UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

Propuesta para el aprendizaje significativo de las funciónes trigonométrica para el Bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades

T E S I S

Que para obtener el grado Académico de:

MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR (MATEMÁTICAS)

Presenta:

Gabriel De Anda López

Director de Tesis: M. en C. Alejandro Raúl Reyes Esparza

México, D.F. **Febrero de 2009**

Dedico este trabajo con mucho cariño a:

A mis queridas hijas: Viridiana, Ximena y María Fernanda, quienes por mucho han sido la fuente inagotable de mi inspiración, alegría y esfuerzo.

A mi esposa Juana, quien sin su comprensión, cariño y apoyo no hubiera sido posible este proyecto.

A mis padres Juana y Rafael.

Agradecimiento:

En particular, dedico este trabajo con mucho cariño a la memoria de la maestra Matilde Moreno-Bello Cañibe, quien con sus valiosas sugerencias y comentarios lo hicieron posible.

ÍNDICE **Pág.**

Introducción.

La experiencia docente muestra que en el aprendizaje de las matemáticas del ciclo de enseñanza media superior CCH, se presentan diversos obstáculos que hacen que esta materia resulte árida, aburrida y, con frecuencia, una cuestión inútil para la mayoría de los estudiantes, lo que ha traído como consecuencia que sea una de las materias de mayor índice de reprobación o de poco o *escaso aprovechamiento*. Esto último me sorprende cada vez más, puesto que actualmente las matemáticas aparecen por doquier: desde las simples cuentas aritméticas usuales, hasta en los aparatos o sistemas de audio de los que todos nosotros hacemos uso en mayor o menor medida, por no hablar del agio bancario, los negocios de las casas de bolsa (en donde se decide prácticamente nuestra situación económica), la manufactura actual (con su tendencia creciente a la robotización), las aplicaciones cada más evidentes, a la vez que usuales, en la medicina, etc. Es decir, estando en un ambiente o contexto en donde las matemáticas juegan un papel de primera importancia, la pregunta es: ¿por qué, entonces, es que nuestros estudiantes ni siquiera logran "ver" lo que tienen ante los ojos? Desde mi punto de vista considero que se debe a las siguientes cuestiones

- Los actuales programas de estudio de matemáticas son demasiado extensos y están descontextualizados. Esto es debido a que se insiste en separar el conocimiento matemático en "teoría" y "práctica" ("aplicaciones"), dejando a la primera de estas partes el mayor peso "académico", cuestión que consume mucho tiempo. Vale la pena recordar que esta separación es una herencia de la metafísica griega y, en particular, de Platón, quien hizo una separación entre "el mundo de las ideas" y una mala copia de ese mundo, a saber, "el mundo real". No obstante, en nuestra época esa interpretación de la realidad ya no puede seguir sosteniéndose, pues la *esencia técnica de la época moderna*, ha puesto en evidencia que tal separación no sólo es artificial sino *inútil*, y prueba de ello es que en la actualidad ya no se puede seguir hablando de las matemáticas como la ciencia del *número*, la *forma* y de *sus* "aplicaciones", sino que ahora esas fronteras han desaparecido y las matemáticas ahora no sólo son el lenguaje de la física y de la ingeniería,[1] sino que han devenido herramientas esenciales en la técnica, la economía, etc., del círculo mundial (global) de producción-consumo, al punto que la distinción "teoría-práctica", de hecho, ya dejó de existir, en tanto que las matemáticas nos salen al encuentro por todas partes, lo sepamos o no.

- Esta separación del conocimiento matemático ha causado mucha confusión en nosotros, los profesores de matemáticas del CCH, pues, por un lado, no logramos atender una "formación teórico-deductiva" en nuestros estudiantes y, por otro, dejamos de poner atención a la solución de "problemas de aplicación" específicos, juzgándolos inclusive como algo fácil, trivial o aun carente de valor para el aprendizaje de las matemáticas. De esta manera, dejamos a nuestros estudiantes en pleno desconcierto y en aquella ambigüedad entre atender lo teórico-deductivo, o atender la resolución de problemas, dando como resultado que no enseñamos ni una ni otra cuestión lo que los lleva, por ejemplo, a intentar memorizar la resolución de los problemas hechos por el profesor en la clase, a falta de una aclaración de las estrategias de la resolución empleadas por el profesor.

- Más aún, si entendemos bien el significado de los sistemas deductivos, digamos el de la geometría euclidiana, entonces caeremos en la cuenta de que los conceptos involucrados en ellos, sólo quedan definidos por todas las relaciones obtenidas dentro del mismo, por lo que a la pregunta: ¿qué es un triángulo?, ya no podemos responder: "es un polígono de tres lados ...", sino tendríamos que especificarlo a través de los axiomas, definiciones y teoremas en los que tal término aparezca. De esta manera, el pretender enseñar las matemáticas dando preferencia a este aspecto teórico-deductivo nos llevaría a complicaciones extraordinarias y, sin embargo, es al que se le apuesta en el plan y los programas de estudio de matemáticas del CCH. En este sentido cabe, pues, la pregunta: ¿porqué no volcar la enseñanza de las matemáticas en este nivel educativo hacia los usos cotidianos de las cosas en los que las matemáticas aparecen de una otra forma,[2] dejando que el sentido de sus conceptos quede especificado por la propia experiencia del aprendiz y no de los "mundos", "sistemas" o "estructuras" en los que son organizados por los que hacen matemáticas.

[1] Cf. Steen, L. A. On the Shoulders of Giants. National Academic Press. Washington, D. C. 1990.
[2] De acuerdo con [Vázquez S. A., D. 2001]: "Las matemáticas modernas han devenido instrucciones de uso de las cosas".

A esta problemática, relacionada principalmente con la *enseñanza* de las matemáticas en el CCH, hay que agregar la problemática específica del *aprendizaje* de esta materia, cosa nada fácil de establecer pero en la que siempre aparecen como constantes las cuestiones siguientes.

- Los estudiantes comparten un extendido prejuicio sobre las matemáticas y, en general, sobre el conocimiento científico actual, en el sentido de que este conocimiento se articula como una colección de axiomas, definiciones y procedimientos de resolución de ecuaciones que deben memorizar, más que *entender*. En otras palabras, los estudiantes manifiestan (y los profesores fomentamos) que las matemáticas son un conjunto de saberes ya acabado, en donde no hay nada que descubrir.
- Para los estudiantes, la materia de matemáticas es simple y llanamente un requisito por cubrir, una materia por "pasar", pues, después de todo, es algo que carece de algún sentido práctico, que está fuera de su realidad.
- Más aún, se asume y fomenta, por profesores y estudiantes, el prejuicio de que las matemáticas son una disciplina que solamente ciertos individuos con capacidades intelectuales especiales (los "inteligentes") las puedan entender.
- En general, los estudiantes que terminan algún ciclo escolar, advierten muy a menudo las inmensas lagunas que les han dejado *la enseñanza de las matemáticas*.

Por ello, para subsanar esta problemática me ha llevado a considerar un marco teórico constructivista basado en el *aprendizaje significativo* de David Ausbel; cuyos principios sucintamente se pueden plasmar en la siguiente cuestión:

> *La enseñanza de las matemáticas debe partir de lo que el estudiante ya sabe, así como de sus contexto, y debe tener una estructura flexible en la que estén considerados los incesantes y rápidos cambios económicos y sociales que la globalización impone en cada momento, cuestión que exige una verdadera interrelación entre las matemáticas y las demás disciplinas, además de la integración, como parte de la cultura matemática y científica, de las actuales tecnologías de la información*.

Al dar un paso más en estas consideraciones, me decidí a diseñar y realizar una experiencia docente bajo la perspectiva constructivista del aprendizaje, -como ya mencioné-, en donde las actuales tecnologías de la información constituyen una de las principales herramientas. En particular, habiendo elegido la unidad temática III, del curso Matemáticas IV, cuyos contenidos están basados en la *noción de función trigonométrica*, elaboré la *Unidad didáctica "funciones trigonométricas"* correspondiente a aquella, en la que los programas de computadora, GeoGebra y Audacity, fueron de gran utilidad para la construcción de esos contenidos; más aún, la realización de esta unidad didáctica me ha permitido analizar, aclarar y profundizar en las consideraciones expuestas líneas arriba, como expongo en el último capítulo de este trabajo. En términos generales, la organización del presente trabajo es la siguiente.

En el primer capítulo expongo el marco práctico y metodológico en donde, entre otras cuestiones, argumento el haber elegido a lo "periódico" o "cíclico" como eje estructurador de la unidad didáctica "funciones trigonométricas". Esta argumentación está arraigada en los usos que se tienen actualmente de las funciones trigonométricas, verbigracia, para la modelación y simulación del sonido, del movimiento armónico simple, en la medición de datos corporales importantes para la medicina como los electrocardiogramas, así como su empleo en otros fenómenos periódicos como el de la corriente alterna. Además, en este capítulo expongo los elementos generales que, bajo una interpretación constructivista del aprendizaje, permiten el diseño y elaboración de una *unidad didáctica*, así como de sus elementos componentes como las *secuencias didácticas* y *las hojas de trabajo*.

En el segundo capítulo, se exponen los resultados matemáticos concernientes a las funciones trigonométricas y, en particular, aquellos que le dan sustento a los contenidos conceptuales y procedimentales de la unidad didáctica "funciones trigonométricas". En particular, interpretamos a una función como "un proceso para ir de un conjunto a otro",[3] pues estamos convencidos que en ella caen las diversas interpretaciones aceptadas hasta ahora para la noción de función.

En el tercer capítulo se expone detalladamente la unidad didáctica "funciones trigonométricas" al seno de su realización con un grupo de estudiantes del curso de Matemáticas IV del CCH Sur, en tanto que en el capítulo 4 exponemos los resultados obtenidos, además de un breve análisis de esta experiencia educativa.

[3] [Lawvere, F. W. y Schanuel, S. H. 2002]

Planteamiento del problema y tesis.

A. Planteamiento del problema

Uno de los principales motivos que me han animado a realizar la maestría en docencia de la enseñanza media, ha sido la de proporcionar algunas soluciones o alternativas para subsanar las graves y diversas deficiencias que vengo observando en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el bachillerato CCH-UNAM desde hace algunos años a través de mi práctica docente en esa institución. Algunas de estas deficiencias, o al menos las que considero las más importantes, ya las he establecido en la introducción de este trabajo, pero que creo conveniente recapitular de la siguiente forma.

- Los conocimientos –actitudinales, conceptuales y procedimentales– generalmente se tratan *fuera de contextos* apropiados, cuestión que puede especificarse en el caso del estudio de las funciones trigonométricas al ni siquiera señalar en dónde intervienen de manera decisiva dentro del contexto de los estudiantes como puede ser: el sonido y música, problemas de meteorología, corriente alterna, modelación de la respiración, etc.

- La ausencia de metodologías específicas, aplicadas para el desarrollo de los temas de matemáticas, en particular, para el aprendizaje de las funciones trigonométricas.

- El deficiente uso de los medios informáticos actuales como herramientas interactivas para la construcción del conocimiento matemático. En nuestro caso, será notable el empleo de la computadora para diferentes cuestiones dadas en el aprendizaje de las funciones trigonométricas (en particular, las funciones sinusoidales): con el programa GeoGebra para manipular las representaciones algebraica y geométrica de las funciones trigonométricas; con el , para la creación y edición de sonido digital.

- La falta de materiales (libros de texto, apuntes, antologías, etcétera) acordes con las necesidades e intereses del estudiante, que le permitan avanzar de manera significativa y, sobre todo, que sean de su interés y le permitan enriquecer su interpretación matemática del mundo.

Al conocer las metodologías derivadas de la perspectiva constructivista de aprendizaje, me pareció que eran las más adecuadas para intentar resolver, o al menos paliar, esta problemática desde su aplicación en el aula. Por otro lado, asumiendo que el uso de las tecnologías de la información es un hecho insoslayable, me pareció que era el momento para ponerlas en juego en el acto educativo, pues creo que facilitan la construcción, individual y colectiva, de los contenidos conceptuales de los cursos de matemáticas, además que me parece permiten un cambio significativo en la actitud y valoración de la ciencia matemática en general: permiten ver literalmente lo que los resultados matemáticos expresan, además de la manipulación de las cosas a los que esos resultados se refieren.

Todo ello me llevó a plantear la siguiente tesis, misma que se pretende sustentar con el trabajo aquí presentado, en particular, con el diseño y la realización de la *Unidad didáctica: funciones trigonométricas*.

B. Tesis

A través de una metodología constructivista y haciendo uso de la actual tecnología de la información[4] *como recursos, se propicia que los estudiantes logren aprendizajes significativos de los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales establecidos en el Bachillerato del Colegio de Ciencia y Humanidades, en particular, la Unidad 3 de Matemáticas IV*[5] *del sistema educativo mencionado.*

[4] Tomando en cuenta que en la actualidad gran parte de los estudiantes posee *aptitude*s informáticas, como *copiar, cortar y pegar* para lograr un apoyo en el *aprendizaje*. Sin embargo, también es necesario que éstas vayan acompañadas de un proceso de razonamiento, así como *habilidades* indispensables para abasto de información electrónica: *procesamiento de textos, navegación por internet, acceso a software matemático,* etc.

[5] Cf. CCH-UNAM. Área de Matemáticas. Programa de Estudios de Matemáticas I-IV. 2006.

1 MARCO METODOLÓGICO Y PRÁCTICO

En este capítulo exponemos en términos generales el marco práctico y metodológico de la experiencia educativa realizada con el propósito de sustentar la tesis planteada en este trabajo. Comenzamos describiendo las generalidades prácticas que las funciones trigonométricas tienen actualmente en el contexto de los estudiantes del CCH-UNAM, Plantel Sur. A continuación, proporcionamos los lineamientos metodológicos para elaborar unidades didácticas bajo la interpretación del aprendizaje desde un punto de vista constructivista, haciendo énfasis en el marco institucional que el CCH plantea.

1.1 Introducción

En el presente trabajo se expone una propuesta didáctica para el aprendizaje-enseñanza de la *Unidad 3: Funciones trigonométricas*, del curso de *Matemáticas IV del bachillerato del CCH*. Esta propuesta se basa en la noción de "lo periódico" y está orientada por los principios básicos del *constructivismo*, en donde los aprendices son los principales actores del acto educativo, tanto de manera individual como colectiva. En efecto, bajo ésta perspectiva, el aprendizaje-enseñanza básico de las funciones trigonométricas debe partir, por un lado, de lo "que el aprendiz ya sabe"[1] y, por otro, de la *red* de comunicación social, cultural, matemática y técnica, que se da en un grupo académico, en este caso, en un grupo escolar del sistema educativo CCH. Ahora bien, he considerado la noción de "lo periódico" como el *eje en torno al cual pueden estructurarse* y *construirse* los *conocimientos actitudinales*, *conceptuales* y *procedimentales* de este sistema educativo de enseñanza media superior, dado que las modernas funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente, vienen *exigidas* básicamente por las cuestiones siguientes.

- El "espacio" en el que se desenvuelven las matemáticas básicas es el *plano euclidiano*, constituido básicamente por *triángulos*: toda *iso-metría* del plano queda completamente determinada por la transformación sufrida por cualquier triángulo. En este sentido, las *funciones trigonométricas* resultan imprescindibles pues relacionan las medidas de los lados y los ángulos de cualquier triángulo, cuestión que ocurre muy frecuentemente en las matemáticas básicas dada la naturaleza de su sustrato.
- Por otra parte, la *linealización de la medida angular*, o sea, los ángulos como longitudes de arco trazados sobre la circunferencia unitaria (radián) y no como "aberturas", ha sido la piedra de toque que ha permitido llevar la medida angular a la *escala universal de los números reales* y, con ello, a su amplio uso técnico, matemático y científico, a través de las funciones *seno*, *coseno* y *tangente*.

- En nuestra época, "lo periódico" se ha interpretado, modelado, y aún definido, a través de las funciones trigonométricas, con lo que se han alcanzado las siguientes cuestiones.

    - Han permitido el tratamiento analítico de los fenómenos periódicos, dentro de los que cabe destacar al *movimiento armónico*, *simple* y *amortiguado*, con el que se da cuenta de diversos fenómenos cíclicos (órbitas planetarias y satelitales), fenómenos ondulatorios

[1] Cf. [Novack; 1988]

(movimiento de mareas, señales analógicas y digitales), fenómenos electromagnéticos (radiación electromagnética o luz), así como del tratamiento de fenómenos acústicos.

- Las *series de Fourier* permiten modelar una gran variedad de fenómenos periódicos, verbigracia, las señales en telecomunicaciones, el sonido digital, la imagen digital, etc. En este sentido, son la vía por excelencia para pasar de lo discreto a lo continuo (transformación de Fourier), y viceversa.
- Más aun, es una de las nociones fundamentales en otras disciplinas científicas y técnicas, verbigracia, la teoría electromagnética, la mecánica cuántica, la química, etc.
- Finalmente, se puede decir, que han llegado a la vida cotidiana de cualquier persona en múltiples y variadas formas o, mejor dicho, *necesidades*, como lo muestra el empleo de relojes de todo tipo, diversas componentes de los automóviles (amortiguadores), imagen y sonido (analógicos y digitales), sin dejar de mencionar que se encuentran en la base misma de las amplias posibilidades de tele-comunicación actual, etc.

- En general, en el nivel de enseñanza media se aprende trigonometría en el segundo semestre, con lo que se da cuenta de las relaciones métricas entre los lados y ángulos de un triángulo. De esta manera, queda para el cuarto semestre (que es el que aquí nos ocupa) el estudio de las funciones trigonométricas en donde cabe destacar su naturaleza "periódica" o "ciclico".

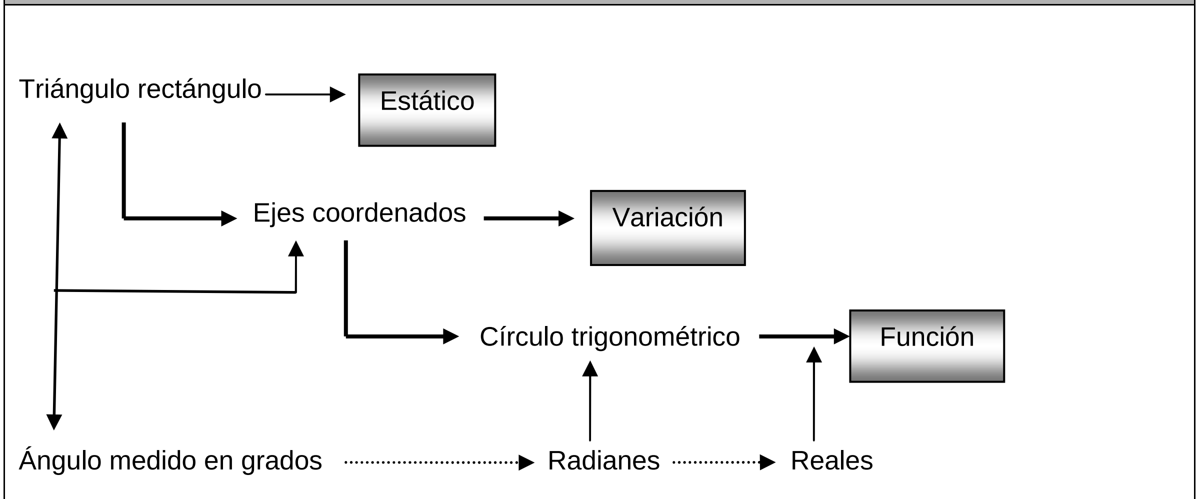
- *Lo periódico* se puede llevar a principio heurístico y a paradigma del *pensamiento circular* o *cíclico en un sentido estrictamente moderno*, es decir, *técnico*, tal y como actualmente aparece por doquier. Ello es posible gracias a que los fenómenos periódicos conocidos (modernos) *aparecen* bajo los conceptos de las funciones trigonométricas, en las que se destacan sus partes componentes esenciales: *amplitud*, *período*, *frecuencia* y *fase*.

Los que nos dedicamos a la enseñanza de las matemáticas sabemos que la noción de *función*, en este caso, *función trigonométrica*, es abstracta pero, ¿las nociones comunes de términos como "volumen (del radio)", "ecualizador", "notas e instrumentos musicales (analógicos y digitales)", etc., serán en realidad algo ajeno a los jóvenes actualmente? Parece que la respuesta a esta pregunta es un rotundo *NO*. Más aun, cada uno de estos términos son, de hecho, procesos funcionales, o simplemente funciones, pues, por ejemplo, cuando una persona le "sube el volumen" a un sistema de audio (digital o analógico), lo que está haciendo es asignar, a cada valor posible de "volumen", sonidos (ruidos) más fuertes o más débiles; es decir, la amplitud de la señal de salida se aumenta o disminuye. Algo parecido ocurre cuando se hace uso del ecualizador; en este caso se modifican las frecuencias de la señal de salida, en forma tal que no se pierde la estructura o tono fundamental, sino que se hace más alto o más bajo. En este sentido, se puede decir, sin exagerar, que el término "periódico" es de uso frecuente y cotidiano, quizá por el gran impacto real y visible que tiene en nuestra vida corriente, aunque cabe destacar que su *significado moderno*, propiamente dicho, queda en la más completa oscuridad y confusión.[2] Más todavía, sabemos que la introducción rigurosa, clara y general de cualquier noción o concepto no es fácil y, aún más, si esa noción o concepto es abstracto y se encuentra relacionado con otros conceptos también abstractos. Su enseñanza se complica, a menos que el mismo aparezca bajo diferentes y múltiples connotaciones encontradas en el lenguaje cotidiano, de tal suerte que *exija una*

[2] Cf. Test de pre-concepciones: pagina

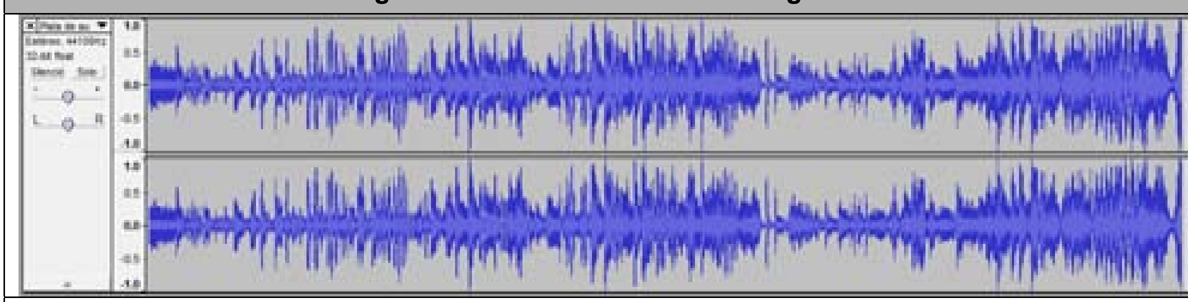
explicación. Sin embargo, tradicionalmente hemos venido *instruyendo* el concepto de función trigonométrica, así como de sus partes constitutivas, tal y como lo desarrollan los libros de texto[3] en donde se presenta a través de un esquema parecido al mostrado en el siguiente mapa conceptual.

Figura 1. Mapa conceptual: Esquema de la evolución de la función trigonométrica.



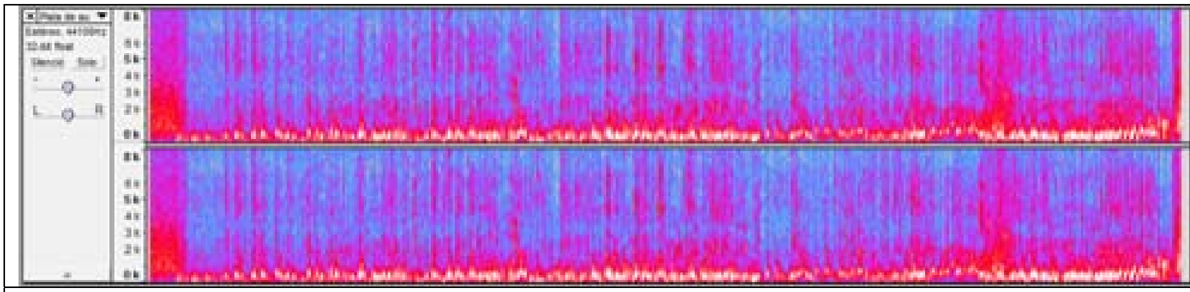
Como es de todos sabido, este esquema, o cualquiera de sus "novedosas" variantes, ha resultado por decenios ineficaz y, a pesar de ello, sigue promoviéndose para la condena de miles de estudiantes de bachillerato (y secundaria). En particular, ninguna de las propuestas hasta ahora analizadas[4] integran a los *medios informáticos* potencialmente significativos para desarrollar estos temas de matemáticas; verbigracia los programas de creación y edición de audio, en donde de entrada aparece una interfaz gráfica mostrando el *muestreo* (o espectrograma) del sonido creado o grabado y, a partir de ahí, la posibilidad de editarlo de muchas maneras.

Figura 2. Tratamiento de sonido digital. [5]



Muestreo de la canción *Bach Improvisation* de Bobby McFerrin

[3] Cf. [Baldor, A. J. 1992] y [Guzmán; 2006]
[4] Ibíd.
[5] En particular, en este trabajo hemos empleado el programa (libre) de creación y edición de sonido digital Audacity.



Espectograma de la canción *Bach Improvisation* de Bobby McFerrin

Así, podemos vincular el aprendizaje de "lo periódico" con algo que resulta mucho muy atractivo para cualquier adolescente: su música y sus sonidos; interpretándolos en su sentido matemático, mostrándole en su vida cotidiana cómo se ha trastocado en mera cuestión técnica. Esto, suponemos, conllevará un *cambio actitudinal* importante en su relación con la técnica y las matemáticas.

1.2 Elementos generales de una unidad didáctica bajo una interpretación constructivista, en particular, el aprendizaje significativo.

1.2.1 Unidad didáctica y sus fases.

La *unidad didáctica* de una *unidad temática* (de algún plan y programa de estudios particular), debe contemplar aspectos como la *organización de las sesiones de aprendizaje* ("clases"), el *papel que desempeñarán el profesor y el alumno* en esas sesiones y fuera de ellas (por ejemplo en asesorías, etc.), los *medios o recursos que la institución ofrece*, los *medios o recursos que el profesor o los alumnos pueden poner en juego*, así como los *contenidos actitudinales*, *conceptuales* y *procedimentales* que se puedan distinguir en la misión, objetivos generales, objetivos particulares, etc., que la institución establezca, siendo nuestro caso las del Colegio de Ciencias y Humanidades.[6]. Entre estos contenidos se pueden mencionar los siguientes.

Tabla 1. Aspectos del conocimiento

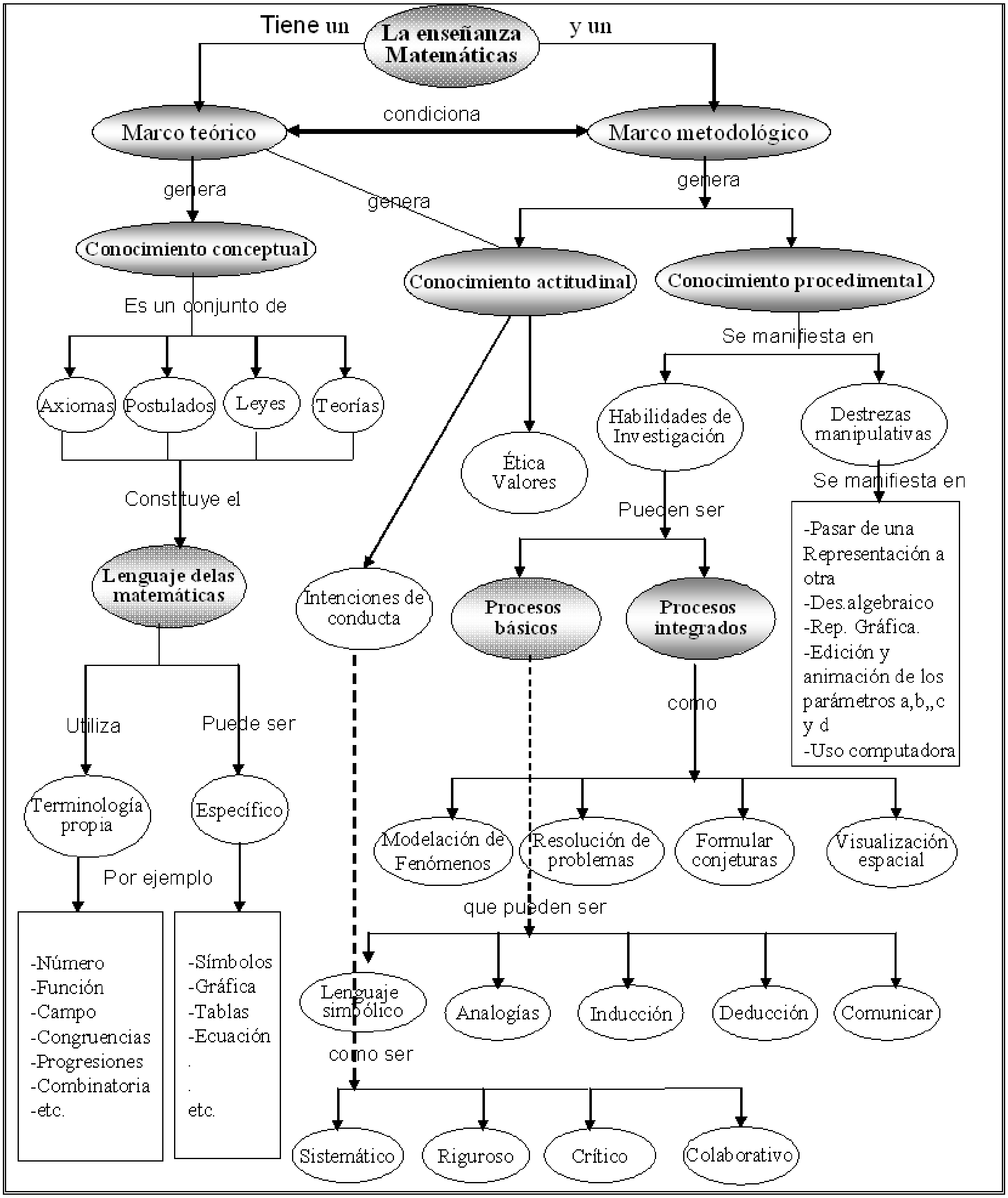
Contenidos actitudinales	Contenidos conceptuales	Contenidos procedimentales
A1 Disponibilidad para el aprendizaje de las matemáticas. A2 Interés por fenómenos o hechos de la vida cotidiana	C1 Situaciones que involucran variación periódica. C2 Generalización, en el plano cartesiano de las razones trigonométricas para un ángulo cualquiera.	P1 Comunicación e interpretación de resultados. Elaboración de conclusiones. P2 Recopilación, organización y tratamiento de datos (tablas, gráficas), para la modelación

[6] Cf. http://www.cch.unam.mx/mision.php

A3 Rigor, precisión, orden,.. en la recopilación de información A4 Ser crítico ante la información contenida en documentos científicos o de índole general. A5 Ser capaz de explicitar y defender sus ideas aportando argumentos.	C3 Circulo unitario. C4 Ángulos positivos y negativos. C5 Ángulo de referencia. C6 Medición de ángulos con distintas unidades grados y radianes. C7 Gráfica de las funciones seno, coseno y tangente. C8 Análisis del dominio y rango	de fenómenos diversos de variación periódica a través de las funciones trigonométricas. P3 Investigación documental del tema. P4 Expresión de ideas utilizando un lenguaje científico adecuado. P5 Intercambio y defensa de ideas utilizando argumentos
A6 Valorar el conocimiento matemático como proceso de construcción continua y de revisión permanente. A7 Fomentar una actitud positiva hacia la ciencia y sus repercusiones sociales. A8 Estar en disposición de realizar el trabajo en equipo con responsabilidad y colaboración. A9 Valorar la utilidad en las matemáticas en el mantenimiento del equilibrio entre la actividad humana y la naturaleza. A10 Valorar que lo aprendido le permitirá mejorara su estilo de vida. A11 Fomentar el autoestima como la valoración propia de su trabajo y la confianza de una buena realización	C9 Noción de amplitud, periodo y frecuencia. C10 Definición de función periódica: $f(x + p) = f(x)$. C11 Grafica de las funciones: • $f(x) = a\ sen(b x + c) + d$. • $f(x) = a \cos(b x + c) + d$ C12 Análisis del comportamiento de sus parámetros: a, b , c y d. C13 Fase y ángulo de desfasamiento. C14 Las funciones trigonométricas, como modelos de fenómenos periódicos. Problemas de aplicación.	Fundamentados. P6 Realización e interpretación de gráficas para observar el efecto de los parámetros: a, b, c y d. P7 Utilización de las funciones trigonométricas para la modelación de fenómenos periódicos. P8 Utilización adecuada de software matemático. P9 Uso de applets para animación de parámetros. P10 Identificar y relacionar los parámetros a,.b, c y d con la amplitud, el periodo, frecuencia y ángulo de dsfasamiento.

Más aún, el hecho de diferenciar este triple aspecto del conocimiento nos permite tomar conciencia de las diferentes facetas de la enseñanza de las matemáticas; no debiendo por lo tanto ocuparse sólo en uno de ellos, generalmente el conceptual. Sucintamente en el mapa conceptual (figura 3) se muestran las relaciones existentes entre estos tres contenidos, así como los elementos que conforman cada uno de ellos. Cabe subrayar que la modelación matemática tiene un papel muy importante en esta propuesta, pues es ahí en donde se ponen en juego un conjunto de *procedimientos* como contenidos de enseñanza que pueden clasificarse en *destrezas y habilidades* matemáticas.

Figura 3. Mapa conceptual: Aspectos teórico-metodológicos de las matemáticas



Asimismo, definir una unidad didáctica o secuencia de enseñanza permite concretar cómo vamos a realizar en el aula nuestro planteamiento metodológico. En particular, de acuerdo a mi experiencia docente y bajo una interpretación constructivista del aprendizaje he llegado a la conclusión de que una unidad didáctica queda sistematizada por las siguientes *fases o etapas*, en las que se tienen siempre presentes el objetivo u objetivos que persiguen.

- *fase de inicio;*
- *fase información e introducción de conceptos;*
- *fase de ampliación y aplicación; y,*
- *la evaluación y conclusión.*

Las principales características de cada una de estas fases quedan expuestas en la siguiente tabla[7].

Tabla 2. Fases de una unidad didáctica.		
Fase	**Profesor**	**Alumno**
I. Iniciación al tema o unidad didáctica.	-El profesor identificará las pre-concepciones del estudiante acerca del tema o unidad didáctica bajo consideración, a través de la elaboración de un cuestionario diagnostico o una entrevista donde sean señaladas las ideas, prejuicios y conceptos con que llega el alumno. -Con lo anterior, el profesor detectará y considerará los posibles errores conceptuales de los estudiantes, a partir de los cuales planifica su enseñanza. -Organizar el trabajo en el aula y coordinar las puestas en común. -Informar sobre los contenidos que se van a desarrollar. - Interesar a los estudiantes por los contenidos de enseñanza y fomentar el trabajo individual y colectivo.	-En esta fase, los alumnos explicitan sus ideas y modelos explicativos con los que inicia el tema de estudio. -Es esencial en esta etapa provocar la inquietud por aprender, lo cual implica que el alumno, en cierto modo, se comprometa a participar activamente y a profundizar sobre el tema. -Investigación documental dirigida u orientada a confrontar aquellas pre-concepciones del estudiante y las validadas por las matemáticas, con lo que comenzará a diferenciar su interpretación de aquella proporcionada por la matemática.
Esta fase concluye con un diagnóstico de las preconcepciones con que los estudiantes "llegan" al tema y con una discusión grupal en donde se señalan, de manera general, las diferencias del conocimiento adquirido por el sentido común y el alcanzado por la matemática, dando lugar a las fases subsecuentes.		
II. Información e introducción de conceptos	El profesor investigará, seleccionará, traducirá y adecuará diverso tipo de materiales para introducir los nuevos conocimientos. -El profesor divide la unidad temática en sub-unidades, cada una de ellas conformada por una serie de	-Investigará en la bibliografía señalada y en los materiales seleccionados los conceptos pertinentes al tema. -Desarrollará las actividades bajo la dirección del profesor y de acuerdo con la hoja de trabajo correspondiente.

