



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

**POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS**

**HAMILTONICIDAD EN FAMILIAS DE
GRÁFICAS GEOMÉTRICAS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

**DOCTORA EN CIENCIAS
(MATEMÁTICAS)**

P R E S E N T A :

MARÍA DE LUZ GASCA SOTO

**DIRECTOR DE TESIS:
ISIDORO GITLER GOLDWAIN**

2009



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A MI FAMILIA

A MIS AMIGOS

**SI NO PUEDO DIBUJARLO,
ES QUE NO LO ENTIENDO.**

ALBERT EINSTEIN

**LA INSPIRACIÓN SÍ EXISTE, PERO
TIENE QUE ENCONTRARTE TRABAJANDO**

PICASSO

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer infinitamente al Dr. Isidoro Gitler, por su confianza, su paciencia, incondicional apoyo y solidaridad. Por todas esas tardes de seminario donde discutimos tanto y parecía que avanzamos tan poco... En verdad valieron la pena. ¡Gracias, Patrón!

Deseo expresar un muy especial agradecimiento al Dr. Feliú Sagols por amistad y por compartir conmigo su mundo voxelable. Por todas sus interesantes ideas. Por su paciencia, por sus comentarios y críticas hechas a este trabajo. ¡Mil Gracias Feliú!

Agradezco a la Dra. Hortensia Galeana por el apoyo brindado, durante este intenso proceso de aprendizaje. Gracias por aceptar ser parte de este proyecto.

A mis sinodales: Sergio Rajsbaum, Criel Merino, Gelasio Salazar, Javier Bracho y Ernesto Bribiesca. Gracias apoyo. Sus comentarios y críticas fueron sumamente importantes para la finalización del presente trabajo.

A Víctor Neumann Lara, quien tuvo fe en mí y defendió mi causa para ingresar al Doctorado. Gracias por el apoyo brindado a todas las personas que mostrábamos interés por las gráficas y sus aplicaciones. Gracias Víctor, por heredarnos la Teoría de las Gráficas. ¡Te extrañamos!

Quiero agradecer a mi amiga la Dra. Elisa Viso por su total y absoluto apoyo, porque siempre ha estado conmigo, en las buenas y en las malas. Elisa, has cruzado esta meta conmigo. ¡Mil gracias!

Deseo expresar mi eterno agradecimiento a Claudia Lara, por su invaluable e incondicional amistad, porque siempre está conmigo, por todo lo que hemos compartido: las risas y las lágrimas, los acuerdos y desacuerdos, los conciertos, los museos, las carreras de n kilómetros. You are the sister of my heart, Cani.

A mi amigo Adrián Girard, un hombre con el que siempre puedo contar. Por acompañarme en esta travesía doctoral. Gracias por compartir conmigo tantas cosas, sobre todo la buena comida.

A Flor de María Aceff, por su interés en el presente trabajo, por todas esas preguntas con las que me cuestionaba, en verdad me hacían pensar. Gracias Flor, por tu amistad.

A Leonardo López por su amistad, solidaridad y compañía, gracias por compartir conmigo interesantes discusiones sobre las gráficas.

A toda la gente de la Facultad de Ciencias, UNAM, y, en especial, a la Departamento de Matemáticas. Gracias por la confianza.

Agradezco infinitamente el apoyo de mis ayudantes.

Agradezco la gente del Departamento de Matemáticas de Cinvestav-IPN, quienes me recibieron muy cordialmente. Agradezco a Carlos Valencia su solidaridad y amistad. A mis hermanos de seminario: Alejandro Flores, Juan A. Vega y Gloria Aguilar, gracias por todos los momentos que compartimos en el Cinvestav y, sobretodo, en los Congresos. Gracias a Laura y Roxana, por apoyarme siempre.

Índice general

Resumen	1
Abstract	2
1. Introducción	3
2. Marco Teórico	9
2.1. Hamiltonicidad	9
2.2. Retículos	11
2.3. Introducción a la Topología Digital	13
2.4. 3-Cadenas y 3-Imágenes Digitales	14
2.5. Vox Sólidos	16
2.6. Gráficas Asociadas a vox-sólidos	20
2.7. Superficies	23
3. Caracterización de Vox-sólidos Inductivos	29
3.1. Vox-sólidos Arbóreos	29
3.2. Vox-sólidos Laminares	29
3.2.1. Marco Teórico	30
3.2.2. Propiedades de vox-sólidos laminares	34
3.3. Vox-sólidos Esféricos	39
3.3.1. Vox-sólidos 2-laminados	45
3.3.2. Vox-sólidos m -laminados, $m > 3$	53
4. Descomposición Hamiltoniana de Vox Sólidos Esféricos	55
5. Vox Sólidos Irreducibles	65
5.1. Vox-sólidos Irreducibles Básicos. Construcción	65
5.2. Familias de Vox-sólidos Irreducibles	70
5.3. Vox-sólidos No-inductivos de Género $g > 2$	97
6. Vox-sólidos Irreducibles de Cardinalidad Mínima	101

7. Hamiltonicidad de Vox Sólidos Irreducibles	125
7.1. Resultados Preliminares	125
7.2. Descomposición Hamiltoniana de Vox-sólidos	145
8. Engrosamiento de Vox-sólidos	171
8.1. Hamiltonicidad	171
8.2. Gemas y Engrosamientos	175
8.3. Hamiltonicidad de las Gemas	178
Apendices	179
A. Topología Digital	181
B. Estructuras Elementales	189
Índice de Figuras	194
Bibliografía	204
Índice alfabético.	205

Resumen

El tema central de esta tesis es el estudio de propiedades combinatorias, geométricas, topológicas y computacionales asociadas a un sólido digitalizado (un sólido con ciertas propiedades que lo especifican) o vox-sólido. Cada vox-sólido tiene asociado una gráfica facial 4-regular y 4-conexa, donde cada vértice corresponde a una cara en su frontera y cada arista indica la adyacencia entre caras.

El problema de representar eficientemente un vox-sólido ha sido transformado en determinar un ciclo Hamiltoniano en su gráfica facial; es bien conocido que éste es un problema NP-completo.

En esta tesis trabajamos dos problemas abiertos, encontrados en la literatura, restringidos a gráficas faciales de vox-sólidos:

1. ¿Es cierto que toda gráfica 4-regular y k -conexa, $k \leq 5$, es Hamiltoniana?
2. ¿Es cierto que toda gráfica 4-regular y k -conexa, $k \leq 5$, admite una descomposición de sus aristas en dos ciclos Hamiltonianos disjuntos (descomposición Hamiltoniana)?

Diremos que un vox-sólido es inductivo si puede construirse, bajo ciertas reglas, agregando voxel por voxel de manera que en cada paso se obtenga un nuevo vox-sólido; en otro caso, lo llamaremos no-inductivo.

Caracterizamos al vox-sólido no-inductivo más pequeño, con respecto al número de voxeles, que puede construirse. A partir de una familia de vox-sólidos no-inductivos básicos, generamos familias infinitas de vox-sólidos no-inductivos. Demostramos que las gráficas faciales asociadas a éstos son Hamiltonianas y, además, admiten una descomposición Hamiltoniana.

Diremos que un vox-sólido es esférico si su frontera es homeomorfa a una esfera. Demostramos que los vox-sólidos esféricos son inductivos y presentamos familias infinitas de éstos que admiten una descomposición Hamiltoniana.

Finalmente, demostramos que el engrosamiento de todo vox-sólido admite una descomposición Hamiltoniana.

Abstract

The main topic of this thesis is the study of combinatorial, geometric, topological and computational properties associated to a digitized solid (a solid with special properties that specify it), or vox-solid. Each vox-solid has associated a 4-regular and 4-connected face graph, where each vertex corresponds to a face in its boundary and each edge the adjacency between faces.

The problem of representing efficiently a vox-solid has been transformed into one of determining a Hamiltonian cycle in its face graph and this problem is well known to be a NP-complete problem.

In this thesis we studied two open problems found in the Literature, restricted to face graphs of vox-solids:

1. It is true that all 4-regular and k -connected graphs, with $k \leq 5$, are Hamiltonian?
2. It is true that all 4-regular and k -connected graphs, with $k \leq 5$, admit a decomposition in two disjoint Hamiltonian cycles (Hamiltonian decomposition)?

A vox-solid is inductive if it can be constructed, under certain rules, adding voxel by voxel so that in each step a new vox-solid is obtained; otherwise, it is called non-inductive.

We characterize the smallest non-inductive vox-solid, with respect to the number of voxels that can be constructed. We also determine from basic minimal non-inductive vox-solids new infinite families of non-inductive vox-solids. We prove that the associated face graphs are always Hamiltonian and furthermore always admit a Hamiltonian decomposition.

A vox-solid is spherical if its boundary is homeomorphic to the sphere. We prove that the spherical vox-solids are inductive and important families of them admit a Hamiltonian decomposition.

Finally, We prove that the thickening of any vox-solid admits a Hamiltonian decomposition.

Capítulo 1

Introducción

Objetos en 3-dimensiones e imágenes en 2-dimensiones son aproximados digitalmente por conjuntos de voxeles (*volume elements*) y píxeles (*picture elements*), respectivamente. Un píxel representa a un punto en la pantalla de la computadora, mientras que un voxel es la representación del punto en 3-dimensiones, es decir, un cubo unitario.

La Geometría Digital es el estudio de las propiedades geométricas de los objetos digitalizados, comprende tanto sus definiciones como los algoritmos para su cálculo. La Topología Digital, trata con las propiedades de naturaleza topológica y algoritmos que calculan o preservan tales propiedades, especialmente conexidad y adyacencia.

Así, diremos que dos voxeles están ensamblados si comparten, totalmente, una cara. Diremos, también, que un vox-sólido es un conjunto no vacío y conexo de voxeles cuya frontera es una superficie orientable. Formalmente, un vox-sólido \mathcal{V} es la unión finita de voxeles tales que: (1) se intersectan sólo por caras, aristas o vértices; (2) la frontera de \mathcal{V} es una superficie orientable no singular.

A lo largo del Capítulo 2, presentamos los conceptos generales tomados en cuenta para el desarrollo de la investigación. Empezamos con un resumen sobre Hamiltonicidad y resultados importantes en diferentes líneas de investigación del tema. También exponemos una breve introducción a los Retículos, Topología Digital, 3-cadenas e imágenes digitales y establecemos una relación del concepto vox-sólido con la Topología Digital y los Retículos. Por último, definimos formalmente el concepto de vox-sólido, entre otras especificaciones y definiciones relacionadas con el tema. Además definimos diferentes gráficas asociadas a los vox-sólidos, como la Gráfica de Adyacencia de voxeles, de Adyacencia de caras, o Facial, y la de Adyacencia de niveles.

Un **vox sólido es inductivo** si, y sólo si, existe *una* enumeración de sus voxeles en una secuencia v_1, v_2, \dots, v_n , de tal manera que, para cada i , $1 \leq i \leq n$, el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ es un vox-sólido. Si no existe tal numeración diremos que el vox-sólido es **no inductivo**. Los vox-sólidos inductivos tienen una gran importancia porque permiten aplicar argumentos inductivos sobre sus propiedades topológicas, geométricas y algorítmicas. Sin embargo, no todos los vox-sólidos tienen esta particularidad, por lo que su caracterización resulta ser un problema relevante. Una manera de lograrla es mediante el estudio de los vox-sólidos no-inductivos minimales; esto último en referencia a la propiedad de ser vox-sólido.

En el Capítulo 3, demostramos que los vox-sólidos arbóreos, laminares (de un piso) y los esféricos son inductivos. Iniciamos definiendo vox-sólido arbóreo (Definición 3.1) y probamos que es inductivos (Teorema 3.1). Demostramos que si un vox-sólido es laminar (Definición 2.4), entonces es inductivo (Teorema 3.2). Para ello requerimos el Lema 3.1, que nos indica que dado un voxel ν en un vox-sólido laminar \mathcal{V} , siempre es posible encontrar una enumeración válida para los voxeles de \mathcal{V} , de tal forma que ν reciba la última etiqueta en la enumeración.

En la Sección 3.2.2 se presentan las propiedades de los vox-sólidos laminares, que permiten aplicar la estrategia general para demostrar que los vox-sólidos esféricos son inductivos. Se introducen los conceptos de separar y rodear un sub-vox-sólido de uno laminar (Definición 3.3) y se presentan condiciones para realizar tales operaciones (Lema 3.2, Proposición 3.3, Lemas 3.3 y 3.4).

Para establecer que los vox-sólidos esféricos son inductivos (Sección 3.3), definimos el concepto de gráfica de adyacencia de niveles (Definición 2.10), sobre la que probamos varias propiedades. Finalmente, demostramos que un vox-sólido es esférico si y sólo si cada una de sus gráficas de adyacencia de niveles resulta ser un árbol (Teorema 3.3). Es decir, caracterizamos los vox-sólido esféricos en términos de la gráfica de adyacencia de niveles.

En la Sección 3.3.1, se revisan los vox-sólidos 2-laminados (Definición 2.4) con el objetivo de demostrar que un vox-sólido esférico 2-laminado es inductivo (Teorema 3.12). Se estudian tres casos generales: (I) cada piso o nivel está formado por un sub-vox-sólido; (II) un piso está formado por un sub-vox-sólido y el otro por varios; (III) cada piso está integrado por varios sub-vox-sólidos. La gráfica de adyacencia de niveles por pisos de un vox-sólido 2-laminado es un árbol T . Para los dos primeros casos T tiene dos niveles. El método consiste en enumerar, primero, los voxeles de un piso (Teoremas 3.7 y 3.10), equivalente a podar una hoja en el árbol (Lema 3.16). Finalmente, en la Sección 3.3.2, se deduce que todo vox-sólido esférico es inductivo (Teorema 3.14). Para concluir, demostramos que, si para un vox-sólido \mathcal{V} una de sus gráficas de adyacencia de niveles es un árbol, entonces \mathcal{V} es inductivo (Teorema 3.15).

En el caso del Capítulo 4, demostramos que familias infinitas de vox-sólidos esféricos admiten una descomposición Hamiltoniana. Para hacerlo, utilizamos propiedades de las gráficas 4-regulares y 4-conexas. Con esta técnica, establecemos que los vox-sólidos arbóreos admiten una descomposición Hamiltoniana (Corolario 4.1). Demostramos que el resultado es válido para ciertas gráficas planas 4-regulares y 4-conexas (Corolario 4.2). Continuamos demostrando que los vox-sólidos prismáticos¹ admiten una descomposición Hamiltoniana (Proposición 4.2). Introducimos una familia de vox-sólidos esféricos cuyos elementos son denominados n -crucetas (Figura 4.8) y demostramos que admiten una descomposición Hamiltoniana (Lema 4.3).

Así, a partir de una gráfica 4-regula G que admite una descomposición Hamiltoniana y dos conjuntos de aristas, A y B , cada uno en un ciclo de la descomposición, se define U , una gráfica formada por los conjuntos de trayectorias disjuntas (generados por A y

¹Un vox-sólido prismático es aquel cuya forma es similar a un prisma.

B). Con ello se demuestra que, al agregar U a G para obtener G' , es posible extender la descomposición Hamiltoniana a G' (Proposición 4.4). Este resultado se generaliza para gráficas 4- regulares inmersas en el toro (Proposición 4.5).

Existen vox-sólidos no inductivos, los cuales poseen la característica de que si *cualquier* voxel es extraído de ellos, el objeto tridimensional resultante no satisface las condiciones para ser un vox-sólido. Es decir que habrá, al menos, un par de voxes que no estén ensamblados, los cuales denominamos **vox-sólidos irreducibles**.

En cuanto a los resultados del Capítulo 5, presentamos los vox-sólidos irreducibles. Iniciamos con la construcción de los vox-sólidos irreducibles básicos $\{\mathcal{L}_{16}, \mathcal{Q}_{18}, \mathcal{F}_{20}, \mathcal{V}_{32}\}$ y el encaje de su respectiva gráfica facial en el toro. Continuamos con la construcción de Familias de vox-sólidos irreducibles a partir de los básicos y la introducción los conceptos como corte, separación y separación válida (Definiciones 5.1, 5.2, 5.3). Mostramos como, para cada uno de los vox-sólidos básicos se construye al menos una familia infinita.

Las familias para \mathcal{L}_{16} , \mathcal{F}_{20} y \mathcal{V}_{32} se construyen anexando estructuras kZ ² A partir de un elemento, no necesariamente el básico, se puede construir el siguiente anexando estructuras $0Z$, o cualquier otro agregando kZ , $k \geq 1$ (Teoremas 5.1, 5.3, 5.4). En el caso de la familia para \mathcal{Q}_{18} , se genera anexando estructuras kV . De maner similar, a partir de un elemento de la familia se puede construir el siguiente agregando dos estructuras $1V$, o bien, construir cualquier elemento mayor usando dos estructuras kV , $k \geq 1$ (Teorema 5.2).

Así, tenemos cuatro vox-sólidos irreducibles básicos que juegan un papel fundamental en la caracterización de los vox-sólidos inductivos, no inductivos e irreducibles, sobretodo el de 16 voxes. Expondremos como, a partir de ellos, construimos familias infinitas de vox-sólidos irreducibles y, en general, de vox-sólidos no inductivos.

Finalmente, presentamos algunos vox-sólidos no-inductivos cuya frontera es una superficie de género mayor que 1. En particular, presentamos un vox-sólido no inductivo arista-visible de género 2, para el cual proporcionamos una representación planar de su gráfica facial y sobre la cual marcamos un ciclo Hamiltoniano. También, mostramos dos vox-sólidos no-inductivos que no son arista-visibles, uno de género 2 y otro de género 3. Indicamos, brevemente, cómo generar familias infinitas de este tipo de vox-sólidos, mediante las estrategias expuestas en la Sección 5.2.

En el Capítulo 6, trabajamos con los vox-sólidos irreducibles más pequeños. Por el Teorema 3.2 sabemos que todo vox-sólido laminar es inductivo y, mediante el Teorema 3.14, que los esféricos también lo son. Así, un vox-sólido no inductivo deberá tener más de un piso y no podrá ser esférico.

Años atrás, un vox-sólido no inductivo toroidal constituido por veinte voxes se consideraba como el más pequeño vox-sólido no inductivo. En la presente investigación, presentamos un vox-sólido irreducible formado con 16 voxes y demostramos que es el menor de los irreducibles y, por ende, el menor no-inductivo. También presentaremos tres vox-sólidos irreducibles de 18 voxes.

En específico, \mathcal{L}_{16} es el vox-sólido no inductivo de menor tamaño que conocemos. Sus dimensiones son $4 \times 4 \times 3$. El vox-sólido toroidal más pequeño es la tuerca de ocho voxes,

²Las estructuras elementales son descritas en el Ápendice B

cuyas dimensiones son $3 \times 3 \times 1$. Entonces, realizamos una revisión exhaustiva sobre los retículos $\mathcal{R}(b, d, h)$ con $b \geq 3, d \geq 3$ y $h \geq 2$, considerando, además, que $b \geq d \geq h$, con el fin de evitar casos repetidos.

Demostremos que \mathcal{L}_{16} no sólo es el menor vox-sólido no inductivo 3-laminado sino que es único y el menor de todos los irreducibles (Teorema 6.3). Para llegar a este resultado, es necesario determinar que no es posible construir un vox-sólido irreducible en retículos $\mathcal{R}(a, p, 2)$ con $2 \leq a \leq 4, 2 \leq p \leq 4$ (Teoremas 6.1 y 6.2), ni en $\mathcal{R}(a, 3, 3)$ con $3 \leq a \leq 4$ (Lemas 6.5 y 6.6). Finalmente, se establecen condiciones para determinar en qué casos no es posible construir un vox-sólido no inductivo en el retículo $\mathcal{R}(4, 4, 3)$ (Lema 6.7) y cuándo sí (Lema 6.8).

Cabe mencionar que, durante la revisión, encontramos tres vox-sólidos irreducibles de 18 voxeles en el retículo $\mathcal{R}(4, 4, 4)$, Lema 6.9. Determinamos que no es posible construir un vox-sólido irreducible en el retículo $\mathcal{R}(5, 4, 2)$, Lema 6.10, mientras que sí lo es en el retículo $\mathcal{R}(5, 5, 2)$ y tal vox-sólido es \mathcal{F}_{20} (Lema 6.11).

En el Capítulo 7, mostramos que las familias de vox-sólidos irreducibles presentadas, en la Sección 5.2, son Hamiltonianas y, además, admiten una descomposición Hamiltoniana. Proporcionamos una técnica para construir la descomposición Hamiltoniana para los elementos de las familias de vox-sólidos irreducibles generadas. Consideramos tanto al vox-sólido como al encaje de su gráfica facial. La estrategia consiste en proporcionar un ciclo Hamiltoniano para los vox-sólidos básicos $\{\mathcal{L}_{16}, \mathcal{Q}_{18}, \mathcal{F}_{20}, \mathcal{V}_{32}\}$, a partir del que se genera un nuevo ciclo Hamiltoniano para cada elemento de las familias respectivas. Este método se afina para obtener una descomposición Hamiltoniana. Es decir, a partir de una descomposición Hamiltoniana para un vox-sólido básico, se genera una descomposición Hamiltoniana para cada elemento de la familia.

Refinamos el concepto de Separación (Definición 5.2) a Separación conveniente (Definición 7.1), en el que se *rompe*, únicamente, una arista del ciclo Hamiltoniano en cada corte. Hay que tener en cuenta que los elementos de las familias \mathcal{L}, \mathcal{F} y \mathcal{V} crecen al insertarles convenientemente estructuras $1V$, mientras que la familia \mathcal{Q} mediante estructuras $0Z$, las cuales denominamos anexos. De ahí, se debe identificar una separación válida que sea conveniente, considerar la subgráfica generada por los vértices en el corte q y en el anexo, llamada A_q y, finalmente, determinar una trayectoria Hamiltoniana sobre la gráfica A_q . Esta última debiera unir los vértices extremos de la arista del ciclo Hamiltoniano, separados por el corte. Resulta claro que, de esta manera el ciclo Hamiltoniano se extiende para el nuevo elemento de la familia. Así, obtenemos que, dado un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H} para un vox-sólido en cualquiera de las familias $\mathcal{L}, \mathcal{F}, \mathcal{V}$ o \mathcal{Q} siempre es posible extender \mathcal{H} para generar un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H}' para otro elemento mayor de la familia respectiva (Teorema 7.5).

Para obtener la descomposición Hamiltoniana proporcionamos a cada familia la trayectoria Hamiltoniana en la gráfica inducida A_q que genera la descomposición para todos los elementos de la familia. Así, podemos concluir que, dada una descomposición Hamiltoniana para un vox-sólido en las familias $\mathcal{L}, \mathcal{F}, \mathcal{V}$ o \mathcal{Q} , siempre es posible su extensión para obtener una nueva descomposición Hamiltoniana para otro elemento mayor de la familia respectiva (Teorema 7.14).

Por último, en el Capítulo 8, demostramos que el refinamiento o engrosamiento (Definición 8.2) de un vox-sólido admite una descomposición Hamiltoniana (Teorema 8.3). Además generalizamos este resultado para ciertas gráficas 4-regulares y 4-conexas que no necesariamente están asociadas a un vox-sólido (Teorema 8.4, Corolario 8.1).

Introducimos el concepto de gema³ (gráfica cúbica que encripta un mapa). Establecemos una biyección entre la gema de un vox-sólido y su engrosamiento (Lemas 8.3 y 8.4). Demostramos que toda gema asociada a una gráfica plana es Hamiltoniana (Teorema 8.5). Para las gemas, ampliamos la definición de descomposición Hamiltoniana a pseudo-descomposición Hamiltoniana. Establecemos que las gemas asociadas a ciertas gráficas planas, que permiten una partición de sus aristas en dos árboles generadores ajenos por aristas, admiten una pseudo-descomposición Hamiltoniana (Teoremas 8.6 y 8.7). Con esto concluimos que las gemas asociadas a la gráfica facial de un vox-sólido la admiten (Corolario 8.2).

³En Inglés, *gem* : Graph encoded map

Capítulo 2

Marco Teórico

En este Capítulo introducimos los conceptos generales que serán usados a lo largo del presente trabajo. Iniciamos con un resumen sobre Hamiltonicidad y algunos resultados importantes en el área, para continuar con una breve introducción a los Retículos, la Topología Digital, las Cadenas e Imágenes Digitales. Posteriormente, presentamos la definición de vox-sólidos y resultados que establecen la relación entre el concepto de vox-sólido, la Topología Digital y los Retículos. Además, definimos varias gráficas asociadas a los vox-sólidos, para, finalmente, presentar un resumen sobre superficies e inmersiones.

2.1. Hamiltonicidad

Decimos que una gráfica G es Hamiltoniana si posee un ciclo que contiene a todos los vértices de G , denominado **ciclo Hamiltoniano**.

Un problema clásico que ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de la Teoría de Gráficas consiste en determinar en qué casos una gráfica es Hamiltoniana. A la fecha, se han obtenido resultados novedosos y, también, han surgido nuevas preguntas por resolver.

Uno de los primeros resultados de Hamiltonicidad sobre gráficas regulares es el Teorema de Smith, que postula que toda gráfica 3-regular Hamiltoniana G contiene un número par de ciclos Hamiltonianos que pasan por una arista de G . La primera prueba de esto fue presentada por Tutte [57] y, posteriormente extendida por Thomason [55] para toda gráfica Hamiltoniana en la que todos los vértices son de grado impar. La conjetura de Sheehan [49], que permanece abierta, establece que toda gráfica 4-regular Hamiltoniana tiene al menos dos ciclos Hamiltonianos.

De igual manera, Tutte [58] establece que toda gráfica 4-conexa plana es Hamiltoniana, teorema que ha sido aplicado a numerosos estudios de gráficas planas y gráficas sobre una superficie fija. Thomassen [56], por su parte, extendió el teorema de Tutte para gráficas conexas Hamiltonianas, mientras que Thomas y Yu [52] demuestran que toda gráfica proyectiva y 4-conexa tiene un ciclo Hamiltoniano.

De igual manera, Matthews y Summer [34, 35] han estudiado las propiedades de hamiltonicidad sobre gráficas libres de $K_{1,3}$ y establecen que, si G es un gráfica 2-conexa

libre de $K_{1,3}$, tal que $\delta(G) \geq (n-2)/3$, entonces G es Hamiltoniana. Además, llegan a la conjetura de que, si G es 4-conexa y no contiene a $K_{1,3}$, entonces G es Hamiltoniana.

Ciclos Hamiltonianos múltiples

Recordemos que dada una gráfica $G = (V, A)$ y un entero positivo d , se denota por G^d a la gráfica con vértices V , para la que dos vértices son adyacentes si, y sólo si, tienen una distancia no mayor a d en G .

Nebesky y Wisztova [43] prueban que: Si G es una gráfica conexa de orden al menos $n, n \geq 6$ entonces existe un ciclo Hamiltoniano C_1 para G^3 y otro C_2 para G^5 , tal que C_1 y C_2 son ajenos por aristas. Este resultado se establece directamente, pues se sabe que G^3 es Hamiltoniana y que si $n \geq 5$ entonces G^5 tiene un 4-factor.

En 1971, Nash-William[41] generalizó el Teorema de Dirac para obtener un resultado sobre ciclos Hamiltonianos múltiples en gráficas regulares, estableciendo que: Si G es una gráfica k -regular de orden $n, n \geq 14$, y $k \geq (n-1)/2$ entonces G contiene $(3k-n+1)/6$ ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas.

Por su parte, Jackson [24] conjeturó que si G es k -regular con n vértices, donde $k \geq (n-1)/2$, entonces G contiene $k/2$ ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas.

Por otro lado, Zaks [61] demuestra que esta conjetura no puede ser extendida para valores pequeños de k ($k = 4, 5$). Mediante una familia infinita de gráficas 4-regulares y 4-conexas, en la cual dos ciclos Hamiltonianos cualesquiera comparten, al menos, $1/16$ de sus aristas. Además, mostró una familia de gráficas 5-regulares y 5-conexas planas que no poseen dos ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas. La última también fue encontrada por Owens [46], quien, además, demuestra la existencia de una gráfica k -regular y r -conexa que contiene k ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas para cada $r \geq 3$ y $\forall k, 0 \leq k \leq n/2$. A diferencia de lo demostrado por Zaks, no tiene $(k+1)$ ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas.

La pregunta de si la existencia de un par de ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas en G implica la existencia de otro par fue formulada por Sloane [50]. En respuesta, Thomason [55] indica que: En una gráfica 4-regular, de orden $n \geq 3$ el número de parejas de ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas, para los cuales dos aristas fijas están en el mismo ciclo, es par. Mientras que la pregunta de que si G contiene k ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas entonces G contiene al menos $k(2k-1)$ ciclos Hamiltonianos fue desarrollada por Nincak [44].

La demostración de que: Si una gráfica $2k$ -regular de orden $n \geq 3$ tiene una descomposición en k ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas, entonces: (1) cada arista de G está en $3k-2$ ciclos Hamiltonianos; (2) G tiene al menos $k(3k-2)$ ciclos Hamiltonianos; (3) G tiene al menos $(3k-2)(3k-5) \cdots (7)(4)(1)$ descomposiciones Hamiltonianas, fue dada por Thomason [55].

Hamiltonicidad en Gráficas Toroidales

Whitney [60] demostró que toda triangulación 4-conexa de la esfera contiene un ciclo Hamiltoniano y, por ende, es 4-coloreable por caras. Tutte [58], por su lado, generalizó este resultado para graficas planas 4-conexas. Desarrollando el método de Tutte, Thomassen [56] prueba que cualquier gráfica plana 4-conexa tiene una trayectoria Hamiltoniana entre todo par de vértices.

Grünbaum [54] llegó a la conjetura que toda grafica 4-conexa inmersa en el plano proyectivo contiene un ciclo Hamiltoniano, lo cual fue probado por Thomas and Yu [52].

En el caso de gráficas inmersas en el toro (gráficas toroidales), Nash-William hace la siguiente conjetura:

Conjetura 1 [42]. Toda gráfica toroidal 4-conexa contiene un ciclo Hamiltoniano.

Altshuler [4] prueba esta conjetura para gráficas toroidales 6-conexas. Por su parte, Brunet y Richter [11] la demuestran para triangulaciones 5-conexas del toro. Thomas y Yu [53] la prueban para gráficas toroidales 5-conexas. Continuando en esa misma línea de investigación, en 2005, Thomas, Yu y Zang prueban el siguiente teorema

Teorema 1 [54]. Toda gráfica toroidal 4-conexa contiene una trayectoria Hamiltoniana.

2.2. Retículos

Un **retículo** o **retículo 3-regular** se define como una subdivisión en cubos del 3-Espacio Euclideo dada por planos paralelos a los ejes coordenados. Cada uno de los elementos de la subdivisión son cubos idénticos, con aristas de longitud 1, conocidos como **voxeles**.

Trabajaremos con retículos cuyos voxeles tengan baricentros enteros. Es decir, que corresponden a la latice entera de \mathbb{R}^3 . Al mencionar las coordenadas de un voxel estamos haciendo referencia a las coordenadas de sus baricentros.

Si denotamos \mathcal{R} al retículo con baricentros enteros, podemos definir los siguientes términos para los voxeles y sus intersecciones:

0-simplejo o **vértice** es la intersección no vacía de 8 voxeles diferentes.

1-simplejo o **arista** es la intersección no vacía de 4 voxeles diferentes, los cuales tienen el mismo valor en una de sus coordenadas.

2-simplejo o **cara** es la intersección no vacía de 2 voxeles diferentes, los cuales tienen el mismo valor en dos de sus coordenadas.

3-simplejo es un **voxel**

Por otro lado, a la unión finita de simplejos de la misma dimensión k la denominaremos k -**cadena**, $0 \leq k \leq 3$. Las cadenas no contienen simplejos de diferentes dimensiones. Cabe hacer notar que una 3-cadena es un complejo *simplicial* en el espacio \mathbb{R}^3 .

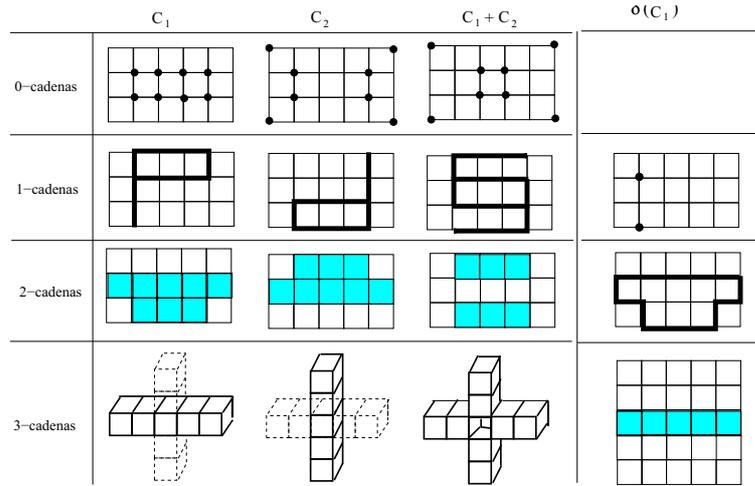


Figura 2.1: Ejemplo de adición de cadenas y operador frontera

En la Figura 2.1 se muestran ejemplos de k -cadenas. Una k -cadena $M, k > 0$, es conexa si resulta ser conexa como subespacio de \mathbb{R}^3 , bajo la topología inducida. Suponga que C_1 y C_2 son dos k -cadenas, $0 \leq k \leq 3$. La suma $C_1 + C_2$ se define como la k -cadena consistente de k -simplejos en C_1 o C_2 , pero no en ambos. Es decir, esta operación resulta ser la diferencia simétrica $C_1 \Delta C_2$.

La Figura 2.1 ilustra ejemplos de esta operación entre cadenas. La suma de k -cadenas es asociativa y conmutativa, posee un único cero (la k -cadena vacía) y, además, cada k -cadena es su propio inverso (único). Para precisar, el conjunto de k -cadenas es un grupo conmutativo e idempotente bajo esta operación.

Por otro lado, cada retículo R determina cuatro grupos, denominados *grupos cadena* de R y denotados por $\mathcal{C}_k(R)$. La suma de n k -cadenas $C_1 + C_2 + \dots + C_n$ resulta ser la k -cadena consistente de k -simplejos contenidos en un número impar de cadenas C_1, C_2, \dots, C_n .

Sea C una k -cadena, con $k > 0$, el **operador frontera** ∂ aplicado a la k -cadena C es la $(k-1)$ -cadena $\partial(C)$ cuyos elementos son los $(k-1)$ -simplejos contenidos en un número impar de k -simplejos de C . Por convención, cualquier 0-cadena tiene a la 0-cadena \emptyset como frontera. La Figura 2.1 ilustra la aplicación del operador frontera aplicado a la cadena C_1 . Si C_1 y C_2 son dos k -cadenas entonces $\partial(C_1 + C_2) = \partial(C_1) + \partial(C_2)$. Esto es, la frontera de una suma es la suma de las fronteras, [47]. Sea C una k -cadena, si existe una $(k+1)$ -cadena T tal que $C = \partial(T)$ entonces se dice que C es una k -frontera. Si $\partial(C) = \emptyset$, se dice que C es un k -ciclo. Para $k = 0$ todas las 0-cadenas son 0-ciclos. Sagols [47] proporciona las propiedades básicas del operador frontera:

1. La suma de dos k -ciclos es un k -ciclo
2. La suma de dos k -fronteras es una k -frontera
3. Cada k -frontera consiste de un número par de simplejos
4. Si T es una k -cadena entonces $\partial(\partial(T)) = \emptyset$. Es decir, cada k -cadena es un k -ciclo

2.3. Introducción a la Topología Digital

En esta sección presentaremos una breve revisión de algunos conceptos básicos sobre Topología Digital y la manera como los usaremos. Un resumen sobre el tema se presenta en el Apéndice A.

Para iniciar llamaremos **punto** a un elemento de \mathbb{Z}^3 . Se dice que dos puntos son **26-adyacentes** si son distintos y cada coordenada de uno difiere de la correspondiente coordenada del otro en, a lo más, 1. Dos puntos son **18-adyacentes** si resultan ser 26-adyacentes y difieren en, a lo más, dos de sus coordenadas. Por último, dos puntos son **6-adyacentes** si son 18-adyacentes y difieren en, a lo más, una coordenada.

Sea S un conjunto de puntos y sea r un número en $\{6, 18, 26\}$. Un r -**vecino** de un punto $p \in S$ es un punto q que es r -**adyacente** a p . Denotamos por $N_r(p)$ al conjunto consistente de p y sus r -vecinos.

Definición 2.1 Una Imagen Digital tri-dimensional, ó 3-imagen digital, es una tripleta $\mathcal{P}(m, n, B)$, donde $(m, n) = (6, 26), (26, 6), (6, 18)$ ó $(18, 6)$; y B es un subconjunto finito de \mathbb{Z}^3 . Los puntos en B son llamados **puntos negros** y los de $\mathbb{Z}^3 \setminus B$, **puntos blancos**.

En este trabajo sólo consideraremos imágenes digitales tridimensionales $\mathcal{P}(m, n, B)$ con $(m, n) = (6, 18)$.

Sea $\mathcal{P}(m, n, B)$ una 3-imagen digital, dos puntos negros en \mathcal{P} son adyacentes si ellos son m -adyacentes; dos puntos blancos, o bien un punto blanco y uno negro, son adyacentes si son n -adyacentes. Un **punto** p es **adyacente a un conjunto de puntos** S si p es adyacente a algún punto en S . Dos **conjuntos de puntos** S y T son **adyacentes** si resulta que algún punto en S lo es a algún punto en T .

Así, decimos que un **conjunto** S , de puntos negros (o uno de puntos blancos) en una 3-imagen digital, es **conexo** si S no puede ser particionado en dos subconjuntos que no sean adyacentes uno del otro. Una **componente** de puntos negros (puntos blancos) de un conjunto S es un conjunto $A \subset S$ no vacío que resulta no ser adyacente a $S \setminus A$. Es decir, en una (m, n) -imagen digital 3-dimensional, una componente de un conjunto de puntos negros es una m -componente, mientras que una componente de puntos blancos es una n -componente. Una componente de puntos negros (blancos) es llamada **componente negra (componente blanca)**. En una 3-imagen digital existe una única componente blanca infinita la cual es denominada **fondo**¹.

Hay que precisar que, para cualquier conjunto de puntos S , una **trayectoria** es una secuencia X_o, X_1, \dots, X_l de puntos diferentes en S , tal que X_i es adyacente a X_{i-1} para toda $i, 1 \leq i \leq l$. Una trayectoria X_o, X_1, \dots, X_l es una $X_o X_l$ -trayectoria, es cerrada si $X_o = X_l$. Una trayectoria degenerada de un solo punto X_o es un caso especial de una trayectoria cerrada. Evidentemente, un conjunto de puntos S es conexo si, y sólo si, para cualesquiera dos puntos X y Y existe una XY -trayectoria en S .

¹Usaremos el término fondo como traducción de *background*

Sea $\mathcal{P}(m, n, B)$ una imagen digital tridimensional. Sean X, Y dos conjuntos de puntos en \mathcal{P} , X conexo. Se dice que X rodea² a Y si cada punto de Y está conectado a una \mathcal{P} -componente.

Sea $\mathcal{P} = (V, m, n, B)$ una imagen digital. Un punto negro en \mathcal{P} es llamado **punto borde** si es adyacente a uno o más puntos blancos. De no serlo, se denomina **punto interior**. El **borde de una componente negra** C de una imagen digital \mathcal{P} es el conjunto de todos los puntos borde de C . El **borde de una componente negra** C , **con respecto a una componente blanca** D , es el conjunto de todos los puntos en C adyacentes a D . Una componente blanca de \mathcal{P} , que es adyacente a una componente negra C y rodeada por ella, es llamada **hoyo** de C en el espacio 2-dimensional y se denomina **cavidad** en el 3-dimensional. Una componente negra en una imagen digital \mathcal{P} corresponde a un objeto geométrico. De manera similar, un hoyo o cavidad corresponde a un hoyo topológico del objeto.

En este trabajo nos referiremos con el término hoyo a una cavidad y nos remitiremos a su definición en Topología Digital o clásica, según sea el caso.

2.4. 3-Cadenas y 3-Imágenes Digitales

El conjunto de baricentros de los voxeles en una 3-cadena finita define los puntos negros de una única imagen digital tridimensional. Inversamente, los puntos negros de una imagen digital tridimensional definen, de manera única los baricentros de los voxeles de una 3-cadena finita. La Figura 2.2 ilustra algunos ejemplos de esta equivalencia.

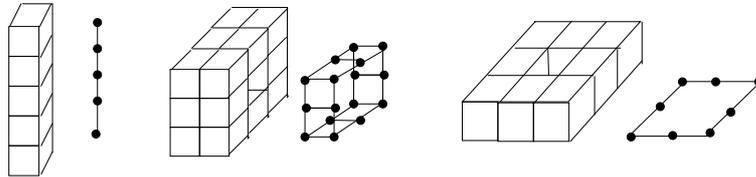


Figura 2.2: 3-cadenas y sus imágenes tridimensionales

Formalmente, para asociar una 3-cadena a su imagen tridimensional se tiene una transformación, definida a continuación [47].

Sean:

$$\mathcal{S} = \{\xi : \xi \text{ es un } i\text{-simplejo en } \mathcal{G}, i = 0, 1, 2, 3\} \quad \text{y}$$

$$\mathcal{S}^* = \{\xi : \xi \text{ es un } i\text{-simplejo en } \mathcal{G}^*, i = 0, 1, 2, 3\},$$

donde \mathcal{G}^* es el retículo de \mathbb{R}^3 cuyos voxeles tienen a los 0-simplejos de \mathcal{G} como baricentros.

La transformación $\mathcal{T} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}^*$ queda definida como:

$$\mathcal{T}(\xi) = \begin{cases} \text{voxel con baricentro } \xi & \text{Si } \xi \text{ es un 0-simplejo;} \\ \bigcap_{\{X: X \text{ es un vertice de } \xi\}} \mathcal{T}(X) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

²ver Apéndice A para más detalles.

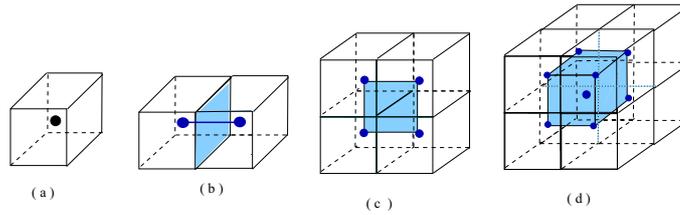


Figura 2.3: Transformación \mathcal{T}

Si ξ es un 0-simplejo con coordenadas (x, y, z) , entonces $\mathcal{T}(\xi)$ es el cubo unitario con baricentro (x, y, z) . Este voxel está en el rango de \mathcal{T} y es único.

Cuando ξ es un k -simplejo con $k > 0$, $\mathcal{T}(\xi)$ es la intersección de un conjunto de cubos unitarios en el rango de \mathcal{T} . Tal intersección nunca es vacía y se encuentra en el rango de \mathcal{T} . Así, se obtiene que \mathcal{T} resulta una biyección que transforma: un vértice en un voxel; un 1-simplejo en un 2-simplejo; un 2-simplejo en un 1-simplejo y un voxel en un vértice. Por ende, diremos que un 1-simplejo es el dual de un 2-simplejo bajo la transformación \mathcal{T} .

La Figura 2.3 muestra una representación gráfica de esta transformación: (a) un 0-simplejo es transformado en un voxel; (b) un 1-simplejo es transformado en un 2-simplejo; (c) un 2-simplejo es transformado en un 1-simplejo; y (d) un voxel es transformado en un 0-simplejo.

Proposición 2.1 [47]. Sean v_1 y v_2 dos puntos en \mathbf{Z}^3 , se tiene que:

1. v_1 y v_2 son 6-adyacentes si, y sólo si, $\mathcal{T}(v_1)$ y $\mathcal{T}(v_2)$ tienen un 2-simplejo en común.
2. v_1 y v_2 son 18-adyacentes si, y sólo si, $\mathcal{T}(v_1)$ y $\mathcal{T}(v_2)$ tienen un 1-simplejo en común.
3. v_1 y v_2 son 26-adyacentes si, y sólo si, $\mathcal{T}(v_1)$ y $\mathcal{T}(v_2)$ tienen un 0-simplejo en común.

La Figura 2.4 ilustra este resultado.

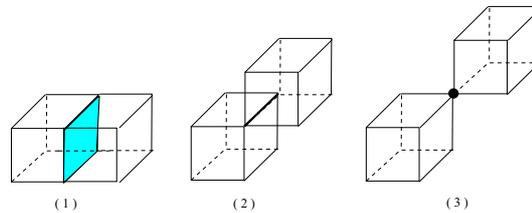


Figura 2.4: Ejemplo de la Proposición 2.1

Asociamos a cada 3-cadena T una 3-imagen digital usando la siguiente relación:

$$\mathcal{D}(T) = \left(6, 18, \bigcup_{S \in T} \mathcal{T}(S) \right).$$

De manera similar, a cada 3-imagen digital, $\mathcal{P}(6, 18, B)$ corresponde una 3-cadena en el retículo \mathcal{G}^* bajo la siguiente relación:

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}) = \bigcup_{p \in B} \mathcal{T}(p).$$

Cabe hacer notar, que cualquier definición o resultado sobre estos entes matemáticos 3-cadenas o 3-imágenes digitales bajo \mathcal{D} , tiene una interpretación que corresponde al otro. En particular, podemos interpretar el concepto de *adyacencia de puntos* de Topología Digital, a cadenas y, de manera similar, *frontera* o *grupos cadena* de 3-cadenas a Topología Digital. Por ejemplo, el borde de una 3-imagen digital corresponde al conjunto de parejas de puntos (p, q) , donde p es un punto negro 6-adyacente al punto blanco q .

2.5. Vox Sólidos

A continuación definiremos nuestro objeto de estudio: el vox-sólido. Además, daremos las definiciones relacionadas y resultados que utilizamos durante el desarrollo del trabajo.

Definición 2.2 Un **vox-sólido** \mathcal{V} es una 3-cadena conexa cuya frontera es una superficie³ orientable. Una definición equivalente es:

Un **vox-sólido** \mathcal{V} es la unión de voxeles tal que:

- (1) los voxeles se intersectan sólo por caras, aristas y vértices; y
- (2) la frontera de \mathcal{V} es una superficie orientable no singular.

Proposición 2.2 [47]. Sea \mathcal{P} una 3-imagen digital. Si \mathcal{P} tiene una única componente negra y una sola componente blanca, entonces $\partial(\mathcal{D}(\mathcal{P}))$ es conexa.

Teorema 2.1 [47]. Sea $\mathcal{P} = (6, 18, B)$ una 3-imagen digital. $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ es un vox-sólido si, y sólo si, \mathcal{P} tiene justo una componente negra y una componente blanca, además, de no contener las configuraciones ilustradas en la Figura 2.5.

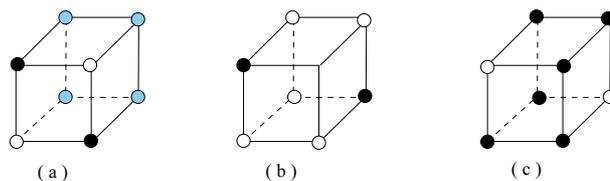


Figura 2.5: Configuraciones Prohibidas

La Figura 2.5 muestra las configuraciones mencionadas por el Teorema 2.1. Los puntos azules en (a) podrían ser negros o blancos. Así, serán denominadas **Configuraciones Prohibidas**.

La Figura 2.6 muestra las imágenes digitales, asociadas bajo la transformación \mathcal{D} , a las 3-cadenas de las configuraciones prohibidas de la Figura 2.5.

³Entendemos por superficie una 2-variedad compacta y conexa con frontera vacía.

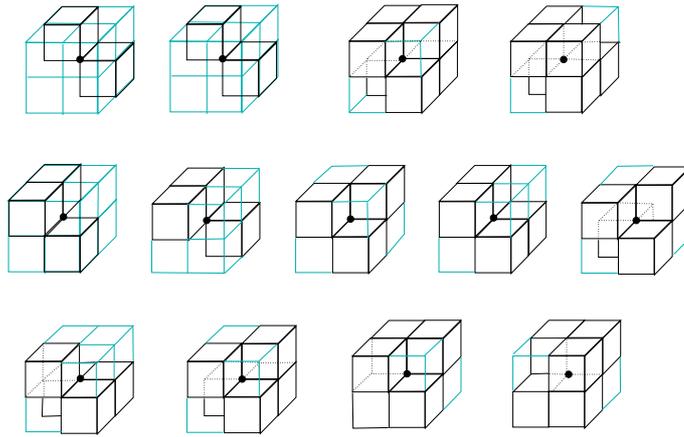


Figura 2.6: Configuraciones prohibidas, imágenes digitales

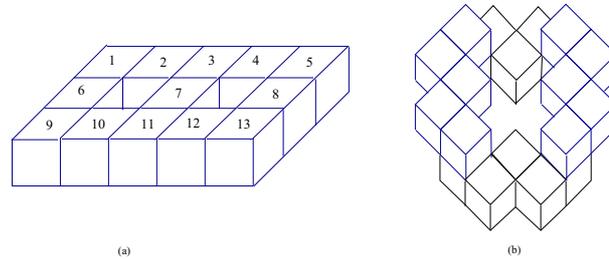


Figura 2.7: Vox-sólidos Inductivo y No-Inductivo

Definición 2.3 Sea \mathcal{V} un vox-sólido. Decimos que \mathcal{V} es un **vox-sólido inductivo** si, y sólo si, existe un *orden* de sus voxeles en una secuencia V_1, V_2, \dots, V_n de tal manera que para cada $i, 1 \leq i \leq n$, la cadena $\{V_1, V_2, \dots, V_i\}$ es un vox-sólido. Si tal disposición no es posible, lo denotaremos vox-sólido **no-inductivo**. Así, la Figura 2.7(a) muestra un vox-sólido inductivo y la (b) uno no-inductivo.

Para facilitar la referencia, definimos \mathcal{V} como el conjunto de todos los vox-sólidos; \mathcal{I} como el conjunto de todos los vox-sólidos inductivos: $\mathcal{I} = \{ \mathcal{V} \in \mathcal{V} : \mathcal{V} \text{ es Inductivo} \}$ y $\mathcal{NI} = \{ \mathcal{V} \in \mathcal{V} : \mathcal{V} \text{ es No-inductivo} \}$.

El tamaño de un vox-sólido \mathcal{V} se determina por el número de voxeles que lo integran y es denotado como $|\mathcal{V}|$. Un **Sub-Vox-sólido** S es un subconjunto de voxeles de \mathcal{V} que, por sí mismo, es un vox-sólido; denotado $S \sqsubset \mathcal{V}$.

Dado que un vox-sólido está inmerso en un retículo 3-regular podemos denominar a sus tres dimensiones como: **amplitud**, b ; **profundidad**, d ; y **altura**, h . Diremos entonces que un vox-sólido tiene dimensiones $b \times d \times h$, o bien que está contenido en un retículo de dimensiones $b \times d \times h$, al cual denotamos por $\mathcal{R}(b, d, h)$.

Definición 2.4 Un vox-sólido es **laminar**, o 1-laminado, si su profundidad d , altura h o amplitud b es 1. Esto es $1 = \min\{b, d, h\}$. Sea $\Lambda_{(1)}$ el conjunto de todos los vox-sólidos laminares: $\Lambda_{(1)} = \{ \mathcal{V} \in \mathcal{V} : \mathcal{V} \text{ es laminar} \}$.

En general, diremos que un vox-sólido es k -**laminado** si está integrado por k vox-sólidos laminares, donde $k = \min\{b, d, h\}$. Sea $\Lambda_{(k)}$ el conjunto de todos los vox-sólidos k -laminados: $\Lambda_{(k)} = \{ \mathcal{V} \in \mathcal{V} : \mathcal{V} \text{ } k\text{-laminado}, k \in \mathbb{N} \}$. En el caso de un vox-sólido k -laminado, a cada uno de los k laminares que lo componen, lo llamaremos un piso; así, estará integrado por k pisos.

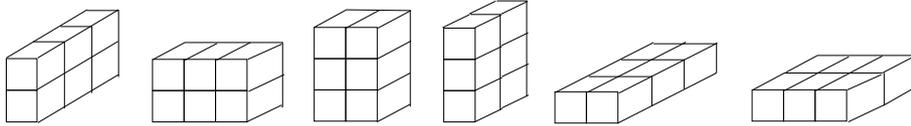


Figura 2.8: Ejemplo de un vox-sólido laminar

La Figura 2.8 ilustra un vox-sólido laminar visto desde diferentes perspectivas. Siempre es posible girar sucesivamente un vox-sólido laminar 90° con respecto a los ejes coordenados para que su altura sea 1.

Por último, diremos que un vox-sólido con dimensiones $b \times d \times h$ que posee exactamente $b \times d \times h$ voxeles es un **bloque**.

Definición 2.5 Un vox-sólido es **arista-visible** si todas sus aristas están sobre la frontera del vox-sólido y **vértice-visible** si todos sus vértices pertenecen a la frontera del vox-sólido. Sean $\mathcal{AV} = \{ \mathcal{V} \in \mathcal{V} : \mathcal{V} \text{ es arista-visible} \}$ y $\mathcal{VV} = \{ \mathcal{V} \in \mathcal{V} : \mathcal{V} \text{ es vértice-visible} \}$.

Un vox-sólido laminar es arista-visible si no posee bloques de tamaño 2×2 . Todo vox-sólido arista-visible es vértice-visible, pero un vox-sólido vértice-visible no necesariamente es arista-visible. El vox-sólido presentado en la Figura 2.8 es vértice-visible pero no es arista-visible. El vox-sólido en la Figura 2.9(b) es tanto arista-visible como vértice-visible.

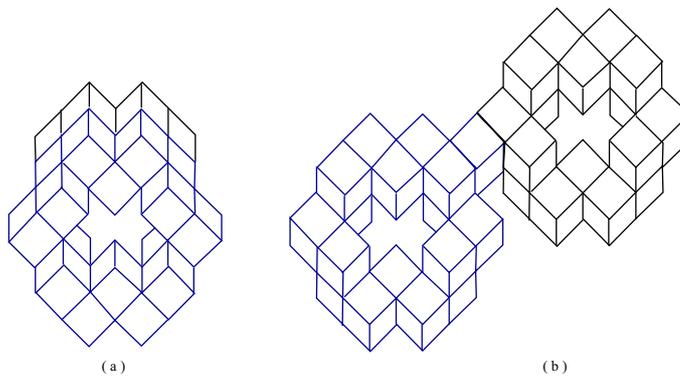


Figura 2.9: Vox sólidos no-inductivos

Definición 2.6 Un vox-sólido es denominado **minimal** si, al quitarle *cualquier* voxel, el objeto 3-dimensional resultante no es un vox-sólido. Así, es minimal con respecto a la propiedad de ser vox-sólido. Por otro lado, un vox-sólido es **irreducible** si, al quitarle *cualquier* voxel, se produce una configuración prohibida. Sean $\mathcal{M} = \{ \mathcal{V} \in \mathcal{V} : \mathcal{V} \text{ es minimal} \}$ y $\mathcal{Ir} = \{ \mathcal{V} \in \mathcal{V} : \mathcal{V} \text{ es irreducible} \}$.

Podemos observar que un vox-sólido minimal es no inductivo, sin embargo, un vox-sólido no inductivo puede ser no minimal. La Figura 2.9 lo ilustra; los vox-sólidos son no-inductivos, pero en el caso de (a), éste no es minimal y en el de (b), sí lo es.

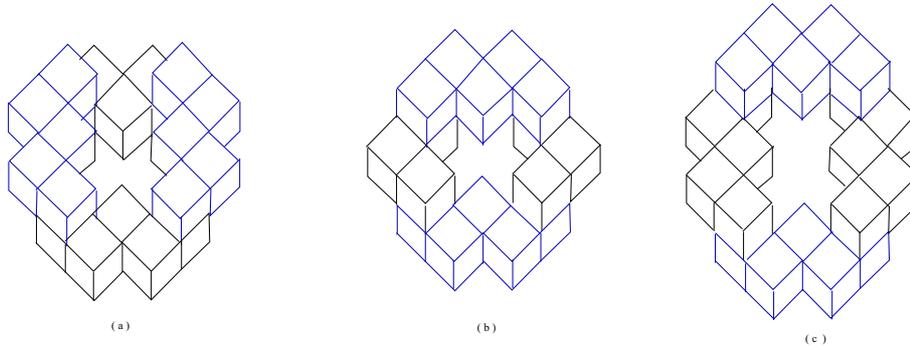


Figura 2.10: Vox sólidos Irreducibles

La Figura 2.10 muestra tres vox-sólidos irreducibles. Podemos observar que la siguiente relación se genera entre los conjuntos de vox-sólidos: $\mathcal{I}r \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{N}\mathcal{I} \subset \mathcal{V}$.

Definición 2.7 Un vox-sólido es **esférico** si su frontera es homeomorfa a la esfera. Por otro lado, un vox-sólido es **toroidal** si su frontera es homeomorfa al toro. Sean $\mathcal{E} = \{ \mathcal{V} \in \mathcal{V} : \mathcal{V} \text{ es esférico} \}$ y $\mathcal{T} = \{ \mathcal{V} \in \mathcal{V} : \mathcal{V} \text{ es toroidal} \}$.

Diremos que un vox-sólido \mathcal{V} es **toroidal simple** si su gráfica de adyacencia de voxeles es un ciclo. Los vox-sólidos en la Figura 2.10 son toroidales simples. Sea \mathcal{T}_s el conjunto de todos los vox-sólidos toroidales simples. Consideraremos:

$$\mathcal{T}(g) = \{ \mathcal{V} \in \mathcal{V} : \text{la frontera de } \mathcal{V} \text{ es una superficie orientable de género } g, g \in \mathbb{N} \}.$$

Distancia entre voxeles

Estamos trabajando sobre el retículo entero y estamos suponiendo que el baricentro de cada voxel está en un punto de \mathbb{Z}^3 . Así, representamos a cada voxel por las coordenadas de sus baricentros y la distancia entre un par de voxeles estará dada por la distancia entre sus baricentros.

De esta manera, si $\mathcal{V} \in \mathcal{V}$ con $u = (x_u, y_u, z_u)$ y $w = (x_w, y_w, z_w)$ dos voxeles de \mathcal{V} representados de acuerdo a sus posiciones en el retículo entonces, la **distancia** de u a w es el mínimo número de posiciones (voxeles) en \mathbb{Z}^3 entre ellos. Para precisar:

$$d(u, w) = x_o + y_o + z_o, \text{ donde } x_o = |x_u - x_w|; y_o = |y_u - y_w|; z_o = |z_u - z_w|.$$

Ahora bien, Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{V}$. Sean $x \in \mathcal{V}$ y $U, W \sqsubset \mathcal{V}$. Se define, la distancia entre un voxel x y un sub-vox-sólido U , como: $d(x, U) = \min\{d(x, u) : u \in U\}$ y la distancia entre sub-vox-sólidos será: $d(U, W) = \min\{d(u, w) : u \in U, w \in W\}$. Nótese que si los sub-vox-sólidos U y W tienen voxeles en común entonces $d(U, W) = 0$.

La función distancia tiene las siguientes propiedades:

Proposición 2.3 Sea $\mathcal{V} \in \mathfrak{V}$, sean u, v, w voxeles en \mathcal{V} . Se tiene que:

- 1) $d(u, w) \geq 0, \quad \forall u, w.$
- 2) $d(u, w) = d(w, u), \quad \forall u, w.$
- 3) $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w), \quad \forall u, v, w.$

Demostración.

Los casos (1) y (2) resultan obvios.

Caso 3) Sean $u = (x_u, y_u, z_u), v = (x_v, y_v, z_v)$ y $w = (x_w, y_w, z_w)$.

Tenemos que:

$$\begin{aligned} d(v, u) + d(u, w) &= (|x_v - x_u| + |y_v - y_u| + |z_v - z_u|) + (|x_u - x_w| + |y_u - y_w| + |z_u - z_w|) \\ &= (|x_v - x_u| + |x_u - x_w|) + (|y_v - y_u| + |y_u - y_w|) + (|z_v - z_u| + |z_u - z_w|) \\ &\geq |x_v - x_w| + |y_v - y_w| + |z_v - z_w| \quad \text{por la desigualdad del triángulo.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d(v, u) + d(u, w) \geq d(v, w)$.

2.6. Gráficas Asociadas a vox-sólidos

A continuación, presentaremos la gráfica de Adyacencia de voxeles de un vox-sólido y de adyacencia de caras, así como la de adyacencia de niveles y sus propiedades.

Gráfica de Adyacencia de Voxeles.

Definición 2.8 Sea $\mathcal{V} \in \mathfrak{V}$. La **Gráfica de Adyacencia de Voxeles** se define como $\mathcal{G}_V(\mathcal{V}) = (V, E)$, donde cada voxel corresponde a un vértice de V . Si dos voxeles ν_1 y ν_2 , son adyacentes por una cara, entonces los vértices correspondientes, v_1 y v_2 , forman la arista (v_1, v_2) en E .

El grado de un voxel es definido como el número de voxeles que están ensamblados a él. Es decir, el grado de un voxel ν es el grado del vértice v , asociado a ν , en la gráfica de adyacencia de voxeles, lo denotamos como $\delta(\nu)$. Así, en el caso de un vox-sólido, el grado máximo de un voxel ν es 6.

Gráfica de Adyacencia de Caras.

Definición 2.9 La **Gráfica de adyacencia de caras, o Facial**, de un vox-sólido $\mathcal{V} \in \mathfrak{V}$ se define asignando un vértice por cada cara de un voxel en la superficie del vox-sólido. Dos vértices serán unidos por una arista si las caras respectivas comparten una arista. Es decir, si son vecinas. La denotaremos por $\mathcal{G}_f(\mathcal{V})$ o simplemente \mathcal{G} .

La Figura 2.11 muestra un voxel y su gráfica de adyacencia de caras. La gráfica facial \mathcal{G} de un vox-sólido es una gráfica 4-regular y 4-conexa [47]. Se conjetura, además, que \mathcal{G} es Hamiltoniana y que admite una descomposición Hamiltoniana [47].

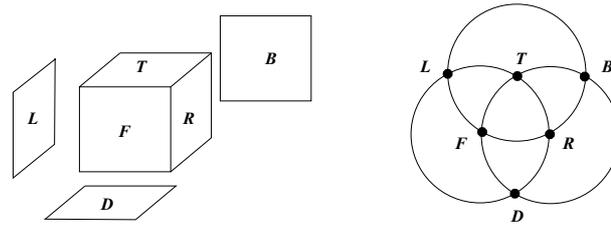


Figura 2.11: El voxel y su gráfica facial

Gráfica de Adyacencia de Niveles.

Todo vox-sólido \mathcal{V} posee tres dimensiones: amplitud, b ; profundidad, d ; y altura, h . Además, está contenido en un caja (retículo) de dimensiones justas, $b \times d \times h$ donde, la amplitud es $b = x_{max} - x_{min} + 1$; profundidad es $d = y_{max} - y_{min} + 1$ y altura es $h = z_{max} - z_{min} + 1$. También diremos que \mathcal{V} tiene b niveles de amplitud, p niveles de profundidad y h niveles de altura. Esto es, a cada nivel corresponde un corte paralelo al eje cartesiano, ya sea en amplitud, profundidad o altura. De esta manera, cada nivel podría estar formado por uno o varios vox-sólidos laminares, denominados **sub-vox-sólidos de un piso**.

Definición 2.10 Sea $\mathcal{V} \in \mathfrak{V}$ un vox-sólido con dimensiones $b \times d \times h$. Considerando sólo una de las dimensiones, digamos D , $D \in \{ \text{amplitud, profundidad, altura} \}$, se define la **gráfica de adyacencia de niveles** de un vox-sólido como $\mathcal{N} = (V, A)$ donde, siendo η el número de niveles en D , se tiene que:

- (i) por cada sub-vox-sólido en el nivel j , $1 \leq j \leq \eta$, existe un vértice en V ;
- (ii) dos vértices son adyacentes si los sub-vox-sólido correspondientes están en niveles contiguos -es decir, adyacentes- y comparten, al menos, una cara.

Es denominada gráfica de adyacencia de niveles (generada) por amplitud, profundidad o altura, de acuerdo a la dimensión tomada. Además se denota por $\mathcal{N}_b(\mathcal{V})$, $\mathcal{N}_d(\mathcal{V})$ y $\mathcal{N}(\mathcal{V})$ a la gráfica de adyacencia de niveles en amplitud, en profundidad y por altura, respectivamente.

Si u_{j_i} es el vértice asociado al i -ésimo sub-vox-sólido del nivel j , las aristas incidentes a u_{j_i} en \mathcal{N} son de la forma $(u_{(j-1)_k}, u_{j_i})$ o $(u_{j_i}, u_{(j+1)_k})$. Como podemos ver, que la gráfica de adyacencia de niveles es simple.

La Figura 2.12 muestra un vox-sólido, su descomposición por niveles: (a) altura, (b) profundidad y (c) amplitud. También se presentan las gráficas de adyacencia de niveles respectivas.

Proposición 2.4 Toda gráfica de adyacencia de niveles de un vox-sólido es conexa.

Demostración. Por definición, un vox-sólido es un conjunto conexo de voxes. Además, entre niveles contiguos (adyacentes) hay, al menos, un par de voxes que comparten

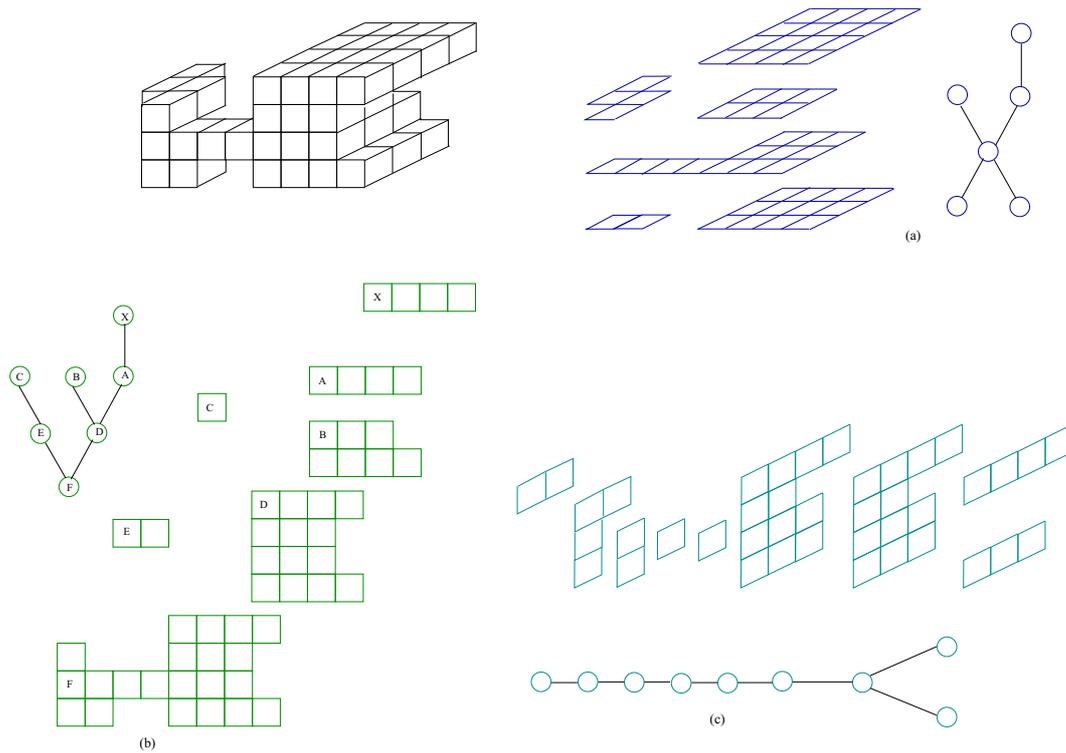


Figura 2.12: Un vox-sólido y sus gráficas de adyacencia de niveles

una cara en su totalidad. Así, por construcción de la gráfica de adyacencia de niveles \mathcal{N} , hay una arista entre los vértices asociados a los sub-vox-sólido correspondientes, por lo que siempre es posible cambiar de un nivel a otro en el vox-sólido. Es decir, que existe un camino entre todo par de vértices en \mathcal{N} . Por lo tanto, la gráfica de adyacencia de niveles \mathcal{N} es conexa.

Proposición 2.5 Si \mathcal{V} es un bloque con dimensiones $b \times d \times h$, entonces toda gráfica de adyacencia de niveles para \mathcal{V} es una trayectoria. Además, la trayectoria tiene longitud h , b o d , acorde a si fue generada por altura, amplitud o profundidad, respectivamente.

Demostración. Sea \mathcal{V} un bloque con dimensiones $b \times d \times h$, observamos que \mathcal{V} está formado por: (1) h bloques de $b \times d \times 1$, considerándolo por altura; (2) b bloques de $1 \times d \times h$, si es por amplitud; (3) d bloques de $b \times 1 \times h$, en el caso de profundidad.

Sin pérdida de generalidad, construyamos la gráfica de adyacencia de niveles por altura. Ya que \mathcal{V} está formado por h sub-vox-sólidos, bloques de dimensión $b \times d \times 1$, por cada uno se tiene un vértice. Es decir, en total, se tienen h . Debido a que todos los sub-vox-sólido están entre pisos contiguos, a excepción del primero y último, ellos comparten, al menos, una cara, por lo cual se tiene una arista entre los vértices correspondientes. De esta manera, se ha generado una trayectoria, en este caso de longitud h .

Cabe mencionar que otros vox-sólidos podrían tener como gráfica de adyacencia de niveles, sobre cualquier dimensión, una trayectoria y no ser bloques.

Hay que hacer notar que cuando el vox-sólido tiene dimensiones $\ell \times \ell \times \ell$ y cada nivel está constituido por un sub-vox-sólido únicamente, la gráfica de adyacencia de niveles es una trayectoria de longitud ℓ .

2.7. Superficies

Para introducir el término superficie, presentamos un breve resumen sobre los conceptos básicos de espacios topológicos. A continuación, introducimos el tema de inmersión de superficies y, finalmente, el de inmersión de vox-sólidos en superficies.

Para un conjunto X , una **topología** en X es una familia \mathcal{A} de subconjuntos en X , denominados **abiertos** tal que satisface los siguientes axiomas:

A1. Si $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subseteq \mathcal{A}$, \mathcal{I} arbitrario, entonces $\cup_{i \in \mathcal{I}} A_i \in \mathcal{A}$.

A2. Si $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subseteq \mathcal{A}$, \mathcal{I} finito, entonces $\cap_{i \in \mathcal{I}} A_i \in \mathcal{A}$.

En particular, X y \emptyset están en \mathcal{A} . X por ser la intersección de una familia vacía y \emptyset por ser la unión de una familia vacía.

Se le denomina **espacio topológico** a la pareja (X, \mathcal{A}) . Lo denotaremos únicamente por X cuando no haya confusión con respecto a la estructura topológica dada por sus abiertos. Al conjunto X se le llama el **conjunto subyacente** del espacio topológico. A los elementos x en X se les denomina **puntos**.

Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Se define una **vecindad** de x como un subconjunto $U \subseteq X$ para el que existe un abierto A en X , tal que $x \in A \subseteq U$.

Por otro lado, un **conjunto cerrado** en un espacio topológico es aquel cuyo complemento es abierto. Así, si A es un subconjunto de un espacio topológico, la intersección de todos los conjuntos cerrados contenidos en A , es también un conjunto cerrado denominado la **cerradura** de A y denotado por \bar{A} .

Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$. Se dice que f es un **mapeo continuo** si $f^{-1}(G)$ es abierto en X , siempre que G es abierto en Y . Se dice que f es un **mapeo abierto** si $f(G)$ es abierto en Y , siempre que G es abierto en X .

Sean X, Y espacios topológicos, y sea $f : X \rightarrow Y$. Se dice que f es un **homeomorfismo** si es un mapeo continuo y biyectivo, y si su inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ también lo es. Si existe tal homeomorfismo, los espacios X y Y serán **homeomorfos**. En resumen, un homeomorfismo es una biyección que respeta la estructura topológica.

Sea I un intervalo de números reales y X un espacio topológico; una **curva** es un mapeo continuo $\gamma : I \rightarrow X$. La curva γ es **simple** si γ es uno a uno. Si I es un intervalo cerrado $[a, b]$, y se permite que $\gamma(a) = \gamma(b)$, entonces se dice que γ es una **curva cerrada**.

Sea X un espacio topológico. Una familia $\{G_i\}$ de subconjuntos abiertos de X es una **cubierta abierta** de X si cada punto en X pertenece a, al menos, un subconjunto G_i . Una subfamilia de una cubierta abierta que lo sea por sí misma una cubierta abierta es llamada **subcubierta**.

Un **espacio compacto** es un espacio topológico X para el cual toda cubierta abierta tiene una subcubierta finita. Un **espacio conexo** es un espacio topológico X que no puede ser representado como la unión de dos conjuntos, no vacíos, abiertos y ajenos. Un **espacio de Hausdorff** es un espacio topológico en el que cada pareja de puntos diferentes puede ser separada por conjuntos abiertos. Es decir, los puntos tienen vecindades ajenas. Cabe mencionar que en un espacio de Hausdorff todo punto es un conjunto cerrado.

Sea $n \geq 1$, consideraremos los siguientes espacios:

$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$, la **bola unitaria** de dimensión n .

$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, la **esfera unitaria** de dimensión $n - 1$.

Si $n = 2$ entonces \mathbb{S}^1 es el círculo unitario.

$\mathring{\mathbb{B}}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, la **bola unitaria abierta** de dimensión n .

Un espacio topológico B homeomorfo a \mathbb{B}^n se denomina una n -**bola**. Un espacio topológico S homeomorfo a \mathbb{S}^{n-1} se designa como una $(n - 1)$ -**esfera**. Sea $\varphi : B \rightarrow \mathbb{B}^n$ un homeomorfismo, la $(n - 1)$ -esfera $\partial B = \varphi^{-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ se denomina la **frontera** de B .

Un espacio topológico X de Hausdorff, 2-numerable, es una **variedad** de dimensión n , o una n -variedad, si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad V homeomorfa a un abierto U en \mathbb{B}^n . Se dice que un punto $x \in X$ es un **punto interior** (respectivamente, **frontera**) si, para algún homeomorfismo $\varphi : V \rightarrow U$, se tiene que $\varphi(x) \in \mathring{\mathbb{B}}^n$ (respectivamente, $\varphi(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$). Se define el **interior** de X como $X^\circ = \{x \in X : x \text{ es punto interior de } X\}$ y la **frontera** de X como $\partial X = \{x \in X : x \text{ es punto frontera de } X\}$.

Una 2-variedad S es una **superficie**. Si esta superficie es compacta y no tiene frontera, será una **superficie cerrada**. De manera similar, una **superficie** S es un espacio de Hausdorff compacto y conexo tal que cada punto de S tiene una vecindad abierta homeomorfa al disco unitario abierto $U^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$.

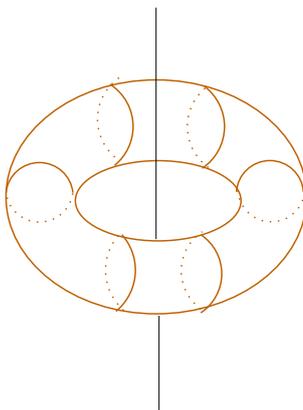


Figura 2.13: El Toro definido por $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Sea X el cuadrado unitario, $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. El **toro** será cualquier espacio topológico homeomorfo al espacio cociente de X obtenido al identificar los puntos $(0, y)$ y $(1, y)$, para $0 \leq y \leq 1$, y los puntos $(x, 0)$ y $(x, 1)$, para $0 \leq x \leq 1$.

El toro, definido por $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es una superficie sin frontera y cerrada. Por otra parte, un **plano proyectivo** será cualquier espacio topológico homeomorfo al espacio cociente de X , obtenido al identificar los puntos $(0, y)$ y $(1, 1 - y)$, para $0 \leq y \leq 1$, y los puntos $(x, 0)$ y $(1 - x, 1)$, para $0 \leq x \leq 1$.

La **suma conexa** de dos superficies X y Y , denotada por $X \# Y$, se obtiene al remover el interior de un disco de cada una e identificar los dos componentes frontera resultantes.

Teorema 2.2 (Teorema de Clasificación de Superficies Cerradas)

Toda superficie cerrada es homeomorfa a algún miembro de las siguientes tres familias:

- a) la esfera S
- b) la suma conexa de g toros, $g \geq 1$, M_g .
- c) la suma conexa de k planos proyectivos reales, $k \geq 1$, N_k

Las superficies en (a) y (b) son llamadas **orientables**, mientras que las superficies en (c), son **no-orientables**.

El **género de Euler** $\gamma(S)$ de una superficie cerrada S se define como cero si S es la esfera. Para la superficie orientable M_g , que puede verse como una esfera con g asas, el género de Euler está dado por $\gamma(M_g) = 2g$.

Sea $S_g \sim S_1 \# S_{g-1}$. Supongamos inductivamente, que S_{g-1} es la suma conexa de $g - 1$ copias de un toro S_1 . Entonces, S_g es la suma conexa de g toros. Por lo tanto, la superficie cerrada orientable de género g es la suma conexa de g toros.

Inmersiones

Una **inmersión** o **encaje** de una gráfica $G = (V, E)$ sobre una superficie S es una representación de G en S , para la que los puntos de S están asociados a los vértices y los arcos simples (imágenes homeomorfas del intervalo $[0, 1]$) están asociados a las aristas, de tal manera que: (i) los puntos terminales del arco asociado a una arista e son los puntos asociados a los vértices terminales de e ;

(ii) ningún arco posee puntos asociados a otros vértices; y

(iii) dos arcos cualesquiera nunca intersectan a un punto interior de otro arco.

En otras palabras, la inmersión o encaje de una gráfica $G = (V, E)$ sobre la superficie S es una función i uno a uno y continua, $i : G \rightarrow S$.

Una gráfica G es **plana** si existe una inmersión de G en la esfera. Si una gráfica $G = (V, E)$ está inmersa en una superficie cerrada S , entonces, el complemento de la unión de los puntos y arcos asociados a los vértices y aristas de G es una familia de **regiones** o **caras**. Un **encaje 2-celular**, también conocido como **encaje celular** o **inmersión celular**, es una inmersión para la que cada cara es homeomorfa a un disco abierto.

Un **encaje 2-celular cerrado** es una inmersión en la que la clausura de cada cara es homeomorfa al disco cerrado. La clausura en la superficie S de una región en el encaje celular de una gráfica G no necesita ser homeomorfo al disco cerrado.

Dado un encaje 2-celular $i : G \rightarrow S$, la colección de todas las aristas y vértices que están en la clausura de una región formen una trayectoria cerrada de la gráfica G , pasando una curva simple justo dentro de la región. Tal trayectoria cerrada es única

independientemente de la elección del vértice inicial y la dirección, y es denominada **frontera** o **trayectoria facial** de la región.

Se dice que una cara es **incidente** a los vértices y aristas de su frontera. La cara de un encaje 2-celular puede ser definida sin ambigüedad mediante su trayectoria cerrada sobre la frontera. Una arista incidente a la región es llamada un **lado** de la región. Una cara de n -lados en un encaje 2-celular es llamada **polígono de n lados** o **n -ágono**.

Sea G un encaje 2-celular de una gráfica sobre una superficie cerrada S , se define la gráfica **dual** G^* de G de la siguiente manera: A cada cara f de G se le asocia un vértice f^* de G^* y dos vértices f^* y g^* están unidos por una arista e^* en G^* si, y sólo si, las caras correspondientes f y g son incidentes a una arista e en G .

Sea $G = (V, E)$ una gráfica. El **género orientable** $\bar{\gamma}(G)$ de G es el menor número g tal que existe para G una inmersión en M_g ; y el **género no orientable** $\tilde{\gamma}(G)$ de G es el menor número k tal que existe para G una inmersión en N_k .

El género de Euler $\gamma(G)$ de una gráfica G está dado por $\gamma(G) = \min\{2\bar{\gamma}(G), \tilde{\gamma}(G)\}$. Cabe hacer notar que, $\gamma(G) = \min\{\gamma(S) : G \text{ puede ser encajada en } S\}$. La **característica de Euler** de una superficie M_g , cerrada y orientable, está definida por $\chi(M_g) = 2 - 2g$; y la de una superficie N_k , cerrada y no orientable, queda definida por $\chi(N_k) = 2 - k$.

Sea S una superficie y G una gráfica de inmersión 2-celular en S con v vértices y f aristas. Se tiene, entonces, que $v - e + f = \chi(S)$. Esta relación es la conocida **fórmula de Euler-Poincaré**.

Inmersión de Vox Sólidos en Superficies

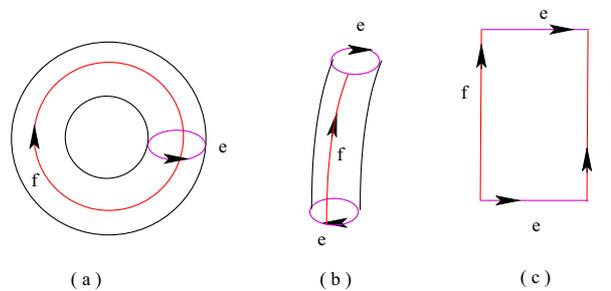


Figura 2.14: Representación del Toro

Dado un toro, una **curva Esencial** es una curva no nulo homotópica. La Figura 2.14 ilustra como pasar del toro a su representación planar. La curva e es una curva esencial en el toro dado.

En esta sección construiremos un encaje en el toro de la gráfica facial de vox-sólidos toroidales arista visibles.

No olvidemos que un vox-sólido es toroidal si su frontera es homeomorfa al toro. Recordemos que en la gráfica facial \mathcal{G} de un vox-sólido \mathcal{V} , un vértice en \mathcal{G} está asociado con una cara en la superficie de \mathcal{V} y una arista en \mathcal{G} indica la adyacencia entre caras, en la superficie, de \mathcal{V} .

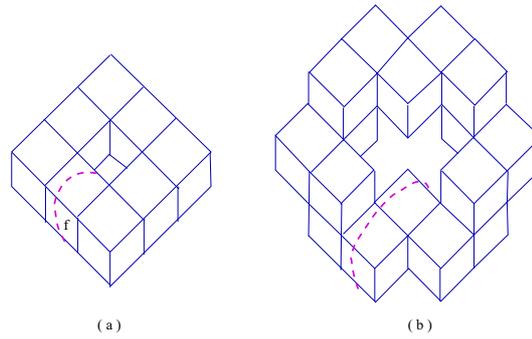


Figura 2.15: Curva Esencial de Vox Sólidos Toroidales

En las Figuras 2.15 se ilustra una curva esencial para cada uno de los vox-sólidos. En (a) tenemos vox-sólido toroidal más simple, al que denominamos **Tuerca**. En (b) presentamos del vox-sólido irreducible llamado \mathcal{L}_{16} .

A continuación ejemplificamos la construcción del encaje en el toro de la gráfica facial de dos vox-sólidos, uno de ellos la tuerca.

Encaje en el Toro de la Tuerca.

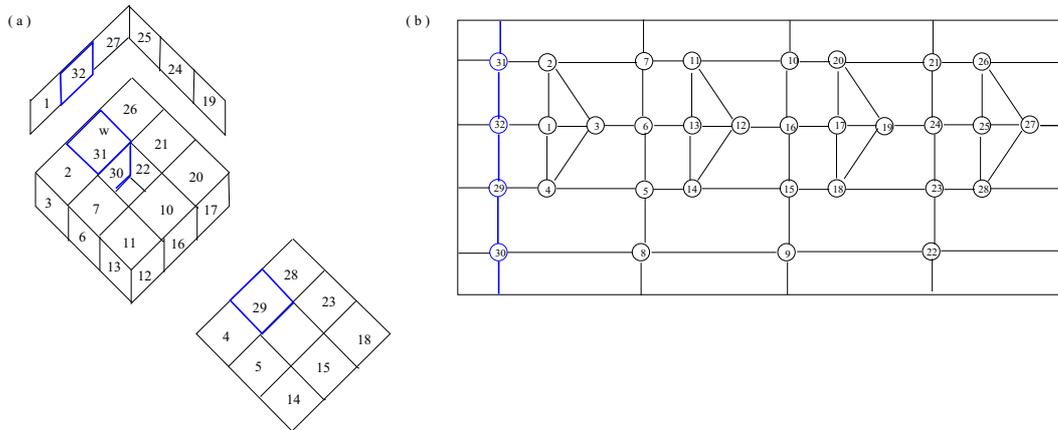


Figura 2.16: La Tuerca etiquetada

A continuación, construimos el encaje en el toro de la gráfica facial asociada a la tuerca. La Figura 2.16(a) nos proporciona una enumeración para las caras. Consideramos el voxel w , cuyas caras $\{ 29, 30, 31, 32 \}$ coinciden con una curva esencial. . Para la tuerca presentada en la Figura 2.16, identificamos cuatro facetas:

- Faceta Interior, $I: \{ 30, 8, 9, 22 \}$
- Faceta Superior, $S: \{ 31, 2, 7, 11, 10, 20, 21, 26 \}$
- Faceta Exterior, $E: \{ 32, 1, 3, 6, 13, 12, 16, 17, 19, 24, 25, 27 \}$
- Faceta Inferior, $D: \{ 29, 4, 5, 14, 15, 18, 23, 28 \}$

Una vez identificadas las facetas, se construye la inmersión. La Figura 2.16(b), muestra el encaje final, en el toro, de la gráfica facial asociada a la Tuerca.

Encaje en el toro de V_f

Sea V_f el vox-sólido arista-visible V_f , presentado en la Figura 2.17(a), además se proporciona una enumeración para sus caras. Consideremos los voxes w y v , cuyas caras, sobre la frontera del vox-sólido son $\{ 30, 18, 19, 3, 42, 41, 2, 31 \}$, las cuales, además, coinciden con una curva esencial.

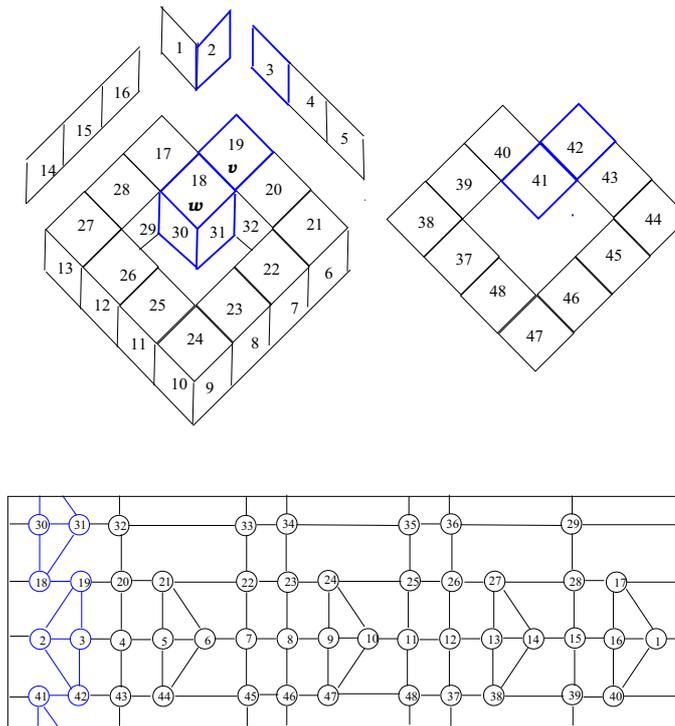


Figura 2.17: Enumeración del vox-sólido V_f y su encaje

Para V_f , de acuerdo a la enumeración dada en la Figura 2.17, las facetas son:

Faceta Interior, $I: \{ 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 29 \}$

Faceta Superior, $S: \{ 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 17 \}$

Faceta Exterior, $E: \{ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 1, 2 \}$

Faceta Inferior, $D: \{ 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 37, 38, 39, 40 \}$

Una vez identificadas las facetas, procedemos a construir la inmersión. La Figura 2.17(b), presenta un encaje en el toro de la gráfica facial asociada al vox-sólido V_f .

