{23} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} H(\theta_{1pf}, 0) = & \frac{K_m}{I_{pre}} + \left(\frac{1}{I_f} - \frac{1}{I_{pre}} \right) K_m \cos \theta_{1pre} + \left(\frac{M_f}{I_f} - \frac{M_{pre}}{I_{pre}} \right) gr \theta_{1pre} + \\ & \left(\frac{1}{I_{pf}} - \frac{1}{I_f} \right) K_m \cos \theta_{cm} + \left(\frac{M_{pf}}{I_{pf}} - \frac{M_f}{I_f} \right) gr \theta_{cm} - \frac{K_m}{I_{pf}} \cos \theta_{1pf} - \frac{M_{pf}}{I_{pf}} gr \theta_{1pf} \end{aligned}$$

3) En la posición angular θ_{cm} donde se acopla la masa m_3 al sistema

$$H(\theta_{cm}, \omega_{cm}) = \frac{1}{2} \omega_{cm}^2 - A_1 - A_2 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} H(\theta_{cm}, \omega_{cm}) = & \frac{1}{2} \omega_{cm}^2 + \frac{K_m}{I_{pre}} + \left(\frac{1}{I_f} - \frac{1}{I_{pre}} \right) K_m \cos \theta_{1pre} + \\ & \left(\frac{M_f}{I_f} - \frac{M_{pre}}{I_{pre}} \right) gr \theta_{1pre} - \frac{K_m}{I_f} \cos \theta_{cm} - \frac{M_f}{I_f} gr \theta_{cm} \end{aligned}$$

4) En el punto de equilibrio inestable de posfalla $(\theta_{2pf}, \omega_{2pf})$

Se tiene que $\omega_{2pf} = 0$

$$H(\theta_{2pf}, 0) = -A_1 - A_2 - A_{12} - A_3 \quad (4)$$

$$H(\theta_{2pf}, 0) = H(\theta_{1pf}, 0) - A_3$$

$$\begin{aligned} H(\theta_{2pf}, 0) = & \frac{K_m}{I_{pre}} + \left(\frac{1}{I_f} - \frac{1}{I_{pre}} \right) K_m \cos \theta_{1pre} + \left(\frac{M_f}{I_f} - \frac{M_{pre}}{I_{pre}} \right) gr \theta_{1pre} + \\ & \left(\frac{1}{I_{pf}} - \frac{1}{I_f} \right) K_m \cos \theta_{cm} + \left(\frac{M_{pf}}{I_{pf}} - \frac{M_f}{I_f} \right) gr \theta_{cm} + \left(\frac{K_m}{I_f} - \frac{K_m}{I_{pf}} \right) \cos \theta_{1pf} + \\ & \left(\frac{M_f gr}{I_f} - \frac{M_{pf}}{I_{pf}} \right) gr \theta_{1pf} - \frac{K_m}{I_f} \cos \theta_{2pf} - \frac{M_f}{I_f} gr \theta_{2pf} \end{aligned}$$

5) En un ángulo $\theta_{1pre} < \theta < \theta_{cm}$ comprendido durante el período de falla

$$H_f(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 - A_1 - A'_2 \quad (5)$$

$$H_f(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{K_m}{I_{pre}} + \left(\frac{1}{I_f} - \frac{1}{I_{pre}}\right) K_m \cos \theta_{1pre} + \left(\frac{M_f}{I_f} - \frac{M_{pre}}{I_{pre}}\right) gr\theta_{1pre} - \frac{K_m}{I_{pf}} \cos \theta - \frac{M_{pf}}{I_{pf}} gr\theta$$

6) En un ángulo $\theta_{cm} \leq \theta \leq \theta_{2pf}$ comprendido durante el período de posfalla

$$H_{pf}(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 - A_1 - A_2 - A_{23} - A'_3 \quad (6)$$

$$H_{pf}(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{K_m}{I_{pre}} + \left(\frac{1}{I_f} - \frac{1}{I_{pre}}\right) K_m \cos \theta_{1pre} + \left(\frac{M_f}{I_f} - \frac{M_{pre}}{I_{pre}}\right) gr\theta_{1pre} + \left(\frac{1}{I_{pf}} - \frac{1}{I_f}\right) K_m \cos \theta_{cm} + \left(\frac{M_{pf}}{I_{pf}} - \frac{M_f}{I_f}\right) gr\theta_{cm} - \frac{K_m}{I_{pf}} \cos \theta - \frac{M_{pf}}{I_{pf}} gr\theta$$