[7] Cf. De Anda López, G. Tesis de licenciatura.

	secuencias didácticas en las que el diseño de modelos y hojas de trabajo constituyen una parte fundamental para la enseñanza. -*Diseño de modelos*. Se considera el tema, los objetivos programáticos así como los obstáculos epistemológicos visibles y generales del grupo, con la finalidad de alcanzar o acceder al conocimiento matemático, sea estableciendo un nuevo conocimiento, ampliándolo o, inclusive reelaborándolo. -Las hojas de trabajo pueden ser cuestionarios, prácticas virtuales, guías de lectura, etcétera.	En ambos casos, el estudiante recabará información para organizarla e interpretarla desde el punto de vista matemático y ya no desde el sentido común. Ello dará como resultado la diferenciación y construcción de nociones, conceptos o procedimientos matemáticos.
Esta fase concluye con una discusión grupal en donde se establecen desde un punto de vista matemático los conceptos introducidos.		
III. Ampliación y aplicación de conceptos.	-El profesor diseñará hojas de trabajo que favorezcan y extiendan el significado de los conceptos ya introducidos, lo que deberá dar lugar a que el estudiante logre una diferenciación conceptual más precisa y, en última instancia, a que den lugar a una reconciliación de los significados previos con los nuevos. - El profesor diseñará actividades que muestren la utilidad de las nociones, conceptos o procedimientos matemáticos involucrados que contribuyan a que los alumnos vean la relevancia y utilidad de lo aprendido en el contexto actual. - El planteamiento de conjeturas, así como la corroboración de los contenidos conceptuales, resulta crucial en esta etapa para lograr una clara diferenciación, así como una mejor reconciliación de significados.	-El estudiante realizará las actividades indicadas. -El estudiante resolverá las hojas de trabajo planteadas en esta fase. -El estudiante buscará la utilidad del nuevo conocimiento en su entorno social, para dar relevancia y significado a lo aprendido. -El estudiante expresará los conocimientos matemáticos adquiridos no sólo a través del lenguaje cotidiano, sino también a través de diferentes registros de representación matemática, a saber, por medio de tablas, de gráficas y de su modelo algebraico.
En esta fase, los problemas y actividades propuestos al estudiante, deberán ser lo más cercano posibles a su contexto, sin dejar de lado otros que les permitan ampliar sus horizontes de interpretación.		

IV. Conclusión.	-El profesor indagará sobre el cambio o evolución de las ideas de los alumnos, realizando comparaciones entre su pensamiento actual y el inicial, a través de un cuestionario o entrevista. Conviene, por lo tanto, recoger las pre-concepciones de los estudiantes para así observar la evolución de las mismas a partir de la reflexión y diferenciación progresiva que el estudiante ha realizado a través de esta secuencia de aprendizaje.	-Realización del cuestionario y de la entrevista (en caso de que así sea), para -Comparar los conocimientos que poseen con los iníciales y establecen las diferencias más destacadas entre estos.
Esta fase concluye con la evaluación de las construcciones conceptuales de cada uno de los estudiantes con relación a los contenidos temáticos aquí considerados. Al respecto, cabe señalar que si algún estudiante no ha construido de manera adecuada tal o cual concepto, entonces el profesor debe replantear la estrategia seguida.		

Cabe destacar que cada una de las fases de una unidad didáctica se constituye con diversas *secuencias didácticas u hojas de trabajo* para que los alumnos aprendan significativamente las principales *ideas, nociones, conceptos y procedimientos matemáticos*, cuestión con la que se les involucra, además, con otra forma de trabajo, en donde el auténtico protagonista es él mismo. En nuestro caso, la unidad didáctica elaborada para esta propuesta, así como sus fases y secuencias didácticas y hojas de trabajo están expuestas detalladamente en el capítulo 3.

Por otra parte, conviene observar que cada unidad didáctica debe diseñarse, considerarse y presentarse de manera flexible, en absoluto rígida, pues debe depender de las características de los alumnos y de cómo construyan el conocimiento, por lo que deberán permitir modificar las fases originalmente planeadas sin olvidar en ningún instante las metas que se pretenden alcanzar. En este sentido, el constructivismo empata o se complementa con otras teorías del aprendizaje como, por ejemplo, con la *teoría de registros de representación semióticas* de R. Duval, en donde:[8]

> [esta teoría] permitirá analizar las actividades que se desarrollen en diferentes registros y los pasajes entre ellos, en ambos sentidos. [Por lo que] Se prestará especial atención a proponer ejercicios que requieran de pasajes entre representaciones no congruentes, según el *sentido de conversión*.[9]

Los registros a los que se refiere Duval son, en nuestro caso, los *registros de representación geométrica* (gráficas de las funciones trigonométricas), los *registros de representación algebraica* (fórmulas de las funciones trigonométricas), así como los *registros de representación aritmética* (tablas o muestras de datos de fenómenos periódicos). La conversión de uno de estos registros en otro, no siempre es algo asequible al estudiante por lo que, a diferencia de lo establecido por Duval, que exige la conversión completa de registros, en nuestra propuesta estas conversiones deberán seleccionarse de acuerdo con los objetivos y la estructura cognitiva de los aprendices.

---

[8] Cf. [Duval; 1999].

[9] Como dice Duval: "un cambio de registro resulta interesante y fecundo cuando los tratamientos en dos registros diferentes no son computacionalmente equivalentes, es decir, no son congruentes".

Por lo anterior, resultará fundamental elaborar y disponer de un amplio banco de secuencias didácticas y hojas de trabajo para ampliar las opciones de aprendizaje y no dar lugar a la improvisación. Este abanico de posibilidades estará directamente vinculado con los materiales y recursos didácticos de que se disponga y de los que se haya pensado echar mano.

1.2.2 Secuenci as didácticas.

Una unidad didáctica, así como cada una de las fases que la componen, se pueden organizar, diseñar y realizar a través de *secuencias didácticas*. Su diseño es una de las principales tareas del profesor contemporáneo, independientemente de la interpretación que del aprendizaje tenga.

Nosotros, en particular, hemos elegido la interpretación constructivista para elaborar nuestra unidad didáctica, así como sus secuencias didácticas. Más aún, nuestra propuesta agrega la computadora como uno de sus recursos esenciales, dado que con los medios de representación que ofrece, el estudiante tiene la posibilidad de construir y re-construir el conocimiento matemático "viendo" y "manipulando", literalmente, sus construcciones, las de sus compañeros, así como la de los matemáticos que lo han ido estableciendo en la historia de las matemáticas.

En general, las secuencias didácticas deben contemplar con mayor o menor medida las siguientes cuestiones del *aprendizaje significativo*.

- *El aprendizaje significativo* requiere que la estructura cognitiva[10] del aprendiz contenga conceptos base con los cuales las ideas nuevas puedan ser relacionadas o ligadas. Por esto, Ausubel argumenta que el factor individual más importante que influye en el aprendizaje es lo que el *estudiante ya sabe*. De ahí que, cada secuencia didáctica debe tener en cuenta los conocimientos previos, concepciones y motivaciones de los alumnos.

- Crear un entorno adecuado para el aprendizaje y la enseñanza.

- Cada secuencia deberá plantear situaciones en las que los alumnos identifiquen y reconozcan sus ideas, a partir de una reflexión individual y del contraste o diferenciación con las del profesor, de otros compañeros o de la información documental.

- Las secuencias didácticas, deben favorecer aquellos procesos que ayuden a los alumnos a ser responsables de su propio aprendizaje. (Esto tiene lugar cuando los estudiantes construyen sus propios conocimientos.)

- Las secuencias didácticas deben utilizar hechos, fenómenos y situaciones próximas al contexto de los estudiantes, ya que para aprender algo, los alumnos necesitan ver su utilidad.

[10] Hablar de la estructura cognitiva es referirse a la posibilidad de recibir, asimilar, asociar, almacenar y abstraer información, además de darle significado. Pero estas habilidades pudieran no ser sólo producto de la biología humana, sino el resultado de la constante interacción de un individuo con su entorno próximo.

- En cada secuencia didáctica se deben tener presentas diversas estrategias dentro de un programa flexible de actividades. En este sentido, para cada secuencia didáctica se deberá disponer de un amplio abanico de actividades y recursos para ser utilizado según los diferentes estilos de aprendizaje de los estudiantes, así como la diversidad de situaciones en las que se desarrolla, evitando con ello la improvisación.

- Todas las *situaciones de aprendizaje*, es decir, los trabajos prácticos, la resolución de problemas, la utilización del conocimiento en la vida cotidiana, etcétera., deben ser contempladas en el diseño y realización de una secuencia didáctica como actividades coadyuvantes para que el aprendizaje sea significativo.

- Es necesario no olvidar que una secuencia didáctica pretende dar lugar a una enseñanza intencionada y dirigida de los conocimientos implicados, es decir, el sentido de los conocimientos por enseñar debe ser pertinente al estudiante y a los contenidos, tratando de que esto de lugar a que los descubra o aprenda de manera significativa.

- Las secuencias didácticas deberán favorecer el desarrollo personal, el debate, la cooperación, el rigor, la honestidad, la creatividad, la critica razonada, los planteamiento no dogmáticos y la satisfacción por aprender.

La forma más práctica que hemos encontrado para la realización de las secuencias didácticas en el caso que nos ocupa, a saber, el aprender y enseñar matemáticas, es a través de *hojas de trabajo*. Por sí solas, las hojas de trabajo no constituyen una secuencia didáctica, sino que están enmarcadas dentro de la organización, contexto y recursos empleados para su efectivo uso en el aprendizaje.

1.2.3 Uso de medios informáticos para el aprendizaje de las matemáticas en el CCH Sur.

La tecnología informática (calculadoras, calculadoras graficadoras, computadoras, sensores, aparatos de telecomunicación, etc.), es una catalizador de los procesos de cambio en el aula de matemáticas actualmente. Sin embargo, los efectos de la utilización de la tecnología para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas dependen de cómo el profesor diseñe y desarrolle el currículo, de tal forma que la tecnología contribuya a que los alumnos vivan experiencias matemáticas relevantes para su propio aprendizaje.

Desde nuestra perspectiva, el diseño y puesta en práctica de actividades que utilicen la tecnología debe ser un procedimiento sistemático que tenga en cuenta lo siguiente:

- la complejidad de los aspectos actitudinales, conceptuales y procedimentales, del tema que se pretenda tratar;
- que sea basado en las potencialidades de la tecnología dentro del contexto de los problemas que se quieran abordar; y,
- que utilice coherente y adecuadamente la información que surge de estos análisis.

Más generalmente, nos atrevemos a establecer que las tecnologías informáticas son *herramientas esenciales* para aprender, enseñar y hacer matemáticas en nuestros días:[11]

> Tradicionalmente, las matemáticas se vienen describiendo como la ciencia del número y de la forma. El énfasis escolar en la aritmética y la geometría está profundamente arraigado en esta vieja perspectiva. Como territorio de exploración, las matemáticas se han expandido –en la teoría de grupos y la estadística, la teoría de control y optimización, etc.- y las viejas fronteras han desaparecido completamente. Incluso las fronteras de sus aplicaciones: las matemáticas ahora ya no son sólo esenciales para la física y la ingeniería, sino también para las áreas bursátiles y de manufactura, así como para todas las ciencias sociales y la medicina, por ejemplo. … Gracias a las gráficas hechas con computadora, la mayor parte de la investigación matemática ahora está guiada por lo que realmente ve el ojo, mientras que en el siglo XIX, por ejemplo, matemáticos como Gauss y Poincaré dependían más de su "ojo mental". … Por siglos, la mente ha dominado al ojo en la jerarquía de la práctica matemática; hoy en día se está dando un balance entre el ojo y la mente. … El cambio en la práctica matemática fuerza una reexaminación de la educación matemática. No sólo las computadoras, sino también nuevas aplicaciones y nuevas teorías han expandido significativamente el papel de las matemáticas en la ciencia, los negocios y la tecnología. Los estudiantes, quienes vivirán y trabajarán empleando computadoras como herramienta de rutina, requieren (¡exigen!) aprender una matemática diferente que sus antepasados. La práctica escolar, arraigada en las tradiciones, que son ya muy viejas, simplemente ya no pueden preparar a los estudiantes adecuadamente para las necesidades matemáticas del siglo XXI.

Al respecto, cabe destacar que en este trabajo se hace un uso amplio de la computadora, gracias a que en el CCH Sur, lugar en el que se experimentó esta propuesta, se dispone de un aula en la que se puede atender a un grupo de 30 estudiantes con todas las facilidades para emplear computadoras, software (libre), Internet, etc. Más aún, este plantel cuenta con servicios de computadoras para los estudiantes tanto en la biblioteca, como en un edificio diseñado ex-profeso. De manera particular en esta experiencia educativa, ponemos en juego los siguientes programas.

- *GeoGebra*: interfaz interactiva algebro-geométrica.
- *Audacity*: programa libre para crear, editar y grabar audio digital.
- *Excel*: hoja de cálculo electrónica.
- *Escenarios (o applets[12])* diseñados ex profeso y realizados en Flash, o tomados directamente de la Internet.

[11] Steen, L. A. (Editor). On the Shoulders of Giants. New Approaches to Numeracy. National Academy Press. Washington, D. C. 1990. Cap. 1.

[12] Cabe señalar que la existencia y uso en el aula de una herramienta, como es el *applet*, no debe hacernos olvidar que nuestra tarea como profesores es la de *provocar, favorecer y guiar situaciones de aprendizaje*. Para ello debemos de disponer de muchos recursos, uno de ellos es precisamente el applet. No debemos caer en la trampa de considerar a éste como un fin, como un objetivo de aprendizaje, ya que no lo es, sino que se trata de una simple herramienta que puede permitir y facilitar el proceso de aprendizaje de nuestros alumnos.

Cabe insistir en que estos programas "solos" no garantizan los aprendizajes de los temas exigidos en la unidad de funciones trigonométricas, por lo que las secuencias didácticas y las hojas de trabajo elaboradas para esta unidad, son, por así decirlo, la parte medular del aprendizaje de los estudiantes. Estas posibilidades no deben perder de vista que su propósito o fin es el de coadyuvar a que el alumno haga una reflexión sobre sus propias ideas, manteniéndolo activo y con su atención puesta en la intersección de sus intereses y de los contenidos de enseñanza, pues sólo podrá reestructurarlas si estás caen en su propio lenguaje.

1.2.4 Estrategias de evaluación.

Sin duda, una de las cuestiones más importantes de la enseñanza, es la evaluación de lo aprendido por los estudiantes. En nuestro caso, esta evaluación debe ser continua y en estrecha observancia de los dos principios básicos del constructivismo, a saber, la *diferenciación progresiva* y la *reconciliación integradora* de los nuevos contenidos con los que ya traía el aprendiz. Por ello es que, a lo largo del desarrollo de cada secuencia didáctica, se deberá ir determinando la adecuación y pertinencia de las construcciones conceptuales de los alumnos a través de los siguientes "evaluadores".

- Los resultados de la investigación documental elaborada por los alumnos (individual, trabajo en grupo y puesta en escena común).
- El control acerca de la información recabada (artículos, visitas –en Internet, museos-, etc.).
- La resolución de las hojas de trabajo (individual, trabajo en grupo y puesta en escena común).
- Sistematización de las conclusiones.
- Evaluaciones escritas.
- Evolución de los conceptos previos.
- Diseño, elaboración y presentación de proyectos.

Con estos "evaluadores" se deberá poner en juego la siguiente metodología:

- *confrontación* de lo aprendido por cada estudiante con relación a otras cuestiones que ya tenía o tiene, así como con las interpretaciones de sus compañeros;

- ello le permita ir *diferenciado* aquellas interpretaciones no matemáticas de las que sí lo son para que, en última instancia,
- *reconcilie* las interpretaciones matemáticas con las restantes de manera que los nuevos conocimientos *queden integrados en su acervo lingüístico* de manera permanente y estable.

2 MARCO TEÓRICO MATEMÁTICO

En este capítulo expongo los elementos matemáticos que sustentan la tesis aquí presentada. Estos elementos están basados en el *funcionalismo formal* del matemático norteamericano Saunders Mac Lane, así como con otras observaciones que he retomado a lo largo de mi experiencia docente.

2.1 Las matemáticas modernas.

Tradicionalmente, las matemáticas se han considerado como *la ciencia del espacio, el tiempo y el movimiento* y es con base en esta categorización que se han establecido los actuales planes de estudio de matemáticas del modelo universitario de bachillerato CCH. Esta clasificación de las matemáticas, lo mismo que la organización del conocimiento matemático correspondiente, fueron establecidos desde el siglo XIX, cuando esa concepción dominaba el panorama matemático. Sin embargo, las cosas han cambiado drásticamente desde entonces. Ahora, por ejemplo, se habla de las matemáticas como "nuestra cultura invisible", pues es claro que casi todas las cosas con las que coexistimos, sean de trabajo, recreación, creación, o simplemente para llevar nuestra vida cotidiana, tienen un trasunto matemático inmediato. Así las casas, el transporte, las comunicaciones, las computadoras, los teléfonos celulares, los sistemas de audio CD, etc., simplemente no serían posibles sin el conocimiento matemático moderno. Pero aquí cabe una advertencia, de la que Nietzsche ya nos ha dado cuenta desde fines del siglo XIX: en realidad las matemáticas no son algo así como la esencia de nuestra época, la llamada época moderna, sino es más bien su esencia técnica (que no es algo técnico) la que nos ha deparado esta forma actual de existencia.

En este devenir moderno de las matemáticas la *noción de función* ha jugado un papel de primera importancia pues con ella no sólo se ha tratado de *re-presentar*, o traer a la presencia, los llamados *fenómenos naturales* cada vez que le sean solicitados, sino también, y quizá más importante, ha dado paso a una *estructuración de la realidad* de la que ahora, parece, no se escapa nada. Más aun, paralelo a ello (y quizá por ello), las matemáticas han devenido[13]

> … apretada red de reglas, conceptos y sistemas formales. Los nodos de esta red se encuentran estrechamente relacionados con procedimientos útiles a la actividad humana y a cuestiones científicas. La transición de las actividades humanas está guiada por una gran diversidad de “insights” e ideas. Dentro de ésta red formal, los nuevos desarrollos son estimulados y guiados por conjeturas, problemas, abstracciones y el constante deseo de comprender más …

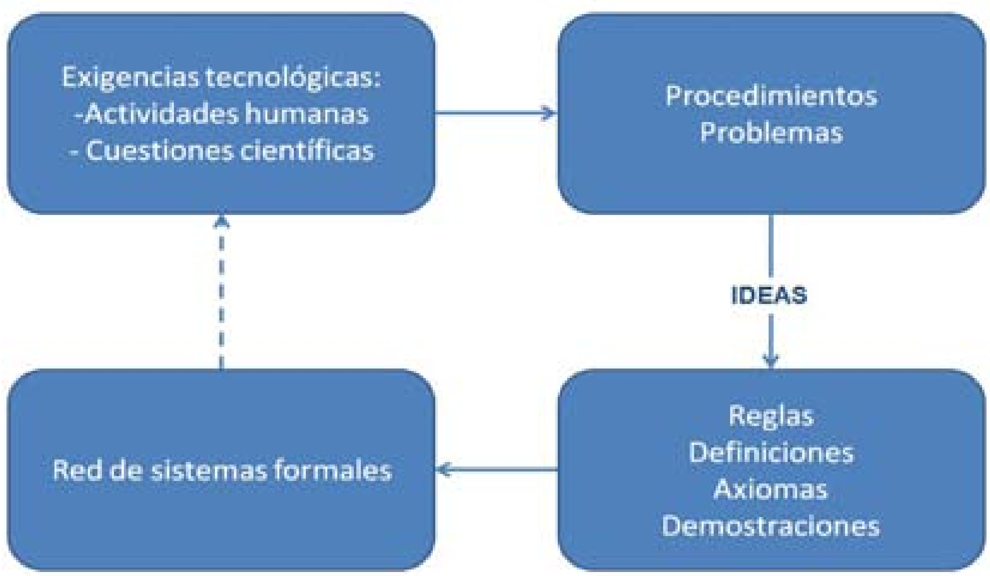
[13] [Mac Lane, 1985; pág. 409]

de forma que los antiguos límites o fronteras del conocimiento matemático se han borrado, han desparecido, por lo que ya son insostenibles aquellos preceptos tradicionales de las matemáticas, de su organización y, en consecuencia, de su enseñanza o aprendizaje.

2.2 La red de matemáticas contemporánea.

A continuación haremos una exposición general de la red de matemáticas contemporánea de acuerdo con el siguiente esquema[14] y ejemplificando cada uno de los aspectos tratados con cuestiones vinculadas directamente con las funciones trigonométricas.

Figura 4 Mapa conceptual: Las matemáticas modernas de acuerdo con el funcionalismo formal.



2.2.1 Exigen cias tecnológicas y las funciones trigonométricas.

De acuerdo con el funcionalismo formal, la mayoría de las formalizaciones en las matemáticas están basadas en alguna idea subyacente, una noción "intuitiva" que les da guía y propósito. No es fácil dar una descripción precisa de la naturaleza de una idea pero, como señala [Mac Lane, 1985], un buen número de las ideas más generales de las matemáticas son estimuladas más o menos directamente por actividades matemáticas humanas.

[14] [Mac Lane, 1985; pág. 409]

Ahora bien, dado que nuestra época está signada por su técnica, por su tecnología, no es casual que gran parte de las actividades humanas estén determinadas por ella, por la provocación técnica del mundo, es decir, por el llamado a su *calculabilidad*. En particular, todo lo que cae bajo la idea de *lo periódico* se re-presenta o, como dicen los científicos, se modela, a través de las funciones trigonométricas como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 3.Actividades e ideas que dan lugar a funciones periódicas.

Actividad	Idea	Formalización Matemática
Hablar, cantar, la música, el ruido, etc.	Sonido	**Función Periódica**
Movimientos corporales (del corazón, del cerebro, etc.)	Ritmo	
Transmisión de la energía (eléctrica)	Vibración (del electrón)	
Calendarización (días, estaciones del año, etc.)	Lo cíclico	
Holografía	Desfasamiento en la frecuencia	
Transmisión de señales	El paso de lo discreto a lo continuo y viceversa	

Cabe decir que existen diferentes tipos de funciones periódicas, verbigracia, seno, coseno, escalonadas, triangulares, etc. Sin embargo, las más importantes por su amplia aplicación son las funciones trigonométricas mencionadas.

2.2.2 Las ideas en la creación del conocimiento matemático.

El papel de las ideas, surgidas tanto en contextos generales como en el mismo ámbito de las matemáticas, no es de menor importancia al de las actividades que exigen, por así decirlo, este conocimiento. Más aun, una misma idea puede aparecer en diferentes actividades, como se observa en la tabla anterior, en donde lo periódico se hace presente en actividades diversas que se unifican a través de su formalización matemática, es decir, a través de su modelación con funciones periódicas.

Cabe destacar que, además de las actividades humanas o de ciertas cuestiones científicas, las ideas "matemáticas" también emergen por la necesidad de comprender pedazos “sueltos” de este campo de conocimientos. Este es el caso de la *noción de función* que, a partir de diversos problemas, se ha ido extendiendo hasta nuestros días como se muestra en la siguiente línea de tiempo.

Tabla 4 Línea de tiempo de la noción de función.

Año(s)	Autor(es)	Definición
1694	Gottfried Leibniz	Leibniz la empleaba para describir una cantidad relacionada con una curva como, a saber la pendiente a una curva en un punto dado. Las funciones consideradas por Leibniz se llaman actualmente funciones diferenciables.
Mediados del s. XVIII	Leonhard Euler	La palabra función era empleada por Euler para describir una expresión o fórmula que incluía varios argumentos, verbigracia, $f(x) = \sin(x) + x^3$
S. XVIII - XIX	Fourier	Para Fourier una función era aquella expresión que pudiera desarrollarse en una serie trigonométrica (de Fourier).
Fines del s. XIX	Dirichlet Lobachevsky	Estos matemáticos establecieron la definición conjuntista actual de la noción de función, a saber, como un caso especial de relación entre conjuntos.
1908	Hardy	Hardy definió el término función en las siguientes palabras: "to some values of x at any rate correspond values of y" ("para algunos valores de x en cualquier 'muestra' corresponden valores de y")
Primera mitad del s. XX	Turing	La noción de función como una regla para calcular, más que una clase especial de relación, ha sido ampliamente estudiada en la lógica matemática y la teoría de la ciencia de la computación.
2002	Lawvere y Schanuel	Un morfismo [función] de conjuntos es un proceso para ir de un conjunto a otro.

2.2.3 Los problemas.

Otra de las fuerzas conductoras del desarrollo de las matemáticas lo constituye la resolución de problemas difíciles. Un buen ejemplo de este tipo lo constituye el llamado *problema de la cuerda vibrante*, cuya solución final fue dada por Fourier pero que durante tres siglos dio lugar no sólo a diversas soluciones parciales, sino que en su desarrollo se observa la evolución de la actual noción de función. *Grosso modo*, este problema se describe a continuación.

El problema de la cuerda vibrante.

El matemático inglés Brook Taylor (1685-1731) fue el primero en dar una solución formal, aunque errónea, del problema de las cuerdas vibrantes. Él determinó la ecuación de una supuesta curva para la forma de la cuerda de tal manera que cada punto alcanzaría la posición de reposo en el mismo tiempo. Esta vibración, que la llamó la vibración fundamental, también sería estudiada posteriormente por Johann Bernoulli quién en 1727 estableció el importante principio de que la fuerza actuando sobre una partícula material en una vibración fundamental es siempre proporcional a la distancia de esa partícula a su posición de equilibrio. Pero la realidad es que la manera de vibrar de una cuerda es mucho más complicada que el tratamiento de Taylor. Sin embargo, sirvió en aquel momento para abrir el camino a técnicas matemáticas más elaboradas como las de Daniel Bernoulli (1700-1782), las de Leonhard Euler (1707-1783) y, en especial, las de Jean-le-Rond D'Alembert (1717-1783) que consideró la introducción de derivadas parciales y la representación de la ecuación del movimiento en la moderna forma de trabajar en matemáticas. De la investigación de Taylor, los matemáticos de la época se aferraron a la visión errónea, compartida en un principio por el propio Daniel Bernoulli, de que toda vibración compuesta tiende muy rápidamente a un *status uniformis*, esto es, a una única vibración: la fundamental de Taylor. El modelo de Taylor sólo tiene validez si se fija un peso en el punto medio de la cuerda. Entonces este sistema se convierte en un oscilador armónico simple. En general, todo movimiento armónico simple de amplitud A y frecuencia f puede representarse como:

$$y(t) = A \sin(2 \pi f t + \varphi_0) \tag{1}$$

donde φ_0 se le llama su fase, siendo $A \sin \varphi_0$ la elongación inicial para $t = 0$.

El movimiento armónico simple que hemos considerado es un caso ideal que se mantendría con las mismas características, incluida su amplitud, por tiempo indefinido. En la práctica real estos movimientos son amortiguados, o también llamados forzados, y son producto del roce y la resistencia del medio en el cual se realiza el movimiento.

Vibración de las cuerdas sonoras.

Años antes de la publicación de Taylor sobre la vibración de las cuerdas, alrededor de 1700, algunos teóricos de la música especialmente Wallis (1616-1703) en Inglaterra y Joseph Sauveur (1653-1716) en Francia, observaron experimentalmente que una cuerda tensa puede vibrar en partes con ciertos puntos, los cuales Sauveur los denominó *nodos*, en los que no había movimiento alguno, a pesar que entre ellos se produjeran movimientos dando origen a los *vientres*. También fue muy pronto reconocido que tales vibraciones correspondían a frecuencias más altas que la asociada con la simple vibración de la cuerda total sin nodos, y más aun que las frecuencias eran múltiplos enteros de la frecuencia de la vibración simple.

Los correspondientes sonidos emitidos fueron denominados por Sauveur los *tonos armónicos*, mientras el sonido asociado con la vibración simple se denominó fundamental. La notación así introducida ha sobrevivido hasta hoy. Sauveur observó también el hecho importante de que una cuerda vibrante podía producir los sonidos correspondientes a sus armónicos al mismo tiempo. Este hecho físico ya es comentado en los trabajos de Daniel Bernoulli de 1732 y 1739, quién realizó experimentos con una cuerda vibrante y observó que ésta no rechazaba trozos de papel colocados en sus nodos. En aquella época, hacia 1734, L. Euler todavía mencionaba únicamente vibraciones fundamentales. Años más tarde en 1755, Daniel Bernoulli en unas célebres memorias publicadas por la Academia de Berlín, *Réflections et ´eclairissements sur les nouvelles vibrations des cordes, Expos´ees dans les Mémoires de l'Academie de 1747 et 1748, Royal Academy, Berlin*, *1755*, propone que el movimiento más general de una cuerda vibrante se obtiene mediante la superposición de vibraciones producidas por movimientos armónicos simples. D. Bernoulli concluye entonces con la siguiente ecuación:

$$y = \alpha \sin x \cos t + \beta \sin 2x \cos 2t + \gamma \sin 3x \cos 3t + \dots,$$

donde *y = y(x, t)* representa la posición de la cuerda en el instante *t*, siendo *x* la posición de reposo de una de sus partículas. Así D. Bernoulli conjetura que es posible que una cuerda vibre de manera que estén presentes una multitud de oscilaciones armónicas simples al mismo tiempo y que cada una de ellas contribuya independientemente a la vibración resultante. Este hecho le llevó a descubrir el famoso principio de la coexistencia de pequeñas oscilaciones, o el *Principio de Superposición*. Principio de suma importancia en el desarrollo de la teoría de oscilaciones. *Pero mientras D. Bernoulli comprendió la importancia y el significado de su Principio de Superposición de vibraciones, fue incapaz de justificarlo matemáticamente, lo que provocó durísimas críticas tanto de Euler como de D'Alembert, quienes vieron inmediatamente que tal principio produciría la posibilidad de expresar cualquier función, en particular la forma inicial de una cuerda vibrante, en términos de una serie infinita de senos y cosenos*.

El método de D'Alembert. Reflexión de ondas.

D'Alembert fue quién consiguió una solución casi exhaustiva de este problema en su famoso artículo de 1747 *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*, Hist. Acad. Sci. Berlin 3 (1747). Él establece directamente que el objetivo de su artículo es probar que la forma de la cuerda vibrante posee infinitas soluciones además de la fundamental. Para ello considera que el desplazamiento y de la cuerda es una función de dos variables: el tiempo t y la posición x a lo largo de la cuerda. Por tanto las ecuaciones más apropiadas deben ser escrita en términos de las derivadas parciales. La ecuación describiendo la vibración de una cuerda se denomina la *ecuación de ondas unidimensional* y viene dada por

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

donde c denota la velocidad de propagación de una perturbación transversal en la cuerda. Esta es una constante que depende únicamente de la tensión a la que está sometida y de la masa por unidad de longitud. La ecuación de ondas anterior es una ecuación diferencial en derivadas parciales lineal y homogénea que esta sujeta a las condiciones de contorno:

$$y(0,t) = y(L,t) = 0, \ (t \geq 0)$$

siendo L la longitud de la cuerda. Además suponemos que inicialmente la cuerda sigue la curva $y = f(x)$ y que posee una velocidad inicial determinada por una función $v = v(x)$. Entonces, se tiene

$$y(x,0) = f(x), \qquad (0 \leq x \leq L)$$
$$v(x) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,0).$$

Aunque es razonable suponer que f debe ser continua ya que representa una cuerda, conviene suponer que f también es diferenciable de clase C^2 para verificar la unicidad de las soluciones a este problema. D'Alembert descubrió un simple método para encontrar la solución general de la ecuación de ondas unidimensionales y probó en ese artículo de 1747, salvo con algunas modificaciones, el siguiente resultado:

Teorema (*D'Alembert*). La solución general de la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

viene dada por:

$$y = y(x,t) = \phi(x + ct) + \varphi(x - ct)$$

para adecuadas funciones ϕ y φ. La solución satisfaciendo las condiciones de contorno *y = 0* para *x = 0* y para *x = L*, para todos los valores de *t*, es de la forma:

$$y(x,t) = \phi(x + ct) - \phi(-x + ct)$$

donde ϕ es periódica de período *2L*. Si *y = f(x)* representa la posición inicial de la cuerda y

$$v(x) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0)$$

entonces:

$$\begin{aligned} \phi(x) - \phi(-x) &= f(x); \\ \phi(x) + \phi(-x) &= \frac{1}{c} \int v(x) dx. \end{aligned}$$

En particular, si no posee velocidad inicial, ϕ es una función periódica impar con extensión de *1/2 f*.

De aquí se concluye con el importante *principio de reflexión* de que toda onda se refleja en el extremo fijo de una cuerda con un cambio de signo. Siempre se puede comprender esa reflexión imaginando que lo que viene del extremo de la cuerda sale invertido desde atrás. Al año siguiente, Euler siguiendo a D'Alembert aborda el mismo problema lo que origina un histórico debate al que fueron uniéndose D. Bernoulli y posteriormente otros matemáticos como J. B. J. Fourier (1768-1830), J. L. Lagrange (1736-1813) y P. S. Laplace (1749-1827), siendo el primero de estos el que dio con la solución correcta dando lugar, de paso, a lo que hoy se denomina análisis de Fourier.

El análisis de Fourier lleva el nombre del matemático y físico francés J. B. J. Fourier quien, en 1807, presentó un artículo en el *Institut de France* en donde exponía el empleo de senosoidales para representar las distribuciones de temperatura. Este texto contiene una controvertida afirmación, a saber, que *cualquier señal periódica continua puede representarse como la suma de ondas senosoidales elegidas adecuadamente*. Entre los revisores estaban dos de los más famosos matemáticos de la época moderna: J. L Lagrange y Laplace. Mientras Laplace, y otros revisores, votaron por que se publicara el artículo, Lagrange levantó una enérgica protesta, arguyendo que una aproximación con funciones senosoidales no puede llevarse a cabo con señales que tienen picos o esquinas, i. e., con pendientes discontinuas como las de las "ondas cuadradas". El Institut de France apeló al prestigio de Lagrange y rechazó el artículo de Fourier. Fue sólo hasta que Lagrange murió que finalmente el artículo se publicó unos quince años después, hacia 1822.

¿Quién está en lo correcto? Es una decisión dividida. Lagrange acertaba al sostener que una suma de senosoidales no puede formar una señal con picos. Sin embargo, se puede llegar a algo muy cercano, tan cercano que la diferencia entre las dos señales tenga energía cero. En este sentido, Fourier estaba en lo correcto, aunque en el siglo XVIII la ciencia conocía muy poco acerca del concepto de energía. A este fenómeno ahora se le conoce como el *efecto de Gibbs*.

En general, la solución al problema de la cuerda vibrante queda establecida en los siguientes teoremas.

Teorema 1. La solución del problema de cuerdas vibrantes viene dada por

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\left(K_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + M_n \sin\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

en donde:

$$
\begin{aligned}
K_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\
M_n &= \frac{2}{n\pi c}\int_0^L v(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.
\end{aligned}
$$

De este resultado podemos obtener el siguiente teorema que demuestra la existencia de vibraciones armónicas que acompañan a la vibración fundamental.

Teorema 2. La frecuencia *f* y el período *T* de un movimiento vibratorio sobre una cuerda no depende de su posición inicial, ni de la velocidad inicial y vienen dados por:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\tau}{d\pi r^2}}$$

en donde *L* es la longitud de la cuerda, *d* es su densidad y *r* su radio. Además, se expresa como suma de movimientos vibratorios cuyos periodos son *T, T/2, T/3, T/4*, etc. y frecuencias *f, 2f, 3f, 4f*, etc.

Cada sumando $y_n(x, y)$, $n \in N$, en esta ecuación también puede expresarse por:

$$y_{nx}(t) = N_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\left(\frac{n\pi ct}{L} + \phi_n\right)$$

en donde $K_n = N_n \sin \phi_n$, $M_n = N_n \cos \phi_n$ lo que representa un movimiento vibratorio de frecuencia $f_n = n f$. Por tanto son funciones periódicas de periodo $2L/n\, c = T/n$.

2.2.4 La analogía.

Sin duda, la analogía es uno de los procesos creativos más importantes en el aprendizaje o creación matemática, dado que, entre otros de sus aspectos, se pueden destacar los dos siguientes:

- con la analogía se pueden poner al descubierto lazos que dos o más hechos tienen; y,
- con ella, es frecuente caracterizar la "nuevo" en términos de lo "viejo" o ya conocido.

Así por ejemplo, Galileo en su estudio del sonido, en particular, al buscar una caracterización del tono (frecuencia) de las notas musicales, estableció una interesante comparación entre la vibración de una cuerda y el movimiento de un péndulo, para comprender por qué aquellas frecuencias que están en razón de dos enteros pequeños dan lugar a sonidos agradables, en tanto que las que no lo están producen sonidos discordantes. Observó que un conjunto de péndulos de diferentes longitudes, oscilando en torno a un eje vertical común, muestran patrones visuales sumamente atractivos al ojo cuando sus frecuencias están en razones de números pequeños, mientras que cuando no es así, los péndulos muestran patrones enmarañados que no resultan atractivos[15].

La analogía también ha venido jugando un papel de suma importancia para el desarrollo de una de las actividades humanas más importantes de nuestra época, a saber, *la medición*. Las analogías entre la medición de distancias, la medida de cantidades o magnitudes diversas (pesos, masas, áreas, etc.), llevaron gradualmente a la formulación de *los números reales* como el medio general para manejar mediciones. Es así que la importancia del sistema de los números reales no sólo es teórica, sino también práctica pues se ha convertido en sinónimo de medición. Creemos que por esa razón, a los números reales se les denomina también como "escalares", dado que se puede pensar que la recta real no es sino la escala universal de medida. Finalmente, cabe agregar que incluso la medición de ángulos en radianes no es sino la linealización de la medida angular.