Capítulo 3

Caracterización de Vox-sólidos Inductivos

En este Capítulo daremos una caracterización de los vox-sólidos inductivos. Iniciamos estableciendo que los vox-sólidos arbóreos son inductivos. A continuación demostramos que los vox-sólidos laminares también lo son y, finalmente, demostramos que todos los vox-sólidos esféricos son inductivos.

3.1. Vox-sólidos Arbóreos

Definición 3.1 Arbóreo. Un vox-sólido es **arbóreo** si su gráfica de adyacencia de voxes es un árbol. Sea $\mathcal{A} = \{ \mathcal{V} \in \mathcal{V} : \mathcal{V} \text{ es arbóreo} \}$.

Teorema 3.1 Si $\mathcal{V} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{V} \in \mathcal{I}$.

Demostración. Inducción sobre el número de voxes.

Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{A}$, con n voxes. Por demostrar que es posible enumerar todos los voxes de \mathcal{V} , tal que $\forall i, 1 \leq i \leq n$, el conjunto $\{v_1, \dots, v_i\}$ es un vox-sólido.

Si el vox-sólido consiste de un único voxel, entonces se le asignará la etiqueta 1, con lo cual queda enumerado.

Supongamos que $\forall \mathcal{V} \in \mathcal{A}$, con $n - 1$ voxes, $\mathcal{V} \in \mathcal{I}$.

Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{A}$ con n voxes, $n > 1$. Sea $v \in \mathcal{V}$ tal que $\delta(v) = 1$, siempre existe por ser arbóreo. Sea $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \setminus \{v\}$. Asignamos al voxel v el número n . Tenemos que $\mathcal{V}' \in \mathcal{A}$, entonces, por hipótesis de inducción, $\mathcal{V}' \in \mathcal{I}$. Por lo tanto, el teorema se satisface.

3.2. Vox-sólidos Laminares

Sea $\mathcal{V} \in \Lambda_{(1)}$, un vox-sólido laminar. Como es laminar, podríamos, en general, ignorar una dimensión: su altura, por ejemplo, y trabajar únicamente con su amplitud y profundidad. De esta manera, para cada voxel v en \mathcal{V} se considera, a lo más, cuatro vecinos.

Ahora en \mathcal{V} , un voxel x es de corte si tiene grado 2 y, al extraerlo de \mathcal{V} lo desconecta. Resulta fácil notar que todo voxel de corte de \mathcal{V} corresponde a un punto de corte en su gráfica de adyacencia de voxeles, mas no todo punto de corte resulta ser un voxel de corte.

3.2.1. Marco Teórico

Para establecer la estrategia que usaremos en el estudio de vox-sólidos laminares introducimos una forma canónica de recorrer el vox-sólido. Para ello, primero, determinamos cuatro direcciones, cada una a partir de un voxel inicial asociado con cada una de las esquinas del vox-sólido. Después, definimos una configuración local, la cual nos servirá para evaluar si podemos, o no, eliminar un voxel.

Sean $\mathcal{V} \in \mathfrak{V}$ y $v \in \mathcal{V}$. Si $\mathcal{V} \setminus \{v\}$ es un vox-sólido, diremos que es posible **desensamblar** al voxel v de \mathcal{V} .

Direcciones

Sean $\mathcal{V} \in \Lambda_{(1)}$ y $v \in \mathcal{V}$. Consideraremos al voxel v por sus coordenadas $(x, y, 1)$.

Los puntos de inicio están clasificados de la siguiente manera:

A: voxel asociado a la esquina superior derecha, posee las coordenadas lexicográficamente más grandes. Esto es, la mayor x y, de ahí, la mayor y :

$$\mathbf{A}=(x^*, y_M, 1): x^* = \max\{x : (x, y, 1) \in \mathcal{V}\}; \quad y_M = \max\{y : (x^*, y, 1) \in \mathcal{V}\}.$$

B: voxel asociado a la esquina superior izquierda. Voxel con la mayor y y, de ahí, la menor x : $\mathbf{B}=(x_m, y^*, 1): y^* = \max\{y : (x, y, 1) \in \mathcal{V}\}; \quad x_m = \min\{x : (x, y^*, 1) \in \mathcal{V}\}$.

C: voxel asociado a la esquina inferior izquierda, tiene las coordenadas lexicográficamente menores. Esto es, la menor x y de ahí la menor y :

$$\mathbf{C}=(x^-, y_m, 1): x^- = \min\{x : (x, y, 1) \in \mathcal{V}\}; \quad y_m = \min\{y : (x^-, y, 1) \in \mathcal{V}\}.$$

D: voxel asociado a la esquina inferior derecha. Voxel con la menor y y, de ahí, la mayor x : $\mathbf{D}=(x_M, y^-, 1): y^- = \min\{y : (x, y, 1) \in \mathcal{V}\}; \quad x_M = \max\{x : (x, y^-, 1) \in \mathcal{V}\}$.

Las direcciones se determinan al localizar un voxel \mathbf{P} , $\mathbf{P} \in \{ \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \}$. Entonces, el voxel se etiqueta y desensambla para pasar a evaluar al siguiente, que pertenece a la misma clase. Las direcciones son:

D1: Se recorre \mathcal{V} de arriba hacia abajo y de derecha a izquierda.

D2: Se explora \mathcal{V} de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo.

D3: Se revisa \mathcal{V} de abajo hacia arriba y de izquierda a derecha.

D4: Se recorre \mathcal{V} de derecha a izquierda y de abajo hacia arriba.

La Figura 3.1 muestra un vox-sólido laminar, en el cual se marcan los voxeles de inicio y las direcciones de recorrido.

En general, tomaremos los voxeles en el orden: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{A}$, lo cual equivale a girar el vox-sólido 90° a la derecha y buscar al voxel con coordenadas lexicográficamente más grandes.

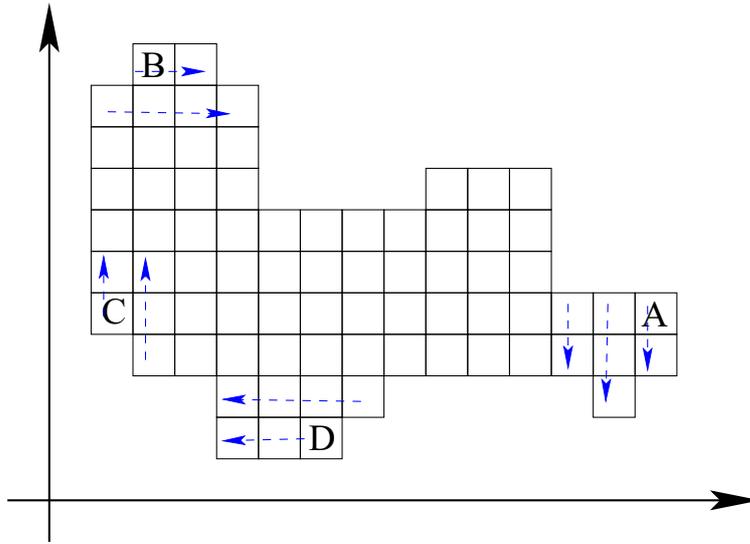


Figura 3.1: Puntos de Inicio y Direcciones

Configuración Local

Sean $\mathcal{V} \in \Lambda_{(1)}$ y el voxel $w \in \mathcal{V}$ con coordenadas (x, y) lexicográficamente más grandes en \mathcal{V} . Esto es, la mayor x y, de ahí, la mayor y . Sin pérdida de generalidad, nos estamos centrando, únicamente, en la *esquina superior derecha* de \mathcal{V} , suponiendo que estamos trabajando con el voxel **A**. En esta parte, el vox-sólido \mathcal{V} tiene las configuraciones presentadas en la Figura 3.2 (a) y (b), donde los voxeles punteados podrían, o no, estar en el sub-vox-sólido.

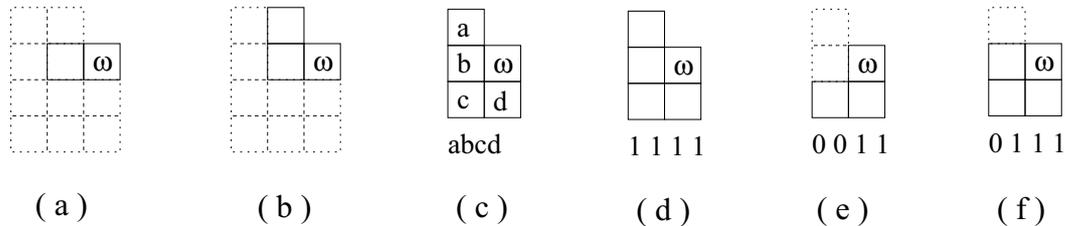


Figura 3.2: Configuraciones y codificación para el voxel ω

Ahora, tomaremos la configuración mostrada en la Figura 3.2 (c), donde los voxeles a, b, c, d podrían, o no, estar en el sub-vox-sólido. Tenemos $2^4 = 16$, opciones diferentes para esta configuración.

A continuación, codificamos con una cadena de cuatro caracteres abcd cada una de las posibles configuraciones para el sub-vox-sólido. Si el voxel v , $v \in \{a, b, c, d\}$, está, entonces asignamos el valor 1. De no ser así, asignaremos el valor 0.

Por ejemplo, en la Figura 3.2 (d) se presenta la configuración correspondiente a la cadena 1111, en (e) la de 0011 y en (f) la de 0111. De esta forma, identificamos de manera única, e incluso ordenada, cada una de las 16 configuraciones.

No se puede perder de vista que no todas las configuraciones expuestas son permitidas en un vox-sólido. En la Figura 3.3 se presentan las 16 configuraciones locales para ω . En las primeras tres columnas, se tienen aquellas en las que es posible desensamblar a ω del vox-sólido. En las siguientes dos están cinco configuraciones no permitidas en un vox-sólido. Finalmente, y en la última columna vemos las dos configuraciones que podrían causar conflicto al desensamblar ω .

Para las otras clases puntos (**B,C,D**) se obtienen las mismas configuraciones rotando 90° , 180° y 270° , respectivamente.

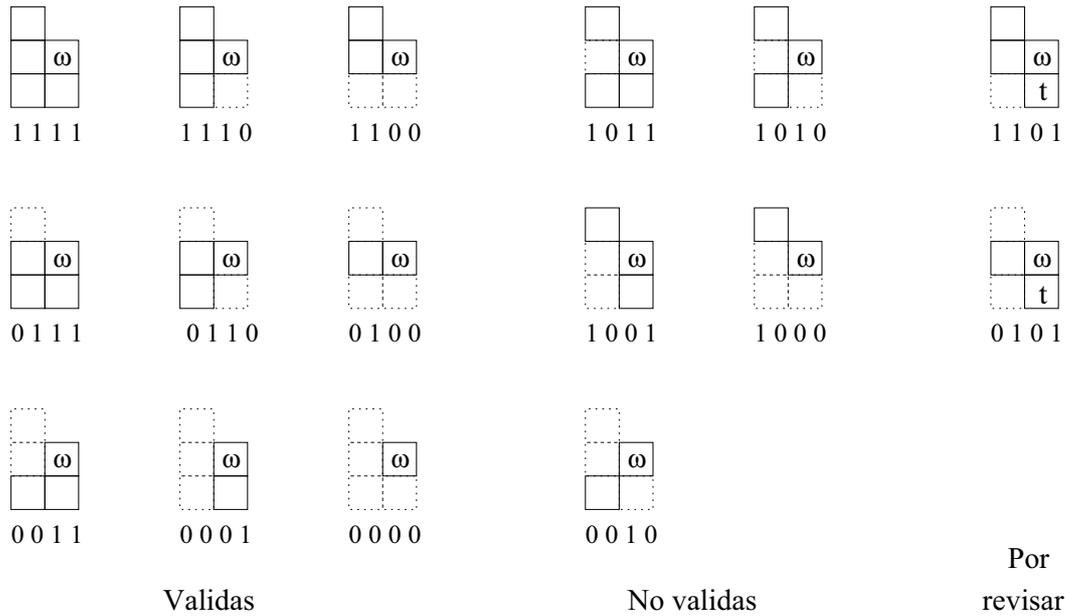


Figura 3.3: Configuraciones para el voxel ω

Teorema 3.2 Si $\mathcal{V} \in \Lambda_{(1)} \Rightarrow \mathcal{V} \in \mathcal{I}$.

Antes de presentar la demostración del teorema, establecemos el siguiente resultado:

Lema 3.1 Dado $\mathcal{V} \in \Lambda_{(1)}$ y un voxel $v \in \mathcal{V}$, siempre es posible encontrar una enumeración válida para los voxes de \mathcal{V} , tal que v recibe la última etiqueta en la enumeración.

Demostración. Inducción sobre el número de voxes en \mathcal{V} , $|\mathcal{V}| = n$.

Sea $e(v)$ la etiqueta asignada por la enumeración. Si $|\mathcal{V}| = 1$, el único voxel de \mathcal{V} es v , entonces sea $e(v) = n$. El lema se cumple.

Supongamos que $\forall \mathcal{V} \in \Lambda_{(1)}$ tal que $|\mathcal{V}| < k, 2 \leq k \leq n$. Es posible enumerar válidamente a \mathcal{V} , de tal forma que un voxel fijo v recibe el último número. Además, supongamos que μ es la primera etiqueta a asignar.

Sea \mathcal{V} un vox-sólido con k voxes, $2 \leq k \leq n$, y v el voxel en \mathcal{V} a etiquetar con el último número. Sea $\omega \in \mathcal{V}$ de clase **A**, con coordenadas (x, y) . Si ω coincide con v ,

entonces pasamos al punto de la siguiente clase, esto es, cambiamos a la siguiente dirección. Sin pérdida de generalidad, siempre podemos suponer que ω es de tipo **A**. Localmente, ω tiene una de las configuraciones presentadas en la Figura 3.3.

De las configuraciones mostradas en las primeras tres columnas, no consideramos la 0000 porque sólo tiene un voxel. Para las ocho configuraciones restantes, es posible desensamblar a ω de \mathcal{V} . Sean $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \setminus \{\omega\}$, $e(\omega) = \mu$ e incrementamos μ . Ahora, $|\mathcal{V}'| < k$. Por hipótesis de inducción, el lema se cumple.

En las siguientes dos columnas, se tienen cinco configuraciones no-válidas, ya que no son permitidas en un vox-sólido, por lo cual no las consideramos.

En la última columna, se tienen los casos 1101 y 0101, los únicos que podrían causar conflictos. Ambas configuraciones poseen el voxel t con coordenadas $(x, y-1)$. Tenemos dos casos: (a) $t \neq v$ y (b) $t = v$; ilustrados en la Figura 3.4.

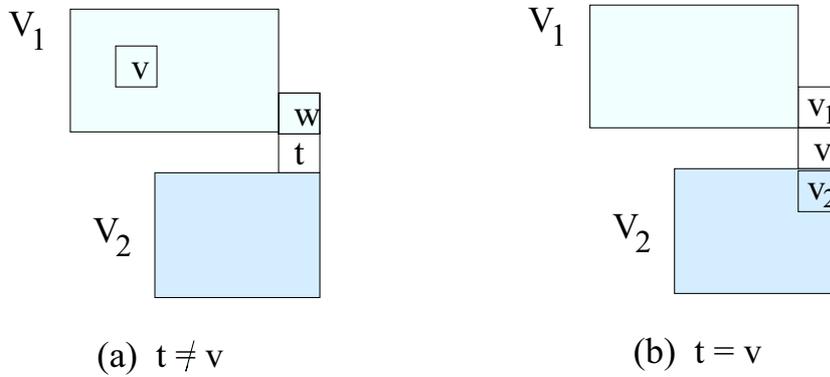


Figura 3.4: Casos conflictivos, Lema 3.1

Caso $t \neq v$. Si t no resulta ser un voxel de corte, entonces podemos eliminar a t . Sean $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \setminus \{t\}$, $e(t) = \mu$ e incrementamos μ . Ahora, $|\mathcal{V}'| < k$, por hipótesis de inducción, el lema se satisface. Si t es un voxel de corte, entonces $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \{t\} \cup \mathcal{V}_2$, supongamos $v \in \mathcal{V}_1$. El vox-sólido $\mathcal{V}_2 \cup \{t\}$ tiene menos de k voxes. Por hipótesis de inducción, es posible enumerar sus voxes de tal manera que a t le toque la última etiqueta. Por ejemplo, μ' , $\mu' = |\mathcal{V}'| + 1 + \mu$. Por otro lado, falta enumerar a \mathcal{V}_1 , pero $|\mathcal{V}_1| < k$, por tanto, aplicamos la hipótesis de inducción, y el resultado se satisface.

Caso $t = v$. Tenemos que $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \{t\} \cup \mathcal{V}_2$. Sabemos que $\delta(v) = 2$, sean v_1 y v_2 los vecinos de t con $v_1 \in \mathcal{V}_1$ y $v_2 \in \mathcal{V}_2$. Dado que \mathcal{V}_2 : $|\mathcal{V}_2| < k$, por hipótesis de inducción, el lema se cumple para \mathcal{V}_2 y v_2 . De igual manera, tenemos $|\mathcal{V}_1 \cup \{t\}| < k$, en el que también por hipótesis de inducción, el lema se cumple para \mathcal{V}_1 y $t = v$.

Finalmente, podemos concluir que el resultado se satisface.

A continuación establecemos el Teorema 3.2,

Demostración. Sean $\mathcal{V} \in \Lambda_{(1)}$, $\nu \in \mathcal{V}$ y $|\mathcal{V}| = n$.

Por el Lema 3.1, el vox-sólido \mathcal{V} y el voxel $\nu \in \mathcal{V}$ pueden ser enumerados de tal forma que a ν corresponda la última etiqueta: $e(\nu) = n$.

Para reconstruir a \mathcal{V} , tomamos la enumeración dada por el Lema 3.1 y colocamos los voxeles de \mathcal{V} en orden inverso al que fueron eliminados. Es decir, el último voxel en ser eliminado será el primero en ser reubicado.

Sea $i(u)$ la etiqueta (índice) del voxel u , que indica su posición, u orden, durante la reconstrucción del vox-sólido. Iniciamos con $i(\nu) = 1$. En general, tenemos que $i(u) = n - e(u) + 1$, $\forall u \in \mathcal{V}$.

3.2.2. Propiedades de vox-sólidos laminares

Presentamos algunas propiedades de los vox-sólidos laminares cuya frontera puede ser una superficie con género g mayor que cero. Con éstas demostraremos que todo vox-sólido esférico es inductivo partiendo de la base de que los vox-sólidos laminares lo son.

Definición 3.2 Sea $\mathcal{V} \in \Lambda_{(1)} \cap \mathcal{T}(g)$, $g \geq 1$ y sea h un hoyo en \mathcal{V} . Se define $r(h)$ como el conjunto con el menor número de voxeles ensamblados que rodea a h . Denominaremos la envoltente de h al conjunto $r(h)$.

Es importante notar que este conjunto es un sub-vox-sólido de \mathcal{V} y que, además, induce una curva de Jordan.

En Topología Digital, el borde de una componente negra con respecto a una componente blanca (hoyo) h , no necesariamente es un vox-sólido, por lo que no siempre es una envoltente para h .

Llamaremos la **envoltente** de U a cualquier conjunto de voxeles U que no posea puntos en el borde del vox-sólido, a partir del que podemos construir $r(U)$.

En la Figura 3.5 se muestra un vox-sólido con tres hoyos y sus envoltentes $r(h_1)$, $r(h_2)$ y $r(h_3)$, sombreadas.

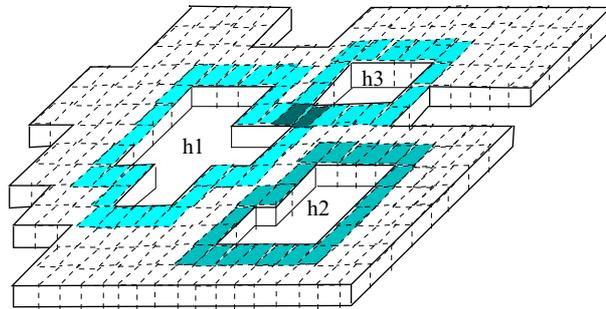


Figura 3.5: Envoltente de un hoyo

Proposición 3.1 Si $\mathcal{V} \in \mathcal{T} \cap \mathcal{AV} \cap \Lambda_{(1)}$ tal que $\forall v \in \mathcal{V}, \delta(v) > 1 \Rightarrow \forall v \in \mathcal{V}, \delta(v) = 2$. Es decir, si \mathcal{V} es un vox-sólido toroidal, arista-visible, laminar, sin voxeles de grado 1, entonces todo vértice en \mathcal{V} tendrá grado 2.

Demostración. Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{T} \cap \mathcal{AV} \cap \Lambda_{(1)}$, tal que $\forall v \in \mathcal{V}, \delta(v) > 1$. Como \mathcal{V} es laminar, cada voxel tiene, a lo más, cuatro vecinos y, por ser toroidal, sólo tiene un hoyo topológico. Además, \mathcal{V} no tiene voxeles de grado 1 y, por ser arista-visible, no posee bloques de 2×2 , es decir que no posee voxeles de grado 3 ni 4 y, por lo tanto, únicamente tiene voxeles con grado 2.

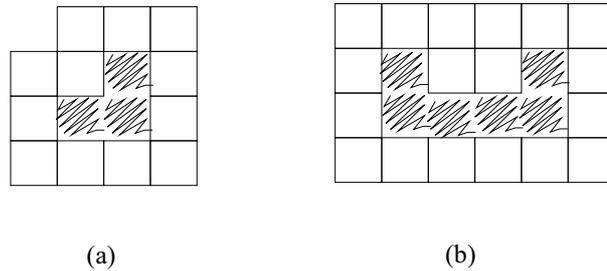


Figura 3.6: Ejemplos de vox-sólidos y sus envolventes

La Figura 3.6(a) ejemplifica la Proposición 3.1. Observemos que si \mathcal{V} es un vox-sólido toroidal, arista-visible y sin voxeles de grado 1, entonces su envolvente es él mismo. Sin embargo, en (b) se ilustra que es posible construir un vox-sólido toroidal no arista-visible, sin voxeles de grado 1, tal que $r(h) = \mathcal{V}$.

En un vox-sólido, dos hoyos no pueden compartir caras, ni aristas, ya que se presentarían configuraciones prohibidas. La Figura 3.7(a) muestra dos objetos 3-dimensionales, que no son vox-sólidos; ya que, en (a) los hoyos comparten una cara y en (b), comparten una arista.

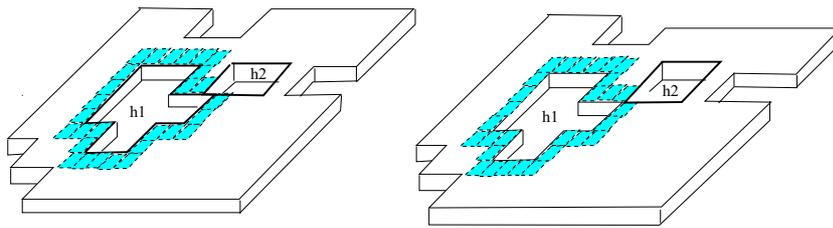


Figura 3.7: Objetos 3-dimensionales con hoyos no válidos

Recordemos que si $\mathcal{V} \in \mathcal{V}$ y $U, W \sqsubset \mathcal{V}$, la distancia $d(U, W)$ es el mínimo número de voxeles entre los sub-vox-sólidos U y W .

Proposición 3.2 Sea $\mathcal{V} \in \Lambda_{(1)} \cap \mathcal{T}(g), g > 1$, sean h_1 y h_2 dos hoyos diferentes en \mathcal{V} y sean $E_1 = r(h_1), E_2 = r(h_2)$ sus respectivas envolventes. Entonces, $d(E_1, E_2) \geq 0$

Demostración. Tenemos los siguientes casos.

Caso 1. E_1 y E_2 comparten voxeles: claramente $d(E_1, E_2) = 0$

Caso 2. E_1 y E_2 no comparten voxeles. Entonces $d(E_1, E_2) > 0$

Tenemos tres sub-casos:

Caso 2a. Comparten al menos una cara f . Entonces f debe ser la unión de dos voxeles, uno en E_1 y otro, en E_2 . Por lo tanto, $d(E_1, E_2) = 1$

Caso 2b. Comparten, al menos, una arista a . Entonces, a debe ser el resultado de la unión de tres o cuatro voxeles. Para ambos casos, se tiene dos voxeles v y w con $v \in E_1$ y $w \in E_2$. Como \mathcal{V} es un vox-sólido, debe existir $u \in \mathcal{V}$ que comparta una cara con v y otra con w . Luego, $d(v, w) = 2$ y por lo tanto, $d(E_1, E_2) = 2$

Caso 2c. No se intersectan. Sean v y w dos voxeles con $v \in E_1$ y $w \in E_2$. Además, sea $u \in \mathcal{V} \setminus \{E_1 \cup E_2\}$ tenemos que $d(v, u) \geq 1$ y $d(w, u) \geq 1$, por lo que $d(v, w) \geq d(v, u) + d(w, u) \geq 1 + 1 \geq 2$ y, por lo tanto, $d(E_1, E_2) \geq 2$.

Consideremos la Figura 3.5. Sea $E_i = r(h_i)$ la envolvente del hoyo h_i , $1 \leq i \leq 3$. Se tiene que $d(E_1, E_3) = 0$; $d(E_1, E_2) = 2$ y $d(E_3, E_2) = 2$.

A continuación, se definen conceptos relacionados con sub-vox-sólidos que rodean o separan a otros. Se presentan resultados sobre como llevar a cabo su etiquetado.

Definición 3.3 Sea $\mathcal{V} \in \Lambda_{(1)}$ y sean $X, Y \sqsubset \mathcal{V}$, tales que $X \cup Y \sqsubset \mathcal{V}$. Si resulta que $\mathcal{V} \setminus X$ es desconexo, diremos que X **separa** a Y del **resto** de \mathcal{V} , esto último definido como $R = \mathcal{V} \setminus \{X \cup Y\}$. Si, además, se tiene que toda la frontera de Y tiene como vecinos a voxeles de X , diremos que X **rodea** a Y .

En la Figura 3.8 (a) se muestra como X rodea a Y , separándolo del resto de \mathcal{V} . En (b), X separa a Y pero no lo rodea, mientras que en (c) y (d) X no separa a Y de $R = \mathcal{V} \setminus \{X \cup Y\}$.

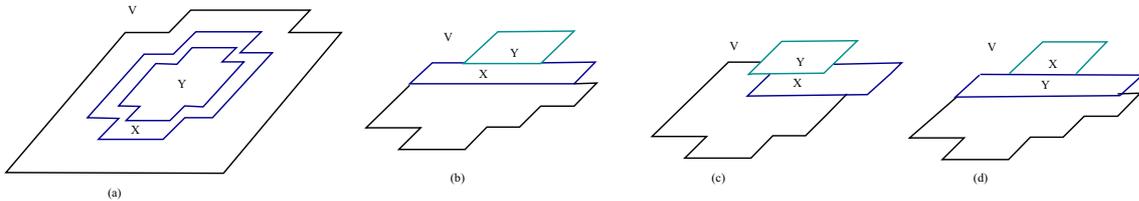


Figura 3.8: Ejemplo de separa y rodea

Lema 3.2 Sea $\mathcal{V} \in \Lambda_{(1)}$. Sea $\mathcal{U} \sqsubset \mathcal{V}$ tal que $\forall X, X \sqsubset \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$, \mathcal{U} no separa a X del resto de \mathcal{V} , $R = \mathcal{V} \setminus \{X \cup \mathcal{U}\}$. Entonces, siempre será posible dar una enumeración de \mathcal{V} , de tal forma que \mathcal{U} obtendrá las últimas etiquetas.

Demostración. Enumeramos, en primer lugar, a $\mathcal{R} = \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$. Veámos que \mathcal{R} rodea, aunque sea parcialmente, a \mathcal{U} . Mientras \mathcal{R} no haya sido totalmente etiquetado, procederemos como en la demostración del Teorema 3.1, salvo que, ahora, si $w \in \mathcal{U}$ giramos y tomamos otro.

Cuando \mathcal{R} ha sido totalmente enumerado, sólo queda etiquetar \mathcal{U} , al que corresponden las últimas etiquetas de la enumeración. Como \mathcal{U} es, por sí mismo, un vox-sólido laminar, es posible enumerarlo correctamente, por el Teorema 3.1.

En las Figuras 3.9 (a,b) se presenta un vox-sólido V y $U \sqsubset \mathcal{V}$, donde U no separa ni rodea sub-vox-sólidos de V . En (c) U separa a X del resto del vox-sólido, por lo que no podríamos aplicar el lema.

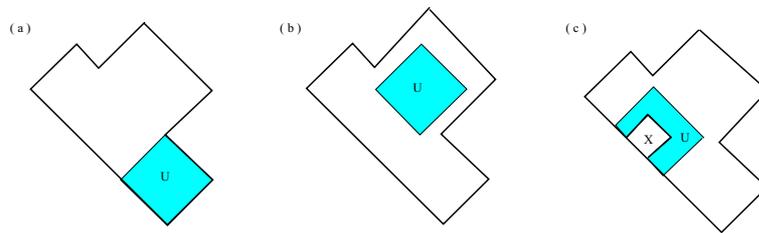


Figura 3.9: Ejemplos de \mathcal{U} para el Lema 3.2

Proposición 3.3 Sea $\mathcal{B} \in \Lambda_{(1)}$ y el voxel $w \in \mathcal{B}$. Es posible desensamblar a w de \mathcal{B} si:
 (a) \mathcal{B} es un bloque de $3 \times 3 \times 1$ y $\delta(w) = 4$; (b) \mathcal{B} es un bloque de $3 \times 2 \times 1$ y $\delta(w) = 3$;
 (c) \mathcal{B} es un bloque de $2 \times 2 \times 1$ y $\delta(w) = 2$; (d) $\delta(w) = 1$.

Demostración. Al quitar w en cualquiera de los cuatro casos, no se genera ningún conflicto y se obtiene un vox-sólido. Por lo tanto, siempre es posible desensamblar a w de \mathcal{B} .

Lema 3.3 Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{T} \cap \Lambda_{(1)}$. Sean $X \sqsubset \mathcal{V}$, h un hoyo de \mathcal{V} y $E = r(h)$ su envolvente. Sea \mathbf{Y} una colección de sub-vox-sólidos ajenos de \mathcal{V} : $\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}$, con k entero positivo, que cumple con: (a) $d(Y_i, E) = 0$ y $d(Y_i, X) \leq 1, \forall Y_i \in \mathbf{Y}$; (b) X rodea a $\{\mathbf{Y} \cup E\}$; (c) $\mathcal{V} \setminus \mathbf{Y}$ es un vox-sólido. Entonces, es posible desensamblar (enumerar), primero, todos los voxes de \mathbf{Y} .

En la Figura 3.10 se presentan vox-sólidos mediante los que se ejemplifican las condiciones del Lema 3.3.

Demostración. Inducción sobre n el número total de voxes en la colección \mathbf{Y} .

Sea \mathcal{V} un vox-sólido toroidal y laminar. Sean X y \mathbf{Y} como se pide.

Si $n = 1$, \mathbf{Y} está formado sólo por un voxel ω . Se tienen tres casos:

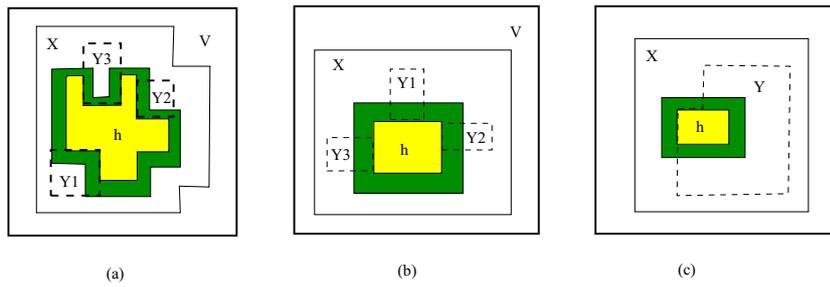


Figura 3.10: Ejemplificación del Lema 3.3

Caso 1. \mathbf{Y} es un voxel de grado 1. Por la Proposición 3.3(d), es posible desensamblarlo.

Caso 2. \mathbf{Y} es un voxel de grado 2. Entonces, existen dos voxeles en \mathcal{V} que son vecinos de \mathbf{Y} y como \mathcal{V} sólo tiene un hoyo, entonces \mathbf{Y} forma parte de un bloque de 2×2 . Por la Proposición 3.3(c), es posible desensamblarlo.

Caso 3. \mathbf{Y} es un voxel de grado 3. Entonces, existen tres voxeles en \mathcal{V} que son vecinos de \mathbf{Y} y como \mathcal{V} sólo tiene un hoyo, entonces \mathbf{Y} forma parte de un bloque de 3×2 . Por la Proposición 3.3(b), es posible desensamblarlo del vox-sólido.

Para cada uno de estos casos se tiene que, al final, $\mathbf{Y} = \emptyset$ y X rodea a E . Asignamos a ω la etiqueta n . Por tanto el Lema se satisface.

Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{T} \cap \Lambda_{(1)}$. Sean X y \mathbf{Y} como se piden en el Lema. Sea n el número total de voxeles en \mathbf{Y} , $n > 1$. Supongamos que si la colección \mathbf{Y} tiene en total menos de n voxeles, es posible desensamblar (enumerar) un voxel de la colección \mathbf{Y} . Presumamos que μ es la primera etiqueta a asignar.

Sea \mathbf{Y} una colección de sub-vox-sólidos con n voxeles en total. Sea Y_i un sub-vox-sólido de la colección \mathbf{Y} . Como $d(Y_i, E) = 0$, entonces existe, al menos, un voxel $w \in \mathcal{V}$ que está en el borde de Y_i con respecto a h . Para tal voxel se tienen las siguientes posibilidades: (a) $\delta(w) = 1$; (b) $\delta(w) = 2$; (c) $\delta(w) = 3$. Para cualquiera de los tres casos, la Proposición 3.3 nos garantiza que podemos desensamblar al voxel w . Asignamos a w la etiqueta μ e incrementamos μ .

Hemos desensamblado un voxel de un Y_i , que estaba en el borde del hoyo h . El nuevo Y_i es tal que $d(Y_i, E) = 0$. Como X no ha sido modificado, X rodea a $\{\mathbf{Y} \cup E\}$. Además, como no hemos quitado voxeles de grado 4, garantizamos no crear un nuevo hoyo topológico en \mathcal{V} . Así, tenemos una colección \mathbf{Y}' con $n - 1$ voxeles, donde X , \mathbf{Y}' y E mantienen las condiciones del Lema. Entonces, por hipótesis de inducción, el Lema se satisface.

En la Figura 3.11 se presentan vox-sólidos donde se ejemplifica el Lema 3.3. Observe que si $Y = E$, al final del proceso X será parte de la envolvente del hoyo y el objeto resultante es en efecto un vox-sólido. Tener X garantiza desensamblar válidamente los voxeles.

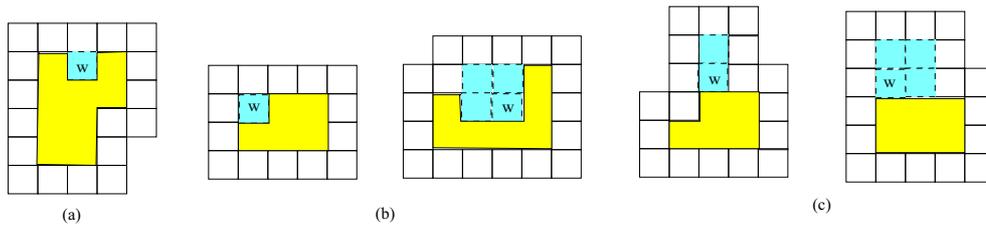


Figura 3.11: Ejemplificación casos del Lema 3.3

Lema 3.4 Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{T} \cap \Lambda_{(1)}$. Sean $X, Y \sqsubset \mathcal{V}$ tales que: (1) X rodea a Y y (2) $\mathcal{V} \setminus Y$ es un vox-sólido. Entonces, es posible desensamblar (enumerar), primero, todos los voxes de Y .

Demostración. Tenemos dos casos a considerar.

Caso 1. El sub-vox-sólido Y rodea un hoyo de \mathcal{V} . Por el Lema 3.3 es posible enumerar, en primer lugar, los voxes de Y .

Caso 2. Y , por sí mismo, es esférico. Sea w un voxel de Y adyacente por una cara a uno $x \in X$, tal que $\delta(w) = 4$. Por la Proposición 3.3(a) es posible desensamblar a w . Una vez hecho esto, podemos aplicar el Lema 3.3 para desensamblar al resto de los voxes. Finalmente, podemos concluir que el Lema se satisface.

3.3. Vox-sólidos Esféricos

En esta sección, demostraremos que todo vox-sólido esférico es inductivo, teniendo en consideración que los vox-sólidos laminares lo son.

Lema 3.5 Para todo vox-sólido, la gráfica de adyacencia de niveles es bipartita.

Demostración. Sea \mathcal{N} una gráfica de adyacencia de niveles de un vox-sólido, supongamos de η niveles. Coloreamos los vértices asociados a los sub-vox-sólido del nivel 1 con el color 1; a los del nivel 2, con el color 2 y a los vértices asociados con el nivel 3, les asignaremos el color 1, ya que no existe adyacencia entre este y el nivel 1. Con base en ese argumento, es posible asignar el color 2 a los vértices asociados con el nivel 4. En general, a los vértices asociados a sub-vox-sólido del nivel $(2k + 1)$, $0 \leq k \leq \eta/2$, es posible asignarles el color 1, mientras que a los vértices asociados a sub-vox-sólido del nivel $2k$, $1 \leq k \leq \eta/2$, el color 2. Con ello podemos ver que dos colores son suficientes para colorear los vértices de \mathcal{N} .

Denominaremos **ciclo elemental** a los ciclos sin cuerdas de una gráfica.

En la Figura 3.12(a) se muestra un vox-sólido. En (b), los estratos por amplitud y, por último, en (c), la gráfica de adyacencia de niveles generada por amplitud. Podemos ver, también como marcan los ciclos elementales de la gráfica, por ejemplo, $F_2 = \langle 1, 3, 4, 6 \rangle$ es un ciclo elemental.

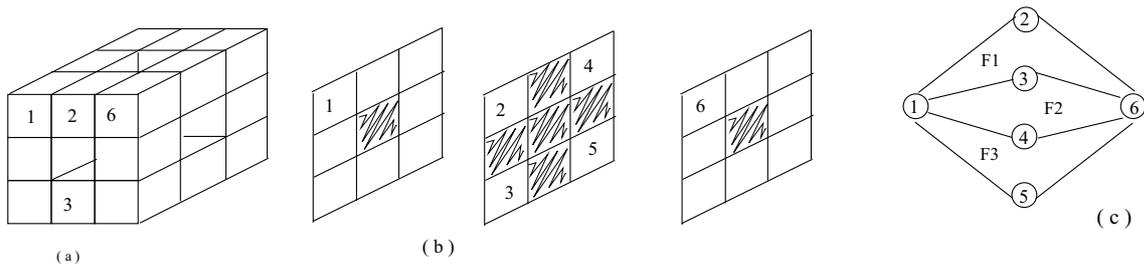


Figura 3.12: Ejemplo de ciclo elemental

Lema 3.6 Sea $\mathcal{V} \in \mathfrak{V}$, \mathcal{N} una de las tres gráficas de adyacencia de niveles de \mathcal{V} . F es un ciclo elemental en \mathcal{N} si, sólo si, el sub-vox-sólido asociado a los vértices en F forma la frontera de un hoyo (cavidad).

Demostración. (\Leftarrow) Supongamos que H_o es un hoyo en \mathcal{V} .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que el hoyo H_o puede apreciarse al frente del vox-sólido. De no ser así, giramos el vox-sólido de una manera apropiada. Identificamos al hoyo H_o y a los sub-vox-sólidos sobre su frontera, construimos, de manera parcial, la gráfica de adyacencia de niveles por pisos.

Sea ρ el menor piso donde inicia H_o , enumeramos con 1 al sub-vox-sólido base de H_o , el que está en el piso ρ . A partir del piso $\rho + 1$, enumeramos con 2μ a los sub-vox-sólido de la derecha, y con $2\mu + 1$ a los de la izquierda, $1 \leq \mu \leq m - 1$, para alguna $m \in \mathbb{N}$. En el piso $\rho + m$ queda el último sub-vox-sólido de la frontera de H_o . Sea $k = 2m$. Ahora, asociamos a cada sub-vox-sólido U_j el vértice u_j , $1 \leq j \leq k$. Obtenemos que los sub-vox-sólidos U_{2j} y U_{2j+1} , $2 \leq j \leq m - 1$, están en el mismo nivel. Hay que hacer notar que en el nivel $\rho + r$, $1 \leq r \leq m - 1$, están los sub-vox-sólidos $2r$ y $2r + 1$. Por lo tanto, u_1 está unido a u_2 y u_3 , el vértice u_j está unido a u_{j+2} , $2 \leq j \leq k - 2$; y los vértices u_{k-2} y u_{k-1} están unidos a u_k . Por ende se ha formado un ciclo inducido únicamente por los vértices asociados a los sub-vox-sólidos en la frontera del hoyo; tal ciclo es, en efecto, un ciclo elemental de orden k . La Figura 3.13 ilustra este caso.

(\Rightarrow) Sea \mathcal{N} una de las tres gráficas de adyacencia de niveles, con ciclos, de un vox-sólido \mathcal{V} . Sea F un ciclo elemental de \mathcal{N} . F es la subgráfica inducida por el conjunto de vértices $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, $k = 2m$, para alguna $m \in \mathbb{N}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que los vértices en F están ordenados del menor al mayor nivel. Es decir, que si el sub-vox-sólido asociado al vértice u_1 está en el nivel n , los vértices u_2 y u_3 están en el nivel $n + 1$. En general, $u_{2\mu}$ y $u_{2\mu+1}$ se encuentran en el nivel μ , $1 \leq \mu \leq m - 1$, y, para el vértice u_k , el sub-vox-sólido correspondiente está en el nivel $n + m$. Así, los sub-vox-sólidos conforman la frontera de un hoyo, la Figura 3.14 ilustra este caso.

Una conclusión inmediata al lema es que un vox-sólido tiene hoyos si al menos una de las gráficas de adyacencia de niveles (ya sea por altura, profundidad o amplitud) tiene ciclos. Esto último queda establecido en el siguiente resultado:

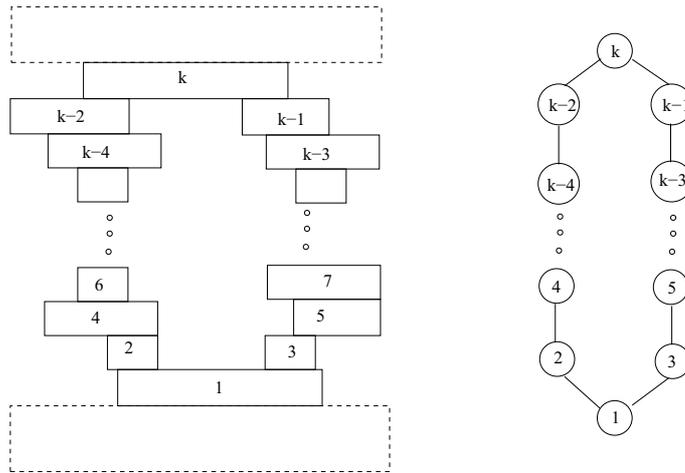


Figura 3.13: H_o un hoyo en el vox-sólido

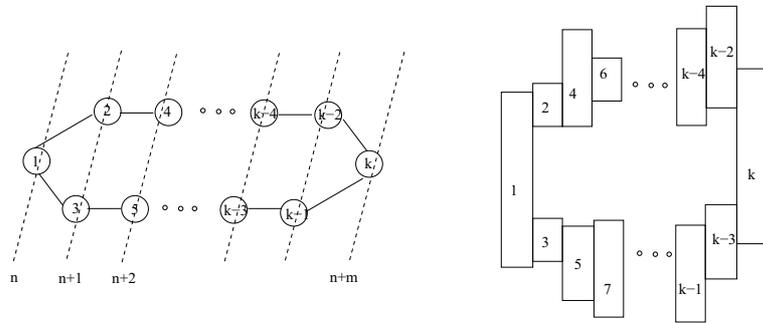


Figura 3.14: Un ciclo elemental y el hoyo asociado

Corolario 3.1 $\mathcal{V} \in \mathcal{V}$ tiene hoyos topológicos si, y sólo si, al menos una de sus gráficas de adyacencia de niveles tiene ciclos.

En la Figura 3.15 se muestra un vox-sólido, que ilustra el Lema 3.6. La sub-gráfica generada por $\langle A, B, E, G, I, L, K, H, F, D \rangle$ no es un ciclo elemental, ya que tiene las cuerdas (F, G) y (G, K) . Sin embargo, para el mismo vox-sólido $\langle A, B, C, E \rangle$ es un ciclo elemental y los sub-vox-sólidos asociados rodean un hoyo.

Lema 3.7 La gráfica de adyacencia de niveles, generada en amplitud o profundidad, de un vox-sólido laminar es planar.

Demostración. Por demostrar que no es posible construir un vox-sólido laminar cuya gráfica de adyacencia de niveles sea una subdivisión de $K_{3,3}$ o K_5 .

Caso I. Consideremos $K_{3,3}$ y Procedamos por contradicción. Supongamos que la gráfica de adyacencia de niveles, \mathcal{N} , no es plana, por lo que tratemos de construir $K_{3,3}$, o una subdivisión de ésta. Sean v_1, v_2, v_3 los tres vértices de una partición y v_4, v_5, v_6 los de la otra. Primero, unimos v_4 y v_5 con v_1, v_2, v_3 . Los sub-vox-sólidos

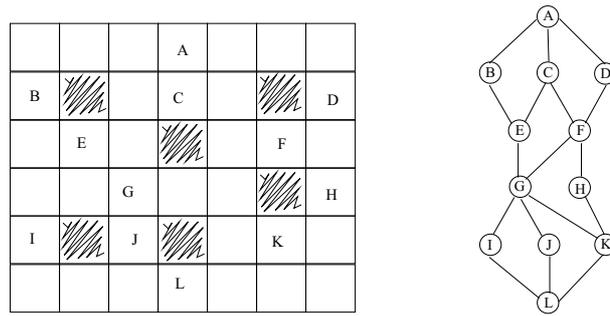


Figura 3.15: Vox-sólido laminar y su gráfica de adyacencia de niveles

asociados a estos vértices serían bloques con dimensiones $d \times 1 \times 1$, donde d es entero positivo. A los sub-vox-sólidos los denotaremos por $V_i, 1 \leq i \leq 6$.

Como v_4 y v_5 son adyacentes a v_1, v_2, v_3 , los sub-vox-sólidos correspondientes deben tocarse por, al menos, una cara. Colocamos horizontalmente a V_4 y a V_5 , y, en forma perpendicular, a V_1, V_2, V_3 , los cuales deben tener la misma longitud, para que, con ello, toquen, por un extremo a V_4 y, por el otro, a V_5 .

La Figura 3.16(a) muestra la construcción de un vox-sólido cuya gráfica de adyacencia de niveles es una subdivisión de $K_{2,3}$. En (b), se ilustra, como quedan pegados los sub-vox-sólidos.

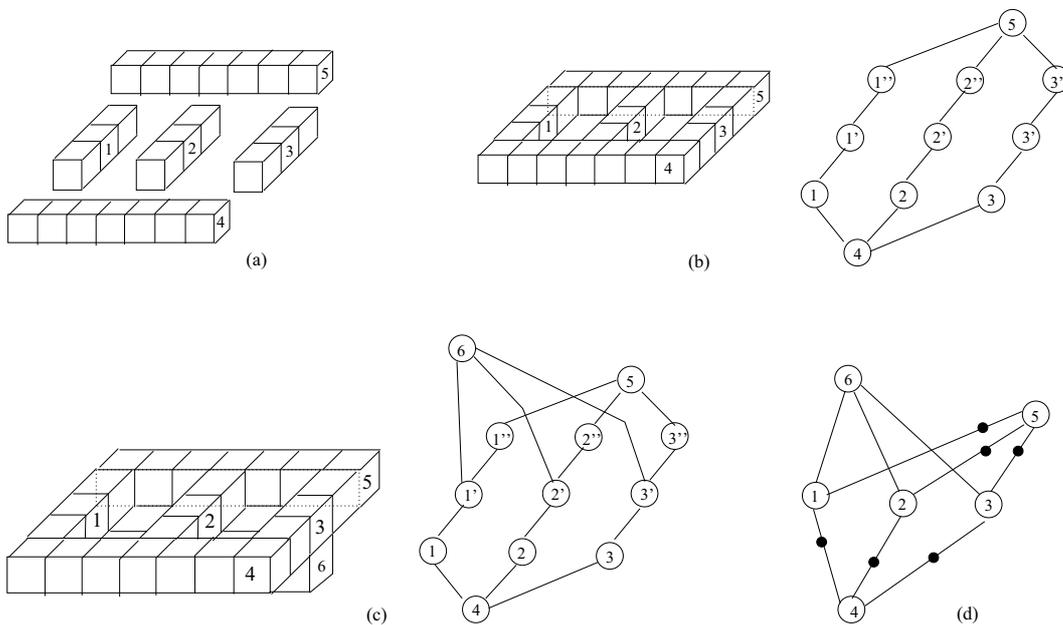


Figura 3.16: La gráfica de adyacencia de niveles no es plana

Ahora, es necesario unir el vértice v_6 con v_1, v_2, v_3 , y los respectivos sub-vox-sólidos. Para ello, se requiere que V_6 comparta una cara con V_1, V_2, V_3 , lo cual sólo es posible

si ponemos a V_6 en otro piso. Para este fin, requerimos dos pisos y lograremos tener un vox-sólido cuya gráfica de adyacencia de niveles no sea plana.

La Figura 3.16(c) muestra un vox-sólido cuya gráfica de adyacencia de niveles resulta ser una subdivisión de $K_{3,3}$.

Caso II. Considere K_5 . Procederemos por contradicción. Supongamos que la gráfica de adyacencia de niveles, \mathcal{N} , no es plana. Entonces, tratemos de construir K_5 , o una subdivisión.

Requerimos que una subdivisión de K_5 sea bipartita. Sean 1, 2, 3, 4, 5 los vértices de K_5 . Basta subdividir, de manera correspondiente, cuatro aristas para obtener una subdivisión bipartita: subdividimos la arista (2, 5) con el vértice A, la (5, 3) con B, la (2, 3) con C y, por último, la (1, 4) con D. Así, las biparticiones resultan de la siguiente manera: $V_1 = \{2, 3, 5, D\}$ y $V_2 = \{1, 4, A, B, C\}$. Los vértices originales tienen grado 4 y los nuevos, 2. grado 2. A esta gráfica la denominaremos S_5 .

En la Figura 3.17 se presenta la gráfica K_5 y una de sus sub-divisiones.

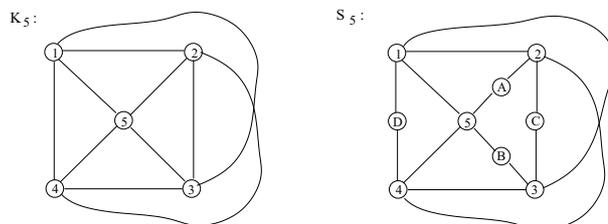


Figura 3.17: La gráfica K_5 y una sub-division

Ahora, intentemos construir un vox-sólido \mathcal{V} , laminar, cuya gráfica de adyacencia de niveles sea una sub-division de K_5 , tomamos S_5 . Identificamos seis ciclos en S_5 :

- I : $\langle 1, 2, A, 5 \rangle$; II : $\langle 3, 4, 5, B \rangle$; III : $\langle 2, A, 5, B, 3, C \rangle$;
- IV : $\langle 1, D, 4, 5 \rangle$; V : $\langle 2, C, 3, 4 \rangle$; VI : $\langle 2, C, 3, 1 \rangle$.

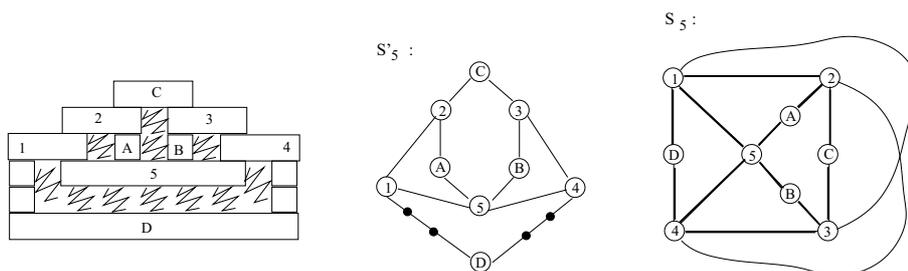


Figura 3.18: Los primeros ciclos para S_5

Sabemos que cada ciclo elemental corresponde a un hoyo en \mathcal{V} . La Figura 3.18 ilustra los primeros cuatro ciclos, tanto en el vox-sólido como en la gráfica. Ambos están parcialmente contruidos. Los ciclos se marcan mediante líneas más gruesas en S_5 . Cabe hacer notar que, además, se construyó el ciclo exterior VII : $\langle 1, D, 4, 3, C, 2 \rangle$.

Para generar el ciclo V , debemos unir 2 con 4. Para llevarlo a cabo es necesario subdividir la arista $(2, 4)$ de S_5 al menos seis veces.

Obsérvese que, como se anexa un número par de vértices no es necesario cambiar los colores para ajustar la coloración y la gráfica continua siendo bipartita.

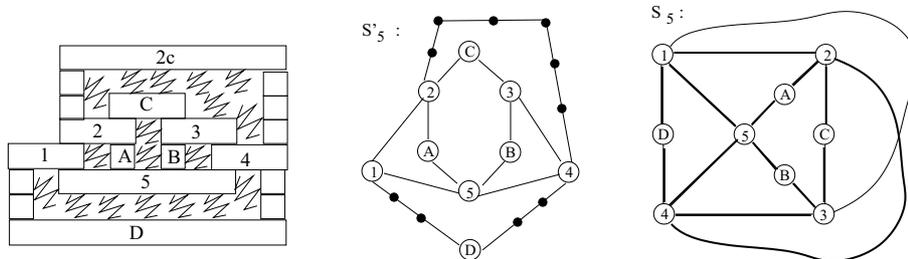


Figura 3.19: Los primeros cinco ciclos para S_5

La Figura 3.19 ilustra la construcción para el ciclo V , tanto en el vox-sólido como en la gráfica. Ambos parcialmente contruidos.

Ahora, para generar el ciclo VI es necesario unir 1 con 3 y *cruzar* la arista $(2, 4)$. Al intentar hacer el cruce, se obtiene el vox-sólido que podemos ver en la Figura 3.20. El vértice x tiene grado 4 y se generan al menos tres ciclos que no pertenecen a una subdivisión de K_5 . Algunos son ciclos impares!

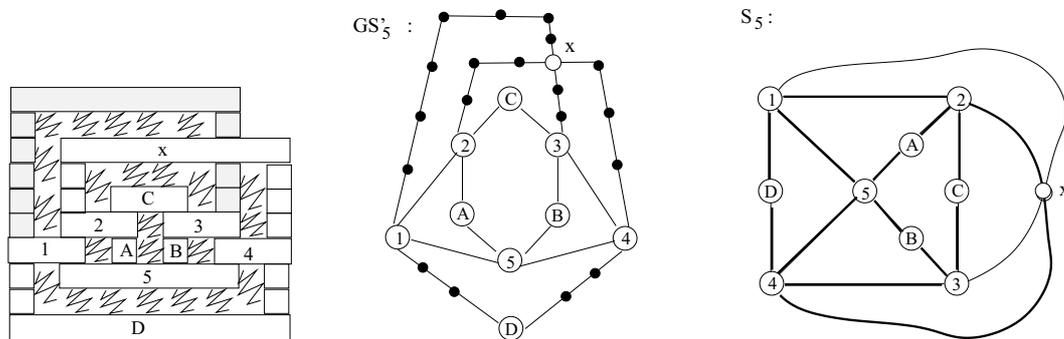


Figura 3.20: Intentando cruzar la arista $(2, 4)$ de S_5

La gráfica asociada al vox-sólido obtenido ya no representa una subdivisión de K_5 y por lo tanto, no es posible construir un vox-sólido laminar cuya gráfica de adyacencia de niveles asociada sea K_5 o una subdivisión de ésta.

Por ende, y para finalizar, podemos concluir que el Lema se satisface.

La Figura 3.21 muestra un vox-sólido cuya gráfica de adyacencia de niveles es $K_{3,3}$.

Teorema 3.3 Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{V}$, $\mathcal{V} \in \mathcal{E}$ si y sólo si cada una de sus gráficas de adyacencia de niveles resultan ser árboles.

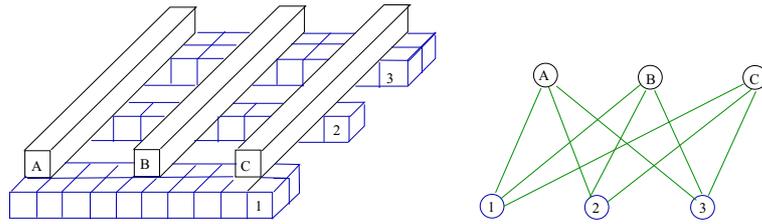


Figura 3.21: La gráfica de adyacencia de niveles $K_{3,3}$ y su vox-sólido asociado

Demostración. \Rightarrow) Por contradicción.

Supongamos que $\mathcal{V} \in \mathcal{E}$ y una de sus gráficas de adyacencia de niveles tiene, al menos, un ciclo. Con base en el Teorema 3.1, \mathcal{N} tiene un ciclo y, entonces, \mathcal{V} tiene un hoyo. Es decir que su superficie tiene genero $g, g > 0$, lo cual resulta contradictorio debido a que \mathcal{V} es esférico.

\Leftarrow) Si las gráficas de adyacencia de niveles son árboles entonces no poseen ciclos. Luego, por el Lema 3.6, no existe ningún hoyo en el vox-sólido y, por lo tanto, $\mathcal{V} \in \mathcal{E}$.

Dado que siempre es posible rotar el vox-sólido, a partir de este momento trabajaremos, únicamente, con la gráfica de adyacencia de niveles por altura, \mathcal{N}_P , la cual denominaremos gráfica de adyacencia por pisos

3.3.1. Vox-sólidos 2-laminados

En esta sección, nos enfocaremos a los vox-sólidos esféricos 2-laminados, $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$, los cuales tienen dos pisos y sus gráficas de adyacencia de niveles por pisos es un árbol. Consideraremos tres casos generales:

Caso I. Cada piso está formado por un vox-sólido laminar

Caso II. Un piso está conformado por vox-sólido laminar y el otro por varios sub-vox-sólidos laminares ajenos

Caso III. Cada piso está integrado por varios sub-vox-sólidos laminares

Iniciamos con el **Caso I**. Una vez encontrada la solución resultará fácil extenderla a los otros dos casos, pues el problema se reduce a eliminar una hoja del árbol T . Es decir, su gráfica de adyacencia de niveles. Antes de esto, introducimos un par de conceptos.

Definición 3.4 Sean $\mathcal{V} \in \mathfrak{V}$, v, w voxeles de \mathcal{V} unidos por una cara. Denotaremos por v^w cuando w esté sobre el voxel v o, bien, w_v cuando v esté por debajo de w .

Sean $\mathcal{U} \in \mathfrak{V}$ y w un voxel. Denotaremos por \mathcal{U}^w cuando u^w para algún $u \in \mathcal{U}$.

Sean $\mathcal{V} \in \mathfrak{V}$; $\mathcal{U}, \mathcal{W} \sqsubset \mathcal{V}$. Si $\forall w \in \mathcal{W}$, se tiene que \mathcal{U}^w , denotaremos $(\mathcal{U}^{\mathcal{W}})_T$.

Si para algunos voxeles $w \in \mathcal{W}$, pero no todos, se tiene que \mathcal{U}^w , denotaremos $(\mathcal{U}^{\mathcal{W}})_P$.

De manera general, la notación $(\mathcal{U}^{\mathcal{W}})_T$ nos indica que el sub-vox-sólido \mathcal{W} está totalmente sobre \mathcal{U} y $(\mathcal{U}^{\mathcal{W}})_P$ indica que \mathcal{W} está parcialmente sobre \mathcal{U} .

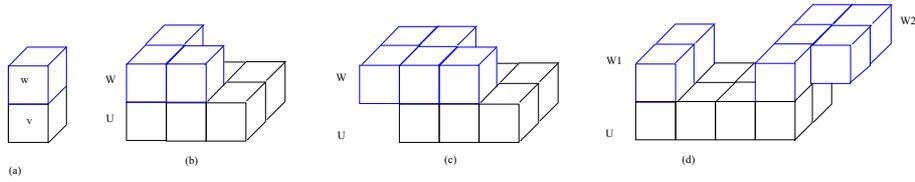


Figura 3.22: Sub-vox-sólidos W que están parcial y totalmente sobre U

La Figura 3.22 ilustra las definiciones anteriores. En el caso (a) w está sobre v : v^w , en (b), W está totalmente sobre U : $(U^W)_T$, en el caso (c), W está parcialmente sobre U : $(U^W)_P$ y, por último, en (d), el segundo piso consta de dos sub-vox-sólido, donde $(U^{W^1})_T$ y $(U^{W^1})_P$.

Caso I.

Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$, tal que cada piso está formado por un sub-vox-sólido laminar, que denominaremos \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 , respectivamente. Así, tenemos que $\mathcal{N}_P(\mathcal{V})$ es un árbol de dos vértices, por lo que tenemos dos sub-casos generales:

- (1) $(\mathcal{U}_1^{\mathcal{U}_2})_T$, lo que implica que: $|\mathcal{U}_2| \leq |\mathcal{U}_1|$; y
- (2) $(\mathcal{U}_1^{\mathcal{U}_2})_P$, caso en el que, además, debemos considerar si \mathcal{U}_1

La Figura 3.23 muestra algunos vox-sólidos de dos pisos, 2-laminado. En (a) puede observarse que \mathcal{U}_2 está totalmente sobre \mathcal{U}_1 : $(\mathcal{U}_1^{\mathcal{U}_2})_T$. En (b) y en (c) hay voxeles de \mathcal{U}_2 que no están sobre \mathcal{U}_1 , por definición, se tiene que $(\mathcal{U}_1^{\mathcal{U}_2})_P$. Finalmente, en (d) se presenta la gráfica de adyacencia de niveles para el Caso I.

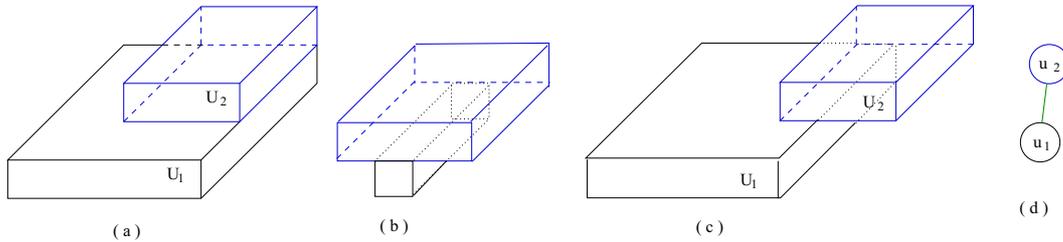


Figura 3.23: Ejemplificación del Caso I

Para los siguientes resultados no es relevante si \mathcal{U}_2 tiene, o no, hoyos topológicos. Sólo debe mantenerse la condición de que \mathcal{V} completo sea esférico.

Lema 3.8 Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$. Supongamos que cada piso en \mathcal{V} está formado únicamente por un vox-sólido laminar. Digamos \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 , respectivamente. Si $(\mathcal{U}_1^{\mathcal{U}_2})_T$, entonces siempre será posible enumerar, primero, al vox-sólido laminar \mathcal{U}_2 .

Demostración. Dado que $\forall u \in \mathcal{U}_2$, \mathcal{U}_1^u , no se presenta ningún conflicto entre ellos. Así que podemos ignorar, temporalmente, a \mathcal{U}_1 y enumerar \mathcal{U}_2 usando el Teorema 3.1, ya que \mathcal{U}_2 , por sí mismo, es un vox-sólido laminar. Por ende, el lema se satisface.

Teorema 3.4 Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$. Supongamos que cada piso en \mathcal{V} está formado, únicamente, por un vox-sólido laminar, llamados \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 , respectivamente. Si $(\mathcal{U}_1^{\mathcal{U}_2})_T$ entonces $\mathcal{V} \in \mathcal{I}$.

Demostración. Por el Lema 3.8 es posible enumerar primero al segundo piso, una vez hecho esto procedemos a enumerar a \mathcal{U}_1 , pero $\mathcal{U}_1 \in \Lambda_{(1)}$ y, por el Teorema 3.2, $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{I}$. Por lo tanto, podemos concluir que \mathcal{V} es inductivo.

Lema 3.9 Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$. Supongamos que cada piso en \mathcal{V} está formado, únicamente, por un vox-sólido laminar, a los que nos referiremos como \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 , respectivamente. Supongamos que $(\mathcal{U}_1^{\mathcal{U}_2})_T$ y que $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{E}$. Si $X = \{x \in \mathcal{U}_2 : \mathcal{U}_1^x\}$, entonces $X \in \mathcal{V}$.

Demostración. Supongamos que X es desconexo. Sin pérdida de generalidad, supongamos, también, que es la unión de dos sub-vox-sólidos X_1 y X_2 . Sea $R = \mathcal{U}_2 \setminus X = \mathcal{U}_2 \setminus \{X_1 \cup X_2\}$. Como $\mathcal{U}_2 \in \mathcal{V}$ y $X_1 \cup X_2$ es desconexo, tenemos dos casos:
 (1) Existe al menos un voxel $w_2 \in R$ y un $w_1 \in \mathcal{U}_1$, tales que w_1 y w_2 son adyacentes sólo por una arista. Esto contradice el hecho de que $\mathcal{V} \in \mathcal{V}$.
 (2) Existe un hoyo en \mathcal{V} , lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{V} \in \mathcal{E}$.
 Suponer que X es desconexo conduce a una contradicción. Por lo tanto, $X \in \mathcal{V}$.

La Figura 3.24 (a) ilustra el caso (1) de la demostración, (b), el caso (2) y (c), que X es vox-sólido.

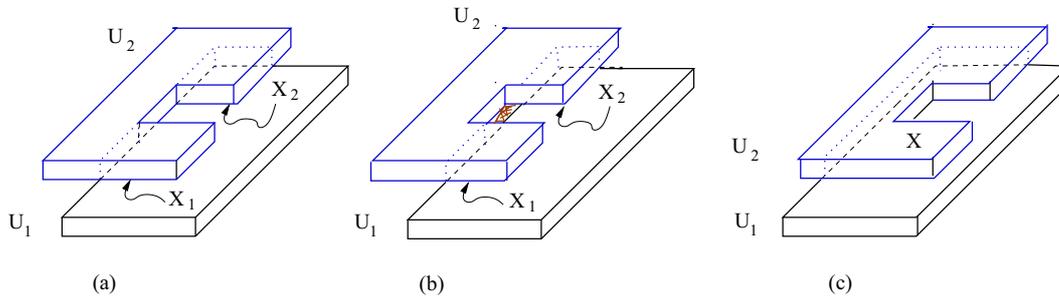


Figura 3.24: Ejemplificación del Lema 3.9

Lema 3.10 Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$. Suponga que cada piso en \mathcal{V} está formado únicamente por un vox-sólido laminar, llamados \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 , respectivamente. Si $(\mathcal{U}_1^{\mathcal{U}_2})_P$, entonces siempre es posible enumerar, primero, a \mathcal{U}_2 .

Demostración. Sea el conjunto de voxes $X = \{x \in \mathcal{U}_2 : \mathcal{U}_1^x\}$. Por el Lema 3.9, $X \in \mathcal{V}$. Mediante el Lema 3.2 podemos enumerar \mathcal{U}_2 , de tal forma que a X se le asignen las últimas etiquetas. Esto significa que estamos etiquetando, primero, a los voxes $y, y \notin X$. Ahora tenemos el vox-sólido \mathcal{V}' , cuyo primer piso es \mathcal{U}_1 , con $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{E}$ y el segundo X , que es tal que \mathcal{U}_1^X . Luego por el Lema 3.8, siempre es posible enumerar primero a X . Por lo tanto, el lema se satisface.

Teorema 3.5 Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$. Suponga que cada piso en \mathcal{V} está formado, únicamente, por un vox-sólido laminar, \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 , respectivamente. Si $(\mathcal{U}_1^{\mathcal{U}_2})_P$ y $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{E}$ entonces, $\mathcal{V} \in \mathcal{I}$.

Demostración. Por el Lema 3.10 es posible enumerar, primero, al segundo piso. Después de ello, sólo queda \mathcal{U}_1 , pero $\mathcal{U}_1 \in \Lambda_{(1)}$. Luego por el Teorema 3.2, $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{I}$, por lo tanto, el teorema se satisface.

Por otro lado, supongamos que \mathcal{U}_1 posee hoyos topológicos y \mathcal{U}_2 puede, o no, tenerlos, sin dejar de conservar la propiedad de que $\mathcal{V} \in \mathcal{E}$.

Proposición 3.4 Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$. Suponga que cada piso en \mathcal{V} está formado únicamente por un vox-sólido laminar, \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 , respectivamente, donde $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{T}(g_1)$ y $\mathcal{U}_2 \in \mathcal{T}(g_2)$ con $g_1, g_2 \in \mathbb{N}$. Sea h un hoyo en \mathcal{U}_2 y g uno en \mathcal{U}_1 . Entonces h y g no se intersectan.

Demostración. Supongamos que la intersección se llevase a cabo. Luego,

- (1) Si h y g se intersectan por aristas o vértices, entonces $\mathcal{V} \notin \mathcal{V}$.
- (2) Si h y g se intersectan entonces forman un hoyo en \mathcal{V} !, pues $\mathcal{V} \in \mathcal{E}$.

Por lo tanto, h y g no se intersectan.

Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$, donde $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{T}(g_1)$, $g_1 > 1$, y \mathcal{U}_2 podría, o no, tener hoyos topológicos. Sea h un hoyo en \mathcal{U}_1 . Existe un conjunto B de voxes de \mathcal{U}_2 que *bloquean* a h para que \mathcal{V} continúe teniendo la propiedad de ser esférico. Diremos que B **tapa** el hoyo h . Nótese que B existe debido a que los hoyos de \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 no se intersectan.

Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$, donde $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{T}(g_1)$, $g_1 > 1$, y \mathcal{U}_2 podría, o no, tener hoyos topológicos. Suponga que $g_2, g_2 \geq 0$, representa al número de hoyos topológicos en \mathcal{U}_2 .

Lema 3.11 Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$. Supongamos que cada piso en \mathcal{V} está formado, únicamente, por un vox-sólido laminar, \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 . Supongamos también que $(\mathcal{U}_1^{\mathcal{U}_2})_P, \mathcal{U}_1 \in \mathcal{T}$. Sea Y el conjunto de voxes de \mathcal{U}_2 que tapa al hoyo de \mathcal{U}_1 . Entonces, es posible desensamblar primero los voxes de Y .

Demostración. Si h es el hoyo de \mathcal{U}_1 , sea $E = r(h)$ la envolvente de h . Sabemos que $E \in \mathcal{V}$. Sea el conjunto de voxes $X = \{x \in \mathcal{U}_2 : E^X\}$, X es una copia de E . Ahora podemos aplicar el Lema 3.4 para el vox-sólido \mathcal{U}_2 y sus sub-vox-sólidos X y Y , con lo cual podemos concluir que el resultado se satisface.

Obsérvese que como la estrategia del Lema 3.4 inicia suprimiendo voxes de la *orilla*, y como X es una copia de E entonces no hay peligro de provocar singularidades sobre la superficie del vox-sólido resultante.

El siguiente resultado nos indica que, en un vox-sólido 2-laminado, es posible desensamblar, primero, todos los voxes $y, y \notin X$, donde $X = \{x \in \mathcal{U}_2 : \mathcal{U}_1^x\}$. Es decir, es posible quitar, primero, los voxes que no están sobre U_1 .

Lema 3.12 Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$. Suponga que cada piso en \mathcal{V} está formado únicamente por un vox-sólido laminar, digamos \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 , respectivamente. Suponga que $(\mathcal{U}_1^{\mathcal{U}_2})_P$ y que $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{T}(g), g \geq 1$. Además, sean $X_o = \{x \in \mathcal{U}_2 : U_1^x\}$; Y_i el conjunto de voxeles de \mathcal{U}_2 que tapa al hoyo h_i de $\mathcal{U}_1, 1 \leq i \leq g$; $\Psi = \cup_{i=1}^g Y_i$ y $Y_o = \mathcal{U}_2 \setminus \{X_o \cup \Psi\}$. Entonces, siempre es posible desensamblar (etiquetar) primero, todos los voxeles de $\Psi \cup Y_o$.

Demostración. Se tiene que $\Psi \cup Y_o = \{y \in \mathcal{U}_2 : y \notin X_o\}$. Primero eliminamos los voxeles de Y_o , que es el conjunto de voxeles que no están sobre \mathcal{U}_2 y no cubren ningún hoyo de \mathcal{U}_1 . Considerando únicamente \mathcal{U}_2 , sea $\mathcal{U}_o = X_o \cup \Psi$, \mathcal{U}_o es un sub-vox-sólido de \mathcal{U}_2 que no separa a ningún subconjunto T de voxeles del resto de \mathcal{V} y sea $R = \mathcal{V} \setminus \{T \cup \Psi\}$. Por el Lema 3.2 es posible dar a \mathcal{U}_o las últimas etiquetas. Esto significa que a Y_o se le asignan las primeras etiquetas, lo cual indica que se pueden desensamblar sus voxeles. Ahora, sobre cada $Y_i, 1 \leq i \leq n$, aplicamos el Lema 3.11 para desensamblar los voxeles de Y_i . Por lo tanto, podemos concluir que el resultado se satisface.

Lema 3.13 Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$. Suponga que cada piso en \mathcal{V} está formado únicamente por un vox-sólido laminar, llamados \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 , respectivamente. Si $(\mathcal{U}_1^{\mathcal{U}_2})_P$ y $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{T}(g), g \geq 1$ entonces siempre es posible enumerar primero a los voxeles de \mathcal{U}_2 .

Demostración. Por el Lema 3.12 siempre es posible enumerar primero los voxeles de \mathcal{U}_1 que no pisan \mathcal{U}_2 . Ahora nos hemos quedado con un \mathcal{U}'_2 tal que $(\mathcal{U}'_2)_T$, por el Lema 3.8 es posible enumerar primero a los voxeles de \mathcal{U}'_2 . Por lo tanto, podemos concluir que el resultado se satisface.

Teorema 3.6 Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$. Suponga que cada piso en \mathcal{V} está formado, únicamente, por un vox-sólido laminar, llamados \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 , respectivamente.

Si $(\mathcal{U}_1^{\mathcal{U}_2})_P$ y $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{T}(g), g \geq 1$, entonces $\mathcal{V} \in \mathcal{I}$.

Demostración. Sean $X_o = \{x \in \mathcal{U}_2 : \mathcal{U}_1^x\}$ y Y_i el conjunto de voxeles de \mathcal{U}_2 que tapa al hoyo h_i de $\mathcal{U}_1, 1 \leq i \leq g$; $\Psi = \cup_{i=1}^g Y_i$ y $Y_o = \mathcal{U}_2 \setminus \{X_o \cup \Psi\}$.

Por el Lema 3.12 es posible enumerar, primero, a los voxeles en $Y_i, 0 \leq i \leq g$. Nos queda el vox-sólido $\mathcal{U}_2 \setminus \Psi = X_o$. Es decir, ahora nos quedan en el segundo piso todos los voxeles $x \in X_o$. De hecho, X_o es idéntico a \mathcal{U}_1 .

Podemos ignorar \mathcal{U}_1 , temporalmente, y ver que, al aplicar el Teorema 3.2, obtenemos que X_o es inductivo.

Finalmente, nos queda el vox-sólido \mathcal{U}_1 que es laminar. De manera similar, por el Teorema 3.2 tenemos que \mathcal{U}_1 es inductivo.

Por lo tanto, podemos concluir que el resultado se satisface.

Lema 3.14 Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$. Suponga que cada piso en \mathcal{V} está formado, únicamente, por un vox-sólido laminar, digamos \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 , respectivamente. Si $(\mathcal{U}_1^{\mathcal{U}_2})_P$ y $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{T}(g), g \geq 1$, entonces siempre es posible enumerar, primero, a \mathcal{U}_2 .

Demostración. Sean $X_o = \{x \in \mathcal{U}_2 : \mathcal{U}_1^x\}$ y $Y = \{y \in \mathcal{U}_2 : y \notin X_o\}$. Por el Lema 3.13 se pueden enumerar, primero, los voxeles de Y ; al momento queda un vox-sólido cuyos dos pisos son \mathcal{U}_1 y X_o . Luego, por el Lema 3.8, siempre es posible enumerar primero a X_o y, por lo tanto, el resultado se satisface.

Teorema 3.7 Si $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$, donde cada piso es un vox-sólido laminar, entonces siempre es posible enumerar, primero, al segundo piso.

Demostración. Sean \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 el primero y segundo piso de \mathcal{V} , respectivamente.

Por considerar tres casos:

Caso 1. Si $(\mathcal{U}_1^{\mathcal{U}_2})_T$, por el Lema 3.8, siempre es posible enumerar primero a \mathcal{U}_2

Caso 2. Si $(\mathcal{U}_1^{\mathcal{U}_2})_P$ y $\mathcal{U}_2 \in \mathcal{E}$, por el Lema 3.10, es posible enumerar primero a \mathcal{U}_2

Caso 3. Si $(\mathcal{U}_1^{\mathcal{U}_2})_P$ y $\mathcal{U}_2 \notin \mathcal{E}$, por el Lema 3.14, es posible enumerar primero a \mathcal{U}_2

Para cualquiera de los tres casos tenemos que el resultado se cumple.

Corolario 3.2 Si $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$, donde cada piso es un vox-sólido laminar, y $T = \mathcal{N}_P(\mathcal{V})$, entonces enumerar primero al segundo piso de \mathcal{V} equivale a quitarle una hoja a T .

Demostración. La gráfica de adyacencia de niveles por pisos de \mathcal{V} es un árbol T de dos nodos, digamos u_1 y u_2 , correspondientes a los sub-vox-sólidos \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 , respectivamente. Así que, enumerar primero \mathcal{U}_2 , equivale a desensamblar todos los voxeles del segundo piso, lo cual equivale a eliminar del árbol al nodo u_2 , que es una hoja de T .

Durante el desarrollo de los resultados anteriores, aprovechamos la propiedad de \mathcal{U}_2 de *estar sobre*. De hecho, ser parte del último piso (el nodo asociado a \mathcal{U}_2 es una hoja), lo cual nos será útil en lo que resta del capítulo.

Teorema 3.8 Si $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$, donde cada piso es un vox-sólido laminar, entonces $\mathcal{V} \in \mathcal{I}$.

Demostración. Sean \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 el primero y segundo piso de \mathcal{V} , respectivamente.

Consideraremos tres casos:

Caso 1. Si $(\mathcal{U}_1^{\mathcal{U}_2})_T$, por el Teorema 3.4, $\mathcal{V} \in \mathcal{I}$

Caso 2. Si $(\mathcal{U}_1^{\mathcal{U}_2})_P$, y $\mathcal{U}_2 \in \mathcal{E}$, por el Teorema 3.5, $\mathcal{V} \in \mathcal{I}$

Caso 3. Si $(\mathcal{U}_1^{\mathcal{U}_2})_P$, y $\mathcal{U}_2 \notin \mathcal{E}$, por el Teorema 3.6, $\mathcal{V} \in \mathcal{I}$

Caso II.

Supongamos que tenemos un vox-sólido esférico 2-laminado, en el que un piso es un vox-sólido laminar y el otro una colección de $k, k \geq 1$, vox-sólidos de un piso. Sin pérdida de generalidad, supongamos, que el primer piso es un vox-sólido laminar. La Figura 3.25 ejemplifica este caso.

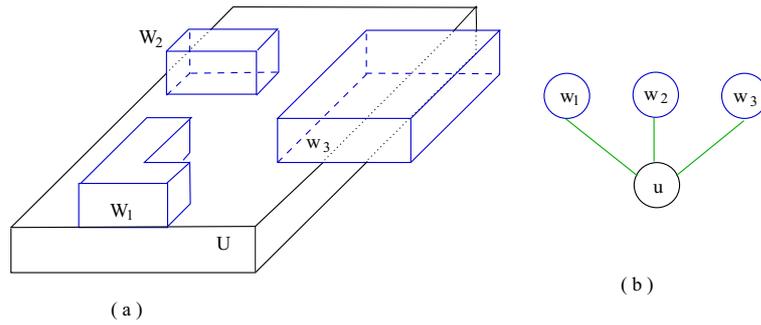


Figura 3.25: Ejemplificación del Caso II

Lema 3.15 Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$. Supongamos que el primer piso está formado por el vox-sólido laminar \mathcal{U} y el segundo es una colección de vox-sólidos laminares ajenos, digamos $W_1, W_2, \dots, W_k, k \geq 1$. Entonces, siempre es posible enumerar primero al segundo piso.

Demostración. Dado que \mathcal{V} es un vox-sólido, los W_i son vox-sólido ajenos entre sí, entonces podemos actuar sobre cada W_i aplicando el Teorema 3.9 e ignorando, parcialmente, los restantes W_i .

Corolario 3.3 Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$ tal que el primer piso es un vox-sólido laminar y el segundo una colección de k vox-sólidos laminares: W_1, W_2, \dots, W_k . Entonces enumerar una $W_i, 1 \leq i \leq k$ equivale a quitarle una hoja a T .

Demostración. La gráfica de adyacencia de niveles por pisos de \mathcal{V} es un árbol T de dos niveles. En el primer nivel está el nodo u_o y en el segundo, los nodos u_1, \dots, u_k , correspondientes a los subvox-sólidos W_1, W_2, \dots, W_k . Note que T es una estrella. Así que enumerar primero un W_i es similar a desensamblar los voxes de W_i , lo cual equivale a quitarle a T un nodo, el u_i .

De manera similar al Caso I, nos hacemos valer de que la colección de vox-sólidos laminares ajenos está en el último piso pero, lo más importante, es que está asociada con las hojas del árbol T , la gráfica de adyacencia de niveles.

Teorema 3.9 Si $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$ tal que el primer piso es un vox-sólido laminar y el segundo, una colección de k vox-sólidos laminares: W_1, W_2, \dots, W_k , entonces $\mathcal{V} \in \mathcal{I}$.

Demostración. Por el Teorema 3.7 es posible enumerar primero los vox-sólidos laminares del segundo piso. Una vez hecho esto sólo queda el primer piso por numerar, y, con base en el Teorema 3.2, éste es inductivo.

Para los Casos I y II tenemos que la gráfica de adyacencia de niveles es un árbol de dos niveles, es decir de altura 1. Para ambos casos se tiene un resultado equivalente: se puede enumerar (desensamblar) primero al último piso, suponiendo sin pérdida de generalidad, que el primer piso está formado por un vox-sólido. Esto lo podemos resumir en el siguiente resultado.

Teorema 3.10 Si $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$, para el cual su gráfica de adyacencia de niveles por pisos es un árbol T de altura 1, entonces siempre es posible enumerar primero los sub-vox-sólidos asociados a las hojas de T .

Teorema 3.11 Si $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$, para el cual su gráfica de adyacencia de niveles por pisos es un árbol T de altura 1, entonces \mathcal{V} es inductivo.

Demostración. Por el Teorema 3.10, primero podemos enumerar los sub-vox-sólidos asociados a las hojas. Una vez hecho esto, sólo queda enumerar un vox-sólido de un piso que es inductivo, por el Teorema 3.2.

Caso III.

Ahora consideraremos un vox-sólido esférico de dos pisos, 2-laminados, para el cual cada piso está integrado por varios vox-sólidos laminares. Sean W_1, W_2, \dots, W_k los del segundo piso y U_1, U_2, \dots, U_ℓ los del primero. En este caso, la gráfica de adyacencia de niveles por pisos es una gráfica bipartita acíclica, donde una bipartición W corresponde a los nodos asociados con los sub-vox-sólidos del segundo piso, mientras que la otra, U , está asociada con los del primero.

En efecto, la gráfica de adyacencia de niveles por pisos es un árbol pero el cálculo de su altura no es inmediato. Para este caso la gráfica puede ser una trayectoria de longitud $n = k + \ell$. La Figura 3.26 muestra un vox-sólido que entra en el Caso III.

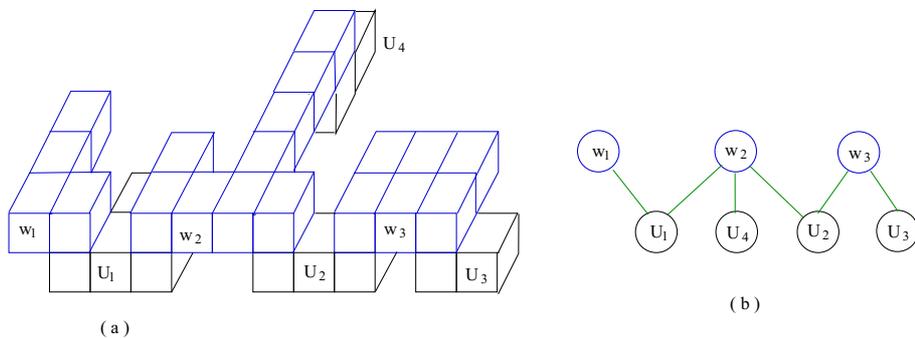


Figura 3.26: Ejemplificación del Caso III

Lema 3.16 Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$. Suponga que ambos pisos están formados por una colección de vox-sólidos laminares. Sea $T = \mathcal{G}_p(\mathcal{V})$. Entonces, siempre es posible eliminar un vox-sólido laminar asociado a una hoja en T .

