



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

No-conmutatividad del espaciotiempo, fases
geométricas y dinámica cuántica constreñida

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

P R E S E N T A:

Héctor Hernández Coronado

DIRECTOR DE TESIS: Dr. Chryssomalis Chryssomalakos

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: Dr. Daniel Sudarsky

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: Dr. Micho Durdevich



posgrado en ciencias físicas
u n a m

Ciudad Universitaria

Junio, 2009



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



El autor, sin perjuicio de la legislación de la Universidad Nacional Autónoma de México, otorga a esta obra la siguiente licencia:

Esta obra está licenciada bajo una **Licencia Atribución-No Comercial-Licenciamiento Recíproco 2.5 México** de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/mx/>

o envíenos una carta a

Creative Commons
171 Second Street, Suite 300,
San Francisco, California,
94105, USA.

*A María del Carmen
y Francisco Javier*

Resumen

En esta tesis, se discute la idea de “no-conmutatividad emergente” en sistemas físicos. La motivación de este trabajo consiste en determinar, por medios físicos y/o geométricos, los aspectos relevantes de la no-conmutatividad que podrían ser adaptados a la descripción efectiva del espaciotiempo y su interacción con la materia, a escalas “pequeñas”.

Como introducción, se comenta sobre la necesidad de modificar la noción de espaciotiempo clásico a tales escalas. Asimismo se describe el papel que ha desempeñado la no-conmutatividad en la búsqueda de la caracterización del espaciotiempo a nivel cuántico. Y se mencionan brevemente las limitaciones de esfuerzos anteriores en esta línea.

En el capítulo 2, se enfatiza la distinción entre los espacios intrínsecamente no-conmutativos, cuyos puntos mismos son “borrosos”¹, y partículas con operadores de posición no-conmutativos que viven en espacios clásicos. Se argumenta en favor del segundo, con base en el carácter experimental de nuestro conocimiento del espaciotiempo. Se muestra, a través de diferentes caminos y a partir de elementos de la teoría estándar, que la descripción de la posición de objetos extendidos en el espaciotiempo de Minkowski conduce a una no-conmutatividad dependiente de su espín. Para terminar, se propone un programa para determinar si la curvatura introduce algún efecto en la no-conmutatividad de los operadores de posición, siguiendo un trabajo previo de Jordan y Mukunda.

A continuación, en el capítulo 3, se señala una clase de sistemas cuánticos que presentan fases geométricas no triviales. Estos sistemas consisten en una partícula restringida a moverse sobre una curva encajada en el espacio euclideo tridimensional. En el límite adiabático, la dinámica de la partícula es determinada por un Hamiltoniano efectivo que depende de la curvatura y la torsión de la curva. Considerando a éstos últimos como parámetros externos se muestra que al cambiar la forma de la curva, el estado de la partícula adquiere, en general, una fase geométrica que tiene efectos físicos.

En el capítulo 4, retomando el sistema compuesto por la partícula y la curva, estudiamos el caso en el que la curva también tiene dinámica. Considerando la aproximación adiabática, la descripción de la evolución temporal del sistema puede hacerse de manera separada, *i.e.*, en el régimen de tiempos “cortos” el sistema se reduce al caso analizado en el capítulo 3, mientras que para tiempos “largos” el estado de la partícula cambia solamente por una fase. En la escala relevante, la dinámica de los grados de libertad de la curva, obedece un Hamiltoniano efectivo que resulta de integrar los grados de libertad de la partícula, y que puede ser escrito en términos de variables efectivas no-conmutativas. La parte relevante de los conmutadores entre las nuevas variables está definida por la curvatura de Berry asociada con la fase geométrica que acumula el estado de la partícula.

Por último, se presentan las conclusiones, se señalan los puntos inconclusos que requieren un análisis posterior y se mencionan algunas posibles direcciones para continuar con el trabajo.

¹El término borroso es utilizado en este trabajo de manera figurativa para referirse a operadores de posición no-conmutativos. Puede tratarse de espacios fuzzy [4], de grupos cuánticos [38, 39] u operadores de posición de partículas, por ejemplo.

Abstract

In this thesis, the idea of “emerging noncommutativity” of physical systems is discussed. The motivation of this work is to determine, by physical and/or geometrical means, the relevant aspects of the noncommutativity that can be adapted to the effective description of spacetime and its interactions with matter, at “small” scales.

As introduction, we comment on the need to modify the notion of classical spacetime at the quantum level. We also describe the role that noncommutativity has played in the search of the spacetime characterization at such scales, while limitations of previous efforts along this line are outlined.

In chapter 2, we emphasize the distinction between intrinsically noncommutative spaces, the “points” of which are themselves “fuzzy” on the one hand, and particles with noncommutative position operators, living in a classical space, on the other. We argue in favor of the latter viewpoint, based on the experimental character of the way we probe spacetime. It is shown, in various ways using only the standard theory, that the description of the position of extended objects in Minkowski spacetime leads to a spin-dependent type of noncommutativity. Finally, we propose a program to determine whether spacetime curvature modifies the noncommutativity of position operators, following upon a previous work of Jordan and Mukunda.

Then, in chapter 3, we point out a class of quantum systems where nontrivial geometric phases are present. These systems consist of a particle constrained to move on a curve embedded in three-dimensional Euclidean space. In the adiabatic limit its dynamics is determined by an effective Hamiltonian which depends on the curve’s torsion and curvature. Thinking of the latter as external parameters allows us to show that by changing the shape of the curve, the state of the particle acquires, in general, a geometric phase that have physical consequences.

In chapter 4, considering again the particle on the curve, we study the case where the curve is also dynamical. Taking the adiabatic approximation, the description of the time evolution of the system can be done separately, *i.e.*, in the “short times” regime, the system is reduced to the case discussed in chapter 3, while in the “long” time scale, the state of the particle changes only by a phase. In the relevant scale, the curve’s degrees of freedom, change according to an effective Hamiltonian which results from integrating out the particle’s degrees of freedom, and it can be written in terms of effective noncommutative variables. The relevant part of the commutators between the new variables is defined by the Berry’s curvature tensor associated with the geometric phase accumulated by the state of the particle.

Finally, the conclusions are presented, the inconclusive points are indicated, and some possible directions for further work are mentioned.

Agradecimientos

Quiero agradecer a las personas que de alguna manera contribuyeron a la realización de esta tesis.

A Chryssomalis Chryssomalakos por su dirección en mi formación como físico, por las discusiones académicas y no académicas, y por las comidas en Grecia. A Daniel Sudarsky por sus enseñanzas, su ejemplo y su apoyo. A mis sinodales por sus comentarios, por mejorar este trabajo. A los compañeros de batalla, Elías, Yuri, Mariano, Nacho, Adolfo, Alexander, Nettel, David, Pedro, Gabriel e Igor, por caminar a mi lado estos últimos años.

A Ramón, por compartir la alegría de mis logros y de los suyos, y por acompañarme en mis fracasos y momentos difíciles. A Emmanuel, Memo, Alex, Cloris, Ania, Gaby y Ari, por mostrarme otras formas de ver las cosas e interesarse en la mía.

A mis familias adoptivas en la ciudad de México, Alex y Mukuy, los Coronado Vázquez y Jorge, por hacerme sentir en casa. A Carlos y a Mary, por las tardes de libros y música, de olores, sabores e ideas. A Manuel Coronado, por ser un modelo para mí. A mis abuelos, tíos y primos, por compartir conmigo más que la sangre. A mis papás y hermanas por su apoyo, cariño y respeto incondicionales. Y a eiy, porque yo sé que usted sabe que puede contar conmigo.

Índice General

1. Introducción	1
2. No-conmutatividad física	5
2.1. Centro de masa en relatividad especial	6
2.1.1. Definiciones y propiedades	7
2.1.2. Definición asociativa	9
2.2. Operadores de posición covariantes	11
2.2.1. Partículas sin espín	14
2.2.2. Partículas con espín	14
2.2.3. Partículas con energía positiva o negativa	15
2.3. Otras pistas	16
2.3.1. Operadores de posición de Dirac	16
2.3.2. Estabilidad de álgebras de Lie	16
2.4. La gravedad	17
2.4.1. Partículas sin espín	19
2.4.2. Partículas con espín	20
3. Fases geométricas	25
3.1. Fases geométricas	25
3.2. Mecánica cuántica en variedades encajadas	27
3.2.1. Formalismo general	27
3.2.2. Curvas encajadas en \mathbb{R}^3	31
3.3. Fases geométricas de la partícula en la curva	34
3.3.1. Perspectiva tridimensional	36

3.3.2. Perspectiva intrínseca	40
4. No-conmutatividad efectiva	45
4.1. Un oscilador armónico acoplado a un espín: un ejemplo	47
4.1.1. Momentos covariantes	47
4.1.2. Posición covariante	49
4.2. Una partícula cuántica en un alambre cuántico	50
4.2.1. La partícula sobre el alambre	51
4.2.2. El alambre cuántico	52
4.2.3. Hamiltoniano efectivo	56
5. Conclusiones	59
A. El conmutador del operador posición par de Dirac	63
B. Teoría de perturbaciones en dinámica cuántica constreñida	67
B.1. Dos dimensiones, dos bases	67
B.2. Corrección a la energía a primer orden	69
C. Ec. de Schrödinger en sistemas no inerciales	75
C.1. Campos vectoriales sin divergencia	75
C.2. Campos vectoriales generales	77
C.3. Fases geométricas en marcos de referencias no inerciales.	79
C.3.1. Caso General	79
C.3.2. Caso unidimensional.	81
D. Teoría de perturbaciones y fases geométricas	83
D.1. Fase geométrica perturbativa	83
D.2. Teoría de perturbaciones con dos parámetros	85
Bibliografía	89

Capítulo 1

Introducción

Desde las dos últimas décadas se ha considerado que la no-conmutatividad del espaciotiempo podría ser útil como herramienta para describir efectivamente el espaciotiempo a nivel cuántico. Esto ha sido motivado principalmente por el programa de gravedad cuántica, es decir, los distintos intentos por encontrar una teoría que concilie la mecánica cuántica y la relatividad general [44].

Por un lado, los candidatos más populares para la teoría de gravedad cuántica, la teoría de cuerdas y la gravedad cuántica de lazos, han encontrado indicios de que el espaciotiempo como un continuo por debajo de la longitud de Planck¹ deja de tener sentido, (ver [2, 45]). Otras propuestas, como la de conjuntos causales o la de triangulaciones dinámicas causales, suponen que el espaciotiempo es discreto desde el inicio [3, 11]. Por otro lado, argumentos heurísticos que involucran nociones de relatividad general y mecánica cuántica [27, 28], sugieren que el espaciotiempo es *borroso* a escalas en las que su descripción cuántica es relevante, esto es, la localización de una partícula en una región del espaciotiempo arbitrariamente pequeña, requiere una cantidad de energía concentrada suficientemente grande para producir un agujero negro, por lo que no es posible extraer información de esa región. Paralelamente se ha encontrado que la descripción de algunas propiedades de materiales sólidos, con origen cuántico, puede hacerse en términos de operadores de posición cuyas componentes no conmutan [5, 33].

A pesar de que los argumentos anteriores (a favor de un espaciotiempo cuya estructura es discreta/borrosa) se refieren tanto a su caracterización como a su interacción con la materia, el acercamiento adoptado tradicionalmente para su descripción efectiva por medio de la geometría no-conmutativa se ha centrado en definir una variedad cuántica (es decir, una versión de variedad modificada, que se obtiene a partir de cambiar el producto usual entre funciones que actúan en la versión clásica correspondiente por uno no-conmutativo). Este esquema deja de lado la interacción entre la materia y la geometría, lo que (además

¹La longitud, tiempo y masa de Planck – están dados en 4 dimensiones – por:

$$\begin{aligned}l_P &= \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1,62 \times 10^{-33} \text{ cm}, \\t_P &= l_P/c = \sqrt{\hbar G/c^5} \approx 5,4 \times 10^{-44} \text{ s}, \\m_P &= \hbar/l_P c = \sqrt{\hbar c/G} \approx 1,22 \times 10^{19} \text{ GeV}.\end{aligned}$$

de estar en contraposición con el espíritu de gravedad cuántica, donde se espera que las propiedades cuánticas de la materia tengan efectos no despreciables en la geometría del espaciotiempo), usualmente presenta problemas de interpretación física y, en ocasiones, de una formulación matemática consistente. En particular, la llamada teoría de Relatividad Doblemente Especial (DSR por sus siglas en inglés), sufre de problemas serios en el sector de muchas partículas, que no permiten la definición de cantidades como momento total de un sistema de partículas, (ver [12, 36]).

Debido a que la información proporcionada por los trabajos experimentales acerca de la estructura del espaciotiempo a escalas de Planck es muy limitada, es necesario basarse en principios físicos claros y estructuras geométricas o matemáticas bien definidas para determinar la forma de la no-conmutatividad que, presumiblemente, describe mejor la microestructura del espaciotiempo.

En esta tesis se discute la idea de “no-conmutatividad emergente” en sistemas físicos. Es decir, se discuten algunos sistemas físicos que pueden ser descritos (de manera efectiva) en términos de variables espaciotemporales no-conmutativas. La motivación de este trabajo es tratar de identificar para sistemas relativamente sencillos, las características de la no-conmutatividad que podrían ser relevantes en la descripción efectiva del espaciotiempo a escalas cuánticas. Asimismo, a diferencia de gran parte de la literatura sobre el tema, se intenta mantener clara la interpretación física de los objetos matemáticos que aparecen en el análisis mientras que las relaciones de (no)conmutatividad surgen de manera natural, *i.e.*, no son impuestas *ad hoc*. El carácter emergente de la no-conmutatividad, así como la motivación física o la construcción geométrica, constituyen el elemento unificador de la tesis.

El resto de esta tesis está compuesto de la siguiente manera. El capítulo 2 contiene esencialmente el material presentado en [18], [19] y [22]. La idea central es que si la no-conmutatividad del espaciotiempo es relevante en la descripción fundamental de la naturaleza, entonces su forma general no puede ser arbitraria y, en principio, podría ser determinada a partir de primeros principios. Suponiendo que la única manera que tenemos de *conocer* el espaciotiempo es a través de su interacción con las partículas físicas (en el mismo sentido que [16] y [23]), las cuales obedecen las leyes de la teoría cuántica, debemos abandonar ciertas idealizaciones (que presumiblemente obstaculizan la formulación de una descripción cuántica del espaciotiempo) que están en los fundamentos de la noción del espaciotiempo de relatividad general. Por ejemplo, el concepto clásico de *geodésica* como la trayectoria que una partícula de prueba describe en el espaciotiempo, carece de sentido en el caso cuántico puesto que las partículas cuánticas no siguen trayectorias. Entonces en particular, estamos interesados en explorar las consecuencias de evitar el concepto clásico de “trayectoria” en la caracterización del espaciotiempo. En el mundo cuántico, lo más parecido a una partícula clásica está descrito por un estado coherente, y por lo tanto lo más parecido a una geodésica es algo como un “tubo de mundo”. Para describir el espaciotiempo abandonando la noción de geodésica, suponemos que las partículas (clásicas) de prueba son extendidas. Además, consideramos el caso del espaciotiempo de Minkowski. En el caso clásico su posición puede ser descrita de forma efectiva por el operador de “centro de masa” de Fokker, cuyas componentes no conmutan por un término dependiente del espín. La teoría de Dirac restringida a estados de energía positiva apunta en la misma dirección. También se propone una generalización de este análisis para el caso de un espaciotiempo con curvatura, con la intención

de determinar el efecto de la gravedad en la (posible) no-conmutatividad del operador de posición correspondiente.

En el capítulo 3, basado en [20] y [21], consideremos una partícula cuántica restringida a moverse – por un potencial de confinamiento – sobre una curva encajada en el espacio Euclideo tridimensional. Mostramos que para estados de baja energía, la dinámica de la partícula está gobernada por un Hamiltoniano efectivo que depende de la geometría de la curva sobre la que se mueve. Así, un cambio en la curva modifica al Hamiltoniano. Nos preguntamos si, dada una deformación de la forma de la curva, el estado del sistema guarda algún registro acerca de ésta. La presencia de fases geométricas en el límite adiabático, nos permite responder afirmativamente a la interrogante anterior. Finalmente sugerimos algunas aplicaciones.

Por último, en el capítulo 4, suponemos que la curva considerada en el capítulo 3 es una curva material y estudiamos su dinámica cuántica. La pregunta principal que atacamos en este trabajo es: ¿Cómo se modifican la dinámica y la cinemática de la curva debido a la presencia de la partícula? Cuando la curva es muy “pesada” en comparación con la partícula – *i.e.*, en el límite adiabático – el sistema compuesto puede describirse de manera independiente. En el régimen de tiempos “cortos”, los grados de libertad de la curva permanecen prácticamente estáticos y aparecen como parámetros externos en el Hamiltoniano *instantáneo* que rige a la dinámica de la partícula. Esto es, en dicho régimen la evolución en el tiempo del sistema se reduce a la del caso estudiado en el capítulo 3. Para tiempos “largos”, el estado de la partícula es aproximadamente constante (salvo por una fase), y sus grados de libertad pueden ser integrados a partir del Hamiltoniano total. El operador resultante puede interpretarse como un Hamiltoniano efectivo para la curva, que puede escribirse de manera canónica en términos de momentos y posiciones covariantes no-conmutativos. Los conmutadores entre los operadores covariantes son proporcionales a la curvatura de Berry asociada con la fase geométrica que adquiere el estado de la partícula encontrada en el capítulo 3. Otros trabajos que relacionan fases geométricas y no-conmutatividad se pueden encontrar en [5], [6], [7] y [33].

En el capítulo 5 se presentan las conclusiones de la tesis, los puntos inconclusos y las posibles direcciones a seguir.

A lo largo de la tesis consideraremos una representación en la que $\hbar = 1$, los índices griegos se referirán a las componentes espaciotemporales $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, mientras que los índices latinos se refieren a componentes espaciales $i, j = 1, 2, 3$, a menos que se establezca algo distinto explícitamente.

El material total de esta tesis ha sido elaborado en colaboración con Chryssomalis Chryssomalakos. Además, en el material correspondiente al capítulo 2 también participaron Elías Okón Gurvich y Pablo Vázquez Montejo, en el del capítulo 3, Elías Okón Gurvich y David Gelbwaser Klimovsky, y en el del capítulo 4, Pedro Aguilar Núñez.

Capítulo 2

No-conmutatividad física

Como se ha mencionado en el capítulo anterior, el acercamiento de la no-conmutatividad en la descripción del espaciotiempo ha seguido, hasta ahora, el modelo de “variedad no-conmutativa” donde las funciones que actúan sobre la variedad diferencial son reemplazadas por elementos de un álgebra deformada. A partir de las relaciones entre los elementos del álgebra modificada se obtiene una versión cuántica de la geometría de la variedad. En este esquema, la variedad misma está formada por “puntos borrosos” y está definida independientemente de la presencia (o ausencia) de partículas u otros entes físicos. Dentro de este paradigma, se pueden encontrar básicamente los siguientes tipos de no-conmutatividad:

- **Espaciotiempos no-conmutativos “canónicos”**. En este caso, las coordenadas cumplen las relaciones:

$$[x_\mu, x_\nu] = \theta_{\mu\nu},$$

donde $\theta_{\mu\nu}$ es un tensor constante antisimétrico arbitrario (en algún sistema de referencia), que corresponde al primer término de una expansión.

- **Espacios cuánticos o q-deformados**. Son espacios relacionados muy de cerca con los grupos cuánticos, en los cuales las coordenadas clásicas son generalizadas por objetos no-conmutativos que satisfacen:

$$x_\mu x_\nu = R_{\mu\nu}^{\rho\sigma} x_\rho x_\sigma,$$

donde R es una matriz numérica y es solución de la ecuación de Yang-Baxter¹.

- **Espacios no-conmutativos tipo de Lie**. Las coordenadas del espacio forman un álgebra del Lie, esto es, satisfacen:

$$[x_\mu, x_\nu] = f_{\mu\nu}^\rho x_\rho,$$

¹La ecuación de Yang-Baxter es una ecuación para $R \in GL(n, \mathbb{C}) \otimes GL(n, \mathbb{C})$ dada por:

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

Por ejemplo, en dos dimensiones podemos definir un plano cuántico, con coordenadas x, y tales que $xy = qyx$, con q siendo el parámetro de deformación [39].

donde $f_{\mu\nu}{}^\rho$ son constantes de estructura.

- **Relatividad Doblemente Especial (DSR²)**. En este caso la modificación del álgebra toma lugar en el espacio de momentos. El espacio cuántico resultante corresponde a las propiedades del espacio dual de posiciones, y en algunos casos, con estructura de álgebras de Hopf adicional, se reduce al espacio κ -Minkowski, donde $[x_i, x_0] = \kappa^{-1}x_i$.

En todas las formulaciones anteriores se presenta una separación evidente entre la formulación geométrica del espaciotiempo y la interacción física entre la materia y el espaciotiempo. La geometría del espaciotiempo se formula independientemente de la materia que “vive” en él, lo que contrasta con el escenario esperado a escalas de Planck, en el que la localización de una partícula cuántica la hace tan energética que su campo gravitacional no puede despreciarse, y por lo tanto, deja de comportarse como mero “espectador”. Considerando que *conocemos* (las propiedades de) el espaciotiempo a través de su interacción con partículas, dicha separación parece artificial desde el punto de vista físico. Además, la interpretación física de los objetos matemáticos que aparecen en los esquemas mencionados no es clara.

En este capítulo proponemos un acercamiento en el que la no-conmutatividad se refiere a la posición de partículas que se mueven en una variedad clásica. De esta manera, se espera que la interpretación física de los elementos matemáticos sea más directa. Como se verá más adelante, esta idea es sugerida a partir de las relaciones de (no)conmutación que *surgen* de manera natural en diferentes sistemas físicos, partiendo solamente de los principios de relatividad especial y de la mecánica cuántica. Además de que la no-conmutatividad mencionada emerge en forma natural en ciertos contextos, se encuentra que ésta tiene una forma particular persistente que involucra al espín de las partículas.

2.1. Centro de masa en relatividad especial

La única manera que tenemos para extraer información del espaciotiempo es a través de su interacción con la materia, la cual obedece las leyes de la mecánica cuántica. No obstante, algunas de las nociones fundamentales de la relatividad general son incompatibles con la teoría cuántica. Como por ejemplo el concepto de *geodésica* como la trayectoria que sigue una partícula (puntual) libre de prueba, no está bien definido en el caso cuántico puesto que viola el principio de incertidumbre de Heisenberg (debido a que para definir una curva se requiere de posición y momento definidos simultáneamente con precisión infinita). Por lo tanto, las propiedades relacionadas con tales nociones no pueden ser obtenidas por medios físicos.

En esta sección nos interesa explorar qué aspectos de la noción de espaciotiempo clásico se modifican cuando se considera que las partículas son fundamentalmente de naturaleza cuántica, y por lo tanto, que su movimiento en el espacio no puede ser descrito por una (sola) curva. Más precisamente, estamos interesados en evaluar la posibilidad de describir el espaciotiempo de manera efectiva (*i.e.*, en términos clásicos como trayectorias y puntos), pero considerando materia clásica extendida como objetos de prueba. Como primer paso, nos gustaría describir de manera efectiva la posición de las distribuciones extendidas en el espacio de Minkowski con un punto, por ejemplo, por el centro de masa.

²Por sus siglas en inglés.

Cabe mencionar que a más de cien años del nacimiento de la teoría de la relatividad especial, aún no se ha encontrado una definición de centro de masa completamente satisfactoria. A continuación se presentan algunas de las diferentes definiciones de centro de masa y sus propiedades.

2.1.1. Definiciones y propiedades

En un artículo publicado en 1948, Pryce explora las diferentes definiciones de centro de masa (para un sistema de partículas sin espín) en relatividad especial que hasta entonces habían sido propuestas [43]. Pryce analiza sistemáticamente cuatro definiciones y las clasifica de acuerdo con las propiedades que poseen. Todas ellas se reducen a la definición Newtoniana en el límite correspondiente. Según Pryce, el centro de masa debería cumplir con los siguientes criterios:

- a. Las componentes espaciales del “centro de masa” deben ser parte de un 4-vector, cuya componente cero corresponde al tiempo en el que dichas componentes son medidas.
- b. El “centro de masa” debe estar en reposo con respecto al marco de referencia de “centro de momentos”, *i.e.*, en el que el 3-momento total es cero.
- c. El “centro de masa” debe moverse con velocidad constante cuando no hay fuerzas externas actuando sobre las partículas.
- d. Las 3-coordenadas del “centro de masa” deben conmutar entre sí (en el sentido de los corchetes de Poisson).

El último criterio fue incluido por Pryce pensando en la mecánica hamiltoniana – con la mecánica cuántica en mente, nosotros estamos dispuestos a abandonarlo. Las cuatro definiciones consideradas por Pryce son:

- i. Se definen las coordenadas del centro de masa como el promedio de las posiciones de las partículas, pesadas por sus masas en reposo.
- ii. Se aplica la definición (i) en el marco de referencia del centro de momentos y se obtienen las coordenadas en cualquier otro marco a través de una transformación de Lorentz.
- iii. Se definen las coordenadas del centro de masa como el promedio de las posiciones de las partículas, pesadas por sus energías.
- iv. Se aplica la definición (iii) en el marco de centro de momento, y se obtienen las coordenadas en cualquier otro marco a través de una transformación de Lorentz.

La definición (i) es claramente no covariante. Además, el centro de masa no está en reposo con respecto al marco de referencia del centro de momentos, ni se mueve siguiendo una línea recta en ausencia de fuerzas. El centro de masa correspondiente a la definición (ii) tampoco está en reposo con respecto al marco de referencia del centro de momentos ni describe una trayectoria rectilínea, aunque es covariante por construcción. De manera opuesta, la trayectoria que sigue el centro de masa definido por (iii) es una línea recta cuando no

hay fuerzas externas y está en reposo con respecto al marco de referencia del centro de momentos. Finalmente el centro de masa que resulta de la definición (iv) satisface todo, excepto la “conmutatividad” entre sus 3-coordenadas. Los resultados anteriores se resumen en la Tabla 2.1:

	a	b	c	d
i				✓
ii	✓			✓
iii		✓	✓	
iv	✓	✓	✓	

Tabla 2.1: Se muestran las propiedades que satisfacen las distintas definiciones de centro de masa consideradas por Pryce.

De acuerdo con (iv), las componentes del centro de masa con respecto a un marco de referencia arbitrario, a tiempo t , pueden escribirse en términos del momento lineal total $P^\mu = \sum_k p_k^\mu$, el momento angular total $M^{\mu\nu} = \sum_k (x_k^\mu p_k^\nu - x_k^\nu p_k^\mu)$ y la masa total $m^2 = P^\mu P_\mu$, como:

$$X^\mu(t) = \frac{M^{\mu\nu} P_\nu}{m^2} - \frac{M^{0\nu} P_\nu P^\mu}{m^2 P^0} + \frac{t P^\mu}{P^0}, \quad (2.1)$$

donde x_k^μ y p_k^μ son las componentes de la posición y el momento de la k -ésima partícula, respectivamente. Recordemos que los índices griegos son índices espaciotemporales, $\mu = 0, 1, 2, 3$, mientras que los latinos son espaciales, $i = 1, 2, 3$. Asimismo en este trabajo usamos la métrica de Minkowski $(+, -, -, -)$.

a) Covariancia

En la expresión (2.1) aparecen explícitamente cantidades referidas al sistema de referencia, lo cual podría sugerir que la definición (iv) es no covariante, en contraste con lo mencionado antes. Para aclarar este punto notemos primeramente que $X^\mu(t)$ no sólo representa un punto en el espaciotiempo, sino la línea de mundo del centro de masa parametrizada por t . Por otro lado, fijando $\mu = 0$ vemos que $X^0 = t$ en todos los sistemas de referencia inerciales. Esto es, t se ha elegido de tal manera que la línea del mundo del centro de masa esté parametrizada por el tiempo coordinado para todos los observadores. Debido a que el tiempo coordinado de dos observadores que se mueven relativamente entre si con velocidad constante no puede ser el mismo, es claro que para un valor fijo de t las coordenadas $X^\mu(t)$ de distintos observadores inerciales corresponden a puntos distintos sobre la línea de mundo.

b) Reposo del CM - c) Velocidad constante

En virtud de que estamos considerando partículas libres tenemos que P^μ y $M^{\mu\nu}$ se conservan en el tiempo, y se tiene que

$$\frac{dX^\mu}{dt} = \frac{P^\mu}{P^0}$$

es constante. En particular, en el centro de momento, la 3-velocidad es cero.

d) No-conmutatividad

Considerando la forma explícita de las coordenadas del centro de masa mostrada en la relación (2.1), y usando los corchetes de Poisson que satisfacen los generadores del álgebra de Poincaré, $M^{\mu\nu}$, *i.e.*,

$$[M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}] = i \left(\left(\eta^{\mu\alpha} M^{\nu\beta} - (\mu \leftrightarrow \nu) \right) - (\alpha \leftrightarrow \beta) \right) \quad (2.2)$$

(donde $\eta^{\mu\nu}$ es el inverso de la métrica del espacio de Minkowski) se puede mostrar directamente – aunque no de manera trivial – que las coordenadas del centro de masa satisfacen las relaciones de conmutación³:

$$[X^i, X^j] = \epsilon^{ij}{}_k \left(\frac{S^k}{E^2} + \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{P}}{m^2 E^2} P^k \right), \quad (2.3)$$

con $\mathbf{S} = (S^{23}, S^{31}, S^{12})$ donde $S^{\mu\nu} = M^{\mu\nu} - X^\mu P^\nu + X^\nu P^\mu$.

No-asociatividad

La definición anterior, sin embargo, tiene una desventaja que Pryce no discute. Como se ha mencionado, esta definición es válida únicamente para partículas (o distribuciones de materia) sin espín. Entonces, si queremos utilizarla de manera *asociativa* – *i.e.*, sucesivamente – es necesario que en cada caso las “partículas” que consideremos no tengan espín.

Esto es, para un sistema de tres partículas sin espín, con masas m_1, m_2 y m_3 , respectivamente, puede definirse su centro de masa en términos de *i)* M_{123} y P_{123} correspondientes a las tres partículas, ó bien *ii)* se puede definir el centro de masa de la “partícula” compuesta (12), a través de M_{12} y P_{12} , y posteriormente encontrar las coordenadas del centro de masa del sistema completo $m_{(12)3}$. Genéricamente, las expresiones para el centro de masa que se obtienen por ambos caminos no son iguales.

Lo anterior se debe a que, en general, la partícula efectiva (12) tiene espín no nulo aún si las partículas iniciales tienen espín cero. Por lo tanto, la definición no es aplicable al sistema compuesto por m_{12} y m_3 .

2.1.2. Definición asociativa

Nosotros hemos mostrado que es posible modificar ligeramente la definición (iv) de Pryce para incluir partículas con espín y así evitar el problema de la noasociatividad. Esto es, si se permite que las partículas tengan otro grado de libertad, digamos $s_k^{\mu\nu}$, de modo que el momento angular total es

$$J^{\mu\nu} = M^{\mu\nu} + \sum_k s_k^{\mu\nu},$$

³En el sentido de Corchetes de Poisson.

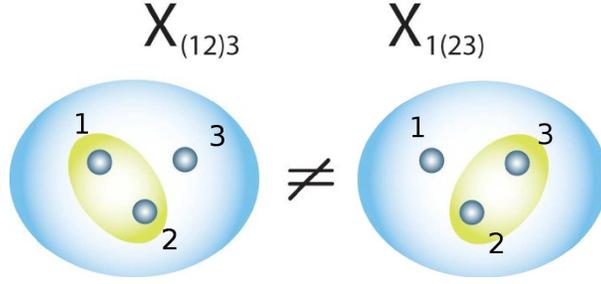


Figura 2.1: Se muestra esquemáticamente la no asociatividad de la definición (iv) de Pryce. La figura de la izquierda representa el centro de masa encontrado cuando se usa $M_{(12)3}$ y $P_{(12)3}$ en la definición, mientras que la de la derecha la que resulta de $M_{1(23)}$ y $P_{1(23)}$.

entonces, las coordenadas del centro de masa definidas como:

$$\mathcal{X}^\mu(t) = \frac{J^{\mu\nu} P_\nu}{m^2} - \frac{J^{0\nu} P_\nu P^\mu}{m^2 P^0} + \frac{t P^\mu}{P^0}, \quad (2.4)$$

satisfacen las propiedades (a)-(c) y además su definición es asociativa. No obstante, los corchetes de Poisson entre sus componentes espaciales también son distintos de cero:

$$[\mathcal{X}^i, \mathcal{X}^j] = \epsilon^{ij}_k \left(\frac{\mathcal{S}^k}{E^2} + \frac{\mathcal{S} \cdot \mathbf{P}}{m^2 E^2} P^k \right), \quad (2.5)$$

con $\mathcal{S} = (\mathcal{S}^{23}, \mathcal{S}^{31}, \mathcal{S}^{12})$, donde $\mathcal{S}^{\mu\nu} = J^{\mu\nu} - \mathcal{X}^\mu P^\nu + \mathcal{X}^\nu P^\mu$.

