



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DINÁMICA DE COEFICIENTES DE UN
ÁLGEBRA DE CONGLOMERADO
TUBULAR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
ALFREDO NÁJERA CHÁVEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. CHRISTOF GEISS HAHN



2009



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Secretaría General

División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ

Jefe de la División de Estudios Profesionales

Facultad de Ciencias

Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Dinámica de coeficientes de un álgebra de conglomerado tubular

realizado por **Nájera Chávez Alfredo** con número de cuenta **3-0367802-1** quien ha decidido titularse mediante la opción de tesis en la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario Dr. Michael Barot Schlatter

Propietario Dr. Marcelo Alberto Aguilar González

Propietario Dr. Christof Geiss Hahn

Tutor

Suplente Dra. Edith Corina Sáenz Valadez

Suplente Dra. Diana Avella Alaminos

Atentamente,

“POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU ”

Ciudad Universitaria, D. F., a 11 de junio 2009

EL COORDINADOR DEL COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

M. EN C. FRANCISCO DE JESÚS STRUCK CHÁVEZ

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

*chc.

Dinámica de coeficientes de un álgebra de conglomerado tubular

Alfredo Nájera Chávez

Junio de 2009

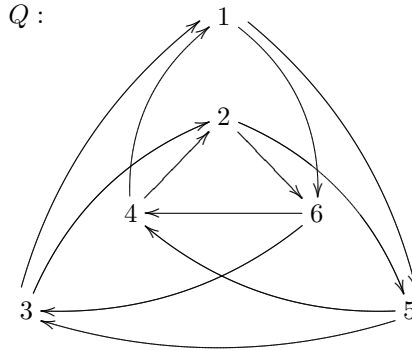
Índice general

1. Álgebras de conglomerado	1
1.1. Semicampos y anillo de grupo	1
1.2. Mutaciones y Semillas	3
1.3. Definición principal	7
1.4. Coeficientes principales	9
2. El carcaj Q	11
2.1. Fracciones de Farey	12
2.2. Las componentes \mathbb{T}_3^k	22
2.3. Descripción de coeficientes principales	28
2.4. El álgebra de conglomerado de Markov	55

Introducción

Las álgebras de conglomerado fueron introducidas alrededor del año 2001 por S. Fomin y A. Zelevinski [4] como una herramienta algebraica para el estudio de positividad total y bases canónicas en grupos algebraicos semisimples. Actualmente, la teoría de álgebras de conglomerado está conectada con diversas áreas de las matemáticas, por ejemplo: teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita, teoría de Lie, así como en contextos geométricos y topológicos.

Las álgebras de conglomerado son álgebras conmutativas con un conjunto distinguido de generadores, llamados *variables de conglomerado*, que se agrupan en conjuntos no ajenos de la misma cardinalidad n , llamados conglomerados. El álgebra de conglomerado queda determinada por su *semilla* inicial, que consiste de un conglomerado $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ junto con un *tuplo de coeficientes* $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, tomados en un semicampo \mathbb{P} , y una matriz de $n \times n$ con entradas enteras antisimétrica. Podemos *mutar* esta semilla en las direcciones $1, \dots, n$ para obtener otra semilla, es decir, otro conglomerado, otro tuplo de coeficientes y otra matriz con las mismas propiedades. De este modo, se obtienen de manera recursiva a todas las variables de conglomerado. La regla precisa para mutar semillas se encuentra en la primera sección del capítulo 1 de este trabajo. A las matrices de cada semilla se les llama matrices de intercambio. Notamos que una matriz antisimétrica $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ se puede visualizar mediante un carcaj finito sin lazos ni 2-ciclos, que se obtiene al poner a_{ij} flechas del vertice i a j para las entradas a_{ij} positivas.

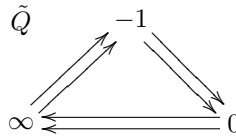


A continuación explicamos el contenido de los capítulos de la presente tesis:

El primer capítulo es una introducción a la teoría de las álgebras de conglomerado. Presentamos los conceptos básicos que se usarán a lo largo de todos los capítulos. Además calculamos las variables de conglomerado del álgebra de conglomerado proveniente del diagrama de Dyinkin A_2 .

El capítulo 2 se divide en 4 secciones, las dos primeras constituyen un acercamiento a las fracciones de Farey. Dichas fracciones nos servirán para describir a las matrices de intercambio extendidas de las álgebras de conglomerado que estudiaremos. Cabe mencionar que nuestra manera de estudiar a dichas fracciones no es la usual. En la tercera sección de este capítulo describimos a las matrices de intercambio del álgebra de conglomerado proveniente del carcaj Q , identificando pares de mutaciones que simplemente cambian la orientación de Q a la opuesta.

Mientras que en la cuarta sección describimos a todas las matrices de intercambio del álgebra de conglomerado de Markov, que es el álgebra de conglomerado proveniente del carcaj



Finalmente, el capítulo 3 esta dedicado a explicar al lector cómo fue que obtuvimos las fórmulas mostradas en el capítulo 2. Damos un breve acercamiento informal al trabajo desarrollado por S. Fomin, M. Shapiro y D. Thurston [2]

y [3], en el cual se da una conexión entre las álgebras de conglomerado y las superficies trianguladas. Este capítulo exige saber ciertas nociones básicas de topología y geometría, más no es esencial para comprender los resultados centrales del trabajo.

En [5] se clasificaron las álgebras de conglomerado de tipo finito. Es natural estudiar álgebras de conglomerado cuya matriz de intercambio sea de clase mutación finita, una clase importante de ese tipo de álgebras son las álgebras de conglomerado de tipo tubular introducidas en [1], el álgebra proveniente del carcaj Q es un ejemplo de este tipo de álgebras.

Alfredo Nájera Chávez, Junio de 2009.

Capítulo 1

Álgebras de conglomerado

Este capítulo está dedicado a introducir la definición de álgebra de conglomerado, así como los conceptos relacionados a éstas que utilizaremos a lo largo del presente trabajo. Las referencias para un estudio más detallado son [4] y [6].

1.1. Semicampos y anillo de grupo

Definición 1.1.1. Dado un conjunto \mathbb{P} y $\oplus : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$, $\cdot : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ dos operaciones binarias, decimos que $(\mathbb{P}, \oplus, \cdot)$ es un **semicampo**, si y sólo si (\mathbb{P}, \cdot) es un grupo abeliano y \oplus es una operación asociativa, conmutativa y distributiva con respecto a \cdot .

Nota 1.1.2. Si $(\mathbb{P}, \oplus, \cdot)$ es un semicampo, generalmente diremos que \mathbb{P} es un semicampo, \cdot es el producto en \mathbb{P} y \oplus es la suma auxiliar en \mathbb{P} .

Observación 1.1.3. Si \mathbb{P} es un semicampo, entonces (\mathbb{P}, \cdot) es libre de torsión.

Demostración. Esto se sigue del hecho de que si $a \in \mathbb{P}$ con $a^n = 1$ y $n > 1$, entonces $a = a \cdot \frac{a^{n-1} \oplus a^{n-2} \oplus \dots \oplus 1}{a^{n-1} \oplus a^{n-2} \oplus \dots \oplus 1} = \frac{a^n \oplus a^{n-1} \oplus \dots \oplus a}{a^{n-1} \oplus a^{n-2} \oplus \dots \oplus 1} = 1$. \square

Ejemplo 1.1.4. (*semicampo tropical*) Sea J un conjunto de índices, y sea $\text{Trop}(u_j : j \in J)$ el grupo abeliano libre (escrito de manera multiplicativa) generado por los elementos u_j ($j \in J$) definimos \oplus en $\text{Trop}(u_j : j \in J)$ como

$$\prod_j u_j^{a_j} \oplus \prod_j u_j^{b_j} = \prod_j u_j^{\min(a_j, b_j)} \quad (1.1)$$

Llamamos a $(\text{Trop}(u_j : j \in J), \oplus, \cdot)$ un *semicampo tropical*. Si $J = \emptyset$, obtenemos el *semicampo trivial* consistente del único elemento 1.

Ejemplo 1.1.5. (*semicampo universal*) Sea $\mathbb{Q}_{sf}(u_1, \dots, u_l)$ el conjunto de funciones racionales en l variables u_1, \dots, u_l que pueden ser escritas en una expresión racional sin restas (por ejemplo $u^2 - u + 1 = \frac{u^3 + 1}{u + 1} \in \mathbb{Q}_{sf}(u)$). $\mathbb{Q}_{sf}(u_1, \dots, u_l)$ es un *semicampo* con respecto a las operaciones usuales. Este ejemplo es *universal*, pues toda expresión válida en $\mathbb{Q}_{sf}(u_1, \dots, u_l)$ es válida también para cualesquiera u_1, \dots, u_l elementos de un *semicampo* arbitrario.

Definición 1.1.6. Dado un *semicampo* $(\mathbb{P}, \oplus, \cdot)$ definimos el **anillo de grupo** $(\mathbb{Z}\mathbb{P}, +, \cdot)$ como sigue:

(i) como conjunto $\mathbb{Z}\mathbb{P} = \mathbb{Z}^{(\mathbb{P})} = \{f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Z} : f \text{ casi siempre es } 0\}$.

(ii) la suma esta dada por

$$(f + g)(p) = f(p) + g(p) \quad (1.2)$$

(iii) el producto esta dado por

$$(f \cdot g)(c) = \sum_{a, b \in \mathbb{P}, a \cdot b = c} f(a)g(b). \quad (1.3)$$

$\mathbb{Z}\mathbb{P}$ será el *anillo base* para un *álgebra de conglomerado*. De la siguiente proposición obtendremos que $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ es un *dominio entero*, de este modo definimos $\mathbb{Q}\mathbb{P}$ como su **campo de fracciones**.

Proposición 1.1.7. Si \mathbb{P} es un *semicampo*, entonces $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ es un *dominio entero*.

Demostración. Sean $f, g \in \mathbb{Z}\mathbb{P}$ con $f, g \neq 0$. Sean $I = \{a \in \mathbb{P} : f(a) \neq 0\}$ y $J = \{a \in \mathbb{P} : g(a) \neq 0\}$. Como I, J son finitos, $I \cup J$ genera un subgrupo (G, \cdot) de \mathbb{P} que es abeliano, libre de torsión y finitamente generado, por lo tanto $G \cong \mathbb{Z}^m$ para alguna $m \in \mathbb{Z}$. Sea $\phi : \mathbb{Z}^m \rightarrow G$ un isomorfismo. Tenemos que

$$(f \cdot g)(c) = \sum_{a \in I, b \in J, a \cdot b = c} f(a)g(b)$$

y por ser ϕ un isomorfismo se tiene que

$$(f \cdot g)(\phi(w)) = \sum_{u,v \in \mathbb{Z}^m, u+v=w} f(\phi(u))g(\phi(v))$$

que es justamente el producto de polinomios. Como $f, g \neq 0$, se tiene que $f \circ \phi, g \circ \phi \neq 0$ y por lo tanto

$$(f \cdot g)(\phi(\deg(f \circ \phi) + \deg(g \circ \phi))) \neq 0$$

es decir $f \cdot g \neq 0$. □

Notación 1.1.8. Llamaremos a $\mathbb{Q}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$ el **anillo de polinomios de Laurent** en n variables con coeficientes racionales y lo denotaremos por $\mathbb{Q}_{\text{Laurent}}(x_1, \dots, x_n)$, análogamente $\mathbb{Z}_{\text{Laurent}}(x_1, \dots, x_n)$ el anillo de polinomios de Laurent en n variables con coeficientes enteros.

Observación 1.1.9. Si J es un conjunto finito y $\mathbb{P} = \text{Trop}(u_j : j \in J)$, entonces $\mathbb{Z}\mathbb{P} \cong \mathbb{Z}_{\text{Laurent}}(u_j : j \in J)$.

1.2. Mutaciones y Semillas

Presentamos ahora los conceptos fundamentales para definir un álgebra de conglomerado de rango n , estos son la definición de semilla y las mutaciones de semillas.

Nota 1.2.1. A lo largo de esta sección n es un número natural positivo que está fijo y \mathbb{P} un semicampo.

Notación 1.2.2. Como **campo ambiente** de un álgebra de conglomerado \mathcal{A} , tomaremos \mathcal{F} , un campo isomorfo al campo de funciones racionales en n variables independientes con coeficientes en $\mathbb{Q}\mathbb{P}$.

Nota 1.2.3. La definición de \mathcal{F} ignora la suma auxiliar en \mathbb{P} .

Definición 1.2.4. Una **Semilla etiquetada** en \mathcal{F} es un triple $(B, \mathbf{y}, \mathbf{x})$, tal que

(i) $B = (b_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ es una matriz antisimetrizable, es decir, existen enteros positivos d_1, \dots, d_n tales que $d_i b_{ij} = -d_j b_{ji}$.

(ii) $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ es una n -ada de elementos de \mathbb{P} .

(iii) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ es una n -ada de elementos de \mathcal{F} , tales que x_1, \dots, x_n son algebraicamente independientes sobre \mathbb{QP} , y $\mathcal{F} = \mathbb{QP}(x_1, \dots, x_n)$ (es decir, x_1, \dots, x_n forman un conjunto generador libre).

Nota 1.2.5. A una pareja (B, \mathbf{y}) que cumpla con (i), (ii) de la definición anterior la llamaremos una Y -semilla etiquetada. Generalmente nos referiremos a \mathbf{x} como el conglomerado (etiquetado) de una semilla etiquetada $(B, \mathbf{y}, \mathbf{x})$, a \mathbf{y} como la n -ada de coeficientes y a B como la matriz de intercambio.

Definición 1.2.6. Una **semilla** en \mathcal{F} es una clase de equivalencia de semillas etiquetadas dada por la relación $(B, \mathbf{y}, \mathbf{x}) \sim (B_\sigma, \mathbf{y}_\sigma, \mathbf{x}_\sigma)$ para toda $\sigma \in S_n$, donde $\mathbf{x}_\sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$, $\mathbf{y}_\sigma = (y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n)})$ y $B_\sigma = (b_{\sigma_{ij}})$ con $b_{\sigma_{ij}} = b_{\sigma(i)\sigma(j)}$.

Nota 1.2.7. A lo largo del presente trabajo, en la mayoría de los casos trabajaremos con semillas etiquetadas. Es por ello que las llamaremos simplemente semillas cuando no haya riesgo de confusión.

Notación 1.2.8. Dado un número real x

$$[x]_+ = \max(x, 0)$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Definición 1.2.9. (Mutaciones de semillas) Sea $(B, \mathbf{y}, \mathbf{x})$ una semilla etiquetada en \mathcal{F} y sea $k \in \{1, \dots, n\}$. La **mutación** μ_k en dirección k de $(B, \mathbf{y}, \mathbf{x})$ es la semilla etiquetada $\mu_k(B, \mathbf{y}, \mathbf{x}) = (B', \mathbf{y}', \mathbf{x}')$ definida como sigue:

- Las entradas de $B' = (b'_{ij})$ están dadas por

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{si } i = k \text{ o } j = k \\ b_{ij} + \operatorname{sgn}(b_{ik})[b_{ik}b_{kj}]_- & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.4)$$

- La n -ada de coeficientes $\mathbf{y}' = (y'_1, \dots, y'_n)$ está dada por

$$y'_j = \begin{cases} y_k^{-1} & \text{si } j = k \\ \frac{y_k^{[b_{ik}]_-}}{(y_k \oplus 1)^{b_{kj}}} y_j & \text{si } j \neq k \end{cases} \quad (1.5)$$

- El conglomerado $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ está dado por

$$x'_j = \begin{cases} x_j & \text{si } j \neq k \\ \frac{y_k \prod x_i^{[b_{jk}]_+} + \prod x_i^{[-b_{ik}]_-}}{(y_k \oplus 1)x_k} & \text{si } j = k \end{cases} \quad (1.6)$$

Nota 1.2.10. Es fácil ver que la matriz B' es antisimetrizable (escogiendo los mismos enteros d_1, \dots, d_n que para B) y que x'_1, \dots, x'_n son un conjunto generador libre, y por lo tanto $(B', \mathbf{y}', \mathbf{x}')$ en efecto es una semilla etiquetada.