Demostración. Sean W_1, W_2, \dots, W_k y U_1, U_2, \dots, U_ℓ los sub-vox-sólidos asociados al segundo y primer piso, respectivamente. Sea $T = \mathcal{G}_p(\mathcal{V})$ la gráfica de adyacencia de niveles por pisos para \mathcal{V} . Sea, entonces, $w_i, 1 \leq i \leq k$, el nodo en T asociado con W_i y, de manera similar, sea $u_i, 1 \leq i \leq \ell$, el nodo asociado con U_i . Así, sea $W = \{w_i : 1 \leq i \leq k\}$ y $U = \{u_i : 1 \leq i \leq \ell\}$.

Sea $w_j \in W$ una hoja en T entonces, w_j es adyacente a una y sólo una $u_i \in U$. El nodo w_j está asociado a un sub-vox-sólido, de un piso, el cual es ajeno (no tiene adyacencia con las otras w_i). De hecho únicamente tiene adyacencia con una $u_i, 1 \leq i \leq \ell$.

Con base en lo expuesto, podemos ignorar todos los sub-vox-sólidos diferentes a W_j y U_i , de forma temporal, y trabajar, sólomente, con estos últimos. Ahora bien, W_j y U_i forman, por si solos, un vox-sólido de dos pisos, para el cual la gráfica de adyacencia de niveles por pisos es un árbol T_j de altura 1. Ésta es un sub-árbol de T . Luego, por el Teorema 3.10, siempre es posible enumerar primero a W_j , que está asociado a la hoja w_j de T_j .

La demostración es análoga si tomamos $u_j \in U$.
Por lo tanto, el Lema se satisface.

Teorema 3.12 Si $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$, para el cual cada piso está integrado por varios vox-sólidos laminares, entonces $\mathcal{V} \in \mathcal{I}$.

Demostración. Por el Lema 3.16 podemos enumerar los sub-vox-sólidos asociados a una hoja y eliminarla. Al continuar esto, terminaremos por enumerar todos los voxes de \mathcal{V} .

Una vez revisados los tres casos, podemos establecer el siguiente resultado:

Teorema 3.13 Si $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \cap \Lambda_{(2)}$ entonces $\mathcal{V} \in \mathcal{I}$.

Demostración. Inmediato de los Teoremas 3.8, 3.9 y 3.12.

3.3.2. Vox-sólidos m -laminados, $m > 3$

Lema 3.17 Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{E}$ y $T = \mathcal{N}_P(\mathcal{V})$. Entonces, siempre es posible eliminar (enumerar) un vox-sólido laminar asociado a una hoja en T y, por ende, una hoja en T .

Demostración. Si $|\mathcal{U}| = 1$, es decir, consta de un único voxel, entonces quitamos el voxel de \mathcal{V} .

Si $|\mathcal{U}| > 1$, es decir, tiene más de un voxel, sea \mathcal{W} el vox-sólido contiguo a \mathcal{U} , sean w y u los nodos respectivos en T . Nótese que u es adyacente únicamente a w , por lo cual ignoraremos, de manera temporal, todos los sub-vox-sólidos diferentes a \mathcal{U} y \mathcal{W} , que aislados de los demás, forman un vox-sólido de dos pisos. Luego, con base en el Teorema 3.10, siempre es posible enumerar, primero, al sub-vox-sólido que está asociado a una hoja, en este caso, \mathcal{U} . Por lo tanto, el Lema se satisface.

Teorema 3.14 Si $\mathcal{V} \in \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{V} \in \mathcal{I}$.

Demostración. Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{E}$ y sea $T = \mathcal{N}_P(\mathcal{V})$. Por el Teorema 3.3, T es un árbol, supongamos T tiene n nodos. Haremos inducción sobre n .

Si $n = 1$ entonces $\mathcal{V} \in \Lambda_{(1)}$ entonces, por el Teorema 3.2, es inductivo.

Supongamos que el Teorema se cumple para todo vox-sólido esférico para el cual su gráfica de adyacencia de niveles es un árbol T con menos de n nodos.

Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{E}$ con $T = \mathcal{G}_p(\mathcal{V})$ con n nodos. Consideraremos al sub-vox-sólido de menor tamaño asociado con una hoja en T . Por el Lema 3.17 es posible enumerar tal sub-vox-sólido, lo cual equivale a eliminar tal hoja de T . Ahora tenemos un vox-sólido \mathcal{V}' cuya gráfica de adyacencia de niveles es un árbol T' con $n - 1$ nodos, por hipótesis de inducción $\mathcal{V}' \in \mathcal{I}$.

Por lo tanto, el teorema se satisface.

Concluimos con la siguiente caracterización.

Teorema 3.15 Si $\mathcal{V} \in \mathcal{V}$ tal que una de sus gráficas de adyacencia de niveles es un árbol entonces $\mathcal{V} \in \mathcal{I}$.

Demostración. Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{V}$ y sea T su gráfica de adyacencia de niveles que resulta ser un árbol, se procede igual que en el Teorema 3.14.

Por lo tanto, el teorema se satisface.

Capítulo 4

Descomposición Hamiltoniana de Vox Sólidos Esféricos

Demostraremos, mediante propiedades de las gráficas 4-regulares y 4-conexas, que algunas familias de vox-sólidos esféricos admiten una descomposición Hamiltoniana.

Lema 4.1 Sea G una gráfica 4-regular, 4-conexa inmersa en una superficie orientable. Sea G' obtenida al añadir un ciclo alrededor de un vértice de G . Entonces G' es 4-conexa.

Demostración. Aplicando el Teorema de Menger.

Sea v un vértice en G , sean v_1, v_2, v_3, v_4 sus vecinos, ordenados cíclicamente. Sean w_1, w_2, w_3, w_4 los vecinos de v en G' . Sin pérdida de generalidad, suponemos que v_i es adyacente a $w_i, 1 \leq i \leq 4$. Sea y un vértice en $G, y \neq v$. Como G es 4-conexa, existen cuatro trayectorias internamente disjuntas de y a v que pasan por uno y sólo uno de los vértices $v_i, 1 \leq i \leq 4$. En G' cada una de estas trayectorias pasa por uno, y sólo uno, de los vértices $w_i, 1 \leq i \leq 4$. Sea w_j fijo para alguna $j, 1 \leq j \leq 4$, un vecino de y . Aplicando el Teorema de Menger sobre w_j y y , encontramos cuatro trayectorias internamente disjuntas de w_j a y .

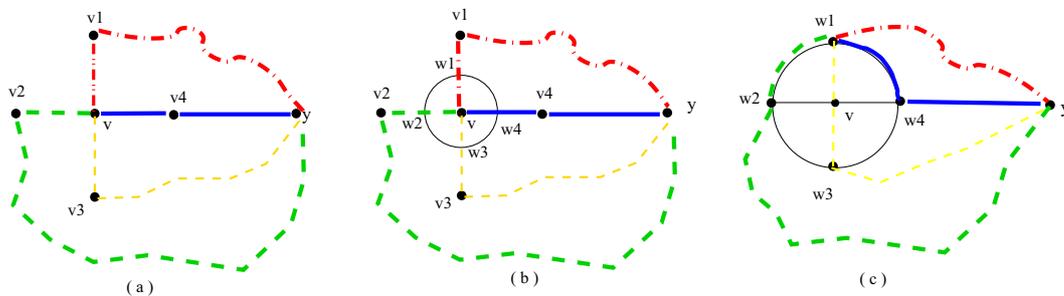


Figura 4.1: Demostración del Lema 4.1

La Figura 4.1 ilustra la demostración del Lema 4.1, en la que (a) muestra las cuatro trayectorias internamente disjuntas de v a y en G , (b), en G' y (c) presenta las cuatro trayectorias internamente disjuntas de w_1 a y .

Sea H una gráfica y \bar{H} su complemento. Definamos a $w(H)$ como el número de componentes conexas de H .

Teorema 4.1 Sean G una gráfica 4-regular, 4-conexa inmersa en una superficie orientable y sea G' como en el Lema 4.1. Suponga que G tiene un 2-factor H . Entonces, es posible extender H a un 2-factor de G' , tal que $w(H) = w(H')$ y $w(\bar{H}) = w(\bar{H}')$.

Demostración. Sea v un vértice en G y v_0, v_1, v_2, v_3 sus vecinos, ordenados cíclicamente.

Un 2-factor H puede tocar a v de dos formas:

a) pasa por $v_i, v, v_{(i+1) \bmod 4}$ o b) pasa por $v_i, v, v_{(i+2) \bmod 4}$.

Sean w_0, w_1, w_2, w_3 los vecinos de v en G' , sin pérdida de generalidad, suponga que w_i es adyacente a v_i , $0 \leq i \leq 3$.

Caso a) Sin pérdida de generalidad, suponga que en H y \bar{H} se tienen las trayectorias, $T : v_0, v, v_1$; y $\bar{T} : v_2, v, v_3$, respectivamente. Entonces en G' se tienen las trayectorias $T' : v_0, w_0, w_3, w_2, v, w_1, v_1$ y $\bar{T}' : v_2, w_2, w_1, v, w_3, v_3$, para H y \bar{H} , respectivamente.

Caso b) Sin pérdida de generalidad, suponga que en H y \bar{H} se tienen las trayectorias, $T : v_0, v, v_2$; y $\bar{T} : v_1, v, v_3$, respectivamente. En G' se tienen las siguientes trayectorias para H y \bar{H} , respectivamente, $T' : v_0, w_0, w_3, v, w_1, w_2, v_2$ y $\bar{T}' : v_1, w_1, w_0, v, w_2, w_3, v_3$.

Por lo tanto, para ambos casos, el número de componentes conexas se mantiene igual, tanto para el 2-factor H como para su complemento.

La Figura 4.2 ilustra la demostración del Teorema 4.1.

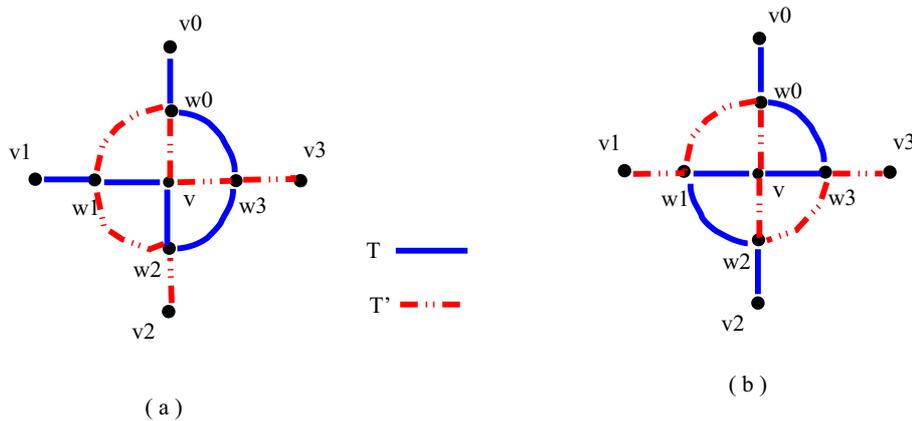


Figura 4.2: Demostración del Teorema 4.1

Recordemos que un vox-sólido arbóreo es aquel cuya gráfica de adyacencia de voxes es un árbol. En particular, nótese que un vox-sólido arbóreo se construye al añadir, continuamente, un círculo alrededor de un vértice en la gráfica facial.

Corolario 4.1 Todo vox-sólido arbóreo admite una descomposición Hamiltoniana.

La Figura 4.3 muestra un ejemplo del Corolario 4.1. A la izquierda se tiene un voxel y su gráfica facial, indicándose la descomposición Hamiltoniana. A la derecha se presenta el vox-sólido de dos voxes y su gráfica facial, mostrándose cómo se extiende la descomposición.

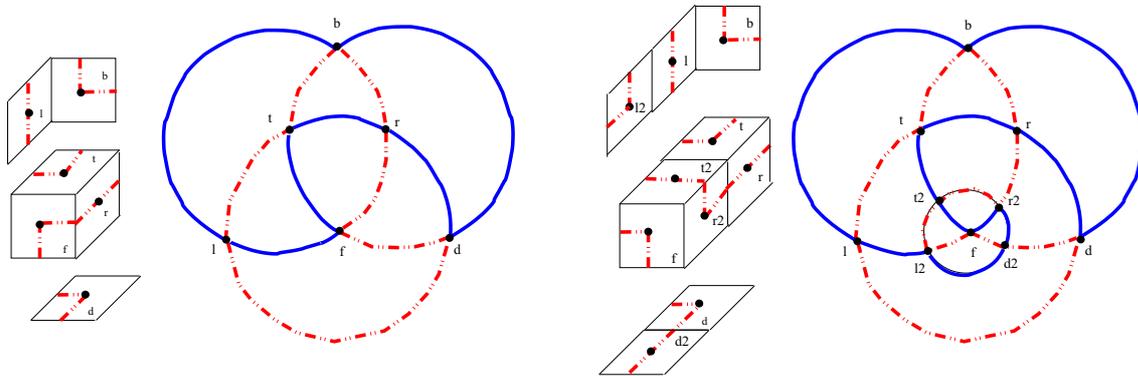


Figura 4.3: Ejemplo del Corolario 4.1

Lema 4.2 Sea G una gráfica plana 4-regular y 4-conexa. Sea H un 2-factor de G y sea E un corte en G . Construimos G' a partir de G añadiendo un par de círculos concéntricos que sólomente intersecten a G en puntos interiores de las aristas en E . Si asumimos que $E \cap H \neq \emptyset$ y $E \cap \bar{H} \neq \emptyset$, entonces H puede ser extendido a un 2-factor H' de G' , tal que $w(H) = w(H')$ y $w(\bar{H}) = w(\bar{H}')$.

Demostración. Suponga, sin pérdida de generalidad, que las n aristas de H están coloreadas con azul y las m de \bar{H} con rojo. El corte E tiene aristas rojas y azules, ya que $E \cap H \neq \emptyset \neq E \cap \bar{H}$. Organizamos cíclicamente las aristas de E , de la siguiente manera: $a_1, a_2, \dots, a_{k_1}, r_1, r_2, \dots, r_{j_1}, a_{k_1+1}, \dots, a_{k_2}, r_{j_1+1}, \dots, r_{j_2}, \dots, a_{k_t+1}, \dots, a_n, r_{j_t+1}, \dots, r_m$, donde $a_k \in H, 1 \leq k \leq n$ y $r_j \in \bar{H}, 1 \leq j \leq m$.

Tomamos la arista $a_{k_1} = (x_{k_1}, y_{k_1})$, empezamos a construir una trayectoria $\mathcal{P}(x_{k_1}, y_{k_1})$. Partimos de x_{k_1} , viajando por el primer círculo y cruzando las $j_1 - 1$ aristas rojas, al llegar a la arista roja r_{j_1} pasamos hacia el segundo círculo y regresamos hasta la arista azul a_{k_1} , para llegar al vértice y_{k_1} . Coloreamos de azul la trayectoria $\mathcal{P}(x_{k_1}, y_{k_1})$.

A partir de la arista $r_{j_1} = (u_{j_1}, v_{j_1})$, construimos, de manera similar, una trayectoria $\mathcal{P}(u_{j_1}, v_{j_1})$ y la coloreamos de azul. Es decir, a partir del vértice u_{j_1} , viajamos por el primer círculo cruzando las aristas azules, al llegar a la arista a_{k_2} pasamos al segundo círculo, regresamos hasta la arista r_{j_1} y de ahí al vértice v_{j_1} .

Repetiremos el proceso anterior para construir las trayectorias restantes.

Podemos observar que toda trayectoria se preserva localmente, por lo que las componentes de H y \bar{H} se preservan.

La Figura 4.4 ilustra la transformación descrita.

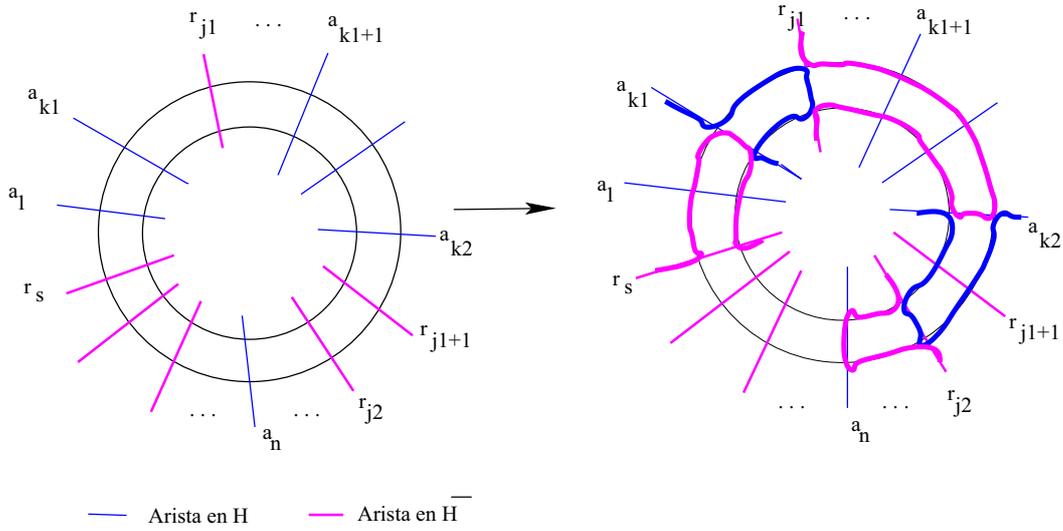


Figura 4.4: Demostración del Lema 4.2

Corolario 4.2 Sean G, H y E , como en el Lema 4.2. Asumimos que G admite una descomposición Hamiltoniana. Entonces, la extensión H' es una descomposición Hamiltoniana de G' .

La Figura 4.5 muestra la transformación descrita por el Corolario 4.2.

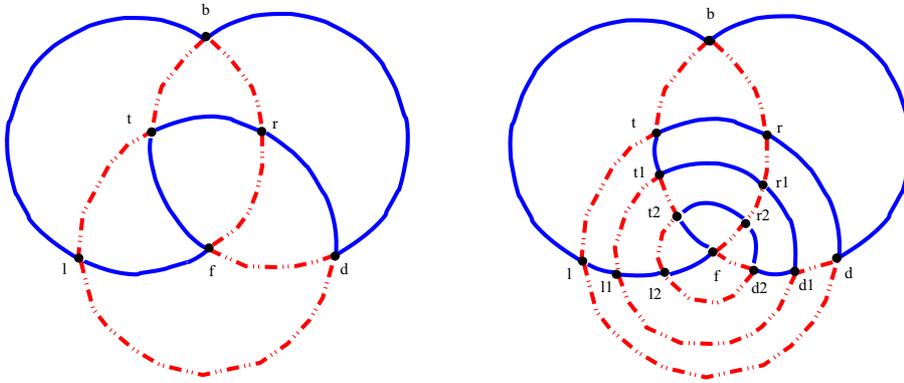


Figura 4.5: Ejemplo del Corolario 4.2

Un vox-sólido **prismático** es aquél cuya forma es similar a la de un prisma.

Teorema 4.2 Todo vox-sólido prismático admite una descomposición Hamiltoniana.

Demostración. Cualquier vox-sólido prismático puede ser obtenido a partir de una de las gráficas mostradas en la Figura 4.6 al añadir pares de círculos concéntricos. Dado que cada una de estas gráficas admite una descomposición Hamiltoniana, el resultado se satisface.

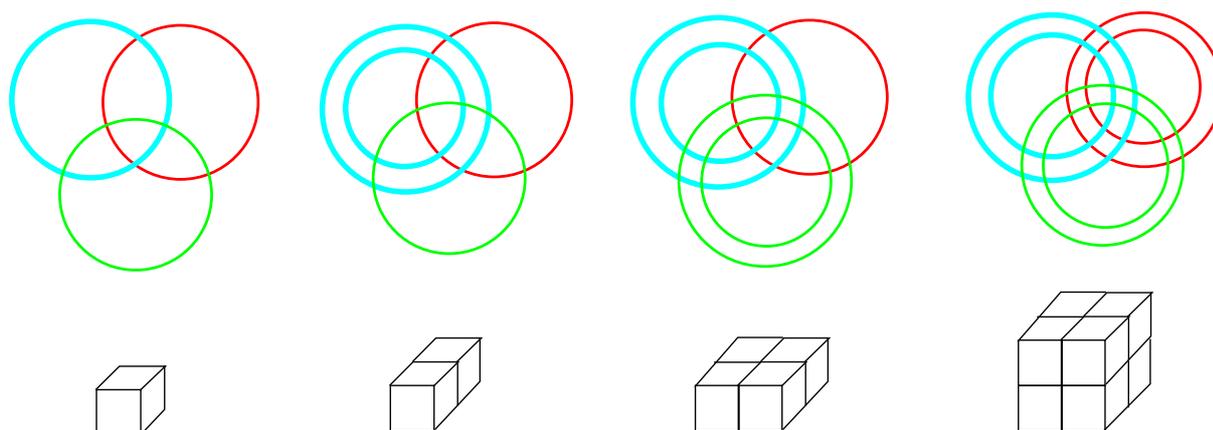
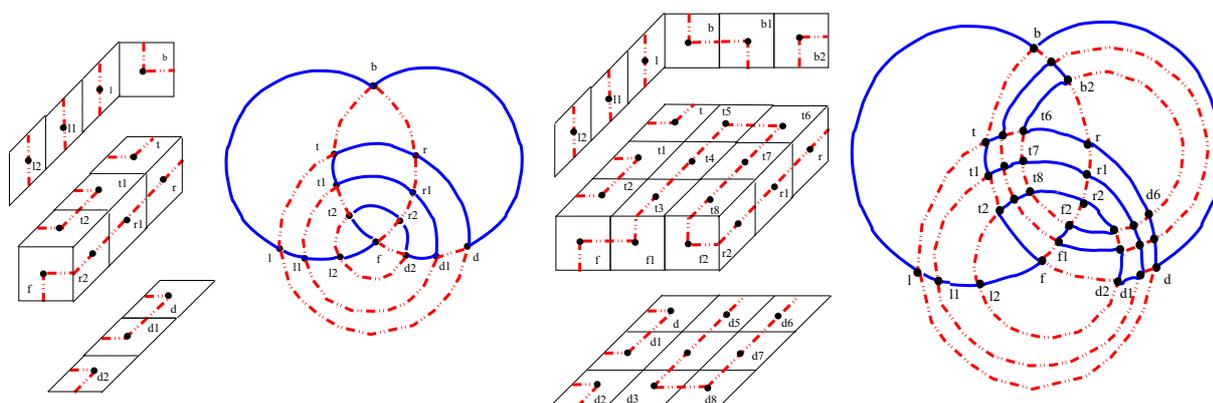


Figura 4.6: Gráficas Faciales base de los vox-sólidos prismáticos

La Figura 4.7 muestra la transformación descrita por el Teorema 4.2.



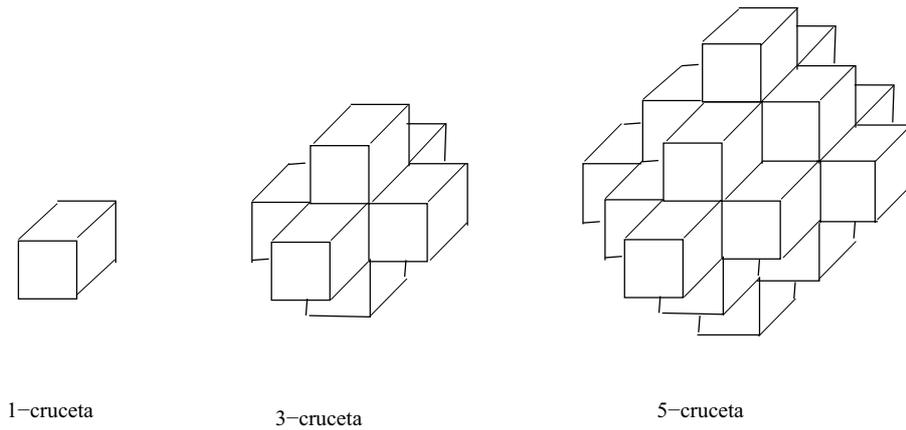


Figura 4.8: Vox-sólidos n -cruceta, ejemplares para $n = 1, 2, 3$

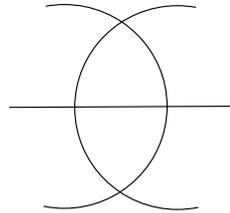


Figura 4.9: Estructura lente para los vox-sólidos n -cruceta

Para cada $i \geq 1$, la gráfica $G_{(2i+1)+1}$ se construye a partir de G_{2i+1} , de la siguiente manera:

Para cada uno de los cuatro grupos de lentes en G_{2i+1} , reemplazamos los primeros dos lentes, de izquierda a derecha, por cuatro lentes.

Abrimos las aristas en los puntos x, y, z en G_{2i+1} e insertamos dos estructuras lente. A esta transformación la denominaremos **Inserta-Lentes**.

La Figura 4.10 ilustra la operación descrita. Podemos ver el efecto global de G_3 a G_5 ...

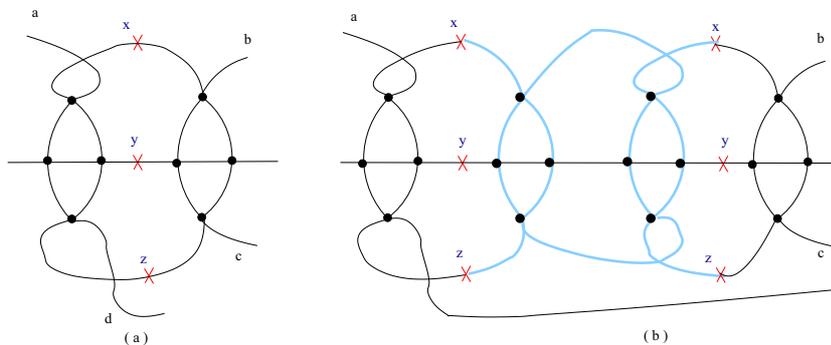


Figura 4.10: Inserción de lentes para los vox-sólidos n -cruceta

Probamos, en seguida, que todos los miembros de las gráficas en la familia $G_1, G_3, G_5, \dots, G_{2i+1}, \dots$, para todo entero positivo i , admiten una descomposición Hamiltoniana.

Lema 4.3 Supongamos que G admite una descomposición Hamiltoniana. Sea H un ciclo Hamiltoniano en G , cuyo complemento es, también, un ciclo Hamiltoniano. Sean a, b, c tres aristas en G , tales que $a \in \bar{H}$ y $b, c \in H$. Entonces, la gráfica G' , obtenida después de aplicar la transformación **Inserta-Lentes** e ilustrada en la Figura 4.11, también admite una descomposición Hamiltoniana.

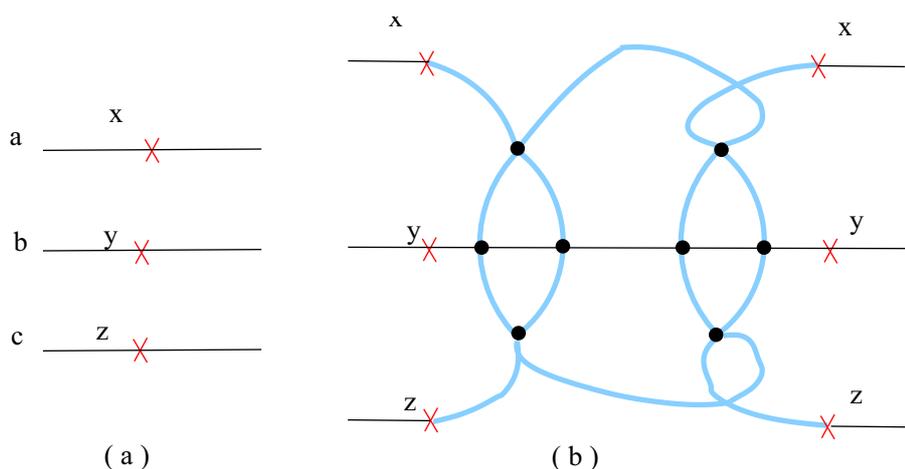


Figura 4.11: Transformación **Inserta-lentes**

Demostración. Basta seguir y colorear las trayectorias P_a, P_b, P_c , como se ilustra en la Figura 4.12, para reconstruir la descomposición Hamiltoniana.

Teorema 4.3 Las gráficas $G_1, G_3, G_5, \dots, G_{2i+1}, \dots$, con i entero positivo, admiten una descomposición Hamiltoniana.

Demostración. Basta aplicar el lema anterior y colorear las trayectorias P_a, P_b, P_c , como se ilustra en la Figura 4.12, para reconstruir la descomposición Hamiltoniana.

El teorema anterior nos indica que la Familia infinta de vox-sólidos denominados n -crucetas admite una descomposición Hamiltoniana.

Para la familia de gráficas $G_2, G_4, G_6, \dots, G_{2i}, \dots$ se construyen resultados análogos.

Lema 4.4 Sea G una gráfica 4-regular que admite una descomposición Hamiltoniana. Sea H un ciclo Hamiltoniano, tal que \bar{H} es, también, un ciclo Hamiltoniano. Sean A, B dos conjuntos no vacíos de aristas de G , tales que A está contenido en $E(H)$ y $B \subseteq E(\bar{H})$. Además, $|A| = p, |B| = q$. Sea $U(p, q)$ una gráfica formada por dos conjuntos de trayectorias mutuamente disjuntas. Un conjunto con p trayectorias y, el otro, con q trayectorias. Entonces al añadir $U(p, q)$ a G para obtener G' , es posible, extender la descomposición Hamiltoniana a G' .

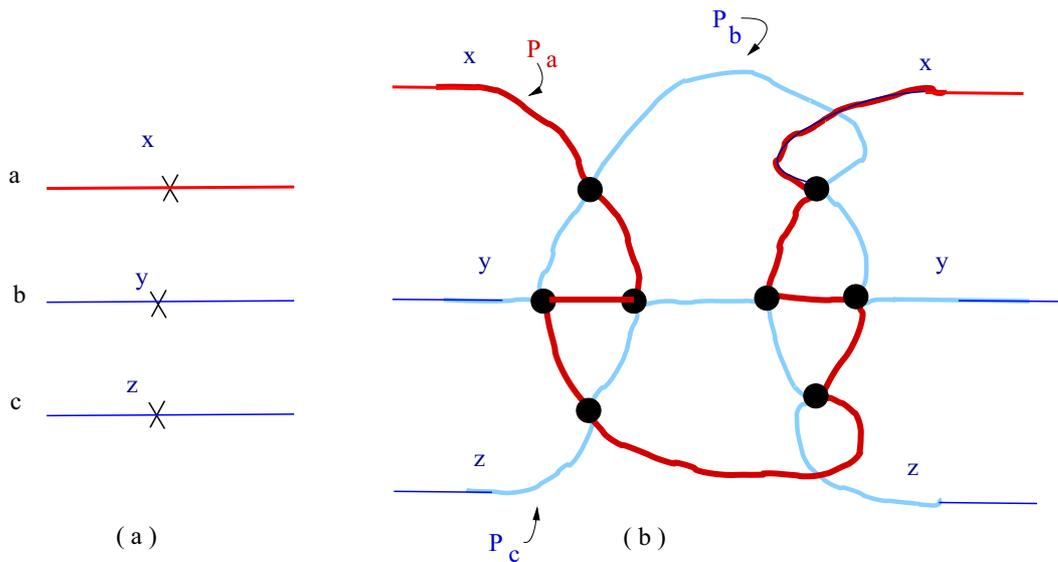


Figura 4.12: Demostración del Lema 4.3

Demostración. La Figura 4.13 ilustra la demostración.

Lema 4.5 Sea G una gráfica 4-regular inmersa en el toro. Suponga que G admite una descomposición Hamiltoniana. Sea H un ciclo Hamiltoniano, tal que \bar{H} también lo es. Sean A, B dos conjuntos no vacíos de aristas de G , tales que $A \subseteq E(H)$ y $B \subseteq E(\bar{H})$, con $|A| = p, |B| = q$. Se tiene, además, que ninguna arista de $A \cup B$ toca la frontera del toro. Sea $U(p, q)$ una gráfica formada por dos conjuntos de trayectorias mutuamente disjuntas, un conjunto con p y el otro con q trayectorias. Vemos que, al añadir $U(p, q)$ a G para obtener G' , es posible extender la descomposición Hamiltoniana a G' .

Demostración. Las aristas de A y B están en una curva nulo-homotópica de G inmersa en el toro. Tal curva se reduce al plano, es decir, puede verse como el plano. Así que por el Lema 4.4, el resultado se satisface.

La Figura 4.14 ilustra las hipótesis del Lema 4.5 y a Figura 4.15 ilustra la demostración.

Es posible construir otros vox-sólidos esféricos que se obtienen al aplicar las transformaciones descritas en el presente capítulo, los cuales no son arbóreos, prismáticos ni n -crucetas. Además, tales vox-sólidos admiten una descomposición Hamiltoniana.

La Figura 4.16 ilustra algunos vox-sólidos esféricos obtenidos de las transformaciones dadas y sus respectivas gráficas faciales.

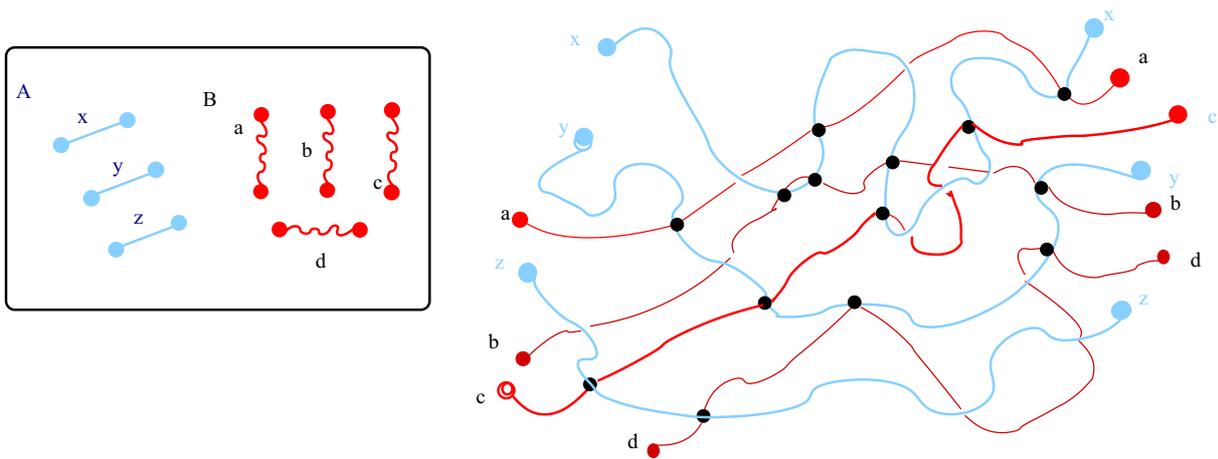


Figura 4.13: Demostración del Lema 4.4

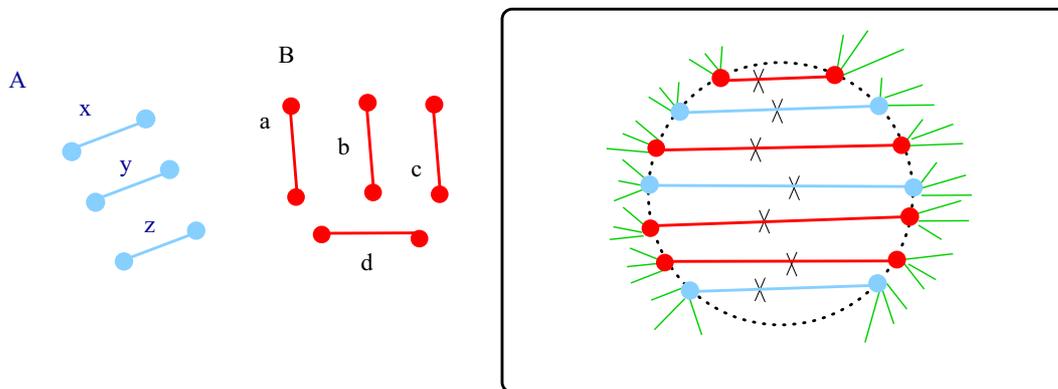


Figura 4.14: Ilustración del Lema 4.5

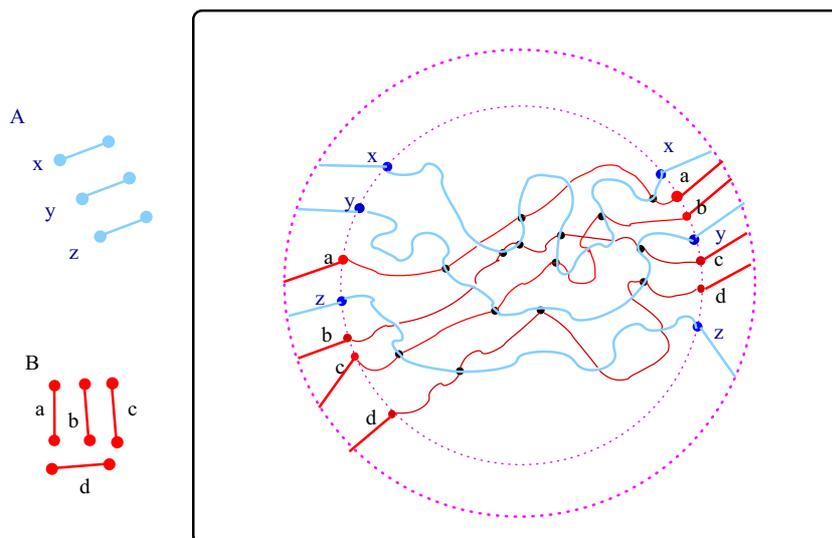


Figura 4.15: Demostración del Lema 4.4

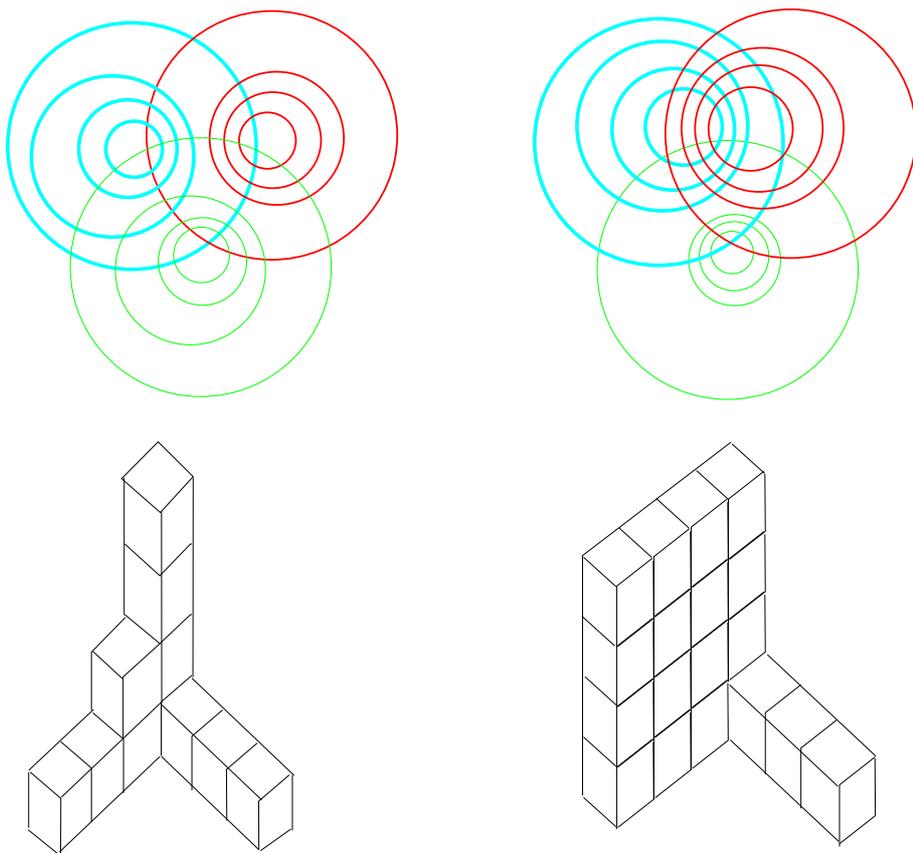


Figura 4.16: Otros vox-sólidos esféricos

Capítulo 5

Vox Sólidos Irreducibles

A continuación, presentamos como generar los vox-sólidos irreducibles básicos, a partir de los cuales crearemos familias infinitas, de igual manera, demostraremos cuál de ellos es el más pequeño de la familia. Al final, daremos ejemplos de vox-sólidos no-inductivos con género mayor que 1.

Definimos $\mathcal{IrB} = \{\mathcal{L}_{16}, \mathcal{Q}_{18}, \mathcal{F}_{20}, \mathcal{V}_{32}\}$ como el conjunto de los vox-sólidos irreducibles básicos, a partir de los cuales construiremos familias infinitas de vox-sólidos irreducibles.

Iniciamos presentando un método para construir vox-sólidos no inductivos a partir de las estructuras kV y kZ^1 , las cuales tienen la propiedad de que, al quitarles un voxel intermedio, el objeto 3-dimensional resultante deja de ser un vox-sólido, ya que dos voxeles quedaran unidos únicamente por una arista. Cabe mencionar que estos vox-sólidos no inductivos son, también, irreducibles. Aprovechamos este hecho para la creación de los vox-sólidos no-inductivos e irreducibles, así como la construcción de sus familias infinitas.

5.1. Vox-sólidos Irreducibles Básicos. Construcción

A continuación, construiremos los Vox-sólidos $\mathcal{V} \in \mathcal{IrB}$ y presentamos un encaje en el toro de su gráfica facial.

Construcción de \mathcal{L}_{16} y su inmersión en el Toro

Para construir \mathcal{L}_{16} requerimos de dos estructuras $2V$, a las que llamaremos W_1 y W_2 ; y dos del tipo $1V$, V_1 y V_2 . Sin pérdida de generalidad, consideremos la nomenclatura de la Figura 5.1, donde, además, se muestra la construcción parcial y completa.

En el caso de la Figura 5.2, podemos ver una enumeración de las caras para el vox-sólido \mathcal{L}_{16} . Consideramos los voxeles cuyas caras superiores, de acuerdo al diagrama, son 45 y 39. Así, el conjunto de caras $\{36, 39, 45, 46, 47, 37, 44, 38\}$ coincide con una curva esencial.

¹Descritas en el Apéndice C.

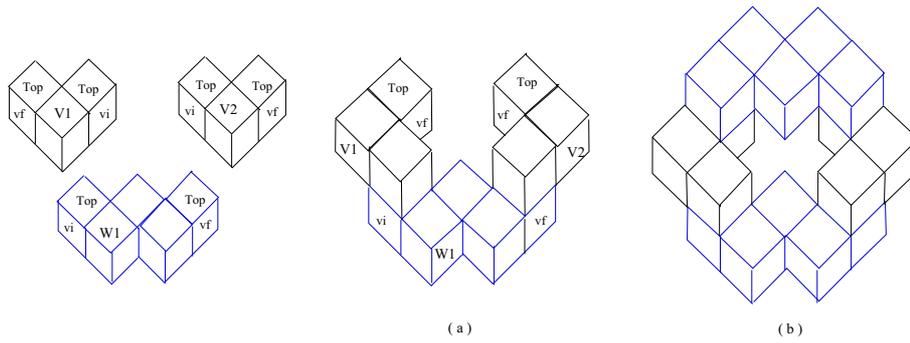


Figura 5.1: Estructuras para la construcción \mathcal{L}_{16}

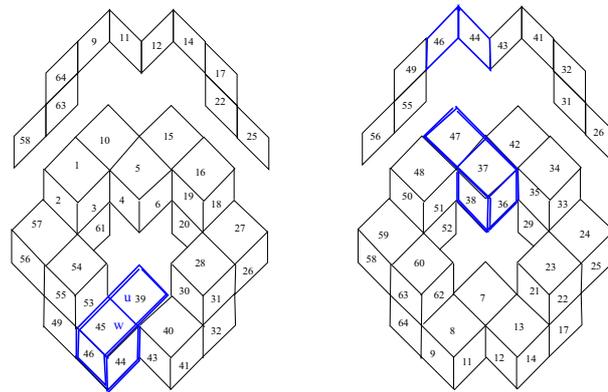


Figura 5.2: Vox Sólido \mathcal{L}_{16}

Las facetas quedan organizadas de la siguiente manera:

Faceta I : $\{36, 35, 29, 20, 19, 6, 4, 3, 61, 52, 51, 38\}$.

Faceta S : $\{45, 39, 40, 30, 28, 27, 18, 16, 15, 5, 10, 1, 2, 57, 54, 53\}$.

Faceta E : $\{46, 44, 43, 41, 32, 31, 26, 25, 22, 17, 14, 12, 11, 9, 64, 63, 58, 56, 55, 49\}$.

Faceta D : $\{47, 37, 42, 34, 33, 24, 23, 21, 13, 7, 8, 52, 60, 59, 50, 48\}$.

La Figura 5.3 muestra un encaje en el toro de la gráfica facial del vox-sólido \mathcal{L}_{16} .

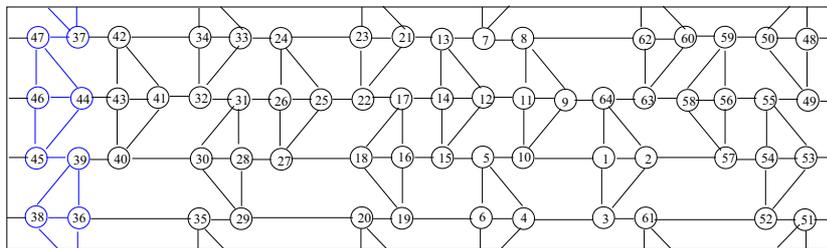


Figura 5.3: Encaje en el toro del vox-sólido \mathcal{L}_{16}

Construcción de \mathcal{F}_{20} y su inmersión en el Toro

Para construir \mathcal{F}_{20} requerimos de cuatro estructuras $2V$: W_1, W_2, W_3 y W_4 . La Figura 5.4(a) muestra la construcción parcial, que surge a partir de la unión de los extremos de W_1 con los voxeles iniciales de W_2 y W_3 . La Figura 5.4(b) muestra la construcción final.

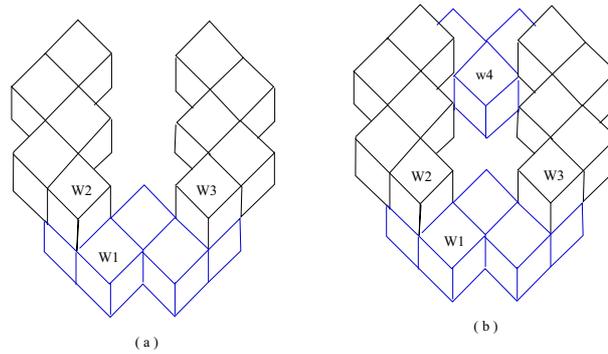


Figura 5.4: Construcción de \mathcal{F}_{20}

La Figura 5.5 presenta una enumeración de las caras para el Vox Sólido \mathcal{F}_{20} .

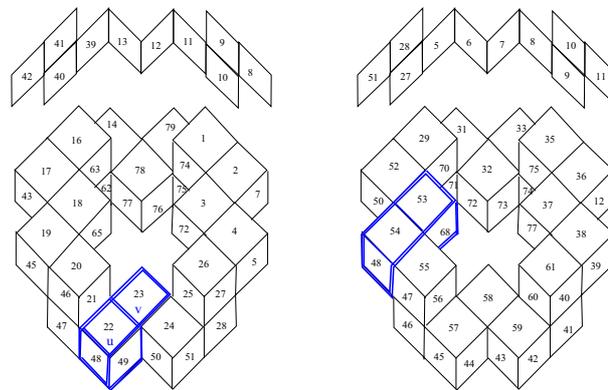


Figura 5.5: Vox-sólido \mathcal{F}_{20}

Para \mathcal{F}_{20} consideremos los voxeles u y v con caras superiores 22 y 23, según la figura. El conjunto de caras para estos voxeles es $\{69, 23, 22, 48, 54, 53, 48, 68\}$, las cuales coinciden con una curva esencial. Así, las facetas quedan organizadas de la siguiente manera:

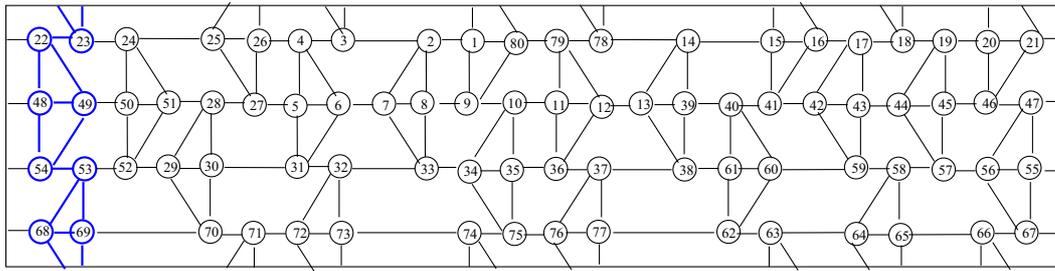
Faceta I : $\{69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68\}$.

Faceta S : $\{22, 23, 24, 25, 26, 4, 3, 2, 1, 80, 79, 78, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$.

Faceta E : $\{48, 49, 50, 51, 28, 27, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47\}$.

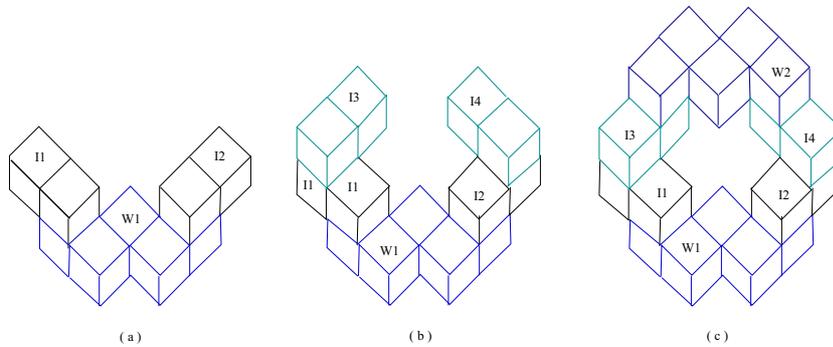
Faceta D : $\{54, 53, 52, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 61, 60, 59, 58, 57, 56, 55\}$.

La Figura 5.6 muestra el encaje en el toro de la gráfica facial del vox-sólido \mathcal{F}_{20} .

Figura 5.6: Encaje en el toro del Vox Sólido \mathcal{F}_{20}

Construcción de \mathcal{Q}_{18} y su inmersión en el Toro

Para construir \mathcal{Q}_{18} requerimos de seis estructuras: dos del tipo $2V$ (W_1, W_2) y cuatro del tipo $0Z$ (I_1, I_2, I_3, I_4). En la Figura 5.7 podemos ver la construcción.

Figura 5.7: Construcción de \mathcal{Q}_{18}

A la izquierda de la Figura 5.8, podemos ver el vox-sólido \mathcal{Q}_{18} y una enumeración de sus caras.

Tomamos los voxes cuyas caras superiores son 42 y 60, el conjunto de caras, sobre la superficie, para esos dos voxes, es: $\{37, 60, 42, 41, 39, 38, 59, 40\}$. Por ende, las facetas quedarán organizadas de la siguiente manera:

Faceta I : $\{41, 40, 29, 28; 27, 26, 25, 24, 23, 22; 21, 20\}$.

Faceta S : $\{60, 42, 43, 44, 45, 69, 46, 47, 48, 4, 3, 2, 1, 64, 63, 66, 62, 61\}$.

Faceta E : $\{37, 59, 58, 57, 54, 53, 52, 70, 71, 51, 50, 49, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 68, 33, 67, 34, 35, 36\}$.

Faceta D : $\{39, 56, 55, 19, 18, 72, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 65, 32, 31, 30, 38\}$.

La Figura 5.8 muestra, también, el encaje en el toro de la gráfica facial de \mathcal{Q}_{18} .

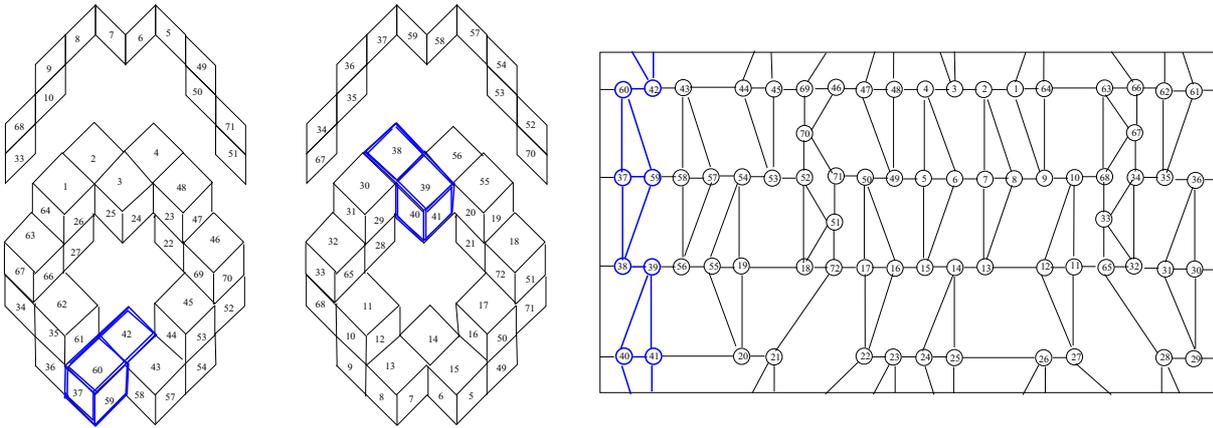


Figura 5.8: Vox Sólido Q_{18}

Construcción de \mathcal{V}_{32} y su inmersión en el Toro

Para construir \mathcal{V}_{32} requerimos de ocho estructuras del tipo $1Z$: Z_1, Z_2, \dots, Z_8 , lo cual podemos ver en la Figura 5.9.

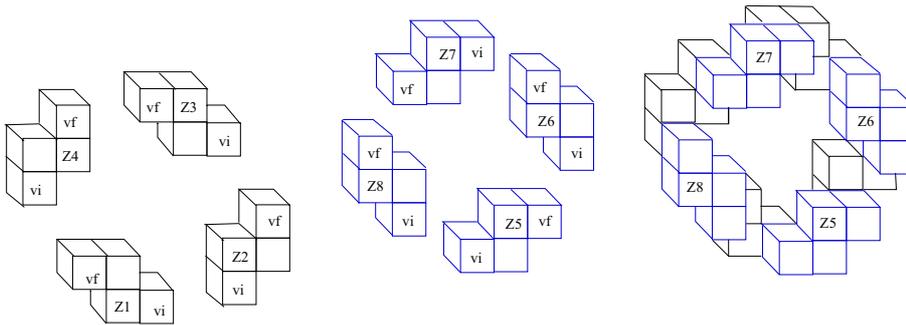


Figura 5.9: Construcción de \mathcal{V}_{32}

La Figura 5.10 muestra una enumeración de las caras para el vox-sólido \mathcal{V}_{32} .

Para \mathcal{V}_{32} consideremos los voxes cuyas caras sobre la superficie son 96 y 95. El conjunto de caras, para tales voxes, es $\{63, 96, 95, 92, 93, 62, 64, 99\}$

Finalmente, las facetas quedan organizadas de la siguiente manera:

Faceta I : $\{63; 60, 59, 51, 50, 49, 48; 45, 44, 36, 35, 34, 33, 30, 29, 21, 20, 19, 18; 68, 67, 66, 65, 64\}$.

Faceta S : $\{95, 96, 97, 103, 104, 105, 106, 107, 112, 113, 114, 120, 121, 122, 123, 124, 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12, 13, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90\}$.

Faceta E : $\{92, 94, 98, 99, 102, 101, 56, 55, 54, 108, 109, 111, 115, 119, 116, 118, 41, 40, 39, 125, 126, 128, 4, 5, 8, 7, 26, 25, 24, 14, 15, 82, 81, 80, 70, 79, 78, 77, 76, 91\}$.

Faceta D : $\{93, 62, 61, 100, 58, 57, 52, 53, 110, 47, 46, 117, 43, 42, 37, 38, 127, 32, 31, 6, 28, 27, 22, 23, 16, 17, 69, 71, 72, 73, 74, 75\}$.

La Figura 5.11 muestra el encaje en el toro de la gráfica facial de \mathcal{V}_{32} .

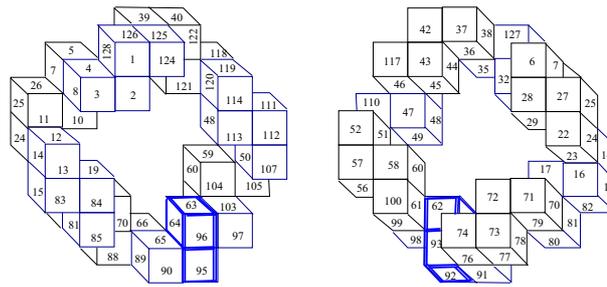


Figura 5.10: Vox Sólido \mathcal{V}_{32}

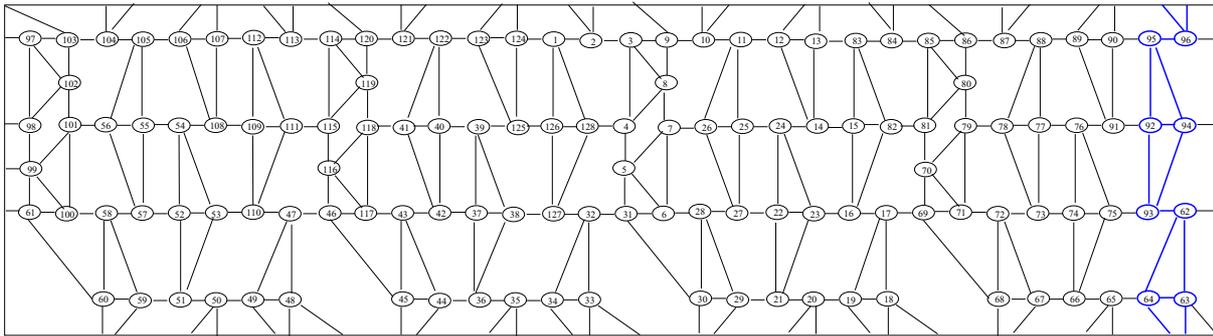


Figura 5.11: Encaje en el toro del Vox Sólido \mathcal{V}_{32}

5.2. Familias de Vox-sólidos Irreducibles

A partir de los vox-sólidos \mathcal{L}_{16} , \mathcal{Q}_{18} , \mathcal{F}_{20} , \mathcal{V}_{32} , construiremos algunas familias infinitas. Asociado a cada vox-sólido irreducible, tenemos una gráfica facial y su inmersión, o encaje, en el toro. Por ende, la construcción de las familias mantendrá la relación entre el objeto 3-dimensional y el encaje en el toro de su gráfica facial.

El método se basa en separar adecuadamente el vox-sólido, inicialmente el básico, para anexar estructuras kV o kZ , tales que al reunir todas las componentes, se obtenga un nuevo elemento de la familia, que también deberá ser un vox-sólido irreducible.

Primero, daremos algunos conceptos sobre cortes y separaciones en vox-sólidos.

Definición 5.1 Un **corte** separa dos voxeles.

Al aplicar un corte sobre dos voxeles ensamblados, u y w , se separan cuatro caras de u y cuatro de w . En la gráfica facial, el corte separa dos conjuntos de vértices. El primero, X_v , asociado con las cuatro caras de v y el segundo, Y_w , asociado a las cuatro caras de w . Denotaremos al corte como $q = \langle X_v, Y_w \rangle$. Como podemos ver, la Figura 5.12 ilustra el corte en dos voxeles ensamblados, la gráfica facial para los dos voxeles y el corte en el encaje.

Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{T}_s$, es decir, un vox-sólido toroidal arista-visible sin voxeles de grado 1, ya sea inductivo o no. Un corte en \mathcal{V} separa dos voxeles, v y w . Aún así, se pueden ver involucrar

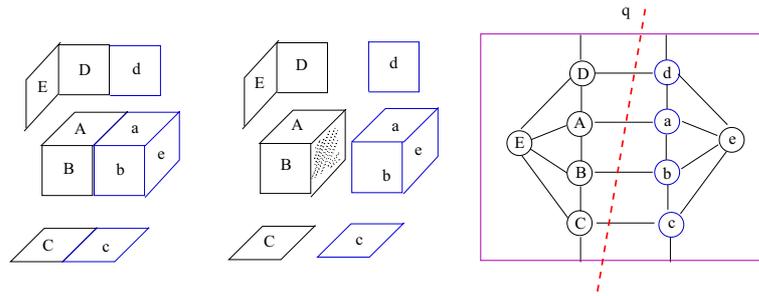


Figura 5.12: Ejemplo de corte en dos voxeles

hasta cuatro voxeles, ya que cada uno tiene dos vecinos. Así, sean v_1 y w_1 los otros vecinos de v y w , respectivamente.

Al realizar el corte, se separan las cuatro caras asociadas con v y v_1 de las cuatro asociadas con w y w_1 . Estos conjuntos de caras los denominaremos X y Y , respectivamente. De esta forma, podemos definir un corte en términos de los conjuntos de caras X y Y , al que denotaremos como $q = \langle X, Y \rangle$.

Para la representación de la gráfica facial, encajada en el toro, el corte sobre la división de vértices puede verse con claridad. Así, podemos ver al corte $q = \langle X, Y \rangle$ como un conjunto de cuatro aristas de la forma (x, y) tal que $x \in X, y \in Y$.

La Figura 5.13 ilustra cuatro cortes sobre el vox-sólido $V_f \in \mathcal{T}_s$. Identificamos algunos voxeles de V_f por su conjunto de caras en la superficie, para ejemplificar los cortes tanto en el objeto 3-dimensional como en el encaje en el toro de su gráfica facial.

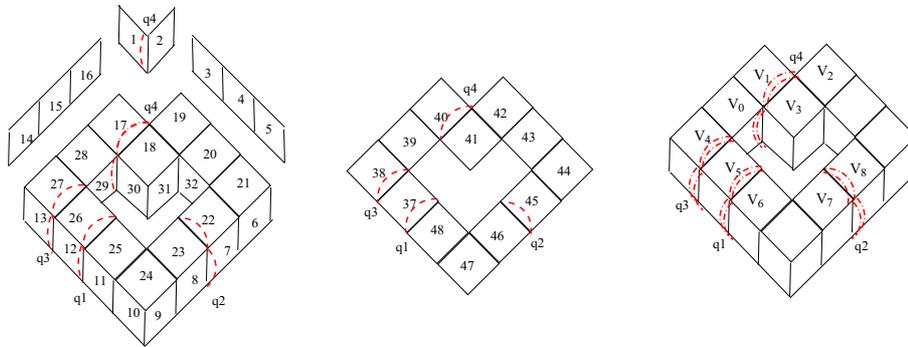


Figura 5.13: Ejemplo de cortes sobre un vox-sólido toroidal simple

Los voxeles involucrados en los cortes son $v_0, v_1, v_2, \dots, v_8$; ahora, los asociamos a su conjunto respectivo de caras en la superficie: cuales están definidos como:

$$\begin{aligned}
 v_0 &= \{29, 28, 15, 39\}; & v_1 &= \{1, 16, 17, 40\}; & v_2 &= \{2, 3, 19, 42\}; \\
 v_3 &= \{18, 30, 31, 41\}; & v_4 &= \{13, 14, 27, 38\}; & v_5 &= \{12, 26, 36, 37\}; \\
 v_6 &= \{35, 25, 11, 48\}; & v_7 &= \{34, 23, 8, 46\}; & v_8 &= \{33, 22, 7, 45\};
 \end{aligned}$$

El corte q_1 sólo afecta a v_5 y v_6 ; q_2 sólo involucra a v_7 y v_8 ; q_3 involucra a v_4, v_5 y v_0 ; q_4 involucra a v_0, v_1, v_2 y v_3 . La Figura 5.14 ilustra los cuatro cortes de V_f sobre el encaje en el toro de la gráfica facial.

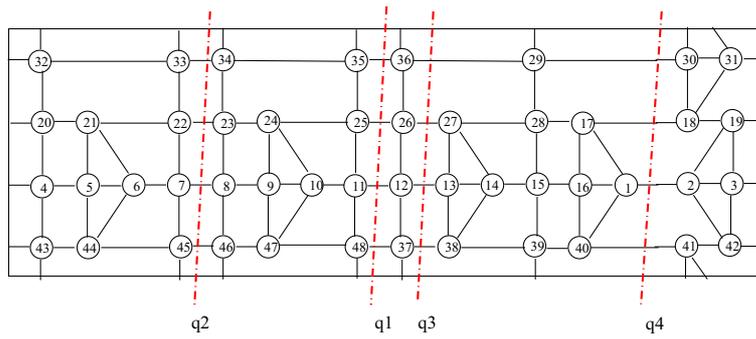


Figura 5.14: Ejemplo de cortes sobre el encaje en el toro de V_f

Al realizar dos cortes sobre un vox-sólido toroidal simple, estamos dividiendo al vox-sólido en dos partes; cada una de éstas es un vox-sólido. Como podemos ver en el ejemplo, cualquier pareja de los cortes definidos para V_f lo divide.

Puesto que es de nuestro interés hacer crecer a los vox-sólidos, específicamente a los irreducibles, buscamos una definición del separación, que consiste de dos cortes:

Definición 5.2 Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{T}_s$. Una **separación** de \mathcal{V} consiste de dos cortes, digamos c y q . A la separación la denotaremos como $S = \langle c, q \rangle$.

Llamaremos **anexos** a las estructuras kV o kZ que serán añadidas al vox-sólido.

En el ejemplo anterior, $S_o = \langle q_1, q_3 \rangle$ no representa una separación, mientras que $S_1 = \langle q_1, q_2 \rangle$ y $S_2 = \langle q_3, q_4 \rangle$ sí.

Definición 5.3 Una **separación** sobre un vox-sólido irreducible es **válida** si permite anexar dos estructuras del tipo kV o kZ , en la que se realizó cada corte, para generar un nuevo vox-sólido irreducible. A esta separación válida la denotaremos como $\mathcal{S} = \langle c, q \rangle$.

La Figura 5.15 presenta una separación válida para el vox-sólido irreducible \mathcal{L}_{16} , los anexos -dos estructuras $0Z$ - y el vox-sólido irreducible obtenido.

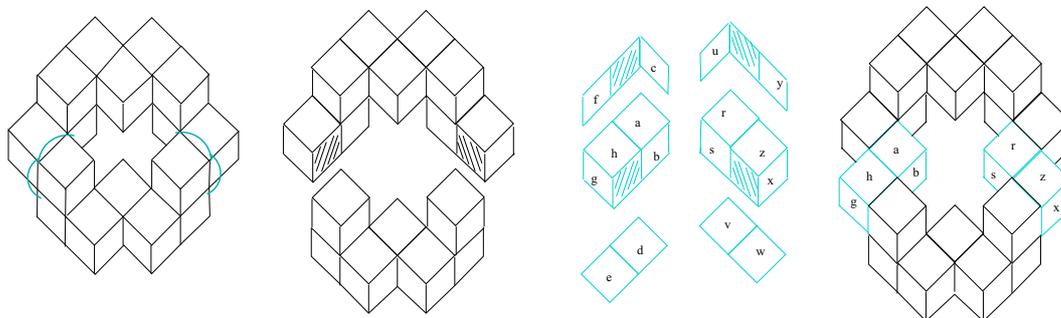


Figura 5.15: Separación válida para \mathcal{L}_{16}

Ahora debemos construir las gráficas faciales asociadas a las estructuras kV o kZ , que serán anexadas al vox-sólido, para también agregarlas al encaje en el toro de su gráfica facial.

Por ejemplo, la Figura 5.16 muestra una separación válida para el \mathcal{L}_{16} , uno de los anexos y su gráfica asociada.

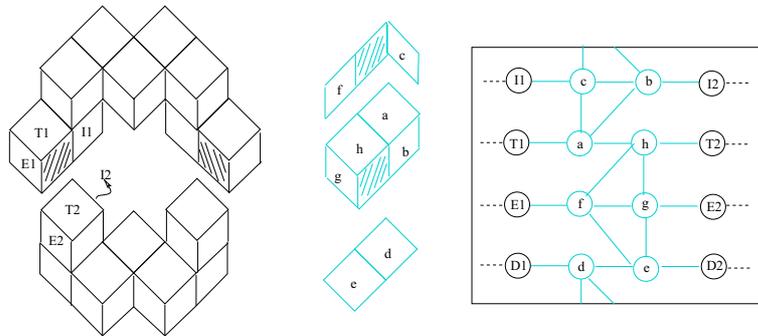


Figura 5.16: Separación válida para \mathcal{L}_{16} y un anexo

Consideramos el encaje en el toro construido en la Sub-sección 5.1 para la gráfica facial de \mathcal{L}_{16} , presentado en la Figura 5.3. Ahora, la Figura 5.17(A) muestra los cortes que forman la separación válida para \mathcal{L}_{16} sobre el encaje. La Figura 5.17(B) muestra el encaje en el toro de la gráfica facial del vox-sólido irreducible resultante: \mathcal{L}_{20} .

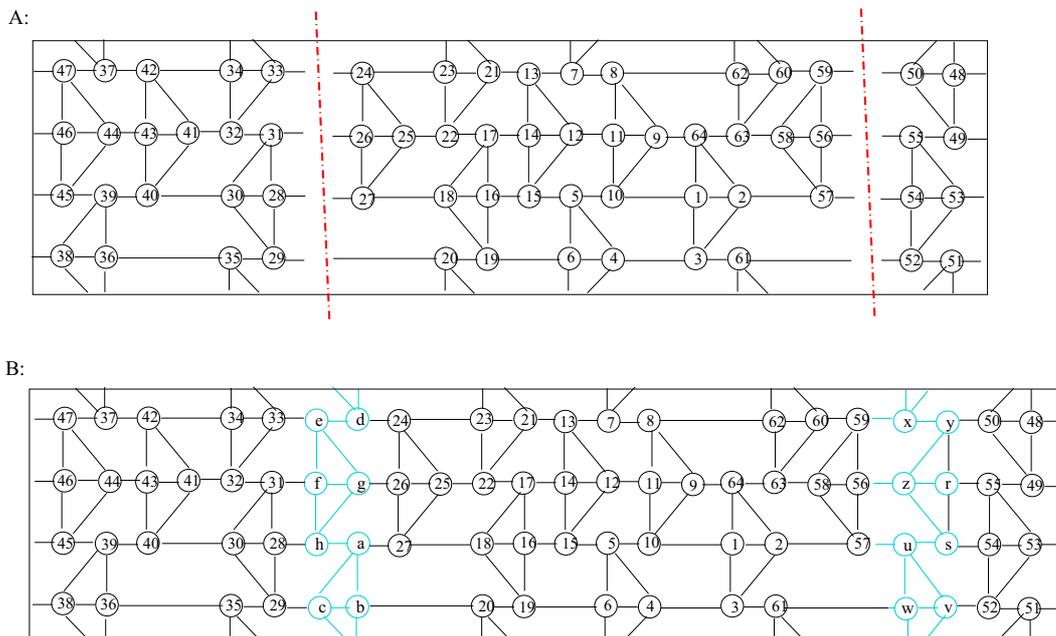


Figura 5.17: Una separación en el encaje \mathcal{L}_{16} y el encaje resultante de \mathcal{L}_{20}

A continuación generamos las familias de vox-sólidos irreducibles por medio de las operaciones definidas al construir los vox-sólidos y las separaciones válidas especificadas.

Familia $\mathcal{L}[i, j]$

En esta sección construiremos, a partir de \mathcal{L}_{16} , familias infinitas de vox-sólidos irreducibles. Al considerar \mathcal{L}_{16} , podemos hacer *crecer*, en paralelo, las estructuras del segundo piso, o bien, las estructuras del primer y tercer piso en paralelo. De igual manera, podríamos hacer variar todas a la vez.

En el primer caso, tendríamos generados los siguientes vox-sólidos:

- \mathcal{L}_{20} con una $2V$ en el primer piso, dos $2V$ en el segundo y una $2V$ en el tercero;
- \mathcal{L}_{24} con una $2V$ en el primer piso, dos $3V$ en el segundo y una $2V$ en el tercero;
- \mathcal{L}_{28} con una $2V$ en el primer piso, dos $4V$ en el segundo y una $2V$ en el tercero.

En general, \mathcal{L}_m tiene una $2V$ en el primer piso, dos jV en el segundo y una $2V$ en el tercero. Además, se tiene que el número de voxes es: $m = 2(5) + 2(2j + 1)$, $j \geq 2$.

En el segundo caso, tendríamos generados los siguientes vox-sólidos:

- $\mathcal{L}_{20}B$ con una $3V$ en el primer piso, dos $1V$ en el segundo y una $3V$ en el tercero;
- $\mathcal{L}_{24}B$ con una $4V$ en el primer piso, dos $1V$ en el segundo y una $4V$ en el tercero;
- $\mathcal{L}_{28}B$ con una $5V$ en el primer piso, dos $1V$ en el segundo y una $5V$ en el tercero.

En general, \mathcal{L}_mB tiene una iV en el primer piso, dos $1V$ en el segundo y una iV en el tercero; además, se tiene que el número de voxes es: $m = 2(3) + 2(2i + 1)$, $i \geq 3$.

Existe la posibilidad de dejar fijo a $3V$ y variar las estructuras del segundo piso para obtener, en general, \mathcal{L}_mC con una $3V$ en el primer piso, dos jV en el segundo y una $3V$ en el tercero. Además, el número de voxes es: $m = 2(7) + 2(2i + 1)$, $j \geq 2$.

En términos generales podemos realizar lo expuesto anteriormente en cualquier nivel o piso, por lo cual, ahora tenemos constituida una familia de vox-sólidos de tres pisos, que denominaremos $\mathcal{L}[i, j]$. Cada $\mathcal{L}[i, j]$ tiene una iV en el segundo y tercer piso, y dos jV en el primero, con $i \geq 2$ y $j \geq 1$.

Con esta notación tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{16} &= \mathcal{L}[2, 1]; & \mathcal{L}_{20} &= \mathcal{L}[2, 2]; & \mathcal{L}_{24} &= \mathcal{L}[2, 3]; & \mathcal{L}_{28} &= \mathcal{L}[2, 4]. \\ \mathcal{L}_{20}B &= \mathcal{L}[3, 1]; & \mathcal{L}_{24}B &= \mathcal{L}[4, 1]; & \mathcal{L}_{28}B &= \mathcal{L}[5, 1]. \\ \mathcal{L}_{24}C &= \mathcal{L}[3, 2]; & \mathcal{L}_{28}C &= \mathcal{L}[3, 3]. \end{aligned}$$

A partir de aquí, denotaremos a cualquier miembro de esta familia por sus referencias $\mathcal{L}[i, j]$ respectivas, excepto en el caso de \mathcal{L}_{16} , al cual también podremos llamar $\mathcal{L}[2, 1]$.

La Figura 5.18 ilustra los vox-sólidos de tamaño veinte de esta familia: $\mathcal{L}_{20} = \mathcal{L}[2, 2]$ y $\mathcal{L}_{20}B = \mathcal{L}[3, 1]$.

Ahora construiremos, a partir de $\mathcal{L}_{16} = \mathcal{L}[2, 1]$, los elementos de la familia $\mathcal{L}[i, j]$ mediante separaciones y asociándolos, inmediatamente, a su encaje en el toro. Primero, lo haremos sobre $\mathcal{L}[2, j]$, $j \geq 1$ y posteriormente para $\mathcal{L}[i, 1]$, $i \geq 2$. Finalmente, combinando ambos resultados, podremos construir cualquier elemento $\mathcal{L}[i, j]$, $i \geq 2, j \geq 1$.

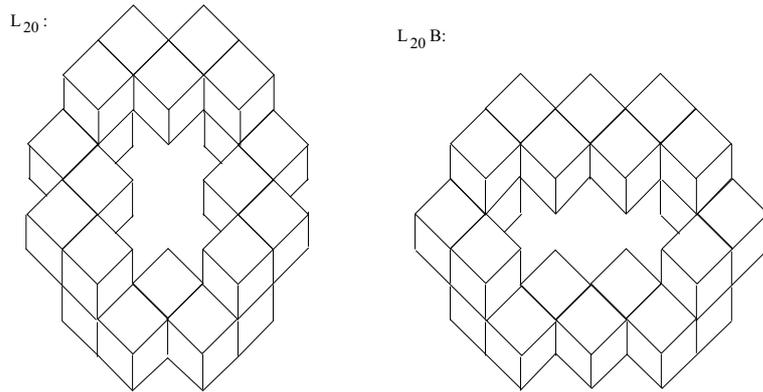


Figura 5.18: Dos elementos con 20 voxeles de la familia $\mathcal{L}[i, j]$

Lema 5.1 Siempre existe una separación válida para cada vox-sólido irreducible $\mathcal{L}[2, j]$, $j \geq 1$, y, por ende, siempre es posible construir $\mathcal{L}[2, j + 1]$ a partir de $\mathcal{L}[2, j]$, $j \geq 1$.

Demostración. Inducción sobre j .

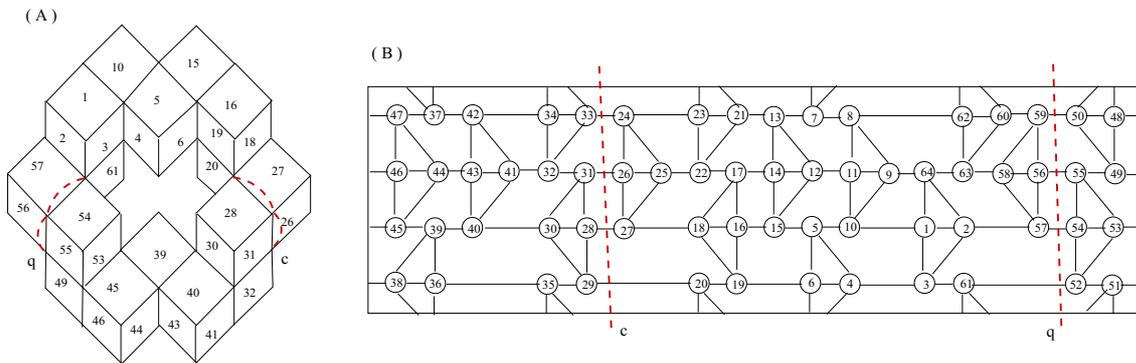


Figura 5.19: Vox Sólido \mathcal{L}_{16} y su encaje en el toro

Para $j = 1$. Sin pérdida de generalidad, consideremos la enumeración dada sobre las caras del vox-sólido $\mathcal{L}_{16} = \mathcal{L}[2, 1]$, presentado en la Figura 5.19(A). En (B) se presenta el encaje en el toro de su gráfica facial, además, se ilustran los cortes, tanto en el objeto 3-dimensional como en el encaje.

Para generar $\mathcal{L}[2, 2] = \mathcal{L}_{20}$ requerimos una separación válida. En este caso, tenemos dos formas de hacer el corte del lado izquierdo y dos del derecho. Sin pérdida de generalidad, tomamos únicamente una.

Sea c_o el corte formado por los conjuntos de caras: $X_o = \{28, 29, 31, 33\}$, $Y_o = \{20, 24, 26, 27\}$; $c_o = \langle X_o, Y_o \rangle$. El corte q_o está formado por: $A_o = \{56, 57, 59, 61\}$, $Z_o = \{50, 52, 54, 55\}$; $q_o = \langle A_o, Z_o \rangle$. Así, la separación válida queda determinada por $\mathcal{S}_o = \langle c_o, q_o \rangle$.

Realizamos la separación correspondiente en el encaje, enumeramos los anexos y construimos sus gráficas de adyacencias de caras, como lo muestra la Figura 5.20.

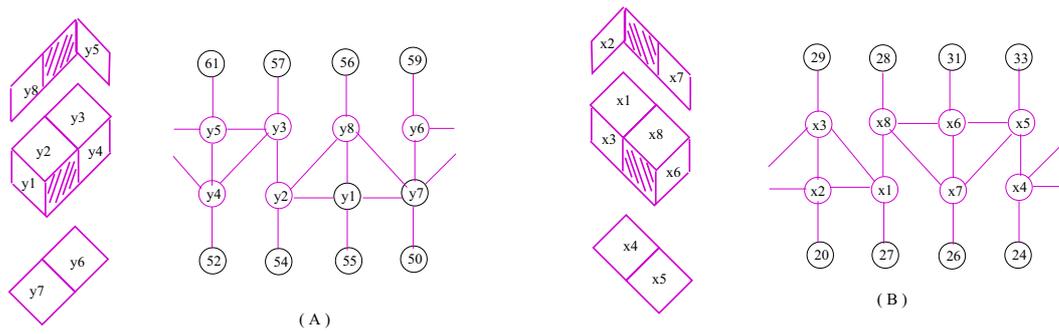


Figura 5.20: Anexos y sus gráficas faciales

Ahora agregamos los correspondientes anexos sobre la separación, tanto en el objeto 3-dimensional como el encaje en el toro. La Figura 5.21 muestra los objetos obtenidos. Se verifica visualmente, que el vox-sólido obtenido es, en efecto, $\mathcal{L}[2, 2] = \mathcal{L}_{20}$.

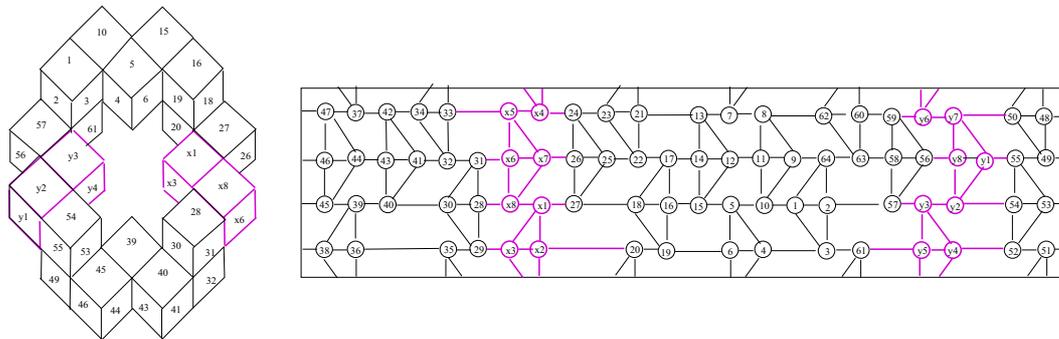


Figura 5.21: Resultados de aplicar la separación y agregar los anexos

Revisemos cómo podemos separar válidamente a $\mathcal{L}[2, 2]$ para crear al siguiente elemento de la familia. Es posible realizar cuatro cortes de cada lado.

Por la izquierda tenemos:

$$\begin{aligned}
 c_1 = \langle X_1, Y_1 \rangle : & X_1 = \{x_2, x_1, x_7, x_4\}; & Y_1 = \{20, 27, 26, 24\} = Y_o. \\
 c_2 = \langle X_2, Y_2 \rangle : & X_2 = \{28, 29, 31, 33\} = X_o; & Y_2 = \{x_8, x_3, x_6, x_5\}. \\
 c_3 = \langle X_3, Y_3 \rangle : & X_3 = \{29, x_8, x_7, x_5\}; & Y_3 = \{x_3, x_1, 26, x_4\}. \\
 c_4 = \langle X_4, Y_4 \rangle : & X_4 = \{x_2, 27, 25, 24\}; & Y_4 = \{20, 18, 22, 23\}.
 \end{aligned}$$

Por la derecha:

$$\begin{aligned}
 q_1 = \langle A_1, Z_1 \rangle : & A_1 = \{56, 57, 61, 59\} = A_o; & Z_1 = \{y_8, y_3, y_5, y_6\}. \\
 q_2 = \langle A_2, Z_2 \rangle : & A_2 = \{y_7, y_1, y_2, y_4\}; & Z_2 = \{50, 55, 54, 52\} = Z_o. \\
 q_3 = \langle A_3, Z_3 \rangle : & A_3 = \{y_6, 56, y_3, y_4\}; & Z_3 = \{y_7, y_8, y_2, 52\}. \\
 q_4 = \langle A_4, Z_4 \rangle : & A_4 = \{61, 2, 63, 60\}; & Z_4 = \{y_5, 57, 58, 59\}.
 \end{aligned}$$

La Figura 5.22 muestra los cortes $c_i, q_j, 1 \leq i, j \leq 3$, tanto en el objeto 3-dimensional como en el encaje en el toro de la gráfica facial del vox-sólido $\mathcal{L}[2, 3]$.

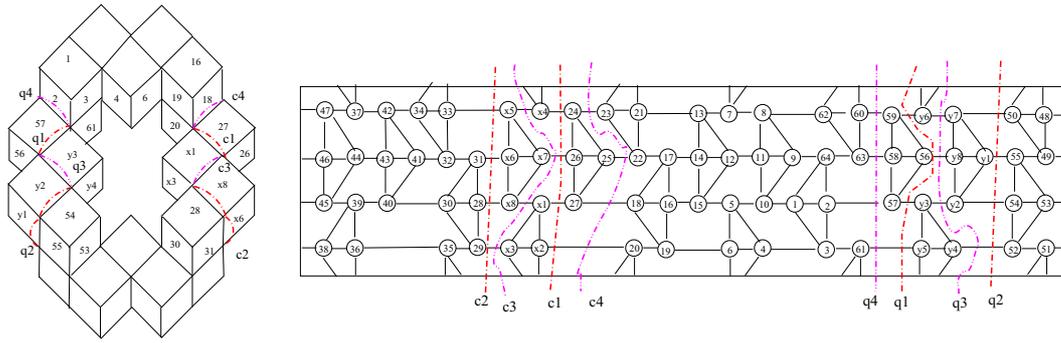


Figura 5.22: Ilustración de los cortes para $\mathcal{L}[2, 3]$

Al aplicar cualquiera de cortes y anexar, convenientemente, una estructura $0Z$ tiene una estructura $3V$. Por lo cual, cualquier separación $\mathcal{S} = \langle c_i, q_j \rangle$, $1 \leq i, j \leq 3$ resulta ser válida.

La Figura 5.23 muestra la aplicación de los cortes y los anexos convenientes.

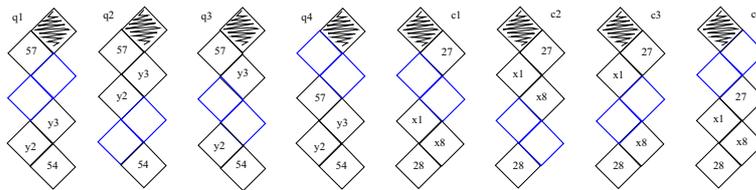


Figura 5.23: Aplicación de los cortes para $\mathcal{L}[2, 3]$

Para simplificar la construcción de esta familia, sin pérdida de generalidad, tomaremos la separación $\mathcal{S}_1 = \langle c_1, q_1 \rangle$, dejando fijas las particiones Y_o y A_o .

