**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

# ALGO MAS QUE SOLO HACER CUENTAS

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**MATEMATICAS**

**P R E S E N T A :**

**JERSAIN SOTO TORRES**

**DIRECTOR DE TESIS:**
**DOCTOR ALEJANDRO RICARDO GARCIADIEGO DANTAN**
**2009**

# ALGO MÁS QUE SÓLO HACER CUENTAS

1. Datos del alumno
   Soto
   Torres
   Jersain
   52 73 53 74
   Universidad Nacional Autonoma de Mexico
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   097188788

2. Datos del tutor
   Dr
   Alejandro Ricardo
   Garciadiego
   Dantan

3. Datos del sinodal 1
   Mat
   Concepción
   Ruiz
   Ruiz-funes

4. Datos del sinodal 2
   Mat
   Julio César
   Guevara
   Bravo

5. Datos del sinodal 3
   M en F
   Ana María
   Sánchez
   Mora

6. Datos del sinodal 4
   M en C E
   Luz Arely
   Carrillo
   Olvera

7. Datos del trabajo escrito
   Algo mas que solo hacer cuentas
   84 p
   2009

# *INDICE*

La filosofía está escrita en ese gran libro que es el universo y que permanentemente lo tenemos a la vista. Pero no podremos entender este libro si antes no aprendemos el idioma en el que está escrito. Está escrito en el lenguaje de las matemáticas, cuyas letras son las circunferencias, los triángulos y demás figuras geométricas. Si el hombre no las conoce, no podrá entender una sola palabra. Sin este conocimiento errará en su camino como en un laberinto oscuro.

*Galileo Galilei*

# *INTRODUCCION*

Para ubicarnos en una ciudad desconocida, generalmente utilizamos un mapa. En él están la mayoría de las calles, pero se omiten detalles. No podemos saber si las calles están asfaltadas o si son de tierra, o si las construcciones que se encuentran en esas calles son casas habitación o edificios con oficinas. Lo que está dibujado en el mapa nos permite saber lo esencial: qué calles tomar para trasladarnos de un lugar a otro. En las matemáticas sucede algo parecido: se omite todo aquello que no es necesario para la solución de un problema y se utiliza tan sólo lo que es fundamental. Los matemáticos llamamos a esto *abstracción.* Un ejemplo de esto son los números: el número tres no significa 'tres manzanas' o 'tres peras', sino 'tres tantos de lo que sea'. Lo mismo sucede con el término esfera, no se habla de la forma esférica de una bola de billar o de una naranja, sino de la forma esférica en general. Quien utiliza el mapa de una ciudad aplica matemáticas, aunque no esté consciente de ello. No le importan las casas, los autos y los peatones, puede identificar las calles a pesar de que sólo estén representadas por líneas.

En matemáticas, bautizada alguna vez como la reina de las ciencias, lo importante no es hacer cuentas, sino encontrar relaciones lógicas y ya desde los griegos, estos se dedicaron al estudio de algunas de estas relaciones entre números, sin duda uno de los principales elementos de las matemáticas, aunque algunas de sus ramas parezcan no tener algo que ver con ellos, por ejemplo, la geometría estudia las propiedades de las figuras como los triángulos, los círculos, o las esferas; la teoría de la probabilidad ocupa de los eventos aleatorios tales como que en un dado caiga la cara marcada con el número seis. Sin embargo, los matemáticos han encontrado que también estas áreas se relacionan con el mundo de los números, al permitir, expresar de manera más sencilla la propiedades que tienen las rectas, las esferas, y diversas figuras geométricas.

Vivimos en la época de las matemáticas. La tecnología, que domina cada vez más nuestra vida cotidiana, es impensable sin las matemáticas. Los programas que la gobiernan no son otra cosa sino matemáticas aplicadas. Sin las matemáticas no existirían ni la televisión, ni los automóviles, ni la corriente eléctrica, ni los refrigeradores, ni los celulares, ni los videojuegos. Detrás de la tecnología están las matemáticas. Es difícil reconocerlas en los objetos ya terminados; pero sin las matemáticas aquellos simplemente no existirían. Cálculos matemáticos rigen el motor y el catalizador de un automóvil. Para poder descifrar los sonidos en un disco compacto se necesitan procedimientos matemáticos. Las computadoras operan bajo el rigor de la lógica matemática. De hecho, es por ello, que se les considera las máquinas matemáticas por excelencia.

El matemático no se da por satisfecho con sustentar una aseveración con un par de ejemplos, o al conseguir que sus colegas no lo pongan en duda. Lo que para él cuenta, es *demostrar* que siempre sucede su aseveración. En la física, la química o la biología, una teoría es cierta si hay suficientes pruebas. Éstas pueden ser, por ejemplo, los resultados de un experimento. En cambio, las matemáticas no se fían de los experimentos, sino únicamente de la lógica inequívoca. Veamos el siguiente ejemplo: un tablero de ajedrez tiene sesenta y cuatro casillas, que resultan de multiplicar ocho por ocho hileras. Si quitamos sólo dos casillas que se encuentran en esquinas diagonalmente opuestas, nos quedan sesenta y dos casillas. Si tomamos treinta y un fichas de dominó cuyo tamaño es el doble de cada casilla, ¿podemos colocarlas encima del tablero de manera que lo cubran por completo? El científico experimental comienza a probar diversas maneras de colocar las fichas sobre el tablero. Después de algún tiempo, si no lo logra, deduce que la solución al problema es que no se puede. Sin embargo, dado que existen diversas maneras de acomodar las fichas, el científico experimental no puede estar del todo seguro. Tal vez, algún día logre hacerlo; tal vez cuando esté más descansado. El matemático, por el contrario, busca solucionar el problema con el poder de la lógica. Al reflexionar: tenemos treinta casillas blancas y treinta y dos negras (ya que las casillas diagonalmente opuestas en el tablero de ajedrez son del mismo color, en este caso blancas). Cada ficha de domino cubre dos casillas contiguas, que siempre tienen colores distintos. Por tanto, treinta fichas cubren treinta casillas blancas y treinta negras. Las dos casillas que quedan no se pueden cubrir con la ficha de domino restante, ya que en un tablero de ajedrez dos casillas con el mismo color no están juntas, y las casillas que faltan por cubrir son negras.

Las matemáticas no tiene muchos admiradores; por el contrario, la mayoría de las personas tienen un concepto erróneo de ellas, al pensar que constan sólo de procedimientos largos, con sumas, restas, multiplicaciones y divisiones que se complican conforme estos avanzan. Esta clase de estereotipos llevan a algunas personas a padecer miedo, incluso desde la primaria, hasta llegar al bachillerato con ¡*pavor*!, a las matemáticas. Las consideran como áridas, letra muerta e incomprensibles para los mortales.

En este trabajo, abordamos el tema de la divulgación de las matemáticas, dedicado especialmente a estudiantes del nivel medio superior y a aquellas personas que perdieron contacto con las matemáticas desde la secundaria o el bachillerato. La intención aquí es mostrar que los estereotipos mencionados no son verdaderos. Si bien es cierto que se necesitan algunos cálculos en operaciones como sumas o multiplicaciones, no son del todo necesarios para encontrar lo interesante en las matemáticas.

Intentaremos conducir al lector durante seis capítulos, con expediciones por el mundo de los números, las proporciones, la geometría esférica y fractal, así como por la teoría de gráficas, mediante ejemplos que se presentan en la vida cotidiana. Dentro del primer capítulo titulado, “Algo sobre números”, se dedican párrafos a distintos tipos de números, como los naturales, triangulares y cuadrados, por mencionar algunos, y relaciones entre ellos. Además, mostramos ejemplos de representación de números de algunas culturas antiguas (chinos, mayas, árabes, etcétera), con el propósito de que el lector compare las distintas representaciones y quizá encuentre algunas coincidencias. La intención es, proporcionar al lector algo distinto a lo visto comúnmente en la escuela, al mencionar datos históricos del surgimiento de algunos conjuntos de números, tales como los naturales, los enteros, los racionales.

‘El pastel más grande del mundo’, es el título del segundo capítulo que aborda el tema de la regla de tres. Esta distinta manera de encontrar soluciones a ciertos problemas que se encuentran en la vida cotidiana. Desde una receta para cocinar, hasta problemas con calificaciones y con descuentos en productos. El capítulo está destinado tanto para quienes conocen y saben resolver una regla de tres, como para quienes no la conocen, así como para quienes saben de ella pero carecen del conocimiento para utilizarla. Varias personas saben resolverla, pero sólo como receta y de memoria repiten: *se multiplican términos cruzados y se divide entre el término restante*. Sin embargo, desconocen por qué se resuelve de esa manera; además, pocos observan si se trata de una proporción inversa o directa; sólo se limitan a resolver como proporción directa y si el resultado da algo ilógico lo intentan obtener con otro método, como el de la tabulación.

El tercer capítulo se titula ‘La mejor hoja de papel’ en el cual hablamos acerca de la proporción áurea y el número *Phi.* Un tema que debe su fama hoy en día (debo aceptarlo), gracias a la película titulada *El código da Vinci* basada en la novela del mismo nombre escrita por Dan Brown. Sin embargo, esta proporción tiene propiedades interesantes en un rectángulo, o en un triángulo. Utilizada en la pintura, en el arte, en la arquitectura, y plasmada de manera natural en la biología.

El trabajo incluye dos capítulos donde se mencionan distintas geometrías, como la esférica y la fractal. La primera de ellas se aborda en el cuarto capítulo con el título de ‘Rectángulo de tres lados’. Vivimos en un planeta de forma esférica ¿por qué confiar en una geometría plana? Cuando decimos que caminamos en línea recta, ¿realmente lo hacemos? Son algunas de las preguntas que respondemos aquí. Cuando estamos en la primaria nos dicen: ‘geometría’ y nos enseñan los círculos, cuadrados, polígonos, líneas, etcétera; después, al llegar a la secundaria nos dicen: ‘geometría’, y tratamos con esferas, cuerpos geométricos, y trigonometría; aun en bachillerato decimos ‘geometría’, y vemos la parábola, elipse, hipérbola, circunferencia. Sin embargo, en ningún momento durante estos tres niveles de educación, nos dicen que en realidad trabajamos con geometría plana, terminamos por creer que toda la geometría se hace en un plano, cuando no es así. La intención aquí es que el lector observe la existencia de geometrías distintas a la plana. Mencionamos datos sobre la historia de la geometría no euclidea. Además, llevamos al lector por la geometría esférica mediante un ejercicio didáctico, sobre un cuerpo conocido como el de una naranja, en ella trazamos líneas rectas y líneas perpendiculares para obtener ángulos rectos, y mostrar el rectángulo de tres lados o triangulo equilátero.

La geometría fractal, uno de los descubrimientos más actuales y que tienen uso en la medicina se trata en el quinto capítulo. Lo hacemos bajo el título de ‘Geometría fractal. De tal palo tal astilla’. ¿Quién se imagina que en una nube o en un árbol hay matemáticas? La intención aquí no es enseñar matemáticas, sino sorprender al lector con múltiples ejemplos en los que los fractales y su geometría están presentes en nuestras vidas.

En el sexto y último capítulo hablamos sobre la Teoría de gráficas. Éste tiene por título 'Konigsberg. Una solución matemática'. Un problema que surgió en un pueblo, en la vida diaria de cualquier habitante y que tiene una solución matemática. Tal vez el más didáctico de los seis capítulos contenidos en este trabajo. Decimos didáctico porque mediante una comparación de graficas con calles, vértices con casas y aristas con puertas expresamos de manera distinta el concepto de grafica y trayectorias eulerianas e introducimos dichos conceptos; además incluye algunos recorridos para que el lector la resuelva.

Podemos decir que para comprender los conceptos mencionados en la tesis, basta que el lector conozca y sepa utilizar las cuatro operaciones básicas (multiplicar, sumar, restar y dividir), la tenue noción de raíz cuadrada y conocimientos básicos de geometría, tales como, línea recta, líneas paralelas, perpendiculares, ángulos rectos y suma de éstos, es decir, está escrita para que el lector utilice sólo conocimientos mínimos de primaria. Son dos los objetivos en esta tesis. El primero de ellos es dar al lector, ya sea un estudiante de bachillerato o alguna persona que dejó de tener contacto con las matemáticas en esa etapa, **el conocimiento de que las matemáticas fueron creadas gracias a la necesidad que tuvo el hombre de conocer mejor las cosas y situaciones que lo rodeaban**. No fueron creadas espontáneamente, cada parte de ellas tiene una razón de ser. El segundo objetivo consiste en mostrar que es posible comprender las matemáticas e introducir conceptos matemáticos, mediante múltiples ejemplos en la vida cotidiana, donde éstas hayan sido de gran utilidad, y no sólo en modelos particulares creados por matemáticos además excluimos definiciones complicadas para un estudiante y sin ejercicios que contengan situaciones inusuales.

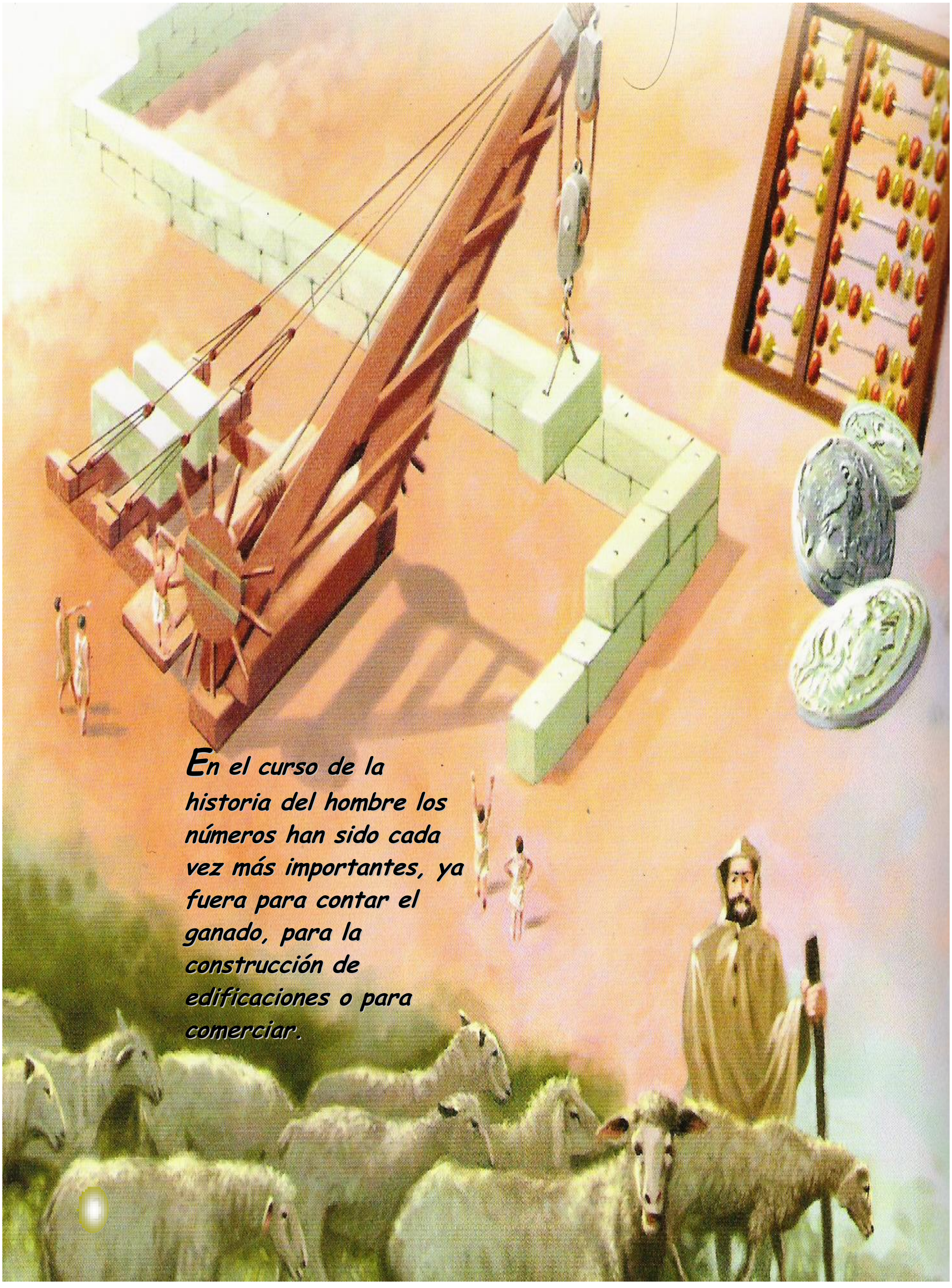
La tesis está escrita con cierto orden sistemático, pero esto no quiere decir que sea necesario que el lector la lea página por página y, ensayo por ensayo. Estos son, en gran parte, independientes unos de otros. El estudiante con poca base matemática también puede hacer una selección.

Esperamos que la tesis sirva tanto para el estudiante que comienza como para el que esté más avanzado, así como para el profesional que esté interesado en la matemática. Esperamos también que el lector encuentre a menudo detalles de interés en discusiones que contienen el germen de la investigación y sobre todo, que lo disfrute y le permita liberarse de los falsos prejuicios.

La caballería andante […] es una ciencia —replicó don Quijote— que encierra en sí todas o las más de las ciencias del mundo, a causa que el que la profesa […] ha de saber las matemáticas, porque a cada paso se le ofrecerá tener necesidad de ellas […].

*Miguel de Cervantes y Saavedra*


Algo sobre Números



***E**n el curso de la historia del hombre los números han sido cada vez más importantes, ya fuera para contar el ganado, para la construcción de edificaciones o para comerciar.*

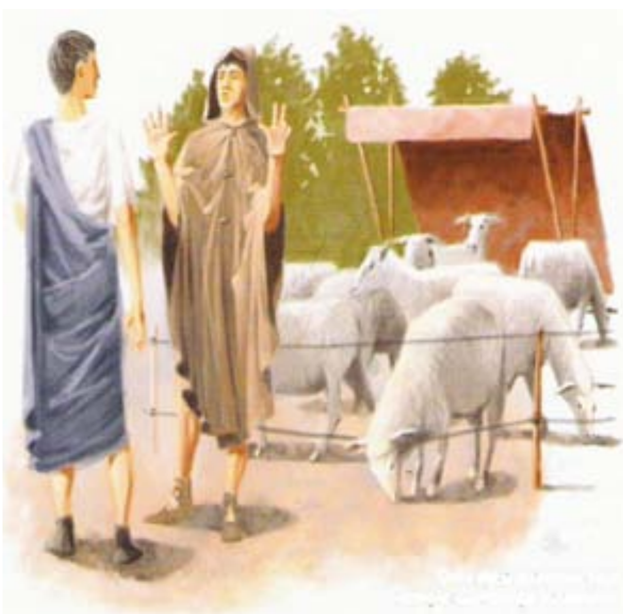
# ¿Quién inventó los números?

Es probable que a lo largo de la historia se hayan creado más de una vez, porque han sido fundamentales para el hombre. En casi cada cultura antigua existió una manera distinta de representarlos. **A lo largo de este capítulo, mostramos la representación de números de algunas culturas antiguas. No se encuentran en orden cronológico dado que el objetivo de este ensayo no es la historia, sino conocer acerca de los números, algo distinto de lo ya visto en la escuela.** De hecho, hoy en día, todavía existen pueblos que cuentan con una manera propia de representar los números, como lo son los Bakairis, una tribu que habita en la selva tropical brasileña. Entre esta tribu, el número uno se dice “tokale”, el dos “azague”. Para continuar contando unen los dos vocablos; así, “azague tokale” significa tres[1]. Éste proceso continua hasta el seis. Después de eso los Bakairis se ayudan con los dedos y los dientes. Para expresar cifras superiores a veinte gritan “mera mera”.

El hombre primitivo, en su estado salvaje, poseía como único sustento los elementos que la naturaleza le brindaba espontáneamente, como las frutas y los animales, por mencionar algo[2]. Sin embargo, la lucha con la naturaleza debió ser terriblemente dura; estaban desnudos, no conocían el fuego para obtener calor en días fríos, no contaban con armas para defenderse de ataques realizados por animales feroces. Además, sólo podían tener una vida plena en algunas épocas del año, en que las frutas estaban disponibles y podían ser comibles; el resto del año tenía que cazar. Así, tal vez una de sus preocupaciones fuese proveerse de armas. Sin duda, antes de aprender a fabricarlas, buscó y seleccionó objetos naturales, como piedras, ramas, huesos, etcétera. Después, con base en la experiencia, supo *calcular* en cierto modo el volumen o el grueso necesario para el arma, según el animal que deseara cazar[3].

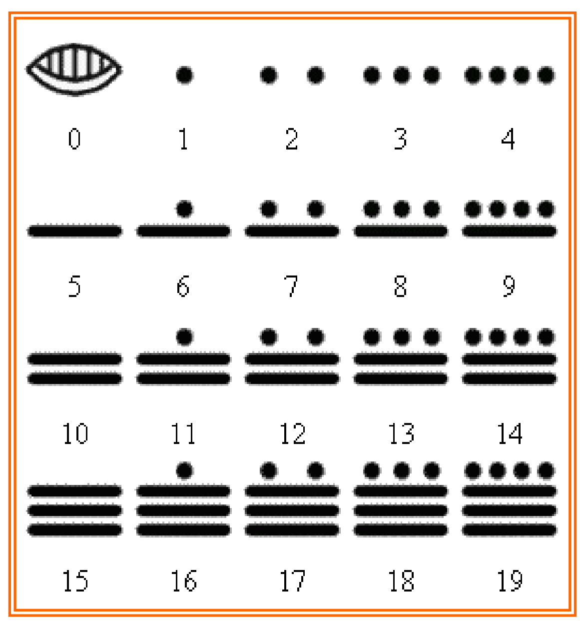
Un ejemplo de que el hombre primitivo necesitó de las matemáticas, quizá sin profundizar en ellas, lo podemos observar en las construcciones que realizaba al colocar piedras sobre otras piedras, son verdaderos prodigios de equilibrio. Tan perfecto, que les ha permitido, desafiando el paso de los siglos y los embates de la naturaleza, llegar hasta nuestros días[2]. Podemos maravillarnos de lo pronto que el ser humano desarrolló su sentido de la propiedad. Aprendió a preparar cuevas, construir refugios, vivir en grupos familiares, y aquí necesitó algún sistema para contar[4]. Ya sea porque el cazador deseaba intercambiar con su vecino un tigre dientes de sable por tres lanzas, o porque un cavernícola quería contarle a su tribu que había visto a cuatro mamuts en los alrededores. Quizá los primeros elementos para contar (y que hoy en día empleamos la mayoría de las personas), fueron los dedos de las manos[5]. Después, el problema lo resolvía con muecas que marcaba en un tronco, o poniendo piedras en una vasija[4].


La necesidad de contabilizar las pertenencias pudo tener una manera característica en cada tribu. Algunos pastores de la antigüedad, utilizaban piedras de rió redondas para contar sus animales. Por la mañana, ponían una piedra dentro de un recipiente apropiado por cada animal que salía por la puerta del corral. Y por la noche, del mismo recipiente, sacaba una piedra por cada uno que entraba por la misma puerta[6].



Pero, a medida que aumentaba la población en aquellas sociedades primitivas, comenzaron a escasear los recursos naturales y el hombre tuvo que dedicarse a la agricultura y a la ganadería (entre estos pueblos destacan los egipcios, que eran fundamentalmente agrícolas, debido a la fertilidad del río Nilo). De esta forma, se inicia una actividad concreta que se basa en el intercambio de productos, dando lugar al comercio y con ello a la navegación. Actividades que fueron quizá, el origen de las matemáticas, ya que para sus transacciones comerciales tuvieron que aprender a contar y a medir[2]. El pastor quería saber cuántos animales tenía y por cuántas coles podía cambiar cada uno. Los comerciantes y compradores tenían que comparar precios y hacer algunas cuentas. Los navegantes tenían que saber la dirección a seguir para llegar a su destino.

La luz del sol y ciertos fenómenos naturales condicionaba el modo de vivir del hombre primitivo, de tal forma que algunos de ellos le llegaron a impresionar tanto, que incluso llegó a divinizarlos, ya que inicialmente era incapaz de comprenderlos. Después, no satisfecho con la observación de los fenómenos, le tentó la curiosidad de investigarlos[2]. Con la ayuda de los números, el hombre aprendió a medir el tiempo, varias culturas antiguas, de las que aquí encontramos, basaban el tiempo en calendarios con excelente precisión y predicción de fenómenos naturales, como eclipses, cometas, el comienzo de cada una de las cuatro estaciones del año (primavera, verano, otoño, invierno), para tareas tan complicadas como esta eran necesarios los números (los mayas son un claro ejemplo de culturas con un calendario preciso).




**_Números mayas_**

Para los sumerios, los movimientos de los astros tenían vital importancia. Hasta tal punto, que creían que todos los acontecimientos de los individuos estaban señalados en las estrellas. Además, así como la circunferencia está dividida en 360 grados o partes iguales, el año también lo dividieron en 360 días. A ellos se debe la división del año, así como los primeros estudios de astronomía[7].


Los números fueron de gran utilidad para medir las distancias entre dos pueblos, al intentar buscar la ruta más corta para trasladarse. Las áreas en los terrenos, para las grandes edificaciones, como el Partenón y las pirámides egipcias y mayas. Al calcular el volumen, para medir, por ejemplo la capacidad de las fuentes en palacios; o las cantidades necesarias de piedras en dichos edificios; para la elaboración de las esculturas griegas, mayas, en la famosa esfinge egipcia; en la construcción de la brújula china, en la imprenta, en la pólvora.

Uno de los testimonios más sorprendentes respecto al uso de los números se encontró en Zaire, África Central, en un lugar habitado hoy por los *Ishango*[8]. Ahí los arqueólogos desenterraron la empuñadora de una herramienta hecha de hueso, con una edad aproximada de 11,000 años. En ellas aparecen numerosas incisiones ordenadas en grupos.

*El hueso de Ishango con las marcas que representan a los números.*

En una parte aparecen primero once incisiones, luego trece, diecisiete y diecinueve; así era como los Ishango escribían sus números. Hoy en día sigue siendo un enigma si fue consciente o simple coincidencia que los Ishango hicieran las incisiones en grupos de esta manera, ya que 11,13, 17, 19, son los únicos números entre 10 y 20 que pueden ser divididos entre sí mismos y entre 1. A los números con estas particularidades se les conoce como números primos (ver página 14).

## Números romanos

# ¿Qué números conoces?

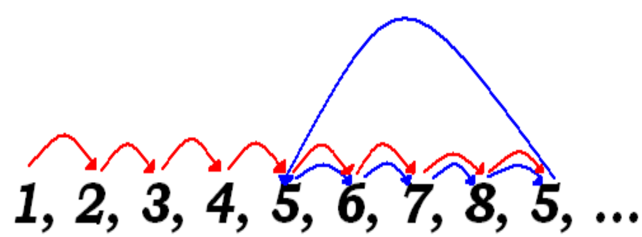
Una parte de las matemáticas se ocupa de los números. Seguramente has utilizado en alguna ocasión los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, etcétera. Ahora, a estos números les llamamos „números naturales', tal vez porque son los más sencillos de comprender dado que son con los que, desde pequeños, aprendemos a contar las cosas. No hay un número natural que sea el más grande de todos pues, por más grande que sea el número que pensemos, si le sumamos uno, el resultado será mayor. Por eso decimos que los números naturales nunca terminan o no tienen fin, ya que al aumentar en una unidad cualquier natural, siempre es posible construir uno mayor. La incursión del *cero* hasta hoy en día es un tema que causa polémica, ya que existen personas que afirman que el cero no puede ser natural dado que los números naturales surgieron para contar y no es posible contar a partir de *nada.*

Cuando sumamos dos números naturales, el resultado, es un número natural; si multiplicamos dos naturales obtenemos también como resultado un número natural.

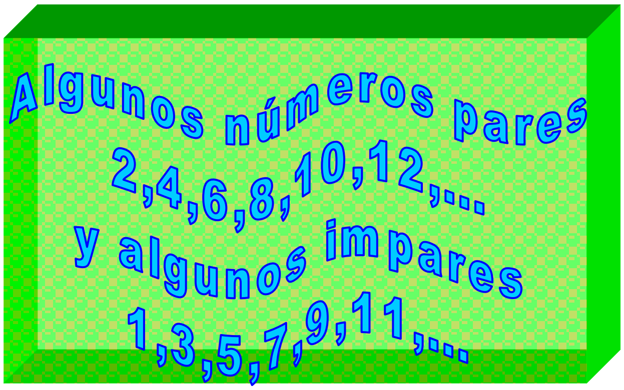
Cuando comenzamos a contar, el menor número desde el que podemos empezar es el uno, por esto decimos que el uno es el primero ellos. Ahora, si observamos mejor, podemos notar que, cuando contamos siempre existe un número siguiente, nunca nos detenemos o brincamos por falta de alguno, esto se debe a que, en los naturales a cualquier número le corresponde uno siguiente, el cual está aumentado en una unidad, y mejor aun, éste también es un número natural, por eso decimos que no tienen fin.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2 &= 1+1 \\ 3 &= 2+1 \\ 4 &= 3+1 \\ 5 &= 4+1 \\ 6 &= 5+1 \end{aligned}$$

Además, dos números naturales no pueden tener el mismo número inmediato siguiente, es decir, un natural sólo tiene un inmediato, que es único, distinto a lo que sucede con los números racionales (ver Pág. 16). Por ejemplo, el cinco es el siguiente del cuatro, y sólo lo es de éste número, no lo encontramos en otro lugar que no sea después del cuatro. En caso contrario, esto implicaría que dentro de la sucesión existan lazos, es decir, daríamos vueltas sin fin. Por ejemplo: el seis es el sucesor del cinco, si también fuera sucesor, digamos del ocho, entonces al llegar a él, tendríamos que regresar al cinco, y pasar al seis, siete, ocho, cinco, seis,…

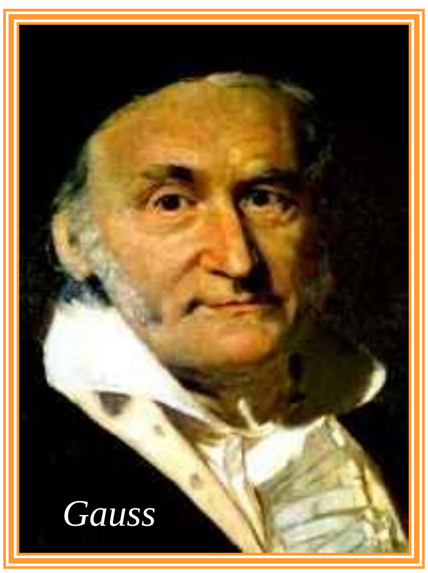



Dentro de los naturales, están los números pares y los impares. En matematicas, a un número se le llama *par* cuando se divide exactamente entre 2. Si no se puede, entonces el número se llama *impar*. Entre otros números interesantes están los números triangulares, los cuadrados, y los pentagonales, de los que hablaremos a continuación, los cuales se relacionan entre sí de manera interesante.