La no-conmutatividad clásica encontrada en (2.5) es consecuencia de que el sistema esté extendido en el espacio y de que sea relativista. Nótese que en el caso Newtoniano las coordenadas del centro de masa correspondiente tienen corchetes de Poisson iguales a cero. Es decir, la descripción efectiva de la posición de una partícula extendida por su centro de masa, módulo movimientos internos del sistema, puede hacerse por un punto solamente en el límite Newtoniano.

La relevancia de las relaciones anteriores radica en su versión cuántica, donde las coordenadas del centro de masa son elevadas a la categoría de operadores y los paréntesis de Poisson se vuelven conmutadores (salvo por factores de i). El procedimiento anterior de cuantización es el adecuado ya que el sistema que describimos no tiene constricciones. La interpretación del lado derecho de (2.5), en el caso cuántico, indica que la partícula efectiva (cuya posición está descrita por el centro de masa) no está localizada por un puntos.

Así, hemos encontrado un efecto físico que resulta de consideraciones relativistas y que adquiere relevancia debido a argumentos cuánticos. ¿Podemos aprender algo de esta lección de relatividad especial y mecánica cuántica, que nos guíe en la descripción cuántica del espaciotiempo, en el espíritu de [16] y [23]?

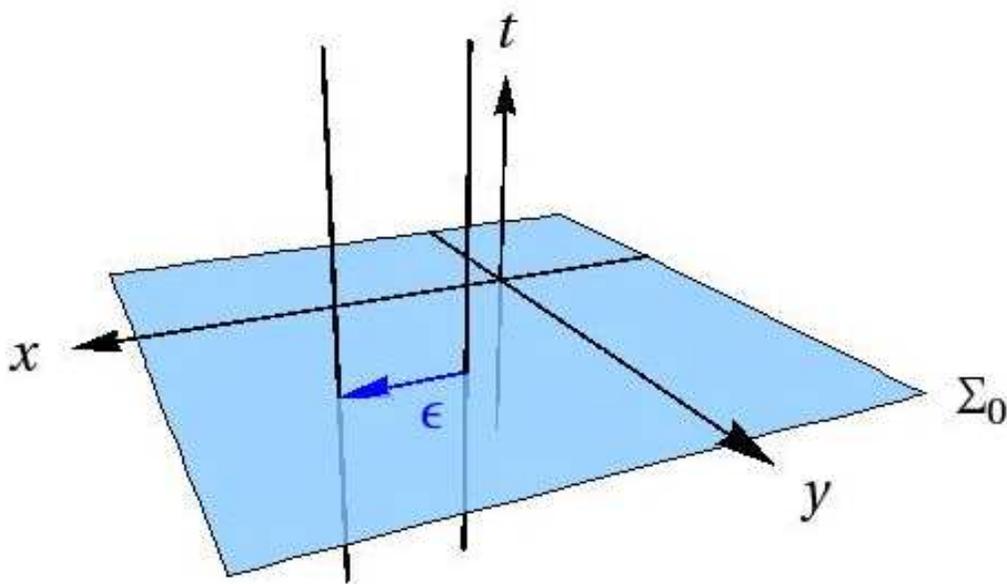


Figura 2.2: Desplazamiento de un punto de la línea de mundo de la partícula en la dirección $\hat{e}_1 = \hat{x}$, sobre el hiperplano espacial x - y .

2.2. Operadores de posición covariantes

Un trabajo relacionado estrechamente con la discusión anterior, es el de Jordan y Mukunda [35]. Dichos autores proponen construir un conjunto de operadores cuánticos $\mathcal{C} = \{\mathbf{X}(t), t \in \mathbb{R}\}$, en términos de “bloques fundamentales” \mathbf{q} , \mathbf{p} , \mathbf{s} y ρ . El observable asociado con cada elemento \mathbf{X} del conjunto \mathcal{C} es la posición de una partícula en una hipersuperficie espacial del espacio de Minkowski, mientras que los bloques fundamentales representan sus grados de libertad.

Para ello introducen un operador \mathbf{X} (en cada hipersuperficie espacial) tal que transforme ante los generadores del grupo de Poincaré como un evento del espaciotiempo. Esto es, un elemento infinitesimal del grupo $g = 1 + \epsilon T$ actúa sobre un elemento del álgebra $X(t)$ como:

$$X(t) \rightarrow X'(t) = X(t) + \epsilon[X, T] + O(\epsilon^2). \quad (2.6)$$

- i. **Traslaciones espaciales.** Recordando que las coordenadas de un evento, ante una traslación espacial por la magnitud ϵ en la dirección \hat{e}_1 , generada por P_1 , transforman infinitesimalmente como:

$$X'_i(t) = X_i(t) + \epsilon \delta_{i1}, \quad (2.7)$$

y substituyendo P_1 por T en la relación (2.6), encontramos los conmutadores:

$$[X_i, P_j] = \delta_{ij}. \quad (2.8)$$

- ii. **Rotaciones.** Similarmente, para una rotación por un ángulo θ en el plano, digamos

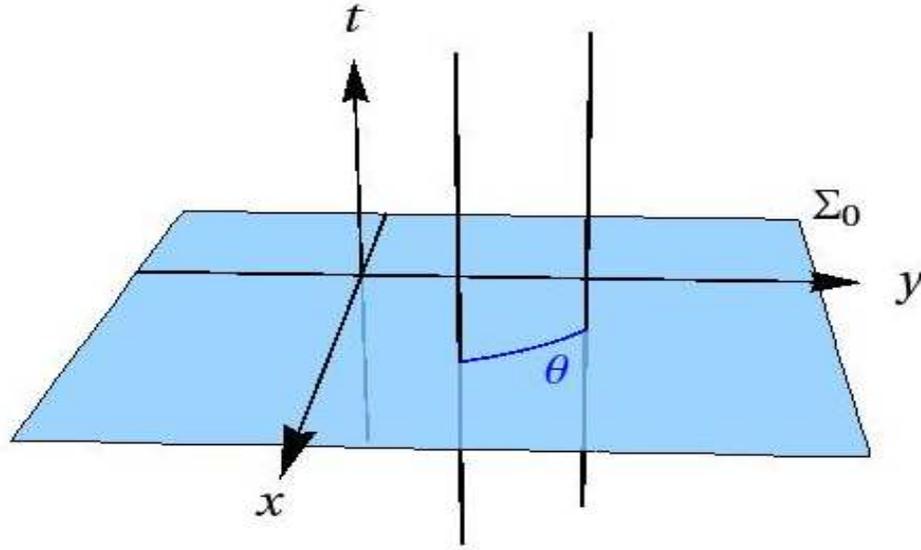


Figura 2.3: Rotación de un punto de la línea de mundo de la partícula alrededor del eje $\hat{e}_3 = \hat{z}$, en el hiperplano espacial $x-y$.

$x-y$, generada por J_3 , las coordenadas de un evento cambian de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} X'_1(t) &= X_1(t) - \theta X_2(t), \\ X'_2(t) &= X_2(t) + \theta X_1(t), \\ X'_3(t) &= X_3(t), \end{aligned} \quad (2.9)$$

de modo que la expresión (2.6) establece que se satisface la relación:

$$[J_i, X_j] = \epsilon_{ijk} X_k. \quad (2.10)$$

iii. **Boosts.** Por último, para una transformación pura de Lorentz, con velocidad β en la dirección \hat{e}_1 , generada por K_1 , las coordenadas de \mathbf{X} quedan:

$$\begin{aligned} t' &= t - \eta X_1(t), \\ X'_1(t') &= X_1(t) - \eta t, \\ X'_2(t') &= X_2(t), \\ X'_3(t') &= X_3(t), \end{aligned} \quad (2.11)$$

con $\eta = \text{tgh}^{-1} \beta$. A primer orden en η , podemos escribir:

$$X'_1(t') = X'_1(t + \eta X_1) = X'_1(t) - \eta X_1(t) \frac{dX_1}{dt},$$

de manera que

$$X'_1(t) = X_1(t) - \eta \left(t - X_1(t) \frac{dX_1}{dt} \right),$$

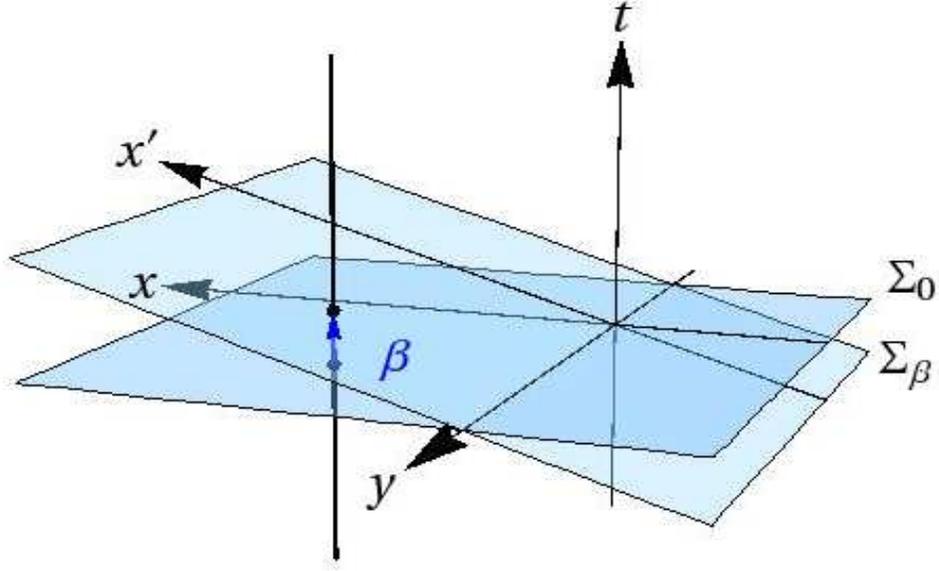


Figura 2.4: Boost de un punto sobre la línea de mundo de la partícula en la dirección del eje $\hat{e}_1 = \hat{x}$, con parámetro β . Las transformaciones (2.11) describen un mismo evento en dos sistemas de referencia, y el conmutador está definido en el plano transformado. Es por ello que aparece la conmutador de X_i con H del lado derecho de la relación (2.12).

y por lo tanto, a $t = 0$, encontramos:

$$[X_j, K_k] = X_k[X_j, H], \quad (2.12)$$

donde hemos usado $\dot{X}_i = [X_i, H]$, y que H es el generador de traslaciones temporales.

Así, Jordan Y Mukunda asumen que el operador de posición de una partícula en la hipersuperficie $t = 0$, debe satisfacer las relaciones de conmutación⁴ dadas por las expresiones (2.8), (2.10) y (2.12).

Los generadores P_i , K_i , J_i y H , por otro lado, cumplen con el álgebra de Poincaré:

$$\begin{aligned} [P_j, P_k] &= 0, & [P_j, H] &= 0, & [J_j, H] &= 0, \\ [J_i, J_j] &= \epsilon_{ijk} J_k, & [J_i, P_j] &= \epsilon_{ijk} P_k, & [J_i, K_j] &= \epsilon_{ijk} K_k, \\ [K_i, K_j] &= -\epsilon_{ijk} J_k, & [K_j, H] &= P_j, & [K_i, P_j] &= \delta_{ij} H. \end{aligned} \quad (2.13)$$

En su trabajo [35], ellos consideran los siguientes casos: *i*) partículas sin espín y energía positiva, *ii*) partículas con espín y energía positiva, y *iii*) partículas con espín y tanto estados de energía positiva como negativa. A continuación se presentan brevemente sus resultados.

⁴En el contexto de mecánica clásica, los conmutadores se refieren a paréntesis de Poisson, mientras que en el contexto cuántico, son conmutadores divididos por i .

2.2.1. Partículas sin espín

Para una partícula con masa m sin espín, ellos muestran que la representación del álgebra de Poincaré, módulo transformaciones unitarias, toma la forma:

$$\begin{aligned} H &= (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}, \\ \mathbf{P} &= \mathbf{p}, \\ \mathbf{J} &= \mathbf{q} \times \mathbf{p}, \\ \mathbf{K} &= \frac{1}{2}(H\mathbf{q} + \mathbf{q}H), \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde \mathbf{q} y \mathbf{p} son un conjunto irreducible de operadores hermiteanos, que satisfacen las relaciones de conmutación:

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, q_j] = 0. \quad (2.15)$$

Análogamente, muestran que el operador de posición queda:

$$\mathbf{X} = \mathbf{q}, \quad (2.16)$$

y por lo tanto los conmutadores entre sus componentes son todos nulos.

2.2.2. Partículas con espín

En el caso de una partícula con masa m y espín s , que puede tomar valores enteros y semi-enteros, ellos mencionan que los generadores del álgebra de Poincaré adquieren la siguiente representación:

$$\begin{aligned} H &= (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}, \\ \mathbf{P} &= \mathbf{p}, \\ \mathbf{J} &= \mathbf{q} \times \mathbf{p} + \mathbf{s}, \\ \mathbf{K} &= \frac{1}{2}(H\mathbf{q} + \mathbf{q}H) + \frac{1}{H + m}\mathbf{p} \times \mathbf{s}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde \mathbf{q} , \mathbf{p} y \mathbf{s} son un conjunto irreducible de operadores hermiteanos, que satisfacen las relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [q_i, p_j] &= \delta_{ij}, & [p_i, p_j] &= 0, & [q_i, q_j] &= 0, \\ [q_i, s_j] &= 0, & [p_i, s_j] &= 0, & [s_i, s_j] &= \epsilon_{ijk}s_k. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Excepto por representaciones unitariamente equivalentes, las expresiones (2.17) son la única solución a las ecuaciones (2.13) para una partícula con masa m , espín s y energía positiva. La forma más general del operador de posición covariante, dada la forma canónica de los generadores del álgebra de Poincaré, queda como:

$$\mathbf{X} = \mathbf{q} - \frac{a}{H(H + m)}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{s})\mathbf{p} + a\mathbf{s} - \frac{1}{m(H + m)}\mathbf{p} \times \mathbf{s}, \quad (2.19)$$

donde a es un número real arbitrario. Para $a = 0$, éste es la parte espacial del operador de posición encontrado por Pryce, lo cual se muestra en la expresión (2.1), y como se ha discutido anteriormente, los conmutadores entre sus componentes están dados por:

$$[X^i, X^j] = \epsilon^{ij}_k \left(\frac{S^k}{E^2} + \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{P}}{m^2 E^2} P^k \right).$$

2.2.3. Partículas con energía positiva o negativa

Finalmente, si se considera una partícula con masa m , espín s y estados de energía negativa, se encuentra que la solución relevante a las ecuaciones (2.13) consiste en operadores hermitianos que generan la suma directa de dos representaciones unitarias irreducibles del grupo de Poincaré, ambas caracterizadas por m y s , pero una con estados de energía positiva y la otra con estados de energía negativa. Una forma canónica de estos operadores es:

$$\begin{aligned} H &= \rho_3(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} = \rho_3 W, \\ \mathbf{P} &= \mathbf{p}, \\ \mathbf{J} &= \mathbf{q} \times \mathbf{p} + \mathbf{s}, \\ \mathbf{K} &= \frac{1}{2}(H\mathbf{q} + \mathbf{q}H) + \frac{\rho_3}{\rho_3 H + m} \mathbf{p} \times \mathbf{s}, \\ &= \frac{1}{2}\rho_3(W\mathbf{q} + \mathbf{q}W) + \frac{\rho_3}{W + m} \mathbf{p} \times \mathbf{s}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde $W = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$, y \mathbf{q} , \mathbf{p} , \mathbf{s} y ρ son un conjunto irreducible de operadores hermiteanos que satisfacen las siguientes relaciones de conmutación y anticonmutación:

$$\begin{aligned} [q_i, p_j] &= \delta_{ij}, & [p_i, p_j] &= 0, & [q_i, q_j] &= 0, \\ [q_i, s_j] &= 0, & [p_i, s_j] &= 0, & [s_i, s_j] &= \epsilon_{ijk} s_k, \\ [q_i, \rho_j] &= 0, & [p_i, \rho_j] &= 0, & [s_i, \rho_j] &= 0, \\ [\rho_i, \rho_j] &= \epsilon_{ijk} \rho_k, & \rho_i \rho_j + \rho_j \rho_i &= 2\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Los operadores ρ son una representación de las matrices de Pauli, y se ha elegido ρ_3 diagonal, *i.e.*,

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, el operador de posición de una partícula con masa m , espín s y estados de energía negativa, puede escribirse de manera única (salvo transformaciones unitarias) como:

$$\mathbf{X} = \mathbf{q} - \frac{\rho_2}{W^2(W + m)} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{p} - \frac{\rho_2}{W} \mathbf{s} + \frac{1}{W(W + m)} \mathbf{p} \times \mathbf{s}, \quad (2.22)$$

cuyas componentes, en contraste con el caso de una partícula que sólo tiene estados de energía positiva, mágicamente conmutan. El operador de posición mostrado en la expresión (2.22), cuya forma corresponde a la representación de Foldy-Wouthuysen⁵, puede transformar

⁵Esta representación se obtiene a partir de la representación de Dirac por la transformación unitaria $U = e^{-\vec{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}}/m}$, donde $\hat{\mathbf{p}}$ es el momento de fermión, m su masa y $\vec{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ las matrices de Dirac.

marse unitariamente al operador de posición de Dirac, que actúa por multiplicación y que, por lo tanto, tiene componentes que conmutan entre si.

2.3. Otras pistas

Es interesante notar que el mismo tipo de no-conmutatividad que se ha encontrado en este capítulo aparece por otros caminos, algunos de los cuales no tienen relación directa con los que hasta aquí se han considerado. A continuación se mencionan algunos de ellos de manera breve.

2.3.1. Operadores de posición de Dirac

En la teoría de Dirac para partículas de espín $1/2$, en la representación usual, el operador de posición X actúa por multiplicación, *i.e.*,

$$X_i \psi(x) = x_i \psi(x),$$

y por lo tanto, sus componentes conmutan entre si. Sin embargo, esta no es una teoría de una partícula, pues el espectro del Hamiltoniano libre para una partícula de masa m toma valores en los intervalos $(-\infty, -m]$, $[m, \infty)$, y, en general, los distintos operadores que aparecen en la teoría, mezclan los subespacios de energía positiva y negativa, y entonces mapean estados de partícula a estados de antipartícula, y viceversa.

Una manera de restringirse a estados de una partícula, es descomponer cada operador A en su parte par, \tilde{A} , que conserva el signo de la energía, y su parte impar, \hat{A} , que lo cambia, y considerar solamente la parte par de cada operador, [31]. Para un operador arbitrario sus partes par e impar están definidas como:

$$\tilde{A} = \frac{1}{2}(A + \Lambda A \Lambda), \quad (2.23)$$

$$\hat{A} = \frac{1}{2}(A - \Lambda A \Lambda), \quad (2.24)$$

donde $\Lambda = H/\sqrt{H^2}$ es el operador de signo y H es el Hamiltoniano libre de Dirac.

Se puede mostrar (ver apéndice A) que las componentes de la parte par del operador de posición satisfacen las relaciones de conmutación:

$$[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = \frac{i\hbar^2}{(p^2 + m^2 c^2)} \epsilon_{ijk} \tilde{S}_k, \quad (2.25)$$

donde \tilde{S} es la parte par del operador de espín (ver [50]).

2.3.2. Estabilidad de álgebras de Lie

Otra situación en la que surgen de forma natural relaciones de no-conmutatividad entre operadores de posición, es el trabajo de Chryssomalakos y Okon, [17], en donde proponen un

esquema de deformación de álgebras de Lie, que les permite buscar de manera sistemática generalizaciones de la cinemática cuántica relativista. El esquema consiste en considerar deformaciones del álgebra de Lie \mathcal{G} , de tal manera que la estructura de Lie es preservada y que el álgebra de Lie deformada sea *estable*.

Un álgebra de Lie es un álgebra (espacio vectorial con producto bilineal antisimétrico “ \circ ”) tal que sus generadores T_A , satisfacen las relaciones:

$$T_A \circ T_B = i f_{AB}^C T_C,$$

donde f_{AB}^C son las constantes de estructura del álgebra. Un álgebra de Lie \mathcal{G} es *estable* si es isomorfa a toda álgebra cuyas constantes de estructura difieren infinitesimalmente de las originales.

En particular, ellos muestran que bajo este criterio, se puede encontrar el álgebra de Poincaré como una deformación estable del álgebra de Galileo (la cual es inestable). Asimismo, cuando aplican su formalismo al álgebra inestable \mathcal{G}_{PH} , que consiste en el álgebra de Poincaré extendida por operadores de “posición” que satisfacen el álgebra de Heisenberg, obtienen que la deformación estable más general contiene unos generadores Z_μ que satisfacen las relaciones de conmutación:

$$[Z_\mu, Z_\nu] = i q \alpha_2 J_{\mu\nu},$$

donde J son los generadores de Lorentz, q es el parámetro de deformación y α_2 , en principio, debería identificarse con una nueva constante fundamental de la naturaleza, y caracteriza al álgebra. Los generadores Z corresponden a la versión extensiva del operador de posición, *i.e.*, son objetos de la forma “masa” \times “posición” tales que el Z para un sistema compuesto es la suma de los Z 's de sus partes (ver [17]).

2.4. La gravedad

A partir de la discusión de la sección 2.2 y del ejercicio presentado en 2.3.1 concluimos que la inclusión de estados con energía negativa permiten definir operadores de posición con coordenadas conmutativas, por lo tanto la no-conmutatividad que encontramos persistentemente a lo largo del capítulo parece no ser relevante físicamente. Es ilustrativo considerar que para un electrón, la incertidumbre en su posición introducida por el lado derecho de la relación (2.3), es del orden de su longitud de Compton. Intentar localizar un electrón con una incertidumbre menor que su longitud de Compton, introduce tanta incertidumbre en su momento, y por tanto a su energía cinética, como para producir un par positrón-electrón. A esta escala, la teoría cuántica de campos, que describe creación de partículas, se hace realmente importante para describir electrones.

No obstante, hemos aprendido que la no-conmutatividad aparece naturalmente en algunos sistemas motivados físicamente, y hemos señalado un esquema limpio que permite construir operadores de posición para partículas en espacios generales.

Para concluir el capítulo, nos gustaría extender la construcción que Jordan y Mukunda hacen en el espacio de Minkowski, a un espaciotiempo con curvatura, por simplicidad, lo haremos al espacio de de Sitter. De esta manera, esperamos saber si la presencia de gravedad introduce algún tipo de no-conmutatividad entre las componentes de la posición de una

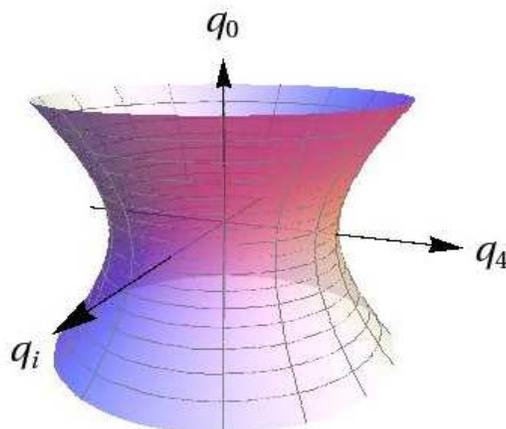


Figura 2.5: Encajamiento del espacio de de Sitter en Minkowski, $i = 1, 2, 3$.

partícula. Para ello, necesitamos *i*) encontrar una representación del álgebra de de Sitter en términos de elementos fundamentales que describen los grados de libertad del sistema, e *ii*) introducir operadores de posición que transformen *adecuadamente*. Mientras que el primer paso es conceptualmente claro, el segundo no lo es. En particular, no es claro que los operadores de posición deban satisfacer las relaciones de Heisenberg, pues los momentos en este caso no conmutan. En lo que resta del capítulo, presentamos los avances en este programa, en donde nos enfocamos en construir el álgebra de de Sitter:

$$\begin{aligned}
 [P_i, P_j] &= \lambda^2 \epsilon_{ijk} J_k, & [P_i, H] &= \lambda^2 K_i, & [J_i, H] &= 0, \\
 [J_i, J_j] &= \epsilon_{ijk} J_k, & [J_i, P_j] &= \epsilon_{ijk} P_k, & [J_i, K_j] &= \epsilon_{ijk} K_k, \\
 [K_i, H] &= P_i, & [K_i, K_j] &= -\epsilon_{ijk} J_k, & [K_i, P_j] &= \delta_{ij} H,
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

donde λ es la curvatura (constante) del espaciotiempo de de Sitter. En el límite $\lambda \rightarrow 0$ el álgebra anterior se reduce a la de Poincaré.

El espacio de de Sitter en 4 dimensiones dS_4 puede pensarse como la subvariedad del espacio de Minkowski en 5 dimensiones M^5 (con coordenadas q_A), definida por:

$$q_A q^A = -q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = R^2, \tag{2.27}$$

con $R = 1/\lambda$, $q^A = g^{AB} q_B$ donde g^{AB} es el inverso de la métrica M^5 , y los índices en mayúscula toman valores 0, 1, 2, 3, 4, (ver por ejemplo [25]).

Otra manera de escribir el álgebra (2.26) es:

$$[J_{AB}, J_{CD}] = (g_{BD} J_{AC} + g_{AC} J_{BD} - g_{BC} J_{AD} - g_{AD} J_{BC}), \tag{2.28}$$

con las identificaciones:

$$J_{4i} = \lambda^{-1} P_i, \quad J_{40} = \lambda^{-1} H, \quad J_{ij} = \epsilon_{ijk} J_k, \quad J_{i0} = K_i. \tag{2.29}$$

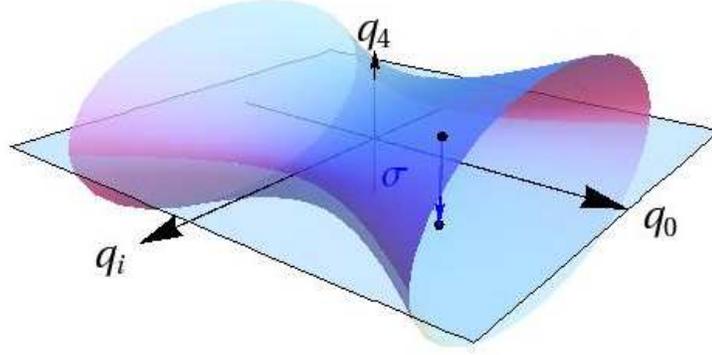


Figura 2.6: Mapeo σ que lleva un punto sobre el hiperboloide al plano M^4 . El pushforward de ∂_{q_4} , bajo este mapeo, es igual a cero.

2.4.1. Partículas sin espín

El primer caso que nos interesa considerar es el de una partícula sin espín. Los grados de libertad para este sistema son q_i y p_i que satisfacen las relaciones

$$[p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, q_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \eta_{ij}.$$

A partir de las coordenadas de un punto del espacio 5-dimensional de Minkowski q_A y sus momentos conjugados p_A (tales que $[q_A, p_B] = \eta_{AB}$, donde g_{AB} es la métrica de M^5) [26], los generadores J_{AB} pueden ser representados por:

$$J_{AB} = q_A p_B - q_B p_A. \quad (2.30)$$

Para encontrar la representación buscada, es necesario escribir la expresión anterior en términos únicamente de los grados de libertad relevantes, *i.e.*, q_i y p_i . Para ello, notamos que la coordenada q_4 puede escribirse como función de las otras coordenadas considerando la relación (2.27) como:

$$q_4 = \sqrt{R^2 + q_0^2 - \mathbf{q}^2}, \quad (2.31)$$

lo cual implica que $p_4 = 0$. Esto es, la restricción anterior puede verse como el mapeo

$$\sigma : M^5 \Big|_{q_A q^A = R^2} \rightarrow M^4,$$

mostrado esquemáticamente en la Fig. (2.6), tal que $\sigma(q_0, q_i, q_4) = (q_0, q_i)$. Así, es fácil ver que $\sigma_* \partial_{q_4} = 0$, y por lo tanto, $p_4 = 0$. Formalmente, debemos tomar dos cartas para cubrir las dos regiones de dS_4 , con $q_4 > 0$ y $q_4 < 0$, por ahora nos concentraremos en la región con $q_4 > 0$, y entonces la representación que encontremos será válida en tal región. Para la región con $q_4 < 0$, la representación relevante será la correspondiente a la región superior, con el reemplazo $q_4 \rightarrow -\sqrt{R^2 + q_0^2 - \mathbf{q}^2}$.

Además, buscamos una representación a un tiempo dado, y entonces podemos elegir $q_0 = 0$, por simplicidad. Recordando que el álgebra de de Sitter tiene un Casimir cuadrático dado

por⁶

$$Q^2 = -\lambda^2 J_{AB} J^{AB},$$

que puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} Q^2 &= (H^2 - \mathbf{P}^2) - \lambda^2(\mathbf{J}^2 - \mathbf{K}^2), \\ &= \mu^2 = m^2 + \lambda^2 \mu_1^2, \end{aligned} \quad (2.32)$$

podemos expresar p_0 como:

$$p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \mu^2 - \lambda^2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})}. \quad (2.33)$$

Así, sustituyendo $q_0 = 0$, $p_4 = 0$, q_4 y p_0 dados por las expresiones (2.31) y (2.33), respectivamente, en la expresión (2.30), obtenemos la representación deseada⁷:

$$\begin{aligned} H &= f p_0, \\ \mathbf{P} &= f \mathbf{p}, \\ \mathbf{J} &= \mathbf{q} \times \mathbf{p}, \\ \mathbf{K} &= p_0 \mathbf{q}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde

$$f = \lambda q_4 = \sqrt{1 - \lambda^2 \mathbf{q}^2}. \quad (2.35)$$

Es claro que en el límite $\lambda \rightarrow 0$, el álgebra anterior se reduce al álgebra de Poincaré (2.14). También es fácil comprobar que la representación anterior con $f \rightarrow -f$, también es una representación de (2.26).

2.4.2. Partículas con espín

Para terminar la sección, consideraremos el caso de partículas con espín. Para nuestros fines será suficiente encontrar la representación de (2.30) a primer orden no trivial en λ , es decir, consideraremos que las distintas curvaturas seccionales del espacio son mucho menores que el inverso de las longitudes de las regiones de interés. La representación que buscamos se debe reducir a (2.34) cuando $\mathbf{s} = 0$ y a (2.17) cuando $\lambda = 0$. Una representación que cumple con los criterios mencionados es la siguiente:

⁶El factor constante $-\lambda^2$ es introducido para que $Q \rightarrow m$ cuando $\lambda \rightarrow 0$.

⁷Excepto, quizás, por cuestiones de ordenamiento.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J} &= \mathbf{q} \times \mathbf{p} + \mathbf{s}, \\
 \mathbf{P} &= f\mathbf{p} + \lambda^2 \left(\frac{\mathbf{q} \times \mathbf{s}}{f+1} \right), \\
 H &= p_0 f + \frac{\lambda^2}{2h} \left(\mathbf{s}^2 - \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{s})^2}{(h+m)^2} - \frac{h-m}{h+m} (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{s} \right) + O(\lambda^4), \\
 \mathbf{K} &= p_0 \mathbf{q} + \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{s}}{h+m} + \lambda^2 \left(\frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{s})^2}{2h(h+m)^2} + \frac{2m+h}{2h(h+m)} \mathbf{s}^2 + \frac{m}{2h(h+m)} (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{s} \right) \mathbf{q} \\
 &+ \lambda^2 \left(\frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 - (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{s}}{2h(h+m)^2} (\mathbf{p} \times \mathbf{s}) - \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})}{2(h+m)} (\mathbf{q} \times \mathbf{s}) - \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{s})}{2(h+m)} \mathbf{s} \right) \\
 &- \lambda^2 \left(\frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{s})^2 + (h+m)((h+2m)\mathbf{s}^2 + (h+m)\mu_1^2)}{2mh(h+m)^3} (\mathbf{p} \times \mathbf{s}) \right) + O(\lambda^4), \tag{2.36}
 \end{aligned}$$

donde

$$f = \sqrt{1 - \lambda^2 \mathbf{q}^2}, \quad p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 + \lambda^2 \mu_1^2 - \lambda^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2}, \quad h = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

Para entender cómo han sido obtenidas las expresiones anteriores, consideremos primeramente cómo ha sido encontrada la representación correspondiente en el espacio de Minkowski (2.17), desde una perspectiva geométrica. En particular, la expresión para el generador de empujones:

$$\mathbf{K} = \mathbf{q}H + \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{s}}{H+m}.$$

puede obtenerse de la siguiente manera: consideremos dos sistemas de referencia inerciales, S y $S' = (I - \mathbf{\Delta}\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K})S$, que difieren entre sí por una transformación infinitesimal pura de Lorentz. De manera que, vista desde S y S' , la partícula se mueve con velocidad $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\beta}$, respectivamente. Ahora, definimos el sistema de referencia *estacionario* S_0 asociado a un marco arbitrario S , como el marco en el que la partícula está en reposo que se obtiene mediante un boost únicamente. Así, hay un sistema estacionario para cada uno de los dos sistemas inerciales S y S' , *i.e.*,

$$S_0 = B(-\boldsymbol{\beta}) S, \quad S'_0 = B(-\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\beta}) S',$$

donde

$$B(\boldsymbol{\beta}) = e^{-\zeta \hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{K}}, \quad \text{con} \quad \zeta = \text{tgh}^{-1} \beta.$$

Debido a que los generadores de empujones en distintas direcciones no conmutan, S_0 y S'_0 están relacionados por una rotación espacial infinitesimal, es decir, $S'_0 = (I - \mathbf{\Delta}\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{J})S_0$. Por lo tanto, encontramos:

$$B(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\beta})^{-1} (I - \mathbf{\Delta}\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K}) B(\boldsymbol{\beta}) = (I - \mathbf{\Delta}\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{J}). \tag{2.37}$$

Nótese que mientras que el generador \mathbf{J} que aparece en el lado derecho de la relación mostrada arriba, corresponde a la representación en la familia de marcos comóviles con la partícula; el generador \mathbf{K} , en el término del lado izquierdo, corresponde a la representación en un marco donde la partícula se mueve con velocidad $\vec{\beta}$.