De esta forma, queda reestablecida la separación válida $\mathcal{S}_0 = \langle c_{j0}, q_{j0} \rangle$ con

$$c_{j0} = \langle X_j, Y_o \rangle = \{(a, 20), (b, 27), (c, 26), (d, 24)\}$$

$$q_{j0} = \langle A_o, Z_j \rangle = \{(56, e), (57, f), (61, g), (59, h)\}$$

Suponemos siempre existe una separación válida para $\mathcal{L}[2, j]$, por demostrar que existe para $\mathcal{L}[2, j + 1]$, $j \geq 1$.

Sea $\mathcal{S}_0 = \langle c_j, q_j \rangle$ la separación válida dada por la inducción para $\mathcal{L}[2, j]$. Tenemos,

$$c_j = \langle X_j, Y_o \rangle = \{(a, 20), (b, 27), (c, 26), (d, 24)\};$$

$$q_j = \langle A_o, Z_j \rangle = \{(56, e), (57, f), (61, g), (59, h)\}.$$

Los anexos son mostrados en la Figura 5.24. Al agregarlos, tanto en el objeto 3-dimensional como en el encaje en el toro de la gráfica facial, resulta claro que se obtiene un nuevo vox-sólido irreducible: $\mathcal{L}[2, j + 1]$, ya que de cada lado, izquierdo y derecho, del objeto queda una estructura $(j + 1)V$.

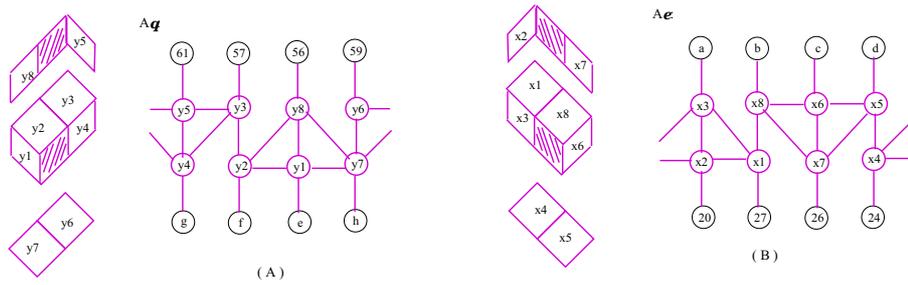


Figura 5.24: Anexos y sus gráficas faciales

En la Figura 5.25 se presenta el encaje en el toro de la gráfica facial para el vox-sólido $\mathcal{L}[2, j + 1]$, después de agregar los anexos.

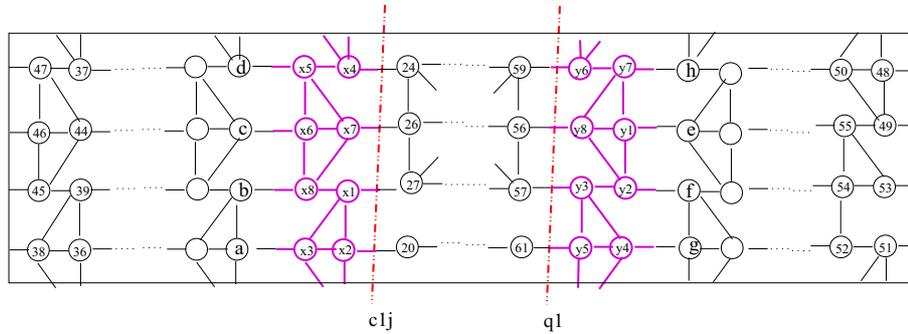


Figura 5.25: Encaje en el toro para $\mathcal{L}[2, j + 1]$

Ahora bien, redefinamos los puntos en los cortes. Sean :

$$d = x_4, c = x_7, b = x_1, a = x_2; h = y_6, e = y_8, f = y_3, g = y_5.$$

Reestablecemos la separación para $\mathcal{L}[2, j + 1]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \langle c_{j+1}, q_{j+1} \rangle; \\ c_{j+1} &= \langle X_{j+1}, Y_o \rangle = \{(a, 20), (b, 27), (c, 26), (d, 24)\}; \\ q_{j+1} &= \langle A_o, Z_{j+1} \rangle = \{(56, e), (57, f), (61, g), (59, h)\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el lema se satisface.

De igual manera, podemos construir $\mathcal{L}[2, 3]$ a partir de $\mathcal{L}_{16} = \mathcal{L}[2, 1]$. Sobre la separación válida $\mathcal{S}_o = \langle c_o, q_o \rangle$, definida anteriormente, anexamos una estructura $1Z$. Para construir $\mathcal{L}[2, 4]$, agregamos una $2Z$. Así, para generar $\mathcal{L}[2, j]$ a partir de $\mathcal{L}_{16} = \mathcal{L}[2, 1]$, anexamos una estructura $(j - 2)Z$, $j \geq 2$, sobre la separación válida \mathcal{S}_o .

Si partimos de una $\mathcal{L}[2, 2]$ para generar una $\mathcal{L}[2, j]$ en vez de $\mathcal{L}[2, 1]$, anexamos, una estructura $(j - 3)Z$, $j \geq 3$, sobre la separación válida \mathcal{S}_1 .

En general, para construir una $\mathcal{L}[2, j]$ a partir de $\mathcal{L}[2, i]$, es necesario agregar una estructura $(j - (i + 1))Z$, $i \geq 1, j \geq i + 1$, sobre la separación válida \mathcal{S}_1 .

Lema 5.2 Siempre existe una separación válida para cada vox-sólido irreducible $\mathcal{L}[i, 1]$, $i \geq 2$, y, por tanto, siempre es posible construir $\mathcal{L}[i + 1, 1]$ a partir de $\mathcal{L}[i, 1]$, $i \geq 2$.

Demostración. Inducción sobre i .

Para $i = 1$. Consideremos, sin pérdida de generalidad, la notación del vox-sólido irreducible \mathcal{L}_{16} , presentada en la Figura 5.19(A). A partir de $\mathcal{L}_{16} = \mathcal{L}[2, 1]$, construiremos $\mathcal{L}_{20}B = \mathcal{L}[3, 1]$. En el tercer piso de \mathcal{L}_{16} , podemos realizar, al menos, cuatro cortes, de manera similar en el primero.

Para el tercer piso tenemos

$$\begin{aligned} r_1 = \langle X_1, Y_1 \rangle : X_1 &= \{21, 17, 16, 19\}; & Y_1 &= \{13, 14, 15, 6\}. \\ r_2 = \langle X_2, Y_2 \rangle : X_2 &= \{15, 19, 12, 7\}; & Y_2 &= \{5, 6, 11, 13\} \\ r_3 = \langle X_3, Y_3 \rangle : X_3 &= \{5, 4, 11, 7\}; & Y_3 &= \{10, 13, 12, 8\} \\ r_4 = \langle X_4, Y_4 \rangle : X_4 &= \{1, 4, 9, 8\}; & Y_4 &= \{10, 3, 64, 62\} \end{aligned}$$

Para el primer piso tenemos:

$$\begin{aligned} t_1 = \langle A_1, Z_1 \rangle : A_1 &= \{53, 49, 48, 51\} = A_o; & Z_1 &= \{45, 46, 47, 38\} \\ t_2 = \langle A_2, Z_2 \rangle : A_2 &= \{39, 44, 47, 51\}; & Z_2 &= \{45, 43, 37, 38\} \\ t_3 = \langle A_3, Z_3 \rangle : A_3 &= \{37, 44, 39, 36\}; & Z_3 &= \{42, 43, 40, 35\} \\ t_4 = \langle A_4, Z_4 \rangle : A_4 &= \{40, 41, 42, 36\}; & Z_4 &= \{30, 32, 34, 35\}. \end{aligned}$$

La Figura 5.26 muestra los cortes, tanto en el objeto 3-dimensional como en el encaje en el toro de la gráfica facial para $\mathcal{L}[i, 1]$.

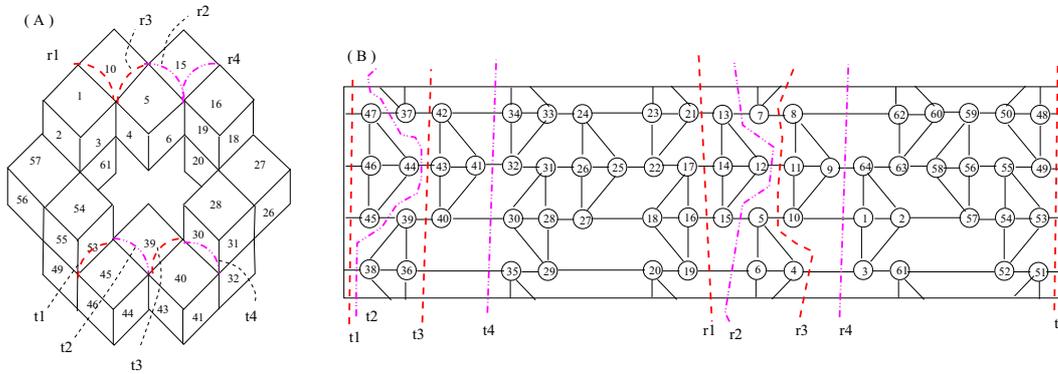


Figura 5.26: Ilustración de los cortes para $\mathcal{L}[i, 1]$

Sin pérdida de generalidad, para esta construcción usaremos la separación válida $\mathcal{S}_1 = \langle r_1, t_1 \rangle$. En específico:

$$\begin{aligned} r_1 = \langle X_1, Y_1 \rangle : X_1 &= \{21, 17, 16, 19\}; & Y_1 &= \{13, 14, 15, 6\}. \\ t_1 = \langle A_1, Z_1 \rangle : A_1 &= \{53, 49, 48, 51\} = A_o; & Z_1 &= \{45, 46, 47, 38\} \end{aligned}$$

A continuación, agregamos las estructuras 0Z en los cortes, tanto en el objeto 3-dimensional como en el encaje en el toro.

La separación, los anexos y el objeto resultante, pueden verse en la Figura 5.27.

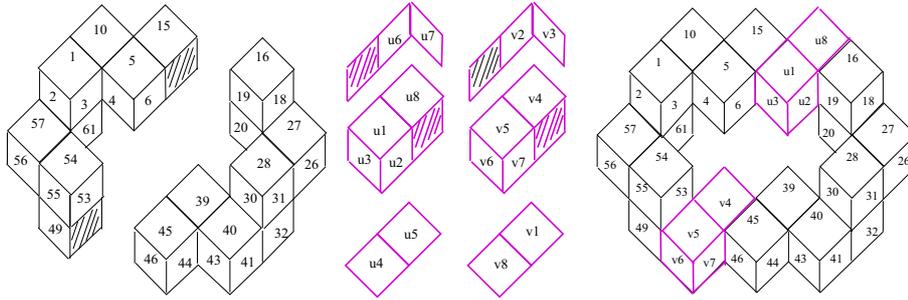


Figura 5.27: Construcción de $\mathcal{L}_{20}B$ desde \mathcal{L}_{16}

En la Figura 5.28 se presentan los anexos y sus gráficas faciales respectivas, que, posteriormente, serán agregadas al encaje.

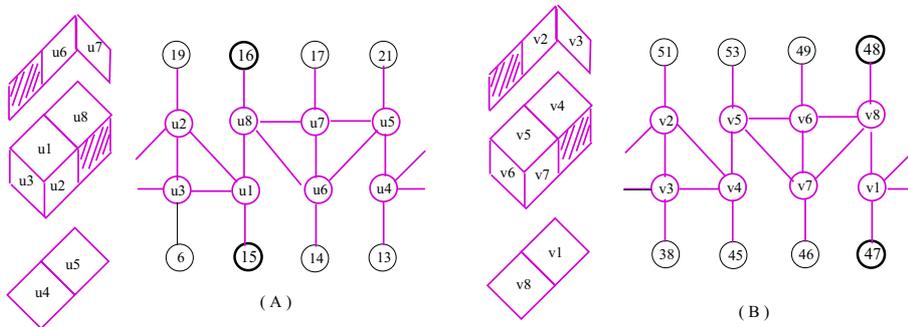


Figura 5.28: Anexos para construir $\mathcal{L}_{20}B$

En la Figura 5.29, se muestra el encaje en el toro de la gráfica facial para $\mathcal{L}_{20}B$.

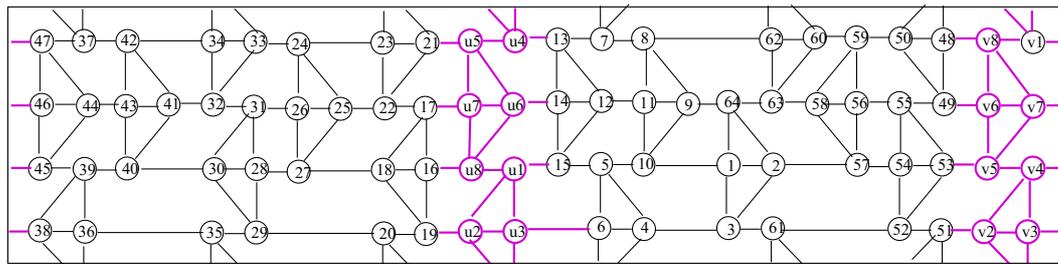


Figura 5.29: $\mathcal{L}_{20}B$ encajado en el Toro

Aunque podemos hacer varios cortes sobre el nuevo vox-sólido irreducible, nos quedaremos con la separación válida $\mathcal{S}_{1i} = \langle r_i, t_i \rangle$, que simplemente llamaremos \mathcal{S}_1 , donde,

$$r_i = \langle X_i, Y_i \rangle : X_i = \{21, 17, 16, 19\} = X_1; \quad Y_i = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}.$$

Además, existen las aristas: $(21, y_1), (17, y_2), (16, y_3), (19, y_4)$.

$t_i = \langle A_i, Z_i \rangle : A_i = \{53, 49, 48, 51\} = A_o; Z_i = \{z_1, z_2, z_3, z_4\};$
 Existen las aristas: $(53, z_1), (49, z_2), (48, z_3), (51, z_4).$

Suponemos que el lema vale para $i, i \geq 2$, por demostrar que se cumple para $i + 1$.

Sea $\mathcal{S}_1 = \langle r_i, t_i \rangle$ la separación válida dada por la inducción para $\mathcal{L}[i, 1]$, con:

$r_i = \langle X_i, Y_i \rangle : X_i = \{21, 17, 16, 19\} = X_1; Y_i = \{y_1, y_2, y_3, y_4\};$
 $t_i = \langle A_i, Z_i \rangle : A_i = \{53, 49, 48, 51\} = A_0; Z_i = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}.$

Además, existen las aristas:

$(53, z_1), (49, z_2), (48, z_3), (51, z_4); (21, y_1), (17, y_2), (16, y_3), (19, y_4).$

Los anexos son mostrados en la Figura 5.30; al agragarlos tanto al objeto 3-dimensional como al encaje se obtiene el vox-sólido irreducible $\mathcal{L}[i + 1, 1]$, ya que en el primer y tercer renglon se tiene una estructura $(i + 1)V$.

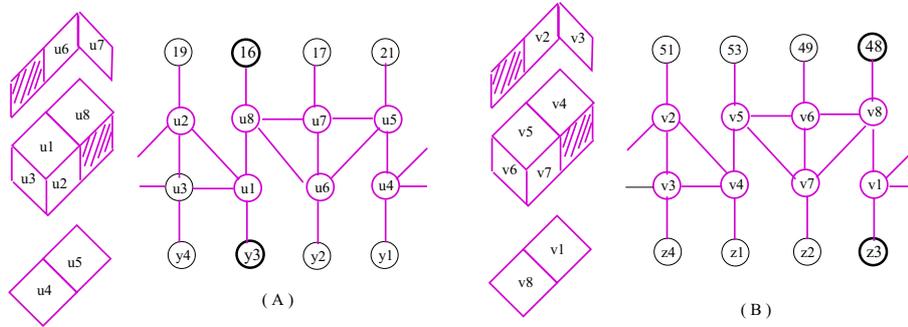


Figura 5.30: Anexos para construir $\mathcal{L}[i + 1, 1]$

Ahora bien, debemos reestablecer la separación para $\mathcal{L}[i + 1, 1]$.

Sean $y_1 = u_5, y_2 = u_7, y_3 = u_8, y_4 = u_2; z_3 = v_8, z_2 = v_6, z_1 = v_5, z_4 = v_2.$

Tenemos que, $\mathcal{S}_1 = \langle r_i, t_i \rangle$. con:

$r_{i+1} = \langle X_{i+1}, Y_{i+1} \rangle : X_{i+1} = \{21, 17, 16, 19\} = X_1; Y_{i+1} = \{y_1, y_2, y_3, y_4\};$
 $t_{i+1} = \langle A_{i+1}, Z_{i+1} \rangle : A_{i+1} = \{53, 49, 48, 51\} = A_0; Z_{i+1} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}.$
 Existen $(53, z_1), (49, z_2), (48, z_3), (51, z_4); (21, y_1), (17, y_2), (16, y_3), (19, y_4).$

Podemos concluir que el lema se cumple.

De igual manera, podemos construir $\mathcal{L}_{24}B = \mathcal{L}[4, 1]$ a partir de $\mathcal{L}[2, 1]$ anexando estructuras $1Z$ sobre la separación válida \mathcal{S}_1 . En general, es posible construir $\mathcal{L}[\ell, 1]$ a partir de $\mathcal{L}[2, 1]$ agregando estructuras $(\ell - 3)Z, \ell \geq 3$, sobre la separación \mathcal{S}_1 .

Más aún, tenemos que, para generar el vox-sólido $\mathcal{L}[\ell, 1]$, a partir de $\mathcal{L}[m, 1]$ es necesario agregar estructuras $(\ell - (m + 1))Z, \ell \geq m + 1$, sobre la separación válida \mathcal{S}_1 .

Ahora bien, podemos mezclar las dos familias $\mathcal{L}[2, j]$ y $\mathcal{L}[i, 1]$ para construir el vox-sólido irreducible $\mathcal{L}[\ell, \mu]$. Dado que las separaciones válidas \mathcal{S}_o y \mathcal{S}_1 no se intersectan,

podemos dejar fijo el valor de j en $\mathcal{L}[2, j]$, hacer crecer a $\mathcal{L}[i, 1]$ para obtener $\mathcal{L}[\ell, 1]$ y después, dejando fijo ℓ , hacemos crecer $\mathcal{L}[\ell, 1]$ para obtener $\mathcal{L}[\ell, \mu]$.

Pongamos un ejemplo. Para generar el vox-sólido irreducible $\mathcal{L}[7, 5]$ a partir de $\mathcal{L}[2, 1]$, observamos que $\mathcal{L}[7, 5]$ tiene, en el primer y tercer piso, una $7V$ y en el segundo dos $5V$. En primer lugar, construimos $\mathcal{L}[2, 5]$ anexando, sobre la separación \mathcal{S}_o , una estructura $3Z$, lo cual genera estructuras $5V$ en el segundo piso.

Después, dejando fijo $j = 5$, anexamos una estructura $4Z$ sobre la separación \mathcal{S}_1 , con lo que se crea una estructura $7V$ en el primer y tercer piso.

A partir de los dos lemas anteriores, podemos concluir el siguiente resultado,

Teorema 5.1

Siempre es posible construir el vox-sólido $\mathcal{L}[i, j], i \geq 2, j \geq 1$, a partir de $\mathcal{L}[2, 1]$.

Familia $\mathcal{Q}[m]$

El primer elemento de la Familia $\mathcal{Q}[m]$ es $\mathcal{Q}_{18} = \mathcal{Q}[18]$. Sin pérdida de generalidad, considere la organización y notación usada en la Figura 5.31, para $m = 18$. En general, podemos crear un nuevo elemento de la familia a partir de $\mathcal{Q}[18]$ agregando dos estructuras $1V$ entre los pisos dos y tres. Esto es, podemos generar $\mathcal{Q}[m + 6]$ desde $\mathcal{Q}[m]$, para $m = 18 + r, r$ múltiplo de 6.

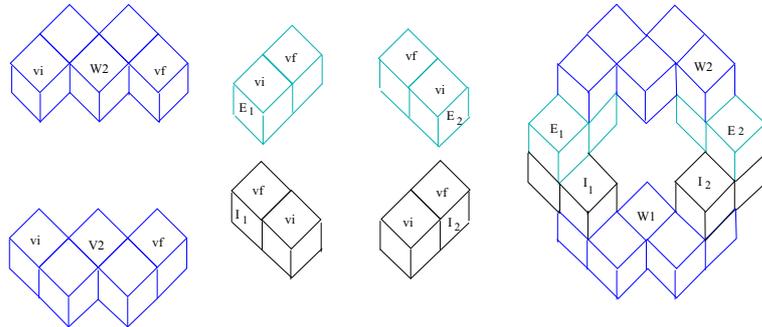


Figura 5.31: Estructuras para la generación de $\mathcal{Q}[m]$

Sin pérdida de generalidad, supondremos que las estructuras del segundo piso son denominadas I_1, I_2 y las del tercer piso, E_1 y E_2 . Para crear a $\mathcal{Q}[m + 6]$, requerimos dos estructuras tipo $1V$, a las que llamaremos V_1 y V_2 .

Lo primero que tenemos que hacer es *desensamblar* el segundo piso del tercero para, luego unir, las nuevas piezas.

La Figura 5.32 ilustra los primeros tres elementos de esta familia, $\mathcal{Q}[18]: 4 \times 4 \times 4$, $\mathcal{Q}[24]: 5 \times 5 \times 5$ y $\mathcal{Q}[30]: 6 \times 6 \times 6$.

A continuación, generamos una familia de vox-sólidos irreducibles para \mathcal{Q}_{18} , haciendo uso de separaciones válidas. Primero observemos que si $\mathcal{Q}_{18} = \mathcal{Q}[18] = \mathcal{Q}[6 \cdot (3)]$ podemos expresar $\mathcal{Q}[24] = \mathcal{Q}[18 + 6] = \mathcal{Q}[6 \cdot (3 + 1)]$. En general, podemos identificar un elemento de la familia $\mathcal{Q}[m]$ como $\mathcal{Q}[6 \cdot k], \forall k \geq 3$.

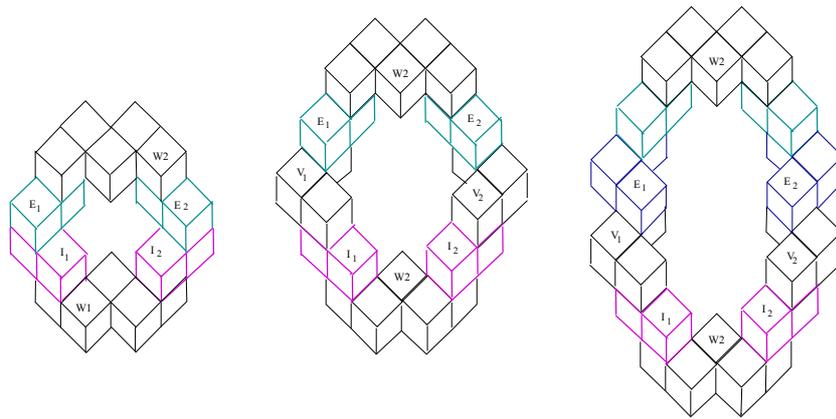


Figura 5.32: Vox-sólidos $Q [18]$, $Q [24]$ y $Q [30]$

Lema 5.3 Para el vox-sólido irreducible $Q[18]$ existe una separación válida y, por tanto, es posible construir el vox-sólido $Q[24]$ a partir de él.

Demostración. Consideremos el etiquetado presentado en la Figura 5.33(A) para el vox-sólido Q_{18} y en (B), el encaje en el toro de su gráfica facial. Además, se indican los cortes que, inicialmente, usaremos.

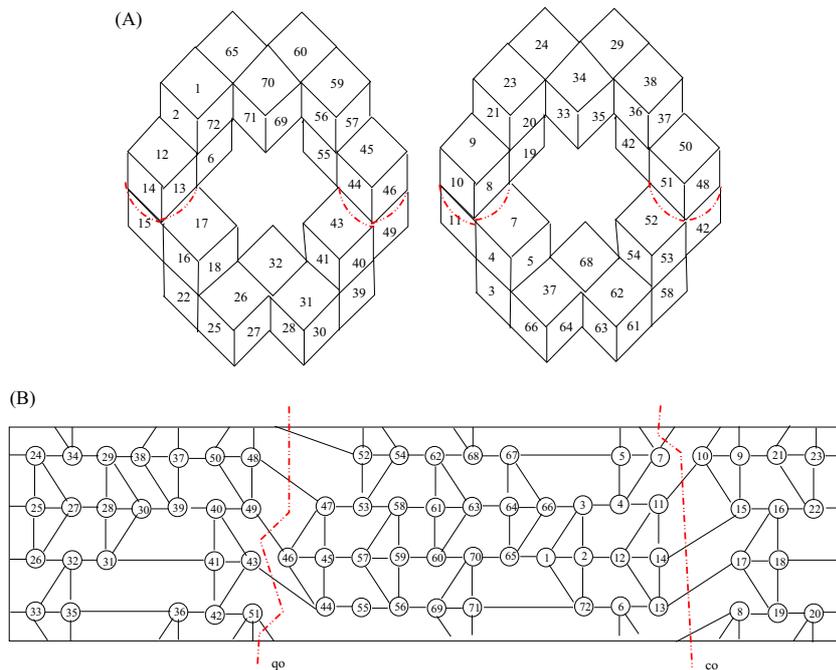


Figura 5.33: Enumeración para el vox-sólido Q_{18} y su encaje en el toro

La separación válida queda definida como, $\mathcal{S}_o = \langle q_o, c_o \rangle$ con:

$$q_o = \langle A_o, Z_o \rangle; \quad A_o = \{48, 49, 43, 51\}; \quad Z_o = \{47, 46, 44, 52\}$$

$$c_o = \langle X_o, Y_o \rangle; \quad X_o = \{7, 11, 14, 13\}; \quad Y_o = \{8, 11, 15, 17\}$$

Existen las aristas:

$$(48, 47), (49, 46), (43, 44), (51, 52) (7, 8), (11, 10), (14, 15), (13, 17).$$

Para construir el siguiente miembro de la familia, anexamos una estructura 1V a la separación dada. La Figura 5.34 muestra las estructuras 1V y sus gráficas faciales.

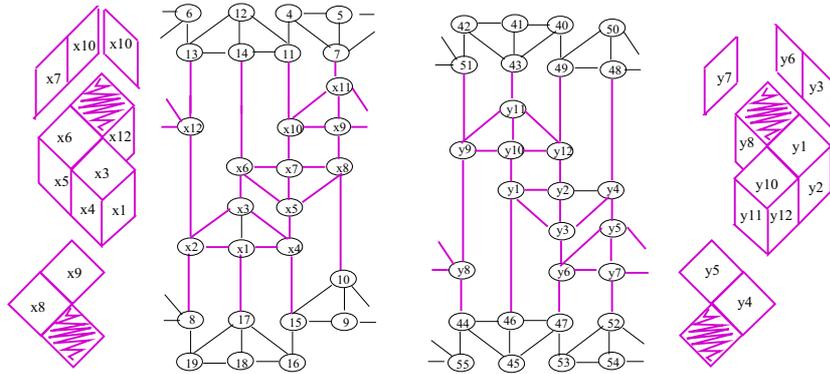


Figura 5.34: Anexos que se agregan al vox-sólido \mathcal{Q}_{18}

Si agregamos los anexos, tanto al objeto 3-dimensional como al encaje en el toro. Las Figuras 5.35(A, B) muestran al vox-sólido obtenido, $\mathcal{Q}[24]$, y el encaje en el toro de su gráfica facial.

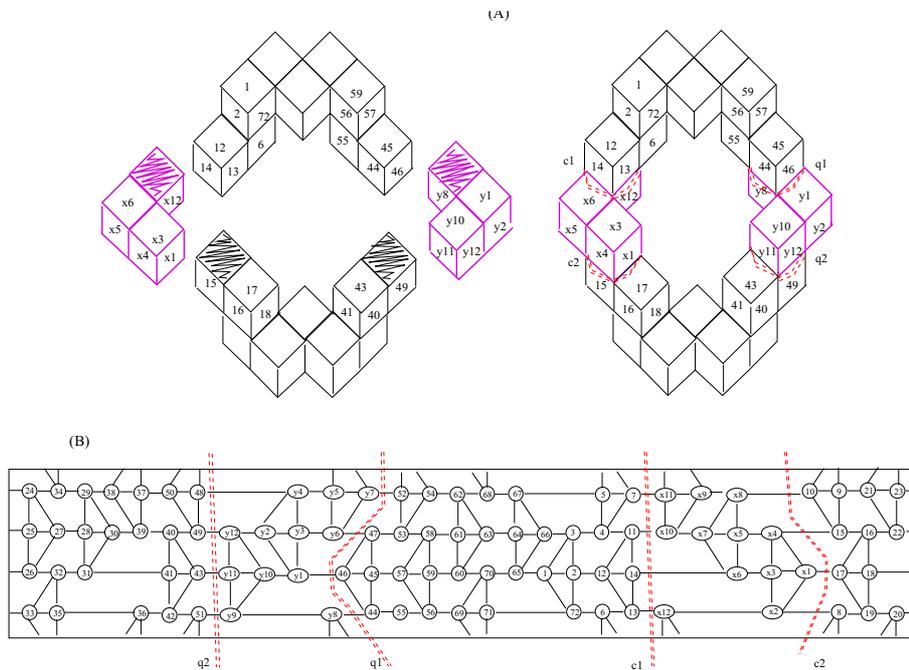


Figura 5.35: Vox-sólido obtenido al agregar los anexos: $\mathcal{Q}[24]$

Lema 5.4 Para todo vox-sólido irreducible $\mathcal{Q}[6 \cdot k], k \geq 4$, siempre existe una separación válida y, por tanto, siempre es posible construir el vox-sólido $\mathcal{Q}[6 \cdot (k + 1)]$ a partir de $\mathcal{Q}[6 \cdot k], k \geq 3$.

Demostración. Inducción sobre k .

Suponemos $k = 4$. Consideremos el etiquetado dado en la Figura 5.35(A) para el vox-sólido \mathcal{Q}_{24} . La Figura 5.35(B) presenta su encaje. Además, se indican los cortes que, inicialmente, usaremos.

La separación válida queda definida como, $\mathcal{S}_o = \langle q_o, c_o \rangle$ con:

$$q_o = \langle A_o, Z_o \rangle; \quad A_o = \{44, 46, 48, 51\}; \quad Z_o = \{43, 49, 47, 52\}.$$

$$c_o = \langle X_o, Y_o \rangle; \quad X_o = \{13, 14, 11, 7\}; \quad Y_o = \{17, 15, 10, 8\}.$$

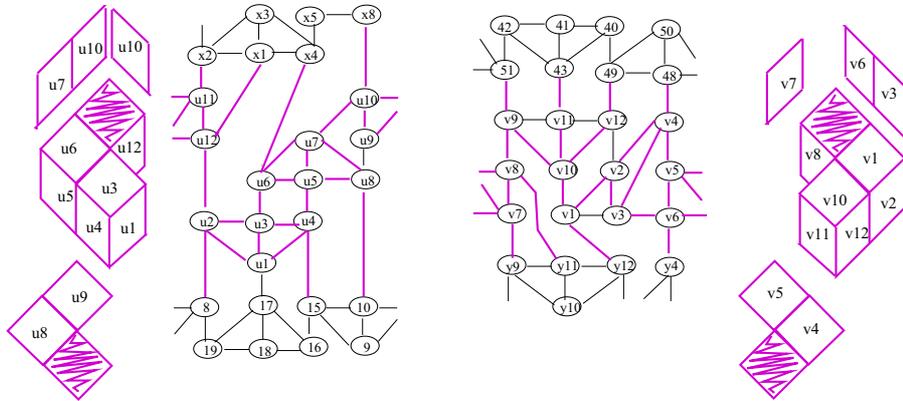


Figura 5.36: Anexos que se agregan al vox-sólido \mathcal{Q}_{24}

Para construir el siguiente miembro de esta familia, anexamos una estructura 1V a la separación dada, que se realiza entre el segundo y tercer piso. La Figura 5.36 muestra las estructuras 1V y sus gráficas faciales.

Después, agregamos los anexos, tanto al objeto 3-dimensional como al encaje en el toro. Las Figuras 5.37(A,B) muestran el vox-sólido obtenido, $\mathcal{Q}[30]$ y el encaje en el toro de su gráfica facial, respectivamente.

Podemos hacer al menos cuatro cortes sobre \mathcal{Q}_{30} . En la Figura 5.37 se marcan algunos. Cualesquiera de las separaciones $\mathcal{S} = \langle c_i, q_j \rangle, 1 \leq i, j \leq 2$, permite añadir una estructura 1V en cada corte para obtener el siguiente elemento de la familia.

Así, sólo nos quedaremos con los cortes que separan al segundo piso del tercero:

$$c_2 = \langle X_2, Y_2 \rangle = \{(10, u_8), (15, u_4), (17, u_1), (8, u_2)\}.$$

$$q_2 = \langle A_2, Z_2 \rangle = \{(48, v_4), (49, v_{12}), (43, v_{11}), (51, v_9)\}.$$

Suponemos el lema se cumple para $\mathcal{Q}[6 \cdot k], k \geq 5$. Por demostrar que es válido para $\mathcal{Q}[6 \cdot (k + 1)]$.

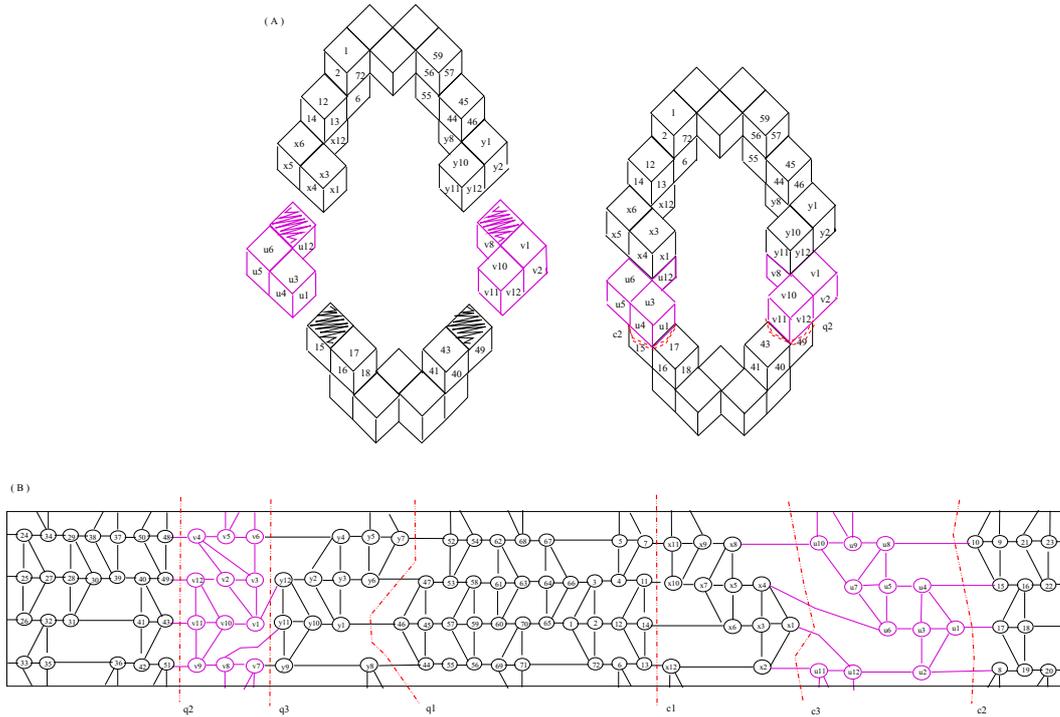


Figura 5.37: Vox-sólido obtenido al agregar los anexos: $\mathcal{Q}[30]$

Consideramos la abstracción del encaje de $\mathcal{Q}[30]$, mostrada en la Figura 5.38

Sin pérdida de generalidad, tomaremos $\mathcal{S}_{0j} = \langle c_{0j}, q_{0j} \rangle$ con

$$c_{0j} = \langle X_o, Y_j \rangle = \{(U8, 10), (U4, 15), (U1, 17), (U2, 12)\};$$

$$q_{0j} = \langle A_o, Z_j \rangle = \{(48, V4), (49, V12), (43, V11), (51, V9)\}.$$

Sea $\mathcal{S}_0 = \langle c_k, q_k \rangle$ la separación válida para $\mathcal{Q}[6 \cdot k]$ dada por la inducción. Tenemos que, $c_k = \langle X_o, Y_k \rangle = \{(U8, 10), (U4, 15), (U1, 17), (U2, 12)\};$

$$q_k = \langle A_o, Z_k \rangle = \{(48, V4), (49, V12), (43, V11), (51, V9)\};$$

o bien, $c_k = \langle X_o, Y_k \rangle = \{(U8, E_2), (U4, F_2), (U1, T_2), (U2, d_2)\};$

$$q_k = \langle A_o, Z_k \rangle = \{(E_3, V4), (F_3, V12), (T_3, V11), (D_3, V9)\}.$$

Los anexos para $\mathcal{Q}[6 \cdot k], k \geq 6$, son los mismos que los usados para construir $\mathcal{Q}[30]$, como vemos en la Figura 5.36. Al agregarlos tanto al objeto 3-dimensional como al encaje en el toro, se aumentanta un nivel de cada extremo, incrementando un piso y generando el vox-sólido irreducible $\mathcal{Q}[6 \cdot (k + 1)]$.

Por lo tanto, el lema se satisface.

En la Figura 5.39 se ilustra el resultado que se obtiene al agregar las gráficas asociadas a los anexos al encaje en el toro de la gráfica facial del vox-sólido $\mathcal{Q}[6 \cdot (k + 1)]$.

Inmediato de los lemas anteriores, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 5.2 Siempre es posible construir el vox-sólido irreducible $\mathcal{Q}[6 \cdot (k + 1)], k \geq 3$ a partir de $\mathcal{Q}[18]$.

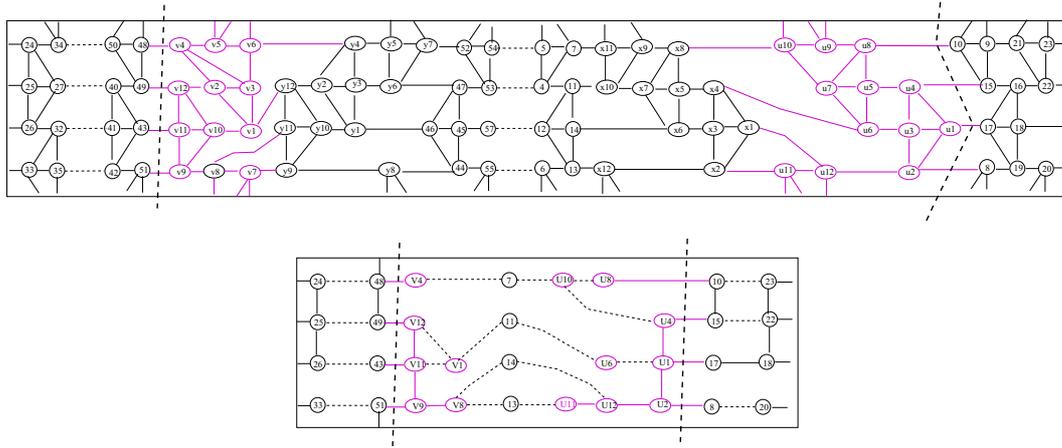


Figura 5.38: Abstracción del Encaje del vox-sólido $\mathcal{Q}[6 \cdot (k + 1)]$

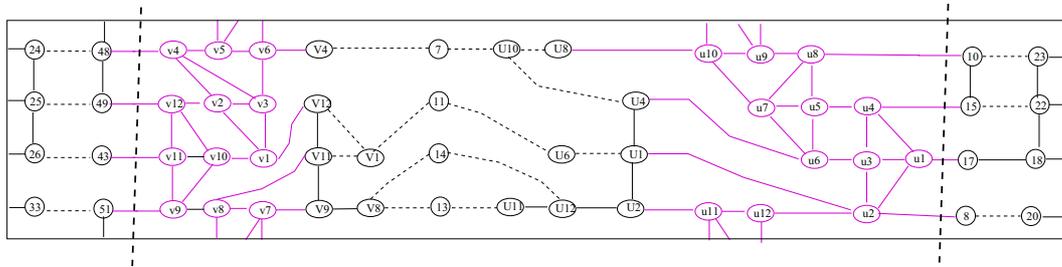


Figura 5.39: Encaje en el toro del vox-sólido $\mathcal{Q}[6 \cdot (k + 1)]$

Familia $\mathcal{F}[i, j]$

A partir de \mathcal{F}_{20} , construiremos familias infinitas de vox-sólidos irreducibles; de dos pisos, particularmente. Considere \mathcal{F}_{20} . Podemos hacer *crecer*, en paralelo, las estructuras del segundo piso o bien, podemos hacer *crecer*, las estructuras del primer y tercer piso en paralelo o, también, podríamos hacer variar todas a la vez.

Similar a lo realizado con la familia $\mathcal{L}[i, j]$, tenemos que $\mathcal{F}[i, j]$ tiene dos iV en el primer piso y dos jV en el segundo. con $i \geq 2$ y $j \geq 2$. De esta manera, hemos definido la familia $\mathcal{F}[i, j]$.

En términos generales, para un elemento en la Familia $\mathcal{F}[i, j]$ se tiene que, en el primer piso, hay dos estructuras iV , y, en el segundo, dos estructuras jV , $i \geq 2$, $j \geq 2$. Además, se tiene que $\mathcal{F}[i, j] = \mathcal{F}[j, i]$ para i, j fijas. Por ejemplo, $\mathcal{F}[2, 3] = \mathcal{F}[3, 2]$.

A continuación, a partir de $\mathcal{F}_{20} = \mathcal{F}[2, 2]$, construiremos, la Familia $\mathcal{F}[i, j]$ utilizando separaciones. Primero, describiremos cómo generar la Familia $\mathcal{F}[i, 2]$, $i \geq 2$, haciendo crecer las estructuras del primer piso. Después haremos crecer las estructuras del segundo para generar la Familia $\mathcal{F}[2, j]$, $j \geq 2$. Finalmente, podremos combinar los resultados para hacer variar los pisos.

Lema 5.5 Para todo elemento $\mathcal{F}[i, 2], i \geq 2$ siempre existe una separación válida y, por lo tanto, siempre es posible construir el vox-sólido irreducible $\mathcal{F}[i + 1, 2]$ a partir de $\mathcal{F}[i, 2], i \geq 2$.

Demostración. Inducción sobre i .

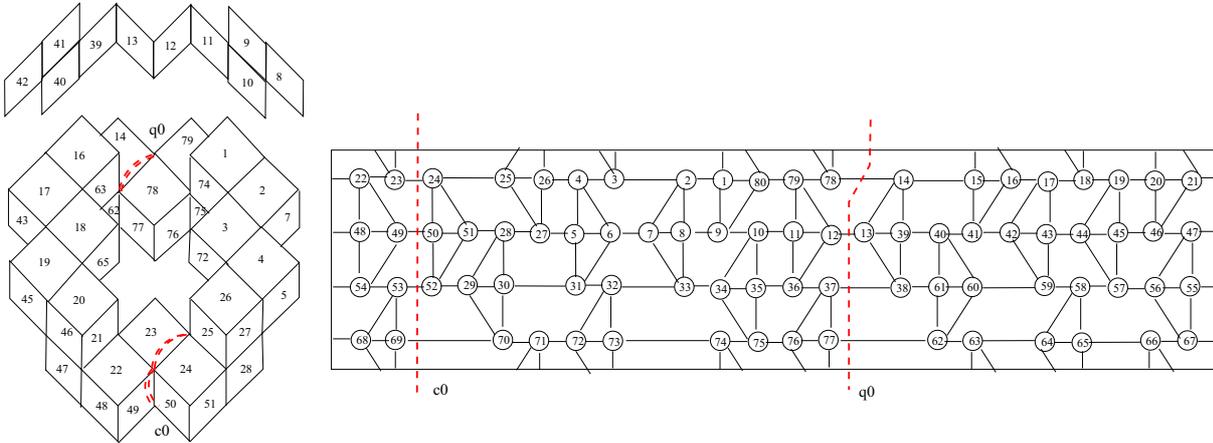


Figura 5.40: Vox-sólido $\mathcal{F}_{20} = \mathcal{F}[2, 2]$

Supongamos $i = 2$. Sin pérdida de generalidad, consideremos la enumeración dada sobre las caras del vox-sólido $\mathcal{F}_{20} = \mathcal{F}[2, 2]$ presentado en la Figura 5.40. De igual forma, se presenta su encaje en el toro y una separación válida $\mathcal{S}_o = \langle c_o, q_o \rangle$.

Los cortes están definidos por:

$$c_o = \langle X_o, Y_o \rangle; \quad X_o = \{23, 49, 53, 69\}, \quad Y_o = \{24, 50, 52, 70\}.$$

$$q_o = \langle A_o, Z_o \rangle; \quad A_o = \{78, 12, 37, 77\}, \quad Z_o = \{14, 13, 38, 62\}.$$

x5

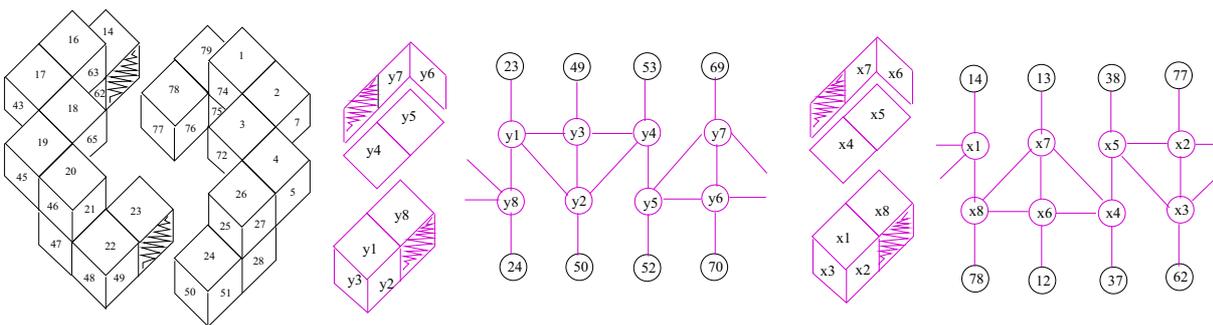


Figura 5.41: Estructuras para la generación de $\mathcal{F}[3, 2]$

Para construir el siguiente elemento de la familia, $\mathcal{F}[3, 2]$, requerimos anexar un par de estructuras 0Z, las cuales son presentadas en la Figura 5.41, con sus subgráficas de adyacencia de caras respectivas.

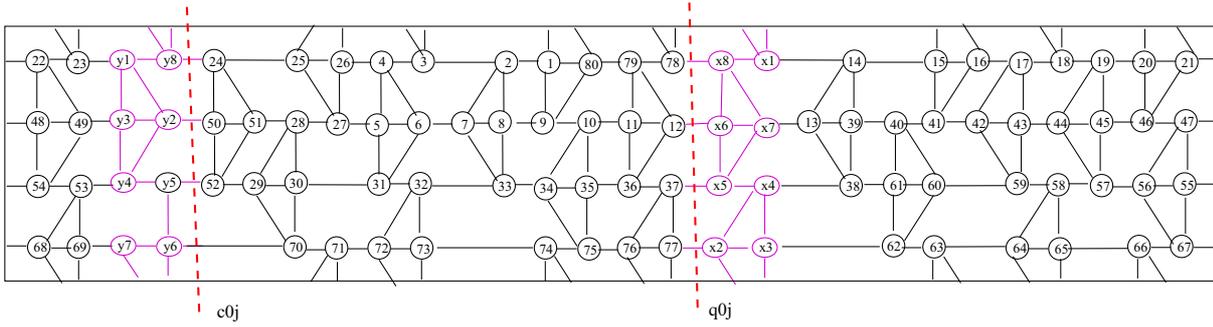


Figura 5.42: Encaje en el toro del vox-sólido $\mathcal{F}[3, 2]$

La Figura 5.42 muestra el encaje en el toro obtenido para la gráfica facial del vox-sólido $\mathcal{F}[3, 2]$. Aunque tenemos varios cortes que podrían formar separaciones válidas, en términos generales podemos considerar únicamente como la separación válida $\mathcal{S}_0 = \langle c_{0i}, q_{0i} \rangle$ con:

$$c_{0i} = \langle X_o, Y_i \rangle = \{(23, a), (49, b), (53, c), (69, d)\};$$

$$q_{0i} = \langle A_o, Z_i \rangle = \{(78, e), (12, f), (37, g), (77, h)\}.$$

Suponemos que el lema se cumple para i , por demostrar que también se satisface para $i + 1$.

Sea $\mathcal{S}_0 = \langle c_i, q_i \rangle$ la separación dada por la inducción para $\mathcal{F}[i, 2]$, con:

$$c_i = \langle X_o, Y_i \rangle = \{(23, a), (49, b), (53, c), (69, d)\};$$

$$q_i = \langle A_o, Z_i \rangle = \{(78, e), (12, f), (37, g), (77, h)\}.$$

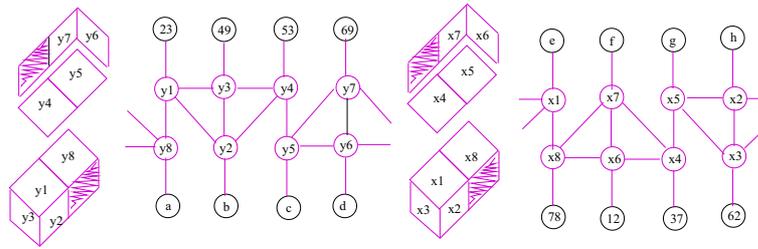


Figura 5.43: Anexos para la generación de $\mathcal{F}[i + 1, 2]$

Los anexos son mostrados en la Figura 5.43. Al agregarlos, tanto al objeto 3-dimensional como al encaje en el toro, resulta claro que se obtiene el vox-sólido $\mathcal{F}[i + 1, 2]$.

La Figura 5.44 muestra el resultado de agregar los anexos al encaje en el toro de la gráfica facial del vox-sólido $\mathcal{F}[i, 2]$.

Ahora, redefinimos: $a = y_1, b = y_3, c = y_4, d = y_7; e = x_8, f = x_6, g = x_4$ y $h = x_3$. Con esto reestablecemos la separación $\mathcal{S}_0 = \langle c_i, q_i \rangle$, para $\mathcal{F}[i + 1, 2]$, con

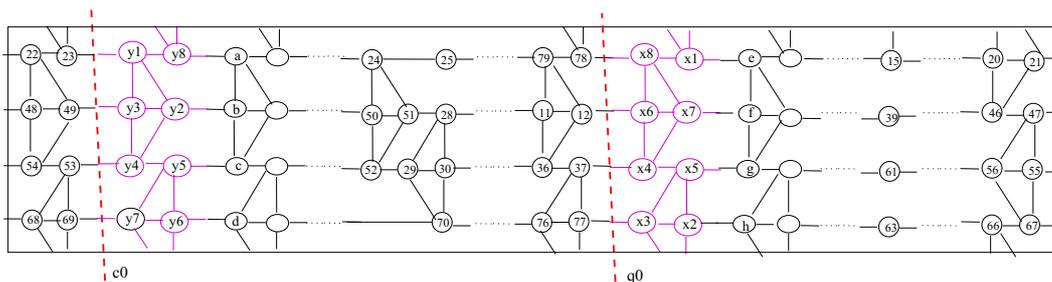


Figura 5.44: Abstracción del encaje en el toro para $\mathcal{F}[i, 2]$

$$c_i = \langle X_o, Y_i \rangle = \{(23, a), (49, b), (53, c), (69, d)\};$$

$$q_i = \langle A_o, Z_i \rangle = \{(78, e), (12, f), (37, g), (77, h)\}.$$

Así, hemos obtenido el vox-sólido $\mathcal{F}[i + 1, 2]$ y reestablecido la separación válida.

Por lo tanto, el lema se cumple.

De igual manera, podemos construir $\mathcal{F}[4, 2]$ a partir de $\mathcal{F}[2, 2]$ mediante el anexo de estructuras $1\mathbb{Z}$ sobre la separación válida establecida, \mathcal{S}_{oj} . Además, podemos obtener $\mathcal{F}[k, 2]$ desde $\mathcal{F}[2, 2]$ agregando dos estructuras $(k - 3)\mathbb{Z}$, $k \geq 3$. Para generar $\mathcal{F}[k, 2]$ a partir de $\mathcal{F}[3, 2]$ requerimos anexar dos estructuras $(k - 4)\mathbb{Z}$, $k \geq 4$. En general, es posible construir $\mathcal{F}[k, 2]$ desde $\mathcal{F}[i, 2]$ añadiendo dos estructuras $(k - (i + 1))\mathbb{Z}$, $k \geq (i + 1)$, $i \geq 2$. Si j está fija, para construir $\mathcal{F}[k, j]$ a partir de $\mathcal{F}[i, j]$ requerimos anexar dos estructuras $(k - (i + 1))\mathbb{Z}$, $k \geq (i + 1)$, $i \geq 2$.

En virtud de que $\mathcal{F}[2, j] \sim \mathcal{F}[j, 2], \forall j \geq 2$, podemos concluir los siguientes resultados:

Lema 5.6 Para todo elemento $\mathcal{F}[2, j], j \geq 2$ siempre existe una separación válida y, por lo tanto, siempre es posible construir el vox-sólido irreducible $\mathcal{F}[2, j + 1]$ a partir de $\mathcal{F}[2, j], j \geq 2$.

Teorema 5.3 Siempre es posible construir el vox-sólido irreducible $\mathcal{F}[i, j], i, j \geq 2$ a partir de $\mathcal{F}[2, 2] = \mathcal{F}_{20}$.

Familia $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$

A partir de \mathcal{V}_{32} , podemos construir familias infinitas de vox-sólidos. A continuación mostraremos cómo generar una de dos pisos. Podemos hacer *crecer* \mathcal{V}_{32} en paralelo, dos estructuras del primer piso o bien, podemos hacer *crecer*, dos estructuras del segundo piso, en paralelo o bien, podríamos hacer variar todas a la vez.

Para construir un elemento de la Familia $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$, requerimos cuatro estructuras para el primer piso: dos del tipo $i_1\mathbb{Z}$, llamadas Z_1, Z_3 y dos $j_1\mathbb{Z}$, sean Z_2, Z_4 . Para el segundo piso, requerimos cuatro: dos del tipo $i_2\mathbb{Z}$, denominadas Z_5, Z_7 y dos $j_2\mathbb{Z}$, sean Z_6, Z_8 . Sin pérdida de generalidad, considere la organización y notación usada en la Figura 5.45 para $i_1 = i_2 = 1, j_1 = j_2 = 1 : \mathcal{V}[1, 1; 1, 1]$.

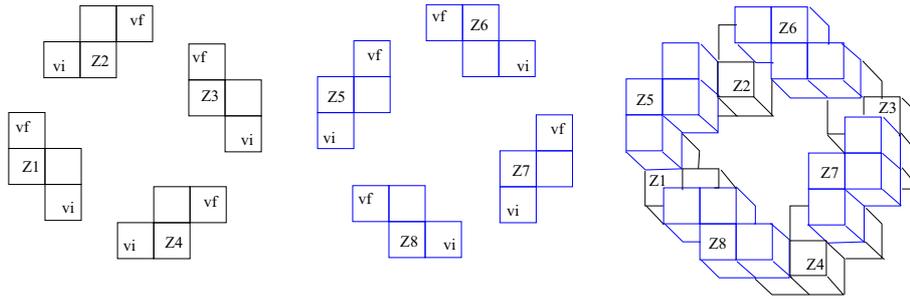


Figura 5.45: Estructuras para la generación de $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$

Para facilitar la visualización de los elementos de esta familia introducimos el concepto de **mapa**, el cual se muestra en la Figura 5.46.

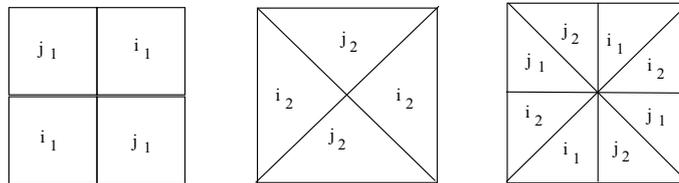


Figura 5.46: Mapas para la generación de $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$

Los primeros dos gráficos representan la organización final de las estructuras del primer y segundo piso, respectivamente. En el último se indica la distribución de las ocho estructuras Z en el vox-sólido. Por último, en la Figura 5.47 podemos apreciar la distribución de las estructuras según los nombres asignados.

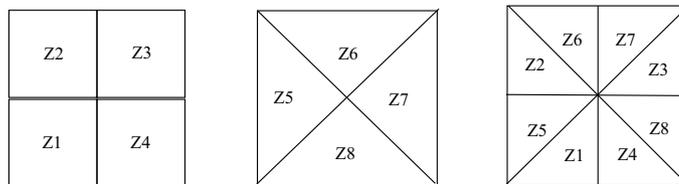


Figura 5.47: Mapas para la generación de $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$

De esta forma, podemos generar elementos de la familia con m voxeles, donde $m \geq 32$ y m es múltiplo de 4. Además, se tienen varios ejemplares distintos para una misma $m, m \geq 36$. A continuación listamos algunos de los elementos de esta familia.

- | | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{V}_{32} : \mathcal{V}[1, 1; 1, 1]$ | $\mathcal{V}_{36A} : \mathcal{V}[1, 1; 1, 2]$ | $\mathcal{V}_{36B} : \mathcal{V}[1, 1; 2, 1]$ | $\mathcal{V}_{36C} : \mathcal{V}[1, 2; 1, 2]$ |
| $\mathcal{V}_{40A} : \mathcal{V}[1, 1; 2, 2]$ | $\mathcal{V}_{40B} : \mathcal{V}[1, 2; 1, 2]$ | $\mathcal{V}_{40C} : \mathcal{V}[1, 2; 2, 1]$ | $\mathcal{V}_{40D} : \mathcal{V}[1, 1; 1, 3]$ |
| $\mathcal{V}_{44A} : \mathcal{V}[2, 2; 1, 2]$ | $\mathcal{V}_{44B} : \mathcal{V}[2, 2; 2, 1]$ | $\mathcal{V}_{44C} : \mathcal{V}[1, 1; 1, 4]$ | $\mathcal{V}_{44D} : \mathcal{V}[1, 1; 4, 1]$ |
| $\mathcal{V}_{48A} : \mathcal{V}[2, 2; 2, 2]$ | $\mathcal{V}_{48B} : \mathcal{V}[1, 1; 3, 3]$ | $\mathcal{V}_{48C} : \mathcal{V}[1, 3; 1, 3]$ | $\mathcal{V}_{48D} : \mathcal{V}[2, 2; 1, 3]$ |
| $\mathcal{V}_{52A} : \mathcal{V}[3, 3; 1, 2]$ | $\mathcal{V}_{52B} : \mathcal{V}[3, 2; 3, 1]$ | $\mathcal{V}_{52C} : \mathcal{V}[1, 3; 3, 2]$ | $\mathcal{V}_{52D} : \mathcal{V}[2, 2; 1, 4]$ |
| $\mathcal{V}_{56A} : \mathcal{V}[3, 3; 2, 2]$ | $\mathcal{V}_{56B} : \mathcal{V}[2, 3; 2, 3]$ | $\mathcal{V}_{56C} : \mathcal{V}[1, 1; 4, 4]$ | $\mathcal{V}_{56D} : \mathcal{V}[1, 2; 3, 4]$ |

Para saber cuántos ejemplares de tamaño m hay en esta familia, consideremos el valor de $s = i_1 + j_1 + i_2 + j_2$, el número de formas en que podemos escribir s con cuatro dígitos, es el número de vox-sólido de tamaño m , donde

$$m = 2[2(i_1 + 1)] + 2[2(j_1 + 1)] + 2[2(i_2 + 1)] + 2[2(j_2 + 1)].$$

$$m = 4(i_1 + 1) + 4(j_1 + 1) + 4(i_2 + 1) + 4(j_2 + 1).$$

$$m = 16 + 4(i_1) + 4(j_1) + 4(i_2) + 4(j_2) = 16 + 4(i_1 + j_1 + i_2 + j_2) = 16 + 4(s) = m.$$

La Figura 5.48, muestra un vox-sólido de 36 voxeles de esta familia, al igual que los mapas y bosquejos de los dos elementos de tamaño 36 de esta familia. No hay que perder de vista que el vox-sólido $V [1,1;1,2]$ y el $V [1,1;2,1]$ son similares.

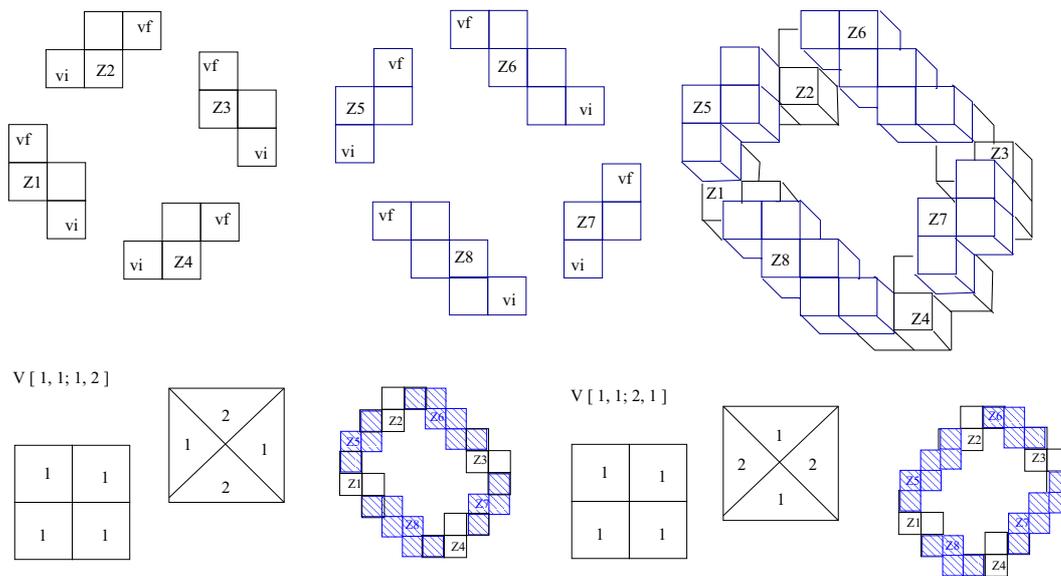


Figura 5.48: Un Vox-sólido \mathcal{V}_{36} de tamaño 36

La Figura 5.49, presenta los mapas y bosquejos de algunos vox-sólido de tamaño 48 de esta familia. Tomemos en cuenta que el vox-sólido $V [1,3;3,1]$ y el $V [1,3;1,3]$ son diferentes.

A continuación, construiremos esta familia utilizando separaciones válidas. Iniciamos con \mathcal{V}_{32} . La Figura 5.50 muestra la enumeración del vox-sólido, su mapa y encaje en el toro. Además se marcan los diferentes cortes que utilizaremos para construir la familia.

La familia ha sido descrita como $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$, donde los parámetros i_1, j_1 indican que, en el primer piso, hay dos estructuras i_1Z y dos j_1Z . Los parámetros i_2, j_2 indican que, en el segundo piso, hay dos estructuras i_2Z y dos j_2Z .

De igual manera, calculamos que $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$ tiene $m = 16 + 4(i_1 + j_1 + i_2 + j_2)$ voxeles. Así, $\mathcal{V}_{32} = \mathcal{V}[1, 1; 1, 1]$, ya que $16 + 4(1 + 1 + 1 + 1) = 16 + 4(4) = 32$

Al igual que en las construcciones anteriores, podemos tener varios cortes para hacer crecer los vox-sólido y obtener un nuevo elemento de la familia. Las separaciones con los que trabajaremos en esta sección serán definidas a continuación:

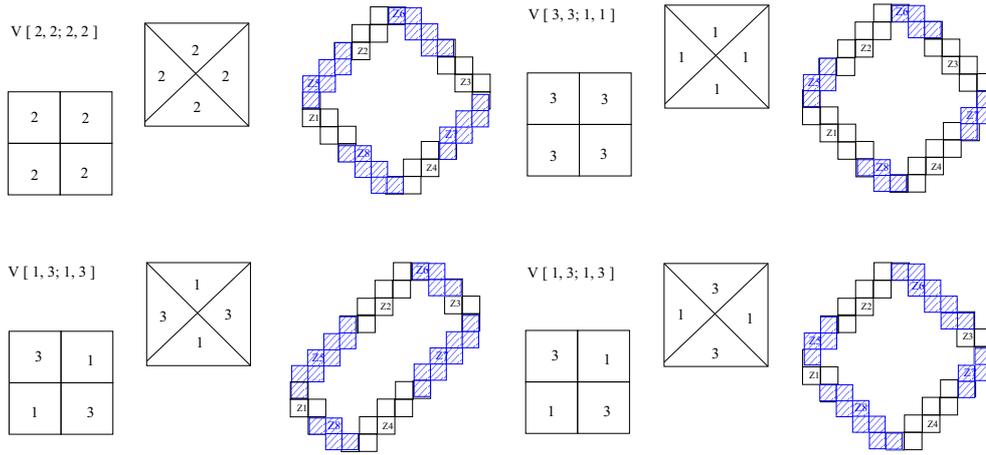


Figura 5.49: Vox-sólidos \mathcal{V}_{48} , con 48 voxeles

Separación \mathcal{S}_0

Sea la separación $\mathcal{S}_0 = \langle c_o, q_o \rangle$ donde,

$$c_o = \langle X_o, Y_o \rangle, \quad X_o = \{1, 128, 127, 35\} \quad Y_o = \{2, 4, 32, 34\}$$

$$q_o = \langle A_o, Z_o \rangle, \quad A_o = \{95, 94, 93, 65\} \quad Z_o = \{96, 98, 62, 64\}.$$

Insertar sobre los cortes de \mathcal{S}_0 hará crecer las estructuras j_2Z .

Si se anexa a $\mathcal{V}_{32} = \mathcal{V}[1, 1; 1, 1]$ una $0Z$, el nuevo vox-sólido obtenido será un elemento de 36 voxeles: $\mathcal{V}[1, 1; 1, 2]$. Si a $\mathcal{V}_{32} = \mathcal{V}[1, 1; 1, 1]$ se anexa una estructura kZ , el nuevo vox-sólido $\mathcal{V}[1, 1; 1, k+1]$ tendrá $m_k = 16 + 4(k+4)$ voxeles.

La Figura 5.51 muestra los anexos del tipo $0Z$ para los cortes c_o y q_o de \mathcal{S}_0 ; también se ilustra la parte afectada.

En general, si a $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$ se anexa una estructura kZ , sobre los cortes c_o y q_o de la separación \mathcal{S}_0 , el nuevo vox-sólido será $\mathcal{V}[j_1, j_1; i_2, m_2]$, con $m_2 = (j_2 + k + 1)$, y tendrá $m_k = 16 + 4(j_1 + j_1 + i_2 + m_2)$ voxeles.

Separación \mathcal{S}_1

Se define la separación $\mathcal{S}_1 = \langle c_1, q_1 \rangle$ con

$$c_1 = \langle X_1, Y_1 \rangle, \quad X_1 = \{112, 111, 110, 50\}; \quad Y_1 = \{113, 115, 47, 49\};$$

$$q_1 = \langle A_1, Z_1 \rangle, \quad A_1 = \{83, 82, 16, 20\}; \quad Z_1 = \{84, 81, 17, 19\}.$$

Insertar sobre los cortes de \mathcal{S}_1 hará crecer las estructuras i_2Z .

Si se anexa a $\mathcal{V}_{32} = \mathcal{V}[1, 1; 1, 1]$ una $0Z$, el nuevo vox-sólido obtenido será un elemento de 36 voxeles: $\mathcal{V}[1, 1; 2, 1]$. Si se añade a $\mathcal{V}_{32} = \mathcal{V}[1, 1; 1, 1]$ una estructura kZ , el nuevo vox-sólido $\mathcal{V}[1, 1; k+1, 1]$ tendrá $m_k = 16 + 4(k+4)$ voxeles.

La Figura 5.52 muestra los anexos del tipo $0Z$ para los cortes c_1 y q_1 de \mathcal{S}_1 . Se presenta, además, la sección afectada.

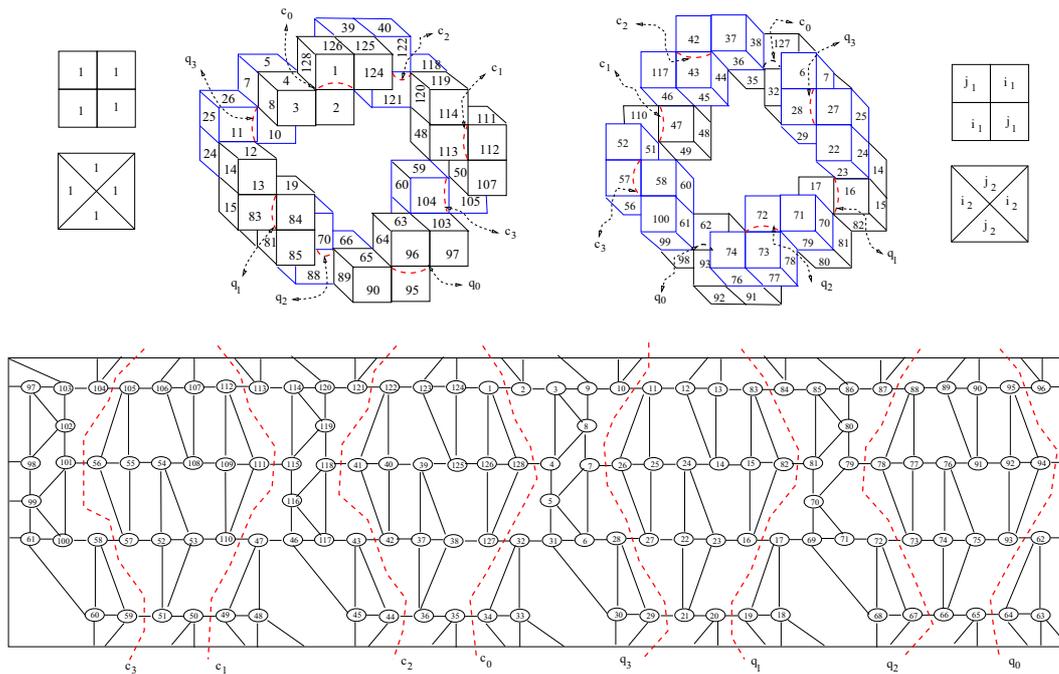


Figura 5.50: Vox Sólido \mathcal{V}_{32} , sus mapas y encaje en el toro

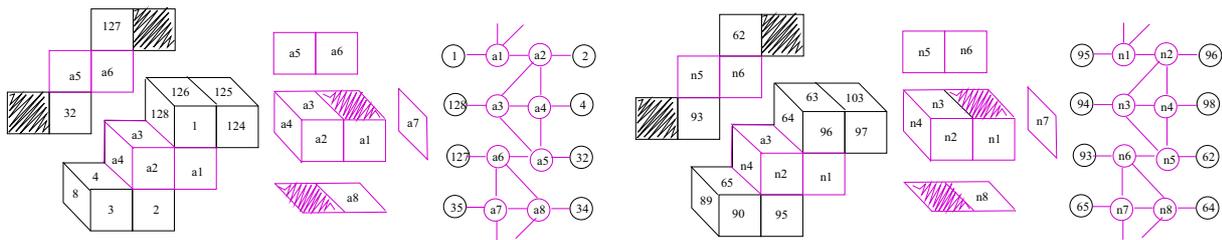


Figura 5.51: Anexos 0Z para los cortes c_o y q_o

En general, si se anexa a $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$ una estructura $k\mathbb{Z}$, sobre los cortes c_1 y q_1 de la separación \mathcal{S}_1 , el nuevo vox-sólido será $\mathcal{V}[j_1, j_1; k_2, j_2]$, con $k_2 = (i_2 + k + 1)$ y tendrá $m_k = 16 + 4(j_1 + j_1 + k_2 + j_2)$ voxeles.

Separación \mathcal{S}_2

Sea la separación $\mathcal{S}_2 = \langle c_2, q_2 \rangle$ donde,

$$c_2 = \langle X_2, Y_2 \rangle, \quad X_2 = \{121, 118, 43, 44\}; \quad Y_2 = \{122, 41, 42, 36\};$$

$$q_2 = \langle A_2, Z_2 \rangle, \quad A_2 = \{87, 79, 72, 67\}; \quad Z_2 = \{88, 78, 73, 66\}.$$

Insertar sobre los cortes de \mathcal{S}_2 hará crecer las estructuras $i_1\mathbb{Z}$.

Si se anexa a $\mathcal{V}_{32} = \mathcal{V}[1, 1; 1, 1]$ una 0Z, el nuevo vox-sólido obtenido será un elemento de 36 voxeles: $\mathcal{V}[2, 1; 1, 1]$. Si se anexa a $\mathcal{V}_{32} = \mathcal{V}[1, 1; 1, 1]$ una estructura $k\mathbb{Z}$, el nuevo vox-sólido $\mathcal{V}[k + 1, 1; 1, 1]$ tendrá $m_k = 16 + 4(k + 4)$ voxeles.

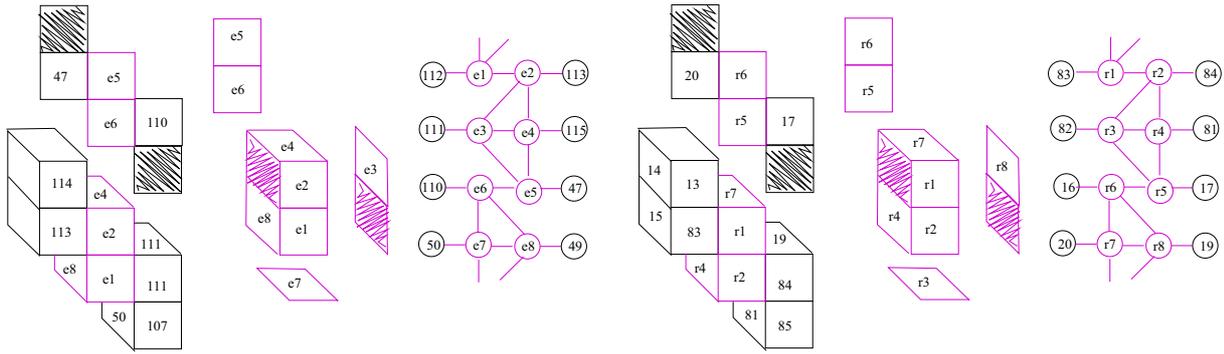


Figura 5.52: Anexos 0Z para los cortes c_1 y q_1

La Figura 5.53 muestra los anexos del tipo 0Z para los cortes c_2 y q_2 de \mathcal{S}_2 . Se ilustra, también, la parte afectada.

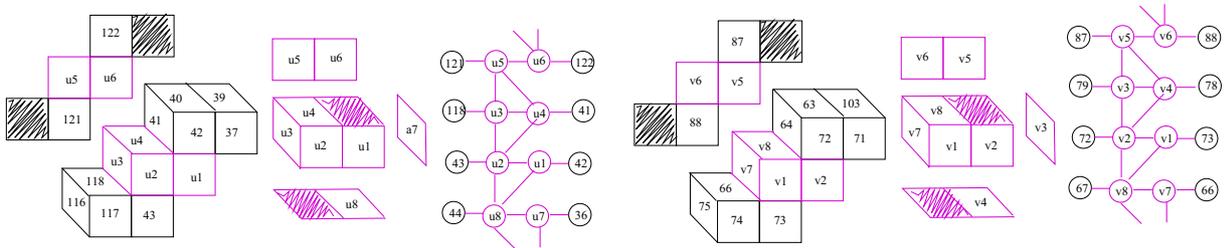


Figura 5.53: Anexos 0Z para los cortes c_2 y q_2

En general, si se anexa a $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$ una estructura kZ sobre los cortes c_2 y q_2 de la separación \mathcal{S}_2 , el nuevo vox-sólido será $\mathcal{V}[k_1, j_1; i_2, j_2]$, $k_1 = (j_1 + k + 1)$ y tendrá $m_k = 16 + 4(k_1 + j_1 + i_2 + j_2)$ voxeles.

Separación \mathcal{S}_3

Se define la separación $\mathcal{S}_3 = \langle c_3, q_3 \rangle$ como

$$c_3 = \langle X_3, Y_3 \rangle, \quad X_3 = \{104, 101, 58, 59\}; \quad Y_3 = \{105, 56, 57, 51\};$$

$$q_3 = \langle A_3, Z_3 \rangle, \quad A_3 = \{10, 7, 28, 29\}; \quad Z_3 = \{11, 26, 27, 21\}.$$

Insertar sobre los cortes de \mathcal{S}_3 hará crecer las estructuras j_1Z .

Si se anexa a $\mathcal{V}_{32} = \mathcal{V}[1, 1; 1, 1]$ una 0Z, el nuevo vox-sólido obtenido será un elemento de 36 voxeles: $\mathcal{V}[1, 2; 1, 1]$. Si, también, se añade a $\mathcal{V}_{32} = \mathcal{V}[1, 1; 1, 1]$ una estructura kZ , el nuevo vox-sólido $\mathcal{V}[1, 1; k + 1, 1]$ tendrá $m_k = 16 + 4(k + 4)$ voxeles.

La Figura 5.54 muestra los anexos del tipo 0Z para los cortes c_3 y q_3 de \mathcal{S}_3 . Se presenta, además, la sección afectada.

En general, si se anexa a $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$ una estructura kZ , sobre los cortes c_3 y q_3 de la separación \mathcal{S}_3 , el nuevo vox-sólido será $\mathcal{V}[m_1, j_1; i_2, j_2]$, $m_1 = (j_1 + k + 1)$ con $m_k = 16 + 4(m_1 + j_1 + i_2 + j_2)$ voxeles.

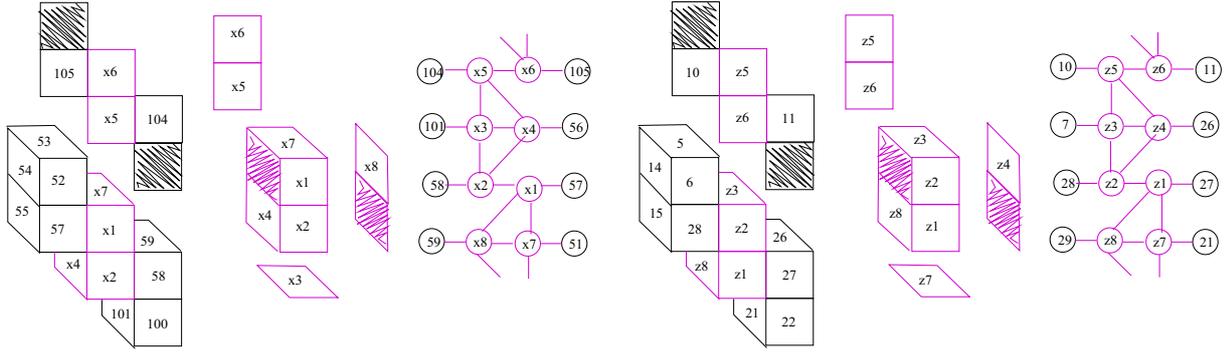


Figura 5.54: Anexos 0Z para los cortes c_3 y q_3

Generalización de las Separaciones

Las separaciones para la generalización quedan definidas como:

$\mathcal{S}_{0i} = \langle c_{oi}, q_{oi} \rangle$, cuyos cortes son:

$$c_{oi} = \langle X_o, Y_i \rangle = \{(1, B_1), (128, B_3), (127, B_6), (35, B_7)\};$$

$$q_{oi} = \langle A_o, Z_i \rangle = \{(95, N_1), (94, N_3), (93, N_6), (65, N_7)\}.$$

$\mathcal{S}_{1j} = \langle c_{1i}, q_{1i} \rangle$, con cortes:

$$c_{1i} = \langle X_1, Y_j \rangle = \{(121, E_1), (111, E_3), (110, E_6), (50, E_7)\};$$

$$q_{1j} = \langle A_1, Z_j \rangle = \{(83, R_1), (82, R_3), (16, R_6), (20, R_7)\}.$$

$\mathcal{S}_{2k} = \langle c_{2k}, q_{2k} \rangle$, cuyos cortes son:

$$c_{2k} = \langle X_2, Y_k \rangle = \{(151, U_1), (118, U_3), (43, U_6), (44, U_7)\};$$

$$q_{2k} = \langle A_2, Z_k \rangle = \{(87, V_1), (79, V_3), (72, V_6), (67, V_7)\}.$$

$\mathcal{S}_{3m} = \langle c_{3m}, q_{3m} \rangle$, con cortes:

$$c_{3m} = \langle X_3, Y_m \rangle = \{(104, M_1), (101, M_3), (58, m_2), (50, m_8)\};$$

$$q_{3m} = \langle A_3, Z_m \rangle = \{(10, W_5), (7, W_3), (28, W_2), (29, W_8)\}.$$

En la Figura 5.55 se presenta una abstracción del encaje en el toro para la Familia $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$ y se marcan los cortes generalizados.

Ahora, podemos concluir los siguientes resultados:

Lema 5.7 Para todo vox-sólido irreducible $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$ con m voxeles, donde $m \geq 32$ y $m = 16 + 4(i_1 + j_1 + i_2 + j_2)$, siempre existe una separación válida y, por tanto, siempre es posible construir, a partir de $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$, el vox-sólido $\mathcal{V}[k_1, \ell_1; k_2, \ell_2]$ con $i_1 \leq k_1 \leq i_1 + 1$, $j_1 \leq \ell_1 \leq j_1 + 1$, $i_2 \leq k_2 \leq i_2 + 1$ y $j_2 \leq \ell_2 \leq j_2 + 1$.

Teorema 5.4 Siempre es posible construir, a partir de $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$, el vox-sólido irreducible $\mathcal{V}[k_1, \ell_1; k_2, \ell_2]$ donde m , el número de voxeles, está determinado por $m = 16 + 4(k_1 + \ell_1 + k_2 + \ell_2)$.

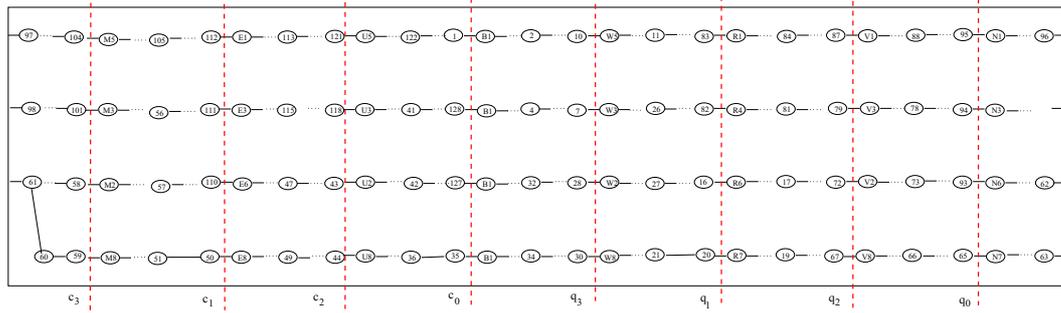


Figura 5.55: Abstracción del encaje en el toro para la Familia $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$

5.3. Vox-sólidos No-inductivos de Género $g > 2$

Saber que es posible generar vox-sólidos no inductivos cuya frontera sea una superficie de género mayor que 2 resulta interesante. A continuación presentamos dos vox-sólidos no-inductivos cuya frontera es una superficie de género 2, y uno más cuya frontera es una superficie de género 3. Además con el fin de facilitar su visualización contruimos sus gráficas de adyacencia de niveles respectivas.

La Figura 5.56 muestra un vox-sólido no inductivo, cuya frontera es una superficie de género 2. A la derecha, se despliegan sus niveles en profundidad y por pisos con las gráficas de niveles respectivas. Abajo se presentan los niveles por amplitud y la gráfica de niveles correspondiente. Observe que las tres gráficas de niveles tienen dos ciclos simples. Podemos precisar que este ejemplo sí es arista visible y tiene dimensiones $5 \times 4 \times 4$.

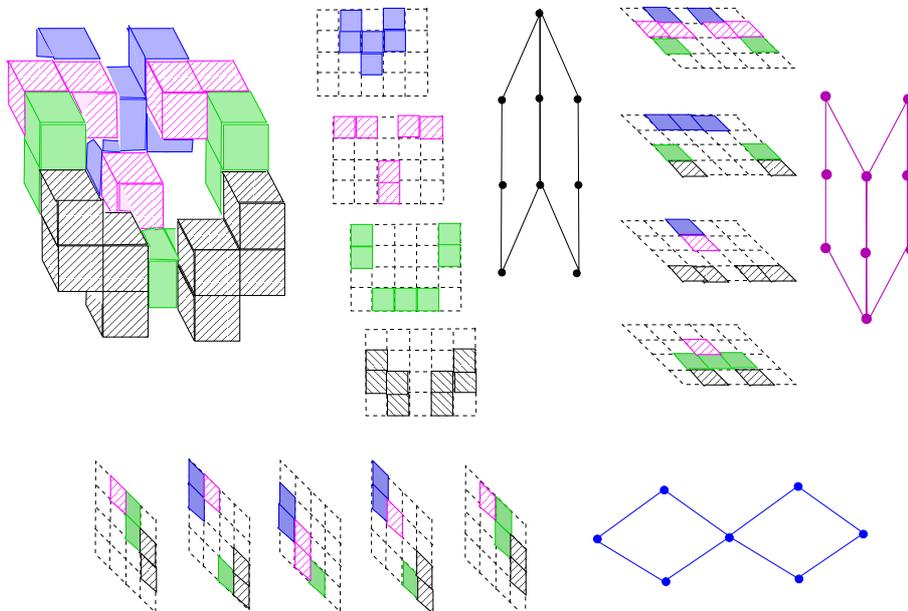


Figura 5.56: Vox-sólido no inductivo de género 2 con 27 voxes

Este vox-sólido se obtuvo a partir de \mathcal{L}_{16} , agregando dos estructuras 1V y una 2V. Si decidimos obtener un vox-sólido de genero mayor basta repetir la operación tantas veces como sea requerido.

También resulta fácil ver que podemos hacer algo similar con los otros vox-sólidos básicos y, además, de manera análoga se pueden construir familias infinitas de vox-sólidos no inductivos arista-visibles de género mayor que 1.

La Figura 5.57 muestra el encaje en el 2-toro de la gráfica facial del vox-sólido no inductivo de 27 voxeles presentado, anteriormente, en la Figura 5.56. Las líneas más gruesas, resaltadas en color negro, indican las aristas del ciclo Hamiltoniano.