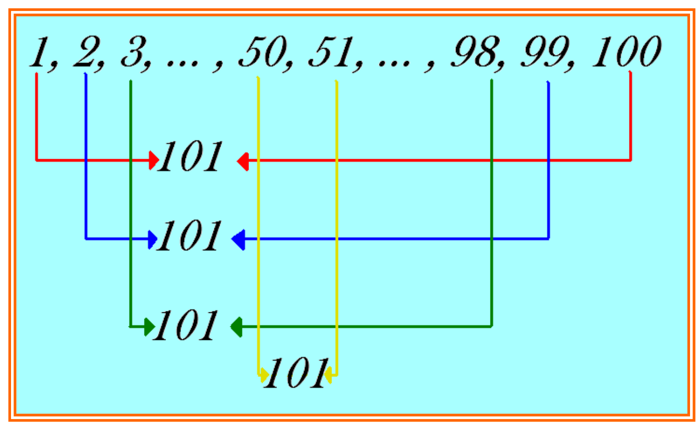



## *Números triangulares, cuadrados y pentagonales.*

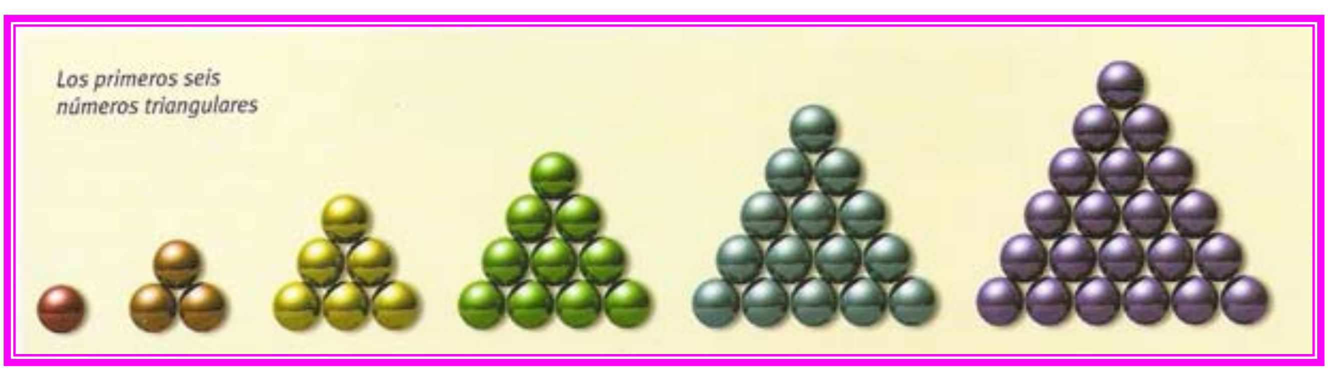
Un profesor de matemáticas del siglo XVIII tenía ganas de descansar un momento, así que les pidió a sus alumnos que sumaran todos los números de 1 al 100 durante la clase. Su plan no funcionó. Después de unos minutos, Carl F. Gauss (1777 – 1855), un niño de 10 años, había terminado[9].




En lugar de sumar los números consecutivamente, los agrupó de una manera muy ingeniosa: sumó el primero con el último número, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo, y así sucesivamente hasta llegar a los de la posición 50 + 51. El resultado de esta suma era siempre el mismo: 101 = 1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = 4 + 97 = 5 + 96 = 6 + 95 =… = 50 + 51, es decir, el resultado de sumar los primeros cien naturales es el número de sumas obtenidas al agrupar de esta manera (que es 50) por el resultado de cada suma (que es 101), es decir: 50 x 101 = 5050. El pequeño Gauss se convirtió después en uno de los matemáticos más importantes de la historia. Recordemos que en matemáticas, los tres puntos seguidos significan que la secuencia continua.




Eventualmente, la manera para sumar los primeros números naturales se le ocurrió a Gauss sin ayuda alguna. Sin embargo, esta forma ya era conocida por los antiguos griegos, quienes formaban triángulos con bolas que representaban a los números, colocadas unas encima de otras.



Los alumnos del matemático Pitágoras (582 – 507 a.C.) llamaban a un número triangular si con esa cantidad de bolas se podía armar un triángulo equilátero, es decir, con sus tres lados iguales, como el triángulo que se forma con las bolas de billar.

De los números triangulares podemos decir que son la suma de los primeros naturales consecutivos, veamos lo siguiente.

**1 = 1**
**3 = 1 + 2**
**6 = 1 + 2 + 3**
**10 = 1 + 2 + 3 + 4**
**15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5**
**21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6**

Fig. 1

Así, el sexto número triangular es el que está formado por quince balines (Fig. 1). Con los balines, canicas, o simples bolas, no sólo se pueden formar triángulos, sino también cuadrados. A los números que permiten formar un cuadrado a partir de esa cantidad de canicas se les llama números cuadrados.

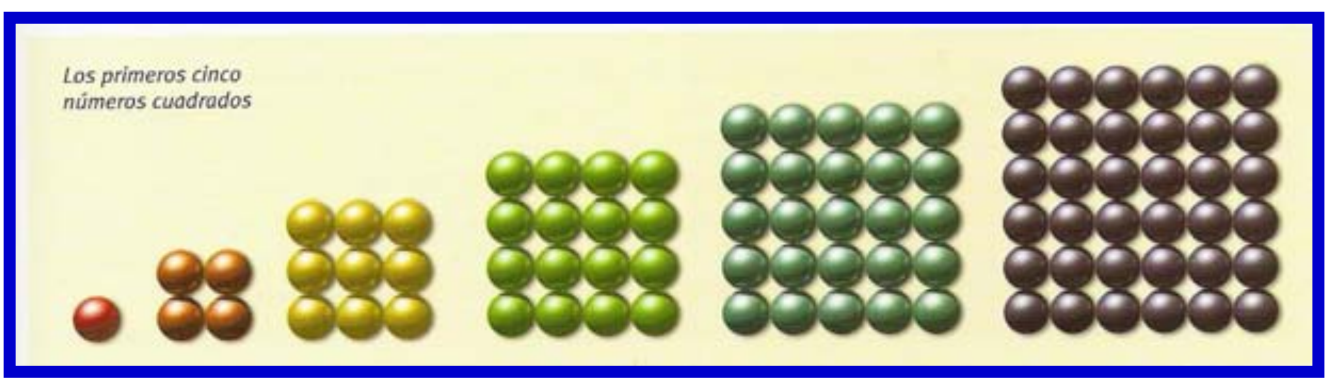
Cuatro piezas por ejemplo, forman un cuadrado de longitud dos en cada lado; nueve piezas forman uno de longitud tres por lado; y dieciséis uno de longitud cuatro en cada lado.

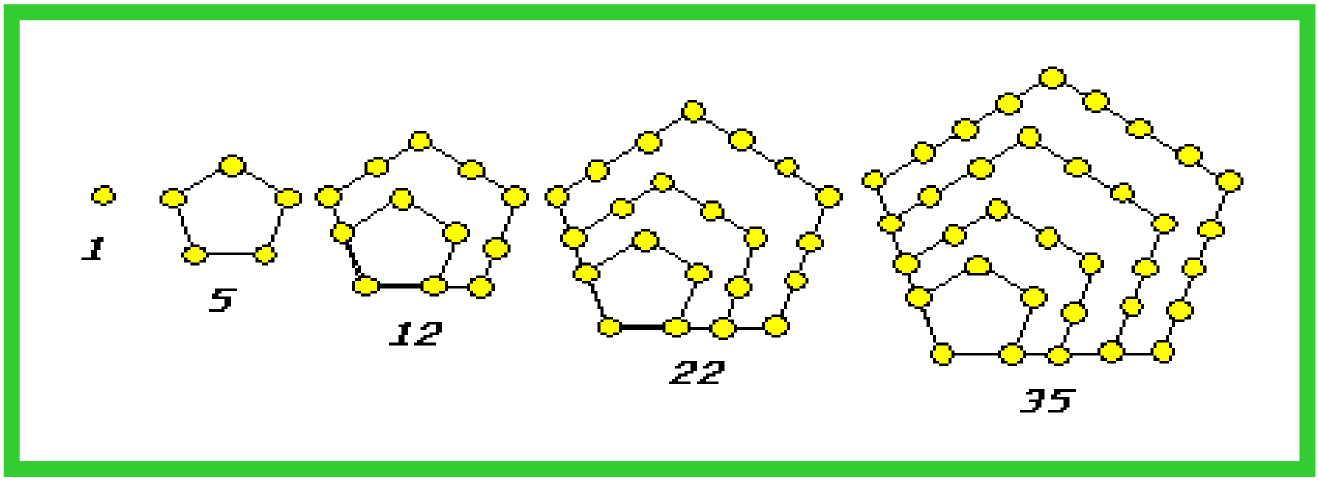
Así como los números triangulares son la suma de los primeros números naturales, los números cuadrados son la suma de los primeros números impares:

**1 = 1**
**4 = 1 + 3**
**9 = 1 + 3 + 5**
**16 = 1 + 3 + 5 + 7**
**25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9**
**36 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11**

Así, podemos observar que el sexto número cuadrado es el treinta y seis (Fig. 2).

Fig. 2






Si bien, con balines no se pueden rellenar pentágonos regulares, es decir, con todos sus lados iguales, como en el caso de los números anteriores, si existe una manera de acomodarlos para formar pentágonos y llegar a los números pentagonales.

Observemos con atención la imagen superior. Podemos notar que, el primer número es el uno, semejante a lo que sucede con los triangulares y los cuadrados. Después, dado que el lado de cualquier figura necesita dos extremos, el segundo número pentagonal es, el que tiene dos balines en cada lado que consta de cinco balines en total. A partir de éste, para el siguiente pentagonal aumentamos un balín en cada lado e introducimos el pentagonal anterior, así el tercer pentagonal es el que consta de doce bolas o balines.

Como ya vimos, los números triangulares son la suma de los primeros naturales consecutivos, los cuadrados son la suma de los primeros impares y, en este caso para los pentagonales, la suma tal vez no resulte tan sencilla en un principio.

Comencemos por el primer número pentagonal.

$$\mathbf{1 = 1}$$
$$\mathbf{5 = 1 + 4}$$
$$\mathbf{12 = 1 + 4 + 7}$$
$$\mathbf{22 = 1 + 4 + 7 + 10}$$
$$\mathbf{35 = 1 + 4 + 7 + 10 + 13}$$

Al ver los números acomodados de la manera anterior, podemos decir que en la suma, el primer factor es el número uno, para el segundo el aumento es de tres unidades al anterior. Así, vemos que el quinto número pentagonal es el que consta de treinta y cinco balines (Fig. 3).

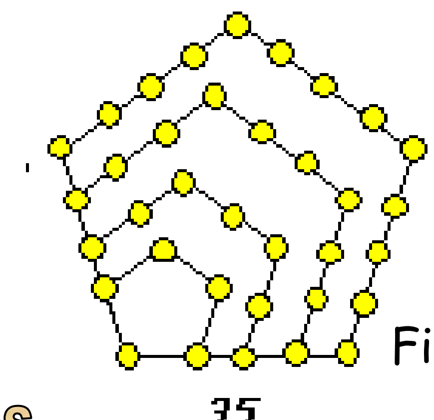
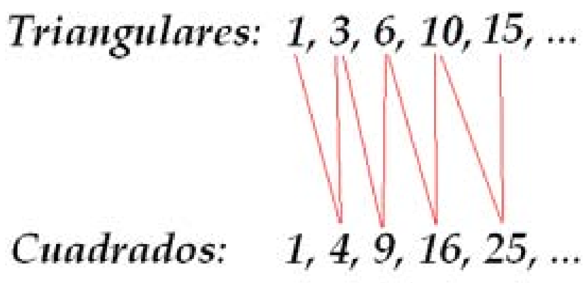



Fig. 3

## NUMEROS CHINOS

Estos tres tipos de números, los triangulares, cuadrados y pentagonales, tienen relaciones interesantes entre sí. Veamos dos de ellas.




Si observemos detenidamente los números triangulares y los cuadrados, podemos notar que, dos triangulares consecutivos forman un cuadrado (Fig.4).

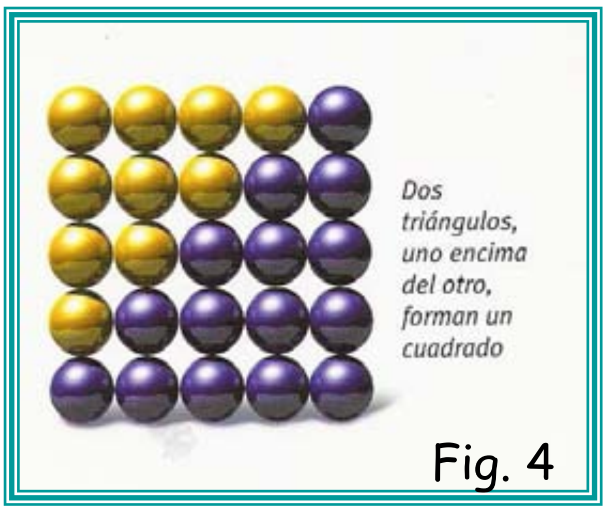



Fig. 4

Ahora veamos lo que sucede con los pentagonales.

*Triangulares: 1, 3, 6, 10, 15, ...*

*Pentagonales: 1, 5, 12, 22, 35, ...*

Es difícil encontrar una relación a simple vista. No obstante, existe una entre estos dos. Un pentagonal es la suma del número que lo representa en la lista anterior, mas tres veces el triangular con un lugar menos en su propia lista. Suena extraño. Veamos un ejemplo.

Tomemos un número pentagonal, y su lugar dentro de la lista de ellos (Fig. 5). Por ejemplo, el quinto pentagonal, éste tiene treinta y cinco balines y el cinco representa su lugar en la lista, por ser el quinto en ella. Así, el triangular de un grado menor que le corresponde es el cuarto, que está formado por diez balines. Utilizaremos el signo punto como signo para indicar multiplicación.

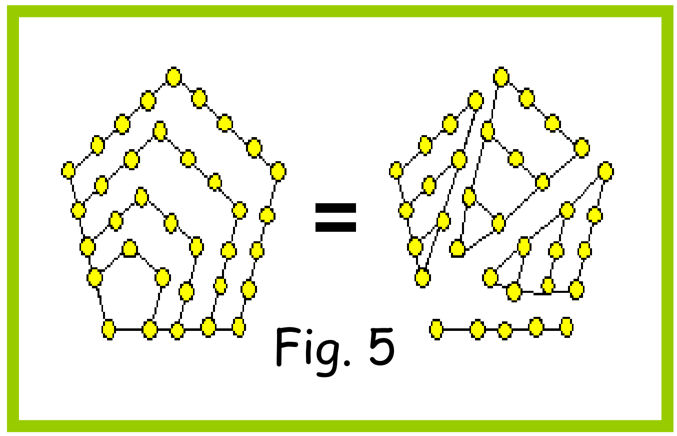



Fig. 5

$$35 = 5 + 3 \cdot (10) = 5 + 30$$

Treinta y cinco es igual a cinco, que es el lugar que ocupa en la lista, más tres veces diez, que es la cantidad de balines que tiene el número triangular de un orden menos (que es el cuarto). Veamos otro ejemplo. ¿Cuál es el séptimo número pentagonal? Éste ocupa el lugar siete, por lo que el triangular que le corresponde es el sexto, que tiene veintiún balines. Sumemos siete, más tres veces veintiuno:

$$7 + 3 \cdot (21) = 7 + 63 = 70$$

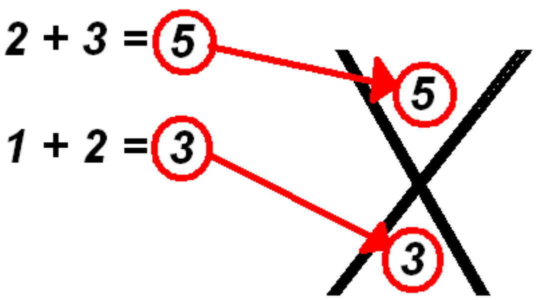
Con esto sabemos que setenta es un número pentagonal, y ocupa el lugar siete.

# *El poder del nueve y la tabla del dos*

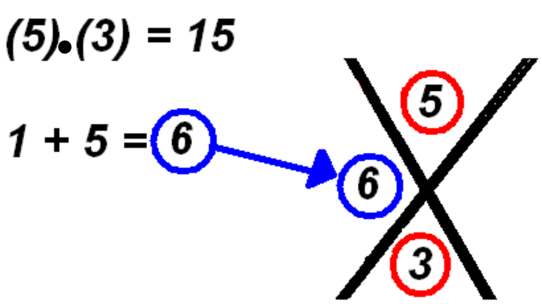
Durante la primaria, aprendemos una forma para comprobar el resultado de una multiplicación mediante cierta regla, basada en la suma de los dígitos de ambos números con los que se realiza la operación y la suma de los dígitos del resultado, que se colocan en una especie de *x* grande. Veamos un ejemplo.

$$(23)\bullet(12) = 276$$

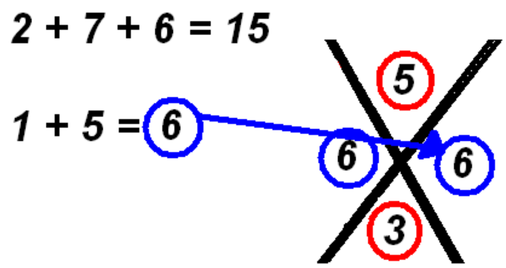
Para comprobar que el resultado es correcto, primero sumamos los dígitos que forman al veintitrés y al doce.



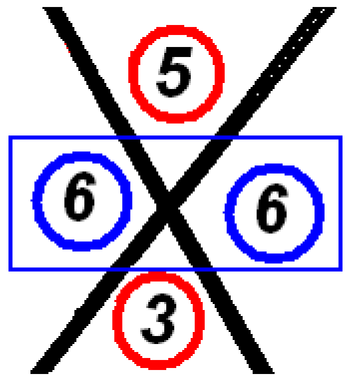

Después, multiplicamos los números que obtuvimos como resultado, es decir, cinco y tres y sumamos los dígitos del resultado para colocarlo en un lado de la *x*.




Por ultimo, sumamos los dígitos que forman el resultado de la multiplicación original, y lo comparamos con el seis que obtuvimos. Cabe mencionar que si el resultado original hubiese sido setecientos sesenta y dos, la suma de sus dígitos es igual a quince, y de éste obtenemos el seis, por lo que la comprobación estaría correcta, sin embargo, el resultado de de la multiplicación es erróneo. No obstante, entre doscientos setenta y seis y setecientos sesenta y dos, el margen de error es elevado.

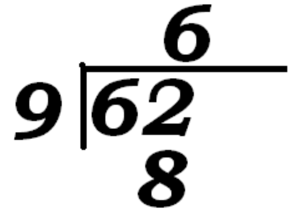



En este caso, como obtuvimos una igualdad entre los dos números seis, el resultado de la multiplicación es correcto.

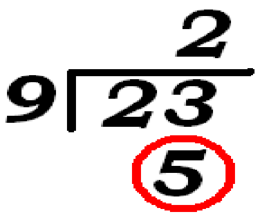


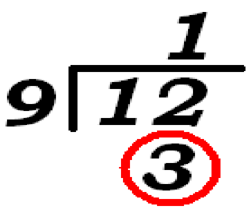

¿Por qué funciona esta regla?

Comencemos por notar dos propiedades. La primera es que cualquier número dividido entre nueve, tiene dos opciones, ser ó no ser múltiplo de nueve, es decir, no tener residuo ó tenerlo. En caso de tener residuo, éste será 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, u 8. Y la segunda, tal vez la más importante, es que la suma de los dígitos que forman cualquier número, es igual al residuo que éste deja al ser dividido entre nueve. Por ejemplo:




Es decir, el residuo de dividir sesenta y dos entre nueve es ocho, que es igual al resultado de sumar seis más dos, ¡que son los dígitos que forman sesenta y dos! Esto sucede para cualquier número. Excepto cuando el residuo es cero, es decir, cuando el número es múltiplo de nueve, como el ochenta y uno, donde 8 + 1 = 9, en este caso la suma de los dígitos es nueve. Así, en el ejemplo anterior:





Ya que existe esta coincidencia entre los residuos y la suma de los dígitos, es más sencillo trabajar en la comprobación, con la suma, que dividir cada factor entre nueve.

Trabajar con los residuos es semejante a trabajar con números originales, por ello, en el ejemplo anterior, doscientos setenta y seis, que es el resultado de multiplicar veintitrés por doce, al ser dividido entre nueve tiene el mismo residuo (6), que la multiplicación de los residuos de veintitrés y doce (15. Donde 1 + 5 = 6). Así funciona la comprobación de la multiplicación. Cabe mencionar que esta misma regla sirve para realizar la comprobación en la suma y en la resta. Veamos como se hace con un ejemplo.

$$364 + 296 = 660$$

Para comprobar realizamos el mismo procedimiento que en la multiplicación. Sumamos los dígitos de cada factor.

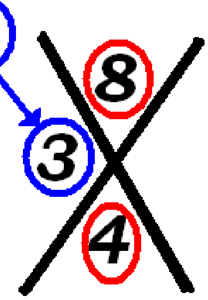
$$3 + 6 + 4 = 13 \longrightarrow 1 + 3 = 4$$

$$2 + 9 + 6 = 17 \longrightarrow 1 + 7 = 8$$

Ahora, los acomodamos en la x, sólo que en lugar de multiplicar ambos números, los sumamos (dado que estamos trabajando en una suma), y obtenemos el residuo o la suma de los dígitos del número que resulte.

$$8 + 4 = 12$$

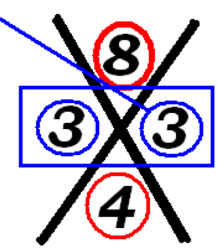
$$1 + 2 = 3$$



Ahora, basta obtener el residuo del resultado en la suma de trescientos setenta y nueve con doscientos noventa y seis.

$$6 + 6 + 0 = 12$$

$$1 + 2 = 3$$



Como obtuvimos una igualdad en los números tres, el resultado de la suma esta bien. Para la resta se utilizan los mismos pasos, sólo que en lugar de sumar o multiplicar los términos que están dentro de los círculos rojos, los restamos.

Regresemos a la multiplicación, veamos una manera distinta de realizar dicha operación, con sólo usar los múltiplos de dos, o la tabla del dos, como desees llamarla. Utilicemos los números del ejemplo anterior, veintitrés y doce. El proceso es el siguiente: duplicar uno de los números y dividir entre dos al otro, hasta llegar a uno.

23 ——— 12
11 ——— 24
5 ——— 48
2 ——— 96
1 ——— 192

En este caso, dado que veintitrés no tiene mitad exacta (sin residuo), se escribe el número natural menor inmediato. Así, once lo colocamos debajo de veintitrés. Lo mismo sucede para once y cinco, en este ejemplo. Ahora, ya que sólo en cuatro pasos llegamos al uno, el doce también fue duplicado cuatro veces. Para obtener el resultado final, basta sumar las cantidades del lado derecho provenientes de un número impar de parte del lado izquierdo, como son:

23 ——— 12
11 ——— 24
5 ——— 48
2 ——— 96
1 ——— 192

Así, el resultado final es:

$$\begin{array}{r} 12 \\ + \quad 24 \\ 48 \\ 192 \\ \hline 276 \end{array}$$

¡Que es el mismo resultado que obtuvimos al principio!

## Números árabes

| | | |
|---|---|---|
| 0 | ٠ | *sifr* |
| 1 | ١ | *wahid* |
| 2 | ٢ | *itneen/tinteen* |
| 3 | ٣ | *talata* |
| 4 | ٤ | *arba'a* |
| 5 | ٥ | *khamsa* |
| 6 | ٦ | *sitta* |
| 7 | ٧ | *saba'a* |
| 8 | ٨ | *tamanya* |
| 9 | ٩ | *tisa'a* |
| 10 | ١٠ | *ashara* |

## *Números primos*

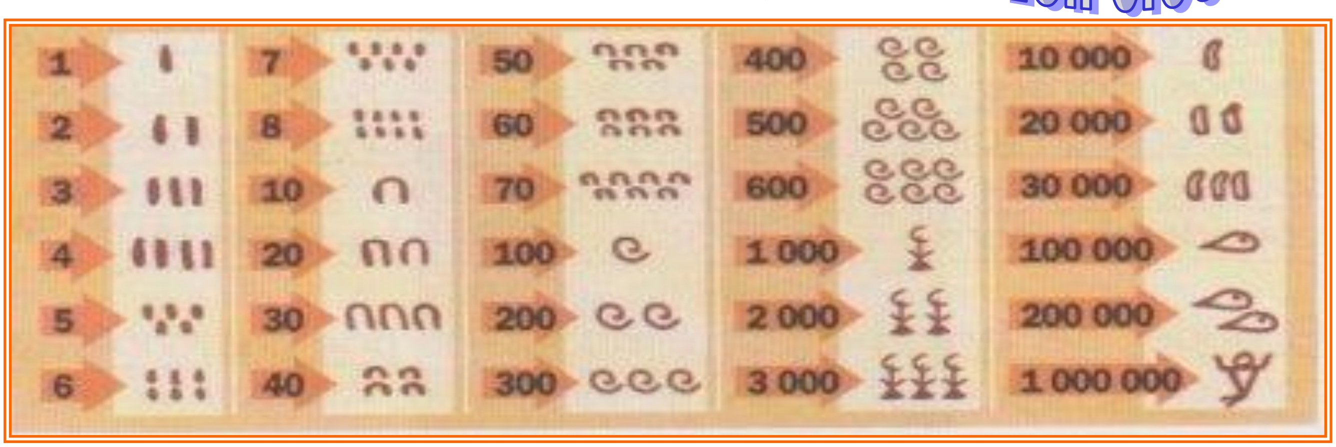
Los números primos son los naturales que sólo pueden ser divididos entre sí y entre 1. Por ejemplo, el número 54 es divisible entre 2, entre 3, entre 1, entre 6, entre 9, entre 18, entre 27, y entre 54, es decir, podemos escribirlo como: (2)•(27), (3)•(18), (1)•(54), (6)•(9), por lo que tiene más de dos divisores. De la misma manera, 8 no es primo, ya que es divisible entre 1, 2, 4, 8; 27 no es primo, ya que puede dividirse entre 1, 3, 9. Sin embargo, si el 7 o el 11 los dividimos entre cualquier número distinto de 1 o de ellos mismos, siempre queda residuo. Así, 7 y 11 son primos, porque sólo pueden ser divididos entre 1 y entre ellos.

El 1 fue considerado número primo, ya que es divisible entre 1 y entre él mismo, sin embargo fue excluido debido a los problemas que ocasionaba en los fundamentos del álgebra. Por ejemplo, en el llamado *Teorema de la Aritmética* el cual dice que: cualquier número natural se puede expresar como el producto de ciertos primos, y además, dicho producto es único. Por ejemplo. 2002 = (2)•(7)•(11)•(13), donde 2, 7, 11, 13, son números primos. No existe otra combinación de números primos distintos de 2, 7, 11, 13, cuyo producto tenga como resultado 2002. Lo mismo sucede con 210 = (2)•(3)•(5)•(7), o con 18, 031 = (13)•(19)•(73). Entonces, al considerar al 1 como número primo se presenta el siguiente problema.

Tomemos de ejemplo al número 10. Si lo escribimos como producto de primos, tenemos que: 10 = (5)•(2) ó 10 = (5)•(2)•(1) ó 10 = (5)•(2)•(1)•(1), en general, diez es igual al producto de cinco por dos por cualquier potencia del número 1. Así pues, el diez tiene distintas representaciones en producto de primos. Por lo tanto, el número 1 queda fuera de este conjunto. De esta manera, los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 37, …


**Dentro de los círculos color naranja están los números primos entre 1 y 100**


# NUMEROS EGIPCIOS



## *Números enteros*

La operación inversa de la suma de dos números consiste en restar el uno al otro (o sustraer). Por ejemplo ¿Qué pasa cuando a 2 se le quiere restar 3? En ese caso ya no alcanzan los números naturales, sino que se tiene que recurrir a los números negativos (caracterizados con un signo de menos a la izquierda).

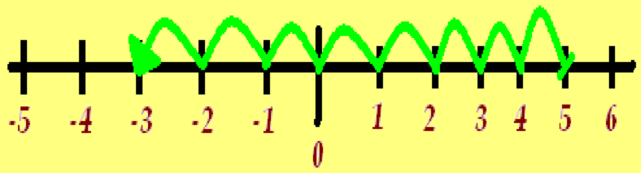
**-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7,…**

Como ya vimos, el comercio fue una actividad importante para el desarrollo de los números. Así como en nuestros días, en aquel tiempo debieron haber existido deudas, entre comerciantes, sin duda, en algún momento alguien pidió prestado, o quedó a deber. ¿Cómo hacían para representar las deudas? Si bien ya mencionamos que contaban con piedras, ¿cómo representar dos pieles, tres lanzas, cinco animales, negativos? Es decir, ¿Cómo representar algo menor que nada? Quizá esta situación dio origen a los números negativos.

Los números negativos junto con los números naturales, conforman a los *números enteros*. Si bien es cierto que un comerciante difícilmente se puede imaginar un camello o pieles negativas, los números negativos probablemente tienen sentido para él cuando piensa en términos de deudas.

Dentro de los enteros, podemos realizar la sustracción o resta de dos números, sin la dificultad de saber quién es mayor o cuál será el resultado. Podemos representarlos en una recta numérica y ver como funcionan, como en la imagen inferior.

Fig. 6




Así, si deseamos hacer cinco menos siete, nos colocamos en el lugar del cinco sobre la recta y, retrocedemos siete lugares. En este caso llegamos al menos tres (-3), o tres negativo (Fig. 6).

Dos amigos se encuentran en la calle y le dice uno al otro: “¡estoy cansadísimo! Trabajo ocho horas diarias pintando paredes y tengo el cuerpo destrozado”. El otro amigo, gran bromista y sabiendo algo de números, le dijo: “Yo te puedo demostrar ahora mismo que trabajas casi nada. Mira, el año tiene trescientos sesenta y cinco días. Tú trabajas ocho horas diarias, es decir, la tercera parte del día; quiere decir que trabajas al año la tercera parte de trescientos sesenta y cinco días, que son casi ciento veintidós días. Sin embargo, el año tiene cincuenta y dos domingos y sábados que no trabajas, o sea que tenemos 122 – 104 = 18 días. Disfrutas de 30 días de permiso al año entre vacaciones y días de asueto. Por lo tanto, 18 – 30 = -12. Así que, en realidad no trabajas ni un sólo día, es más, le debes 12 días de trabajo a tu jefe. ¡No digas que estas cansado!” [8].

*Enigma*

Lo que sucede en el enigma, es que, después de dividir el año en tres, los números que restó el amigo a los días de trabajo, debieron estar divididos entre tres también.

## *Números racionales*

Si un campesino desea heredar a sus tres hijos cinco campos de siembra, tiene que dividir cinco entre tres. Dado que cinco no se puede dividir entre tres sin dejar residuo, se construye lo que se llama una razón 5/3, o un


quebrado como comúnmente se le conoce, en otras palabras son cinco tercios.

Podemos decir que en una razón, lo que se plantea es una división que, en cierto modo, no se realiza o resuelve[10]. Al número superior (o dividendo), se llama numerador y, denominador al inferior (o divisor). Mientras que más grande sea el numerador y más pequeño el denominador, más grande será el quebrado.

El denominador de un quebrado, indica el número de partes en que se ha dividido un objeto (o un número). Y el numerador indica la cantidad de partes que tomamos de ese objeto[8]. Imaginemos un círculo que lo hemos dividido en dieciséis partes iguales (Fig. 7), y deseamos representar la razón que indica las zonas rosas de la figura.

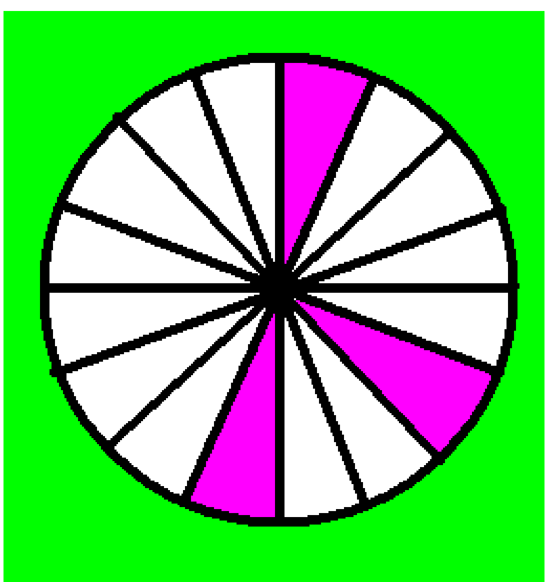


*Fig. 7*

El objeto en este caso es un círculo. Éste lo hemos dividido en dieciséis partes, que será el denominador del quebrado. Dado que lo que deseamos representar son las tres partes rosas, la razón que representa esto es: 3/16. Si nos comentan la razón 4/9, podemos pensar que el objeto que sea, está dividido en nueve partes iguales y, se han tomado cuatro de ellas[11].