Observación 1.2.11. Si $B \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ es una matriz rectangular, podemos usar la misma fórmula para definir su mutación en dirección k para $k \in \{1, \dots, \min(m, n)\}$.

Observación 1.2.12. La mutación de semillas etiquetadas induce una mutación en semillas.

Nota 1.2.13. No es difícil probar que $\mu_k(\mu_k(B, \mathbf{y}, \mathbf{x})) = (B, \mathbf{y}, \mathbf{x})$ para toda $k \in \{1, \dots, n\}$, es decir, las mutaciones μ_k son involuciones [4].

Ahora veamos que hay una estrecha relación entre las matrices antisimétricas y sus mutaciones, con los carcajes (gráficas orientadas) con un número finito de vértices y aristas, sin lazos ni 2-ciclos.

Nota 1.2.14. Formalmente se puede definir un carcaj como un cuádruplo $Q = (V, A, s, t)$, donde V y A son conjuntos (A debe cumplir ciertas propiedades adicionales) y s y t son funciones de A en V . Pensamos a V como los vértices del carcaj, A como las aristas y las funciones s y t nos dicen el inicio y el final de cada arista. Nosotros trabajaremos solamente en el caso en el que V es finito, es decir, cuando el carcaj tiene un número finito de vértices y solo consideraremos el caso en el que hay un número finito de aristas entre dos vértices; haremos la convención de que los vértices son los números $1, \dots, m$, donde m es la cardinalidad de V , a menos de que se diga lo contrario.

Notación 1.2.15. Dado un carcaj Q con n vértices (con un número finito de aristas y sin lazos ni 2-ciclos), podemos asociarle una matriz $B_Q = (b_{ij}^Q) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ dada por

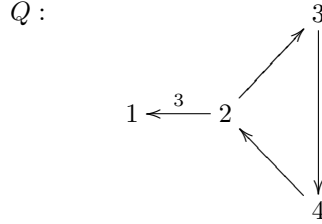
$$b_{ij}^Q = \# \text{ de flechas de } i \text{ a } j - \# \text{ de flechas de } j \text{ a } i. \quad (1.7)$$

Notación 1.2.16. Dados dos vértices t y t' de un carcaj Q , escribiremos

$$t \xrightarrow{m} t' \quad (1.8)$$

para indicar que hay m flechas de t a t' , en caso de que m sea positivo, si m es negativo, pensaremos que hay m flechas de t' a t ; y en caso de que $m = 0$, que no hay flechas entre t y t' .

Ejemplo 1.2.17. Consideremos el siguiente carcaj



entonces, se tiene que la matriz B_Q asociada a dicho carcaj es:

$$B_Q = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

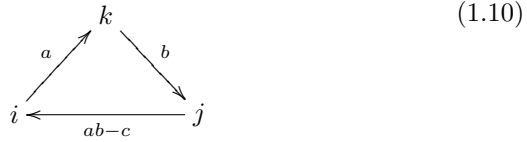
Nota 1.2.18. La matriz B_Q asociada a un carcaj Q es antisimétrica, es decir, $b_{ij}^Q = -b_{ji}^Q$; en particular es antisimetrizable y por lo tanto, al hacer una elección de coeficientes, un carcaj da origen a una semilla y veremos que, por lo tanto, da origen a un álgebra de conglomerado.

Definición 1.2.19. Sea Q un carcaj con n vértices y $k \in \{1, \dots, n\}$, la **mutación** μ_k en el vértice k de Q es el carcaj $\mu_k(Q) = Q'$ definido como sigue:

- Los vértices de Q' son los mismos que los de Q .
- Las aristas que inciden en el vértice k o que salen del vértice k cambian de dirección.
- Dada una situación como sigue en Q con $a, b \geq 0$

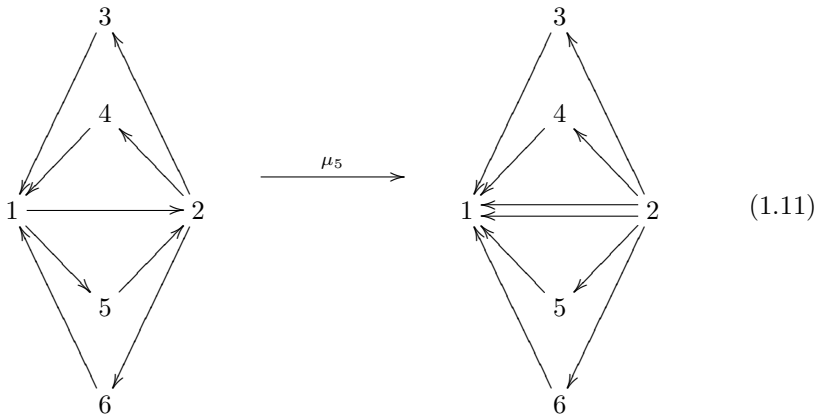
$$(1.9)$$

En Q' aparece lo siguiente



- Las aristas que no involucran al vértice k no cambian.

Ejemplo 1.2.20. Tenemos lo siguiente:



Nota 1.2.21. También se tienen que si Q es un carcaj entonces, $B_{\mu_k(Q)} = \mu_k(B_Q)$

1.3. Definición principal

Ahora tenemos los elementos necesarios para definir un álgebra de conglomero. Analizaremos un caso particular proveniente de un carcaj.

Notación 1.3.1. Consideramos el árbol n -regular \mathbb{T}_n (la gráfica conexa, sin ciclos y n -regular), cuyas aristas están etiquetadas con los números $1, \dots, n$ de tal manera que las n aristas que salen de cada vértice tienen diferentes etiquetas. Escribimos $t \xrightarrow{k} t'$ para indicar que dos vértices $t, t' \in \mathbb{T}_n$ están unidos por una arista con etiqueta k .

Definición 1.3.2. Un **patrón de intercambio** (resp. **Y-patrón**) es la asignación de una semilla etiquetada $\sum_t = (B_t, \mathbf{y}_t, \mathbf{x}_t)$ (resp. una Y-semilla etiquetada (B_t, \mathbf{y}_t)) a cada vértice $t \in \mathbb{T}_n$, tal que las semillas asociadas a los extremos de cualquier arista $t \xrightarrow{k} t'$ se obtienen una de la otra por mutación en dirección k . Los elementos de \sum_t se denotan como sigue:

$$\mathbf{x}_t = (x_{1;t}, \dots, x_{n;t}), \mathbf{y}_t = (y_{1;t}, \dots, y_{n;t}), B_t = (b_{ij}^t). \quad (1.12)$$

Nota 1.3.3. El hecho de que las mutaciones sean involuciones, hace que nuestra definición tenga sentido. Además, es claro, que un patrón de intercambio (resp. un Y-patrón) está determinado de manera única por cualquiera de sus semillas (resp. Y-semillas).

Definición 1.3.4. Dado un patrón de intercambio, denotamos por

$$\mathcal{X} = \bigcup_{t \in \mathbb{T}_n} \mathbf{x}_t = \{x_{i;t} : t \in \mathbb{T}_n, 1 \leq i \leq n\}, \quad (1.13)$$

la unión de los conglomerados del patrón de intercambio. Nos referimos a los elementos $x_{i;t} \in \mathcal{X}$ como las variables de conglomerado. El **álgebra de conglomerado** de rango n \mathcal{A} asociada al patrón de intercambio dado es la \mathbb{ZP} -subálgebra del campo ambiente \mathcal{F} generada por todas las variables de conglomerado, es decir, $\mathcal{A} = \mathbb{ZP}[\mathcal{X}]$. Denotamos a $\mathcal{A} = \mathcal{A}(B, \mathbf{y}, \mathbf{x})$, donde $(B, \mathbf{y}, \mathbf{x}) = (B_t, \mathbf{y}_t, \mathbf{x}_t)$ es cualquier semilla etiquetada del patrón de intercambio dado.

Nota 1.3.5. Dado un patrón de intercambio y una elección de coeficientes en alguna semilla inicial \sum_{t_0} , el álgebra de conglomerado asociada a dicho patrón de intercambio, queda totalmente determinada por la matriz de intercambio de dicha semilla inicial.

Ahora veremos un ejemplo concreto de un álgebra de conglomerado proveniente de un carcaj.

Ejemplo 1.3.6. (Tipo A_2) Sea $n = 2$. Consideramos el diagrama de Dynkin A_2 :

$$1 \longrightarrow 2$$

Tenemos que el árbol \mathbb{T}_2 es una cadena infinita. Denotamos a sus vértices por $\dots t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots$ y etiquetamos sus aristas como sigue:

$$\dots \xrightarrow{2} t_{-1} \xrightarrow{1} t_0 \xrightarrow{2} t_1 \xrightarrow{1} t_2 \xrightarrow{2} t_3 \xrightarrow{1} \dots \quad (1.14)$$

Asociamos a cada vértice t_m , $m \in \mathbb{Z}$, una semilla etiquetada $\sum_m = (B_m, \mathbf{y}_m, \mathbf{x}_m)$, donde \sum_0 , la semilla inicial, está dada por:

$$B_0 = B_{A_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 = (y_1, y_2), \quad \mathbf{x}_0 = (x_1, x_2). \quad (1.15)$$

En la siguiente tabla se muestran las semillas etiquetadas \sum_0, \dots, \sum_5 . Notamos que la semilla etiquetada \sum_5 se obtiene de la semilla \sum_0 intercambiando los índices 1 y 2; la secuencia continua de manera periódica y de este modo obtenemos que $\sum_0 = \sum_{10}$. Más aún se tiene que $\sum_t = \sum_{t+10k}$ para toda $k \in \mathbb{Z}$. De este modo tenemos que las variables de conglomerado son precisamente las que se muestran en la tabla.

t	B_t	$y_{1;t}$	$y_{2;t}$	$x_{1;t}$	$x_{2;t}$
0	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	y_1	y_2	x_1	x_2
1	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$y_1(y_2 \oplus 1)$	$\frac{1}{y_2}$	x_1	$\frac{x_1 y_2 + 1}{x_2(y_2 \oplus 1)}$
2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{y_1(y_2 \oplus 1)}$	$\frac{y_1 y_2 \oplus y_1 \oplus 1}{y_2}$	$\frac{x_1 y_1 y_2 + y_1 + x_2}{(y_1 y_2 \oplus y_1 \oplus 1)x_1 x_2}$	$\frac{x_1 y_2 + 1}{x_2(y_2 \oplus 1)}$
3	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{y_1 \oplus 1}{y_1 y_2}$	$\frac{y_2}{y_1 y_2 \oplus y_1 \oplus 1}$	$\frac{x_1 y_1 y_2 + y_1 + x_2}{(y_1 y_2 \oplus y_1 \oplus 1)x_1 x_2}$	$\frac{y_1 + x_2}{x_1(y_1 \oplus 1)}$
4	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{y_1 y_2}{y_1 \oplus 1}$	$\frac{1}{y_1}$	x_2	$\frac{y_1 + x_2}{x_1(y_1 \oplus 1)}$
5	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	y_2	y_1	x_2	x_1

1.4. Coeficientes principales

En esta sección se desarrollarán los aspectos básicos de la teoría cuando el semicampo de coeficientes es un semicampo tropical.

Definición 1.4.1. *Un álgebra de conglomerado es de **tipo geométrico** si el semicampo de coeficientes \mathbb{P} es un semicampo tropical.*

Notación 1.4.2. *Para álgebras de conglomerado de tipo geométrico, denotaremos a los generadores de \mathbb{P} por x_{n+1}, \dots, x_m (para algún entero $m \geq n+1$), es decir, $\mathbb{P} = \text{Trop}(x_{n+1}, \dots, x_m)$. Como los coeficientes $y_{1;t}, \dots, y_{n;t}$ de cada semilla $\sum_t = (B, \mathbf{y}, \mathbf{x})$ son monomios de Laurent en x_{n+1}, \dots, x_m , definimos los enteros b_{ij}^t para $j \in \{1, \dots, n\}$ y $n < i \leq m$, como*

$$y_{j;t} = \prod_{i=n+1}^m x_i^{b_{ij}^t} \quad (1.16)$$

De este modo, agregando una matriz complementaria a la matriz de intercambio B_t , obtenemos una matriz de $m \times n$:

$$\tilde{B}_t = (b_{ij}^t) \quad (1.17)$$

cuyas entradas b_{ij}^t con $i > n$ sirven para codificar los coeficientes $y_{j;t}$.

Definición 1.4.3. *Decimos que un patrón de intercambio $t \mapsto (B_t, \mathbf{y}_t, \mathbf{x}_t)$ (o que el álgebra de conglomerado \mathcal{A} correspondiente) tiene **coeficientes principales en el vértice t_0** si $\mathbb{P} = \text{Trop}(y_1, \dots, y_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$.*

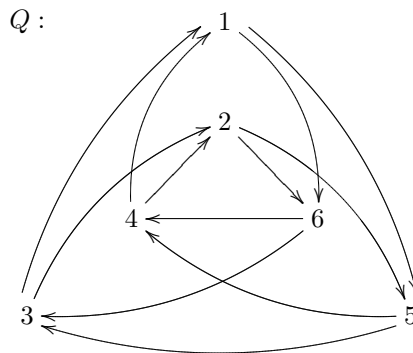
Nota 1.4.4. *La definición anterior se puede parafrasear como sigue: un álgebra de conglomerado \mathcal{A} tiene coeficientes principales en el vértice t_0 , si \mathcal{A} es de tipo geométrico y \tilde{B}_{t_0} es una matriz de $2n \times n$, cuya parte principal (los primeros n renglones) es la matriz B_{t_0} y su parte complementaria (los últimos n renglones) es la matriz identidad de $n \times n$.*

Las álgebras de conglomerado con coeficientes principales (en algún vértice t_0) resultan ser de gran importancia, pues las variables de conglomerado, de cualquier otra álgebra de conglomerado que tenga la misma matriz de intercambio, se pueden obtener a partir del álgebra con coeficientes principales. Para un estudio más detallado se puede consultar [6].

Capítulo 2

El carcaj Q

A partir de ahora, cada vez que nos refiramos al carcaj Q pensaremos en el carcaj de la siguiente figura. En este capítulo describiremos a todas las matrices de intercambio del álgebra de conglomerado con coeficientes principales asociada al carcaj Q , identificando parejas de mutaciones específicas. Comenzaremos introduciendo la teoría referente a las fracciones de Farey, dichas fracciones nos servirán para parametrizar a las matrices del álgebra de conglomerado en cuestión.