2.3 La noción de las funciones trigonométricas como procesos.

En este trabajo asumiremos la siguiente definición de "función" dada por [Lawvere y Schanuel; 2002]:

> Un **morfismo** [**función**] de conjuntos es un proceso para ir de un conjunto a otro.

Explícitamente una función f consiste de lo siguiente:

(a). Dos conjuntos *A* y *B*, el primero llamado el *dominio* de la función, en tanto que el segundo se llama su *co-dominio*.

[15] Baron Rayleigh, J. W. S. *Theory of Sound*. Dover Publications. New York. 1945. P. XIII.

(b). Un proceso que transforma o hace corresponder a cada elemento del dominio de la función y único elemento del co-dominio. Este proceso se conoce usualmente como *regla de correspondencia* de la función.

(c). La notación que emplearemos para las funciones es la siguiente:

$$f\colon A \longrightarrow B \qquad\qquad a \mapsto b$$

que se lee: la función f "va del dominio A al co-dominio B"; "al elemento $a \in A$ se le hace corresponder el elemento $b \in B$".

En nuestro caso, estamos interesados en las funciones trigonométricas reales seno y coseno:

$$sin\colon A \subset R \longrightarrow B \subset R$$

$$x \mapsto y = A\, sin(B\, x + C) + D$$

$$cos\colon A \subset R \longrightarrow B \subset R$$

$$x \mapsto y = A\, cos(B\, x + C) + D$$

siendo R el campo ordenado de los números reales al que llamaremos simplemente *recta real*.

Ahora bien, estas funciones vistas como procesos involucran a su vez a otros, como los siguientes:

- La *linealización*[16] de la medida angular, necesaria para tener definidas a las funciones trigonométricas como funciones reales (i. e., que el argumento sea un número y no una "abertura"), queda establecida en las siguientes fórmulas:

$$cos(\alpha + \beta) = cos\ \alpha\, cos\ \beta - sin\ \alpha\, sin\ \beta$$

$$sin(\alpha + \beta) = cos\ \alpha\, sin\ \beta + sin\ \alpha\, cos\ \beta$$

[16] Mac Lane, S. Mathematics, Form, and Function. Springer-Verlag. 1986. Págs. 110 – 114.

- La imagen de estas funciones usualmente se obtiene por medio de su gráfica y, en la actualidad, la relación entre los parámetros *A, B, C y D*, con las gráficas de las funciones obtenidas se pueden realizar de manera interactiva o, en otras palabras, a través de animaciones.
- Para calcular el valor ("*y*") de alguna de estas funciones usualmente se emplean el desarrollo de estas funciones en series.
- Otra forma de analizar un fenómeno periódico es a través de una colección de datos o muestra, para lo cual resulta imprescindible el análisis de Fourier.

A continuación se describen, grosso modo, estos hechos desde un punto de vista matemático.

2.3.1 Hechos matemáticos básicos de las funciones trigonométricas seno y coseno.

Toda la exposición de las funciones trigonométricas para el bachillerato se basa en los hechos siguientes.

Teorema A. Las funciones trigonométricas, *seno* y *coseno*, son funciones analíticas reales.

Teorema B. Las funciones trigonométricas, *seno* y *coseno*, son periódicas con período igual a 2π.

Nota. En este sentido, la función coseno (seno) puede ser considerada como un caso de la función seno (coseno) al ser esta desplazada o desfasada en π/2, de acuerdo a la siguiente relación:

$\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$.

Entre las consecuencias que cabe destacar para nuestros propósitos están los dos teoremas siguientes.

Definición. Sea *f* una función continua por partes en el intervalo *[-T, T]*. La serie de Fourier de *f* es la serie trigonométrica siguiente:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

en donde a_n y b_n están dadas por las fórmulas siguientes:

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

Teorema C. (*Convergencia puntual*). Si *f* y *f'* son continuas por partes e el intervalo *[-T, T]*, entonces para cualquier *x* en *[-T, T]*, se tiene lo siguiente.

$$\frac{1}{2}\left[f(x^{+}) + f(x^{-})\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

en donde a_n y b_n, están dadas por las fórmulas de Euler (1) y (2).

Teorema D. (*Convergencia uniforme*). Sea *f* una función continua en $(-\infty, \infty)$ y periódica, con periodo *2T*. Si *f'* es continua por partes en *[-T, T]*, entonces la serie de Fourier de *f* converge uniformemente a *f* en *[-T, T]* y, por lo tanto, en cualquier intervalo. Es decir, para cada $\varepsilon>0$, existe un entero N_0, tal que:

$$\left|f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right]\right| < \varepsilon$$

para toda $n \geq N_0$ y toda $x \in (-\infty, \infty)$.

2.3.2 Medición lineal (en radianes) de los ángulos.

Los ángulos son un tipo de magnitud geométrica. Los axiomas de la geometría euclidiana plana proporcionan los métodos de comparación y congruencia de las magnitudes angulares. La reducción de estas magnitudes angulares a magnitudes lineales (i. e., a la escala universal de los números reales), involucra un sutil dispositivo.

- Primero, se mide la circunferencia de un círculo, digamos del círculo S^1 de radio 1. Esto se puede realizar por diferentes métodos, todos de aproximación. Por ejemplo, inscribiendo algún polígono regular en el círculo y, por medio de bisecciones sucesivas (tradicionalmente hechas con regla y compás), ir obteniendo polígonos del doble de números de lados en cada etapa subsecuente, con lo que el perímetro de esos polígonos se irá aproximando cada vez más a la longitud de la circunferencia. Ahora, como el perímetro de los polígonos regulares se puede calcular aritméticamente, entonces se puede ir obteniendo una aproximación del valor de esa circunferencia.
- Ahora, la medida en radianes de un ángulo θ, situado al centro del círculo, es la longitud del arco subtendido por dicho ángulo. Aquí se puede emplear el método de bisección para aproximar cualquier medida angular. En efecto, sabiendo que la longitud o medida en radianes de una línea recta es igual a π y que la medida en radianes del ángulo recto es $\pi/2$, podemos aproximar la medida angular de cualquier ángulo al ir bisecando (tradicionalmente hechas con regla y compás) aquellos ángulos y, así, obtener una medida aproximada $\pi/2^n$ en radianes del ángulo bajo consideración.
- Cualquier ángulo $\theta = \angle AOB$, siendo C el centro del círculo unitario, tiene una medida en radianes t_0 dada por las siguientes fórmulas:

$$medida(\theta) = t_0, \quad 0 \leq t0 \leq 2\pi, \quad t_0 = longitud\ de\ arco\ AB \qquad (1)$$

- Cualquier número real t se puede escribir módulo 2π como sigue:

$$t = t_0 + 2\pi k, \qquad \text{para algún entero } k,$$

por lo que cada número real determina el ángulo $\theta = \theta_t$ con medida $\theta_t = t_0$. Con esto, la función $t \mapsto \theta_t$ enrolla la recta real a lo largo del círculo S^1, enviando t al punto B, o sea, al ángulo $\theta_t = \angle AOB$. Más aun, esta función es periódica:

$$\theta_{t+2\pi} = \theta_t \tag{2}$$

- De manera alternativa, se puede definir la medida angular lineal o escalar con el cálculo, a saber, para obtener la medida de los sectores circulares y con ello la medida de la función de enrollamiento.
- Más aun, dado que un ángulo tiene una orientación específica, tal vez resulte más conveniente definir (representar) las medidas angulares no sólo como radianes, sino como segmentos de área orientados, como se propone con el álgebra geométrica.

2.3.3 Propiedades local es de las funciones trigonométric as s eno y coseno.

Las propiedades locales de las funciones seno y coseno son las siguientes.

Nota. En esta sección f denota a la función *seno* o *coseno* salvo se indique explícitamente otra cosa.

Teorema 1. Para cualquier $x \in R$, el límite siguiente existe:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

Teorema 2. Las funciones *seno* y *coseno* son continuas. En particular, se tiene lo siguiente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 = f(x_0)$$

Teorema 3. Las funciones *seno* y *coseno* son de clase C^{∞}. Esto quiere decir que son *n*-derivables para *n* cualquier entero positivo y, por ende, cada una de las *n*-derivadas son funciones continuas.

Teorema 4. La función *seno* tiene la siguiente expansión en serie:

$$\text{Sin}[x] = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362\,880} - \frac{x^{11}}{39\,916\,800} + \frac{x^{13}}{6\,227\,020\,800} - \frac{x^{15}}{1\,307\,674\,368\,000} + \frac{x^{17}}{355\,687\,428\,096\,000} + \text{O}[x]^{19}$$

Teorema 5. La función *coseno* tiene la siguiente expansión en serie:

$$\text{Cos}[x] = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40\,320} - \frac{x^{10}}{3\,628\,800} + \frac{x^{12}}{479\,001\,600} - \frac{x^{14}}{87\,178\,291\,200} + \frac{x^{16}}{20\,922\,789\,888\,000} + \text{O}[x]^{18}$$

2.3.4 Propiedades globales de las funciones trigonométricas seno y coseno.

Teorema 6. Las funciones *seno* y *coseno* tiene son periódicas con un período igual a 2π. En símbolos:

$$f(x) = f(x + 2\pi)$$

Teorema 7. La función *seno* tiene las siguientes características.

a) Es creciente en los intervalos [-π/2 + 2nπ, π/2 + 2nπ].

b) Es decreciente en los intervalos [π/2 + 2nπ, 3π/2 + 2nπ].

c) Tiene una infinidad de ceros, a saber en: $x = n\,\pi$.

d) En cada punto donde alcanza un máximo relativo, alcanza también su máximo absoluto –que es uno-, y esto sucede en: $x = \pi/2 + 2n\pi$.

e) En cada punto donde alcanza un mínimo relativo, alcanza también su mínimo absoluto –que es uno-, y esto sucede en: La función alcanza sus (infinitos) mínimos en: $x = 3\pi/2 + 2n\pi$.

f) El rango de la función es el intervalo [-1, 1].

Teorema 8. La función $g(x) = \sin(n\ x)$, siendo n un número entero, es una función periódica con periodo $T = 2\pi/n$.

Demostración. Supongamos que $g(x) = g(x + T)$, con $T \in R$, entonces se cumple lo siguiente:

$$\sin(n\ x) = \sin(nx + nT),$$

por lo tanto:

$$n\ x = n\ x + n\ T + 2\ k\ \pi,$$

siendo k un número entero. Despejando a T obtenemos lo siguiente:

$$T = 2\ k\ \pi/n$$

De esta manera, al tomar k = 1, obtenemos el periodo más corto de la función g, siendo los demás periodos de esta función, múltiplos enteros de éste número.

Por otro lado, es evidente que uno de los periodos de g es $T = 2\ \pi/n$, pues se cumple lo siguiente:

$$g(x + T) = g(x + 2\ \pi/n) = \sin(x + 2\ \pi).$$

Teorema 9. Si n, m, son números enteros, entonces la función:

$$f(x) = \sin(n\ x) + \sin(m\ x)$$

es una función periódica con periodo $T = 2\pi/(n, m)$, en donde (n, m) es el máximo común divisor de n y m.

Demostración. Pongamos $d = (n, m)$, de forma que se cumple lo siguiente:

$$n = k_1 d \qquad m = k_2 d \qquad \text{con } k_1, k_2 \in Z \quad \text{y} \qquad (k_1, k_2) = 1$$

Entonces, se tiene lo siguiente:

$$f(x + 2\pi/d) = \sin[n x + n(2 \pi/d)] + \sin[m x + m(2 \pi/d)] =$$

$$= \sin[n x + k1 (2 \pi)] + \sin[m x + k2 (2 \pi)] =$$

$$= \sin[n x] \sin[m x] = f(x)$$

Resulta entonces que $T = 2\pi/d$ es uno de los periodos de f.

Por otra parte, consideremos los valores de f en los puntos $x = 2\pi/n$ y en $x = 2\pi/n + T$, siendo T alguno de los periodos de f.

$$f(2\pi/n) = \sin[n (2\pi/n)] + \sin[m (2\pi/n)] = \sin(2\pi m/n)$$

$$f(2\pi/n + T) = \sin[(2\pi/n) (n + T)] + \sin[(2\pi/n) (m + T)] = \sin(2\pi m/n + m T)$$

Igualando estas dos expresiones, se tiene que:

$$\sin(2\pi m/n) = \sin(2\pi m/n + m T)$$

por lo que:

$$2\pi m/n = 2\pi m/n + m T + 2i \pi, \text{ con } i \in Z$$

o de manera equivalente:

$$m\,T = 2\,i\,\pi \tag{1}$$

Ahora, evaluando la función f en los puntos $x = 2\pi/m$ y en $x = 2\pi/m + T$, obtenemos lo siguiente:

$$f(2\pi/m) = \sin[n\,(2\pi/m)] + \sin[m\,(2\pi/m)] = \sin(2\pi\,n/m)$$

$$f(2\pi/m + T) = \sin[(2\pi/m)\,(n + T)] + \sin[(2\pi/m)\,(m + T)] = \sin(2\pi\,n/m + n\,T)$$

por lo que:

$$\sin(2\pi\,n/m) = \sin(2\pi\,n/m + n\,T)$$

por lo tanto:

$$2\pi\,n/m = 2\pi\,n/m + n\,T + 2\,j\,\pi$$

$$n\,T = 2\,j\,\pi \tag{2}$$

Ahora, de (1) y (2), dividiendo entre k_2, k_1, respectivamente, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones en números enteros:

$$\begin{array}{lcl} d\,T = 2\,i\,\pi/k_2 & \qquad & 2\,i/k_2 = 2\,j/k_1 \\ d\,T = 2\,j\,\pi/k_1 & \qquad & i\,k_1 = j\,k_2 \end{array} \tag{3}$$

De la última ecuación, y puesto que $(k_1, k_2) = 1$, se sigue que, por ejemplo:

$$i = k_2\,t \qquad t \in Z$$

por lo que al sustituir este valor se obtiene:

$$(k_2\ t)\ k_1 = j\ k_2$$

$$j = k_1\ t$$

de manera que la solución general de este sistema está dada de la siguiente forma:

$$i = k_2\ t \qquad\qquad j = k_1\ t \qquad (4)$$

siendo t un número entero cualquiera.

Sustituyendo el valor de i, en la primera ecuación de (3), obtenemos lo siguiente:

$$d\ T = 2\ i\ \pi/k_2 = 2\ (k_2\ t)\ \pi/k_2 = 2\ t\ \pi$$

$$T = 2\ t\ \pi\ /\ d \qquad (5)$$

Poniendo ahora, t = 1, obtenemos la frecuencia fundamental de la función f, es decir $T = 2\ \pi\ /\ d$.

2.3.5 El sonido y las funciones trigonométricas.

El sonido se produce como resultado de las vibraciones de los cuerpos elásticos sometidos al efecto del choque o roce con un agente externo. Esta vibración transmitida en forma de movimiento ondulatorio impresiona el sentido del oído, experimentándose la sensación sonora. Por tanto, el sonido se puede definir como la sensación experimentada cuando llegan al oído ondas producidas por determinados movimientos vibratorios.

Entre dos sonidos distintos, el sentido del oído tiene la posibilidad de distinguir características particulares y diferenciadoras entre ambos que sirven para identificarlos. Estas características particulares se denominan cualidades del sonido. Las cualidades que se distinguen en toda sensación sonora, son tres:

- ***Intensidad o sonoridad***: Es la mayor o menor amplitud de las ondas y depende de la fuerza con que son producidas. Las variaciones de intensidad han dado lugar en la música a las diferencias de matices, creando con ello una enorme riqueza emotiva. La Intensidad se mide en decibelios (dB).
- ***Tono***: Es la mayor o menor altura de los sonidos comparados entre sí. El tono de los sonidos depende del número de vibraciones por segundo producidas, lo que se entiende como frecuencia de la vibración. Cuanta mayor sea el número de vibraciones por segundo, más agudo será el sonido y viceversa. La frecuencia se mide en Hercios (Hz).

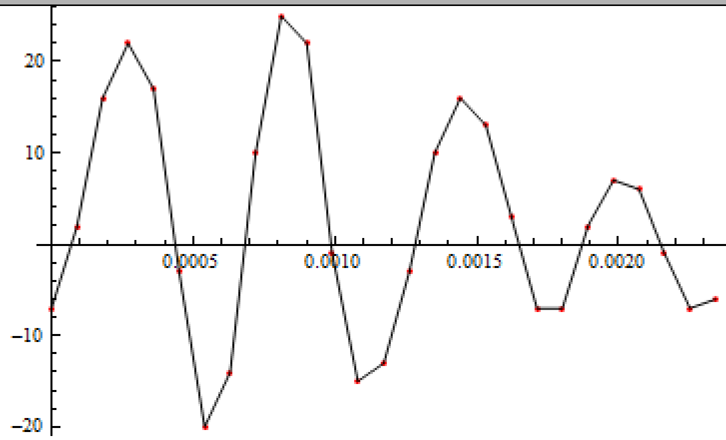
- ***Timbre***: Es la forma vibratoria de la onda sonora y se manifiesta como la calidad del sonido. Merced al timbre, es posible distinguir el instrumento o agente productor del sonido, aunque se produzcan varios sonidos a la vez con el mismo tono a altura.

El tono fundamental y los armónicos.

Para entender de manera sencilla estas propiedades del sonido analizaremos las notas musicales. Al igual que cualquier sonido, una nota musical se caracteriza físicamente (matemáticamente) por su amplitud, tono y timbre.

En este caso, la amplitud se mide con la variación de la presión del aire circundante al instrumento que produce la nota. El timbre es la frecuencia con la que se repite el patrón de presión básico. Finalmente, el timbre es lo que diferencia una nota, de la misma amplitud y tono, tocada por instrumentos diferentes. Por ejemplo, la siguiente gráfica muestra el patrón básico que tiene una nota tocada por un oboe.

Figura 5. Patrón básico de una nota tocada por un oboe.



Se puede observar que este patrón básico tiene una duración casi instantánea, de 0.00234236 segundos. Sin embargo, al repetirse por un tiempo más prolongado se logra escuchar perfectamente. Cabe también destacar que esta es una muestra digitalizada de la nota, lo que significa que sólo conocemos sus valores en los 27 puntos mostrados, que hemos unido con segmentos de recta.

Si ahora queremos reproducir el sonido a partir de este patrón básico, debemos interpolar los puntos muestreados por medio de una función que además tenga derivada continua. Para ello podemos emplear la transformada de Fourier[17] con lo que obtenemos la siguiente función de aproximación (de orden 15):

f(x) = 3.07689 +

0.746661 Cos[2682.42 x] + 0.2663 Cos[5364.83 x] + 4.3363 Cos[8047.25 x] - 14.4333 Cos[10729.7 x] + 0.079018 Cos[13412.1 x] + 2.46813 Cos[16094.5 x] - 0.139375 Cos[18776.9 x] - 0.042617 Cos[21459.3 x] - 0.373577 Cos[24141.7 x] + 0.456131 Cos[26824.2 x] - 0.0143346 Cos[29506.6 x] - 0.0414855 Cos[32189. x] + 0.23087 Cos[34871.4 x] - 0.041382 Cos[37553.8 x] - 0.0143561 Cos[40236.2 x] +

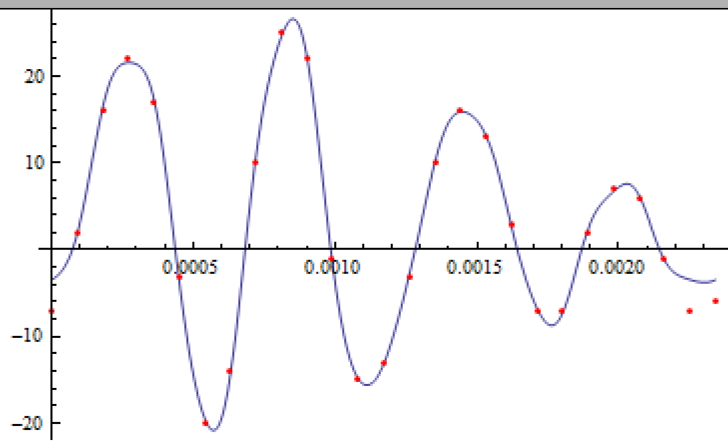
1.22633 Sin[2682.42 x] + 2.29524 Sin[5364.83 x] + 3.2915 Sin[8047.25 x] + 4.53896 Sin[10729.7 x] - 3.93076 Sin[13412.1 x] + 0.138117 Sin[16094.5 x] - 0.256052 Sin[18776.9 x] - 0.07901 Sin[21459.3 x] - 0.183594 Sin[24141.7 x] - 0.578222 Sin[26824.2 x] - 0.0443613 Sin[29506.6 x] - 0.447105 Sin[32189. x] -

[17] Las integrales para calcular los coeficientes de la serie correspondiente a los datos dados fueron realizadas con el método numérico de la regla del trapecio. Todos los cálculos involucrados fuero hechos con Mathematica 6.0.

0.0000433365 Sin[34871.4 x] + 0.447079 Sin[37553.8 x] + 0.0442798 Sin[40236.2 x]

cuya gráfica se muestra en la siguiente figura.

Figura 6. Interpolación de la muestra a través de la serie de Fourier.



Una vez que se han interpolado los puntos muestra por medio de una función continua, derivable y periódica (la serie de Fourier correspondiente), el sonido de esta nota, tocada por el oboe, puede ser fácilmente reproducida. En las siguientes imágenes se muestran las gráficas para intervalos de tiempo más amplios.

Figura 7. Repetición del patrón o tono básico de una nota de oboe.

Figura 7a. El sonido básico repetido ("tocado") tres veces, es decir, en el tiempo 3 T.

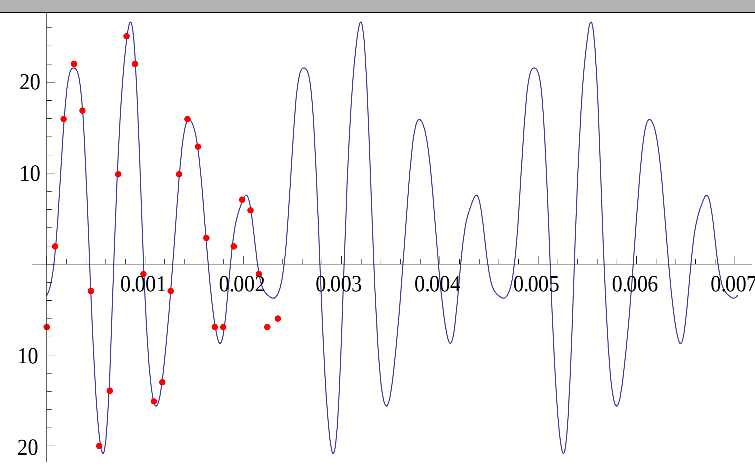


Figura 7b. El sonido básico "tocado" durante 1/16 segundo.

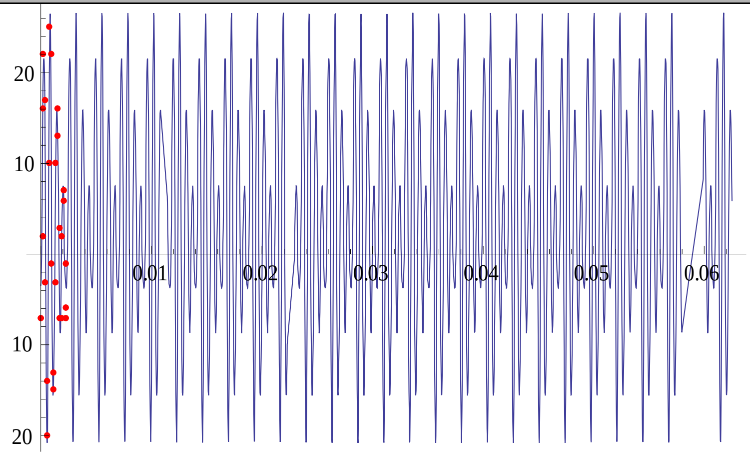


Figura 7c. El sonido básico repetido ("tocado") durante 1/8 segundo.

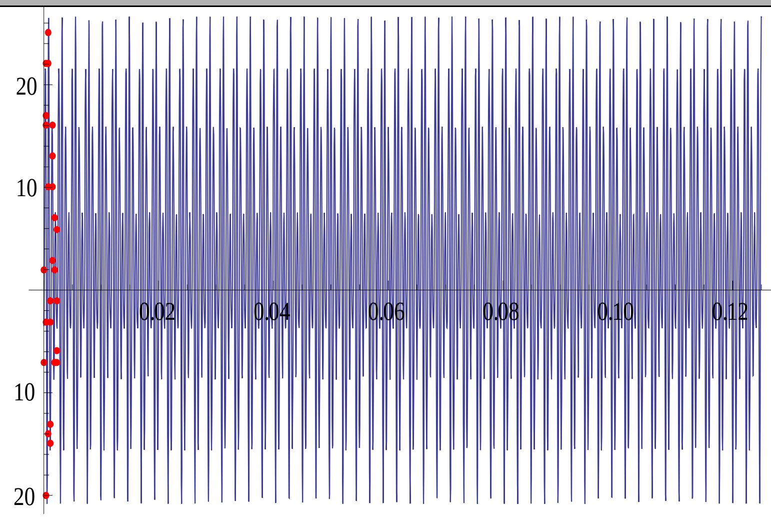
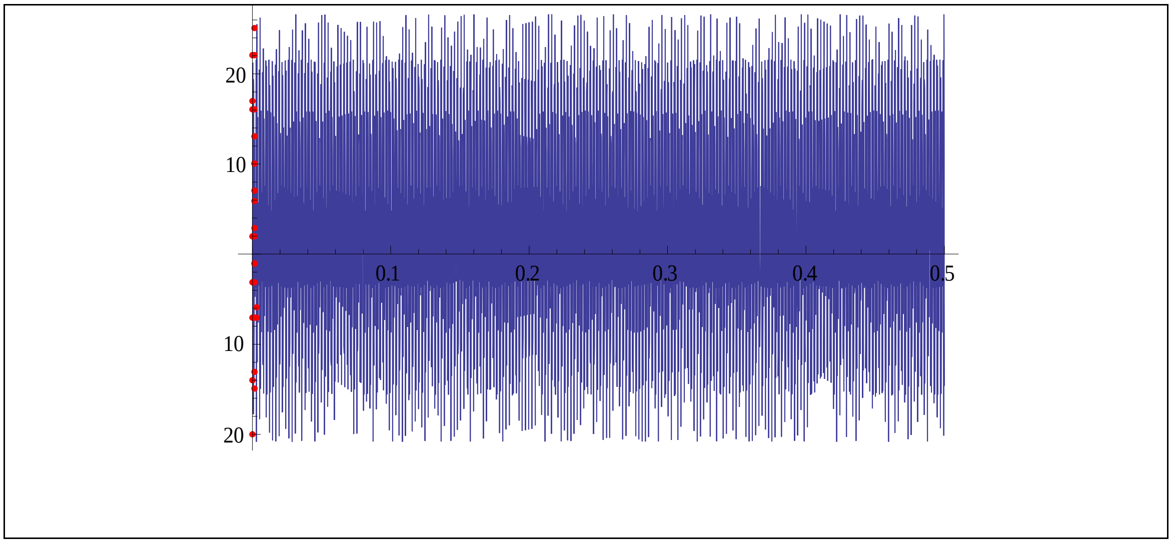


Figura 7d. El sonido básico repetido ("tocado") durante 1/2 segundo.



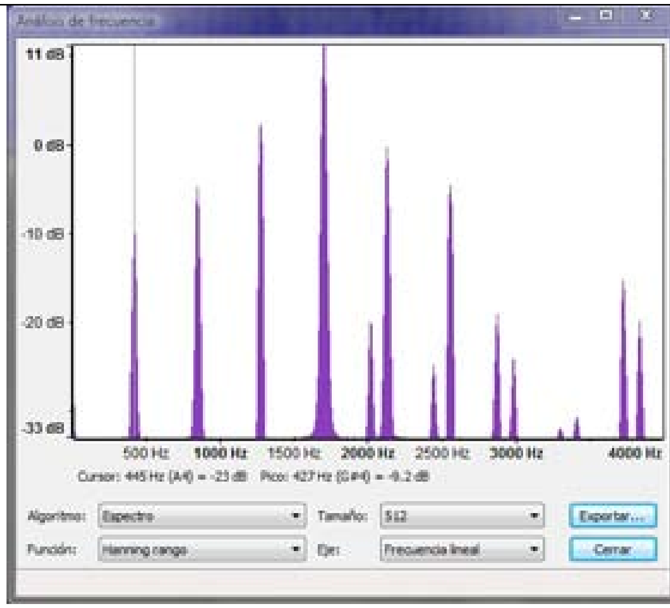
En este ejemplo, en el que nos han dado el periodo básico de un sonido (señal) como un conjunto de datos o muestra, podemos determinar su frecuencia o tono fundamental de una manera simple:

$$f_{fundamental} = 1/.00234236 = 426.92 \text{ Hz}$$

En general, la parte que actualmente proporciona la mayor información acerca de un sonido (señal) se encuentra en su representación como *espectograma*, es decir, en la relación que mantienen el tono fundamental, y sus múltiplos enteros o armónicos, con respecto a su amplitud, para lo que se emplea la *transformada discreta de Fourier*. En particular, el tono fundamental del sonido que hemos venido considerando, así como sus armónicos se muestra en el siguiente espectograma[18]:

Figura 8. Tono fundamental y armónicos de una nota de oboe.

[18] Espectograma tomado con Audacity.



El pico señalado con la línea vertical es el que corresponde al tono fundamental, en tanto los restantes corresponden a los tonos armónicos, es decir, a tonos que son múltiplos enteros de este sonido.

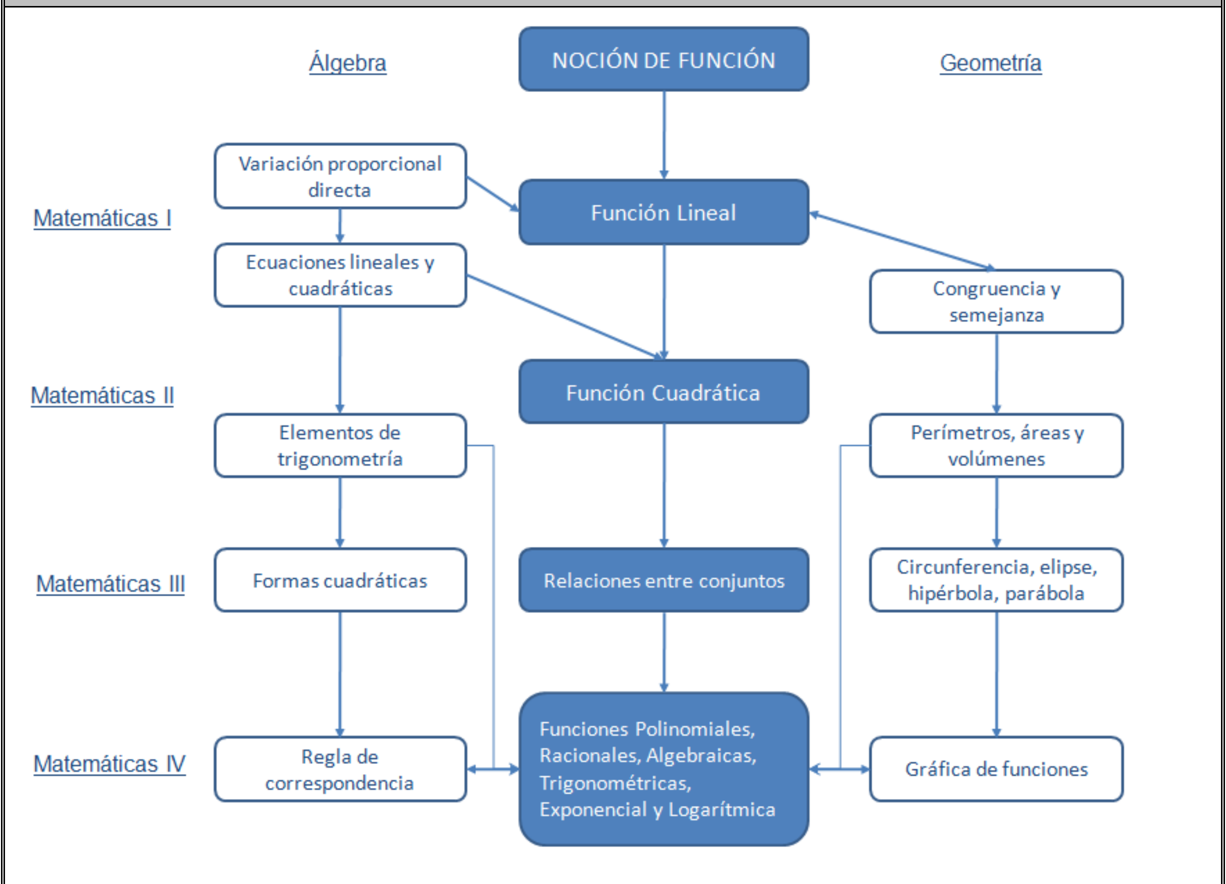
Capítulo 3. Puesta en escena de la unidad didáctica: Funciones trigonométricas.

En este capítulo exponemos detalladamente la *Unidad didáctica: Funciones trigonométricas*, en el marco de su realización o puesta en escena.

3.1 Ubicación de la unidad didáctica.

El Plan de Estudios de Matemáticas del CCH-UNAM, así como sus Programas: Matemáticas I, ..., Matemáticas IV; los hemos estructurado en torno a la noción de función como se muestra en el siguiente mapa conceptual. Allí se explícita cómo todos estos programas quedan perfectamente organizados e interrelacionados a partir de dicha noción.

Figura 9. Mapa conceptual: la noción de función como eje estructurador del Programa de Matemáticas del CCH-UNAM.



Por otra parte, el programa de Matemáticas IV está dedicado completamente al estudio básico de diferentes tipos de funciones, siendo la unidad temática 3 el punto de partida para la elaboración de la unidad didáctica expuesta a continuación. Los objetivos y contenidos de esta unidad temática son los siguientes.[19]

<table>
<tr><th colspan="3">Tabla 5. Programa de Matemáticas IV. Unidad III. Funciones trigonométricas.</th></tr>
<tr><td colspan="3">Propósitos:

Extender el concepto de razones trigonométricas e iniciar el estudio de las funciones trascendentes a través de las funciones circulares, cuya variación periódica permite modelar fenómenos cíclicos muy diversos. Reforzar el análisis de las relaciones entre gráfica y parámetros que se ha venido realizando, resaltando la importancia de ajustar los parámetros para construir el modelo que se ciña a un fenómeno determinado.

Tiempo: 20 horas</td></tr>
<tr><th>Aprendizajes</th><th>Estrategias</th><th>Temática</th></tr>
<tr><td>El alumno:

- Explora, en una situación o fenómeno de variación periódica, valores, condiciones, relaciones o comportamientos, a través de diagramas, tablas, expresiones algebraicas, etcétera que le permitan obtener información de ello, como un paso previo al establecimiento de conceptos, y al manejo de las representaciones pertinentes.

- Recuerda el significado de las razones trigonométricas para ángulos agudos, en particular, seno, coseno y tangente.

- Identifica el ángulo, como una rotación de un radio de un círculo. Lado inicial y lado final.

- Convierte medidas angulares de grados a radianes y viceversa.

- Calcula algunos valores de las</td><td>y coseno que se refieran a contextos Tanto al inicio como en el desarrollo de la temática, es útil incorporar ejemplos de fenómenos de comportamiento periódico, cuya modelación involucra fundamentalmente seno diversos que despierten interés en el alumno, como pueden ser: ondas sonoras, encefalogramas, ciclo de la respiración, estudio de las mareas, biorritmo, corriente alterna, intensidad de la luz diurna etcétera.

- Recordar el concepto de ángulo, la forma en que se mide, hablar de radianes y ángulos negativos.

- Invitarlos a construir una tabla que relacione los ángulos de 30°, 45°, 60°, 90° y 180°, por ejemplo, con sus respectivos valores en radianes.

Una vez que se ha introducido el círculo unitario, y en él se ha explicado la forma en que pueden calcularse el seno y el coseno para ángulos diversos no agudos, hay que pedirles que ellos lo hagan para algunos círculos con radios diferentes, de modo que vean</td><td>Situaciones que involucran variación periódica.

Generalización, en el plano cartesiano, de las razones trigonométricas para un ángulo cualquiera.

a) Círculo unitario: extensión de
las funciones seno y coseno
para ángulos no agudos
b) Ángulos positivos y negativos.
c) Ángulo de referencia. Sus cuatro posiciones.
d) Medida de ángulos con distintas unidades: grados y radianes.
e) Cálculo del seno y el coseno para ángulos mayores de 90°.