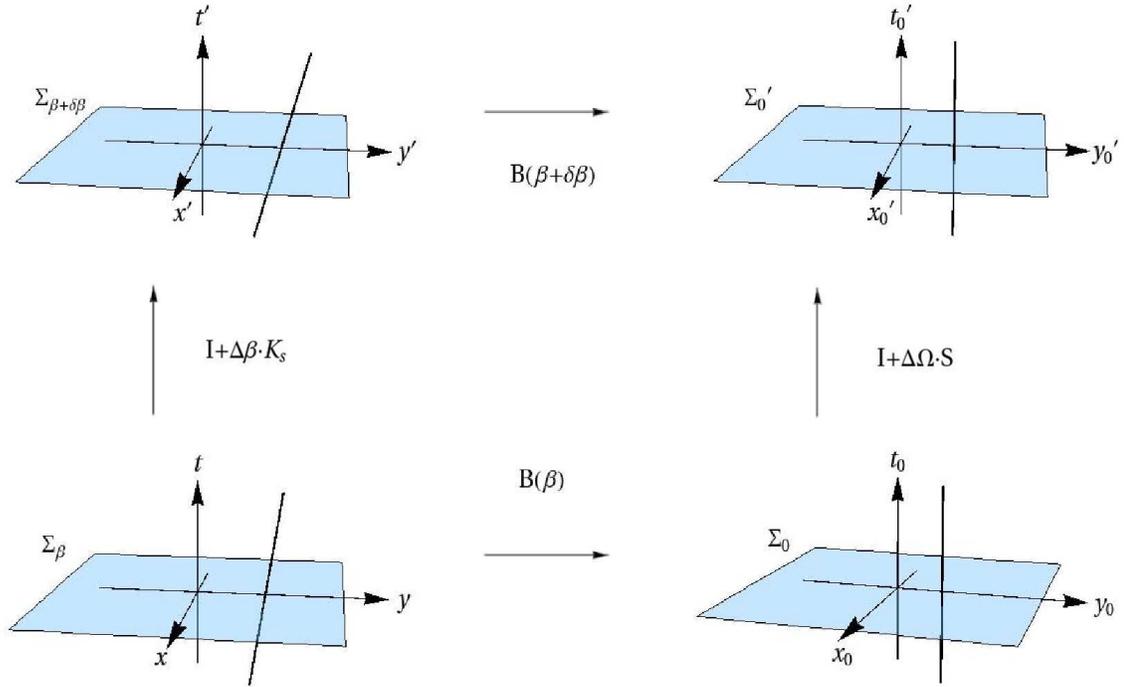


Figura 2.7: Se muestra esquemáticamente como se definen \mathbf{K}_s y los marcos estacionarios S_0 y S'_0 .

Ahora, la representación canónica del generador de rotaciones espaciales es

$$\mathbf{J} = \mathbf{q} \times \mathbf{p} + \mathbf{s},$$

por lo que en un sistema de referencia en el que la partícula está en reposo, $\mathbf{J} = \mathbf{s}$. Podemos notar en la expresión anterior que \mathbf{J} está compuesto por dos términos, el primero actúa en el espacio de fase de la partícula, mientras que el segundo en un espacio interno. En general, este no es el caso para los demás generadores del grupo de Poincaré, en los que hay términos que transforman ambos espacios. Por ejemplo, el generador de empujones puede escribirse como $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{ph} + \mathbf{K}_s$. Si identificamos el lado izquierdo de la relación (2.37) con la transformación infinitesimal producida por \mathbf{K}_s ,

$$\Delta\beta \cdot \mathbf{K}_s = B(\beta + \delta\beta)^{-1}(\Delta\beta \cdot \mathbf{K})B(\beta) \quad (2.38)$$

entonces encontramos (ver Fig.(2.7)):

$$\Delta\beta \cdot \mathbf{K}_s = \Delta\Omega \cdot \mathbf{s}. \quad (2.39)$$

El resultado del cálculo del lado izquierdo de (2.37), implica que (ver por ejemplo [34], p.551),

$$\Delta\Omega = \frac{\gamma}{1 + \gamma} \boldsymbol{\beta} \times \Delta\boldsymbol{\beta},$$

y por lo tanto

$$\mathbf{K}_s = \frac{\gamma}{1 + \gamma} \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{s} = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{s}}{H + m}.$$

Es decir, la parte del generador A que actúa en los grados de libertad internos, A_s , se define como la rotación espacial que relaciona los dos marcos de referencia estacionarios asociados con $a)$ un marco arbitrario y $b)$ el que se obtiene de (a) por la transformación generada por A (ver Ec. (2.39)).

De manera análoga, la parte “espinorial” de los generadores del álgebra de de Sitter se puede encontrar a través de una construcción geométrica. En este caso, a diferencia de la situación en Minkowski, los momentos no conmutan, y por lo tanto es necesario definir la transformación como la rotación entre marcos *estáticos*, *i.e.*, marcos estacionarios en los que la posición de la partícula ha sido trasladada previamente al origen (ver Fig. (2.8)).

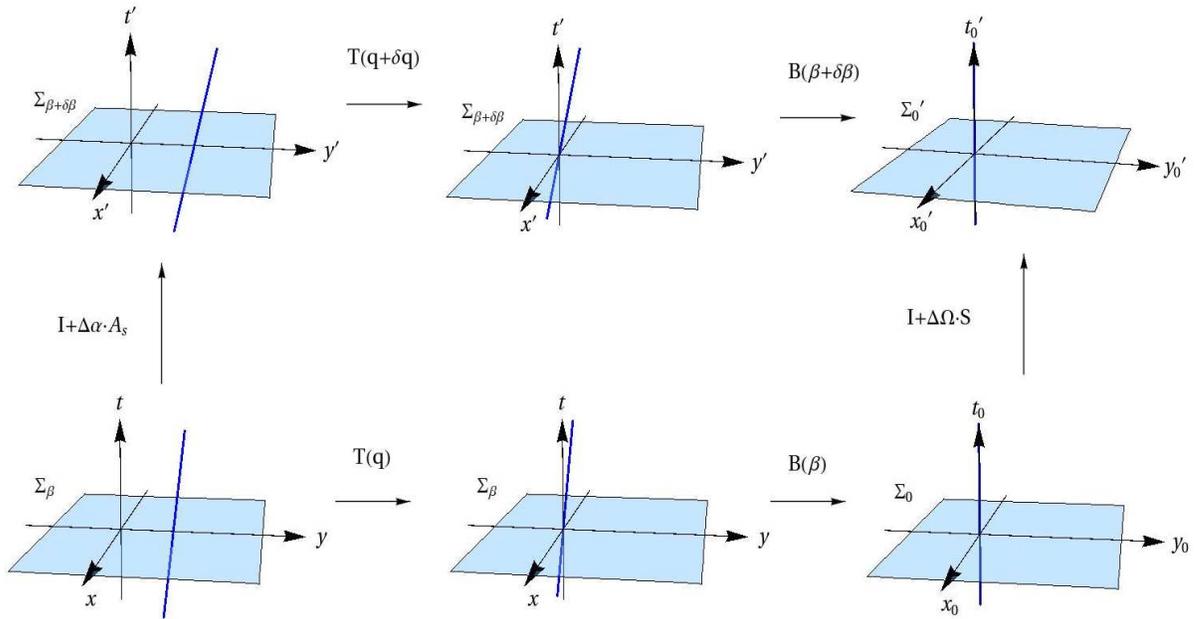


Figura 2.8: Se muestra esquemáticamente como se definen A_s , y los marcos de referencia estáticos S_0 y S'_0 .

Capítulo 3

Fases geométricas en sistemas constreñidos

3.1. Fases geométricas

Consideremos un sistema cuántico no relativista cuyo Hamiltoniano, H , depende de un conjunto de parámetros externos, $X^A(t) = X_t^A$. Asumamos que inicialmente el sistema está en el n -ésimo eigenestado aislado y no-degenerado $|n(X_0)\rangle \equiv |n\rangle$ del Hamiltoniano $H(X_0) \equiv H$, con energía $E_n(X_0) \equiv E_n$, tal que

$$|\psi(0)\rangle = |n\rangle, \quad H|n\rangle = E_n|n\rangle. \quad (3.1)$$

Suponiendo que los parámetros X s empiezan a cambiar adiabáticamente, trazando una curva cerrada C en el espacio de los parámetros, \mathbb{M} , tales que $X_0 = X_T$, entonces el teorema adiabático garantiza que para todo tiempo posterior $t \in [0, T]$ el estado del sistema está dado por:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i(\delta_n - \gamma_n)} |n(X_t)\rangle, \quad (3.2)$$

donde $|n(X_t)\rangle$ es el eigenestado instantáneo de $H(X_t)$ con energía $E_n(X_t)$, *i.e.*,

$$H(X_t)|n(X_t)\rangle = E_n(X_t)|n(X_t)\rangle.$$

La fase que aparece en la expresión (3.2) corresponde a una parte dinámica,

$$\delta_n(t) = \int_0^t E_n(X_{t'}) dt', \quad (3.3)$$

y a una parte geométrica,

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \langle n(X_\tau) | \partial_\tau n(X_\tau) \rangle d\tau, \quad (3.4)$$

$$= i \int_{X_0}^{X_t} \langle n(X) | \partial_A n(X) \rangle dX^A, \quad (3.5)$$

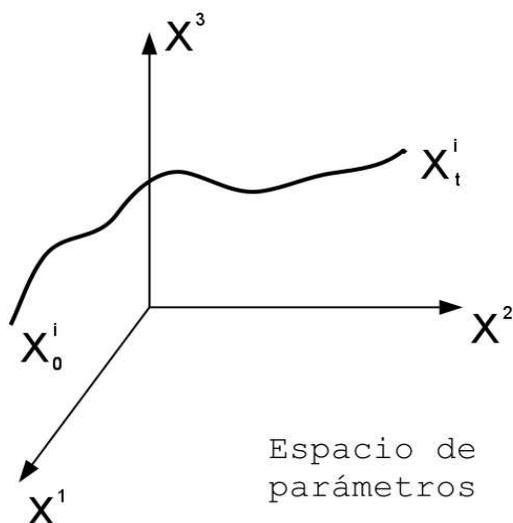


Figura 3.1: Cada punto en la curva en el espacio de parámetros \mathbb{M} corresponde a una configuración del sistema.

donde $\partial_A = \partial/\partial X^A$. La fase γ_n se conoce como la fase de Berry y fue introducida por M. Berry en 1984 [8]. Nótese que la fase geométrica no depende de la parametrización de la curva – en tanto que el teorema adiabático se cumpla.

Poco tiempo después del descubrimiento de Berry, B. Simon observó que la fase geométrica puede pensarse como una holonomía sobre el espacio de los parámetros, [48]. Simon consideró un haz fibrado (dado el n -ésimo eigenestado normalizado del Hamiltoniano) en el que el espacio base es \mathbb{M} y la fibra es una copia del grupo $U(1)$, que corresponde a la fase del eigenestado. La evolución temporal impuesta por la ecuación de Schrödinger establece – en condiciones adiabáticas – una regla de transporte paralelo en el haz, y define entonces una conexión:

$$\mathcal{A}_n = i\langle n(X)|d|n(X)\rangle, \quad (3.6)$$

y un campo de curvatura:

$$\mathcal{K}_n = d\mathcal{A}_n = i(d\langle n(X)|) \wedge (d|n(X)\rangle). \quad (3.7)$$

Así, la fase geométrica puede escribirse como:

$$\gamma_n = \oint_C \mathcal{A}_n = \int_S \mathcal{K}_n, \quad (3.8)$$

donde S es cualquier superficie con C como frontera. De este modo, la fase geométrica γ_n representa “el flujo magnético” de \mathcal{K}_n a través de la superficie S .

Supongamos ahora que el n -ésimo eigenestado, en el que empieza el sistema, es degenerado. El teorema adiabático establece que la energía del sistema, la cual corresponde ahora a distintos eigenestados, sigue siendo un invariante adiabático. En este caso, sin embargo, no

le “cuesta” energía al sistema moverse dentro del subespacio generado por los eigenestados degenerados. De manera que, en general, el estado a un tiempo $t \in [0, T]$ está dado por una combinación lineal de los eigenestados degenerados, la cual es determinada por un operador unitario:

$$U(C) = \mathcal{P}e^{i \int_C \mathcal{A}}, \quad \mathcal{A}_{ab}(X) = i \langle n_a(X) | d | n_b(X) \rangle, \quad (3.9)$$

conocido como la matriz de Wilczek-Zee, y corresponde a la generalización de la fase geométrica para estados con degeneración. En la expresión anterior, $\mathcal{P}e$ es la exponencial ordenada de camino y $a, b = 1, \dots, g$, donde g es la dimensión del subespacio degenerado.

3.2. Mecánica cuántica en variedades encajadas

Cuando se considera la cuantización de una partícula restringida a moverse sobre una variedad M^m encajada en \mathbb{R}^n , se siguen comunmente dos acercamientos [47]. En *la cuantización intrínseca*, uno supone que la partícula está limitada a moverse en M^m a priori, se eligen coordenadas sobre la variedad, se definen sus momentos conjugados, y se imponen relaciones de conmutación canónicas entre ellos. En este esquema de cuantización, en general, ocurren problemas de ordenamiento. El único elemento que tiene información del encajamiento es la métrica inducida, y el sistema depende solamente en la geometría intrínseca de la variedad. Por otro lado, el método del *potencial de confinamiento* supone la existencia de una fuerza que actúa en las direcciones normales a M^m , que obliga a la partícula a permanecer sobre la variedad; si ésta es suficientemente intensa, el movimiento a lo largo de las direcciones normales a la variedad se “congela”, en el sentido de que la escala de energías asociada con estos grados de libertad es mucho mayor a la asociada con los grados de libertad sobre la variedad, y entonces puede definirse un hamiltoniano efectivo que gobierna el movimiento tangencial integrando los grados normales. La dinámica del sistema en este caso, depende tanto de la geometría intrínseca de la variedad como del encajamiento de la misma en el espacio Euclideo. A nosotros nos parece más realista el modelo del potencial de confinamiento, y por lo tanto, es este acercamiento el que seguiremos a lo largo de este trabajo.

3.2.1. Formalismo general

La discusión de esta subsección está basada en [47]. Consideremos una partícula sin espín confinada a una variedad m -dimensional, M^m , encajada en \mathbb{R}^n . Sea $\mathbf{r} : M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ el encajamiento de la variedad en el espacio Euclideo, y sea x^μ un conjunto de coordenadas locales sobre M^m , con $\mu = 1, \dots, m$. Para hacer la separación entre los grados de libertad normales y tangenciales de manera sencilla, definimos un sistema de coordenadas adaptado \mathcal{F} como un conjunto de m vectores tangentes linealmente independientes $\mathbf{t}_\mu = \partial_\mu \mathbf{r}$, y $p = n - m$ vectores ortonormales en las direcciones normales, $\hat{\mathbf{n}}^i(x)$, con $i = m + 1, \dots, n$. De esta manera, podemos escribir las coordenadas cartesianas localmente³ como:

$$\mathbf{X}(x, y) = \mathbf{r}(x) + y^i \hat{\mathbf{n}}^i(x),$$

³El sistema de coordenadas \mathcal{F} solamente está bien definido en una vecindad en las direcciones normales y^i de la variedad, para distancias $y^i < \kappa^{-1}$, donde κ denota la escala de la (mayor) curvatura seccional en M .

donde y^i son distancias a lo largo de las direcciones $\hat{\mathbf{n}}^i(x)$. Es importante notar que \mathcal{F} no está definido de forma única, en particular podemos definir otro sistema de coordenadas adaptado $\tilde{\mathcal{F}}$, equivalente al primero, aplicando una rotación (que incluso puede depender de x) sobre los vectores normales.

En el sistema de coordenadas \mathcal{F} , la métrica toma la forma:

$$G_{AB} \equiv \partial_A \mathbf{X} \cdot \partial_B \mathbf{X},$$

donde $A, B = 1, \dots, n$, las derivadas parciales son respecto a las coordenadas adaptadas (x^μ, y^i) y el producto punto es el producto interno Euclideo en \mathbb{R}^n . A partir de las ecuaciones de Frenet-Serret generalizadas

$$\partial_\mu \hat{\mathbf{n}}^i = -\alpha_\mu^{i\nu} \mathbf{t}_\nu - A_\mu^{ij} \hat{\mathbf{n}}^j, \quad (3.10)$$

$$\partial_\mu \mathbf{t}_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\rho \mathbf{t}_\rho + \alpha_{\mu\nu}^i \hat{\mathbf{n}}^i, \quad (3.11)$$

con

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{t}_\mu \cdot \mathbf{t}_\nu, \quad (3.12)$$

$$\alpha_{\mu\nu}^i = \mathbf{t}_\mu \cdot \partial_\nu \hat{\mathbf{n}}^i, \quad (3.13)$$

$$A_\mu^{ij} = \hat{\mathbf{n}}^i \cdot \partial_\mu \hat{\mathbf{n}}^j, \quad (3.14)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \mathbf{t}^\rho \cdot \partial_\mu \mathbf{t}_\nu, \quad (3.15)$$

es posible escribir la métrica en términos de $g_{\mu\nu}$, $\alpha_{\mu\nu}^i$ y A_μ^{ij} , de la siguiente manera⁴:

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} \gamma_{\mu\nu} + y^k y^l A_{kh}^\mu A_{lh}^\nu & y^k A_{jk}^\mu \\ y^k A_{ik}^\nu & \delta_{ij} \end{pmatrix},$$

donde $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - 2y^k \alpha_{\mu\nu}^k + y^k y^l \alpha_{\mu\rho}^k g^{\rho\sigma} \alpha_{\sigma\nu}^k$. Calculando el determinante de G_{AB} , encontramos que es igual al determinante de $\gamma_{\mu\nu}$, $|G| = |\gamma|$, y obtenemos el inverso de la métrica,

$$G^{AB} = \begin{pmatrix} \lambda^{\mu\nu} & \lambda^{\mu\sigma} y^k A_\sigma^{jk} \\ \lambda^{\nu\sigma} y^k A_\sigma^{ki} & \delta^{ij} + y^k y^l A_\sigma^{ik} A_\sigma^{jl} \lambda^{\sigma\rho} \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

donde $\lambda^{\mu\nu} = (\gamma^{-1})_{\mu\nu}$ es la matriz inversa de $\gamma_{\mu\nu}$.

Ahora, para describir la dinámica de la partícula, suponemos que no existe ninguna otra fuerza actuando sobre ella además de la que la confina, la cual depende solamente de las coordenadas normales. Entonces el Hamiltoniano en las coordenadas adaptadas, con $m = 1 = \hbar$, puede escribirse como:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2|G|^{1/2}} \partial_A G^{AB} |G|^{1/2} \partial_B + V(y),$$

⁴Seguimos la convención de que el tensor $g_{\mu\nu}$ sube y baja índices griegos.

y la condición de normalización sobre la función de onda del sistema Φ ,

$$\int |G|^{1/2} |\Phi|^2 d^m x d^p y = 1. \quad (3.17)$$

Debido a que estamos interesados en describir la densidad de probabilidad de encontrar a una partícula moviéndose sobre M^m , reescalamos la función de onda y el Hamiltoniano de la siguiente manera:

$$\Psi = \left(\frac{|G|^{1/4}}{|g|^{1/4}} \right) \Phi, \quad (3.18)$$

$$\hat{H}_T = \left(\frac{|G|^{1/4}}{|g|^{1/4}} \right) \hat{H} \left(\frac{|g|^{1/4}}{|G|^{1/4}} \right), \quad (3.19)$$

donde $|g|$ es el determinante de $g_{\mu\nu}$. Así, podemos escribir la condición de normalización (3.17) como

$$\int |g|^{1/2} |\Psi|^2 d^m x d^p y = 1.$$

y por tanto, podemos interpretar $\int |\Psi|^2 d^p y$ como la densidad de probabilidad para una partícula moviéndose en M^m definida respecto a la medida convencional de la variedad: $|g|^{1/2} d^m x$. Al reescalar la función de onda y el Hamiltoniano como en (3.18) y (3.80), garantizamos que si Φ satisface $\hat{H}\Phi = \tilde{E}\Phi$, entonces Ψ satisface $\hat{H}_T\Psi = \tilde{E}\Psi$.

A continuación, definimos $\hat{\partial}_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{i}{2} A_\mu^{ij} L_{ij}$ donde $L_{ij} = i(y^j \partial_i - y^i \partial_j)$ son los generadores de rotaciones en el espacio normal a M^m , de modo que el Hamiltoniano transformado \hat{H}_T , considerando la forma de la métrica (3.16), se puede escribir como:

$$\hat{H}_T = -\frac{1}{2|\gamma|^{1/4}} \partial_i |\gamma|^{1/2} \partial_i \frac{1}{|\gamma|^{1/4}} - \frac{1}{2|g|^{1/4} |\gamma|^{1/4}} \hat{\partial}_\mu \lambda^{\mu\nu} |\gamma|^{1/2} \hat{\partial}_\nu \frac{|g|^{1/4}}{|\gamma|^{1/4}} + V(y). \quad (3.20)$$

Ahora, centramos nuestra atención en el potencial $V(y)$ que tiene un mínimo muy profundo en $y^i = 0$. Suponiendo que es simétrico a orden cuadrático en y^i , podemos expandirlo alrededor su mínimo,

$$V(y) = \frac{1}{2} \omega^2 y^{i2} + O(y^3),$$

y en virtud de que el potencial es muy estrecho, podemos despreciar términos de orden cúbico y superior. Lo anterior implica que $\omega \gg \kappa^2$, donde κ denota la escala de curvaturas en M^m . Es conveniente absorber la escala de la frecuencia en un parámetro adimensional muy pequeño η , *i.e.*, $\omega \rightarrow \omega/\eta^2$, de manera que ω es de orden κ^2 . Así, hemos introducido un parámetro perturbativo. Similarmente, reescalamos las coordenadas normales, $y^i \rightarrow \eta y^i$, pues esperamos que el desplazamiento en las direcciones normales sea de orden η . De esta manera, el potencial de confinamiento queda

$$V(y) = \frac{1}{2\eta^2} \omega^2 y^{i2} + O(y^3). \quad (3.21)$$

Expandiendo \hat{H}_T en una serie de potencias de η alrededor de $\eta = 0$, obtenemos:

$$\hat{H}_T = \frac{1}{\eta^2} \hat{H}_{-2} + \hat{H}_0 + O(\eta), \quad (3.22)$$

con

$$\hat{H}_{-2} = \frac{1}{2}(-\partial_i^2 + \omega^2 y^{i2}), \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 = & -\frac{1}{2g^{1/2}}(\partial_\mu + \frac{i}{2}A_\mu^{ij}L_{ij})g^{\mu\nu}g^{1/2}(\partial_\nu + \frac{i}{2}A_\nu^{kl}L_{kl}) \\ & + \frac{1}{8}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}(\alpha_{\mu\nu}^i\alpha_{\rho\sigma}^i - 2\alpha_{\mu\rho}^i\alpha_{\nu\sigma}^i), \end{aligned} \quad (3.24)$$

así vemos que la escala de energía asociada con los grados de libertad normales es de $O(\eta^{-2})$ mientras que la escala de energía asociada con los grados de libertad tangentes es de $O(\eta^0)$. Aún más, vemos que \hat{H}_{-2} es el hamiltoniano de un oscilador armónico p -dimensional en el espacio ortogonal a M^m , y que por lo tanto, podemos hacer que la separación entre sus niveles de energía sea arbitrariamente grande tomando el límite $\eta \rightarrow 0$. Estamos interesados en estudiar al sistema en dicho límite y podemos ignorar términos con potencias positivas de η en el análisis posterior.

Para encontrar un Hamiltoniano efectivo sobre M^m , tenemos que “congelar” los grados de libertad normales. Para ello, separamos la función de onda Ψ de la siguiente forma:

$$\Psi(x, y) = \sum_{\beta} \psi_{\beta}(x)\chi_{\beta}(y), \quad (3.25)$$

donde el índice $\beta = 1, \dots, d$ etiqueta la degeneración que puede ocurrir en el espectro de \hat{H}_{-2} , debido a la simetría $SO(p)$ del potencial. La forma de la función de onda (3.25) corresponde formalmente al término dominante en la expansión en η dada por la teoría de perturbación para estados degenerados estándar (ver apéndice B). Los estados normales $\chi_{\beta}(y)$ satisfacen:

$$\hat{H}_{-2}\chi_{\beta}(y) = E\chi_{\beta}(y),$$

con E siendo la contribución a orden $O(\eta^{-2})$ a la energía total del sistema \tilde{E} . Después de proyectar el Hamiltoniano en el espacio de estados generado por $\chi_1(y), \dots, \chi_d(y)$, \hat{H}_0 es reemplazado por una matriz de dimensión $d \times d$, $\hat{\mathcal{H}}$, con componentes:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\alpha\beta} = \int d^p y \chi_{\alpha}^*(y)\hat{H}_0\chi_{\beta}(y). \quad (3.26)$$

$\hat{\mathcal{H}}$ actúa sobre una función de onda $\vec{\psi}(x)$ (con componentes $\psi_{\beta}(x)$), y la dinámica en M^m está determinada por

$$\hat{\mathcal{H}}\vec{\psi}(x) = \mathcal{E}\vec{\psi}(x), \quad (3.27)$$

donde \mathcal{E} es la corrección a orden η^0 a la energía total del sistema \tilde{E} . Definiendo las matrices

de dimensión $d \times d$,

$$(\mathcal{L}_{ij})_{mn} \equiv \int d^p y \chi_m^*(y) L_{ij} \chi_n(y), \quad (3.28)$$

$$\mathcal{A}_\mu \equiv \frac{1}{2} A_\mu^{rs} \mathcal{L}_{rs}, \quad (3.29)$$

$$\mathcal{P} \equiv \frac{1}{8} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} (\alpha_{\mu\nu}^i \alpha_{\rho\sigma}^i - 2\alpha_{\mu\rho}^i \alpha_{\nu\sigma}^i) \mathcal{I}, \quad (3.30)$$

donde \mathcal{I} representa la matriz identidad de dimensión $d \times d$, podemos reescribir el Hamiltoniano efectivo como

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2g^{1/2}} (\partial_\mu - i\mathcal{A}_\mu) g^{\mu\nu} g^{1/2} (\partial_\nu - i\mathcal{A}_\nu) + \mathcal{P}. \quad (3.31)$$

La expresión (3.31) pone de manifiesto la estructura de norma del Hamiltoniano efectivo, el cual puede pensarse como el Hamiltoniano de una partícula sin espín en un espacio con métrica $g_{\mu\nu}$, en presencia de campos de norma de fondo $SO(p)$, y de un potencial geométrico inducido. Es importante enfatizar que los campos de norma estarán presentes solamente cuando la función de onda normal está en una representación no trivial de $SO(p)$. La física efectiva en M^m , gobernada por $\hat{\mathcal{H}}$, es invariante ante transformaciones de norma $SO(p)$ locales sobre las coordenadas normales. En particular, bajo la transformación

$$\hat{\mathbf{n}}^i \longrightarrow (\mathcal{R})^i_j \hat{\mathbf{n}}^j,$$

donde $\mathcal{R} = e^{i\theta_{ij} \tilde{\mathcal{L}}_{ij}}$ es un elemento de la representación vectorial de $SO(p)$, $\vec{\psi}(x)$, \mathcal{A}_μ y \mathcal{P} se transforman como:

$$\vec{\psi}(x) \longrightarrow \mathcal{V} \vec{\psi}(x), \quad (3.32)$$

$$\mathcal{A}_\mu \longrightarrow \mathcal{V} \mathcal{A}_\mu \mathcal{V}^T + \mathcal{V} \partial_\mu \mathcal{V}^T, \quad (3.33)$$

$$\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}, \quad (3.34)$$

donde $\mathcal{V} = e^{i\theta_{ij} \mathcal{L}_{ij}}$ es un elemento de la representación matricial de $SO(p)$ de dimensión d . De esta manera, podemos ver que la invariancia de V bajo rotaciones se traduce como invariancia de norma $SO(p)$ en la teoría efectiva sobre M^m .

3.2.2. Curvas encajadas en \mathbb{R}^3

Consideremos, en particular, una partícula restringida a moverse sobre una curva cerrada C , encajada en el espacio euclideo tridimensional \mathbb{R}^3 por $\mathbf{r} : C \rightarrow \mathbb{R}^3$.

En este caso, solamente hay un grado de libertad sobre la variedad, y por simplicidad elegimos la longitud de arco s como coordenada sobre M^1 , de tal manera que el único vector tangencial es $\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{r}'$, donde “ ’ ” $\equiv d/ds$. El espacio normal es bidimensional y para constuir el sistema de coordenadas adaptado, debemos elegir dos vectores ortogonales en cada punto sobre la curva. La elección más natural, consiste en los vectores normal y

binormal $\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{b}}$, definidos como:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\hat{\mathbf{t}}'}{|\hat{\mathbf{t}}'|}, \quad (3.35)$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}, \quad (3.36)$$

Nótese, sin embargo, que este marco de referencia sólo está definido para segmentos de la curva con curvatura distinta de cero, en los cuales la torsión puede definirse. En nuestro caso, consideraremos curvas cuya curvatura es distinta de cero en todos los puntos y por tanto, la construcción anterior permite definir un marco a lo largo de toda la curva. La triada de vectores $(\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}})$ satisface las relaciones de Frenet-Serret:

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{t}} \\ \hat{\mathbf{n}} \\ \hat{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{t}} \\ \hat{\mathbf{n}} \\ \hat{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

donde κ y τ son la curvatura y la torsión de la curva, respectivamente. De esta manera, la posición de la partícula en una vecindad de C puede escribirse como:

$$\mathbf{X}(s, a, b) = \mathbf{r}(s) + a\hat{\mathbf{n}}(s) + b\hat{\mathbf{b}}(s), \quad (3.38)$$

donde a y b son las coordenadas en las direcciones normal y binormal, respectivamente.

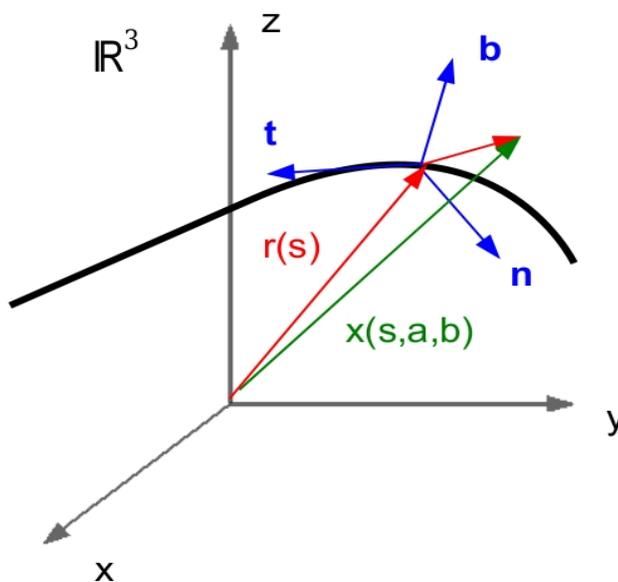


Figura 3.2: La posición de la partícula en el marco de referencia adaptado.