7) Obtención de la función $V(\theta, \omega) = H_{pf}(\theta, \omega) - H(\theta_{1pf}, 0)$ para $\theta_{1pf} \leq \theta \leq \theta_{2pf}$ durante el período de posfalla

De las ecuaciones (2) y (6) se tiene

$$H(\theta_{1pf}, 0) = -A_1 - A_2 - A_{23}$$

$$H_{pf}(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 - A_1 - A_2 - A_{23} - A'_3$$

Al establecer la diferencia

$$V(\theta, \omega) = H_{pf}(\theta, \omega) - H(\theta_{1pf}, 0) = \frac{1}{2}\omega^2 - A'_3$$

De donde

$$V(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{K_m}{I_f} (\cos \theta_{1pf} - \cos \theta) + \frac{M_f}{I_f} gr (\theta_{1pf} - \theta)$$

A7.2 Evaluación de las energías cinéticas en términos de la posición angular para diversos puntos de interés

8) Energía cinética durante el período de falla en un ángulo θ tal que

$$\theta_{1pre} < \theta < \theta_{cm}$$

Al establecer la igualdad entre las ecuaciones (1) y (5)

$$\begin{aligned} H(\theta_{1pre}, 0) &= H_f(\theta, \omega) \\ -A_1 &= EC_f - A_1 - A'_2 \\ 0 &= EC_f - A'_2 \\ 0 &= EC_f + \frac{K_m}{I_f} (\cos \theta_{1pre} - \cos \theta) + \frac{M_f}{I_f} gr (\theta_{1pre} - \theta) \end{aligned}$$

de donde

$$EC_f = \frac{K_m}{I_f} (\cos \theta - \cos \theta_{1pre}) + \frac{M_f}{I_f} gr (\theta - \theta_{1pre}) \quad (7)$$

9) Energía cinética durante el período de posfalla en un ángulo θ tal que

$$\theta_{cm} < \theta < \theta_{2pf}$$

Al establecer la igualdad entre (2) y (6)

$$\begin{aligned} H(\theta_{1pf}, 0) &= H_{pf}(\theta, \omega) \\ -A_1 - A_2 - A_{23} &= EC_{pf} - A_1 - A_2 - A_{23} - A'_3 \\ 0 &= EC_{pf} - A'_3 \\ 0 &= EC_{pf} + \frac{K_m}{I_{pf}} (\cos \theta_{1pf} - \cos \theta) + \frac{M_{pf}}{I_{pf}} gr (\theta_{1pf} - \theta) \end{aligned}$$

$$EC_{pf} = \frac{K_m}{I_{pf}} (\cos \theta - \cos \theta_{1pf}) + \frac{M_{pf}}{I_{pf}} gr (\theta - \theta_{1pf})$$

A7.3 Gráficas de las energías cinéticas y potenciales para el SMR cuando $B \neq 0$

Cuando en el modelo matemático del *swing* se considera la fricción viscosa, parte de las energías cinética y potencial que se desarrollan durante el proceso dinámico del **SMR** se transforman en calor. Las gráficas de las figuras A7.1, A7.2, A7.3 y A7.4 muestran el comportamiento de este proceso cuando $B = 0.02$.