A los quebrados o razones se les llama números racionales. A ellos pertenecen los enteros, ya que cualquier número entero puede expresarse como un quebrado. Por ejemplo: 3/1, en palabras tres sobre uno, es lo mismo que 3. Los números racionales se pueden restar, sumar, dividir, multiplicar, y el resultado será siempre un número racional.

En algunas ocasiones, se efectúa la división de los quebrados y se representan de distinta manera. Por ejemplo, ½ se puede escribir como 0.5 o 1/3 como 0.3333…, que es resultado obtenido al aplicar la división de 1 entre 2 y 1 entre 3 respectivamente.

En los números racionales, a diferencia de los naturales, no existe un sucesor, es decir, un inmediato siguiente, ya que entre dos cualesquiera quebrados, existen una infinidad de estos. Por ejemplo, después un quinto (1/5), podríamos decir que sigue un cuarto (1/4), sin embargo, antes de un cuarto y después de un quinto están: nueve cuarentavos (9/40), o diecinueve ochentavos (19/80), treinta y nueve ciento sesentavos (39/160), y así sucesivamente.

## *La lira de Pitágoras*

Para los antiguos griegos, el concepto de número había significado siempre un número entero o una razón de números enteros, particularmente para el matemático Pitágoras, después de haber analizado la forma en que armonizaba el sonido emitido por las cuerdas de una lira.

Uno de los de los últimos descubrimientos, realizado por Pitágoras y sus alumnos, fue la dependencia que existe entre los intervalos musicales y las razones numéricas. Ellos encontraron que para cuerdas que se encuentran vibrando en un instrumento musical, si se desea obtener una escala octava, la cuerda debe ser sujetada de tal manera que las dos distancias se encuentren en razón 2 a 1, si se desea una escala quinta, la razón debe ser 3 a 2, y si lo deseado es una cuarta la razón debe ser 4 a 3 (Fig. 8)[12].

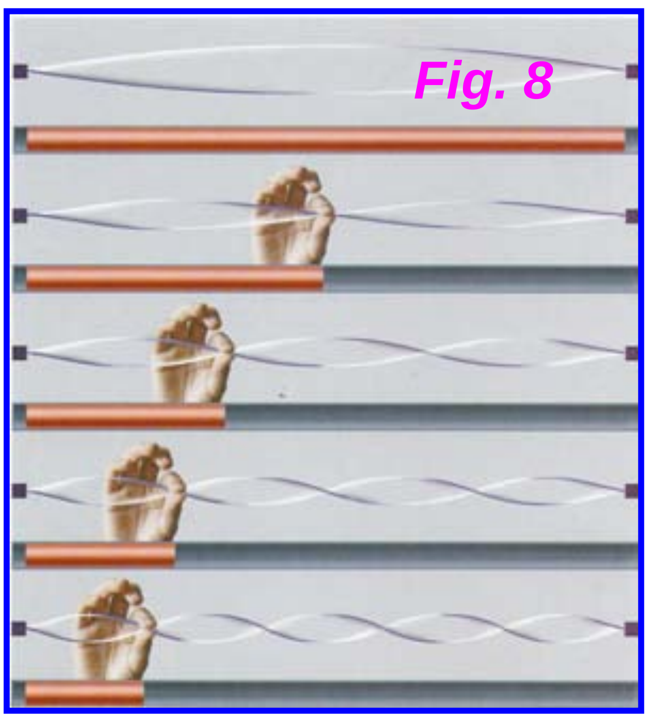


Fig. 8

## *¡Adivina el número que piensa tu compañero!*

Existen gran variedad de trucos matemáticos, aunque de magia tienen nada. La mayoría de ellos se basan el la rama de las matematicas llamada aritmética. A continuación mostramos uno para que impresiones a tus compañeros. Comienza por pedirle a uno de tus amigos que piense un número de dos cifras. Puedes hacerlo a varias personas al mismo tiempo, si deseas que el resultado cause mayor impresión. Por ejemplo:

***48***

Después dile que le ponga un cero a la derecha. En este caso:

***480***

Ahora pídele que le reste cualquier número que se encuentre dentro de la tabla del nueve, es decir, un múltiplo de nueve que sea de dos cifras. Por ejemplo:

***54***

El resultado en este caso es:

***426***

Para adivinar el número que pensó tu compañero, junta la primera y la ultima cifra, en este caso 4 y 6 en 46; y súmale el digito que ocupa el lugar del centro, en este caso el 2, así 46+2=48…que es el número que pensó tu amigo. *¡Sorprendente!*

Se debe aprender haciendo las cosas porque, aunque uno cree que sabe, no tiene la certeza hasta que lo intenta.

*Sófocles.*

# ¡El pastel más grande del mundo!

Seguramente hemos escuchado la frase: "el pastel más grande del mundo" o "el zapato más grande del mundo". Cada vez es más común escuchar este tipo de admiraciones. Algunas personas están interesadas en conseguir marcas impresionantes, para aparecer en los libros de marcas; algunos cocinan platillos realmente grandes pensados para un gran número de personas.

Tal vez hasta nos hemos preguntado por la cantidad de ingredientes que necesitaron para dicha preparación. ¿Cómo hacen para calcular los ingredientes para que tenga un sabor agradable?

Quizá en alguna ocasión hemos comprado un producto con descuento, por ejemplo un video juego, y tuvimos la necesidad de calcular el total a pagar, para decidirnos por el que contaba con una porcentaje mayor en el descuento. O en los descuentos en las distintas tarifas que ofrecen las compañías de telefonía celular, también surge este problema del calculo.

La respuesta a este tipo de problemas es la misma para todos, una **regla de tres**. ¿Qué es en realidad una regla de tres? ¿Cómo se usa para poder calcular la solución a estos problemas?

## *Proporción directa*

Desde la primaria hemos batallado con aprender cosas de memoria, ya sean las tablas de multiplicar o las fórmulas para encontrar el área o volumen en geometría, y si dejamos de utilizarlas, es posible que lleguemos a olvidarlas. Esto sucede porque no nos enseñan la manera en que éstas surgen. Sólo repetimos las cosas sin llegar a comprender de dónde salen, o por qué son así. Dado que el propósito en este capítulo no es reproducir una sección de algún libro de matemáticas, mediante ejemplos analizaremos la manera como se resuelve una regla de tres para comprender mejor y, no sólo repetir una receta que podemos olvidar. Veamos algunos ejemplos.

En una tienda, los videojuegos, tienen descuentos sobre su precio real que es de $950.00 ¿Cuál es la cantidad a descontar si hay cartuchos con el 15%, 25%, 35% y 40% de descuento?

Para obtener cada uno de los descuentos podemos utilizar una regla de tres. Cuando alguna persona nos da los pasos para resolver una regla de tres, nos dice: "multiplica términos cruzados y divide el resultado entre el número que te sobró". El primer paso es acomodar los tres datos o variables de la siguiente manera. Los porcentajes en un lado, el precio real y el descuento que deseamos buscar del otro lado. Recordemos que el precio real del videojuego es $950 y su equivalente en porcentaje es 100%. De manera que vamos a denotar con x el equivalente a 15%, que lo que deseamos encontrar. Lo anterior lo indicamos con una flecha para recordarlo mejor.

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{x} & \longrightarrow & \mathbf{15\%} \\ \mathbf{\$950} & \longrightarrow & \mathbf{100\%} \end{array}$$

Ya que lo hemos acomodado en la forma adecuada, comencemos a resolverla con el fin de encontrar el valor en pesos del 15% de descuento. Recuerda que el punto lo utilizamos como signo para indicar multiplicación y, la línea horizontal para denotar división. Ahora si, sigamos los pasos para resolver este problema.

1.- Multipliquemos los términos cruzados. En este caso son los que se encuentran dentro de círculos rojos.

$$\mathbf{(15)\cdot(950) = 14250}$$

2.- Dividamos el resultado anterior, entre el término restante, que es 100 y se encuentra en el círculo azul.

$$\mathbf{\frac{(14250)}{(100)} = 142.50}$$

3.-

$$\boldsymbol{x} \mathbf{= 142.50}$$

Es decir, el 15% de descuento que tiene un videojuego que vale $950.00, es de $142.50, y el total a pagar es $807.50.

Para encontrar el 25% de descuento seguimos los pasos, sólo que ahora el lugar del 15% lo ocupara el 25%.

1.-

$$\mathbf{(25)\cdot(950) = 23750}$$

2.-

$$\frac{(237.50)}{(100)} = 237.50$$

3.-

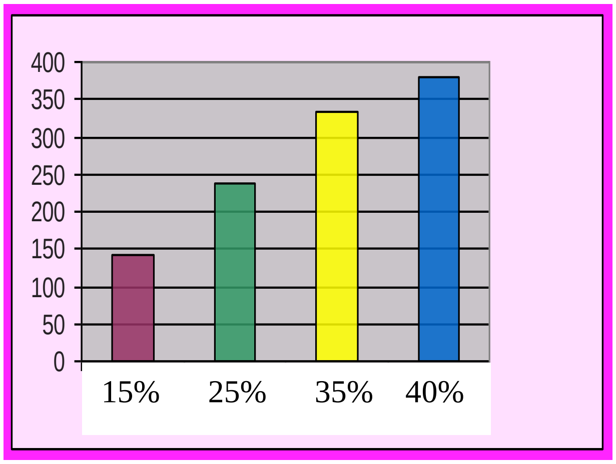
$$x = 237.50$$

Es decir, el 25% de descuento es $237.50, por lo que $712.50 será el total a pagar por un videojuego.

Con estos mismos pasos encontramos el 35% y 40% de descuento.

Para la finalidad de este capítulo, es importante presentar los resultados en una tabla y, observar su comportamiento. En ella se muestra el porcentaje y su equivalente en pesos, es decir, el descuento, para después estudiarlos en una gráfica.

| Porcentaje | Descuento |
|---|---|
| 15% | $142.50 |
| 25% | $237.50 |
| 35% | $332.50 |
| 40% | $380.00 |




En este ejemplo vemos que, mientras un dato o variable crece, como el porcentaje, la otra variable también crece, como el descuento. O viceversa, mientras una disminuye, la otra disminuye. En estos casos decimos que las variables son directamente proporcionales, o bien, que tenemos una proporción directa.

El siguiente ejemplo tal vez no sea común en nuestras vidas, sin embargo, es necesario para saber que no todas las reglas de tres se resuelven de la misma manera.

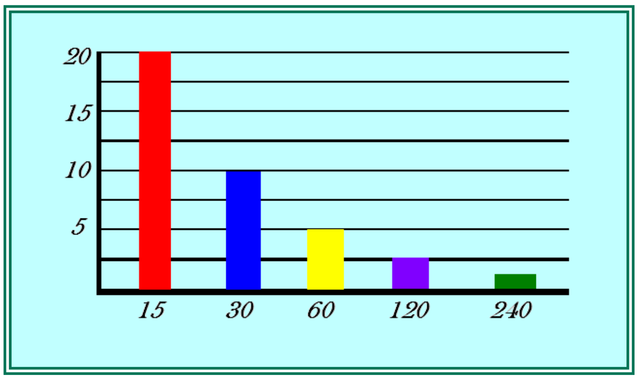
## *Proporción inversa*

Seguramente, en algunas ocasiones hemos recibido críticas. Pero, ¿en cuántas de éstas, hemos sentido que la severidad con la que se realizó fue mayor que el motivo que la causó? En ese momento pensamos que la crítica realizada hacia nosotros fue desproporcionada, es decir, comparamos dos cantidades, la crítica y la reacción. Sin embargo, mientras la critica fue severa, la causa no lo fue. ¿Qué sucede en estos casos? Existen momentos en los que al comparar dos cantidades, mientras una de ellas crece la otra disminuye, entonces decimos que son inversamente proporcionales. Veamos el siguiente ejemplo.

En una fábrica se requieren 15 obreros para producir una tonelada de cierto producto en veinte días. El gerente de la fábrica recibió la orden de producir la misma cantidad en seis días. ¿Cuántos obreros se necesitan para cumplir con el pedido?

Igual que en el ejemplo anterior, podemos realizar una tabla y una gráfica para estudiar el comportamiento de las dos variables, es decir, de la cantidad de obreros y de días.

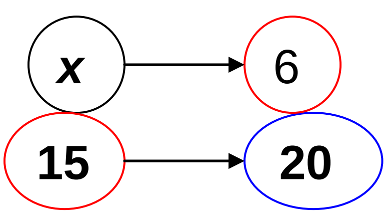
| Obreros | Días |
|---|---|
| 15 | 20 |
| 30 | 10 |
| 60 | 5 |
| 120 | 2.5 |
| 240 | 1.25 |




Llegamos a la conclusión de que los días de trabajo disminuyen cada vez que la cantidad de obreros aumenta de valor.

Podemos observar que en la proporcionalidad inversa, si una de las variables o datos crece la otra disminuye y viceversa, si una disminuye la otra crece. Se dice que son *inversamente proporcionales.*

De la misma manera que en el ejemplo anterior existe otra forma menos complicada para obtener el resultado y con menos tinta. Si copiáramos el mismo procedimiento que en ejemplo 1, la proporción quedaría así:




Pero si resolvemos esta regla de tres, el resultado es 4.5 (dado que no podemos hablar de medios hombre, redondeamos 4.5 al entero superior inmediato que la corresponde, es decir, a 5), eso nos dice que, para terminar el trabajo en menos días se necesita una cantidad menor de obreros, por lo que nuestro resultado esta *mal*. En este caso:

**Cuando la proporcíon es inversa,**

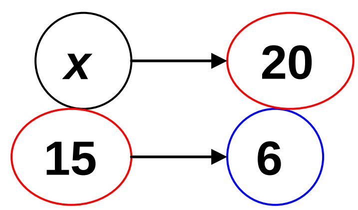
**es decir, mientras un dato disminuye y el**

**otro crece, alguno de los dos lados de la regla debe**

**ser invertido**

De esta otra forma encontramos el mismo resultado que con la tabla. Veamos como se hace.

Sabemos que con 15 trabajadores obtenemos una tonelada en veinte días. Recuerda un lado representa los obreros y otra los días; entonces podemos acomodarlo así:




Ahora hagamos el mismo procediendo realizado en el ejemplo de la tienda de videojuegos: multipliquemos los términos cruzados donde no este la letra *x*, es decir, los que se encuentran dentro de los círculos rojos, y dividamos el resultado entre el término que esta en el azul. Recuerda, el punto indica multiplicación y la línea horizontal división.

1.-

$$(20)\cdot(15) = 24$$

2.-

$$\frac{(300)}{(6)} = 50$$

3.- $$x = 50$$

En este caso, como la proporción es inversa sólo en uno de los dos lados invertimos los valores. Así podemos observar que encontramos el mismo resultado de la tabla.

Esperamos que durante el siguiente ejemplo, encuentres una ayuda si es que estas en una situación similar.

## *El dilema de Pablo*


A principio del curso, una profesora de gramática, establece con sus alumnos la manera en que evaluara el desempeño durante el curso, es decir, fija la forma de calificar. Y queda en lo siguiente:

a) 60% exámenes parciales. Se aplicarán tres durante el curso.
b) 30% tareas. Con cinco tareas durante el curso.
c) 10% asistencia. Donde sólo habrá noventa y seis días de clases en total.

Esto implica que el alumno que cumpla con todo contará con un 100% de calificación, lo cual se traduce como un 10. ¿Qué sucede con el alumno que entrega todo pero no con buenas calificaciones? Es decir, ¿Qué sucede con aquel alumno que aprueba todos los exámenes parciales pero con calificación de 6? O que entrega las tareas pero con calificación menor a 10.

Lo primero que como alumnos nos preguntamos es, ¿cómo evadir las tareas? ya que son pesadas y nos reducen las horas del día para divertirnos. Sin embargo, también deseamos no sacar una calificación baja. Como ya vimos, la calificación de 10 equivale a tener un total de 100% al final del curso, y un 50% equivale a tener 5 en la calificación final. Veamos cuanto vale cada tarea.

Para encontrar el valor de cada tarea, debemos recordar que cinco tareas equivalen a 30% de la calificación final. Acomodemos los datos en la regla de tres:

$$\begin{array}{ccc} x & \rightarrow & 1 \\ 30 & \rightarrow & 5 \end{array}$$

1.- $$(30)\cdot(1) = 30$$

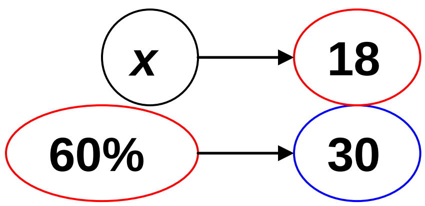
2.- $$\frac{(30)}{(5)} = 6$$

3.- $$x = 6$$

Por lo que una tarea sin entregar es, 6% menos en la calificación. De la misma manera podemos encontrar el valor de una asistencia o de un examen.

Al final del curso, un alumno de nombre Pablo, intenta descubrir su calificación, y dice: “presente los tres exámenes y obtuve una calificación de 6 en cada uno. Sólo entregue cuatro tareas donde obtuve 7, 6, 8, 7. Pero nunca falte a clases, ¿Qué calificación tendré?”.

Sabemos que obtener 10 de calificación en cada examen equivale a tener 60% de calificación final. Dado que son tres exámenes durante el curso, entonces tener 30 puntos en los exámenes equivale a tener 60%. Pero Pablo solo obtuvo 6 en cada examen, es decir, tiene 18 puntos de 30 posibles, ¿Qué porcentaje tiene en lo que a exámenes se refiere? Utilicemos la regla de tres.




De esta forma, obtenemos que 30 puntos equivalen a 60% y deseamos tener el equivalente a 18 pintos. Realicemos los pasos adecuados.

1.-

$$(18)\cdot(60) = 1080$$

2.-.

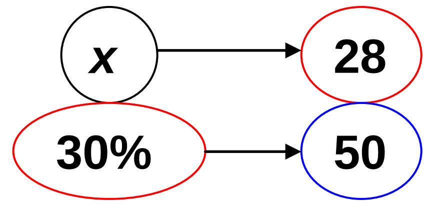
$$\frac{(1080)}{(30)} = 36$$

3.-

$$x = 36$$

Así que Pablo cumplió con 36% de 60% posible en exámenes parciales. Calculemos su porcentaje en tareas.

Lo importante no es cuantas tareas entregó, sino la suma total de las calificaciones obtenidas en ellas. En total la suma da como resultado 28 puntos. Dado que durante el curso se entregaban cinco tareas, podemos decir que 50 puntos equivalen a tener el 30% de la calificación final. Así que:




Acomodamos la proporción con los datos. 50 puntos equivalen a 30% y necesitamos obtener el equivalente a 28 puntos. Apliquemos la regla de tres.

1.-

$$(28)\cdot(30) = 840$$

2.-

$$\frac{(840)}{(50)} = 16.8$$

3.-

$$x = 16.8$$

Por lo que en tareas Pablo tiene 16.8%. Sólo falta encontrar el porcentaje en asistencia aunque, en asistencia Pablo tiene un 10% ya que nunca faltó. Ahora, basta sumar los tres porcentajes de Pablo para obtener su calificación final.

$$36+16.8+10= 62.8$$

Así que Pablo tiene 62% de la calificación final. Por lo que 6.28 será su calificación final. Podemos utilizar una regla de tres para obtenerla.

## *El pastel más grande del mundo.*

La receta de un pastel indica que para cuatro personas se necesitan 200g de harina, 150g de mantequilla, 4 huevos y 120g de azúcar.

*¿Cómo adaptar la receta para cinco personas, o para 20, 50 y 1,000,000?*


En ocasiones escuchamos que en cierta comunidad rompieron la marca mundial por obtener el pastel más grande del mundo y que fue repartido entre ellos. ¿Tendrá el mismo sabor que un pastel pequeño? ¿Qué cantidad de harina, de mantequilla, de huevos y de azúcar se necesitan para cocinar estos pasteles y conservar el buen sabor?

Para calcular la cantidad cada ingrediente, ¡utilizan una regla de tres!

En esta ocasión vamos a adaptar la receta para un pastel destinado a 50 personas. De manera similar y cambiando el número de personas podemos obtener la cantidad necesaria de ingredientes de un pastel para mayor o menor cantidad de individuos.

Para poder calcular la cantidad de ingredientes tenemos que resolver cuatro reglas de 3, una para cada ingrediente.

*Primera regla de tres: Harina*


**HARINA**

Ya conocemos la cantidad de harina para hacer un pastel para 4 personas, que es la de 200gr, queremos la cantidad para 50 personas. Acomodemos la proporción.

$$x \longrightarrow 5$$
$$20 \longrightarrow 4$$

Utilicemos el método que hemos mostrado en ejemplos anteriores:

1.- $$(50)\cdot(200)$$

2.- $$\frac{(10,000)}{(4)} = 2,500$$

3.- $$x = 2,500$$

Así que la cantidad necesaria de harina del pastel para 50 personas es de 2,500 gramos o su equivalente en kilogramos que es 2.5 Kg.

*Segunda regla de tres: Mantequilla*

Aquí como en la primera regla de 3, sabemos que la cantidad de mantequilla que lleva un pastel para cuatro personas es de 150 gramos y nosotros la necesitamos para 50 personas, entonces tenemos que la proporción es:

$$50 \rightarrow x$$

$$4 \rightarrow 150$$

1.- $$(50)\cdot(150)$$

2.- $$\frac{(7{,}500)}{(4)} = 1{,}875$$

3.- $$x = 1{,}875$$

Hemos obtenido el resultado de 1875, que en gramos (1,875 gr.) es la cantidad necesaria de mantequilla para nuestro pastel o lo que es igual, 1.875 Kg.

Habrás notado que las cantidades las obtuvimos en gramos ya que las razones deben estar expresadas en las mismas unidades. Así como los ingredientes fueron dados en gramos, nosotros los proporcionamos en gramos.

De la misma manera podemos obtener la cantidad necesaria del azúcar y el huevo para la elaboración del pastel. Aunque, en este último, es difícil hablar de 2.5 ó 3.2 huevos, si ésta fuese nuestra situación, el resultado se *redondea*. Por ejemplo, para el caso de 2.5, utilizaríamos 3 huevos, y para 3.2 también, es decir, si el dígito que está después del punto es mayor o igual a cinco, el número toma el valor del entero superior inmediato, pero, si el digito es menor a cinco, el número toma el valor del entero inferior inmediato.

## *Detrás de una regla de tres*

Como hemos podido observar a lo largo de este capítulo, en una regla de tres siempre hay una comparación de dos cantidades, a esto le llamamos proporción.

En base a lo anterior, podemos decir que una proporción es la comparación de dos cantidades. Así como en el ejemplo de los videojuegos, comparamos un porcentaje con su equivalente en pesos. En la proporción inversa vista en este capítulo, comparamos dos cantidades, el largo y ancho de un rectángulo. En el dilema de Pablo, la comparación fue entre el porcentaje y su valor en puntos. Y en el pastel, comparamos la cantidad de ingredientes con el número de persona, por ello, decimos que la regla de tres es una proporción.

Además, observamos que una regla de tres o proporción, está formada por cuatro cantidades, donde éstas forman dos razones (o quebrados), por ello, cada lado de la regla de tres tiene que estar expresado con la misma cantidad. Por ejemplo, en el pastel, de un lado está la cantidad de ingredientes y de otro la cantidad de personas, porque cada lado de la regla de tres es una razón.

Tomemos como ejemplo el descuento en la tienda de videojuegos. Pero, ¿por qué lo resolvimos así? Podemos decir que en realidad una regla de tres es una ecuación, como esas que vimos en la secundaria. Sólo que omitimos el signo de igual y las líneas que nos indican que comparamos dos razones, o quebrados como comúnmente se les llama. ¿Recuerdas como resolver ecuaciones? Veamos como se hace en este ejemplo.

$$\frac{x}{950} = \frac{15}{100}$$

El objetivo es dejar a la letra *x* sola en un lado el signo de igual y en el otro lado su valor numérico. El primer paso es multiplicar ambos lados de la igualdad por 950. Esto permite eliminar el 950 en el lado izquierdo, para dejar a la *x* sola.

$$\cancel{950}\left(\frac{x}{\cancel{950}}\right)=950\left(\frac{15}{100}\right)$$

De esta manera, en el lado derecho, multiplicamos 15 por 950, para obtener:

$$x=\frac{(14250)}{(100)}$$

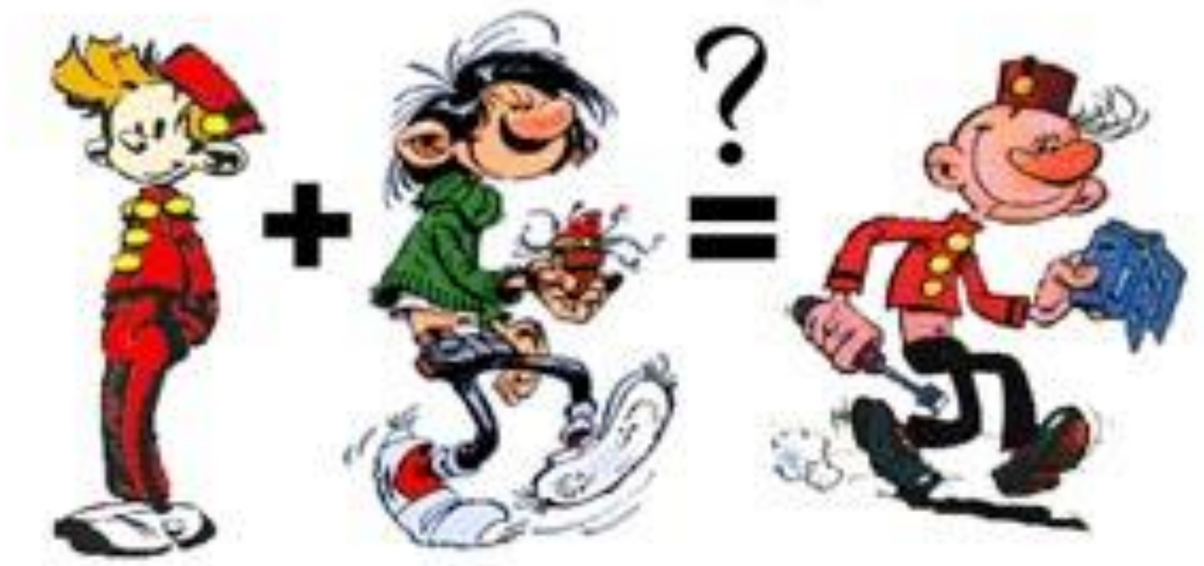
Y al resolver la operación del lado derecho, llegamos a que:

$$x= 142.50$$

Ahora bien, podemos afirmar que, para resolver la ecuación lo que realmente hicimos fue: multiplicar términos cruzados y dividir entre el número que sobra. Que son los pasos que seguimos para resolver cada regla de tres a lo largo de este capítulo.

*La famosa regla de tres es una maravillosa proporción, donde la intención es, que con solo tres elementos (por eso el nombre de regla de tres), encontrar el cuarto que, normalmente escribimos con una x, y completar la proporción adecuada.*

# ECUACION



*Matemáticas, naturaleza y arte comparten un número que puede proporcionar alegría y belleza.*

# LA MEJOR HOJA DE PAPEL

# 1.6180339887498948482045868343656381…

El gran Pitágoras (582 – 507 a.C.) decía en sus enseñanzas que los números rigen a la naturaleza. Hay que recordar que para los pitagóricos, los números eran solamente los enteros y razones formadas con estos números. Pero cuando intentó encontrar la medida de la diagonal de un cuadrado cuyo lado es igual a 1, resultó que no hay un entero o razón que la pudiera representar.

A pesar de aquel trago amargo, puedo asegurar que el mundo de los números es fascinante y que si acaso ellos no rigen a la naturaleza, si la representan en forma maravillosa. Ahí está el caso de *pi* (π) que es la clave de varios problemas relacionados con circunferencias; un número del que se han calculado miles de cifras sin poder encontrar el valor exacto (no lo hay), y otros números extraordinarios como al que me referiré en este ensayo y que nos puede brindar placer y alegría en distintas maneras, al menos es lo que creyeron algunas personas como artistas el renacimiento, éste curioso número es: *Phi* (Φ) y es igual a: 1.6180339887…

## *Matemáticas en el cuerpo humano*

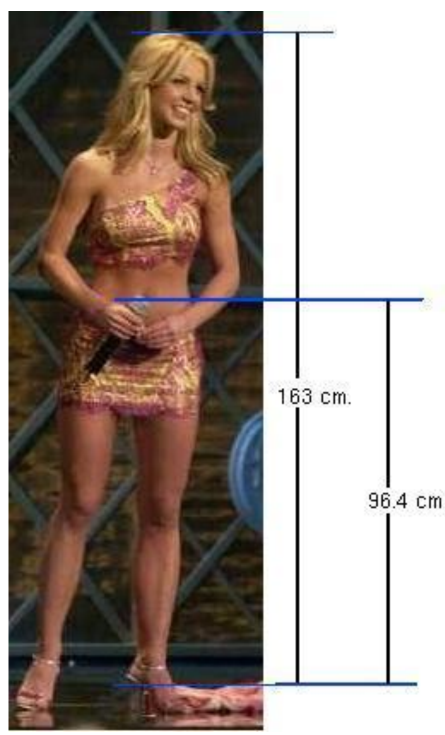
Sin duda, la belleza es subjetiva, depende de los gustos en la persona que la mire, es decir, tal vez lo que para nosotros sea una estampa de belleza para otros, sea sólo algo menos. Sin embargo no podemos negar que, la mujer de la imagen anterior es una persona que guarda cierta belleza. ¿Sabes por qué? Tal vez una de las razones sea, que su cuerpo y cara guardan ciertas proporciones, que en este caso están relacionas con el número *Phi*.

Algunas partes de la anatomía en los seres humanos se basan en una relación *Phi* (Φ), de esta manera podemos observar que:

• Entre la distancia que hay del hombro a los dedos y la distancia del codo a los dedos, existe una relación *Phi*, es decir, si dividimos el valor ambas longitudes, como resultado obtenemos el número *Phi*.

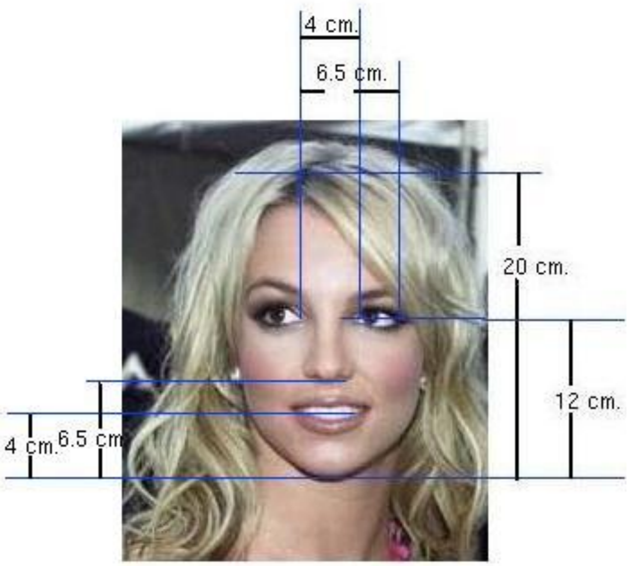
• Entre la altura de la cadera y la altura de la rodilla también hay una relación *Phi*.

•La relación entre la altura de un ser humano y la distancia de los pies al ombligo es *Phi*.



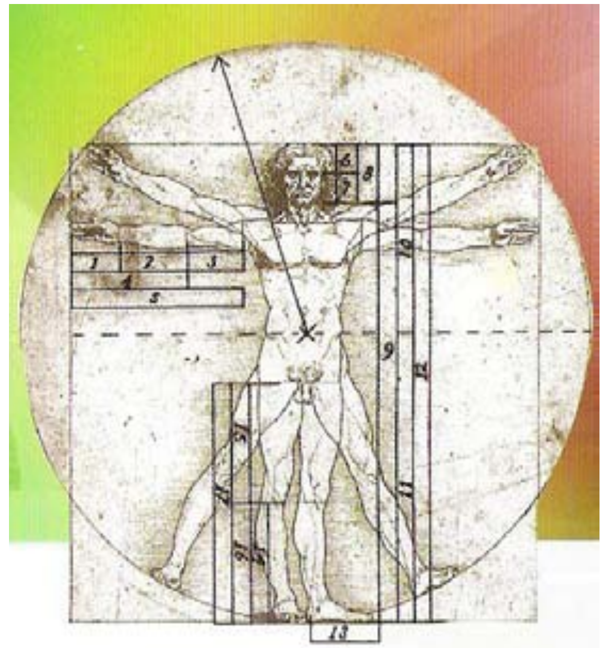
• Entre el diámetro de la boca y el de la nariz, existe una relación *Phi*.