La métrica euclideana escrita en las coordenadas adaptadas es:

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} (1 - a\kappa)^2 + \tau^2(a^2 + b^2) & -b\tau & a\tau \\ & -b\tau & 1 & 0 \\ & a\tau & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

su determinante,

$$G = (1 - a\kappa)^2, \quad (3.40)$$

y su inversa,

$$G^{AB} = \frac{1}{G} \begin{pmatrix} 1 & & b\tau & a\tau \\ b\tau & (1 - a\kappa)^2 + b^2\tau^2 & & -ab\tau^2 \\ a\tau & -ab\tau^2 & & (1 - a\kappa)^2 + a^2\tau^2 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Entonces el Hamiltoniano transformado (3.22), en términos de las coordenadas transformadas $\alpha \rightarrow a/\eta$, $\beta \rightarrow b/\eta$, toma la forma siguiente¹:

$$H_{-2} = -\frac{1}{2}(\partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2) + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2), \quad (3.42)$$

$$H_0 = -\frac{1}{2}(\partial_s - i\tau L)^2 - \frac{1}{8}\kappa^2, \quad (3.43)$$

donde $L = i(\beta\partial_\alpha - \alpha\partial_\beta)$. El Hamiltoniano normal (3.42) es el de un oscilador armónico simétrico en dos dimensiones, y sus eigenfunciones y eigenvalores están dados por:

$$\chi_{n_1, n_2}(\alpha, \beta) = \chi_{n_1}(\alpha)\chi_{n_2}(\beta), \quad (3.44)$$

$$E_n = n + 1, \quad n = n_1 + n_2 = 0, 1, \dots, \quad (3.45)$$

con

$$\chi_n(x) = (2^n n!)^{-1/2} \pi^{-1/4} e^{-x^2/2} H_n(x),$$

donde $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite. Como podemos notar de las relaciones anteriores, hay $g_n = n + 1$ estados degenerados para el n -ésimo nivel de energía, y entonces la combinación lineal:

$$\Psi_n(\mathbf{s}) = \sum_{n_1} \psi_{n_1}(s) \chi_{n_1, n-n_1}(\alpha, \beta), \quad (3.46)$$

es una eigenfunción de H_{-2} con eigenvalor E_n . Por lo tanto, es posible elegir g_n combinaciones linealmente independientes de la forma (3.46) para construir una nueva base. Como se discute en el apéndice B, debido a que (3.43) depende de las variables normales únicamente a través de L , es conveniente elegir la base del espacio normal formada por los estados:

$$\chi_{nl}(\alpha, \beta) = \sum_{n_1=0}^n c_{n_1}^l \chi_{n_1, n-n_1}(\alpha, \beta), \quad (3.47)$$

tales que también sean eigenestados del generador de momento angular, *i.e.*,

$$L\chi_{nl} = l\chi_{nl}, \quad l = -n, -n + 2, \dots, n - 2, n,$$

¹También hemos fijado $\omega = 1$ por simplicidad.

lo cual es posible porque el Hamiltoniano normal H_{-2} conmuta con L . De esta forma, las eigenfunciones del Hamiltoniano transformado (3.22) pueden escribirse como

$$\Psi_n(\mathbf{s}) = \sum_l \psi_l(s) \chi_{nl}(\alpha, \beta), \quad (3.48)$$

el Hamiltoniano efectivo $\hat{\mathcal{H}}$ adquiere la siguiente representación diagonal,

$$\hat{\mathcal{H}}_{ll'} = \mathcal{H}_l \delta_{ll'}, \quad \mathcal{H}_l = -\frac{1}{2}(\partial_s - il\tau)^2 - \frac{1}{8}\kappa^2, \quad (3.49)$$

y la ecuación de Schrödinger efectiva (3.27) se reduce al conjunto de g_n ecuaciones (una para cada valor de l):

$$\mathcal{H}_l \psi_l(s) = \mathcal{E}_l \psi_l(s). \quad (3.50)$$

3.3. Fases geométricas de la partícula en la curva

Como se ha discutido en la sección anterior, la dinámica de la partícula contorneada puede ser descrita por el Hamiltoniano transformado (3.22) que depende de las propiedades de la curva sobre la cual se mueve, de manera que una partícula moviéndose en una curva cuya forma cambia de manera adiabática – tal que su encajamiento cambia con el tiempo $\mathbf{r}(s, t)$ – es un sistema cuyo Hamiltoniano depende de un conjunto de parámetros externos y, naturalmente, uno puede preguntarse si la función de onda de la partícula adquiere fase geométrica cuando estos cambios son cíclicos.

Para responder (afirmativamente) a la pregunta anterior es suficiente considerar curvas que corresponden a deformaciones infinitesimales² alrededor de un círculo de radio uno $\mathbf{R}(s)$, dadas por:

$$\mathbf{r}(s, t) = \mathbf{R}(s) + \epsilon \boldsymbol{\varphi}(s, t). \quad (3.51)$$

Para poder identificar puntos con el mismo valor de s sobre distintas curvas, consideraremos deformaciones del círculo que *preserven localmente la longitud de arco*, es decir, deformaciones que cumplan con:

$$\varphi^{t'} - \kappa \varphi^n = 0,$$

las cuales serán denominadas deformaciones LAP (*Local Arclength Preserving*), donde $(\varphi^t, \varphi^n, \varphi^b)$ son las coordenadas del vector $\boldsymbol{\varphi}$ en el marco de referencia adaptado a la curva deformada $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$, que puede escribirse en términos del marco adaptado al círculo $(\hat{T}, \hat{N}, \hat{B})$ a orden ϵ como:

$$\hat{t} = \hat{T} + \epsilon \left((\varphi^{n'} + \varphi^t) \hat{N} + \varphi^{b'} \hat{B} \right), \quad (3.52)$$

$$\hat{n} = \hat{N} + \epsilon \left(-(\varphi^{n'} + \varphi^t) \hat{T} + \varphi^{b''} \hat{B} \right), \quad (3.53)$$

$$\hat{b} = \hat{B} - \epsilon \left(\varphi^{b'} \hat{T} + \varphi^{b''} \hat{N} \right), \quad (3.54)$$

²Consideraremos deformaciones bajo las cuales el sistema de coordenadas adaptado se mantenga bien definido, para lo que tomaremos $\epsilon \ll \eta$.

Similarmente, la curvatura y la torsión toman la siguiente forma:

$$\kappa = 1 + \epsilon(\varphi^{n''} + \varphi^n), \quad (3.55)$$

$$\tau = \epsilon(\varphi^{b'''} + \varphi^{b'}). \quad (3.56)$$

Así, el Hamiltoniano efectivo (3.49) para una partícula restringida a moverse sobre la curva deformada, puede escribirse como:

$$\mathcal{H}_l = -\frac{1}{2} \left(\partial_s^2 + \frac{1}{4} \right) + \epsilon \left(il\tau_\epsilon \partial_s + \frac{i}{2} l\tau'_\epsilon - \frac{1}{4} \kappa_\epsilon \right) + O(\epsilon^2), \quad (3.57)$$

donde

$$\tau_\epsilon = \partial_\epsilon \tau|_{\epsilon=0}, \quad \kappa_\epsilon = \partial_\epsilon \kappa|_{\epsilon=0}.$$

A nosotros nos interesan solamente términos de orden ϵ .

Nótese que en este sistema el número de parámetros que aparecen en el Hamiltoniano es infinito y no numerable, pues la curva está definida por las funciones $\varphi^i(s)$. Sin embargo, ya que consideramos curvas suaves, podemos especificar alternativamente su forma en términos de modos de Fourier que, aunque infinitos, son numerables. Es decir, podemos sustituir:

$$\varphi^i(s, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{iks} \phi_k^i(t), \quad (3.58)$$

con $i = t, n, b$, en los términos de la curvatura y la torsión:

$$\kappa_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k (1 - k^2) e^{iks} \phi_k^n, \quad (3.59)$$

$$\tau_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k ik(1 - k^2) e^{iks} \phi_k^b, \quad (3.60)$$

que aparecen en la expresión del Hamiltoniano efectivo (3.57) y considerar ϕ_k^i , o alternativamente $\xi_k^i = \text{Re}(\phi_k^i)$ y $\zeta_k^i = \text{Im}(\phi_k^i)$, como los parámetros.

Pero antes notemos que para que el campo φ^i tome valores en \mathbb{R} , sus componentes de Fourier deben cumplir $\phi_{-k}^i = \phi_k^{i*}$, y que la condición LAP en términos de éstos queda a orden ϵ como: $\phi_k^n = ik\phi_k^t$, de modo que $\phi_0^n = 0$ necesariamente. Más aún, las deformaciones que contienen solamente componentes $\phi_{\pm 1}^n$, ϕ_0^t , $\phi_{\pm 1}^b$ o ϕ_0^b , corresponden a traslaciones en el plano $x-y$, rotaciones en el plano $x-y$, rotaciones alrededor de un vector en el plano $x-y$ o traslaciones en la dirección del eje z , respectivamente. Éstos son movimientos rígidos de la curva y, evidentemente, no cambian su geometría como puede verse en las expresiones (3.59) y (3.60). Por lo anterior, consideraremos deformaciones con $|k| > 1$. En virtud de que toda la información que el Hamiltoniano tiene de la curva es su curvatura y su torsión, entonces podemos concluir que el Hamiltoniano efectivo no sabe nada de movimientos rígidos³.

³Sin embargo, desde un marco de referencia cartesiano las coordenadas adaptadas cambian bajo estos movimientos rígidos de la curva y en principio podría esperarse que a través de dichos cambios se presentaran efectos dinámicos. Como se mostrara más adelante (ver en particular la expresión (3.76)) esta esto no pasa en la aproximación que estamos considerando.

Así, el Hamiltoniano efectivo puede escribirse de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}_t = \mathcal{H}_0 - \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \neq 0}^{\infty} (1 - k^2) \mathcal{H}_t^k(\phi), \quad (3.61)$$

con

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{1}{2} \left(\partial_s^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (3.62)$$

$$\mathcal{H}_t^k(\phi) = e^{iks} \left(\frac{lk}{2} \phi_k^b (2\partial_s + ik) + \frac{1}{4} \phi_k^n \right). \quad (3.63)$$

Por otro lado, las coordenadas adaptadas (s, α, β) que aparecen en el Hamiltoniano H_T dependen implícitamente de los parámetros que definen la curva, de manera que bajo un cambio adiabático en su forma, un punto con coordenadas adaptadas constantes, visto desde el marco de referencia euclideo, cambia con el tiempo. Consecuentemente, las eigenfunciones cuya forma se muestra en (3.48) dependen de los parámetros externos tanto de forma explícita (a través de κ y τ) como implícita. Lo anterior debe tenerse en cuenta al calcular la fase geométrica, y para ello hay dos acercamientos equivalentes que pueden seguirse. El punto de vista *tridimensional* reconoce la dependencia implícita de las coordenadas adaptadas en los parámetros, *i.e.*, la derivada parcial con respecto a los parámetros que aparece en (3.5) implica que las coordenadas cartesianas, y no las adaptadas, están fijas. El acercamiento *intrínseco*, por otro lado, consiste en transformar ambos lados de la ecuación de Schrödinger, en cuyo caso aparece un término en el lado izquierdo de la ecuación, proveniente de la derivada temporal, que corresponde precisamente al cambio implícito. Entonces, es posible definir un nuevo Hamiltoniano (modificado por este término), olvidarse de la dependencia implícita y trabajar únicamente con la parte de la nueva función de onda que depende explícitamente de los parámetros. A continuación discutimos los dos acercamientos.

3.3.1. Perspectiva tridimensional

La derivada con respecto al tiempo que aparece en la expresión (3.4) es una derivada total que se reduce a una derivada parcial, cuando los estados estacionarios instantáneos dependen del tiempo solamente a través de los parámetros externos, lo cual asume que las coordenadas mismas no cambian con el tiempo. Sin embargo, las coordenadas adaptadas $s^i = s^i(x; \phi(t))$ dependen del tiempo y por lo tanto, debemos considerarlo, esto es,

$$\frac{d}{dt} = \dot{\phi}_k^i \frac{\partial}{\partial \phi_k^i} + \mathbf{U}, \quad (3.64)$$

donde el operador

$$\mathbf{U} = \frac{\partial s}{\partial t} \partial_s + \frac{\partial \alpha}{\partial t} \partial_\alpha + \frac{\partial \beta}{\partial t} \partial_\beta,$$

toma en cuenta, precisamente, dicha dependencia. Para encontrar su forma explícita, notemos que un punto con coordenadas cartesianas fijas puede escribirse en el marco de referencia adaptado como $x^i = x^i(s; \phi)$. Derivando la expresión anterior con respecto a t ,

obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 = \left. \frac{\partial x^i}{\partial t} \right|_x &= \left. \frac{\partial x^i}{\partial s^j} \frac{\partial s^j}{\partial t} \right|_x + \left. \frac{\partial x^i}{\partial t} \right|_s \\ &= \Lambda_j^i U^j + V^i, \end{aligned}$$

y por tanto,

$$V^i = -\Lambda_j^i U^j. \quad (3.65)$$

Nótese que el índice i etiqueta coordenadas referidas a la base cartesiana, y por lo tanto que el término $(\Lambda U)^i$ representa las coordenadas de \mathbf{U} en esta misma base. Es decir, la matriz Λ que aparece en la expresión anterior efectúa el cambio de base. Entonces, vemos que la velocidad de un punto con coordenadas cartesianas fijas visto desde el marco adaptado es igual a menos la velocidad de un punto con coordenadas adaptadas fijas visto desde el marco cartesiano, *i.e.*, $\mathbf{V} = -\mathbf{U}$.

Así, podemos encontrar la forma explícita de \mathbf{U} calculando \mathbf{V} , lo cual es técnicamente más sencillo. La posición de un punto con coordenadas \mathbf{s} en una vecindad de la curva está dada por:

$$\mathbf{X}(\mathbf{s}; t') = \mathbf{r}(s, t') + \eta\alpha \hat{n}(s, t') + \eta\beta \hat{b}(s, t'), \quad (3.66)$$

y entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \partial_{t'} \mathbf{r} + \eta\alpha \partial_{t'} \hat{n} + \eta\beta \partial_{t'} \hat{b}, \\ &= \epsilon \left(\frac{1}{\eta} (\dot{\varphi}^n \partial_\alpha + \dot{\varphi}^b \partial_\beta) + (\dot{\varphi}^t \partial_s + i\dot{\varphi}^{b''} L) \right) + O(\eta, \epsilon^2), \end{aligned} \quad (3.67)$$

donde se ha hecho uso de (3.52)-(3.54) y de las relaciones:

$$\hat{T} = \partial_s, \quad \hat{N} = \partial_a = \frac{1}{\eta} \partial_\alpha, \quad \hat{B} = \partial_b = \frac{1}{\eta} \partial_\beta.$$

Por lo tanto, encontramos (a $O(\eta, \epsilon^2)$):

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= -\epsilon \left(\frac{1}{\eta} (\dot{\varphi}^n \partial_\alpha + \dot{\varphi}^b \partial_\beta) + (\dot{\varphi}^t \partial_s + i\dot{\varphi}^{b''} L) \right), \\ &= -\frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \neq 0} e^{iks} \left(\frac{1}{\eta} (\dot{\phi}_k^n \partial_\alpha + \dot{\phi}_k^b \partial_\beta) + (\dot{\phi}_k^t \partial_s - ik^2 \dot{\phi}_k^b L) \right). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Por otra parte, hemos encontrado que las eigenfunciones del Hamiltoniano de la partícula restringida a moverse sobre la curva (3.51) tienen la forma:

$$\Psi_n(\mathbf{s}) = \sum_l \psi_l(s) \chi_{nl}(\alpha, \beta). \quad (3.69)$$

Para determinar la parte tangencial ψ_l tenemos que resolver la ecuación:

$$\mathcal{H}_l \psi_l = \mathcal{E}_l \psi_l,$$

con \mathcal{H}_l definido por las expresiones (3.61)-(3.63). El problema de eigenvalores anterior puede tratarse en el marco de teoría de perturbaciones. Por simplicidad consideraremos el estado base, que es el único que es no-degenerado. El término dominante de la curvatura de Berry es de orden ϵ^2 , y en principio sería necesario calcular los eigenestados efectivos al mismo orden, pero como se muestra en el apéndice D, el término de segundo orden de la curvatura está completamente determinado por el eigenestado a orden ϵ . Entonces, la eigenfunción del Hamiltoniano efectivo toma la forma:

$$\psi_l(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \neq 0} \frac{1-k^2}{2k^2} \left(\phi_k^n + 2ilk^2 \phi_k^b \right) e^{iks} \right) + O(\epsilon^2), \quad (3.70)$$

y los eigenvalores de H_T :

$$\tilde{E}_{nl} = \frac{n+1}{\eta^2} - \frac{1}{8}. \quad (3.71)$$

Por lo tanto, los $n+1$ estados:

$$\Psi_{nl}(s, \alpha, \beta) = \chi_{nl}(\alpha, \beta) \psi_l(s), \quad (3.72)$$

son degenerados. Sin embargo, desde el punto de vista tridimensional, las funciones de onda son las funciones $\Phi_{nl} = |G|^{-1/4} \Psi_{nl}$, donde $|G|$ depende de las coordenadas adaptadas. Algo similar ocurre con la medida tridimensional. Es decir, la conexión de Wilczek-Zee tridimensional para el n -ésimo estado, es una matriz cuadrada de dimensión $n+1$, con entradas:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ll'} &= i \langle \Phi_{nl} | \frac{d}{dt} | \Phi_{nl'} \rangle^{(3)} dt, \\ &= i \int d^3s \left(|G|^{1/4} \Psi_{nl}^* \right) \frac{d}{dt} \left(|G|^{-1/4} \Psi_{nl'} \right) dt, \\ &= i \int d^3s \Psi_{nl}^* \frac{d\Psi_{nl'}}{dt} dt + i \int d^3s \Psi_{nl}^* \Psi_{nl'} \left(|G|^{1/4} \frac{d|G|^{-1/4}}{dt} \right) dt, \end{aligned}$$

donde el superíndice (3) que aparece en la primera línea significa que el producto interno es el tridimensional. Se puede mostrar que:

$$|G|^{1/4} \frac{d|G|^{-1/4}}{dt} \approx -\frac{\epsilon}{2} \dot{\phi}^n,$$

y entonces podemos escribir:

$$\mathcal{A}_{ll'} = i \langle \Psi_{nl} | \frac{d}{dt} | \Psi_{nl'} \rangle dt, \quad (3.73)$$

$$= i \langle \Psi_{nl} | \partial_i^k | \Psi_{nl'} \rangle d\phi_k^i + i \langle \Psi_{nl} | \mathbf{U} - \frac{\epsilon}{2} \dot{\phi}^n | \Psi_{nl'} \rangle dt, \quad (3.74)$$

donde $\partial_i^k = \partial / \partial \phi_k^i$ y se ha utilizado la relación (3.64). Debido a que las eigenfunciones normales χ están normalizadas y no dependen explícitamente de los parámetros, las componentes del primer término en la expresión anterior se reducen a:

$$\langle \Psi_{nl} | \partial_i^k | \Psi_{nl'} \rangle = \delta_{ll'} \langle \psi_l | \partial_i^k | \psi_{l'} \rangle. \quad (3.75)$$

De manera similar, el segundo término puede escribirse como:

$$\mathcal{U}_{ll'} = \langle \Psi_{nl} | \mathbf{U} - \frac{\epsilon}{2} \dot{\phi}^n | \Psi_{nl'} \rangle = \frac{1}{\eta} \langle \Psi_{nl} | \mathbf{U}_{-1} | \Psi_{nl'} \rangle + \langle \Psi_{nl} | \mathbf{U}_0 - \frac{\epsilon}{2} \dot{\phi}^n | \Psi_{nl'} \rangle,$$

pero en virtud de las relaciones (B.20), el primer término se anula. Además, \mathbf{U}_0 es diagonal en la base formada por los estados χ_{nl} y, más aún, puede escribirse como la derivada exterior de una función, esto es,

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{nl} | \mathbf{U}_0 - \frac{\epsilon}{2} \dot{\phi}^n | \Psi_{nl'} \rangle dt &= -\frac{\delta_{ll'} \epsilon}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \neq 0} \left(\langle \psi_l | e^{iks} \partial_s | \psi_l \rangle d\phi_k^t - \langle \psi_l | e^{iks} | \psi_l \rangle (d\phi_k^n + ik^2 l d\phi_k^b) \right), \\ &= i l \delta_{ll'} \frac{\epsilon^2}{2\pi} \sum_{k \neq 0} (1 - k^2) \left(\phi_k^{b*} d\phi_k^n + \phi_k^{n*} d\phi_k^b \right), \\ &= i l \delta_{ll'} \frac{\epsilon^2}{2\pi} \sum_{k=2}^{\infty} (1 - k^2) d(\phi_k^{n*} \phi_k^b + \phi_k^{b*} \phi_k^n), \end{aligned} \quad (3.76)$$

donde se ha usado la condición LAP $ikd\phi_k^t = d\phi_k^n$ para pasar de la primera a la segunda línea. Por lo cual, el segundo término de la conexión (3.74) no contribuye a la curvatura y, consecuentemente, no produce una fase geométrica.

Ahora, ya que la conexión (3.74) es una matriz diagonal, el operador unitario de Wilczek-Zee definido por la expresión (3.9) se reduce en nuestro caso a una matriz diagonal, cuyas entradas son las exponenciales de la fase geométrica asociada con cada estado degenerado. La fase geométrica adquirida por el l -ésimo estado degenerado puede escribirse como la integral de la 2-forma de curvatura:

$$\mathcal{K}_{nl} = -\frac{l\epsilon^2}{2\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1 - k^2)^2}{2k^2} \left(d\phi_k^{n*} \wedge d\phi_k^b + d\phi_k^n \wedge d\phi_k^{b*} \right), \quad (3.77)$$

o equivalentemente,

$$\mathcal{K}_{nl} = -\frac{l\epsilon^2}{2\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1 - k^2)^2}{k^2} \left(d\xi_k^n \wedge d\xi_k^b + d\zeta_k^n \wedge d\zeta_k^b \right). \quad (3.78)$$

Nótese que las entradas de la curvatura dependen linealmente de l , por lo que la fase geométrica que adquiere cada estado degenerado es diferente.

Consideremos, por ejemplo, el nivel de energía correspondiente a $n = 1$, para el cual hay dos estados degenerados, *i.e.*, $l = \pm 1$. Asumiendo que inicialmente el estado del sistema es

$$\Psi_1(\mathbf{s}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_+ + \chi_-) = \chi_{1,0}, \quad (3.79)$$

que corresponde al estado mostrado en la expresión (3.44) con $n_1 = 1$ y $n_2 = 0$, es decir, es una excitación en la dirección del eje \hat{n} . La densidad de probabilidad asociada con el estado (3.79) se muestra en la Fig. (3.3).

Supongamos que la curva es deformada adiabáticamente a lo largo del círculo Γ en el plano $\xi_2^n - \xi_2^b$: $\xi_2^n = 1 - \cos \lambda t$, $\xi_2^b = \sin \lambda t$, lo cual corresponde a la secuencia en la forma de la

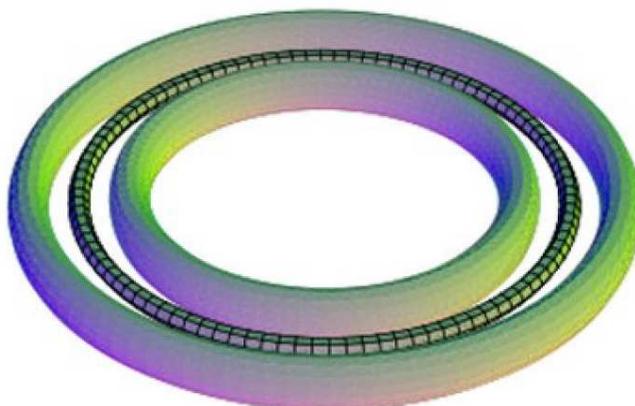


Figura 3.3: Gráfica de la superficie de densidad de probabilidad constante para el estado χ_{10} , correspondiente a una sola excitación en la dirección de \hat{n} del oscilador armónico en el plano normal a la curva.

curva mostrada en la Fig. (3.5), con $\lambda \ll 1$. De acuerdo con el análisis anterior, el estado del sistema a tiempo $t = T = 2\pi/\lambda$ es:

$$\Psi_1(\mathbf{s}, T) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iE_{10}T} \left(e^{-9i\epsilon^2/4} \chi_+ + e^{9i\epsilon^2/4} \chi_- \right). \quad (3.80)$$

Entonces, la deformación con $k = 2$ produce una fase relativa entre estados con distinto valor de l , que es detectable físicamente. Aún más, después de un tiempo MT la fase relativa será $\Delta\gamma = 9M\epsilon^2/2$, de modo que para $M = 2\pi/9\epsilon^2$ el estado del sistema será:

$$\Psi_1(\mathbf{s}, MT) = -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{-iE_{10}T} (\chi_+ - \chi_-) = \chi_{0,1}, \quad (3.81)$$

el cual corresponde (módulo una fase global) al estado definido en (3.44) con $n_1 = 0$ y $n_2 = 1$, *i.e.*, una excitación a lo largo del eje \hat{b} , (ver Fig. (3.4)).

Así, concluimos que las deformaciones cíclicas en la forma de la curva, en general, producen cambios físicos en la función de onda de la partícula.

Similarmente, cuando la deformación ocurre en el plano $\zeta_2^n - \zeta_2^b$, a lo largo del círculo $\zeta_2^n = 1 - \cos \lambda t$, $\zeta_2^b = \sin \lambda t$ en el espacio de parámetros, el mismo efecto se presenta. La secuencia de la deformación periódica anterior se muestra en la Fig. (3.6).

3.3.2. Perspectiva intrínseca

Consideremos la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo – transformada – escrita en las coordenadas adaptadas \mathbf{s} definidas como:

$$s^i = s^i(x; \phi(t)), \quad (3.82)$$

$$t' = t. \quad (3.83)$$

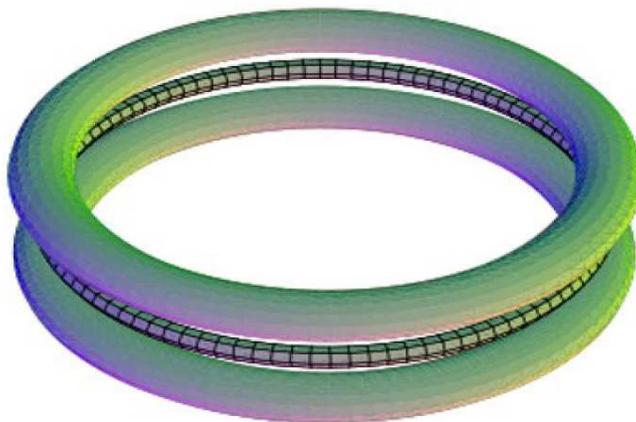


Figura 3.4: Gráfica de la superficie de densidad de probabilidad constante para el estado χ_{01} , correspondiente a una sola excitación en la dirección de b del oscilador armónico en el plano normal a la curva.

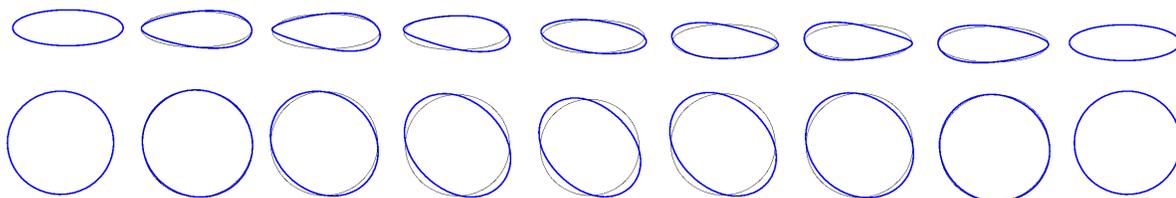


Figura 3.5: Secuencia de la forma de la curva correspondiente a la deformación del círculo en el plano x - y producida por $\xi_2^n = 1 - \cos(t\pi/4)$, $\xi_2^b = \sin(t\pi/4)$, con $t = 0, 1, \dots, 8$. En la primer línea se muestra la forma de la curva para cada valor de los parámetros vista desde un punto genérico, mientras que en la segunda se muestra la misma configuración de la curva vista desde un punto en el eje z .

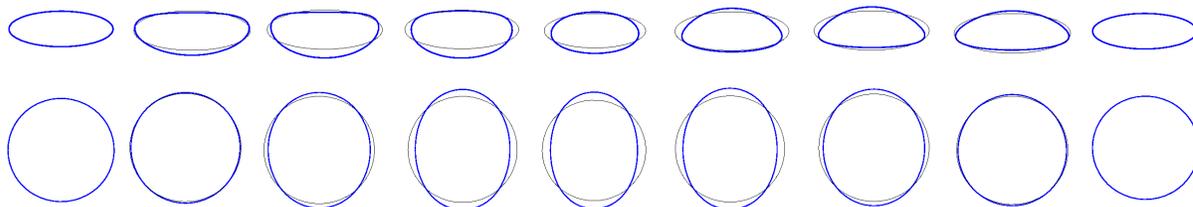


Figura 3.6: Secuencia de la forma de la curva correspondiente a la deformación del círculo en el plano x - y producida por $\zeta_2^n = 1 - \cos(t\pi/4)$, $\zeta_2^b = \sin(t\pi/4)$, con $t = 0, 1, \dots, 8$. En la primer línea se muestra la forma de la curva para cada valor de los parámetros vista desde un punto genérico, mientras que en la segunda se muestra la misma configuración de la curva vista desde un punto en el eje z .

El lado derecho de dicha ecuación, como se ha mostrado, toma la forma (3.22) mientras que el lado izquierdo transforma de la siguiente manera:

$$i\tilde{\partial}_t\Psi = i\left(\tilde{\partial}_{t'} + \tilde{\mathbf{U}}\right)\Psi, \quad (3.84)$$

donde $\tilde{O} \equiv |G|^{1/4}O|G|^{-1/4}$ representa el operador O transformado. Se puede mostrar que

$$\tilde{\partial}_{t'} = \partial_{t'} + O(\eta),$$

y así, la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo transformada en coordenadas adaptadas puede escribirse como:

$$i\partial_{t'}\Psi = \left(H_T - i\tilde{\mathbf{U}}\right)\Psi. \quad (3.85)$$

Considerando las expresiones para el determinante de la métrica (3.40) y para \mathbf{V} mostrada en (3.67), el operador $\tilde{\mathbf{U}}$ toma la siguiente forma⁴:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \frac{-\epsilon}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \neq 0} e^{iks} \left[\frac{1}{\eta} \left(\dot{\phi}_k^n \partial_\alpha + \dot{\phi}_k^b \partial_\beta \right) + \left(\dot{\phi}_k^t \partial_s - ik^2 \dot{\phi}_k^b L + \frac{1}{2} \dot{\phi}_k^n \right) \right]. \quad (3.86)$$

Así, la ecuación (3.85) puede escribirse como:

$$i\partial_{t'}\Psi = H_T^U(\phi, \dot{\phi})\Psi. \quad (3.87)$$

Entonces, la dinámica de la partícula restringida a moverse sobre la curva, descrita en el marco de referencia adaptado, está gobernada por un Hamiltoniano que depende tanto de ϕ como de $\dot{\phi}$. Por lo tanto, el espacio de parámetros \mathbb{M}_U , en este caso, es el haz tangente TM .