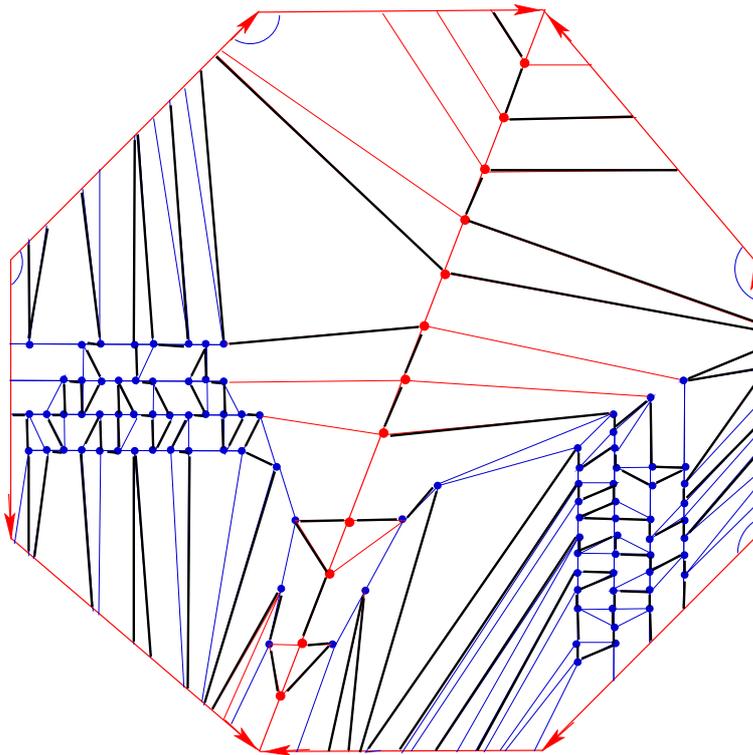


Figura 5.57: Representación planar del Vox-sólido no inductivo de género 2 y 27 voxeles

La Figura 5.58 muestra un vox-sólido no inductivo cuya frontera es una superficie de género 2 que no es arista visible y tiene dimensiones $8 \times 3 \times 10$. Como podemos ver, también se despliegan sus niveles y las gráficas respectivas.

La Figura 5.59 muestra un vox-sólido no inductivo, cuya frontera es una superficie de género 3, con 62 voxeles. Cabe especificar que no es arista-visible y sus dimensiones son $11 \times 4 \times 9$. Se despliegan sus gráficas de niveles respectivas.

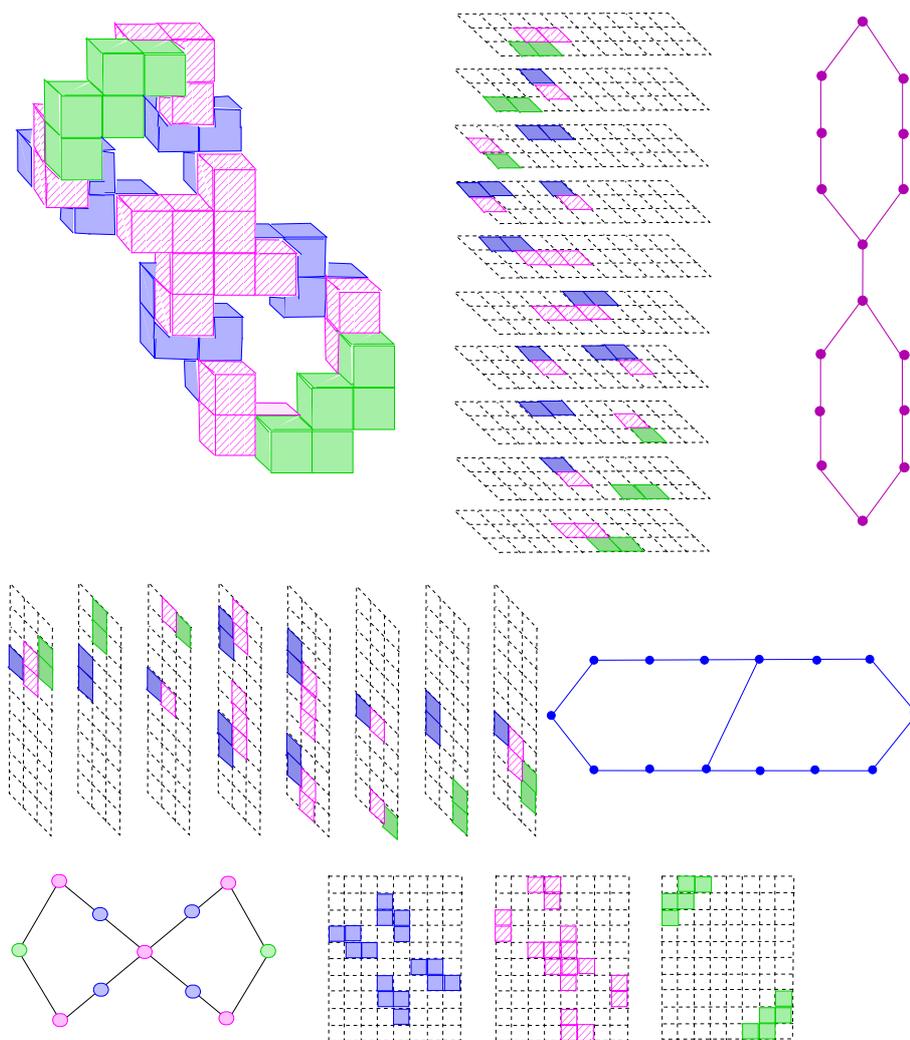


Figura 5.58: Vox-sólido no inductivo de género 2 y 44 voxeles

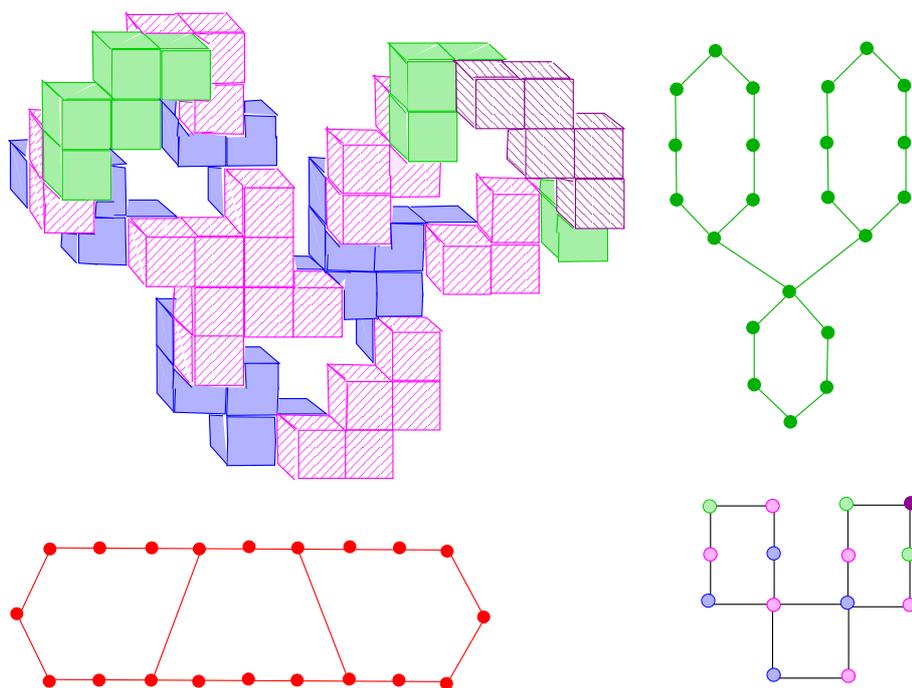


Figura 5.59: Vox-sólido no inductivo de género 3 y 62 voxeles

Capítulo 6

Vox-sólidos Irreducibles de Cardinalidad Mínima

A lo largo del Capítulo, presentamos la demostración exhaustiva de que \mathcal{L}_{16} no sólo es el menor vox-sólido no inductivo 3-laminado, sino que es el menor de todos los irreducibles. También, mostramos que \mathcal{F}_{20} es el más pequeño vox-sólido no inductivo 2-laminado.

Por el Teorema 3.2, sabemos que todo vox-sólido laminar es inductivo y por el Teorema 3.14, que los esféricos lo son. Con base en ello, todo vox-sólido no inductivo deberá tener más de un piso y ser toroidal.

El vox-sólido de menor tamaño que conocemos es \mathcal{L}_{16} , sus dimensiones son $4 \times 4 \times 3$. La estrategia para demostrar que \mathcal{L}_{16} es el menor de los vox-sólidos no-inductivos consiste en explorar en cada retícula con dimensiones $b \times d \times h$, para $2 \leq b \leq 4$, $2 \leq d \leq 4$, y $2 \leq h \leq 4$.

Veremos, también, que existen varios no-inductivos con 18 voxeles en una retícula con dimensiones $4 \times 4 \times 4$. Además, damos las condiciones necesarias para demostrar que el vox-sólido \mathcal{F}_{20} es el más pequeño vox-sólido no inductivo 2-laminado, de dimensiones $5 \times 5 \times 2$ y 20 voxeles.

Por otro lado, el vox-sólido toroidal más pequeño que tenemos es la tuerca, con 8 voxeles y dimensiones $3 \times 3 \times 1$. Es fácil ver que los vox-sólidos toroidales requieren un retículo $\mathcal{R}(b, d, h)$, tal que $b \geq 3, d \geq 3$ y $h \geq 1$. Entonces, realizaremos una revisión exhaustiva de los retículos $\mathcal{R}(b, d, h)$ tal que $b \geq 3, d \geq 3$ y $h \geq 2$. Consideraremos además que $b \geq d \geq h$, evitando así los casos repetidos.

Sin pérdida de generalidad, durante las demostraciones iremos construyendo los vox-sólidos, iniciando en el primer piso y continuando, así, piso por piso.

Definición 6.1 Una **Cadena de Voxeles** es una sucesión de voxeles ensamblados donde cada uno tiene exactamente dos vecinos, a excepción de sus extremos, que están unidos a un sólo voxel. Cabe señalar que, a los voxeles de grado dos, los llamaremos **voxeles internos**, o intermedios, mientras que a los de grado 1, **voxeles extremos**. Una cadena de voxeles l es una **línea de voxeles**, tal que si cualquier voxel intermedio es extraído, la cadena se desconecta.

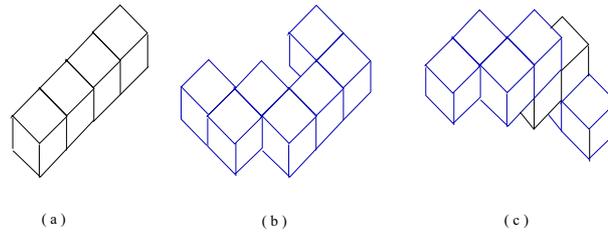


Figura 6.1: Ejemplo de cadenas

Definición 6.2 Una **cadena** de voxeles \mathcal{C} es **zig-zag** si al quitarle cualquier voxel intermedio ν , los voxeles adyacentes a ν quedan unidos sólo por una arista. Una **estructura** kl es una línea de k voxeles, $k \geq 3$. Sea $\mathcal{R}(b, d, h)$ un retículo, una **configuración** en \mathcal{R} es una cadena zig-zag en \mathcal{R} . Un **ciclo de voxeles** es una cadena de voxeles cerrada. Un **ciclo simple** de voxeles es un ciclo donde cada voxel tiene exactamente dos vecinos.

La Figura 6.1 muestra varias cadenas de voxeles, de las cuales únicamente (c) es cadena zig-zag y (a) es una línea de cuatro voxeles, $4l$.

Diremos que un ciclo simple \mathcal{C} tiene un **voxel bueno** ω , si ω es un voxel intermedio de una estructura kl , $k \geq 3$, contenida en \mathcal{C} .

Al quitar un voxel bueno de un ciclo, el objeto 3-dimensional resultante es un vox-sólido arbóreo. Por lo tanto, tener un voxel bueno en un ciclo simple garantiza que tal ciclo es un vox-sólido inductivo. Tomemos en cuenta que, también, podemos encontrar un voxel bueno en un vox-sólido que podría no ser un ciclo.

Definición 6.3 Sea \mathcal{V} un vox-sólido. Diremos que ω , es un **voxel bueno** si y sólo si:

1. ω tiene grado 2
2. ω está contenido en un ciclo
3. ω es un voxel intermedio de una (sub)estructura kl , $k \geq 3$.

Condiciones Iniciales

Se establecen resultados para determinar cuándo *sí* es posible generar un vox-sólido no inductivo arista-visible k -laminado con $2 \leq k \leq 3$. Se hará un estudio exhaustivo sobre los Retículos de dimensiones $b \times d \times h$, $\mathcal{R}(b, d, h)$, con $b, d \in \{3, 4, 5\}$ y $2 \leq h \leq 4$. Tal revisión tiene como objetivo encontrar al menor de los vox-sólido no inductivo.

Lema 6.1 Sea \mathcal{C} una configuración en un retículo $\mathcal{R}(b, d, h)$. Sean u, w los voxeles extremos de \mathcal{C} . Si $2 \leq d(u, w) \leq 3$, entonces es posible ensamblar el voxel u con w formando un vox-sólido en \mathcal{R} ; o bien, determinar que no es posible cerrar el ciclo para formar un vox-sólido.

Además, se tiene que:

1. Si $d(u, w) = 2$ el vox-sólido será inductivo.
2. Si $d(u, w) = 3$ el objeto resultante podría no ser un vox-sólido o podría ser un vox-sólido inductivo o no-inductivo.

Demostración. Sea C una configuración en el retículo $\mathcal{R}(b, d, h)$, cuyos voxeles extremos son u y w .

Caso 1. $d(u, w) = 2$.

La cadena C un vox-sólido arbóreo. Como $d(u, w) = 2$, basta un voxel ν para cerrar el ciclo. Por demostrar que el ν es un voxel bueno en el ciclo generado.

Nótese, que u y w tienen una coordenada igual y supongamos, sin pérdida de generalidad, que es la altura. es decir, $z_u = z_w = z$. Además, si todas las coordenadas fuesen diferentes $d(u, w) > 2$. Entonces $u = (x_u, y_u, z)$, $w = (x_w, y_w, z)$ y $d(u, w) = |x_u - x_w| + |y_u - y_w| + 0 = 2$.

Si $|x_u - x_w| = |y_u - y_w| = 1$, entonces u y w estarían unidos, únicamente, por una arista! Lo cual contradice el hecho de que la cadena zig-zag está bien formada. Por lo tanto, tenemos que $|x_u - x_w| = 0$ y $|y_u - y_w| = 2$ o bien $|x_u - x_w| = 2$ y $|y_u - y_w| = 0$. Esto significa que los voxeles u y w comparten dos coordenadas pero, como ν los une válidamente, tenemos que u , w y ν forman una línea de tres voxeles.

Por lo tanto, ν es un voxel bueno, ya que tiene grado 2, está en un ciclo y es un voxel intermedio de una 3l.

Podemos concluir, entonces, que el vox-sólido generado es inductivo.

Caso 2. $d(u, w) = 3$.

Tenemos que $d(u, w) = |x_u - x_w| + |y_u - y_w| + |z_u - z_w| = 3$. Existen tres formas diferentes de obtener 3 en tal suma: (a) $3 = 1+1+1$ (b) $3 = 2+1+0$ (c) $3 = 3+0+0$.

Caso 2a) Si $|x_u - x_w| = |y_u - y_w| = |z_u - z_w| = 1$, entonces los voxeles extremos u y v están unidos sólomente por un vértice. Las únicas cadenas zig-zag válidas, con esta característica son mostradas en la Figura 6.2: V_A y V_B . Nótese que una es el reflejo de la otra. Así, sin pérdida de generalidad, sólo trabajaremos con \mathcal{V}_A .

Se requieren dos voxeles para unir a u con v . Hay tres formas de hacerlo, dos de ellas son válidas, y generan un vox-sólido inductivo que no es arista-visible, mientras que la tercera crea una configuración prohibida. Las Figuras 6.2(c),(d) y (e) muestran estos casos.

Caso 2b) La suma es de la forma $3 = 2+1+0$. Es decir, una de las coordenadas es igual, una de las diferencias vale 2 y la otra 1. Suponga, sin pérdida de generalidad, que: $z_u = z_w = z$, $|x_u - x_w| = 2$, $|y_u - y_w| = 1$, $x_u < x_w$, $y_u < y_w$.

El voxel u tiene un vecino ν en la cadena y puede estar en las posiciones A, B, C, D . De manera similar, w tiene un vecino ω que puede estar en las posiciones a, b, c, d , donde:

$$A = (x_u, y_w, z), \quad B = (x_u - 1, y_u, z), \quad C = (x_u, y_u - 1, z), \quad D = (x_u, y_u, z - 1). \\ a = (x_w, y_w + 1, z), \quad b = (x_w + 1, y_w, z), \quad c = (x_w, y_w - 1, z), \quad d = (x_w, y_w, z - 1).$$

La Figura 6.3(a) ilustra la posición de los voxeles u, w y sus posibles vecinos.

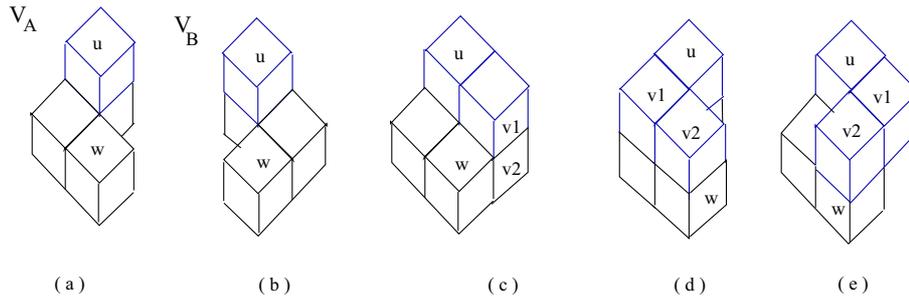


Figura 6.2: Cadenas zig-zag para el Caso 2a

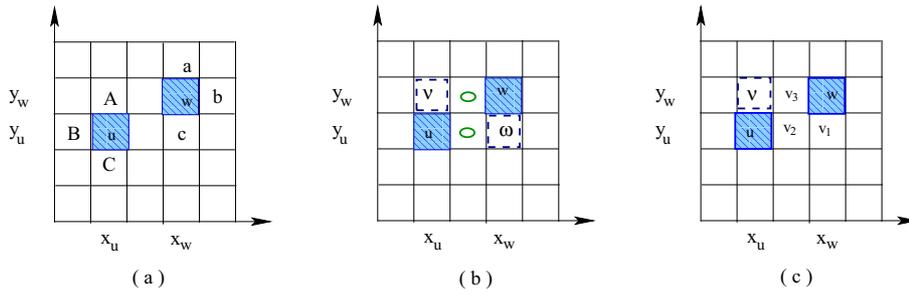


Figura 6.3: Posiciones de u , v y sus vecinos para el Caso 2b

2b-A) Supongamos $\nu = A = (x_u, y_w, z)$. El voxel ν es interno, por lo que tiene grado 2. No puede existir un voxel en la posición $(x_u + 1, y_w, z)$, ya que w no sería extremo y se tendría una línea de tres voxeles. De igual manera, no puede haber un voxel en $(x_u + 1, y_u, z)$, pues u es un extremo. Existen dos sub-casos: (A1) ω está en la posición c o (A2) ω puede estar en a, b ó d .

2b-A1) Si $\omega = (x_w, y_w - 1, z)$, la única forma de cerrar el ciclo, con el menor número de voxeles, es ubicando los nuevos voxeles en $(x_u + 1, y_u, z)$ y $(x_u + 1, y_w, z)$. Esto genera un vox-sólido inductivo que, además, no es arista-visible. La Figura 6.3(b) muestra los voxeles u, w, ν, ω ; también, se ilustran las posiciones no válidas para elementos de la cadena y, con un óvalo se muestra donde se pueden ubicar los voxeles para cerrar el ciclo.

2b-A2) ω puede estar en a, b ó d .

Sean $v_1 = (x_w, y_u, z)$, $v_2 = (x_u + 1, y_u, z)$ y $v_3 = (x_u + 1, y_w, z)$.

Hay dos formas de colocar los voxeles para unir u con w :

i) Al ubicar los voxeles v_1 y v_2 se genera un vox-sólido inductivo ya que u, v_2, v_1 forman una línea de tres voxeles.

ii) Al colocar los voxeles v_2 y v_3 se crea un vox-sólido inductivo pues ν, v_3, w forman una línea de tres voxeles.

La Figura 6.3(c) muestra la posición de los voxeles u, w, ν, v_1, v_2, v_3 . El lugar donde podría estar ω se ilustra con un círculo negro.

Además, debemos suponer que no hay voxeles en las posiciones: $(x_u + 1, y_w + 1, z - 1)$, $(x_u + 1, y_w + 1, z + 1)$, $(x_u + 1, y_u - 1, z - 1)$, $(x_u + 1, y_u - 1, z + 1)$ y

que para el caso de (2b-A2i) tampoco deben estar: $(x_w, y_u - 1, z - 1)$, $(x_w, y_u - 1, z + 1)$, $(x_w + 1, y_u - 1, z - 1)$, $(x_w + 1, y_u - 1, z + 1)$. Si alguno de estos voxeles existe, se tendrá una configuración prohibida y el objeto 3-dimensional no será vox-sólido.

2b-B) Supongamos que $\nu = B = (x_u - 1, y_u, z)$.

Si existe uno de los voxeles en las posiciones $p_1 = (x_u + 1, y_w + 1, z - 1)$, $p_2 = (x_u + 1, y_u + 1, z - 1)$, $q_1 = (x_u + 1, y_u - 1, z - 1)$, $q_2 = (x_w, y_u - 1, z - 1)$ o $q_3 = (x_w, y_u, z - 1)$ el objeto 3-dimensional resultante no es vox-sólido. Si está el voxel $p_3 = (x_u, y_w + 1, z - 1)$ el objeto resultante podría no ser un vox-sólido.

2b-B1) Supongamos que $\omega = (x_w, y_w - 1, z)$.

i) Sean $v_1 = (x_u + 1, y_u, z)$ y $v_2 = (x_u + 1, y_w, z)$ se genera un vox-sólido inductivo ya que ν, u, v_1, ω forman una línea de cuatro voxeles.

ii) Podría estar el voxel $p_4 = (x_u - 1, y_w, z - 1)$ si existe $v_5 = (x_u - 1, y_w, z)$. Sean $v_3 = (x_u, y_w, z)$ y $v_2 = (x_u + 1, y_w, z)$, se genera un vox-sólido inductivo, ya que v_1, v_2, w forman una línea de tres voxeles.

2b-B2) ω puede estar en a, b ó d .

i) Sean $v_1 = (x_w, y_u, z)$ y $v_2 = (x_u + 1, y_u, z)$ se genera un vox-sólido inductivo, ya que u, v_2, v_1 forman una línea de tres voxeles.

ii) El voxel $p_1 = (x_u + 1, y_w + 1, z - 1)$ podría estar si están los voxeles a y $v_4 = (x_u + 1, y_w + 1, z)$. Sean $v_2 = (x_u + 1, y_u, z)$ y $v_3 = (x_u + 1, y_w, z)$ se genera un vox-sólido inductivo ya que ν, u, v_2 forman una línea de tres voxeles.

iii) Si los voxeles a, p_4, p_3, p_1 no están, entonces podemos poner $v_5 = (x_u, y_w, z)$ y $v_3 = (x_u + 1, y_w, z)$ generando un vox-sólido inductivo, ya que v_5, v_3, w forman una línea de tres voxeles. Además, si existen los voxeles v_4 y a , el vox-sólido no sería arista-visible. Las Figuras 6.4(B1,B2) ilustran las posibles situaciones del caso 2b-B y sus subcasos.

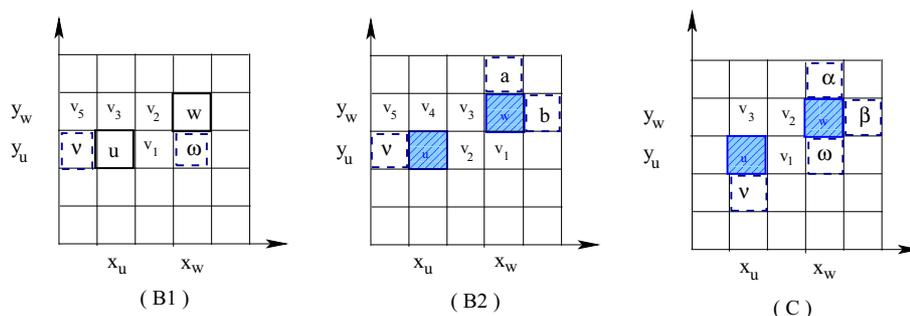


Figura 6.4: Posiciones de u, v y sus vecinos para el Caso 2b

2b-C) Supongamos que $\nu = C = (x_u, y_u - 1, z - 1)$.

La Figura 6.4(C) ilustra las posibles situaciones para el caso 2b-C y sus subcasos. Sean $v_1 = (x_u + 1, y_u, z)$, $v_2 = (x_u + 1, y_w, z)$ y $v_3 = (x_u, y_w, z)$.

Si existe alguno de los voxeles en las posiciones $p_1 = (x_u + 1, y_w + 1, z - 1)$,

$p_2 = (x_w, y_u - 1, z)$, $p_3 = (x_u + 1, y_w - 1, z - 1)$ y $p_4 = (x_u, y_w, z - 1)$, entonces el objeto 3-dimensional resultante no es un vox-sólido.

2b-C1) Si ω está en la posición $b = (x_w + 1, y_w, z)$ o en $c = (x_w, y_w - 1, z)$, basta anexar los voxeles v_1 y v_2 para unir u con w , generando así un vox-sólido inductivo.

2b-C2) Supongamos que ω está en a o d .

i) Sea $\omega = a = (x_w, y_w + 1, z)$. Basta anexar los voxeles v_1 y v_2 para unir u con w , para generar un vox-sólido inductivo. Se considera que no existen ni p_1 ni p_4 ni $p_5 = (x_w, y_u, z - 1)$ para tener un vox-sólido.

ii) Sea $\omega = d = (x_w, y_w, z - 1)$.

·) Al agregar los voxeles v_1 y v_2 se cierra el ciclo pero, para tener un vox-sólido requerimos no existan p_5, p_1, p_4 .

··) Al agregar los voxeles v_2 y v_3 se crea la cadena $3I : v_3, v_2, w$, generando así un vox-sólido inductivo. Para ello, se requiere que no existan los voxeles p_5, p_1, p_3 .

Caso 2c) La suma es de la forma $3 = 3+0+0$. Esto significa que los voxeles extremos u y v comparten dos coordenadas, es decir, son colineales. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $u = (x_u, y, z)$ y $v = (x_u + 3, y, z)$. Los voxeles que los unen, también son colineales a ellos y se presentan de la forma $u1 = (x_u + 1, y, z)$ y $u2 = (x_u + 2, y, z)$.

Lo anterior, induce una línea de, al menos, cuatro voxeles. Así, el objeto obtenido será un vox-sólido, si los voxeles están ensamblados.

Como vimos en el caso anterior, puede haber voxeles en el piso $z - 1$, con los cuales podría producirse una configuración prohibida.

Después de analizar todos los casos, podemos concluir que el lema se satisface.

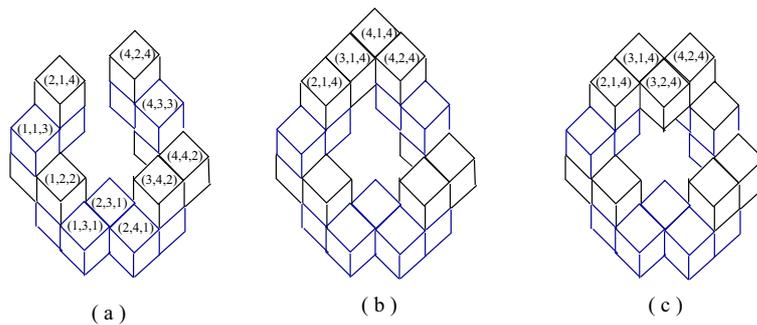


Figura 6.5: Ejemplo para el Lema 6.1, Caso 2b-B

En la Figura 6.5 presentamos un ejemplo del Lema 6.1, Caso 2b-B. En (a), presentamos una cadena zig-zag C cuyos extremos son los voxeles $w = (2, 1, 4)$ y $v = (4, 2, 2)$. En (b), se obtiene un vox-sólido inductivo al anexar los voxeles $p = (3, 1, 4)$ y $q = (4, 1, 4)$, formando

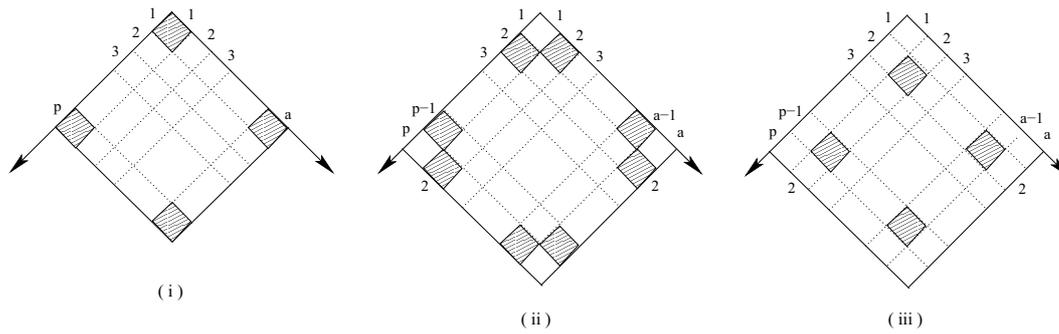


Figura 6.6: Posiciones para el Lema 6.2

una línea de tres voxeles: w, p, q . Finalmente, en (c), se obtuvo un vox-sólido irreducible al agregar los voxeles p y $r = (3, 2, 4)$.

Lema 6.2 Sea $\mathcal{R}(a, p, h)$ un retículo con $a, p \geq 2$. Suponga que en el primer piso se encuentra una estructura E del tipo kV o kZ , $k \geq 1$. Tal que una de las siguientes situaciones se cumple:

- i) Al menos un voxel extremo v de E se encuentra en una esquina de \mathcal{R} , es decir,

$$v \in \{(1, 1, 1), (a, 1, 1), (1, p, 1), (a, p, 1)\}.$$
- ii) Al menos un voxel extremo v de E está a distancia 1 de una esquina de \mathcal{R} : $v \in \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (a-1, 1, 1), (a, 2, 1), (1, p-1, 1), (2, p, 1), (a-1, p, 1), (a, p-1, 1)\}$
Es decir, v comparte una cara con una esquina; es un 6-vecino de ésta.
- iii) Al menos un voxel extremo de E está en una de las siguientes posiciones:

$$v \in \{(2, 2, 1), (2, p-1, 1), (a-1, 2, 1), (a-1, p-1, 1)\}$$
 Es decir, v sólo comparte una arista con la esquina, es un 18-vecino de ésta.

Entonces, no podrán unirse a los extremos de E para formar un vox-sólido no inductivo arista-visible 2-laminado.

La Figura 6.6 ilustra las posiciones en el retículo $\mathcal{R}(a, p, h)$ consideradas por el Lema 6.2.

Demostración. Sea un retículo $\mathcal{R}(a, p, h)$ con $a, p \geq 2$. Suponga que en el primer piso se encuentra una estructura E del tipo kV o kZ , $k \geq 1$.

Caso (i) Voxel Extremo en una esquina.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que el extremo v está en la posición $(1, 1, 1)$. La Figura 6.7 muestra las dos opciones, (A) y (B), donde es posible poner una estructura. En ambos casos, debemos poner el voxel $v = (1, 1, 2)$.

i-A) Poner uno de los voxeles $x = (1, 2, 2)$ o $b = (2, 2, 2)$ induce a una configuración prohibida. Al poner $c = (2, 1, 2)$, se crea un objeto que no es arista-visible. Por lo tanto, no es posible avanzar para cerrar el ciclo y formar un vox-sólido.

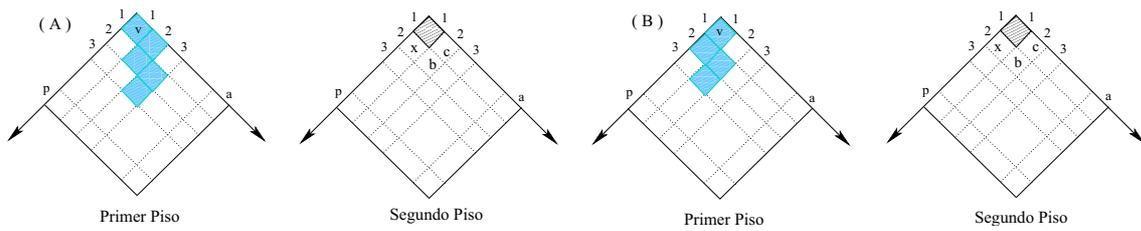


Figura 6.7: Configuraciones posibles, Lema 6.2(i).

i-B) Similar al caso A, con $c = (2, 1, 2)$, $b = (2, 2, 2)$ y $x = (1, 2, 2)$.

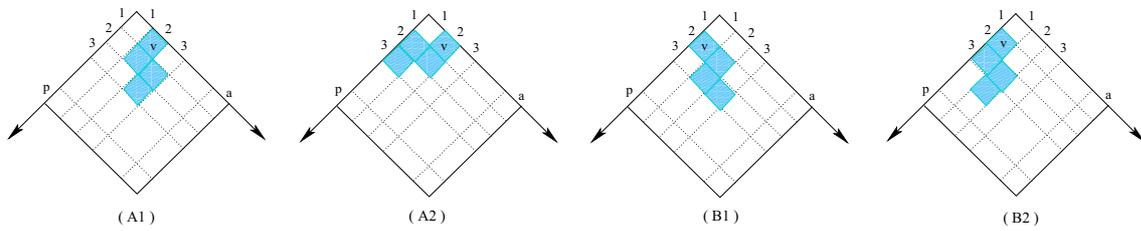


Figura 6.8: Configuraciones posibles, Lema 6.2(ii).

Caso (ii) Voxel Extremo a distancia 1 de una esquina.

Sin pérdida de generalidad, fijamos en una esquina, por ejemplo, la $(1,1,1)$. Tenemos dos, así, opciones para el extremo v : (A) $v = (2, 1, 1)$; (B) $v = (1, 2, 1)$.

La Figura 6.8 muestra las opciones en que es posible poner una estructura kV o kZ en estos casos, mientras que la Figura 6.9 muestra las opciones posibles para el segundo piso. El círculo indica que hay un voxel en el primer piso.

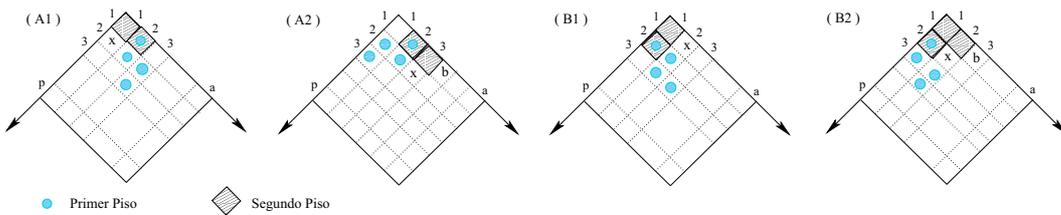


Figura 6.9: Opciones posibles del 2º piso, Lema 6.2(ii).

ii-A1) En el segundo piso sólo es posible poner sobre v un voxel en $(2,1,2)$ y uno más en $(1,1,2)$. Poner $x = (1, 2, 2)$ produce una configuración prohibida. Así que ya no es posible acercarse al otro extremo. Nótese que, aunque la estructura pueda crecer más por el otro extremo, no será posible unir los extremos en ambos pisos.

ii-A2) En este caso, sólo podemos colocar una estructura $1V$ o $1Z$ en el primer piso. Como estamos revisando el voxel $v = (2, 1, 1)$, no nos fijaremos en el otro extremo. Así, solo es posible poner los voxeles $(2, 1, 2)$ y $(3, 1, 2)$ en el segundo piso. Mientras

tanto, colocar $x = (3, 2, 2)$ genera una configuración prohibida y poner $b = (4, 1, 2)$, induce una línea de tres voxeles.

ii-B1) Similar al subcaso A1.

ii-B2) En el segundo piso colocamos una 1V con voxeles $(1, 2, 2)$, $(1, 1, 2)$ y $(2, 1, 2)$. Poner $x = (2, 2, 2)$, genera una configuración prohibida. En el caso de colocar $b = (3, 1, 2)$ se induce una línea de tres voxeles.

Por lo tanto, podemos concluir que no es posible unir los extremos de la configuración construida en el caso (ii) para formar un vox-sólido no inductivo arista-visible.

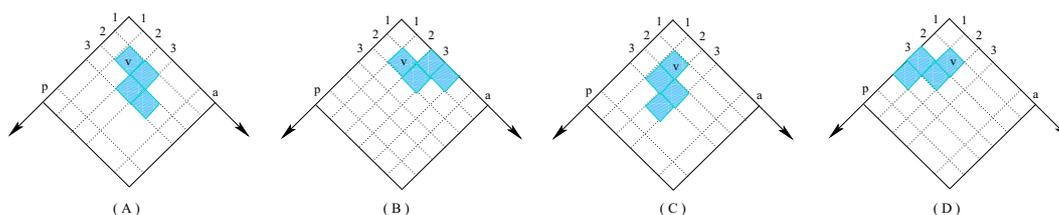


Figura 6.10: Configuraciones posibles, Lema 6.2(iii).

Caso (iii) Voxel extremo 18-vecino de una esquina.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que el extremo v está en la posición $(2, 2, 1)$. La Figura 6.10 muestra las opciones en que es posible poner una estructura.

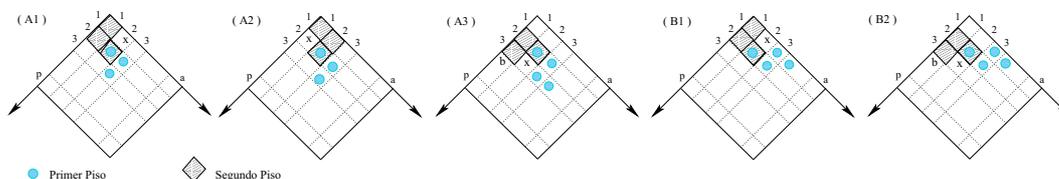


Figura 6.11: Opciones posibles del 2º piso Lema 6.2(iii), A y B.

La Figura 6.11 muestra las opciones para el segundo piso de los subcasos A y B.

iii-A1) En el segundo piso, colocamos 1V: $(2, 2, 2)$, $(1, 2, 2)$ y $(1, 1, 2)$. Poner $x = (2, 1, 2)$ o $e = (3, 1, 2)$, genera una configuración prohibida.

iii-A2) En el segundo piso colocamos 1V: $(2, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$ y $(1, 1, 2)$. Poner $x = (1, 2, 2)$ crea un objeto que no es arista-visible; $e = (1, 1, 1)$ genera una configuración prohibida.

iii-A3) En el segundo piso, colocamos 1V: $(2, 2, 2)$, $(1, 2, 2)$ y $(1, 3, 2)$. Poner $x = (2, 3, 2)$ o $e = (1, 3, 1)$, genera una configuración prohibida. Mientras que colocar $b = (1, 4, 2)$, induce una línea de tres voxeles.

iii-B1) Similar al subcaso A1.

iii-B2) En el segundo piso, colocamos 1V: $(2, 2, 2)$, $(1, 2, 2)$ y $(1, 3, 2)$. Poner $x = (2, 3, 2)$, genera un objeto que no es arista-visible y colocar $b = (1, 4, 2)$ induce tres voxeles en línea.

La Figura 6.12 muestra las opciones para el segundo piso de los subcasos C y D.

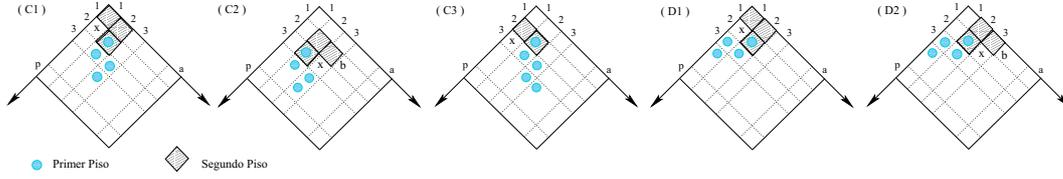


Figura 6.12: Opciones posibles del 2º piso Lema 6.2(iii), C y D.

iii-C1) Similar al subcaso A2.

iii-C2) En el segundo piso, colocamos 1V: $(2, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$ y $(3, 1, 2)$.

Poner $x = (3, 2, 2)$ o $e = (3, 1, 1)$, genera una configuración prohibida. Colocar $b = (4, 1, 2)$ induce línea de tres voxeles.

iii-C3) En el segundo piso, colocamos una 0Z: $(2, 2, 2)$ y $(1, 2, 2)$.

Poner $x = (1, 3, 2)$ genera una configuración prohibida.

iii-D1) Similar al subcaso A2.

iii-D2) En el segundo piso, colocamos 1V: $(2, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$ y $(3, 1, 2)$.

Poner $x = (3, 2, 2)$ crea un objeto no arista-visible y colocar $b = (4, 1, 2)$ induce tres voxeles en línea.

Por lo tanto, podemos concluir que no es posible unir los extremos de la configuración construida en el caso (iii) para formar un vox-sólido no inductivo arista-visible.

Por lo tanto, el lema se cumple.

Lema 6.3 Sea $\mathcal{R}(a, p, h)$ un retículo con $a, p \geq 3$. Suponga que en el primer piso está una estructura E del tipo kV o kZ , $k \geq 1$, la cual ha sido extendida como una cadena zig-zag C de dos pisos. si sucede una de las siguientes situaciones:

i) En una esquina hay dos voxeles apilados y uno de ellos, el del segundo piso, es un extremo de la cadena C . Los voxeles son de la forma:

$$\begin{aligned} v &= (1, 1, 1), & w &= (1, 1, 2); & v &= (a, 1, 1), & w &= (a, 1, 2) \\ v &= (1, p, 1), & w &= (1, p, 2); & v &= (a, p, 1), & w &= (a, p, 2) \end{aligned}$$

ii) Un extremo de la cadena queda en una esquina del primer piso.

iii) Un extremo de la cadena queda en una esquina del segundo piso.

Entonces no será posible unir los extremos de la cadena C para formar un vox-sólido no inductivo arista-visible y 3-laminado,

Demostración. Sea $\mathcal{R}(a, p, h)$ un retículo con $a, p \geq 3$. Suponga que en el primer piso está una estructura E del tipo kV o kZ , $k \geq 1$, como se pide.

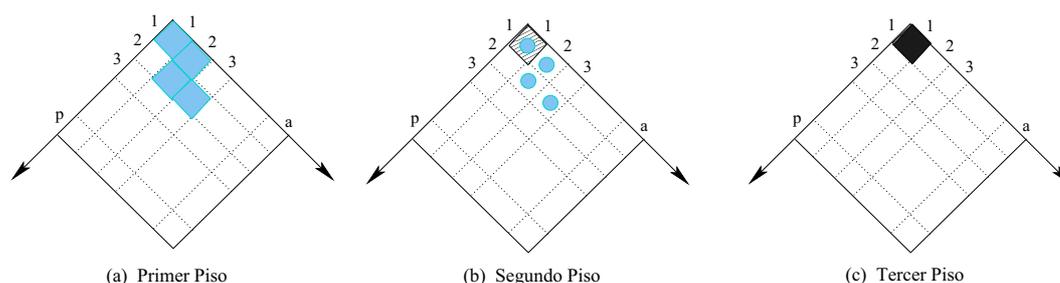


Figura 6.13: Ejemplificación del Lema 6.3(i)

Caso (i) Dos voxeles v, w apilados en una esquina: w extremo en el segundo piso. Sean $v = (x, y, 1)$ y $w = (x, y, 2)$ los voxeles apilados en una esquina de \mathcal{R} , con $x \in \{1, a\}$ y $y \in \{1, p\}$. Para el tercer piso, se requiere poner $u = (x, y, 3)$, lo cual genera una línea de tres voxeles. La Figura 6.13 muestra, parcialmente, los tres pisos en este caso; el círculo en (b) indica que hay un voxel en el primer piso.

Caso (ii) Extremo en una esquina del primer piso. Sea $v = (x, y, 1)$ el voxel extremo en una esquina de \mathcal{R} , con $x \in \{1, a\}$ y $y \in \{1, p\}$. Si poner en el segundo piso a $w = (x, y, 2)$ es posible, tenemos el caso anterior. No es posible poner a w cuando en la cadena existe un voxel en la posición $\omega = (x + 1, y + 1, 2)$. La Figura 6.14 muestra, parcialmente, los tres pisos en este último caso.

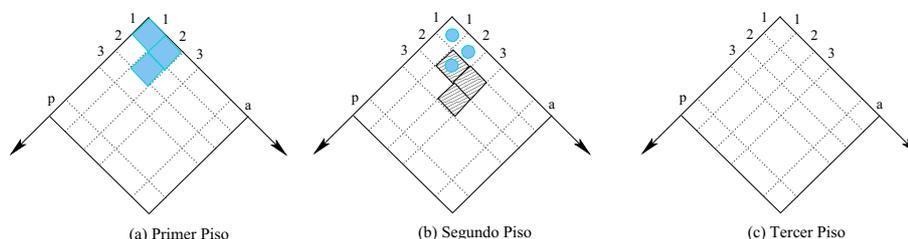


Figura 6.14: Un caso no posibles del Lema 6.3(ii)

Caso (iii) Extremo en una esquina del segundo piso. Tenemos, básicamente, dos casos: (A) En la esquina del segundo piso está una estructura $1V$; (B) En la esquina del segundo piso está una estructura kV , con $k \leq 2$ ó jZ , con $j \geq 1$.

iii-A) Sin pérdida de generalidad, supongamos que tenemos, en el segundo piso, la estructura $1V$ dada por los voxeles $(1, 1, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 2)$. Para el primer piso, tenemos tres formas de acomodar una estructura kV ó kZ , $k \geq 1$. Para las tres configuraciones, debemos colocar el voxel $\nu = (1, 1, 3)$. Al poner $\alpha = (1, 2, 3)$ o $\gamma = (2, 2, 3)$ se produce una configuración prohibida. Al colocar $\beta = (2, 1, 3)$, se genera un objeto no arista-visible, como podemos ver en la Figura 6.15.

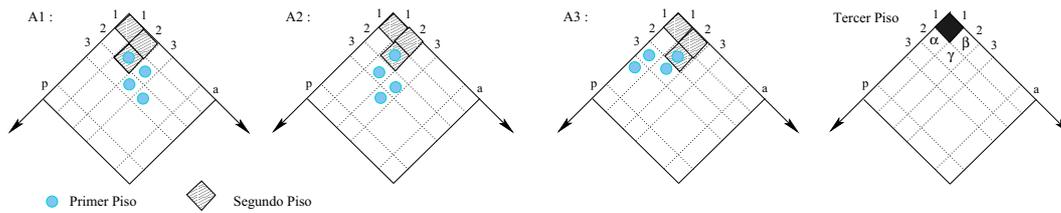


Figura 6.15: Subcaso A del Lema 6.3(iii)

iii-B) Sin pérdida de generalidad, supongamos que en el segundo piso, tenemos la estructura $1Z$ dada por los voxeles $(1, 1, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 2)$ y $(3, 2, 2)$. Para el primer piso, tenemos tres formas de acomodar una estructura kV ó kZ , $k \geq 1$. Para las tres configuraciones, debemos colocar el voxel $\nu = (1, 1, 3)$. Al poner $\alpha = (1, 2, 3)$ o $\gamma = (2, 2, 3)$ se produce una configuración prohibida. Mientras que, al colocar $\beta = (2, 1, 3)$ genera un objeto no arista-visible. La Figura 6.16 muestra este subcaso.

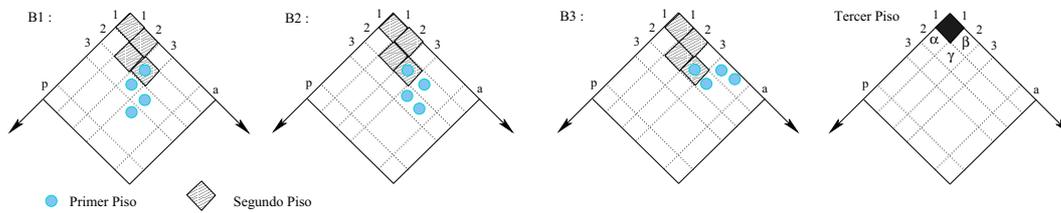


Figura 6.16: Subcaso B del Lema 6.3(iii)

Por lo tanto, no es posible extender la configuración para unir los extremos de la cadena C. Podemos concluir que el lema se satisface.

Exploración Exhaustiva

La estrategia consiste en determinar cadenas zig-zag de la mayor longitud posible en retículos $\mathcal{R}(a, p, h)$, a partir de la configuración obtenida $\mathcal{R}(a, p, h)$. Intentamos cerrar el ciclo para formar un vox-sólido no inductivo arista-visible. Al llevarlo a cabo, el objeto 3-dimensional obtenido podría no ser un vox-sólido y presentarse así una configuración prohibida.

La exploración de retículos $\mathcal{R}(a, p, h)$ para $3 \leq a \leq 4, 3 \leq p \leq 4, 2 \leq h \leq 4$, se hará con el objetivo de encontrar un vox-sólido no inductivo de tamaño menor, o igual, a 16 en $\mathcal{R}(4, 4, 3)$. Continuaremos con la exploración en retículos $\mathcal{R}(a, p, h)$ donde $a = 5, 3 \leq p \leq 5, h = 2$, para intentar construir un vox-sólido no inductivo de tamaño menor, o igual, a 20; conocemos a \mathcal{F}_{20} en $\mathcal{R}(5, 5, 2)$.

El siguiente vox-sólido no inductivo 2-laminado que conocemos es \mathcal{F}_{24} , que cabe en $\mathcal{R}(6, 6, 2)$. Después, tenemos a \mathcal{F}_{28} y \mathcal{V}_{32} en $\mathcal{R}(7, 7, 2)$. Con ello, que resulta interesante saber si existen otros vox-sólidos no inductivos en $\mathcal{R}(a, p, h)$ con $5 \leq a \leq 7, 2 \leq p \leq 7, h = 2$.

Iniciamos la búsqueda enunciando el siguiente resultado, que se deduce de los Lemas 6.2 y 6.3:

Teorema 6.1 No es posible construir un vox-sólido $\mathcal{V} \in \mathcal{AV} \cap \mathcal{NI}$ en un retículo $\mathcal{R}(a, p, 2)$, para $a \leq 4$, $p \leq 4$.

Ahora podemos establecer que no es posible construir un vox-sólido no inductivo en un retículo $\mathcal{R}(a, 3, 2)$, para toda $a \geq 5$.

Lema 6.4 Sea $\mathcal{R}(a, 3, 2)$ un retículo con $a \geq 5$. Sea E una estructura del tipo 1V, 1Z, 2V o 2Z. Sea $v = (k, y)$ el voxel extremo de E más cercano al límite a . Si $d = a - k$, entonces no es posible construir un vox-sólido no inductivo en \mathcal{R} , cuando $d \geq 1$.

La Figura 6.17 ilustra, sin pérdida de generalidad, la posición de la estructura E en el primer piso del retículo \mathcal{R} . El círculo blanco señala que, en esa posición puede ir, o no, un voxel, dependiendo de si E es una jZ o jV , $1 \leq j \leq 2$.

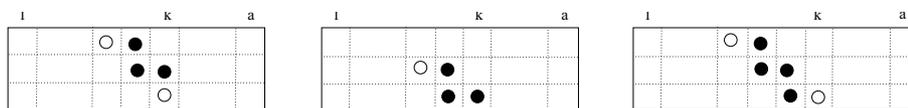


Figura 6.17: Posiciones para el Lema 6.4

Demostración. Tenemos $d = a - k$. Haremos inducción sobre d .

Caso $d = 1$. Entonces $a - k = 1$, luego $a = k + 1$. Podemos poner:

(A) 1V o 1Z en el primer piso. (B) 2V o 2Z en el primer piso.

En cualquiera de los casos, se tiene que, por el Lema 6.2, no es posible construir un vox-sólido no inductivo arista-visible 2-laminado. La Figura 6.18 ilustra los casos para $d = 1$.

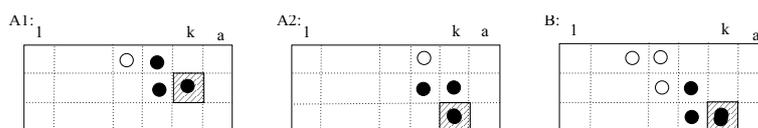


Figura 6.18: Caso base $d=1$, del Lema 6.4

Caso $d = 2$. Entonces, $(a - k) = 2$, luego $a = k + 2$. Podemos poner:

(A) 1V o 1Z en el primer piso. (B) 2V o 2Z en el primer piso.

Hay dos opciones para cada casos, que son ilustradas en la Figura 6.19.

A1. Para extender la cadena zig-zag, podemos poner una 1V, lo cual no se puede llevar a cabo ya que, al poner el voxel α , éste induce una línea de tres voxes. Al colocar β queda un objeto 3-dimensional que no es arista-visible. Por lo tanto, no es posible crear el vox-sólido no inductivo.

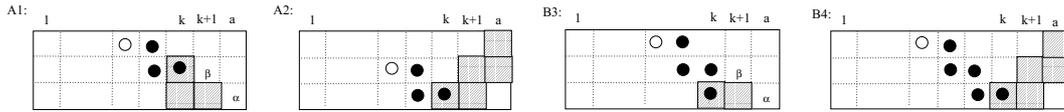


Figura 6.19: Caso base $d=2$, del Lema 6.4

A2. Al extender la cadena zig-zag podemos poner una $2V$. Con ello quedará un voxel en la esquina del segundo piso. Con base en el Lema 6.3(iii), no es posible construir el vox-sólido no inductivo.

A3. Para extender la cadena zig-zag podemos poner una $0Z$ pero ya no la ponemos extender, esto último debido a que el voxel α induce una línea de tres voxes. Por otro lado, al colocar β , se tiene una unión no válida. Por lo tanto, no es posible crear el vox-sólido no inductivo.

A4. Al extender la cadena zig-zag, podemos poner una $2V$ pero quedará un voxel en la esquina del segundo piso. Por el Lema 6.3(iii), no es posible construir el vox-sólido no inductivo.

Caso $d = 3$. Entonces $(a - k) = 3$, luego $a = k + 3$. Podemos colocar:

(A) $1V$ o $1Z$ en el primer piso. (B) $2V$ o $2Z$ en el primer piso.

Existen dos opciones para cada uno de estos casos.

B1. Para extender la cadena zig-zag, podemos poner una $1V$ pero ya no la ponemos extender pues, al poner el voxel α , éste induce una línea de tres voxes. Al colocar β queda un objeto 3-dimensional que no es arista-visible. Por lo tanto no es posible crear el vox-sólido no inductivo.

B2. Al extender la cadena zig-zag, podemos poner una $2Z$ pero, queda un voxel en la esquina del segundo piso. Por el Lema 6.3(iii) no es posible construir el vox-sólido no inductivo.

B3. Para extender la cadena zig-zag, podemos poner una $0Z$ pero ya no la ponemos extender pues, al poner el voxel α , éste induce una línea de tres voxes. Por otro lado, al colocar β , se tiene una unión no válida. Por lo tanto, no es posible crear el vox-sólido no inductivo.

B4. Al extender la cadena zig-zag, podemos poner una $2Z$ pero queda un voxel en la esquina del segundo piso. Con base en el Lema 6.3(iii), no es posible construir el vox-sólido no inductivo.

Ahora, supongamos que para toda d^* , $2 \leq d^* \leq d = a - k$, no es posible construir un vox-sólido no inductivo en $a \times 3 \times 2$.

Por demostrar que tampoco se puede cuando $d = (a + 1) - k = (a - k) + 1$.

Hay cuatro casos por revisar:

1. Ponemos una $1V$, ahora $d^* = (a + 1) - (k + 1) = a - k = d$.

Por hipótesis de inducción, el lema se satisface.

2. Si ponemos una 1Z, se *avanzan* dos posiciones.
 Ahora, $d^* = (a + 1) - (k + 2) = a - k - 1 = a - (k + 1) < a - k = d$.
 Por hipótesis de inducción, el lema se satisface.
3. Al colocar una 2V, tenemos $d^* = (a + 1) - (k + 2) = a - k - 1 < a - k = d$.
 Por hipótesis de inducción, el lema se satisface.
4. Si podemos poner una 2Z, se *avanzan* tres posiciones.
 Entonces, $d^* = (a + 1) - (k + 3) = a - k - 2 = a - (k + 2) < a - k = d$.
 Por hipótesis de inducción, el lema se satisface.

La Figura 6.20 ilustra el paso inductivo del Lema 6.4.

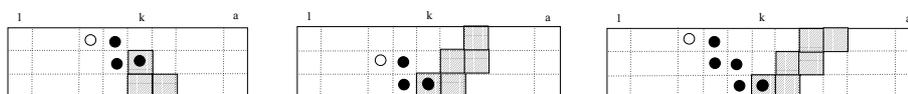


Figura 6.20: Paso inductivo del Lema 6.4

Teorema 6.2 No es posible construir un vox-sólido $\mathcal{V} \in \mathcal{AV} \cap \mathcal{NI}$ en un retículo $\mathcal{R}(a, 3, 2)$ con $a \geq 2$

Demostración. Para $a \leq 4$ el Teorema es válido. Sea $a \geq 5$. Consideraremos dos caso:

(I) $5 \leq a \leq 6$ y (II) $a > 7$.

Sea E una estructura del tipo 1V, 1Z, 2V o 2Z.

Caso I. Sea $5 \leq a \leq 6$. La Figura 6.21 muestra las configuraciones posibles. El círculo blanco indica que en esa posición puede ir, o no, un voxel, dependiendo si E es una 1Z o 1V. El de color azul indica hay un voxel en esa posición.

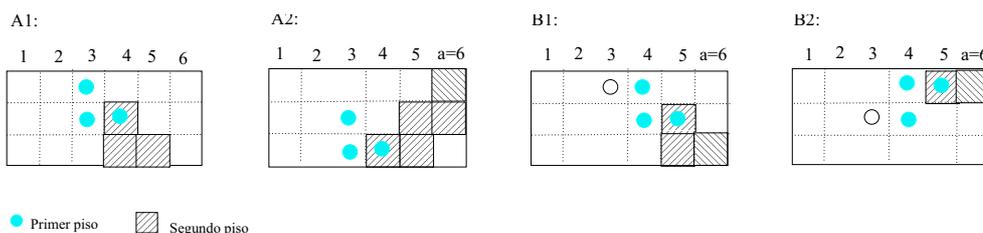


Figura 6.21: Casos para $5 \leq a \leq 6$ del Teorema 6.2

I-A. En el primer piso ponemos una 1V a partir de la posición 3. Con el fin de evitar satisfacer las condiciones del Lema 6.2. Si $a = 5$, el otro extremo está a distancia 1 de una esquina o bien, es un 18-vecino de la esquina. Si $a = 6$, se puede poner una 1V y un extremo queda a distancia 1 de la esquina. En otro caso se puede poner una 2V y, así un voxel queda

en una esquina del segundo piso.

Por lo tanto, por el Lema 6.2 no es posible construir un vox-sólido no inductivo. La Figura 6.21 (A1, A2) ilustra estos casos.

I-B. Colocamos una 1Z en el primer piso a partir de la posición 3, para evitar satisfacer las condiciones del Lema 6.2. Si $a = 5$, el otro extremo está a distancia 1 de una esquina o bien, es una esquina. Si $a = 6$, se tiene que el otro extremo queda a distancia 1 de una esquina, o bien, es un 18-vecino de la esquina. Entonces, por el Lema 6.2 no es posible construir el vox-sólido no inductivo. La Figura 6.21 (B1, B2) ilustra estos casos.

I-C. Ponemos, en el primer piso, a partir de la posición 3, una 2V para evitar satisfacer las condiciones del Lema 6.2. Si $a = 5$, el otro extremo es una esquina. Si $a = 6$, el otro extremo está a distancia 1 de una esquina. Por lo tanto, con base en el Lema 6.2 no es posible construir un vox-sólido no inductivo. La Figura 6.22 (C1, C2) ilustra estos casos.

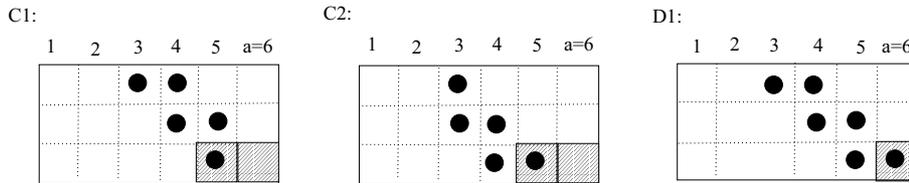


Figura 6.22: Ilustración para $5 \leq a \leq 6$ del Teorema 6.2

I-D. Colocamos una 2Z a partir de la posición 3 para evitar satisfacer las condiciones del Lema 6.2. Sólo es posible colocar esta estructura cuando $a = 6$. Con ello, se tiene que el otro extremo es una esquina. Entonces, por el Lema 6.2 no es posible construir el vox-sólido no inductivo. La Figura 6.22 (D1) ilustra estos casos.

Caso II. Sea $a \geq 7$. A partir de la posición 3, ubicamos una estructura 1V, 1Z, 2V o 2Z en el primer piso, para evitar cumplir las condiciones del Lema 6.2.

Sea $\nu = (x, y, 1)$ el voxel más cercano al límite a . Tenemos que $k \geq 4$ y $a \geq 7$, entonces $d = a - k \geq 7 - 4 = 3$. Es decir, $d \geq 2$. Por lo tanto se satisfacen las condiciones del Lema 6.4.

Finalmente, podemos concluir que no es posible construir un vox-sólido no inductivo en $\mathcal{R}(a, 3, 2)$ con $a \geq 2$.

Lema 6.5 No es posible construir un vox-sólido $\mathcal{V} \in \mathcal{AV} \cap \mathcal{NI}$ en un retículo $\mathcal{R}(3, 3, 3)$.

Demostración. Al colocar una de las estructuras 1Z o 2V en el primer piso, en el segundo piso quedará un voxel en alguna esquina. Entonces, por el Lema 6.2, no es posible construir un vox-sólido no inductivo.

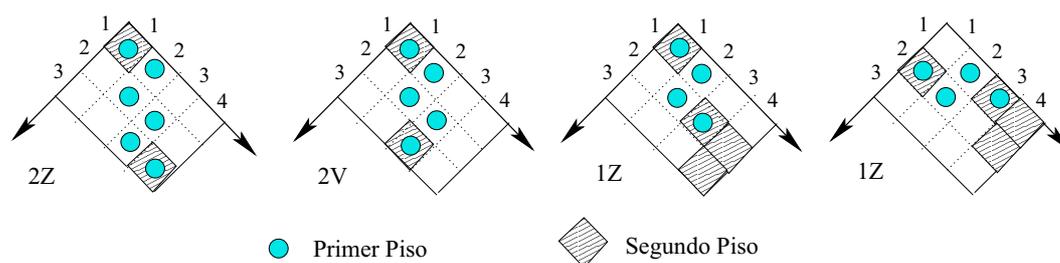


Figura 6.23: Casos para el Lema 6.6

Lema 6.6 No es posible construir un vox-sólido $\mathcal{V} \in \mathcal{AV} \cap \mathcal{NI}$ en un retículo $\mathcal{R}(4, 3, 3)$.

Demostración. En el primer piso podemos poner: (I) 2Z (II) 2V (III) 1Z (IV) 1V.

La Figura 6.23 ilustra estos casos.

I. Si ponemos una 2Z en el primer piso, en el segundo sólo podemos colocar un voxel sobre los extremos. Por el Lema 6.3(i), no es posible construir el vox-sólido no inductivo.

II. Hay dos formas de poner una 2V en el primer piso. Para ambas quedará un voxel extremo en una esquina. Así, para hacer crecer la cadena zig-zag, se deberá apilar ahí un voxel. Por el Lema 6.3(i), no es posible construir el vox-sólido no inductivo.

III. Tenemos dos maneras de colocar una 1Z.

a. Ponemos un extremo en una esquina. Entonces en el segundo piso, quedan dos voxeles apilados en la esquina. Por el Lema 6.3(i), no es posible construir el vox-sólido no inductivo. También podemos poner, en el otro extremo, una 1V en el segundo piso. Al hacerlo, un extremo de la cadena extendida quedará en una esquina del segundo piso. Por el Lema 6.3(iii), no es posible construir el vox-sólido no inductivo.

b. La otra forma, consiste en poner los extremos a distancia 1 de la esquina. Así, al extender la cadena, se tendrá que un extremo queda en una esquina del segundo piso. Por el Lema 6.3(iii), no es posible construir el vox-sólido no inductivo.

IV. Tenemos, prácticamente, dos maneras de colocar una 1V.

a. Ponemos un extremo en una esquina, con lo cual, en el segundo piso quedan dos voxeles apilados en la esquina. Con base en el Lema 6.3(i) no es posible construir el vox-sólido no inductivo.

b. La otra forma consiste en poner los extremos a distancia 1 de la esquina. Así, al extender la cadena, se tendrá que un extremo queda en una esquina del segundo piso. Por el Lema 6.3(iii), no es posible construir el vox-sólido no inductivo.

Nótese que, el Caso (IV) se reduce al (III), ya que en este último las estructuras 1V quedan en el primer piso, mientras que las 1Z, en el segundo. En el Caso (IV), la 1V queda en el segundo piso y las 1Z en el primero.

Por lo tanto, el lema se satisface.

Lema 6.7 No es posible construir un vox-sólido $\mathcal{V} \in \mathcal{AV} \cap \mathcal{NI}$ en un retículo $\mathcal{R}(4, 4, 3)$ cuando, en el primer piso, se tiene alguna de las siguientes estructuras:

(I) 3V (II) 2Z (III) 1Z (IV) 1V

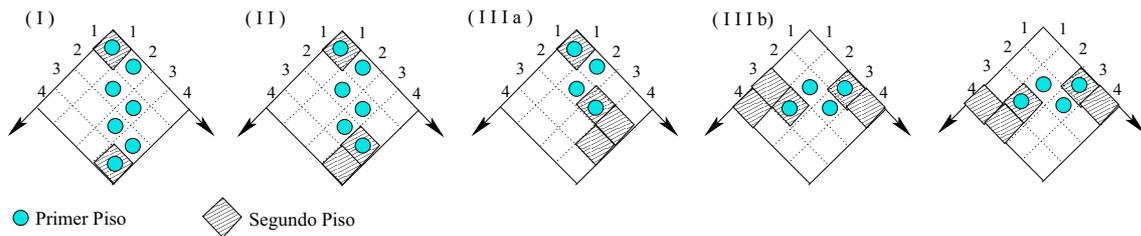


Figura 6.24: Casos (I), (II) y (III)(a,b) del Lema 6.7

Demostración. Consideremos un retículo $\mathcal{R}(4, 4, 3)$ como se pide.

La Figura 6.24 presenta algunos casos del Lema.

Caso I. Si colocamos una 3V en el primer piso, sólo podemos poner un voxel sobre los extremos del segundo. Así, por el Lema 6.3(i), no es posible construir el vox-sólido no inductivo.

Caso II. Hay dos formas de poner una 2Z en el primer piso. Para ambas, un voxel extremo quedará en una esquina, donde así se deberá apilar un voxel para hacer crecer la cadena zig-zag. Entonces, por el Lema 6.3(i), no es posible construir el vox-sólido no inductivo. La Figura 6.24 ilustra los casos (I) y (II).

Caso III. Tenemos tres maneras de colocar una 1Z.

a. Ponemos un extremo en una esquina. Entonces en el segundo piso, quedarán dos voxeles apilados en esa esquina. Con base en el Lema 6.3(i), no es posible construir el vox-sólido no inductivo. También podemos poner, en el otro extremo, una 1V en el segundo piso. En este caso, un extremo de la cadena extendida quedará en una esquina del segundo piso. Por el Lema 6.3(iii), no es posible construir el vox-sólido no inductivo.

b. Ponemos un extremo v como 18-vecino de un esquina, mientras que el otro extremo, w , quedará a distancia uno de la contraesquina. Sobre w podemos poner una 0Z. Entonces, el nuevo extremo queda en una esquina del segundo piso. Por el Lema 6.3(iii), no es posible construir el vox-sólido no inductivo.

La Figura 6.24 ilustra los casos (IIIa) y (IIIb).

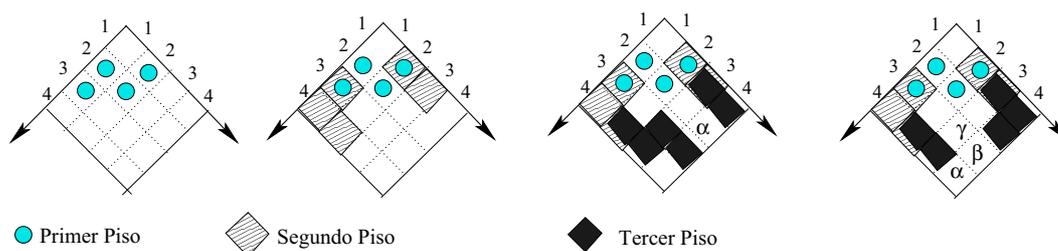


Figura 6.25: Caso (IIIc) del Lema 6.7

c. Ponemos los extremos a distancia uno de una esquina, lo cual podemos ver en la Figura 6.25. Podemos hacer crecer la cadena colocando sobre un extremo, una estructura $1V$ y, sobre el otro, una $0Z$. Con ello podemos ver que ninguno de los dos nuevos extremos satisface las condiciones del Lema 6.3. A raíz de esto podemos pensar que, tal vez sea posible construir el vox-sólido no inductivo 3-laminado. Sin pérdida de generalidad, consideremos la segunda configuración mostrada en la Figura 6.25. Hay dos opciones:

- (1) Sobre un extremo colocamos una $1Z$ y, sobre el otro, una $1Z$, tal como se ilustra en la tercera configuración de la figura. Si ponemos el voxel α , se tendrá una línea de tres voxeles, obteniendo así un vox-sólido inductivo.
- (2) Sobre un extremo, ponemos una $0Z$ y, sobre el otro, una $1V$. Al colocar α se tendrá una línea de tres voxeles. Poner γ y β o α y β también produce un vox-sólido inductivo. Por lo tanto, no es posible generar un vox-sólido no inductivo.

Caso IV. Este caso se reduce a los anteriores.

En resumen, el lema se satisface.

Lema 6.8 Cuando se tiene una estructura $2V$ en el primer piso, sí es posible construir un vox-sólido $\mathcal{V} \in \mathcal{AV} \cap \mathcal{NI}$ en un retículo $\mathcal{R}(4, 3, 3)$.

Demostración. Consideremos un retículo $\mathcal{R}(4, 4, 3)$ como se pide.

Tenemos tres maneras de colocar una $2V$.

Caso I. Dado que un extremo está en una esquina, entonces para pasar al segundo piso habrá que apilar un voxel. Por el Lema 6.3(i), no es posible construir el vox-sólido no inductivo.

Caso II. Cada extremo está a distancia 1 de una esquina y, en el segundo piso, sólo es posible poner una estructura $0Z$. Esto último implica que los extremos, del segundo piso, queden en una esquina. Por lo tanto, no es posible construir el vox-sólido no inductivo.

La Figura 6.26 muestra los casos (I) y (II).

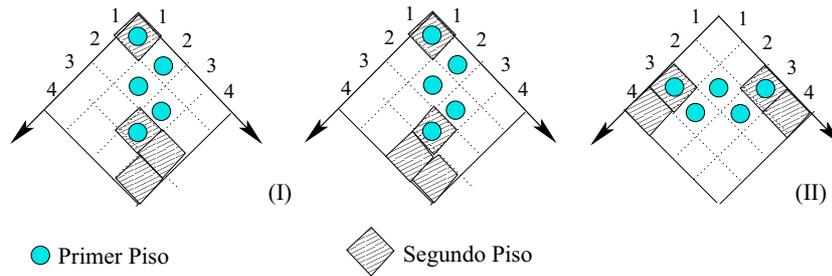


Figura 6.26: Casos (I), (II) del Lema 6.8

Caso III. Cada extremo se encuentra a distancia 1 de una esquina. Es posible poner en el segundo piso una estructura 1V sobre ellos. Con ello, los extremos no satisfacen las condiciones del Lema 6.3, por lo que, se lleva a cabo el intento de colocar el tercer piso.

Sin pérdida de generalidad, consideremos la cadena zig-zag de dos pisos mostrada en la Figura 6.27.

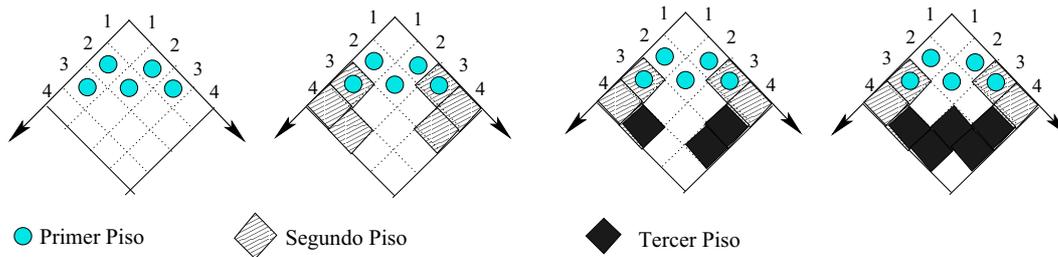


Figura 6.27: Caso (c) del Lema 6.8

Para el tercer piso, colocamos un voxel encima de cada extremo. A continuación, podemos extender la cadena un voxel más de un lado, como se muestra en la Figura 6.27. En este caso, no es posible poner un solo voxel, únicamente dos, como se ilustra en el esquema de la figura.

Por lo tanto, sí es posible construir un vox-sólido no inductivo arista-visible, el \mathcal{L}_{16} .

Después del análisis exhaustivo, que hemos realizado, e inmediato de los lemas anteriores, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 6.3 \mathcal{L}_{16} es el vox-sólido no inductivo arista-visible más pequeño que puede construirse en un retículo $\mathcal{R}(4, 3, 3)$ y, además, es único.

Lema 6.9 Las posibilidades de construir vox-sólidos $\mathcal{V} \in \mathcal{AV} \cap \mathcal{NI}$ en un retículo $\mathcal{R}(4, 4, 4)$ son, al menos, tres.

Demostración. Consideremos un retículo $\mathcal{R}(4, 4, 4)$. Podemos poner una $2V$ en el primer piso. Revisemos, ahora, los tres casos.

(I) Sin pérdida de generalidad, consideremos la configuración mostrada en la Figura 6.28A.

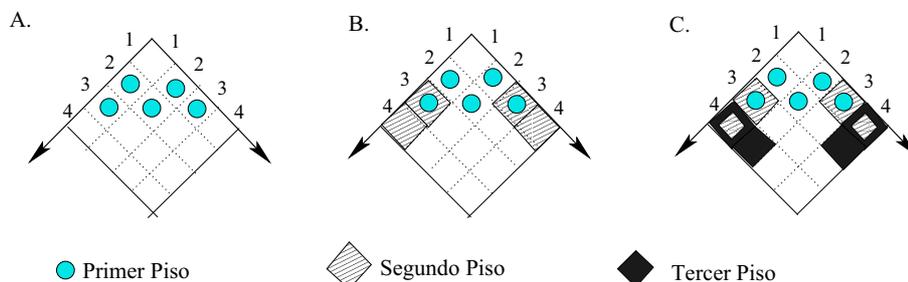


Figura 6.28: Construcción primeros tres pisos

En el segundo piso únicamente ponemos dos voxeles en cada extremo, alcanzando así las esquinas del segundo piso, tal como se ilustra en la Figura 6.28B.

Para el tercer piso, colocamos dos voxeles en cada extremo, (Figura 6.28C).

En el caso del cuarto piso, podemos poner, sobre un extremo, dos voxeles y, sobre el otro, un voxel, (Figura 6.29A).

Ahora, podemos cerrar la configuración colocando dos voxeles que unan los extremos tal como se ilustra en la Figura 6.29B.

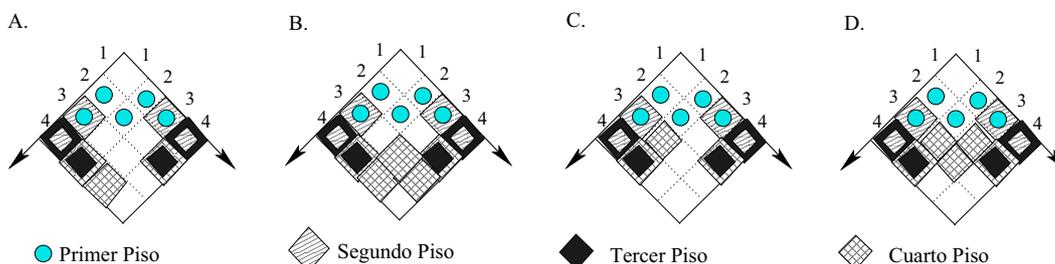


Figura 6.29: Ilustración del Lema 6.9, cuarto piso

(II) A partir de la construcción anterior, es posible poner en el cuarto piso los voxeles $(2,4,4)$ y $(2,3,4)$ sin generarse alguna configuración prohibida. Esto debido a que, en ese lado, los voxeles están en el primer y segundo piso. En el otro extremo ponemos $(4,2,4)$, como se ilustra en la Figura 6.29C. Finalmente, podemos cerrar el ciclo poniendo $(3,2,4)$ y $(3,3,4)$, Figura 6.29D.

(III) Sin pérdida de generalidad, consideremos la configuración mostrada en la Figura 6.30A.

En el segundo piso podemos poner, sobre cada voxel extremo, una $0Z$, alcanzando así las esquinas, tal como se ilustra en la Figura 6.30B.

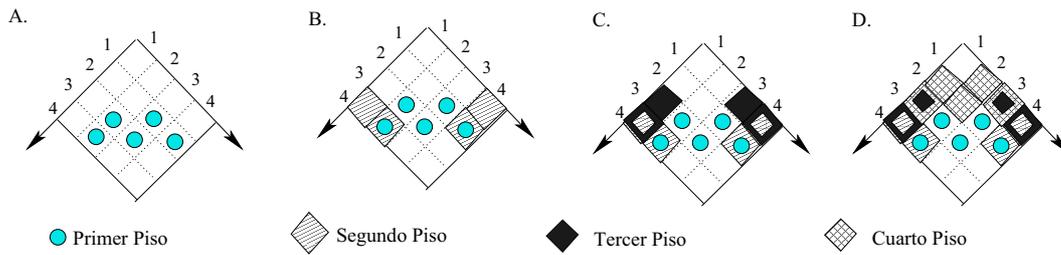


Figura 6.30: Caso (III) del Lema 6.9

En el tercer piso, colocamos una 0Z sobre cada voxel extremo (Figura 6.30C); la unión es válida porque no hay voxeles en (2,3,2) ni en (3,2,2).

Por último, en el cuarto piso podemos poner una 0Z sobre un voxel extremo y, sobre el otro, sólo uno. Para finalizar, cerramos el ciclo como se ilustra en la Figura 6.30D.

La Figura 6.31 ilustra los vox-sólidos no inductivos construidos en el Lema 6.9

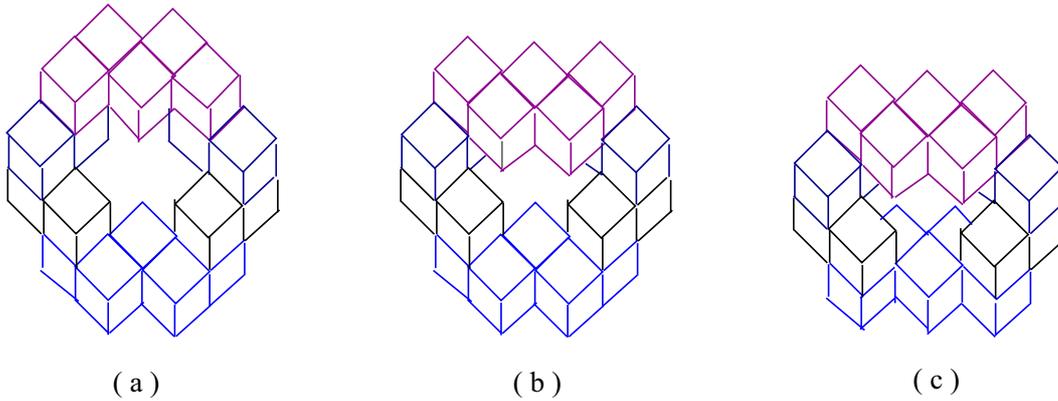


Figura 6.31: Vox Sólidos No-Inductivos del Lema 6.9

Lema 6.10 No es posible construir vox-sólidos $\mathcal{V} \in \mathcal{AV} \cap \mathcal{NI}$ en un retículo $\mathcal{R}(5, 4, 2)$.

Demostración. Hay tres casos a considerar.

(I) Al poner una estructura 2Z o una 3V alguno de los extremos quedará en una esquina o a distancia 1 de una esquina.

(II) Al poner una estructura 2V alguno de los extremos quedará en una esquina o a distancia 1 de una esquina o, de igual manera, será 18-vecino de alguna esquina.

(III) Al poner una estructura 1Z, alguno de los extremos quedará en una esquina o a distancia 1 de una esquina, o será 18-vecino de alguna.

Así, tenemos que, con cualquiera de la estructuras que podrían ponerse en el primer piso, se satisfacen las condiciones del Lema 6.2 Por lo tanto, no es posible construir un vox-sólido no inductivo en $\mathcal{R}(5, 4, 2)$.

Lema 6.11 Es posible construir un vox-sólido $\mathcal{V} \in \mathcal{AV} \cap \mathcal{NI}$ en un retículo $\mathcal{R}(5, 5, 2)$: tal es \mathcal{F}_{20} .

Demostración. Colocamos una estructura $2\mathcal{V}$ que no satisfaga las condiciones del Lema 6.2. Sin pérdida de generalidad, consideremos la configuración presentada en la Figura 6.32A.

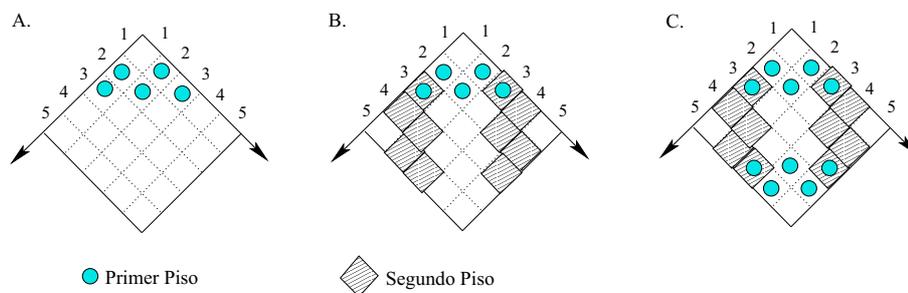


Figura 6.32: Ilustración del Lema 6.11

A partir de cada extremo podemos colocar $2\mathcal{V}$, (Figura 6.32B) y aún es posible poner voxes - de hecho podemos poner otra $2\mathcal{V}$ en el primer piso - La Figura 6.32C muestra el vox-sólido no inductivo obtenido.

Capítulo 7

Hamiltonicidad de Vox Sólidos Irreducibles

En este Capítulo proporcionaremos una técnica para construir la Descomposición Hamiltoniana para algunas de las Familias de vox-sólidos irreducibles presentadas anteriormente. La estrategia consiste en proporcionar la descomposición Hamiltoniana para los vox-sólidos básicos \mathcal{L}_{16} , \mathcal{Q}_{18} , \mathcal{F}_{20} , \mathcal{V}_{32} y, a partir de ahí, construir la descomposición Hamiltoniana para las familias.

Dado un vox-sólido $\mathcal{V} \in \mathcal{AV} \cap \mathcal{T}$ y un ciclo Hamiltoniano \mathcal{C} , podemos hacer que \mathcal{C} crezca cuando hacemos crecer el vox-sólido \mathcal{V} . En esta investigación, nos interesa que este postulado sea generalizado sobre vox-sólidos irreducibles.

Dado un ciclo Hamiltoniano \mathcal{C} para un vox-sólido $\mathcal{V} \in \mathcal{I}r$, separamos el vox-sólido convenientemente, antes de anexar una estructura kV o kZ para hacerlo crecer. La separación conveniente $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$, consiste en que cada corte de \mathcal{S} rompa una sola vez al ciclo \mathcal{C} . Después se recorre cada anexo con una trayectoria Hamiltoniana que vuelva a unir los vértices del ciclo que fueron separados por el corte.

De esta manera, todos los vértices de la gráfica de adyacencia de caras son considerados y el nuevo ciclo resulta, en efecto, ser Hamiltoniano. Esta estrategia funciona cuando se insertan estructuras de dos o más voxes en los cortes.

Consideramos la construcción dada en la Sección 5.2, en la que, para construir las familias \mathcal{L} , \mathcal{F} y \mathcal{V} , sólo fue necesario agregar estructuras kZ , $k \geq 0$. En el caso de la familia \mathcal{Q} , fue necesario agregar estructuras $1V$ e incrementar un piso cada vez.

7.1. Resultados Preliminares

Definición 7.1 Dado un vox-sólido \mathcal{V} toroidal arista-visible y un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H} para \mathcal{V} , diremos que una separación \mathcal{S} es **conveniente** si únicamente se rompe una arista de \mathcal{H} en cada corte. Diremos que \mathcal{S} es una separación conveniente para \mathcal{V} con respecto al ciclo \mathcal{H} .

Sea $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ una separación con cortes q y c , donde :

$$q = \langle X, Y \rangle \quad X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \quad Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} \quad \text{y } \exists (x_i, y_i), 1 \leq i \leq 4;$$

$$c = \langle A, Z \rangle, \quad A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \quad Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\} \quad \text{y } \exists (a_i, z_i), 1 \leq i \leq 4.$$

Entonces \mathcal{S} es una separación conveniente para \mathcal{V} con respecto al ciclo \mathcal{H} , si $\exists (x_i, y_i) \in \mathcal{H}$ para una única $i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $\exists (a_j, z_j) \in \mathcal{H}$ para una única $j, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

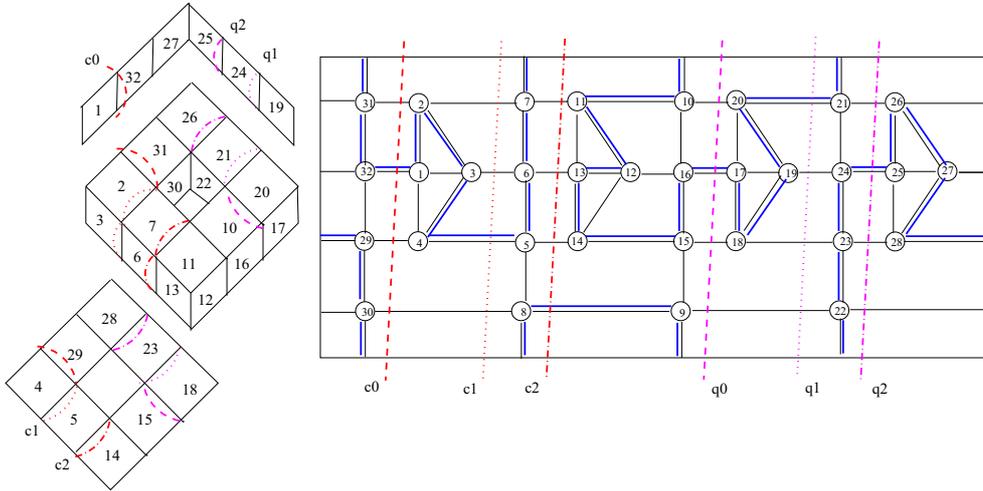


Figura 7.1: La tuerca y algunos cortes

La Figura 7.1 muestra un etiquetado para la tuerca, tal que representa un ciclo Hamiltoniano, \mathcal{H} . Se muestran los cortes $c_0, c_1, c_2, q_0, q_1, q_2$ que rompen únicamente una arista de \mathcal{H} . Las separaciones $\mathcal{S}_0 = \langle c_0, q_0 \rangle$, $\mathcal{S}_1 = \langle c_1, q_1 \rangle$, $\mathcal{S}_2 = \langle c_2, q_2 \rangle$ resultan ser convenientes.