• La relación entre el diámetro externo de los ojos y la línea Inter-pupilar también es *Phi*.




• Entre las falanges de los dedos de las manos, es decir, entre la primera y la segunda, o entre la segunda y la tercera, al dividir obtenemos *Phi* (Φ)= 1.61803398874…

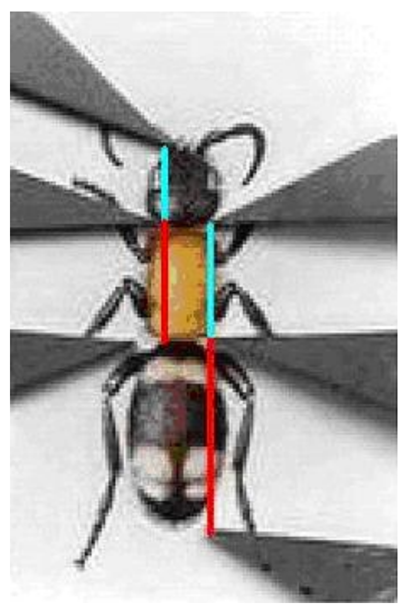
En realidad todas las proporciones anteriores se encuentran dentro de cualquier persona, tal vez por esto exista gran diversidad entre las especies. La siguiente imagen es quizá, la representación más conocida de la división del cuerpo humano con esta propiedad. El hombre de Vitrubio, la obra de Leonardo da Vinci (1452 – 1519), basada en las teorías del arquitecto Marco Vitrubio.



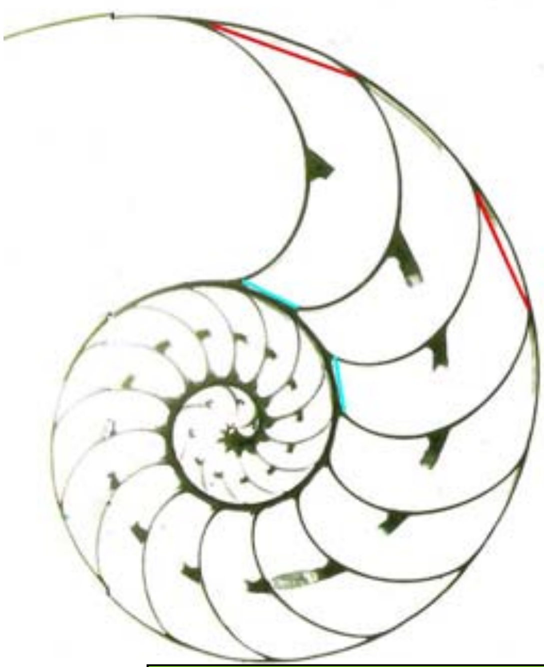
## *Matemáticas en la naturaleza*

En la naturaleza existen varios elementos relacionados con este número peculiar.

• La relación entre las partes del cuerpo de una abeja, es decir, si dividimos lo que mide la línea roja entre lo que mide la línea azul que le sigue, el resultado será *Phi*.



• Las espiras del interior de cualquier caracol, se encuentran relacionadas por el número *Phi*, no sólo del Nautilus.



Caracol Nautilus

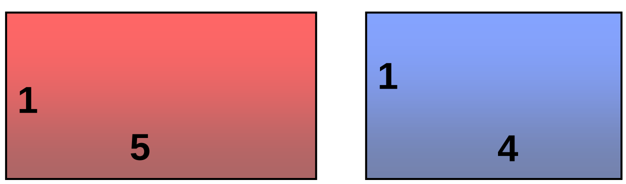
• En flores como las margaritas o girasoles, está presente en la disposición de sus pétalos, dado que los estos crecen de manera espiral y, cada que completan un giro, el total de pétalos dentro de éste es un número de la secuencia de Fibonacci (ver Pág. 40).


• Las ramas principales y las secundarias de un tronco se encuentran relacionadas por el número *Phi*.

• Se ha observado que la dentadura humana crece mediante dicha proporción. Por ejemplo, la relación entre la anchura de un diente central con la de un diente lateral es *Phi*.

# *En busca de la mejor hoja*

Un rectángulo y el cuadrado comparten algunas propiedades, sin embargo, poseen otras que los distinguen claramente. Ahora bien, si decimos a un compañero:’dibuja un rectángulo’ y nos contesta:’ ¿lo quieres gordo o delgado?’, no suena extraño. No obstante, si le pedimos: -‘dibuja un cuadrado’- y nos contesta lo mismo, entonces podemos concluir que no entiende lo que es un cuadrado. Si bien, un cuadrado puede ser grande o pequeño, no puede ser más gordo o más delgado. ¿Dónde está la diferencia? Ésta radica en que en cualquier cuadrado la razón entre sus lados es 1, dado que son iguales, es decir, miden lo mismo. Y en un rectángulo la razón entre sus lados puede ser cualquiera, ya que son distintos.




Razón 1/5 Razón 1/4

Cuando hablamos de forma cuadrada decimos demasiado. Y cuando hablamos de forma rectangular decimos poco.

Una hoja de papel puede cortarse de varias maneras, depende de lo que pretendamos hacer con ella. Una manera curiosa de cortarla sería en dos partes, pero de tal modo que al dividirla resulten dos rectángulos cuyos lados mantengan la misma razón entre sí, como los lados del original. Y al dividir éstos dos a la mitad, obtengamos cuatro rectángulos con la misma razón, y así sucesivamente, es decir, de tal modo que se conserve la forma, como una herencia de padre a hijo. ¿Existirá un rectángulo con ésta propiedad?

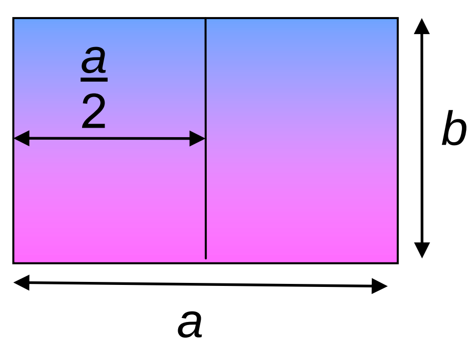
Sabemos que hay distintos tipos de hojas de papel, tamaño carta, oficio, doble carta, A4, etcétera. Tomemos una de ellas, la que mide aproximadamente 21cm. x 29.7 cm. La razón del lado mayor entre el menor es 29.7/21 = 1.41. Si dividimos ésta a la mitad obtenemos dos rectángulos de 14.85 cm. x 21 cm. y ahora la razón de sus lados es 21/14.85 = 1.41, conserva la razón de la original.

Ahora, tomemos otro tipo de hoja. Una donde sus lados miden 21.5 cm. x 31.5 cm. La razón entre sus lados es de 1.46. Si dividimos por la mitad obtenemos dos rectángulos de 15.75 x 21.5 y la razón de sus lados es 1.36, por lo que no tiene la misma propiedad. No obstante, si dividimos a la mitad estas dos, obtenemos cuatro hojas de 10.75 x 15.75 con una razón entre sus lados de 1.46… ¡igual que la hoja original antes de cortarla! ¿Sorprendente? Analicemos un poco…Lo que sucede en realidad que:

$$\boxed{\frac{15.75}{10.75} = \frac{2 \times 15.75}{2 \times 10.75} = \frac{31.5}{21.5}}$$

No tiene algo de sorprendente, sucede para cualquier hoja rectangular sin importar sus medidas.

Nosotros buscamos una hoja de lados *a x b*, tal que al cortarla por la mitad resulten dos rectángulos con los lados en la misma razón, es decir, lado mayor sobre lado menor debe resultar el mismo número en los rectángulos pequeños como en el grande.




Deseamos que se cumpla que:

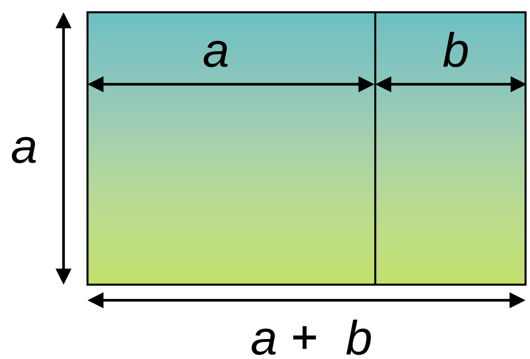
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{(a/2)}$$

Y desarrollando, obtenemos:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

Entonces, para que un rectángulo tenga la propiedad anterior, es decir, que al ser dividido por la mitad los lados de los nuevos rectángulos hereden la razón que tienen los lados del rectángulo original, ésta debe ser raíz de 2.

Trabajemos con otra curiosa propiedad. Imagina una hoja de papel que al quitarle un cuadrado, como el de la siguiente figura, debe quedar un rectángulo con la misma razón entre sus lados como en la original.




¿Qué razón (a/a + b) deben tener sus lados para que esto suceda? Observemos con detalle la imagen anterior. Si hacemos uso del álgebra una vez más, lo que deseamos se traduce en:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

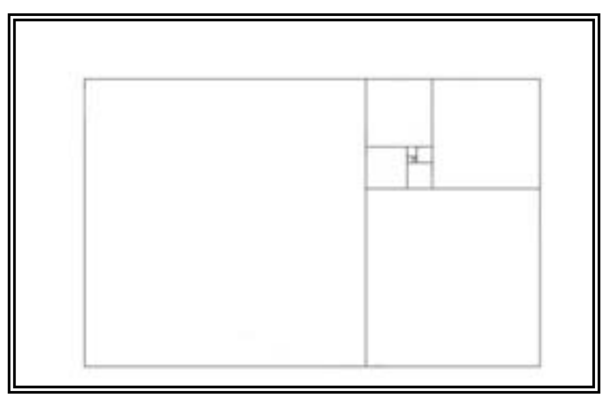
Y desarrollando, obtenemos que.

$$\frac{a}{b} = 1.61803...$$

¡Es el número *Phi*!, es la relación con la que dividimos el cuerpo humano al principio del capítulo. Esto quiere decir que si deseamos un rectángulo, con la propiedad de que al quitarle un cuadrado, el rectángulo que queda tenga una razón entre sus lados igual a la del rectángulo original, y que si a éste nuevo rectángulo le quitamos un cuadrado, el rectángulo que deja tenga la misma relación y, así sucesivamente, la razón entre sus lados debe ser 1.618033... Este número representa la sección áurea, como la llamara Leonardo da Vinci, o la divina proporción, nombre que le diera Luca Pacioli, y se puede encontrar en el arte, en las matemáticas, en la física y en la biología, así como las palomas cuando salen de los sombreros de los prestidigitadores; es decir, aparece sorpresivamente donde menos se espera.

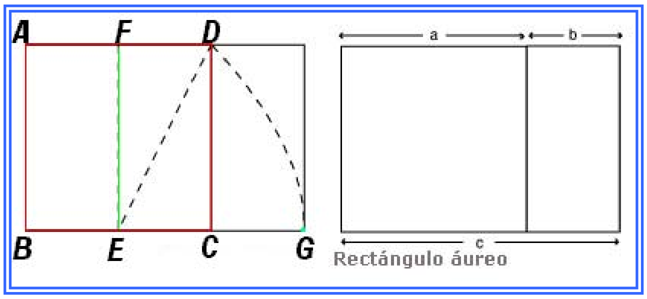
Cuando dos longitudes se comportan como *a* y *a* + *b*, se dice que *a* es la *sección áurea* de *a* + *b.* El rectángulo así construido se suele llamar rectángulo áureo.

Es decir, la proporción o sección áurea es la manera de dividir un segmento en dos partes, de forma que, el resultado de la razón formada por el valor de las distancias de los dos nuevos segmentos, de cómo resultado el número *Phi*.



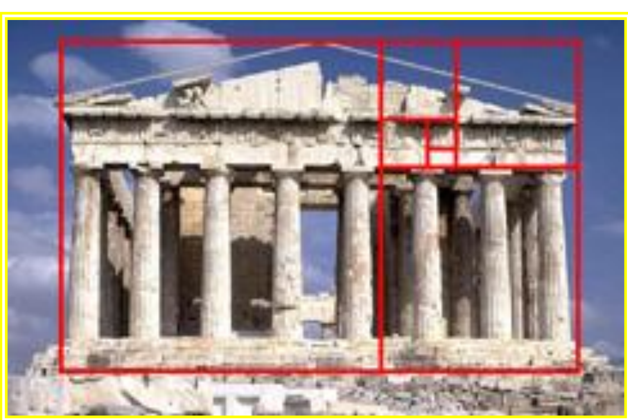
## *Construye un rectángulo áureo*

Existe una manera de hacerlo sin tratar con números. Toma un cuadrado *ABCD*, no importa la longitud de su lado. Traza una línea *EF* que lo divida por la mitad como en la siguiente figura. Con un compás toma centro en *E* y ábrelo hasta *D*, traza un arco con esa longitud hacia abajo. Prolonga el lado *BC* y llama *G* al punto de intersección de éste con el arco. Esta será la longitud del lado mayor del rectángulo. Ahora ya tienes un rectángulo áureo.



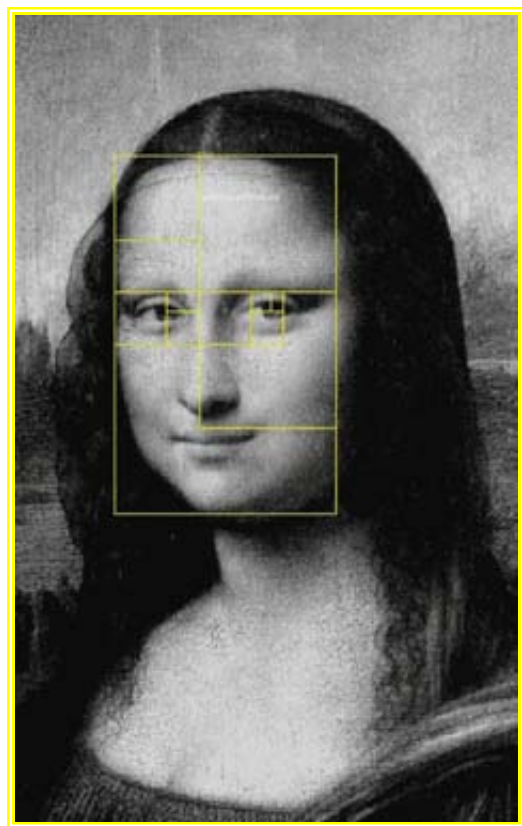

## *Sección áurea en el arte*

Se cree que para los antiguos griegos, un rectángulo áureo era agradable a la vista, algunos artistas, utilizaron esta proporción en la arquitectura y la escultura. Fidias (480 – 430 a.C), un artista de la antigua Grecia, utilizó esta sección en varias de sus obras. Entre ellas destacan, la estatua de Atenea, de Zeus, y el Partenón (quizá la más notable), en este templo, la proporción se encuentra tanto en la fachada como en la planta.



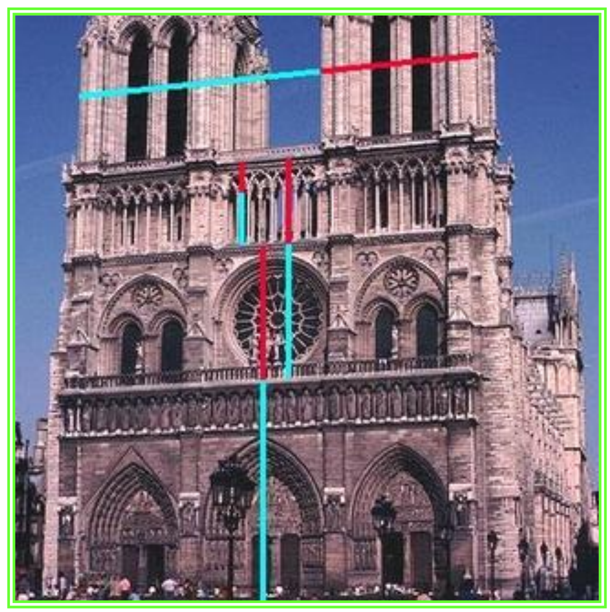
Durante el Renacimiento, algunos artistas emplearon la sección áurea dentro de la pintura, la escultura, y la arquitectura. Por ejemplo, los pintores la consideraban como proporción perfecta entre los lados de un rectángulo, es decir, realizaban sus pinturas en cuadros donde la relación entre sus lados es *Phi*; digamos 1 metro de altura por 1.618… de ancho o viceversa.

Un ejemplo de lo anterior, lo observamos en el famoso cuadro conocido como la Gioconda o Mona Lisa, donde Leonardo da Vinci, plasmó el rostro dentro de un rectángulo áureo. Además, si seccionamos dicho rectángulo, de manera que las divisiones guarden la misma proporción, podemos encontrar otros detalles, como la posición de los ojos, la nariz y la boca.



Otro ejemplo en donde el gran Leonardo da Vinci utilizó la sección áurea es, en su pintura *La última cena*, donde Cristo los discípulos sentados están colocados estratégicamente, es decir, su posición está basada mediante rectángulos áureos. Así como las dimensiones de la mesa, las proporciones de las paredes y las ventanas al fondo.

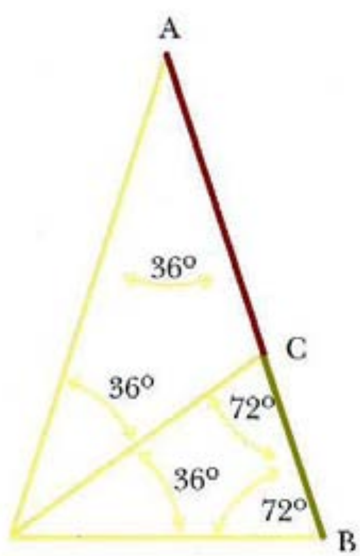

Otro ejemplo de sección áurea en la arquitectura, lo podemos apreciar en la catedral de Notre Dame en Francia. Las líneas rojas y azules se encuentran en proporción áurea.



Hoy en día, la sección áurea se puede ver en diversos diseños. Tal vez el más conocido y difundido es la medida de las tarjetas de crédito, la cual sigue dicho patrón, así como las cajetillas de cigarros.

Hoy en día, los arquitectos aun utilizan la proporción áurea. Por ejemplo, lo encontramos en el conocido edificio de la ONU en Nueva York, cuya cara mayor que es el frente de éste, está construida con las proporciones de un rectángulo áureo.

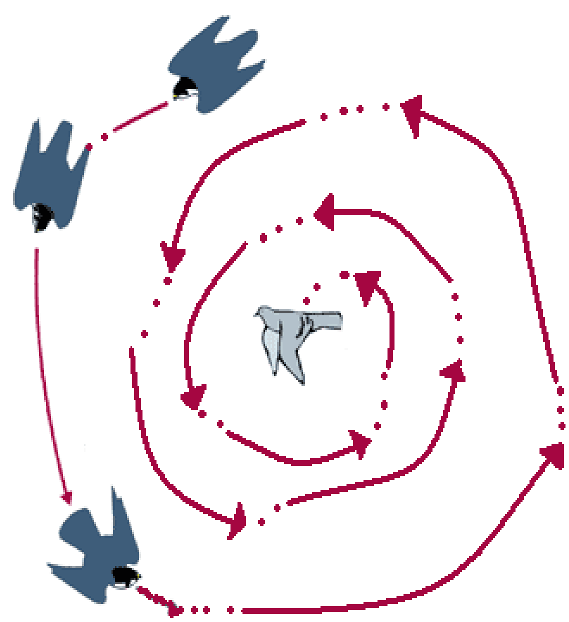

Con la sección áurea no sólo se pueden construir rectángulos áureos, también existe el triángulo áureo. Tomemos un triángulo isósceles, es decir, aquel que tiene dos lados iguales y uno distinto. Para que sea un triangulo áureo lo construimos de manera que el lado menor sea sección áurea de los lados mayores. Ahora el punto *C* representa la sección áurea del lado mayor. Si unimos *C* con el vértice opuesto, obtenemos dos triángulos isósceles, uno más grande que otro. Tomemos el triangulo pequeño, éste tiene sus lados en la misma razón que el original; si a éste triangulo más pequeño le aplicamos el mismo procedimiento tendremos dos nuevos triángulos dentro de él, pero uno de ellos seguirá guardando la razón inicial. Tal como sucedía con el rectángulo. Tiene herencia.




## ¿Qué es la espiral logarítmica?

Imagina una hormiga que se mueve a velocidad constante sobre la aguja del segundero de un reloj, la trayectoria que ésta describe conforme da vueltas es una espiral logarítmica. Es una clase de curva, la cual es formada mediante el cálculo matemático.


• La trayectoria que sigue un halcón al cazar, está descrita por una espiral logarítmica.



• La trayectoria realizada por los insectos al aproximarse a la luz, también es una espiral logarítmica.

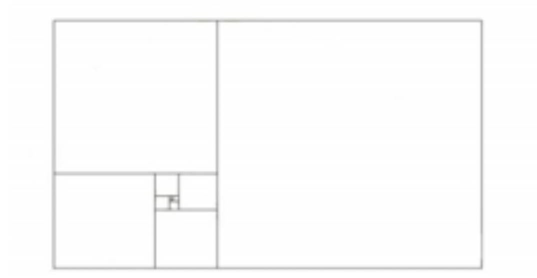
• Las llamadas galaxias espirales, tienen algunos brazos que se aproximan a una espiral logarítmica.

• Algunos fenómenos naturales como los huracanes y ciclones también poseen la forma de una espiral logarítmica.

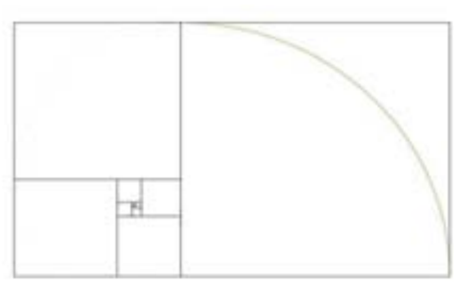
•En biología, por ejemplo, las telas de araña y las conchas de caracoles son espirales logarítmicas.

Y lo más sorprendente de esta curva es que la podemos obtener trazando círculos en el rectángulo áureo y en triángulo áureo. Si trazamos un cuarto de círculo dentro de cada uno de los cuadrados que aparecen en el rectángulo áureo durante el proceso de división, el resultado de esto es una aproximación a una espiral logarítmica.

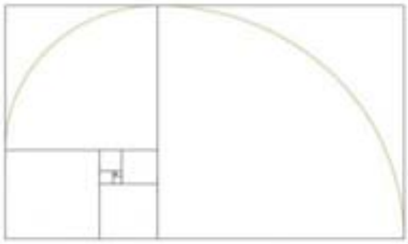
Paso 0



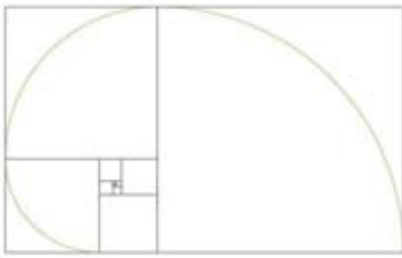
Paso 1



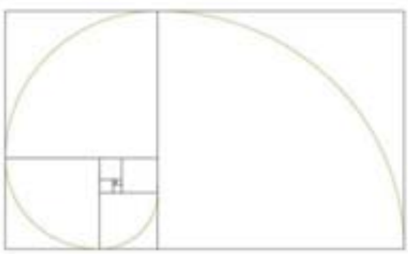
Paso 2



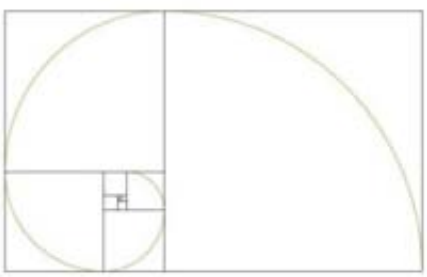
Paso 3



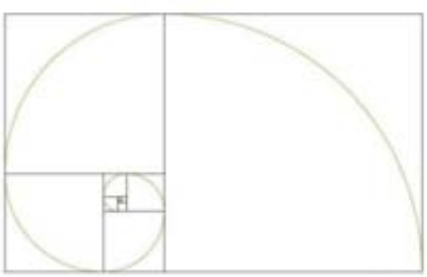
Paso 4



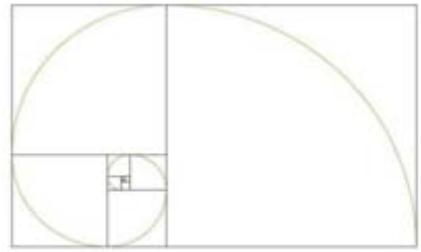
Paso 5



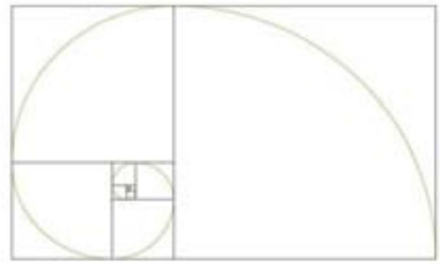
Paso 6



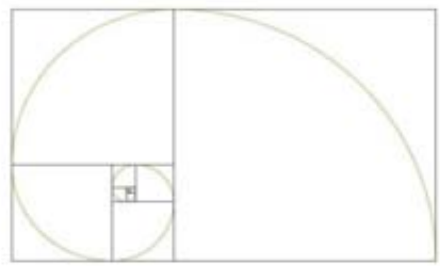
Paso 7



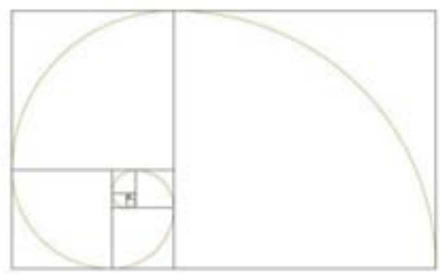
Paso8



Paso 9



Paso 10



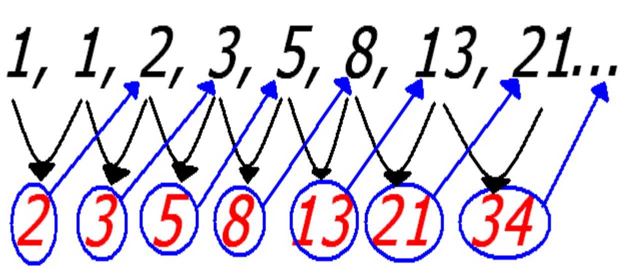
## *Los conejos de Fibonacci*

El número áureo es también el que resulta de la secuencia numérica de Fibonacci, sucesión que anuncia cuántos conejos, al cabo de un tiempo, resultan de una pareja.

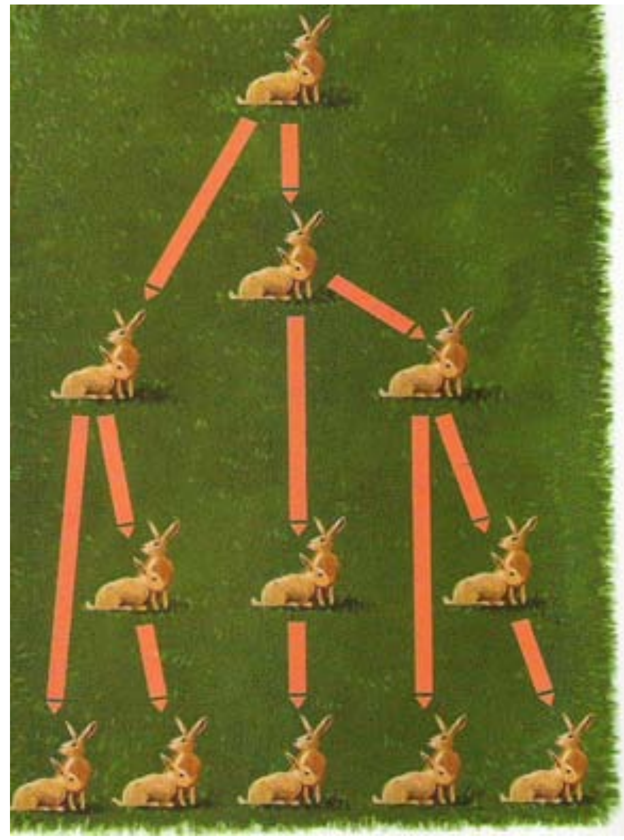
Leonardo de Pisa (1170 – 1250), apodado Fibonacci, se preguntó en qué proporción crecen una población de conejos a partir de una pareja. Para ello supuso que cada pareja podía engendrar la primera vez un par y en la siguiente generación otro, antes de morir.

Si empezamos con una sola pareja, en la segunda generación habrá nacido una nueva pareja, en la tercera generación, dos (una de la pareja original y otra de sus descendientes) en la cuarta generación serán tres nuevas parejas. En este punto es donde se inicia la loca plaga de conejos: en la quinta generación serán cinco parejas, en la sexta ocho, en la séptima trece, y veintiuno en la octava.

La sucesión de números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610,… se conoce, hoy en día, como la serie o secuencia de Fibonacci, en donde cada número es igual a la suma de los dos números anteriores.




Curiosa, pero exactamente, esta secuencia representa el número de conejos que resultan a partir de una pareja cada mes, si aceptamos que cada nuevo par de conejos es capaz de reproducirse al mes de haber nacido.



Ahora viene lo bueno: si dividimos 610 entre 377 (que son números que se encuentran en dicha secuencia), nos da el valor de la sección áurea o número áureo con una aproximación de 5 decimales, pero si tomamos cifras más altas de la secuencia, ¡la aproximación es cada vez mayor! Si lo dudas, hazlo y sorpréndete…

Aquí cabe decir que fue el gran astrónomo Kepler quien se dio cuenta, en el siglo XVI, que al dividir un número de la serie de Fibonacci entre su inmediato anterior obtenemos el número áureo.

## *Imitar a Euclides*

En fin, el número surge en las matemáticas, en la física, en la biología y en otros lugares como el arte y la arquitectura, así como las palomas surgen en los sombreros de los magos, este número aparece en donde menos lo esperamos.

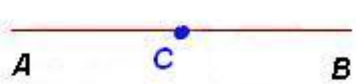
En realidad cualquier segmento puede ser dividido de tal manera que sus partes cumplan con la proporción áurea, lo interesante de algunos segmentos es que esa división sea un lugar específico.

Ahora bien, si quieres obtener la proporción áurea sin emplear número alguno u operaciones largas y poco emocionantes, solo tienes que imitar al gran Euclides (330 – 275 a.C.), quien lo hizo geométricamente hace 2,300 años, utilizando regla y compás, aunque también puedes ocupar transportador y escuadras si es que lo necesitas.

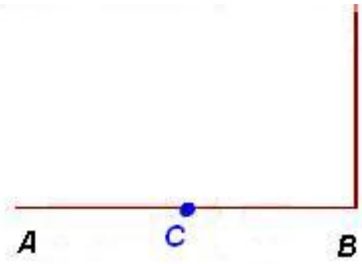
## ¡Hagámoslo!

1.- Traza sobre el papel una línea recta y acótala con las letras *A* y *B*.

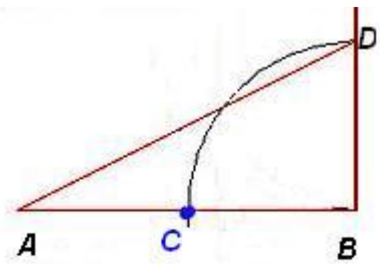

2.- Divide la línea por la mitad, encontrando su punto medio y llámale *C.*



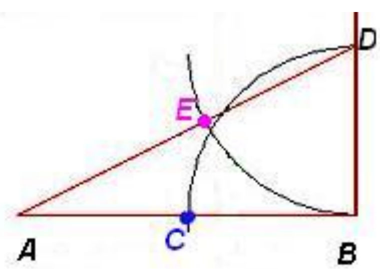

3.- Traza ahora una perpendicular por *B*.