Debido a que el término dominante del Hamiltoniano modificado es, al igual que en el caso tridimensional, el de un oscilador armónico bidimensional, es posible escribir sus eigenfunciones modificadas como:

$$\Psi_n^U(\mathbf{s}; \phi, \dot{\phi}) = \sum_l \chi_{nl}(\alpha, \beta) \psi_l^U(s; \phi, \dot{\phi}).$$

Asimismo, la escala de energía asociada con los grados de libertad normales es de orden η^{-2} , y tanto la corrección tangencial a la energía como la parte tangencial de la eigenfunción están determinadas por la ecuación:

$$\mathcal{H}_l^U \psi_l^U = \mathcal{E}_l^U \psi_l^U, \quad (3.88)$$

⁴A lo largo de la subsección, al igual que en la anterior, se despreciarán términos de orden ϵ^2 en la expansión del Hamiltoniano y sus eigenestados. Esto, sin embargo, determina la fase geométrica a $O(\epsilon^2)$, (vease apéndice D).

donde

$$\mathcal{H}_{l'U}^U = \langle \chi_{nl} | H_0 - i\tilde{U} | \chi_{nl'} \rangle, \quad (3.89)$$

$$= \delta_{l'l} \left(\mathcal{H}_l + \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \neq 0}^{\infty} e^{iks} \left(\frac{1}{2k} \dot{\phi}_k^n (2\partial_s + ik) + lk^2 \dot{\phi}_k^b \right) \right), \quad (3.90)$$

con \mathcal{H}_l definido por la expresión (3.61). Las eigenfunciones y eigenvalores de \mathcal{H}_l^U correspondientes al estado tangencial base, están dados por:

$$\psi_l^U = \psi_l - \frac{\epsilon}{2\pi} \sum_{k \neq 0}^{\infty} e^{iks} \left(\frac{i}{k^2} \dot{\phi}_k^n + 2l \dot{\phi}_k^b \right), \quad (3.91)$$

$$\mathcal{E}_{nl0}^U = \mathcal{E}_{nl0} = -\frac{1}{8}, \quad (3.92)$$

donde la forma explícita de ψ se muestra en (3.70). Por lo cual, hay $n + 1$ eigenestados asociados con el eigenvalor \tilde{E}_{nl}^U , al igual que con \tilde{E}_{nl} .

Entonces, la 1-forma de conexión asociada con el eigenestado instantáneo modificado Ψ_n^U es una matriz diagonal (debido a que los estados χ son ortonormales y no dependen explícitamente de los parámetros) con entradas:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{nl}^U = \frac{\epsilon^2}{2\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \left[\right. & \frac{1-k^2}{2k^4} \left(\phi_k^{n*} d\dot{\phi}_k^n + \phi_k^n d\dot{\phi}_k^{n*} - \dot{\phi}_k^{n*} d\phi_k^n - \dot{\phi}_k^n d\phi_k^{n*} \right) \\ & + \frac{2l}{k^2} \left(\dot{\phi}_k^{n*} d\dot{\phi}_k^b + \dot{\phi}_k^n d\dot{\phi}_k^{b*} - \dot{\phi}_k^{b*} d\dot{\phi}_k^n - \dot{\phi}_k^b d\dot{\phi}_k^{n*} \right) \\ & + l^2(1-k^2) \left(\dot{\phi}_k^{b*} d\phi_k^b + \dot{\phi}_k^b d\phi_k^{b*} - \phi_k^{b*} d\dot{\phi}_k^b - \phi_k^b d\dot{\phi}_k^{b*} \right) \\ & \left. + \frac{l(1-k^2)^2}{4k^2} \left(\phi_k^b d\phi_k^{n*} + \phi_k^{b*} d\phi_k^n - \phi_k^n d\phi_k^{b*} - \phi_k^{n*} d\phi_k^b \right) \right], \quad (3.93) \end{aligned}$$

donde se han omitido los términos que pueden ser agrupados en una 1-forma exacta, ya que no contribuyen a la fase geométrica. El último término dentro de la sumatoria corresponde a la conexión en el caso tridimensional que produce la curvatura mostrada en la relación (3.77). Equivalentemente, podemos escribir la parte relevante de la expresión anterior en términos de las partes real e imaginaria de los parámetros como:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{nl}^U = \frac{\epsilon^2}{2\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \left[\right. & \frac{1-k^2}{k^4} \left(\xi_k^n d\dot{\xi}_k^n - \dot{\xi}_k^n d\xi_k^n \right) + 2l^2(1-k^2) \left(\dot{\xi}_k^b d\xi_k^b - \xi_k^b d\dot{\xi}_k^b \right) \\ & \left. + \frac{2l}{k^2} \left(\dot{\xi}_k^n d\dot{\xi}_k^b - \dot{\xi}_k^b d\dot{\xi}_k^n \right) + \frac{l(1-k^2)^2}{2k^2} \left(\xi_k^b d\xi_k^n - \xi_k^n d\xi_k^b \right) \right] + (\xi \rightarrow \zeta). \quad (3.94) \end{aligned}$$

La expresión $(\xi \rightarrow \zeta)$ que aparece arriba representa una sumatoria, similar a la primera, con los ξ s reemplazados por ζ s.

La 2-forma de curvatura asociada con la conexión (3.93) tiene las siguientes componentes

distintas de cero:

$$\mathcal{K}_{n_k^* \dot{n}_k} = \mathcal{K}_{n_k \dot{n}_k^*} = \frac{\epsilon^2}{2\pi} \frac{1-k^2}{k^4}, \quad (3.95)$$

$$\mathcal{K}_{b_k^* \dot{b}_k} = \mathcal{K}_{b_k \dot{b}_k^*} = \frac{-l^2 \epsilon^2}{2\pi} 2(1-k^2), \quad (3.96)$$

$$\mathcal{K}_{\dot{n}_k^* \dot{b}_k} = \mathcal{K}_{\dot{n}_k \dot{b}_k^*} = \frac{l\epsilon^2}{2\pi} \frac{2}{k^2}, \quad (3.97)$$

$$\mathcal{K}_{n_k^* b_k} = \mathcal{K}_{n_k b_k^*} = \frac{-l\epsilon^2}{2\pi} \frac{(1-k^2)^2}{2k^2}. \quad (3.98)$$

Es decir, el espacio de parámetros extendido tiene curvatura con componentes no nulas en los planos $\phi_k^{n^*}-\dot{\phi}_k^n$, $\phi_k^{b^*}-\dot{\phi}_k^b$ y $\dot{\phi}_k^{n^*}-\dot{\phi}_k^n$, además de la componente $\phi_k^{n^*}-\phi_k^b$. No obstante, no todas las trayectorias en el espacio de parámetros generan deformaciones físicas del círculo, pues $\dot{\phi}$ y ϕ no son independientes. Desde el punto de vista físico, las deformaciones relevantes son aquellas descritas por curvas en $T\mathbb{M}$ tales que – en cada punto – se cumple $\dot{\phi} = d\phi/dt'$.

En particular, consideremos la misma deformación de la curva que analizamos en la subsección 3.3.1, la cual es producida – en este caso – por la trayectoria Γ_U : $\xi_k^n = \delta_{k2}(1 - \cos \lambda t')$, $\xi_k^b = \delta_{k2} \sin \lambda t'$, $\dot{\xi}_k^n = \delta_{k2} \lambda \sin \lambda t'$, $\dot{\xi}_k^b = \delta_{k2} \lambda \cos \lambda t'$, $\zeta_k^i = 0$ y $\dot{\zeta}_k^i = 0$, con $i = n, b$, donde se ha usado t' para parametrizar Γ_U intencionalmente por razones que serán explicadas más adelante.

Después de un periodo T , la fase “geométrica” acumulada por el estado Ψ_{nl}^U , está dada por:

$$\gamma_{nl}^U(T) = \int_{\Gamma_U} \mathcal{A}_{nl}^U(t') dt' = -\frac{9l\epsilon^2}{4} + O(\lambda, \epsilon^2). \quad (3.99)$$

Los términos de orden λ que aparecen en la expresión mostrada arriba dependen de la rapidez con la que la deformación ocurre, y por definición no pueden ser parte de la fase geométrica. La razón por la que esto pasa es que el operador que produce la evolución en t' no es el Hamiltoniano y, consecuentemente, sus eigenvalores tampoco son los valores propios de la energía. Esto es, en el límite adiabático, la ecuación (3.85) con condiciones iniciales $\Psi^U(\mathbf{s}, 0) = \Psi_{nl}^U = \chi_{nl} \psi_l^U$, tiene solución:

$$\Psi^U(\mathbf{s}, t) = \exp[-i(\delta_{nl}^U - \gamma_{nl}^U)] \Psi_{nl}^U,$$

con

$$\delta_{nl}^U - \delta_{nl} = \int_0^{t'} (\tilde{E}_{nl}^U - \tilde{E}_{nl}) dt' = O(\epsilon^2),$$

de manera tal que la contribución de orden λ a la fase γ^U compensa esta diferencia. En el apéndice C y en [21] se discute detalladamente lo anterior.

Capítulo 4

Fases geométricas y teoría de campos efectiva no-conmutativa

Un escenario genérico en el que pueden encontrarse “operadores de posición no-conmutativos” de forma natural es la descripción efectiva de (una clase de) sistemas compuestos que exhiben dos escalas de energía, cuya separación es considerablemente grande. Esto es, sistemas compuestos por una parte “lenta” que está asociada con la escala de energía inferior, y una “rápida” que está asociada con la superior. Así, los grados de libertad (g.d.l.) lentos (ó pesados) cambian con el tiempo mucho más lentamente de manera relativa que aquellos (ligeros) de la parte rápida. De esta manera, se presentan dos escalas temporales características del sistema:

- Para periodos “**cortos**”, los grados de libertad lentos prácticamente no cambian - y por tanto, pueden ser considerados como parámetros externos sin dinámica. Nótese que dentro de estas escalas temporales, este tipo de sistemas encaja perfectamente en los que presentan fases de Berry, discutidos en la sección 3.1.
- Para periodos “**largos**”, los grados rápidos siguen a los lentos adiabáticamente, pues han tenido suficiente tiempo para alcanzar el equilibrio.

Para estados del sistema correspondientes a excitaciones bajas de energía, los cambios relevantes ocurren en tiempos del orden de la escala temporal larga, por lo cual, los grados rápidos pueden ser integrados para dar lugar a un Hamiltoniano efectivo que determina la dinámica de los grados de libertad lentos, el cual es definido, mediante la aproximación adiabática, en términos de variables efectivas que satisfacen relaciones de conmutación modificadas (ver por ejemplo [9]). El objeto relevante que determina la estructura del Hamiltoniano efectivo, es el tensor cuántico geométrico:

$$T_{ij} = \langle \partial_i n | (1 - |n\rangle\langle n|) | \partial_j n \rangle, \quad (4.1)$$

donde $|n\rangle$ es el n -ésimo eigenestado del subsistema rápido y ∂_i es la derivada parcial con respecto a la coordenada X_i del subsistema lento.

El sistema arquetípico que puede ser tratado bajo este esquema es una molécula en la aproximación de Born-Oppenheimer, donde los grados de libertad lentos corresponden a

los del núcleo, mientras que los rápidos a los de los electrones. En este caso el parámetro adiabático que determina la separación entre la parte rápida y lenta es $(m_e/m_n)^{1/4}$ [42]. Debido a que la diferencia entre niveles de energía electrónicos es usualmente mucho mayor que la separación entre los niveles asociados con los modos vibracionales y rotacionales de los núcleos, es posible describir estados de baja energía por un Hamiltoniano efectivo que depende de manera explícita solamente de los grados de libertad nucleares.

Para mostrar lo anterior, consideremos un Hamiltoniano general para un sistema no relativista acoplado:

$$H_{tot} = \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} P_i P_j + H(\xi, X), \quad (4.2)$$

en donde Q_{ij} es el tensor de masa inverso, X_i y P_i son la posición y el momento del sistema pesado, respectivamente, y ξ son las variables dinámicas del sistema ligero. En el *Hamiltoniano instantáneo* $H(\xi, X)$, con eigenestados $|n(X)\rangle$ y eigenvalores instantáneos $E_n(X)$, X_i pueden pensarse como parámetros externos. En la aproximación adiabática, el estado del sistema completo, en la representación de las posiciones, puede escribirse de la siguiente manera:

$$\langle X | \Psi \rangle \approx \Psi_{lento}(X) |n(X)\rangle, \quad (4.3)$$

y se puede considerar que la función de onda del sistema pesado Ψ_{lento} evoluciona de acuerdo con la dinámica impuesta por el Hamiltoniano efectivo:

$$H_{ef} = \langle n(X) | H_{tot} | n(X) \rangle.$$

Aunque las variables del sistema rápido ξ no aparecen explícitamente en el Hamiltoniano efectivo, el sistema pesado se ve afectado por el ligero a través de la acción de P_i en los X 's que aparecen en los $|n\rangle$ como parámetros externos. La forma explícita del Hamiltoniano efectivo es:

$$H_{ef} = \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j + \Phi(X) + E_n(X), \quad (4.4)$$

donde $\mathcal{P}_i = P_i - A_i(X)$ son los *momentos covariantes*, con

$$A_i = i \langle n | \partial_i n \rangle, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial X_i}, \quad (4.5)$$

y Φ es el potencial geométrico (o escalar) dado por:

$$\Phi(X) = \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} g_{ij}, \quad g_{ij} = \text{Re } T_{ij}. \quad (4.6)$$

Es interesante notar que los efectos físicos del potencial vectorial A_i , dependen del campo “magnético”:

$$K_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = \text{Im } T_{ij}, \quad (4.7)$$

en particular, los conmutadores entre las componentes de los momentos covariantes están dados por

$$[\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j] = i K_{ij}.$$

Como es bien sabido, el potencial de norma A_i y las componentes K_{ij} , en la aproximación de Born-Oppenheimer, pueden ser interpretados como la conexión y la 2-forma de curvatura asociadas con la fase geométrica que adquiere la función de onda de los electrones bajo un cambio adiabático en la posición del núcleo, respectivamente (ver [41], [37]).

Ahora, supongamos que no solamente la posición del sistema pesado entra en el Hamiltoniano instantáneo como un parámetro externo, sino también sus momentos conjugados. De esta manera, podría esperarse que los eigenestados instantáneos del sistema ligero dependieran de los momentos, y consecuentemente que X_i fuera reemplazada en el Hamiltoniano efectivo por una “posición covariante”, cuyos conmutadores podrían ser distintos de cero. En este caso el espacio de parámetros es no-conmutativo y por lo tanto sus coordenadas (X_i, P_i) no pueden tratarse como parámetros clásicos, lo cual impide definir “curvas” e introduce problemas de ordenamiento de las expresiones para los eigenestados instantáneos del sistema ligero. Sin embargo, podemos considerar la aproximación semiclásica, *i.e.*, conservar solamente términos de orden \hbar . Debido a que los conmutadores entre las variables covariantes ya son de $O(\hbar)$, entonces es posible tratar a X y P como parámetros clásicos en nuestra descripción efectiva. Nótese que el Hamiltoniano de la discusión de la subsección 3.3.2, depende tanto de las coordenadas de un campo externo como de sus derivadas temporales (que, como se mostrará más adelante, son proporcionales a sus momentos conjugados).

4.1. Un oscilador armónico acoplado a un espín: un ejemplo

Con el objetivo de justificar la esperanza de encontrar esta no-conmutatividad entre operadores de posición covariantes, y formalizar las ideas discutidas en los párrafos anteriores, consideraremos primeramente un sistema sencillo (introducido por Berry [9]). Su relevancia desde el punto de vista físico no es claro, de modo que la discusión que se presenta a continuación tiene fines ilustrativos, únicamente.

4.1.1. Momentos covariantes

El sistema que queremos considerar es el espín σ de una partícula (“ligera”) acoplado a la posición de un oscilador armónico tridimensional (“pesado”) a través de un potencial del tipo $h = \lambda \sigma \cdot \mathbf{X}$, de modo que el Hamiltoniano del sistema es:

$$H_X = \frac{1}{2} (\mathbf{P}^2 + \mathbf{X}^2) + h(\sigma, \mathbf{X}), \quad (4.8)$$

donde λ es una constante, σ son las matrices de Pauli, y hemos tomado la masa y la frecuencia del oscilador igual a uno. Consideramos el caso particular en el que la partícula tiene espín $1/2$. La parte del Hamiltoniano correspondiente al espín puede pensarse como un espín acoplado a un “campo magnético”, en donde la posición del oscilador juega el papel del campo magnético.

En el límite adiabático, podemos asumir que el estado del sistema puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\langle X | \Psi \rangle \approx \Psi_{\text{osc}}(X) |n(\mathbf{X})\rangle, \quad (4.9)$$

donde

$$h(\sigma, \mathbf{X})|n(\mathbf{X})\rangle = E_n(\mathbf{X})|n(\mathbf{X})\rangle = n\lambda R|n(\mathbf{X})\rangle, \quad (4.10)$$

con $n = \pm 1$ y $R = |\mathbf{X}|$. Los eigenestados instantáneos de h pueden ser escritos explícitamente como:

$$|n(\mathbf{X})\rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{-in\phi/2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{in\phi/2} |-\rangle, \quad (4.11)$$

donde $|\pm\rangle$ son los eigenestados de σ_z , mientras que θ y ϕ son los ángulos polar y azimutal que definen la dirección de $\hat{\mathbf{X}}$, respectivamente. Así, suponiendo que el estado del espín corresponde a $n = 1$, el Hamiltoniano efectivo queda:

$$H_{ef}(X, \mathcal{P}) = \frac{1}{2}(\mathcal{P}^2 + \mathbf{X}^2) + \lambda R + \Phi(X), \quad (4.12)$$

donde $\mathcal{P} = \mathbf{P} - \mathbf{A}$, con

$$\mathbf{A} = \frac{Z}{R(X^2 + Y^2)} (-Y, X, 0), \quad \Phi(X) = \frac{1}{4R^2}. \quad (4.13)$$

Y entonces, los conmutadores entre los nuevos momentos están dados por:

$$[\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y] = -\frac{iZ}{2R^3}, \quad (4.14)$$

$$[\mathcal{P}_Y, \mathcal{P}_Z] = -\frac{iX}{2R^3}, \quad (4.15)$$

$$[\mathcal{P}_Z, \mathcal{P}_X] = -\frac{iY}{2R^3}. \quad (4.16)$$

Considerando nuevamente la analogía que hicimos entre nuestro sistema y un espín en un campo magnético, podemos asociar el potencial vectorial que se muestra en (4.13) con un campo magnético $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ cuya forma es:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2R^3} (X, Y, Z),$$

el cual corresponde al campo magnético producido por un monopolo magnético en el origen.

Es decir, en la aproximación adiabática el estado del espín se mantiene en el eigenestado instantáneo correspondiente al eigenestado en el que comenzó, en tanto que el estado del oscilador obedece la dinámica impuesta por un Hamiltoniano efectivo, que tiene la forma del Hamiltoniano de una partícula cargada eléctricamente en el campo electromagnético producido por un monopolo magnético más los potenciales $\lambda R + \phi(X)$. En este caso, los conmutadores entre las componentes de sus momentos covariantes están dados por las componentes de la 2-forma de curvatura de Berry, o bien, siguiendo con la analogía, por las componentes espaciales del “tensor electromagnético” asociado con el monopolo.

4.1.2. Posición covariante

Consideremos ahora el caso en el que el Hamiltoniano total es:

$$H_P = \frac{1}{2} (\mathbf{P}^2 + \mathbf{X}^2) + h(\sigma, \mathbf{P}), \quad (4.17)$$

con $h(\sigma, \mathbf{P}) = \tilde{\lambda} \sigma \cdot \mathbf{P}$. De manera similar a la subsección anterior, podemos calcular el Hamiltoniano efectivo del oscilador cuando el estado del espín es:

$$|n(\mathbf{P})\rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} |-\rangle.$$

Los ángulos que aparecen en la expresión mostrada arriba, en este caso definen la dirección del vector \mathbf{P} . El Hamiltoniano efectivo toma la siguiente forma:

$$H_{ef}(\mathcal{X}, P) = \frac{1}{2} (\mathbf{P}^2 + \mathcal{X}^2) + \tilde{\lambda} P + \Phi(P), \quad (4.18)$$

donde $P = |\mathbf{P}|$, $\mathcal{X} = \mathbf{X} + \tilde{\mathbf{A}}$ es el operador de *posición covariante* y

$$\tilde{A}_i = i \langle n(\mathbf{P}) | \tilde{\partial}_i | n(\mathbf{P}) \rangle, \quad (4.19)$$

es la conexión de Berry (donde $\tilde{\partial}_i = \partial / \partial P_i$). En particular,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{P_Z}{P(P_X^2 + P_Y^2)} (-P_Y, P_X, 0), \quad \Phi(P) = \frac{1}{4P^2}. \quad (4.20)$$

Similarmente, los conmutadores entre las coordenadas de la posición covariante quedan:

$$[\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j] = i \tilde{K}_{ij} = i(\partial_i \tilde{A}_j - \partial_j \tilde{A}_i). \quad (4.21)$$

O bien,

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = -\frac{iP_Z}{2P^3}, \quad (4.22)$$

$$[\mathcal{Y}, \mathcal{Z}] = -\frac{iP_X}{2P^3}, \quad (4.23)$$

$$[\mathcal{Z}, \mathcal{X}] = -\frac{iP_Y}{2P^3}. \quad (4.24)$$

La simetría exhibida entre las expresiones (4.12) y (4.18), obtenidas en esta subsección y la anterior, puede entenderse considerando que podemos mapear formalmente H_X en el Hamiltoniano H_P , mediante la sustitución $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{P}$, $\mathbf{P} \rightarrow -\mathbf{X}$.

No obstante, notemos que mientras que en el caso discutido en la subsección anterior, el potencial de norma y el valor de la eigenenergía del espín pueden interpretarse en el Hamiltoniano efectivo como un potencial (efectivo), pues dependen de la posición del oscilador, en este caso no es claro cómo interpretar los términos Φ y $E_n(P)$ desde el punto de vista físico. Aún más, en general la interacción entre el sistema ligero y el pesado podría darse a través de $h(X, P)$, de modo que sus eigenestados instantáneos dependerían de ambos, X y

P , y el Hamiltoniano efectivo tendría la siguiente forma:

$$H_{ef} = \frac{1}{2}(\mathcal{P}^2 + \mathcal{X}^2) + E_n(X, P) + \Phi_X(X, P) + \Phi_P(X, P), \quad (4.25)$$

donde

$$\Phi_X(X, P) = \frac{1}{2} \text{Tr } g_{ij}, \quad \Phi_P(X, P) = \frac{1}{2} \text{Tr } \tilde{g}_{ij},$$

con $\tilde{g}_{ij} = g_{ij}(\partial_i \rightarrow \tilde{\partial}_i)$ y g_{ij} definido por (4.6). A partir de la expresión (4.25), no es claro que un sistema genérico pueda describirse efectivamente, de forma *natural*, en términos de las variables covariantes únicamente. En la siguiente sección, sin embargo, exploraremos un sistema que puede ser descrito usando solamente variables covariantes, a pesar de que lo anterior ocurre.

4.2. Una partícula cuántica en un alambre cuántico

Consideremos la partícula que se mueve a lo largo del alambre de la sección 3.3, pero ahora, tomaremos en cuenta que los grados de libertad que describen la configuración del alambre son dinámicos. El Hamiltoniano total de nuestro sistema en coordenadas euclidianas tiene la siguiente forma:

$$H_T^E = H_w^E(X, P) + H_p^E(x, p; X), \quad (4.26)$$

donde X y P son las variables dinámicas del alambre mientras que x y p las de la partícula. El primer y segundo término del lado derecho de la expresión anterior es el Hamiltoniano del alambre y el de la partícula, respectivamente. Nos gustaría describir al sistema en el marco de referencia adaptado al alambre, y dado que las coordenadas adaptadas dependen del tiempo, es necesario transformar la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo,

$$i\partial_t \Phi = H_T \Phi.$$

Como se ha discutido en el capítulo 3, es conveniente trabajar con los operadores transformados $\tilde{O} = |G|^{1/4} O |G|^{-1/4}$, donde G es el determinante de la métrica euclideana escrita en coordenadas adaptadas, definido por la expresión (3.40). El Hamiltoniano del alambre es de orden ϵ^2/ρ , como se mostrará más adelante, y por lo tanto la transformación no lo afecta al orden que nos interesa (*i.e.*, a $O(\epsilon^2)$). Por lo cual, la ecuación anterior en el marco adaptado queda:

$$i\partial_{t'} \Psi = (H_w(\varphi, \pi) + H_p^U(s, p; \varphi, \pi)) \Psi, \quad (4.27)$$

donde $\Psi = |G|^{1/4} \Phi$, H_p^U es el Hamiltoniano que aparece en el lado derecho de la ecuación (3.87), y hemos sustituido $\dot{\varphi} \rightarrow (\epsilon^2 \rho)^{-1} \pi$ donde π son los momentos conjugados a los campos (con ρ constante), lo cual se mostrará en la subsección 4.2.2. Debido a que queremos considerar la aproximación adiabática en la que los grados de libertad del alambre cambian muy lentamente, tanto $\dot{\varphi}$ como φ son de orden $O(\epsilon^0)$. Entonces, los momentos conjugados π son de orden ϵ^2 .

Antes de continuar, es necesario aclarar el significado de Ψ en la Ec. (4.27). Las variables dinámicas del alambre son los campos vectoriales cuánticos φ y π y, por lo tanto, el estado

del sistema completo es un producto de la forma¹: $\Psi = \Psi_w \otimes \Psi_p$, donde Ψ_p es una función de onda que describe el estado de la partícula, y Ψ_w es un *funcional de onda* que describe el estado del alambre, *i.e.*, es un objeto que asigna un número complejo a cada configuración del alambre. En [32] se discute la representación de Schrödinger de la teoría de campos.

En el límite en que la masa de la partícula es mucho menor que la del alambre, el sistema puede ser descrito en el esquema de la sección anterior. La parte lenta corresponde al alambre, mientras que la rápida a la partícula restringida a moverse sobre éste. A continuación se discuten separadamente ambas partes.

4.2.1. La partícula sobre el alambre

Como se ha discutido en la subsección 3.3.2, la dinámica de la partícula, descrita en el marco de referencia adaptado al alambre, está gobernada por el Hamiltoniano:

$$H_p = \frac{1}{\eta^2} H_{-2} + H_0^U(\phi, \pi) + O(\eta, \epsilon^2), \quad (4.28)$$

con

$$\begin{aligned} H_{-2} &= -\frac{1}{2}(\partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2) + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2), \\ H_0^U &= -\frac{1}{2}\left(\partial_s^2 + \frac{1}{4}\right) + \epsilon\delta H_0, \\ \delta H_0 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \neq 0} e^{iks} (1 - k^2) \left(\frac{k}{2} \phi_k^b L (2\partial_s + ik) + \frac{1}{4} \phi_k^n \right) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \neq 0} \frac{e^{iks}}{\epsilon^2 \rho} \left(\frac{1}{\eta} (\pi_n^{k*} \partial_\alpha + \pi_b^{k*} \partial_\beta) + \pi_t^{k*} \partial_s - ik^2 \pi_b^{k*} L + \frac{1}{2} \pi_n^{k*} \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

De manera similar, se ha mostrado que el estado:

$$\Psi_p(s, \alpha, \beta) = \sum_{l=-n}^n \psi_l(s) \chi_{nl}(\alpha, \beta), \quad (4.31)$$

donde χ_{nl} está dado por (3.47), en tanto que,

$$\psi_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\epsilon}{2\pi} \sum_{k \neq 0} \frac{e^{iks}}{k^2} \left(\frac{1 - k^2}{2} \left(2ilk^2 \phi_k^b + \phi_k^n \right) - \frac{1}{\epsilon^2 \rho} \left(i\pi_n^{k*} + 2l\pi_b^{k*} \right) \right). \quad (4.32)$$

es un eigenestado instantáneo de H_p , con eigenvalor:

$$\tilde{E}_{nl}^U = \frac{n+1}{\eta^2} - \frac{1}{8} + O(\eta, \epsilon^2), \quad (4.33)$$

¹En general es una suma de productos tensoriales, sin embargo, en la aproximación adiabática se reduce a un solo término.

para el cual, hemos encontrado que la conexión de Berry tiene componentes:

$$\begin{aligned}
(A_{nl}^U)^{n_k} &= \frac{\epsilon^2}{2\pi\rho} \left(\frac{1-k^2}{2k^4} \phi_k^n - \frac{2l}{\epsilon^2\rho k^2} \pi_b^{k*} \right), & (A_{nl}^U)_{n_k} &= \frac{\epsilon^2}{2\pi} \frac{1-k^2}{2k^2} \left(\frac{l(1-k^2)\phi_k^{b*}}{2} - \frac{\pi_n^k}{\epsilon^2\rho k^2} \right), \\
(A_{nl}^U)^{n_k^*} &= \frac{\epsilon^2}{2\pi\rho} \left(\frac{1-k^2}{2k^4} \phi_k^{n*} - \frac{2l}{\epsilon^2\rho k^2} \pi_b^k \right), & (A_{nl}^U)_{n_k^*} &= \frac{\epsilon^2}{2\pi} \frac{1-k^2}{2k^2} \left(\frac{l(1-k^2)\phi_k^b}{2} - \frac{\pi_n^{k*}}{\epsilon^2\rho k^2} \right), \\
(A_{nl}^U)^{b_k} &= \frac{\epsilon^2}{2\pi\rho} \left(\frac{2l}{\epsilon^2\rho k^2} \pi_n^{k*} - l^2(1-k^2)\phi_k^b \right), & (A_{nl}^U)_{b_k} &= \frac{\epsilon^2}{2\pi} l(1-k^2) \left(\frac{\pi_b^k}{\epsilon^2\rho} - \frac{1-k^2}{4k^2} \phi_k^{n*} \right), \\
(A_{nl}^U)^{b_k^*} &= \frac{\epsilon^2}{2\pi\rho} \left(\frac{2l}{\epsilon^2\rho k^2} \pi_n^k - l^2(1-k^2)\phi_k^{b*} \right), & (A_{nl}^U)_{b_k^*} &= \frac{\epsilon^2}{2\pi} l(1-k^2) \left(\frac{\pi_b^{k*}}{\epsilon^2\rho} - \frac{1-k^2}{4k^2} \phi_k^n \right).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

4.2.2. El alambre cuántico

Como en el capítulo anterior, consideremos un alambre cuya forma corresponde a una pequeña deformación de un círculo unitario en el plano x - y , de modo que su encajamiento está dado por:

$$\mathbf{r}(s, t) = \mathbf{R}(s) + \epsilon \boldsymbol{\varphi}(s, t). \tag{4.35}$$

donde \mathbf{R} representa el círculo unitario, s es la longitud de arco del círculo y $\epsilon \ll 1$.

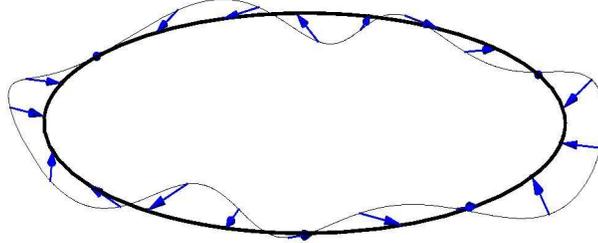


Figura 4.1: El campo vectorial $-\boldsymbol{\varphi}$ de forma esquemática.

Se puede pensar a $\boldsymbol{\varphi}$ como un campo vectorial dependiente del tiempo sobre S^1 . Nos gustaría considerar el límite en el que el alambre se comporta como una elástica, *i.e.*, el límite en el que la energía potencial del alambre es proporcional al cuadrado del cambio de la curvatura con respecto a la del círculo. Es decir, tenemos un alambre que le “gusta” tener forma circular. Además imponemos la restricción de preservación local de longitud de arco LAP dinámicamente, lo cual, físicamente, puede interpretarse como que se requiere una cantidad de energía (que suponemos que es grande) para estirar o comprimir el alambre en su dirección tangencial. Introduciendo un parámetro λ que está relacionado con el módulo de Young en la dirección tangencial del material, y tomando el límite $\lambda \rightarrow 0$ la restricción LAP se implementa. Así, la densidad lagrangiana (normalizada) tiene la forma:

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi', \varphi'') = \frac{1}{2}\rho \epsilon^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{\mu}{2} \left(\delta\kappa^2 + \frac{1}{\lambda}\chi^2 \right), \tag{4.36}$$

donde ρ es la densidad de masa (constante) del alambre, μ es un coeficiente constante que depende de las propiedades del alambre, $\delta\kappa$ es la diferencia entre la curvatura de la curva deformada y la del círculo y $\chi = \epsilon^2(\varphi^{t'} - \varphi^n)$ es la constricción LAP. Ahora, para encontrar explícitamente $\delta\kappa$, es necesario construir el marco adaptado a la curva (4.35), esto es,

$$\hat{t} = \frac{\mathbf{X}'}{|\mathbf{X}'|} = \hat{T} + \epsilon \left((\varphi^{N'} + \varphi^T) \hat{N} + \varphi^{B'} \hat{B} \right) + O(\epsilon^2), \quad (4.37)$$

$$\kappa \hat{n} = \frac{\hat{t}}{|\mathbf{X}'|} = \hat{N} + \epsilon \left(-(\varphi^{N'} + \varphi^T) \hat{T} + (\varphi^{N''} + \varphi^N) \hat{N} + \varphi^{B''} \hat{B} \right) + O(\epsilon^2), \quad (4.38)$$

lo cual implica que

$$\kappa = 1 + \epsilon(\varphi^{N''} + \varphi^N) + O(\epsilon^2), \quad (4.39)$$

$$\hat{n} = \hat{N} + \epsilon \left(-(\varphi^{N'} + \varphi^T) \hat{T} + \varphi^{B''} \hat{B} \right) + O(\epsilon^2), \quad (4.40)$$

y por lo tanto

$$\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n} = \hat{B} - \epsilon \left(\varphi^{B'} \hat{T} + \varphi^{B''} \hat{N} \right) + O(\epsilon^2), \quad (4.41)$$

donde ' significa derivada con respecto a s , $(\hat{T}, \hat{N}, \hat{B})$ es el marco adaptado al círculo y $(\varphi^T, \varphi^N, \varphi^B)$ son las componentes de φ en este marco de referencia.