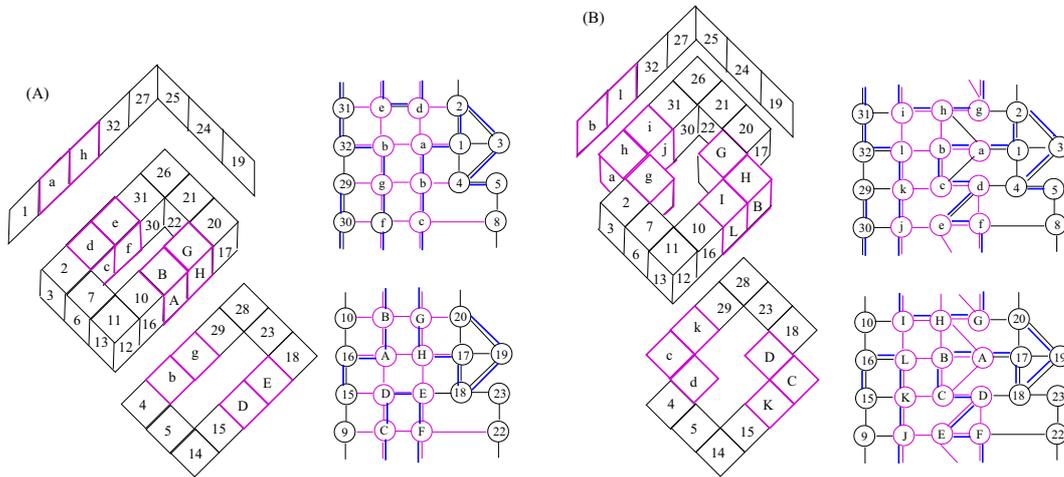


Figura 7.2: La tuerca y algunas extensiones

En la Figura 7.2(A) se muestra el resultado que se obtiene al aplicar la separación \mathcal{S}_0 e insertar una estructura 0Z. Se presentan los anexos y las respectivas trayectorias Hamiltonianas que unen al vértice 32 con el 1 y al 16 con el 17.

Así, el nuevo ciclo Hamiltoniano es:

1, 2, 3, ..., 16, A, B, C, D, E, F, G, H , 17, 18, ..., 32, h, g, f, e, d, c, b, a , 1.

La Figura 7.2(B) ilustra la inserción de la estructura 1V, sobre \mathcal{S}_o . De igual manera, se presentan los respectivos anexos y trayectorias Hamiltonianas.

Así, el nuevo ciclo Hamiltoniano queda:

1, 2, ..., 16, $L, K, J, I, H, G, F, E, D, C, B, A$, 17, 18, ..., 32, $l, k, j, i, h, g, f, e, d, c, b, a$, 1.

A continuación describimos el proceso que indica como hacer crecer tanto al vox-sólido y al ciclo Hamiltoniano.

Dada $\mathcal{S}\langle q, c \rangle$ una separación conveniente, para cada corte $\mu \in \{q, c\}$,

1. Identificar la arista $e = (x, y)$ que está en \mathcal{C} y en μ
2. Construir la gráfica de adyacencia de caras del anexo asociada al corte μ
3. Construir la gráfica \mathcal{A}_μ inducida por x, y y los vértices del anexo
4. Determinar una trayectoria Hamiltoniana de x a y para la gráfica \mathcal{A}_μ
5. Insertar el anexo sobre el corte
6. Anexar las aristas de la trayectoria Hamiltoniana al ciclo \mathcal{C} para generar el nuevo ciclo Hamiltoniano \mathcal{C}'

Puesto que nos interesa hacer crecer a los vox-sólidos irreducibles y sus ciclos Hamiltonianos, adaptamos, la definición de separación que se adecuaba a ello.

Definición 7.2 Dado un vox-sólido irreducible \mathcal{V} y un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H} para \mathcal{V} , una **separación válida conveniente** es aquella que, además, de ser válida, también, es conveniente.

Esto significa que si $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ es una separación válida en la que $q = \langle X, Y \rangle$ con $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ donde, además, $\exists (x_i, y_i), 1 \leq i \leq 4$; $c = \langle A, Z \rangle$, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ y $\exists (a_i, z_i), 1 \leq i \leq 4$, entonces \mathcal{S} es una separación válida conveniente para \mathcal{V} con respecto al ciclo \mathcal{H} , si existe $(x_i, y_i) \in \mathcal{H}$ para una única $i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y existe $(a_j, z_j) \in \mathcal{H}$ para una única $j, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Dado un ciclo Hamiltoniano para un vox-sólido irreducible \mathcal{V} , ésta puede ser extendido al hacer crecer a \mathcal{V} . La estrategia, reiteramos, consiste en recorrer los anexos con una trayectoria Hamiltoniana que reúna los vértices extremos de la arista $(x_i, y_i) \in \mathcal{H}$, fue rota por la separación.

En las siguientes secciones damos las herramientas necesarias para poder establecer el resultado expuesto a continuación:

Teorema. Sea \mathcal{V} un vox-sólido irreducible básico. Sea \mathcal{C} un ciclo Hamiltoniano para \mathcal{V} .

Sea \mathcal{S} una separación válida conveniente para \mathcal{V} con respecto al ciclo \mathcal{C} . Sea \mathcal{V}' el vox-sólido irreducible obtenido de \mathcal{V} agregando estructuras kZ , $k \geq 0$, o jV , $j \geq 1$. Entonces, siempre es posible extender el ciclo \mathcal{C} para obtener un ciclo Hamiltoniano \mathcal{C}' para \mathcal{V}' .

Las estructuras kV y kZ crecen cuando agregamos estructuras $0Z$. Sobre cada familia, revisaremos las gráficas asociadas a los anexos y sus propiedades. Para las familias \mathcal{L} , \mathcal{F} y \mathcal{V} trabajaremos con la estructura $0Z$ y para $\mathcal{Q}[m]$ con la 1V.

Ciclos Hamiltonianos para $\mathcal{L}[i, j]$

Primero trabajaremos con la familia $\mathcal{L}[2, j], j \geq 2$, después, con la $\mathcal{L}[i, 2], i \geq 2$, por último, hacemos la generalización para $\mathcal{L}[i, j]$.

Gráficas asociadas a $\mathcal{L}[2, j]$

Sea $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ una separación válida conveniente para el vox-sólido $\mathcal{L}[2, j], j \geq 1, j$, fijo, con respecto al ciclo Hamiltoniano \mathcal{C} . El corte $q = \langle X, Y \rangle$ queda definido por: $X = \{T_x, E_x, D_x, I_x\}$, $Y = \{T_y, E_y, D_y, I_y\}$, existen las aristas $(T_x, T_y), (E_x, E_y), (D_x, D_y), (I_x, I_y)$; el corte $c = \langle A, Z \rangle$, $A = \{T_a, E_a, D_a, I_a\}$, $Z = \{T_z, E_z, D_z, I_z\}$ y existen las aristas $(T_a, T_z), (E_a, E_z), (D_a, D_z), (I_a, I_z)$.

Dado que cualquiera de las aristas involucradas en el corte puede ser parte del ciclo Hamiltoniano revisaremos los cuatro casos posibles sobre cada uno de los cortes.

El anexo, una estructura 0Z, para el corte q es mostrado en la Figura 7.3(A). Los vértices del anexo son $V_A = \{v_1, v_1, \dots, v_8\}$; las aristas: $E_A = \{(v_1, v_8), (v_1, v_3), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_5, v_7), (v_6, v_7), (v_6, v_8), (v_7, v_8)\}$.

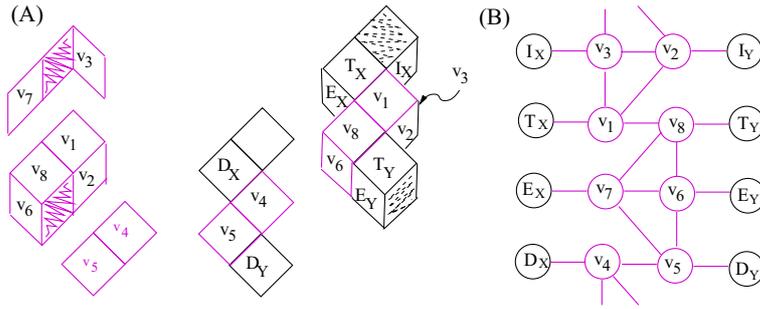


Figura 7.3: Subgráfica asociada al anexo insertado en q para $\mathcal{L}[2, j]$

Para construir la sub-gráfica G_q , asociada al anexo, consideramos las caras (vértices) de los voxes involucrados en el corte. El anexo insertado en el objeto 3-dimensional y la subgráfica G_q , son mostrados en la Figura 7.3(B).

Afirmación 7.1 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{L}[2, j]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} , definida anteriormente, y el anexo agregado sobre el corte q .

Si $(I_x, I_y) \in \mathcal{C}$ entonces $AI_q = \langle I_x, v_1, \dots, v_8, I_y \rangle$, la subgráfica inducida por I_x, I_y y los vértices del anexo tiene, al menos, cuatro trayectorias Hamiltonianas de I_x a I_y .

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente como se pide. Para AI_q la Figura 7.4 muestra esta subgráfica y sus cuatro trayectorias Hamiltonianas, que son:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &: I_x, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_1, v_2, I_y; & \mathcal{T}_2 &: I_x, v_3, v_4, v_5, v_7, v_6, v_8, v_1, v_2, I_y; \\ \mathcal{T}_3 &: I_x, v_3, v_1, v_8, v_6, v_7, v_5, v_4, v_2, I_y; & \mathcal{T}_4 &: I_x, v_3, v_1, v_8, v_7, v_6, v_5, v_4, v_2, I_y. \end{aligned}$$

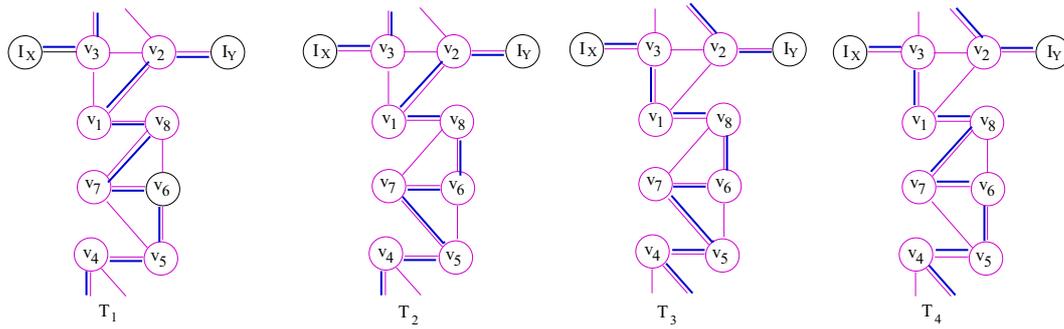


Figura 7.4: Subgráfica inducida AI_q y sus trayectoria Hamiltonianas

Afirmación 7.2 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{L}[2, j]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} definida, anteriormente, y el anexo agregado sobre el corte q .

Si $(E_x, E_y) \in \mathcal{C}$ entonces $AE_q = \langle E_x, v_1, \dots, v_8, E_y \rangle$, la subgráfica inducida por los vértices E_x, E_y y los vértices del anexo es isomorfa a la subgráfica AI_q , por lo que, también, tiene, al menos, cuatro trayectorias Hamiltonianas de E_x a E_y .

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente como se pide. Para AE_q y AI_q el isomorfismo \mathcal{I} queda determinado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(I_x) &= E_x, & \mathcal{I}(v_3) &= v_7, & \mathcal{I}(v_2) &= v_6, & \mathcal{I}(v_1) &= v_5, & \mathcal{I}(v_8) &= v_4, \\ \mathcal{I}(v_6) &= v_2, & \mathcal{I}(v_7) &= v_3, & \mathcal{I}(v_5) &= v_1, & \mathcal{I}(v_4) &= v_8, & \mathcal{I}(I_y) &= E_y. \end{aligned}$$

La Figura 7.5 muestra la subgráfica AE_q y hace explícito el isomorfismo.

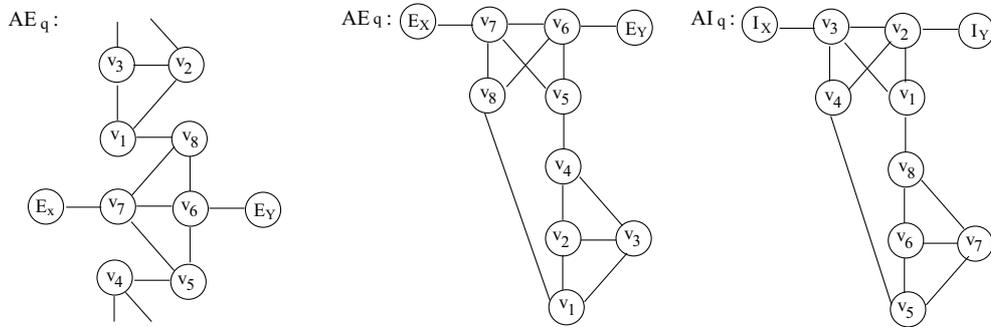


Figura 7.5: Las subgráficas inducidas AI_q, AE_q y su isomorfismo

Afirmación 7.3 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{L}[2, j]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} definida, anteriormente, y el anexo agregado sobre el corte q .

Si $(T_x, T_y) \in \mathcal{C}$ entonces $AT_q = \langle T_x, v_1, \dots, v_8, T_y \rangle$, la subgráfica inducida por T_x, T_y y los vértices del anexo, tiene al menos cuatro trayectorias Hamiltonianas de T_x a T_y .

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente como se pide. La Figura 7.6 muestra la subgráfica AT_q y sus trayectorias Hamiltonianas, las cuales son:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &: T_x, v_1, v_3, v_2, v_4, v_5, v_7, v_6, v_8, T_y; & \mathcal{T}_2 &: T_x, v_1, v_3, v_2, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, T_y; \\ \mathcal{T}_3 &: T_x, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7, v_6, v_8, T_y; & \mathcal{T}_4 &: T_x, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, T_y. \end{aligned}$$

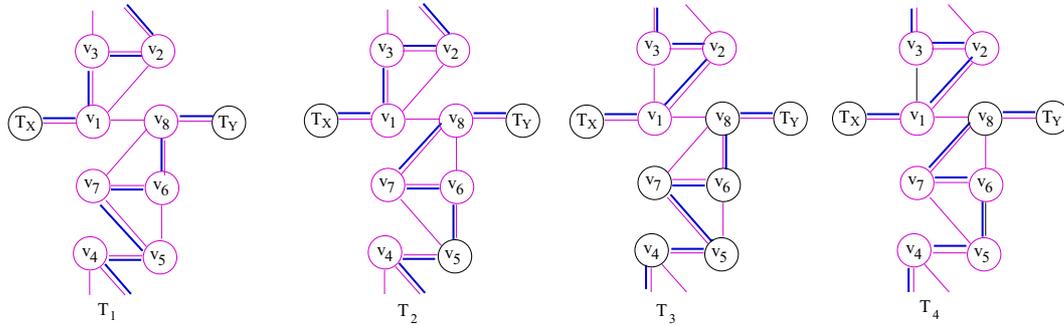


Figura 7.6: Subgráfica inducida AT_q y sus trayectoria Hamiltonianas

Afirmación 7.4 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{L}[2, j]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} definida, anteriormente, y el anexo agregado sobre el corte q .

Si $(D_x, D_y) \in \mathcal{C}$ entonces $AD_q = \langle D_x, v_1, \dots, v_8, D_y \rangle$, la subgráfica inducida por los vértices D_x, D_y y los vértices del anexo es isomorfa a la subgráfica AT_q , por lo que, también, tiene, al menos, cuatro trayectorias Hamiltonianas de D_x a D_y .

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente como se pide. Tenemos que para AD_q y AT_q el isomorfismo \mathcal{I} queda determinado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(T_x) &= D_x, & \mathcal{I}(v_3) &= v_3, & \mathcal{I}(v_2) &= v_2, & \mathcal{I}(v_1) &= v_4, & \mathcal{I}(v_8) &= v_5, \\ \mathcal{I}(v_6) &= v_6, & \mathcal{I}(v_7) &= v_7, & \mathcal{I}(v_5) &= v_8, & \mathcal{I}(v_4) &= v_1, & \mathcal{I}(T_y) &= D_y. \end{aligned}$$

La Figura 7.7 muestra la subgráfica AD_q y hace explícito el isomorfismo.

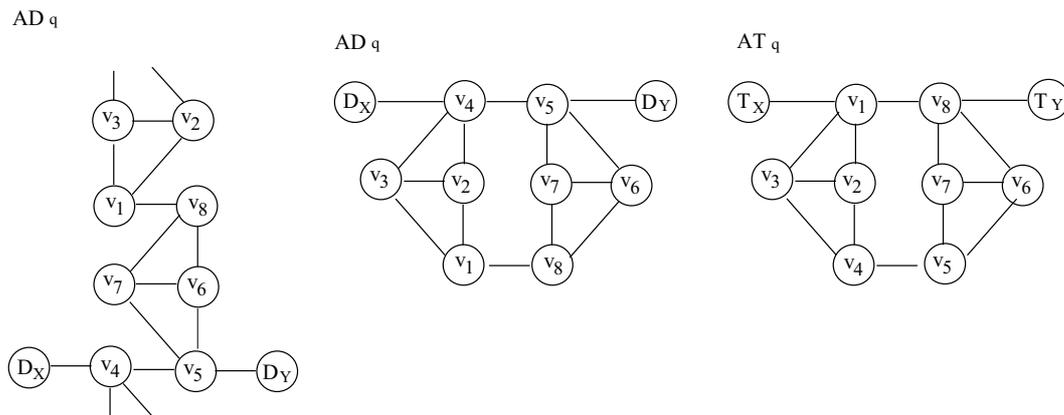


Figura 7.7: Las subgráficas inducidas AT_q y AD_q

Para la Familia $\mathcal{L}[2, j]$, tenemos que los vértices del anexo son: $V_A = \{u_1, u_1, \dots, u_8\}$; y las aristas: $E_A = \{(u_1, u_8), (u_1, u_3), (u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_2, u_4), (u_3, u_4), (u_4, u_5), (u_5, u_6), (u_5, u_7), (u_6, u_7), (u_6, u_8), (u_7, u_8)\}$.

Para construir la subgráfica G_c , asociada al anexo insertado en c , consideramos las caras involucradas en el corte. El anexo insertado en el objeto 3-dimensional y la subgráfica G_c son mostrados en la Figura 7.8.

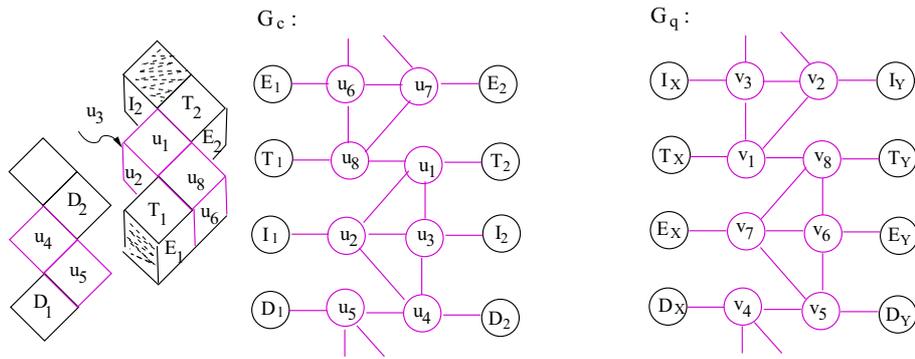


Figura 7.8: Subgráfica asociada al corte c para $\mathcal{L}[2, j]$ y su isomorfismo

Afirmación 7.5 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{L}[2, j]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} definida, anteriormente, y el anexo agregado sobre el corte c .

Entonces la subgráfica asociada al anexo, añadida sobre el corte c , denominada G_c , es isomorfa a G_q .

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente como se pide. Para las subgráficas G_c y G_q el isomorfismo ϕ queda determinado por:

$$\begin{aligned} \phi(E_x) &= I_x, & \phi(u_6) &= v_3, & \phi(u_7) &= v_2, & \phi(E_a) &= I_y, & \phi(T_z) &= T_x, & \phi(u_8) &= v_1, \\ \phi(u_1) &= v_8, & \phi(T_a) &= T_y, & \phi(I_z) &= E_x, & \phi(u_2) &= v_7, & \phi(u_3) &= v_6, & \phi(I_a) &= E_y, \\ \phi(D_z) &= D_x, & \phi(u_5) &= v_4, & \phi(u_4) &= v_5, & \phi(D_a) &= D_y. \end{aligned}$$

La Figura 7.8 hace explícito el isomorfismo.

Finalmente, después de revisar todos los posibles anexos para la familia $\mathcal{L}[2, j]$ y sus trayectorias Hamiltonianas, podemos concluir el siguiente resultado:

Lema 7.1 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{L}[2, j]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} definida anteriormente y el anexo agregado sobre el corte $\mu \in \{c, q\}$.

Si $(z, a) \in \mathcal{C}$, con $(z, a) \in \{(E_z, E_a), (T_z, T_a), (I_z, I_a), (D_z, D_a)\}$, entonces la subgráfica \mathcal{A}_μ , inducida por z, w y los vértices del anexo, para el corte μ , tiene al menos cuatro trayectorias Hamiltonianas.

Gráficas asociadas a $\mathcal{L}[i, 1]$

Sea $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ una separación válida conveniente para el vox-sólido $\mathcal{L}[i, 1], i \geq 2, i$ fijo, con respecto al ciclo Hamiltoniano \mathcal{C} , donde los cortes q y c están definidos como: $q = \langle X, Y \rangle$ con $X = \{T_1, E_1, D_1, I_1\}, Y = \{T_2, E_2, D_2, I_2\}$, existen las aristas $(T_1, T_2), (E_1, E_2), (D_1, D_2), (I_1, I_2)$ y $c = \langle A, Z \rangle, A = \{T_3, E_3, D_3, I_3\}, Z = \{T_4, E_4, D_4, I_4\}$, además, existen las aristas $(T_3, T_4), (E_3, E_4), (D_3, D_4), (I_3, I_4)$.

Dado que cualquiera de las aristas involucradas en el corte puede ser parte del ciclo Hamiltoniano, debemos revisar los cuatro casos posibles sobre cada uno de los cortes.

Para la Familia $\mathcal{L}[i, 1]$, el anexo tiene vértices $V_A = \{u_1, u_1, \dots, u_8\}$ y aristas E_A , con $E_A = \{(u_1, u_8), (u_1, u_3), (u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_2, u_4), (u_3, u_4), (u_4, u_5), (u_5, u_6), (u_5, u_7), (u_6, u_7), (u_6, u_8), (u_7, u_8)\}$.

La subgráfica F_q , asociada al anexo insertado en q se muestra en la Figura 7.9.

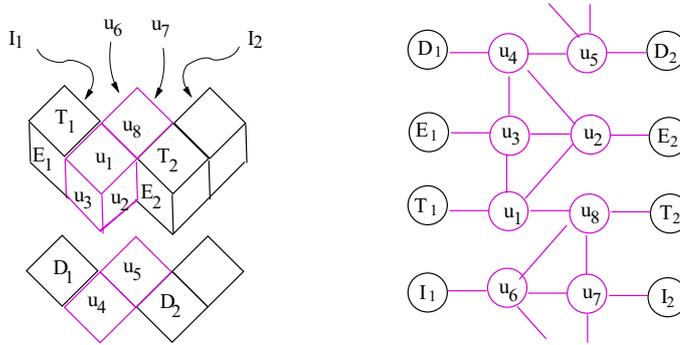


Figura 7.9: Subgráfica asociada al anexo insertado en q para $\mathcal{L}[i, 1]$

Lema 7.2 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{L}[i, 1]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} , definida anteriormente, y el anexo agregado sobre el corte q . Se tiene que:

- a) La subgráfica F_q , asociada al anexo, añadida sobre el corte q , es isomorfa a G_q , la subgráfica asociada al anexo para la familia $\mathcal{L}[2, j]$
- b) Si $(z, w) \in \mathcal{C}$, con $(z, w) \in \{(E_1, E_2), (T_1, T_2), (I_1, I_2), (D_1, D_2)\}$, entonces la subgráfica \mathcal{A}_q inducida por z, w y los vértices del anexo tiene, al menos, cuatro trayectorias Hamiltonianas.

Demostración. El isomorfismo ϕ queda determinado por:

$$\begin{aligned} \phi(E_1) &= I_x, & \phi(u_6) &= v_2, & \phi(u_7) &= v_3, & \phi(E_2) &= I_y, & \phi(T_1) &= T_x, & \phi(u_8) &= v_1, \\ \phi(u_1) &= v_8, & \phi(T_2) &= T_y, & \phi(I_1) &= E_x, & \phi(u_2) &= v_7, & \phi(u_3) &= v_6, & \phi(I_2) &= E_y, \\ \phi(D_1) &= D_x, & \phi(u_5) &= v_4, & \phi(u_4) &= v_5, & \phi(D_z) &= D_y. \end{aligned}$$

Observe que el anexo para c es idéntico al de q . Por lo tanto, podemos concluir el siguiente resultado.

Lema 7.3 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ una separación válida conveniente para $\mathcal{L}[i, 1]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} , definida anteriormente, y el anexo agregado sobre el corte c . Se tiene que:

- a) La subgráfica asociada al anexo, añadida sobre el corte c , F_c , es isomorfa a G_q
- b) Si $(z, w) \in \mathcal{C}$ y (z, w) está involucrada en el corte c , entonces la subgráfica \mathcal{A}_c , inducida por z, w y los vértices del anexo, tiene, al menos, cuatro trayectorias Hamiltonianas.

Podemos aplicar la misma estrategia usada en la Sección 5.2 para generalizar los cortes y establecer resultados similares para las separaciones válidas convenientes.

Lema 7.4

- a) Sea \mathcal{C} un ciclo Hamiltoniano para $\mathcal{L}[2, j]$, $j \geq 1$. Siempre existe una separación válida conveniente y, por tanto, siempre es posible extender el ciclo \mathcal{C} para obtener un ciclo Hamiltoniano \mathcal{C}' para $\mathcal{L}[2, j + k + 1]$, generado al anexarle a $\mathcal{L}[2, j]$ una estructura kZ , $k \geq 0$.
- b) Sea \mathcal{C} un ciclo Hamiltoniano para $\mathcal{L}[i, 1]$, $i \geq 2$. Siempre existe una separación válida conveniente y, por tanto, siempre es posible extender el ciclo \mathcal{C} para obtener un ciclo Hamiltoniano \mathcal{C}' para $\mathcal{L}[i + k + 1, 1]$, generado al anexarle a $\mathcal{L}[i, 1]$ una estructura kZ , $k \geq 0$.

Finalmente, para la familia de gráficas $\mathcal{L}[i, j]$, $i \geq 2, j \geq 1$, podemos concluir los siguiente resultados:

Teorema 7.1 Dado un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H} para $\mathcal{L}[2, 1]$, siempre es posible extender \mathcal{H} para obtener un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H}' para $\mathcal{L}[i, j]$, $i \geq 2, j \geq 1$.

Corolario 7.1 Dado un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H} para $\mathcal{L}[i, j]$, siempre es posible extender \mathcal{H} para obtener un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H}' para $\mathcal{L}[i_1, j_1]$, $i_1 \geq 2, j_1 \geq 1$.

Ciclos Hamiltonianos para $\mathcal{F}[i, j]$

Sea $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ una separación válida conveniente para el vox-sólido $\mathcal{F}[i, 2]$, $i \geq 2$, i fijo, con respecto al ciclo Hamiltoniano \mathcal{C} en la que el corte $q = \langle X, Y \rangle$ queda definido por: $X = \{T_1, E_1, D_1, I_1\}$, $Y = \{T_2, E_2, D_2, I_2\}$, existen las aristas (T_1, T_2) , (E_1, E_2) , (D_1, D_2) , (I_1, I_2) y el corte $c = \langle A, Z \rangle$, está definido por: $A = \{T_3, E_3, D_3, I_3\}$, $Z = \{T_4, E_4, D_4, I_4\}$, existen las aristas (T_3, T_4) , (E_3, E_4) , (D_3, D_4) , (I_3, I_4) .

Observe que para $\mathcal{F}[i, 2]$ se tienen los mismos anexos que para $\mathcal{L}[i, 1]$. Así que podemos concluir el siguiente resultado:

Lema 7.5 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{F}[i, 2]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} definida anteriormente. Se tiene que:

- a) La subgráfica F_c asociada al anexo, añadida sobre el corte c , es isomorfa a G_q
- b) Si $(z, w) \in \mathcal{C}$ y (z, w) está involucrada en el corte c , entonces la subgráfica \mathcal{A}_c , inducida por z, w y los vértices del anexo para c , tiene al menos cuatro trayectorias Hamiltonianas
- c) La subgráfica F_q , asociada al anexo, añadida sobre el corte q , es isomorfa a G_q
- d) Si $(z, w) \in \mathcal{C}$ y (z, w) está involucrada en el corte q , entonces la subgráfica \mathcal{A}_q , inducida por z, w y los vértices del anexo para q tiene, al menos, cuatro trayectorias Hamiltonianas.

Sea $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ una separación válida conveniente para $\mathcal{F}[2, j]$ con respecto al ciclo Hamiltoniano \mathcal{C} . Con corte $q = \langle X, Y \rangle$, $X = \{T_1, E_1, D_1, I_1\}$, $Y = \{T_2, E_2, D_2, I_2\}$, existen las aristas (T_1, T_2) , (E_1, E_2) , (D_1, D_2) , (I_1, I_2) y con corte $c = \langle A, Z \rangle$, $A = \{T_3, E_3, D_3, I_3\}$, $Z = \{T_4, E_4, D_4, I_4\}$ existen las aristas (T_3, T_4) , (E_3, E_4) , (D_3, D_4) , (I_3, I_4) .

No hay que perder de vista que, para $\mathcal{F}[2, j]$, se tienen los mismos anexos que para $\mathcal{L}[2, j]$. Por lo tanto, podemos establecer el siguiente resultado:

Lema 7.6 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{F}[2, j]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} , definida anteriormente, se tiene que:

- a) La subgráfica F_c , asociada al anexo, añadida sobre el corte c , es isomorfa a G_q
- b) Si $(z, w) \in \mathcal{C}$ y (z, w) está involucrada en el corte c entonces la subgráfica \mathcal{A}_c inducida por z, w y los vértices del anexo para c tiene al menos cuatro trayectorias Hamiltonianas
- c) La subgráfica F_q , asociada al anexo, añadida sobre el corte q , es isomorfa a G_q
- d) Si $(z, w) \in \mathcal{C}$ y (z, w) está involucrada en el corte q entonces la subgráfica \mathcal{A}_q inducida por z, w y los vértices del anexo para q tiene, al menos, cuatro trayectorias Hamiltonianas.

La misma estrategia usada en la Sección 5.2 puede ser aplicada para generalizar los cortes y establecer resultados similares para las separaciones válidas convenientes.

Lema 7.7

- a) Sea \mathcal{C} un ciclo Hamiltoniano para $\mathcal{F}[2, j]$, $j \geq 2$. Siempre existe una separación válida conveniente para él y, por tanto, siempre es posible extender el ciclo \mathcal{C} para obtener un ciclo Hamiltoniano \mathcal{C}' para $\mathcal{F}[2, j + k + 1]$, generado al anexarle a $\mathcal{L}[2, j]$ una estructura kZ , $k \geq 0$.

- b) Sea \mathcal{C} un ciclo Hamiltoniano para $\mathcal{F}[i, 2], i \geq 2$. Siempre existe una separación válida conveniente para él y por tanto siempre es posible extender el ciclo \mathcal{C} para obtener un ciclo Hamiltoniano \mathcal{C}' para $\mathcal{F}[i + k + 1, 2]$ generado al anexarle a $\mathcal{F}[i, 2]$ una estructura $kZ, k \geq 0$.

Finalmente, para la familia de gráficas $\mathcal{F}[i, j], i, j \geq 2$, podemos concluir los siguiente resultados:

Teorema 7.2 Dado un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H} para $\mathcal{F}[2, 2]$, siempre es posible extender \mathcal{H} para obtener un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H}' para $\mathcal{F}[i, j], i, j \geq 2$.

Corolario 7.2 Dado un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H} para $\mathcal{F}[i, j]$, siempre es posible extender \mathcal{H} para obtener un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H}' para $\mathcal{F}[i_1, j_1], i_1 \geq 2, j_1 \geq 1$.

Ciclos Hamiltonianos para $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$

Sea $\mathcal{S}_o = \langle q_o, c_o \rangle$ una separación válida conveniente para $\mathcal{V}[1, 1; 1, j_2], j_2 \geq 1, j_2$ fijo, con respecto a un ciclo Hamiltoniano \mathcal{C} en la que el corte $q_o = \langle X, Y \rangle$ está definido por: $X = \{T_1, E_1, D_1, I_1\}, Y = \{T_2, E_2, D_2, I_2\}$ existen las aristas $(T_1, T_2), (E_1, E_2), (D_1, D_2), (I_1, I_2)$; $c_o = \langle A, Z \rangle, A = \{T_3, E_3, D_3, I_3\}, Z = \{T_4, E_4, D_4, I_4\}$ existen las aristas $(T_3, T_4), (E_3, E_4), (D_3, D_4), (I_3, I_4)$.

Observe que, para $\mathcal{V}[1, 1; 1, j_2]$, se tienen los mismos anexos que para $\mathcal{L}[2, j]$. Por lo tanto, podemos concluir los siguientes resultados.

Lema 7.8 Considere $\mathcal{S} = \langle q_o, c_o \rangle$ la separación válida conveniente para el vox-sólido $\mathcal{V}[1, 1; 1, j_2], j_2 \geq 1$, con respecto al ciclo Hamiltoniano \mathcal{C} definida anteriormente.

Se tiene que:

- La subgráfica F_c , asociada al anexo, añadida sobre el corte c_o , es isomorfa a G_q
- Si $(z, w) \in \mathcal{C}$ y (z, w) está involucrada en el corte c_o , entonces la subgráfica \mathcal{A}_c , inducida por z, w y los vértices del anexo para c_o , tiene, al menos cuatro, trayectorias Hamiltonianas
- La subgráfica F_q , asociada al anexo añadida sobre el corte q_o , es isomorfa a G_q
- Si $(z, w) \in \mathcal{C}$ y (z, w) está involucrada en el corte q_o , entonces la subgráfica \mathcal{A}_q , inducida por z, w y los vértices del anexo para q_o , tiene, al menos, cuatro trayectorias Hamiltonianas.

Sea $\mathcal{S}_1 = \langle q_1, c_1 \rangle$ una separación válida conveniente para $\mathcal{V}[1, 1; i_2, 1], i_2 \geq 1, i_2$ fijo, con respecto al ciclo \mathcal{C} ; con $q_1 = \langle X, Y \rangle, X = \{T_1, E_1, D_1, I_1\}, Y = \{T_2, E_2, D_2, I_2\}$ existen las aristas $(T_1, T_2), (E_1, E_2), (D_1, D_2), (I_1, I_2)$; $c_1 = \langle A, Z \rangle, A = \{T_3, E_3, D_3, I_3\}, Z = \{T_4, E_4, D_4, I_4\}$ existen las aristas $(T_3, T_4), (E_3, E_4), (D_3, D_4), (I_3, I_4)$.

De manera análoga, para $\mathcal{V}[1, 1; i_2, 1]$ se tienen los mismos anexos que para $\mathcal{L}[2, j]$.

Lema 7.9 Considere $\mathcal{S} = \langle q_1, c_1 \rangle$ la separación válida conveniente para el vox-sólido $\mathcal{V}[1, 1; i_2, 1], i_2 \geq 1$, con respecto al ciclo \mathcal{C} definida anteriormente. Se tiene que:

- a) La subgráfica F_c asociada al anexo, añadida sobre el corte c_1 , es isomorfa a G_q
- b) Si $(z, w) \in \mathcal{C}$ y (z, w) está involucrada en el corte c_1 , entonces la subgráfica \mathcal{A}_c , inducida por z, w y los vértices del anexo para c_1 , tiene, al menos, cuatro trayectorias Hamiltonianas
- c) La subgráfica F_q , asociada al anexo, añadida sobre el corte q_1 , es isomorfa a G_q
- d) Si $(z, w) \in \mathcal{C}$ y (z, w) está involucrada en el corte q_1 , entonces la subgráfica \mathcal{A}_q , inducida por z, w y los vértices del anexo para q_1 , tiene, al menos cuatro, trayectorias Hamiltonianas.

Sea $\mathcal{S}_2 = \langle q_2, c_2 \rangle$ una separación válida conveniente para $\mathcal{V}[i_1, 1; 1, 1], i_1 \geq 1, i_1$ fijo, con respecto al ciclo Hamiltoniano \mathcal{C} en la que el corte $q_2 = \langle X, Y \rangle$ queda definido por: $X = \{T_1, E_1, D_1, I_1\}$, $Y = \{T_2, E_2, D_2, I_2\}$ existen las aristas $(T_1, T_2), (E_1, E_2), (D_1, D_2), (I_1, I_2)$; $c_2 = \langle A, Z \rangle$, $A = \{T_3, E_3, D_3, I_3\}$, $Z = \{T_4, E_4, D_4, I_4\}$ existen las aristas $(T_3, T_4), (E_3, E_4), (D_3, D_4), (I_3, I_4)$.

De manera similar, para $\mathcal{V}[i_1, 1; 1, 1]$ se tienen los mismos anexos que para $\mathcal{L}[2, j]$. Por lo tanto, podemos concluir el siguiente resultado:

Lema 7.10 Considere $\mathcal{S} = \langle q_2, c_2 \rangle$ la separación válida conveniente para el vox-sólido $\mathcal{V}[i_1, 1; 1, 1], i_1 \geq 1$, con respecto al ciclo Hamiltoniano \mathcal{C} definida anteriormente. Se tiene que:

- a) La subgráfica F_c , asociada al anexo añadida sobre el corte c_1 , es isomorfa a G_q
- b) Si $(z, w) \in \mathcal{C}$ y (z, w) está involucrada en el corte c_2 , entonces la subgráfica \mathcal{A}_c , inducida por z, w y los vértices del anexo para c_2 , tiene al menos cuatro trayectorias Hamiltonianas.
- c) La subgráfica F_q , asociada al anexo, añadida sobre el corte q_2 , es isomorfa a G_q
- d) Si $(z, w) \in \mathcal{C}$ y (z, w) está involucrada en el corte q_2 , entonces la subgráfica \mathcal{A}_q , inducida por z, w y los vértices del anexo para q_2 , tiene, al menos, cuatro trayectorias Hamiltonianas.

Sea $\mathcal{S}_3 = \langle q_3, c_3 \rangle$ una separación válida conveniente para $\mathcal{V}[i_1, 1; 1, 1], i_1 \geq 1, i_1$ fijo con respecto al ciclo Hamiltoniano \mathcal{C} en la que el corte $q_3 = \langle X, Y \rangle$ está definido por $X = \{T_1, E_1, D_1, I_1\}$, $Y = \{T_2, E_2, D_2, I_2\}$ existen las aristas $(T_1, T_2), (E_1, E_2), (D_1, D_2), (I_1, I_2)$; $c_3 = \langle A, Z \rangle$, $A = \{T_3, E_3, D_3, I_3\}$, $Z = \{T_4, E_4, D_4, I_4\}$ existen las aristas $(T_3, T_4), (E_3, E_4), (D_3, D_4), (I_3, I_4)$.

También, para $\mathcal{V}[1, j_1; 1, 1]$, se tienen los mismos anexos que para $\mathcal{L}[2, j]$. Por lo cual, podemos concluir el siguiente resultado:

Lema 7.11 Considere $\mathcal{S} = \langle q_3, c_3 \rangle$ la separación válida conveniente para el vox-sólido $\mathcal{V}[1, j_1; 1, 1], j \geq 1$, con respecto al ciclo Hamiltoniano \mathcal{C} , definida anteriormente.

Se tiene que:

- a) La subgráfica F_c asociada al anexo añadida sobre el corte c_3 , es isomorfa a G_q .
- b) Si $(z, w) \in \mathcal{C}$ y (z, w) está involucrada en el corte c_3 , entonces la subgráfica \mathcal{A}_c , inducida por z, w y los vértices del anexo para c_3 , tiene, al menos, cuatro trayectorias Hamiltonianas.
- c) La subgráfica F_q , asociada al anexo añadida sobre el corte q_3 , es isomorfa a G_q .
- d) Si $(z, w) \in \mathcal{C}$ y (z, w) está involucrada en el corte q_3 , entonces la subgráfica \mathcal{A}_q , inducida por z, w y los vértices del anexo para q_3 , tiene, al menos, cuatro trayectorias Hamiltonianas.

Podemos aplicar la misma estrategia usada en la Sección 5.2 para generalizar los cortes y establecer resultados similares para las separaciones válidas convenientes.

Lema 7.12 Sea $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2] \in \mathcal{V}$ un vox-sólido irreducible de m vértices, con $m \geq 32$ múltiplo de 4, $m = 16 + 4(i_1 + j_1 + i_2 + j_2)$. Sea \mathcal{C} un ciclo Hamiltoniano para $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$. Entonces,

- (a) Siempre existe una separación válida conveniente \mathcal{S}_2 para $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$ y, por tanto, siempre es posible extender el ciclo \mathcal{C} para obtener un ciclo Hamiltoniano \mathcal{C}' para el vox-sólido $\mathcal{V}[i_1 + k + 1, j_1; i_2, j_2]$, generado al anexar una estructura kZ , $k \geq 0$.
- (b) Siempre existe una separación válida conveniente \mathcal{S}_3 para $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$ y, por lo cual, siempre es posible extender el ciclo \mathcal{C} para obtener un ciclo Hamiltoniano \mathcal{C}' para $\mathcal{V}[i_1, j_1 + k + 1; i_2, j_2]$, creado al anexar una estructura kZ , $k \geq 0$.
- (c) Siempre existe una separación válida conveniente \mathcal{S}_1 para $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$ y, por ende, siempre es posible extender el ciclo \mathcal{C} para obtener un ciclo Hamiltoniano \mathcal{C}' para $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2 + k + 1, j_2]$, que se genera al anexar una estructura kZ , $k \geq 0$.
- (d) Siempre existe una separación válida conveniente \mathcal{S}_o para $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$ y, por tanto, siempre es posible extender el ciclo \mathcal{C} para obtener un ciclo Hamiltoniano \mathcal{C}' para $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2 + k + 1]$, creado al anexar una estructura kZ , $k \geq 0$.

Finalmente, para la familia de gráficas $\mathcal{V}[k_1, \ell_1; k_2, \ell_2]$, $k_1, k_2, \ell_1, \ell_2 \geq 1$, podemos concluir los siguiente resultados:

Teorema 7.3 Dado un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H} para $\mathcal{V}[1, 1; 1, 1]$, siempre es posible extender \mathcal{H} para obtener un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H}' para $\mathcal{V}[k_1, \ell_1; k_2, \ell_2]$, $k_1, k_2, \ell_1, \ell_2 \geq 1$.

Corolario 7.3 Dado un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H} para $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$, siempre es posible extender \mathcal{H} para obtener un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H}' para $\mathcal{V}[k_1, \ell_1; k_2, \ell_2]$, $k_1, k_2, \ell_1, \ell_2 \geq 1$.

Ciclos Hamiltonianos para $\mathcal{Q}[m]$

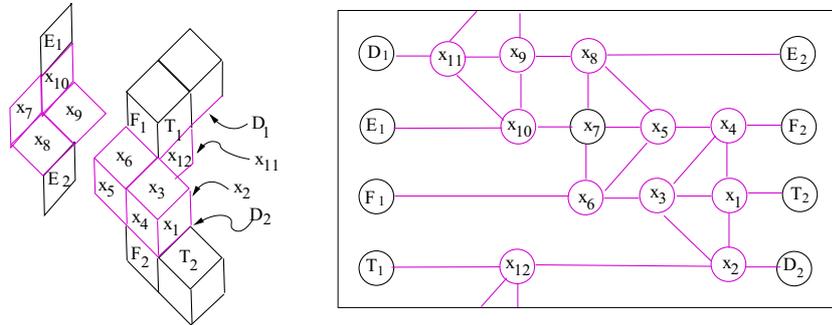


Figura 7.10: Subgráfica asociada al anexo insertado en q para $\mathcal{Q}[m]$

Sea $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ una separación válida conveniente para $\mathcal{Q}[m]$, m fija, $m = 24 + 6k, k \geq 0$, con respecto a un ciclo Hamiltoniano \mathcal{C} en la que el corte $q = \langle X, Y \rangle$ queda definido por: $X = \{F_1, E_1, D_1, T_1\}$, $Y = \{T_2, F_2, E_2, D_2\}$, existen las aristas $(F_1, F_2), (E_1, E_2), (D_1, D_2), (T_1, T_2)$ y $c = \langle A, Z \rangle$, está dado por: $A = \{D_3, F_3, E_3, T_3\}$, $Z = \{F_4, E_4, T_4, D_4\}$, además, existen las aristas $(T_3, T_4), (E_3, E_4), (D_3, D_4), (F_3, F_4)$.

El anexo es una estructura 1V. Para el corte q , los vértices son: $V_{Aq} = \{x_1, x_2, \dots, x_{12}\}$ y las aristas: $E_{Aq} = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_2, x_{12}), (x_3, x_6), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_6), (x_5, x_7), (x_5, x_8), (x_6, x_7), (x_7, x_8), (x_7, x_{10}), (x_8, x_9), (x_9, x_{10}), (x_9, x_{11}), (x_9, x_{12})\}$.

La Figura 7.10 presenta, de forma parcial, como queda el vox-sólido $\mathcal{Q}[m]$ después de insertar la estructura y la subgráfica asociada al anexo insertado en el corte q .

Afirmación 7.6 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{Q}[m]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} , definida anteriormente, y el anexo para el corte q .

Si $(T_1, T_2) \in \mathcal{C}$, entonces $AT_q = \langle \{T_2, x_1, x_2, \dots, x_{12}, T_1\} \rangle$, la subgráfica inducida por los vértices T_1, T_2 y los vértices del anexo, tiene dos trayectorias Hamiltonianas de T_1 a T_2 .

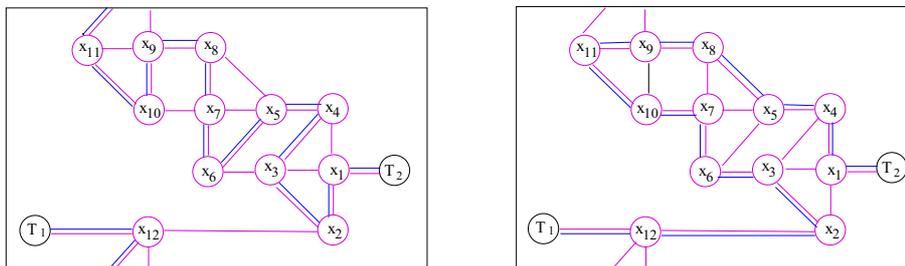


Figura 7.11: Subgráfica inducida AT_q para $\mathcal{Q}[m]$ y dos trayectorias Hamiltonianas

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{Q}[m]$ como se pide. La Figura 7.11 muestra la subgráfica AT_q y sus dos trayectorias Hamiltonianas, que

son: $\mathcal{T}_1 : T_1, x_{12}, x_{11}, x_{10}, x_9, x_8, x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, T_2$, y
 $\mathcal{T}_2 : T_1, x_{12}, x_2, x_3, x_6, x_7, x_{10}, x_{11}, x_9, x_8, x_5, x_4, x_1, T_2$.

Afirmación 7.7 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{Q}[m]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} , definida anteriormente, y el anexo para el corte q .

Si $(D_1, D_2) \in \mathcal{C}$, entonces $AD_q = \langle \{D_1, x_1, x_2, \dots, x_{12}, D_2\} \rangle$, la subgráfica inducida por D_1, D_2 y los vértices del anexo, es isomorfa a AT_q y tiene, al menos dos, trayectorias Hamiltonianas de D_1 a D_2 .

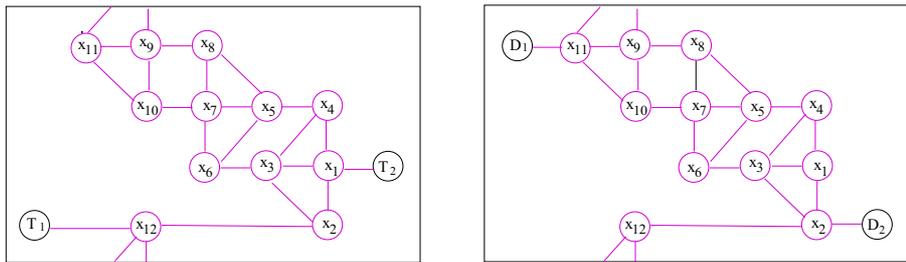


Figura 7.12: Las subgráficas inducidas AT_q y AD_q para $\mathcal{Q}[m]$

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{Q}[m]$ como se pide.

La Figura 7.12 muestra la subgráfica AT_q y hace evidente el isomorfismo ϕ , el cual queda definido por:

$$\begin{aligned} \phi(D_1) &= T_1; & \phi(D_2) &= T_2; & \phi(x_{11}) &= x_1; & \phi(x_9) &= x_3; & \phi(x_8) &= x_6; \\ \phi(x_{10}) &= x_4; & \phi(x_7) &= x_5; & \phi(x_5) &= x_7; & \phi(x_4) &= x_{10}; & \phi(x_6) &= x_8; \\ \phi(x_3) &= x_9; & \phi(x_1) &= x_{11}; & \phi(x_{12}) &= x_2; & \phi(x_2) &= x_{12}. \end{aligned}$$

Afirmación 7.8 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{Q}[m]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} , definida anteriormente, y el anexo para el corte q . Si $(E_1, E_2) \in \mathcal{C}$, entonces $AE_q = \langle \{E_1, x_1, \dots, x_{12}, E_2\} \rangle$, la subgráfica inducida por E_1, E_2 y los vértices del anexo tiene, al menos, once trayectorias Hamiltonianas de E_1 a E_2 .

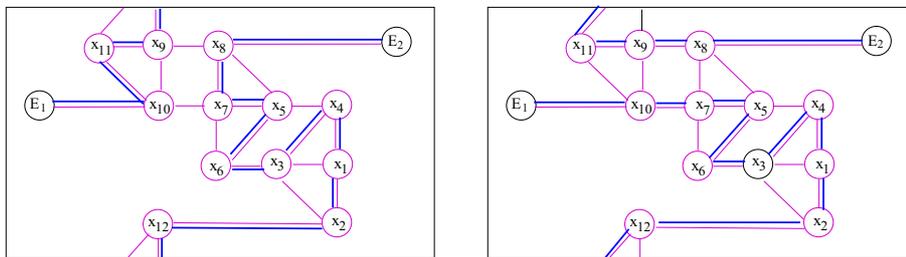


Figura 7.13: Subgráfica inducida AE_q para $\mathcal{Q}[m]$

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{Q}[m]$ como se pide. La Figura 7.13 muestra la subgráfica AE_q y dos de sus trayectorias Hamiltonianas.

Las once trayectorias Hamiltonianas para AE_q son:

- $\mathcal{T}_1 : E_1, x_{10}, x_{11}, x_9, x_{12}, x_2, x_3, x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, E_2;$
- $\mathcal{T}_2 : E_1, x_{10}, x_{11}, x_9, x_{12}, x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_7, x_5, x_8, E_2;$
- $\mathcal{T}_3 : E_1, x_{10}, x_{11}, x_9, x_{12}, x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, x_7, x_8, E_2;$
- $\mathcal{T}_4 : E_1, x_{10}, x_{11}, x_9, x_{12}, x_2, x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, E_2;$
- $\mathcal{T}_5 : E_1, x_{10}, x_9, x_{11}, x_{12}, x_2, x_3, x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, E_2;$
- $\mathcal{T}_6 : E_1, x_{10}, x_9, x_{11}, x_{12}, x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_7, x_5, x_8, E_2;$
- $\mathcal{T}_7 : E_1, x_{10}, x_9, x_{11}, x_{12}, x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, x_7, x_8, E_2;$
- $\mathcal{T}_8 : E_1, x_{10}, x_9, x_{11}, x_{12}, x_2, x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, E_2;$
- $\mathcal{T}_9 : E_1, x_{10}, x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_1, x_2, x_{12}, x_{11}, x_9, x_8, E_2;$
- $\mathcal{T}_{10} : E_1, x_{10}, x_7, x_6, x_5, x_4, x_1, x_3, x_2, x_{12}, x_{11}, x_9, x_8, E_2;$
- $\mathcal{T}_{11} : E_1, x_{10}, x_7, x_5, x_6, x_3, x_4, x_1, x_2, x_{12}, x_{11}, x_9, x_8, E_2.$

Afirmación 7.9 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{Q}[m]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} , definida anteriormente, y el anexo para el corte q .

Si $(F_1, F_2) \in \mathcal{C}$ entonces, $AF_q = \langle \{F_1, x_1, \dots, x_{12}, F_2\} \rangle$, la subgráfica inducida por F_1, F_2 y los vértices del anexo, es isomorfa a AE_q y tiene, al menos, once trayectorias Hamiltonianas de F_1 a F_2 .

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{Q}[m]$ como se pide. La Figura 7.14 muestra las subgráficas AE_q y AF_q para $\mathcal{Q}[m]$. El isomorfismo ϕ queda definido por:

$$\begin{aligned} \phi(F_1) &= E_2; & \phi(F_2) &= E_1; & \phi(x_{11}) &= x_1; & \phi(x_9) &= x_3; & \phi(x_8) &= x_6; \\ \phi(x_{10}) &= x_4; & \phi(x_7) &= x_5; & \phi(x_5) &= x_7; & \phi(x_4) &= x_{10}; & \phi(x_6) &= x_8; \\ \phi(x_3) &= x_9; & \phi(x_1) &= x_{11}; & \phi(x_{12}) &= x_2; & \phi(x_2) &= x_{12}. \end{aligned}$$

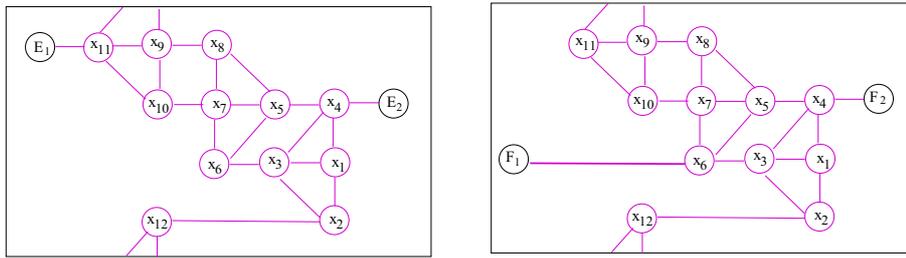


Figura 7.14: Subgráficas AE_q y AF_q para $\mathcal{Q}[m]$

Los vértices del anexo, estructura 1V, para el corte c son: $V_{Ac} = \{y_1, y_2, \dots, y_{12}\}$ y las aristas: $E_{Ac} = \{(y_1, y_2), (y_1, y_3), (y_1, y_{10}), (y_2, y_3), (y_2, y_4), (y_2, y_{12}), (y_3, y_4), (y_3, y_6), (y_4, y_5), (y_5, y_6), (y_5, y_7), (y_5, y_8), (y_7, y_8), (y_8, y_9), (y_9, y_{10}), (y_9, y_{11}), (y_{10}, y_{11}), (y_{10}, y_{12}), (y_{11}, y_{12})\}$

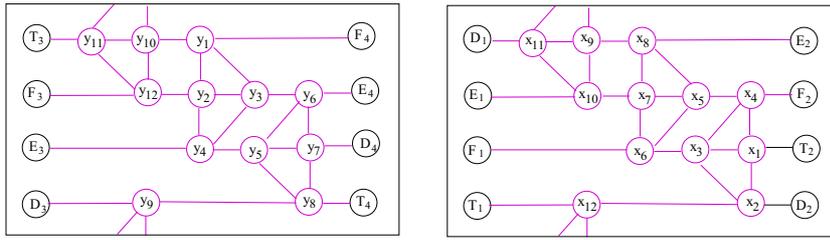


Figura 7.15: Subgráfica G_c asociada al corte c , para $\mathcal{Q}[m]$

Afirmación 7.10 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{Q}[m]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} definida anteriormente y el anexo para el corte c .

Entonces G_c , la subgráfica asociada al anexo para el corte c es isomorfa a G_q .

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{Q}[m]$ como se pide.

La Figura 7.15(a) muestra la subgráfica G_c y hace evidente el isomorfismo ϕ , el cual queda definido por:

$$\begin{aligned} \phi(D_1) &= T_3; & \phi(x_{11}) &= y_{11}; & \phi(x_9) &= y_{10}; & \phi(x_8) &= y_1; & \phi(E_2) &= F_4; \\ \phi(E_1) &= F_3; & \phi(x_{10}) &= y_{12}; & \phi(x_7) &= y_2; & \phi(x_5) &= y_3; & \phi(x_4) &= y_6; \\ \phi(F_2) &= E_4; & \phi(F_1) &= E_3; & \phi(x_6) &= y_4; & \phi(x_3) &= y_5; & \phi(x_1) &= y_7; \\ \phi(T_2) &= D_4; & \phi(T_1) &= D_3; & \phi(x_{12}) &= y_9; & \phi(x_2) &= y_8; & \phi(D_2) &= T_4. \end{aligned}$$

Después de revisar todas las posibles anexos para los cortes de la separación válida conveniente para $\mathcal{Q}[m]$, las subgráficas inducidas respectivas, así como las posibles trayectorias Hamiltonianas, podemos concluir el siguiente resultado:

Lema 7.13 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{Q}[m]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} , definida anteriormente, y el anexo para el corte c . Se tiene que:

- (a) Si $(T_3, T_4) \in \mathcal{C}$, entonces ATc tiene, al menos, 2 trayectorias Hamiltonianas
- (b) Si $(E_3, E_4) \in \mathcal{C}$, entonces AEc tiene, al menos, 11 trayectorias Hamiltonianas
- (c) Si $(D_3, D_4) \in \mathcal{C}$, entonces ADc tiene, al menos, 2 trayectorias Hamiltonianas
- (d) Si $(F_3, F_4) \in \mathcal{C}$, entonces AIf tiene, al menos, 11 trayectorias Hamiltonianas.

Podemos aplicar la misma estrategia usada en la Sección 5.2 para generalizar los cortes y establecer resultados similares para las separaciones válidas convenientes. Así, hemos establecido el siguiente resultado:

Lema 7.14 Sea \mathcal{C} un ciclo Hamiltoniano para $\mathcal{Q}[18]$. Siempre existe una separación válida conveniente para él y, por tanto, siempre es posible extender el ciclo \mathcal{C} para obtener un ciclo Hamiltoniano \mathcal{C}' para $\mathcal{Q}[24]$ que se genera al anexo a $\mathcal{Q}[18]$ una estructura 1V.

Para extender la familia y su ciclo hamiltoniano respectivo, a partir de $\mathcal{Q}[24] = \mathcal{Q}[6\kappa]$ a $\mathcal{Q}[6\kappa + 1]$, $\kappa \geq 4$, sin pérdida de generalidad, fijamos la separación $\mathcal{S}_0 = \langle c_k, q_k \rangle$ con

$$c_k = \langle X_o, Y_k \rangle = \{(U8, E_2), (U4, F_2), (U1, T_2), (U2, d_2)\}; \text{ y}$$

$$q_k = \langle A_o, Z_k \rangle = \{(E_3, V4), (F_3, V12), (T_3, V11), (D_3, V9)\}.$$

Las subgráficas Gq_m y Gc_m , asociadas a los anexos, son mostradas en la Figura 7.16. Además se ilustra cómo se acomodan en el encaje. Para la primera transformación, de $\mathcal{Q}[24]$ a $\mathcal{Q}[30]$, usamos los cortes,

$$c_k = \langle X_o, Y_k \rangle = \{(X8, E_2), (X4, F_2), (X1, T_2), (X2, D_2)\}; \text{ y}$$

$$q_k = \langle A_o, Z_k \rangle = \{(E_3, Y_4), (F_3, Y_{12}), (T_3, Y_{11}), (D_3, Y_9)\}.$$

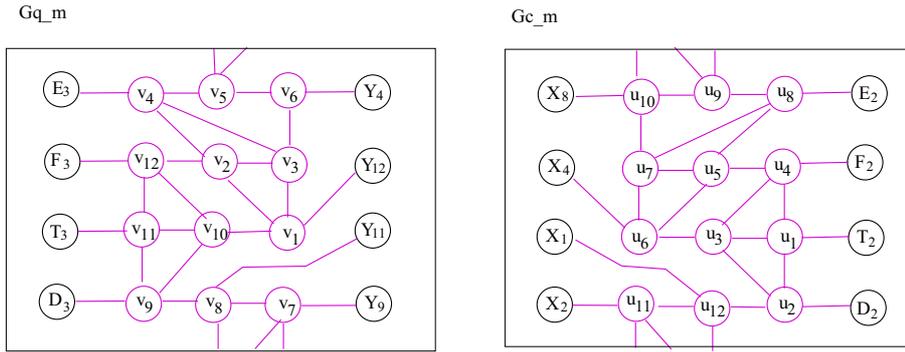


Figura 7.16: Subgráficas asociada a los cortes, para $\mathcal{Q}[6 \cdot \kappa]$, $\kappa \geq 5$

Afirmación 7.11 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{Q}[m]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} , definida anteriormente, y el anexo para el corte c .

Entonces, Gc_m , la subgráfica asociada al anexo para el corte c , es isomorfa a Gq_m .

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{Q}[m]$ como se pide.

La Figura 7.15(a) muestra la subgráfica G_c y hace evidente el isomorfismo ϕ , el cual queda definido por:

$$\begin{aligned} \phi(X_8) &= Y_4; & \phi(u_{10}) &= v_6; & \phi(u_9) &= v_5; & \phi(u_8) &= v_4; & \phi(E_2) &= E_3; \\ \phi(X_4) &= Y_{12}; & \phi(u_7) &= v_3; & \phi(u_5) &= v_2; & \phi(u_4) &= v_{12}; & \phi(F_2) &= F_3; \\ \phi(X_1) &= Y_{11}; & \phi(u_6) &= v_1; & \phi(u_3) &= v_{10}; & \phi(u_1) &= v_{11}; & \phi(T_2) &= T_3; \\ \phi(X_2) &= Y_9; & \phi(u_{11}) &= v_7; & \phi(u_{12}) &= v_8; & \phi(u_2) &= v_9; & \phi(D_2) &= D_3. \end{aligned}$$

Los vértices del anexo, estructura $1V$, para el corte c son: $V_{Ac} = \{u_1, u_2, \dots, u_{12}\}$ y las aristas: $E_{Ac} = \{(u_1, u_2), (u_1, u_3), (u_1, u_4), (u_2, u_3), (u_2, u_{12}), (u_3, u_4), (u_3, u_6), (u_4, u_5), (u_5, u_6), (u_5, u_7), (u_5, u_8), (u_6, u_7), (u_7, u_{10}), (u_7, u_8), (u_8, u_9), (u_9, u_{10}), (u_9, u_{11}), (u_9, u_{12}), (u_{10}, u_{11}), (u_{11}, u_{12})\}$.

Afirmación 7.12 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{Q}[m]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} , definida anteriormente, y el anexo para el corte c .

Si $(X_1, T_2) \in \mathcal{C}$ entonces $ATc_m = \langle \{X_1, u_1, u_2, \dots, u_{12}, T_2\} \rangle$, la subgráfica inducida por los vértices X_1, T_2 y los vértices del anexo, tiene, al menos, dos trayectorias Hamiltonianas de X_1 a T_2 .

Demostración. Las trayectorias Hamiltonianas son:

$$P_1 : X_1, u_{12}, u_{11}, u_{10}, u_9, u_8, u_7, u_6, u_5, u_4, u_3, u_2, u_1;$$

$$P_2 : X_1, u_{12}, u_2, u_3, u_6, u_7, u_{10}, u_{11}, u_9, u_8, u_5, u_4, u_1.$$

La Figura 7.17(a) muestra la subgráfica ATc_m e ilustra la trayectoria P_1 .

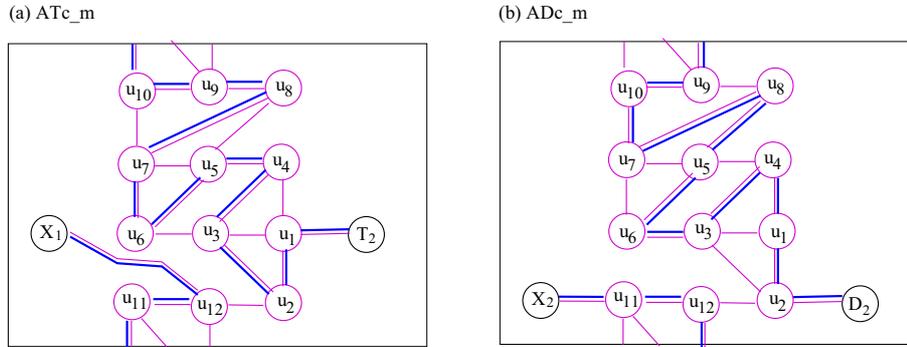


Figura 7.17: Subgráficas inducidas ATc_m y ADc_m para $\mathcal{Q}[6 \cdot \kappa]$, $\kappa \geq 5$

Afirmación 7.13 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{Q}[m]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} , definida anteriormente, y el anexo para el corte c .

Si $(X_2, D_2) \in \mathcal{C}$, entonces $ADc_m = \langle \{X_2, u_1, u_2, \dots, u_{12}, D_2\} \rangle$, la subgráfica inducida por los vértices X_2, D_2 y los vértices del anexo, tiene, al menos, dos trayectorias Hamiltonianas de X_2 a D_2 .

Demostración. Las trayectorias Hamiltonianas son:

$$P_1 : X_1, u_{11}, u_{12}, u_9, u_{10}, u_7, u_8, u_5, u_6, u_3, u_4, u_1, u_2, D_2;$$

$$P_2 : X_1, u_{11}, u_{10}, u_7, u_6, u_3, u_1, u_4, u_5, u_8, u_9, u_{12}, u_2, D_2.$$

La Figura 7.17(b) muestra la subgráfica ADc_m e ilustra la trayectoria P_1 .

Afirmación 7.14 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{Q}[m]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} , definida anteriormente, y el anexo para el corte c .

Si $(X_8, E_2) \in \mathcal{C}$, entonces $AEC_m = \langle \{X_2, u_1, u_2, \dots, u_{12}, E_2\} \rangle$, la subgráfica inducida por los vértices X_8, E_2 y los vértices del anexo, tiene, al menos, once trayectorias Hamiltonianas de X_8 a E_2 .

Demostración. Las trayectorias Hamiltonianas son:

$$P_1 : X_8, u_{10}, u_{11}, u_9, u_{12}, u_2, u_3, u_1, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, E_2;$$

$$P_2 : X_8, u_{10}, u_{11}, u_9, u_{12}, u_2, u_1, u_4, u_3, u_6, u_7, u_5, u_8, E_2;$$

$$P_3 : X_8, u_{10}, u_{11}, u_9, u_{12}, u_2, u_1, u_4, u_3, u_6, u_5, u_7, u_8, E_2;$$

$$P_4 : X_8, u_{10}, u_{11}, u_9, u_{12}, u_2, u_1, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, E_2;$$

$$P_5 : X_8, u_{10}, u_9, u_{11}, u_{12}, u_2, u_3, u_1, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, E_2;$$

$$P_6 : X_8, u_{10}, u_9, u_{11}, u_{12}, u_2, u_1, u_4, u_3, u_6, u_7, u_5, u_8, E_2;$$

$$P_7 : X_8, u_{10}, u_9, u_{11}, u_{12}, u_2, u_1, u_4, u_3, u_6, u_5, u_7, u_8, E_2;$$

$P_8 : X_8, u_{10}, u_9, u_{11}, u_{12}, u_2, u_1, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, E_2;$

$P_9 : X_8, u_{10}, u_7, u_6, u_5, u_4, u_3, u_1, u_2, u_{12}, u_{11}, u_9, u_8, E_2;$

$P_{10} : X_8, u_{10}, u_7, u_6, u_5, u_4, u_1, u_3, u_2, u_{12}, u_{11}, u_9, u_8, E_2;$

$P_{11} : X_8, u_{10}, u_7, u_5, u_6, u_3, u_4, u_1, u_2, u_{12}, u_{11}, u_9, u_8, E_2.$

La Figura 7.18(a) muestra la subgráfica AEC_m e ilustra la trayectoria P_3 .

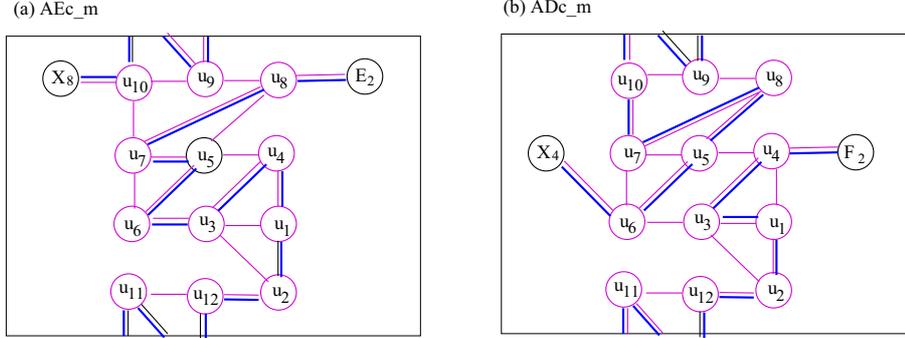


Figura 7.18: Subgráficas inducidas AEC_m y AFc_m para $\mathcal{Q}[6 \cdot \kappa], \kappa \geq 5$

Afirmación 7.15 Considere $\mathcal{S} = \langle q, c \rangle$ la separación válida conveniente para $\mathcal{Q}[m]$ con respecto al ciclo \mathcal{C} , definida anteriormente, y el anexo para el corte c .

Si $(X_4, F_2) \in \mathcal{C}$ entonces $AEC_m = \langle \{X_4, u_1, u_2, \dots, u_{12}, F_2\} \rangle$, la subgráfica inducida por los vértices X_4, F_2 y los vértices del anexo, tiene, al menos, once trayectorias Hamiltonianas de X_4 a F_2 .

Demostración. Las trayectorias Hamiltonianas son:

$P_1 : X_4, u_6, u_7, u_5, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_2, u_3, u_1, u_4, F_2;$

$P_2 : X_4, u_6, u_7, u_5, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_2, u_1, u_3, u_4, F_2;$

$P_3 : X_4, u_6, u_5, u_8, u_7, u_{10}, u_{11}, u_9, u_{12}, u_2, u_3, u_1, u_4, F_2;$

$P_4 : X_4, u_6, u_5, u_8, u_7, u_{10}, u_{11}, u_9, u_{12}, u_2, u_1, u_3, u_4, F_2;$

$P_5 : X_4, u_6, u_5, u_8, u_7, u_{10}, u_9, u_{11}, u_{12}, u_2, u_3, u_1, u_4, F_2;$

$P_6 : X_4, u_6, u_5, u_8, u_7, u_{10}, u_9, u_{11}, u_{12}, u_2, u_1, u_3, u_4, F_2;$

$P_7 : X_4, u_6, u_5, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_2, u_3, u_1, u_4, F_2;$

$P_8 : X_4, u_6, u_5, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_2, u_1, u_3, u_4, F_2;$

$P_9 : X_4, u_6, u_3, u_1, u_2, u_{12}, u_{11}, u_{10}, u_9, u_8, u_7, u_5, u_4, F_2;$

$P_{10} : X_4, u_6, u_3, u_1, u_2, u_{12}, u_{11}, u_9, u_{10}, u_7, u_8, u_5, u_4, F_2;$

$P_{11} : X_4, u_6, u_3, u_1, u_2, u_{12}, u_9, u_{11}, u_{10}, u_7, u_8, u_5, u_4, F_2.$

La Figura 7.18(a) muestra la subgráfica AEC_m e ilustra la trayectoria P_4 .

Finalmente, para la familia de gráficas $\mathcal{Q}[18 + 6(\kappa)], k \geq 1$, podemos concluir los siguiente resultados:

Teorema 7.4 Dado un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H} para $\mathcal{Q}[18]$ siempre es posible extender \mathcal{H} para obtener un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H}' para $\mathcal{Q}[18 + 6(\kappa)], k \geq 1$.

Corolario 7.4 Dado un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H} para $\mathcal{Q}[6\kappa]$ siempre es posible extender \mathcal{H} para obtener un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H}' para $\mathcal{Q}[6(\kappa + k)]$, $\kappa, k \geq 1$.

Después de haber revisado los cuatro vox-sólidos irreducibles básicos y sus familias podemos establecer el siguiente resultado,

Teorema 7.5 Sea \mathcal{V} un vox-sólido irreducible básico. Sea \mathcal{C} un ciclo Hamiltoniano para \mathcal{V} . Sea \mathcal{V}' el vox-sólido irreducible obtenido de \mathcal{V} agregando estructuras kZ , $k \geq 0$, o jV , $j \geq 1$. Entonces, siempre es posible extender el ciclo \mathcal{C} para obtener un ciclo Hamiltoniano \mathcal{C}' para \mathcal{V}' .

A continuación revisaremos la descomposición Hamiltoniana de los vox-sólidos irreducibles y sus familias.

7.2. Descomposición Hamiltoniana de Vox-sólidos

La descomposición Hamiltoniana consiste de dos ciclos a los que llamaremos \mathcal{H} y \mathcal{C} , la denotaremos como $\mathcal{D} = (\mathcal{H}, \mathcal{C})$. Diremos que \mathcal{H} es el canónico y \mathcal{C} el complemento. Procuraremos hacer las separaciones válidas convenientes sobre el canónico, \mathcal{H} .

Utilizando separaciones válidas convenientes, hemos visto (Teorema 7.5) que dado un ciclo Hamiltoniano, \mathcal{H} , para un vox-sólido irreducible básico \mathcal{V} , siempre es posible extender \mathcal{H} para obtener un ciclo Hamiltoniano \mathcal{H}' para \mathcal{V}' , generado al agregarle a \mathcal{V} una estructura kZ o jV , $k \geq 0, j \geq 1$.

Así, para determinar una descomposición Hamiltoniana de un vox-sólido irreducible básico, usaremos una estrategia similar: Dada una descomposición Hamiltoniana $\mathcal{D} = (\mathcal{H}, \mathcal{C})$ para \mathcal{V} extenderemos, usando una trayectoria Hamiltoniana, el ciclo canónico \mathcal{H} , a \mathcal{H}' , de tal forma que el complemento \mathcal{C}' también sea un ciclo Hamiltoniano. Con ello, obtenemos la descomposición Hamiltoniana $\mathcal{D}' = (\mathcal{H}', \mathcal{C}')$.

No todas las trayectorias Hamiltonianas que reúnen los vértices divididos por la separación válida conveniente para el ciclo canónico \mathcal{H} , inducen una descomposición Hamiltoniana. Por ello, debemos seleccionar, cuidadosamente, la trayectoria Hamiltoniana que sí induzca una descomposición.

Esta estrategia también es aplicable a vox-sólidos arista-visibles toroidales que no son irreducibles. Por ejemplo, el ciclo Hamiltoniano dado para la Tuerca en la Figura 7.1 resulta ser el ciclo canónico de una descomposición Hamiltoniana para la Tuerca.

De hecho $\mathcal{D} = (\mathcal{H}, \mathcal{C})$, está definida por:

\mathcal{H} : 1, 2, 3, ..., 15, 16, 17, 18, ..., 31, 32, 1.

\mathcal{C} : 1, 4, 29, 32, 27, 25, 28, 23, 18, 15, 9, 22, 30, 8, 5, 14, 12, 16, 10, 20, 17, 19, 24, 21, 26, 31, 2, 7, 11, 13, 6, 3, 1.

Se le anexo una estructura $0Z$ para convertirla en una tuerca con doce voxes, T_{12} , Figura 7.2(A). Las trayectorias Hamiltonianas utilizada para recorrer los anexos resultan ser las indicadas para extender ambos ciclos de la descomposición Hamiltoniana. En específico, $\mathcal{D}' = (\mathcal{H}', \mathcal{C}')$ queda determinada por:

\mathcal{H}' : 1, 2, 3, ..., 15, 16, A, B, C, D, E, F, G, H, 17, 18, ..., 31, 32, h, g, f, e, d, c, b, a, 1.

\mathcal{C}' : 1, 4, b, g, 29, 32, 27, 25, 28, 23, 18, E, H, A, D, 15, 9, C, F, 22, 30, f, c, 8, 5, 14, 12, 16, 10, B, G, 20, 17, 19, 24, 21, 26, 31, e, h, a, d, 2, 7, 11, 13, 6, 3, 1.

Como veremos en las secciones siguientes, para cada uno de los vox-sólidos irreducibles básicos daremos una descomposición Hamiltoniana y su generalización para las familias definidas.

Descomposición Hamiltoniana para la Familia $\mathcal{L}[i, j]$

Iniciamos dando la descomposición Hamiltoniana para \mathcal{L}_{16} , después construiremos la descomposición Hamiltoniana para $\mathcal{L}[2, j]$, luego para $\mathcal{L}[i, 1]$ y, finalmente, para $\mathcal{L}[i, j]$.

Descomposición Hamiltoniana para \mathcal{L}_{16}

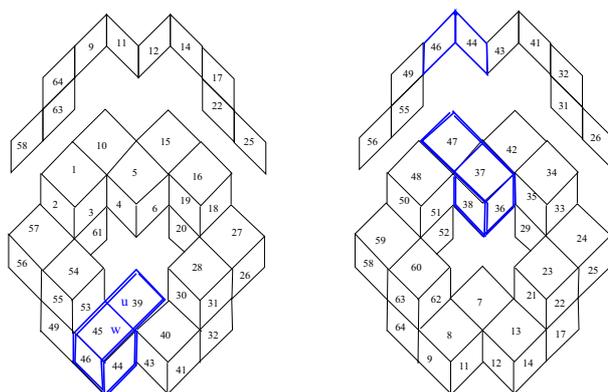


Figura 7.19: Vox Sólido \mathcal{L}_{16}

A continuación, presentamos una descomposición Hamiltoniana para el vox-sólido irreducible \mathcal{L}_{16} mostrado en la Figura 7.19. La enumeración presentada sobre las caras del vox-sólido representa un recorrido Hamiltoniano sobre \mathcal{L}_{16} . Sobre el encaje, dado en la Figura 7.20, verificamos que, en efecto, se tiene una descomposición Hamiltoniana.

Siguiendo la enumeración de los vértices, obtenemos un ciclo hamiltoniano, \mathcal{H} , en el que las aristas son más gruesas y azules. Si recorremos las aristas que no fueron usadas por \mathcal{H} , tenemos el segundo ciclo, \mathcal{C} . Por ende, tenemos $\mathcal{D}_{L_{16}}(\mathcal{H}, \mathcal{C})$ para \mathcal{L}_{16} .

En específico:

\mathcal{H} : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 37, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64.

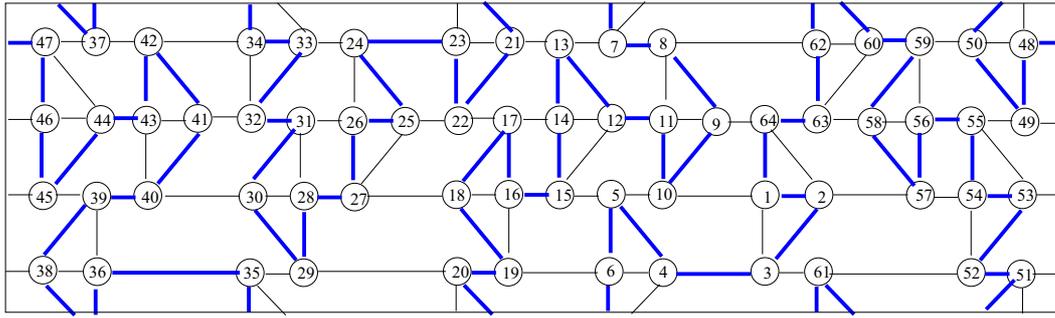


Figura 7.20: Vox Sólido \mathcal{L}_{16} inmerso en el Toro

$\mathcal{C} : 1, 10, 5, 15, 12, 14, 17, 22, 25, 27, 18, 16, 19, 6, 4, 7, 13, 21, 23, 20, 29, 35, 33, 24, 26, 31, 28, 30, 40, 43, 41, 32, 34, 42, 37, 47, 44, 46, 49, 55, 53, 45, 39, 36, 38, 51, 48, 50, 59, 56, 58, 63, 60, 62, 8, 11, 9, 64, 02, 57, 54, 52, 61, 3, 1.$

Descomposición Hamiltoniana para \mathcal{L}_{20}

Construiremos la descomposición Hamiltoniana de \mathcal{L}_{20} a partir de $\mathcal{D}_{L_{16}}(\mathcal{H}, \mathcal{C})$. Primero debemos considerar una separación válida conveniente en \mathcal{L}_{16} con el fin de anexar estructuras $0Z$.

La Figura 7.21 nos muestra la separación, las estructuras $0Z$ y su enumeración. Además, se presenta el vox-sólido irreducible obtenido.

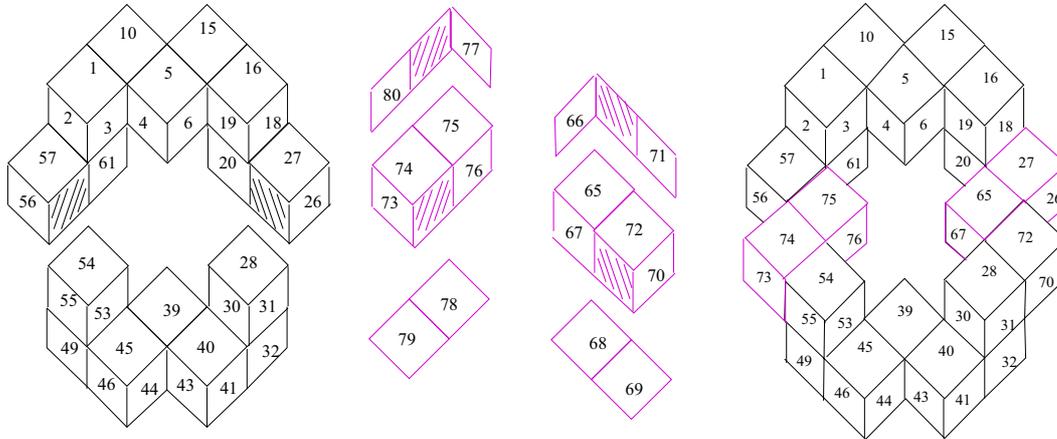


Figura 7.21: Construcción de \mathcal{L}_{20} a partir de \mathcal{L}_{16}

Sea $\mathcal{S} = \langle c_o, q_o \rangle$ la separación válida conveniente, con

$$\begin{aligned}
 c_o &= \langle X_o, Y_o \rangle = \{(33, 24), (31, 26), (28, 27), (29, 20)\}, \\
 X_o &= \{33, 31, 28, 29\}, Y_o = \{24, 26, 27, 20\}, (28, 27) \in \mathcal{H} \cap c_o; \\
 q_o &= \langle Z_o, A_o \rangle = \{(59, 50), (56, 55), (57, 54), (61, 62)\}, \\
 Z_o &= \{59, 56, 57, 61\}, A_o = \{50, 55, 54, 52\}, (56, 55) \in \mathcal{H} \cap q_o;
 \end{aligned}$$

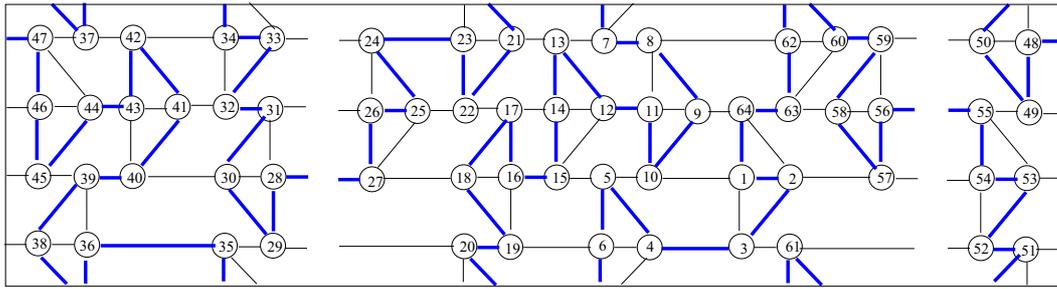


Figura 7.22: Cortes en el encaje de \mathcal{L}_{16}

La separación sobre el encaje, se ilustra en la Figura 7.22. Note que solamente una arista del ciclo \mathcal{H} fue rota por cada corte. Ahora agregaremos los anexos, mostrados en la Figura 7.23. La enumeración dada en los anexos sigue la trayectoria Hamiltoniana, marcada con aristas más gruesas. Tal trayectoria induce a la descomposición Hamiltoniana.

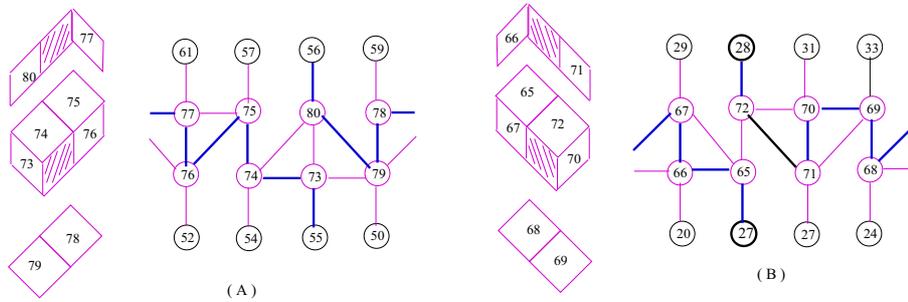


Figura 7.23: Subgráficas para las estructuras 0Z

En específico, la primera extensión para \mathcal{H} es: **27**, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, **28** y la segunda es: **55**, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, **56**.

En la Figura 7.24 se muestra la gráfica obtenida al agregar los anexos.