- Gráfica de las funciones seno, coseno y tangente.</td></tr>
</table>

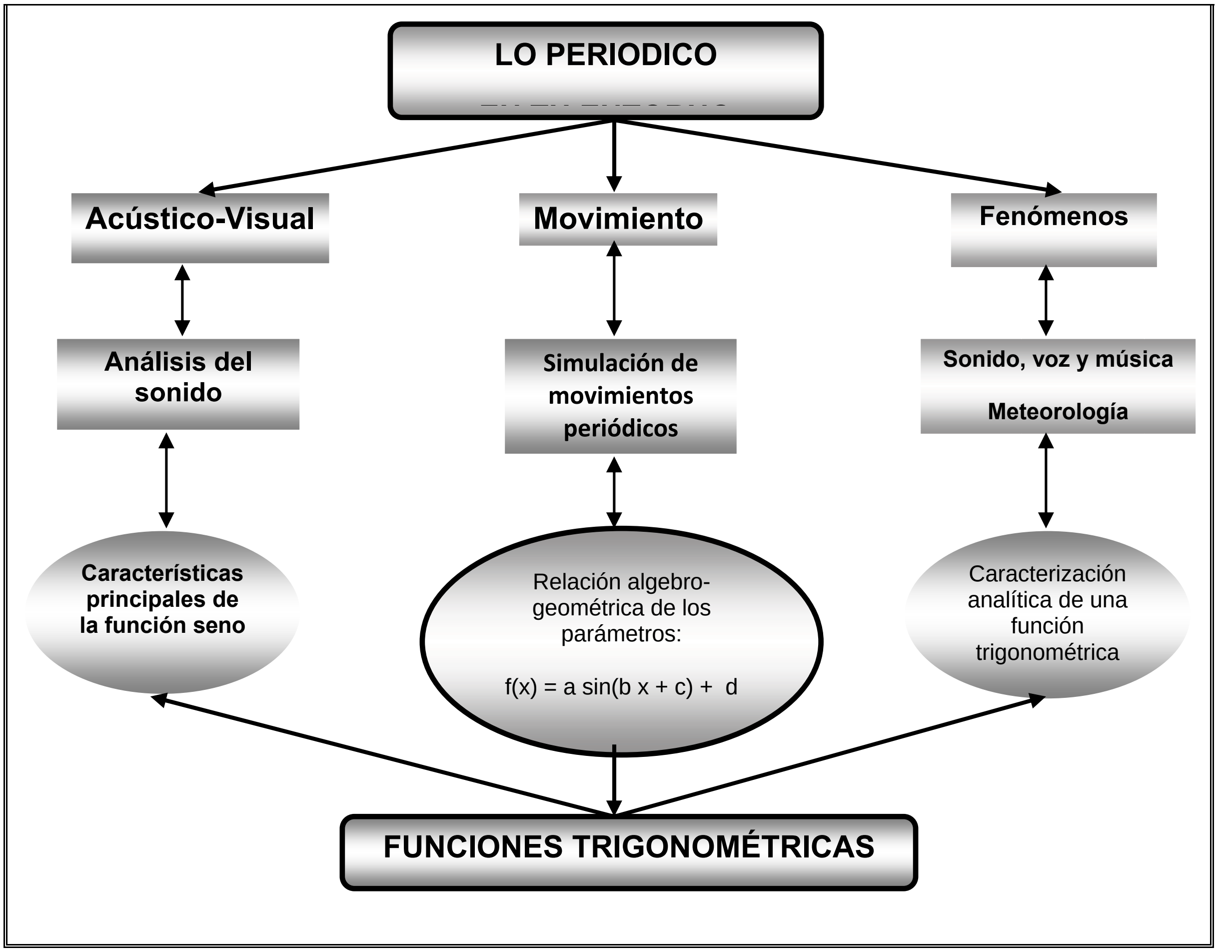
[19] Cf. http://www.cch.unam.mx/plandeestudios/

razones seno y coseno para ángulos no agudos, auxiliándose de ángulos de referencia inscritos en el círculo unitario. - Generaliza el concepto de razón trigonométrica de un ángulo agudo a un ángulo cualquiera. - Expresa las razones trigonométricas como funciones, con los ángulos medidos en radianes. - Identifica en las funciones del tipo: f (x) : a*sen(b*x + c) = d f (x) : a*cos(b*x + c) = d la frecuencia, la amplitud, el periodo y ángulo de desfasamiento. Los usará para dibujar directamente la gráfica. De igual manera será capaz de identificar en la gráfica estos parámetros para proporcionar la expresión algebraica correspondiente. - Conoce algunas aplicaciones de las funciones trigonométricas en el estudio de fenómenos diversos de variación periódica, por ejemplo: movimiento circular, movimiento del péndulo, del pistón, ciclo de la respiración o de los latidos del corazón, estudio de las mareas, fenómenos ondulatorios, ondas electromagnéticas, etcétera.	que el tamaño del radio no afecta el resultado; a la vez, sirve para reforzar el procedimiento. - Analizar el comportamiento del seno, coseno y tangente, cuando el ángulo varía de 0° a 90°; de 90° a 180°; de 180° a 270° y de 270° a 360°. Guiar al alumno para obtener conclusiones sobre signos, repetición de valores, qué sucede cuando x toma los valores 0°, 90°, 180° etcétera. Es conveniente utilizar la calculadora para hacer más eficientes los cálculos y conversiones. Para trazar las gráficas de las funciones seno y coseno, se puede retomar el círculo unitario, trazado en papel milimétrico en la orilla de la hoja, para que en el resto de ella vayan construyendo la gráfica. En clase se puede trabajar con coseno y dejarles que tracen la del seno. Ya con estas dos se procedería a graficar la función tangente y relacionar los ceros del coseno con los rompimientos de la gráfica. Se aprovecharían las gráficas de estas tres funciones para estudiar sus características (dominio, rango, simetrías, etcétera.) resaltando la periodicidad y las relaciones entre las tres gráficas. Solicitarles que expresen con sus propias palabras y luego con símbolos, la condición de variación periódica. A partir de las gráficas de algunos fenómenos o situaciones que se modelen con seno y coseno, introducir el concepto de amplitud, periodo, diferencia de fase, frecuencia. Dejar que ellos en casa construyan gráficas para distintos valores de estos parámetros. Con un mismo ejemplo, analizar cómo puede modelarse indistintamente por seno o coseno, y resaltar el hecho de	a) Análisis del dominio y rango. b) Noción de amplitud, periodo y frecuencia. - Definición de función periódica: f (x + k) =f (x) . Gráfica de las funciones: f (x) = a*sen(b*x + c) = d f (x) = a*cos(b*x + c) = d a) Análisis del comportamiento de sus parámetros a, b. c y d. b) Fase y ángulo de desfasamiento. - Las funciones trigonométricas, como modelos de fenómenos periódicos. - Problemas de aplicación.

	que habiendo identificado que se trata de este tipo de variación periódica, el problema de la modelación se reduce a determinar cuáles deben ser los valores de los parámetros a, b, c y d, en las expresiones: f (x) = a*sen(b*x + c) = d f (x) = a*cos(b*x + c) = d Se sugiere apoyarse en el uso de software como Excel, Derive, WinPlot y Máxima.	

Esta unidad didáctica se ha organizado a partir del siguiente mapa conceptual, en donde "lo periódico" ocupa el papel central.

Figura 10. Mapa conceptual: Estructura general de la enseñanza de la variación periódica.



Con este mapa es posible trazar diferentes rutas de aprendizaje que serán usadas para poner en escena las cuatro fases de aprendizaje de las que consta una unidad didáctica bajo nuestra perspectiva.[20] En lo que sigue, haremos explícita cada una de estas fases, así como las secuencias y hojas de trabajo de las que se componen.

3.2 *Unidad Didáctica: Funciones trigonométricas.*

3.2.1 Lo "periódico" como eje estructurador de esta unidad didáctica.

El aprendizaje-enseñanza de la *noción* de función trigonométrica, estructurada en torno a lo *cíclico* o *periódico*, debe partir de lo que "el aprendiz ya sabe" y, como ya hemos señalado, implica partir de su estructura cognitiva, o sea, del contenido total y de la organización de sus ideas acerca de los términos "cíclico" y periódico", así como de algunos conceptos matemáticos (razón, razón trigonométrica, medición angular, etc.), que permitan el estudio de lo periódico en los términos establecidos por la unidad temática de Matemáticas IV del plan de estudios del CCH.

[20] Cf. Capítulo 1.

Haciendo una breve recapitulación de lo ya dicho en el capítulo 1,[21] acerca de la importancia que tienen los términos "cíclico" y periódico" para el aprendizaje de las funciones trigonométricas en un nivel básico, como lo exige nuestro contexto, cabe insistir en lo siguiente.

- Las funciones periódicas, en particular, las funciones trigonométricas (seno y coseno), proviene del hecho de que muchos fenómenos que la técnica y la ciencia emplean y estudian son interpretados, precisamente, como funciones periódicas, como, por ejemplo, en las telecomunicaciones y señales eléctricas y digitales; en la meteorología (las estaciones del año que, antes de que se hiciera evidente el cambio climático global, eran cambios climáticos cíclicos); en la medicina, en donde algunas medidas de la salud humana dependen del buen ritmo de ciertos fenómenos fisiológicos (verbigracia, electrocardiograma, electroencefalograma, ritmo y volumen de respiración, etc.).

- Además, estos términos, "cíclico" y "periódico", son nociones básicas de la ciencia contemporánea, verbigracia, en electromagnetismo*, mecánica cuántica, ciclos biológicos* etc., cuyo desarrollo es paralelo al gran avance tecnológico de nuestra época, como lo ejemplifican, el *láser, la holografía, radares, ambientes sonoros* etc., y su amplia gama de aplicaciones.

- [Callahan, et al; 1992] afirman que la intención de re-presentar científicamente a los fenómenos naturales no tiene otra intención que la de imponerles un orden o regularidad y, quizá lo más importante, el de ponerlos a disposición del hombre para su provecho, cuestión para lo que se hace necesaria una re-presentación funcional de los mismos, pues con su ayuda se puede predecir su comportamiento y así tomar esta representación como dato importante en la toma de decisiones.

Todo lo anterior, muestra que lo "periódico" en sus sentidos técnico y científico, es decir, matemático, está presente en la vida cotidiana de cualquier persona en múltiples y variadas formas o necesidades, al punto de que a nuestro tiempo se le ha dado el nombre de la "era de la información" gracias, precisamente, al desarrollo de instrumentos tecnológicos en los que lo "cíclico" o "periódico" juegan un papel de primera importancia: ¿sería posible la TV sin haber caracterizado la señal de audio y video como una *onda* electromagnética?

Por otra parte, y siendo consecuentes con la interpretación constructivista del aprendizaje, la selección y la naturaleza de las actividades de enseñanza deben ser suficientemente intencionadas, con la finalidad de permitir que los estudiantes alcancen, en la medida de lo posible, los objetivos de aprendizaje de la unidad temática bajo consideración. De acuerdo con estos propósitos, la secuencia de enseñanza con la que sustentamos la tesis de este trabajo está organizada de la siguiente forma.[22]

[21] Cf. Págs. 1-2.

[22] Cf. Tabla 1, capítulo 1.

- *Fase de inicio:* introducción a las funciones trigonométricas a partir de lo ″cíclico″ o "periódico".
- *Fase de información e introducción de conceptos.*
- *Fase de ampliación de conceptos.*
- *Fase de aplicación*.
- Evaluación y conclusiones.

Es conveniente mencionar que se ha pretendido que estas actividades estén contextualizadas para atraer la atención del alumno sobre la importancia que juega la variación periódica en su contexto, y que sean adecuadas a su nivel cognitivo.

3.2.2 Fase de inicio.

El desarrollo de esta fase se lleva a cabo con las siguientes secuencias didácticas.

Secuencia didáctica 1.

Esta fase comienza con una comparación entre magnitudes que varían periódicamente y magnitudes que no lo hacen así, a través del análisis sencillo de diversos fenómenos físicos que corresponden a este tipo de variaciones. Con este análisis se pretende llevar a cabo una recapitulación acerca de las distintas representaciones (aritméticas, geométricas, algebraicas y verbales) que caracterizan a cada una de las variaciones mencionadas, y que ya han sido estudiadas en las unidades temáticas anteriores, con la finalidad de destacar sus diferencias funcionales con relación a un *fenómeno cíclico* o *periódico*.

El profesor es el que lleva a cabo la exposición en la que, además, irá haciendo diversas preguntas (generadoras) acerca de "lo periódico", con la intención de que los estudiantes dirijan su atención a los fenómenos de este tipo y externen sus prejuicios, ideas, conceptos, etc., acerca de ello. Cabe destacar que los estudiantes no sólo participarán con sus ideas, comentarios, etc., sino que deberán ir realizando la hoja de trabajo 1 conforme se desarrolla este análisis. Más aún, en esta hoja de trabajo, los estudiantes harán uso del programa de creación y edición de sonido digital Audacity, con el que establecerán fácilmente las representaciones geométricas y aritméticas de un fenómeno periódico, verbigracia, los sonidos emitidos por murciélagos y ballenas.

Secuencia didáctica 2.

Una vez hecho lo anterior, el profesor les pide a los alumnos que contesten un examen diagnóstico (ver hoja de trabajo 2,), cuyo propósito es detectar los prejuicios, ideas, etc., que giren en torno al término "cíclico" o periódico", además de que le permitan al profesor tener una idea general de los pre-requisitos matemáticos que se cree son necesarios para el desarrollo de esta unidad didáctica.

El profesor deberá aclararles a los estudiantes, que este examen es sólo un diagnóstico, y de ninguna manera una evaluación o parte de ella.

Conclusión de la fase de inicio (secuencia didáctica 3).

Para concluir esta fase, los estudiantes realizarán como actividad extra-clase, una investigación documental acerca de los principales conceptos matemáticos y físicos de "lo periódico". Esta investigación la harán en artículos sencillos y contextualizados, con la finalidad de que, en la siguiente clase y organizados en equipos, expongan su investigación.

Para ello cada equipo de trabajo elegirá un artículo junto con la guía de lectura correspondiente, a través de la cual llevarán a cabo dicha investigación. Ver hoja de trabajo 3.

3.2.3 Hojas de trabajo para la fase de inicio.

Las hojas de trabajo correspondientes a las secuencias didácticas mencionadas son las siguientes.

Hoja de trabajo 1. Introducción a los fenómenos y variaciones periódicas.

I. *Variación lineal*. En la tabla 5 se te proporcionan los valores de la deformación de un resorte al aplicarse distintas fuerzas. Con tus compañeros de equipo resuelve las siguientes preguntas y las respuestas que obtengan escríbelas en el espacio indicado.

1. Completa la columna que corresponde al cociente *F/d* y exprésala en *cm/N*.

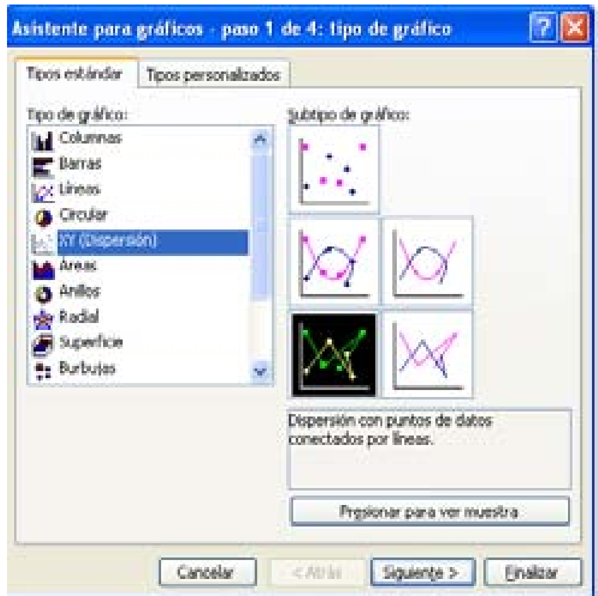
Tabla 6. Representación aritmética de la variación lineal

d(cm)	0	0.2	0.5	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8
F(N)	0	0.5	1.3	1.9	2.9	3.8	4.7	5.5	6.3
F(N)/d(cm)	0								

2. ¿El valor del cociente es más o menos constante? ¿Cuál es este valor?

3. La sucesión de valores tanto de la deformación como de la fuerza es creciente o decreciente.

4. Para determinar la relación funcional entre la *fuerza (F)* y la deformación del *resorte (d)*. Realiza lo siguiente



   a. Abre Excel
   b. Selecciona los datos y en el menú principal, elige la opción de *gráfica.*
   c. En el asistente para gráficas, elige la opción xy (dispersión) (ver fig. ")
   d. Llámale al eje x: distancia, y al eje y: fuerza
   e. Ahora, haz clic derecho sobre la gráfica. Elige línea de tendencia lineal.
   f. Haz clic en opciones, y elige presentar ecuación en el gráfico.

5. Observa los registros *geométrico y algebraico* que obtuviste ¿Qué tipo de variación se puede establecer entre la fuerza y la deformación del resorte?

6. Escribe la relación entre la fuerza aplicada al resorte y su deformación. ¿Representa una función lineal? Explica tu respuesta.

7. Escribe en forma de enunciado (*registro verbal*) la variación entre la fuerza y la deformación del resorte.

II. *Variación inversa*. En la siguiente tabla se dan los valores de la presión ejercida sobre un gas y el cambio de volumen de éste para dos temperaturas diferentes.

Tabla 7. Representación aritmética de la variación inversa.						
Temperatura 27°C				***Temperatura 130°C***		
P (N/m²)	*V (m³)*	***P/V***	***PV***	***P (N/m²)***	*V (m³)*	PV *(Nm)*
0.81×10^6	*2.43*			*1.85×10^6*	*1.41*	
1.30×10^6	*1.51*			*2.19×10^6*	*1.20*	
1.74×10^6	*1.13*			*2.46×10^6*	*1.07*	
2.05×10^6	*0.96*			*2.94×10^6*	*0.89*	
2.56×10^6	*0.77*			*3.14×10^6*	*0.83*	

1. Observa los valores de la presión y el volumen, ¿qué puedes concluir con respecto a éstos?.

2. Completa en cada caso la columna que corresponde al cociente P/V y al producto PV. ¿Cómo es el producto P V cuando se mantiene constante la temperatura? Escribe tus conclusiones.

3. ¿Se puede establecer una variación directamente proporcional entre la presión y el volumen? ¿Por qué razón?

4. Grafica en Excel *la presión (P)* y el *Volumen (V)* del gas, para cada temperatura. ¿Los puntos están alineados? Explica tu respuesta.

5. Observa el producto P V y la gráfica que obtuviste ¿Qué tipo de variación se puede establecer entre la presión (P) y el volumen (V) del gas? Represéntala en la forma: $P\,V = k$ (*registro algebraico*)

6. Escribe en forma de enunciado (registro *verbal*) la variación entre la presión y el volumen.

III. *Variación cuadrática* (caída libre de un objeto). En la tabla 8, se te proporciona la tabla de valores de las posiciones y el tiempo de una bola de billar en caída libre. Con tus compañeros de equipo contesta las siguientes preguntas y las respuestas que obtengan escríbelas en el espacio indicado.

1. Completa la siguiente tabla, escribe el cociente h/t en la fila correspondiente.

Tabla 8. Representación aritmética de la variación cuadrática

t (seg.)	0	0.03	0.07	0.10	0.13	0.17	0.20	0.23	0.27	0.30	0.33
h (cm)	0	1.5	3.1	5.1	7.1	9.4	12	14.5	17.4	20.5	23.8
h/t(cm/s)											

2. Haz la gráfica en Excel de la altura (h) contra el tiempo (t). ¿Qué tipo de gráfico obtuviste?

3. Determina la relación entre la altura y el tiempo de caída de la bola de billar. ¿Que tipo de relación es?

IV. *Variación periódica*. Representación gráfica del sonido a través del programa *Audacity*

Con los archivos de sonido que te proporcionará el profesor, a saber, el sonido emitido por un murciélago y el emitido por una ballena, obtén el espectrograma de cada uno de ellos empleando el programa Audacity. Ahora bien, observa detenidamente los espectrogramas[23] y contesta las siguientes preguntas.

[23] Los espectrogramas los puede consultar en el anexo I.

1. ¿Qué similitudes y diferencias encuentras entre estos espectrogramas (gráficas) con la gráfica de un fenómeno lineal?.

2. ¿Representa la gráfica del sonido una variación inversa (cuadrática)? (Ve la gráfica 2).

3. ¿Es el sonido una variación acelerada (cuadrática)? (Ve la gráfica 3).

4. Copia el espectrograma del murciélago, pégalo en GeoGebra y haz lo siguiente.

    a. Coloca puntos sobre el espectrograma para que tengas una muestra aritmético-geométrica del sonido que emite el murciélago.

    b. Ahora, escribe las coordenadas de los puntos en la siguiente tabla:

Tabla 9. Representación aritmética de la variación periódica.

punto	***A***	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***	***G***	***H***	***I***	***J***	***L***	***M***	***N***	***O***
x														
y														

5. Describe cómo está variando la magnitud "y". ¿Está aumentando? ¿Está disminuyendo? Explica.

6. ¿Encuentras un valor máximo para la magnitud "y"? ¿Encuentras un valor mínimo para la magnitud "y"? Explica.

7. ¿Cómo se le llama a éste tipo de variación?

2. ¿Cuál crees que sea una expresión algebraica (fórmula) asociada a los espectrogramas?

Hoja de trabajo 2. Examen diagnóstico.

Observaciones.

- Las siguientes preguntas tienen como propósito ubicar tus ideas, opiniones o, en una palabra, tu punto de vista actual acerca de lo que entiendes por variación: directa, inversa, cuadrática y periódica y, por supuesto con las funciones trigonométricas que son el tema de esta unidad.

- Es conveniente insistir en que esto no es un examen, sino un documento que me servirá, como profesor del tema, para poder planear y desarrollar contigo los temas de esta unidad, por lo que te recomiendo contestes las preguntas de acuerdo con tu forma de entenderlas.

1. Describe lo que entiendes por variación o fenómeno "periódico".

2. Marca aquellos fenómenos que son periódicos.

a). Estaciones del año.	(b). Estatura de una persona.	(c). La voz humana.
(e). Las ondas sonoras.	(d). El origen del universo.	(f). La actividad del corazón

3. Observemos el movimiento de las manecillas de un reloj.

   c. Ahora consideremos la manecilla del segundero, ¿cuál es el periodo de las manecillas que marca los minutos?

   ____

   b. Consideremos la manecilla del segundero, ¿cuánto tiempo tarda en reiniciar su recorrido a partir de un determinado punto?

   ____

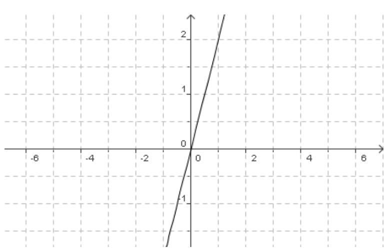
c. Finalmente, ¿cuál es el periodo de la manecilla que marca las horas?

3. ¿Qué hace comunes a las estaciones del año, al movimiento de un péndulo y a la voz humana? Explica.

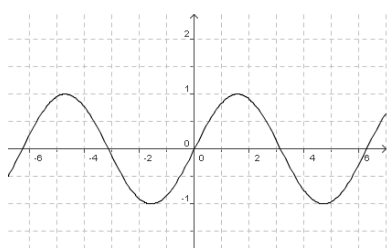
4. En la siguiente tabla, en la columna de la izquierda se te da la ecuación que describe la variación entre las variables x, y. Escribe en la columna de la derecha el tipo de variación que hay entre las variables. Recuerda que puede ser una variación: directa, inversa, cuadrática o periódica.

Ecuación	***Tipo de variación***
$y = kx$	
$y = x^2$	
$y = \frac{k}{x}$	
$y = \sin(x)$	

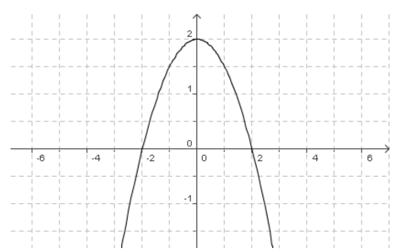
5. De las siguientes gráficas, marca aquellas que representen un fenómeno periódico.



Recta.



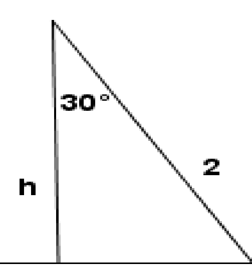
Ola.



Parábola.

6. Calcula las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente; de los ángulos agudos del siguiente triángulo rectángulo.

razón trigonométrica:	**ángulo de 30°**	**ángulo de 60°**
seno:		
coseno:		



tangente:			

7. Usa tu calculadora para completar las siguientes tablas.

razón trigonométrica:	ángulo° =
sen(θ) = 0	
cos(θ) = -0.981	
tan(θ) = 1	

razón trigonométrica:	ángulo° =
sen(θ) = -0.5	
cos(θ) = 1	
tan(θ) = 10.87	

8. Cuando se ve la cúspide de la torre Eiffel a una distancia de 70 metros del centro de la base, el ángulo de elevación es de 79.2°. Calcula la altura de la torre.

   Sugerencia. Haz un dibujo o esquema de la situación y emplea una razón trigonométrica adecuada a los datos del problema.

Esquema del problema.	***Cálculos.***

9. ¿Cómo calculas el área y el perímetro de una circunferencia de radio r?

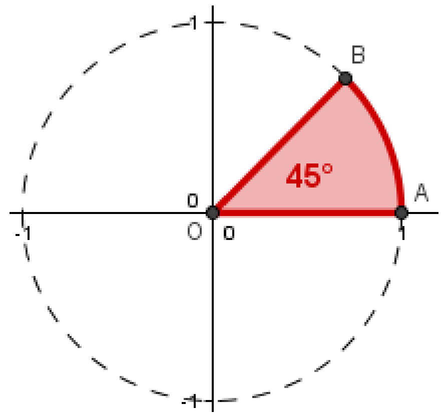
10. Calcula el área del sector circular OAB.

área OAB = _______________.

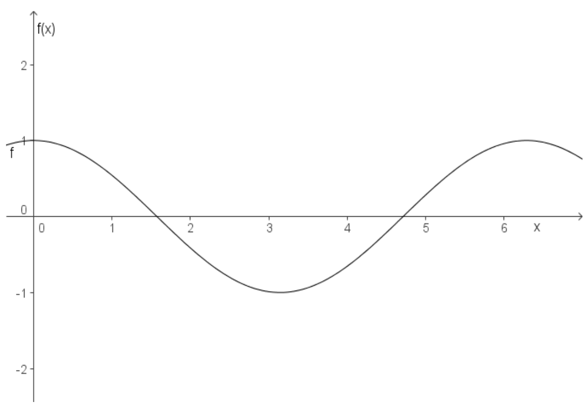
11. Calcula la longitud del arco de circunferencia AB.

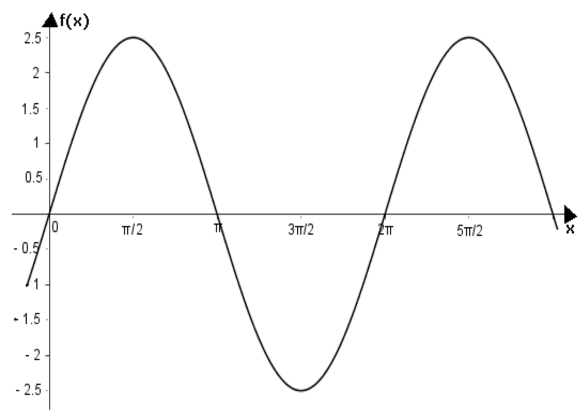
longitud AB = _______________.

Nota. Observa que el radio de la circunferencia es igual a 1.



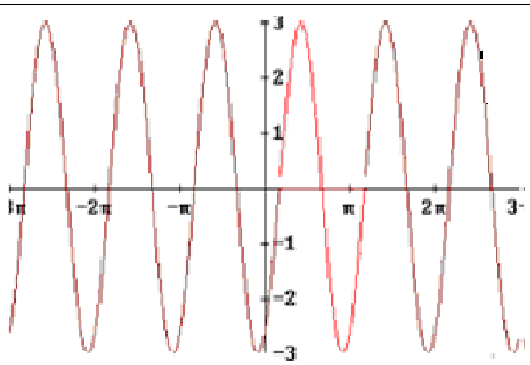
12. Determina la *expresión analítica* de las siguientes gráficas. Escribe el resultado en el espacio correspondiente

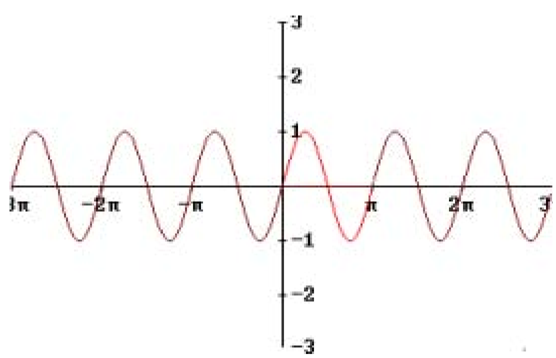




a) F(x) =

b) F(x) =





c) F(x) =

d) F(x) =

Hoja de trabajo 3. Las principales nociones acerca de los fenómenos periódicos.		
Equipo 1: *Acústica submarina*. Actividad. Con base en la lectura: *la importancia de la acústica submarina*[24], contesta en equipo las siguientes preguntas. 1. ¿Qué es el sonido? 2. ¿Describan los ciclos de compresión y rarefacción? 3. ¿En donde viaja más rápido el sonido, en el aire, o en el agua? 4. ¿Qué es un sonar? ¿Cómo funciona? 5. Con los datos que aparecen en el artículo completen la siguiente tabla.		
Tabla 10. frecuencias		
objeto	***frecuencia mínima:***	***frecuencia máxima:***
oído humano		
perro		
murciélago		
ballena		
Equipo 2: *Holografía digital*.[25] Actividad. Con base en la lectura de este artículo contesta en equipo las siguientes preguntas. 1. ¿Qué es la holografía? 2. ¿Cuáles son los parámetros físicos que determinan el contenido de un holograma? 3. ¿Qué propiedades tiene la luz láser? 4. ¿Cómo se determina la deformación instantánea que experimenta un cuerpo? 5. ¿En qué se aplica la holografía digital pulsada? 6. ¿Qué se entiende por prueba óptica no destructiva?		

[24] Vera Amaro,R *Acústica Submarina* , Rev. Conversus, Diciembre 2005, Pág. 42 - 44

[25] Pérez, C., Hernández, S.. *Holografía Digital*. Rev. Ciencia y Desarrollo, Abril 2006, Pág. 50- 51.

Equipo 3: *Radares meteorológicos*.[26]

Actividad. Con base en la lectura de este artículo contesta en equipo las siguientes preguntas.

1. ¿Qué transmiten los radares y en dónde se reflejan?
2. ¿Cuál es la función de la onda emitida reflejada en el radar?
3. ¿Qué características tiene la antena del radar?
4. ¿Qué características tiene el pulso del radar?
5. ¿Porqué la cúpula del radar tiene forma parabólica?

Equipo 4: *Murciélagos: Arquitectos del Desierto*.[27]

Actividad. Con base en la lectura de este artículo contesta en equipo las siguientes preguntas.

1. ¿Para qué le sirve al murciélago la capacidad de ecolocación?
2. ¿Cómo ubica el murciélago lo que hay a su alrededor?
3. ¿Qué es un monograma?
4. ¿Qué información proporciona la detección acústica?

3.2.4 Fase de información e introducción de conceptos.

El desarrollo de esta fase se realizará a través de las siguientes secuencias didácticas.

Secuencia didáctica 4.

Esta fase inicia con la exposición de los resultados obtenidos por los equipos de estudiantes al haber realizado la investigación con la que se culminó la fase de inicio (secuencia didáctica 3). Esta exposición deberá dar lugar a una discusión grupal en la que se ponga en relieve la importancia que las co-variaciones cíclicas o periódicas tienen en el entorno de cualquier persona, en particular, en el contexto de los mismos estudiantes.

Esta discusión será el motivo para que los estudiantes, con las observaciones del profesor, reparen en los principales parámetros que caracterizan matemáticamente a un fenómeno de esta naturaleza. Finalmente, esta exposición y discusión permitirá que los estudiantes vayan resolviendo la hoja de trabajo 4.

Secuencia didáctica 5.

[26] Corral Herrera G. *Radares Meteorológicos*. Rev. Conversus Sep. 2007, Pág. 12 – 14.

[27] Rojas Martínez A. *Murciélagos: Arquitectos del Desierto*. Rev. Ciencia y Desarrollo, Abril 2003, Pág. 4 – 9.

Esta secuencia parte de la confrontación de los estudiantes con una situación problemática, misma que irán resolviendo agrupados en equipos, bajo la tutoría del profesor y con la organización del trabajo establecida en la hoja de trabajo 5, "La rueda de la fortuna". Esta situación dará lugar a que el profesor *generalice* las razones trigonométricas para los lados de un triángulo (Matemáticas II), a las razones trigonométricas correspondientes a los puntos del plano coordenado rectangularmente.

Después de haber realizado lo anterior, se establece lo siguiente.

- Determinación del signo de las razones trigonométricas en cada cuadrante.
- Cálculo del valor de las razones trigonométricas en ángulos notables, empleando el plano coordenado.

Por último, se le deja al estudiante como actividad extra-clase, una investigación acerca del *ángulo de referencia*.

Secuencia didáctica 6.

El propósito de esta secuencia es eminentemente práctico, en el sentido de que proveerá al estudiante de la herramienta moderna de medición angular, a saber, la medición angular a través de *longitudes* o *radianes* (números reales), así como de la conversión de medidas angulares grados-radianes. Para ello, el alumno realizara las siguientes actividades:

Actividad 1: Se le pedirá al alumno que haga una investigación documental acerca de las distintas formas de medir un ángulo, esto es, que investiguen la relación entre grados y radianes. Relación que más adelante se determinará con el *círculo unitario*.

Actividad 2: Se hará uso de un escenario interactivo que el mismo construirá con la interfaz algebro-geométrica GeoGebra.

La secuencia será organizada por la hoja de trabajo 6.

Secuencia didáctica 7.

Esta secuencia se realizará a través de las siguientes actividades:

Actividad 1: Exposición del profesor para introducir el *círculo unitario*, con la finalidad de extender las razones trigonométricas en el plano cartesiano a funciones trigonométricas como funciones reales de variable real, dadas en la secuencia didáctica 5. Así mismo, el alumno tendrá noticia de la necesidad de medir los ángulos en radianes como una forma *moderna* de medir un ángulo.

Actividad 2: Por otro lado, también a través del círculo unitario se dará el procedimiento para determinar la representación geométrica de cada una de estas funciones, con ello se enfatizara que todo fenómeno que tenga como representación geométrica-algebraica parecida a éstas funciones, se podrá modelar a través de las mismas.

Ya establecido el procedimiento por el profesor, el alumno determinará manualmente (lápiz, compás, escuadras, papel milimétrico e hilo) la gráfica de la función seno.

Actividad 3: En esta parte, se lleva ahora a los estudiantes a un escenario interactivo (applet) en donde se pone en relieve las siguientes cuestiones:

- Una representación geométrico-dinámica de las funciones *seno y coseno*, a partir de la identificación de la ordenada y la abscisa, de un punto sobre la circunferencia unitaria, con cada una de estas funciones respectivamente.

- Una caracterización visual de las gráficas de estas funciones, en términos como los de funciones que "suben" y "bajan", que "van" y vienen", en suma, que son cíclicas o periódicas, por lo que resultan de gran importancia para *modelar fenó menos* con estas características, verbigracia, el movimiento armónico simple, señales electromagnéticas (telecomunicaciones) el sonido, las variaciones climáticas, variaciones bursátiles, ciclos biológicos, etc.

- Puesto que la realización de las gráficas de funciones de este tipo (periódicas), a través de esta interfaz, facilita enormemente la visualización y la manipulación de los parámetros básicos de una función cíclica, a saber, su *amplitud*, *periodo*, *frecuencia* y *ciclo*. En particular, en el caso de las funcione seno y coseno.

- Por último, con la ayuda del zoom, de la herramienta de desplazamiento, así como con la posibilidad de definir el rectángulo de visualización del plano, se podrá observar que la gráfica de una función, en este caso el seno y el coseno, no quedan constreñidas a un dominio acotado sino que, cuando su dominio es el conjunto de los números reales, esta gráfica se extiende a todo lo "ancho" del plano coordenado.

La hoja de trabajo 7, permite la organización de esta secuencia.

Secuencia didáctica 8.

El propósito de esta secuencia es que el alumno haga una recapitulación para revisar y diferenciar los conceptos más importantes vistos hasta el momento.

La hoja de trabajo 8, permite la organización de esta secuencia

3.2.5 Hojas de trabajo para la fase de información e introducción.

Las hojas de trabajo correspondientes a las secuencias didácticas mencionadas son las siguientes.