2.1. Fracciones de Farey

A lo largo de esta sección trabajaremos principalmente con números racionales, asumiremos que todas las fracciones están simplificadas, a menos de que se diga lo contrario.

Notación 2.1.1. Denotamos por $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ al conjunto de los números racionales extendidos. Este conjunto tiene las siguientes propiedades:

(i) Es un conjunto totalmente ordenado (con el orden obvio).

(ii) Dado $q \in \mathbb{Q}_\infty$, existen dos únicos números enteros $d(q)$ y $r(q)$ tales que

$$q = \frac{d(q)}{r(q)} \quad (2.1)$$

con $r(q) \geq 0$ y $(r(q), d(q)) = 1$.

Nota 2.1.2. Si $r(q) = 0$, entonces, como $(r(q), d(q)) = 1$, tomamos $d(q) = 1$, es decir $\infty = \frac{1}{0}$, análogamente $0 = \frac{0}{1}$.

Definición 2.1.3. Dados $q, q' \in \mathbb{Q}_\infty$ definimos

$$\Delta(q, q') := \left| \det \begin{pmatrix} d(q) & d(q') \\ r(q) & r(q') \end{pmatrix} \right|. \quad (2.2)$$

En caso de que $\Delta(q, q') = 1$, diremos que q y q' son vecinos de Farey.

Observación 2.1.4. Si q y q' son vecinos de Farey, entonces

$$\begin{aligned} (d(q) + d(q'), r(q) + r(q')) &= 1, \\ (d(q) - d(q'), r(q) - r(q')) &= 1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Demostración. Encontramos una combinación lineal de dichos números que sea, en valor absoluto, igual a 1

$$\begin{aligned} |(d(q) + d(q'))r(q') - (r(q) + r(q'))d(q')| &= |d(q)r(q') - r(q)d(q')| \\ &= \Delta(q, q') \\ &= 1. \end{aligned}$$

Concluimos que $(d(q) + d(q'), r(q) + r(q')) = 1$, análogamente,

$$\begin{aligned}
|(d(q) - d(q'))r(q') - (r(q) - r(q'))d(q')| &= |d(q)r(q') - r(q)d(q')| \\
&= \Delta(q, q') \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

Definición 2.1.5. Para $q, q' \in \mathbb{Q}_\infty$ vecinos de Farey, la **suma de Farey** de q y q' es

$$q \oplus q' := \frac{d(q) + d(q')}{r(q) + r(q')} \quad (2.4)$$

análogamente, su **resta de Farey** es

$$q \ominus q' := \frac{d(q) - d(q')}{r(q) - r(q')}. \quad (2.5)$$

Por la observación anterior (2.1.4) tenemos que

$$\begin{aligned}
d(q \oplus q') &= d(q) + d(q') \\
r(q \oplus q') &= r(q) + r(q') \\
d(q \ominus q') &= \pm(d(q) + d(q')) \\
r(q \ominus q') &= \pm(r(q) + r(q')).
\end{aligned} \quad (2.6)$$

La elección de signos en la últimas dos ecuaciones es positiva si $r(q) \geq r(q')$ y negativa en otro caso.

Observación 2.1.6. La suma y resta de Farey son conmutativas.

Definición 2.1.7. Una terna $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{Q}_\infty^3$ es una **terna de Farey** si y solamente si $\Delta(q_i, q_j) = 1$ para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ con $i \neq j$.

Lema 2.1.8. Dado una terna de Farey (q_1, q_2, q_3) con $q_1 < q_2 < q_3$, entonces $q_2 = q_1 \oplus q_3$.

Demostración. Por hipótesis $\Delta(q_i, q_j) = 1$, con i, j como en la definición anterior. De donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones en $d(q_2)$ y $r(q_2)$

$$\begin{cases} d(q_1)r(q_2) - r(q_1)d(q_2) & = -1 \\ -d(q_3)r(q_2) + r(q_3)d(q_2) & = -1 \end{cases}$$

cuyo determinante es $\Delta(q_1, q_3) = 1$, es decir, tiene una única solución, es inmediato verificar que dicha solución es $r(q_2) = r(q_1) + r(q_3)$ y $d(q_2) = d(q_1) + d(q_3)$, de donde $q_2 = q_1 \oplus q_3$. \square

Corolario 2.1.9. *Sea (q_1, q_2, q_3) una terna de Farey, con $q_r < q_s < q_t$, $\{r, s, t\} = \{1, 2, 3\}$, entonces $q_s = q_r \oplus q_t$.*

Demostración. La demostración se obtiene del lema anterior, permutando los índices. \square

Ésto motiva la siguiente nota.

Nota 2.1.10. *Tenemos una acción natural de S_3 en \mathbb{Q}_∞ , dado $\sigma \in S_3$ entonces*

$$\sigma(q_1, q_2, q_3) = (q_{\sigma(1)}, q_{\sigma(2)}, q_{\sigma(3)}), \quad (2.7)$$

en virtud de lo ilustrado en el lema y corolario anterior, nosotros consideraremos las ternas de Farey salvo permutación, es decir, consideraremos iguales todas las permutaciones de una terna de Farey.

Notación 2.1.11. *Escribiremos $(q_1, q_2, q_3) = [q'_1, q'_2, q'_3]$ para indicar que $(q_1, q_2, q_3) = \sigma(q'_1, q'_2, q'_3)$ para algún $\sigma \in S_3$.*

Nota 2.1.12. *Dada una terna de Farey (q_1, q_2, q_3) , usaremos los índices $\{r, s, t\} = \{1, 2, 3\}$ para fijar el orden de las fracciones con la convención $q_r < q_s < q_t$.*

Lema 2.1.13. *Si $\Delta(q_1, q_2) = 1$ entonces $\Delta(q_i, q_1 \oplus q_2) = \Delta(q_i, q_1 \ominus q_2) = 1$, para toda $i \in \{1, 2\}$.*

Demostración. Notamos que $d(q_1 \oplus q_2) = d(q_1) + d(q_2)$ y $r(q_1 \oplus q_2) = r(q_1) + r(q_2)$. Sea $i \in \{1, 2\}$, entonces

$$\begin{aligned} \Delta(q_i, q_1 \oplus q_2) &= |d(q_i)(r(q_1) + r(q_2)) - r(q_i)(d(q_1) + d(q_2))| \\ &= |\pm \Delta(q_i, q_1) \pm \Delta(q_i, q_2)| \\ &= |\pm \delta_{i,1} \pm \delta_{i,2}| \\ &= 1, \end{aligned}$$

donde $\delta_{i,j}$ es la delta de Kronecker. Para ver que $\Delta(q_1, q_1 \ominus q_2) = 1$, notamos que $d(q_1 \ominus q_2) = \pm(d(q_1) + d(q_2))$, $r(q_1 \ominus q_2) = \pm(r(q_1) + r(q_2))$ y procedemos del mismo modo. \square

Teorema 2.1.14. *Para todo $q \in \mathbb{Q}$, existen dos únicos vecinos de Farey $q', q'' \in \mathbb{Q}_\infty$ tales que $q = q' \oplus q''$. Llamaremos a esta expresión la descomposición de Farey de q .*

Demostración. Dado que $(d(q), r(q)) = 1$, sabemos que podemos encontrar soluciones enteras a la ecuación

$$d(q)y - r(q)x = 1.$$

Es claro que si $x = r$, $y = s$ es una solución a dicha ecuación, entonces $x = r - td(q)$, $y = s - tr(q)$ también lo es, para toda $t \in \mathbb{Z}$, por lo que, escogiendo una t adecuada, podemos encontrar números enteros a y b con $0 \leq b < r(q)$ soluciones a dicha ecuación. Tomamos

$$q' = \frac{a}{b},$$

$$q'' = q \ominus q'.$$

Tenemos que $a = d(q')$ y $b = r(q')$ pues $(a, b) = 1$ y $b \geq 0$. Además

$$r(q) - r(q') = r(q) - b \geq 0,$$

$$(d(q) - d(q'), r(q) - r(q')) = 1,$$

es decir,

$$d(q'') = d(q) - d(q'),$$

$$r(q'') = r(q) - r(q').$$

Por el lema anterior, $\Delta(q', q'') = 1$. Ahora

$$\begin{aligned} q' \oplus q'' &= \frac{d(q') + d(q'')}{r(q') + r(q'')} \\ &= \frac{d(q') + d(q) - d(q')}{r(q') + r(q) - r(q')} \\ &= q. \end{aligned}$$

Para ver la unicidad supongamos que $q = p \oplus p'$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $p, q' < q < p', q''$, como $\Delta(q, p) = \Delta(q, q') = 1$ y $q > p, q'$, obtenemos las siguientes ecuaciones

$$d(q)r(q') - r(q)d(q') = -1,$$

$$d(q)r(p) - r(q)d(p) = -1$$

restando las ecuaciones, obtenemos

$$d(q)(r(q') - r(p)) = r(q)(d(q') - d(p)),$$

concluimos que $r(q') = r(p)$ si y solo si $d(q') = d(p)$, en particular, $q' \neq p$ si y solo si $r(q') \neq r(p)$. Supongamos $q' \neq p$, entonces

$$\frac{d(q)}{r(q)} = \frac{d(q') - d(p)}{r(q') - r(p)},$$

pero $-r(q) < r(q') - r(p) < r(q)$, una contradicción, por lo tanto $q' = p$. Análogamente obtenemos que $q'' = p'$. \square

Nota 2.1.15. *El teorema anterior es falso para \mathbb{Q}_∞ , es decir, no existen $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}_\infty$ tales que $\infty = q_1 \oplus q_2$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, sean $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}_\infty$ tales que $\infty = q_1 \oplus q_2$, entonces

$$d(q_1) + d(q_2) = 1,$$

$$r(q_1) + r(q_2) = 0,$$

como $r(q_1), r(q_2) \geq 0$, entonces $r(q_1), r(q_2) = 0$, luego $q_1 = q_2 = \infty$ una contradicción. \square

Definición 2.1.16. *Sea (q_1, q_2, q_3) una terna de Farey (con $q_r < q_s < q_t$), sea $k \in \{1, 2, 3\}$, la **mutación** μ_k en dirección k de (q_1, q_2, q_3) es la terna de números racionales $\mu_k(q_1, q_2, q_3) = (q'_1, q'_2, q'_3)$ definido como sigue:*

$$q'_i = \begin{cases} q_i & \text{si } i \neq k \\ q_s \oplus q_j & \text{si } i = k \neq s, \text{ con } i \neq j \in \{r, t\} \\ q_r \ominus q_t & \text{si } i = k = s \end{cases} \quad (2.8)$$

Ejemplo 2.1.17. *Calculemos todas las mutaciones de la terna de Farey $(\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{2}{5})$*

$$\mu_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{2}{5} \right) = \left(\frac{5}{12}, \frac{3}{7}, \frac{2}{5} \right)$$

$$\mu_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{2}{5} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5} \right)$$

$$\mu_3 \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{2}{5} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9} \right)$$

Veamos que las mutaciones de ternas de Farey tienen propiedades semejantes a las mutaciones de semillas, por ejemplo, al mutar una terna de Farey lo que obtenemos es nuevamente una terna de Farey y también son involuciones, es decir, mutar una terna dos veces en la misma dirección lo deja invariante.

Proposición 2.1.18. *Dada una terna de Farey (q_1, q_2, q_3) , se tiene que $\mu_k(q_1, q_2, q_3) = (q'_1, q'_2, q'_3)$ es una terna de Farey.*

Demostración. Si $k \neq s$ entonces tenemos que:

$$(q'_1, q'_2, q'_3) = [q_i, q_s, q_s \oplus q_i]$$

para alguna $i \in \{1, 2, 3\}$, que claramente es una terna de Farey. Si $k = s$ lo que se obtiene es que:

$$(q'_1, q'_2, q'_3) = [q_i, q_j, q_i \ominus q_j]$$

con $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, también es claro que es una terna de Farey. \square

Proposición 2.1.19. *Para cualquier terna de Farey (q_1, q_2, q_3) , se tiene que $\mu_k(\mu_k(q_1, q_2, q_3)) = (q_1, q_2, q_3)$.*

Demostración. Sin perder generalidad, podemos suponer que $q_1 = q_2 \oplus q_3$. Veamos caso por caso, si $k = 1$

$$\begin{aligned} \mu_1(\mu_1(q_1, q_2, q_3)) &= \mu_1(q_2 \ominus q_3, q_2, q_3) \\ &= (q_2 \oplus q_3, q_2, q_3) \\ &= (q_1, q_2, q_3). \end{aligned}$$

Si $k = 2$:

$$\begin{aligned}\mu_2(\mu_2(q_1, q_2, q_3)) &= \mu_2(q_1, q_1 \oplus q_3, q_3) \\ &= (q_1, q_1 \ominus q_3, q_3) \\ &= (q_1, q_2, q_3).\end{aligned}$$

Y por último, el caso en que $k = 3$ es análogo al caso $k = 2$. \square

Lema 2.1.20. *Si $q_1 < 0 < q_2$ con $\Delta(q_1, q_2) = 1$, entonces $q_1 = \frac{-z}{1}$, $q_2 = \frac{1}{0}$ con $z > 0$.*

Demostración. Como $q_1 < q_2$ y $\Delta(q_1, q_2) = 1$, entonces

$$d(q_1)r(q_2) - r(q_1)d(q_2) = -1,$$

con $d(q_1) = -z < 0 \leq d(q_2)$, $r(q_1), r(q_2)$ y $r(q_1) \neq 0 \neq d(q_2)$, es decir, $d(q_1)r(q_2) \leq 0 < r(q_1)d(q_2)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}d(q_1)r(q_2) &= 0, \\ r(q_1)d(q_2) &= 1.\end{aligned}$$

Deducimos que $r(q_2) = 0$, esto implica que $d(q_2) = 1 = r(q_1)$. \square

Definición 2.1.21. *Sea (q_1, q_2, q_3) una terna de Farey, la **complejidad** de (q_1, q_2, q_3) es*

$$c(q_1, q_2, q_3) = |d(q_s)| + r(q_s). \quad (2.9)$$

Observación 2.1.22. *Si $c(q_1, q_2, q_3) = 1$ entonces $(q_1, q_2, q_3) = [\frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{0}]$.*

Demostración. Como $c(q_1, q_2, q_3) = 1$ entonces

$$|d(q_s)| + r(q_s) = 1$$

por lo que $q_s = 0 = \frac{0}{1}$ ó $q_s = \infty = \frac{1}{0}$, pero $q_s = q_r \oplus q_t$ entonces $q_s = 0$ pues ∞ no se puede expresar como suma de Farey de dos racionales, luego $\frac{0}{1} = \frac{-1}{1} \oplus \frac{1}{0}$, como la descomposición de Farey es única se tiene el resultado. \square

Lema 2.1.23. Si (q_1, q_2, q_3) es una terna de Farey diferente a $[\frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{0}]$, entonces existe una única $k^* \in \{1, 2, 3\}$ tal que $c(\mu_{k^*}(q_1, q_2, q_3)) < c(q_1, q_2, q_3)$. Más aún,

- si $(q_1, q_2, q_3) = [\frac{-z-1}{1}, \frac{-z}{1}, \frac{1}{0}]$ entonces $k^* = r$ y en todos los demás casos $k^* = s$.
- $c(q_1, q_2, q_3) < c(\mu_k(q_1, q_2, q_3))$ si $k \neq k^*$.