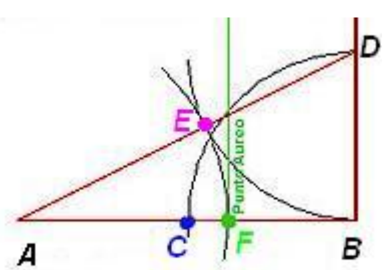

4.- Abre tu compás de *B* hasta *C* y traza un arco que corte a la línea perpendicular que esta sobre *B*, llama *D* a este punto. Ahora forma el triángulo *ABD*.




5.- Con esa misma medida en el compás, toma como punto de apoyo *D* y traza un arco que corte a la línea *DA*. A este punto llámale *E*.




6.- Finalmente, haciendo centro en *A*, abre tu compás de *A* hasta *E* y traslada la distancia *AE* a la recta *AB,* haciendo un arco que corte a la línea *AB*, y habrás obtenido un punto *F*.




*¡El punto F divide a la recta AB en la proporción áurea deseada!*

Because the World is round, it turns me on
Because the World is round…ah
Because the wind is high, it blows my mind
Because the wind is high…ah (…)
Because the sky is blue, it makes me cry
Because the sky is blue…ah

*The Beatles (1969)*
*Because. Abbey Road*

**Tal vez, en alguna ocasión hemos estado parados en medio de los rieles que forman las vías del tren**

**Da la impresión que no existen las rectas paralelas, pero si caminas, y caminas, te das cuenta que los rieles nunca se juntan y que son paralelos.**

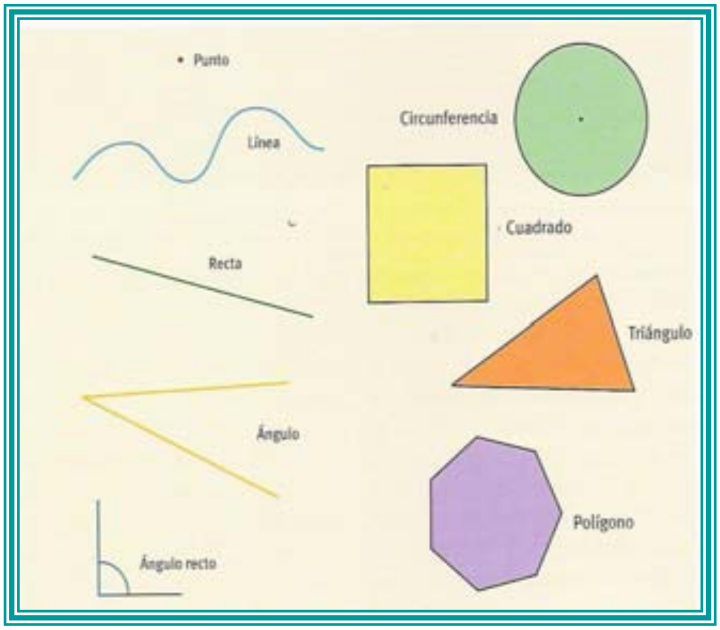
**¿Qué pensaríamos si encontráramos un lugar en el que no existen las paralelas o que es posible dibujar un *rectángulo con sólo tres lados*?**

**Mejor aún, ¿qué pensaríamos si ese lugar fuera conocido por todos?**

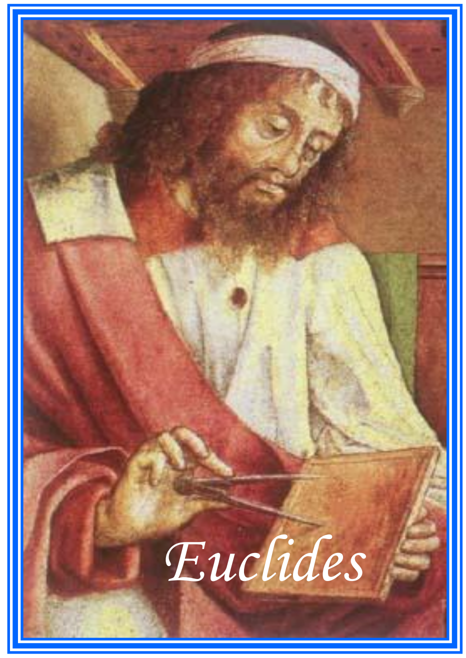
**Pues este lugar tan interesante existe y es la superficie de nuestro planeta Tierra.**

## *Geometría plana*

Algunos conceptos importantes de la geometría plana son: el punto, la línea, la línea recta, la circunferencia, el ángulo y ¿por qué no?, también el triángulo. En esta geometría sabemos que un punto señala un lugar en el espacio. No tiene ni longitud, ni ancho, ni altura, ni profundidad. Un punto matemático sólo puede existir en el pensamiento, ya que ni la punta más afilada de un lápiz puede dibujar un punto sin darle a éste cierta dimensión.

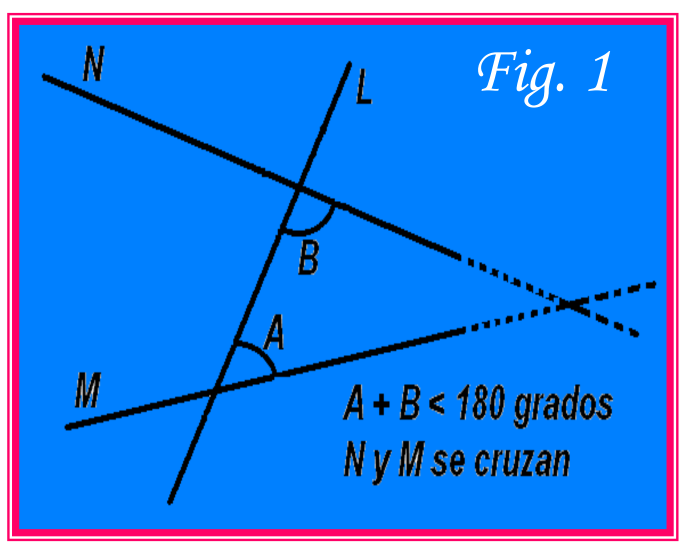



El matemático griego Euclides (330 – 275 a.C.) fue el primero en formalizarla. Para algunos matemáticos el inicio de las matemáticas modernas data hacia el año 300 a.C.. En la obra en trece capítulos los *Elementos,* el sabio griego explicó en ella la geometría, usando únicamente la lógica. Primero describió cinco hechos que presuponía eran válidos por si mismos o por gracia divina. A tales hechos se les llama axiomas o postulados de fundación. Por ejemplo, algunos de estos dicen: entre dos puntos siempre es posible trazar una línea recta que pase por ambos; una línea se puede extender indefinidamente; todos los ángulos rectos son iguales. A partir de una lista de supuestos dedujo más de cuatrocientos cincuenta teoremas matemáticos.




A través de la dilatada historia de la geometría plana, muchos matemáticos permanecieron perturbados por una tenue mancha que parecía ensombrecer la colección de axiomas. Al tratar sobre líneas paralelas, es decir, líneas rectas en un plano que por más que se extiendan nunca se cruzan, Euclides formuló un axioma que se puede expresar así:

Sí la línea recta *L* corta a las líneas *N* y *M* de tal manera que forman ángulos correspondientes *A* y *B*, los cuales suman menos de 180 grados, entonces *N* y *M* se cortaran de aquel lado de la línea *L* en que se encuentran dichos ángulos.



Este axioma es esencial para la deducción de importantes teoremas, como el teorema que afirma:


Debido a que el enunciado del quinto postulado no es tan intuitivo o claro, es decir, es más complicado de entender que los cuatro anteriores, varios investigadores tenían la esperanza de que la hipótesis no fuera un axioma, sino que se pudiera deducir de los primeros axiomas de Euclides. Sin embargo, eso resulta imposible.

Un monje italiano de nombre Girolamo Sacceri (1667 – 1733) intentó demostrarlo. Negó la conclusión del postulado tratando de llegar a una contradicción, es decir, propuso que las líneas *N* y *M* (Fig. 1), no se cortaran, aun cuando los ángulos que forman con la línea *L* suman menos de 180 grados. Buscó alguna razón falsa por medio de la cual se pudiera deducir la veracidad del enunciado original, pero nunca la pudo encontrar.

Después de Sacceri, varios matemáticos hicieron el intento, entre ellos destacan nombres como: Bolyai (1802 – 1860), Lovachevski (1792 – 1856), Gauss(1777 – 1855), Playfair (1748 – 1819), quien sólo consiguió mostrar que el quinto postulado es equivalente a decir que dada una recta y un punto fuera de ella, existe una recta paralela a la ya dada que pasa por ese punto y es única. Algunos de éstos construyeron geometrías que se sustentan en los cuatro primeros axiomas y en la negación del quinto. Un ejemplo de éstas, es la geometría hiperbólica. En ella, a diferencia de la plana, las figuras viven en un círculo. Los puntos son todos los puntos en el interior del círculo, las rectas son los pedazos de rectas que se encuentran en el círculo, llamadas secantes. Con esta definición dado un punto *P* afuera de una recta *g*, existen varias rectas que pasan por ese punto sin tocar a *g*, es decir son paralelas a *g* (Fig. 2); mientras que las otras cuatro hipótesis de Euclides se cumplen.

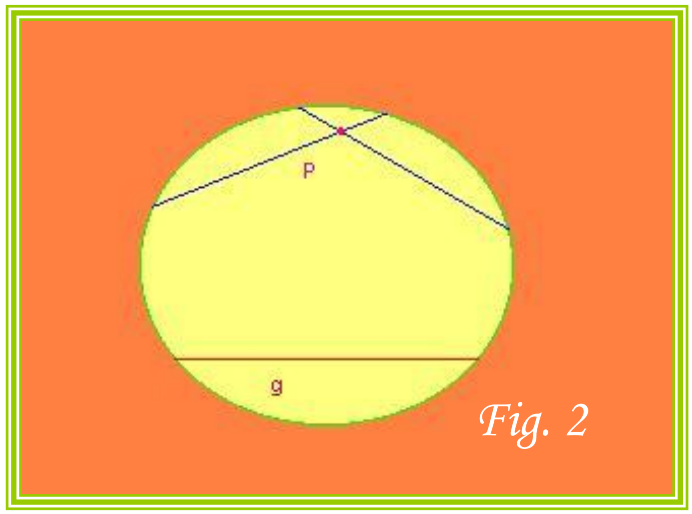
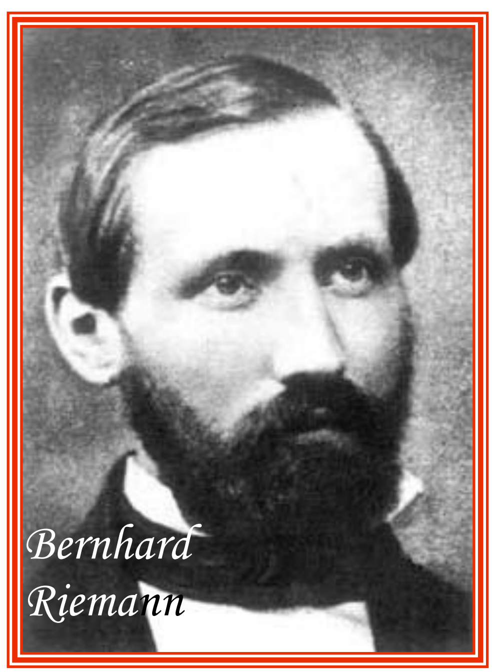


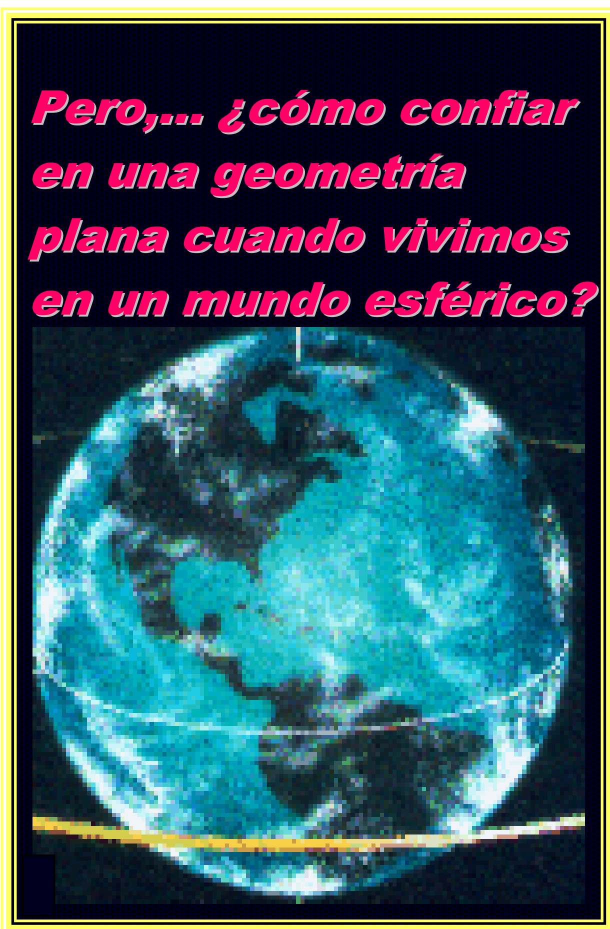
*Fig. 2*

Sin embargo, uno de los matemáticos más destacados en el estudio de geometrías distintas a la plana fue Riemann (1826 – 1866) y su geometría esférica.


*Bernhard Riemann*

# Geometría Esférica

La geometría plana se ocupa de las propiedades de las figuras planas. Hoy en día no hay alumno que se pueda salvar de tener que estudiar la geometría de los antiguos griegos. Durante los primeros cursos de geometría, los profesores nos enseñan algunas propiedades tales como: las líneas paralelas son aquellas que se mantienen a la misma distancia una de la otra y por más que se les prolongue nunca se cruzan y, que un rectángulo es una figura geométrica con cuatro ángulos rectos y cuatro lados rectos




Todos estamos familiarizados con los elementos de la geometría plana ya mencionados. Además, sabemos que en la geometría de Euclides una línea recta es el camino más corto entre dos puntos.

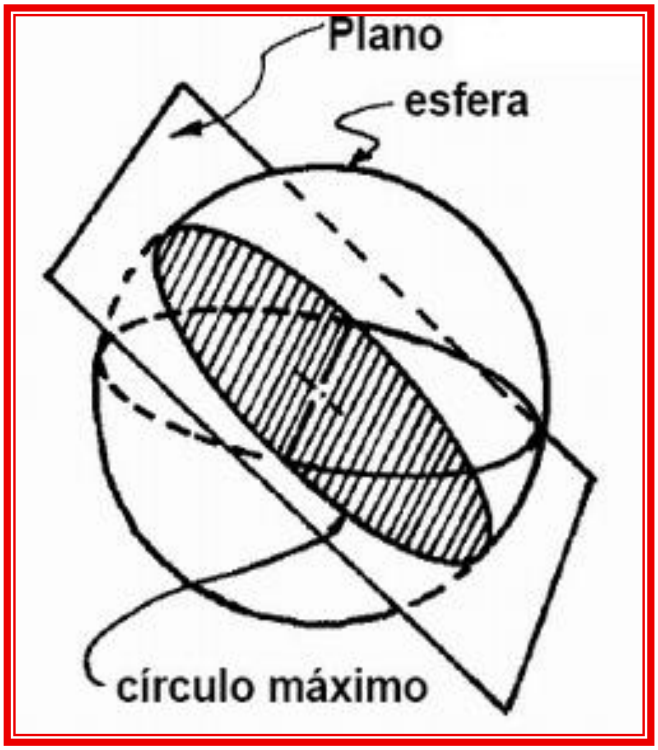
### ¿Será cierto también para viajar de un país a otro?

Si tomamos como absoluta esta definición de línea recta, diríamos que la distancia más corta para viajar de México a un país como Rusia es un camino recto, el cual no pasaría por encima de la superficie terrestre dado que esta es curva. Entonces, este camino tendría que ser construido por debajo del suelo como una especie de tren subterráneo, algo que se ve complicado.

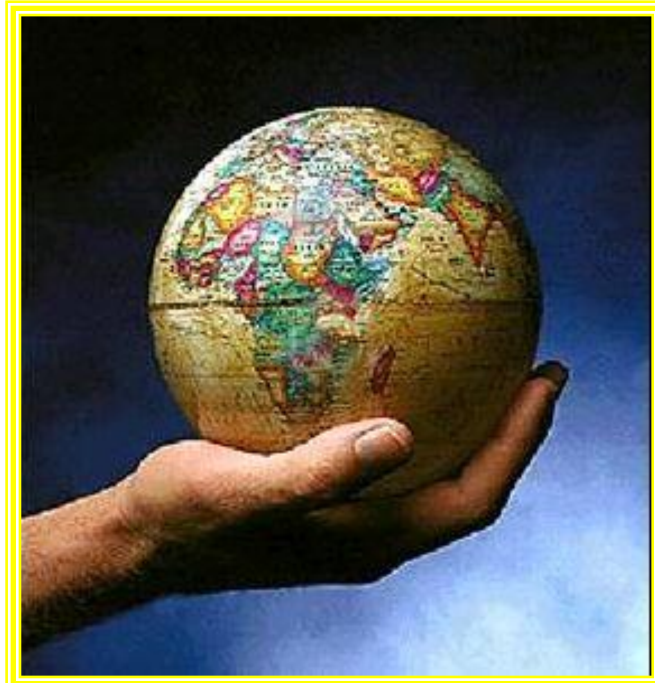

Entonces, ¿cuál es el camino más corto para viajar sobre la Tierra?

Es evidente que no se puede trazar una línea recta sobre dicha superficie (esférica), sin embargo, recordemos que una línea recta es la trayectoria más corta o de menor longitud entre dos puntos; podemos generalizar el concepto y definir una curva de longitud mínima sobre una esfera. Esta curva es una porción de arco, en términos técnicos las curvas de menor longitud en un cuerpo esférico se llaman ***geodésicas***

Las geodésicas o círculos máximos, son círculos cuyo centro coincide con el centro de la esfera y que quedan determinados por su intersección con un plano que pasa por el centro de la esfera, es decir, una geodésica es un círculo que tiene la propiedad de cortar en dos partes iguales a la esfera.

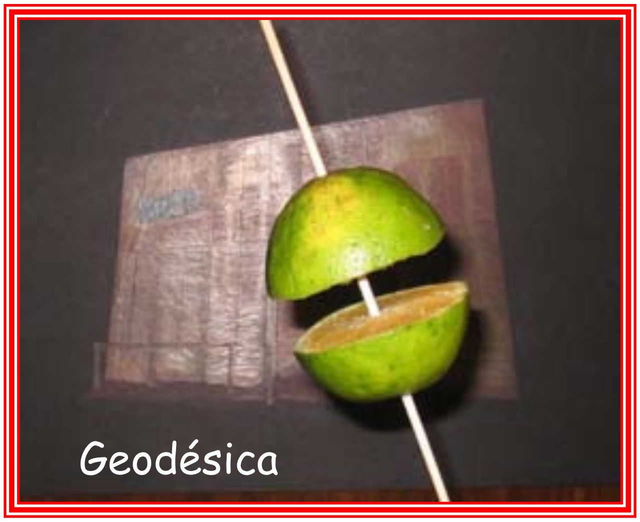



Podemos decir que las geodésicas de un plano son las líneas rectas tal como las conocemos, y como se nos enseña en las clases de geometría cumplen una serie de condiciones. Un ejemplo de esto es: dos líneas rectas sólo se cruzan en un solo punto, o bien, que las líneas paralelas nunca se cortan entre sí. No obstante, estas condiciones no son ciertas en una superficie esférica como la del planeta Tierra, ya que las geodésicas (que son las que cumplen con el papel de líneas rectas), siempre se cruzan en dos puntos dado que cada una corta a la esfera en dos mitades y, por tanto, las líneas paralelas no existen sobre este tipo de superficies. Por esta razón los ángulos pueden variar y es posible encontrar un rectángulo con tres lados. Para entender un poco mejor la idea de espacio curvo en una superficie esférica como la de nuestro planeta, haremos el siguiente experimento sobre una naranja.

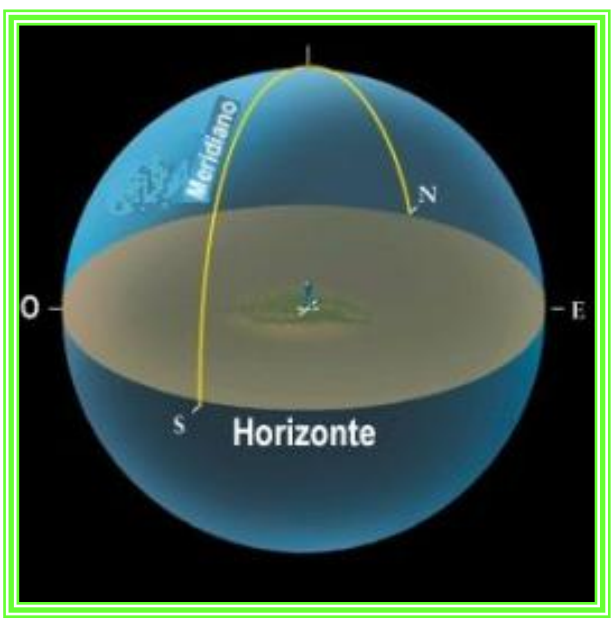


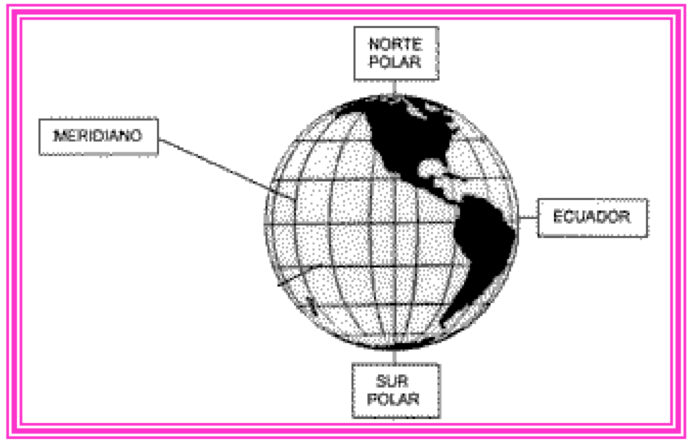
Imaginemos por un instante que la Tierra es una naranja. *¿Notas el gran parecido?* La verdad es que sólo nos interesa observar que ambas son esféricas y que es más fácil trabajar en un modelo mucho más pequeño que el original, sin embargo es necesaria la comparación dado que, al final del experimento mostraremos el resultado en ambos modelos, es decir, en la superficie terrestre y en la naranja.

Ahora trabajemos sobre la naranja. En este nuevo modelo de globo terráqueo y, lo más importante, nuestro nuevo modelo de geometría esférica, podemos ejemplificar (como se muestra en la imagen inferior), una geodésica o línea recta que se encarga de dividir en dos partes iguales a la naranja.



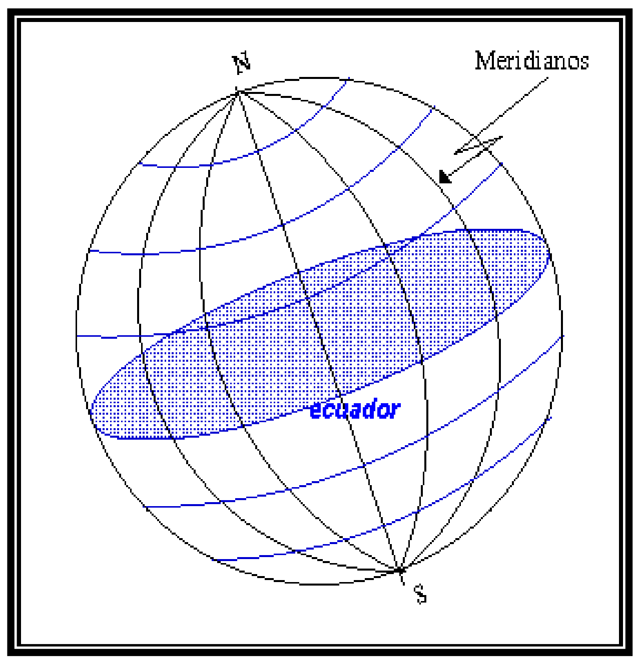

Al intentar hacer un comparativo entre la imagen anterior y la siguiente, podemos observar que el círculo de color café, el ecuador, se asemeja al que realizamos sobre la naranja, sin olvidar que el meridiano en color amarillo también representa una geodésica.




Algunos ejemplos particulares de geodésicas en la Tierra y que nos serán de gran utilidad en éste artículo son los meridianos y el ecuador.

Para poder definir cualquier posición de un punto sobre la Tierra, se ha convenido internacionalmente el trazado de líneas verticales, es decir, líneas que pasan por el polo norte y polo sur llamadas meridianos.



Haciendo un viaje sobre la naranja y, llevando los conceptos mencionados en el párrafo anterior a ésta, que desde este momento se convierte en nuestro pequeño modelo para conocer un poco más sobre la geometría esférica, los meridianos han sido representados con un color rojo y el ecuador de color azul. (Fig. 3)

Fig. 3

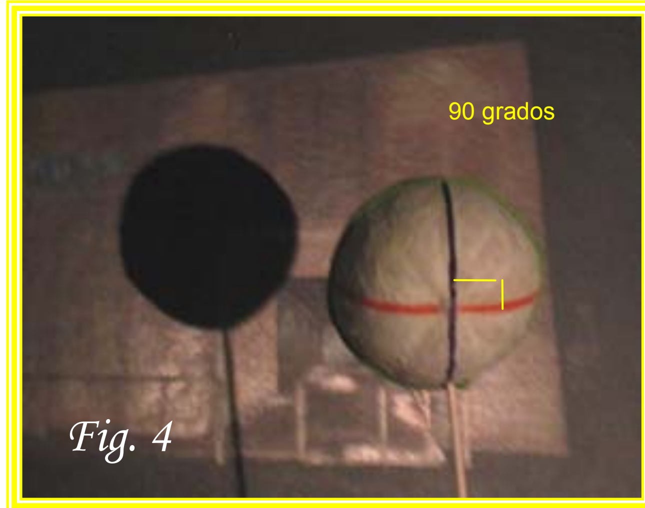



Fig. 4

En la Fig. 4 podemos notar el ángulo de 90 grados o ángulo recto formado por el meridiano 90 y el ecuador. En la Fig. 5 el ángulo recto entre el meridiano cero y el ecuador. Y en la Fig. 6 el ángulo recto formado por el meridiano 0 y el meridiano 90.

Ahora sólo basta con utilizar dos meridianos y el ecuador para llegar a nuestro destino: un rectángulo con tres lados. *¡Pero no son cualesquiera dos meridianos!* Haremos uso del meridiano cero que pasa por Greenwich en Inglaterra (por eso se le conoce como meridiano de Greenwich), y otro muy especial, el meridiano 90 que se encuentra situado entre India e Indochina, pasando sobre la meseta del Tíbet. Cabe recordar que los meridianos están separados cada 10 grados, de esta manera entre los dos meridianos que hemos elegido, el cero y el 90, existe un ángulo de 90 grados, el cual mostraremos a continuación.

Regresemos a la naranja y pongamos manos a la obra. Aquí representaremos el meridiano cero de color verde, al meridiano 90 con un color naranja y por ultimo al ecuador de color azul.

En las siguientes tres imágenes intentaremos mostrar el ángulo de 90 grados que forman nuestras tres líneas o círculos máximos.

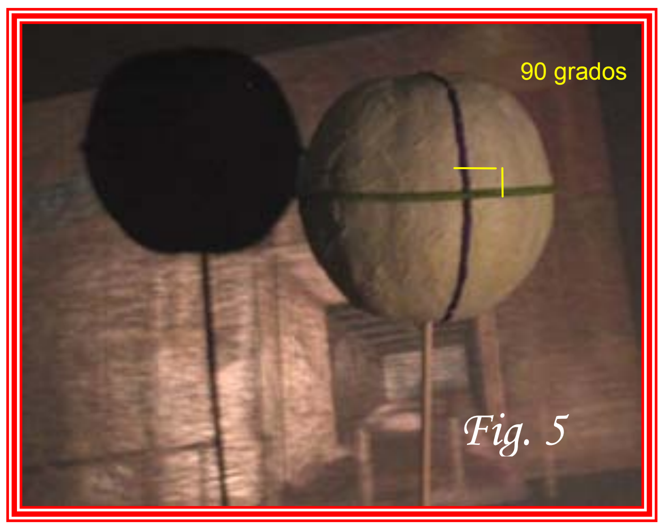



Fig. 5

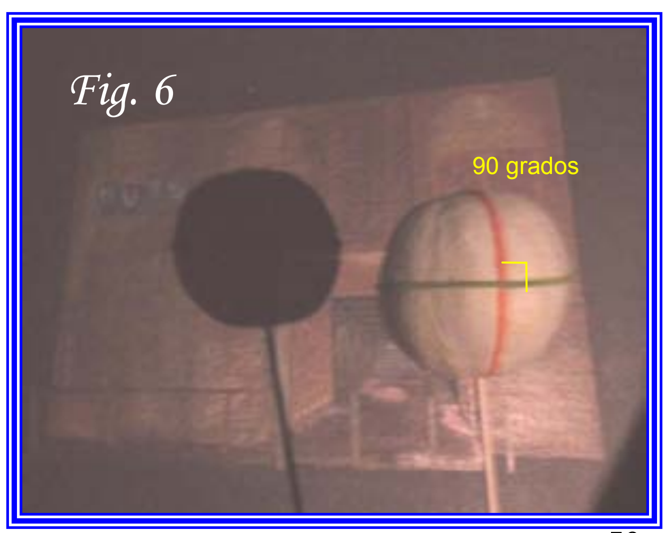



Fig. 6

En realidad, en cada una de las imágenes anteriores el objetivo es hacer, de una manera más gráfica y menos oscura, una comparación con la imagen correspondiente a la  Fig. 7. En las cuatro figuras podemos notar el ángulo de 90 grados.

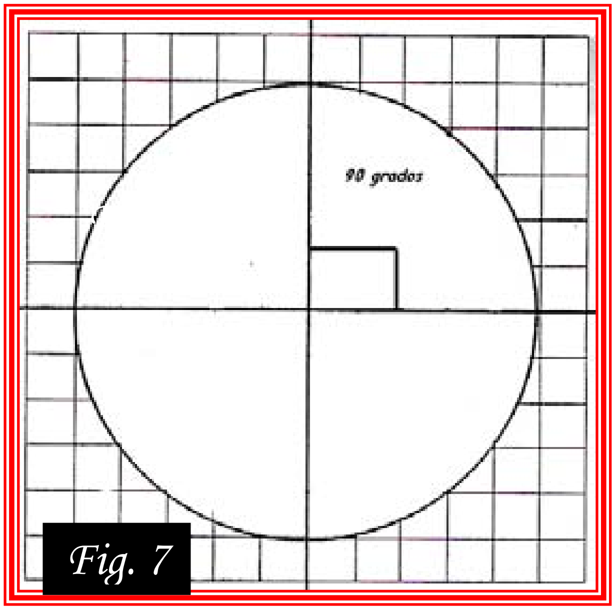



Fig. 7

Después de demostrar que entre cada par de líneas rectas o geodésicas de las tres que escogimos para éste experimento, se forma un ángulo recto, podemos hacer la presentación final: un rectángulo formado únicamente con tres lados. En la Fig. 8 se muestra una manera distinta de ver el rectángulo con tres lados.