Hoja de trabajo 4. Introducción a los fenómenos periódicos (2a parte)		
Actividad. Con base en tu exposición, y las de los otros equipos, contesta las siguientes preguntas. 1. ¿Qué es el sonido? ¿Es un fenómeno periódico?		
2. Describe los ciclos de compresión y rarefacción.		
3. ¿Cuál es el principio físico que se utiliza en el sonar?		
4. Completa la siguiente tabla.		
Tabla 11. frecuencias		
Objeto	***frecuencia mínima:***	***frecuencia máxima:***
Oído humano		
Perro		
Murciélago		
Ballena		
5. ¿Qué espectro abarcan las ondas electromagnéticas?		

6. ¿En qué dispositivos tecnológicos están presentes los fenómenos electromagnéticos?
7. ¿Qué hay en el espacio que nos rodea?
8. ¿Cómo se capta físicamente la señal de la televisión o de un celular?
9. ¿Qué parámetros físicos se usan para construir un holograma?
10. ¿Cómo funcionan los radares?
11. ¿Cuál es la función de la onda emitida y reflejada en el radar?
12. ¿Para qué le sirve al murciélago la capacidad de ecolocación?
13. ¿Cómo ubica el murciélago lo que hay a su alrededor?

Hoja de trabajo 5. La rueda de la fortuna.

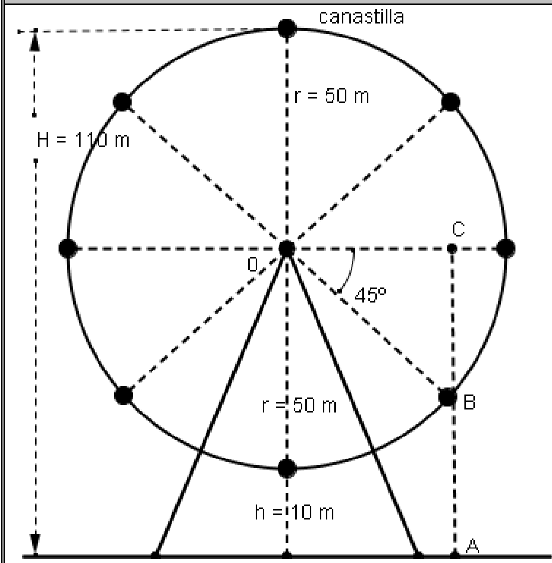
I. ***Giro de una rueda de la fortuna***. Una rueda de la fortuna grande tiene 100 m de diámetro, y se eleva a 110 m sobre el piso y tiene ocho canastillas distribuidas en forma equilibrada. Cada revolución (vuelta) de la rueda dura 1 min. Si t = 0 corresponde al momento en el cual el pasajero se encuentra a la altura mínima (canastilla en la parte más baja). Contesta las siguientes preguntas:

A. ¿En qué tiempo estará el pasajero en su la altura máxima?

B. ¿Expresa las alturas h, sobre el piso, de un pasajero en función del tiempo, a lo largo de dos minutos?

Sugerencia. Para contestar adecuadamente las preguntas realiza las siguientes actividades.

1. Haz un dibujo o esquema de la situación planteada en el problema, como el siguiente

Dibujo	***Desarrollo algebraico***
	

2. Haz los cálculos necesarios para determinar las alturas en *función* del tiempo de cada posición de las canastillas y escribe el resultado en la siguiente tabla I.(t = 2 minutos)

Tabla 12. La altura en función del tiempo (Representación aritmética)

t (min)	0	0.125							1

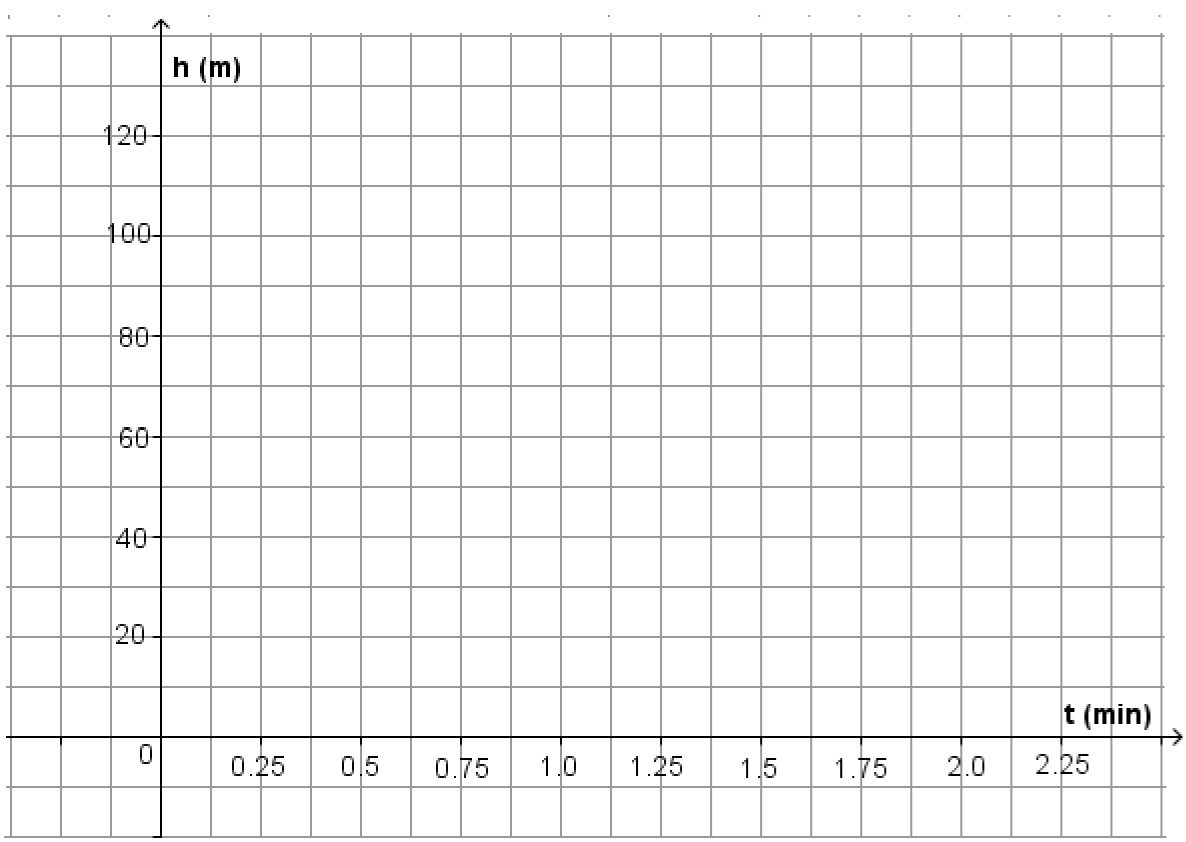
h(m)	10								
t(min)								2	
h(m)									

3. ¿Esta situación describe una función?_______________ ¿por qué razón?______________ ____.

4. ¿Cómo varia la altura con respecto al tiempo, se podría afirmar que es una variación lineal o cuadrática?__________________ ¿Qué tipo de variación es?______________________.

5. En un sistema de coordenadas como el siguiente; gráfica en el eje vertical la altura (h) y en el eje horizontal el tiempo (t), traza la gráfica.

Gráfica I: La onda (Registro Geométrico).



6. ¿Se puede trazar una recta por esos puntos?_______________ ¿Qué forma tiene la gráfica?____.

7. ¿Cuál es el valor del tiempo para la altura máxima?________________. ¿Es único este valor?____________. ¿Por qué?____.

8. ¿Cuál es el valor de t para la altura mínima? _____________________. ¿Es único este valor?________. ¿Por qué?____.

9. Para que intervalo se repite la forma de la gráfica____________________. ¿Cómo se le llama a este intervalo?____.

10. Podrías determinar el modelo matemático *(Representación Algebrai ca)* de la gráfica que obtuviste.____.

II. Cálculo de valores de las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal.

Sea (α) un ángulo en la posición normal y el punto P(x, y) se encuentra en el lado terminal dicho ángulo. Si las coordenadas de los puntos son:

a) P(3,4) b) P(4,-3)

1. Contesta las siguientes preguntas:

Para el punto: P (3,4). Para el punto: P (4,-3).

a. ¿Cuál es la abscisa del punto?__________. b. ¿Cuál es la ordenada del punto?_________.

c. ¿Cuál es la longitud del radio vector? ______________________________ d. ¿Cuál es la longitud del radio vector? ______________________________

2. Calcula los valores exactos de las seis funciones trigonométricas, para el punto que se te indica en la siguiente tabla. Haz los cálculos en tu cuaderno y los resultados escríbelos en la columna correspondiente.

Dibujo (traza el ángulo)	Resultados
a) P(4,-3)	$sen\alpha = \frac{cat.\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{\quad}{\quad} = (\quad)$ α = sen^{-1} ( ) = $\cos\alpha = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = (\quad)$ α = cos^{-1} ( ) = $\tan\alpha = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = (\quad)$ α = tan^{-1} ( ) =
$\sec\alpha = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = (\quad)$ α = sec^{-1} ( ) =	$\cot\alpha = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = (\quad)$ α = cot^{-1} ( ) = $\csc\alpha = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = (\quad)$ α = csc^{-1} ( ) =

3. Sabiendo que tan (α) = ¾ y que α es un ángulo normal en el tercer cuadrante, determine las otras cinco funciones trigonométricas. Escribe el resultado en la siguiente tabla.

Sen (α)	***Cos (α)***	***tan (α)***	***Cot (α)***	***Sec (α)***	***Csc (α)***

4. ¿Para qué ángulos la función trigonométrica tangente no está definida?

   ____.

5. Completa la siguiente tabla de las funciones trigonométricas para los ángulos que se piden. En la función seno procura poner una fracción con denominador el numero 2, ¿notas alguna secuencia?

Tabla 13. Valor de las funciones trigonométricas para ángulos especiales

Angulo	***sen (α)***	***cos (α)***	***tan (α)***	***cot (α)***	***sec (α)***	***csc (α)***
0º	$\frac{0}{2} = 0$					
30º	$\frac{\sqrt{1}}{2}$					2
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1	1		
60º	$\frac{\ }{2}$					
90º	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$		indefinida			
180º						

6. Signo de las funciones trigonométricas, según el cuadrante que estén. Si el ángulo θ se asocia a un punto que se encuentra en el segundo cuadrante, el punto tiene abscisa negativa y ordenada positiva. Como el radio de la circunferencia es positivo, se tiene que la función seno y la cosecante son positivas las demás funciones son negativas. Deduzca el signo para los demás cuadrantes y llene la siguiente tabla.

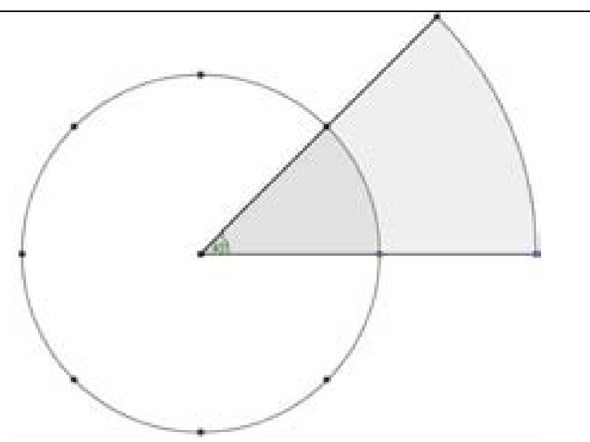
Tabla 14. El signo de las funciones trigonométricas

Cuadrante	***sen (θ)***	***cos (θ)***	***tan (θ)***	***cot (θ)***	***sec (θ)***	***csc (θ)***
I						

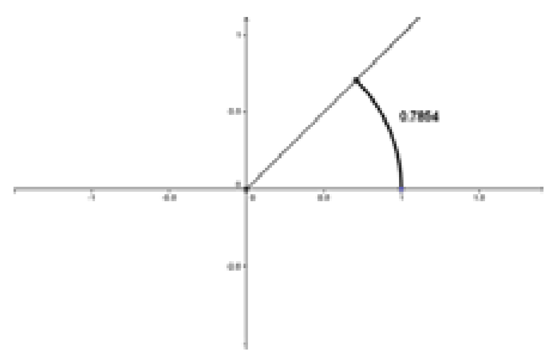
II	+	-	-	-	-	+
III						
IV						

Hoja de trabajo 6. Medida angular en radianes.

Los babilonios medían los ángulos en grados, esto es, dividían la circunferencia en 360°, cada grado en minutos y cada minuto en segundos. Sin embargo, en la época moderna esta medición angular resultó ser poco eficiente por lo que los matemáticos modernos cambiaron la forma de medir ángulos llevando esta medida a la recta real.



Babilonios: medición angular (grados).



Época moderna: medición angular (radianes).

Para llevar a cabo tal transformación, los matemáticos cambiaron la idea babilonia de medir "aberturas" por la de medir longitudes, en particular, para cada "abertura" se le hace corresponder la longitud del segmento circular que genera en una circunferencia de radio 1. A esta longitud se le llama la medida del ángulo ("abertura") en radianes.

A continuación vamos a llevar a la práctica esta idea usando la interfaz algebro-geométrica

GeoGebra.

A. Primero vamos a construir el escenario interactivo de trabajo.

1. Abre Geogebra y haz lo siguiente

Tabla 15. Procedimiento para la construcción del applet 1: circulo unitario			
Etapa:	***Construcción:***	**Definición**	**Algebra**
1	***Punto O***	punto de intersección Eje-X, Eje-Y	O = (0, 0)
2	***Punto A***	Punto en Eje-X	A = (1, 0)
3	***Círculo c***	Círculo con punto medio O a través de A	c: $x^2 + y^2 = 1$
4	***Punto B***	Punto en c	B = (0.52, 0.85)
5	***Semirrecta a***	Semirrecta pasante O, B	a: -0.85x + 0.52y = 0
6	***Arco d***	Arco Circular[O, A, B]	d = 1.02
7	***Angulo α***	Angulo entre A, O, B	α = 58.42°

2. Ahora bien, con el escenario interactivo que construiste úsalo para completar la siguiente tabla.

Tabla 16. Relación entre grados y radianes	
ángulo medido en grados:	**ángulo medido en radianes:**
0°	
45º	
	$\pi/2 \approx 1.5707963267948966192$
	$\pi \approx 3.1415926535897932385$
360º	

Nota: en GeoGebra puedes aproximar hasta con cinco decimales.

3. Entra a internet e investiga la definición de radian:

4. Usa los resultados de la tabla 16 para que determines la expresión algebraica que relaciona los grados con la medida del ángulo en radianes. Escribe tu respuesta en el siguiente renglón

5. Ahora, determina la expresión algebraica para cambiar el ángulo de grados a radianes. Escribe la respuesta en el siguiente renglón.

6. Usa las expresiones anteriores para completar la siguiente tabla, toma en cuenta lo que se te indica en cada columna. Realiza los cálculos en tu cuaderno. (Recuerda que: **1 rad** = $\frac{180}{\pi}$, **1º** = $\frac{\pi}{180}$)

Tabla 17. Conversión grados-radianes.					
αº	***α(rad) (applet)***	***α(rad) (fórmula)***	***α (rad)***	***αº (applet)***	***αº (fórmula)***
0º			***3.67***		
30º			***4.19***		
60º			***4.71***		
90º			***2π***		
120º			***$\pi/2$***		
240º			***10.47***		
270º			***$3\pi/2$***		

Actividad extra-clase.

1. Investiga las definiciones de las *funciones* (**no** de la *razones*) trigonométricas y haz una breve descripción de las mismas.

Hoja de trabajo 7. _El círculo unitario y las funciones seno y coseno_.
A. Sigue la exposición del profesor para contestar las siguientes preguntas. 1. ¿Qué entiendes por círculo unitario?
2. Define a través del circulo unitario las siguientes razones trigonométricas: $sen\,t = \frac{\qquad}{hipotenusa} = \frac{y}{\quad} \rightarrow \quad y =$ ______________. $\cos t = \frac{cateto\ adyacente}{\qquad} = \frac{\quad}{1} \rightarrow \quad x =$ ________________. 1. ¿Por qué se les llama funciones reales de variable real?
B. *Trazo manual de la gráfica de la función seno*. . Por medio del siguiente procedimiento traza la gráfica de la función: *y = sin (x)* Método: • Coloca sobre la mesa la hoja milimétrica, en forma horizontal y fíjala. • En el extremo izquierdo traza con el compás un círculo unitario (r = 10 cuadritos), en el centro de la hoja, • Usa el transportador para marcar ángulos cada 15º sobre la circunferencia • Enseguida usa un pedazo de cuerda y enróllala alrededor del transportador. Ahora marca sobre ésta las ″aberturas″ (15º) que son las longitudes de arco (números reales).

- Posteriormente, de lado derecho traza un sistema coordenado de tal suerte que el eje X, este al mismo nivel del diámetro de la circunferencia (ver figura 11).

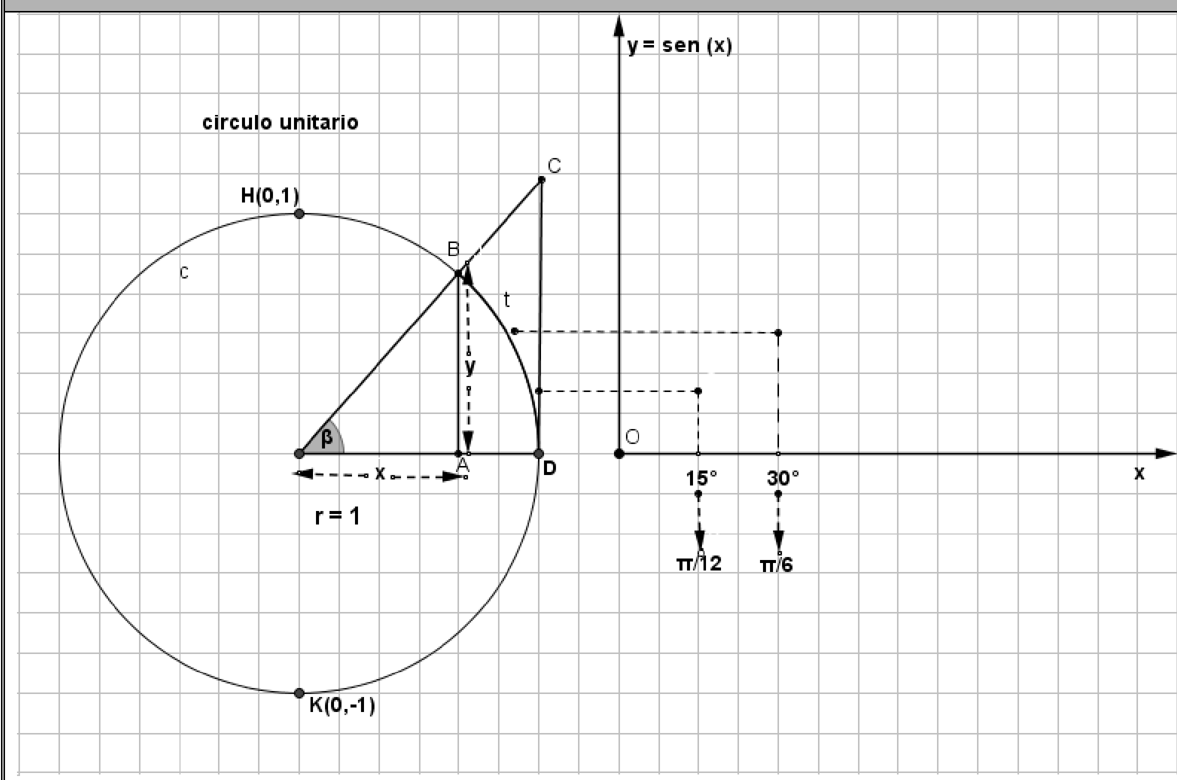
- Usa la cuerda (recta numérica) para marca sobre el eje X las longitudes de arco (aberturas) correspondientes a los ángulos, desde 0º hasta 360º.

- Ahora traza líneas punteadas paralelas al eje X, a partir de los puntos marcados en la circunferencia

- De la misma manera traza líneas punteadas paralelas al eje Y, a partir de los ángulos marcados en el eje X.
- Marca los puntos donde se intersecan las líneas. Para que no se vea sucia la gráfica borra las líneas punteadas, dejando los puntos de intersección.

- Por último, una vez que hayas marcado los puntos hasta llegar al ángulo de 360º, únelos por una línea continua.

Figura 11. Construcción manual de la gráfica y = sin (x) y x = cos (x).



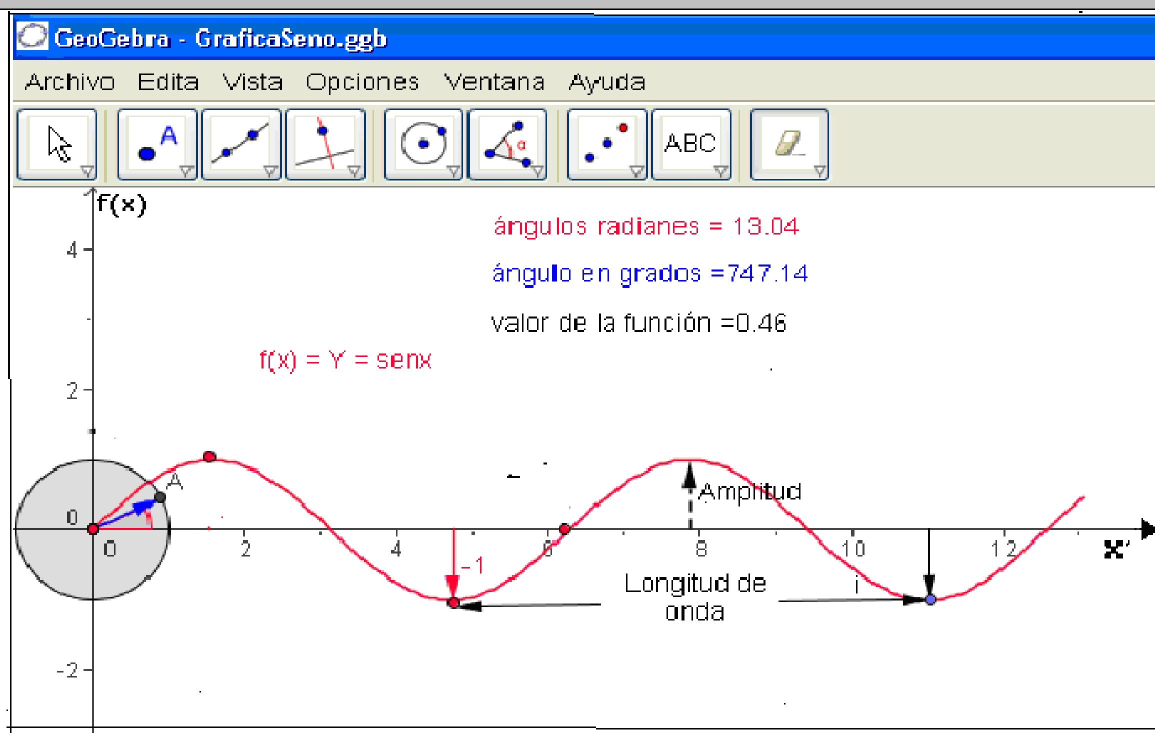
C. Uso de Software para determinar la gráfica y propiedades de las funciones: *y = sen (x), x =*

cos (x)

Sigue las indicaciones del profesor para entrar al ***applet 2*** que precisamente fue diseñado para contestar las siguientes preguntas. Recuerda que el eje vertical representa la función seno.

1. En el escenario (applet 2) mueve el punto A con las flechas de navegación y describe la curva que se va formando, ¿tiene algún parecido con la gráfica que hiciste manualmente? Explica.

Figura 12. Applet 2: construcción de la función seno.



2. ¿Cuál es el *registro algebraico* (modelo matemático) de la función dibujada?

3. Determina el *periodo* de esta función. ¿Qué sucede con la gráfica al transcurrir el periodo? Explica.
4. ¿Cuál es el *dominio* de la función?
5. ¿Cuál es el *rango* de la función?
6. Determina los *ceros* (las intersecciones con el eje X) de la función y escríbelos algébricamente
7. ¿Cuáles son los valores máximos de la función? ¿Cuáles son las coordenadas X, donde ocurren estos?.Escribe su expresión algebraica.
8. ¿Cuáles son los valores mínimos de la función?¿En donde ocurren estos valores?.Escribe su expresión algebraica
9. Ahora, completa la siguiente tabla y describe el significado del ″ángulo″ determinado por A. (Nota no olvides el signo de A)

Tabla 18. Valor del seno de un ángulo		
Valor de la ordenada de A (″ángulo″)	***sen (A) (applet)***	***Sen (A) (calculadora)***
0		
0.5		

-0.1		
2		
- 3.8		
100.98		
- 200		

III. Actividad extra-clase.

Con el método descrito al principio de esta hoja de trabajo, elabora ahora manualmente la gráfica de la *función coseno* en el intervalo (0, 2Pi). A partir de tu dibujo contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Qué forma tiene la gráfica? ¿Es la misma que la función seno?

2. ¿Cuál es la representación algebraica de la función?

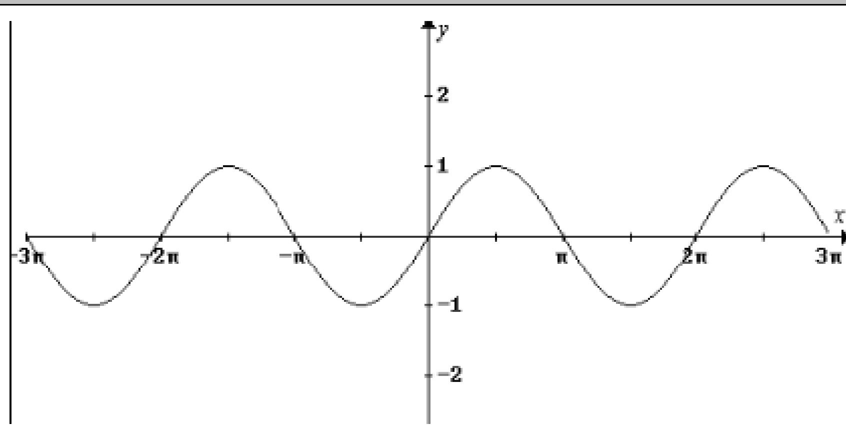
3. Podríamos afirmar que ambas están relacionadas mediante la siguiente expresión: $sen\ (x) = cos\ (x + \pi/2)$. ¿Por qué razón?

4. Determina el periodo de la función. ¿Qué sucede con la gráfica al transcurrir el periodo?

5. ¿Cuál es el dominio de la función?

6. ¿Cuál es el rango de la función?

7. Determina los ceros de la función y escríbelos algébricamente (forma de ecuación).
8. Cuáles son los valores máximos de la función? ¿Cuáles son las coordenadas X, donde ocurren estos?.
9. ¿Cuáles son los valores mínimos de la función?¿En donde ocurren estos valores? Escribe su expresión algebraica.
10. ¿Qué diferencia sustancial encuentras entre ambas funciones?

Hoja de trabajo 8. Recapitulación
I. Propiedades de la función : ***y = f(x) = sen (x)***

1. ¿Qué es una función periódica?

2. ¿Para que valores de "x" existe imagen?

3. ¿Es continua esta función?

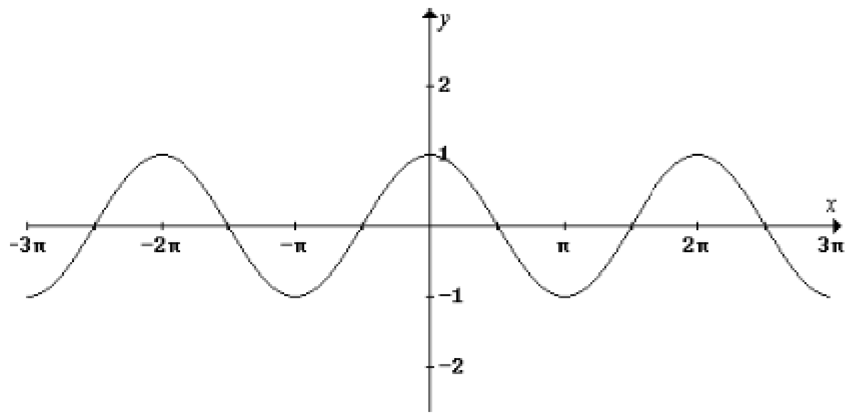
4. ¿Es simétrica su gráfica?

5. ¿Se repite? ¿Cuál es su período?

6. ¿En qué puntos corta al eje X? ¿y al eje Y?

7. ¿En qué intervalos la función es positiva? ¿y negativa?

8. Calcula dónde se alcanzan los valores máximos y mínimos

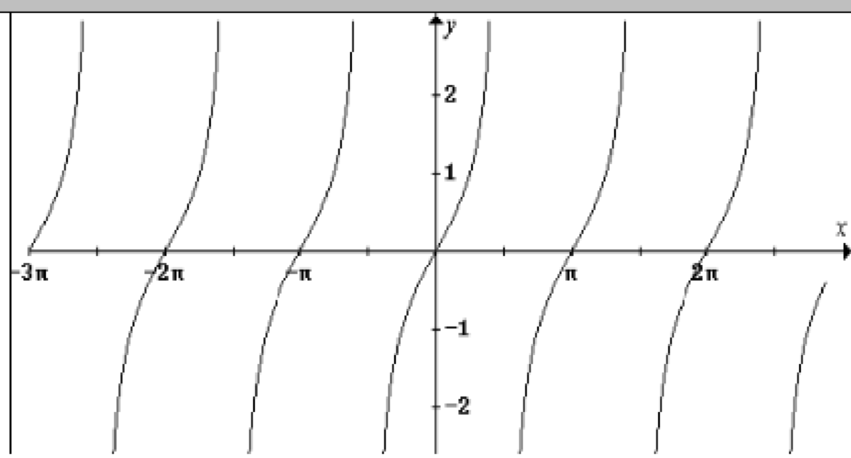
9. ¿Podrías decir dónde crece y dónde decrece?
10. ¿Cual es la relación entre el seno y coseno?
II. ***Propiedades de la función : y = f(x) = cos (x)***

1. ¿Es continua esta función?
2. ¿Es simétrica su gráfica?
3. ¿Se repite? ¿Cuál es su período?
4. ¿En qué puntos corta al eje X? ¿y al eje Y?

5. ¿En qué intervalos la función es positiva? ¿y negativa?

6. Calcula dónde se alcanzan los valores máximos y mínimos

7. ¿Podrías decir dónde crece y dónde decrece?

III. *Propiedades de la función : y = f(x) = tan (x)*



1. ¿Cuál es el dominio de la función?

2. ¿Qué valores puede tomar "y" (el valor de la tangente)?

3. ¿Se repite? ¿Cuál es su período?

4. ¿En qué puntos corta al eje X? ¿y al eje Y?
5. ¿En qué intervalos la función es positiva? ¿Y negativa?
6. Calcula dónde se alcanzan los valores máximos y mínimos

3.2.6 Fase de ampliación.

Esta fase tiene como propósito la ampliación de los significados que de "lo periódico" se han elaborado hasta este punto, verbigracia las representaciones matemáticas. En particular, se pasa de las funciones básicas:

función seno:	***f(x) = sin(x)***
función coseno:	***f(x) = cos(x)***

a las funciones senosoidales o cosenosoidales cuya forma general es la siguiente:

funciones senosoidales:	***f(x) = a sin(bx – c) + d***
funciones cosenoidales:	***f(x) = a cos(bx – c) + d***

Con ello, se pretende, además, que el alumno identifique los efectos que provoca en sus gráficas la variación de los parámetros *a, b, c* y *d*; más aun, que identifique en estos parámetros los conceptos de *periodo*, *frecuencia*, *amplitud* y *ángulo de desfasamiento* de cada una de estas funciones. De esta manera, esta fase consiste de la realización de las siguientes secuencias didácticas que, cabe destacar, serán realizadas con el empleo de la interfaz algebro-geométrica

GeoGebra, así como del software de edición y creación de sonidos Audacity. Para ello se organizarán a los estudiantes en equipos de dos.

Secuencia didáctica 9. Dilatación y contracción vertical (parámetro a) de la gráfica de una senosoidal de la forma: f(x) = a sin(x)..

En esta secuencia el estudiante, manipulando el parámetro *a*, determinará los efectos que esto tiene en la gráfica de una senosoidal. Con esto ha lugar para definir con exactitud lo que es la *amplitud* de una *senosoidal*[28]. Esta secuencia se concreta en la hoja de trabajo 9.

Secuencia didáctica 10. Dilatación y contracción horizontal (parámetro b) de la gráfica de una senosoidal del tipo: f(x) = sin(b x). Esta secuencia se concreta en la hoja de trabajo 10.

En esta secuencia el estudiante, manipulando el parámetro *b*, determinará los efectos que esto conlleva en la gráfica de una. Más aún, con esta experiencia dará cuenta de la relación que hay entre el parámetro *b* y los conceptos de *frecuencia* y el *periodo* de una senosoidal, así como establecer las siguientes relaciones:

$$periodo = \frac{2\pi}{|b|} \qquad \text{y} \qquad f = \frac{1}{periodo}$$

Secuencia didáctica 11. Traslación horizontal (parámetro c) de una senosoidal de la forma: f(x) = sin(b x – c). Esta secuencia se concreta en la hoja de trabajo 11.

En esta secuencia se plantea la relación que hay entre el parámetro *c*, llamado *desfasamiento*, y la traslación de la gráfica de la función *f*(*x*) = *sin(b x)*. Por un lado, el estudiante manipulará este parámetro observando y anotando la forma en que se desplaza la gráfica. Por otro, se le planteará la cuestión inversa, es decir, dadas dos gráficas de senosoidales, sólo desfasadas en alguna

[28] En general una función senosoidal puede escribirse como una función seno o como una función coseno

constante, se le inquiere acerca del valor de la misma. Al respecto, se le hace notar que resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$b\,x + c = 0$$

$$b\,x + c = 2\pi$$

se obtiene el valor del desfasamiento:

$$x_{\text{inicio}} = -\frac{c}{b} \qquad\qquad x_{\text{final}} = -\frac{c}{b} + \frac{2\pi}{|b|}$$

El número *–c/b* es el desplazamiento de fase, o desfasamiento, asociado a la gráfica.

<u>*Secuencia didáctica 11. Traslación vertical (parámetro d) de una senosoidal de la forma: f(x) = sin(x) + d.*</u> Esta secuencia se concreta en la parte C, de la hoja de trabajo 11.

En esta secuencia se plantea la relación que hay entre el parámetro *d* y el movimiento vertical de la gráfica original $f(x)$ = sen(x). Aquí conviene destacar que para algunos valores de *d*, la función trasladada tiene una infinidad de ceros, mientras que para los demás valores no tiene cero alguno.

<u>*Secuencia didáctica 14. Recapitulación*</u>

Finalmente, en ésta secuencia se "juega" con los parámetros *a, b, c, d*, de la función senosoidal más general:

$$y = a\,f\,(b\,x - c) + d$$

Esta secuencia se concreta en la hoja de trabajo 12.

3.2.7 Hojas de trabajo para la fase de ampliación.

A continuación se muestran las hojas de trabajo relativas a esta fase

Hoja de trabajo 9. ***Familia de funciones de la forma a sen (x).***
A. Uso de Software GeoGebra para la graficación de las funciones *a sin(x)*

Para la realización de esta hoja de trabajo requeriremos la interfaz algebro-geométrica GeoGebra.

I. Familia de funciones de la forma: ***f(x) = a sen(x)***.

*Parámetro **a**: Dilatación y contracción vertical (amplitud).*

1. Edita, en la línea de edición algebraica de GeoGebra, lo siguiente:

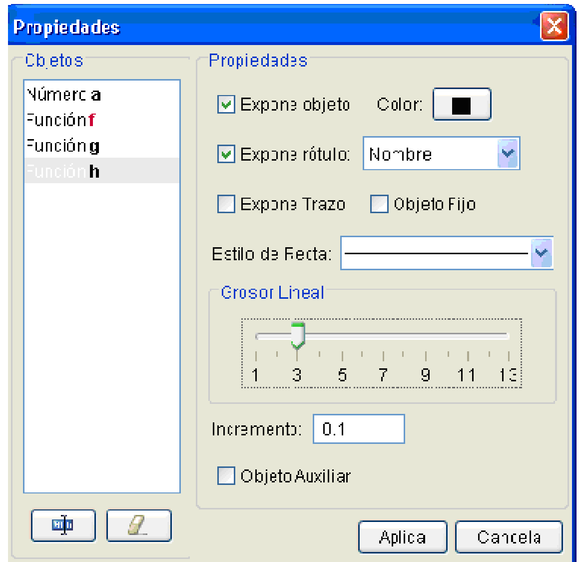
```
a = 1
f(x) = a sin(x)
```

2. Describe la curva que se dibuja.

3. En el menú Opciones, elige la opción Zona Gráfica (vea imagen) y haz lo siguiente:
   a. marca la opción distancia con el valor π.
   b. Pon la relación Ejex : Ejey en 2 :1.
   c. Pulsa el botón Aplica.
4. Ahora selecciona (en la ventana algebraica) el parámetro ***a*** y hazlo variar con las flechas de navegación del tablero de la computadora.
5. ¿Qué observas? Explica.