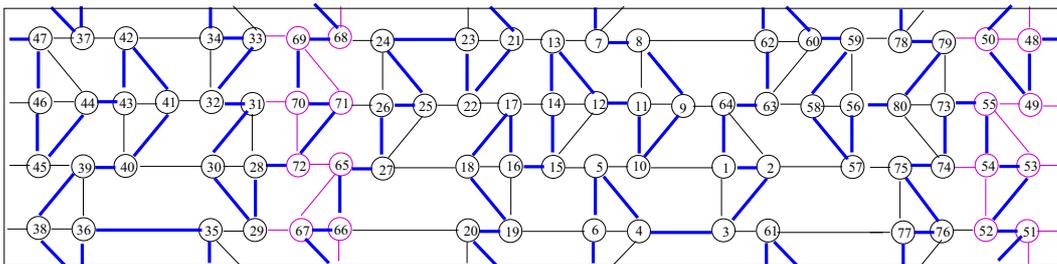


Figura 7.24: \mathcal{L}_{20} encajado en el Toro y su descomposición Hamiltoniana

Los ciclos de la descomposición $\mathcal{D}_{L_{20}}(\mathcal{H}', \mathcal{C}')$ quedan:

- \mathcal{H}' : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, **27**, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, **28**, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 37, 39,

40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, **55**, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, **56**, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 1.

\mathcal{C}' : 1, 10, 5, 15, 12, 14, 17, 22, 25, 27, 18, 16, 19, 6, 4, 7, 13, 21, 23, 20, 66, 68, 24, 26, 71, 69, 33, 35, 29, 67, 65, 72, 70, 31, 28, 30, 40, 43, 41, 32, 34, 42, 37, 47, 44, 46, 49, 55, 53, 45, 39, 36, 38, 51, 48, 50, 79, 73, 80, 74, 54, 52, 76, 78, 59, 56, 58, 63, 60, 62, 8, 11, 9, 64, 2, 57, 75, 77, 61, 3, 1.

Descomposición Hamiltoniana para $\mathcal{L}[2, j]$

Consideremos la construcción realizada para \mathcal{L}_{20} . Primero, vamos a abstraer el ciclo \mathcal{H} de $\mathcal{D}_{L_{16}}(\mathcal{H}, \mathcal{C})$. Podemos tomar la idea general de la Figura 7.22, conservamos únicamente los vértices en los extremos del encaje y los involucrados en los cortes. Sobre este esquema, marcaremos el ciclo \mathcal{H} , en este caso. La Figura 7.25(A) muestra esta reducción.

Ahora bien, podemos generalizar y renombrar los vértices involucrados en la construcción y, además, simplificar las trayectorias, lo cual se ilustra en la Figura 7.25(B).

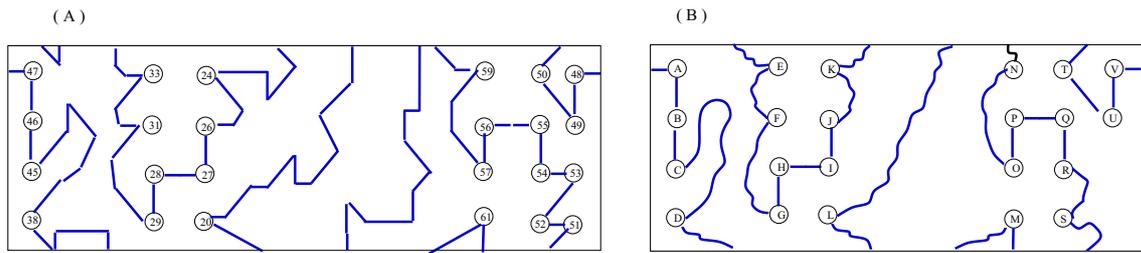


Figura 7.25: Abstracción de \mathcal{H} para el vox-sólido irreducible \mathcal{L}_{16}

Los ciclos \mathcal{H} y \mathcal{C} quedan determinados de la siguiente manera:

$$\mathcal{H}: A \rightarrow B \rightarrow C \rightsquigarrow D \rightsquigarrow E \rightsquigarrow F \rightsquigarrow G \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow J \rightsquigarrow K \rightsquigarrow L \rightsquigarrow M \rightsquigarrow N \rightsquigarrow O \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightsquigarrow S \rightsquigarrow T \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow A.$$

$$\mathcal{C}: A \rightsquigarrow H \rightarrow F \rightarrow J \rightarrow K \rightarrow E \rightsquigarrow G \rightsquigarrow L \rightsquigarrow I \rightsquigarrow M \rightarrow S \rightarrow R \rightarrow O \rightsquigarrow P \rightarrow N \rightarrow T \rightarrow V \rightsquigarrow D \rightsquigarrow C \rightsquigarrow Q \rightarrow U \rightarrow B \rightsquigarrow A.$$

La Figura 7.26 muestra la abstracción de \mathcal{C} para el vox-sólido irreducible \mathcal{L}_{16} .

Las subgráficas asociadas a las estructuras 0Z, anexos, que serán añadidas también serán renombradas, según como se recorran para extender la descomposición Hamiltoniana. La Figura 7.27 las muestra y, también, la trayectoria Hamiltoniana se marca con aristas más gruesas y azules.

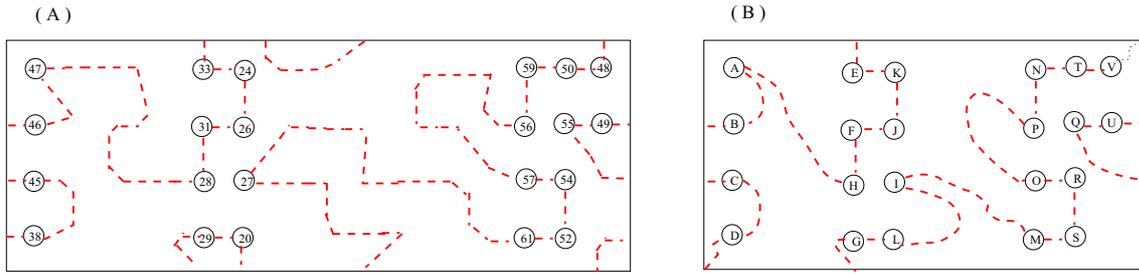


Figura 7.26: Abstracción de \mathcal{C} para \mathcal{L}_{16}

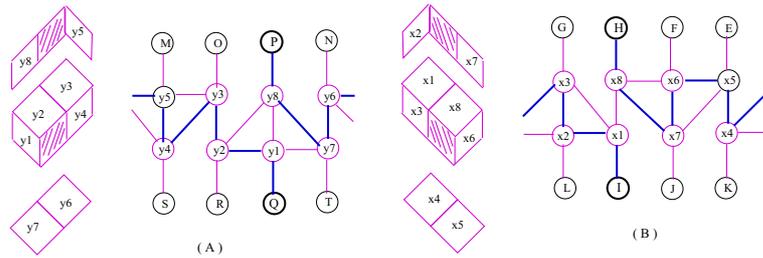


Figura 7.27: Subgráficas para las estructuras 0Z

Al agregar las subgráficas, el resultado de la abstracción de los ciclos \mathcal{H}' y \mathcal{C}' en $\mathcal{L}[2, 2]$ se muestra en la Figura 7.28.

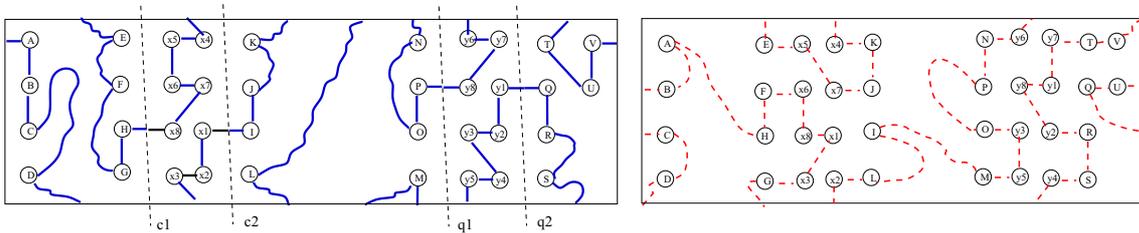


Figura 7.28: Abstracción de \mathcal{H}' y \mathcal{C}' para \mathcal{L}_{20}

Para pasar al siguiente vox-sólido de la familia, $\mathcal{L}[2, 3]$, tenemos que separar las estructuras $2V$ del segundo piso para convertirlos en $3V$. Hay varias formas de hacerlo, lo que, de igual forma, se refleja en el encaje, se aplicará la estrategia sobre el ciclo \mathcal{H}' . Debemos garantizar reconstruir la abstracción del ciclo canónico \mathcal{H} , para poder aplicar inducción sobre la construcción de la descomposición Hamiltoniana. Así, una vez agregados los anexos, podemos hacer cuatro cortes que rompen una arista de \mathcal{H} :

$$c_1 = \langle A_1, X_1 \rangle = \{(E, x_5), (F, x_6), (H, x_8), (G, x_3)\};$$

$$A_1 = \{E, F, H, G\} \text{ y } X_1 = \{x_5, x_6, x_8, x_3\}; c_1 \text{ separa } (H, x_8).$$

$$c_2 = \langle A_2, X_2 \rangle = \{(x_4, K), (x_7, J), (x_1, I), (x_2, L)\};$$

$$A_2 = \{K, J, I, L\} \text{ y } X_2 = \{x_4, x_7, x_1, x_2\}; c_2 \text{ separa } (I, x_1).$$

$$q_1 = \langle B_1, Y_1 \rangle = \{(N, y_6), (P, y_8), (O, y_3), (M, y_5)\};$$

$$B_1 = \{N, P, O, M\} \text{ y } Y_1 = \{y_6, y_8, y_5, y_3\}; q_1 \text{ separa } (P, y_8).$$

$$q_2 = \langle B_2, Y_2 \rangle = \{(y_7, T), (y_1, Q), (y_2, R), (y_4, S)\};$$

$$B_2 = \{T, Q, R, S\} \text{ y } Y_2 = \{y_7, y_1, y_2, y_4\}; q_2 \text{ separa } (Q, y_1).$$

Sobre la Figura 7.28 se muestran los cortes. En total, tenemos la siguiente combinación de cortes; separaciones asociadas al vox-sólido $\mathcal{L}[2, k], k \geq 3$: $\langle c_1, q_1 \rangle, \langle c_1, q_2 \rangle, \langle c_2, q_1 \rangle, \langle c_2, q_2 \rangle$. Por otro lado, la Figura 7.29 muestra los cortes sobre el objeto 3-dimensional, $\mathcal{L}_{20} = \mathcal{L}[2, 2]$ y el vox-sólido resultante, $\mathcal{L}_{24} = \mathcal{L}[2, 3]$, al aplicar cualquiera de las separaciones.

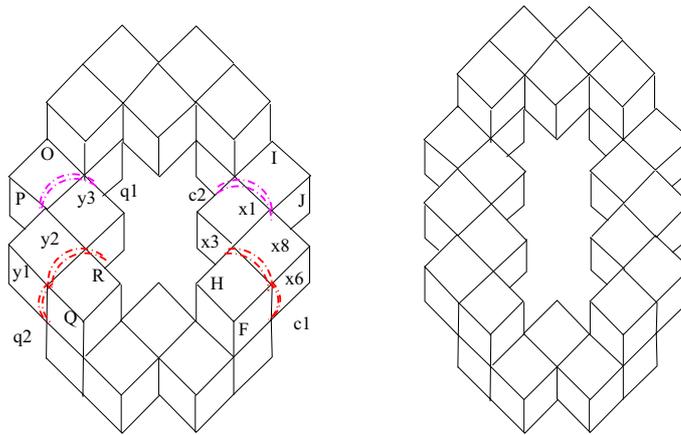


Figura 7.29: Cortes sobre el vox-sólido irreducible \mathcal{L}_{20} y \mathcal{L}_{24}

Lema 7.15 Al aplicar cualquiera de las separaciones asociadas al vox-sólido irreducible $\mathcal{L}[2, k], k \geq 3$: $\langle c_1, q_1 \rangle, \langle c_1, q_2 \rangle, \langle c_2, q_1 \rangle, \langle c_2, q_2 \rangle$, definidas anteriormente, se obtiene la abstracción inicial del ciclo Hamiltoniano \mathcal{H} para $\mathcal{L}[2, k]$. Es decir, $\langle c_1, q_1 \rangle, 1 \leq i, j \leq 2$ representa una separación válida conveniente para $\mathcal{L}[2, k]$.

Demostración. Reasignaremos los valores de las etiquetas de los conjuntos A_i con las de los $X_i, i = 1, 2$; y las de los conjuntos B_i con las de los $Y_i, i = 1, 2$.

Asignación 1. Al realizar el corte c_1 no cambian los vértices en $A_1 = \{E, F, G, H\}$; más sí lo hacen en $A_2 = \{I, J, K, L\}$ con los valores de $X_1 = \{x_3, x_8, x_6, x_5\}$. Así, asignamos x_8 a I y seguimos por el ciclo hasta tocar otro vértice en X_1 . En este caso es x_6 , el cual es asignado a J . Continuando de esta manera, la reasignación final queda:

$$I \longleftarrow x_8; \quad J \longleftarrow x_6; \quad K \longleftarrow x_5; \quad L \longleftarrow x_3.$$

Asignación 2. Al hacer el corte c_2 no cambian los vértices en A_2 , mientras que lo hacen los vértices en A_1 con los valores de $X_2 = \{x_1, x_2, x_4, x_7\}$. Aplicando la misma estrategia del caso anterior, la reasignación queda:

$$G \longleftarrow x_2; \quad H \longleftarrow x_1; \quad E \longleftarrow x_7; \quad F \longleftarrow x_4.$$

Asignación 3. Los vértices en $B_1 = \{M, N, O, P\}$ no cambian al realizar el corte q_1 . En cambio, para $B_2 = \{Q, R, S, T\}$ con los valores de $Y_1 = \{y_3, y_8, y_6, y_5\}$ sí. Así, la reasignación queda:

$$Q \leftarrow y_8; \quad R \leftarrow y_6; \quad S \leftarrow y_5; \quad T \leftarrow y_3.$$

Asignación 4. Al hacer el corte q_2 no cambian los vértices en B_2 ; cambian en B_1 con los valores $Y_2 = \{y_1, y_2, y_4, y_7\}$. Con ello, la reasignación queda:

$$O \leftarrow y_2; \quad P \leftarrow y_1; \quad M \leftarrow y_7; \quad N \leftarrow y_4.$$

Ahora, revisemos las separaciones asociadas al vox-sólido $\mathcal{L}[2, k]$:

$$\mathcal{S}_1 = \langle c_1, q_1 \rangle, \quad \mathcal{S}_2 = \langle c_1, q_2 \rangle, \quad \mathcal{S}_3 = \langle c_2, q_1 \rangle, \quad \mathcal{S}_4 = \langle c_2, q_2 \rangle.$$

$\mathcal{S}_1 = \langle c_1, q_1 \rangle$: Al considerar c_1 y q_1 las reasignaciones son: $I \leftarrow x_8$;
 $J \leftarrow x_6$; $K \leftarrow x_5$; $L \leftarrow x_3$. $Q \leftarrow y_8$; $R \leftarrow y_6$; $S \leftarrow y_5$; $T \leftarrow y_3$.

$\mathcal{S}_1 = \langle c_1, q_2 \rangle$: Al considerar c_1 y q_2 las reasignaciones son: $I \leftarrow x_8$;
 $J \leftarrow x_6$; $K \leftarrow x_5$; $L \leftarrow x_3$. $O \leftarrow y_2$; $P \leftarrow y_1$; $M \leftarrow y_7$; $N \leftarrow y_4$.

$\mathcal{S}_3 = \langle c_2, q_1 \rangle$: Al considerar c_2 y q_1 las reasignaciones son: $G \leftarrow x_2$;
 $H \leftarrow x_1$; $E \leftarrow x_7$; $F \leftarrow x_4$. $Q \leftarrow y_8$; $R \leftarrow y_6$; $S \leftarrow y_5$; $T \leftarrow y_3$.

$\mathcal{S}_4 = \langle c_2, q_2 \rangle$: Al considerar c_2 y q_2 las reasignaciones son: $G \leftarrow x_2$;
 $H \leftarrow x_1$; $E \leftarrow x_7$; $F \leftarrow x_4$. $O \leftarrow y_2$; $P \leftarrow y_1$; $M \leftarrow y_7$; $N \leftarrow y_4$.

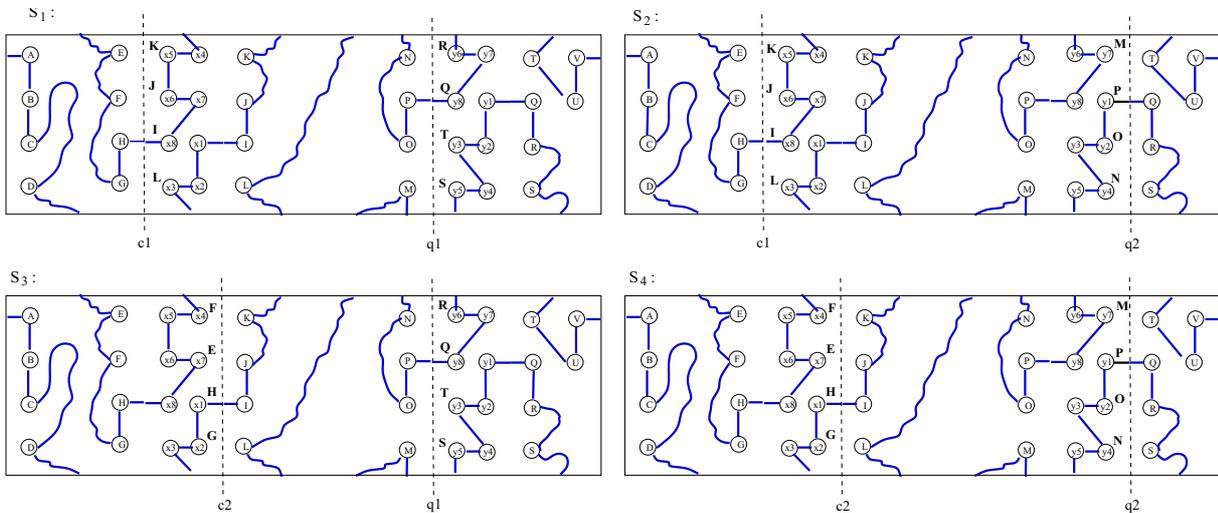


Figura 7.30: Aplicando separaciones de \mathcal{H} para $\mathcal{L}[2, k]$

La Figura 7.30 muestra las cuatro reasignaciones de valores para los vértices involucrados en las respectivas separaciones. Al hacer cualquiera de las reasignaciones volvemos a tener la abstracción del ciclo canónico \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} : A - B - C - D - E - F - G - H - I - J - K - L - \\ - M - N - O - P - Q - R - S - T - U - V - A.$$

Por lo tanto, volvemos a obtener la abstracción inicial para las cuatro separaciones, las cuales se ilustran en la Figura 7.31.

Con ello, podemos concluir que el lema se satisface.

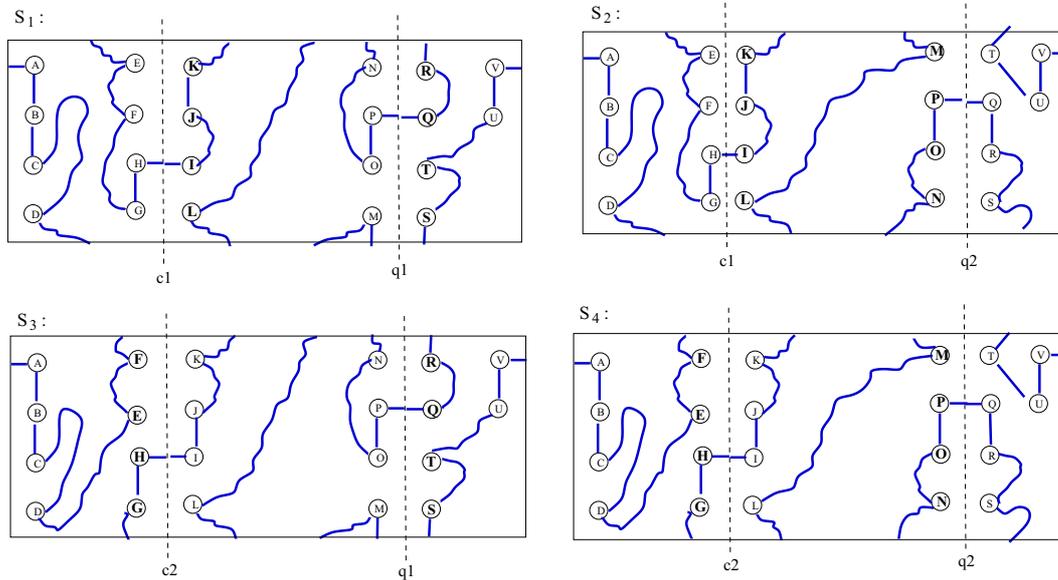


Figura 7.31: Resultado de las separaciones de \mathcal{H} para $\mathcal{L}[2, k]$

Sin pérdida de generalidad, trabajaremos con la separación válida conveniente $\langle c_1, q_1 \rangle$. Para generar un nuevo elemento de la familia y extender la descomposición Hamiltoniana, basta agregar los mismos anexos con la trayectoria hamiltoniana dada.

Ahora, podemos enunciar el teorema que establece la existencia de la Descomposición Hamiltoniana para la familia $\mathcal{L}[2, j]$:

Teorema 7.6 La familia de vox-sólidos irreducibles $\mathcal{L}[2, j], j \geq 1$ admite una Descomposición Hamiltoniana.

Descomposición Hamiltoniana para $\mathcal{L}[i, 1]$

Primero, realizaremos la descomposición Hamiltoniana para $\mathcal{L}_{20}B = \mathcal{L}[3, 1]$ partiendo de $\mathcal{D}_{L_{16}}(\mathcal{H}, \mathcal{C})$. De ahí, obtendremos el proceso para construir la descomposición Hamiltoniana de la Familia $\mathcal{L}[i, 1]$.

Descomposición Hamiltoniana para $\mathcal{L}_{20}B = \mathcal{L}[3, 1]$

Tomamos la descomposición $\mathcal{D}_{L_{16}}(\mathcal{H}, \mathcal{C})$ para \mathcal{L}_{16} . La Figura 7.32 nos muestra una separación válida conveniente, las estructuras 0Z, anexos y enumeración. Además, se presenta el vox-sólido irreducible a obtener.

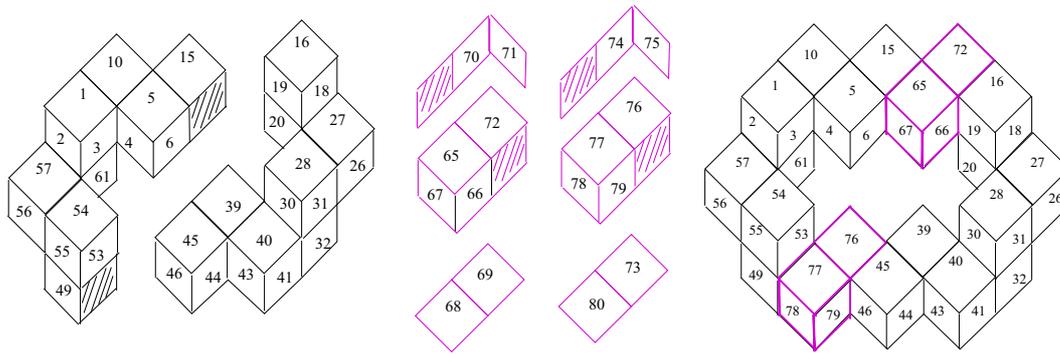


Figura 7.32: Construcción de $\mathcal{L}_{20}B$ desde \mathcal{L}_{16}

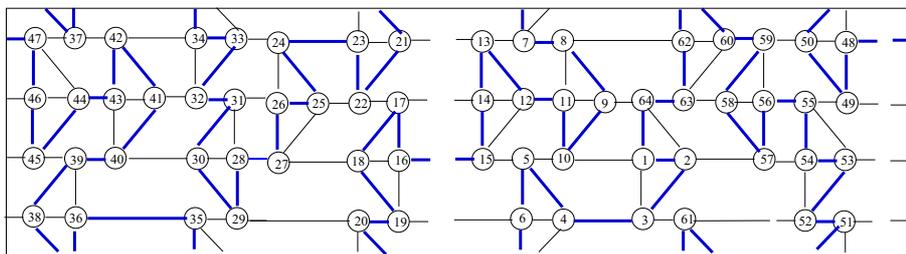


Figura 7.33: Cortes en el vox-sólido irreducible \mathcal{L}_{16} para obtener $\mathcal{L}_{20}B$

En el caso de la Figura 7.33 se muestra explícitamente el corte en el encaje.

Así, la separación válida conveniente $\mathcal{S}_1 = \langle c_1, q_1 \rangle$ queda definida como:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \langle X_1, Y_1 \rangle = \{(21, 13), (17, 14), (\mathbf{16}, \mathbf{15}), (19, 6)\}, \\
 X_1 &= \{21, 17, 16, 19\}, Y_1 = \{13, 14, 15, 6\}, (16, 15) \in \mathcal{H} \cap c_1; \\
 q_1 &= \langle Z_1, A_1 \rangle = \{(\mathbf{48}, \mathbf{47}), (49, 46), (53, 45), (51, 38)\}, \\
 Z_1 &= \{48, 49, 53, 51\}, A_1 = \{47, 46, 45, 38\}, (48, 47) \in \mathcal{H} \cap q_1.
 \end{aligned}$$

En la Figura 7.34(A,B) se muestran los anexos y sus gráficas asociadas.

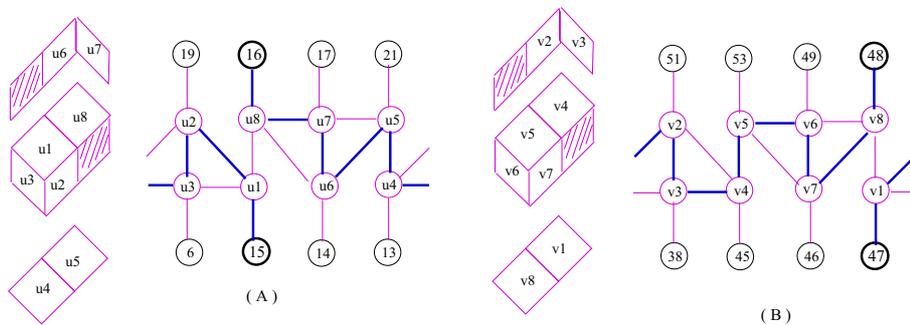


Figura 7.34: Subgráficas para las estructuras 0Z

Para esta construcción, hemos enumerado los vértices de los anexos siguiendo el recorrido de la trayectoria que reúne los vértices extremos de la arista separada en \mathcal{H} . En la Figura 7.34, las aristas más gruesas indican el recorrido.

En específico, la primera extensión para \mathcal{H} es: **15**, $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8$, **16**; y la segunda: **47**, $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$, **48**. La Figura 7.35 muestra el resultado de agregar los anexos.

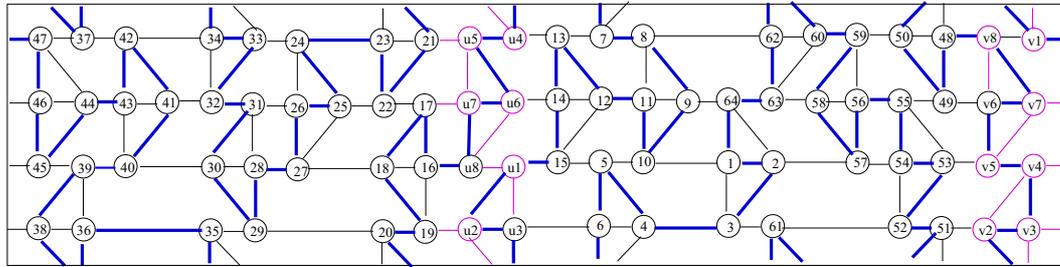


Figura 7.35: Encaje para $\mathcal{L}_{20}B$ su descomposición Hamiltoniana

De esta manera, los ciclos de la nueva descomposición Hamiltoniana quedan:

\mathcal{H}' : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, **15**, $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8$, **16**, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 37, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, **47**, $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$, **48**, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 1.

\mathcal{C}' : 1, 10, 5, 15, 12, 14, u_6, u_8, u_1, u_3 , 6, 4, 7, 13, u_4, u_2 , 19, 16, 18, 27, 25, 22, 17, u_7, u_5 , 21, 23, 20, 29, 35, 33, 24, 26, 49, 31, 28, 30, 40, 43, 41, 32, 34, 42, 37, 47, 44, 46, v_7, v_5 , 53, 55, v_6, v_8, v_1, v_3 , 38, 36, 39, 45, v_4, v_2 , 51, 48, 50, 59, 56, 58, 63, 60, 62, 8, 11, 9, 64, 2, 57, 54, 52, 61, 3, 1.

Construcción para la Familia $\mathcal{L}[i, 1]$

Usando la separación y los anexos aquí dados, a partir de la construcción hecha para $\mathcal{L}[3, 1]$, para generar elementos de la familia $\mathcal{L}[i, 1]$ y la extensión de la descomposición Hamiltoniana, realizamos de manera análoga la creación de la familia $\mathcal{L}[2, j]$. Así, podemos establecer el siguiente resultado,

Teorema 7.7 La familia de vox-sólidos irreducibles $\mathcal{L}[i, 1]$, $i \geq 2$, admite una Descomposición Hamiltoniana.

Finalmente, es fácil ver que combinando los resultados obtenidos para la familia $\mathcal{L}[2, j]$ y $\mathcal{L}[i, 1]$, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 7.8 La familia de vox-sólidos irreducibles $\mathcal{L}[i, j]$ con $i \geq 2, j \geq 1$ admite una Descomposición Hamiltoniana.

Descomposición Hamiltoniana para la Familia $\mathcal{F}[i, j]$

Sin pérdida de generalidad, consideremos la enumeración dada en la Figura 7.36.

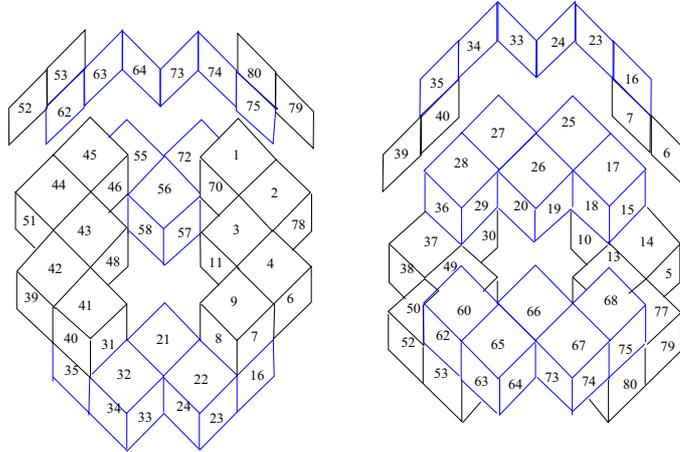


Figura 7.36: Vox-sólido $\mathcal{F}_{20} = \mathcal{F}[20]$

No perdamos de vista que el encaje correspondiente se da en la Figura 7.37, las aristas más gruesas representan el ciclo canónico. Siguiendo la enumeración se tiene el segundo ciclo Hamiltoniano.

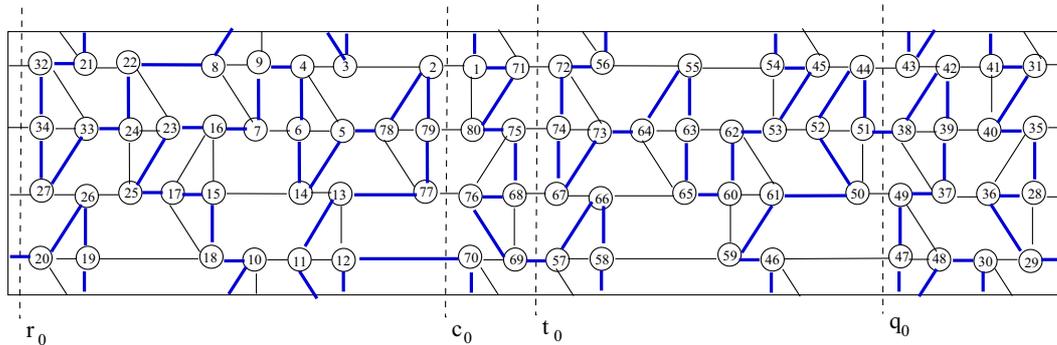


Figura 7.37: Encaje del vox-sólido $\mathcal{F}_{20} = \mathcal{F}[20]$

En específico, la descomposición Hamiltoniana $\mathcal{D}_{\mathcal{F}_{20}}(\mathcal{H}, \mathcal{C})$ es:

\mathcal{H} : 1, 71, 80, 75, 68, 76, 6, 57, 66, 58, 56, 72, 74, 67, 73, 64, 55, 63, 65, 60, 62, 53, 45, 54, 46, 59, 61, 50, 52, 44, 51, 38, 42, 39, 37, 49, 47, 43, 48, 30, 41, 31, 40, 35, 28, 36, 29, 20, 26, 19, 21, 32, 34, 27, 33, 24, 22, 8, 10, 18, 15, 17, 25, 23, 16, 7, 9, 4, 6, 14, 5, 78, 2, 79, 77, 13, 11, 3, 12, 70, 1.

\mathcal{C} : 1,2,3, ... , 80.

En esta familia podemos hacer los cortes sobre el segundo piso o en el primero, los cuales se listan a continuación

Cortes en el segundo piso

$$\begin{aligned}
c_0 &= \langle X_0, Y_0 \rangle = \{(2, 1), (79, 80), (77, 76), (\mathbf{12}, \mathbf{70})\}, \\
c_1 &= \langle X_1, Y_1 \rangle = \{(4, 3), (\mathbf{5}, \mathbf{78}), (14, 13), (10, 11)\}, \\
c_2 &= \langle X_2, Y_2 \rangle = \{(\mathbf{9}, \mathbf{4}), (7, 6), (15, 14), (10, 11)\}, \\
q_0 &= \langle Z_0, A_0 \rangle = \{(44, 43), (\mathbf{51}, \mathbf{38}), (50, 49), (46, 47)\}, \\
q_1 &= \langle Z_1, A_1 \rangle = \{(42, 41), (39, 40), (37, 36), (\mathbf{48}, \mathbf{30})\}, \\
q_2 &= \langle Z_2, A_2 \rangle = \{(44, 45), (53, 52), (\mathbf{61}, \mathbf{50}), (46, 47)\}.
\end{aligned}$$

Cortes en el primer piso

$$\begin{aligned}
r_0 &= \langle U_0, B_0 \rangle = \{(31, 32), (35, 34), (28, 27), (\mathbf{29}, \mathbf{20})\}, \\
r_1 &= \langle U_1, B_1 \rangle = \{(21, 22), (\mathbf{33}, \mathbf{24}), (26, 25), (19, 18)\}, \\
t_0 &= \langle W_0, E_0 \rangle = \{(71, 72), (75, 74), (\mathbf{69}, \mathbf{57}), (68, 67)\}, \\
t_1 &= \langle W_1, E_1 \rangle = \{(\mathbf{73}, \mathbf{64}), (56, 55), (66, 65), (58, 59)\}, \\
t_2 &= \langle W_2, E_2 \rangle = \{(55, 54), (63, 62), (\mathbf{65}, \mathbf{60}), (58, 59)\}.
\end{aligned}$$

Las separaciones de la forma $\mathcal{S}_2 = \langle c_i, q_j \rangle$ $\mathcal{S}_1 = \langle r_i, t_j \rangle, i \in \{0, 1\}; j \in \{0, 1, 2\}$ resultan ser válidas y convenientes. Sin pérdida de generalidad, trabajaremos con las separaciones: $\mathcal{S}_2 = \langle c_0, q_0 \rangle$ y $\mathcal{S}_1 = \langle r_0, t_0 \rangle$, cuyos cortes se marcan en la Figura 7.37.

Trabajaremos, primero, con la familia $\mathcal{F}[2, j], 2 \leq i$, haciendo crecer el segundo piso, para continuar con la familia $\mathcal{F}[i, 2], j \geq 2$, extendiendo el primer piso.

Descomposición Hamiltoniana de la Familia $\mathcal{F}[2, j]$

Sobre el encaje, realizamos una abstracción de los ciclos Hamiltonianos, quedándonos, únicamente, con los vértices involucrados en los cortes. Las Figuras 7.38 muestran tanto el proceso como los cortes.

Después de la abstracción la descomposición Hamiltoniana queda determinada por:
 \mathcal{H} : A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, A.
 \mathcal{C} : A, B, U, P, S, N, L, R, Q, M, O, H, K, F, E, J, I, D, G, X, C, V, W, T, A.

Ahora la separación válida conveniente $\mathcal{S}_2 = \langle c_0, q_0 \rangle$ queda definida por:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \langle X_0, Y_0 \rangle = \{(\mathbf{G}, \mathbf{H}), (D, I), (E, J), (F, K)\}, \\
q_0 &= \langle Z_0, A_0 \rangle = \{(N, S), (\mathbf{O}, \mathbf{P}), (M, Q), (L, R)\}.
\end{aligned}$$

Para generar la descomposición Hamiltoniana del siguiente elemento de la familia, necesitamos agregar los anexos respectivos, los cuales son presentados en la Figura 7.39. El resultado de esta operación se muestra en la Figura 7.40.

Al agregar los anexos a los encajes, es fácil ver que: (1) La descomposición Hamiltoniana se mantiene, (2), hay varias opciones para la separación válida conveniente y (3), se puede hacer la abstracción de los ciclos Hamiltonianos.

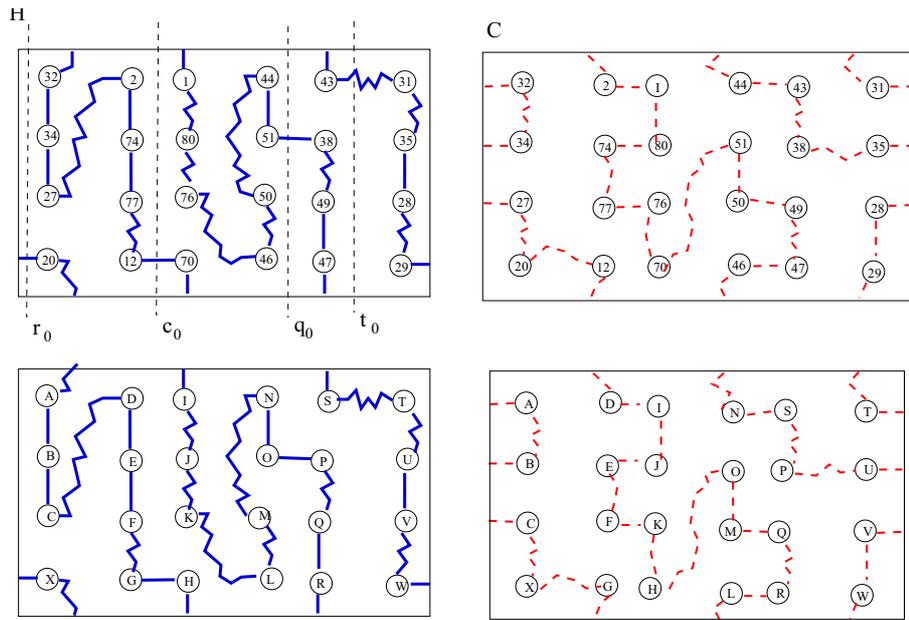


Figura 7.38: Abstracción de \mathcal{H} y \mathcal{C} para la familia $\mathcal{F}[2, j]$

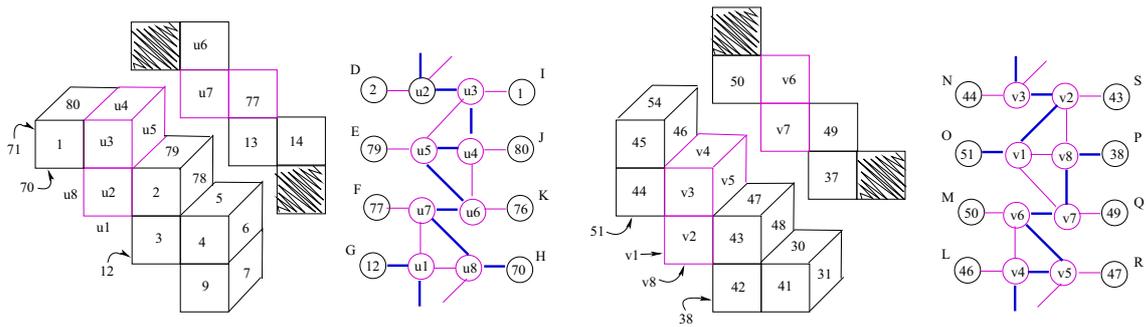


Figura 7.39: Anexos y sus gráficas asociadas, para \mathcal{S}_2

Sin pérdida de generalidad, nos quedamos con la separación válida conveniente $\mathcal{S}_2 = \langle c_{01}, q_{02} \rangle$, donde,

$$c_{01} = \langle X_{01}, Y_{01} \rangle = \{(\mathbf{G}, \mathbf{u}_1), (D, u_2), (E, u_5), (F, u_7)\},$$

$$q_{02} = \langle Z_{02}, A_{02} \rangle = \{(v_2, S), (\mathbf{v}_8, \mathbf{P}), (v_7, Q), (v_5, R)\}.$$

Con todo lo anterior y de manera similar a lo realizado para la Familia $\mathcal{L}[2, j]$, podemos concluir el siguiente resultado,

Teorema 7.9 La familia de vox-sólidos irreducibles $\mathcal{F}[2, j], j \geq 2$, admite una Descomposición Hamiltoniana.

Tenemos que el vox-sólido $\mathcal{F}[2, j] \sim \mathcal{F}[j, 2], \forall j \geq 2$, con lo que podemos concluir que:

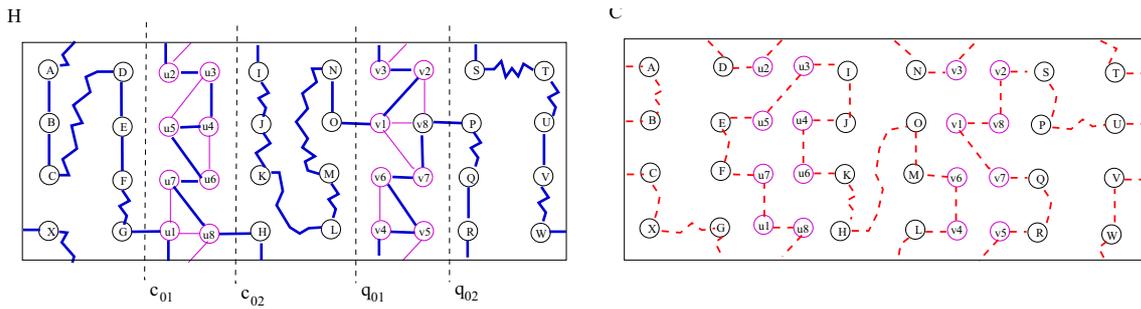


Figura 7.40: Encaje resultante, para \mathcal{S}_2

Teorema 7.10 La familia de vox-sólidos irreducibles $\mathcal{F}[i, 2], i \geq 2$, admite una Descomposición Hamiltoniana.

Una vez revisadas las dos familias, $\mathcal{F}[2, j]$ y $\mathcal{F}[i, 2]$, concluimos el siguiente resultado,

Teorema 7.11 La familia de vox-sólidos irreducibles $\mathcal{F}[i, j]$, con $i, j \geq 2$, admite una Descomposición Hamiltoniana.

Descomposición Hamiltoniana para la Familia $\mathcal{Q}[m]$

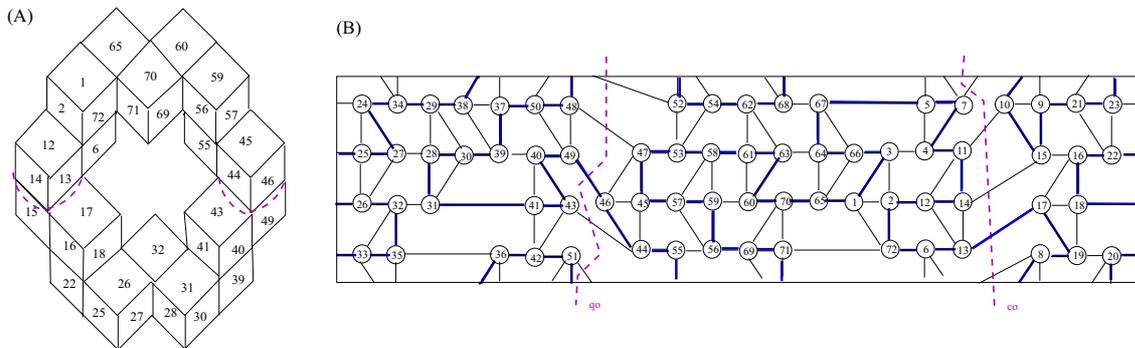


Figura 7.41: Enumeración para el vox-sólido \mathcal{Q}_{18} y su encaje

Consideremos la etiquetación dada en la Figura 7.41(A) para el vox-sólido \mathcal{Q}_{18} cuyo encaje se presenta en la Figura 7.41(B). La enumeración presentada sobre las caras del vox-sólido representa un ciclo Hamiltoniano sobre \mathcal{Q}_{18} . También, vemos que, en efecto, sobre el encaje (Figura 7.41) se tiene una descomposición Hamiltoniana. Las aristas remarcadas ilustran el ciclo canónico.

En específico, tenemos $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}_{18}}(\mathcal{H}, \mathcal{C})$:

$\mathcal{H} : 1, 3, 66, 64, 67, 5, 7, 4, 11, 14, 12, 2, 72, 6, 13, 17, 19, 8, 10, 15, 9, 21, 23, 20, 33, 35, 32, 26, 18, 16, 22, 25, 27, 24, 34, 29, 38, 36, 42, 51, 48, 50, 37, 39, 30, 28, 31, 41, 43, 40, 49, 46, 44, 55, 52, 54, 62, 68, 71, 69, 56, 59, 57, 45, 47, 53, 58, 61, 63, 60, 70, 65, 1.$

$\mathcal{C} : 1, 2, 3, \dots, 10, 11, 12, \dots, 42, 43, 44, \dots, 63, 64.$

Descomposición Hamiltoniana de $\mathcal{Q}[24]$

Construiremos la descomposición Hamiltoniana de $\mathcal{Q}[24]$ a partir de $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}_{18}}(\mathcal{H}, \mathcal{C})$ Sea $\mathcal{S}_o = \langle q_o, c_o \rangle$ la separación válida, definida por,

$$q_o = \langle A_o, Z_o \rangle = \{(48, 47), (49, 46), (43, 44), (51, 52)\}; \quad (49, 46) \in \mathcal{H}$$

$$A_o = \{48, 49, 43, 51\}; \quad Z_o = \{47, 46, 44, 52\}.$$

$$c_o = \langle X_o, Y_o \rangle = \{(7, 8), (11, 10), (14, 15), (13, 17)\}; \quad (13, 17) \in \mathcal{H}$$

$$X_o = \{7, 11, 14, 13\}; \quad Y_o = \{8, 10, 15, 17\}.$$

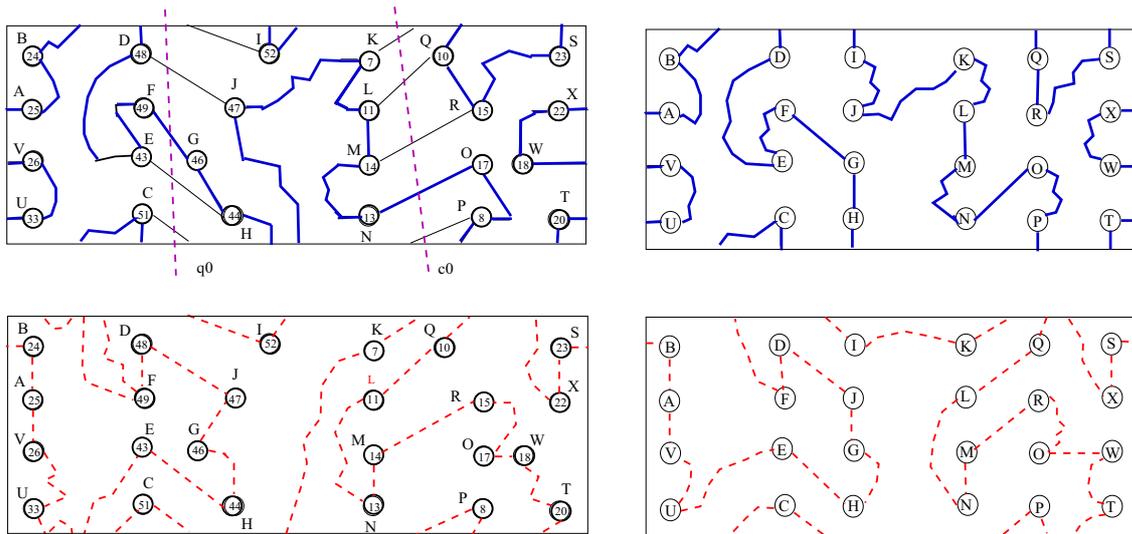


Figura 7.42: Abstracción de los ciclos Hamiltonianos

En la Figura 7.41 se muestran los cortes que conforman la separación propuesta.

Considerando la separación \mathcal{S}_o , hacemos una abstracción de los ciclos en el encaje, quedándonos, únicamente, con los vértices involucrados en los cortes y los extremos. Además, los renombramos. La Figura 7.42 muestra el proceso de la abstracción.

De esta forma la descomposición Hamiltoniana queda:

$\mathcal{H} : A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, A.$

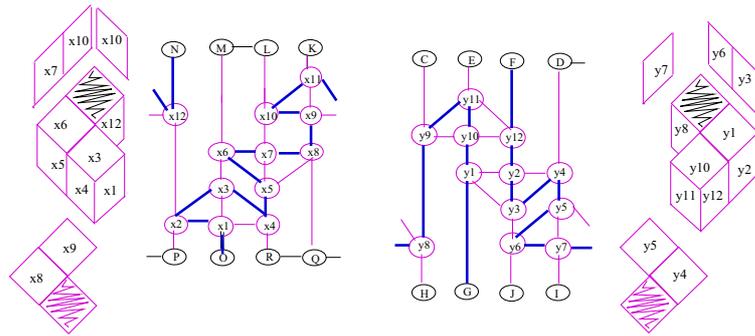


Figura 7.43: Anexos que se agregan al vox-sólido \mathcal{Q}_{18}

\mathcal{C} : A, V, U, E, H, G, J, D, F, C, I, K, P, Q, L, N, M, R, O, W, T, X, S, B, A.

Se agregan dos estructuras 1V, una a la izquierda y la otra a la derecha, entre el segundo y tercer piso, incrementando un piso el vox-sólido. Los anexos y sus respectivas gráficas asociadas se muestran en la Figura 7.43, en donde se han remarcado las aristas de la trayectoria Hamiltoniana que induce la descomposición.

El resultado obtenido después de aplicar los cortes y agregar los anexos es mostrado en la Figura 7.44.

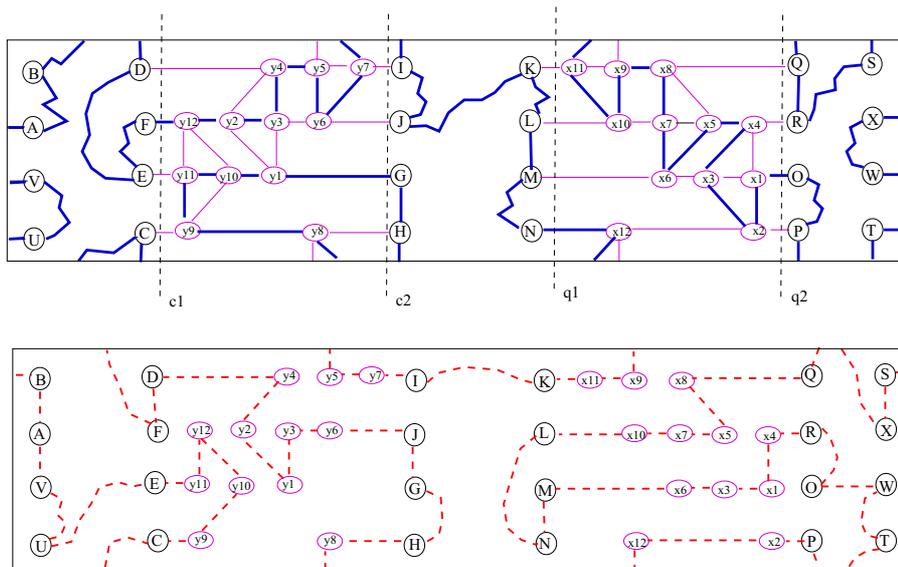


Figura 7.44: Abstracción para $\mathcal{Q}[24]$

La descomposición Hamiltoniana para $\mathcal{Q}[24]$ queda:

\mathcal{H}' : A, B, C, D, E, F, $y_{12}, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{11}, y_{10}, y_1$ G, H, I, J, K, L, M, N, $x_{12}, x_{11}, x_{10}, x_9, x_8, x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1$ O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, A.

\mathcal{C}' : A, V, U, E, $y_{11}, y_{12}, y_{10}, y_9, C, F, D, y_4, y_2, y_1, y_3, y_6, J, G, H, y_8, y_5, y_7, I, K, x_{11}, x_9, x_{12}, x_2$ P, Q, $x_8, x_5, x_7, x_{10}, L, N, M, x_6, x_3, x_1, x_4, R, O, W, T, X, S, B, A.$

Sobre el encaje del nuevo elemento de la familia $\mathcal{Q}[m]$ se pueden hacer cuatro diferentes cortes que sólo rompen una arista del ciclo canónico \mathcal{H} :

$$\begin{aligned} c_1 &= \langle X_1, Y_1 \rangle = \{(D, y_4), (F, y_{12}), (E, y_{11}), (C, y_9)\}; \\ c_2 &= \langle X_2, Y_2 \rangle = \{(y_7, I), (y_6, J), (y_1, G), (y_8, H)\}; \\ q_1 &= \langle Z_1, A_1 \rangle = \{(K, X_{11}), (L, X_{10}), (M, X_6), (N, X_{12})\}; \\ q_2 &= \langle Z_2, A_2 \rangle = \{(X_8, Q), (X_4, R), (X_1, O), (X_2, P)\}. \end{aligned}$$

Con ello, obtenemos la siguiente combinación de cortes para $\mathcal{Q}[m]$ $\mathcal{S} = \langle q_i, c_j \rangle$, $i, j \in \{1, 2\}$ y demostraremos que cualquiera resulta ser una separación válida conveniente.

Lema 7.16 Al aplicar cualquiera de las separaciones asociadas al vox-sólido irreducible $\mathcal{Q}[6 \cdot k]$, $k \geq 3$, $\langle c_1, q_1 \rangle, \langle c_1, q_2 \rangle, \langle c_2, q_1 \rangle, \langle c_2, q_2 \rangle$, definidas anteriormente, se obtiene la abstracción inicial del ciclo Hamiltoniano \mathcal{H} para $\mathcal{Q}[24]$. Es decir, $\langle c_i, q_j \rangle$, $i, j \in \{1, 2\}$, representa una separación válida conveniente para $\mathcal{Q}[24]$.

Demostración. Reasignaremos los valores de las Etiquetas de los conjuntos A_i con las de los conjuntos X_i , $i = 1, 2$; y las de los conjuntos B_i con las de los conjuntos Y_i , $i = 1, 2$. De manera imilar al Lema 7.15, basta realizar tal asignación.

Asignación 1. Al realizar el corte c_1 , sólo se modifica el conjunto Y_1 con los valores de Y_o . Así, la reasignación es: $I \leftarrow y_9$; $H \leftarrow y_4$; $G \leftarrow y_{12}$; $J \leftarrow y_{11}$.

Asignación 2. Al realizar el corte c_2 , únicamente se modifica el conjunto X_2 con los valores de X_o . La reasignación final queda de la siguiente manera:

$$D \leftarrow y_7; \quad C \leftarrow y_6; \quad F \leftarrow y_1; \quad E \leftarrow y_8.$$

Asignación 3. Al realizar el corte q_1 sólo se modifica el conjunto Z_1 con Z_o . La reasignación quedará: $O \leftarrow x_{12}$; $R \leftarrow x_6$; $Q \leftarrow x_{10}$; $P \leftarrow x_{11}$.

Asignación 4. Al realizar el corte q_2 sólo se modifica el conjunto A_2 con A_o . La reasignación final será: $L \leftarrow x_4$; $M \leftarrow x_2$; $N \leftarrow x_1$; $K \leftarrow x_8$.

Nos resulta fácil ver que, con estas asignaciones se reestablece la abstracción de la descomposición Hamiltoniana y, por lo tanto, el Lema se satisface.

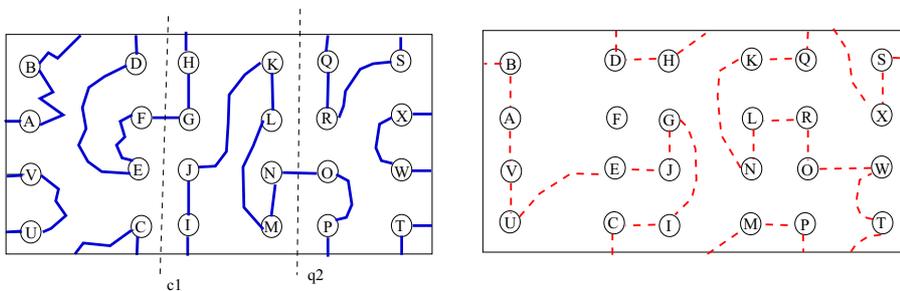


Figura 7.45: Abstracción de la descomposición Hamiltoniana del encaje de $\mathcal{Q}[24]$

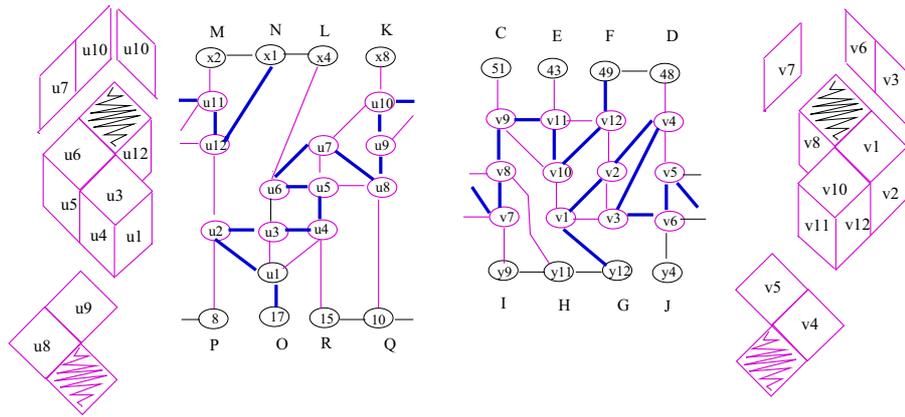


Figura 7.46: Anexos que se agregan a $Q[24]$

Para pasar de $Q[24]$ a $Q[30]$, nos quedamos con la separación $\langle c_1, q_2 \rangle$. La Figura 7.45 muestra la abstracción de la descomposición Hamiltoniana del encaje de $Q[24]$.

A continuación, requerimos los anexos mostrados en la Figura 7.46, donde, además, se marcan las trayectorias Hamiltonianas que inducen a la descomposición Hamiltoniana.

Así, el resultado obtenido después de aplicar los cortes y agregar los anexos puede verse en la Figura 7.47.

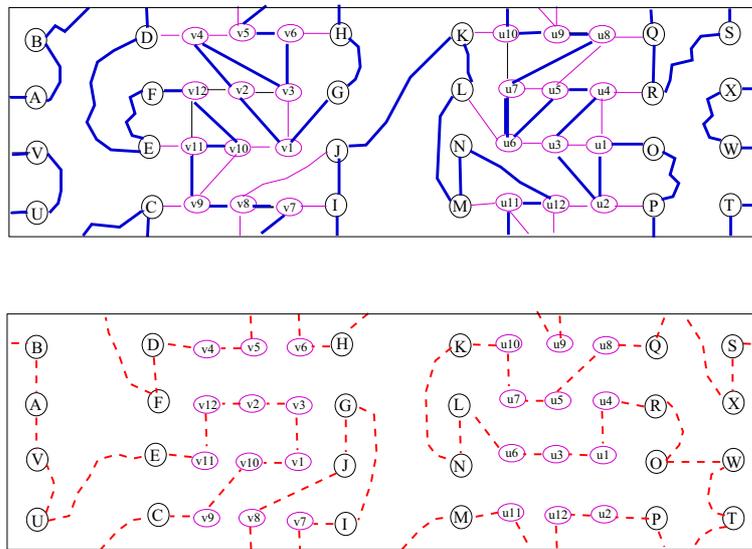


Figura 7.47: Resultado obtenido para $Q[30]$

Por último, al añadir los anexos es posible reestablecer la abstracción de los ciclos sobre el encaje y aplicarlos sobre la separación $\langle c_1, q_2 \rangle$ para obtener el siguiente elemento de la familia: $Q[36]$.

Ahora, podemos enunciar el teorema que establece que existe una Descomposición Hamiltoniana para la familia $Q[6 \cdot k]$, el cual indica que es posible construir la descomposición

Hamiltoniana para $\mathcal{Q}[6 \cdot k]$ a partir de $\mathcal{Q}[6 \cdot (k - 1)]$, $k \geq 4$.

Teorema 7.12 La familia de vox-sólidos irreducibles $\mathcal{Q}[6 \cdot k]$, $k \geq 4$ admite una Descomposición Hamiltoniana.

Descomposición Hamiltoniana para la Familia $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$

En esta sección, iniciamos dando una descomposición Hamiltoniana para \mathcal{V}_{32} para después, presentarla para $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$ fijando cada uno de los parámetros.

Descomposición Hamiltoniana para \mathcal{V}_{32}

En la Figura 7.48 se muestra el encaje para \mathcal{V}_{32} . Siguiendo la enumeración de los vértices tenemos un ciclo Hamiltoniano, \mathcal{H} , en el que las aristas son más gruesas. Si recorremos las aristas que no fueron usadas por \mathcal{H} , tenemos el segundo ciclo, \mathcal{C} .

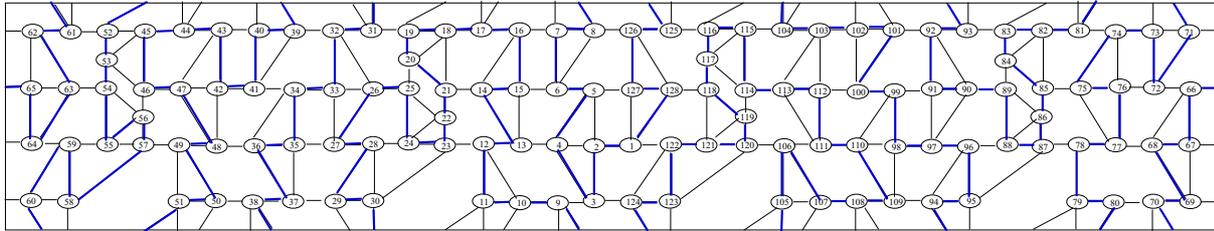


Figura 7.48: Encaje del Vox Sólido \mathcal{V}_{32}

En específico, tenemos la descomposición $\mathcal{D}_{\mathcal{V}_{32}}(\mathcal{H}, \mathcal{C})$, con:

\mathcal{H} : 1, 2, 3, ... , ... , 50, 51, ... , 120, 121, ... 128.

\mathcal{C} : 1, 127, 5, 2, 4, 13, 15, 6, 8, 126, 128, 118, 121, 119, 114, 117, 115, 104, 107, 105, 116, 125, 123, 120, 106, 111, 113, 103, 112, 100, 102, 108, 101, 92, 90, 97, 91, 99, 110, 98, 109, 94, 96, 88, 86, 89, 84, 82, 85, 75, 77, 68, 66, 72, 76, 74, 81, 79, 83, 93, 95, 87, 78, 80, 70, 73, 71, 62, 65, 63, 54, 56, 46, 53, 45, 52, 61, 58, 60, 69, 67, 64, 59, 55, 57, 49, 51, 44, 50, 38, 40, 43, 47, 42, 48, 36, 34, 41, 53, 32, 26, 33, 27, 35, 37, 29, 31, 19, 11, 17, 10, 12, 23, 30, 28, 24, 22, 25, 20, 18, 21, 14, 16, 7, 9, 3, 124, 122, 1.

Para construir otro miembro de la familia $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$ y su descomposición Hamiltoniana, tenemos cuatro tipos de separaciones:

Separación \mathcal{S}_0 . Insertar en los cortes de \mathcal{S}_0 hará crecer las estructuras j_2Z

Separación \mathcal{S}_1 . Insertar en los cortes de \mathcal{S}_1 hará crecer las estructuras i_2Z

Separación \mathcal{S}_2 . Insertar en los cortes de \mathcal{S}_2 hará crecer las estructuras i_1Z

Separación \mathcal{S}_3 . Insertar en los cortes de \mathcal{S}_3 hará crecer las estructuras j_1Z .

La Figura 7.49 muestra sobre el encaje los cortes a definir.

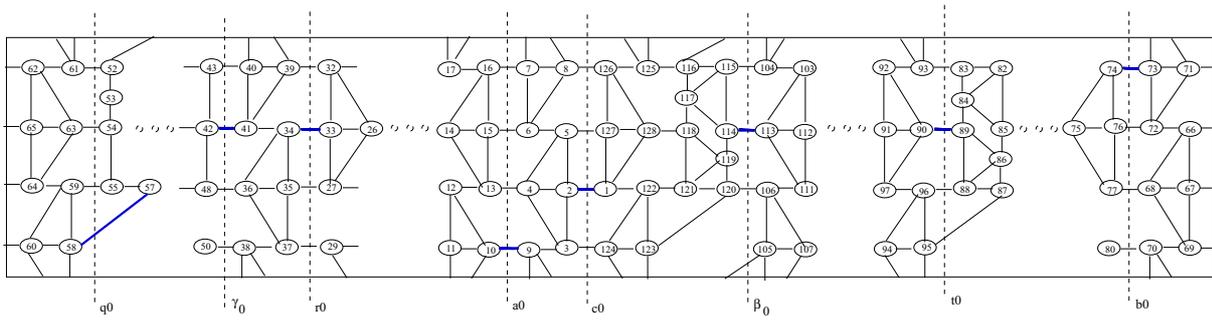


Figura 7.49: Cortes sobre el Encaje de \mathcal{V}_{32}

Separación \mathcal{S}_0

Tenemos varias opciones para la separación válida conveniente. Sea la separación $\mathcal{S}_0 = \langle c_i, q_j \rangle$, $i, j \in \{0, 1, 2\}$ donde,

- $q_0 = \langle X_{q_0}, Y_{q_0} \rangle = \{(61, 52), (63, 54), (59, 55), (\mathbf{58}, \mathbf{57})\};$
- $q_1 = \langle X_{q_1}, Y_{q_1} \rangle = \{(\mathbf{62}, \mathbf{61}), (63, 54), (64, 59), (69, 60)\};$
- $q_2 = \langle X_{q_2}, Y_{q_2} \rangle = \{(71, 62), (\mathbf{65}, \mathbf{66}), (67, 64), (69, 60)\}.$
- $c_0 = \langle Z_{c_0}, A_{c_0} \rangle = \{(8, 126), (5, 127), (\mathbf{2}, \mathbf{1}), (3, 124)\};$
- $c_1 = \langle Z_{c_1}, A_{c_1} \rangle = \{(\mathbf{125}, \mathbf{126}), (128, 118), (1, 122), (3, 124)\};$
- $c_2 = \langle Z_{c_2}, A_{c_2} \rangle = \{(125, 116), (128, 118), (\mathbf{121}, \mathbf{122}), (123, 120)\}.$

Sin pérdida de generalidad, trabajaremos con la separación $\mathcal{S}_0 = \langle c_0, q_0 \rangle$, cuyo proceso de abstracción es mostrado en la Figura 7.50.

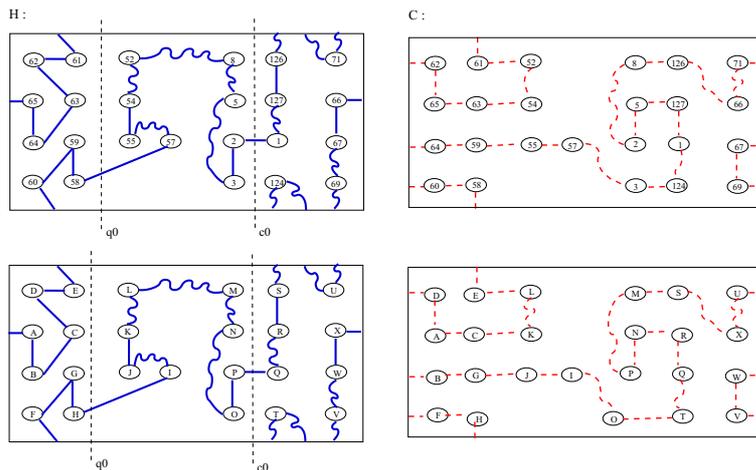


Figura 7.50: Abstracción de la descomposición Hamiltoniana de \mathcal{V}_{32} , para \mathcal{S}_0

Así, después del reetiquetamiento se obtiene:

$$c_0 = \langle Z_{c_0}, A_{c_0} \rangle = \{(M, S), (N, R), (\mathbf{P}, \mathbf{Q}), (O, T)\};$$

$$q_0 = \langle X_{q_2}, Y_{q_2} \rangle = \{(\mathbf{H}, \mathbf{I}), (E, L), (C, K), (G, J)\}.$$

Para generar el siguiente elemento de la familia, añadimos a la estructura j_2Z una $0Z$. La Figura 7.51 muestra los anexos del tipo $0Z$ para los cortes c_o y q_o de \mathcal{S}_0 ; al igual que la parte afectada.

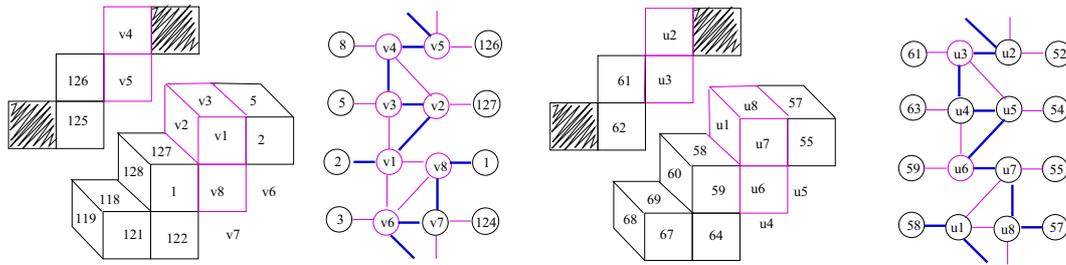


Figura 7.51: Anexos $0Z$ para los cortes c_o y q_o

Separación \mathcal{S}_1

Tenemos varias opciones para la separación válida conveniente. Sea la separación $\mathcal{S}_1 = \langle r_i, t_j \rangle$, $i, j \in \{0, 1\}$ donde,

$$r_0 = \langle X_{r_0}, Y_{r_0} \rangle = \{(39, 32), (35, 27), (37, 29), (\mathbf{34}, \mathbf{33})\};$$

$$r_1 = \langle X_{r_1}, Y_{r_1} \rangle = \{(31, 19), (\mathbf{26}, \mathbf{25}), (28, 24), (30, 23)\}.$$

$$t_0 = \langle Z_{t_0}, A_{t_0} \rangle = \{(93, 83), (\mathbf{90}, \mathbf{89}), (96, 88), (95, 87)\};$$

$$t_1 = \langle Z_{t_1}, A_{t_1} \rangle = \{(101, 92), (99, 91), (\mathbf{98}, \mathbf{97}), (109, 94)\}.$$

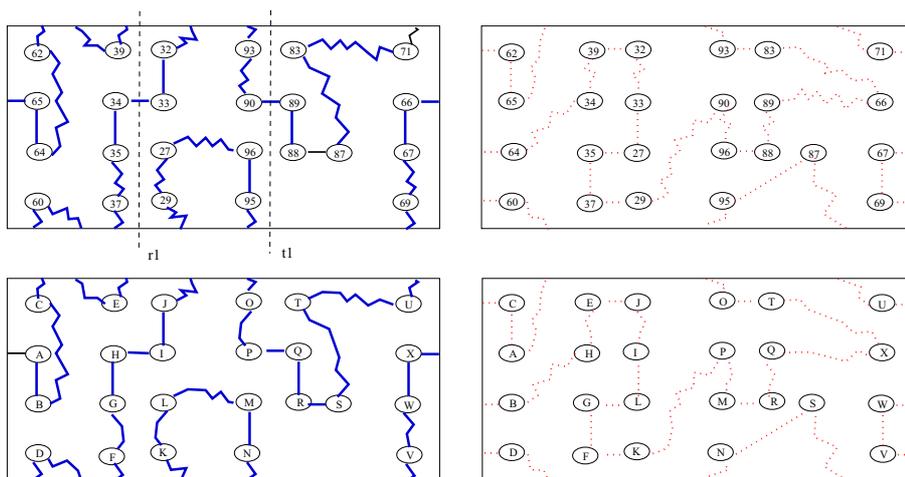


Figura 7.52: Abstracción de la descomposición Hamiltoniana de \mathcal{V}_{32} , para \mathcal{S}_1

Sin pérdida de generalidad, trabajaremos con la separación $\mathcal{S}_1 = \langle r_0, t_0 \rangle$, cuyo proceso de abstracción es mostrado en la Figura 7.52.

Así, después del reetiquetado se obtiene:

$$r_0 = \langle X_{r_0}, Y_{r_0} \rangle = \{(E, J), (G, L), (F, K), (\mathbf{H}, \mathbf{I})\};$$

$$t_0 = \langle Z_{t_0}, A_{t_0} \rangle = \{(O, T), (\mathbf{P}, \mathbf{Q}), (M, R), (N, S)\};$$

La Figura 7.53 muestra los anexos del tipo 0Z para los cortes r_o y t_o de \mathcal{S}_1 ; al igual que la parte afectada.

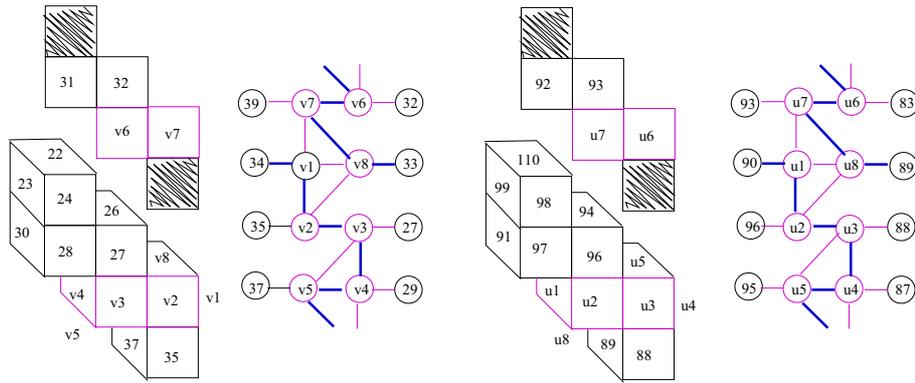


Figura 7.53: Anexos 0Z para los cortes r_o y t_o

Separación \mathcal{S}_2

Para la separación válida conveniente, tenemos una opción. Sea la separación $\mathcal{S}_2 = \langle \gamma_0, \beta_0 \rangle$ donde,

$$\gamma_0 = \langle X_{\gamma_0}, Y_{\gamma_0} \rangle = \{(43, 40), (\mathbf{42}, \mathbf{41}), (48, 36), (50, 38)\};$$

$$\beta_0 = \langle Z_{\beta_0}, A_{\beta_0} \rangle = \{(115, 104), (\mathbf{114}, \mathbf{113}), (120, 106), (116, 105)\}.$$

El proceso de abstracción es mostrado en la Figura 7.54.

Después de volver a etiquetar se obtiene:

$$\gamma_0 = \langle X_{\gamma_0}, Y_{\gamma_0} \rangle = \{(G, J), (F, L), (E, K), (\mathbf{H}, \mathbf{I})\};$$

$$\beta_0 = \langle Z_{\beta_0}, A_{\beta_0} \rangle = \{(O, T), (\mathbf{P}, \mathbf{Q}), (M, R), (N, S)\};$$

La Figura 7.55 muestra los anexos del tipo 0Z para los cortes γ_o y β_o de \mathcal{S}_2 , también se ilustra la parte afectada.

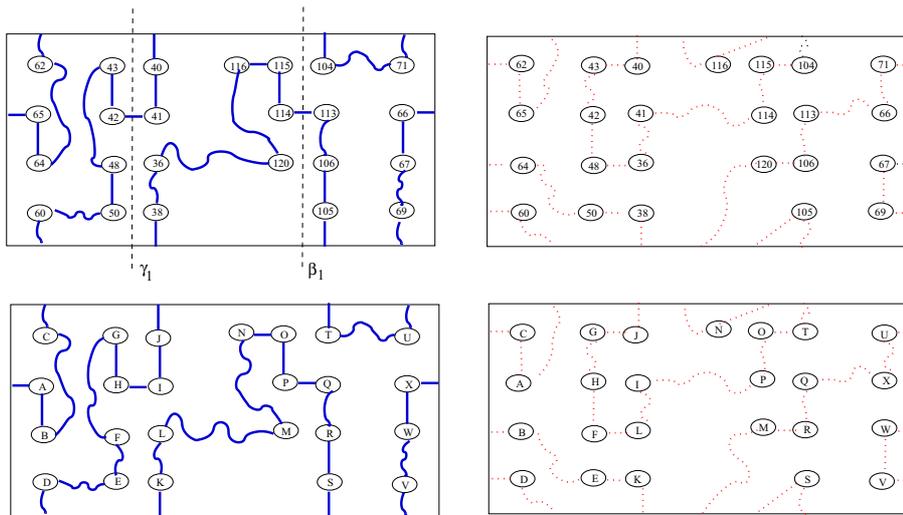


Figura 7.54: Abstracción de la descomposición Hamiltoniana de \mathcal{V}_{32} , para \mathcal{S}_2

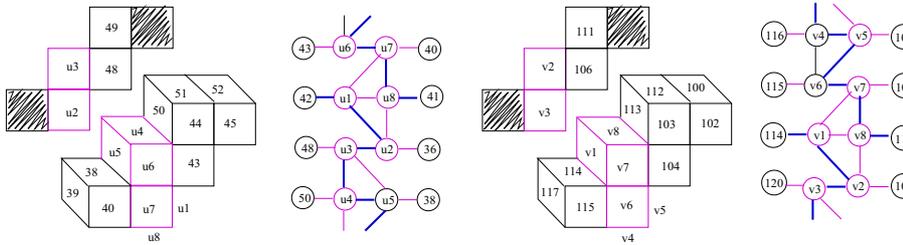


Figura 7.55: Anexos 0Z para los cortes γ_o y β_o

Separación \mathcal{S}_3

Tenemos varias opciones para la separación válida conveniente. Sea la separación $\mathcal{S}_3 = \langle a_i, b_j \rangle$, $i, j \in \{0, 1\}$ donde,

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \langle X_{a_0}, Y_{a_0} \rangle = \{(16, 7), (15, 6), (13, 4), (\mathbf{10, 9})\}; \\
 a_1 &= \langle X_{a_1}, Y_{a_1} \rangle = \{(\mathbf{18, 17}), (21, 14), (23, 12), (11, 19)\}. \\
 b_1 &= \langle Z_{b_0}, A_{b_0} \rangle = \{(\mathbf{82, 81}), (85, 75), (87, 78), (83, 79)\} \\
 b_0 &= \langle Z_{b_1}, A_{b_1} \rangle = \{(\mathbf{74, 73}), (76, 72), (77, 68), (80, 70)\}
 \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, trabajaremos con la separación $\mathcal{S}_3 = \langle a_0, b_0 \rangle$, cuyo proceso de abstracción es mostrado en la Figura 7.56.

Así, después del re-etiquetamiento se obtiene:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \langle X_{a_0}, Y_{a_0} \rangle = \{(E, J), (F, K), (G, L), (\mathbf{H, I})\}; \\
 b_0 &= \langle Z_{b_0}, A_{b_0} \rangle = \{(O, R), (\mathbf{P, Q}), (N, V), (M, T)\}.
 \end{aligned}$$

La Figura 7.57 muestra los anexos del tipo 0Z para los cortes a_o y b_o de \mathcal{S}_3 , al igual que la parte afectada.

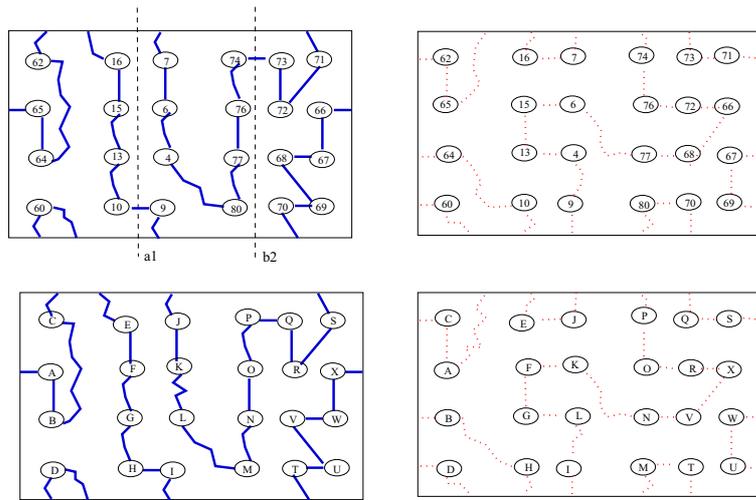


Figura 7.56: Abstracción de la descomposición Hamiltoniana de \mathcal{V}_{32} , para \mathcal{S}_3

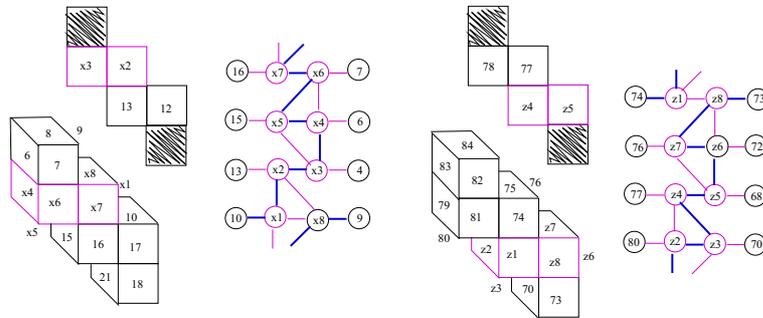


Figura 7.57: Anexos 0Z para los cortes a_o y b_o

Finalmente, es fácil ver que combinando los resultados obtenidos para la familia $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$, podemos concluir lo siguiente:

Teorema 7.13 La familia de vox-sólidos irreducibles $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$ con m voxeles, donde $m = 16 + 4(i_1 + j_1 + i_2 + j_2)$, admite una Descomposición Hamiltoniana.

De igual manera, después de haber revisado los cuatro vox-sólidos irreducibles básicos y sus familias podemos establecer el siguiente resultado:

Teorema 7.14 Sea \mathcal{V} un vox-sólido irreducible básico. Sea $\mathcal{D} = (\mathcal{H}, \mathcal{C})$ una descomposición Hamiltoniana para \mathcal{V} . Sea \mathcal{V}' el vox-sólido irreducible obtenido de \mathcal{V} agregando estructuras kZ , $k \geq 0$, o jV , $j \geq 1$. Entonces, siempre es posible extender la descomposición \mathcal{D} para obtener una descomposición Hamiltoniana \mathcal{D}' para \mathcal{V}' .

Capítulo 8

Engrosamiento de Vox-sólidos

En este Capítulo buscamos demostrar que el engrosamiento de un vox-sólido admite una descomposición Hamiltoniana. Introducimos el concepto de gema, o mapa combinatorio, al igual que mostramos que las gemas son hamiltonianas. Por último, estableceremos una relación directa entre el engrosamiento de una gráfica y su mapa combinatorio.

8.1. Hamiltonicidad

Sea $G = (V, E)$ una gráfica. La conexidad por aristas de G , $\lambda(G)$, se define como la cardinalidad del mínimo conjunto de aristas F , tal que la gráfica $G \setminus F$ es desconexa o trivial. La conexidad (por vértices) de G , $\kappa(G)$, se define como la cardinalidad del mínimo conjunto de vértices U , tal que la gráfica $G \setminus U$ es desconexa o trivial.

Para continuar con el desarrollo del tema y la construcción presentamos un par de resultados y una definición que nos será de gran utilidad.

Teorema 8.1 (Whitney) Para toda gráfica G , $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

El siguiente resultado fue obtenido de manera independiente por Nash-William [38] y Tutte [59].

Teorema 8.2 ([59, 38]) Una gráfica $G = (V, E)$, con $|V| = n$ tiene k árboles generadores ajenos por aristas si, y sólo si, para toda partición $\mathcal{P} = \{V_1, v_2, \dots, V_t\}$ de V el número de aristas en G que conectan distintos conjuntos en \mathcal{P} es al menos $k(n - 1)$.

Lema 8.1 (Zhan,[63].) Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Si G es 4-conexa por aristas entonces para cualesquiera par de aristas $e, e' \in E$, la gráfica $G \setminus \{e, e'\}$ tiene dos árboles generadores ajenos por aristas

Definición 8.1 Sea \mathcal{G} la gráfica facial de un vox-sólido. Sean C_B y C_R dos ciclos ajenos por aristas en \mathcal{G} . Sea v un vértice en \mathcal{G} . Sean v_1, v_2, v_3, v_4 los vecinos de v , ordenados cíclicamente. Diremos que los ciclos C_B y C_R se **cruzan** en v si, y sólo si,

1. dos aristas incidentes en v están en C_B y otras dos en C_R ;
2. las aristas (v, v_1) y (v, v_3) están en un ciclo y las otras dos están en el otro ciclo.

Además diremos que dos ciclos C_B y C_R se **crucan** si se cruzan en v .

Sea $\mathcal{V} \in \mathfrak{V}$ y \mathcal{G} su gráfica facial. Sabemos que \mathcal{G} es 4-regular y 4-conexa por vértices, por el Teorema de Whitney, se deduce que también es 4-conexa por aristas.

Un árbol con n vértices tiene $n - 1$ aristas; para construir dos árboles de n vértices se requieren $2(n - 1)$ aristas. Por otro lado, como \mathcal{G} es 4-regular, si tiene n vértices, entonces, tiene $2n$ aristas. Resulta claro que se cuenta con el número suficiente de aristas para particionar las aristas de \mathcal{G} en dos árboles generadores ajenos por aristas.

Ahora bien, por el Lema de Zhan, es posible descomponer la gráfica facial \mathcal{G} en dos árboles generadores ajenos por aristas. Seleccionaremos, estratégicamente, las dos aristas sobrantes para construir la Descomposición Hamiltoniana del engrosamiento de \mathcal{G} .