Demostración. En general se tiene que

$$c(\mu_r(q_1, q_2, q_3)) = |d(q_s) + d(q_t)| + r(q_s) + r(q_t),$$

$$c(\mu_s(q_1, q_2, q_3)) = |d(q_r) - d(q_t)| + |r(q_r) - r(q_t)|,$$

$$c(\mu_t(q_1, q_2, q_3)) = |d(q_s) + d(q_r)| + r(q_s) + r(q_r).$$

Tenemos tres casos a considerar, a saber

- (1) $q_1, q_2, q_3 \geq 0$,
- (2) $q_1, q_2, q_3 \leq 0$,
- (3) $(q_1, q_2, q_3) = [\frac{-z-1}{1}, \frac{-z}{1}, \frac{1}{0}]$ con $z \geq 1$.

Caso 1.

Como $q_1, q_2, q_3 \geq 0$, en particular, $d(q_i), r(q_i) \geq 0$ para toda $i \in \{r, s, t\}$, luego

$$\begin{aligned} c(q_1, q_2, q_3) &= d(q_s) + r(q_s) \\ &< d(q_s) + d(q_t) + r(q_s) + r(q_t) \\ &= c(\mu_r(q_1, q_2, q_3)). \end{aligned}$$

Es decir, $c(q_1, q_2, q_3) < c(\mu_r(q_1, q_2, q_3))$, de manera análoga obtenemos que $c(q_1, q_2, q_3) < c(\mu_t(q_1, q_2, q_3))$. Finalmente como

$$0 \leq d(q_r), d(q_t) \leq d(q_s)$$

$$0 \leq r(q_r), r(q_t) \leq r(q_s)$$

entonces,

$$|d(q_r) - d(q_t)| \leq d(q_s)$$

$$|r(q_r) - r(q_t)| \leq r(q_s).$$

Alguna de las desigualdades debe de ser estricta, de lo contrario $q_s = q_r \ominus q_t$, esto implica que $q_r < q_r \ominus q_t < q_t$, que es una contradicción, por lo tanto,

$$\begin{aligned} c(\mu_s(q_1, q_2, q_3)) &= |d(q_r) - d(q_t)| + |r(q_r) - r(q_t)| \\ &< d(q_s) + r(q_s) \\ &= c(q_1, q_2, q_3). \end{aligned}$$

Por lo tanto $c(\mu_s(q_1, q_2, q_3)) < c(q_1, q_2, q_3)$ y $c(q_1, q_2, q_3) < c(\mu_k(q_1, q_2, q_3))$, si $k \neq s$. Tomamos $k^* = s$. Hemos terminado el primer caso.

Caso 2

Supongamos que $q_1, q_2, q_3 \leq 0$, entonces, $-q_1, -q_2, -q_3 \geq 0$ y son vecinos de Farey dos a dos, además se tiene que:

- $-q_s = (-q_r) \oplus (-q_t)$,
- $d(q_i) = -d(-q_i)$ y $r(q_i) = r(-q_i)$ para toda $i \in \{1, 2, 3\}$.

Por lo tanto

$$c(q_1, q_2, q_3) = c(-q_1, -q_2, -q_3),$$

$$c(\mu_k(q_1, q_2, q_3)) = c(\mu_k(-q_1, -q_2, -q_3)),$$

para toda $k \in \{1, 2, 3\}$, por el primer caso, obtenemos el resultado.

Caso 3

Tenemos que $(q_1, q_2, q_3) = [\frac{-z-1}{1}, \frac{-z}{1}, \frac{1}{0}]$ con $z \geq 1$, es decir,

$$q_r = \frac{-z-1}{1},$$

$$q_s = \frac{-z}{1},$$

$$q_t = \frac{1}{0},$$

de donde,

$$\begin{aligned} c\left(\frac{-z-1}{1}, \frac{-z}{1}, \frac{1}{0}\right) &= z + 1, \\ c\left(\mu_r\left(\frac{-z-1}{1}, \frac{-z}{1}, \frac{1}{0}\right)\right) &= z, \\ c\left(\mu_s\left(\frac{-z-1}{1}, \frac{-z}{1}, \frac{1}{0}\right)\right) &= z + 3, \\ c\left(\mu_t\left(\frac{-z-1}{1}, \frac{-z}{1}, \frac{1}{0}\right)\right) &= 2z + 3. \end{aligned}$$

tomando $k^* = r$ obtenemos el resultado. □

Corolario 2.1.24. *Dada una terna de Farey (q_1, q_2, q_3) existe una sucesión de mutaciones $\mu_{a_1}, \dots, \mu_{a_m}$ tal que $\mu_{a_m} \circ \dots \circ \mu_{a_1}(q_1, q_2, q_3) = [\frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{0}]$.*

Demostración. Para $(q_1, q_2, q_3) = [\frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{0}]$, tomamos $m = 0$. Si $c(q_1, q_2, q_3) > 1$, por el lema anterior, sabemos que existen mutaciones $\mu_{a_1}, \mu_{a_2}, \dots$ tales que

$$c(q_1, q_2, q_3) > c(\mu_{a_1}(q_1, q_2, q_3)) > c(\mu_{a_2} \circ \mu_{a_1}(q_1, q_2, q_3)) > \dots$$

Como la complejidad de una terna de Farey siempre es mayor o igual que 1, la lista de mutaciones es finita, más aun, en algún momento alcanzamos el mínimo que es 1. □

Corolario 2.1.25. *Para cualquier terna de Farey (q_1, q_2, q_3) , $i, j \in \{1, 2, 3\}$ con $i \neq j$, se tiene que $\mu_i(q_1, q_2, q_3) \neq \mu_j(q_1, q_2, q_3)$.*

Demostración. Supongamos que $\mu_i(q_1, q_2, q_3) = \mu_j(q_1, q_2, q_3)$ para alguna terna de Farey (q_1, q_2, q_3) con $i, j \in \{1, 2, 3\}$, podemos suponer sin perder generalidad que

$$c(q_1, q_2, q_3) < c(\mu_i(q_1, q_2, q_3))$$

de lo contrario $i = j = k^*$, con k^* como en 2.1.23. De este modo tenemos que

$$c(\mu_i(\mu_i(q_1, q_2, q_3))) = c(q_1, q_2, q_3),$$

y que

$$\begin{aligned} c(\mu_j(\mu_i(q_1, q_2, q_3))) &= c(\mu_j(\mu_j(q_1, q_2, q_3))) \\ &= c(q_1, q_2, q_3). \end{aligned}$$

Es decir, $c(\mu_i(\mu_i(q_1, q_2, q_3))) < c(\mu_i(q_1, q_2, q_3))$ y $c(\mu_j(\mu_i(q_1, q_2, q_3))) < c(\mu_i(q_1, q_2, q_3))$ pero sabemos que hay una única dirección que cumple esto, por lo que $i = j$. \square

Teorema 2.1.26. *La gráfica de intercambio para los triplos de Farey es el árbol \mathbb{T}_3 .*

Demostración. La gráfica es 3-regular por construcción, y por 2.1.24 es conexa pues cualquier terna esta conectado con la terna $[\frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{0}]$. Además por 2.1.25 si $i \neq j$ entonces $\mu_i(q_1, q_2, q_3) \neq \mu_j(q_1, q_2, q_3)$, es decir, la gráfica no tiene 2-ciclos. \square

Definición 2.1.27. *La **distancia** de la terna (q_1, q_2, q_3) a la terna (q'_1, q'_2, q'_3) es el mínimo número m tal que $\mu_{a_m} \circ \dots \circ \mu_{a_1}(q_1, q_2, q_3) = [q'_1, q'_2, q'_3]$.*

2.2. Las componentes \mathbb{T}_3^k

Al remover un vértice del árbol \mathbb{T}_3 , obtenemos una gráfica con 3 componentes conexas. Esta sección esta dedicada a caracterizar los triplos de cada componente conexa. Además, daremos biyecciones compatibles con las mutaciones entre estas componentes, dichas biyecciones serán de gran importancia para el resultado principal de éste trabajo.

Nota 2.2.1. *A partir de ahora escribiremos los triplos de Farey en su forma $(\frac{\text{par}}{\text{impar}}, \frac{\text{impar}}{\text{impar}}, \frac{\text{impar}}{\text{par}})$, es claro que si mutamos una terna organizada de esta forma, lo que obtenemos es una terna del mismo estilo. Este orden nos resultará muy útil en la siguiente sección.*

Notación 2.2.2. *Por 2.1.26 podemos pensar que los vértices de \mathbb{T}_3 son los triplos de Farey, de este modo $\mathbb{T}_3 \setminus (\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0})$ tiene tres componentes conexas, que denotaremos como sigue:*

- \mathbb{T}_3^{-1} es la componente que tiene a $\mu_1(\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0})$,

- \mathbb{T}_3^0 es la componente que tiene a $\mu_2(\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0})$ y

- \mathbb{T}_3^∞ es la componente que tiene a $\mu_3(\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0})$.

Nota 2.2.3. La razón de usar a los índices $\{-1, 0, \infty\}$ en 2.2.2, es para evitar confusión en la siguiente sección.

Nota 2.2.4. En nuestro caso, la componente conexa de una terna (q_1, q_2, q_3) en $\mathbb{T}_3 \setminus (\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0})$ esta formada por todos lo triplos (q'_1, q'_2, q'_3) tales que existen mutaciones $\mu_{a_1}, \dots, \mu_{a_m}$, tales que

$$\mu_{a_m} \circ \dots \circ \mu_{a_1}(q_1, q_2, q_3) = (q'_1, q'_2, q'_3) \quad (2.10)$$

y $\mu_{a_n} \circ \dots \circ \mu_{a_1}(q_1, q_2, q_3) \neq (\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0})$ si $n \leq m$.

Los siguientes resultados caracterizarán a los triplos de cada componete.

Lema 2.2.5. Si (q_1, q_2, q_3) es una terna de Farey formado por números no negativos, entonces $\mu_k(q_1, q_2, q_3)$ es una terna de números no negativos o es la terna $(\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0})$, para toda $k \in \{1, 2, 3\}$.

Demostración. Las siguientes desigualdades son obvias

$$0 \leq q_r < q_r \oplus q_s < q_s < q_s \oplus q_t < q_t$$

por lo que $\mu_k(q_1, q_2, q_3)$ es una terna de números no negativos, si $k \in \{r, t\}$. Por 2.1.23 sabemos que al mutar la terna en dirección s la complejidad baja, si $c(\mu_s(q_1, q_2, q_3)) = 1$ acabamos, por ello supongamos que $\mu_s(q_1, q_2, q_3) > 1$ o equivalentemente que $(q_1, q_2, q_3) \neq (\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0})$. Tenemos que $\mu_s(q_1, q_2, q_3) = [q_r, q_t, q_r \ominus q_t]$, además $0 \leq q_r < q_t$ y

$$\Delta(q_t, q_r \ominus q_t) = 1,$$

si $q_r \ominus q_t < 0$ por 2.1.20 tenemos que $q_t = \infty$ y por lo tanto $(q_1, q_2, q_3) = (\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0})$, una contradicción por lo tanto $q_r \ominus q_t \geq 0$. \square

Corolario 2.2.6. Si $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{T}_3^2$ entonces, $q_1, q_2, q_3 \geq 0$.

Demostración. Como $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{T}_3^2$ existe un camino $\mu_{a_m} \circ \dots \circ \mu_{a_1}(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}) = (q_1, q_2, q_3)$ de $(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0})$ a (q_1, q_2, q_3) que no pasan por la terna $(\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0})$; por 2.2.5 tenemos que $q_1, q_2, q_3 \geq 0$. \square

Observación 2.2.7. Por 2.1.20, la condición $q_1, q_2, q_3 \geq 0$ es equivalente a que $q_s > 0$.

Notación 2.2.8. *Dados dos triplos de Farey (q_1, q_2, q_3) y (q'_1, q'_2, q'_3) , para no correr riesgo de confusión, usaremos los índices r, s y t para ordenar las fracciones de la primera terna (como en 2.1.12) y r', s' y t' para ordenar a las de la segunda de manera análoga.*

Lema 2.2.9. *La función $\Phi : \mathbb{T}_3^0 \longrightarrow \mathbb{T}_3$ dada por:*

$$\Phi(q_1, q_2, q_3) = \left[\frac{-r(q_r)}{r(q_r)+d(q_r)}, \frac{-r(q_s)}{r(q_s)+d(q_s)}, \frac{-r(q_t)}{r(q_t)+d(q_t)} \right]$$

tiene las siguientes propiedades:

(i) $\Phi(\mu_k(q_1, q_2, q_3)) = \mu_{k'}(\Phi(q_1, q_2, q_3))$ para toda $k \in \{r, s, t\}$ tal que $\mu_k(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{T}_3^0$,

(ii) *establece una biyección entre \mathbb{T}_3^0 y \mathbb{T}_3^∞ .*

Demostración. Notamos que basta con probarlo para $k \in \{r, t\}$ pues, como (q_1, q_2, q_3) es una terna de números positivos, entonces $c(\mu_s(q_1, q_2, q_3)) < c(q_1, q_2, q_3)$ y por lo tanto $(q_1, q_2, q_3) = \mu_i \circ \mu_s(q_1, q_2, q_3)$ con $i \in \{r, t\}$.

$$\begin{aligned} \Phi(\mu_r(q_1, q_2, q_3)) &= \Phi[q_s \oplus q_t, q_s, q_t] \\ &= \left[\frac{-(r(q_s)+r(q_t))}{(r(q_s)+r(q_t)+d(q_s)+d(q_t))}, \frac{-r(q_s)}{r(q_s)+d(q_s)}, \frac{-r(q_t)}{r(q_t)+d(q_t)} \right] \end{aligned}$$

por otro lado, como

$$\frac{-r(q_r)}{r(q_r)+d(q_r)} < \frac{-r(q_s)}{r(q_s)+d(q_s)} < \frac{-r(q_t)}{r(q_t)+d(q_t)}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \mu_r(\Phi(q_1, q_2, q_3)) &= \mu_r \left[\frac{-r(q_r)}{r(q_r)+d(q_r)}, \frac{-r(q_s)}{r(q_s)+d(q_s)}, \frac{-r(q_t)}{r(q_t)+d(q_t)} \right] \\ &= \left[\frac{-(r(q_s)+r(q_t))}{r(q_s)+r(q_t)+d(q_s)+d(q_t)}, \frac{-r(q_s)}{r(q_s)+d(q_s)}, \frac{-r(q_t)}{r(q_t)+d(q_t)} \right]. \end{aligned}$$

Luego $\Phi(\mu_r(q_1, q_2, q_3)) = \mu_{r'}(\Phi(q_1, q_2, q_3))$. Análogamente obtenemos que $\Phi(\mu_t(q_1, q_2, q_3)) = \mu_{t'}(\Phi(q_1, q_2, q_3))$, concluimos que Φ es compatible con las mutaciones. Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}\right) &= \left(\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{-1}{2}\right) \\ &= \mu_3\left(\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0}\right);\end{aligned}$$