6. Ahora cambia el color de la gráfica que obtuviste en la primera parte de la siguiente manera:

   a. Haz clic derecho sobre la gráfica selecciona propiedades.
   b. En la ventana de propiedades, elige color rojo y,
   c. Grosor de línea 3
   d. Pulsa el botón Aplica.



7. Edita en GeoGebra la función *f(x)* = *a sen*(*x*), para cada valor de ***a*** que a continuación se indica y, Completa correctamente la tabla siguiente.

Tabla 19. Representación algebraica de las funciones: a sen (x)		
a (amplitud)	***Función(representación algebraica)***	***Rango de la función***
1	***f(x) = (función de referencia usa color rojo)***	
2	***g(x)***	
4	***h(x)***	
1/2	***k(x)***	
6	***l(x)***	
-1	***m(x)***	

8. Ahora, describe el efecto que observaste en la gráfica de referencia al variar el *parámetro* ***a.***

9. Al parámetro ***a*** se le llama amplitud y la puedes determinar directamente de la gráfica ¿Cuál sería una expresión algebraica para calcularla?

10.¿Qué puedes decir acerca de la gráfica de la función cuando el parámetro ***a*** es negativo? Observa la gráfica que obtuviste para el valor ***a*** = -1 < 0.

11.¿Qué puedes decir sobre el *dominio y rango* de la función? ¿cambian o se mantienen constantes?

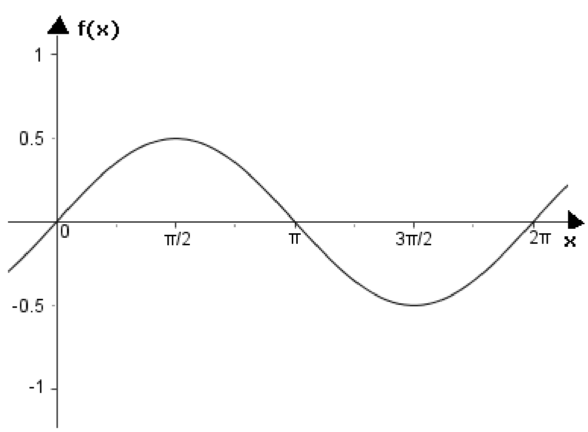
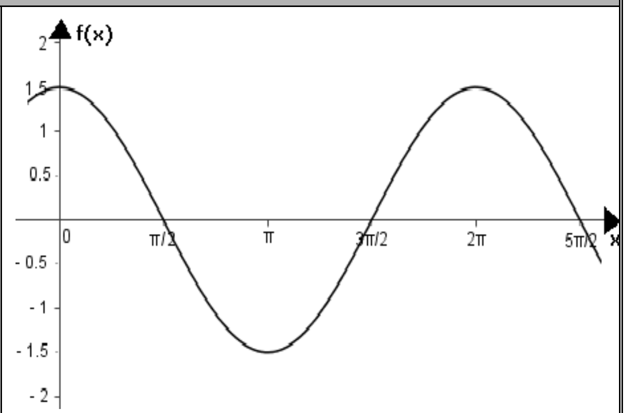
12.¿Qué observas sobre el periodo de la función, cambio o se mantiene constante? Explica tu respuesta.

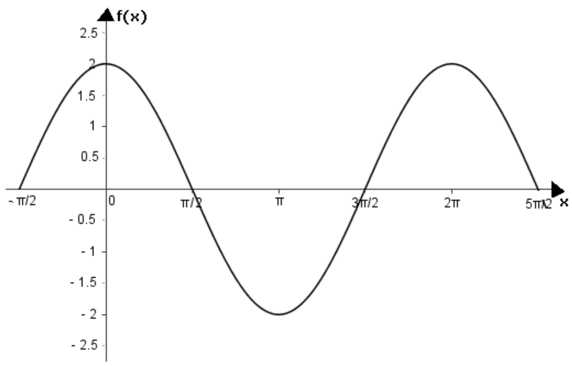
10. ¿Qué puedes decir acerca de los valores máximos y mínimos de la función? Explica tu respuesta.

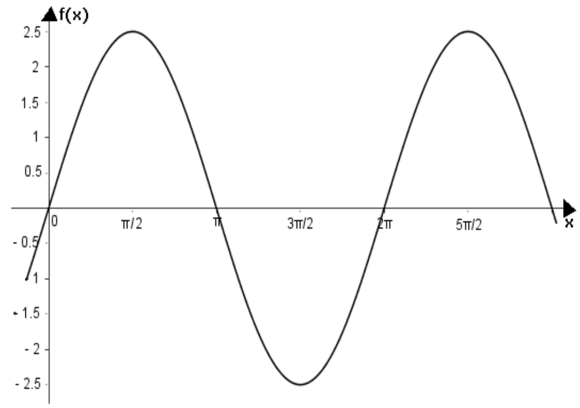
12. ¿Cuáles son las intersecciones con el eje X de la gráfica?

13. En la tabla 20 se te proporciona el registro geométrico de distintas funciones. Determina la *amplitud (a)* y el *periodo (T)* para cada una de ellas y escribe el *modelo matemático* de la forma *f(x) = a sen (b x) o a cos (b x)* que las define. Escribe el resultado en el espacio correspondiente.

Tabla 20. Representación geométrica de la amplitud de la función.

	
f(x) =	***f(x) =***





f(x) =	***f(x) =***

B. **Construcción manual de los registros *algebraico, aritmético, geométrico y verbal* de la funciones *f(x) = a sen (x)***

1. Determina el registro aritmético (tabla 21) de las funciones senosoidales: *f(x) = sen (x), g(x) = 2 sen (x)* *y h(x) = 3.5 sen (x)*.para el intervalo [0, 2 pi]. Calcula los valores de cada función sustituyendo los valores de X que se te indican y escribe el resultado en el lugar correspondiente. Usa calculadora en modo radianes.

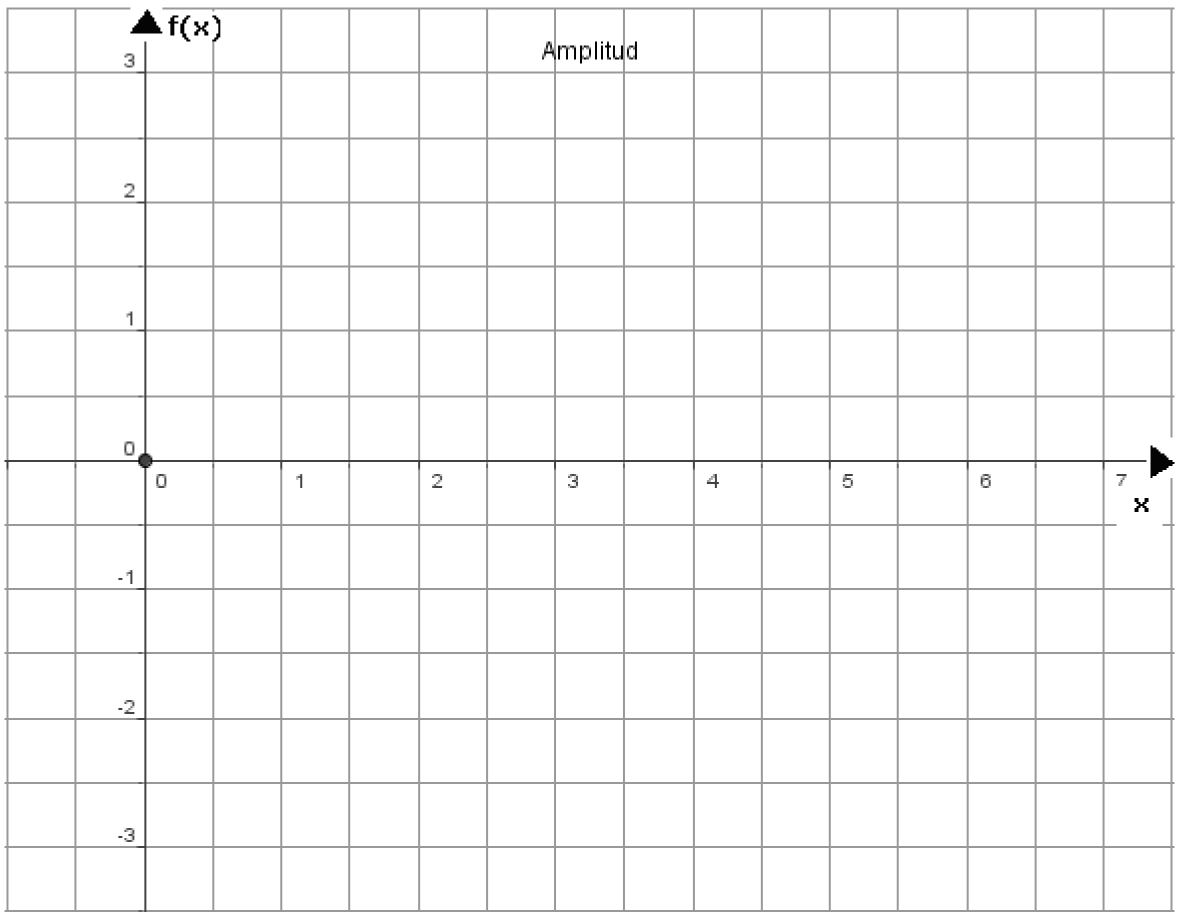
Tabla 21. Representación aritmética de las funciones: a sen (x).

X (rad)	*0*	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
X																	
f(x)																	
g(x)																	
h(x)																	

2. Una vez que hayas completado la tabla 21, dibuja la gráfica de cada función en el siguiente plano cartesiano (gráfica 3). Usa un color diferente para cada gráfica

Gráfica 2. ***Representación geométrica de las funciones:***

f(x) = sen(x), g(x) = 2 sen(x) y h(x) = 3.5 sen(x)



3. Describe lo que observas en las gráficas que dibujaste.

4. Usa la gráfica para determinar la *amplitud* de cada función. Recuerda que:

amplitud = $|a| = \frac{|Y_{max} - Y_{min}|}{2}$

a. Amplitud de, f(x): ___________________________.
b. Amplitud de, g(x): ___________________________.
c. Amplitud de, h(x) : ___________________________.

5. Escribe como enunciado las siguientes expresiones:

a. f(x) = 10 cos(x + π/2):____

b. g(x) = *2 sen(x)*: ____

c. *h(x) = 3.5 sen(x)*:____

Hoja de trabajo 10*. *Gráfica de las funciones de la forma sen (b x).

A. Uso de Software GeoGebra para la graficación de las funciones sen(b x)

Para la realización de esta hoja de trabajo requeriremos la interfaz algebro-geométrica GeoGebra.

I. Familia de funciones senosoidales de la forma: *f(x) = sin (b x)*

Parámetro b: Dilatación y contracción horizontal (periodo)

1. Ahora edita en GeoGebra en la línea de edición algebraica lo siguiente:

a = 1

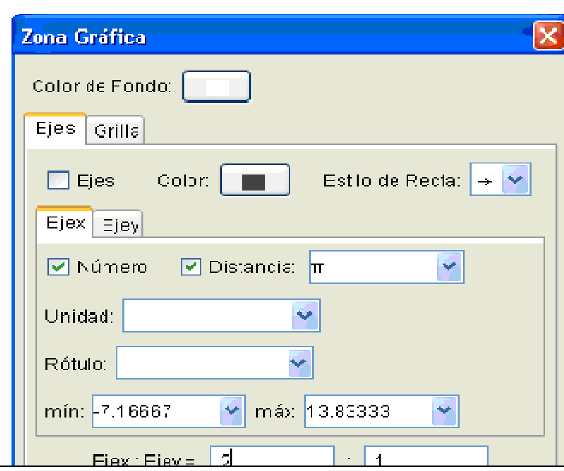
b = 1

f(x) = a sin(b x)

2. Haz una descripción detallada de la curva que se dibuja.

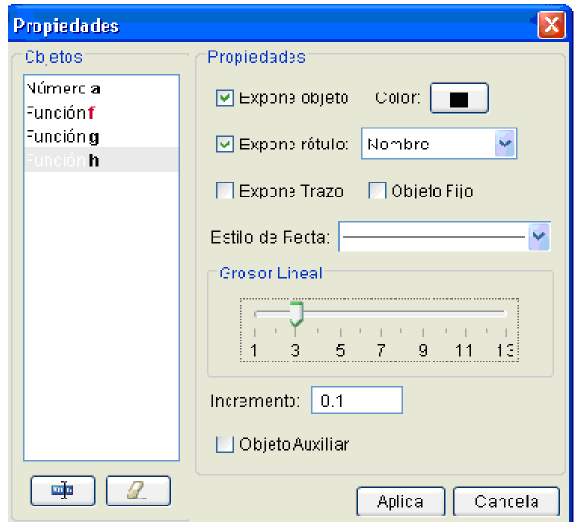
3. En el menú Opciones, elige la opción Zona Gráfica (vea imagen) y haz lo siguiente:
   a. marca la opción distancia con el valor π.
   b. Pon la relación Ejex : Ejey en 2 : 1.
   c. Pulsa el botón Aplica.

4. Ahora selecciona (en la ventana algebraica) el parámetro ***b*** y hazlo variar con las flechas de navegación del tablero de la computadora. ¿Qué observas? Explica.



5. Para realizar la siguiente actividad cambia el color (rojo) a la gráfica que trazaste en la primera parte de la siguiente manera:

    a. Haz clic derecho sobre la gráfica selecciona propiedades.
    b. En la ventana de propiedades, elige color rojo y,
    c. Elije grosor de línea 3
    d. Pulsa el botón Aplica



6. Ya que hayas hecho lo anterior, ahora edita en GeoGebra la función *f(x)* = *sin* (*b x*), para cada valor del parámetro ***b*** que a continuación se te indica. Y Completa la siguiente tabla, escribiendo la expresión algebraica de la función.

Tabla 22. Representación geométrico-algebraica de la familia f(x) = sen (b x).		
b	***Funciones (registro geométrico)***	$p = \frac{2\pi}{b}$
1	*f(x)* = *(función de referencia usa color rojo)*	
2	*g(x)* =	
3	*h(x)* =	
4	*k(x)* =	
1/2	*l(x)* =	

7. ¿Qué observas en la gráfica al variar el parámetro ***b***? ¿Qué efectos tiene sobre la función de referencia? ¿Hay cambio en el *periodo*?

8. ¿Observas algún cambio en la *amplitud*? Explica tu respuesta.

9. ¿Qué puedes decir acerca del *dominio* y *rango* de la función? ¿Cambian o se mantien constantes?

10. ¿Qué puedes decir de los valores máximos y mínimos, cambian o se mantienen constantes?

11. Haz una conjetura acerca del comportamiento de la gráfica de f(x) = sen (b x), si b < 0.

12. Ahora aplica la siguiente formula para determinar el *periodo (frecuencia*) para cada función que obtuviste en el ejercicio anterior. En la tabla 2 escribe las respuestas en la columna correspondiente. (ayúdate con la gráfica que obtuviste)

Periodo (T): $X_{inicio} = 0$ a $X_{final} = \dfrac{2\pi}{b}$

***Tabla 23**. Periodo y frecuencia.*

Función	***Valor b***	***X_{inicio} (rad)***	***X_{final} (rad)***	***No. ciclo***	***periodo***	***frecuencia***
f(x)						
g(x)						
h(x)						
k(x)						
l(x)						

Observación: Si queremos expresar una función trigonométrica de periodo T, esta vendrá dada por la expresión: *f(x) = sen (2π/T x)*, o bien usando el hecho que la frecuencia *f = 1/T*, la expresión se transforma en: *f(x) = sen (2π f x)*, expresión muy usada en ingeniería, física y en particular en la música. Por ejemplo:

13. Las notas musicales se clasifican por la frecuencia. La nota Do sostenido tiene una frecuencia de 262 hertz. La nota Do sobre el Do sostenido tiene una frecuencia de 524 hertz. La nota Do bajo el Do sostenido tiene una frecuencia de 131 hertz. Ahora bien, escribe la ecuación para la función seno y coseno en los siguientes casos:

a) Para la nota Do sostenido si su amplitud es 0.4
b) Que represente la nota Do sobre el Do sostenido si su amplitud es la mitad de la amplitud de la nota Do sostenido.
c) Para la nota Do bajo el Do sostenido si su amplitud es el doble de la amplitud del Do sostenido.
d) Mi
e) Fa

Escribe tu respuesta en el espacio correspondiente de la tabla 24.

Tabla 24. Amplitud y periodo.

inciso	*Amplitud (a)*	*Periodo (T)*	*Parámetro b*	*f(x) = a sen (b x)*	*g(x) = a cos (b x)*
a					
b					
c					
d					
e					

14. Abre audacity edita y escucha los sonidos correspondientes a las notas Mi y Fa, determina cual sonido es más grave. Explica tu respuesta en términos de la frecuencia.

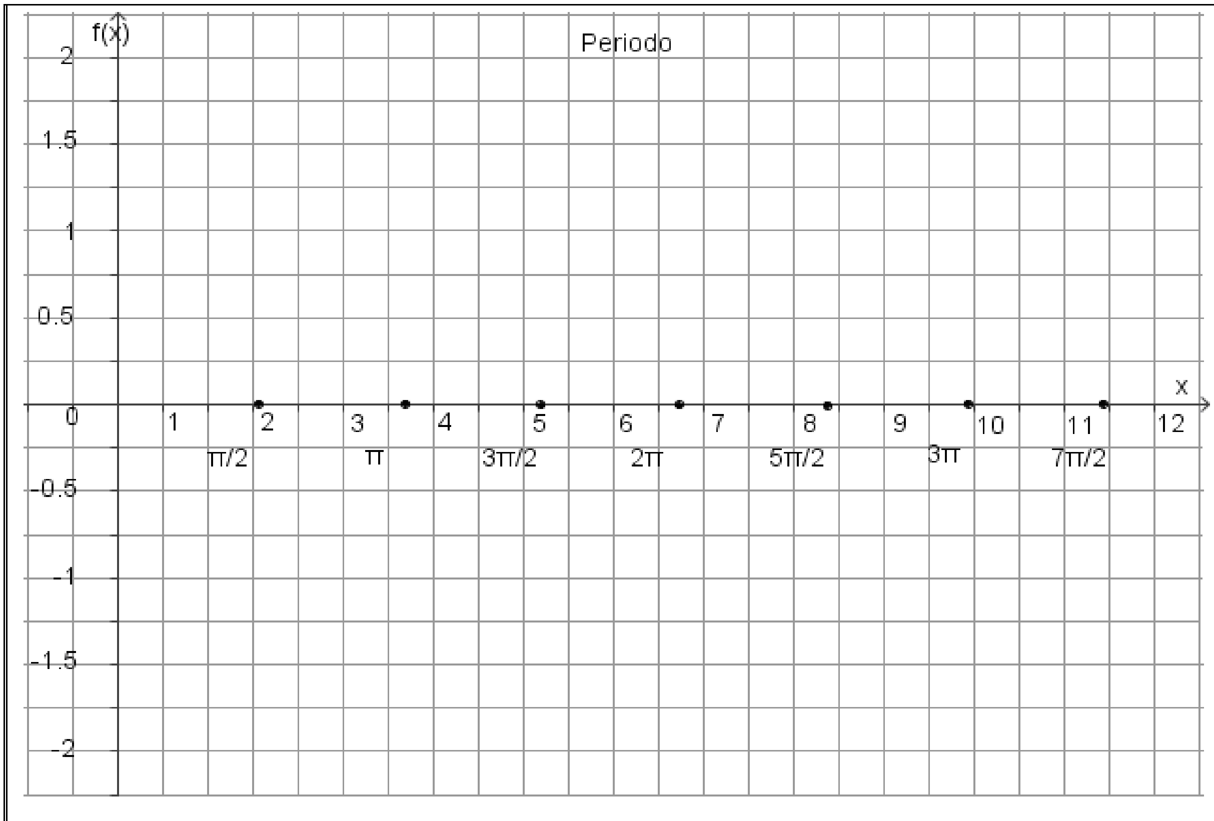
B. *Actividad extra-clase.* Cons trucción manual de los regi stros *algebraico, aritmético, geométrico y verbal* de la funciones *f(x) = sen (b x)*

1. Determina el registro aritmético (tabla 25) de las funciones senosoidales: *f(x) = sen (x), g(x) = 2 sen (2 x) y h(x) = 2 sen (3 x)* .para el intervalo [0, 2 pi]. Calcula los valores de cada función sustituyendo los valores de X que se te indican y escribe el resultado en el lugar correspondiente. Usa calculadora en modo radianes.

Tabla 25. Representación aritmética de las funciones f(x), g(x) y h(x).																	
***X* (rad)**	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
X																	
f(x)																	
g(x)																	
h(x)																	

2. Una vez que hayas completado la tabla, dibuja la gráfica de cada función en un mismo plano cartesiano (gráfica 3). Usa un color diferente para cada gráfica.

Gráfica 3. representación geométrica de las funciones f(x), g(x) y h(x)



3. *(Registro verbal)*.Escribe como enunciado las siguientes expresiones:

   a. *$f(x) = 100$ sen $(x + \pi/2)$*: ____________________________.
   b. *$g(x) = 3/2$ sen $(2*x + 2\pi)$*: ______________________________.
   c. $h(x) = 4$ cos $(3\ x - 5(/4)$: ____________________________

Hoja de trabajo 11. Gráfica de las funciones de la forma sen(x - c) + d.

Para la realización de esta hoja de trabajo, usaras la interfaz algebro-geométrica GeoGebra.

A. Representación algebraico-geométrica de la función: f(x) = sin (x - c)

Parámetro c: Traslación horizontal (fase)

1. Edita, en la línea de edición algebraica de GeoGebra, el parámetro siguiente:

   a = 1

   b = 1

   ***c* =** 0

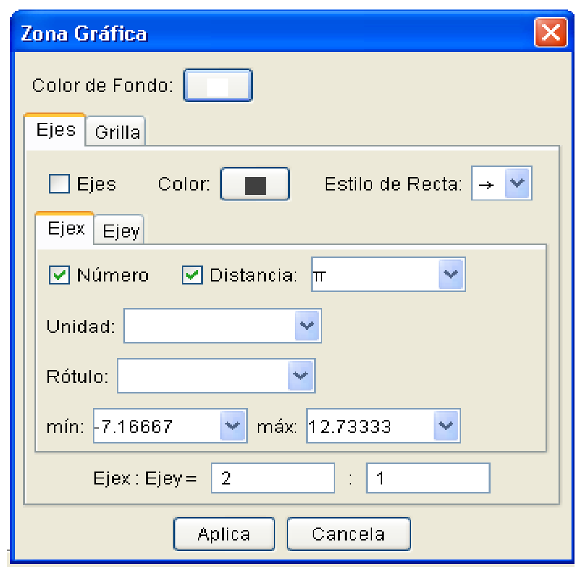
2. Ahora edita la siguiente expresión algebraica:

   f(x) = a sin(b x + c) = sin(x)

3. Describe la curva que se dibuja.

4. En el menú Opciones, elige la opción Zona Gráfica (vea imagen) y haz lo siguiente:

   a. marca la opción Distancia con el valor π.
   b. Pon la relación Ejex:Ejey en 2 : 1.
   c. Pulsa el botón Aplica.
   d. Haz clic derecho sobre la gráfica selecciona propiedades.
   e. En la ventana de propiedades, elige color rojo y,
   f. Grosor de línea 3
   g. Pulsa el botón Aplica.



5. Edita en GeoGebra la función *f(x)* = *sen(x*+ *c*), para cada valor de ***c*** que a continuación se te indica. Y Completa correctamente la siguiente tabla.

Tabla26. Representación algebraico-geométrico de la familia f(x) = sen(x - c)	
c (corrimiento de fase)	***función (representación algebraica)***
0	***f(x) =*** ***(función de referencia usa color rojo)***

0.25π	***g(x) =***
0.5π	***h(x) =***
0.1π	***k(x) =***
1.5π	***l(x) =***
- 0.25 π	***m(x) =***
- 0.5 π	***n(x) =***

6. Describe lo que ocurre al variar el parámetro ***c***, con las gráficas de las funciones obtenidas.

7. ¿Qué sucede con la *amplitud* de la onda? ¿cambia su tamaño? Explica tu respuesta

8. ¿Cambia el *periodo* con la variación del parámetro c? Explica tu respuesta

9. ¿Qué puedes decir acerca de los ceros de la función? Determínalos.

10. La siguiente expresión te permite calcular *algebraicamente el co rrimiento de fase.* Úsala para determinar el corrimiento de fase para cada función y, escribe el resultado en la columna correspondiente de la siguiente tabla. Compara éstos resultados determinado el corrimiento de fase directamente de las gráficas que obtuviste en el inciso anterior. Escribe el resultado en las dos últimas columnas.

Corrimiento de fase:

$X_{\text{inicio}} = -\frac{c}{b}$ *a* $X_{\text{final}} = -\frac{c}{b} + \frac{2\pi}{|b|}$

***Tabla 27**. Determinación analítica y geométrica del corrimiento de fase.*

c (corrimto de fase)	***X_{inicio}(rad)***	***X_{inicio}(gra)***	***X_{final} (rad) (formula)***	***X_{final} (gra)***	***X_{inicio}(rad)***	***X_{inicio}(rad)***

	(formula)				(gráfica)	(gráfica)
0						
- 0.25 π						
- 0.5 π						
- 1 π						
- 1.5 (						
0.25 (						
0.5 (						

11. ¿Hay alguna diferencia entre el resultado algebraico con el obtenido gráficamente?

12. ¿Qué significado tiene el signo de la fase en la gráfica?

B. *Actividad extra-clase.* Construcción manual de los registros *algebraico, aritmético, geométrico y verbal* de la funciones *f(x) = sen (x - c)*

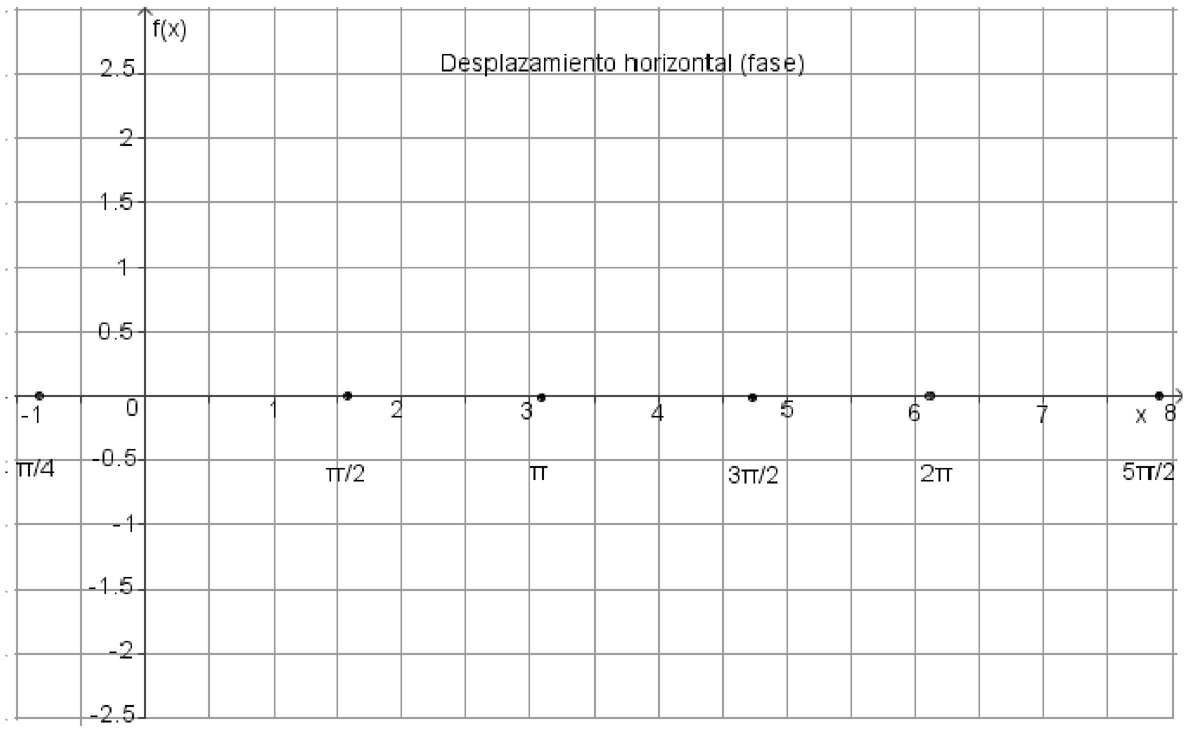
13. Calcula los valores de cada función que se te indica en la siguiente tabla, para cada uno de los valores de x (usa calculadora en modo radianes). Escribe el resultado en lugar correspondiente

Tabla 28. *Representación aritmético de las funciones:f(x) = 2 sen(x), g(x) = 2 sen(x - π/2), g(x) = 2 sen (x + π/4)*

***X* (rad)**	0	0.5	1	π/2	2	2.5	π	4	4.5	3π/2	5.5	2π	7	7.5	5π/2
f(x)															
g(x)															
h(x)															

14. Una vez que hayas completado la tabla anterior, dibuja las gráficas de cada función sobre un mismo plano cartesiano como el de la figura 5. Para ello usa como dominio el intervalo [0, 5Pi/2] para las dos primeras funciones y, para h(x) usa como dominio el intervalo [-π/4, 2Pi].Usa un color diferente para cada gráfica, recuerda que 2*sen (x)* es la función de referencia para la cual usaras color rojo.

Gráfica 4*. Representación geométrica de las funciones: f(x) = 2 sen(x), g(x) = 2 sen (x - π/2) y h(x) = 2 sen (x + π/4).*



15. Haz una descripción detallada de las diferencias que observas en las gráficas de cada función que dibujaste.

C. Representación algebraico-geométrica de la función: f(x) = sin (x) + d

Familia de funciones de la forma: ***f(x) = sin(x) + d***

Parámetro d: traslación vertical

1. Edita, en la línea de edición algebraica de GeoGebra, el parámetro siguiente:

   a = 1

   b = 1

   c = 0

   d = 0

f(x) = a sin(b x + c) + d = sin(x)

2. Describe la curva que se dibuja.

3. Edita en GeoGebra la función *f(x) = sen (x) + d*, para cada valor de ***d*** que a continuación se indica. Completa correctamente la siguiente tabla.

Tabla 29. Representación algebraico-geométrico de la familia: f(x) = sin (x) + d

Parámetro d (traslación)	***función (representación algebraica)***
0	***f(x) = (función de referencia usa color rojo)***
1	***g(x) =***
2	***h(x) =***
5	***k(x) =***
-1	***l(x) =***
-3	***m(x) =***

4. Describe lo que ocurre con la gráfica al variar el parámetro *d*.

5. Si d > 0, ¿hacia donde es el desplazamiento de la gráfica? Explica tu respuesta

6. ¿Qué sucede en el desplazamiento de la gráfica cuando d < 0? Explica tu respuesta.

7. ¿Observas cambios en su amplitud, periodo (frecuencia) o en el desfasamiento? Explica tu respuesta.

Observación: cuando hay un desplazamiento horizontal hay un nuevo eje horizontal conocido como *línea media* se utiliza como línea de referencia o punto de equilibrio en torno al cual oscila la gráfica. Para la gráfica de $y = a\ senx + d$, la línea media es la gráfica de $y = d$.

8. Determina el desplazamiento vertical y la ecuación de la línea media de cada función que se te indica en la siguiente tabla. Escribe el resultado en la columna correspondiente.

Tabla 30. Expresión algebraica del desplazamiento vertical		
Función	***Des. vertical***	***Ecuación (y = d)***
y = sen x + 1/2		
Y = cos x - 4		
Y = 7 + cos x		
Y = -sen x + 4		

D. Actividad extra-clase.* Construcción manual de los registros *algebraico, aritmético, geométrico y verbal* de la funciones *f(x) = sen (x) + d

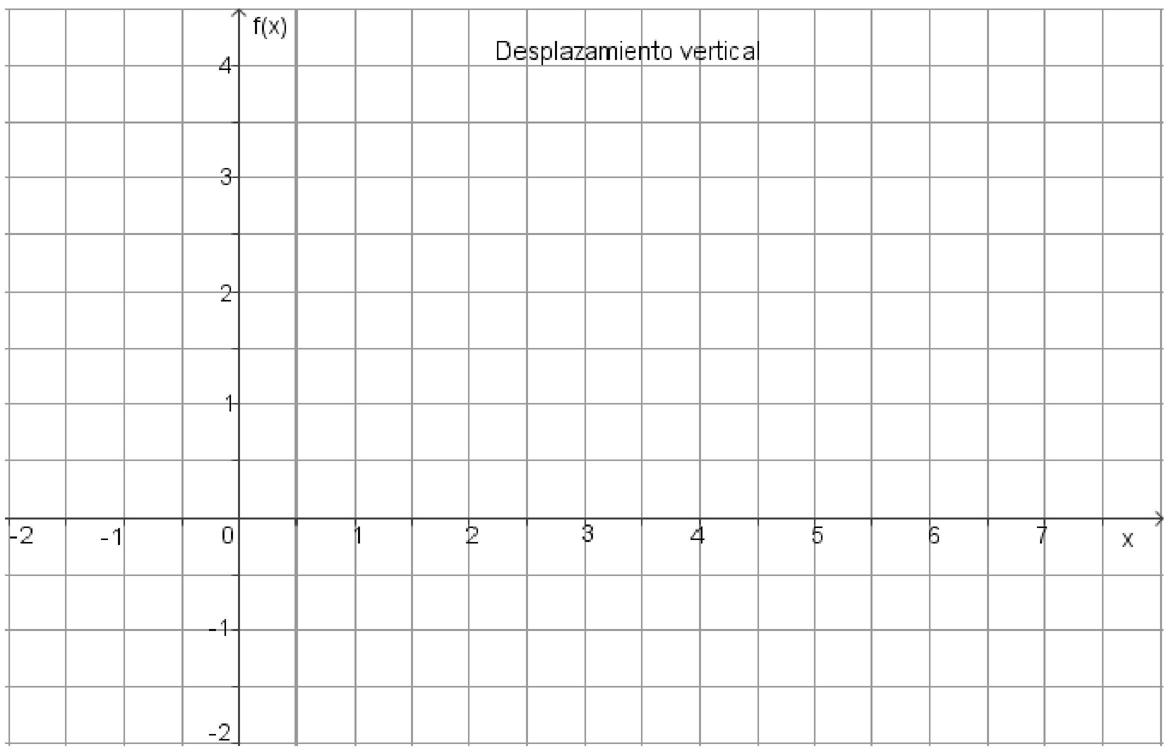
Usa calculadora en modo radianes, para determinar los valores de las funciones: $f(x) = sen(x)$, $g(x) = sen(x) + 2$, $h(x) = sen(x) + 3$ y $k(x) = sen(x) - 1$. Escribe los cálculos obtenidos, redondeado el resultado a dos cifras decimales, en la siguiente tabla.

Tabla 31. Representación aritmética de las funciones:f(x) = sen(x), g(x) = sen(x) + 2, h(x) = sen (x) + 3, k(x) = sen(x) - 1

x(rad)	**0**	**0.5**	**1**	**1.5**	**2**	**2.5**	**3**	**3.14**	**4**	**4.5**	**5**	**5.5**	**6**	**6.28**
f(x)														
g(x)														
h(x)														
k(x)														

1. Ahora, traza las gráficas sobre un mismo plano cartesiano (gráfica 5) en el intervalo $[0,2\pi]$ las funciones anteriores. Utiliza un color diferente para unir los puntos en cada una de ellas.

Gráfica 5*. Construcción manual de la representación geométrica de las funciones: f(x) = sen(x), g(x) = sen (x) + 2, h(x) = sen (x) + 3 y k(x) = sen(x) - 1*



2. Haz una descripción breve de lo que observas en las gráficas que dibujaste.

3. Expresa *verbalmente* el significado de las siguientes funciones:

   a. *f(x) = sin(x):* ____.
   b. *g(x) =4 sin(x+ 3) + 2*: ____
   c. *h(x) = -3sin(x) + 3*: ____.
   d. *k(x) = sin(2*x)* -1:____.

Hoja de trabajo 12: Recapitulación la función y = a f(b x + c) + d
1. Determina el significado geométrico de cada parámetro, escríbelo en el espacio correspondiente

Significado del parámetro	***Función generalizada***	***Significado del parámetro***
A $>$ ***0:***		***D :***
A $<$ ***0:***	***Y = A (B x + C) + D***	
	Y = A sen(B x + C) + D	
B $>$ ***0:***		
	Y = A cos(B x + C) + D	
B $<$ ***0:***		***C:***

2. Determina la amplitud, el periodo, el desplazamiento de fase y el desplazamiento vertical de cada función. Escribe el resultado en la columna correspondiente.

Tabla 32. Determinación de los parámetros de una función senosoidal.