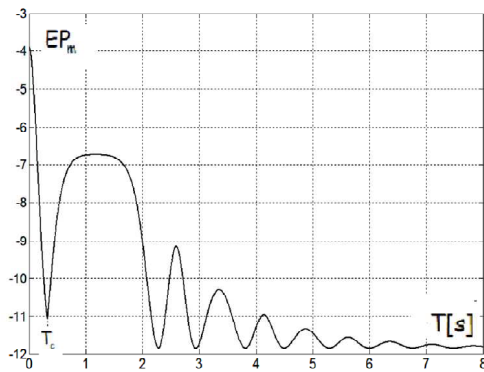


Figura A7.1 Energía Potencial del sistema mecánico

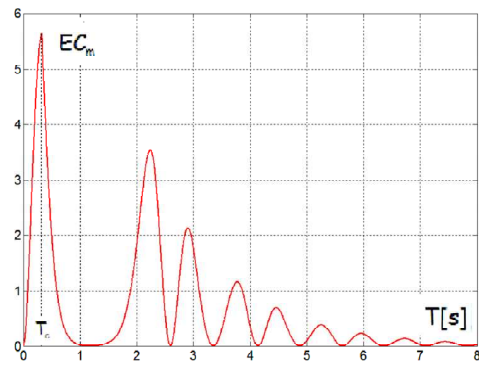


Figura A7.2, Energía Cinética del sistema mecánico

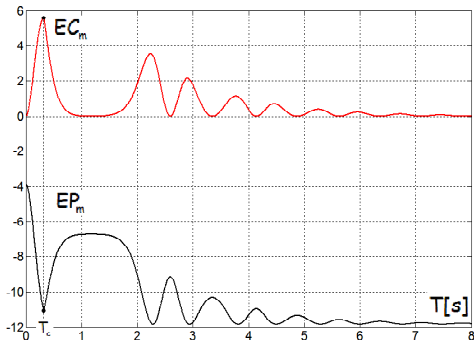


Figura A7.3, Energía Cinética y Potencial del sistema mecánico con

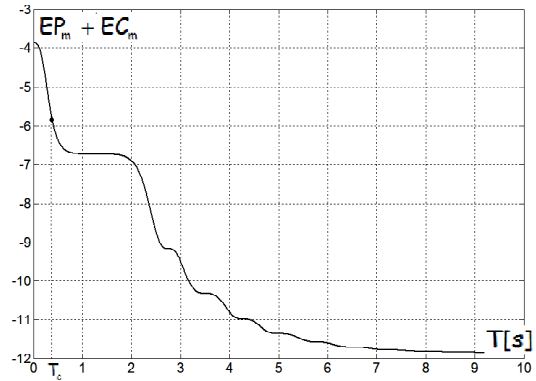


Figura A7.4 Suma de Energías Cinética y Potencial del sistema mecánico con

En la figura A7.1 se pueden observar la energía potencial máxima y la correspondiente al momento en el que se acopla la masa m_3 al sistema, también se observa el decrecimiento asintótico de esta cantidad física hasta llegar al valor límite mínimo

correspondiente al estado de equilibrio estable de posfalla mecánica. De manera similar, en la figura A7.2, la energía cinética también muestra un proceso decreciente pulsante y asintótico hasta llegar al valor límite $EC_{\min} = 0$, correspondiente también a la posición del punto de equilibrio del estado de posfalla mecánica. En la figura A7.4 muestra de manera conjunta la suma de las energías potencial y cinética.

Las observaciones correspondientes a los estados límites de las energías potencial y cinética $ET = EC_{\min} + EP_{\min}$ cuando el tiempo $t \rightarrow \infty$ se fundamenta en el siguiente enunciado:

*Después de que se acopla la masa m_3 en una trayectoria estable, si el sistema dinámico disipa energía presenta estabilidad asintótica, y conforme transcurre el tiempo el estado tiende al punto de equilibrio de posfalla mecánica, el cual posee energía potencial mínima*¹

Las figuras A7.5, A7.6 y A7.7 muestran el comportamiento de las energías cinética y potencial del sistema en \mathbf{R}^3 al tenerse como dominio a las variables de estado θ y ω .

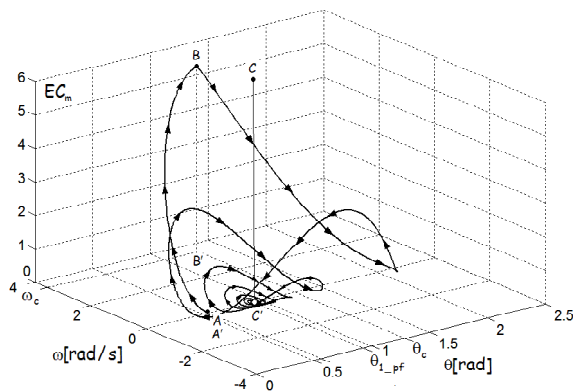


Figura A7.5

Energía Cinética en función de θ y ω

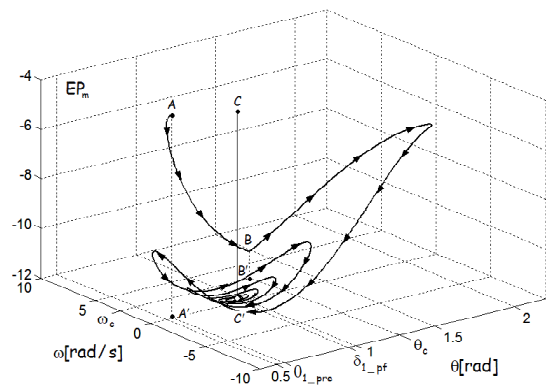


Figura A7.6

Energía Potencial en función de θ y ω

¹ Este enunciado contiene de manera implícita uno de las aplicaciones del teorema de Lagrange.