Además es claro que ninguna terna de la forma $[\frac{-z-1}{1}, \frac{-z}{1}, \frac{1}{0}]$ pertenece a la imagen de Φ , por lo que al mutar cualquier terna en la imagen la complejidad crece, es decir, la distancia a la terna $(\frac{1}{0}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0})$ se incrementa, luego $Im(\Phi) \subseteq \mathbb{T}_3^\infty$, más aún, si

$$\mu_{a'_m} \circ \dots \circ \mu_{a'_1}\left(\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{-1}{2}\right) = (q_1, q_2, q_3)$$

es un camino en \mathbb{T}_3^∞ de $(\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{-1}{2})$ a (q_1, q_2, q_3) con $a_i \in \{r, s, t\}$, entonces, como Φ es compatible con las mutaciones, tenemos que

$$\Phi\left(\mu_{a'_m} \circ \dots \circ \mu_{a'_1}\left(\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{-1}{2}\right)\right) = (q_1, q_2, q_3),$$

es decir, $\Phi: \mathbb{T}_3^0 \longrightarrow \mathbb{T}_3^\infty$ es biyectiva, de hecho,

$$\Phi^{-1}(q_1, q_2, q_3) = \left[\frac{d(q_r) + r(q_r)}{-d(q_r)}, \frac{d(q_s) + r(q_s)}{-d(q_s)}, \frac{d(q_s) + r(q_s)}{-d(q_s)} \right].$$

□

Lema 2.2.10. La función $\Psi: \mathbb{T}_3^0 \longrightarrow \mathbb{T}_3$ dada por:

$$\Psi(q_1, q_2, q_3) = \begin{cases} \left[\frac{-r(q_s)-1}{1}, \frac{-r(q_s)}{1}, \frac{1}{0} \right] & \text{si } q_r = 0 \\ \left[\frac{-(d(q_r)+r(q_r))}{d(q_r)}, \frac{-(d(q_s)+r(q_s))}{d(q_s)}, \frac{-(d(q_t)+r(q_t))}{d(q_t)} \right] & \text{si } q_r \neq 0 \end{cases}$$

tiene las siguientes propiedades:

- (i) $\Psi(\mu_k(q_1, q_2, q_3)) = \mu_{\hat{k}}(\Psi(q_1, q_2, q_3))$ para toda $k \in \{r, s, t\}$ tal que $\mu_k(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{T}_3^0$, donde

$$\hat{k} = \begin{cases} t & \text{si } k = r \text{ y } q_r = 0 \\ r & \text{si } k = s \text{ y } q_r = 0 \\ s & \text{si } k = t \text{ y } q_r = 0 \\ k' & \text{si } q_r \neq 0 \end{cases}$$

- (ii) establece una biyección entre \mathbb{T}_3^0 y \mathbb{T}_3^{-1} .

Demostración. De la misma manera que lo hicimos con Φ en 2.2.9, concluimos que solo hay que considerar $k \in \{r, t\}$ (es por esta razón que \hat{k} se define así). Tenemos dos casos, $q_r = 0$ y $q_r \neq 0$.

Primer caso

Supongamos que $q_r = 0$, o equivalentemente que $(q_1, q_2, q_3) = [\frac{0}{1}, \frac{1}{z}, \frac{1}{z+1}]$ con $z \geq 0$.

$$\begin{aligned} \Psi\left(\mu_r\left[\frac{0}{1}, \frac{1}{z}, \frac{1}{z+1}\right]\right) &= \Psi\left[\frac{2}{2z+1}, \frac{1}{z}, \frac{1}{z+1}\right] \\ &= \left[\frac{-(2z+3)}{2}, \frac{-(z+1)}{1}, \frac{-(z+2)}{1}\right] \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} \mu_t\left(\Psi\left[\frac{0}{1}, \frac{1}{z}, \frac{1}{z+1}\right]\right) &= \mu_t\left[\frac{-z-2}{1}, \frac{-z-1}{1}, \frac{1}{0}\right] \\ &= \left[\frac{-(z+2)}{1}, \frac{-(z+1)}{1}, \frac{-(2z+3)}{2}\right]. \end{aligned}$$

Es decir, $\Psi(\mu_r(q_1, q_2, q_3)) = \mu_{\hat{r}}(\Psi(q_1, q_2, q_3))$. Ahora,

$$\begin{aligned}\Psi\left(\mu_t\left[\frac{0}{1}, \frac{1}{z}, \frac{1}{z+1}\right]\right) &= \Psi\left[\frac{0}{1}, \frac{1}{z+2}, \frac{1}{z+1}\right] \\ &= \left[\frac{-z-3}{1}, \frac{-(z+2)}{1}, \frac{1}{0}\right]\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}\mu_s\left(\Psi\left[\frac{0}{1}, \frac{1}{z}, \frac{1}{z+1}\right]\right) &= \mu_s\left[\frac{-z-2}{1}, \frac{-z-1}{1}, \frac{1}{0}\right] \\ &= \left[\frac{-(z+2)}{1}, \frac{-z-3}{1}, \frac{1}{0}\right].\end{aligned}$$

Segundo caso

Este caso es muy parecido a lo que hicimos con Φ en 2.2.9, por lo que no es difícil convencerse de que $\Psi(\mu_k(q_1, q_2, q_3)) = \mu_{k'}(\Psi(q_1, q_2, q_3))$ si $q_r \neq 0$. Además, como

$$\begin{aligned}\Psi\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}\right) &= \left(\frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0}\right) \\ &= \mu_1\left(\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0}\right);\end{aligned}$$

concluimos que $\Psi: \mathbb{T}_3^0 \longrightarrow \mathbb{T}_3^\infty$ es un biyección, cuya inversa es:

$$\Psi^{-1}(q_1, q_2, q_3) = \begin{cases} \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{r(q_s)}, \frac{1}{r(q_s)+1}\right] & \text{si } q_r = 0 \\ \left[\frac{r(q_r)}{r(q_r)+d(q_r)}, \frac{r(q_s)}{r(q_s)+d(q_s)}, \frac{r(q_t)}{r(q_t)+d(q_t)}\right] & \text{si } q_r \neq 0 \end{cases}$$

□

Teorema 2.2.11. *Dada una terna de Farey (q_1, q_2, q_3) entonces*

- (i) $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{T}_3^0$ si y sólo si $q_s > 0$.
- (ii) $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{T}_3^\infty$ si y sólo si $q_s < 0$ y $|d(q_s)| < r(q_s)$.
- (iii) $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{T}_3^{-1}$ si y sólo si $q_s < 0$ y $|d(q_s)| \geq r(q_s)$.

Demostración. Basta demostrar en todos los casos la ida pues las condiciones

- $q_s > 0$,
- $q_s < 0$ y $|d(q_s)| < r(q_s)$,
- $q_s < 0$ y $|d(q_s)| \geq r(q_s)$,

son excluyentes dos a dos, y son todas las posibilidades que puede cumplir una terna de Farey. En 2.2.6 demostramos la ida para (i). Por 2.2.9 dada una terna $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{T}_3^\infty$, entonces

$$q_s = \frac{-r(q'_s)}{r(q'_s) + d(q'_s)},$$

con $r(q'_s), d(q'_s) > 0$, por lo tanto $q_s < 0$ y $|d(q_s)| < r(q_s)$, que es la ida para (ii). Por último, si $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{T}_3^{-1}$, entonces

$$q_s = \begin{cases} \frac{-r(q'_s)}{1} \\ \frac{-(d(q_s) + r(q_s))}{d(q_s)} \end{cases}$$

con $r(q'_s), d(q'_s) > 0$, por lo tanto $q_s < 0$ y $|d(q_s)| \geq r(q_s)$. □

2.3. Descripción de coeficientes principales

Tenemos todas las herramientas que necesitamos para poder describir a las matrices de intercambio que nos interesan. Primero precisemos cuáles son las mutaciones que consideraremos.

Proposición 2.3.1. *Para el carcaj Q se tiene que $\mu_k \circ \mu_{k+1} = \mu_{k+1} \circ \mu_k$ si $k \in \{1, 3, 5\}$.*

Demostración. Notamos que basta probarlo para $k = 1$ pues todos los vértices son esencialmente iguales. Probemos que $\mu_1 \circ \mu_2(B_Q) = \mu_2 \circ \mu_1(B_Q)$, con eso

habremos demostrado la proposición pues sabemos que $B_{\mu_k(\Gamma)} = \mu_k(B_\Gamma)$.

$$\begin{aligned}
\mu_1 \circ \mu_2(B_Q) &= \mu_1 \circ \mu_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \mu_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
 \mu_2 \circ \mu_2(B_Q) &= \mu_2 \circ \mu_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \mu_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

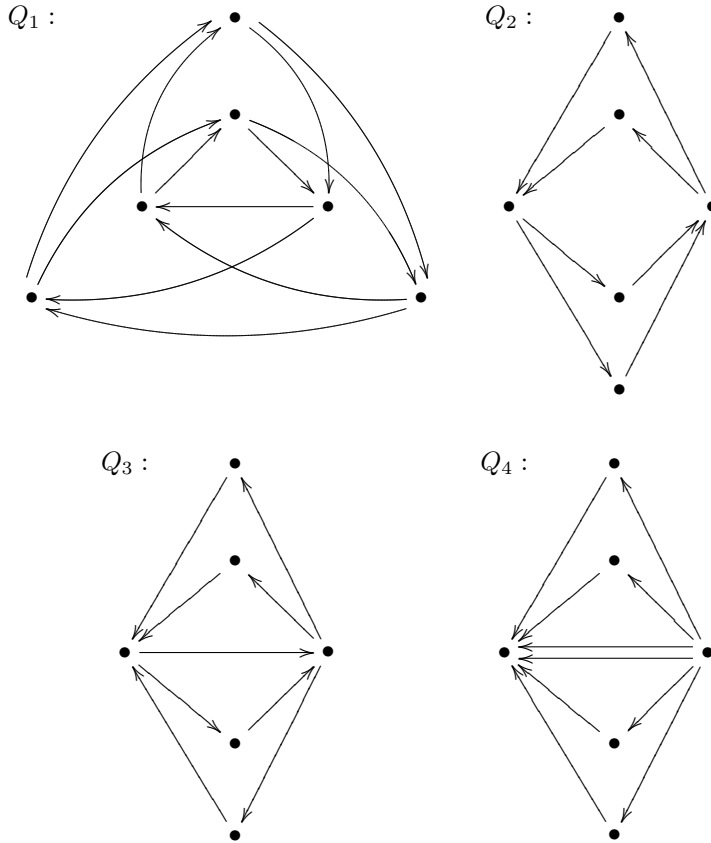
□

Observación 2.3.2. *De la proposición anterior concluimos que al hacer parejas de mutaciones $\mu_k \circ \mu_{k+1} = \mu_{k+1} \circ \mu_k$ si $k \in \{1, 3, 5\}$, nuestro carcaj Q solamente cambia de orientación, mientras que si pensamos en la matriz asociada, lo único que sucede es que todos los signos cambian.*

De este modo, consideraremos justamente los pares de mutaciones $\tilde{\mu}_{-1} := \mu_1 \circ \mu_2$, $\tilde{\mu}_0 := \mu_3 \circ \mu_4$ y $\tilde{\mu}_\infty := \mu_5 \circ \mu_6$. Lo que haremos será calcular todas las matrices de intercambio extendidas, considerando solamente estas parejas de mutaciones.

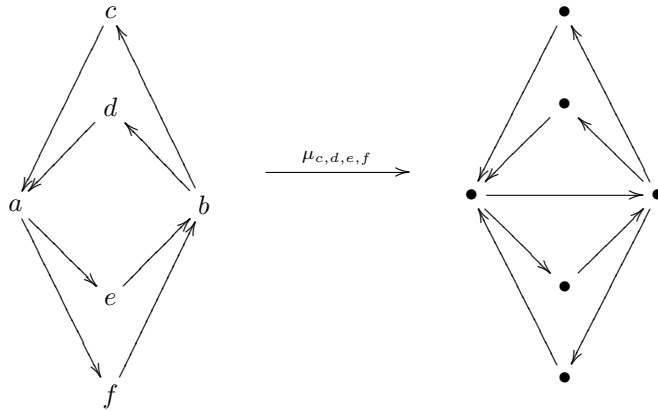
Uno podría pensar que considerar únicamente estas mutaciones es restringirse mucho, no es así, tenemos la siguiente proposición que nos dice que la clase de mutación de nuestro carcaj es realmente muy pequeña.

Proposición 2.3.3. *La clase de mutación del carcaj Q es la siguiente:*

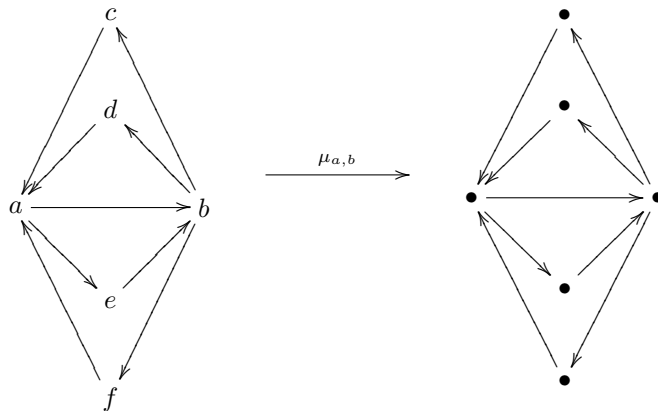


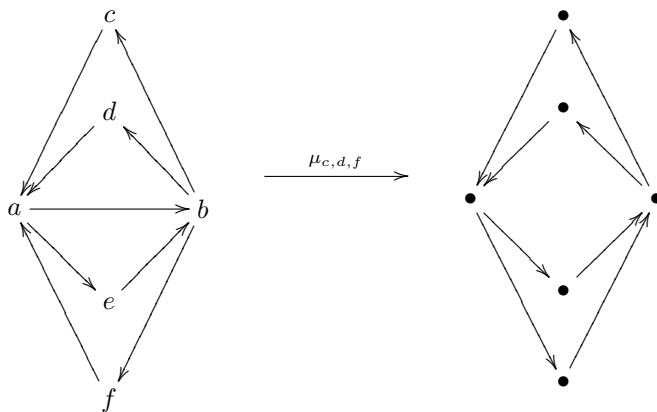
Demostración. Al mutar el carcaj Q_1 en cualquier vértice, obtenemos el carcaj

Q_2 . Analicemos ahora al carcaj Q_2 , tenemos lo siguiente:

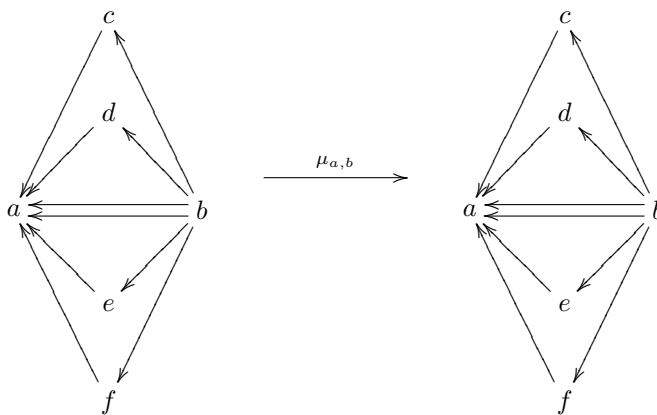


Y al mutar en cualquiera de los otros dos vértices, obtenemos el Q_1 . Para Q_3 se tiene que:





Y al mutar el carcaj en dirección del vértice e , obtenemos el carcaj Q_4 . Por último, para Q_4 lo que se tiene es que



Al mutar en dirección de cualquiera de los otros 4 vértices, regresamos al carcaj Q_3 . De este modo tenemos que esta familia es cerrada bajo mutación y es claro que podemos encontrar una sucesión de mutaciones que nos lleven del carcaj Q_1 a cualquier otro de la familia, hemos probado el resultado. \square

Introduzcamos una notación apropiada que nos ayude a describir de manera más simple el tipo de matrices con las que trabajaremos.