Función	***Amplitud***	***Periodo***	***Desp. De Fase***	***Desp. Vertical***
$y = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$				

$y = 6\ sen\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$				
$y = -2 + sen\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{12}\right)$				
$y = 20 + 5\cos(3x + \pi)$				
$y = 10\ sen\left(\frac{x}{4} - 4\pi\right)$ - 5				

3. Una vez que hayas llenado correctamente la tabla, traza la gráfica de cada función en una hoja de papel milimétrico, utiliza un color diferente para cada una de ellas. Usa GeoGebra para comprobar si determinaste adecuadamente la gráfica de cada función.

Observación: utiliza los siguientes pasos para trazar la gráfica de una *función senosoidal* (seno o coseno).

---

a. Determina el desplazamiento vertical y traza la gráfica de la línea media
b. Determina la amplitud. Usa líneas punteadas para indicar los valores máximo y mínimo de la función.
c. Determina el período de la función y traza la gráfica de las curvas seno o coseno apropiados.
d. Determina el desplazamiento de fase y traslada la gráfica en concordancia.

4. Escribe una ecuación de la *función seno* para cada parámetro que se te indica en la siguiente tabla. El resultado escríbelo en la columna correspondiente

Tabla 33. Determinación de la expresión algebraica de la función senosoidal (seno)

Amplitud	***Periodo***	***Desp. Fase***	***Desp. vertical***	***Expresión algebraica (función)*** ***y = a sen (b x + c) + d***
3.5	3π	π	-7	

50	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	- 25	
$\frac{3}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	π	$\frac{1}{4}$	
-50	$\frac{\pi}{2}$	-2π	-10	

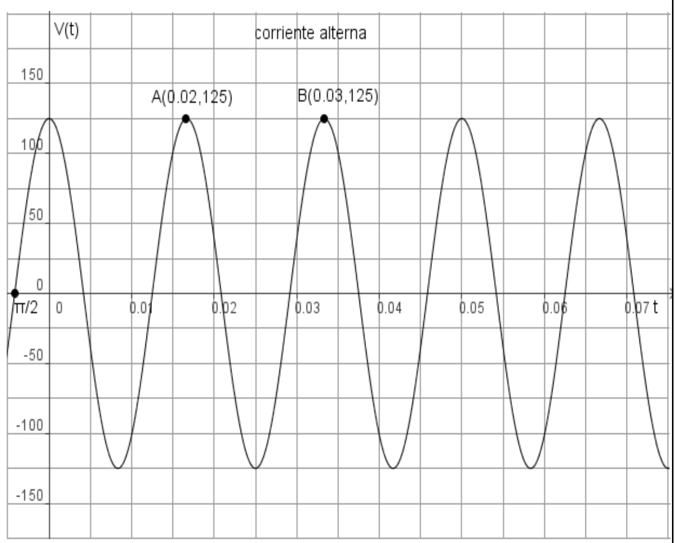
5. Ahora, escribe una ecuación de la *función coseno* para cada parámetro que se te indica en la siguiente tabla. El resultado escríbelo en la columna correspondiente

Tabla 34. Determinación de la expresión algebraica de la función senosoidal (coseno)

Amplitud	***Periodo***	***Desp. Fase***	***Despl. vertical***	***Expresión algebraica (función)*** ***y = a cos (b x + c) + d***
3.5	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	*7*	
$\frac{4}{5}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7}{5}$	
100	*45*	*0*	*-4*	
-20	$-\frac{\pi}{2}$	2π	*3*	

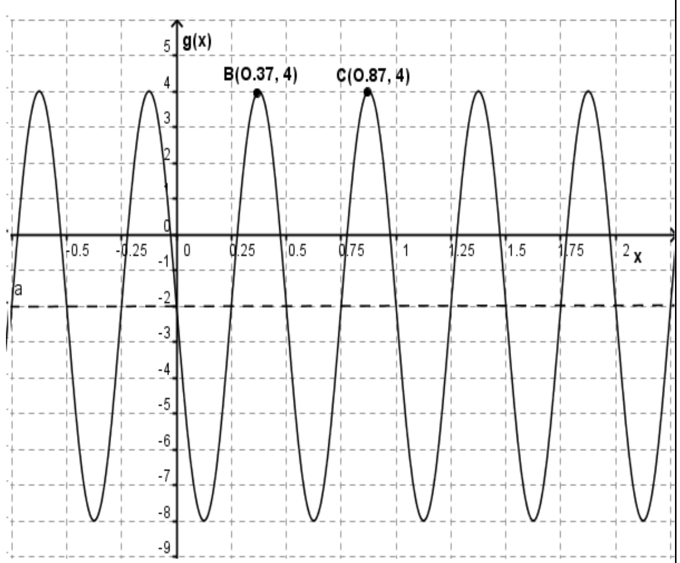
6. Usa la información que se te proporciona en cada gráfica para determinar la *función senosoidal* (*modelo matemático*) que la representa. Haz los desarrollos algebraicos en la columna correspondiente

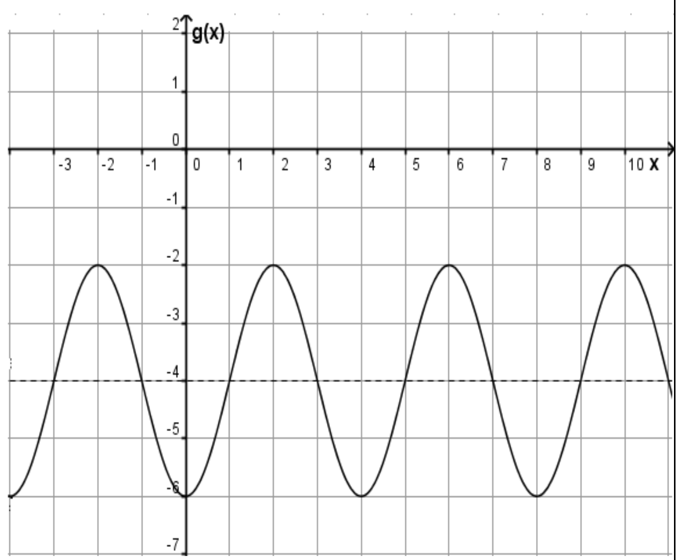
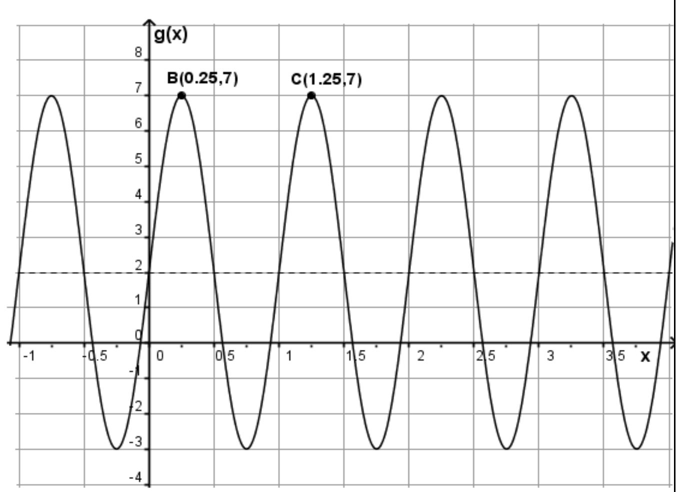
Representación grafica	***Desarrollo algebraico***

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>a:

b:

c:

d:</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">y = f(x) =</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">y = f(x) =</td>
</tr>
</table>

	
f(x) =	
	
y = f(x) =	

3.2.8 Fase de aplicación.

El principal propósito de esta fase y los proyectos es que los estudiantes pongan en juego las construcciones actitudinales, conceptuales y procedimentales desarrolladas en las fases previas, en situaciones que involucran variaciones periódicas adecuadas a su contexto y pertinentes a los contenidos señalados en el programa y plan de estudios. Para ello, se han seleccionado los siguientes fenómenos periódicos:

- sonido y,
- corriente alterna;

- patrón del clima de una ciudad, antes y después del calentamiento global;
- modelación del la inhalación y exhalación de aire en una persona adulta.
- modelación del péndulo físico.

En cada uno de estos fenómenos, y en otros quizá propuestos por los participantes en esta unidad didáctica, las funciones periódicas y su terminología (v. gr., las funciones trigonométricas), permiten hacer un análisis científico de cuestiones que, más o menos, son de interés actual para los estudiantes de bachillerato. Esto, por supuesto, no significa que todos los fenómenos puestos a su consideración sean, o tengan, el mismo interés para todos los estudiantes, sino que, en realidad, aquí se debe de tener un abanico de escenarios diferentes en donde lo periódico surja en forma eminente y de lugar al uso de la funciones periódicas (trigonométricas) para su modelación, así como para precisar las discusiones haciendo uso de la terminología de este tipo de funciones (periodo, frecuencia, longitud de onda, amplitud, etc.).

Secuencia didáctica 15. Sonido y corriente alterna

Más aún, en ésta secuencia el estudiante identificará que la *altura* (amplitud) que alcanzan las ondas se llama *voltaje* en el caso de la corriente eléctrica y, *volumen o nivel sonoro* en el caso del sonido. Por otro lado, identificará al *número de ondas* con los conceptos periodo y frecuencia, pero también dará cuenta que estos conceptos son característicos de los *fenómenos periódicos o cíclicos.*

La secuencia se realiza a través de la hoja de trabajo 13.

Secuencia didáctica 16. Meteorología y cambio climático.

A continuación se exponen las hojas de trabajo que sirvieron como guías para desarrollar esta fase bajo las ideas anteriormente expuestas. La secuencia se realiza a través de la hoja de trabajo 14.

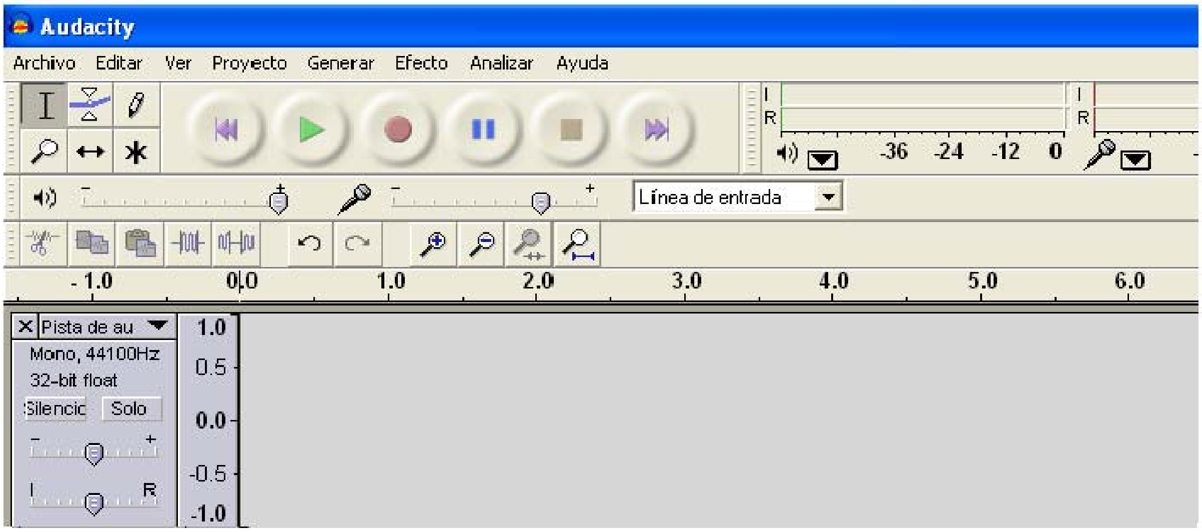
3.2.9 Hojas de trabajo para la fase de aplicación.

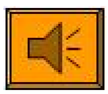
A continuación se presentan las hojas de trabajo relativas a esta fase.

Hoja de trabajo 13. Fenómenos periódicos I: sonido y corriente alterna.
En esta hoja de trabajo realizaremos un breve análisis acústico del sonido (y del ruido) con el software de edición y creación de sonidos *AUDACITY*. Para acceder a este programa es necesario abrir la carpeta F_trigonométricas, elegir *AUDACITY*. Al realizar lo anterior se presenta una pantalla

similar a la de la figura 13.

Figura 13. Ventana de trabajo del software AUDACITY



I. *el sonido y su amplitud*: 

A. ***El murciélago guananero mexicano***.

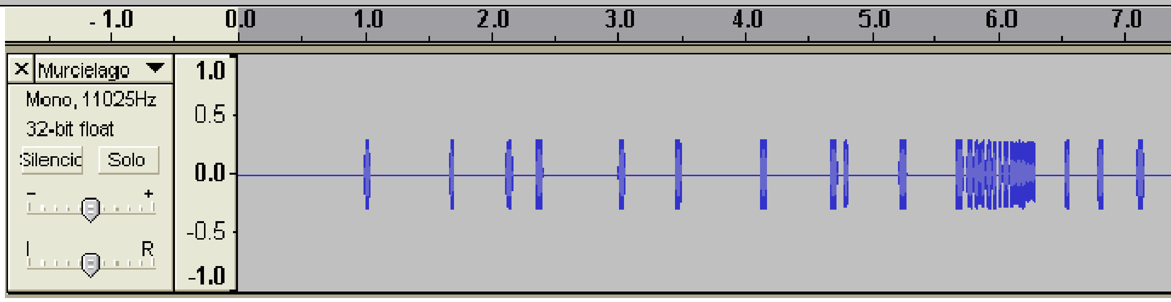
Una vez que hayas abierto AUDACITY, realiza lo siguiente:

1. Abre el programa Audacity.
2. Baja el sonido de un *murciélago gu anero mexicano*. En la carpeta de sonidos, describe lo que oyes.
3. Para ello elige la opción *proyecto* y aparecerá un menú. Elige la opción *importar audio.*
4. Selecciona de la carpeta sonidos el archivo *mex****,*** y elige la opción *abrir*

Descripción:

5. Observarás que el ***espectrograma*** que obtuviste es similar al que se te muestra en la figura 14.

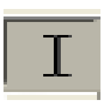
Figura 14. Espectrograma del murciélago mexicano.

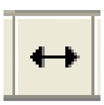


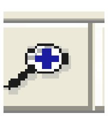
6. ¿Qué significado tienen las escala vertical y horizontal en el espectrograma?

Ahora bien, para poder analizar el sonido del murciélago mexicano usa las siguientes herramientas hasta obtener el espectrograma que se muestra en la figura 15. Si tienes problemas busca la asesoría del profesor.

Herramientas básicas de AUDACITY:


Herramienta para seleccionar una parte del espectro que se va analizar,


Herramienta para centrar la parte del espectro seleccionado


Herramienta de (zoom de acercamiento) para ajustar el espectro a un tren de ondas.

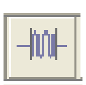
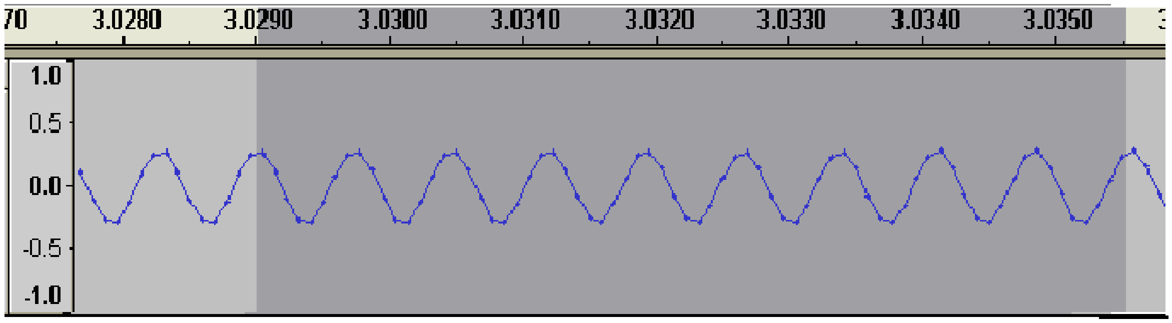

Herramienta para seleccionar la parte del tren de ondas (parte sombreada)

Figura 15. Obtención y selección de un tren de ondas del espectrograma del murciélago



7. Una vez obtenido el patrón anterior, determina directamente la amplitud (Volumen) del murciélago.

Volumen = ____.

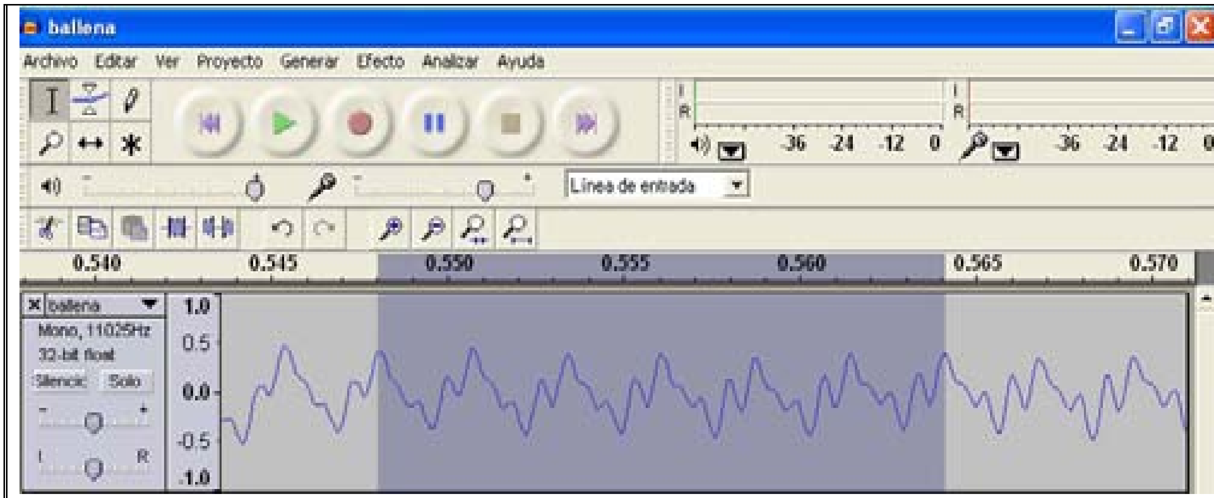
B. *La ballena jorobada*

Realiza lo siguiente:

1. Baja el sonido de una ballena. Describe lo que oyes.
2. Describe la gráfica o el espectrograma que traza *Audacity* del sonido emitido por esta *ballena*.
3. Usa las herramientas de AUDACITY para obtener el espectrograma (fig. 15)

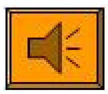
Descripción.

Figura16. Obtención y selección de un tren de ondas del espectrograma de la ballena



4. ¿Cuál es el volumen o tono de la ballena?

   Volumen = ____.

II. ***el sonido y su frecuencia***: 

El espectro audible lo podemos subdividirlo en función de los <u>tonos</u>:

- Tonos *graves* (frecuencias bajas, correspondientes a las 4 primeras octavas, esto es, desde los 16 Hz a los 256 Hz).
- *Tonos agudos* (frecuencias altas, correspondientes a las tres últimas octavas, esto es, de 2 kHz hasta poco más 16 kHz).

1. Baja de la carpeta de sonidos las notas: Do, Re y La, escúchalas y observa su gráfica. ¿Qué observas?

2. En un tiempo dado, ¿cuál de las notas posee más ondas?

3. ¿Encuentras alguna relación entre el número de ondas y los tonos *graves y agudos*? Explica

4. ¿Qué conjetura podrías afirmar acerca de la longitud de onda y la frecuencia?

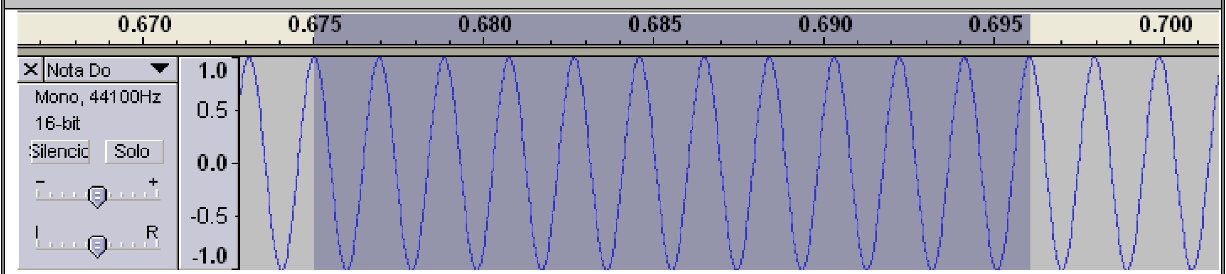
5. Para estar más seguro de tu respuesta, calcula los siguientes parámetros para cada una de las notas:

   a. Periodo (T).
   b. Frecuencia (f).
   c. Longitud de onda (λ).
   d. modelo matemático (f(x))

6. Por ejemplo, para determinar los parámetros de la *Nota Do* sigue el procedimiento que a continuación se te describe.

- Obtén el espectrograma de la nota, y una vez que lo hayas hecho selecciona una parte de éste. Fig.17.

Figura 17. Obtención y selección de un tren de ondas para la nota Do



- Determina *el número de ondas* que hay en la parte sombreada: n = 11 ondas o ciclos

- Calcula el *periodo* (recuerda que el *periodo es el intervalo de tiempo* necesario para completar un *ciclo*), en nuestro caso para determinar el periodo dividimos el intervalo de tiempo entre el numero de ciclos, esto es

$$T = \frac{\Delta t}{No.ondas} = \frac{t_f - t_i}{11} = \frac{0.696\ s - 0.675\ s}{11} = \frac{0.021\ s}{11} = 1.90\ x 10^{-3}\ s$$

- Entonces la frecuencia es:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.9\ x\,10^{-3}\ s} = 526.3\ ciclos\ /\ s = 526.3\ Hertz$$

- La longitud de onda (λ) es:

$$\lambda = \frac{v_{sonido}}{f} = \frac{343\ m/s}{1384.6\ 1/s} = 0.24\ m$$

Modelo matemático: las notas musicales son curvas senosoidales como puedes observar en sus gráficas. Entonces, su expresión algebraica tiene la forma siguiente:

nota(tiempo) = Amplitud sin(2 π f tiempo)

En donde la Amplitud es la intensidad(volumen) del sonido, mientras que f es la frecuencia.

Ahora bien, para la nota Do se tiene como modelo:

- f(x) = nota(t) = *a sen(b x) = Amplitud sin(2 π f tiempo) = 1 sen(2 π 526 t)*

7. Utiliza el procedimiento anterior para determinar los parámetros físicos y el modelo matemático de los sonidos que se te indica en la tabla siguiente. Escribe los resultados obtenidos para cada sonido en la siguiente tabla:

Tabla 35. Parámetros físicos de distintos sonido					
Sonido	***Amplitud (Volumen)***	***Periodo (s)***	***Frecuencia (Hz)***	***Longitud de onda(λ)***	***Modelo matemático***
Do					
Re					
La					
Trompeta					
Ballena					

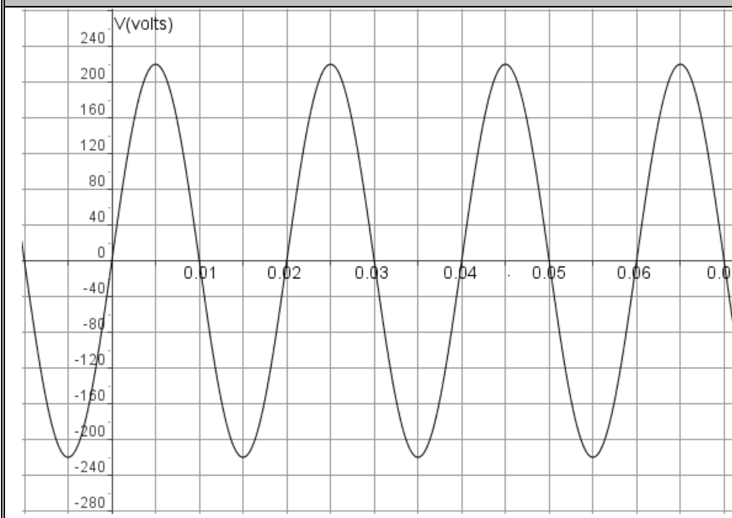
III. ***La corriente alterna.***

La energía eléctrica que llega a nuestros hogares y a las empresas genéricamente se le llama corriente alterna, ya que, la magnitud y dirección varían cíclicamente. Por lo general, la forma de onda de la corriente alterna más comúnmente utilizada es la de una onda senosoidal, debido ha que con ésta se consigue una transmisión más eficiente de energía. A continuación se te muestra como sería la representación geométrica de la variación de la engría eléctrica con respecto al tiempo V(t).

1. Ahora bien, utiliza la información que te proporcionan las siguientes gráficas para determinar el modelo matemático de la forma $V(t) = a\,sen\,(b\ \ t)$ o $Vt) = a\,cos(b\ x)$ que se ajuste a esta información. Haz el desarrollo algebraico en la columna correspondiente.

Figura 17. Representación geométrica de la corriente alterna en Argentina

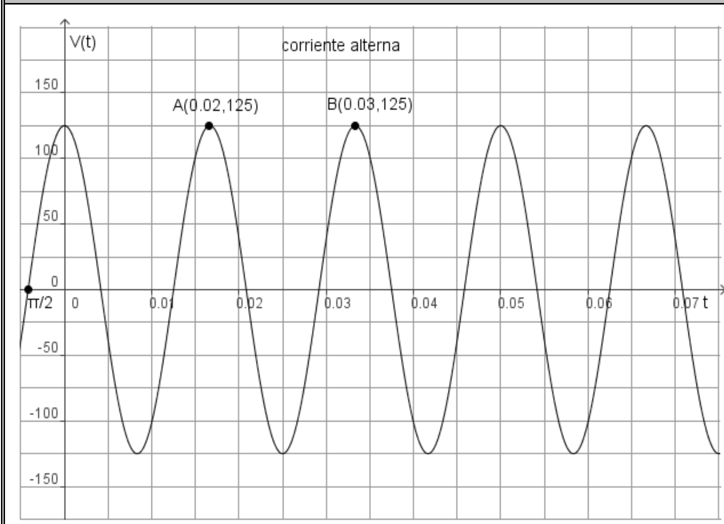
Desarrollo algebraico



Modelo matemático: V(t) =

Figura 18. Representación geométrica de la corriente alterna en la ciudad de México

Desarrollo algebraico



Modelo matemático: V(t) =

Hoja de trabajo 14. Patrón del clima de una ciudad, antes y después del calentamiento global.

La tabla siguiente muestra el registro de las temperaturas máximas promedio mensuales de la ciudad de Mexico, del condado de Audrain en Missouri (USA).

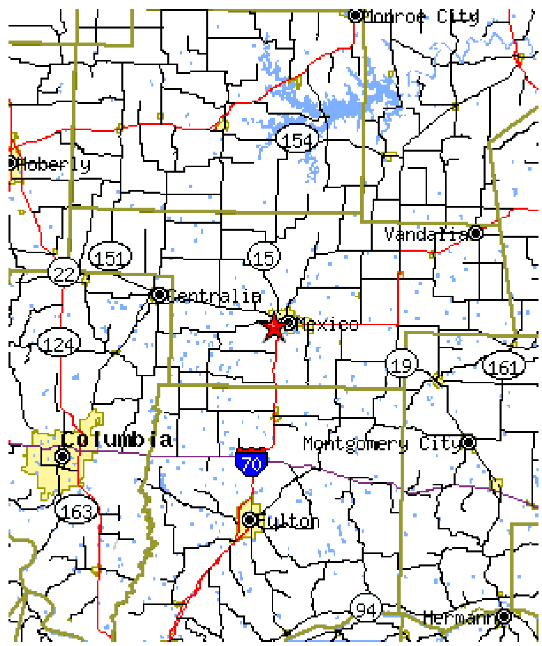


Tabla 36. Temperaturas promedio

Mes	**Enero**	**Febrero**	**Marzo**	**Abril**	**Mayo**	**Junio**
°C	2.7	4.8	11.5	18.4	24.0	29.2
Mes	**Julio**	**Agosto**	**Septiembre**	**Octubre**	**Noviembre**	**Diciembre**
°C	32.1	31.3	27.0	20.5	11.9	4.8

Con esta tabla haz lo siguiente.

1. Marca las temperaturas correspondientes a cada mes como puntos del plano cartesiano. (Puedes hacerlo en una hoja cuadriculada o, de preferencia, en GeoGebra).

   ¿Consideras que la temperatura de esta ciudad es un fenómeno cíclico? _____________.

Ahora vas a construir un modelo matemático que aproxime esta variaciones mensuales de temperatura. Para ello haz lo siguiente.

2. Determina el rango de variación anual de las temperaturas de esta ciudad:

   rango: [______,______]

3. Si el modelo de la temperatura fuese senosoidal, ¿cuál sería su amplitud?

   Amplitud = ______.

4. Continuando con la suposición de que este fenómeno se puede aproximar con un modelo senosoidal, ¿cuál sería su desplazamiento vertical?

   d = ______.

5. ¿Cuál sería el periodo de este modelo (función) senosoidal?

   b = ______.

6. Ahora, para determinar el desfasamiento (desplazamiento horizontal) de la función senosoidal, haz lo siguiente.

   6.1. En la siguiente ecuación, sustituye los valores ya calculados de a, b, d y, además, sustituye el valor numérico correspondiente al mes de junio, así como la temperatura promedio para este mes:

   $y = a \sin(b x + c) + d$

   6.2. Resuelve la ecuación resultante para el valor de c = ______.

7. Con los valores ya calculados de a, b, c, d, escribe el modelo (función) senosoidal que aproxima el patrón de temperatura de esta ciudad:

y = ____.

8. Edita esta fórmula en GeoGebra y describe lo que ocurre entre esta gráfica y los puntos ya marcados.

9. Completa la siguiente tabla empleando para ello el modelo (función) obtenido.

Tabla 37. Cálculo de temperaturas mensuales

Mes	°C	Mes	°C
2		3.5	
	20°C		7°C

10. Los datos con los que has trabajado han sido tomados desde 1893 hasta 1996, todavía cuando el calentamiento global no dejaba sentir sus efectos. Haz una investigación de cómo se han modificado las temperaturas mensuales de esta ciudad, o de otra, y escribe tus conclusiones.

3.3 Proyectos.

Los siguientes son los proyectos que los alumnos, de manera individual o colectiva, tendrán que realizar. con estos proyectos se pretende que el estudiante haga un ″recorrido″ de los contenidos actitudinales, conceptuales y procedimentales, establecidos para la Unidad 3: Funciones trigonométricas, del curso de Matemáticas IV. Más aún, le darán al estudiante oportunidad de usar los nuevos conceptos de varias formas y adquirir confianza en la aplicación de los mismos. También le permitirán ver la utilidad y la relevancia de lo aprendido en su contexto. Cabe señalar que estos proyectos se irán realizando en forma paralela al desarrollo de la unidad didáctica.

Los proyectos aquí planteados son los siguientes:

- Sonido y música.
- Modelación de fenómenos meteorológicos, como:
    - la cantidad de luz diurna que recibe la ciudad
    - la temperatura anual promedio de la ciudad.
- Modelación de la respiración pulmonar.
- Modelación del péndulo físico

Proyecto A: Sonido y música.

El Principal objetivo de este proyecto es que los estudiantes lleven a cabo un estudio físico matemático del sonido (verbigracia, amplitud-intensidad, frecuencia-tono,etc.)y, de manera particular, de la música.

Proyecto B: Modelación de la cantidad de luz diurna que recibe una ciudad.

Lo que se pretende en este proyecto es que el alumno sepa representar a través de las funciones trigonométricas, en particular, seno o coseno datos de la realidad como es la cantidad de luz que recibe una ciudad en el día.

METEOROLOGÍA. La tabla contiene los horarios en los cuales el Sol sale y se pone en los días 15 de cada mes en Brownsville, Texas[29].

Guión:

a) Encuentre la cantidad de horas de luz del día para la mitad de cada mes.
b) ¿Cuál es la amplitud de una función senosoidal que representa las horas de luz del día
c) ¿Cuál es el desplazamiento vertical de una función senosoidal que representa las horas de luz del día?
d) ¿Cuál es el periodo de una función senosoidal que representa la luz del día.
e) Escribe una función senosoidal que representa la luz del día.
f) De acuerdo con el modelo que obtuviste, cuál es el número de horas de luz para el día 30 de Septiembre.

Mes	***Salida del Sol A.M.***	***Puesta del Sol P.M.***
Enero	7:19	6:00
Febrero	7:05	6:23
Marzo	6:40	6:39
Abril	6:07	6:53
Mayo	5:44	7:09
Junio	5:38	7:23
Julio	5:48	7:24
Agosto	6:03	7:06
Septiembre	6:16	6:34
Octubre	6:29	6:03
Noviembre	6:48	5:41
Diciembre	7:09	5:41

***Proyecto C: Modelación de la temperatura*.**

Las temperaturas (en ºF) mensuales promedio para la ciudad de Seatle, Washington, son las siguientes:

Enero	***Feb***	***Marzo***	***Abril***	***Mayo***	***Junio***	***Julio***	***Ago.***	***Sep.***	***Oct.***	***Nov.***	***Dic.***
41º	44º	47º	50º	56º	61º	66º	65º	61º	54º	46º	40º

[29] Para obtener datos de la realidad acerca de la cantidad de luz diaria, temperaturas o mareas, visita la la dirección: **www.amc.glencoe.com**

Guión:

a) Encuentra la amplitud de una función senosoidal que represente las temperaturas mensuales.
b) Encuentra el desplazamiento vertical de una función senosoidal que represente las temperaturas mensuales.

c) ¿Cuál es el periodo de una función senosoidal que representa las temperaturas mensuales?

d) Escribe una función senosoidal que represente las temperaturas mensuales, usando t = 1 para representar a Enero.

e) de acuerdo con tu modelo, ¿cuál es la temperatura mensual promedio en febrero?¿cómo es con el promedio real?

f) De acuerdo con tu modelo, ¿cuál es la temperatura mensual promedio en noviembre? ¿Cómo se compara esto con el promedio real?.

g) Por último, usa Geogebra para determinar la gráfica de la función que obtuviste como modelo.

Proyecto D: Modelación de la respiración pulmonar.

Considera la siguiente situación: Un adulto promedio sentado inhala y exhala cada 4 segundos. La cantidad mínima promedio de aire en los pulmones es de 0.8litros, y la cantidad máxima promedio de aire en los pulmones es de 0.82 litros. Supón que los pulmones tienen una cantidad mínima de aire en t = 0, donde t es el tiempo en segundos.

Con esta información:

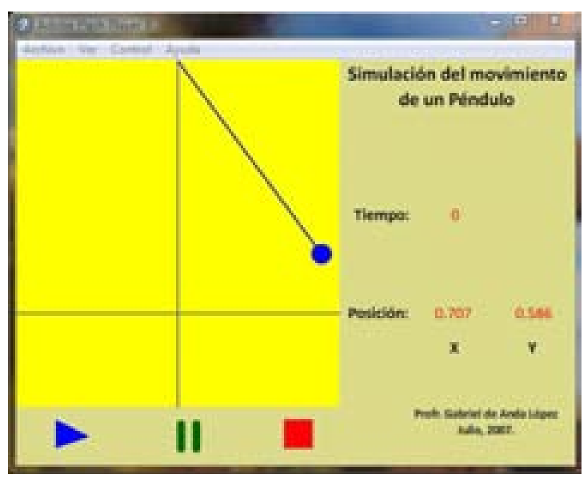
a) Escribe una función que represente la cantidad de aire en los pulmones.
b) Traza la gráfica de la función.
c) Determina la cantidad de aire en los pulmones a los 5.5 segundos.

Proyecto E: Modelación del péndulo físico.

El péndulo (físico).

1. Con el escenario interactivo (applet) "El Péndulo", que será proporcionado por tu profesor, haz lo siguiente.

1.1. Explora este escenario usando los botones de "play", "pausa" y "detener".



1.2. Qué ocurre con los valores de la posición del badajo "x", "y", conforme transcurre el tiempo.

1.3. ¿Qué tipo de variación crees que sea la que corresponde al movimiento del péndulo?

1.4. ¿Podrías determinar la fórmula que "modele" el movimiento de este

péndulo?	
2. Realiza una investigación documental[30] y da noticia de 3 fenómenos periódicos o cíclicos.	

Proyecto F: Investiga en el estacón meteorológico de tu escuela las temperaturas de la ciudad de México

[30] Documental significa que sea en libros, revistas, videos, Internet, etc.

Capítulo 4. Datos relevantes de la experiencia didáctica.

La unidad didáctica que sustenta esta tesis, fue puesta en escena con el Grupo 466, del curso de Matemáticas IV, del Colegio de Ciencias y Humanidades, Plantel Sur, durante el periodo comprendido entre el 21 de abril al 13 de mayo del 2008. Cabe señalar que esta experiencia didáctica se realizó en 10 sesiones de dos horas cada una, en el Aula de Vanguardia[1].

A continuación se exponen algunos datos recabados a lo largo de la puesta en escena de esta experiencia didáctica, datos que serán analizados y que a la postre nos permitirán establecer algunas conclusiones así como algunas perspectivas de desarrollo con base en este trabajo.