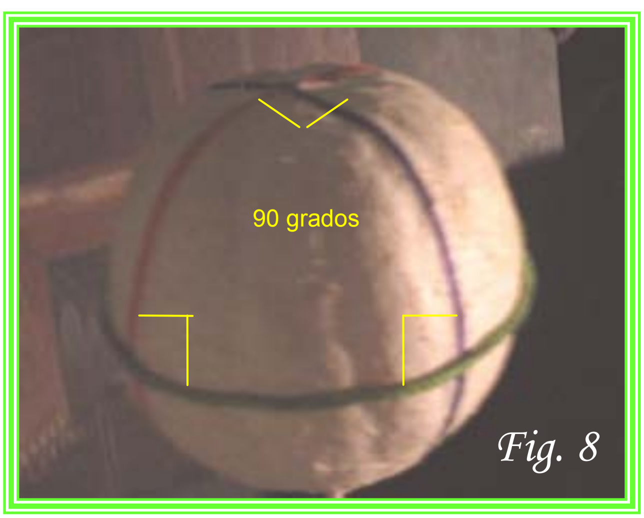



Fig. 8

La figura que logramos dibujar en la naranja también es un triángulo equilátero, pero con una condición bastante peculiar. La suma de sus tres ángulos internos da como resultado ***270 grados*** algo que en geometría plana es imposible que suceda (Fig. 9).

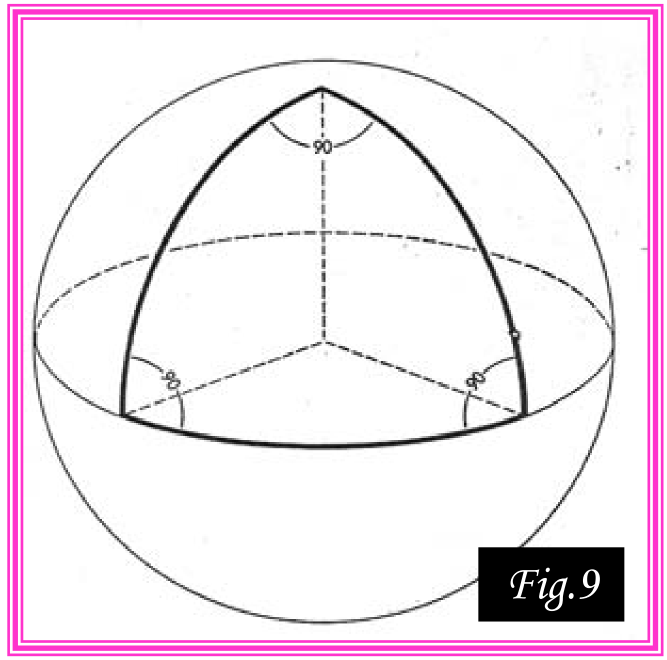
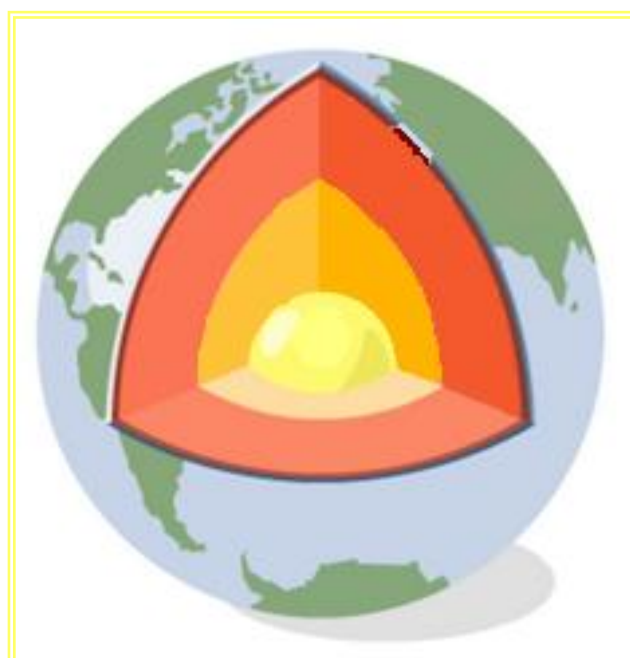
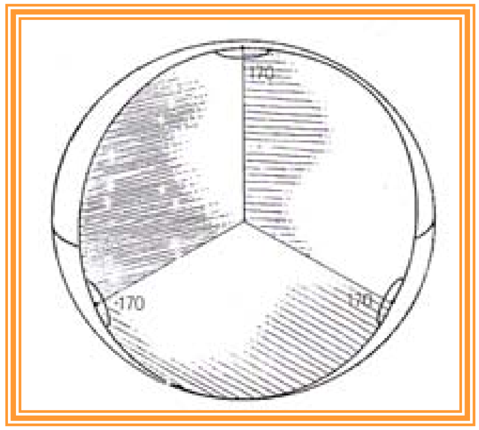


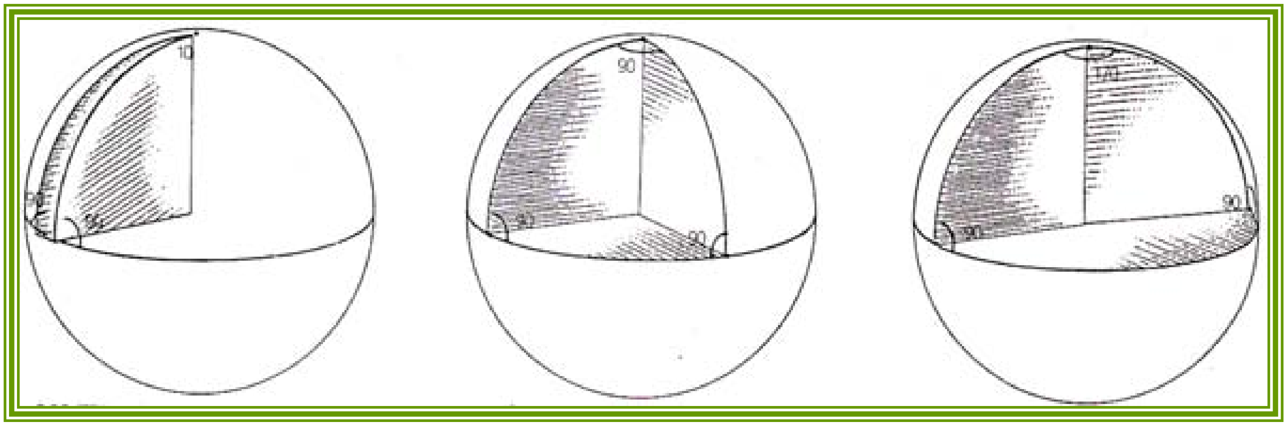

Fig.9

*¡Así se ve un rectángulo de tres lados en la Tierra!*



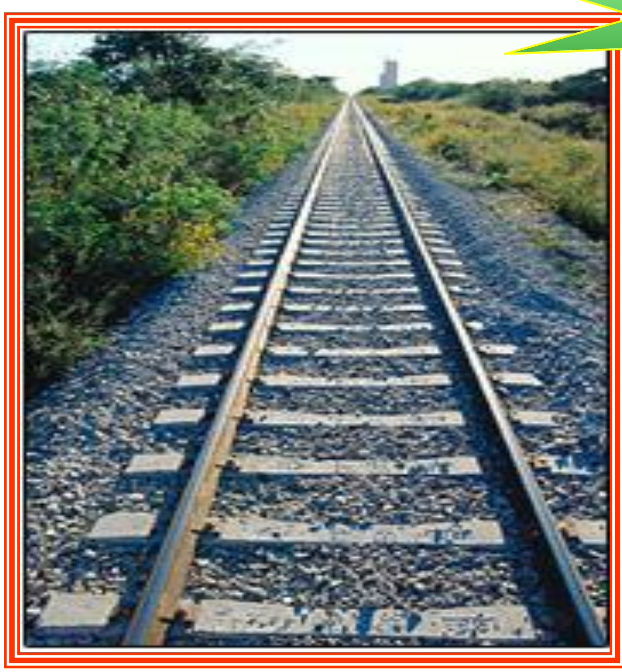
*Dentro de la geometría esférica existen triángulos cuya suma de sus ángulos internos es mayor a 180 grados*




Entonces, sí en una superficie, como la Tierra, no existen las paralelas y algunas condiciones de la geometría plana, tal como la suma de los ángulos de un triángulo que no suma 180 grados, *¿qué sucede con las vías del tren? ¿En realidad se cruzan?*

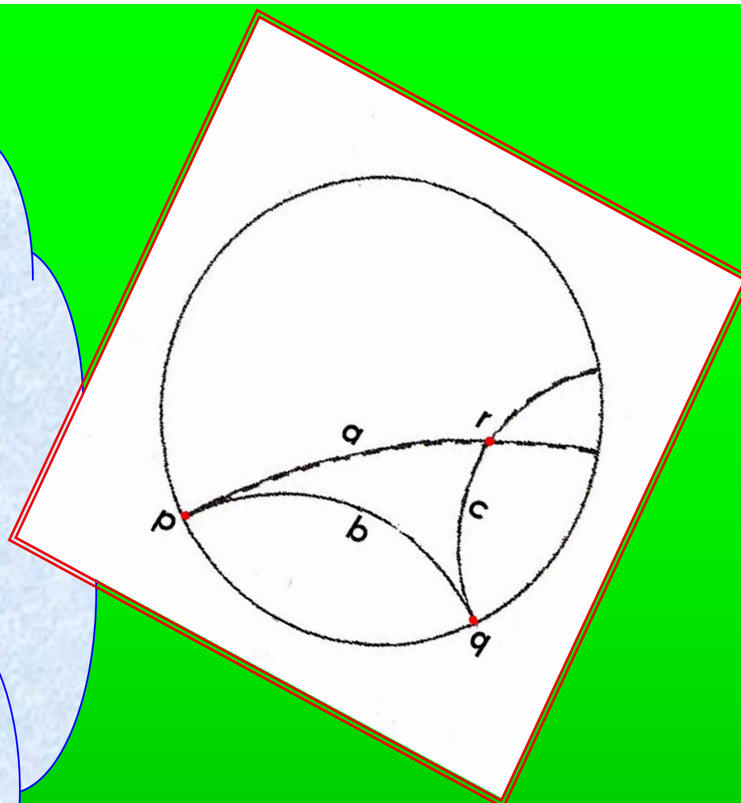
***La respuesta es no.***

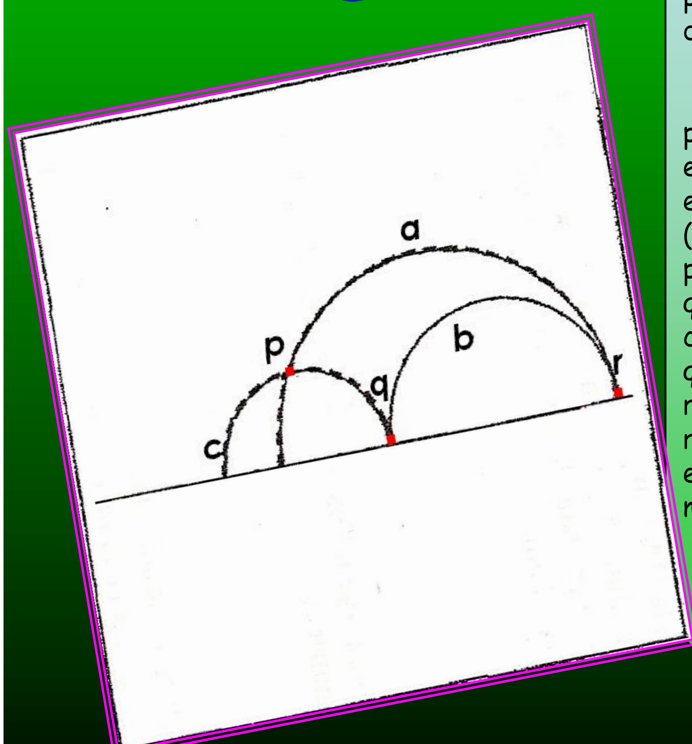


Afortunadamente la curvatura de la Tierra es demasiado grande, tanto que nos permite colocar los rieles de las vías del tren en forma paralela durante un largo camino; es más, es tan generosa que en ella los arquitectos pueden diseñar casas sobre un terreno plano, además de que estas pueden ser construidas en dicho terreno.

***Así que la próxima vez que vayas de un lugar a otro y pienses que lo haces en línea recta, recuerda que tal vez te encuentres caminando sobre una geodésica.***

Las siguientes dos imágenes son ejemplos de triángulos en otros modelos distintos al plano y la esfera. Los triángulos están formados por la intersección de las rectas ***a*, *b*** y ***c*** en los puntos ***p*, *q*** y ***r*** de color **rojo** en ambas figuras.




Así como en nuestro ejemplo trabajamos sobre un cuerpo esférico, como la naranja, existen otras cuerpos en los que también se puede realizar geometría, sólo que las definiciones de líneas cambian en cada uno.

Existen otros tipos de geometrías distintas a la plana en donde las condiciones cambian. En efecto esto es posible, porque al introducir los elementos con los que se trabaja regularmente (puntos, rectas, planos, etcétera), no tiene porque hacerse alusión a la descripción de los que comúnmente conocemos, basta únicamente con suponer la existencia de algunos objetos que se nombren con dichas palabras, cuyas relaciones cumplan el sistema dado de axiomas o reglas mencionados en los primeros párrafos de este artículo. Aquí te mostramos algunos modelos de estas geometrías.

El niño no es una botella que hay que llenar, sino un fuego que es preciso encender.

*Michel Eyquem de Montaigne*


Geometría Fractal
De tal palo,
tal astilla.
¿Formas infinitas
en el cuerpo
humano?

## ¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña?

Este es el título de un artículo que publicó el matemático Benoit Mandelbrot en la revista científica estadounidense *Science.* La respuesta que dio fue: “depende del tipo de medición que se haga”. Los libros dan cifras entre 7200 y 8000 kilómetros. Mandelbrot dice que: “las formas y los patrones naturales se caracterizan por no tener una longitud específica”.

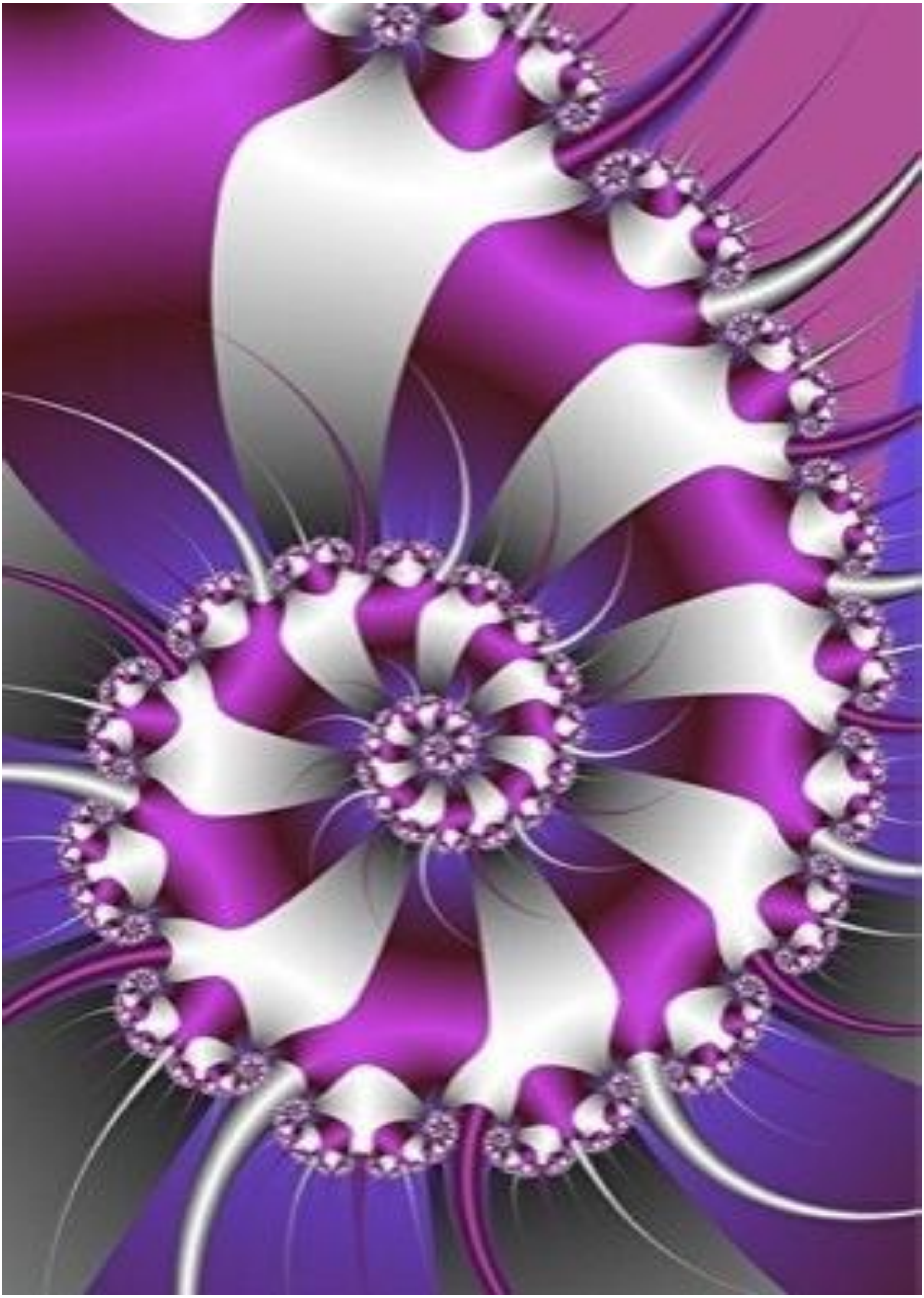
Mandelbrot

Si se mide la costa en los mapas con un compás donde la abertura de éste sea equivalente a 500 kilómetros, se obtiene una extensión de 2600 kilómetros. En cambio, con una diferencia entre las puntas del compás equivalente a 17 kilómetros se tiene una extensión de 8640 kilómetros. Entre más preciso sea el instrumento de medición, más grande se vuelve la longitud. Es justamente eso lo que distingue a las líneas costeras de otras figuras como los círculos o los triángulos.

Por ejemplo, imaginemos que una porción de esa costa era recta. Supongamos también que la medimos con una regla que utilizamos regularmente para medir y que nos da una longitud de la porción de costa igual a 1 metro. El problema de esta medición surge ya que si nos acercamos un poco más de la distancia a la que originalmente hicimos la medición, descubriremos que esa línea recta no es tan recta, sino que está constituida de pequeños granitos de arena todos desordenados respecto a la rectitud que habíamos observado. De esa forma, ya no será tan fácil medir de nuevo, pero descubriremos que cada vez que intentemos medir la longitud, y nos acerquemos al objeto en cuestión, su longitud resultara ser cada vez mayor de lo que era aparentemente, es más, puede ser que nunca termine este proceso.


Veamos otros ejemplos donde sucede esto.

## Formas infinitas en la biología y en el cuerpo humano



A simple vista, la rama de un helecho, parece tener formas triangulares, sin embargo, podemos observar que esta dividida en subramas que son copia de la original, y que las subramas también están divididas en otras que son copias de la principal, es decir, si utilizamos una lupa, podríamos ver que el proceso se repite conforme la potencia de la lupa aumenta,  por lo que no pueden ser triángulos.

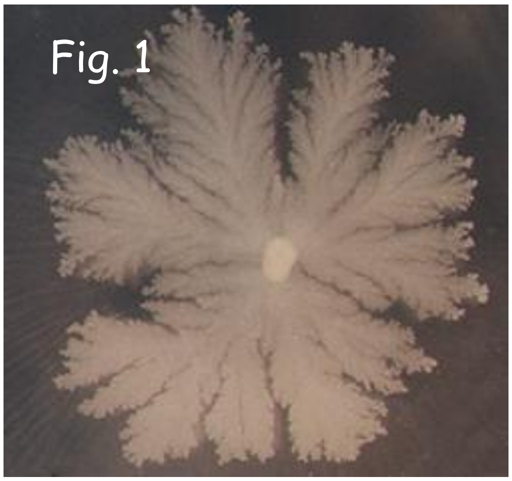
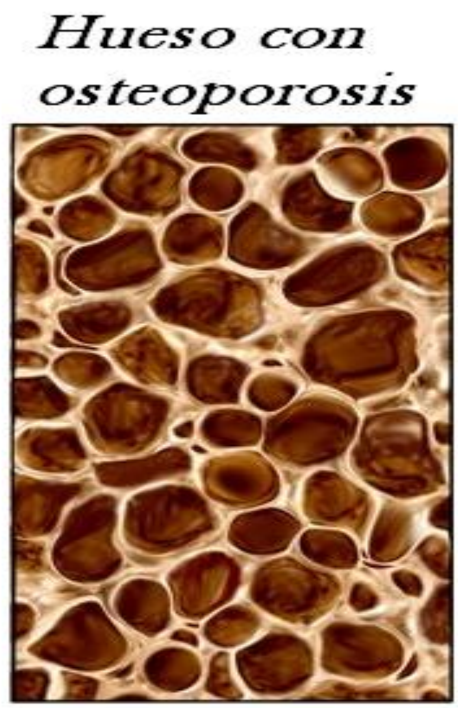


Fig. 1

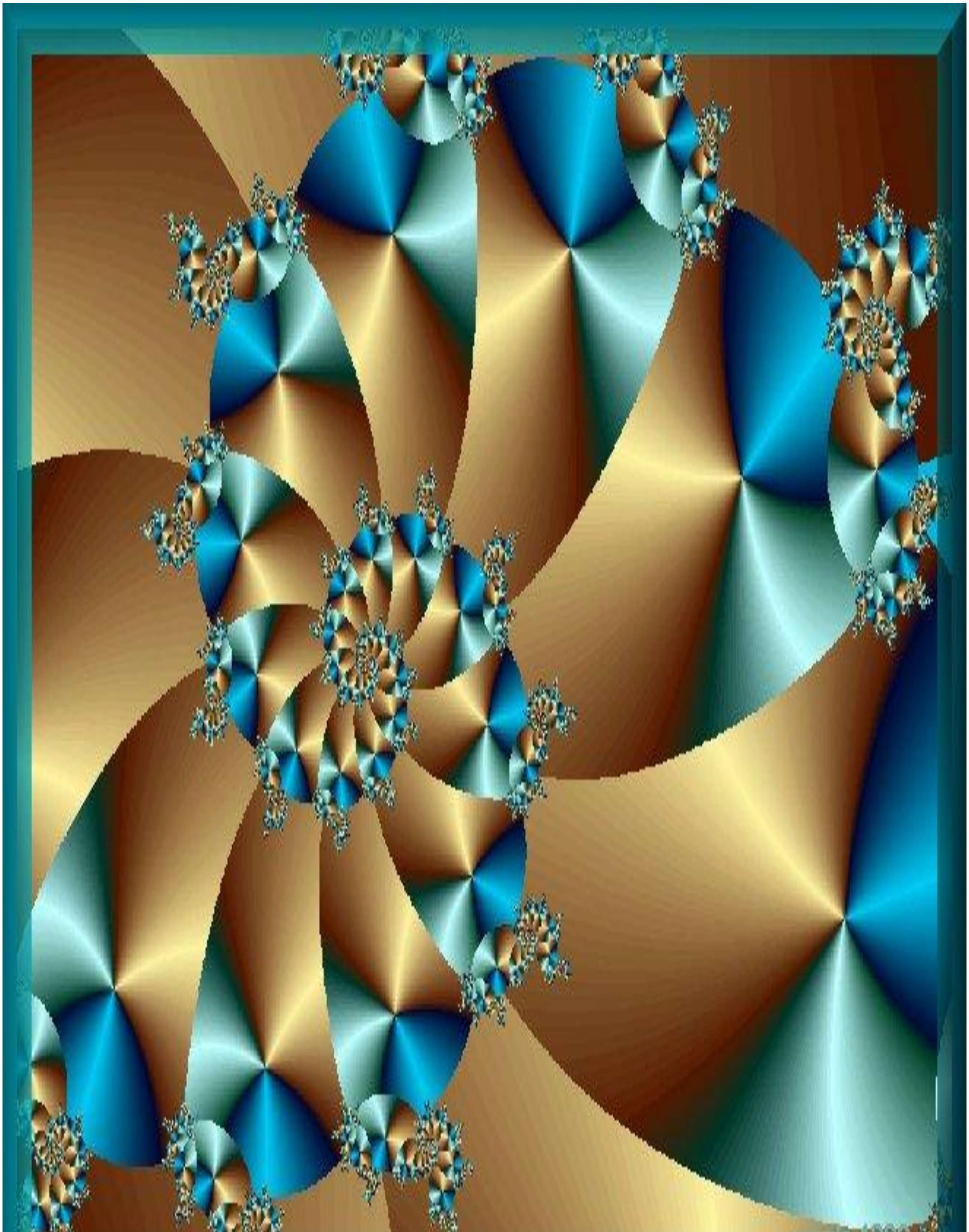
Existen otras estructuras biológicas complejas que no pueden ser modeladas con formas simples, como líneas, círculos, esferas, polígonos, etc. Ejemplo de ello son las colonias de bacterias (Fig. 1), donde en su contorno sucede algo similar al ejemplo de la costa. Dentro del cuerpo humano existen también estructuras, como la red vascular, el árbol bronquial, la red de neuronas (Fig. 2), la mucosa intestinal, la disposición de las glándulas

Fig. 2

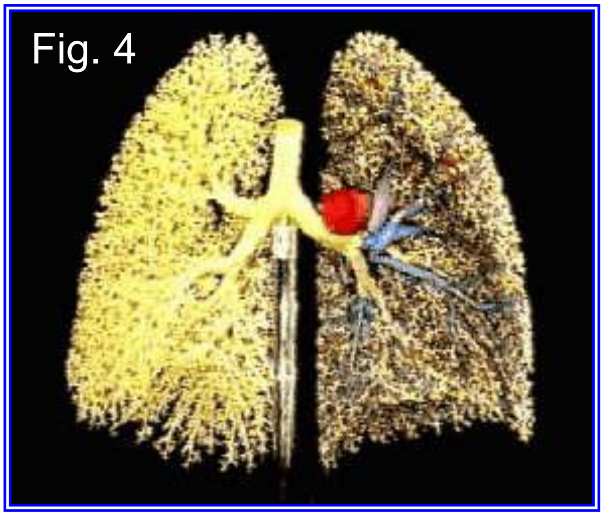
Hoy en día, la osteoporosis es una enfermedad que representa peligro para el ser humano, quizá con más frecuencia en las mujeres que en los varones. Esta enfermedad mediante un análisis en la textura de los huesos, ya que es en el sistema óseo donde la enfermedad ataca. Ésta, necesita tiempo para que ser detectada. La alteración en la estructura ósea debe estar muy avanzada, por lo que es importante detectarla a tiempo. En la siguiente imagen, mostramos un parte de un hueso sano y de uno portador de dicha enfermedad. En éste, podemos ver una gran cantidad de huecos, por  lo que se hace sensible para soportar fracturas y recuperarse. Similar a lo que sucede con la rama del helecho, en el hueso enfermo, entre los huecos que se ven, existen otros huecos que no podemos observar, y entre estos nuevos huecos, hay más huecos, es decir, entre más nos acerquemos a la superficie del hueso, más huecos encontraremos.



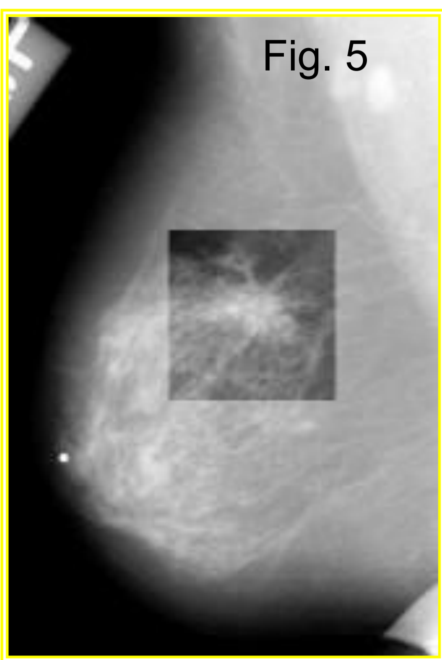

Entre otros procesos semejantes dentro de la anatomía humana tenemos: la distribución regional de sangre en los pulmones, la estructura alveolar pulmonar (Fig. 4), el patrón parenquimatoso



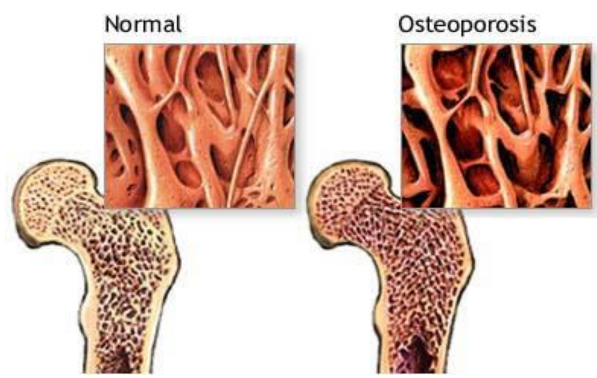
en la mamografía (Fig. 5) (estudio que se practica comúnmente en las mujeres para la detección de cáncer de mama), la heterogeneidad en el flujo sanguíneo regional al miocardio, la distribución de las patas de los artrópodos y la superficie de las proteínas.




Aunque pueda parecer increíble, este tipo de cuerpos geométricos estudiados en matemáticas, se han utilizado en la medicina; han permitido, por ejemplo, diagnosticar el desarrollo de la osteoporosis en los huesos.

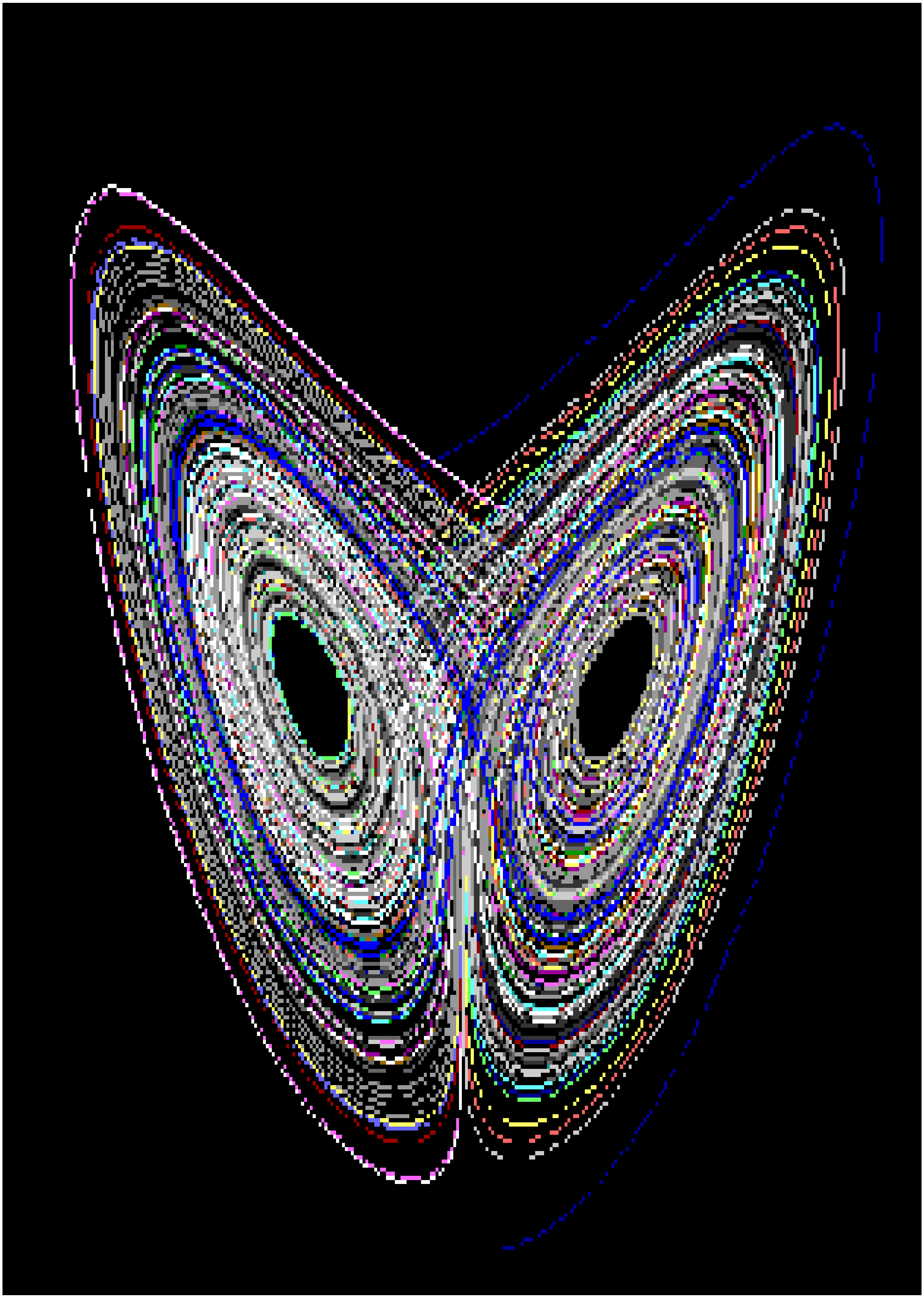



Un grupo de doctores comparó texturas de hueso mediante un programa de computación. El proceso, explicado de forma simple, hace lo siguiente: se toma una muestra de la textura de un hueso enfermo y se almacena en la memoria del programa. Luego, con los pacientes a los que se piensa son propensos a sufrir la enfermedad, se les toma una muestra de su hueso en estado sano. Después, el programa acelera la formación de huecos en el hueso sano, para obtener una imagen del estado en que se encontrará éste después de varios años. Con esto, la computadora compara las texturas de ambas muestras, es decir, la del hueso enfermo y la del hueso al que se le hizo el proceso de aceleración mediante la computadora, y así puede detectarse la presencia de la enfermedad prematuramente, ya que se puede hacer una aproximación con técnicas de cómo evoluciona esa textura tomada como muestra del paciente y ver que tanto se acerca a la textura de un hueso enfermo.