Notación 2.3.4. Dada una matriz $M \in \mathbb{Z}^{6 \times 6}$ de la siguiente forma:

$$M = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} a & b & c & c & d & d \\ b & a & c & c & d & d \\ \hline e & e & f & g & h & h \\ e & e & g & f & h & h \\ \hline i & i & j & j & k & l \\ i & i & j & j & l & k \end{array} \right) \quad (2.11)$$

Escribimos el siguiente arreglo para denotar a la matriz de una forma más simplificada:

$$M = \begin{array}{c|c|c} a & c & d \\ b & & \\ \hline e & f & h \\ & g & \\ \hline i & j & k \\ & & l \end{array} \quad (2.12)$$

Esta notación se extiende de manera natural a matrices más grandes, para ilustrar esto, a continuación mostramos cómo es que escribiríamos nuestra matriz inicial extendida:

$$\tilde{B}_Q = \begin{array}{c|c|c} 0 & -1 & 1 \\ 0 & & \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ & 0 & \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (2.13)$$

Ahora veamos cómo es que actúan las mutaciones que acabamos de definir. Sabemos que en la parte superior, lo único que sucede es un cambio de signo, es decir:

$$\begin{array}{c|c|c}
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{\mu}_k} \\ \xleftarrow{\tilde{\mu}_k} \end{array}
 \begin{array}{c|c|c}
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad (2.14)$$

para toda $k \in \{-1, 0, \infty\}$. El siguiente lema nos dice cómo se comporta la parte inferior bajo ciertas hipótesis que nuestras matrices cumplirán.

Lema 2.3.5. *Dada una matriz $M \in \mathbb{Z}^{12 \times 6}$ cuya parte superior es la matriz asociada al carcaj Q (o al carcaj Q con la orientación opuesta) y cuya parte complementaria es de la forma 2.11, entonces:*

Si las entradas de la primera columna de la parte inferior son positivas

$$M = \begin{array}{c|c|c}
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} e \\ f \\ g \end{array} & \begin{array}{c} h \\ i \\ j \end{array} & \begin{array}{c} k \\ l \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \xrightarrow{\tilde{\mu}_{-1}}
 \begin{array}{c|c|c}
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} -a \\ -b \end{array} & \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ d + a + b \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} -e \\ f \\ g \end{array} & \begin{array}{c} h \\ i \\ j \end{array} & \begin{array}{c} 2e \\ k + 2i \\ l + 2i \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad (2.15)$$

y si son negativas

$$\begin{array}{c|c|c}
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} e \\ f \\ g \end{array} & \begin{array}{c} h \\ i \\ j \end{array} & \begin{array}{c} k \\ l \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \xrightarrow{\tilde{\mu}_{-1}}
 \begin{array}{c|c|c}
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} -a \\ -b \end{array} & \begin{array}{c} c + a + b \\ d \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} -e \\ f \\ g \end{array} & \begin{array}{c} h \\ i \\ j + 2i \end{array} & \begin{array}{c} 2e \\ k \\ l \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad (2.16)$$

Y se tiene el mismo patrón en las columnas correspondientes si mutamos en las otras direcciones, es decir, si la segunda columna es positiva, entonces

$$\begin{array}{c|c|c}
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & -1 & 1 \\
 \hline
 1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & -1 \\
 \hline
 -1 & 1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & c & d \\
 \hline
 e & \begin{array}{c} f \\ g \end{array} & h \\
 \hline
 i & j & \begin{array}{c} k \\ l \end{array}
 \end{array}
 \xrightarrow{\tilde{\mu}_0}
 \begin{array}{c|c|c}
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & 1 & -1 \\
 \hline
 -1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} a+2c \\ b+2c \end{array} & -c & d \\
 \hline
 e+f+g & \begin{array}{c} -f \\ -g \end{array} & h \\
 \hline
 i+2j & -j & \begin{array}{c} k \\ l \end{array}
 \end{array}
 \quad (2.17)$$

Si es negativa:

$$\begin{array}{c|c|c}
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & -1 & 1 \\
 \hline
 1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & -1 \\
 \hline
 -1 & 1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & c & d \\
 \hline
 e & \begin{array}{c} f \\ g \end{array} & h \\
 \hline
 i & j & \begin{array}{c} k \\ l \end{array}
 \end{array}
 \xrightarrow{\tilde{\mu}_0}
 \begin{array}{c|c|c}
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & 1 & -1 \\
 \hline
 -1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & -c + a + b & d \\
 \hline
 e & \begin{array}{c} -f \\ -g \end{array} & h \\
 \hline
 i & -j & \begin{array}{c} -k \\ -l \end{array}
 \end{array}
 \quad (2.18)$$

Si la tercera columna es positiva:

$$\begin{array}{c|c|c}
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & -1 & 1 \\
 \hline
 1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & -1 \\
 \hline
 -1 & 1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & c & d \\
 \hline
 e & \begin{array}{c} f \\ g \end{array} & h \\
 \hline
 i & j & \begin{array}{c} k \\ l \end{array}
 \end{array}
 \xrightarrow{\tilde{\mu}_\infty}
 \begin{array}{c|c|c}
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & 1 & -1 \\
 \hline
 -1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & c+2d & -d \\
 \hline
 e & \begin{array}{c} f+2h \\ g+2h \end{array} & -h \\
 \hline
 i & j+k+l & \begin{array}{c} -k \\ -l \end{array}
 \end{array}
 \quad (2.19)$$

Si es negativa:

$$\begin{array}{c|c|c}
 0 & -1 & 1 \\
 0 & & \\
 \hline
 1 & 0 & -1 \\
 0 & & \\
 \hline
 -1 & 1 & 0 \\
 & & 0 \\
 \hline
 a & c & d \\
 b & & \\
 \hline
 e & f & h \\
 & g & \\
 \hline
 i & j & k \\
 & & l
 \end{array}
 \xrightarrow{\tilde{\mu}_\infty}
 \begin{array}{c|c|c}
 0 & 1 & -1 \\
 0 & & \\
 \hline
 -1 & 0 & 1 \\
 & & \\
 \hline
 1 & -1 & 0 \\
 & & 0 \\
 \hline
 a & -c + a + b & d \\
 b & & \\
 \hline
 e & -f & h \\
 & -g & \\
 \hline
 i & -j & -k \\
 & & -l
 \end{array}
 \quad (2.20)$$

Demostración. Se obtiene de manera inmediata de la regla de mutación. \square

Nuestro objetivo es describir a todas las matrices que podemos obtener al mutar en las direcciones $-1, 0$ e ∞ , tenemos una asignación natural de tripos de Farey a dichas matrices.

Notación 2.3.6. *Podemos mutar a los tripos de Farey en tres direcciones distintas, a saber 1, 2 y 3, renombramos estas direcciones para hacerlas compatibles con las mutaciones que estamos considerando, es decir, hagamos la siguiente convención $\mu_1 = \mu_{-1}$, $\mu_2 = \mu_0$ y $\mu_3 = \mu_\infty$.*

Nota 2.3.7. *En virtud de la notación establecida arriba, fue que indexamos en 2.2.2 a las componentes \mathbb{T}_3^k con $-1, 0$ e ∞ .*

La asignación se hace como sigue: supongamos que hemos asociado la terna (q_1, q_2, q_3) a la matriz M , entonces asignemos la terna $\mu_k(q_1, q_2, q_3)$ a la matriz $\tilde{\mu}_k(M)$, de este modo a todas las matrices les corresponde una terna de Farey. Empecemos asignando la terna $(\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0})$ a la matriz inicial \tilde{B}_Q y escribamos

$$\begin{array}{c|c|c}
 \frac{0}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{1}{0} \\
 \hline
 \frac{0}{0} & -1 & 1 \\
 \hline
 1 & \frac{0}{0} & -1 \\
 \hline
 -1 & 1 & \frac{0}{0} \\
 \hline
 \frac{1}{0} & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & \frac{1}{0} & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & \frac{1}{0}
 \end{array}$$

o simplemente escribamos la parte inferior del arreglo con las fracciones arriba para denotar a su parte complementaria. Estamos pensando también que a cada columna de nuestro arreglo le corresponde la fracción que se encuentra en la parte superior de esta. Tenemos lo siguiente

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c|c|c}
\frac{-2}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{1}{0} \\
\hline
\frac{-1}{0} & 0 & 1 \\
\hline
0 & \frac{1}{0} & 0 \\
\hline
0 & 0 & \frac{1}{0}
\end{array} \\
\uparrow \\
\tilde{\mu}_{-1} \\
\begin{array}{c|c|c}
\frac{0}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{1}{0} \\
\hline
\frac{1}{0} & 0 & 0 \\
\hline
0 & \frac{1}{0} & 0 \\
\hline
0 & 0 & \frac{1}{0}
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{c}
\longrightarrow \\
\tilde{\mu}_0 \\
\longrightarrow
\end{array}
\begin{array}{c|c|c}
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{0} \\
\hline
\frac{1}{0} & 0 & 0 \\
\hline
1 & \frac{-1}{0} & 0 \\
\hline
0 & 0 & \frac{1}{0}
\end{array}
\end{array}
\tag{2.21}$$

$$\begin{array}{c}
\downarrow \\
\tilde{\mu}_\infty \\
\downarrow \\
\begin{array}{c|c|c}
\frac{0}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{-1}{2} \\
\hline
\frac{1}{0} & 0 & 0 \\
\hline
0 & \frac{1}{0} & 0 \\
\hline
0 & 1 & \frac{-1}{0}
\end{array}
\end{array}$$

Empezaremos describiendo a todas las matrices a las que hemos asignado una terna en \mathbb{T}_3^0 , es decir, las matrices que obtenemos al mutar primero en dirección 0 sin mutar dos veces consecutivas en la misma dirección. Por 2.2.11 sabemos que hay una biyección entre \mathbb{T}_3^0 y $\mathbb{Q}_{>0}$, dada por $(q_1, q_2, q_3) \mapsto q_s$, con esta biyección, podemos acomodar a las matrices en una cuadrícula infinita con vértices $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, escribiendo en la casilla cuyo vértice superior derecho es

$(r(q_s), d(q_s))$, a la matriz asociada a q_s . Una parte de este acomodo se muestra en la figura 2.1.

No hay un patrón claro en toda la cuadrícula, por ello, veamos primero que sucede al componer alternadamente $\tilde{\mu}_{-1}$ y $\tilde{\mu}_0$.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c|c|c}
 \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{0} \\
 \hline
 \frac{1}{0} & 0 & 0 \\
 \hline
 1 & \frac{-1}{0} & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & \frac{1}{0}
 \end{array} & \xrightarrow{\tilde{\mu}_{-1}} & \begin{array}{c|c|c}
 \frac{2}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{0} \\
 \hline
 \frac{-1}{0} & 1 & 0 \\
 \hline
 -1 & \frac{1}{2} & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & \frac{1}{0}
 \end{array} \\
 & & \downarrow \tilde{\mu}_0 \\
 \begin{array}{c|c|c}
 \frac{4}{1} & \frac{3}{1} & \frac{1}{0} \\
 \hline
 \frac{-1}{-2} & 2 & 0 \\
 \hline
 -2 & \frac{3}{2} & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & \frac{1}{0}
 \end{array} & \xleftarrow{\tilde{\mu}_{-1}} & \begin{array}{c|c|c}
 \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{1}{0} \\
 \hline
 \frac{1}{2} & -1 & 0 \\
 \hline
 2 & \frac{-1}{-2} & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & \frac{1}{0}
 \end{array} \\
 & & \downarrow \tilde{\mu}_0 \\
 \begin{array}{c|c|c}
 \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \frac{1}{0} \\
 \hline
 \frac{3}{2} & -2 & 0 \\
 \hline
 3 & \frac{-3}{-2} & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & \frac{1}{0}
 \end{array} & \xrightarrow{\tilde{\mu}_{-1}} & \begin{array}{c|c|c}
 \frac{6}{1} & \frac{5}{1} & \frac{1}{0} \\
 \hline
 \frac{-3}{-2} & 3 & 0 \\
 \hline
 -3 & \frac{3}{4} & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & \frac{1}{0}
 \end{array} \\
 & & \downarrow \tilde{\mu}_0 \\
 & & \vdots
 \end{array} \tag{2.22}$$

Notamos que los triples de Farey asociados a estas matrices son de la forma $(\frac{2a}{1}, \frac{2a\pm 1}{1}, \frac{1}{0})$ con $a \geq 0$.

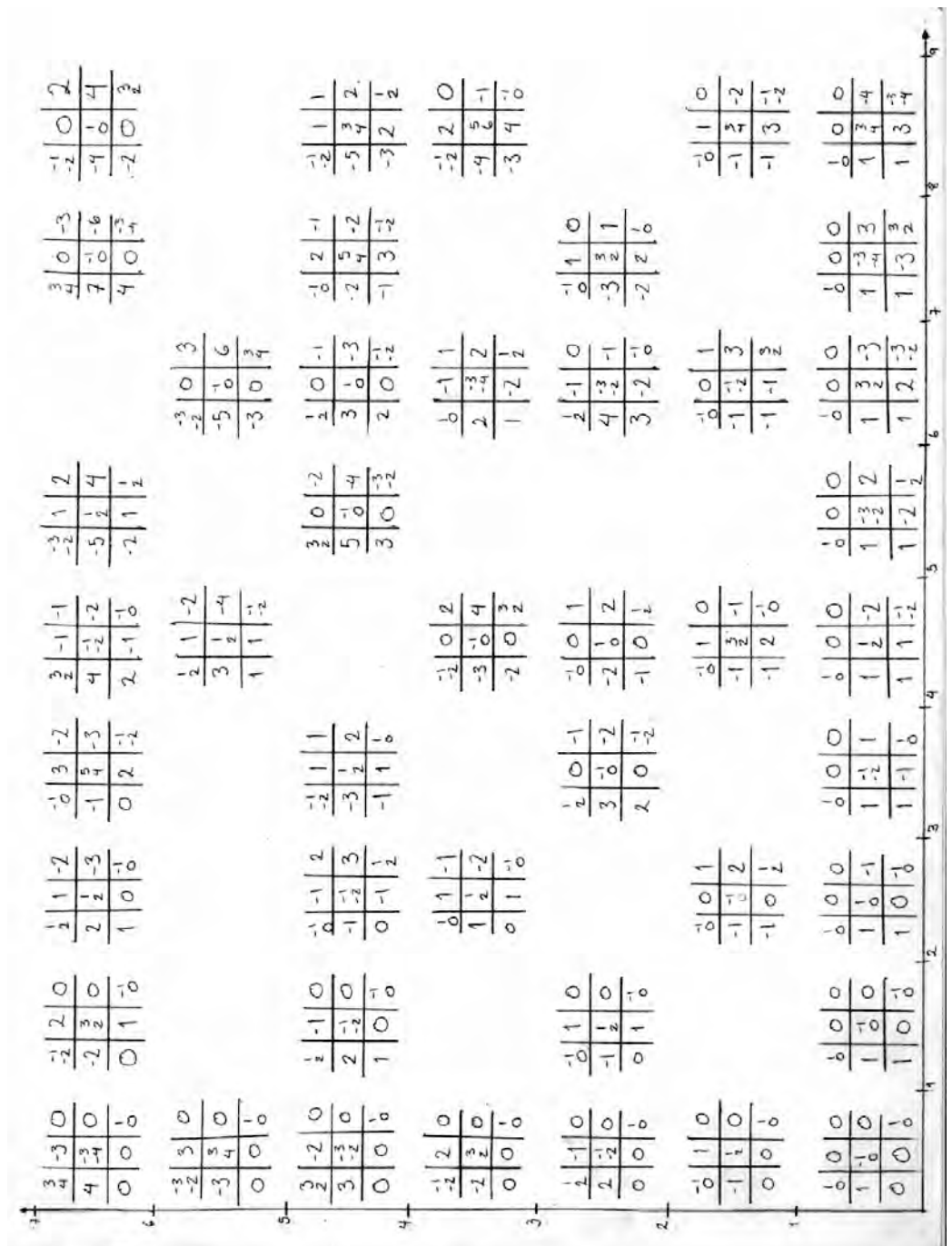


Figura 2.1:

Notación 2.3.8. Dados dos enteros x y y de **distinta paridad** escribiremos $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ en las entradas de la diagonal de un arreglo como 2.12 para denotar que el número par esta abajo, es decir,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es impar} \\ y & \\ y & \text{si } x \text{ es par} \\ x & \end{cases} \quad (2.23)$$

Notamos que $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$.