4.1 Fase de inicio (pre-concepciones).

La unidad didáctica diseñada y puesta en escena, fue *estructurada* a partir de "lo periódico" o "cíclico", término o idea que al inicio de esta experiencia fue interpretada como se esperaba, es decir, en términos de la "repetición de algo", por la mayoría de los estudiantes, como puede apreciarse en la siguiente tabla.

Tabla 38. Pre-concepciones de los estudiantes acerca de lo periódico.	
De acuerdo con los estudiantes lo "periódico" es, tiene que ver, con:	**Idea subyacente.**
• *Cuando hay un cambio directo y constante* • *Cuando una ecuación o recta tiene un cambio igual y constante.* • *Tiene un cambio constante.* • *Presenta un constante cambio.*	Movimiento uniforme, variación proporcional, etc.
• *Es una distancia o longitud de un punto a otro.*	Distancia entre puntos.
• *Es un cambio, el cual lleva, un seguimiento o entrelazamiento.*	Causalidad.

[1] El Aula de Vanguardia es un espacio equipado con computadoras conectadas a Internet y asignado a la Academia de Matemáticas, para que sus profesores puedan desarrollar aquellas sesiones en donde se hace uso de este medio tecnológico.

• *Variación de vueltas en una circunferencia.* • *Movimiento que lleva una frecuencia proporcional.* • *Algo continuo y que tiende a repetirse.* • *Algo que se repite gradualmente (es constante).* • *Es el tiempo en el que suceden cierto tipo de acontecimientos.* • *Es un suceso que provoca cambios diversos durante épocas o momentos determinados.* • *Un fenómeno que ocurre constante, es decir, que es circular y al terminar comienzo de nuevo su ciclo.* • *Un objeto sufre un cambio en un cierto momento, en repetidas ocasiones.* • *Aquel que ocurre en diferentes lapsos o en determinado tiempo.* • *Un acontecimiento que ocurre de manera frecuente.* • *Algo que sucede constantemente en un cierto periodo.* • *El tiempo que tarda una hora en pasar.*	Lo periódico.

Casi todos los estudiantes del grupo en donde se puso en escena esta unidad didáctica, supieron distinguir claramente los fenómenos periódicos de otros de naturaleza no periódica[2], cuestión que siguió observándose en las secuencias didácticas subsecuentes.

4.2 Fase de información e introducción de conceptos.

Con esta fase comenzó la *diferenciación progresiva* de lo que los estudiantes tenían por "lo periódico" o "cíclico", con los significados matemáticos elementales de estos términos. Este proceso de diferenciación fue un proceso de enriquecimiento de significados, mas que un proceso de ruptura o antagonismo conceptual, dado que se extendió, en cierto sentido, lo que los estudiantes ya tenían por "lo periódico".

Esto se observó en las secuencias medulares de esta fase, a saber, "La rueda de la fortuna"[3] y la secuencia didáctica 7, en donde los estudiantes desarrollaron con un escenario interactivo (applet) los registros de representación aritmético, algebraico y geométrico de las funciones sinusoidales.

Finalmente, se puede decir que esta interpretación matemática elemental de "lo periódico" se colocó, de nuevo, en el horizonte cotidiano de interpretación de los estudiantes al poner en juego la representación sinusoidal del sonido y de la corriente eléctrica, cuestiones con

[2] Cf. Examen de pre-concepciones, pregunta 2.
[3] Cf. Secuencia didáctica 5.

las que dio inicio la *reconciliación integradora*. Esta reconciliación se dio no sólo en la interpretación matemática de los estudiantes sino que con el sonido, por ejemplo, los estudiantes y el profesor establecieron nexos con la acústica (acústica submarina, la capacidad de ecolocación del murciélago y la holografía), con la música (notas musicales, graves y agudos, etc.), y con la meteorología (modelación de la temperatura de una región, cantidad de luz diurna).

4.3 Fase de ampliación.

En esta fase, la cuestión central fue establecer la relación que hay entre los parámetros: *a, b,c y d* de las expresiones algebraicas:

$$f(x) = a \sin(b\,x + c) + d \qquad\qquad g(x) = a \cos(b\,x + c) + d$$

con su trasunto geométrico y con los parámetros físicos de amplitud, periodo, frecuencia y fase, cuestión que se vio favorecida por todos los elementos visuales y de animación que permite el uso de una interfaz algebro-geométrica como GeoGebra y que pusieron en juego los estudiantes en esta fase. En apoyo a esta afirmación hemos considerado pertinente mostrar las siguientes evaluaciones realizadas con base en las hojas de trabajo de las secuencias didácticas correspondientes a esta fase de ampliación.

Parámetro:	Registro verbal.	Registro algebraico.	Registro geométrico.
amplitud	88%	100%	100%
frecuencia	78%	88%	80%
fase	***50%***	***55%***	***60%***
traslación vertical	88%	95 %	90%

Los resultados mostrados en esta tabla dan cuenta de que los estudiantes diferenciaron adecuadamente la relación parámetro-elemento geométrico, salvo en lo relacionado con la noción de *fase* de una función senosoidal, como se observa en el tercer renglón. La reconciliación de estos nuevos significados se observó hasta la siguiente etapa como exponemos subsecuentemente.

4.4 Fase de aplicación.

En esta fase, que es en donde se esperaba la *reconciliación* de los nuevos significados con los previos, se realizaron tres secuencias didácticas. En particular, se trató de que los estudiantes pusieran en juego los tres tipos de contenidos (actitudinal, conceptual y procedimental) establecidos en el Programa de Estudios para esta unidad temática. Los resultados fueron muy satisfactorios y son mostrados en las siguientes tablas.

Tabla 39. Evaluación de los aprendizajes correspondientes a los contenidos actitudinales.	
Cabe señalar que la evaluación de estos contenidos se realizó a lo largo del de la puesta en escena de la unidad didáctica; a través de la comunicación cotidiana con cada uno de los estudiantes, a partir de ello se observaron los siguientes logros:	
La participación del estudiante en el desarrollo de las estrategias de aprendizaje de la unidad didáctica. Así como su disposición para realizar el trabajo en equipo con responsabilidad y colaboración.	Mejora (porque estas estrategias propician y facilitan su participación)
La valoración de su propio trabajo y confianza en su buena realización, así como el fomento de su autoestima e interés por el estudio de diversos fenómenos o hechos de la vida cotidiana	Mejora.
Valoración de la utilidad de las matemáticas y las ciencias en la modelación de diversos fenómenos periódicos de la vida cotidiana.	Mejora.
Ser crítico ante la información contenida en documentos científicos o de índole general.	Mejora.

Tabla 40. Evaluación de los aprendizajes correspondientes a los contenidos conceptuales.	
Explora, en una situación o fenómeno de variación periódica, valores, condiciones, relaciones o comportamientos, a través de diagramas, tablas, expresiones algebraicas, etcétera que le permitan obtener información de ello, como un paso previo al establecimiento de conceptos, y al manejo de las representaciones pertinentes.	95 %
Recuerda el significado de las razones trigonométricas para ángulos agudos, en particular, seno, coseno y tangente.	90 %
Identifica el ángulo, como una rotación de un radio de un círculo. Lado inicial y lado final.	87 %
Convierte medidas angulares de grados a radianes y viceversa.	95 %
Calcula algunos valores de las razones seno y coseno para ángulos no agudos, auxiliándose de ángulos de referencia inscritos en el círculo unitario.	95 %

Generaliza el concepto de razón trigonométrica de un ángulo agudo a un ángulo cualquiera.	80 %
Expresa las razones trigonométricas como funciones, con los ángulos medidos en radianes.	80 %
Identifica en las funciones del tipo: f (x) = a sen(b x + c) + d f (x) = a cos(b x + c) + d la frecuencia, la amplitud, el periodo y ángulo de desfasamiento.	90 %
Los usará para dibujar directamente la gráfica.	95 %
De igual manera será capaz de identificar en la gráfica estos parámetros para proporcionar la expresión algebraica correspondiente.	95 %
Conoce algunas aplicaciones de las funciones trigonométricas en el estudio de fenómenos diversos de variación periódica, por ejemplo: movimiento circular, el péndulo físico, ciclo de la respiración o de los latidos del corazón, corriente alterna, fenómenos meteorológicos, estudio de las mareas, fenómenos ondulatorios, ondas electromagnéticas, etcétera.	95 %

Tabla 41. Evaluación de los aprendizajes correspondientes al contenido procedimental.	
Manejo general de una aplicación de computadora (software): ejecutar el programa, abrir, guardar y editar sus archivos.	Excelente
Uso específico de GeoGebra: • graficar una función; • graficar una familia de funciones; • animar parámetros; • interpretación algebro-geométrica de los entes matemáticos manipulados; • refuerzo en la sintaxis matemática correcta al editar expresiones algebraicas; • uso de imágenes digitales con gráficas y otros elementos algebro-geométricos realizados en esta interfaz a través del comando de exportación de imágenes.	Excelente
Uso específico de escenarios interactivos (applets): • visualización e interpretación de fenómenos (virtuales); • manejo adecuado de un escenario interactivo; • recopilación de datos relevantes en un escenario interactivo.	Bueno

Uso específico de una hoja de cálculo (Excel): • edición de series de datos; • representación geométrica de series de datos (como puntos del plano cartesiano); • establecimiento de un modelo algebraico para sus series de datos (ajuste por regresión lineal de manera automática).	Bueno
Manejo de la Internet para: • recabar información; • manejo de escenarios interactivos.	Excelente

4.5 Evaluación.

La evaluación de cualquier unidad didáctica que sea elaborada bajo la interpretación constructivista del aprendizaje, debe ser una evaluación continua y permanente, centrada en la diferenciación que cada aprendiz va desarrollando progresivamente, así como en la observación de las reconciliaciones entre los contenidos anteriores y los nuevos. En nuestro caso, la evaluación de la unidad didáctica aquí presentada no es la excepción, y hemos tratado de apegarnos a esos lineamientos en la medida de lo posible.

En efecto, la evaluación de esta unidad didáctica la hicimos con base en lo siguiente:

- evaluación cotidiana de las hojas de trabajo, tanto en su realización, como en sus respuestas escritas;
- evaluación de cada fase a través de exámenes escritos;
- realización y exposición de proyectos que comprendían las partes más relevantes de los tres tipos de contenidos de esta unidad didáctica.
- Investigación documental

Con relación al primer punto, ya hemos expuesto los resultados en las tablas 2, 3 y 4, de la sección anterior. Por otra parte, los resultados de los exámenes se muestran en la siguiente tabla:

Fase	Evaluación		
	Acttitudinal.	Conceptual.	Procedimental.
Información e introducción:	90%	70%	85%
Ampliación:	90	85	90
Aplicación:	90	80	80

Con respecto al último punto señalado para la evaluación de esta unidad didáctica conviene apuntar lo siguiente. Al inicio de la unidad didáctica, se les hizo saber a los estudiantes que ésta concluiría con la realización de diferentes proyectos que deberían ser realizados en equipos y que, además, los proyectos ya elaborados tendrían que ser expuesto ante sus demás compañeros. Ahora bien, los proyectos propuestos fueron diseñados para que, con ellos, los estudiantes hicieran un recorrido no sólo conceptual, sino también actitudinal y procedimental, con base en los contenidos que la unidad temática de base contuviese.

Durante la elaboración de estos proyectos por parte de los estudiantes, en las que el profesor fungió sólo como asesor, se observó la siguiente problemática.

Problema matemático.	Problemas conceptuales o epistemológicos.
Principio de superposición.	No entendían la suma de diferentes ondas, es decir, lo que obtenían no correspondía a sus expectativas o, simplemente, no tenían alguna. Esto fue observado al "sumar" tonos de diferentes frecuencias, lo que producía una onda periódica pero no sinusoidal.
Identificación de las variables en una relación funcional.	Tuvieron dificultades para identificar al tiempo (lineal) como la variable independiente en el caso de los registros del clima de alguna región del planeta, en donde la temperatura se ponía en función de aquel.
Determinación de la fase de una función sinusoidal.	Tuvieron dificultades para determinar la fase de un fenómeno "real", modelado por una función sinusoidal, cuestión que también se vio reflejada al momento de elegir entre una de esas funciones o alguna de la familia del coseno.

Por otra parte, una vez subsanados la mayoría de los problemas señalados en esta tabla, los estudiantes concluyeron sus proyectos y los expusieron ante sus demás compañeros. Aquí se observó que la gran mayoría de los estudiantes ya estaba familiarizada con el software empleado (GeoGebra y Excel) y, sobre todo, con las funciones que les habíamos venido otorgando y, quizá por esta familiaridad, la actitud ante las matemáticas ya había cambiado notable y positivamente. Sin embargo, algo que no quiero dejar de observar es el hecho de que en las exposiciones los estudiantes empleaban los términos matemáticos más importantes de esta unidad (periodo, frecuencia, amplitud, etc.) con soltura y, se puede decir, con naturalidad, es decir, que ya habían integrado la descripción matemática de los mismos a su lenguaje cotidiano, cuestión que muestra, según creo, el aprendizaje significativo de los contenidos más importantes de esta unidad.

Conclusiones y perspectivas.

Como conclusiones de esta experiencia educativa está lo siguiente.

- Mediante la unidad didáctica desarrollada no sólo los alumnos alcanzaron los objetivos establecidos para ella, sino también llevaron a cabo una forma de trabajo en la que ellos participaron como los actores principales de su propio aprendizaje, es decir que conjugaron su propia experiencia previa con los nuevos conceptos.

- Más aún, la actitud en esta organización y desarrollo de los aprendizajes dio pie a un respeto muto y de colaboración entre los estudiantes y el profesor, es decir, a un efectivo trabajo colaborativo y no sólo al trabajo individual de los participantes, que redundo en la tolerancia, en mejores actitudes hacia las matemáticas.

- El empleo de interfaces gráficas, sonoras e interactivas, se mostraron como factores determinantes en el aprendizaje de las matemáticas y, puedo decir, de la ciencia en general, al permitir que los estudiantes pusieran en práctica los conceptos y métodos propios de esta unidad didáctica, con lo que enriquecieron el significado que tenían de "periodicidad", de "lo periódico" o "cíclico".

- Sin duda, la organización de los aprendizajes en una unidad didáctica facilita enormemente la tarea del profesor, así como la de los propios aprendices, al permitir una administración efectiva de los recursos didácticos en correspondencia con los estilos propios de aprendizaje de cada uno de los participantes.

- Como consecuencia de lo anterior, confirmé que los aprendizajes así organizados no resultan agobiantes para ellos y, además, permiten su estructuración lógica y pausada en su desarrollo.

Hasta cierto punto, el enfoque realizado empata con lo que parece ser la exigencia educativa de la actual sociedad y economía globalizada, a saber, la exigencia de desarrollar en los estudiantes *competencias* requeridas por el círculo mundial producción-consumo. En este sentido, he observado cómo el aprendizaje de las matemáticas, así como su enseñanza, han cambiado sustancialmente en relación con el aprendizaje y enseñanza de las mismas todavía no hace mucho tiempo. En particular, *la interpretación matemática del mundo, su calculabilidad*, ha venido a ser uno de los pilares de este aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, cuestión que se ha establecido en las diversas *competencias* que ahora rigen en los sistemas educativos institucionales y que puedo establecer de la siguiente manera: se trata de *interpretar y organizar matemáticamente aquellos datos tomados de la realidad,* *empleando diversas estrategias, métodos e instrumentos matemáticos y científicos para hacerlo cada vez en forma más eficiente*.

En este sentido, las competencias establecidas o fomentadas a través de esta experiencia didáctica fueron las siguientes.

- Lograr que los estudiantes fuesen interpretando en términos de esta calculabilidad su entorno, cuestión que fue llevada a cabo paulatinamente (diferenciación progresiva) hasta que su interpretación se reconciliara con esta.

- Para ello, la medición de fenómenos próximos a los estudiantes (su voz, por ejemplo), o la recopilación de mediciones de fenómenos como el clima, fueron esenciales para esta mirada científica, matemática o calculable del mundo.

- Más aún, la organización de esas mediciones, en registros aritméticos, algebraicos, geométricos, etc., permitió el paso de lo "intuitivo" a lo "científico".

- Finalmente, al llevarlos a que ahora impusieran ese "orden" o calculabilidad a algo cercano a ellos, permitió que ensayaran esa mirada moderna o, mejor, dicho esa interpretación técnico-científica del mundo.

- Cabe destacar que en este proceso emergieron las principales competencias matemáticas exigidas en este nivel educativo, a saber:

    - medición de la realidad e instrumentos actuales para hacerlo;

    - organización de esas medidas en modelos aritméticos, geométricos, algebraicos, etc., a través de diversos medios: los tradicionales y la computadora;

    - interpretación de ese tipo de registros, en forma geométrica, aritmética o algebraica;

    - empleo de los métodos matemáticos con fines o propósitos específicos, a saber, la calculabilidad de su entorno y del mundo;

    - La modelación (proyectos) de diferentes situaciones y contextos del mundo real a través de una función trigonométrica, es decir, expresar matemáticamente un fenómeno periódico en términos de una función senoidal permitió que el estudiante, alcanzara en la medida de lo posible los aprendizajes de contenidos: actitudinales conceptuales y procedimentales.

    - Más aún, le dio al aprendiz la oportunidad de identificar y relacionar los parámetros: a, b, c y d de la función senoidal con la amplitud, período, frecuencia y ángulo de desfasamiento.

Perspectivas.

Con base en este trabajo me he parece que este trabajo puede continuar de la siguiente manera.

- Los contenidos de las matemáticas ya no pueden seguir siendo tratados en la forma teoría-práctica, sino que ahora se impone el desarrollo de competencias en donde la línea que dividía esas partes del conocimiento matemático ha sido borrada.

- Consecuentemente, ya no pude seguir la división tradicional de las matemáticas en la enseñanza, ahora está exigido trabajarla de manera que intervengan en cada cuestión a enseñar sus diferentes aspectos, sean aritméticos, algebraicos, geométricos, etc.

- Más aún, las ciencias ya no pueden seguir viéndose en forma aislada o separadamente, sino que ahora deben quedar integradas.

- Para ello, la computadora puede ser un medio o herramienta, en donde los conocimientos se expongan en forma hipertextual y no linealmente como ocurre con todos los libros de texto.

- Estos cambios suponen transformaciones en todo el entorno educativo, pero de manera particular, suponen cambios radicales en la forma de enseñar de los profesores: ahora ya no se requieren sabios o eruditos, sino expertos en la resolución matemática de problemas arraigados en el entorno actual y, sobre todo, que sean capaces de poner al tanto a los estudiantes de los instrumentos o medios para plantear y resolver problemas matemáticamente hablando.

- El profesor se convierte cada vez más en facilitador y administrador del aprendizaje de sus estudiantes,

- Por otro lado, la búsqueda y la aplicación de un enfoque didáctico novedoso en la enseñanza en general es de por sí importante, pero lo es más tratándose de disciplinas que, cómo la matemática, han enfrentado tradicionalmente graves problemas de aprovechamiento y que a la luz de las propuestas pedagógicas de vanguardia parecen tener una oportunidad más.

- Saber guiar con naturalidad las actividades con el alumno sin imponérsela, debe ser una dinámica permanente dado que, de lo contrario, nos enfrentaríamos con docentes a serios problemas de compatibilidad

- Por otro lado, lo mencionado arriba, esta en concordancia con los principios educativos del *Colegio de Ciencias y Humanidades*, pues más que privilegiar la memorización de un cúmulo de contenidos matemáticos subdivididos en muchas ocasiones en múltiples casos y fórmulas especiales, la repetición de definiciones o la práctica irreflexiva de algoritmos, interesa poner énfasis en el significado de conceptos y procedimientos, en el manejo de estrategias, en la integración de conocimientos, y por último en el desarrollo de habilidades matemáticas.

Bibliografía básica.

Apostol, T. M. *Calculus*. Vol. I. Reverté Ediciones S. A. de C. V. Barcelona. 2002.

Baldor, A. J. *Geometría y trigonometría*. Publicaciones Cultural S. A. México. 1992

Banach, S. *Cálculo diferencial e integral*. UTEHA. México. 3ª reimpresión 1973.

Bell, E.T. *Historia de las Matemáticas*:. Fondo de Cultura Económica. México. 1949.

Bohigas, X., Jaén, X y Novell, M. (2003). *Applets en la Enseñanza de la Física*. Enseñanza de la Ciencias. 21 (3), 463-472

Bosco, H., M.D. *Selección de lecturas Didáctica general I.* Facultad de filosofía y letras, Mayo de 2003.

Buendía, G. *Una Socioepistemología del Aspecto Periódico de las funciones*. Relime, Vol. 9 No. 2, Julio, 2006, pp. 227 – 251.

Carretero, M. y Palacios, J. *Los estilos cognitivos. Introducción al problema de las diferencias cognitivas individuales,* p. 20-28. Infancia y Aprendizaje, No. 17, España 1982.

Chadwick, C. B. *La psicología de aprendizaje del enfoque constructivista*. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos. Año/Vol. XXXI, número 004. Centro de Estudios Educativos. México. 2001.

Cimenna, Ch. R. *Cultura y Cognición*. Ciencia y Desarrollo. Enero 20007, V.20 (203), México. Pág. 38-41.

Coll, C. *Estructura grupal, interacción entre alumnos y aprendizaje escolar,* p. 119-138. Infancia y Aprendizaje No. 27-28, España 1984.

Conte, S. D. y de Boor, C. *Elementary Numerical Analysis*. McGraw-Hill. Singapore. 6a Impresión. 1981.

Corral Herrera G. *Radares Meteorológicos*. Rev. Conversus Sep. 2007, Pág. 12 – 14.

Courant, R. y John, F. *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*. Volumen 1. Ed. Limusa. México. 1982.

Courant, R. y Robbins, H. *¿Qué son las matemáticas?* Fondo de Cultura Económica. México. 2002.

Cordera, F. y Martínez, J. (2002). *El Comportamiento Periódico de una Función como un Argumento Contextual*. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (Volumen 15, pp 55-60). México. Grupo Editorial Iberoamericana.

Dedekind, R. *Essays on the Theory of Numbers.* Dover Publications, Inc. New York. 1963.
Diaz –Barriga, A.F., y Hernández, R.G. *Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo (Una Interpretación Constructivista).* McGraw-Hill. 2ª Edición. México. 2006.

Driver, R. (1988) *Un Enfoque Constructivista para el Desarrollo del Currículo en Ciencias*. Enseñanza de las Ciencias. 6 (2), pp. 109-120

Duval, R. *Semiósis y pensamiento humano*. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Editorial Universidad del Valle. Colombia. 1999.

Farfán, R. M. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un Estudio de la Variación y el Camb*io. Grupo Editorial Iberoamericana. México.

Figueiras, L y Deulofeu, J. (2005). *Atribuir un Significado a la Matemática a través de la Visualización.* 23 (2), 217-226.

Gómez, P. (2004). *Análisis Didáctico y Uso de Tecnología en el Aula de Matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Guzmán H., A. *Geometría y trigonometría*. Publicaciones Cultural S. A. México. 2006.

Guzmán, R.I. (1999). *Apuntes del Curso Fundamentos Teóricos de la Didáctica de la Matemática*. Universidad Católica de Valparaiso, Chile.

Heidegger, M. (Artículos bajados de:)
La época de la imagen del mundo.
La pregunta por la técnica.
La proveniencia del arte y la determinación del pensar.
Lenguaje tradicional y lenguaje técnico.

Heisenberg, W. *La imagen de la naturaleza en la física actual.* Planeta-Agostini. Barcelona. 1993

Hitt, F. *Funciones en Contexto*. Prentice Hall, México Primera Edición 2002.

Holliday, B., Cuevas, G. y McClure, M. *Geometría Analítica con Trigonometría*. McGraw-Hill, 2002, México D.F.

Lawvere, F. W. y Schanuel, S. H. Matemáticas conceptuales. Una primera introducción a categorías. Siglo XXI. México. 2002.

Linn, M. (2002). *Promover la Educación Científica a través de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC).* Enseñanza de las Ciencias, 20 (3), 347-355.

Mac Lane, S. Mathematics, Form, and Function. Springer-Verlag. New York. 1986.

Morales, E. *Efecto de una Didáctica Centrada en la Resolución de Problemas Empleando la Técnica Heurística V de Gowin Y Mapas Conceptuales en el Razonamiento Matemático de los Alumnos de 9° Grado de Educación Básica*. Relime, Vol. 1, Núm. 2, Julio 1998, pp 77-91

Moreira, M. A.

[1983] *Uma Abordagem Cognitivista ao Ensino da Física*. Editora de la Universidad. Porto Alegre, Brasil. 1983.

[1988] *Mapas conceptuales y aprendizaje significativo en ciencias*. ENSINO. Revista Galáico Portuguesa de Sócio Pedagogia y Sócio-Lingüística, Pontevedra/Galícia/España y Braga/Portugal, Nº 23 a 28: 87-95, 1988.

Newman, D. *El impacto del ordenador en la organización: perspectivas para la investigación,* p.23-35. Comunicación, Lenguaje y Educación, No, 13, España. 1992.

Novack, J. D. *Constructivismo humano: un consenso emergente*. Enseñanza de las ciencias. 6(3), pp. 213-223. 1988.

Novak,J. y Gowin,D. *Aprender a aprender.* Editorial Martínez Roca, Barcelona.1988.

Novak, J. D. *Ayudar a los Alumnos a Aprender cómo Aprender. (la Opinión de un Profesor-Investigador).* Enseñanza de las ciencias, 1991, 9(3), pp. 215-228

Penrose, R. *La Mente Nueva del Emperador*. Fondo de Cultura Económica. México. 1996.

Pérez, L., Hernández M. y Mendoza, S. *Holografía Digital*. Ciencia y Desarrollo. Abril 2006 V.32 (194), México, Pág. 50-51.

Pozo, J. I. *Adquisición del conocimiento*. Ediciones Morata. Madrid. 2003

Pozo, J. I. *Más allá del cambio conceptual: el aprendizaje de la ciencia como cambio conceptual*. Revista Enseñanza de las Ciencias, 1999, 17 (3), 513-520.

Rojas Martínez A. *Murciélagos: Arquitectos del Desierto*. Rev. Ciencia y Desarrollo, Abril 2003, Pág. 4 – 9.

Rosas, O. *El Premio Nobel de Física*. Conversus. Diciembre 2005-Enero 2006, No 46. IPN, México

Simmons, G. F. *Ecuaciones diferenciales, con aplicaciones y notas históricas.* España. 1993.

Spivak, M. Calculus. Cálculo Infinitesimal. Editorial Reverté Colombiana S. A. Colombia. 1978.

Steen, L. A. et al. On the Shoulders of Giants. New Approaches to Numeracy. National Academic Press. Washingnton, D. C. 1990.

Swokowsky, E. W. y Cole, J. A. *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. International Thomson Editores. México. 1998.

UNAM-Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades
Página web: http://www.cch.unam.mx/
Misión y filosofía del CCH
Modelo Educativo del CCH
Plan de Estudios General del CCH
Objetivo General, Documento escrito: Área de Matemáticas. Programa de Estudios de Matemáticas I-IV. 2006.

Vattimo, G. *El Fin de la Modernidad. Nihilismo y Hermenéutica en la Cultura Posmoderna*. GEDISA. Barcelona. Octava reimpresión, octubre 2000.

Vázquez, A. *El Paradigma de las Concepciones Alternativas y la Formación de los Profesores de Ciencias*. Enseñanza de las Ciencias, 1994, 12(1), pp.3-14.

Vera Amaro, R *Acústica Submarina* , Rev. Conversus, Diciembre 2005, Pág. 42-44.

Zeldovich, Y. B. Higher Mathematics for Begginers. Mir. Moscow. 1973.

Segero de Herrero, S. (2004). *Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una Secuencia Didáctica*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa Vol 7, No 1, pp. 49-78. México.

William, L., William, G. y Dufresne, R. (2002). *Resolución de Problemas Basada en el Análisis. Hacer del Análisis y del Razonamiento el Foco de la Enseñanza de la física.*
Enseñanza de las Ciencias. 20 (3), 387-400

Bibliografía Virtual. Sitios consultados.

Gutiérrez, L. El aprendizaje colaborativo en los espacios electrónicos en ambientes de educación a distancia. CONEVyT, Biblioteca Digital. SEP.
http://bibliotecadigital.conevyt.org.mx/colecciones/documentos/somece2002/Grupo3/Gutierrez.pdf. 5-12-07.

Heidegger, M. (Artículos bajados de:)
http://egresados.udp.cl/humanidades/pensamiento/docs/03/mundo.pdf. 25-10-07
La época de la imagen del mundo.
La pregunta por la técnica.
La proveniencia del arte y la determinación del pensar.
Lenguaje tradicional y lenguaje técnico.

UNAM-Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades
Página web: http://www.cch.unam.mx/. 20-01-08
Misión y filosofía del CCH

Modelo Educativo del CCH
Plan de Estudios General del CCH
Objetivo General

http://www.cch.unam.mx/index.php. 11-12-08

[2003] Programa de Estudios de Matemáticas. 2003] Semestres I a IV. CCH-UNAM. México, 2003.

Young. *Enseñanza y aprendizaje con la INTERNET*. http://www.distea.com/arte/artnntedu/cdumedia.htm. 12-11-07.

El enfoque cognitivo del aprendizaje y la informática educativa en la educación superior. Emilio Ortiz Torres. eortiz@uho.hlg.edu.cu. 5-08-07

Trabajo de Ausubel, véase www.davidausubel.org. 20-02-08.

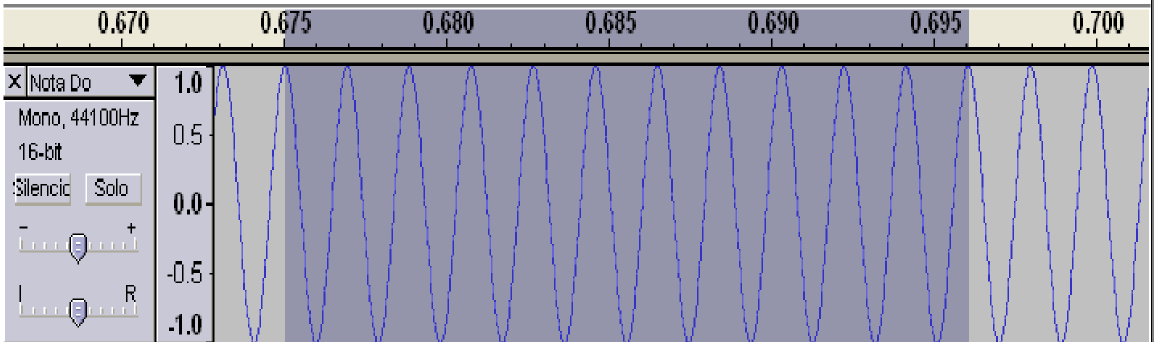
Direcciones de las funciones trigonométricas:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Funciones_trigonometricas/Funcion_seno.htm

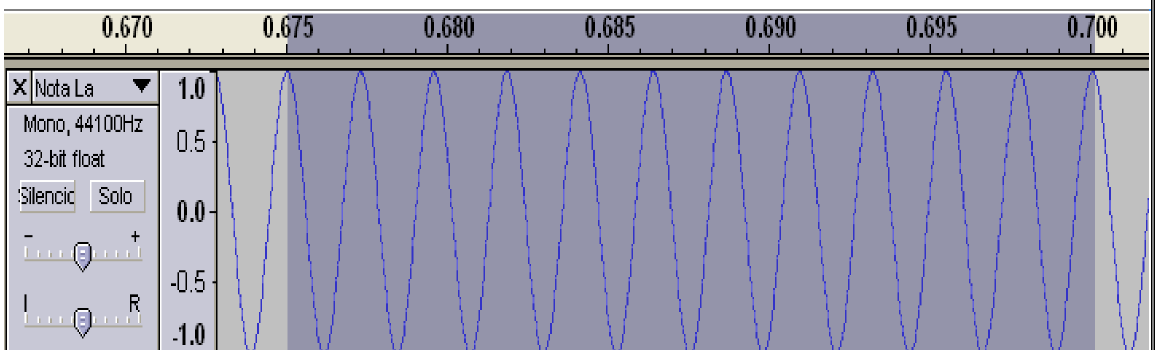
http://rea.dcen.uson.mx/~jdiaz/Documents/Funcion/functrigonometricas.pdf

Anexo 1: Espectrogramas de sonidos

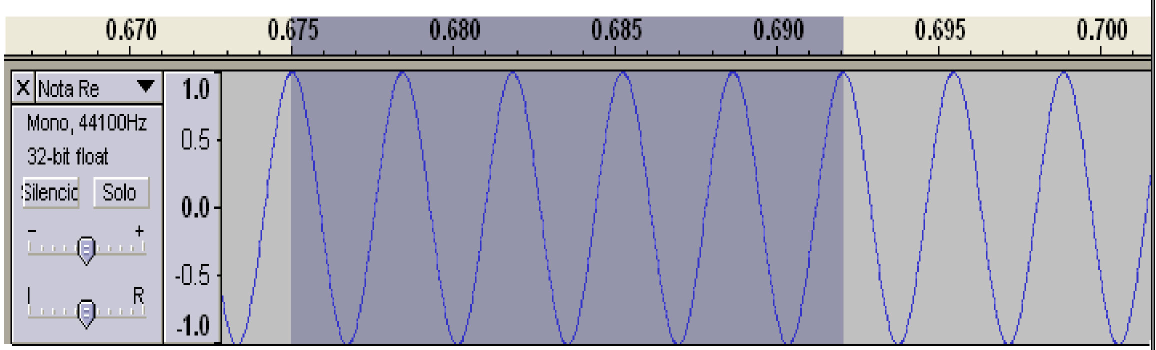
Nota Do sobre el do sostenido



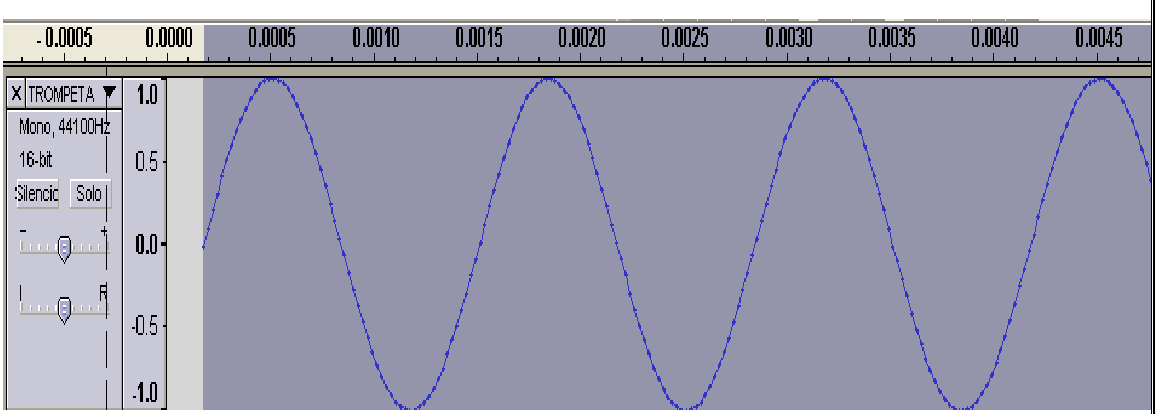
Nota La sobre el do sostenido



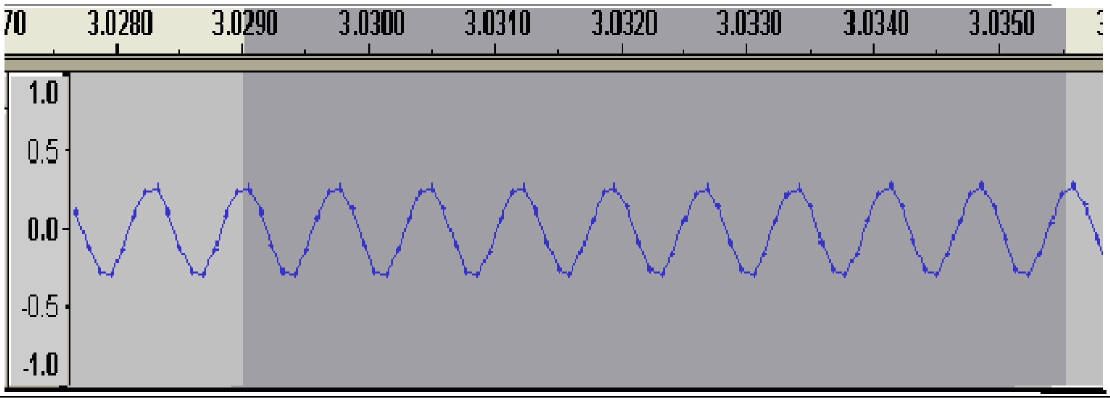
Nota Re sobre el do sostenido



Nota Trompeta



Sonido del Murciélago Guananero Mexicano



Sonido de la Ballena