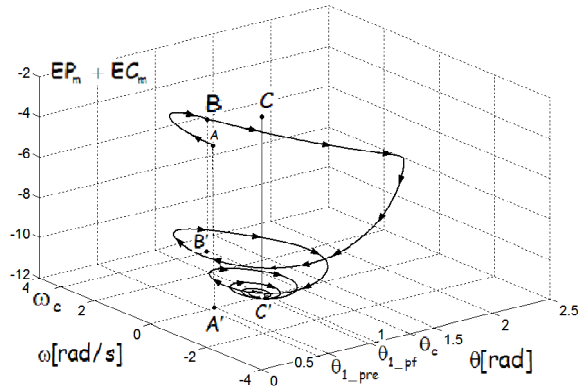


Figura A7.7

Suma de las energías Cinética y Potencial

en función de θ y ω

En estas ilustraciones puede observarse que la trayectoria acotada por los extremos de los puntos A y B determina los comportamientos de las energías cinética, potencial y total durante el período de falla. A partir del punto B se verifica con mayor evidencia que, conforme transcurre el tiempo, el movimiento asintótico de las trayectorias tienden a los valores de energía que posee el estado de equilibrio estable de posfalla mecánica. Los ejes verticales $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$ corresponden a los lugares geométricos de las energías en los puntos de equilibrio mecánico estables de prefalla y posfalla respectivamente. Se puede observar que durante el proceso de posfalla y conforme transcurre el tiempo, las trayectorias se aproximan al eje $\overline{CC'}$. El comportamiento de estas propiedades energéticas está basado en una propocición de Lagrange que posteriormente formalizó Dirichlet, el teorema de Lagrange-Dirichlet, establece lo siguiente:

Si una configuración de equilibrio de un sistema mecánico conservativo tiene una energía potencial mínima relativa a puntos cercanos, entonces esta configuración corresponde a una posición de equilibrio estable. Si el valor de la energía potencial de una posición de equilibrio no tiene un mínimo relativo, entonces el equilibrio es inestable.

Las siguientes gráficas ilustran el mapeo de los modelos gráficos del **SMR** y del **SEP** como resultado de la solución numérica de sus respectivos modelos matemáticos. Las

gráficas de la izquierda corresponden al **SMR** y las de la derecha al del **SEP**. El comportamiento cualitativo de las propiedades energéticas que se muestran en estas gráficas, sustentan la analogía establecida en ambos sistemas. Recordar que el símbolo \Rightarrow debe leerse: *es como*.