Proposición 2.3.9. Las matrices que se obtienen al mutar alternadamente en dirección 0 y -1 son de alguna de las siguientes formas:

$$\begin{array}{c|c|c} \frac{2a}{1} & \frac{2a+1}{1} & \frac{1}{0} \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ \hline \begin{bmatrix} a \\ a+1 \end{bmatrix} & -a & 0 \\ \hline a+1 & \begin{bmatrix} -a-1 \\ -a \end{bmatrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{0} \end{array} \quad \vee \quad \begin{array}{c|c|c} \frac{2a}{1} & \frac{2a-1}{1} & \frac{1}{0} \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ \hline \begin{bmatrix} -a \\ -a+1 \end{bmatrix} & a & 0 \\ \hline -a & \begin{bmatrix} a \\ a+1 \end{bmatrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{0} \end{array}$$

Demostración. Probémoslo inductivamente, como base tomemos los cálculos hechos en 2.22. Dada una matriz como arriba asociada a la terna $(\frac{2a}{1}, \frac{2a+1}{1}, \frac{1}{0})$, como $\frac{2a+1}{1} = \frac{2a}{1} \oplus \frac{1}{0}$, solo tenemos que mutar esta matriz en dirección -1 , tenemos que

$$\begin{array}{c|c|c}
 \frac{2a}{1} & \frac{2a+1}{1} & \frac{1}{0} \\
 \hline
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & 1 & -1 \\
 \hline
 -1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} a \\ a+1 \end{array} & -a & 0 \\
 \hline
 a+1 & \begin{array}{c} -a-1 \\ -a \end{array} & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}
 \end{array}
 \xrightarrow{\tilde{\mu}_{-1}}
 \begin{array}{c|c|c}
 \frac{2a+2}{1} & \frac{2a+1}{1} & \frac{1}{0} \\
 \hline
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & -1 & 1 \\
 \hline
 1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & -1 \\
 \hline
 -1 & 1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} -a \\ -a-1 \end{array} & a+1 & 0 \\
 \hline
 -a-1 & \begin{array}{c} a+1 \\ a+2 \end{array} & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}
 \end{array}$$

Que es de la forma que queremos, para terminar, mutemos una matriz de la segunda forma en dirección 0 y veamos que es una matriz de la primera forma

$$\begin{array}{c|c|c}
 \frac{2a}{1} & \frac{2a-1}{1} & \frac{1}{0} \\
 \hline
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & -1 & 1 \\
 \hline
 1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & -1 \\
 \hline
 -1 & 1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} -a \\ -a+1 \end{array} & a & 0 \\
 \hline
 -a & \begin{array}{c} a \\ a+1 \end{array} & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}
 \end{array}
 \xrightarrow{\tilde{\mu}_0}
 \begin{array}{c|c|c}
 \frac{2a}{1} & \frac{2a+1}{1} & \frac{1}{0} \\
 \hline
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & 1 & -1 \\
 \hline
 -1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} a \\ a+1 \end{array} & -a & 0 \\
 \hline
 a+1 & \begin{array}{c} -a \\ -a+1 \end{array} & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}
 \end{array}$$

□

La proposición anterior describe a todas las matrices a las que les hemos asociado una terna de la forma $(q_1, q_2, \frac{1}{0}) \in \mathbb{T}_3^0$, resta describir a todas las matrices cuya terna asociado no tiene a ∞ . Consideremos la matriz

$$\begin{array}{c|c|c}
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \\
\frac{0}{0} & -1 & 1 \\
\hline
1 & \frac{0}{0} & -1 \\
\hline
-1 & 1 & \frac{0}{0} \\
\hline
\frac{1}{0} & 0 & 0 \\
\hline
1 & \frac{-1}{0} & 0 \\
\hline
1 & 0 & \frac{-1}{0}
\end{array} \tag{2.24}$$

Tenemos que describir todas la matrices que provienen de ésta y además debemos describir todas las que provienen de las anteriormente descritas.

Teorema 2.3.10. *Dada una terna de Farey $(q_1, q_2, q_3) = (\frac{2a}{2b+1}, \frac{2c+1}{2d+1}, \frac{2e+1}{2f}) \in \mathbb{T}_3^0$ con $\frac{2e+1}{2f} \neq \frac{1}{0}$, entonces, las columnas de la parte complementaria tienen un signo y la matriz asociada a esta terna de Farey esta dada como sigue:*

(i) Si $q_3 = q_1 \oplus q_2$ y $q_1 < q_2$

$$\begin{array}{c|c|c}
\frac{2a}{2b+1} & \frac{2c+1}{2d+1} & \frac{2e+1}{2f} \\
\frac{0}{0} & -1 & 1 \\
\hline
1 & \frac{0}{0} & -1 \\
\hline
-1 & 1 & \frac{0}{0} \\
\hline
\begin{bmatrix} a \\ a+1 \end{bmatrix} & -c & c-a \\
\hline
a+b+1 & \begin{bmatrix} -(c+d+1) \\ -(c+d) \end{bmatrix} & c+d-a-b \\
\hline
b+1 & -d & \begin{bmatrix} d-b \\ d-b-1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

(ii) Si $q_3 = q_1 \oplus q_2$ y $q_2 < q_1$

$\frac{2a}{2b+1}$	$\frac{2c+1}{2d+1}$	$\frac{2e+1}{2f}$
$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	1	-1
-1	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	1
1	-1	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$
$\begin{bmatrix} -a \\ -a+1 \end{bmatrix}$	$c+1$	$a-c-1$
$-(a+b)$	$\begin{bmatrix} c+d+1 \\ c+d+2 \end{bmatrix}$	$a+b-c-d-1$
$-b$	$d+1$	$\begin{bmatrix} b-d \\ b-d-1 \end{bmatrix}$

(iii) Si $q_2 = q_1 \oplus q_3$ y $q_1 < q_3$

$\frac{2a}{2b+1}$	$\frac{2c+1}{2d+1}$	$\frac{2e+1}{2f}$
$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	1	-1
-1	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	1
1	-1	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$
$\begin{bmatrix} a \\ a+1 \end{bmatrix}$	$e-a$	$-e$
$a+b+1$	$\begin{bmatrix} e+f-a-b \\ e+f-a-b-1 \end{bmatrix}$	$-(e+f)$
$b+1$	$f-b-1$	$\begin{bmatrix} -f \\ -f+1 \end{bmatrix}$

(iv) Si $q_2 = q_1 \oplus q_3$ y $q_3 < q_1$

$\frac{2a}{2b+1}$	$\frac{2c+1}{2d+1}$	$\frac{2e+1}{2f}$
$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	-1	1
1	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	-1
-1	1	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$
$\begin{bmatrix} -a \\ -a+1 \end{bmatrix}$	$a - e - 1$	$e + 1$
$-(a + b)$	$\begin{bmatrix} a+b-e-f \\ a+b-e-f-1 \end{bmatrix}$	$e + f + 1$
$-b$	$b - f$	$\begin{bmatrix} f \\ f+1 \end{bmatrix}$

(v) Si $q_1 = q_2 \oplus q_3$ y $q_2 < q_3$

$\frac{2a}{2b+1}$	$\frac{2c+1}{2d+1}$	$\frac{2e+1}{2f}$
$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	-1	1
1	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	-1
-1	1	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$
$\begin{bmatrix} e-c \\ e-c-1 \end{bmatrix}$	$c + 1$	$-e$
$e + f - c - d - 1$	$\begin{bmatrix} c+d+1 \\ c+d+2 \end{bmatrix}$	$-(e + f)$
$f - d - 1$	$d + 1$	$\begin{bmatrix} -f \\ -f+1 \end{bmatrix}$

(vi) Si $q_1 = q_2 \oplus q_3$ y $q_3 < q_2$

$\frac{2a}{2b+1}$	$\frac{2c+1}{2d+1}$	$\frac{2e+1}{2f}$
$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	1	-1
-1	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	1
1	-1	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$
$\begin{bmatrix} c-e \\ c-e-1 \end{bmatrix}$	$-c$	$e+1$
$c+d-e-f$	$\begin{bmatrix} -(c+d+1) \\ -(c+d) \end{bmatrix}$	$e+f+1$
$d-f$	$-d$	$\begin{bmatrix} f \\ f+1 \end{bmatrix}$

Demostración. Tenemos que la matriz asociada al triple $(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2})$ es de la forma (i), veamos ahora que al mutar cualquier matriz de la lista en una dirección en la que la complejidad de la terna asociado se incrementa, obtenemos otra matriz de la lista. Como $a, b, c, d, e, f \geq 0$, se tiene que los elementos de la primera y segunda entrada de nuestro arreglo tienen un mismo signo, entonces, al mutar una matriz de la forma (i) en dirección -1 , por 2.3.5, obtenemos

$\frac{2c+2e+2}{2d+2f+1}$	$\frac{2c+1}{2d+1}$	$\frac{2e+1}{2f}$
$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	1	-1
-1	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	1
1	-1	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$
$\begin{bmatrix} -a \\ -a-1 \end{bmatrix}$	$-c$	$c+a+1$
$-a-b-1$	$\begin{bmatrix} -(c+d+1) \\ -(c+d) \end{bmatrix}$	$c+d+a+b+2$
$-b-1$	$-d$	$\begin{bmatrix} b+d+2 \\ d+b+1 \end{bmatrix}$

Pero sabemos que

$$2a + 2c + 1 = 2e + 1$$

$$2b + 2d + 2 = 2f,$$

es decir,

$$\begin{aligned}
 a + c &= e \\
 b + d &= f - 1,
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

sustituyendo estas identidades en nuestro arreglo, la matriz se ve como sigue.

$\frac{2c+2e+2}{2d+2f+1}$	$\frac{2c+1}{2d+1}$	$\frac{2e+1}{2f}$
$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	1	-1
-1	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	1
1	-1	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$
$\begin{bmatrix} c-e \\ c-e-1 \end{bmatrix}$	$-c$	$e+1$
$c+d-e-f$	$\begin{bmatrix} -(c+d+1) \\ -(c+d) \end{bmatrix}$	$e+f+1$
$d-f$	$-d$	$\begin{bmatrix} f+1 \\ f \end{bmatrix}$

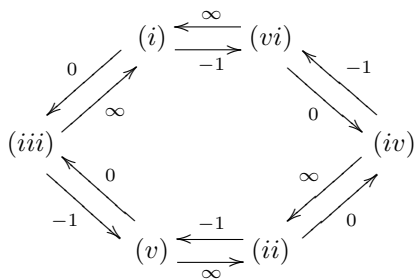
Además $q_3 < q_2$, es decir, llegamos al caso (vi). Si mutamos la misma matriz, pero en dirección 0, obtenemos

$\frac{2a}{2b+1}$	$\frac{2a+2e+1}{2b+2f+1}$	$\frac{2e+1}{2f}$
$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	1	-1
-1	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	1
1	-1	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$
$\begin{bmatrix} a \\ a+1 \end{bmatrix}$	c	$-a-c$
$a+b+1$	$\begin{bmatrix} c+d+1 \\ c+d \end{bmatrix}$	$-a-b-c-d-1$
$b+1$	d	$\begin{bmatrix} -b-d \\ -b-d-1 \end{bmatrix}$

que al sustituir las mismas identidades que en el primer caso

$\frac{2a}{2b+1}$	$\frac{2a+2e+1}{2b+2f+1}$	$\frac{2e+1}{2f}$
0	1	-1
-1	0	1
1	-1	0
$\begin{bmatrix} a \\ a+1 \end{bmatrix}$	$e - a$	$-e$
$a + b + 1$	$\begin{bmatrix} e+f-a-b-1 \\ e+f-a-b \end{bmatrix}$	$-(e + f)$
$b + 1$	$f - b - 1$	$\begin{bmatrix} -f+1 \\ -f \end{bmatrix}$

es una matriz de la forma (iii). Haciendo cálculos semejantes, obtenemos lo siguiente:



Para terminar la prueba debemos checar que al mutar cualquiera de las ma-

trices descritas 2.3.9, obtenemos alguna matriz de la lista.

$$\begin{array}{c|c|c}
 \frac{2a}{1} & \frac{2a+1}{1} & \frac{1}{0} \\
 \hline
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & 1 & -1 \\
 \hline
 -1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} a \\ a+1 \end{array} & -a & 0 \\
 \hline
 a+1 & \begin{array}{c} -a-1 \\ -a \end{array} & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}
 \end{array}
 \xrightarrow{\tilde{\mu}_\infty}
 \begin{array}{c|c|c}
 \frac{2a}{1} & \frac{2a+1}{1} & \frac{4a+1}{1} \\
 \hline
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & 1 & -1 \\
 \hline
 -1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} a \\ a+1 \end{array} & -a & 0 \\
 \hline
 a+1 & \begin{array}{c} -a-1 \\ -a \end{array} & 0 \\
 \hline
 1 & 0 & \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array}
 \end{array}$$

que es una matriz de la forma (i). El otro caso:

$$\begin{array}{c|c|c}
 \frac{2a}{1} & \frac{2a-1}{1} & \frac{1}{0} \\
 \hline
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & -1 & 1 \\
 \hline
 1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & -1 \\
 \hline
 -1 & 1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} -a \\ -a+1 \end{array} & a & 0 \\
 \hline
 -a & \begin{array}{c} a \\ a+1 \end{array} & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}
 \end{array}
 \xrightarrow{\tilde{\mu}_\infty}
 \begin{array}{c|c|c}
 \frac{2a}{1} & \frac{2a-1}{1} & \frac{4a-1}{2} \\
 \hline
 \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & 1 & -1 \\
 \hline
 -1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} -a \\ -a+1 \end{array} & a & 0 \\
 \hline
 -a & \begin{array}{c} a \\ a+1 \end{array} & 0 \\
 \hline
 0 & 1 & \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array}
 \end{array}$$

Que es una matriz de la forma (ii).