Con estas mismas técnicas se estudia la posibilidad de detectar prematuramente tumores cancerígenos; de aquí la importancia de estos cuerpos y, de conocer más sobre el comportamiento de dichos.

A este tipo de formas geométricas, donde entre más cerca de ella estemos, más difícil se vuelve su medición, ya que aparecen formas similares más pequeñas y difíciles de observar a simple vista, en matemáticas le llamamos *fractales*, y son estudiados mediante la geometría fractal. Por ejemplo: la línea costera, la rama de un helecho, un hueso con osteoporosis, una colonia de bacterias **y las imágenes intermedias dentro de este capitulo.**



## *¿Qué es un fractal?*

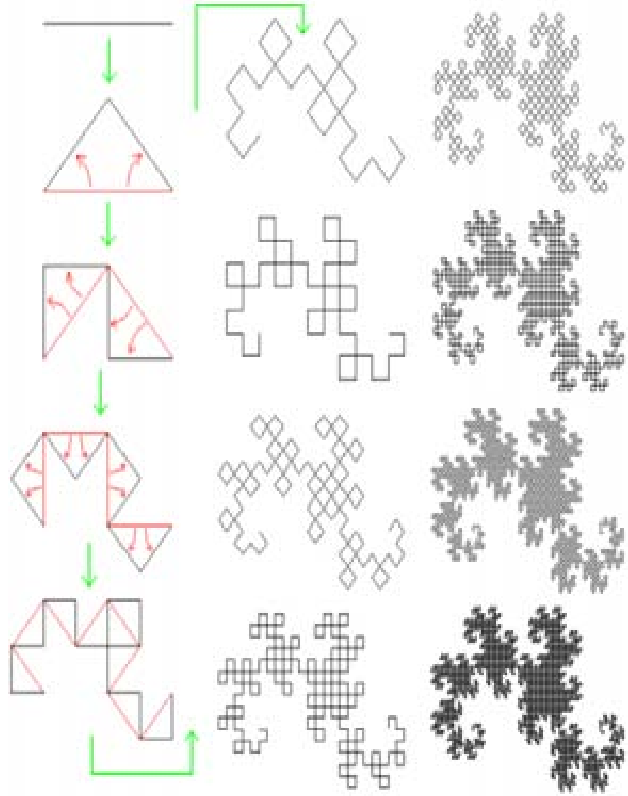
Consideremos un cuerpo fractal como un cuerpo geométrico distinto; en realidad, como un cuerpo geométrico infinito.

La geometría clásica solamente se ocupa de las figuras y cuerpos como el círculo o la esfera, el cuadrado y el cubo. Pero la realidad es diferente. Existen figuras planas con forma irregular en donde no es sencillo calcular el área que ésta ocupa en el plano. Un simple copo de nieve no es redondo, las nubes no son esferas, las montañas no son cubos y los bordes no son lisos. Esta observación llevó al matemático Benoit Mandelbrot a buscar otra geometría; entonces desarrolló un nuevo concepto y lo nombró *fractal*, a partir del significado en latín de esta palabra. *Fractal* significa fracturado fragmentado o quebrado. Además se dio cuenta que en la naturaleza una característica muy importante es el parecido de las cosas a sí mismas; si uno ve la forma y no el tamaño, la rama se parece al árbol completo, el brazo de la rama a la rama, las montañas se parecen a los riscos, los riscos a las rocas, las rocas a los granos de arena.

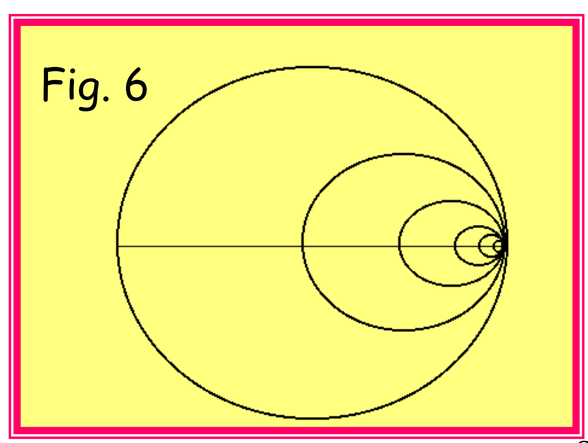
De este modo, surge la geometría fractal de Mandelbrot, donde las figuras se distinguen porque se parecen a sí mismas. Contrario a las figuras de la geometría clásica, que se definen mediante propiedades, los llamados fractales se definen a partir de un proceso de construcción.

Para construirlos, uno va paso a paso. Modificamos, por ejemplo, una línea recta con algún patrón específico. Con el resultado se repite el proceso una vez más y así sucesivamente. Un ejemplo de esto es la "*curva del dragón*"

### *Curva del dragón*

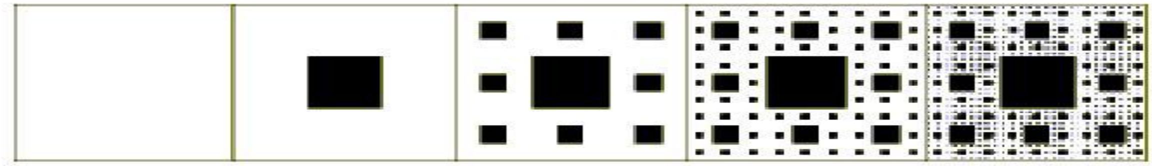


Tomemos una colección de circunferencias de tal manera que, se coloque una sobre el radio de la otra, para servir como diámetro de la pequeña. Después, en la pequeña colocamos una tercera circunferencia en su radio (Fig. 6), y así sucesivamente una cantidad infinita de veces. Al considerar todas las circunferencias como una sola figura y no como independientes, podemos decir que esto es un fractal, ya que su área es calculable, dado que será semejante al área de la mayor, sin embargo, su perímetro será infinito, debido a que el proceso nunca termina.




Esponja de Menguer

***Construcción de la alfombra de Sierpinski***



***Paso 1 Semilla*** ***Paso 2*** ***Paso 3*** ***Paso 4*** ***Paso 5***

Fig. 8

Veamos varios ejemplos de objetos que son fractales, antes de entrar en más detalles. Pero antes de analizarlos, es necesario introducir un concepto nuevo pero de gran importancia para la construcción de fractales: la *iteración*. Una iteración es la repetición de algo. En geometría fractal, es la repetición de una operación un número infinito de veces. De esta manera los fractales se generan mediante la iteración de un patrón geométrico establecido. Uno de los mejores casos para familiarizarse con el concepto de iteración son *el triangulo (Fig. 7) y la alfombra de Sierpinski (Fig. 8)*, construido por Waclaw Sierpinski (1882 – 1969).

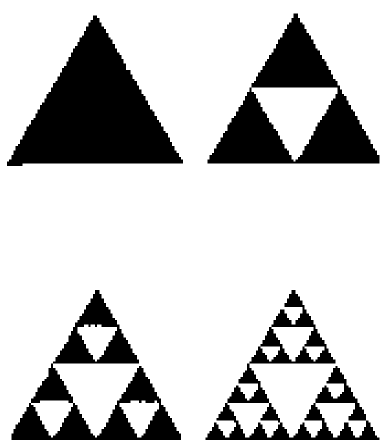


Fig. 7

En el triángulo podemos observar que el proceso iterado a seguir es el de colocar un triángulo formado por los puntos medios de cada lado del original. En los triángulos nuevos hacemos lo mismo y así sucesivamente. Mientras que en la alfombra, consiste colocar un cuadrado y rodearlo con cuadrados pequeños, semejantes entre sí. A partir de esta alfombra tan peculiar se construye la *Esponja de Menger*. En los dos casos se parte de una figura a la que se denomina *semilla*.

## *Copo de nieve*

En 1904, Helge Von Koch (1870 – 1924), definió *la curva de Koch.* En ella el procedimiento es el siguiente: trazamos una línea recta, la dividimos en tres partes iguales y en el tercio central, levantamos un triangulo equilátero, como se ve en la Fig. 9. después el proceso se repite varias veces en cada trozo de línea nuevo

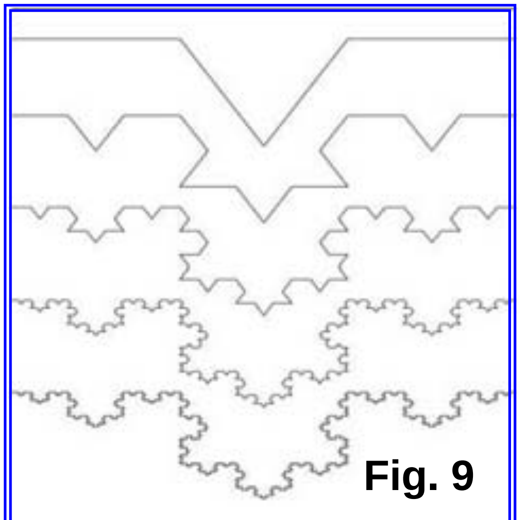


**Fig. 9**

En la Fig. 4, observamos una imagen conocida como el *Copo de Nieve de Koch* o la *Isla triada de Koch*. La semilla o paso 1 en esta imagen, es un triangulo equilátero. Después, mediante el mismo proceso utilizado en la curva de Koch, es decir, se

divide cada lado en tres partes iguales, de tal forma que en el tercio que se encuentra a la mitad del segmento de recta se coloca un triángulo semejante al primero.

En el copo de nieve, cuando la iteración avanzó considerablemente, la figura se asemejará a un círculo, dado que los triángulos se colocan infinitamente. Esto ayuda a reafirmar el concepto de área finita y perímetro infinito. Mientras el copo puede estar dentro de una circunferencia, el perímetro seguirá aumentando porque el proceso de colocar triángulos es infinito.

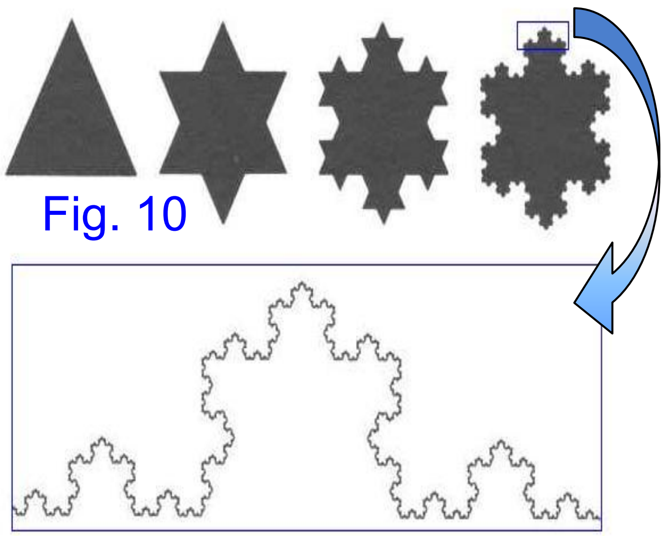
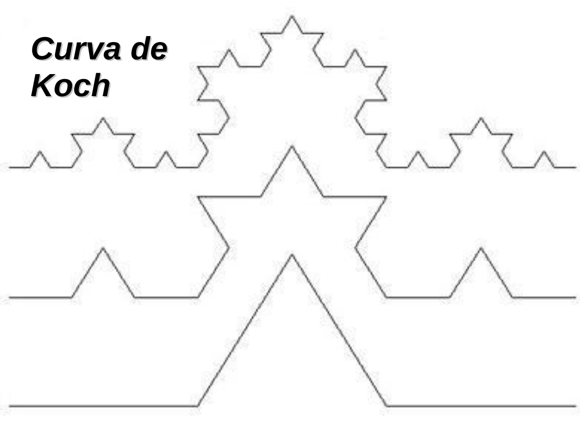


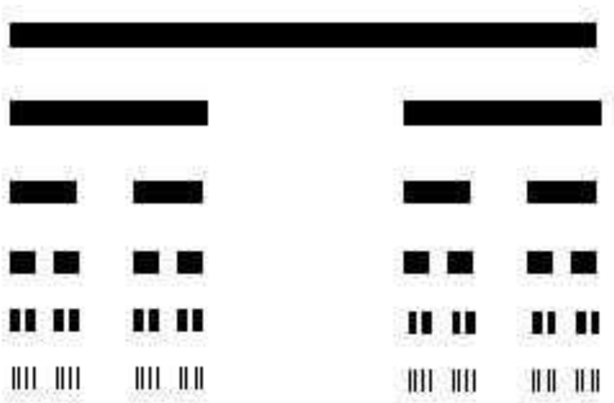
Fig. 10

Para medir este tipo de formas, como el copo de nieve, la costa de Gran Bretaña, las nubes, árboles, o los fractales aquí mostrados, es necesario introducir nuevos conceptos geométricos distintos a los comúnmente conocidos. Hemos visto que un fractal está formado por elementos cada vez más pequeños, por ello es complicado calcular su perímetro. Si deseamos medirlo, la lógica nos dice que podemos utilizar un instrumento para medir líneas (una regla, una cinta métrica, etcétera), sin embargo, siempre existirán objetos más pequeños difíciles de medir.

Por ejemplo en la mencionada *Curva de Koch*; en cada paso en la generación de ésta aumenta en un tercio la longitud de la semilla. Así, la longitud de la figura aumenta de manera indefinida. Contrario a lo que sucede en el *Conjunto de Cantor.*



En el *Conjunto de Cantor* la operación iterada que se realiza es la siguiente: se comienza con un segmento de recta, se divide en tres partes iguales, se elimina el tercio central obteniendo dos nuevos segmentos de rectas.



***Conjunto de Cantor***

Estos nuevos segmentos son divididos en tres partes iguales y se elimina el tercio central, así sucesivamente.

Tomemos estos dos casos y veamos por qué la *curva de Koch* es un fractal y el *Conjunto de Cantor* no lo es, aun cuando está generado mediante un proceso iterado. Pero ante debemos tratar con dimensión de un fractal.

Sabemos que en geometría clásica un segmento de recta tiene dimensión 1 (el largo), un cuadrado tiene dimensión 2 (largo y ancho) y un cubo tiene dimensión 3 (largo ancho y alto). Por razones que hemos observado, podríamos inferir intuitivamente que la dimensión de un fractal, es un número entre 1 y 2. Sabemos que no es 1, ya que podríamos medirla con un instrumento tal como una regla pero no podemos. Y sabemos que no es 2 porque solo cuenta con la longitud del *largo* y carece de un *ancho.*

## *Dimensión fractal*

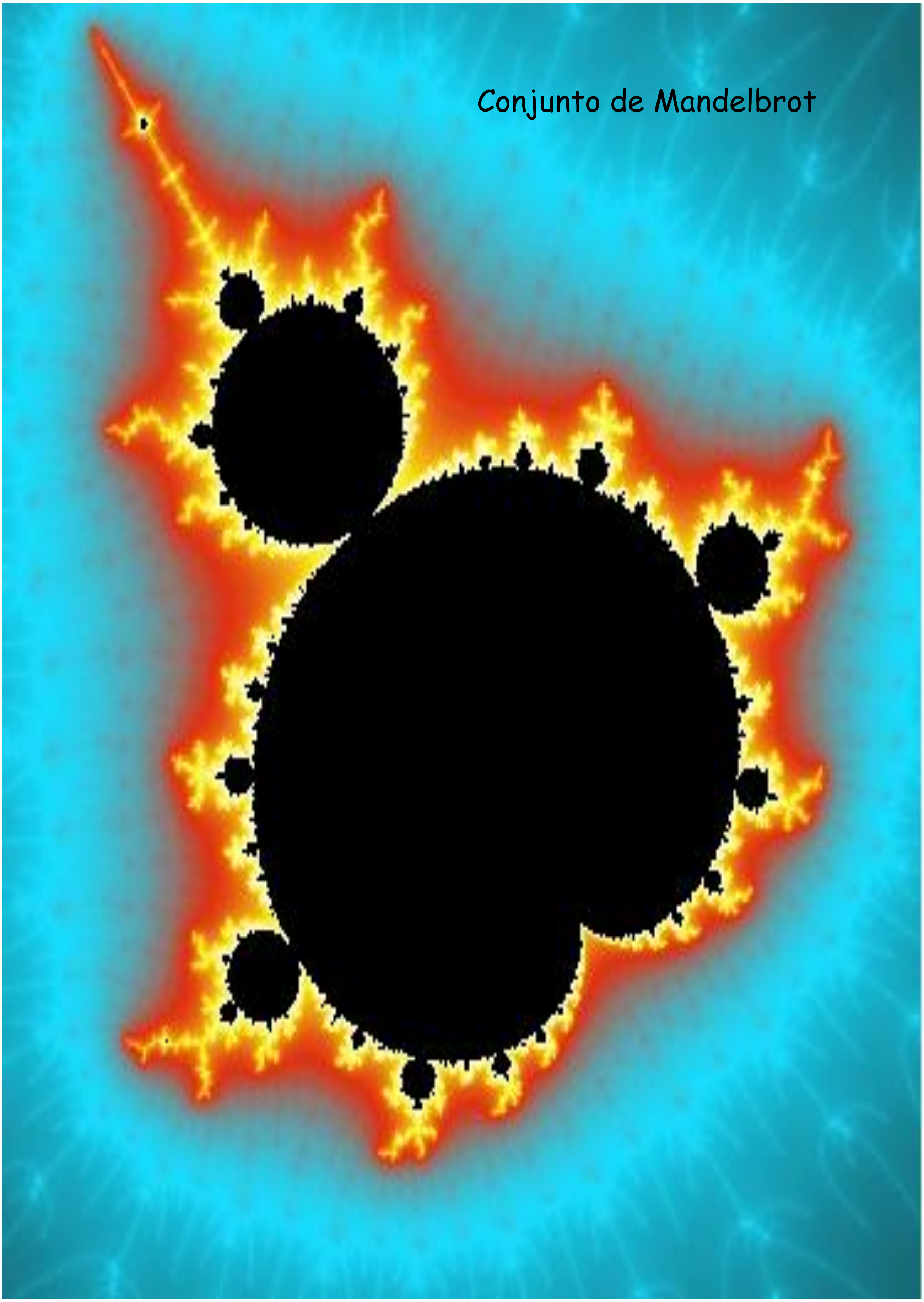
Cuando deseamos medir una línea, lo que hacemos es tomar un instrumento que se encuentra dividido en partes iguales (metros, decímetros, centímetros, milímetros, etc.), si la medida arrojada es de 53 metros, quiere decir que se necesitan 53 segmentos de línea cada uno con longitud de 1 metro, para cubrirla.

Si lo que queremos medir es la superficie o área que tiene un terreno, lo que realizamos es medir el largo y ancho para el resultado expresarlo en metros cuadrados. Si el terreno mide 90 metros cuadrados, significa que se necesitan 90 cuadrados cuyo lado tenga longitud 1 metro para cubrir todo el terreno.

Ahora bien, si lo deseado es medir la capacidad de un contenedor de agua, lo que medimos es el ancho, el largo y el alto, y el resultado se expresa en metros cúbicos. Si dicho contenedor tiene una capacidad de 200 metros cúbicos, significa que son necesarios 200 cubos que mida 1 metro por lado para llenar el contenedor. Utilicemos la misma idea para medir longitud con geometría clásica, para encontrar la *dimensión fractal*.

Como hemos visto, el área o superficie de un fractal es finita, es decir, tiene limites. Sin embargo, por extraño que se escuche, su perímetro es infinito, es decir, no tiene limites. Estas dos características en los fractales, son esenciales para comprender su estructura.


Por medio de un razonamiento matemático, Hausdorff (1868 – 1942) y Besicovitch (1891 – 1970), dos matemáticos brillantes, dedujeron en base a lo mencionado en los párrafos anteriores que, la dimensión de un fractal se encuentra entre


Conjunto de Mandelbrot

una y dos dimensiones, es decir, debido a que son generados mediante un proceso de iteración, su perímetro no termina de crecer, por lo que el fractal no puede ser medido con un instrumento para una dimensión, como una regla o un metro. Entonces se requiere algo superior, una unidad de medida en dos dimensiones, ya sean centímetros cuadrados, metros cuadrados, etcétera. Sin embargo, el perímetro no deja de ser una línea, ¿cómo medir una línea en metros cuadrados? ¡No se puede! *Por lo tanto concluimos que: la dimensión de un fractal es un número entre 1 y 2.*

De esta manera podemos observar que, en el conjunto de Cantor se comienza con una semilla de dimensión 1(una línea) y conforme el proceso avanza, esta semilla disminuye en un tercio. Así pues, cuando la iteración ha avanzado considerablemente, se complica medir la longitud, dado que tiene elementos más pequeños que escapan de la medición, por ello la dimensión de la figura es menor a 1, es decir, se encuentra entre 1 y 0, por lo que no cumple con la definición de dimensión fractal. Contrario a lo que sucede en la curva de Koch, donde la semilla de dimensión 1, aumenta un tercio en cada paso, así, con el mismo argumento utilizado para el conjunto de Cantor, aquí también se complica la medición de la figura cuando el proceso ha avanzado, entonces, la dimensión de la figura ya es mayor a 1 pero menor que 2. Debido a que cumple con la definición de dimensión fractal se considera uno de ellos.


Debemos decir que los fractales son generados mediante números, que a su vez, se encuentran representados en un plano. Estos se basan en la iteración de varias operaciones matemáticas aplicadas a un número, es decir, la generación de un fractal es la repetición de un cálculo u operación varias veces. Veamos el fractal de la página anterior.

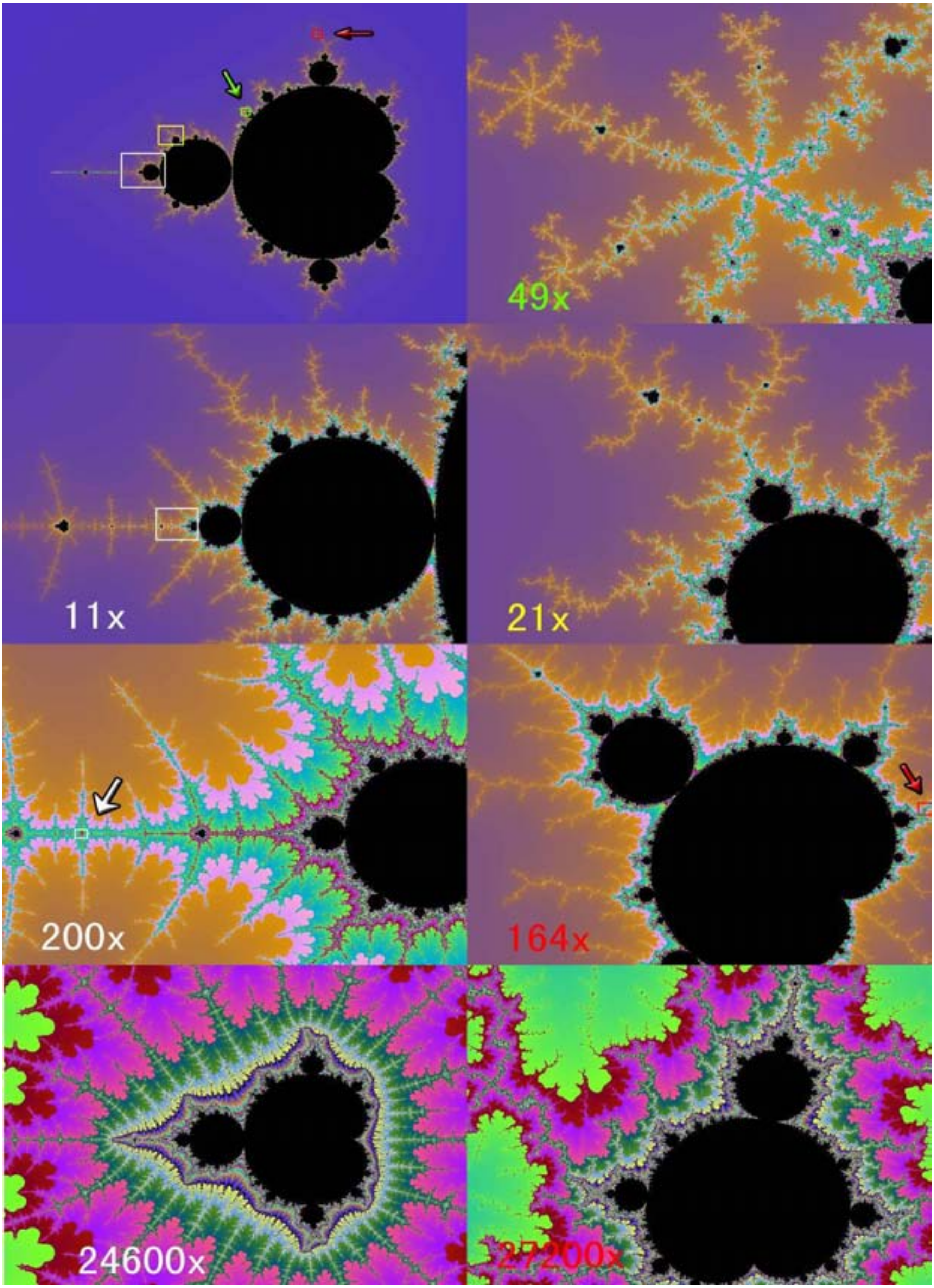
Este fractal es el *Conjunto de Mandelbrot*. Su nombre deriva de su descubridor, el matemático polaco Benoit Mandelbrot, considerado el padre de la Geometría Fractal.

## Fractales y computación

Como ya hemos visto, los fractales están generados mediante números, que crecen según la operación que se aplica en ellos. ¿Cómo es posible encontrar imágenes bellas como las anteriores?

Dado que las computadoras son máquinas poderosas, es decir, pueden realizar cálculos complejos, éstas son de gran utilidad en la generación de imágenes fractales. Sin embargo, las imágenes mostradas en este capítulo, no son exactamente fractales, sino una tenue representación de ellos. Esto se debe a que un fractal tiene un proceso infinito, y una computadora no puede realizar operaciones una cantidad infinita de veces.

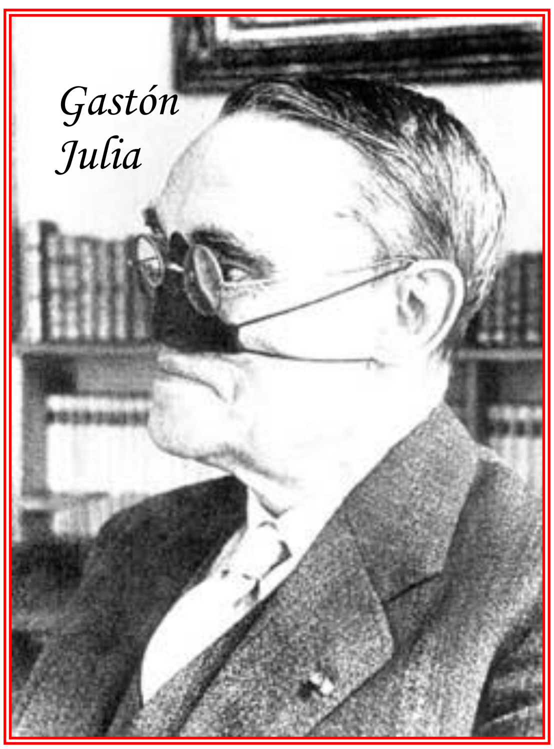
Veamos el caso concreto del Conjunto de Mandelbrot. Aquí, aquellos números que después de cierta cantidad de pasos, se mantienen relativamente pequeños respecto a los demás, son los que pertenecen a dicho conjunto, y se encuentran representados con color negro, como lo muestra la imagen. Los puntos restantes, se dicen que no pertenecen al conjunto, y su color depende del tamaño que adquieren después de la iteración.


49x
11x
21x
200x
164x
24600x
27200x

El *Conjunto de Mandelbrot* es quizá la figura más conocida de la geometría fractal. Una característica importante de este fractal es al ampliar varias veces un recorte de esa figura, se puede observar estructuras iguales a la original. Por lo tanto, alrededor del borde existen una infinidad de *pequeñas* copias de la figura original.

En las figuras de la página anterior, se muestra un acercamiento de diferentes partes del fractal a distintas escalas, aumentando el tamaño de estas pequeñas partes, en las que podemos ratificar las propiedades del conjunto. Los colores de las flechas y de los rectángulos pequeños están relacionados con los de los números que aparecen en la parte inferior izquierda de cada imagen.

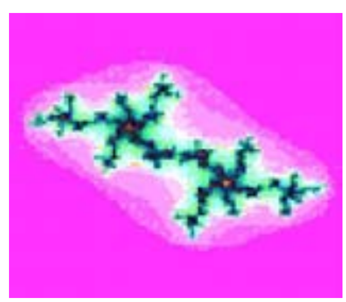
Otro gran matemático, como fue el radicado francés Gastón Maurice Julia (1893 – 1978) estudió estos fenómenos. Él y Mandelbrot han sido los más importantes en la investigación sobre fractales.

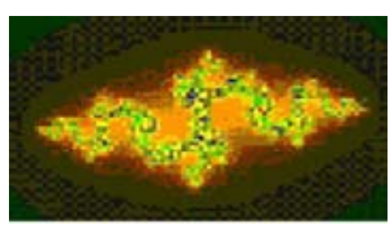



Las tres imágenes inferiores, son ejemplos de algunos de los Conjuntos de Julia, o fractales. Estos son generados mediante un proceso distinto al Mandelbrot. En este caso los puntos son coloreados según el número de iteraciones necesarias para que éste llegue a un valor fijo.

Suele usarse un color especial, a menudo el negro, para representar los puntos o números que no han llegado a ese número deseado, tras una cantidad grande de iteraciones. En general, en los fractales se utiliza el color negro para representar a los números en el plano que crecen demasiado rápido después de aplicarles la operación matemática, aunque en algunas ocasiones cada persona es libre de escoger el color que tendrá el fractal.