A partir de la expresión (4.39), es posible obtener $\delta\kappa$ directamente. Nótese que

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi^t \hat{t} + \varphi^n \hat{n} + \varphi^b \hat{b} = \varphi^T \hat{T} + \varphi^N \hat{N} + \varphi^B \hat{B}, \\ &= \varphi^t \hat{T} + \varphi^n \hat{N} + \varphi^b \hat{B} + O(\epsilon), \end{aligned} \quad (4.42)$$

y consecuentemente las componentes de cualquier vector en ambos marcos de referencia difieren solamente a orden ϵ . Entonces, podemos escribir la lagrangiana en las coordenadas asociadas con el marco de referencia $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$ como:

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi', \varphi'') = \frac{1}{2} \epsilon^2 \rho (\dot{\varphi}^i)^2 - \frac{\mu \epsilon^2}{2} \left((\varphi^{n''} + \varphi^n)^2 + \frac{1}{\lambda} (\varphi^{t'} - \varphi^n)^2 \right) + O(\epsilon^4), \quad (4.43)$$

con $i = 1, 2, 3$ y $(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3) = (\varphi^t, \varphi^n, \varphi^b)$. Nótese que el vector $-\varphi(s)$ representa la posición del círculo en el punto s sobre \mathbf{X} . Ahora, podemos escribir el campo φ^i en términos de su transformada de Fourier, es decir:

$$\varphi^i(s, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{iks} \phi_k^i(t), \quad (4.44)$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. Debido a que φ^i es real, la componente de Fourier ϕ_k^i satisface: $\phi_k^{i*} = \phi_{-k}^i$. La lagrangiana $L = \int ds \mathcal{L}$ puede reescribirse entonces de la siguiente manera:

$$L = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon^2}{2} \left[\rho \dot{\phi}_k^{i*} \dot{\phi}_k^i - \mu(1 - k^2)^2 \phi_k^{n*} \phi_k^n - \frac{\mu}{\lambda} \left(k^2 \phi_k^{t*} \phi_k^t - ik(\phi_k^t \phi_k^{n*} - \phi_k^{t*} \phi_k^n) + \phi_k^{n*} \phi_k^n \right) \right], \quad (4.45)$$

con suma sobre $i = 1, 2, 3$. De la expresión (4.45) se pueden encontrar los momentos conju-

gados a ϕ_k^i :

$$\pi_i^k = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_k^i} = \epsilon^2 \rho \dot{\phi}_k^{i*}, \quad (4.46)$$

y por lo tanto,

$$\pi_i(s) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}^i(s)} = \epsilon^2 \rho \dot{\varphi}^i(s). \quad (4.47)$$

Así, el Hamiltoniano del alambre a orden ϵ^2 queda:

$$H_w = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\pi_i^{k*} \pi_i^k}{\epsilon^2 \rho} + \epsilon^2 \mu (1 - k^2)^2 \phi_k^{n*} \phi_k^n + \epsilon^2 \frac{\mu}{\lambda} \left(k^2 \phi_k^{t*} \phi_k^t - ik (\phi_k^t \phi_k^{n*} - \phi_k^{t*} \phi_k^n) + \phi_k^{n*} \phi_k^n \right) \right]. \quad (4.48)$$

Por otra parte, también es posible escribir las siguientes ecuaciones de movimiento a partir de la lagrangiana (4.45),

$$\frac{d^2 \phi^i}{dt^2} = \Omega_j^i(k) \phi^j, \quad (4.49)$$

donde

$$\Omega_j^i = -\frac{\mu}{\rho \lambda} \begin{pmatrix} k^2 & ik & 0 \\ -ik & 1 + \lambda(1 - k^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

Diagonalizando Ω , encontramos sus eigenvalores $-\omega_a^2$ y eigenvectores normalizados ξ_a a $O(\lambda)$, dados por:

$$\omega_f^2 = \frac{\mu}{\rho} k^2 \Lambda_k \left(1 - \left(\frac{\Lambda_k}{k^2 + 1} \right) \lambda \right), \quad (4.51)$$

$$\omega_g^2 = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{k^2 + 1}{\lambda} + \Lambda_k + \frac{k^2 \Lambda_k^2}{k^2 + 1} \lambda \right), \quad (4.52)$$

$$\omega_h^2 = 0, \quad (4.53)$$

y

$$\xi_f = N_f \begin{pmatrix} -\frac{i}{k}(1 + \Lambda_k \lambda) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_g = N_g \begin{pmatrix} ik(1 - \Lambda_k \lambda) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

respectivamente, donde $a = (f, g, h)$, $\Lambda_k = (k^2 - 1)^2 / (k^2 + 1)$ y N_a son factores de normalización. En términos de (4.54), podemos definir la matriz de transformación de similitud $u_a^i = \xi_a^i$ tal que:

$$\Omega_b^a = (u^{-1})_i^a \Omega_j^i u_b^j = \begin{pmatrix} -\omega_f^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_g^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_h^2 \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

Y entonces, las ecuaciones de movimiento en términos de modos normales, $f_k^a = (u^{-1})_i^a \phi_k^i$, pueden ser escritas como:

$$\ddot{f}_k^a = \Omega_b^a f_k^b \quad \Rightarrow \quad \ddot{f}_k^a + \omega_a^2 f_k^a = 0, \quad (4.56)$$

donde $f_k^a = (f_k, g_k, h_k)$, las cuales describen tres osciladores armónicos independientes con frecuencias ω_a . Más aún, la lagrangiana puede ser escrita en forma canónica en términos de sus modos normales (f_k^i, f_k^{i*}) como:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_a \epsilon^2 \rho \left(\dot{f}_k^{a*} \dot{f}_k^a - \omega_a^2 f_k^{a*} f_k^a \right). \quad (4.57)$$

Para que la lagrangiana tome la forma dada por (4.57), los coeficientes de normalización que aparecen en (4.54) deben ser fijados como sigue:

$$N_f = \frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}} \quad \text{y} \quad N_g = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Definiendo los momentos conjugados de f_k^a y f_k^{a*} de manera usual, encontramos:

$$\pi_a^k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{f}_k^a} = \epsilon^2 \rho \dot{f}_k^{a*}, \quad \pi_a^{k*} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{f}_k^{a*}} = \epsilon^2 \rho \dot{f}_k^a, \quad (4.58)$$

y por tanto, el Hamiltoniano queda como:

$$H_w(f, \pi) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_a \frac{1}{\rho} \left(\frac{\pi_a^{k*} \pi_a^k}{\epsilon^2} + \epsilon^2 (\rho \omega_a)^2 f_k^{a*} f_k^a \right). \quad (4.59)$$

Que corresponde a un conjunto (infinito) de osciladores armónicos. Ahora, en la aproximación adiabática los momentos conjugados, definidos por la expresión (4.58), son de orden ϵ^2 y, por lo tanto, el Hamiltoniano (4.59) también. Para cuantizar el sistema, imponemos las relaciones de conmutación canónicas:

$$\begin{aligned} [\varphi^i(s, t), \varphi^j(s', t)] &= 0, \\ [\varphi^i(s, t), \pi_j(s', t)] &= i \delta_j^i \delta(s - s'), \\ [\pi_i(s, t), \pi_j(s', t)] &= 0, \end{aligned} \quad (4.60)$$

las cuales se traducen en relaciones de conmutación canónicas para sus componentes de Fourier, esto es:

$$[\phi_k^i(t), \phi_{k'}^j(t)] = 0, \quad [\phi_k^i(t), \pi_j^{k'}(t)] = i \delta_j^i \delta_{-k}^{k'}, \quad [\pi_i^k(t), \pi_j^{k'}(t)] = 0, \quad (4.61)$$

y lo mismo para las coordenadas normales,

$$[f_k^a(t), f_{k'}^b(t)] = 0, \quad [f_k^a(t), \pi_b^{k'}(t)] = i \delta_b^a \delta_{-k}^{k'}, \quad [\pi_a^k(t), \pi_b^{k'}(t)] = 0. \quad (4.62)$$

4.2.3. Hamiltoniano efectivo

Considerando los resultados de las dos subsecciones anteriores, podemos encontrar la forma explícita del Hamiltoniano efectivo a $O(\eta, \epsilon^4)$:

$$\begin{aligned} H_{ef} &= \langle \Psi_p | H_T | \Psi_p \rangle \\ &= \frac{1}{2\rho} \sum_{a,k} \left(\frac{\mathbf{p}_a^{k*} \mathbf{p}_a^k}{\epsilon^2} + \epsilon^2 (\rho \omega_a)^2 \mathbf{f}_k^{a*} \mathbf{f}_k^a \right) + \tilde{E}_{nl}^U, \end{aligned} \quad (4.63)$$

donde (la parte de $O(\epsilon)$ y menor de) \tilde{E}_{nl}^U es un término constante cuya forma se muestra en la expresión (4.33), y se ha usado que los potenciales escalares Φ_π y Φ_f están dados a $O(\epsilon^4)$ por:

$$\Phi_\pi = \frac{1}{2} \sum_{a,k} \left(\langle \partial_{\pi_a^k} \Psi_p | \partial_{\pi_a^k} \Psi_p \rangle + \langle \partial_{\pi_a^{k*}} \Psi_p | \partial_{\pi_a^{k*}} \Psi_p \rangle \right) \sim \sum_{k>0} \langle -k | k \rangle = 0, \quad (4.64)$$

$$\Phi_f = \frac{1}{2} \sum_{a,k} \left(\langle \partial_{f_k^a} \Psi_p | \partial_{f_k^a} \Psi_p \rangle + \langle \partial_{f_k^{a*}} \Psi_p | \partial_{f_k^{a*}} \Psi_p \rangle \right) \sim \sum_{k>0} \langle -k | k \rangle = 0. \quad (4.65)$$

Por otro lado, \mathbf{p}_a^k y \mathbf{f}_k^a son las variables covariantes definidas como:

$$\mathbf{p}_a^k = \pi_a^k - A_{a_k}, \quad \mathbf{p}_a^{k*} = \pi_a^{k*} - A_{a_k^*}, \quad (4.66)$$

$$\mathbf{f}_k^a = f_k^a - A^{a_k}, \quad \mathbf{f}_k^{a*} = f_k^{a*} - A^{a_k^*}, \quad (4.67)$$

donde $A_{a_k} = i \langle \Psi_p | \partial_{f_k^a} \Psi_p \rangle$, $A^{a_k} = i \langle \Psi_p | \partial_{\pi_a^k} \Psi_p \rangle$ y equivalentemente para $A^{a_k^*}$ y $A_{a_k^*}$. A orden $O(\lambda^0)$, sabemos que,

$$\phi_k^t = i s_k (N_f g_k - N_g f_k), \quad (4.68)$$

$$\phi_k^n = N_g g_k + N_f f_k, \quad (4.69)$$

$$\phi_k^b = h_k, \quad (4.70)$$

donde $s_k = \text{sign}(k)$, y consecuentemente

$$\pi_t^k = -i s_k (N_f \pi_g^k - N_g \pi_f^k), \quad (4.71)$$

$$\pi_n^k = N_g \pi_g^k + N_f \pi_f^k, \quad (4.72)$$

$$\pi_b^k = \pi_h^k. \quad (4.73)$$

Así, las componentes de la conexión en coordenadas normales toman la forma:

$$A_{f_k} = N_f A_{n_k}, \quad A_{g_k} = N_g A_{n_k}, \quad A_{h_k} = A_{b_k}, \quad (4.74)$$

$$A^{f_k} = N_f A^{n_k}, \quad A^{g_k} = N_g A^{n_k}, \quad A^{h_k} = A^{b_k}, \quad (4.75)$$

con A_i y A^i dadas por las expresiones (4.34), y similarmente para el resto de las componentes de la conexión.

Es fácil ver que las relaciones de conmutación entre los operadores de momento y posición

covariantes (4.66) y (4.67) se modifican de acuerdo con:

$$\begin{aligned} [\mathbf{p}_a^k, \mathbf{p}_b^{k'}] &= [\pi_a^k, \pi_b^{k'}] - [\pi_a^k, A_{b_{k'}}] - [A_{a_k}, \pi_b^{k'}] + [A_{a_k}, A_{b_{k'}}], \\ &= i\mathcal{K}_{ab}^{kk'} + [A_{a_k}, A_{b_{k'}}]. \end{aligned}$$

Cuando A_a es una función sólo de π o de φ , el segundo término desaparece. En la situación más general, donde A_a depende de ambos, normalmente esto no sucede. Sin embargo, $[A_a, A_b] \sim O(\epsilon^4)$. Lo mismo pasa en el sector de la posición covariante. Por lo tanto, las componentes (que se modifican de manera no trivial) entre los campos covariantes quedan:

$$[\mathbf{p}_f^k, \mathbf{p}_h^{k*}] = [\mathbf{p}_f^{k*}, \mathbf{p}_h^k] = iN_f \mathcal{K}_{n_k b_k^*} = -i \frac{\epsilon^2}{2\pi} \left(\frac{l(1-k^2)^2}{2|k|\sqrt{1+k^2}} \right), \quad (4.76)$$

$$[\mathbf{p}_g^k, \mathbf{p}_h^{k*}] = [\mathbf{p}_g^{k*}, \mathbf{p}_h^k] = iN_g \mathcal{K}_{n_k b_k^*} = -i \frac{\epsilon^2}{2\pi} \left(\frac{l(1-k^2)^2}{2k^2\sqrt{1+k^2}} \right), \quad (4.77)$$

$$[\mathfrak{f}_k, \mathfrak{h}_k^*] = [\mathfrak{f}_k^*, \mathfrak{h}_k] = iN_f \mathcal{K}^{n_k b_k^*} = i \frac{\epsilon^2}{2\pi\rho^2} \left(\frac{2l}{|k|\sqrt{1+k^2}} \right), \quad (4.78)$$

$$[\mathfrak{g}_k, \mathfrak{h}_k^*] = [\mathfrak{g}_k^*, \mathfrak{h}_k] = iN_g \mathcal{K}^{n_k b_k^*} = i \frac{\epsilon^2}{2\pi\rho^2} \left(\frac{2l}{k^2\sqrt{1+k^2}} \right), \quad (4.79)$$

$$[\mathfrak{f}_k, \mathbf{p}_f^k] = [\mathfrak{f}_k^*, \mathbf{p}_f^{k*}] = i + iN_f^2 \mathcal{K}_{n_k}^{n_k} = i \left(1 + \frac{\epsilon^2}{2\pi\rho} \left(\frac{1-k^2}{k^2(1+k^2)} \right) \right), \quad (4.80)$$

$$[\mathfrak{g}_k, \mathbf{p}_g^k] = [\mathfrak{g}_k^*, \mathbf{p}_g^{k*}] = i + iN_g^2 \mathcal{K}_{n_k}^{n_k} = i \left(1 + \frac{\epsilon^2}{2\pi\rho} \left(\frac{1-k^2}{k^4(1+k^2)} \right) \right), \quad (4.81)$$

$$[\mathfrak{h}_k, \mathbf{p}_h^k] = [\mathfrak{h}_k^*, \mathbf{p}_h^{k*}] = i + i\mathcal{K}_{b_k}^{b_k} = i \left(1 - \frac{\epsilon^2}{2\pi\rho} 2l(1-k^2) \right). \quad (4.82)$$

Así pues, hemos mostrado que la dinámica del alambre puede ser descrita de manera efectiva en términos de (las componentes de Fourier de) campos covariantes no-conmutativos. Es interesante notar que este tipo de no-conmutatividad tiene la misma estructura y un origen físico similar que la no-conmutatividad entre la posición efectiva propuesta en [30], la cual está asociada con una escala mínima: la longitud de Compton en el contexto de teoría cuántica de campos, y el radio de Schwarzschild para una partícula en relatividad general.

Para concluir el capítulo, cabe señalar que el análisis presentado forma parte de un trabajo en progreso y, por lo tanto, hay algunos puntos inconclusos que requieren comentarios. En particular:

- a. En el capítulo 3 mostramos que las expresiones para la fase geométrica calculadas en el sistema de referencia cartesiano y en el adaptado a la curva coinciden si se desprecian los términos que dependen de la rapidez de la deformación. Debido a que dichos cálculos se hicieron en términos de la curvatura de Berry, no es claro si lo anterior repercute (ni de qué manera) en la no-conmutatividad encontrada en este capítulo.
- b. La construcción anterior pudo haberse hecho, alternativamente, en términos de las componentes de los campos $\phi^i(s)$ y $\pi_i(s)$, en cuyo caso, el Hamiltoniano efectivo contendría como potencial un término no diagonal del tipo $\tilde{Q}_{ij}\phi^i\phi^j$ y presumiblemente también

potenciales escalares distintos de cero. A partir de las expresiones (3.97), puede verse que los conmutadores entre las componentes covariantes de Fourier $\tilde{\phi}_k^n$ y $\tilde{\phi}_k^b$ no se anulan. Esto implica relaciones de conmutación modificadas para los campos también. Para entender la relación entre las expresiones del Hamiltoniano efectivo en ambos sistemas de coordenadas y su interpretación se requiere de un análisis más detallado.

- c. El Hamiltoniano (4.63) es correcto a orden ϵ^2 , salvo por la corrección del mismo orden a la energía \tilde{E}_{nl}^U , dada por la expresión (D.7). Esta contribución contiene términos cuadráticos en los campos, sin embargo, su cálculo explícito es técnicamente muy complicado.
- d. Aunque la aparición de los campos no-conmutativos es natural y motivada físicamente, su interpretación no es completamente clara.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis se ha explorado la idea de “no-conmutatividad emergente” en sistemas físicos. Esto es, se mostró que la descripción efectiva de ciertos sistemas físicos introduce, naturalmente, operadores de posición con componentes no-conmutativas.

Primeramente, se consideró la descripción efectiva de la posición de objetos extendidos, en el contexto de Relatividad Especial, por un operador de posición puntual. A partir de requerimientos básicos y elementos bien establecidos de la teoría, se encontró que los conmutadores entre las componentes del operador mencionado son distintos de cero y, más aún, que dependen de las propiedades de la distribución, en particular de su espín. También se propuso un programa para generalizar el análisis a espaciotiempos con curvatura no nula.

A continuación se discutió una clase de sistemas que consisten en partículas cuánticas restringidas a moverse en curvas, que genéricamente presentan fases geométricas. Aunque éstos se hacen relevantes – desde el punto de vista de la no-conmutatividad – en la discusión del capítulo 4, son interesantes por si mismos. Se mostró que la presencia de estas fases puede tener efectos físicos, lo cual sugiere que estos sistemas pudieran ser utilizados como detectores de movimiento, en particular como detectores de ondas gravitacionales.

Finalmente, retomando el análisis del capítulo 3, se consideró el caso en el que la curva, sobre la que está constreñida a moverse una partícula, tiene dinámica cuántica. Se describió cómo afecta sus propiedades dinámicas y cinemáticas la presencia de la partícula, en el régimen adiabático. Específicamente, se mostró que su dinámica puede ser descrita por un Hamiltoniano efectivo que está escrito en términos de campos cuánticos covariantes, cuyas componentes no conmutan.

Para concluir, se presentan las conclusiones particulares de cada capítulo de forma más detallada, y se señalan posibles direcciones futuras.

Capítulo 2: No-conmutatividad física

Asumiendo que “conocemos” el espaciotiempo a través de partículas que se mueven en éste, se consideraron operadores de posición no-conmutativos, que describen la localización de partículas sobre variedades clásicas, en lugar del acercamiento estándar de la variedad intrínsecamente no-conmutativa.

Con esta suposición en mente, se propuso una descripción efectiva de la posición de distribuciones de materia clásicas por un operador de posición puntual, en relatividad especial. Se mostró que la definición del operador de posición más satisfactoria – estudiada anteriormente – no es asociativa, y se propuso una definición que sí lo es. Asimismo, se encontró que sus componentes no conmutan por un término proporcional al espín. Se discutió la relevancia de esta no-conmutatividad en la versión cuántica.

El resultado anterior es confirmado y apoyado por diversos trabajos, todos ellos en el marco de relatividad especial y mecánica cuántica, en los que este mismo tipo de no-conmutatividad aparece. No obstante, se concluyó que la no-conmutatividad encontrada es irrelevante desde el punto de vista físico en virtud de que la existencia de antipartículas restaura la conmutatividad entre las componentes del operador de posición discutido.

Enseguida exploramos una posible generalización de este análisis a un espaciotiempo con curvatura, con la esperanza de encontrar los efectos de la gravedad en la no-conmutatividad del operador de posición, pero los resultados no fueron concluyentes.

Como continuación de este trabajo, sería interesante:

- a) Entender el papel de las antipartículas en la desaparición de la no-conmutatividad.
- b) Analizar la relación entre la localizabilidad de las partículas cuando estados con energía negativa se permiten, y la necesidad de antipartículas para que la teoría de campos cuánticos sea local.
- c) Explorar la generalización de operadores de posición a espaciotiempos con curvatura, de acuerdo con el programa propuesto en la sección 2.4.

Capítulo 3: Fases geométricas en sistemas constreñidos

El resultado principal de este capítulo es que existe una clase de sistemas que presentan, de manera genérica, fases geométricas. Esto es relevante debido a que la presencia de fases geométricas no es común.

Para mostrar lo anterior, se describió la dinámica de una partícula cuántica, restringida a moverse sobre una curva, a través del formalismo del potencial de confinamiento. Se encontró que dicha dinámica está gobernada por un Hamiltoniano efectivo que depende de las propiedades de la curva, en particular de su curvatura y torsión. De esta manera, se señaló que, en el límite adiabático, este tipo de sistemas presenta las características de sistemas en los que aparecen fases de Berry.

Posteriormente, se mostró que la función de onda de la partícula adquiere, en general, una fase geométrica cuando la forma de la curva cambia de manera cíclica. Se encontró el mismo resultado para la fase cuántica usando dos acercamientos equivalentes. Y finalmente se mostró que la presencia de la fase puede detectarse por medio de cambios en el patrón de la distribución de probabilidad, cuando se considera una superposición de estados.

A lo largo de esta línea de investigación, los siguientes aspectos merecen un análisis subsecuente:

- a) La aplicación de esta clase de sistemas como detectores de movimiento. En particular, como detectores de ondas gravitacionales. Debido a que las ondas producen deformaciones periódicas, la fase geométrica puede acumularse, y así proveer a estos sistemas de “memoria” para determinar si una onda gravitacional ha pasado a través de la región del espacio en la que éstos se encuentran.
- b) Debido a que hay una componente de la fase geométrica asociada con cada modo de Fourier (con cada k en la expresión (3.78)), en principio, es posible extraer información sobre cada componente del campo de deformación a partir de la fase. ¿Podría reconstruirse el proceso de deformación de la curva conociendo la fase geométrica?
- c) La dependencia de la fase geométrica en el método de confinamiento. Es decir, ¿cambia considerablemente el valor de la fase geométrica si asumimos que el potencial no es simétrico en el plano normal a la curva, o si consideramos un potencial dependiente de la longitud de arco de la curva?

Capítulo 4: No-conmutatividad efectiva y fases geométricas

En este capítulo se consideró el efecto de reacción de una partícula en el alambre sobre el cual está constreñida a moverse. Se discutió que, en la aproximación adiabática, la evolución temporal de los grados de libertad de la partícula y la de los del alambre pueden ser descritas independientemente.

Para estados de baja energía del sistema, la partícula tiene prácticamente sólo un estado accesible (o un conjunto si hay degeneración) y entonces, su dinámica se reduce a determinar la fase (o la matriz de Wilczek-Zee) que adquiere el estado inicial, la cual puede descomponerse en una parte dinámica que tiene la forma habitual “energía \times tiempo”, y otra geométrica que resulta de la integral de línea (superficie) de la conexión (curvatura) de Berry.

Integrando los grados de libertad de la partícula, se definió un Hamiltoniano efectivo que gobierna la dinámica del alambre, que puede ser escrito en su “forma canónica” en términos de momentos y posiciones covariantes no-conmutativas. También se mostró que las variables covariantes consisten en la suma de las variables ordinarias y una conexión, la cual puede interpretarse como la conexión de Berry asociada con el estado de la partícula. Como consecuencia, se encontró que las relaciones de conmutación entre las variables covariantes son proporcionales a la 2-forma de curvatura de Berry correspondiente que, en general, es distinta de cero.

Sin embargo, los siguientes puntos, que quedaron inconclusos, requieren comentarios:

- a) Es necesario trabajar en la interpretación de la no-conmutatividad encontrada.
- b) En el capítulo 3 mostramos que las expresiones para la fase geométrica calculadas en el sistema de referencia cartesiano y en el adaptado a la curva coinciden si se desprecian los términos que dependen de la rapidez de la deformación. Debido a que dichos cálculos se hicieron en términos de la curvatura de Berry, no es claro si lo anterior repercute (ni de qué manera) en la no-conmutatividad encontrada en este capítulo.

- c) El Hamiltoniano (4.63) es correcto a orden ϵ^2 , salvo por la corrección del mismo orden a la energía \tilde{E}_{nl}^U , dada por la expresión (D.7). Esta contribución contiene términos cuadráticos en los campos, sin embargo, su cálculo explícito es técnicamente muy complicado.
- d) La construcción del Hamiltoniano efectivo pudo haberse hecho, alternativamente, en términos de las componentes de los campos $\phi^i(s)$ y $\pi_i(s)$, en cuyo caso, el Hamiltoniano efectivo contendría como potencial un término no diagonal del tipo $\tilde{Q}_{ij}\phi^i\phi^j$ y presumiblemente también potenciales escalares distintos de cero. Con base en el análisis hecho, puede esperarse que los conmutadores entre las componentes covariantes de Fourier $\tilde{\phi}_k^n$ y $\tilde{\phi}_k^b$ tampoco se anulan. A partir de estas componentes pueden definirse variables covariantes $\tilde{\phi}^n$ y $\tilde{\phi}^b$ no-conmutativas. La forma del Hamiltoniano efectivo (como una integral con respecto a s) en términos de éstas es simple, lo que no ocurre en el caso de los campos covariantes normales f^a y \mathfrak{p}_a , puesto que las frecuencias ω_a dependen de k . La interpretación de la no-conmutatividad encontrada puede hacerse más directamente en términos de los campos $\tilde{\phi}^n$ y $\tilde{\phi}^b$.

Apéndice A

El conmutador del operador posición par de Dirac

En este apéndice mostramos el cálculo explícito del conmutador entre las coordenadas de la parte par del operador de posición en la teoría de Dirac para partículas cuánticas relativistas de espín 1/2.

La parte par del operador de posición está dada por,

$$\tilde{X}_i = \frac{1}{2}(X_i + \Lambda X_i \Lambda),$$

con $i = 1, 2, 3$. $\Lambda = H/\sqrt{H^2}$ es el operador de signo y satisface $\Lambda = \Lambda^\dagger = \Lambda^{-1}$. H es el hamiltoniano libre de Dirac,

$$H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2, \quad (\text{A.1})$$

donde c es la velocidad de la luz, m la masa de la partícula (del electrón por ejemplo), \mathbf{p} es la parte espacial de su momento y las α 's y β son matrices de dimensión 4×4 que satisfacen el álgebra de Clifford, *i.e.*,

$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 2\delta_{ij}, \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0, \\ \beta^2 &= 1. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} [\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] &= \frac{1}{4} \left[x_i + \Lambda X_i \Lambda, X_j + \Lambda X_j \Lambda \right], \\ &= \frac{1}{4} \left([X_i, X_j] + [X_i, \Lambda X_j \Lambda] + [\Lambda X_i \Lambda, X_j] + [\Lambda X_i \Lambda, \Lambda X_j \Lambda] \right). \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

Definiendo,

$$(I_1)_{ij} \equiv [X_i, \Lambda X_j \Lambda], \quad (\text{A.3})$$

$$(I_2)_{ij} \equiv [\Lambda X_i \Lambda, X_j] = -(I_1)_{ji}, \quad (\text{A.4})$$

$$(I_3)_{ij} \equiv [\Lambda X_i \Lambda, \Lambda X_j \Lambda] = \Lambda [X_i, X_j] \Lambda = 0, \quad (\text{A.5})$$

el conmutador dado por (A.2) puede escribirse como:

$$[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = \frac{1}{4} \left((I_1)_{ij} - (I_1)_{ji} \right).$$

Debido a que X_i conmuta con α_j y β para cualesquiera i y j , el conmutador $[X_i, \Lambda]$ puede escribirse como:

$$[X_i, \Lambda(p)] = i\hbar \frac{\partial \Lambda(p)}{\partial p_i} = i\hbar \left(\frac{\alpha_i}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}} - \frac{p_i \Lambda}{p^2 + m^2 c^2} \right), \quad (\text{A.6})$$

Utilizando (A.6), es posible escribir I_1 de la forma:

$$\begin{aligned} (I_1)_{ij} &= X_i \left(X_j \Lambda - [X_j, \Lambda] \right) \Lambda - \left(X_j \Lambda - [X_j, \Lambda] \right) \Lambda X_i, \\ &= X_i \left[X_j \Lambda - i\hbar \left(\frac{\alpha_j}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}} - \frac{p_j \Lambda}{p^2 + m^2 c^2} \right) \right] \Lambda \\ &\quad - \left[X_j \Lambda - i\hbar \left(\frac{\alpha_j}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}} - \frac{p_j \Lambda}{p^2 + m^2 c^2} \right) \right] \Lambda X_i, \\ &= [X_i, X_j] + i\hbar \left(\left[X_i, \frac{p_j}{p^2 + m^2 c^2} \right] - \left[X_i, \frac{\alpha_j \Lambda}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}} \right] \right), \end{aligned}$$

el primer término es cero y los dos últimos pueden calcularse de la misma manera en que se calculó (A.6), *i.e.*,

$$\left[X_i, \frac{p_j}{p^2 + m^2 c^2} \right] = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{p_j}{p^2 + m^2 c^2} \right) = i\hbar \left(\frac{\delta_{ij}}{p^2 + m^2 c^2} - \frac{2p_i p_j}{(p^2 + m^2 c^2)^2} \right),$$

y similarmente la siguiente expresión:

$$\left[X_i, \frac{\alpha_j \Lambda}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}} \right] = i\hbar \alpha_j \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}} \right) = i\hbar \left(\frac{\alpha_j \alpha_i}{p^2 + m^2 c^2} - \frac{2\alpha_j p_i \Lambda}{(p^2 + m^2 c^2)^{3/2}} \right).$$

Así se obtiene

$$(I_1)_{ij} = \hbar^2 \left(\frac{\alpha_j \alpha_i - \delta_{ij}}{p^2 + m^2 c^2} + \frac{2p_i p_j}{(p^2 + m^2 c^2)^2} - \frac{2\alpha_j p_i \Lambda}{(p^2 + m^2 c^2)^{3/2}} \right). \quad (\text{A.7})$$

Y entonces,

$$[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\delta_{ij} - \alpha_i \alpha_j}{p^2 + m^2 c^2} + \frac{(\alpha_i p_j - \alpha_j p_i) \Lambda}{(p^2 + m^2 c^2)^{3/2}} \right). \quad (\text{A.8})$$

Ahora, escribiendo la expresión anterior de la siguiente manera:

$$[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = \frac{\hbar^2}{2(p^2 + m^2c^2)} \left(\delta_{ij} - \alpha_i \alpha_j + \alpha_i \frac{p_j \Lambda}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}} - \alpha_j \frac{p_i \Lambda}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}} \right),$$

y considerando que la parte par de α_i , tiene la forma

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{p_i \Lambda}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}},$$

(A.8) se puede escribir como

$$[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = \frac{\hbar^2}{2(p^2 + m^2c^2)} \left(\delta_{ij} - \alpha_i \alpha_j + \alpha_i \tilde{\alpha}_j - \alpha_j \tilde{\alpha}_i \right). \quad (\text{A.9})$$

Para reescribir la expresión anterior en una manera más sencilla, es necesario calcular el siguiente anticonmutador:

$$\begin{aligned} \{\tilde{\alpha}_i, \alpha_j\} &= \frac{p_i}{p^2 + m^2c^2} \{\alpha_k p_k + mc\beta, \alpha_j\} \\ &= \frac{p_i}{p^2 + m^2c^2} \{\alpha_k, \alpha_j\} p_k + mc\{\beta, \alpha_j\} \\ &= \frac{2\delta_{kj} p_i p_k}{p^2 + m^2c^2} \\ &= \frac{2p_i p_j \Lambda^2}{p^2 + m^2c^2} = 2\tilde{\alpha}_i \tilde{\alpha}_j, \end{aligned}$$

donde se utilizó el hecho de que $\Lambda^2 = 1$ y que p_i conmuta con Λ en el último paso.