□

Corolario 2.3.11. *Las columnas de la parte inferior de una matriz asociada a una terna en \mathbb{T}_3^0 tienen un signo.*

Demostración. Tenemos que la matriz asociada a la terna $(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0})$ lo cumple. Ahora veamos que si la matriz asociada a la terna (q_1, q_2, q_3) lo cumple, entonces las matrices obtenidas al mutar en las direcciones en las que la complejidad

aumenta también lo cumplen. Llamemos M a la matriz asociada, si $q_3 = \infty$, por 2.3.9 el resultado es inmediato. Si $q_3 \neq \infty$, entonces M es de alguna de las formas del teorema anterior. Probémoslo para el caso en que M es del tipo (i). Tenemos que

$$M = \begin{array}{c|c|c} \frac{2a}{2b+1} & \frac{2c+1}{2d+1} & \frac{2e+1}{2f} \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & & \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & & \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 \\ \hline \begin{bmatrix} a \\ a+1 \end{bmatrix} & -c & c-a \\ \hline a+b+1 & \begin{bmatrix} -(c+d+1) \\ -(c+d) \end{bmatrix} & c+d-a-b \\ \hline b+1 & -d & \begin{bmatrix} d-b \\ d-b-1 \end{bmatrix} \end{array}$$

para algunos $a, b, c, d, e, f \geq 0$, por lo tanto

$$\mu_{-1}(M) = \begin{array}{c|c|c} \frac{2c+2e+2}{2d+2f+1} & \frac{2c+1}{2d+1} & \frac{2e+1}{2f} \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ 0 & & \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ 0 & & \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ 0 & & 0 \\ \hline \begin{bmatrix} -a \\ -a-1 \end{bmatrix} & -c & c+a+1 \\ \hline -a-b-1 & \begin{bmatrix} -(c+d+1) \\ -(c+d) \end{bmatrix} & c+d+a+b+2 \\ \hline -b-1 & -d & \begin{bmatrix} b+d+2 \\ d+b+1 \end{bmatrix} \end{array}$$

y

$$\mu_0(M) = \begin{array}{c|c|c} \frac{2a}{2b+1} & \frac{2a+2e+1}{2b+2f+1} & \frac{2e+1}{2f} \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ 0 & & \\ \hline -1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & 1 \\ \hline 1 & -1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} a \\ a+1 \end{array} & c & -a-c \\ \hline a+b+1 & \begin{array}{c} c+d+1 \\ c+d \end{array} & -a-b-c-d-1 \\ \hline b+1 & d & \begin{array}{c} -b-d \\ -b-d-1 \end{array} \end{array}$$

En ambos casos es claro que las columnas de las matrices mutadas también tienen un mismo signo. Los demás casos son análogos. \square

Hemos descrito a todas las matrices cuya terna asociada está en \mathbb{T}_3^0 . Veamos que pasa con los triplos de las otras componentes. Recordemos las funciones $\Phi : \mathbb{T}_3^0 \longrightarrow \mathbb{T}_3^\infty$ y $\Psi : \mathbb{T}_3^0 \longrightarrow \mathbb{T}_3^{-1}$ definidas en 2.2.9 y 2.2.10, respectivamente. Tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \right) &= \left[\frac{a+b}{-a}, \frac{c+d}{-c}, \frac{e+f}{-e} \right] \\ \Psi^{-1} \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \right) &= \left[\frac{b}{-a-b}, \frac{d}{-c-d}, \frac{e}{-e-f} \right] \end{aligned} \tag{2.26}$$

para $q_1, q_2, q_3 < 0$, y

$$\Psi^{-1} \left[\frac{-z-1}{1}, \frac{-z}{1}, \frac{1}{0} \right] = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{z+1}, \frac{1}{z} \right]. \tag{2.27}$$

Notación 2.3.12. Dada una matriz M a la que le hemos asociado una terna $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{T}_3^\infty$, llamemos $\Phi^{-1}(M)$ a la matriz a la que le hemos asociado la terna $\Phi^{-1}(q_1, q_2, q_3)$ y $\Psi^{-1}(M)$ a la matriz a la que le hemos asociado la terna $\Psi^{-1}(q_1, q_2, q_3)$.

Teorema 2.3.13. Dada una matriz M a la que le hemos asociado una terna $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{T}_3^\infty$, tal que

$$\Phi^{-1}(M) = \frac{\begin{array}{c|c|c} 0 & \pm 1 & \mp 1 \\ \hline \mp 1 & 0 & \pm 1 \\ \hline \pm 1 & \mp 1 & 0 \\ \hline a & c & d \\ \hline e & f & h \\ \hline i & j & k \\ \hline \end{array}}{l}$$

Entonces la matriz asociada a la terna (q_1, q_2, q_3) es

$$M = \frac{\begin{array}{c|c|c} 0 & \pm 1 & \mp 1 \\ \hline \mp 1 & 0 & \pm 1 \\ \hline \pm 1 & \mp 1 & 0 \\ \hline k & i & j \\ \hline d & a & c \\ \hline h & e & f \\ \hline \end{array}}{l}$$

Demostración. La matriz asociada a $\mu_\infty(\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0})$ es:

$$\frac{\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline \end{array}}{0}$$

que cumple con el enunciado, luego, notamos que las reglas de mutación para arreglos descrita en 2.3.5 se obtienen una de la otra al permutar columnas y

renglones, es decir, $\tilde{\mu}_k(\Phi^{-1}(M)) = \Phi^{-1}(\mu_{k'}(M))$, por un razonamiento inductivo tenemos el resultado. \square

Teorema 2.3.14. *Dada una matriz M a la que le hemos asociado una terna $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{T}_3^{-1}$, tal que*

$$\Psi^{-1}(M) = \begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \pm 1 \\ \mp 1 \end{array} & \begin{array}{c} \mp 1 \\ \pm 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \mp 1 \\ \pm 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \pm 1 \\ \mp 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \pm 1 \\ \mp 1 \end{array} & \begin{array}{c} \mp 1 \\ \pm 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{array}{c} e \\ f \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} g \\ h \end{array} & \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \begin{array}{c} k \\ l \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{array}{c} o \\ p \end{array} & \begin{array}{c} q \\ r \end{array} \end{array}$$

Entonces la matriz asociada a la terna (q_1, q_2, q_3) es

$$M = \begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \pm 1 \\ \mp 1 \end{array} & \begin{array}{c} \mp 1 \\ \pm 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \mp 1 \\ \pm 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \pm 1 \\ \mp 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \pm 1 \\ \mp 1 \end{array} & \begin{array}{c} \mp 1 \\ \pm 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} f \\ g \end{array} & \begin{array}{c} h \\ i \end{array} & \begin{array}{c} j \\ k \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} l \\ m \end{array} & \begin{array}{c} n \\ o \end{array} & \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} r \\ s \end{array} & \begin{array}{c} t \\ u \end{array} & \begin{array}{c} v \\ w \end{array} \end{array}$$

Demostración. La matriz asociada a $\mu_{-1}(\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0})$ es:

$$\begin{array}{c|c|c}
 \frac{-2}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{1}{0} \\
 \hline
 \frac{0}{0} & -1 & 1 \\
 \hline
 1 & \frac{0}{0} & -1 \\
 \hline
 -1 & 1 & \frac{0}{0} \\
 \hline
 \frac{-1}{0} & 0 & 1 \\
 \hline
 0 & \frac{1}{0} & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & \frac{1}{0}
 \end{array}$$

tenemos el resultado por la misma razón que en el teorema anterior. \square

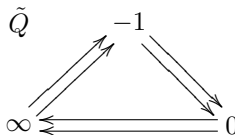
Corolario 2.3.15. *Para toda terna de Farey (q_1, q_2, q_3) , las columnas de la parte complementaria de la matriz asociada a esta terna tienen un signo.*

Demostración. Para la matriz asociada a la terna $(\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0})$ es obvio. Por 2.3.11 sabemos que ésto es cierto para los triplos en \mathbb{T}_3^0 , por 2.3.13 y 2.3.14, las demás matrices se obtienen al permutar renglones y columnas de estas matrices. \square

Hemos descrito a todas las matrices que queríamos describir.

2.4. El álgebra de conglomerado de Markov

Usando lo hecho en la sección anterior, calcularemos a todas las matrices de intercambio extendidas del álgebra de conglomerado de Markov. Dicha álgebra es la que proviene del siguiente carcaj:



Nota 2.4.1. Usamos a $-1, 0$ e ∞ para nombrar a los vértices de \tilde{Q} para que la notación sea compatible con la sección anterior. De este modo las tres mutaciones para \tilde{Q} son μ_{-1}, μ_0 y μ_∞ .

Este carcaj tiene propiedades similares al carcaj Q con la mutaciones $\tilde{\mu}_k$. Por ejemplo, al mutar dicho carcaj en cualquiera de sus vértices, la orientación se invierte, es decir,

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{---} -1 \text{---} \\ \nearrow \qquad \searrow \\ \infty \text{---} \text{---} \text{---} 0 \\ \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{\mu}_k} \\ \xleftarrow{\tilde{\mu}_k} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} -1 \text{---} \\ \nwarrow \qquad \swarrow \\ \infty \text{---} \text{---} \text{---} 0 \\ \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \leftarrow \end{array} \end{array} \quad (2.28)$$

para toda $k \in \{-1, 0, \infty\}$. De igual manera, si vemos las mutaciones para la matriz $B_{\tilde{Q}}$, tenemos que

$$B_{\tilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{\mu}_k} \\ \xleftarrow{\tilde{\mu}_k} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

para toda $k \in \{-1, 0, \infty\}$. Además, la regla de mutación es muy similar que para las matrices de la sección anterior. Por ello tenemos el siguiente resultado

Lema 2.4.2. *Dada una matriz $M \in \mathbb{Z}^{6 \times 3}$ cuya parte superior es la matriz asociada al carcaj $B_{\tilde{Q}}$ (o al carcaj $B_{\tilde{Q}}$ con la orientación opuesta) y es tal que las entradas de una misma columna de su parte complementaria tienen el mismo signo (algunas entradas pueden ser 0), entonces se tiene que*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{\mu}_{-1}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -a & b & c + 2a \\ -d & e & f + 2d \\ -g & h & i + 2g \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Si la primera columna es positiva y si es negativa:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{\mu}_{-1}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -a & b+2a & c \\ -d & e+2d & f \\ -g & h+2g & i \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Y se tiene el mismo patrón en las columnas correspondientes si mutamos en las otras direcciones.

Notamos que el lema anterior tiene un gran parecido con 2.3.5. De igual manera que asociamos a cada matriz de la sección anterior una terna de Farey, podemos hacerlo para las matrices de esta álgebra, esto sugiere que las matrices del álgebra de Markov y las que calculamos para el carcaj Q son muy similares.

Nota 2.4.3. Nuevamente la terna asociado a la matriz inicial $\tilde{B}_{\tilde{Q}}$ es $(\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0})$.

Notación 2.4.4. Dada una matriz de intercambio M del álgebra de conglomerado de Markov, a la que hemos asociado la terna (q_1, q_2, q_3) , llamaremos M' a la matriz asociada a la misma terna del álgebra de conglomerado proveniente del carcaj Q .

Teorema 2.4.5. Sea M una matriz de intercambio del álgebra de conglomerado de Markov, a la que hemos asociado la terna (q_1, q_2, q_3) y

$$M' = \begin{array}{c|c|c} \frac{0}{0} & \pm 1 & \mp 1 \\ \hline \mp 1 & \frac{0}{0} & \pm 1 \\ \hline \pm 1 & \mp & \frac{0}{0} \\ \hline a & c & d \\ \hline e & f & h \\ \hline i & j & k \\ & & l \end{array}$$

entonces,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2 & \mp 2 \\ \mp 2 & 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & \mp 2 & 0 \\ a+b & 2c & 2d \\ 2e & f+g & 2h \\ 2i & 2j & k+l \end{pmatrix}$$

Demostración. Tenemos que la matriz inicial $\tilde{B}_{\tilde{Q}}$ esta dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es claro que cumple con el enunciado. Ahora supongamos que una matriz M lo cumple y veamos que sus tres mutaciones lo cumplen también. Hay doce casos a considerar, pues son tres direcciones para mutar, dos signos a considerar para la parte superior y también dos signos para la columna de la parte complementaria. Mutemos primero en dirección -1 y supongamos que la parte superior es la matriz asociada al carcaj \tilde{Q} con la orientación inicial. Entonces, si la primera columna es positiva, por 2.4.2 se tiene que

$$\mu_{-1}(M) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -(a+b) & 2c & 2d+2(a+b) \\ -2e & f+g & 2h+4e \\ -2i & 2j & k+l+4i \end{pmatrix}$$

mientras que

$$\tilde{\mu}_{-1}(M') = \frac{\begin{array}{c|c|c} 0 & \pm 1 & \mp 1 \\ \hline \mp 1 & 0 & \pm 1 \\ \hline \pm 1 & \mp & 0 \\ \hline -a & c & d+a+b \\ -b & & \\ \hline -e & f & h+2e \\ g & & \\ \hline -i & j & k+2i \\ & & l+2i \end{array}}{\quad}$$

pues la primera columna de M' también es positiva. Si la primera columna es negativa, entonces

$$\mu_{-1}(M) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -(a+b) & 2c+2(a+b) & 2d \\ -2e & f+g+4e & 2h \\ -2i & 2j+4i & k+l \end{pmatrix}$$

y como el signo de la primera columna también es negativo, entonces

$$\tilde{\mu}_{-1}(M') = \frac{\begin{array}{c|c|c} 0 & \pm 1 & \mp 1 \\ \hline \mp 1 & 0 & \pm 1 \\ \hline \pm 1 & \mp & 0 \\ \hline -a & c+a+b & d \\ -b & & \\ \hline -e & f+2e & h \\ g+2e & & \\ \hline -i & j+2i & k \\ & & l \end{array}}{\quad}$$

Por lo que el resultado es cierto para estos dos casos. Los demás casos se hacen de manera análoga. \square

Bibliografía

- [1] M. Barot, Ch. Geiss: *Tubular cluster algebras I: categorification* arXiv: 0905.0028v1[math.RT]
- [2] S. Fomin, M. Shapiro, D. Thurston: *Cluster algebras and triangulated surfaces. Part I: Cluster complexes* Acta Math. **201**(2008), 83-146.
- [3] S. Fomin, D. Thurston: *Cluster algebras and triangulated surfaces. Part II: Lambda lengths*. Versión preliminar.
- [4] S. Fomin y A. Zelevinsky: *Cluster algebras I: Foundations*, Compos. Math **143**, (2007), 112-164, math.RA/0602259
- [5] S. Fomin y A. Zelevinsky: *Cluster algebras II: Finite type classification*, Invent. Math. **154**, (2003), 63-121 math.RA/0208229
- [6] S. Fomin y A. Zelevinsky: *Cluster algebras IV: Coefficients*, J. Amer. Math. Soc. **15**(2), (2002), 497-529