## Conjuntos de Julia





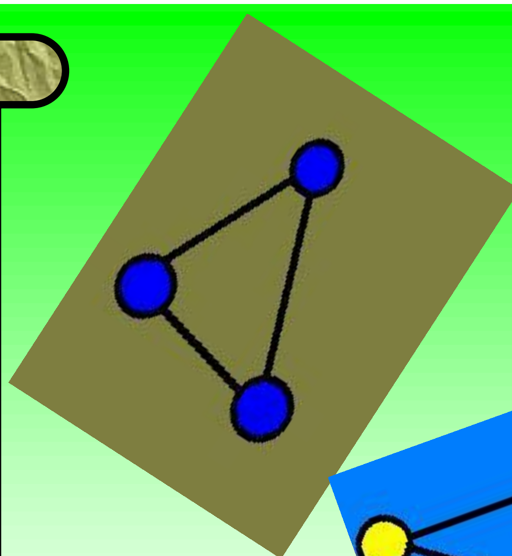
Los matemáticos son como los franceses, todo lo quieren pasar a su idioma.

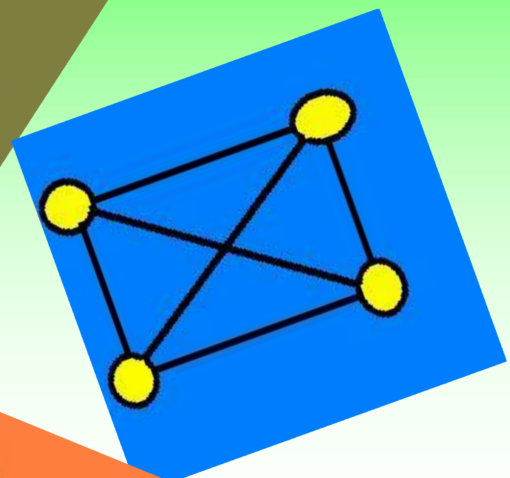
*Johan Wolfgang Goethe*

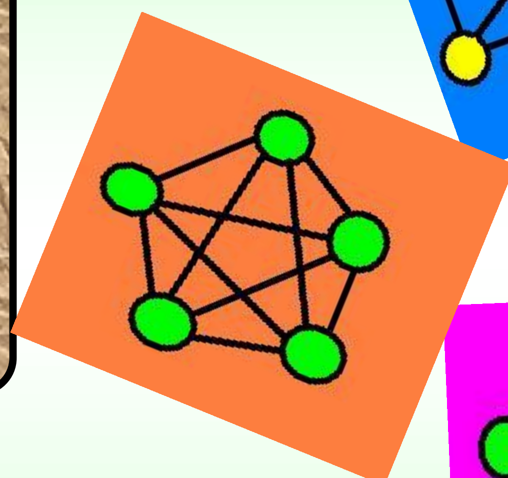
# KÖNIGSBERG.

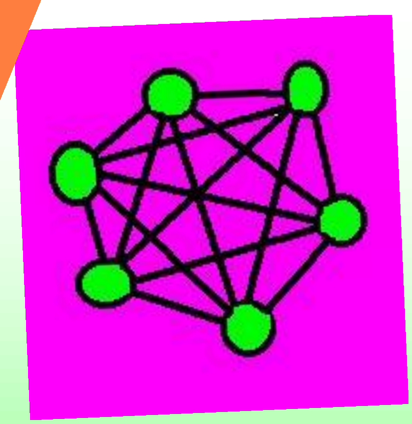
# Una solución matemática.

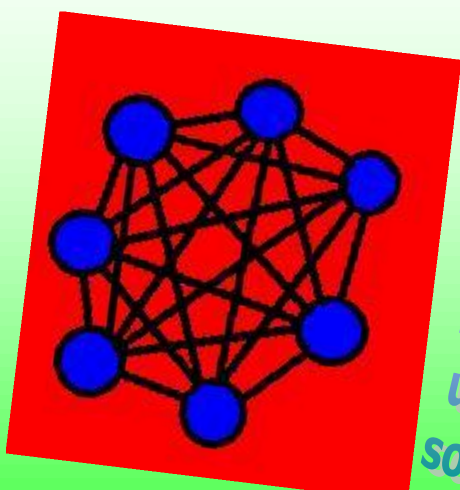
*¿Cuáles de las siguientes figuras puedes recorrer sin despegar el lápiz de la hoja y sin remarcar, es decir, sin pasar más de una vez por cada línea?*











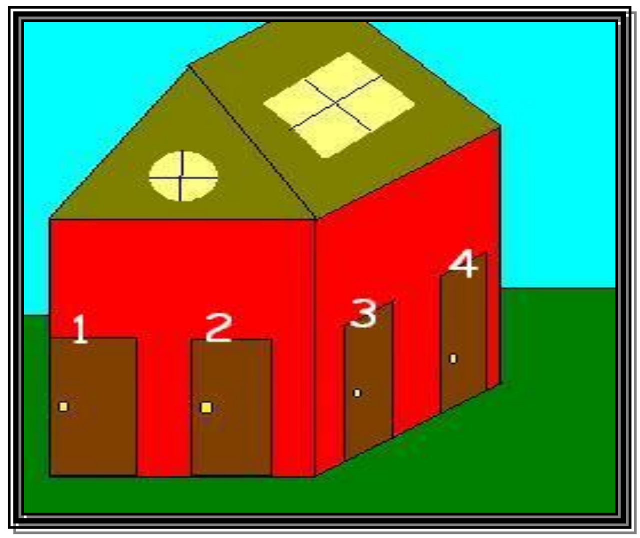
Sólo las figuras que tienen un número impar de puntos son las que se pueden recorrer

**¿Por qué?**

# La calle Euleriana

Por un momento, modifiquemos el nombre a los elementos de las figuras o gráficas de la página anterior. Haremos algunos cambios para no usar puntos ni líneas. En esta ocasión no utilizaremos el termino de gráfica; fijemos nuestra imaginación en una calle, puede ser en la que se encuentra tu casa. Ahora cada casa tendrá el papel de representar un punto de cada grafica, y la cantidad de líneas que inciden o llegan a cada punto será representado por el número de puertas en una casa. Así pues, en lugar de tener una gráfica con líneas y puntos, tendremos una calle y casas con cierto número de puertas.

Imagina que deseas realizar un paseo por algunas o todas las casas de tu calle, de tal manera que tu intención es comenzar en tu propia casa y regresar a ella de nuevo. La única regla es que, una vez utilizada una puerta, ésta se cierra para siempre y no existe manera de abrirla otra vez, sin importar cuantas ocasiones visites a tus vecinos, similar a lo que pasa con las líneas en las gráficas de la página anterior, donde solo se puede pasar el lápiz una sola vez por cada una.

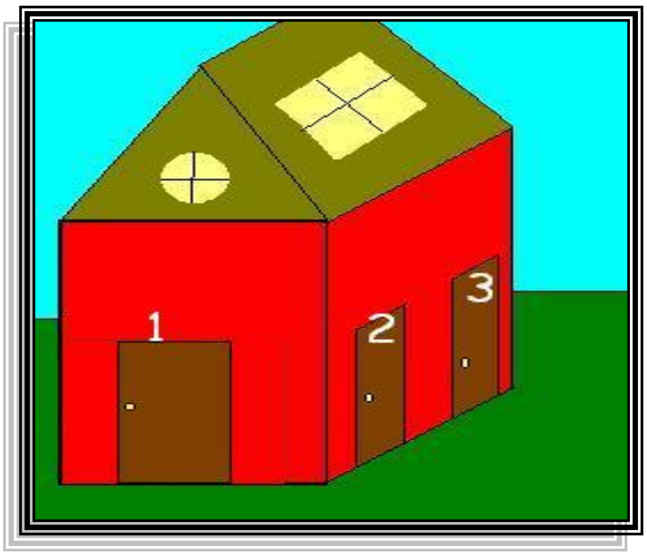



Entonces, lo primero es que tu casa debe tener al menos dos puertas, una de ellas será por donde salgas para iniciar el paseo, y la otra será por donde entres al finalizar el recorrido. Luego, al pasar por la segunda casa, ésta también debe tener al menos dos puertas, una para entrar y una para salir y, así para cada casa que se encuentre dentro del paseo.

*Con esto podemos afirmar que:*

Si el propósito de nuestro camino es salir de casa y regresar a ella, todas las demás casas están obligadas a tener un número par de puertas, ya que por cada puerta utilizada para entrar se necesita una para salir, al menos dos debe tener cada casa.

Sin embargo:
Si el objetivo del recorrido es comenzar en una casa y finalizar en otra distinta, solamente éstas pueden tener un número impar de puertas, ya que las casas que se encuentren como intermedias en el recorrido, deben de tener una cantidad par de puertas, por cada entrada una salida. Esto es porque en la casa inicial utilizaremos una puerta para salir, en caso de regresar a ella, necesitaremos otra para entrar y otra para salir, ya que en esta casa no deseamos terminar el camino, es decir, en esta casa debe haber un número impar de puertas, una que servirá de salida y, en caso de visitarla nuevamente, utilizaremos dos más, una entrada y una salida.



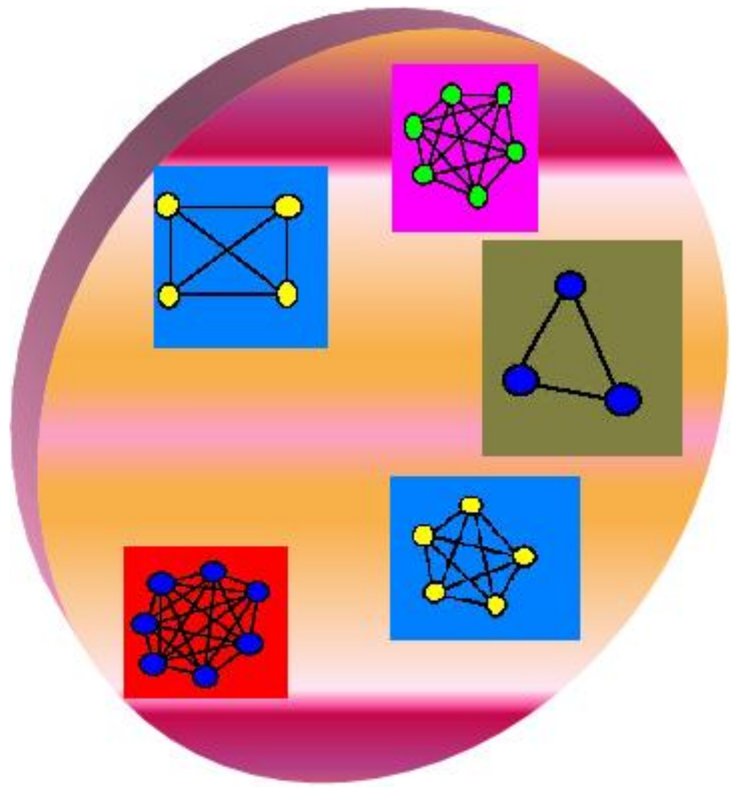

Para la casa donde pretendemos terminar el recorrido sucede lo mismo, La casa debe tener un número impar de puertas, al menos una, para entrar. No obstante, si se desea regresar, deberán existir dos puertas más, una para salir y otra para entrar y terminar el paseo.

Con todo lo que ya hemos visto, ¿podemos responder por qué las graficas o dibujos que se encuentran al inicio de este artículo, que tienen un número impar de vértices o puntos son las únicas que se pueden dibujar sin despegar la punta del lápiz?

Claro que podemos, basta contar las líneas que llegan a cada punto y verificar que efectivamente es un número par.

# Todos contra todos

A continuación te doy un argumento más, con un razonamiento distinto para comprender la respuesta a nuestra primera pregunta.



A estas gráficas (que son las que te mostré al principio), dentro de la Teoría de Gráficas se les conoce con el nombre de *gráficas completas.* Se llaman así porque ya no es posible poner una línea más que una a dos puntos, debido a que cada vértice o punto ya se encuentra unido a todos los puntos restantes excepto a él mismo.

En otras palabras, no es posible aumentar el número de líneas entre puntos porque se encuentran unidos de una de manera muy peculiar: ***todos contra todos.***

Por tanto, como ya comprobamos que cada vértice está unido a los puntos restantes, podemos afirmar que si la gráfica consta de tres puntos o vértices, el número de líneas que llegan a cada vértice, dado que esta unido a todos menos a él mismo, será dos en todos los puntos, que es un número par. Así, si el número de puntos de la grafica es cuatro, las líneas que llegan a cada vértice serán tres en cada punto de la grafica, que es un número impar. Si la gráfica es completa, el número de líneas que inciden en cada punto será el total de puntos de la grafica menos 1.

*Con todo lo dicho sobre gráficas completas, podemos decir:*

***Si la gráfica está formada por un número impar de vértices o puntos, entonces el número total de líneas que inciden en cada punto será un número par para todos, por tanto la gráfica puede ser dibujada sin despegar el lápiz del papel y sin remarcar líneas, ya que en cada punto habrá una salida por cada entrada.***

***Pero, si el total de puntos de la gráfica es un número par, las líneas que llegan a cada punto será un número impar y no podremos dibujarla sin despegar el lápiz del papel. Recuerda, a lo más solo dos punto pueden tener un número impar de líneas que llega a él.***

**Si las gráficas no fueran de la forma. todos contra todos, sólo cuenta el número de líneas que llegan a cada punto, ¡ya sabes que sigue!**

¿Qué piensas si te digo que acabamos de hacer matematicas sin necesidad de utilizar cálculos, sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, etcétera?

Pues así es, lo que hemos visto a lo largo de este ensayo los matemáticos le llamamos Teoría de Gráficas. Y el resultado que aquí encontramos para las gráficas se lo debemos a un matemático llamado Leonhard Euler (1707 – 1783), quien es considerado el padre de esta teoría.


*Leonhard Euler*

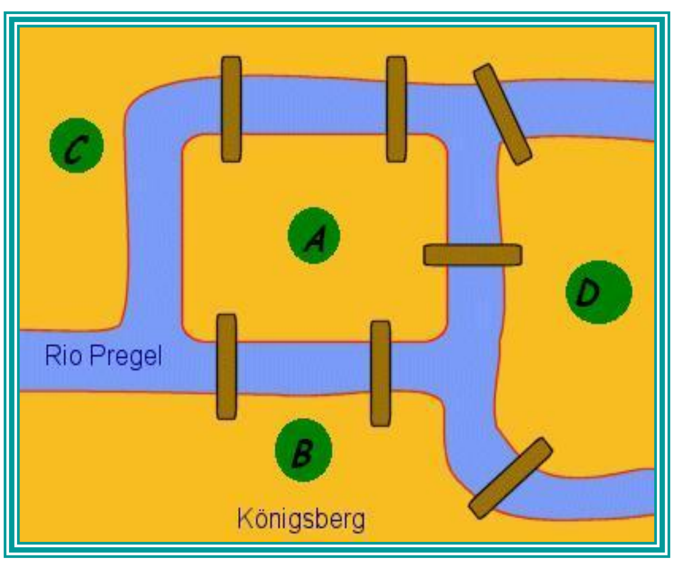
**Leonhard Euler (1707- 1783), fue todo un maestro en conjeturas. Hizo aportaciones sobre hidrostática que había sido estudiada desde Arquímedes. Contribuyó al conocimiento de otras áreas y en ellas empleó su conocimiento y habilidad matemática. En astronomía su teoría lunar fue utilizada para determinar las tablas de movimiento de la luna.**

## *Los siete puentes de Königsberg*

En un pueblo de nombre Königsberg, en Prusia, (hoy Alemania), se encuentra una isla de nombre Knoif (A) rodeada por el río Pregel y conectada por siete puentes con el resto de Konigsberg. Los habitantes se preguntaban si era posible realizar un trayecto recorriendo todos los puentes una sola vez.

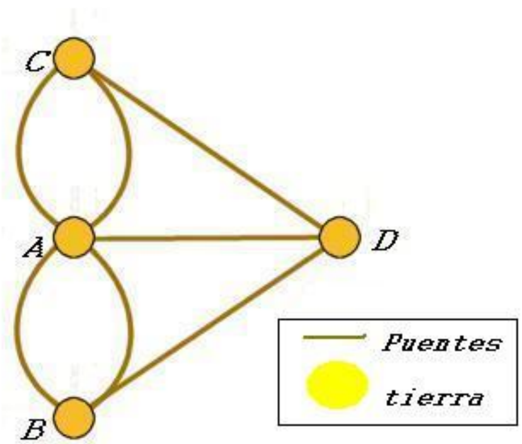
*¿Cómo podría ser el recorrido?*

La solución al problema radica en encontrar un trayecto, alrededor de siete puentes, donde se pase solamente una vez por cada uno. El siguiente mapa muestra un dibujo más simple de los siete puentes e islas en Königsberg.




En 1736 un matemático de nombre Leonhard Euler, publicó: *"Solutio problematis ad Geometriam Situs Pertinentis*", aquí resolvía el problema de los siete puentes de forma general. Este trabajo se considera como el nacimiento de la Teoría de Gráficas, la cual tiene múltiples aplicaciones, en particular en la computacion.

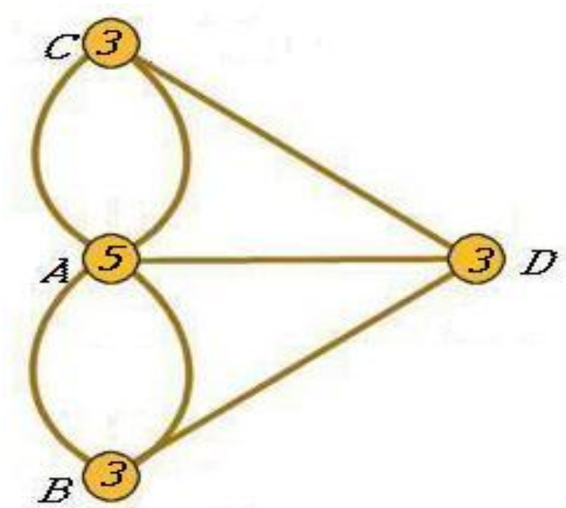
La idea consistió en representar los cuatro lugares terrestres de Konigsberg (A, B, C, D), como puntos o vértices, y a los siete puentes como líneas que los unen entre sí. Así el mapa de Konigsberg puede ser visto como lo muestra la siguiente gráfica:

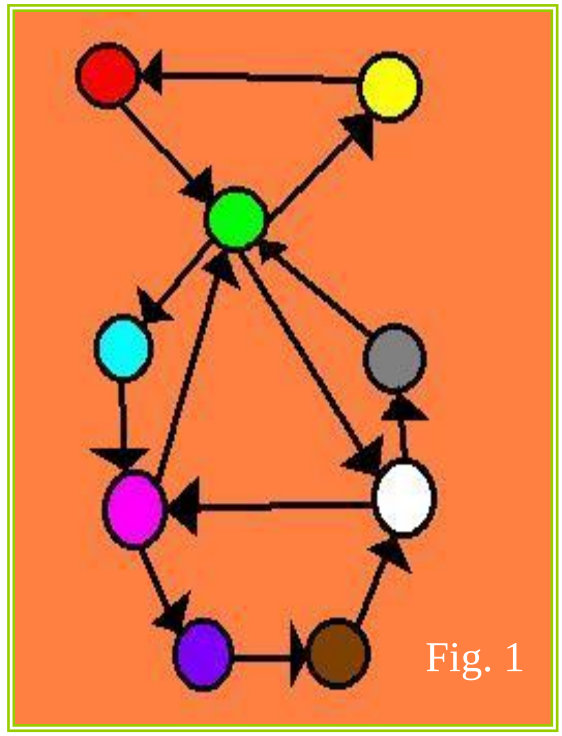



Supongamos que existe un trayecto, el cual recorre los puentes una sola vez, entonces, cada que pasemos por un vértice o punto amarillo intermedio, llegaremos a él por una arista o puente y saldremos por otra distinta. En particular, el número de aristas o puentes que llegan en cada vértice o punto del gráfico, ha de ser un número par, exceptuando quizá los vértices inicial y final del trayecto.

La solución al problema es similar a realizar un recorrido por la calle euleriana, donde iniciamos y terminamos en casas distintas, es decir, en la grafica anterior necesitamos que existan como máximo dos puntos con un número impar de líneas que llegan a él.

En la gráfica de Königsberg los cuatro puntos *A, B, C, D*, tienen un número impar de puentes 5, 3, 3, 3, respectivamente. Así que la solución al problema es que no existe manera de recorrer todos los puentes cruzándolos solo una vez.

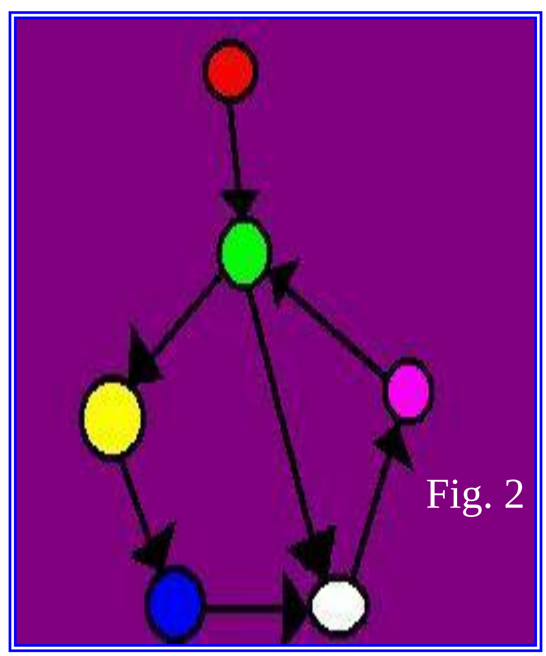


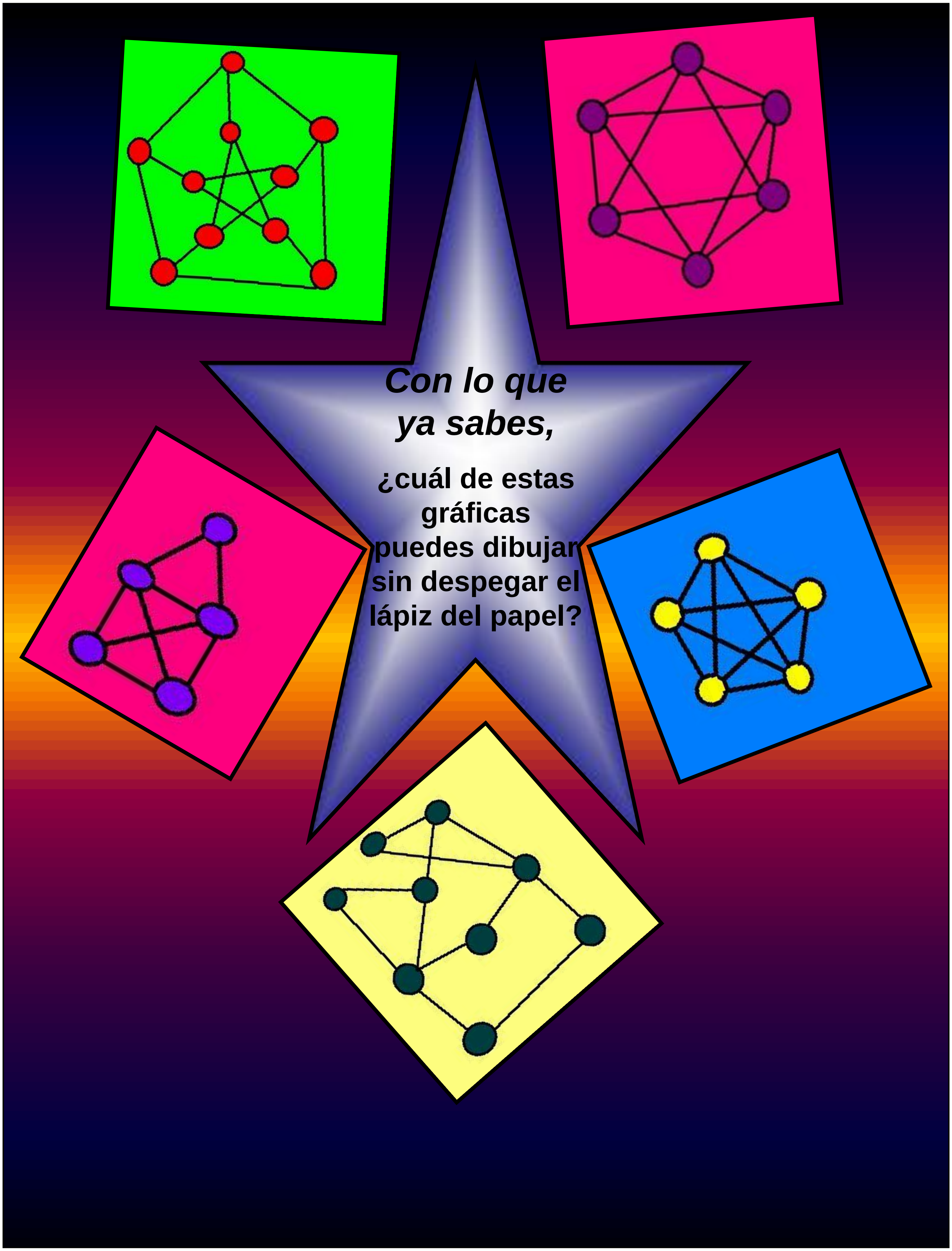




Lo anterior introduce dos nuevos conceptos, que obtuvimos en las primeras páginas de este ensayo, sin saber de ellos. El primero de ellos es el de gráfica *Euleriana,* éste se usa cuando existe un recorrido que inicia y termina en el mismo punto y utiliza cada arista o línea una sola vez. Y el segundo es el de *trayectoria Euleriana*, que es un recorrido que sólo cumple con pasar por todas las aristas una sola vez, sin importar donde inicia y dónde finaliza.

En otras palabras y de una manera menos técnica, los conceptos anteriores nos dicen lo siguiente. Una gráfica es Euleriana si puede ser dibujada sin despegar la punta del lápiz y sin remarcar, iniciando y terminando en el mismo punto. Un ejemplo de esto es la Fig.1, donde podemos hacer un recorrido con el siguiente orden: gris, verde, amarillo, rojo, verde, azul, rosa, verde, blanco, rosa, morado, café, blanco y gris.

Y una trayectoria Eulerina es cuando el dibujo puede ser trazado sin despegar la punta del lápiz sin importar que inicie y termine en distintos puntos, como en la Fig.2, donde el recorrido tiene el orden de: rojo, verde, blanco, rosa, verde, amarillo, azul y blanco.




Con lo que
ya sabes,
¿cuál de estas
gráficas
puedes dibujar
sin despegar el
lápiz del papel?

La ciencia es conocimiento público.
John M. Ziman

# *CONCLUSIONES*

Como pudimos observar a lo largo de este trabajo, es posible introducir conceptos matemáticos no triviales mediante ejemplos que no usan simbología abstracta u operaciones complejas. Hemos tratado de seguir el caso contrario a un libro de texto tradicional donde el sistema es proporcionar primero la definición, pasar a los ejemplos y terminar con ejercicios, que en varias ocasiones son difíciles dado que, los ejemplos anteriores no son suficientes para comprender el concepto. Aquí, nuestro sistema fue: primero proporcionar suficientes ejemplos sin nombrar a los objetos en cuestión con palabras que infieran matematicas; después, dedujimos el concepto. Suponemos que con el contenido del primer capítulo, el lector obtuvo una visión distinta de los números, es decir, observó que no son sólo para sumar, restar, multiplicar, y dividir, sino que existen números interesantes y con propiedades curiosas, como los triangulares, los cuadrados y los pentagonales. También, se hizo mención de acontecimientos históricos para la construcción de algunos conjuntos de números; sin embargo, creemos que es suficiente para que las personas noten que el surgimiento de cada número se debe a necesidades que al hombre se le presentaban.

Dotamos al lector con una herramienta más, como lo es la regla de tres, para enfrentar obstáculos que tengan que ver con la proporciones. Mostramos que las matemáticas se pueden utilizar en casi todas partes, en la biología, en el arte, en la arquitectura y cuerpo humano con la sección áurea; en las nubes, en un copo de nieve, y también en el cuerpo humano con la geometría fractal. Además lo hicimos participe de la utilización de ésta en la medicina, en la detección de la osteoporosis.

Con este trabajo, sugerimos que el poder de las matemáticas está en que son profundamente abstractas y pueden reducir los problemas hasta su esencia; pero que, tratándose de matemáticas elementales, éstas siempre surgen de problemas prácticos. De modo que se pueden encontrar similitudes en cosas que a primera vista parecen no tener algo en común; por ejemplo, entre una abeja, un tallo, una pintura, un halcón, etcétera. Los cálculos que afloran son los mismos y una vez desarrollada la matemática necesaria, se puede utilizar para cualquiera de los cuatro casos. De igual manera desde la perspectiva de las matemáticas, la organización de los horarios de los camiones de basura y los chips de las computadoras son iguales: en ambos casos se trata de encontrar las rutas de conexión más cortas, mediante el uso de algunos conceptos de la Teoría de Gráficas, como grafica euleriana y trayectoria euleriana. Además, observamos que es posible hacer matematicas sin necesidad de usar cálculos complicados.

Con este trabajo, se aportó una ayuda para que el lector, se libere de los prejuicios que tiene acerca de las matematicas. Estos van desde la visión errónea que tiene de lo que es un matemático, hasta qué son y para qué sirven las matematicas.

# NOTAS

## CAPITULO 1

[1] www.native-langujes.org

[2]Hernández, Aroca Francisco. *Matemáticas para todos*. Enciclopedia universal de matemáticas. Vol. 1 España Horizonte. p.p. 8

[3]Hernández, Aroca Francisco. *Matemáticas para todos*. Enciclopedia universal de matemáticas. Vol. 1 España Horizonte. p.p. 33

[4]Hernández, Aroca Francisco. *Matemáticas para todos*. Enciclopedia universal de matemáticas. Vol. 1 España Horizonte. p.p. 10

[5]Hernández, Aroca Francisco. *Matemáticas para todos*. Enciclopedia universal de matemáticas. Vol. 1 España Horizonte. p.p. 20

[6]Hernández, Aroca Francisco. *Matemáticas para todos*. Enciclopedia universal de matemáticas. Vol. 1 España Horizonte. p.p. 18

[7]Hernández, Aroca Francisco. *Matemáticas para todos*. Enciclopedia universal de matemáticas. Vol. 1 España Horizonte. p.p. 11

[8] www.es.wilkipedia.org

[9] Eves, Howard Whitley 1976. *An introducción to the history of mathematics*. Cuarta edición, Editorial holt, rinehart and Winston. p.p. 370

[10] Hernández, Aroca Francisco. *Matemáticas para todos*. Enciclopedia universal de matemáticas. Vol. 1 España Horizonte. p.p. 204

[11]Hernández, Aroca Francisco. *Matemáticas para todos*. Enciclopedia universal de matemáticas. Vol. 1 España Horizonte. p.p. 205

[12]Eves, Howard Whitley 1976. *An introducción to the history of mathematics*. Cuarta edición, Editorial holt, rinehart and Winston. p.p. 62

# *BIBLIOGRAFIA*


Bondy, John Adrián 2007. *Graph Theory: An Anvanced Course*. Ciudad Springer.

Bonell, Carmen 2006. La *divina proporción. Las formas geométricas*. México Alfaomega Ediciones UPC. Segunda edición.

Boyer, Carl B. 1989. *A history of mathematis*. Editorial John Wiley & sons. Segunda edicion.

Cárdenas Humberto. 1990. *Algebra superio*r. México Trillas. Segunda edicion.

Datri, Edgardo 1999. *Geometría y realidad física de Euclides a Riemann*. Argentina EUDEBA.

Doczi, Gyorgy 1996. *The power of limits. El poder de los límites: proporciones armónicas en la naturaleza, el arte y la arquitectura*. Editorial Pax México.

Estrada, G. William Fernando 2004. *Geometría fractal. Conceptos y procedimientos para la construcción de fractales*. Bogota Magisterio.

Estrada, Luis. *La divulgación de las ciencias*. México: UNAM.

Eves, Howard Whitley 1976. *An introducción to the history of mathematics*. Cuarta edición, Editorial holt, rinehart and Winston.

Hernández, Aroca Francisco. *Matemáticas para todos*. Enciclopedia universal de matemáticas. Vol. 1 España Horizonte.

Kline, Morris 1974. Geometría. Páginas 126-136*. Matemáticas en el mundo moderno*. España Blume. Traducción de Guzmán, Ozamis Miguel.

Shively, Levis S. 1996. *Introducción a la geometría moderna*. México Editorial Continental.