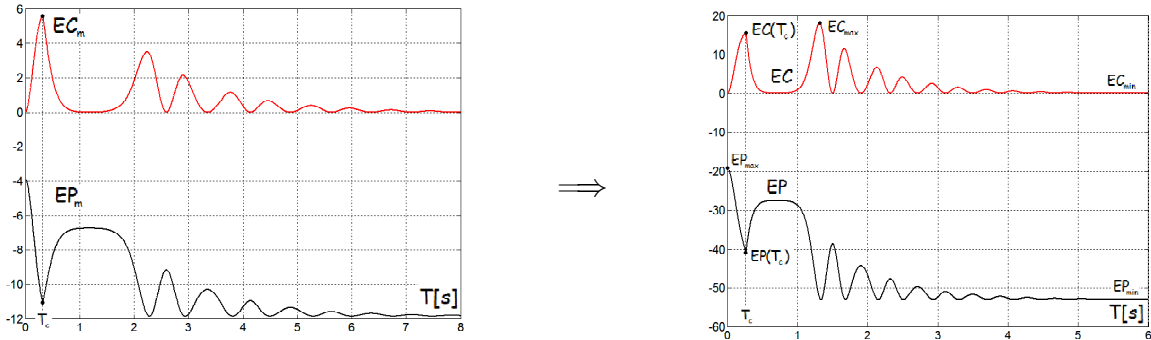


Figura 7.28

EC y EP para el SMR

EC y EP para el SEP

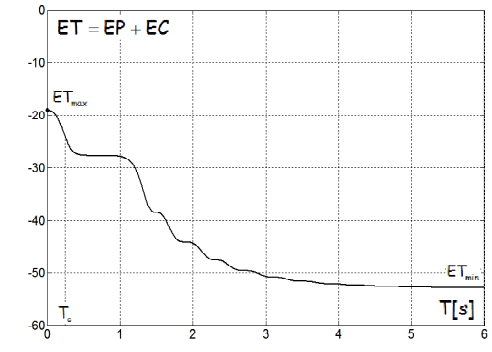
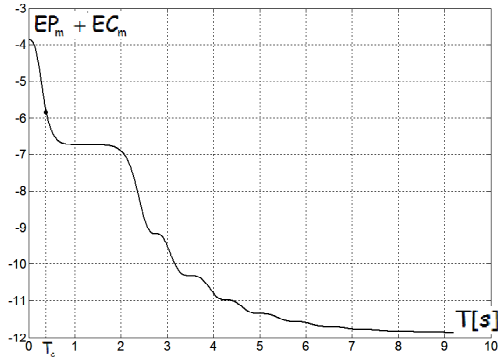
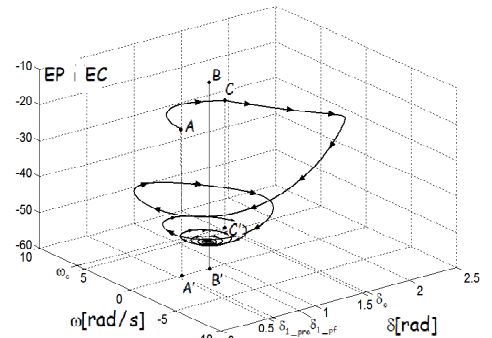
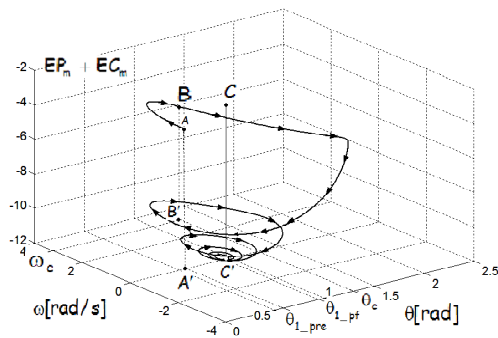


Figura 7.29

Suma de EC y EP para el SMR

Suma de EP y EC para el SEP



Suma de EC y EP

Figura 7.30

Suma de EC y EP

para el SMR en función de θ y ω

para el SEP en función de θ y ω

A7.4 Evaluación de la derivada de la función $V(\omega, \theta)$

La propiedad $d)$

$$\frac{dV(\delta, \omega)}{dt} \leq 0, \forall t \geq 0$$

sobre cualquier solución diferenciable con condiciones iniciales \mathbf{X}_0 se puede verificar al obtener la derivada con respecto al tiempo de la función

$$V(\omega, \theta) = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{K_m}{I_{pf}} (\cos \theta_{pf} - \cos \theta) + \frac{M_{pf}}{I_{pf}} (\theta_{pf} - \theta) \quad (8)$$

Es decir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\theta, \omega) &= \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{d}{dt}V(\theta, \omega) &= \left[\frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{\partial V}{\partial \omega} \right] \cdot \left[\frac{d\theta}{dt}, \frac{d\omega}{dt} \right] \\ \frac{d}{dt}V(\delta, \omega) &= \nabla V \cdot \frac{d\vec{\mathbf{X}}}{dt} \leq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

De las ecuaciones diferenciales que modelan al sistema en condiciones de posfalla

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \text{ y } \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{I_{pf}} (M_{pf}gr - B_m\omega - K_{pf}\text{sen}\theta)$$

Y de las expresiones que se obtienen como resultado de aplicar las derivadas parciales a la ecuación (8)

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{K_m}{I_{pf}} \text{sen}\theta - \frac{M_{pf}}{I_{pf}} \text{ y } \frac{\partial V}{\partial \omega} = \omega$$

al sustituir en (9) y simplificar

$$\frac{d}{dt}V(\delta, \omega) = \nabla V \cdot \frac{d\vec{\mathbf{X}}}{dt} = - \left(\frac{B_m}{I_{pf}} \right) \omega^2 < 0$$