Por otra parte, la parte par de operador de espín, (donde el espín se define como $S_i = i/4 \epsilon_{ijk} \alpha_j \alpha_k$), tiene la forma,

$$\begin{aligned} \tilde{S}_i &= \frac{i}{8} \epsilon_{ijk} \left(\alpha_j \alpha_k + \Lambda \alpha_j \alpha_k \Lambda \right), \\ &= \frac{i}{8} \epsilon_{ijk} \left(\alpha_j \alpha_k + \Lambda \alpha_j \Lambda \alpha_k \Lambda \right) \end{aligned}$$

pero $\tilde{\alpha}_i = 1/2(\alpha_i + \Lambda \alpha_i \Lambda)$, de modo que

$$\Lambda \alpha_k \Lambda = 2\tilde{\alpha}_k - \alpha_k,$$

y entonces

$$\begin{aligned} \tilde{S}_i &= \frac{i}{8} \epsilon_{ijk} \left(\alpha_j \alpha_k + (2\tilde{\alpha}_j - \alpha_j)(2\tilde{\alpha}_k - \alpha_k) \right) \\ &= \frac{i}{4} \epsilon_{ijk} \left(\alpha_j \alpha_k + 2\tilde{\alpha}_j \tilde{\alpha}_k - \tilde{\alpha}_j \alpha_k - \alpha_j \tilde{\alpha}_k \right). \end{aligned}$$

Finalmente, considerando la relación de anticonmutación entre los operadores α 's y también la que se obtuvo para α 's y $\tilde{\alpha}$'s, el conmutador mostrado en (A.9) queda:

$$[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = \frac{\hbar^2}{4(p^2 + m^2c^2)} \left([\alpha_j, \alpha_i] - [\tilde{\alpha}_j, \alpha_i] - [\alpha_j, \tilde{\alpha}_i] + 2[\tilde{\alpha}_j, \tilde{\alpha}_i] \right),$$

o bien, en términos de δ 's,

$$\begin{aligned} [\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] &= \frac{\hbar^2}{4(p^2 + m^2c^2)} \left(\delta_{ij}^{lm} - \delta_{ij}^{ml} \right) \left(\alpha_m \alpha_l - \tilde{\alpha}_m \alpha_l - \alpha_m \tilde{\alpha}_l + 2\tilde{\alpha}_m \tilde{\alpha}_l \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{4(p^2 + m^2c^2)} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \left(\alpha_m \alpha_l - \tilde{\alpha}_m \alpha_l - \alpha_m \tilde{\alpha}_l + 2\tilde{\alpha}_m \tilde{\alpha}_l \right), \end{aligned}$$

multiplicando por $-i^2 = 1$ y usando la antisimetría del segundo tensor de Levi-Cívita, puede verse que

$$[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = \frac{i\hbar^2}{(p^2 + m^2c^2)} \epsilon_{ijk} \tilde{S}_k.$$

Apéndice B

Teoría de perturbaciones en dinámica cuántica constreñida

En este apéndice consideraremos el problema de eigenvalores para un oscilador armónico bidimensional perturbado. Primeramente, discutiremos la relación entre la descripción del sistema no perturbado en términos de las bases generadas por los eigenestados de dos conjuntos completos de operadores. Posteriormente, aplicaremos el formalismo ordinario de teoría de perturbaciones para estados degenerados al problema completo.

B.1. Dos dimensiones, dos bases

El sistema no perturbado es un oscilador bidimensional cuyo hamiltoniano tiene la forma:

$$H_{-2}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(p_\alpha^2 + \alpha^2) + \frac{1}{2}(p_\beta^2 + \beta^2), \quad (\text{B.1})$$

el cual puede describirse en términos de los eigenestados y eigenvalores de los operadores:

$$N_i = a_i^\dagger a_i, \quad i, j = 1, 2,$$

tales que, [46],

$$N_i |n_1, n_2\rangle = n_i |n_1, n_2\rangle, \quad n_i = 0, 1, \dots,$$

ya que (N_1, N_2) es un conjunto completo de operadores que conmutan entre si. Los operadores a_i y a_i^\dagger son los operadores de creación y aniquilación definidos como:

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i + ip_i), \quad a_i^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i - ip_i),$$

con $x_i = (\alpha, \beta)$ y $p_i = (p_\alpha, p_\beta)$, y satisfacen las relaciones de conmutación:

$$[a_i, a_j] = 0 = [a_i^\dagger, a_j^\dagger], \quad [a_i^\dagger, a_j] = \delta_{ij}.$$

El hamiltoniano (B.1) puede escribirse como $H_{-2} = N_1 + N_2 + 1$ y por tanto satisface la siguiente ecuación de eigenvalores:

$$H_{-2} |n_1, n_2\rangle = (n_1 + n_2 + 1) |n_1, n_2\rangle = (n + 1) |n_1, n_2\rangle, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}. \quad (\text{B.2})$$

Así, vemos que el n -ésimo eigenestado tiene degeneración $g_n = n + 1$, es decir, para un valor de n dado, se cumple:

$$H_{-2} \left(\sum_{n_1=0}^n c_{n_1} |n_1, n - n_1\rangle \right) = (n + 1) \left(\sum_{n_1=0}^n c_{n_1} |n_1, n - n_1\rangle \right), \quad (\text{B.3})$$

donde c_{n_1} son coeficientes constantes.

Sin embargo, para este sistema es posible construir otro conjunto completo de operadores que conmutan entre si (el lector puede consultar [40], por ejemplo), formado por:

$$N = N_1 + N_2 \quad \text{y} \quad L = \alpha p_\beta - \beta p_\alpha = i(a_1 a_2^\dagger - a_1^\dagger a_2),$$

los cuales pueden ser escritos como

$$N = N_+ + N_-, \quad (\text{B.4})$$

$$L = N_+ - N_-, \quad (\text{B.5})$$

con $N_\pm = A_\pm^\dagger A_\pm$, y los operadores A 's, definidos como:

$$A_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 \mp i a_2), \quad A_\pm^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger \pm i a_2^\dagger),$$

satisfacen el álgebra de los operadores de creación y destrucción, *i.e.*,

$$[A_r, A_s] = 0 = [A_r^\dagger, A_s^\dagger], \quad [A_r^\dagger, A_s] = \delta_{rs}, \quad r, s = +, -.$$

Por lo tanto, los operadores N_\pm son operadores de número y cumplen:

$$N_\pm |n_+, n_-\rangle = n_\pm |n_+, n_-\rangle, \quad \text{con} \quad n_\pm \in \mathbb{Z}.$$

Asimismo, podemos ver directamente a partir de la expresión anterior y de (B.4) y (B.5) que

$$N |n_+, n_-\rangle = n |n_+, n_-\rangle, \quad (\text{B.6})$$

$$L |n_+, n_-\rangle = l |n_+, n_-\rangle, \quad (\text{B.7})$$

con

$$n = n_+ + n_-, \quad l = n_+ - n_-.$$

De las relaciones anteriores, podemos notar que para un valor fijo de n ,

$$l = 2n_+ - n,$$

pero dado que $n_- \geq 0$, entonces $0 \leq n_+ \leq n$ para que n se mantenga constante. Así, la

relación anterior implica que,

$$l = -n, 2 - n, \dots, n - 2, n,$$

que corresponden a los g_n estados degenerados. Nótese que dados n_+ y n_- , los eigenvalores de N y L están definidos – y viceversa – de manera que podemos etiquetar los eigenvectores $|n_+, n_- \rangle$ con n y l , esto es, el eigenvector de N y L asociado con los eigenvalores n y l es:

$$|n, l \rangle = \left| n_+ = \frac{n+l}{2}, n_- = \frac{n-l}{2} \right\rangle. \quad (\text{B.8})$$

B.2. Corrección a la energía a primer orden

Consideremos el hamiltoniano perturbado:

$$H(s; \alpha, \beta) = \frac{1}{\eta^2} H_{-2}(\alpha, \beta) + H_0(s; \alpha, \beta) + O(\eta), \quad (\text{B.9})$$

con H_{-2} definido por la expresión (B.1). Como se ha mostrado en la sección anterior, el espectro del hamiltoniano no perturbado es degenerado en general y, por tanto, es necesario usar la teoría de perturbaciones para estados degenerados para resolver el problema de eigenvalores para el hamiltoniano perturbado,

$$H(s; \alpha, \beta) \tilde{\Psi}(s; \alpha, \beta) = \tilde{E} \tilde{\Psi}(s; \alpha, \beta). \quad (\text{B.10})$$

Entonces debemos considerar expansiones de $\tilde{\Psi}$ y \tilde{E} en potencias de η (sin embargo, estamos interesados solamente en la corrección a la energía a primer orden, de manera que conservaremos únicamente la función de onda no perturbada), esto es,

$$\tilde{\Psi}(s; \alpha, \beta) = \frac{1}{\eta^2} \Psi(s; \alpha, \beta) + O(\eta^0). \quad (\text{B.11})$$

y

$$\tilde{E} = \frac{1}{\eta^2} E + \mathcal{E} + O(\eta). \quad (\text{B.12})$$

Más aún, podemos pensar al operador definido por la expresión (B.9) como un operador que actúa en el producto tensorial entre el espacio de Hilbert tangencial y el normal, tal que podemos escribirlo como:

$$H(s; \alpha, \beta) = \frac{1}{\eta^2} \left(H_{-2}(\alpha, \beta) \otimes \hat{\mathbf{1}} \right) + \sum_i \left(H_0^i(\alpha, \beta) \otimes H_0^i(s) \right) + O(\eta). \quad (\text{B.13})$$

De manera similar, la función de onda puede escribirse como $\Psi(s, \alpha, \beta) = \chi(\alpha, \beta) \otimes \psi(s)$, en particular la n -ésima eigenfunción no perturbada más general toma la forma:

$$\Psi_n(s, \alpha, \beta) = \sum_{n_1=0}^n \chi_{n_1, n-n_1}(\alpha, \beta) \otimes \psi_{n_1}(s) = \sum_{l=-n}^n \chi_{n,l}(\alpha, \beta) \otimes \psi_l(s), \quad (\text{B.14})$$

con $\chi_{n_1, n_2}(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta | n_1, n_2 \rangle$ y $\chi_{n, l}(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta | n, l \rangle$.

Sustituyendo las expansiones de la función de onda y de la energía, (B.11) y (B.12), en la ecuación de eigenvalores (B.10), y tomando en cuenta la forma tensorial de la perturbación y la función mostradas arriba, obtenemos la siguiente expresión para el n -ésimo estado:

$$H_0(s; \alpha, \beta) \Psi_n(s; \alpha, \beta) = \mathcal{E}_n \Psi_n(s; \alpha, \beta). \quad (\text{B.15})$$

Proyectando la ecuación anterior en el n_1 -ésimo estado $\langle n'_1, n - n'_1 |$ dentro del subespacio degenerado, obtenemos la ecuación efectiva que aparece en (3.27), y que ha sido considerada por diversos autores [47]:

$$\sum_{n_1} \mathcal{H}_{n'_1, n_1} \psi_{n_1}(s) = \mathcal{E}_n \psi_{n'_1}(s). \quad (\text{B.16})$$

con

$$\mathcal{H}_{n'_1, n_1} = \langle n'_1, n - n'_1 | H_0 | n_1, n - n_1 \rangle. \quad (\text{B.17})$$

Equivalentemente, la ecuación efectiva (B.16) puede interpretarse como la condición que fija la corrección a la energía del eigenestado degenerado Ψ_n , ya que la teoría de perturbaciones para estados degenerados establece que dichas correcciones, a primer orden, resultan de diagonalizar la perturbación en el subespacio generado por los estados degenerados.

Así, nuestro problema se ha reducido a encontrar combinaciones lineales de la forma (B.14) que diagonalicen la matriz mostrada en la expresión anterior. Debido a que la perturbación depende de s , los coeficientes de la combinación serán en general funciones de s , los cuales juegan el papel de las funciones de onda tangenciales en la ecuación efectiva.

Notemos, sin embargo, que eligiendo como base en el espacio normal las funciones $\chi_{nl}(\alpha, \beta)$, el sector normal es diagonal directamente, lo cual puede observarse a partir de la forma explícita de la perturbación (3.43):

$$H_0 = -\frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{1}} \otimes (\partial_s^2 + \kappa^2/4) + \hat{L} \otimes i(\dot{\tau} + 2\tau \partial_s) - \hat{L}^2 \otimes \tau^2 \right). \quad (\text{B.18})$$

Esto es,

$$\mathcal{H}_{l'l} = \mathcal{H}_l \delta_{l'l}, \quad \mathcal{H}_l = -\frac{1}{2} \left(\partial_s^2 + \kappa^2/4 + il(\dot{\tau} + 2\tau \partial_s) - l^2 \tau^2 \right).$$

Y entonces, la Ec. (B.16) se reduce a g_n ecuaciones de eigenvalores, una para cada valor que l puede tomar, *i.e.*,

$$\mathcal{H}_l(s) \psi_{lm}(s) = \mathcal{E}_{lm} \psi_{lm}(s), \quad (\text{B.19})$$

donde m está asociado con una posible discretización de los eigenvalores del l -ésimo operador \mathcal{H}_l . Nótese que los valores que puede tomar l en la ecuación anterior, depende del valor de n , pero no escribiremos tal dependencia explícitamente para mantener la notación ligera.

Similarmente, el potencial que aparece debido al cambio de coordenadas, cuya forma se muestra en (3.86), es decir,

$$\tilde{\mathbf{U}} = \frac{-\epsilon}{\sqrt{2\pi}} \sum_k \left[\frac{1}{\eta} \left(\dot{\phi}_k^n \partial_\alpha + \dot{\phi}_k^b \partial_\beta \right) + \left(\dot{\phi}_k^t \partial_s - ik^2 \dot{\phi}_k^b L + \frac{1}{2} \dot{\phi}_k^n \right) \right] e^{iks},$$

depende de los grados de libertad normales únicamente a través de p_α y p_β , en el primer término, y a través de L , en el segundo. Así, los elementos de matriz $\tilde{U}_{ll'}$ contienen una parte diagonal que se debe a los factores de \tilde{U} que dependen de L , y otra parte proporcional a:

$$\langle nl'|p_\alpha|nl\rangle \quad \text{y} \quad \langle nl'|p_\beta|nl\rangle. \quad (\text{B.20})$$

Usando las expresiones de la sección anterior, se puede mostrar que los p 's pueden escribirse como:

$$p_\alpha = \frac{i}{2}(A_+^\dagger + A_-^\dagger - A_+ - A_-),$$

$$p_\beta = \frac{1}{2}(A_+^\dagger - A_-^\dagger + A_+ - A_-).$$

Además, considerando que los operadores de creación y aniquilación A_\pm y A_\pm^\dagger cambian el valor del índice n_\pm por una unidad pero no modifican el valor de n_\mp cuando actúan sobre los estados $|n_+, n_-\rangle$, podemos notar que el eigenvalor de N asociado con el estado $A_\pm|n_+, n_-\rangle$, también cambia por una unidad, pues como hemos visto $n = n_+ + n_-$. Entonces, encontramos que los elementos de matriz:

$$\langle nl'|A_\pm|nl\rangle \quad \text{y} \quad \langle nl'|A_\pm^\dagger|nl\rangle,$$

son nulos y, dada la dependencia lineal de p_α y p_β en A_\pm y A_\pm^\dagger , podemos concluir que los elementos mostrados en (B.20) también son todos igual a cero.

Y así, hemos demostrado que la matriz $\tilde{U}_{ll'}$, al igual que $\mathcal{H}_{ll'}$, es diagonal en la base de eigenestados de H_{-2} y L .

Ahora, en virtud de que queremos considerar pequeñas deformaciones del círculo, la perturbación tangencial $\mathcal{H}_l(s)$ puede escribirse de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}_l(s) = h_0(s) + \epsilon h_1(s, l) + O(\epsilon^2),$$

nótese que h_0 es independiente de l , pues corresponde al hamiltoniano asociado con el círculo, cuya torsión es igual a cero y todos los términos que dependen de l son proporcionales a la torsión. Es decir, κ y τ tienen la siguiente estructura:

$$\kappa(s) = 1 + \epsilon \kappa_\epsilon(s) + O(\epsilon^2),$$

$$\tau(s) = \epsilon \tau_\epsilon(s) + O(\epsilon^2).$$

Análogamente, las eigenfunciones y energías pueden expandirse como:

$$\mathcal{E}_{lm\lambda} = e_m^{(0)} + \epsilon e_{m\lambda}^{(1)} + O(\epsilon^2)$$

$$\psi_{lm}(s) = \psi_m^{(0)}(s) + \epsilon \psi_m^{(1)}(s) + O(\epsilon^2).$$

De acuerdo con las expansiones anteriores y considerando el orden $O(\epsilon^0)$ de la perturbación (B.18), encontramos que la expresión (B.19) toma la forma:

$$-\frac{1}{2}(\partial_s^2 + 1/4)\psi_m^{(0)}(s) = e_m^{(0)}\psi_m^{(0)}(s).$$

Cuyas soluciones son:

$$\psi_m^{(0)}(s) = \langle s|m^{(0)} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ims},$$

$$e_m^{(0)} = \frac{4m^2 - 1}{8}, \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

Como podemos notar en las expresiones anteriores, el espectro de h_0 es doblemente degenerado para cualquier valor de m distinto de cero. Por lo que debemos usar nuevamente la teoría de perturbaciones para estados degenerados, para encontrar las correcciones a los eigenvalores y eigenfunciones para el m -ésimo nivel, esto es,

$$e_{m\lambda}^{(1)} = u_{\lambda\lambda}^m,$$

$$\psi_{m\lambda}^{(1)}(s) = \sum_{m' \neq m} \left[\frac{u_{m'\lambda}}{\Delta_{mm'}} \left(\psi_{m'}^{(0)}(s) + \sum_{\lambda' \neq \lambda} \frac{u_{\lambda'm'} \varphi_{m\lambda'}^{(0)}(s)}{\Delta_{\lambda\lambda'}} \right) \right].$$

donde los estados

$$\varphi_{m\lambda'}^{(0)}(s) = \langle s|\tilde{m}\lambda^{(0)} \rangle,$$

representan las combinaciones lineales dentro del m -ésimo subespacio degenerado que diagonalizan la perturbación \hat{h}_1 , y el subíndice compuesto λm representa el producto de λ por m , con $\lambda = \pm 1$. Los índices latinos distinguen estados con diferente energía tangencial a través de m , mientras que los griegos señalan la degeneración asociada con el signo de m , $\lambda = \text{sign}(m)$. Asimismo, las relaciones anteriores han sido escritas en términos de las siguientes definiciones:

$$\hat{h}_1(s, l) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_\epsilon}{2} + il(\tau'_\epsilon + 2\tau_\epsilon \partial_s) \right),$$

$$u_{k\lambda} \equiv \langle k^{(0)}|\hat{h}_1(s, l)|\tilde{m}\lambda^{(0)} \rangle,$$

$$u_{\lambda\rho}^m \equiv \langle \tilde{m}\lambda^{(0)}|\hat{h}_1(s, l)|\tilde{m}\rho^{(0)} \rangle,$$

$$\Delta_{mk} \equiv e_m^{(0)} - e_k^{(0)} = \frac{1}{2}(m^2 - k^2),$$

$$\Delta_{\lambda\rho}^m \equiv e_{m\lambda}^{(1)} - e_{m\rho}^{(1)}.$$

Ahora, asumamos que la curva deformada es una curva suave, de tal manera que podemos escribir:

$$\kappa_\epsilon(s) = \sum_{M=-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_M e^{iMs},$$

$$\tau_\epsilon(s) = \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \mathcal{T}_M e^{iMs}.$$

Comparando las expresiones para la curvatura y la torsión en términos del campo de deformación del círculo, (3.59) y (3.60), con las mostradas arriba, podemos encontrar las

siguientes relaciones:

$$\mathcal{K}_M = \frac{(1 - M^2)}{\sqrt{2\pi}} \phi_M^n, \quad \mathcal{T}_M = \frac{iM(1 - M^2)}{\sqrt{2\pi}} \phi_M^b,$$

a partir de las cuales se puede notar que, independientemente de la deformación que hagamos al círculo, las componentes $\mathcal{K}_{\pm 1}$, $\mathcal{T}_{\pm 1}$ y \mathcal{T}_0 son iguales a cero. Las deformaciones que contienen solamente componentes $\phi_{\pm 1}^n$, $\phi_{\pm 1}^b$ o ϕ_0^b , corresponden a traslaciones en el plano $x-y$, rotaciones alrededor de un vector en el plano $x-y$ o traslaciones en el eje z , respectivamente. Los cuales son movimientos rígidos de la curva y, evidentemente, no cambian su geometría.

De manera similar, imponiendo la condición LAP, encontramos que $\phi_M^n = iM\phi_M^t$, entonces $\phi_0^n = 0$ y, por lo tanto, la componente $\mathcal{K}_0 = 0$. En términos geométricos el resultado anterior puede pensarse de la siguiente manera: la deformación producida por la componente ϕ_0^n corresponde a cambiar el radio del círculo, lo cual provoca un cambio en la curvatura por un término constante, lo cual, sin embargo, necesariamente cambia la longitud de arco.

Así, para un valor de m dado, la matriz dentro del subespacio degenerado correspondiente toma la siguiente forma:

$$u_{\lambda'\lambda}^m = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}_{2m} \\ \mathcal{K}_{2m}^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.21})$$

Diagonalizando la matriz anterior, encontramos las correcciones a la energía,

$$u_{\lambda'\lambda}^m = e_{m\lambda}^{(1)} \delta_{\lambda'\lambda},$$

con

$$e_{m\lambda}^{(1)} = \frac{\lambda}{4} |\mathcal{K}_{2m}|, \quad (\text{B.22})$$

y

$$\varphi_{m\lambda}^{(0)}(s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(e^{ims} - \lambda e^{-i(ms+\theta_{2m})} \right), \quad (\text{B.23})$$

donde θ_{2m} es la fase de \mathcal{K}_{2m} .

Ahora, supongamos que nos interesa que la deformación del círculo no rompa la degeneración, entonces tenemos que imponer la condición $e_{lm+}^{(1)} = e_{lm-}^{(1)}$, i.e.

$$\mathcal{K}_{2|m|} = 0, \quad \mathcal{T}_0 = 0,$$

en tal situación, es claro de la expresión (B.21) que $\varphi_{m\lambda}^{(0)} = \psi_{m\lambda}^{(0)}$. Y como resultado, obtenemos que para una curva producida al deformar el círculo arbitrariamente, pero que satisfaga los requerimientos mencionados arriba, la energía para el nm -ésimo nivel es:

$$e_{nm} = \frac{1}{\eta^2} (n+1) + \frac{1}{2} m^2 - \frac{\kappa_0}{4} \left(\frac{1}{2} \kappa_0 + \epsilon \mathcal{K}_0 \right),$$

y tiene un grado de degeneración $2g_n$, de tal modo que cualquier combinación lineal del

tipo:

$$|\Psi_{nm}\rangle = \sum_{l=1}^{g_n} \sum_{\lambda=\pm 1} |\chi_{nl}\rangle \otimes |\psi_{lm\lambda}\rangle$$

es un eigenestado de la energía.

Apéndice C

Ec. de Schrödinger en sistemas no inerciales

En este apéndice describimos cómo transforma la ecuación de Schrödinger bajo cambios de coordenadas generales. También se explora la interpretación física de los distintos elementos que aparecen en la ecuación. En particular, exploramos cómo transforma la fase geométrica bajo este tipo de cambio de coordenadas.

C.1. Campos vectoriales sin divergencia

Para comenzar, consideremos la Ec. de Schrödinger en el espacio Euclideo tridimensional

$$i\partial_t\psi(x, t) = \left(-\frac{1}{2}\nabla^2 + V(x) \right)\psi(x, t), \quad (\text{C.1})$$

Queremos saber cómo se transforma bajo un difeomorfismo general producido por un campo vectorial sin divergencia. De esta manera esperamos obtener la ecuación de Schrödinger que gobierna el comportamiento de sistemas cuánticos descritos por un observador que se mueve a lo largo de las líneas integrales de ese campo vectorial. Estamos interesados solamente en este tipo de campos porque ellos producen transformaciones de coordenadas que preservan volúmenes. Bajo tal difeomorfismo,

$$x^i \longrightarrow y^i = y^i(x, t), \quad (\text{C.2})$$

$$t \longrightarrow t' = t, \quad (\text{C.3})$$

y entonces el lado izquierdo de la Ec. (C.1) se transforma como:

$$i\partial_t\psi(x, t) = i\left(\partial_{t'} + v^i\partial_{y^i} \right)\psi(x, t), \quad (\text{C.4})$$

donde los índices con prima significan derivadas con respecto a las coordenadas y , mientras que las que no tienen, son derivadas con respecto a las x 's. De manera análoga, el lado

derecho queda

$$\left(-\frac{1}{2}\nabla^2 + V(x)\right)\psi(x, t) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{g}}\partial_{i'}g^{i'j'}\sqrt{g}\partial_{j'} + V(x(y, t))\right)\psi(x(y, t'), t'), \quad (\text{C.5})$$

donde $g^{i'j'}$ es la inversa de la métrica Euclideana 3-dimensional escrita en las coordenadas primadas y $g = \det(g_{i'j'}) = 1$ debido a que el volumen se preserva. Así, la ecuación de Schrödinger en el nuevo sistema de coordenadas toma la forma:

$$i\left(\partial_{t'} + v^{i'}\partial_{i'}\right)\psi(x, t) = \left(-\frac{1}{2}\partial_{i'}g^{i'j'}\partial_{j'} + V(x(y, t))\right)\psi(x(y, t'), t'). \quad (\text{C.6})$$

Ahora, hagamos el siguiente ansatz para la función de onda,

$$\psi(x(y, t), t) = e^{-i\alpha(y, t)}\phi(y, t), \quad (\text{C.7})$$

e introduzcámoslo en la Ec. (C.6). Es claro que

$$\partial_{i'}(e^{-i\alpha(y, t)}\phi(y, t)) = e^{-i\alpha(y, t)}(\partial_{i'} - i\partial_{i'}\alpha)\phi(y, t),$$

y consecuentemente, la Ec. (C.6) puede ser traída a la forma:

$$\left(i\partial_{t'} - \frac{1}{2}\Delta - V\right)\phi + i(v - \text{grad}\alpha)^{i'}\partial_{i'}\phi + \frac{i}{2}(\Delta\alpha)\phi + \left(\partial_{t'}\alpha + v^{i'}\partial_{i'}\alpha - \frac{1}{2}(\text{grad}\alpha)^2\right)\phi = 0. \quad (\text{C.8})$$

El campo vectorial sin divergencia más general puede escribirse como

$$v = \text{grad}\beta + \text{rot}H, \quad (\text{C.9})$$

donde β es una función armónica y H es un campo vectorial suave. Escogiendo $\beta = \alpha$ y después de manipulación algebraica, la Ec. (C.8) se simplifica para dar lugar a:

$$\left(i\partial_{t'} - \frac{1}{2}\Delta - V\right)\phi + i(\text{rot}H)^{i'}\partial_{i'}\phi + \left(\partial_{t'}\alpha + (\text{rot}H)^{i'}\partial_{i'}\alpha + \frac{1}{2}(\text{grad}\alpha)^2\right)\phi = 0, \quad (\text{C.10})$$

Consideremos el caso particular en el que el campo vectorial v tampoco tiene rotacional. En tal situación,

$$\alpha = \int v \cdot dy, \quad (\text{C.11})$$

y

$$\partial_{t'}\alpha = \int \partial_{t'}v \cdot dy \quad (\text{C.12})$$

$$= \int \partial_t v \cdot dy - \int (v^{i'}\partial_{i'})v \cdot dy \quad (\text{C.13})$$

$$= \int \partial_t v \cdot dy - \frac{1}{2} \int \text{grad}(v^2) \cdot dy, \quad (\text{C.14})$$

$$(\text{C.15})$$

y entonces, la ecuación (C.10) se reduce a

$$\left(i\partial_{t'} - \frac{1}{2}\Delta - V + \int \mathbf{a} \cdot d\mathbf{y} \right) \phi = 0, \quad (\text{C.16})$$

donde $\mathbf{a} \equiv \partial_t^2 \mathbf{y}$.

C.2. Campos vectoriales generales

Consideremos ahora difeomorfismos generados por campos vectoriales tales que contienen ambas componentes, la rotacional y la solenoidal. Por un lado, el mapeo generado por tales campos no mantiene volúmenes. Por otra parte, bajo una transformación no unitaria, la densidad de probabilidad asociada a un estado cuántico no se conserva. De modo que podríamos esperar que el cambio en el volumen producido por el difeomorfismo en cuestión, fuera compensado si permitimos que α , en (C.7), tenga parte real. En este caso, la Ec. de Schrödinger en el sistema coordenado primado es (C.8), con $\Delta\alpha \neq 0$, y $\alpha \rightarrow a + ib$, donde a, b son funciones reales de (y, t) .

Definamos ahora $A = \text{rot}H$, $E = \text{grad} a$ de tal manera que

$$\mathbf{v} = E + A, \quad (\text{C.17})$$

y la Ec. (C.8) toma la forma:

$$i\partial_{t'}\phi = \left(\frac{1}{2}\Delta + \tilde{V} \right) \phi - i \left(A - i\text{grad} b \right)^{i'} \partial_{t'}\phi, \quad (\text{C.18})$$

con $\tilde{V} = V_R + iV_I$, donde

$$V_R = V - \partial_{t'} a + \frac{1}{2} \left(\Delta b - (\text{grad} b)^2 \right) - \mathbf{v} \cdot E,$$

$$V_I = -\partial_{t'} b - A \cdot \text{grad} b + \frac{1}{2} \text{div} \mathbf{v}.$$

Definiendo¹

$$C \equiv A - i \text{grad} b,$$

$$D_i \equiv \partial_{t'} + iC_i, \quad (\text{C.19})$$

$$\Delta_D \equiv -\frac{1}{\sqrt{g}} D_i g^{ij} \sqrt{g} D_j, \quad (\text{C.20})$$

podemos reescribir de forma más compacta la ecuación (C.18) como:

$$i\partial_{t'}\phi = \left(\frac{1}{2}\Delta_D + \tilde{V}' \right) \phi, \quad (\text{C.21})$$

¹Subimos y bajamos índices con la métrica g_{ij} .

con $\tilde{V}' = V'_R + iV'_I$, donde

$$\begin{aligned} V'_R &= V - \partial_{t'} a - \frac{1}{2} v^2, \\ V'_I &= -\partial_{t'} b + \frac{1}{2} \operatorname{div} v. \end{aligned}$$

Si fijamos b , tal que

$$b = \frac{1}{2} \int (\operatorname{div} v) dt' + F(y), \quad (\text{C.22})$$

con una función arbitraria $F(y)$, podemos eliminar la parte imaginaria del potencial, V'_I . Y así, la ecuación de Schrödinger en el sistema de coordenadas primadas queda como:

$$i\partial_{t'} \phi = \left(\frac{1}{2} \Delta_D + V'_R \right) \phi. \quad (\text{C.23})$$

Aún cuando hemos tenido éxito en escribir la ecuación de Schrödinger en una forma familiar en el sistema de referencia que se mueve, hay aún algunas cosas que aclarar. Por un lado, el vector C que aparece en la derivada covariante parece no ser hermiteano. Por el otro, la manera en la que el factor conforme b ha sido elegido, no parece tener fundamentos físicos.

Examinemos primeramente la interpretación física de nuestra elección (C.22). La densidad de probabilidad asociada con la función de onda $\psi(x, t)$ en el sistema de coordenadas primado es

$$d^3x |\psi(x, t)|^2. \quad (\text{C.24})$$

Como es usual, en el sistema primado transforma como:

$$\sqrt{g(y, t')} |\psi(y, t')|^2 d^3y = \sqrt{g(y, t')} e^{2b(y, t')} |\phi(y, t')|^2 d^3y, \quad (\text{C.25})$$

donde $g = \det(g_{ij})$, con g_{ij} siendo la métrica inducida en éste último sistema. Ahora, para que el observador que se mueve interprete la función de onda ϕ de la manera estándar, $\sqrt{g}e^{2b}$ debe permanecer constante en el tiempo (primado). Las coordenadas de un punto “físico”² en el marco primado para tiempos (primados) infinitesimalmente cercanos están relacionadas a través de:

$$z^i(x) = y^i(x) + v^i(x)\delta t', \quad (\text{C.26})$$

de tal manera que

$$\sqrt{g(z)} = \sqrt{g(y)} \left(1 - \delta t' (\operatorname{div} v) \right) + O(\delta t'^2). \quad (\text{C.27})$$

Similarmente, podemos relacionar el factor conforme a distintos tiempos por:

$$e^{2b(z)} = e^{2b(y)} \left(1 + 2\delta t' \partial_{t'} b(y) \right) + O(\delta t'^2). \quad (\text{C.28})$$

Entonces, la independencia de $\sqrt{g}e^{2b}$ en el tiempo,

$$0 = \frac{\delta}{\delta t'} \left(\sqrt{g}e^{2b} \right) = 2\partial_{t'} b(y) - \operatorname{div} v, \quad (\text{C.29})$$

²Es decir, un punto con coordenadas sin prima constantes.

implica que la parte imaginaria del potencial, V_I , debe anularse. Esto es, la forma en la que se ha fijado b permite pensar a $\phi(y, t')$ como la función de onda en el sistema primado.