Para facilitar la notación, coloreamos las aristas de los árboles generadores ajenos por aristas del Lema de Zhan con dos colores: R , rojo, y B , azul.

La gráfica facial de un vox-sólido siempre tiene, al menos, ocho caras triangulares, [47]. Sea f una cara triangular de la gráfica facial \mathcal{G} de un vox-sólido, sin pérdida de generalidad, suponemos que $f = \langle x, v, y \rangle$. Sean $e = (x, v)$ y $e' = (v, y)$. Sean T_R y T_B los árboles generadores ajenos por aristas del Lema de Zhan para la gráfica $\mathcal{G} \setminus \{e, e'\}$.

Extenderemos la coloración de T_R y T_B a la gráfica \mathcal{G} , coloreando las aristas e, e' de tal manera que se crucen los ciclos que forman al anexarlas.

Lema 8.2 Sea \mathcal{G} la gráfica facial de un vox-sólido, $f = \langle x, v, y \rangle$, una cara triangular de \mathcal{G} . Sean $e = (x, v)$ y $e' = (v, y)$. Sean T_B y T_R los árboles generadores ajenos por aristas dados por el Lema de Zhan para $\mathcal{G} \setminus \{e, e'\}$.

Entonces, es posible extender la coloración de T_B y T_R a la gráfica \mathcal{G} , tal que existe un único ciclo rojo y otro azul que se cruzan en el vértice v .

Demostración. Como T_B y T_R son árboles generadores ajenos por aristas para $\mathcal{G} \setminus \{e, e'\}$, dados por el Lema de Zhan. Se tiene que, entre todo par de vértices, en un árbol, existe una trayectoria que los une. Consideramos dos casos:

Caso 1. Sean $\mathcal{P}_R(v, x)$ una trayectoria de aristas rojas que une a v con x y $\mathcal{P}_B(v, y)$ una trayectoria de aristas azules que une a v con y .

Entonces, coloreamos a (x, v) de azul y (v, y) de rojo. Como T_B y T_R son árboles generadores de \mathcal{G} , existe una trayectoria roja de x a y , $\mathcal{P}_R(x, y)$, y una azul de x a y , $\mathcal{P}_B(y, x)$. Se forman así, el ciclo rojo: $C_R = \mathcal{P}_R(v, x) \cup \mathcal{P}_R(x, y) \cup e'$ y el ciclo azul: $C_B = \mathcal{P}_B(v, y) \cup \mathcal{P}_B(y, x) \cup e$. Resulta claro que los ciclos C_R y C_B comparten más de un vértice y que, además, se cruzan.

Caso 2. Sean $\mathcal{P}_R(v, y)$ una trayectoria de aristas rojas que une a v con y y $\mathcal{P}_B(v, x)$ una de aristas azules que une a v con x . De manera análoga al caso anterior, coloreamos (x, v) de rojo y (v, y) de azul para que exista un cruce en v .

Finalmente, podemos concluir que es posible colorear las aristas (x, v) y (v, y) de tal forma que los ciclos C_R y C_B se crucen en el vértice v .

Definición 8.2 [47] Sea $G = (V, E)$ una gráfica conexa simple con $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. El **engrosamiento** de G es la gráfica G^T , que satisface las siguientes condiciones:

1. Para cada vértice $w \in V$, G^T contiene un k -ciclo C_w , donde k es el grado del vértice w . Sean $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$ las aristas incidentes a w en G . Entonces, etiquetamos, arbitrariamente, las aristas de C_w con uno, y sólo uno, de los símbolos en el conjunto $\{e_{i_1}(w), e_{i_2}(w), \dots, e_{i_k}(w)\}$, además arbitrariamente etiquetamos los vértices de C_w con uno y sólo uno de los símbolos en el conjunto $\{W^1, W^2, \dots, W^k\}$.
2. Para cada $i, 1 \leq i \leq m$, suponga que $e_i = (u, w)$, además, sean $e_i(u) = (u^{j_1}, u^{j_2})$ y $e_i(w) = (w^{k_1}, w^{k_2})$. Entonces, G^T contiene uno de los conjuntos de aristas: $\{(u^{j_1}, w^{k_1}), (u^{j_2}, w^{k_2})\}$ o bien $\{(u^{j_1}, w^{k_2}), (u^{j_2}, w^{k_1})\}$ pero no ambos. Denotamos por C_e al 4-ciclo en G^T con vértices $u^{j_1}, w^{k_1}, u^{k_2}, w^{j_2}$.

Teorema 8.3 Sea \mathcal{G} la gráfica facial de un vox-sólido. Entonces el engrosamiento \mathcal{G}^T de \mathcal{G} admite una descomposición Hamiltoniana.

Demostración.

Sea $\mathcal{G}^T = (V^T, E^T)$ el engrosamiento de \mathcal{G} , donde V^T es su conjunto de vértices y E^T su conjunto de aristas dado por $E^T = \{e \in C_w : w \in \mathcal{G}\} \cup \{a \in C_e : e \in \mathcal{G}\}$.

Sea f una cara triangular de \mathcal{G} , $f = \langle x, v, y \rangle$, sean $e = (x, v)$ y $e' = (v, y)$.

Sean T_R y T_B los árboles generadores ajenos por aristas del Lema de Zhan para la gráfica $\mathcal{G} \setminus \{e, e'\}$. Sean a_R y a_B las aristas (x, v) y (v, y) coloreadas convenientemente, Lema 8.2, para que los ciclos C_R y C_B se crucen en el vértice v , donde C_R es el ciclo que se forma al insertar la arista roja a_R en T_R , similarmente para C_B .

Sea $G_R = T_R \cup a_R$ la gráfica consistente de las aristas rojas de \mathcal{G} .

Sea $G_B = T_B \cup a_B$ la gráfica consistente de las aristas azules de \mathcal{G} .

Sean $E_{1R} = \{e \in C_w : w \in G_R\}$ y $E_{2R} = \{a \in C_e : e \in G_R\}$.

Entonces la gráfica $\mathcal{H}_R = \langle (E_{1R} \triangle E_{2R}) \triangle C_v \rangle$ es un ciclo Hamiltoniano para \mathcal{G}^T .

De manera simiar se obtiene \mathcal{H}_B .

Resulta claro que \mathcal{H}_B y \mathcal{H}_R constituyen una descomposición Hamiltoniana para \mathcal{G}^T .

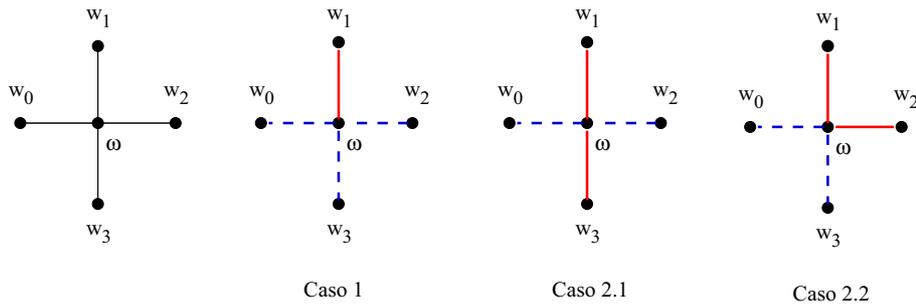


Figura 8.1: Incidencias de los árboles T_R y T_B

Por otro lado, sabemos que, un vértice ω en un árbol T , ω puede ser una hoja o un nodo interno de T . Dado que ω tiene grado 4, hay tres formas en que pueden coincidir los árboles T_R y T_B en un vértice ω de \mathcal{G} :

1. El vértice ω es hoja de uno de ellos, digamos de T_R , entonces, en ω incide una arista roja y tres azules.
2. El vértice ω no es hoja de ninguno de los dos árboles, entonces en ω inciden dos aristas rojas y dos azules. Suponga que los cuatro vecinos de ω están ciclicamente ordenados y son w_1, w_2, w_3, w_0 . Hay dos casos:
 - 2.1 Las aristas (ω, w_1) y (ω, w_3) tienen el mismo color y las otras dos el segundo.
 - 2.2 Las aristas (ω, w_i) y $(\omega, w_{(i+1) \bmod 4})$ tienen el mismo color y las otras dos el segundo color.

La Figura 8.1 ilustra estos casos y la Figura 8.2 ejemplifica su recorrido en el engrosamiento.

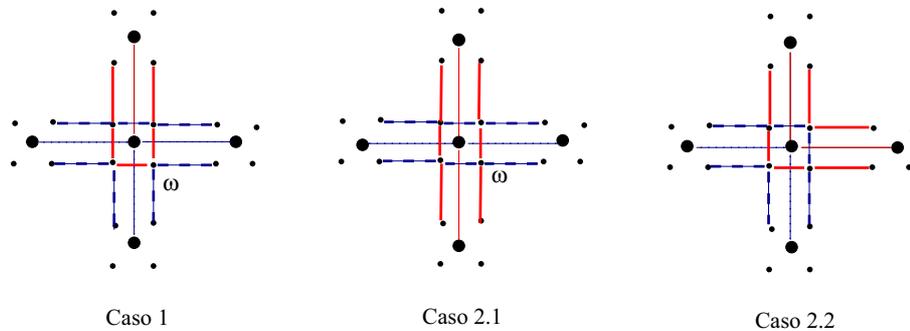


Figura 8.2: Recorrido en \mathcal{G}^T

Es importante mencionar que estos resultados pueden extenderse a gráficas no necesariamente asociadas a vox-sólidos. La demostración de los siguientes resultados es similar a la del Teorema 8.3.

Teorema 8.4 Sea $G = (V, A)$ una gráfica plana con $|V| = n, |A| = 2(n - 1)$, tal que admite una partición de A en dos árboles generadores ajenos por aristas. Entonces, el engrosamiento de G , G^T admite una descomposición Hamiltoniana.

Corolario 8.1 Sea $G = (V, A)$ una gráfica plana tal que posee un vértice ν de grado 4. Suponga que a y e son dos aristas incidentes en ν tal que $G_1 = G \setminus \{a, e\}$ admite una partición en dos árboles generadores ajenos por aristas. Entonces G^T , el engrosamiento de G , admite una descomposición Hamiltoniana.

Cabe mencionar que estamos trabajando en la generalización de los resultados anteriores eliminando la hipótesis de planaridad. Es decir, el problema de la descomposición Hamiltoniana para el engrosamiento de gráficas encajadas en superficies orientables.

8.2. Gemas y Engrosamientos

Un **mapa** es una pareja (G, S) , donde G es una gráfica, S una superficie y $S \setminus G$ es topológicamente equivalente a una colección de discos abiertos ajenos. Más aún, cada punto en S que pertenece a más de una arista de G , es uno de sus vértices. De esta manera, un mapa puede ser descrito como una inmersión celular de G en S .

Una **gema** M es una gráfica cúbica finita C_M con una 3-coloración propia de las aristas con los colores v_M, f_M y a_M , tal que las componentes de las subgráficas generadas por las aristas coloreadas con v_M y f_M son polígonos de cuatro aristas. Cada uno de ellos es llamado M -cuadrado. El término gema¹ es un acrónimo de gráficas encriptadas de mapas [30].

Un **bi-gono**, o polígono bicolorado, en una gema M , es un polígono en C_M cuyas aristas son coloreadas, alternadamente con dos de los tres colores. Los bi-gonos son de tres tipos: **a)** M -cuadrados cuyas aristas son de color v_M y f_M ; **b)** v -gono, polígono cuyas aristas son de color v_M y a_M ; y **c)** f -gono, polígono cuyas aristas son de color f_M y a_M .

Los v -gonos, f -gonos y M -cuadrados corresponden, respectivamente y en forma natural, a vértices, caras y aristas de un mapa obtenido de la gema en una correspondencia biyectiva. La Figura 8.3 ilustra la gema asociada a K_4 .

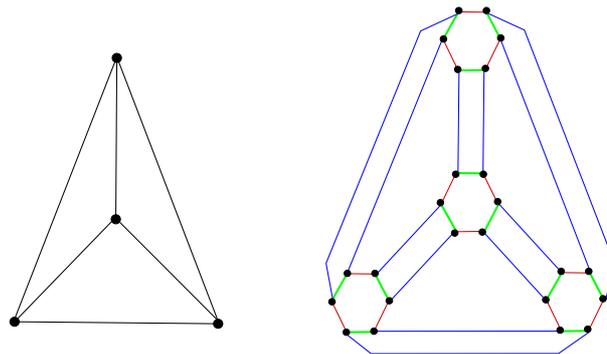


Figura 8.3: Ejemplo de un Mapa y su gema

Sea G una gráfica plana, diremos que su **engrosamiento canónico** es aquél que resulte ser una gráfica plana.

¹En Inglés, *gem* : Graph encoded map

Sea G una gráfica y v un vértice en G . La operación **subdivisión** sobre el vértice v duplica el vértice, uniéndolo con su gemelo con una nueva arista.

La Figura 8.4 muestra un mapa, su engrosamiento canónico y la gema asociada.

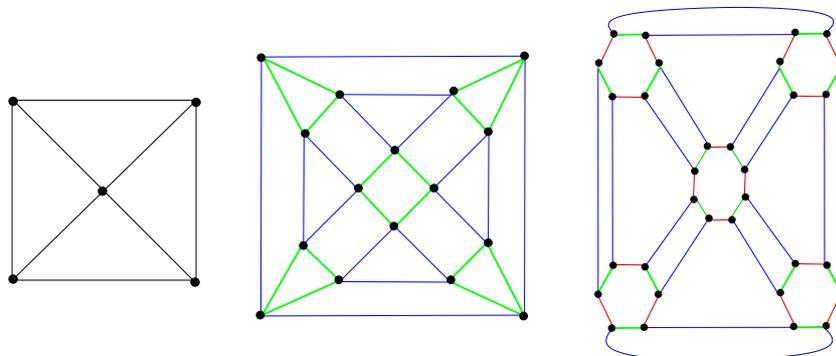


Figura 8.4: Un mapa, su engrosamiento y gema

Lema 8.3 Sea $N = (G, S)$ un mapa, con G una gráfica plana y S una superficie orientable. Sea G^T el engrosamiento canónico de G . Entonces, a partir de G^T es posible construir una gema $\mathcal{M} = (C_M, S)$ para $N = (G, S)$.

Demostración.

Dado un mapa $N = (G, S)$ determinamos su engrosamiento canónico G^T , el cual es una gráfica 4-regular. Los 4-ciclos asociados a las aristas de G serán los \mathcal{M} -cuadrados de la gema \mathcal{M} .

Coloreamos las aristas de los k -ciclos de G^T , asociados a los vértices de G , de color v_M y las aristas de los ciclos asociados a las caras de G^T de color f_M . De esta manera, los 4-ciclos quedan bicolorados con v_M y f_M , alternadamente.

Los k -ciclos en G^T se transforman mediante la aplicación de subdivisiones sobre cada vértice del k -ciclo, de tal forma que los \mathcal{M} -cuadrados no se vean alterados. Para cada vértice w_i del k -ciclo en G^T se ha creado su gemelo w'_i que ha quedado unido a w_i con la arista (w_i, w'_i) . Coloreamos estas nuevas aristas con el color a_M .

Con esta transformación los k -ciclos de G^T se convierten en polígonos, de longitud $2k$, bicolorados alternadamente con los colores v_M y a_M , éstos corresponden directamente a los v -gonos de la gema \mathcal{M} .

Las caras en G^T de longitud ℓ se han convertido en polígonos de longitud 2ℓ , que han quedado bicolorados con f_M y a_M , de manera alternada; estos polígonos serán los f -gonos de la gema \mathcal{M} .

Finalmente, los \mathcal{M} -cuadrados, los cuales no fueron alterados, han quedado bicolorados con v_M y f_M .

Así, hemos obtenido una gráfica cúbica C_M inmersa en S . La 3-coloración dada para las aristas de C_M nos define la gema \mathcal{M} . Por lo tanto, hemos construido una gema $\mathcal{M} = (C_M, S)$ a partir del engrosamiento G^T de un mapa $N = (G, S)$.

La Figura 8.5 muestra la gráfica facial de la Tuerca, el engrosamiento y la gema de la misma.

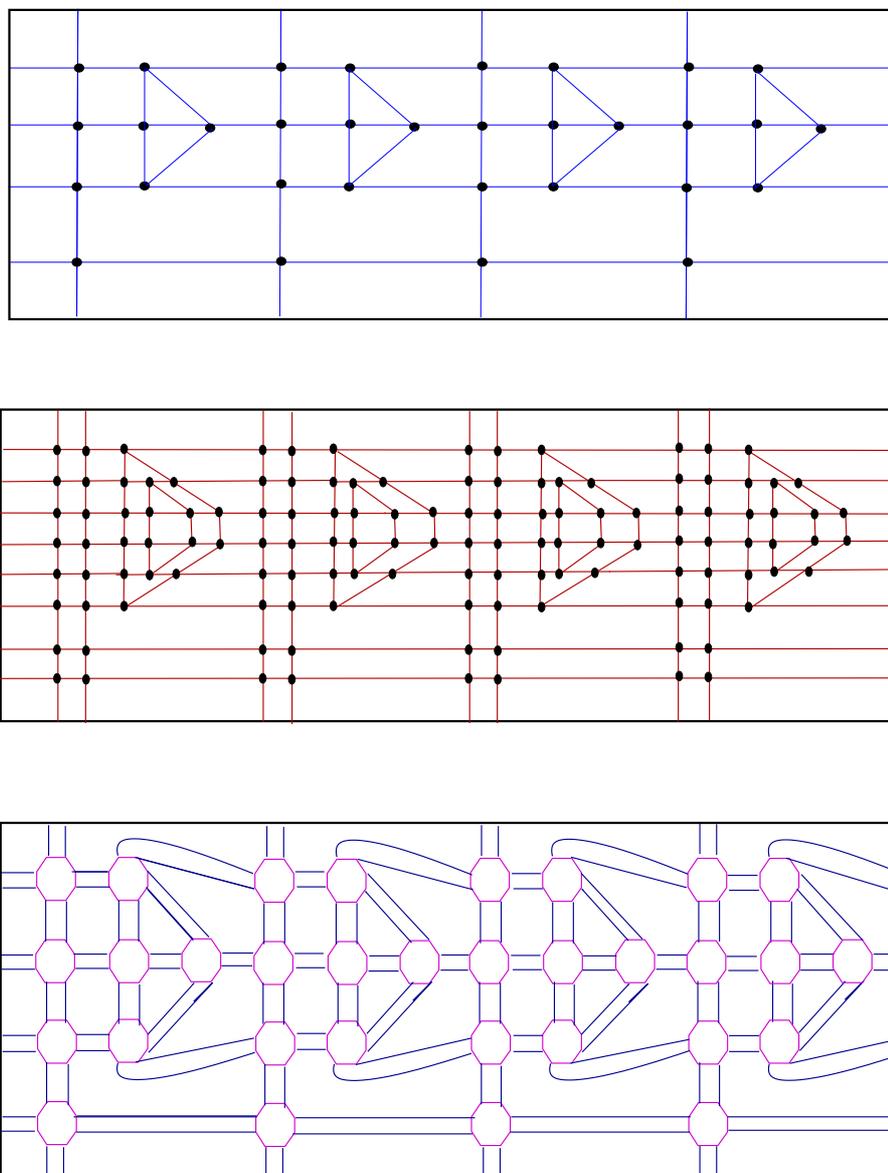


Figura 8.5: La Tuerca, su engrosamiento y gema

Lema 8.4 Sea $N = (G, S)$ un mapa, con G una gráfica plana S una superficie orientable. Sea $\mathcal{M} = (C_M, S)$ una gema para N . Entonces es posible construir un engrosamiento canónico G^T para G a partir de la gema \mathcal{M}

Demostración.

Sea $\mathcal{M} = (C_M, S)$ una gema. C_M es una gráfica cúbica 3-coloreada con los colores

a_M, f_M, v_M . Los \mathcal{M} -cuadrados están coloreados con f_M y v_M , de tal forma que las aristas que separan un \mathcal{M} -cuadrado de un f -gono son de color f_M , mientras que las aristas que separan un \mathcal{M} -cuadrado de un v -gono son de color v_M . Las otras aristas de la gema \mathcal{M} son de color a_M .

Como cada ciclo en la gema es bi-coloreado, entonces cada ciclo de orden par. En particular, cada v -gono es de orden par.

Ahora, contraemos las aristas de color a_M a un vértice, lo cual genera una gráfica 4-regular. Si un v -gono era de orden $2k$ en la gema, ahora su orden es k . Es decir, tenemos un k -ciclo por cada v -gono de la gema. Por otro lado, los \mathcal{M} -cuadrados son 4-ciclos.

De esta manera, hemos construido un engrosamiento G^T , donde los k -ciclos están asociados a los vértices y los 4-ciclos están asociados a las aristas de una gráfica G inmersa en una superficie S . Es decir de un mapa $N = (G, S)$.

Para obtener el mapa original $N = (G, S)$, contraemos los k -ciclos, quedaran vértices de grado $2k$. Finalmente, adelgazamos cada dígono.

8.3. Hamiltonicidad de las Gemas

En esta sección, relacionamos la Hamiltonicidad del engrosamiento de una gráfica con su respectivo mapa combinatorio, o gema.

Teorema 8.5 Toda gema asociada a una gráfica plana es Hamiltoniana

Demostración.

En los Lemas 8.3 y 8.4 hemos demostrado que a partir de una gema podemos construir su engrosamiento y viceversa. Sagols[47] demuestra que el engrosamiento de toda gráfica es Hamiltoniano, por lo cual resulta que toda gema es Hamiltoniana.

Resulta claro que una gráfica 3-regular no admite una descomposición Hamiltoniana, por lo cual relajaremos tal definición, para adaptarla a las gemas.

Diremos que una gema $\mathcal{M} = (C_M, S)$ admite una **pseudo-descomposición Hamiltoniana** si únicamente la clase cromática a_M repite aristas en los ciclos de la descomposición. Es decir, si la pseudo-descomposición Hamiltoniana consiste en los ciclos \mathcal{C} y \mathcal{H} , las únicas aristas que podrían compartir son las de color a_M .

Teorema 8.6 Sea $G = (V, A)$ una gráfica plana con $|V| = n$ y $|A| = 2(n - 1)$ tal que admite una partición de A en dos árboles generadores ajenos por aristas. Sea $N = (G, S)$ un mapa. Sea $\mathcal{M} = (C_M, S)$ la gema asociada a N . Entonces, \mathcal{M} admite una pseudo-descomposición Hamiltoniana.

Demostración.

Por los Lemas 8.3 y 8.4 es posible transformar una gema en un engrosamiento y viceversa. Ahora, consideremos a G^T el engrosamiento canónico de G . Por el Teorema 8.4 G^T admite una descomposición Hamiltoniana, sean \mathcal{C} y \mathcal{H} los ciclos de la descomposición. Sea $\mathcal{M} = (C_M, S)$ la gema obtenida por la transformación del Lema 8.3.

Al aplicar la subdivisión sobre cada vértice de los k -ciclos de G^T , las aristas (w_i, w'_i) serán las únicas no consideradas por ninguno de los ciclos de la descomposición Hamiltoniana.

Sea A_{a_M} el conjunto de aristas de color a_M de C_M . Sean $A(\mathcal{H}') = A(\mathcal{H}) \cup A_{a_M}$ y $A(\mathcal{C}') = A(\mathcal{C}) \cup A_{a_M}$ los conjuntos de aristas para los ciclos \mathcal{H}' y \mathcal{C}' , respectivamente. Resulta claro que, \mathcal{H}' y \mathcal{C}' determinan una pseudo-descomposición Hamiltoniana, para la gema \mathcal{M} .

La Figura 8.6 ilustra el Teorema 8.6. En (a) se muestran, sobre la gema, los dos árboles generadores ajenos por aristas para la gráfica original. Mientras que en (b) y (c) se ilustra el recorrido sobre la gema.

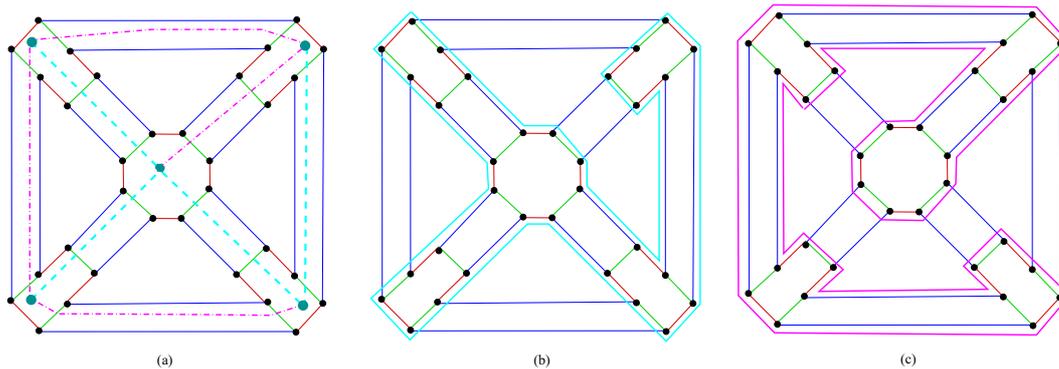


Figura 8.6: Pseudo-descomposición Hamiltoniana, Teorema 8.6

De manera análoga, podemos concluir el siguiente resultado:

Teorema 8.7 Sea $G = (V, A)$ una gráfica plana con $|V| = n$ y $|A| = 2n$, tal que existe $v \in V$ de grado 4 y G admite una partición de A en dos árboles generadores ajenos por aristas. Sea $N = (G, S)$. Sea $\mathcal{M} = (C_M, S)$ la gema asociada a N . Entonces, \mathcal{M} admite una pseudo-descomposición Hamiltoniana.

De manera inmediata establecemos el siguiente resultado:

Corolario 8.2 Sea G la gráfica facial de un vox-sólido. Sea M la gema asociada a G . Entonces, M admite una pseudo-descomposición Hamiltoniana.

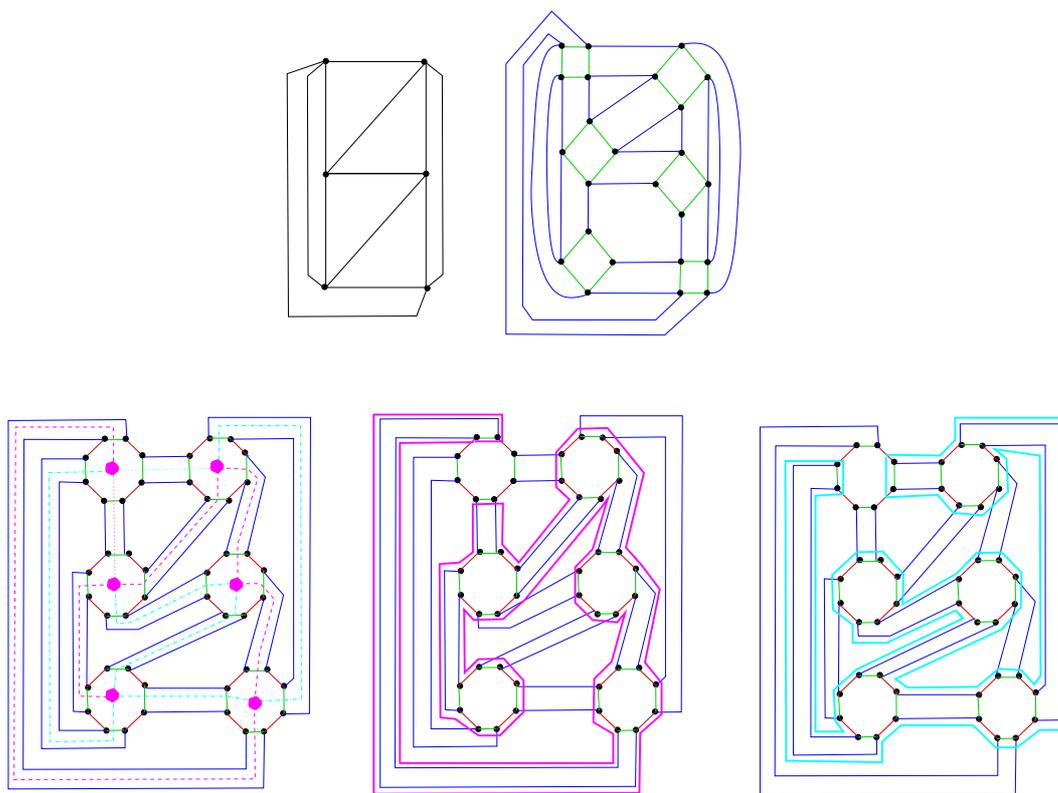


Figura 8.7: Pseudo-descomposición Hamiltoniana, Teorema 8.7

Apéndice A

Topología Digital

En los últimos años, el interés por la Topología Digital ha ido en aumento. Esto debido, principalmente, a sus aplicaciones en Visión, Reconocimiento de Patrones, Geometría Computacional, Robótica y Ciencias de la Computación, en general.

En la actualidad, la Topología Digital en 2 dimensiones está lo suficientemente bien desarrollada si la contrastamos, por ejemplo, con el estado de la teoría para 3 dimensiones. Para ser más precisos, ni siquiera existe un consenso entre los investigadores sobre diversos conceptos básicos, a la vez que existen muchos problemas abiertos que resultan de gran interés.

Este Apéndice tiene como objetivo introducir algunos conceptos básicos sobre Topología Digital, haciendo un repaso tanto de la aplicación de su teoría en 2 como 3 dimensiones.

Topología Digital Básica

Los objetos en tres dimensiones y las imágenes en dos son aproximadas digitalmente por conjuntos de **voxeles** (*volume elements*) o **pixeles** (*picture elements*), respectivamente.

La Geometría Digital es el estudio de las propiedades geométricas de los objetos digitalizados, o imágenes digitalizadas de objetos, tanto su definición como los algoritmos para la determinación, preservación o cálculo de dichas propiedades.

En particular, la Topología Digital estudia las propiedades de naturaleza topológica (particularmente, las que involucran conceptos de conexidad y adyacencia, independientemente del tamaño o la forma) y los algoritmos que determinan o preservan tales propiedades.

Las propiedades topológicas como los algoritmos, juegan un papel fundamental en el análisis de objetos digitales en dos y en tres dimensiones.

Un aspecto muy importante, es que las propiedades topológicas del objeto digitalizado corresponden a aquéllas del objeto original. Esto proporciona los fundamentos teóricos para las operaciones que manipulan los objetos digitalizados.

Conceptos Básicos

Por lo general, las imágenes consideradas en Topología Digital son representadas en arreglos binarios, cuyos elementos tienen valores 0 y 1.

La mayoría de los trabajos de investigación en el área de Topología Digital tratan imágenes en dos y tres dimensiones, además, algunos autores han considerado dimensiones mayores o arreglos abstractos.

Para evitar trabajar con el *borde* de una imagen, se asume que el arreglo es no acotado en todas direcciones. Esto permite que los objetos tengan un número infinito de píxeles o voxeles con valor 1. Sin embargo, frecuentemente, los objetos se definen excluyendo esta posibilidad, lo cual ocurre, sobretodo, en la práctica, ya que ciertas definiciones y resultados se simplifican cuando los objetos tienen un número finito de píxeles o voxeles.

Asociamos a cada píxel o voxel con una latice de puntos. Es decir, un punto con coordenadas enteras en el plano o en el espacio tridimensional. Con el término **punto** nos referiremos a un punto en la latice. Denotaremos por \mathbf{Z}^2 al conjunto de puntos en la latice del plano, mientras que por \mathbf{Z}^3 al conjunto de puntos en la latice del espacio tridimensional.

Se dice que dos puntos en la latice \mathbf{Z}^2 son **8-adyacentes** si son distintos y cada coordenada de uno difiere de la correspondiente del otro por, a lo más, 1. Dos puntos son **4-adyacentes** si son 8-adyacentes y difieren, precisamente, en una de sus coordenadas.

En el caso de \mathbf{Z}^3 , se dice que dos puntos en la latice son **26-adyacentes** si son distintos y cada coordenada de uno difiere de la correspondiente del otro por, a lo más, 1. Serán **18-adyacentes** si son 26-adyacentes y difieren, a lo más, en dos de sus coordenadas. Por último, son **6-adyacentes** si son 26-adyacentes y difieren en exactamente una de sus coordenadas. Para $n = 4, 8, 6, 18, 26$ un **n -vecino de un punto p** en la latice es un punto que es **n -adyacente a p** .

La Figura A.1(a) muestra los 4-vecinos de un punto p y la (b) muestra sus 8-vecinos.

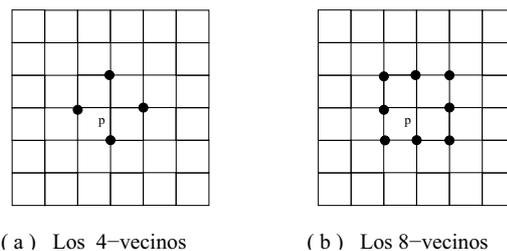


Figura A.1: Vecinos de un punto p en 2 dimensiones

La Figura A.2 muestra los n -vecinos, $n = 6, 18, 26$ de un punto p en tres dimensiones.

Si p está en una latice en \mathbf{Z}^2 , entonces la **vecindad** de p , $N(p)$ representa al conjunto de puntos que contiene al punto p y a sus 8-vecinos. Si p está en una latice en \mathbf{Z}^3 , entonces la vecindad $N(p)$ representa al conjunto de puntos que contiene a p y a sus 26-vecinos.

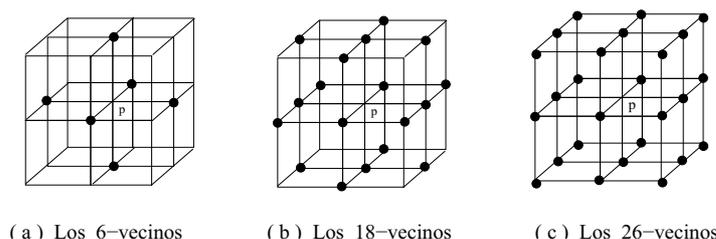


Figura A.2: Vecinos de un punto p en 3 dimensiones

Un punto en la latice, asociado con un pixel o voxel que tenga valor 1 en una imagen, es llamado **punto negro**. En caso de que tenga como valor al 0 es llamado **punto blanco**. Para ilustrar conceptos, en algunas figuras mostraremos al punto negro como \bullet , mientras que al blanco como \circ . Además, adoptaremos la convención de que la latice infinita de puntos no es mostrada para todos los puntos blancos en la figura.

Imágenes Digitales

El punto determinante e inicial, para la investigación en Topología Digital, ha sido el de utilizar diferentes relaciones de adyacencia para puntos negros y blancos con el objetivo de evitar paradojas.

En 2 dimensiones, la relación es 4-adyacencia para puntos negros y 8-adyacencia para puntos blancos, o viceversa. En el caso de 3 dimensiones también, hay paradojas que son evitadas si la 6-adyacencia es usada para los puntos blancos, ya sea que la 18-adyacencia o la 26-adyacencia sea utilizada para los puntos negros, o viceversa.

La idea de usar estas relaciones de adyacencia para puntos blancos y negros motiva a la definición de Imagen Digital:

Definición A.1 Una **Imagen Digital**, o simplemente **imagen**, es el cuarteto \mathcal{P} con $\mathcal{P} = (V, m, n, B)$, donde $V = \mathbf{Z}^2$ o $V = \mathbf{Z}^3$, $B \subseteq V$; y $(m, n) \in \{(4, 8), (8, 4)\}$ si $V = \mathbf{Z}^2$ o $(m, n) \in \{(6, 26), (26, 6), (6, 18), (18, 6)\}$ si $V = \mathbf{Z}^3$.

Se dice una imagen digital $\mathcal{P} = (V, m, n, B)$ que es bidimensional o tridimensional si $V = \mathbf{Z}^2$ o $V = \mathbf{Z}^3$. Esta imagen también es (m, n) -**imagen digital**.

Los elementos de V son llamados **puntos** de \mathcal{P} . Los puntos en B son llamados **puntos negros** de \mathcal{P} y los puntos en $V - B$ **puntos blancos** de \mathcal{P} . Usualmente, B es un conjunto finito y entonces se dice que \mathcal{P} es finito.

Una imagen digital $\mathcal{P} = (V, m, n, B)$ puede ser vista como una imagen cuyos puntos negros son el conjunto B junto con las relaciones de adyacencia, m -adyacencia y n -adyacencia.

Se dice que dos puntos negros de \mathcal{P} son \mathcal{P} -adyacentes si son m -adyacentes.

Se dice que dos puntos blancos o un punto blanco y uno negro son \mathcal{P} -adyacentes si ellos son n -adyacentes.

Un segmento de línea que une dos puntos adyacentes es llamado **adyacencia**. Una imagen digital $\mathcal{P} = (V, m, n, B)$ puede denominarse (m, n) -imagen digital.

La Figura A.3 muestra todas las adyacencias en una $(8,4)$ -imagen digital y una $(4,8)$ -imagen digital. No perdamos de vista que las dos imágenes digitales tienen el mismo conjunto de puntos negros.

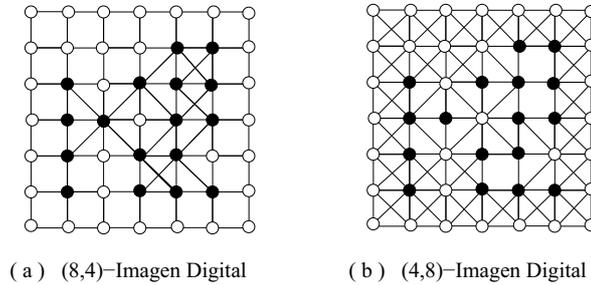


Figura A.3: (m, n) -imagen digital

Sea $r \in \{4, 8; 6, 18, 26; \mathcal{P}\}$. Si un punto p es r -adyacente a un punto q , decimos que p es un r -vecino de q . Se dice que un punto p es r -adyacente a un conjunto de puntos S si p es r -adyacente a algún punto en S . Dos conjuntos S y T son r -adyacentes uno del otro si algún punto en S es r -adyacente a algún punto en T . Un punto negro será r -aislado si no es r -adyacente a ningún punto negro.

Se dice que un conjunto de puntos es r -conexo si no es la unión de dos conjuntos disjuntos no vacíos que no son r -adyacentes uno del otro. Una r -componente de un conjunto S no vacío de puntos es un subconjunto r -conexo maximal de S . Una r -componente de un conjunto S es un subconjunto r -conexo no vacío de S que no es r -adyacente a ningún punto en S . La Figura A.4 ilustra este concepto, se tiene un conjunto 8-conexo con exactamente tres 4-componentes.

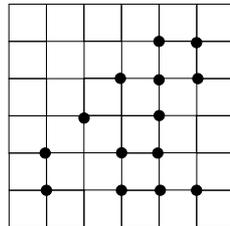


Figura A.4: Un conjunto 8-conexo con tres 4-componentes

Para $\mathcal{P} = (V, m, n, B)$, una \mathcal{P} -componente de B , o equivalentemente, una m -componente de B , es denominada **componente negra** de \mathcal{P} ; una \mathcal{P} -componente de $V - B$, o de igual manera, una n -componente de $V - B$, es denominada **componente blanca** de \mathcal{P} . La Figura A.5 ilustra tales conceptos. Si la consideramos como una $(8,4)$ -imagen digital, se tienen tres componentes negras y tres blancas. Si la consideramos como una $(4,8)$ -imagen digital, tiene cinco componentes negras y dos blancas.

Si \mathcal{P} es una imagen digital finita entonces tiene una componente blanca infinita. Esta componente, algunas veces, es denominada el **fondo** o *background*, de la imagen digital \mathcal{P} . Es necesario precisar que el término background también es usado para identificar a

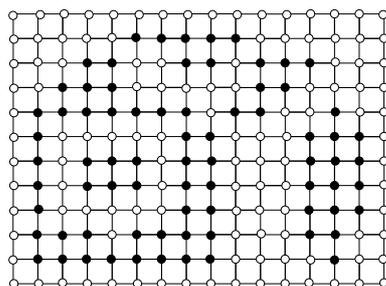


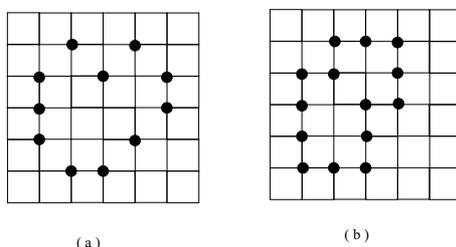
Figura A.5: Componentes blancas y negras

todos los puntos blancos. En el caso del conjunto de todos los puntos negros nos referimos a *foreground*.

Una r -**trayectoria** es una secuencia de puntos $\langle p_1, p_2, \dots, p_k \rangle$ con $k \geq 1$, en la cual cada punto p_i es r -adyacente a p_{i+1} , $1 \leq i < k$. Si $p_1 = p_k$, se dice, entonces, que la r -**trayectoria es cerrada**. Una trayectoria, degenerada, de un solo punto $\langle p_o \rangle$ es un caso especial de una r -trayectoria es cerrada. Una r -trayectoria de p a q es una r -trayectoria con punto inicial p y punto final q . No resulta complicado mostrar que dos puntos p y q están en la misma r -componente de un conjunto de puntos S si, y sólo si, existe una r -trayectoria de p a q en S .

Una r -curva cerrada y simple es un conjunto finito de puntos r -conexo, en el cual cada punto es r -adyacente a, exactamente, otros dos puntos en el conjunto.

La Figura A.6(a) ilustra una 8-curva cerrada simple y la (b) muestra una 4-curva cerrada simple.

Figura A.6: Ejemplo de r -curvas cerradas

Un r -**arco simple** es un conjunto de puntos finito r -conexo tal que existen dos puntos, denominados puntos terminales, cada uno de los cuales es r -adyacente a únicamente otro punto en el conjunto, éste no es terminal y es r -adyacente, exactamente, a dos puntos en el conjunto. Al quitar un punto de una r -curva cerrada produce un r -arco simple.

Los términos adyacente, vecino, aislado, conexo, componente, trayectoria, arco y curva cerrada simple, son usados para referirnos a un \mathcal{P} -adyacente, \dots , \mathcal{P} -arco y \mathcal{P} -curva, cuando \mathcal{P} es una imagen digital.

Un punto negro en una imagen digital \mathcal{P} es llamado **punto borde** si es adyacente a uno o más puntos blancos; en otro caso, es denominado **punto interior**.

El borde de una componente negra C de la imagen digital \mathcal{P} es el conjunto de todos los puntos borde en C . De manera similar, el interior de una componente negra C de \mathcal{P} es el conjunto de todos los puntos interiores en C . El borde de una componente negra C con respecto a una componente blanca D es el conjunto de puntos en C que son adyacentes a la componente blanca D . Recordemos que en este contexto, adyacente significa n -adyacente si \mathcal{P} es un (m, n) -imagen digital. La Figura A.7 ilustra estos conceptos.

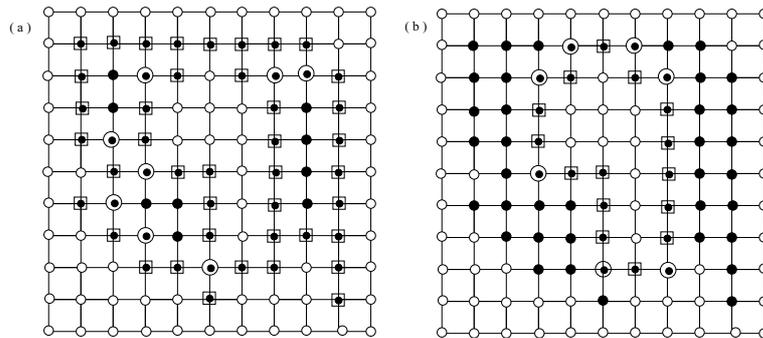


Figura A.7: Ejemplo de puntos borde

Revisemos la Figura A.7(a): en una $(8, 4)$ -imagen digital los puntos enmarcados con un cuadro podrían ser los puntos borde, mientras que en una $(4, 8)$ -imagen digital tanto los puntos enmarcados con un cuadro como los enmarcados con un círculo podrían ser los puntos borde. En el caso de la Figura A.7(b) usamos la misma notación que en (a), excepto que sólo se consideran aquellos puntos que pertenecen al borde de la componente negra con respecto al único hoyo.

Un concepto relacionado es la **frontera** entre dos conjuntos disjuntos de puntos P y Q , el cual puede ser definido como el conjunto de todas las parejas no ordenadas $\{p, q\}$, en las cuales $p \in P$ y $q \in Q$ y, además, p es 4-adyacente o 6-adyacente a q . La frontera también puede definirse como un conjunto ordenado de puntos.

Se dice que un conjunto conexo de puntos X en \mathcal{P} **rodea** a un conjunto de puntos Y en \mathcal{P} , no necesariamente conexo, si cada punto en Y está conectado a una \mathcal{P} -componente finita de $V - X$. Esto es, un orden parcial estricto (una relación asimétrica y transitiva) sobre un conjunto conexo de puntos. En una imagen digital finita, la única componente blanca infinita rodea todos los otros puntos.

Así, una componente blanca de \mathcal{P} , que es adyacente y rodea a una componente negra C de \mathcal{P} , es llamada **hoyo** de C , en el caso de 2 dimensiones y en el caso 3 dimensiones se dice **cavidad**. En el caso 2D, si una componente negra C no tiene hoyos entonces decimos que C es simplemente conexa.

En el caso de un conjunto arbitrario de puntos X en \mathbf{Z}^2 , se dice que es simplemente 4-conexo si X es 4-conexo y $\mathbf{Z}^2 - X$ no tiene una 8-componente finita. De igual manera, se dice que X es simplemente 8-conexo si X es 8-conexo y $\mathbf{Z}^2 - X$ no tiene una 4-componente finita. Así que, cuando X es finito y $(m, n) = (8, 4)$ o $(m, n) = (4, 8)$, X es simplemente m -conexo si y sólo si X es m -conexo y $\mathbf{Z}^2 - X$ es n -conexo.

Cabe señalar que estas definiciones de conexidad simple en imágenes 3-dimensionales son sugeridas a partir de que un poliedro plano acotado es simplemente conexo si, y sólo sí, ambos, tanto él como su complemento en el plano, son conexos. En el espacio euclideo un poliedro acotado es simplemente conexo si, y sólo sí, él es conexo y cada componente conexa de su complemento es simplemente conexa.

Sin embargo, esta caracterización de poliedros acotados simplemente conexos en el espacio tridimensional también involucra el concepto de conexidad simple, lo cual no sugiere una definición de conexidad simple en imágenes tridimensionales. De hecho, no es fácil definir conexidad simple en imágenes 3-dimensionales. No perdamos de vista que la 6-conexidad simple es un concepto ambiguo en imágenes 3-dimensionales, que depende de si se usa 26-adyacencia o 18-adyacencia sobre la componente.

Así, una componente negra en una imagen digital \mathcal{P} por lo general corresponde a un objeto. De manera similar, un hoyo o cavidad de \mathcal{P} suele corresponder a un hoyo o cavidad en el objeto. Por esta razón el etiquetado y conteo de componentes es una operación importante.

Apéndice B

Estructuras Elementales

A continuación se definen, de manera recursiva, estructuras elementales para construir los vox-sólidos no-inductivos, minimales e incluso irreducibles.

Estructura k -Z

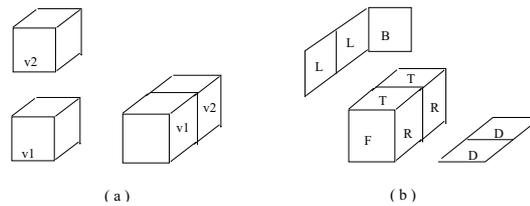


Figura B.1: Definición de la Estructura 0-Z

Estructura 0-Z Se define como la unión válida de dos voxeles aislados.

La Figura B.1(a) ilustra la creación de esta estructura a partir de los voxeles v_1 y v_2 . Sin pérdida de generalidad, identificamos sus caras superior, frontal, trasera, izquierda, derecha e inferior con TOP, FRONT, BACK, LEFT, RIGHT, DOWN, respectivamente, como se puede ver en la Figura B.1(b). Cabe señalar que esta representación de 0-Z será denominada **Estructura Canónica 0-Z**.

Estructura 1-Z Se define como la unión válida de dos estructuras 0-Z, de tal forma que queden desfasadas por un voxel. La Figura B.2(a) ilustra la construcción.

Suponga que las dos estructuras 0-Z que se van a unir están constituidas, por los voxeles v_1 y v_2 la primera, y por v_3 y v_4 la segunda. Ahora identificamos las caras de la segunda 0-Z para después unir la cara derecha de v_2 (v_2 .RIGHT) con la cara izquierda de v_3 (v_3 .Left). La Figura B.3(b) muestra el resultado.

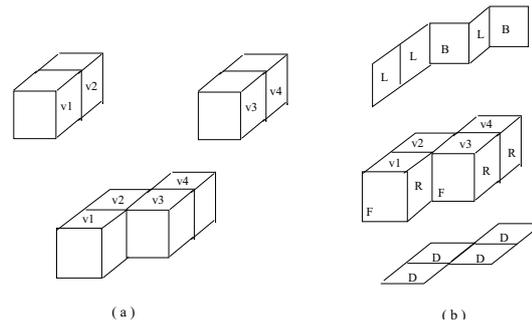


Figura B.2: Definición de la Estructura 1-Z

Estructura 2-Z Es la unión válida de una estructura 1-Z con una 0-Z, desfasando a la estructura canónica 0-Z un voxel a la izquierda tal y como podemos ver en la Figura B.3.

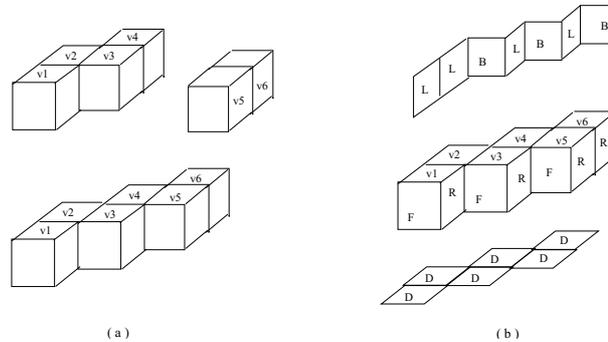


Figura B.3: Definición de la Estructura 2-Z

Esquemmatizando la construcción, tenemos que el último voxel en la Estructura 1-Z es v_4 . Etiquetamos los nuevos voxeles, los de 0-Z, con v_5 y v_6 , identificamos las caras de la estructura 0-Z unimos la cara derecha de v_4 (v_4 .RIGHT) con la cara izquierda de v_5 (v_5 .LEFT). La Figura B.3(b) muestra el resultado.

Estructura k -Z La estructura k -Z se define como la unión válida de una estructura $(k-1)$ -Z con una 0-Z, desfasando a la estructura canónica 0-Z un voxel a la izquierda. Observemos que una estructura k -Z tiene $2(k+1)$ voxeles y que es un vox-sólido inductivo de un piso.

Para finalizar, describimos algorítmicamente la construcción:

1. El último voxel de la estructura $(k-1)$ -Z es v_{2k}
2. Numeramos los voxeles de la estructura 0-Z: v_{2k+1} y v_{2k+2}
3. Identificamos las caras de la estructura 0-Z
4. Unimos v_{2k} .RIGHT con v_{2k+1} .LEFT

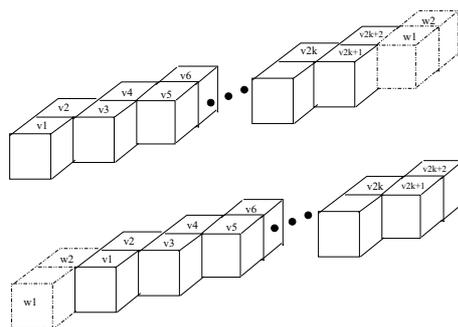


Figura B.4: Definición de la Estructura k -Z

En general, la estructura k -Z se puede extender *pegando* al canónico 0-Z en la cara izquierda de v_1 , el primer voxel, o en la derecha del último, v_{2k} , como se presenta en el método. La Figura B.4 lo ilustra.

Estructura k -V

Estructura 0-V Se define como un voxel. Sin pérdida de generalidad, enumeramos el voxel como v_1 e identificamos sus caras: superior, frontal, trasera, izquierda, derecha e inferior con TOP, FRONT, BACK, LEFT, RIGHT, DOWN, respectivamente, tal y como lo ilustra la Figura B.5(b).

A esta representación de 0-V la denominaremos Estructura Canónica 0-V.

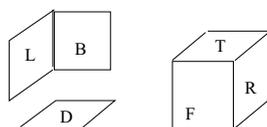


Figura B.5: Definición de la Estructura 0-V

Estructura 1-V Se define como la unión válida de un voxel, o estructura 0-V, con una 0-Z. Enumeramos los voxeles de 0-Z como v_2 y v_3 e identificamos sus caras. Unimos v_1 .RIGHT con v_2 .LEFT, la Figura B.6 muestra la estructura resultante.

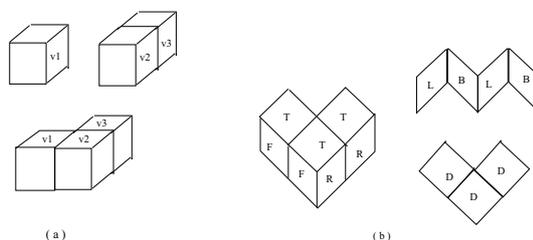


Figura B.6: Definición de la Estructura 1-V

Estructura 2-V Se define como la unión válida de una estructura 1-V con una 0-Z desfasada un voxel de tal forma que quede en un piso. Podemos describir la construcción de manera esquemática: El último voxel de 1-V es v_3 . Enumeramos los voxeles de 0-Z como v_4 y v_5 e identificamos sus caras. Unimos v_3 .RIGHT con v_4 .LEFT. La Figura B.7 muestra la estructura resultante.

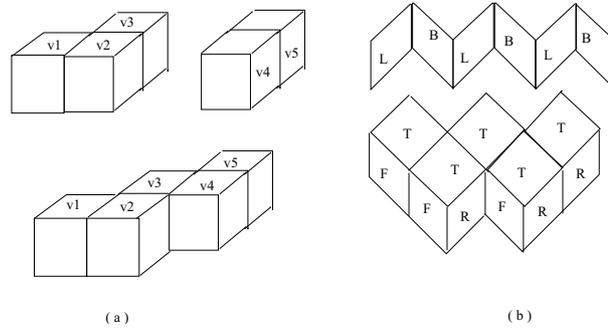


Figura B.7: Definición de la Estructura 2-V

Estructura k -V Se define como la unión válida de una estructura $(k - 1)$ -V con una 0-Z, desfasada un voxel de tal forma que quede en un piso. Esta estructura tiene $2k + 1$ voxeles y forma un vox-sólido inductivo. La Figura B.8 muestra el vox-sólido resultante.

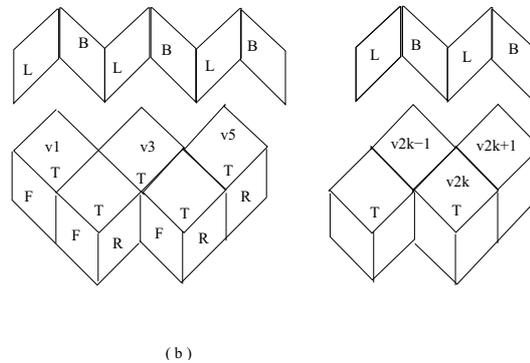


Figura B.8: Definición de la Estructura k -V

Describimos el proceso para construir la Estructura k -V algorítmicamente:

1. El último voxel de la estructura $(k - 1)$ -V es v_{2k-1}
2. Numeramos los voxeles de la Estructura 0-Z: v_{2k} y v_{2k+1}
3. Identificamos las caras de la Estructura 0-Z
4. Unimos v_{2k-1} .RIGHT con v_{2k} .LEFT

En general, se puede extender la estructura k -V pegando una estructura 0-Z en la cara F de v_1 -el primero- o en la R de v_{2k-1} -el último.

No podemos perder de vista que las Estructuras $k\text{-V}$ y $k\text{-Z}$ tienen la propiedad de que, al quitarles un voxel intermedio, el objeto 3D resultante deja de ser vox-sólido.

Para facilitar la notación denotaremos a las estructuras $k\text{-V}$ y $k\text{-Z}$ como kV y kZ , respectivamente.

Bibliografía

- [1] J. Abello, M.R. Fellows, and J.C. Stillwell. On the complexity and combinatorics of covering finite complexes. *J. Combin.*, 4:103–112, 1991.
- [2] T. Agano, T. Nishizeki, and T. Watanabe. An upper bound on the length of a hamiltonian walk of a maximal planar graph. *J. Graph Theory*, 4:315–336, 1980.
- [3] P. Alexandroff. *Elementary Concepts of Topology*. Dover Pu. Inc. New York, 1961.
- [4] A. Altshuler. Hamiltonian circuits in some maps on the torus. *Discrete Math*, 1:299–314, 1972.
- [5] T. Asano, S. Kikuchi, and N. Saito. A linear algorithm for finding hamiltonian cycles in 4-connected maximal-planar graph. *Discrete Appl. Math*, 7:1–15, 1984.
- [6] J.C. Bermond and C. Thomassen. Cycles in digraphs - a survey. *J. Graph Theory*, 5:1–43, 1981.
- [7] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. American Elsevier, New York, 1976.
- [8] J.A. Bondy and R. Haggkvist. Edge-disjoint hamilton cycles in 4-regular planar graphs. *Aequationes Math.*, 22:41–45, 1981.
- [9] J.A. Bondy and K. Kouider. Hamilton cycles in regular 2-connected graphs. *J. Combinat. Theory B*, 44:177–186, 1988.
- [10] C. P. Bonnington and C.H.C Little. *The Foundations of Topological Graph Theory*. Springer, New York, 1995.
- [11] R. Brunet and R.B. Richter. Hamiltonicity of 5-connected toroidal triangulations. *J. Graph Theory*, 20:267–286, 1995.
- [12] V. Chvátal and P. Erdos. A note on hamiltonian circuits. *Discrete Math.*, 2:111–113, 1972.
- [13] G.H. Fan. New sufficient condition for cycles in graph. *J. Combinat. Theory Ser. B*, 37:221–227, 1984.

-
- [14] D. Garey, M.R. & Johnson. *Computers and Intractability*. Bell Telephone Laboratories., 1979.
- [15] P.J. Giblin. *Graphs, surfaces and Homology*. Chapman and Hall Mathematics Series. John Willen & Sons, 1981.
- [16] S. Goodman and S. Hedetniemi. Sufficient conditions for a graph to be hamiltonian. *J. Combinat. Theory B*, 16:175–180, 1974.
- [17] R.J. Gould. *Advances on Hamiltonian Problem - A Survey*. *Graphs and Combinatorics*, 19:7–52, 2003.
- [18] R.J. Gould. *Updating the Hamiltonian Problem - A Survey*. *Journal of Graph Theory*, 15(2):7–52, 2003.
- [19] F.H. Graham. *From Geometry to Topology*. Dover Publications., 1974.
- [20] J.L. Gross and T.W. Tucker. *Topological Graph Theory*. Dover Publications., 2001.
- [21] D. Gusfield. Connectivity an edge-disjoint spanning trees. *Information Processing Letter*, 16:87–89, 1983.
- [22] R. Haggkvist and C. Thomassen. A remark on hamilton cycles. *J. Combinat. Theory B*, 30:118–120, 1981.
- [23] M. Henle. *A Combinatorial Introduction to Topology*. Dover Publication, Inc, 1994.
- [24] B. Jackson. Edge-disjoint hamilton cycles in regular graphs for large degree. *J. London Math. Soc.*, 2:13–16, 1979.
- [25] B. Jackson. Hamilton cycles in regular 2-connected graphs. *J. Combinat. Theory B*, 29:27–46, 1980.
- [26] B. Jackson. A chvátal-erdos condition for hamilton cycles in digraphs. *J. Combinat. Theory B*, 43:245–252, 1987.
- [27] T.Y. Kong and A. Rosenfeld. *Topological Algorithms for Digital Image Processing*. Elsevier, North-Holland, 1996.
- [28] S. Kundu. Bounds on th number of disjoint spanning trees. *Journal of Comb. Theory B*, 17:199–203, 1974.
- [29] A. Lehman. A solution to the shannon game. *SIAM J. Appl. Math*, 12:687–728, 1964.
- [30] S. Lins. Graph encoded maps. *Journal of Combinatorial Theory*, 32:171–181, 1982.
- [31] S. Lins and M. Ferri. Tpolgical aspects of edge fusions in 4-graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 51:1227–243, 1991.

- [32] S. Lins and A. Mandel. Graph encoded 3-manifolds. *Discrete Mathematic*, 57:261–284, 1985.
- [33] W. Mader. A reduction method for edge-connectivity in graph. *Annals of Discrete Math.*, 3:145–164, 1978.
- [34] M.M. Matthews and D.P. Sumner. Hamiltonian results in $k_{1,3}$ -free graphs. *J. Graph. Theory*, 8:139–146, 1984.
- [35] M.M. Matthews and D.P. Sumner. Longest paths and cycles in $k_{1,3}$ -free graphs. *J. Graph. Theory*, 9:269–277, 1985.
- [36] H. Muller. Hamiltonian circuits in chordal bipartite graphs. *Discr. Math.*, 156:291–298, 1996.
- [37] J.R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, USA, 2000.
- [38] C.St. J.A. Nash-Williams. Edge-disjoint spanning trees of finite graphs. *Journal London Math. Soc.*, 36:445–450, 1961.
- [39] C.St. J.A. Nash-Williams. Decomposition of finite graphs and forest. *Journal London Math. Soc.*, 39:12, 1964.
- [40] C.St. J.A. Nash-Williams. Possible directions in graphs theory. 1967.
- [41] C.St. J.A. Nash-Williams. Edge-disjoint hamiltonian circuits in graphs with vertices of large valency. pages 169–176, 1971.
- [42] C.St. J.A. Nash-Williams. Unexplored and semi-explored territories in graph theory. pages 157–183, 1973.
- [43] L.Ľebesky and E. Wisztova. Two edge-disjoint hamiltonian cycles of powers of graph. *Casopi, Pest. Mat.*, 110:294–301,315, 1985.
- [44] J.Ľincak. An estimate of the number of hamiltonian cycle in a multigraph. *Recent Advances in Graph Theory*, pages 124–131, 1974.
- [45] O. Ore. A note on hamiltonian circuits. *Am. Math. Month.*, 67:55, 1960.
- [46] P.J. Owens. On regular graphs and hamilton circuits, including answers to some questions of j. sacks. *J. Combinat. Theory B*, 28:263–277, 1980.
- [47] F. D. Sagols-Troncoso. *Hamiltonian Represetation of Vox-solids*. PhD thesis, Departamento de Ingeniería Electrica, Cinvestav-IPN, México, D.F., September 1997.
- [48] F. D. Sagols-Troncoso. Hamiltonian represetation of vox-solids. *Computación y Sistemas, CIC-IPN*, 2:213–217, 1999.

- [49] J. Sheehan. The multiplicity of hamiltonian circuits in a graph. *Recent Advances in Graph Theory*, pages 447–480, 1975.
- [50] N.J.A Sloane. Hamilton cycles in a graph of degree 4. *J. Combinat. Theory*, 6:311–312, 1969.
- [51] R.E. Tarjan and J. Roskind. A note on finding minimum-cost edge-disjoint spanning trees. *Mathematics of Operational Research*, 10(4):701–708, 1985.
- [52] R. Thomas and X. Yu. 4-connected projective-planar graphs are hamiltonian. *J. Combin. Theory, Ser. B*, 62:114–132, 1994.
- [53] R. Thomas and X. Yu. 5-connected toroidal graphs are hamiltonian. *J. Combin. Theory, Ser. B*, 69:79–96, 1997.
- [54] R. Thomas, X. Yu, and W. Zang. Hamilton paths in toroidal graphs. *J. Combin. Theory, Ser. B*, 94:214–236, 2005.
- [55] A. Thomason. Hamilton cycles and uniquely edge colourable graph. *Ann. Discrete Math.*, 3:259–268, 1978.
- [56] C. Thomassen. A theorem on paths in planar graphs. *J. Graph Theory*, 7:169–176, 1983.
- [57] W.T. Tutte. On hamilton circuits. *J. London Math. Soc.*, 21:98–101, 1946.
- [58] W.T. Tutte. A theorem on planar graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82:99–116, 1956.
- [59] W.T. Tutte. On the problem of decomposing a graph into n -connected factors. *Journal London Math. Soc.*, 36:221–230, 1961.
- [60] H. Whitney. A theorem on graphs. *Ann. of Math.*, 32:378–390, 1931.
- [61] J. Zaks. Pair of hamiltonian circuits in 5-connected planar graphs. *J. Combinat. Theory B*, 21:116–131, 1976.
- [62] C. Zamfirescu and T. Zamfirescu. Hamiltonian properties of grid graphs. *SIAM J. Discr. Math.*, 5(4):564–570, 1992.
- [63] S.M. Zhan. Hamiltonian connectedness of line graphs. *Ars Combinatoria*, 22:89–95, 1986.
- [64] Y.J Zhu, Z.H. Liu, and Z.G. Yu. An improvement of jackson’s result on hamilton cycles in 2-connected regular graphs. *J. North Holland Math. Studies*, 115:237–247, 1985.
- [65] G. M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Springer-Verlag, 1995.

Índice de figuras

2.1. Ejemplo de adición de cadenas y operador frontera	12
2.2. 3-cadenas y sus imágenes tridimensionales	14
2.3. Transformación \mathcal{T}	15
2.4. Ejemplo de la Proposición 2.1	15
2.5. Configuraciones Prohibidas	16
2.6. Configuraciones prohibidas, imágenes digitales	17
2.7. Vox-sólidos Inductivo y No-Inductivo	17
2.8. Ejemplo de un vox-sólido laminar	18
2.9. Vox sólidos no-inductivos	18
2.10. Vox sólidos Irreducibles	19
2.11. El voxel y su gráfica facial	21
2.12. Un vox-sólido y sus gráficas de adyacencia de niveles	22
2.13. El Toro definido por $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$	24
2.14. Representación del Toro	26
2.15. Curva Esencial de Vox Sólidos Toroidales	27
2.16. La Tuerca etiquetada	27
2.17. Enumeración del vox-sólido V_f y su encaje	28
3.1. Puntos de Inicio y Direcciones	31
3.2. Configuraciones y codificación para el voxel ω	31
3.3. Configuraciones para el voxel ω	32
3.4. Casos conflictivos, Lema 3.1	33
3.5. Envoltente de un hoyo	34
3.6. Ejemplos de vox-sólidos y sus envoltentes	35
3.7. Objetos 3-dimensionales con hoyos no válidos	35
3.8. Ejemplo de separa y rodea	36
3.9. Ejemplos de \mathcal{U} para el Lema 3.2	37
3.10. Ejemplificación del Lema 3.3	38
3.11. Ejemplificación casos del Lema 3.3	39
3.12. Ejemplo de ciclo elemental	40
3.13. H_o un hoyo en el vox-sólido	41
3.14. Un ciclo elemental y el hoyo asociado	41
3.15. Vox-sólido laminar y su gráfica de adyacencia de niveles	42

3.16. La gráfica de adyacencia de niveles no es plana	42
3.17. La gráfica K_5 y una sub-división	43
3.18. Los primeros ciclos para S_5	43
3.19. Los primeros cinco ciclos para S_5	44
3.20. Intentando cruzar la arista $(2, 4)$ de S_5	44
3.21. La gráfica de adyacencia de niveles $K_{3,3}$ y su vox-sólido asociado	45
3.22. Sub-vox-sólidos W que están parcial y totalmente sobre U	46
3.23. Ejemplificación del Caso I	46
3.24. Ejemplificación del Lema 3.9	47
3.25. Ejemplificación del Caso II	51
3.26. Ejemplificación del Caso III	52
4.1. Demostración del Lema 4.1	55
4.2. Demostración del Teorema 4.1	56
4.3. Ejemplo del Corolario 4.1	57
4.4. Demostración del Lema 4.2	58
4.5. Ejemplo del Corolario 4.2	58
4.6. Gráficas Faciales base de los vox-sólidos prismáticos	59
4.7. Ejemplo del Teorema 4.2	59
4.8. Vox-sólidos n -cruceta, ejemplares para $n = 1, 2, 3$	60
4.9. Estructura lente para los vox-sólidos n -cruceta	60
4.10. Inserción de lentes para los vox-sólidos n -cruceta	60
4.11. Transformación Inserta-lentes	61
4.12. Demostración del Lema 4.3	62
4.13. Demostración del Lema 4.4	63
4.14. Ilustración del Lema 4.5	63
4.15. Demostración del Lema 4.4	63
4.16. Otros vox-sólidos esféricos	64
5.1. Estructuras para la construcción \mathcal{L}_{16}	66
5.2. Vox Sólido \mathcal{L}_{16}	66
5.3. Encaje en el toro del vox-sólido \mathcal{L}_{16}	66
5.4. Construcción de \mathcal{F}_{20}	67
5.5. Vox-sólido \mathcal{F}_{20}	67
5.6. Encaje en el toro del Vox Sólido \mathcal{F}_{20}	68
5.7. Construcción de \mathcal{Q}_{18}	68
5.8. Vox Sólido \mathcal{Q}_{18}	69
5.9. Construcción de \mathcal{V}_{32}	69
5.10. Vox Sólido \mathcal{V}_{32}	70
5.11. Encaje en el toro del Vox Sólido \mathcal{V}_{32}	70
5.12. Ejemplo de corte en dos voxes	71
5.13. Ejemplo de cortes sobre un vox-sólido toroidal simple	71
5.14. Ejemplo de cortes sobre el encaje en el toro de V_f	72
5.15. Separación válida para \mathcal{L}_{16}	72

5.16. Separación válida para \mathcal{L}_{16} y un anexo	73
5.17. Una separación en el encaje \mathcal{L}_{16} y el encaje resultante de \mathcal{L}_{20}	73
5.18. Dos elementos con 20 voxeles de la familia $\mathcal{L}[i, j]$	75
5.19. Vox Sólido \mathcal{L}_{16} y su encaje en el toro	75
5.20. Anexos y sus gráficas faciales	76
5.21. Resultados de aplicar la separación y agregar los anexos	76
5.22. Ilustración de los cortes para $\mathcal{L}[2, 3]$	77
5.23. Aplicación de los cortes para $\mathcal{L}[2, 3]$	77
5.24. Anexos y sus gráficas faciales	78
5.25. Encaje en el toro para $\mathcal{L}[2, j + 1]$	78
5.26. Ilustración de los cortes para $\mathcal{L}[i, 1]$	79
5.27. Construcción de $\mathcal{L}_{20}B$ desde \mathcal{L}_{16}	80
5.28. Anexos para construir $\mathcal{L}_{20}B$	80
5.29. $\mathcal{L}_{20}B$ encajado en el Toro	80
5.30. Anexos para construir $\mathcal{L}[i + 1, 1]$	81
5.31. Estructuras para la generación de $Q[m]$	82
5.32. Vox-sólidos Q [18], Q [24] y Q [30]	83
5.33. Enumeración para el vox-sólido Q_{18} y su encaje en el toro	83
5.34. Anexos que se agregan al vox-sólido Q_{18}	84
5.35. Vox-sólido obtenido al agregar los anexos: $Q[24]$	84
5.36. Anexos que se agregan al vox-sólido Q_{24}	85
5.37. Vox-sólido obtenido al agregar los anexos: $Q[30]$	86
5.38. Abstracción del Encaje del vox-sólido $Q[6 \cdot (k + 1)]$	87
5.39. Encaje en el toro del vox-sólido $Q[6 \cdot (k + 1)]$	87
5.40. Vox-sólido $\mathcal{F}_{20} = \mathcal{F}[2, 2]$	88
5.41. Estructuras para la generación de $\mathcal{F}[3, 2]$	88
5.42. Encaje en el toro del vox-sólido $\mathcal{F}[3, 2]$	89
5.43. Anexos para la generación de $\mathcal{F}[i + 1, 2]$	89
5.44. Abstracción del encaje en el toro para $\mathcal{F}[i, 2]$	90
5.45. Estructuras para la generación de $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$	91
5.46. Mapas para la generación de $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$	91
5.47. Mapas para la generación de $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$	91
5.48. Un Vox-sólido \mathcal{V}_{36} de tamaño 36	92
5.49. Vox-sólidos \mathcal{V}_{48} , con 48 voxeles	93
5.50. Vox Sólido \mathcal{V}_{32} , sus mapas y encaje en el toro	94
5.51. Anexos OZ para los cortes c_o y q_o	94
5.52. Anexos OZ para los cortes c_1 y q_1	95
5.53. Anexos OZ para los cortes c_2 y q_2	95
5.54. Anexos OZ para los cortes c_3 y q_3	96
5.55. Abstracción del encaje en el toro para la Familia $\mathcal{V}[i_1, j_1; i_2, j_2]$	97
5.56. Vox-sólido no inductivo de género 2 con 27 voxeles	97
5.57. Representación planar del Vox-sólido no inductivo de género 2 y 27 voxeles	98
5.58. Vox-sólido no inductivo de género 2 y 44 voxeles	99

5.59. Vox-sólido no inductivo de género 3 y 62 voxeles	100
6.1. Ejemplo de cadenas	102
6.2. Cadenas zig-zag para el Caso 2a	104
6.3. Posiciones de u, v y sus vecinos para el Caso 2b	104
6.4. Posiciones de u, v y sus vecinos para el Caso 2b	105
6.5. Ejemplo para el Lema 6.1, Caso 2b-B	106
6.6. Posiciones para el Lema 6.2	107
6.7. Configuraciones posibles, Lema 6.2(i).	108
6.8. Configuraciones posibles, Lema 6.2(ii).	108
6.9. Opciones posibles del 2º piso, Lema 6.2(ii).	108
6.10. Configuraciones posibles, Lema 6.2(iii).	109
6.11. Opciones posibles del 2º piso Lema 6.2(iii), A y B.	109
6.12. Opciones posibles del 2º piso Lema 6.2(iii), C y D.	110
6.13. Ejemplificación del Lema 6.3(i)	111
6.14. Un caso no posibles del Lema 6.3(ii)	111
6.15. Subcaso A del Lema 6.3(iii)	112
6.16. Subcaso B del Lema 6.3(iii)	112
6.17. Posiciones para el Lema 6.4	113
6.18. Caso base $d=1$, del Lema 6.4	113
6.19. Caso base $d=2$, del Lema 6.4	114
6.20. Paso inductivo del Lema 6.4	115
6.21. Casos para $5 \leq a \leq 6$ del Teorema 6.2	115
6.22. Ilustración para $5 \leq a \leq 6$ del Teorema 6.2	116
6.23. Casos para el Lema 6.6	117
6.24. Casos (I), (II) y (III)(a,b) del Lema 6.7	118
6.25. Caso (IIIc) del Lema 6.7	119
6.26. Casos (I), (II) del Lema 6.8	120
6.27. Caso (c) del Lema 6.8	120
6.28. Construcción primeros tres pisos	121
6.29. Ilustración del Lema 6.9, cuarto piso	121
6.30. Caso (III) del Lema 6.9	122
6.31. Vox Sólidos No-Inductivos del Lema 6.9	122
6.32. Ilustración del Lema 6.11	123
7.1. La tuerca y algunos cortes	126
7.2. La tuerca y algunas extensiones	126
7.3. Subgráfica asociada al anexo insertado en q para $\mathcal{L}[2, j]$	128
7.4. Subgráfica inducida AIq y sus trayectoria Hamiltonianas	129
7.5. Las subgráficas inducidas AIq, AEq y su isomorfismo	129
7.6. Subgráfica inducida ATq y sus trayectoria Hamiltonianas	130
7.7. Las subgráficas inducidas ATq y ADq	130
7.8. Subgráfica asociada al corte c para $\mathcal{L}[2, j]$ y su isomorfismo	131
7.9. Subgráfica asociada al anexo insertado en q para $\mathcal{L}[i, 1]$	132

7.10. Subgráfica asociada al anexo insertado en q para $\mathcal{Q}[m]$	138
7.11. Subgráfica inducida AT_q para $\mathcal{Q}[m]$ y dos trayectoria Hamiltonianas	138
7.12. Las subgráficas inducidas AT_q y AD_q para $\mathcal{Q}[m]$	139
7.13. Subgráfica inducida AE_q para $\mathcal{Q}[m]$	139
7.14. Subgráficas AE_q y AF_q para $\mathcal{Q}[m]$	140
7.15. Subgráfica G_c asociada al corte c , para $\mathcal{Q}[m]$	141
7.16. Subgráficas asociada a los cortes, para $\mathcal{Q}[6 \cdot \kappa]$, $\kappa \geq 5$	142
7.17. Subgráficas inducidas AT_{c_m} y AD_{c_m} para $\mathcal{Q}[6 \cdot \kappa]$, $\kappa \geq 5$	143
7.18. Subgráficas inducidas AE_{c_m} y AF_{c_m} para $\mathcal{Q}[6 \cdot \kappa]$, $\kappa \geq 5$	144
7.19. Vox Sólido \mathcal{L}_{16}	146
7.20. Vox Sólido \mathcal{L}_{16} inmerso en el Toro	147
7.21. Construcción de \mathcal{L}_{20} a partir de \mathcal{L}_{16}	147
7.22. Cortes en el encaje de \mathcal{L}_{16}	148
7.23. Subgráficas para las estructuras OZ	148
7.24. \mathcal{L}_{20} encajado en el Toro y su descomposición Hamiltoniana	148
7.25. Abstracción de \mathcal{H} para el vox-sólido irreducible \mathcal{L}_{16}	149
7.26. Abstracción de \mathcal{C} para \mathcal{L}_{16}	150
7.27. Subgráficas para las estructuras OZ	150
7.28. Abstracción de \mathcal{H}' y \mathcal{C}' para \mathcal{L}_{20}	150
7.29. Cortes sobre el vox-sólido irreducible \mathcal{L}_{20} y \mathcal{L}_{24}	151
7.30. Aplicando separaciones de \mathcal{H} para $\mathcal{L}[2, k]$	152
7.31. Resultado de las separaciones de \mathcal{H} para $\mathcal{L}[2, k]$	153
7.32. Construcción de $\mathcal{L}_{20}B$ desde \mathcal{L}_{16}	154
7.33. Cortes en el vox-sólido irreducible \mathcal{L}_{16} para obtener $\mathcal{L}_{20}B$	154
7.34. Subgráficas para las estructuras OZ	154
7.35. Encaje para $\mathcal{L}_{20}B$ su descomposición Hamiltoniana	155
7.36. Vox-sólido $\mathcal{F}_{20} = \mathcal{F}[20]$	156
7.37. Encaje del vox-sólido $\mathcal{F}_{20} = \mathcal{F}[20]$	156
7.38. Abstracción de \mathcal{H} y \mathcal{C} para la familia $\mathcal{F}[2, j]$	158
7.39. Anexos y sus gráficas asociadas, para \mathcal{S}_2	158
7.40. Encaje resultante, para \mathcal{S}_2	159
7.41. Enumeración para el vox-sólido \mathcal{Q}_{18} y su encaje	159
7.42. Abstracción de los ciclos Hamiltonianos	160
7.43. Anexos que se agregan al vox-sólido \mathcal{Q}_{18}	161
7.44. Abstracción para $\mathcal{Q}[24]$	161
7.45. Abstracción de la descomposición Hamiltoniana del encaje de $\mathcal{Q}[24]$	162
7.46. Anexos que se agregan a $\mathcal{Q}[24]$	163
7.47. Resultado obtenido para $\mathcal{Q}[30]$	163
7.48. Encaje del Vox Sólido \mathcal{V}_{32}	164
7.49. Cortes sobre el Encaje de \mathcal{V}_{32}	165
7.50. Abstracción de la descomposición Hamiltoniana de \mathcal{V}_{32} , para \mathcal{S}_0	165
7.51. Anexos OZ para los cortes c_o y q_o	166
7.52. Abstracción de la descomposición Hamiltoniana de \mathcal{V}_{32} , para \mathcal{S}_1	166

7.53. Anexos 0Z para los cortes r_o y t_o	167
7.54. Abstracción de la descomposición Hamiltoniana de \mathcal{V}_{32} , para \mathcal{S}_2	168
7.55. Anexos 0Z para los cortes γ_o y β_o	168
7.56. Abstracción de la descomposición Hamiltoniana de \mathcal{V}_{32} , para \mathcal{S}_3	169
7.57. Anexos 0Z para los cortes a_o y b_o	169
8.1. Incidencias de los árboles T_R y T_B	174
8.2. Recorrido en \mathcal{G}^T	174
8.3. Ejemplo de un Mapa y su gema	175
8.4. Un mapa, su engrosamiento y gema	176
8.5. La Tuerca, su engrosamiento y gema	177
8.6. Pseudo-descomposición Hamiltoniana, Teorema 8.6	179
8.7. Pseudo-descomposición Hamiltoniana, Teorema 8.7	180
A.1. Vecinos de un punto p en 2 dimensiones	182
A.2. Vecinos de un punto p en 3 dimensiones	183
A.3. (m, n) –imagen digital	184
A.4. Un conjunto 8–conexo con tres 4–componentes	184
A.5. Componentes blancas y negras	185
A.6. Ejemplo de r –curvas cerradas	185
A.7. Ejemplo de puntos borde	186
B.1. Definición de la Estructura 0-Z	189
B.2. Definición de la Estructura 1-Z	190
B.3. Definición de la Estructura 2-Z	190
B.4. Definición de la Estructura k -Z	191
B.5. Definición de la Estructura 0-V	191
B.6. Definición de la Estructura 1-V	191
B.7. Definición de la Estructura 2-V	192
B.8. Definición de la Estructura k -V	192

Índice alfabético

- k -cadena conexas, 12
- n -adyacencia, 182
- n -variedad, 24
- n -vecinos, 182
- r -adyacencia
 - entre conjuntos, 184
 - entre puntos, 184
- r -arco, 185
 - simple, 185
- r -componente, 184
- r -conexidad, 184
- r -curva, 185
- r -trayectoria, 185
- r -trayectoria cerrada, 185
- 3-imagen digital, 13

- anexo, 72
- arista, 11

- background, 185
- bloque, 18
- borde, 182

- cadena de voxeles, 101
 - cadena zig-zag, 102
 - ciclo, 102
 - ciclo simple, 102
 - línea de voxeles, 102
 - voxel extremo, 101
 - voxel intermedio, 101
- cadena zig-zag, 102
- cara, 11, 25
 - n -ágono, 26
 - n -polígono, 26
 - incidente, 26
- característica de Euler, 26

- cavidad, 14, 186
- ciclo de voxeles, 102
- ciclo elemental, 39
- ciclo simple de voxeles, 102
- componente blanca, 184
- componente negra, 184
- conexidad
 - por aristas, 171
 - por vértices, 171
- configuración, 102
- configuraciones prohibidas, 16
- Conjunto
 - r -adyacencia, 184
 - r -componente, 184
 - r -conexo, 184
 - rodea, 186
- corte, 70
- curva esencial, 26

- desensamblar, 30
- distancia
 - entre vox-sólidos, 19
 - entre voxeles, 19

- encaje, 25
 - 2-celular, 25
 - cerrada, 25
 - celular, 25
 - cerrada, 25
 - gráfica dual, 26
- engrosamiento, 173
 - canónico, 175
- envolvente, 34
- envolvente de un conjunto, 34
- espacio topológico, 23
 - n -variedad, 24

- bola unitaria, 24
- bola unitaria abierta, 24
- círculo unitario, 24
- cerradura, 23
- conjunto cerrado, 23
- conjunto subyacente, 23
- cubierta abierta, 23
- curva, 23
- curva cerrada, 23
- curva simple, 23
- esfera unitaria, 24
- espacio compacto, 24
- espacio conexo, 24
- espacio de Hausdorff, 24
- espacios homeomorfos, 23
- homeomorfismo, 23
- mapeo abierto, 23
- mapeo continuo, 23
- plano proyectivo, 25
- punto, 23
- subcubierta, 23
- superficie, 24
- toro, 25
- vecindad, 23
- estructura k -V, 191
- estructura k -Z, 189
- estructura kl , 102
- fórmula de Euler-Poincaré, 26
- fondo, 13, 185
- foreground, 185
- frontera, 186
- género, 25
 - de Euler, 26
 - no orientable, 26
 - orientable, 26
- gema, 175
 - bi-gono, 175
- gráfica
 - plana, 25
- gráfica de adyacencia de niveles, 21
- gráfica de adyacencia de voxeles, 20
- gráfica dual, 26
- grupo cadena, 12
- hoyo, 14, 186
 - envolvente, 34
- imagen digital, 13, 183
 - (m, n) Imagen digital, 183
 - background, 185
 - fondo, 185
 - foreground, 185
- inmersión, 25
 - 2-celular, 25
 - cerrada, 25
 - cara, 25
 - celular, 25
 - cerrada, 25
 - gráfica dual, 26
 - región, 25
 - frontera de la, 26
- línea de voxeles, 102
- mapa, 175
- operador frontera, 12
- pixel, 3, 181
- plano proyectivo, 25
- punto, 13, 182
 - 18-adyacente, 13, 182
 - 26-adyacente, 13, 182
 - 4-adyacente, 182
 - 6-adyacente, 13, 182
 - 8-adyacente, 182
 - n -vecino, 182
 - r -adyacencia, 184
 - r -adyacente, 13
 - r -aislado, 184
 - r -vecino, 13
 - blanco, 183
 - borde, 14, 185
 - interior, 14, 185
 - negro, 183
 - vecindad, 182
- punto blanco, 13

- punto negro, 13
- región, 25
 frontera de la, 26
 trayectoria facial de la, 26
- retículo, 11
- separación, 72
 conveniente, 125
 separación válida, 72
 conveniente, 127
- subdivisión de vértice, 176
- suma de k -cadena, 12
- superficie, 24
 género, 25
 no-orientable, 25
 orientable, 25
- topología, 23
- toro, 25
- trayectoria, 185
- trayectoria cerrada, 185
- vértice, 11
- vecindad, 182
- vox-sólido, 3, 16
 k -laminado, 18
 arbóreo, 29
 arista-visible, 18
 bloque, 18
 dimensiones, 17
 altura h , 17
 amplitud b , 17
 profundidad d , 17
 encaje, 26
 esférico, 19
 gráfica facial, 20
 inductivo, 3, 17
 irreducible, 5, 19
 minimal, 3, 19
 no inductivo, 3
 no-inductivo, 17
 operación rodea, 36
 operación separa, 36
- piso, 18
- prismático, 58
- sub-vox-sólido, 17
 de un piso, 21
 estar sobre, 45
 estar sobre parcialmente, 45
 estar sobre totalmente, 45
- tamaño, 17
- tapa de hoyo, 48
- toroidal, 19
 encaje, 26
 simple, 19
- vértice-visible, 18
- voxel, 3, 11, 181
 desensamblar, 30
 ensamblado, 3
 ensamblar, 3
 grado, 20
 voxel bueno, 102
 voxel extremo, 101
 voxel intermedio, 101