Ahora, consideremos el producto interno

$$\langle \chi | iD_i \varphi \rangle = i \int \sqrt{g} d^3y \chi^* D_i \varphi, \quad (\text{C.30})$$

para funciones arbitrarias χ y φ . La expresión (C.30) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \langle \chi | iD_i \varphi \rangle &= i \int \sqrt{g} d^3y \left(\chi^* (\partial_{i'} + iC_i) \varphi \right), \\ &= \int \sqrt{g} d^3y \left[\left(i(iC_i^*) \chi \right)^* \varphi + i\chi \partial_{i'} \varphi \right], \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

integrando por partes, el último término de la expresión anterior da

$$i \int \sqrt{g} d^3y \chi \partial_{i'} \varphi = \int \sqrt{g} d^3y \left[\left(i(\partial_{i'} + \partial_{i'} \ln \sqrt{g}) \chi \right)^* \varphi \right], \quad (\text{C.32})$$

y así, la expresión (C.31) toma la forma:

$$\begin{aligned} \langle \chi | iD_i \varphi \rangle &= \int \sqrt{g} d^3y \left[\left(i(\partial_{i'} + \partial_{i'} \ln \sqrt{g} + iA - \partial_{i'} b) \chi \right)^* \varphi \right], \\ &= \langle iD_i \chi | \varphi \rangle + \langle i(\partial_{i'} \ln \sqrt{g} - 2\partial_{i'} b) \chi | \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

A partir de (C.33), podemos ver que para que D sea hermítico, $\partial_{i'} b$ debe ser fijado como:

$$\partial_{i'} b = \frac{1}{2} \partial_{i'} \ln \sqrt{g}. \quad (\text{C.34})$$

La única cuestión pendiente es si (C.22) y (C.34) son consistentes.

C.3. Fases geometricas en marcos de referencias no inerciales.

C.3.1. Caso General

Nos gustaría ahora buscar soluciones a la ecuación (C.23) cuando $E = 0$ - y entonces $\text{div } v = 0$ y podemos elegir $a, b = 0$. Asumiremos que el sistema está en el régimen adiabático. La ecuación (C.23) en este caso se reduce a

$$i\partial_{t'} \phi = \left(\frac{1}{2} \Delta + V \right) \phi - (iA^i \partial_{i'}) \phi.$$

La expresión anterior puede escribirse como:

$$i\partial_{t'} \phi = \left(H_0 + \lambda h(t') \right) \phi, \quad (\text{C.35})$$

donde $H_0 = \frac{1}{2} \Delta + V$ y $h = -iA^i \partial_{i'}$. La Ec. (C.35) puede ser entonces tratada con la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo estándar, *i.e.*, la evolución temporal del estado

del sistema para $t' > t'_0$ está dada en el cuadro de interacción por:

$$|\phi, t'\rangle_I = U_I(t', t'_0) |\phi, t'_0\rangle_I, \quad (\text{C.36})$$

con

$$U_I(t', t'_0) = \mathcal{T} \exp \left(-i \int_{t'_0}^{t'} d\tau \lambda h_I(\tau) \right), \quad (\text{C.37})$$

donde \mathcal{T} es el símbolo de ordenamiento temporal, y $h_I(\tau) = e^{-iH_0\tau} h(\tau) e^{iH_0\tau}$.

El estado (C.36) puede expandirse en la base de los eigenestados de H_0 , $\{|n\rangle\}$ - los cuales, asumimos, no son degenerados - como sigue:

$$|\phi, t'\rangle_I = \sum_n c_n(t') |n\rangle, \quad (\text{C.38})$$

donde

$$c_n(t') = \langle n | U_I(t', t'_0) | \phi, t'_0 \rangle_I. \quad (\text{C.39})$$

Supongamos que a tiempo t'_0 el estado del sistema es el i -ésimo eigenvector de H_0 , *i.e.*, $|\phi, t'_0\rangle_I = |i\rangle$. Debido a que el sistema evoluciona en el tiempo adiabáticamente, U_I no mezcla estados con distinta energía (no perturbada), y entonces el estado del sistema a tiempos posteriores está dado por $|\phi, t'\rangle_I = c_i(t') |i\rangle$. Es decir, solamente nos interesa el i -ésimo coeficiente,

$$\begin{aligned} c_i(t') &= \langle i | U_I(t', t'_0) | i \rangle, \\ &= 1 - i\lambda \int_{t'_0}^{t'} d\tau \langle h(\tau) \rangle_{ii} + (-i)^2 \lambda^2 \int_{t'_0}^{t'} d\tau \int_{t'_0}^{\tau} d\tau' \langle h_I(\tau) h_I(\tau') \rangle_{ii} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

donde $\langle O \rangle_{nm} \equiv \langle n | O | m \rangle$. El coeficiente anterior, en el régimen adiabático es una fase. El tercer término en la expresión mostrada arriba puede escribirse de la siguiente manera:

$$c_i^{(2)}(t') = \sum_m (-i)^2 \lambda^2 \int_{t'_0}^{t'} d\tau \int_{t'_0}^{\tau} d\tau' e^{i\omega_{im}(\tau-\tau')} \langle h(\tau) \rangle_{im} \langle h(\tau') \rangle_{mi}, \quad (\text{C.41})$$

donde ω_{nm} es la diferencia entre el n -ésimo y el m -ésimo valores de energías no perturbadas. Ahora, consideremos la integral sobre $d\tau'$ en la Ec. (C.41):

$$\int_{t'_0}^{\tau} d\tau' e^{-i\omega_{im}\tau'} \langle h(\tau') \rangle_{mi} = e^{-i\omega_{im}\tau'} \langle h(\tau') \rangle_{mi} \Big|_{t'_0}^{\tau} - i \int_{t'_0}^{\tau} d\tau' e^{-i\omega_{im}\tau'} \frac{\langle \partial_{\tau'} h(\tau') \rangle_{mi}}{\omega_{im}}, \quad (\text{C.42})$$

dado que el sistema está en el régimen adiabático, el segundo término del lado derecho de la expresión anterior puede despreciarse. El coeficiente $c_i^{(2)}(t')$ contiene información de la fase geométrica, y además correcciones de segundo orden a la energía.

Por el momento, consideremos el caso en el que el hamiltoniano de interacción $h(t')$ depende de dos parámetros externos ξ y ζ , y sus primeras derivadas temporales $\dot{\xi}$ y $\dot{\zeta}$, de manera que $h(t') = \xi h_\xi + \zeta h_\zeta + \dot{\xi} h_{\dot{\xi}} + \dot{\zeta} h_{\dot{\zeta}}$. Ahora, consideramos que el sistema recorre el círculo en el espacio de parámetros ξ - ζ : $\xi = \lambda(\cos \omega t - 1)$, $\zeta = \lambda \sin \omega t$ con $\omega \ll E_{ik}$ para todo k , como adiabaticidad demanda (nótese que es una deformación cíclica para $t = 2\pi T/\omega$). Con

esta forma de h , el coeficiente c_i puede ser calculado explícitamente a orden no trivial más bajo, y resulta que la parte independiente de ω puede ser identificada con (i veces) la fase geométrica, la cual toma la forma:

$$\gamma_i(T) = -2\pi i \lambda^2 \sum_{k \neq i} \frac{1}{E_{ik}^2} \left(\text{Im}(h_{\xi_{ik}} h_{\zeta_{ki}}) + \text{Re}(h_{\xi_{ik}} h_{\dot{\zeta}_{ki}} - h_{\dot{\xi}_{ki}} h_{\zeta_{ik}}) \right). \quad (\text{C.43})$$

Si dividimos entre el área del círculo trazado por el sistema en el plano ξ - ζ , obtenemos la curvatura:

$$K_{\xi\zeta} = -2 \sum_{k \neq i} \frac{1}{E_{ik}^2} \left(\text{Im}(h_{\xi_{ik}} h_{\zeta_{ki}}) + \text{Re}(h_{\xi_{ik}} h_{\dot{\zeta}_{ki}} - h_{\dot{\xi}_{ki}} h_{\zeta_{ik}}) \right). \quad (\text{C.44})$$

C.3.2. Caso unidimensional.

Consideremos ahora la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo unidimensional:

$$i\partial_t \Psi(x, t; \xi) = H(x, \xi) \Psi(x, t; \xi), \quad (\text{C.45})$$

con

$$H(x, \xi) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, \xi),$$

donde $\xi = \xi(t)$ representa un conjunto de parámetros externos que cambian de manera adiabática. Imponiendo la condición inicial $\Psi(x, 0; \xi_0) = \psi_n(x, \xi)$, la solución de la Ec. (C.45) es:

$$\Psi(x, t; \xi) = e^{i(\delta_n - \gamma_n)} \psi_n(x, \xi), \quad (\text{C.46})$$

donde $\psi_n(x, \xi)$ es un eigenestado instantáneo de H con eigenvalor instantáneo $E_n(\xi)$, y $\delta_n(t)$ y $\gamma_n(t)$ son las fases dinámica y geométrica, respectivamente, y están dadas por:

$$\delta_n(t) = \int dt E_n(\xi(t)), \quad (\text{C.47})$$

$$\gamma_n(t) = i \int dt \langle \psi_n(x, \xi) | \partial_t \psi_n(x, \xi) \rangle. \quad (\text{C.48})$$

Ahora, hagamos el siguiente cambio de coordenadas:

$$x \rightarrow x' = x + f(\xi), \quad (\text{C.49})$$

$$t \rightarrow t' = t. \quad (\text{C.50})$$

Definiendo $v(\xi) = \partial_t x'$, la Ec.(C.45) en el sistema transformado queda:

$$i \left(\partial_{t'} + v(\xi) \partial_{x'} \right) \tilde{\Psi}(x', t'; \xi) = \tilde{H}(x', \xi) \tilde{\Psi}(x', t'; \xi). \quad (\text{C.51})$$

En analogía al caso de las coordenadas no primadas, $\tilde{\Psi}(x', t'; \xi)$ está dado por:

$$\tilde{\Psi}(x', t'; \xi) = e^{-i(\delta_n - \gamma_n')} \tilde{\psi}_n(x', \xi), \quad (\text{C.52})$$

con

$$\delta_n(t') = \int dt' E_n(\xi(t')), \quad (\text{C.53})$$

$$\gamma'_n(t') = i \int dt' \left(\langle \tilde{\psi}_n(x', \xi) | \partial_{t'} \tilde{\psi}_n(x', \xi) \rangle + \langle \tilde{\psi}_n(x', \xi) | v \partial_{x'} \tilde{\psi}_n(x', \xi) \rangle \right), \quad (\text{C.54})$$

y $\tilde{\psi}_n$ es el eigenestado instantáneo de $\tilde{H}(x', \xi)$ con eigenvalores $E_n(\xi)$. Nótese que debido a que $\tilde{H}(x', \xi) = H(x' - f, \xi)$, entonces

$$\tilde{\psi}_n(x', \xi) = \psi_n(x' - f, \xi),$$

y por lo tanto, comparando las expresiones (C.48) y (C.54), obtenemos $\gamma_n(t) = \gamma'_n(t')$. Vale la pena mencionar que, descrito en el sistema de referencia no primado, el segundo término en el lado derecho de la expresión (C.54) resulta del hecho de que las coordenadas primadas cambian con el tiempo, mientras que desde el punto de vista primado, éste aparece como una fuerza inercial. Nótese también que, en virtud de que el cambio con respecto al tiempo no primado difiere del cambio con respecto al tiempo primado, el régimen adiabático en los dos sistemas de coordenadas es distinto.

Apéndice D

Teoría de perturbaciones y fases geométricas

En este apéndice se deriva la forma que toma la curvatura de Berry perturbativamente, en particular se discuten los términos relevantes en la expansión del estado perturbado para calcular la fase geométrica que éste acumula. Similarmente, se presenta un análisis de la fase de Berry para sistemas con dos parámetros pequeños.

D.1. Fase geométrica perturbativa

Consideremos el siguiente problema de eigenvalores:

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (\text{D.1})$$

donde el hamiltoniano depende de un conjunto de parámetros externos X y puede escribirse como:

$$H(X) = H_0 + \epsilon H_1(X) + \epsilon^2 H_2(X). \quad (\text{D.2})$$

Asumiendo que las eigenfunciones $|n^{(0)}\rangle$ y eigenenergías $E_n^{(0)}$ del hamiltoniano no perturbado, tales que,

$$H_0|n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)}|n^{(0)}\rangle, \quad (\text{D.3})$$

son conocidas, podemos tratar el problema con el formalismo de teoría de perturbaciones.

Consideremos por simplicidad el caso en el que el n -ésimo estado de H_0 es no-degenerado. Entonces, de acuerdo con la teoría de perturbaciones para estados no-degenerados estándar [46], sabemos que $|n\rangle$ a orden ϵ^2 está dado por:

$$|n\rangle = |n^{(0)}\rangle + \epsilon|n^{(1)}\rangle + \epsilon^2|n^{(2)}\rangle, \quad (\text{D.4})$$

donde

$$|n^{(1)}\rangle = \sum_{k \neq n} \frac{U_{kn}}{\Delta_{nk}} |k^{(0)}\rangle, \quad (\text{D.5})$$

$$|n^{(2)}\rangle = \sum_{k \neq n} \left(\sum_{l \neq n} \frac{U_{kl}U_{ln}}{\Delta_{nk}\Delta_{nl}} + \frac{V_{nn}}{\Delta_{kn}} - \frac{U_{kn}U_{nn}}{\Delta_{nk}^2} \right) |k^{(0)}\rangle, \quad (\text{D.6})$$

$$E_n = E_n^{(0)} + \epsilon U_{nn} + \epsilon^2 \left(V_{nn} + \sum_{k \neq n} \frac{U_{kn}U_{nk}}{\Delta_{nk}} \right), \quad (\text{D.7})$$

con

$$\begin{aligned} U_{nk} &\equiv \langle n^{(0)} | H_1 | k^{(0)} \rangle, \\ V_{nk} &\equiv \langle n^{(0)} | H_2 | k^{(0)} \rangle, \\ \Delta_{nk} &\equiv E_n^{(0)} - E_k^{(0)}. \end{aligned}$$

El estado perturbado mostrado en (D.6) no está normalizado a la unidad, *i.e.*,

$$\langle n | n \rangle = 1 + \epsilon^2 \sum_{k \neq n} \left(\frac{U_{nk}U_{kn}}{\Delta_{nk}^2} \right) = 1 + \epsilon^2 \Lambda.$$

Entonces definimos el estado,

$$|N\rangle = \left(1 - \frac{\epsilon^2}{2} \Lambda \right) |n\rangle,$$

de modo tal que $\langle N | N \rangle = 1$. Nótese que la corrección al estado a orden ϵ^2 que depende de H_2 es ortogonal al estado original. Así, la componente μ -ésima de la conexión de Berry puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu^n = i \langle N | \partial_\mu | N \rangle &= i \left(1 - \frac{i\epsilon^2}{2} \Lambda \right) \langle n | \partial_\mu | n \rangle - \frac{\epsilon}{2} (\partial_\mu \Lambda) \langle n | n \rangle \\ &\approx i \left(1 - \frac{\epsilon^2}{2} \Lambda \right) \langle n | \partial_\mu | n \rangle - \frac{i\epsilon}{2} (\partial_\mu \Lambda). \end{aligned}$$

Debido a que el hamiltoniano no-perturbado no depende de los parámetros externos y, por tanto, tampoco sus eigenestados, el término $\partial_\mu |n\rangle$ que aparece en la relación mostrada arriba es de orden ϵ . Como consecuencia, la expresión anterior queda de la siguiente forma:

$$\mathcal{A}_\mu^n = i \langle n | \partial_\mu | n \rangle - \frac{i\epsilon}{2} (\partial_\mu \Lambda) + O(\epsilon^3). \quad (\text{D.8})$$

Por otro lado, la 2-forma de curvatura del n -ésimo estado, $\mathcal{K}^n = d\mathcal{A}^n$, tiene componentes dadas por:

$$\mathcal{K}_{\mu\nu}^n = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^n - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^n.$$

Considerando la expresión (D.8), encontramos que la curvatura de Berry, a orden ϵ^2 , se

reduce a:

$$\mathcal{K}^n = i \left(\partial_\mu \langle n | \partial_\nu | n \rangle - \partial_\nu \langle n | \partial_\mu | n \rangle \right) dX^\mu \wedge dX^\nu + O(\epsilon^3). \quad (\text{D.9})$$

Es decir, para calcular la fase geométrica para el n -ésimo estado en la aproximación que estamos haciendo, podemos considerar el estado perturbado no normalizado cuya forma explícita se muestra en (D.6). Más aún, la segunda corrección $|n^{(2)}\rangle$ que se muestra en (D.6) no contribuye a la curvatura a orden ϵ^2 porque es ortogonal al estado no perturbado. De manera que para encontrar la fase geométrica para el estado $|n\rangle$ a $O(\epsilon^2)$ basta con considerar el estado normalizado y su primera corrección.

La conclusión anterior, aunque ha sido obtenida mediante un análisis válido para estados no-degenerados, es cierta también para estados degenerados e incluso para estados cuya degeneración no se rompe por la perturbación, la diferencia estriba en la forma explícita de la corrección al estado, $|n_i^{(1)}\rangle$.

D.2. Teoría de perturbaciones con dos parámetros

Consideremos el problema de Berry con el hamiltoniano H que depende de dos parámetros pequeños ξ y ζ , de tal manera que puede escribirse como una expansión de la siguiente forma:

$$H = H^0 + \xi H^{10} + \zeta H^{01} + \xi^2 H^{20} + \zeta^2 H^{02} + \xi\zeta H^{11} + \dots \quad (\text{D.10})$$

Nos gustaría encontrar una expresión para $|n\rangle$, tal que

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (\text{D.11})$$

y cuya estructura sea del tipo:

$$|n\rangle = |n^0\rangle + \xi |n^{10}\rangle + \zeta |n^{01}\rangle + \xi^2 |n^{20}\rangle + \zeta^2 |n^{02}\rangle + \xi\zeta |n^{11}\rangle + \dots \quad (\text{D.12})$$

con

$$H^0 |n^0\rangle = E_n^0 |n^0\rangle. \quad (\text{D.13})$$

Si lo anterior es posible, entonces la expresión para la curvatura de Berry dada en la expresión () se reduce, a orden dominante, a la siguiente relación:

$$\mathcal{K}^n = i [\langle n^{10} | n^{01} \rangle - \langle n^{01} | n^{10} \rangle] d\xi \wedge d\zeta = -2 \text{Im} [\langle n^{10} | n^{01} \rangle] d\xi \wedge d\zeta. \quad (\text{D.14})$$

No obstante, hay dos situaciones en las que la expresión (D.12) deja de ser válida. Esto es cuando pequeñas perturbaciones del sistema resultan en cambios finitos en los estados. Por ejemplo, pensemos en la siguiente situación clásica: consideremos un péndulo rígido restringido a oscilar en un plano en la presencia de un campo gravitacional uniforme en la dirección vertical. Si la posición del plano es horizontal, entonces el sistema es degenerado puesto que cualquier configuración del péndulo está asociada con la misma energía. Sin embargo, si perturbamos el sistema rotando el plano alrededor de cualquier vector horizontal por un ángulo pequeño, la degeneración se remueve y el péndulo elegirá una dirección particular, definida por dicha rotación. Si ahora rotamos el plano por un ángulo infinitesimal alrededor de, digamos el eje x , entonces el péndulo “saltará” a la dirección x . Así, vemos

que una pequeña perturbación al sistema se traduce en un cambio finito en el estado del sistema.

Usualmente en la teoría de perturbaciones en los libros de textos se consideran perturbaciones alrededor de un sólo parámetro [46], de modo que el escenario anterior no se presenta. Regresando al caso cuántico, nos gustaría saber en qué casos es posible aproximar el estado del sistema a través de la expansión (D.12). Para ello, expandamos la Ec. (D.11) y analicemos cada orden. Pero antes, definamos las cantidades siguientes:

$$U_{kl}^{ij} = \langle k^0 | H^{ij} | l^0 \rangle \quad (D.15)$$

$$\Delta_{kl}^{ij} = E_k^{ij} - E_l^{ij} \quad (D.16)$$

$$|n_\alpha^{ij}\rangle = \sum_{k \neq n} a_{\alpha k}^{ij} |k^0\rangle + \sum_{\beta \neq \alpha} b_{\alpha \beta}^{ij} |n_\beta^0\rangle, \quad (D.17)$$

Donde los índices griegos en la última línea señalan la posible degeneración en los eigenestados de H^0 con energía E_n^0 , y toman valores, como en el segundo término, en el subespacio generado por los estados degenerados. Abusando de la notación, para mantenerla simple, escribiremos $U_{kn_\alpha}^{ij} = U_{k\alpha}^{ij}$. Ahora, expandamos la Ec. (D.11) y proyectemos el resultado a cada orden. Las ecuaciones relevantes son:

$$a_{\nu k}^{10} = \frac{U_{k\nu}^{10}}{\Delta_{nk}^0} \quad (D.18)$$

$$a_{\nu k}^{01} = \frac{U_{k\nu}^{01}}{\Delta_{nk}^0} \quad (D.19)$$

$$U_{\mu\nu}^{10} = 0 \quad (\mu \neq \nu) \quad (D.20)$$

$$U_{\mu\nu}^{01} = 0 \quad (\mu \neq \nu) \quad (D.21)$$

Notemos que mientras las dos primera expresiones arriba tienen información sobre la expansión, las otras dos imponen condiciones sobre la expansión, ya que requieren que ambas perturbaciones sean diagonalizadas simultáneamente en el espacio degenerado. Esta condición no puede satisfacerse siempre, pero es necesaria para construir (D.12). También podemos notar que si el estado que queremos aproximar no es degenerado, las condiciones anteriores se cumplen trivialmente. Podemos ver, por otro lado, que los coeficientes $b_{\nu\mu}$ aún no están determinados, para fijarlos es necesario considerar el siguiente orden en la expansión, *i.e.*,

$$\Delta_{\nu\mu}^{10} b_{\nu\mu}^{10} = U_{\mu\nu}^{20} + a_{\nu k}^{10} U_{\nu k}^{10} \quad (D.22)$$

$$\Delta_{\nu\mu}^{01} b_{\nu\mu}^{01} = U_{\mu\nu}^{02} + a_{\nu k}^{01} U_{\nu k}^{01} \quad (D.23)$$

$$\Delta_{\nu\mu}^{10} b_{\nu\mu}^{01} + \Delta_{\nu\mu}^{01} b_{\nu\mu}^{10} = U_{\mu\nu}^{11} + a_{\nu k}^{10} U_{\nu k}^{01} + a_{\nu k}^{01} U_{\nu k}^{10}, \quad (D.24)$$

con $\mu \neq \nu$. Consideremos ahora los distintos casos separadamente,

1. $|n^0\rangle$ es **no degenerado**. Las ecuaciones (D.22) se satisfacen trivialmente y la expansión puede hacerse.
2. $|n^0\rangle$ es **degenerado pero ambas perturbaciones**, H^{10} y H^{01} , **remueven la**

degeneración. En este caso, las primeras dos ecuaciones de (D.22) definen los coeficientes $b_{\nu\mu}$ y las otras dos imponen condiciones sobre $U_{\mu\nu}^{11}$ para que la expansión pueda hacerse.

3. $|n^0\rangle$ es degenerado y solamente H^{10} rompe la degeneración. En este caso (D.22) se reduce a:

$$b_{\nu\mu}^{10} = \frac{U_{\mu\nu}^{20} + a_{\nu k}^{10} U_{\nu k}^{10}}{\Delta_{\nu\mu}^{10}} \quad (\text{D.25})$$

$$0 = U_{\mu\nu}^{02} + a_{\nu k}^{01} U_{\nu k}^{01} \quad (\text{D.26})$$

$$b_{\nu\mu}^{01} = \frac{U_{\mu\nu}^{11} + a_{\nu k}^{10} U_{\nu k}^{01} + a_{\nu k}^{01} U_{\nu k}^{10}}{\Delta_{\nu\mu}^{10}}, \quad (\text{D.27})$$

y así obtenemos los $b_{\nu\mu}$ y encontramos otra restricción para que la aproximación perturbativa sea válida.

4. $|n^0\rangle$ es degenerado y ninguno, H^{10} ni H^{01} , rompen la degeneración. En esta situación no tenemos información acerca de los $b_{\nu\mu}$ y únicamente tenemos condiciones sobre la expansión.

Bibliografía

- [1] D. V. Ahluwalia. Quantum Measurements, Gravitation and Locality, 1994, *Phys. Lett. B* **339** 301-303.
- [2] D. Amati, M. Ciafaloni and G. Veneciano. Can Spacetime be Probed Below the String Size?, 1989, *Phys Lett B*, **216** 41.
- [3] J. Ambjorn, J. Jurkiewicz, and R. Loll. Quantum Gravity, or the Art of Building Spacetime, 2006.
- [4] A.P. Balachandran, S. K urk uoglu, S. Vaidya. Lectures on Fuzzy and Fuzzy SUSY Physics, 2006, [hep-th/0511114](#).
- [5] B. Basu, Subir Ghosh, S. Dhar. Noncommutative Geometry and Geometric Phases, 2006, *Europhys. Lett.* **76** 395-401
- [6] A. Berard and H. Mohrbach. Monopole in Momentum Space in Noncommutative Quantum Mechanics, 2004, *Phys. Rev. D* **69** 127701.
- [7] A. Berard and H. Mohrbach. Nonabelian Berry Phase in Noncommutative Quantum Mechanics, 2006, *Phys. Lett. A* **352** 190-195.
- [8] M. Berry. Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes, 1984, *Proc. Royal Soc. Lon.* **392** 45-57.
- [9] M. Berry. The Quantum Phase, Five Years After, 1989, *Geometric Phases in Physics*, (Singapore: World Scientific).
- [10] A. Bette. On a Poitlike Relativistic Massive and Spinning Particle, 1984, *J. Math. Phys.* **25** 2456.
- [11] L. Bombelli, J. Lee, D. Meyer, and R. Sorkin. Spacetime as Causal Set, 1987, *Phys. Rev. Lett.*, **59** 521-524.
- [12] G. Amelino-Camelia. Relativity in Spacetimes with Short Distance Structure Governed by an Observer Independent (Planckian) Length Scale, 2002, *Int. J. Mod. Phys. D* **11** 35-60.

- [13] J. L. Carmona, J. L. Cortes, J. Gamboa, and F. Mendez. Noncommutativity in Field Space and Lorentz Invariance Violation, 2003, *Phys. Lett. B* **565** 222-228.
- [14] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane, and T. Okamoto. Noncommutative Field Theory and Lorentz Violation, 2001, *Phys. Rev. Lett.* **87** 141601.
- [15] R. Casalbuoni, 1976, *Nuovo Cimento A* **33** 389.
- [16] C. Chryssomalakos and D. Sudarsky. On the Geometrical Character of Gravitation, 2003, *Gen. Rel. Grav.* **35** 605-617.
- [17] C. Chryssomalakos and E. Okon, Generalized Quantum Relativistic Kinematics: A Stability Point of View, 2004, *Int. J. Mod. Phys. D* **13** 2003-2034. C. Chryssomalakos and E. Okon, Generalized Quantum Relativistic Kinematics: A Stability Point of View, 2004, *Int. J. Mod. Phys. D* **13** 2003-2034.
- [18] C. Chryssomalakos, H. Hernandez, E. Okon, and P. Vazquez Montejó. Natural Noncommutativity in Special and General Relativity, 2007, *J. Phys.: Conf. Ser.* **67** 012057.
- [19] C. Chryssomalakos, H. Hernandez, E. Okon, and P. Vazquez Montejó. Towards a First-Principles Approach to Spacetime Noncommutativity, 2007, *J. Phys.: Conf. Ser.* **68** 012003.
- [20] C. Chryssomalakos, D. Gelbwaser-Klimovsky, H. Hernandez and E. Okon. Wires with Quantum Memory. *Mod. Phys. Lett. A*, 2008, **23** 3087-3094.
- [21] C. Chryssomalakos, H. Hernandez and E. Okon. Quantum Geometric Phases in Deformable Extended Objects. *AIP Conference Proceedings*, 2008, **1079** 76-81.
- [22] C. Chryssomalakos, H. Hernandez-Coronado and E. Okon. The Center of Mass in Special and General Relativity and its Role in an Effective Description of Spacetime, 2009, [gr-qc/0901.3349](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0901.3349).
- [23] A. Corichi, M. Ryan and D. Sudarsky. Quantum Geometry as a Relational Construct, 2002, *Mod. Phys. Lett. A* **19** 555-567.
- [24] R. C. T. da Costa, 1982, *Phys. Rev. A* **23**: 1982.
- [25] P. M. A. Dirac. The electron Wave Equation in De-Sitter Space, 1935, *Annals Math.* **36** 657-669.
- [26] P. M. A. Dirac. Forms of Relativistic Dynamics, 1949, *Rev. Mod. Phys.* **21** 392-399.
- [27] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts. Spacetime Quantization Induced by Classical Gravity, 1994, *Phys. Lett. B* **331** 39-44.
- [28] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts. The Quantum Structure of Spacetime at the Planck Scale and Quantum Fields, 1995, *Commun. Math. Phys.* **172** 187-220.
- [29] T. Frankel. *The Geometry of Physics*, Cambridge, 2004.
- [30] F. Girelli and E. R. Livine. Non-Commutativity of Effective Space-Time Coordinates and the Minimal Length, 2007, [hep-th/0708.3813](https://arxiv.org/abs/hep-th/0708.3813).

- [31] W. Greiner. *Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations*. Springer, 2005.
- [32] B. Hatfield. *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*. Westview Press, 1992.
- [33] P. A. Horváthy. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 2006, **2**
- [34] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Willey, 1999.
- [35] T. F. Jordan and N. Mukunda. Lorentz-covariant position operators for spinning particles, 1963, *Phys. Rev.* **132** 1842.
- [36] J. Kowalsky-Glickman, Introduction to Doubly Special Relativity, 2004, hep-th/0405273.
- [37] H. Kuratsuji and S. Iida, 1985, *Prog. Theo. Phys.* **74**: 439.
- [38] J. Madore. *An introduction to Non-commutative Geometry and its Physical Applications*, Cambridge, 1995.
- [39] S. Majid. *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambridge, 2000.
- [40] A. Messiah. *Quantum Mechanics*, Dover, 1999.
- [41] J. Moody, A. Shapere and F. Willczek, 1989, *Geometric Phases in Physics*, (Singapore: World Scientific).
- [42] G. Panati, H. Spohn and S. Teufel. Space-Adiabatic Perturbation theory in Quantum Dynamics, *Phys. Rev. Lett.*, 2002, **88** (25).
- [43] M. H. L. Pryce. The Mass-Centre in the Restricted Theory of Relativity and its Connection with the Quantum Theory of Elementary Particles, 1948, *Proc. Royal Soc. Lon.* **195** 62-81.
- [44] C. Rovelli. *Quantum Gravity*, Cambridge, 2004.
- [45] C. Rovelli and L. Smolin. Discreteness of Area and Volume in Quantum Gravity, *Nucl Phys B*, 1995, **442** 593-622. Erratum: *Nucl Phys B*, 1995, **456** 734.
- [46] J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*, Willey, 1990.
- [47] P. C. Schuster and R. L. Jaffe. Quantum Mechanics on Manifolds Embedded in Euclidean Space. hep-th/0302216.
- [48] B. Simon. Holonomy, the Quantum Adiabatic Theorem, and Berry's Phase. *Phys. Rev. Lett.*, 1983, **51** 2167.
- [49] H. S. Snyder. Quantized Space-Time. *Phys. Rev.*, 1947 **71** 38.
- [50] B. Thaller. *The Dirac Equation*, Springer Verlag, 1992.
- [51] F. Wilczek and A. Zee. Appearance of Gauge Structure in Simple Dynamical Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1984, **52** 2111-2114.